UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

C.B.I.

DEPARTAMENTO DE FISICA

SOLUCIONES EXACTAS CON EXPANSION LINEAL EN LA TEORIA COSMOLOGICA DE JORDAN, BRANS Y DICKE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

PABLO CHAUVET ALDUCIN

ASESOR: OCTAVIO OBREGON

MEXICO, D. F., DICIEMBRE DE 1979.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

CBI

DEPARTAMENTO DE FISICA

SOLUCIONES EXACTAS CON EXPANSION LINEAL EN LA TEORIA COSMOLOGICA DE JORDAN, BRANS Y DICKE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

PABLO CHAUVET ALDUCIN

ASESOR: OCTAVIO OBREGON

MEXICO, D. F., DICIEMBRE DE 1979.

Agradezco a mi asesor, Dr. Octavio Obregón, sus consejos y estímulo necesarios para la elaboración de esta tesis.

CONTENIDO

I INTRODUCCION

Dirac (1937), motivado por el análisis de las constantes adimensionales hecho por Eddington, sugiere que la "constante" de gravitación G decrece con la edad t del universo y propone una relación lineal e inversa entre G y t (primera hipótesis de Dirac). Las generalizaciones a la teoría de la gravitación de Einstein, que incluye a $G \sim \phi^{-1}$ como una variable escalar (primera hipótesis) además del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, fueron propuestas por Jordan (1948) e independientemente por Brans y Dicke (1961). Sin embargo, la teoría general de Jordan contiene a la teoría de Brans y Dicke como un caso especial: el principio variacional de la teoría general de Jordan (1968) contiene un parámetro que puede tomar los valores -1, 0 y + 1. Dependiendo de este parámetro uno obtiene tres generalizaciones diferentes de la teoría de Einstein en las que G varía, pero sólo en una de ellas (-1) la ley de la conservación de la materia es válida y en este caso la teoría es idéntica a la Brans y Dicke.

A la fecha la no conservación de la materia parece irreconciliable con los resultados de las investigaciones radiométricas de la radiación de fondo de los 3 K; por esta razón y porque, además, no se han encontrado evidencias experimentales adicionales para invalidarla, la Teoría de Jordan, Brans y Dicke (JBD) sigue aceptándose y su estudio resulta de interés físico.

Las observaciones actuales dejan presuponer que el universo es y ha sido homogéneo e isotrópico. Esto a su vez implica que su contenido puede tratarse como un fluido perfecto, que se define como aquél que tiene en cada punto una velocidad $\bar{v}$ de modo que un observador que se mueva con esta velocidad, ve que el fluido a su alrededor es isotrópico. Las ecuaciones de estado más sencillas y aceptables desde el punto de vista observacional, que se les puede atribuir a dichos fluidos en cosmología, son las llamadas "ecuaciones de estado barotrópicas". Estas son de la forma

$$p = \alpha \rho$$

en donde p es la presión, ρ es la densidad de materia-energía y α es una constante que generalmente se toma entre 0 y 1, pero que también puede ser negativa si por ejemplo, hay creación de partículas.

El elemento de línea correspondiente a la métrica propia de un universo isotrópico y homogéneo, es el de Robertson-Walker. Este contiene una función desconocida del tiempo t, denominada factor de escala $R(t)$ y un parámetro k, que puede tener uno de los siguientes valores 1, 0 y -1. Nosotros nos limitaremos a tratar el caso $k \neq 0$, pues $k = 0$ ya fue trabajado. (Ver Dehnen y Obregón 1972 b).

Por lo general, uno se limita a describir a aquellas etapas de la evolución del universo que resultan más relevantes por la calidad de los procesos físicos que en ellas se verifican, además de que pueden ser indirectamente observados.

Es posible que las épocas menos estudiadas por la falta de datos físicos, denominadas todas ellas con el nombre de "universo muy temprano" puedan tener ecuaciones de estado barotrópicas (Carr, 1975) El discute la formación de hoyos negros en ese período, mediante fluctuaciones en la densidad sobre un fondo friedmaniano en el contexto de la teoría General de Relatividad de -

Einstein con ecuación de estado $p = \alpha\rho$. Zel'dovich (1972) sugirió la ecuación límite $p = \rho$ para describir un gas de bariones frío con interacción fuerte, mientras que Bugrii y Trushevskii (1977) estudiaron un gas formado por nucleones y antinucleones que interactúan relativísticamente y obtuvieron la ecuación de estado $p = (1/5)\rho$ (para temperaturas mayores que 100 Gev).

La finalidad de este trabajo es presentar un conjunto de soluciones cosmológicas exactas de la teoría de JBD (Jordan, Brans y Dicke) para $p = \alpha\rho$ (Chauvet y Obregón, 1979), algunas (para el espacio cerrado y valores particulares de α) fueron encontradas previamente: para un universo de polvo $\alpha = 0$ (Dehnen y Obregón, 1971) y para un universo con creación de partículas por medio de una función específica de la presión y también de la densidad (Obregón y Pimentel, 1978), uno de cuyos resultados es que α debe ser igual a $-2/3$ mientras que el radio de curvatura R es proporcional a t.

Entre las soluciones nuevas aquí mostradas, la correspondiente a la época de radiación (Obregón y Chauvet, 1978) se analiza con más detalle por su relevancia física: ocurre, por ejemplo, la formación del hidrógeno, deuterio y helio primordiales. Es, además, la época que antecede a la de"polvo"que predomina actualmente.

Otra solución interesante, que es exacta, única y explícita en el espacio hiperbólico abierto en la teoría de JBD, porque podría describir a un gas frío de bariones que interactúan fuertemente, se obtiene para $\alpha = 1$. Para todos los demás valores de α las soluciones son para el espacio cerrado y también, hasta donde sabemos, son las únicas soluciones exactas, explícitas y conocidas de la teoría con esta geometría.

Si cualquier época puede ser caracterizada, por lo menos en primera aproximación, por un valor particular de α nuestras soluciones las podrían describir a todas ellas.

II SUPOSICIONES

Bajo las hipótesis de que el universo es y ha sido homogéneo e isotrópico y q cada una de sus épocas puede describirse mediante una ecuación de estado barotrópico ($p = \alpha\rho$), proponemos como parte de la solución, que el factor de escala R del elemento de línea de Robertson-Walker crece linealmente con el tiempo, basándose en el hecho de que $R \sim t$ se vale para $\alpha = 0$.

III ECUACIONES COSMOLOGICAS

El elemento de línea correspondiente a la métrica propia de un universo isotrópico y homogéneo es el Robertson-Walker,

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right] \qquad (1)$$

donde R es el factor de escala y $k = 1, 0, -1$ para el espacio con curvatura positiva, nula o negativa, respectivamente. A partir de dicho elemento uno encuentra las ecuaciones cosmológicas de la teoría escalar-tensorial de JBD

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}\left\{(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p\right\} - \omega\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \qquad (2)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} = \frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}\left\{(1+\omega)\rho - \omega p\right\} - \frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R} \qquad (3)$$

siendo la ecuación de campo para

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi} R^3) = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}(\rho - 3p)R^3 \tag{4}$$

con

$$\phi^{-1} = G\,\frac{(3+2\omega)}{(4+2\omega)} \tag{4a}$$

ω es el parámetro de acoplamiento adimensional de la teoría, G = Go es la constante de gravitación de Newton y los puntos indican derivadas respecto al tiempo.

La ecuación de conservación es

$$\dot{\rho} = -3\dot{R}R^{-1}(\rho + p) \tag{5}$$

IV SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS

La solución de las ecuaciones cosmológicas de JBD, con ecuación de estado $p = p(\rho)$ conocida, consiste en obtener R, ϕ y ρ en función del tiempo t.

Para terminar de integrar a las ecuaciones (2), (3), (4) y (5), puesto que ya conocemos a $R = R(t)$, procedemos de la siguiente manera:

Sustituímos $p = \alpha\rho$ en (5) para encontrar

$$\dot{\rho}\rho^{-1} = -3(1+\alpha)\dot{R}R^{-1}$$

Su integración es inmediata y obtenemos

$$\rho R^{3(1+\alpha)} = C = Cte. \tag{6}$$

Explícitamente, suponiendo que R = At y (6) sustituídos en (4) implican

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}R^3) = \frac{8\pi C\,(1-3\alpha)\,R^3}{(3+2\omega)\,R^{3+3\alpha}}$$

$$= \frac{8\pi(1-3\alpha)C}{(3+2\omega)}\,R^3$$

$$= \frac{8\pi(1-3\alpha)C}{(3+2\omega)\,A^{3\alpha}t^{3\alpha}}$$

cuya primera integral es

$$\dot{\phi} = \frac{8\pi C\,t^{-(2+3\alpha)}}{(3+2\omega)\,A^{3(\alpha+1)}} = B'\,t^{-(2+3\alpha)} \qquad (7)$$

e integrando por segunda vez obtenemos

$$\phi = -B'(1+3\alpha)^{-1}\,t^{-(1+3\alpha)} = B\,t^{-n} \qquad (8)$$

Tanto en (7) como en (8) igualamos a cero las constantes de integración pa preservar la relación $\phi R^{s} = S$, *(s y S son constantes) que cumple la soli ción con* $\alpha = 0$ *(Dehnen y Obregón, 1971).*

La relación entre las constantes B, n y α *es claramente*

$$n = 3\alpha + 1 = -8\pi C\,B^{-1}\,\frac{A^{-3(\alpha+1)}}{(3+2\omega)} \qquad (9)$$

Ahora sustituímos (8), (9) y R = At en (2) para encontrar

$$0 = \frac{-8\pi C(1+n+n\omega)}{(3+2\omega)\,B\,A^{3(1+\alpha)}\,t^2} - \frac{\omega n^2}{t^2} - \frac{n(n+1)}{t^2}$$

$$0 \equiv \left[n(1+n+n\omega) - \omega n^2 - n(n+1)\right]t^{-2}$$

Las mismas sustituciones en (3) dan

$$\left\{-\frac{n}{3}\left(3+[4-n]\omega\right)+n-2\left(\frac{A^2+k}{A^2}\right)\right\}t^{-2}=0$$

es decir

$$A^2=\frac{6k}{n(n-4)\omega-6}\quad,\quad k\neq 0\,. \qquad (10)$$

En resumen, la solución particular completa a las ecuaciones diferenciales d

la teoría de JBD es

$$R=\left(\frac{6k}{n(n-4)\omega-6}\right)^{1/2}t\quad,$$

$$\rho=\frac{C}{R^{n+2}}\quad,$$

o

$$\rho=\frac{-n(3+2\omega)B}{8\pi t^{n+2}}$$

y

$$\phi=Bt^{-n}$$

V CARACTERISTICAS GENERALES Y PARTICULARES DE LAS SOLUCIONES.

La expansión lineal supuesta $R = At$ implica que $A > 0$; de (6), se tiene que $C > 0$ necesariamente; y puesto que $\phi = \left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right) G^{-1} = Bt^{-n}$, B sólo puede ser negativa ($G > 0$) si ω se encuentra en el intervalo $-2 < \omega < -3/2$ que p razones experimentales (véase Shapiro et al, 1972) no es físicamente acepta ble.

La ecuación (9), por tanto, implica que para $\alpha > -1/3$ entonces $n > 0$ y $\omega <$- mientras que si $\alpha < -1/3$ entonces $n < 0$ y $\omega > -3/2$.

Según (8), en nuestras soluciones particulares la "constante de gravitación" decrece sólo si $\alpha < -1/3$; no existe solución para $\alpha = -1/3$. Es posible tener $\alpha < 0$ cuando hay creación de partículas que actúan como fuentes de las ecuaciones cosmológicas (Obregón y Pimentel, 1978, véase también Shäfer y Dehnen, 1976).

El caso particular en que $p = \rho$, sucede que $A^2 = -k$, por lo cual la solución sólo es válida para espacio abierto hiperbólico.

Las etapas mejor conocidas por las cuales ha pasado el universo, son aquellas en la que domina primero la radiación y después la materia. Aquí nos limitaremos a analizar con más detalle la solución para un universo con radiación, puesto que la correspondiente a un universo con polvo ya fué previamente encontrada y discutida por Dehnen y Obregón (1971).

La época dominada por la radiación $(p = (1/3)\rho)$, ó por partículas relativistas que no interactúan, se caracteriza por tener $n = 2$ (véase (9) y por lo tanto $\phi \sim R^2$. Lessner (1974), demostró que en ese caso la ecuación (3) es independiente de las del resto, a diferencia de lo que sucede en la teoría de Einstein cuya ecuación análoga es siempre dependiente. A diferencia de las soluciones encontradas por Dehnen y Obregón (1972 a, b) que son para $n=2$ pero que no satisfacen a la ecuación (3), nuestra solución sí la satisface. Falta aún calcular las consequencias astrofísicas de esta solución.

Explícitamente, tenemos que

$$R = \left(-\frac{3}{3+2\omega}\right)^{1/2} t \qquad (11)$$

$$\phi = -\frac{4\pi}{9}(3+2\omega)\, C\, t^{-2} \qquad (12)$$

Se conluye inmediatamente de (11) que $\omega < -3/2$, lo cual da en (12) $\phi > 0$, puesto que $C > 0$ (ver (6)). Por otro lado $\phi = G^{-1}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right)$ y como G es positiva necesariamente, debe cumplirse además que $\omega < -2$.

La constante C queda determinada en términos de ω a través del valor actual de la densidad de radiación y del radio de curvatura del universo.

VI CONCLUSIONES

Las soluciones que presentamos para la Teoría escalar-tensorial de JBD que está motivada en parte por la primera hipótesis de Dirac, no cumplen con esta hipótesis excepto por la solución con creación de partículas, que también cumple con su segunda hipótesis (ver Obregón y Pimentel, 1978).

Por otra parte, Brans y Dicke originalmente pensaron que de su Teoría se obtendrían soluciones físicas aceptables sólo si la "constante de gravitación" resultaba decreciente con el tiempo. Este no es el caso, pues en nuestras soluciones, la ϕ es decreciente cuando $\alpha > -1/3$ y con $\alpha = 0$ las consequencias astrofísicas son observacionalmente aceptables (ver Dehnen y Obregón (1971).

La solución para $p = \rho$, es la única exacta y explícita que se conoce para el espacio abierto hiperbólico en esta teoría, y sólo puede ser válida en los inicios del universo cuando se supone que la curvatura intrínseca es despreciable.

La proposición $\phi R^m = Cte.$ ($m = Cte$), con la cual fueron preciamente encon tradas algunas soluciones (Dehnen y Obregón 1971, Obregón y Chauvet 1978), sería otra manera de obtener a todas las demás.

Uno puede ver que la ley de expansión lineal es válida para todo el conjunto de ecuaciones de estado barotrópicas, las cuales son buenas aproximaciones de aquellas que verdaderamente caracterizan a los diferentes estadíos por los - que pasó nuestro universo, por lo menos para los universos de radiación y - de materia no relativista.

Como es bien sabido, en el límite cuando $|\omega| \to \infty$ la teoría de JBD es practicamente igual a la de Einstein. Sin embargo, ninguna de estas soluciones se asemeja en ese límite a solución conocida en la Teoría de Einstein.

VII BIBLIOGRAFIA

1) Bugrii, A. I. y Trushevskii A. A.: 1977, ZhETF, 71,3, (1977, JETP, 46,1).

2) Carr, B. J.: 1975, Ap. J. 201, 1.

3) Chauvet, P. y Obregón, O.: Por aparecer, Astrophys. Space Sci.

4) Dehnen, H. y Obregón, O.: 1971, Astrophys. Space Sci. 14, 454.

5) Dehnen, H. y Obregón, O.: 1972a, Astrophys. Space Sci 15, 326.

6) Dehnen, H. y Obregón, O.: 1972b, Astrophys. Space Sci 17, 338.

7) Dirac, P.A.M.: 1937, Nature 139, 323.

8) Dirac, P.A.M.: 1938, Proc. Roy. Soc. (London) A165, 199.

9) Jordan, P.: 1948, Astron. Nachr. 276, 193.

10) Jordan, P.: 1968, Zs. f. Ap., 68, 181.

11) Lessner, G.: 1974, Astrophys. Space Sci. 30, L5.

12) Morganstern, R. E.: 1971, Astrophys. Rev. D4, 282.

13) Obregón, O. y Pimentel, O.: 1978, Gen. Rel. Grav. 9 585.

14) Obregón, O. y Chauvet, P.: 1978, Astrophys. Space Sci. 56,335.

15) Schäffer, G. y Dehnen, H.: 1976, Astron. Astrophys. 54, 823.

16) Shapiro, I. et al.: Phys. Rev. Lett., 28, 1594.

17) Zel'dovich, Ya. B.: 1972, Mon. Not. R. astr. Soc. 160, 1.