



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA**

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**“AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-EULER-HEISENBERG:
EFECTOS DE ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA
EN AGUJEROS NEGROS CARGADOS”**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

DANIEL ERNESTO AMARO SÁNCHEZ

MATRÍCULA: 2163802884

amaro@xanum.uam.mx

ORCID: 0000-0002-0243-158X

ASESOR DE PROYECTO:

DR. ALFREDO MACÍAS ÁLVAREZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, DCBI, UAM-I

ASESOR DE TESIS:

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, DCBI, UAM-I

MIEMBROS DEL JURADO:

PRESIDENTE: DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

SECRETARIO: DR. HUGO AURELIO MORALES TÉCOTL

VOCAL: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

VOCAL: DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

VOCAL: DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

FECHA DE ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA:

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO, A 13 DE AGOSTO DE 2025

Agradecimientos

A la memoria del Prof. Alfredo Macías,

Quien me introdujo al fascinante mundo de la gravitación y los agujeros negros. Su pasión por la física y la investigación fue siempre para mí un ejemplo a seguir.

Agradezco profundamente su guía y su constante acompañamiento a lo largo de casi diez años de colaboración, que incluyen la licenciatura, la maestría y finalmente el doctorado. Esta tesis recoge el trabajo desarrollado bajo su asesoría durante los últimos años y representa un homenaje a un gran científico, pero -sobre todo- a un muy querido mentor.

Agradezco también al Prof. Marco Maceda, por apoyarme en la revisión de mi tesis y en la preparación de la disertación pública.

Agradezco al Prof. Claus Lämmerzahl y a la Prof. Nora Bretón, colaboradores habituales y colegas ejemplares. Gracias al Prof. Lämmerzahl, por su hospitalidad y apoyo durante mi estancia en Bremen.

Contents

1. Introducción	1
1.1. Los agujeros negros y sus estudios observacionales	1
1.2. El agujero negro en el centro de la Vía Láctea	2
1.2.1. Las estrellas- S y el centro galáctico	2
1.3. La sombra del agujero negro y el EHT	4
1.3.1. Lensing gravitacional	5
1.3.2. La sombra del agujero negro	7
1.3.3. El Telescopio Horizonte de Eventos	8
2. La teoría de Einstein-Euler-Heisenberg	11
2.1. La electrodinámica de Euler-Heisenberg	11
2.2. Sistemas acoplados con electrodinámica no-lineal	12
2.3. La teoría de Einstein-Euler-Heisenberg	12
2.4. La propagación de la luz y la birrefringencia	14
2.5. El enfoque de electrodinámica cuántica (QED)	14
3. La solución estática de agujero negro cargado eléctricamente	16
3.1. La solución a las ecuaciones de Einstein	16
3.1.1. El horizonte de eventos	17
3.1.2. Termodinámica del agujero negro	17
3.2. Trayectorias de partículas de prueba neutras	18
3.2.1. Órbitas circulares	20
3.2.2. Órbita más cercana (ISCO)	22
3.2.3. La segunda integración y las trayectorias	23
3.3. Trayectorias de partículas de prueba cargadas	25
3.3.1. El potencial efectivo y los puntos de retorno	26
3.3.2. La segunda integración	28
3.4. Trayectoria de los fotones	29
3.4.1. Órbitas circulares inestables y las trayectorias	30
3.5. Lensing gravitacional y la sombra del agujero negro	33
3.5.1. La ecuación de la lente	33
3.5.2. Las ecuaciones de movimiento generales	35
3.5.3. El punto de máximo acercamiento y el anillo de luz	36
3.5.4. La sombra del agujero negro	37
3.5.5. La integración de las coordenadas angulares	40
3.5.6. Comparación con las ecuaciones de lente delgada	44
3.5.7. Cantidades observables	47
3.5.8. Retardo temporal	48
4. La solución rotante de agujero negro cargado eléctricamente	50
4.1. La solución a las ecuaciones de Einstein	50
4.1.1. El horizonte de eventos y la ergoregión	52
4.2. Trayectorias de partículas de prueba cargadas	52
4.2.1. El potencial efectivo	54
4.3. Las geodésicas de luz	56
4.3.1. La foto-región	57
4.3.2. La sombra del agujero negro	58
5. Termodinámica del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg	63
5.1. La solución rotante	63
5.1.1. El horizonte de eventos	64

5.1.2.	El área del horizonte de eventos	65
5.1.3.	La gravedad superficial	66
5.1.4.	La ergoregión y otras propiedades	66
5.2.	El proceso de Penrose y la extracción de energía	67
5.3.	Termodinámica del agujero negro	71
5.3.1.	La ley cero	74
5.3.2.	La primera ley	75
5.3.3.	La segunda ley	77
5.3.4.	La tercera ley	78
5.3.5.	El calor específico y la transición de fase	78
5.4.	Agujeros negros supermasivos, estelares y primordiales	80
5.4.1.	Agujeros negros supermasivos	80
5.4.2.	Agujeros negros estelares	80
5.4.3.	Agujeros negros primordiales	82
5.5.	Hipotética dependencia en θ	82
5.6.	La radiación de Hawking y la evaporación del agujero negro	88
6.	Resumen y conclusiones	91
6.1.	Alcances y cuestiones por explorar	92
6.2.	Publicaciones realizadas	93
7.	Bibliografía	94
A.	El método de Cardano	101
B.	Variables estreográficas complejas	106
C.	El desarrollo de Eddington-Robertson	110
D.	La ecuación de Hamilton-Jacobi	117
E.	La gravedad superficial para la hipotética dependencia en θ	123

Índice de Figuras

Figura 1: Izquierda: el cúmulo central del centro galáctico con diversas fuentes identificadas y etiquetadas.	3
Figura 2: Trayectorias de las estrellas-S en el cúmulo de SagA*.	3
Figura 3: Izquierda: distintas observaciones de la distancia al centro galáctico.	4
Figura 4: Deflexión de la luz por un campo gravitacional.	5
Figura 5: Izquierda: esquema de la observación de dos imágenes.	6
Figura 6: Izquierda: esquema de la convergencia de los rayos de luz,	6
Figura 7: Esquema de la formación de la sombra del agujero negro de Schwarzschild.	7
Figura 8: Izquierda: diferencia del tamaño angular del horizonte de eventos, el anillo de luz y de la sombra del agujero negro de Schwarzschild.	8
Figura 9: Esquema del tamaño angular θ de un objeto astronómico.	9
Figura 10: Izquierda: arreglo de telescopios milimétricos alrededor del mundo que componen el EHT y que se usó para observar la imagen de M87* en 2017.	9
Figura 11: Izquierda: La sombra de M87* con polarización.	10
Figura 12: Izquierda: la carga apantallada $\tilde{Q}_H$ en el horizonte de eventos.	18
Figura 13: El efecto de la polarización del vacío de Euler-Heisenberg en el horizonte de eventos para diferentes valores de la carga Q del agujero negro.	19
Figura 14: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ para partículas masivas,	20
Figura 15: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ variando M para partículas de prueba masivas.	21
Figura 16: Izquierda: potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ para partículas de prueba neutras masivas.	24
Figura 17: Izquierda: el potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)=R(r)$ variando la carga q de la partícula de prueba.	26
Figura 18: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}^{\pm}$ para $q=0.5\mu$ y $q=0.9\mu$,	27
Figura 19: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}^{\pm}$ para $q=0.5\mu$ y $q=0.9\mu$,	28
Figura 20: Izquierda: el potencial efectivo, para diferentes valores de la carga Q del agujero negro.	30
Figura 21: Izquierda: el potencial efectivo para fotones, con la carga y masa del agujero negro $Q=0.8M$ y $M=10^4 M_{\odot}$	32
Figura 22: El diagrama de lens-exacto.	34
Figura 23: El esquema de los ángulos de la imagen.	35
Figura 24: El radio de la sombra para una masa $M=10^4 M_{\odot}$ y carga $Q=0.8M$ fijas.	38
Figura 25: Las sombras para una masa $M=10^4 M_{\odot}$ y carga $Q=0.8M$ fijas,	39
Figura 26: El radio de la sombra r_{sh} del agujero negro, para un observador en infinito.	39

Figura 27: El diagrama de lens-exacto, restringido al plano $\phi=0$.	41
Figura 28: El ángulo θ como función del ángulo de la imagen ψ .	41
Figura 29: El ángulo θ , como función del ángulo incidente ψ para el agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg y para el de Reissner-Nordström.	43
Figura 30: El diagrama de thin-lens.	44
Figura 31: La posición angular de la fuente θ , para campo débil,	46
Figura 32: La posición angular de la fuente θ como función del ángulo de la imagen ψ ,	46
Figura 33: El tiempo de retardo exacto en segundos,	49
Figura 34: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman y el caso rotante de Einstein-Euler-Heisenberg.	55
Figura 35: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman y el caso de Einstein-Euler-Heisenberg.	56
Figura 36: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman y el caso de Einstein-Euler-Heisenberg.	56
Figura 37: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg y la de Kerr-Newman, para diferentes valores de la carga Q del agujero negro.	60
Figura 38: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg y la de Kerr-Newman, para diferentes valores de la masa M .	61
Figura 39: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg y la de Kerr-Newman, para valores no-nulos del momento angular α .	62
Figura 40: La carga apantallada $\tilde{Q}$ como función del momento angular α ,	64
Figura 41: La carga apantallada $\tilde{Q}$ como función de la carga real Q ,	64
Figura 42: El horizonte de eventos para diferentes valores de los parámetros del agujero negro y para una masa fija de $M=1 \times 10^4 M_{\odot}$.	65
Figura 43: El radio r_+ del horizonte de eventos del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg comparado con el de Kerr-Newman,	65
Figura 44: La ergoregión del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg comparada con la ergoregión del de Kerr-Newman,	67
Figura 45: La entropía del agujero negro como función de los parámetros del agujero negro y para una masa fija de $M=1 \times 10^4 M_{\odot}$.	73
Figura 46: La entropía como función de la masa del agujero negro y para diferentes valores de sus parámetros.	74
Figura 47: La temperatura del agujero negro como función de sus parámetros y para una masa fija de $M=1 \times 10^4 M_{\odot}$.	75
Figura 48: La temperatura del agujero negro como función de su masa y para diferentes valores de sus parámetros.	76

Figura 49: Izquierda: la capacidad calorífica C_J , a $J=aM$ constante,	79
Figura 50: La carga apantallada $\tilde{Q}$ como función de la carga real Q ,	81
Figura 51: Izquierda: los efectos de Euler-Heisenberg en el horizonte de eventos y en la ergoregión.	81
Figura 52: Izquierda: la entropía del agujero negro.	82
Figura 53: Izquierda: la entropía del agujero negro.	82
Figura 54: La hipotética distribución de la carga en el horizonte de eventos R_H , como función de θ y para diferentes valores de Q	83
Figura 55: La carga $\tilde{Q}$ como función de Q y a , para diferentes valores de θ y una masa fija de $M=1 \times 10^4 M_\odot$	84
Figura 56: El radio del horizonte de eventos r_+ como función de Q y a ,	84
Figura 57: El hipotético horizonte de eventos deformado del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, comparado con el de Kerr-Newman.	85
Figura 58: La entropía como función de Q y a ,	85
Figura 59: La entropía como función de Q y a , para una masa fija de $M=1 \times 10^4 M_\odot$	86
Figura 60: La temperatura como función de θ y para diferentes valores de Q	86
Figura 61: La temperatura como función de Q y a , para diferentes valores fijos de θ y una masa de $M=1 \times 10^4 M_\odot$	87

Índice de Tablas

Tabla 1: El radio de la órbita circular estable r_s y el de la inestable r_o ,	22
Tabla 2: El radio de la ISCO para un valor fijo de la masa del agujero negro de $M=10^4 M_\odot$ y variando la carga Q	23

1. Introducción

Los agujeros negros son unos de los objetos más misteriosos de la física. Están equipados con un campo gravitacional tan intenso, que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. Incluso el mismo Einstein era escéptico de su existencia, pero hoy en día contamos con evidencia convincente y en aumento, de que los agujeros negros en realidad existen:

- Las mediciones de las ondas gravitacionales son explicadas de mejor manera considerando la fusión de agujeros negros [1].
- Las observaciones de las trayectorias de las estrellas nos indican que debe existir un objeto compacto en el centro de la Vía Láctea, Sagitario A*, con más de 4 millones de masas solares en una región muchísimo menor que nuestro Sistema Solar [2]. En el marco de la física estándar, sólo un agujero negro puede explicar estos efectos.
- Finalmente, las imágenes de la sombra del agujero negro en el centro de la galaxia M87 (el cual llamaremos M87*)[3], y de la sombra de SagA* [4], sólo pueden ser explicadas por una geometría de agujero negro.

Todos estos logros han sido galardonados con Premios Nobel, uno por la teoría y medición de las ondas gravitacionales [1], y otro por la teoría de las propiedades de los agujeros negros [5], así como la confirmación de la existencia de un objeto compacto en el centro de nuestra galaxia [2].

1.1. Los agujeros negros y sus estudios observacionales

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo la cual es tan increíblemente densa que ni siquiera la luz puede escapar de su superficie. La frontera de esta región es conocida como un horizonte de eventos y está definida como el conjunto de puntos en donde la velocidad de escape de su campo gravitacional es igual a la velocidad de la luz [6].

Un agujero negro se forma cuando una estrella de suficiente masa sufre un colapso gravitacional, con la mayoría o toda su masa comprimida en un área del espacio suficientemente pequeña, produciendo curvatura infinita del espacio-tiempo en un lugar llamado singularidad. Por lo tanto, un agujero negro es un objeto cuya masa entera M yace dentro de una hipersuperficie de radio r_h . Horizonte de eventos es el nombre dado a r_h , porque a partir de aquel radio hacia dentro, la velocidad de escape de la gravedad del agujero negro es mayor que la velocidad de la luz. Los agujeros negros atraen masa a través de fuerzas gravitacionales, pero ninguna de las masas puede escapar jamás.

De acuerdo con la conjetura de Penrose del sensor cósmico, estas singularidades deben estar vestidas por horizontes de eventos. No existe conexión causal entre el interior de un agujero negro y los campos exteriores. Entonces ninguno de los eventos ocurriendo en la región interior tendría influencia en la región exterior, esto es, ninguna información puede alcanzarnos a partir de esta región. El interior del agujero negro está escondido, encierra un misterio desconocido.

Teóricamente, los agujeros negros son objetos muy comunes en el interior de las galaxias. Éstas pueden albergar gran cantidad de agujeros negros cuyas masas pueden alcanzar millones de masas solares ($M_\odot$). Los agujeros negros son clasificados según su tamaño. Los agujeros negros producidos por colapso gravitacional son los agujeros negros estelares, los cuales tienen masas típicas de $1.4 - 10 M_\odot$. Ya se han detectado varias docenas de agujeros negros estelares mediante la emisión de rayos-X de sistemas binarios, en donde, por ejemplo, una estrella se une a un agujero negro emitiendo radiación conforme su masa cae al horizonte de eventos [7]. Además, un efecto de microlensing asociado sugiere la detección de este tipo de agujeros negros.

También existen los llamados agujeros negros de masa intermedia, con masas típicas que van de los $10^2 - 10^5 M_\odot$. Por ejemplo, se ha encontrado evidencia indirecta de un agujero negro intermedio de $2200 M_\odot$ en el centro del cúmulo globular 47 Tucanae [8]. Sin embargo, no suelen detectarse con tanta frecuencia, debido a que no se alimentan lo suficiente para emitir en las bandas de rayos-X y radio.

Más recientemente se han observado otro tipo de agujeros negros, los agujeros negros supermasivos. Aunque su origen sigue siendo una incógnita, éstos se encontrarían ubicados en el núcleo de casi todas

las galaxias y su masa típica va de millones a billones de $M_{\odot}$. Su emisión de radiación depende de cuánta cantidad de gas y estrellas lo alimente. Actualmente, las únicas imágenes de sombras de agujeros negros corresponden a agujeros negros supermasivos.

El estudio teórico de la astrofísica de agujeros negros comenzó en los años 70's [9, 10, 11], mientras que el estudio observacional aumentó a principios del siglo actual. Dado que los agujeros negros no pueden ser observados directamente, sus campos gravitacionales sólo pueden ser estimados mediante la observación de la materia que los rodea:

- Es posible observar las trayectorias de las estrellas en la vecindad inmediata del agujero negro supermasivo SagA* [12, 13, 14], que confirman su naturaleza, hecho que fue premiado con el Premio Nobel en Octubre del 2020.
- También se puede observar el movimiento de las nubes de materia o los discos de acreción, que se acercan hasta la órbita circular estable más interna (ISCO, *Innermost stable circular orbit*) [15].
- Los jets emitidos por los agujeros negros y los brotes de rayos gamma (GRB's, *Gamma-ray bursts*), sólo pueden ser explicados por las condiciones extremas que proveen los agujeros negros.
- La luz está fuertemente influenciada por el intenso campo gravitacional de los agujeros negros, lo que ha llevado a las recientes imágenes de la sombra de M87* [3] y de SagA* [4], obtenidas por la colaboración Telescopio Horizonte de Eventos (EHT, *Event Horizon Telescope*).

Las propiedades de las sombras de agujeros negros han sido estudiadas recientemente a detalle (véase, por ejemplo, [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]). Además, la colaboración EHT continúa trabajando para mejorar su resolución, con el fin de capturar imágenes más precisas de las sombras ya observadas. Por ejemplo, ya se ha observado polarización, señal de la existencia de campos magnéticos en las inmediaciones de los agujeros negros [24, 25]. Mientras más precisas sean las imágenes, se pueden estudiar más efectos en las sombras, así como un mayor número de agujeros negros.

1.2. El agujero negro en el centro de la Vía Láctea

En la actualidad se ha logrado concluir, mediante la observación de las órbitas de las estrellas cercanas a SagA*, las llamadas estrellas- S , que éste es un objeto compacto supermasivo en el centro de nuestra galaxia, el cual muy probablemente sea un agujero negro. El llamado Centro Galáctico de la Vía Láctea se encuentra a una distancia de $\sim 8 \text{ kpc}$ ($\sim 25,000$ años luz). En él se halla SagA*, con una masa de $\sim 4 \times 10^6 M_{\odot}$. Gracias a su cercanía y a los avances en la instrumentación, podemos estudiar con detalle las propiedades del cúmulo de estrellas que lo rodean. Los estudios se centran especialmente en las estrellas- S , localizadas en el parsec central, y las observaciones en las longitudes de onda que comprenden el radio, el infrarrojo y los rayos-X.

Actualmente, se han realizado observaciones de SagA* con telescopios en superficie de $8 - 10 \text{ m}$ que operan en el infrarrojo. A estas longitudes de onda, el gas y el polvo pueden ser penetrados, permitiéndonos observar las estrellas centrales de altas velocidades. Otro tipo de observaciones se realizan en las bandas de radio (con longitudes de onda que van de mm a sub-mm), en donde encontramos la Interferometría de Base Ancha (VLBI), que opera a 3 mm , y el Telescopio Horizonte de Eventos (EHT), que opera a 1 mm . SagA* fue descubierto por Balick y Brown utilizando interferometría en radio [26]. Para el estudio de fuertes procesos energéticos como la caída de discos de acreción al interior del agujero negro supermasivo se suelen realizar observaciones en el dominio de los rayos-X.

El estudio de SagA* no sólo nos brinda información sobre la estructura interna de nuestra galaxia, sino que sirve como modelo del núcleo central de otras galaxias masivas del mismo tipo. Además, permitirá verificar conceptos básicos de gravitación como el teorema de no-pelo.

1.2.1. Las estrellas- S y el centro galáctico

Como se mencionó anteriormente, en nuestro centro galáctico encontramos a SagA* rodeado por un cúmulo estelar. La estrella más brillante de este cúmulo es la supergigante roja *IRS7* (véase Fig. 1). También encontramos dos cúmulos de jóvenes estrellas azules. Las fuentes- S son estrellas azules que

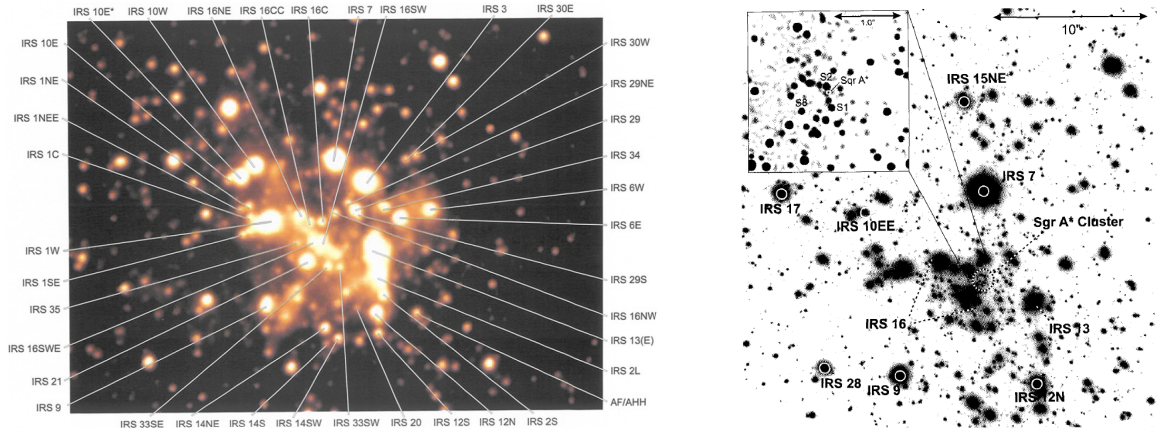


Figura 1: Izquierda: el cúmulo central del centro galáctico con diversas fuentes identificadas y etiquetadas. Derecha: el cúmulo central. La fuente más brillante es la supergigante roja *IRS7*. También se muestran los cúmulos *IRS16* e *IRS13* de jóvenes estrellas azules. El acercamiento muestra el cúmulo de *SgrA**. Este objeto central se encuentra rodeado por las fuentes *S1*, *S2* y *S8*. Ambas imágenes provenientes de [14].

se encuentran en la vecindad inmediata de *SgrA**, en el llamado cúmulo de *SgrA**. Estas estrellas tienen muy altas velocidades, cercanas a 1000 km/s , e incluso muestran movimiento acelerado. La más brillante es *S2*. Ésta y más información respecto al cúmulo estelar central se encuentra en [14].

Las estrellas-*S* nos han permitido examinar a profundidad la actividad en la vecindad de *SgrA**. Su sola presencia genera la pregunta: ¿cómo es posible que estas jóvenes estrellas siendo tan masivas orbiten en una región tan cercana? Las estrellas-*S* no se ven influenciadas por fuerzas de gran escala producidas, por ejemplo, por campos magnéticos interestelares. Sólo son afectadas por la gravedad. Por ello, su estudio nos permite determinar la forma del potencial gravitacional en el centro galáctico. Tras estudiar sus trayectorias a lo largo de varios años, se ha confirmado que éstas siguen una ley de potencia Kepleriana ($R^{-1/2}$), de manera similar a las órbitas de los planetas en nuestro sistema solar. En la Fig. 2 se muestran las órbitas simuladas de algunas de estas estrellas a partir de las observaciones realizadas en diferentes años. En una primera instancia, gracias al estudio de estas órbitas se podría descartar que el objeto compacto supermasivo sea un cúmulo de objetos astrofísicos oscuros o una aglomeración de partículas exóticas, como neutrinos.

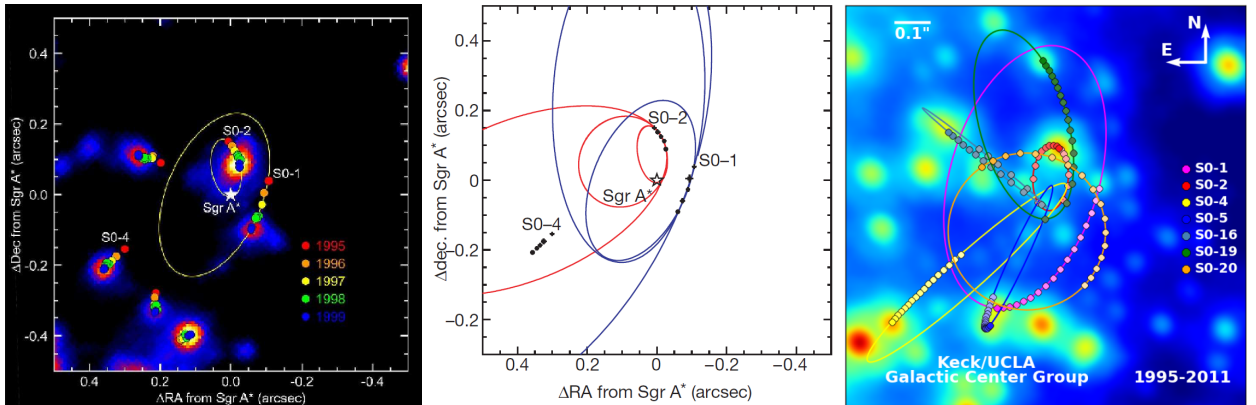


Figura 2: Trayectorias de las estrellas-*S* en el cúmulo de *SgrA**. Izquierda: la detección y el seguimiento de estas estrellas a lo largo de cinco años. Centro: simulaciones de sus órbitas realizadas a partir de los datos obtenidos de su seguimiento. Derecha: órbitas estimadas en un periodo más largo. Las órbitas son Keplerianas y se encuentran muy cercanas entre ellas, con un mismo centro compacto masivo. Figuras provenientes de [27, 28, 29].

Estudiando estas órbitas de estrellas centrales de alta velocidad en el cúmulo central, como *S2* y *S38*, se ha estimado la distancia a la que se encuentra *SgrA**, así como su masa. Se estiman distancias de $R \sim 8 \text{ kpc}$ con incertidumbres de 0.2 kpc y una masa de $M \sim 4 \times 10^6 M_\odot$ con incertidumbre de $0.2 \times 10^6 M_\odot$ [30]. En la Fig. 3 se muestran los valores obtenidos por distintos grupos astronómicos

con su respectiva incertidumbre.

En cuanto a su tamaño, se ha encontrado que es del orden de $1 AU$ (o $4.9 \mu pc$), es decir del tamaño de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Combinando estos resultados con aquéllos de las masas se encuentran, por ejemplo, densidades de masa de $6.5 \times 10^{21} M_{\odot} pc^{-3}$. En la teoría, para un agujero negro de Schwarzschild de 4 millones de $M_{\odot}$ contenida en su radio de Schwarzschild, su densidad sería de $1.63 \times 10^{25} M_{\odot} pc^{-3}$. Esto da un indicativo de que este objeto compacto supermasivo bien cabe en el rango de agujero negro. Además, ayuda a descartar otros candidatos. Por ejemplo, una pequeña masa de fermiones de $17 keV/c^2$ resultaría en una bola de fermiones con un radio de alrededor de $8.3 mpc$ [30].

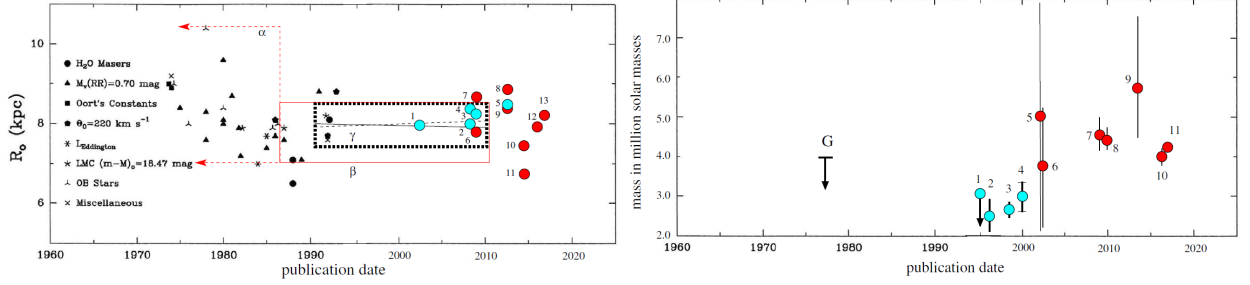


Figura 3: Izquierda: distintas observaciones de la distancia al centro galáctico. Los círculos turquesa corresponden a datos recientes basados en análisis de las órbitas estelares. Los círculos rojos son estimaciones de la distancia basadas en distribuciones estelares en el bulto de la Vía Láctea. Derecha: distintas observaciones de la masa de SagA*. Los círculos turquesa corresponden a estimaciones de la masa derivadas de la velocidad radial de estrellas. Las estimaciones derivadas de las órbitas estelares se representan con los círculos rojos. Para mayor información consultar [30].

Adicionalmente, en [30] se enumeran los diferentes valores obtenidos por diferentes grupos astronómicos con sus respectivos métodos e incertidumbres, y se presentan los resultados de otras cantidades de interés como lo son el espín, la inclinación, la orientación y la variabilidad. Además, se cuestionan qué combinaciones de estas observaciones nos permiten asegurar que este objeto compacto supermasivo es en realidad un agujero negro y así descartar otros candidatos, como las estrellas de bosones o fermiones. Otras detecciones que nos ayudarían a asegurar esto, como la formación de jets, tienen muy baja frecuencia de aparición. Sin embargo, la detección de la sombra del agujero negro es la más viable, teniendo sólo como limitante el avance tecnológico. Actualmente, colaboraciones internacionales como el EHT se enfocan en el estudio y análisis de las sombras de agujeros negros.

Estando tan cerca de nosotros, SagA* se ha convertido en un laboratorio perfecto para observar manifestaciones como las estrellas-S. El seguir sus órbitas a lo largo de periodos extendidos de tiempo, ha validado la presencia de un agujero negro supermasivo y ha iluminado nuestro pensamiento de muchas peculiaridades de nuestra propia galaxia.

1.3. La sombra del agujero negro y el EHT

Otra de las características de SagA* es su baja emisión, la cual se debe en mayor parte a la acreción de materia en el cúmulo estelar central. Es el agujero negro más tenue encontrado, pues irradia $\sim 10^{-9}$ veces la luminosidad de Eddington (que es la máxima luminosidad debida al flujo de acreción esférica más veloz). Éste corresponde a un caso de flujo de acreción radiativamente ineficiente (RIAF). Una de las consecuencias de su baja luminosidad es que la ausencia de señales de radiación permiten la detección de una luz que rodea al agujero negro. Esta luz corresponde a las trayectorias de los fotones en órbitas circulares alrededor del agujero negro, las cuales están bien descritas por la teoría de la relatividad general. Este efecto es llamado la sombra del agujero negro. Su detección, no sólo implica la presencia de un horizonte de eventos, sino que pone a prueba el efecto de doblamiento de la luz por campos gravitacionales intensos [31].

1.3.1. Lensing gravitacional

La teoría de la relatividad general de Einstein predice que un rayo de luz se deflece en presencia de un campo gravitacional. El contenido de materia-energía curva el espacio-tiempo a su alrededor. A su vez, este espacio-tiempo curvo dicta el movimiento de la materia circundante, incluido el movimiento de los fotones. Su trayectoria está descrita por la ecuación geodésica nula, por lo que la deflexión está influenciada por la métrica del espacio-tiempo de fondo.

Cuando un fotón proveniente de una fuente, alcanza a un observador, éste mide una dirección del rayo de luz, la cual asigna una posición aparente de la fuente. Cuando el rayo de luz es deflectado por un campo gravitacional, esa posición aparente no corresponde a la posición real (ver Fig. 4). La diferencia está descrita por el ángulo de deflexión. La teoría de la relatividad predice un ángulo de deflexión para un campo gravitacional débil,

$$\delta = \frac{4M}{E/L}, \quad (1.1)$$

el cual es el doble del resultado Newtoniano. Aquí, E y L son respectivamente la energía y el momento angular del fotón. Para nuestro Sol, se obtiene un ángulo de $\delta = 1.75''$. En 1919 Eddington observó este efecto durante un eclipse solar, donde el campo gravitacional del Sol curva la trayectoria de la luz proveniente de una estrella [32]. El ángulo medido fue de $1.9''$.

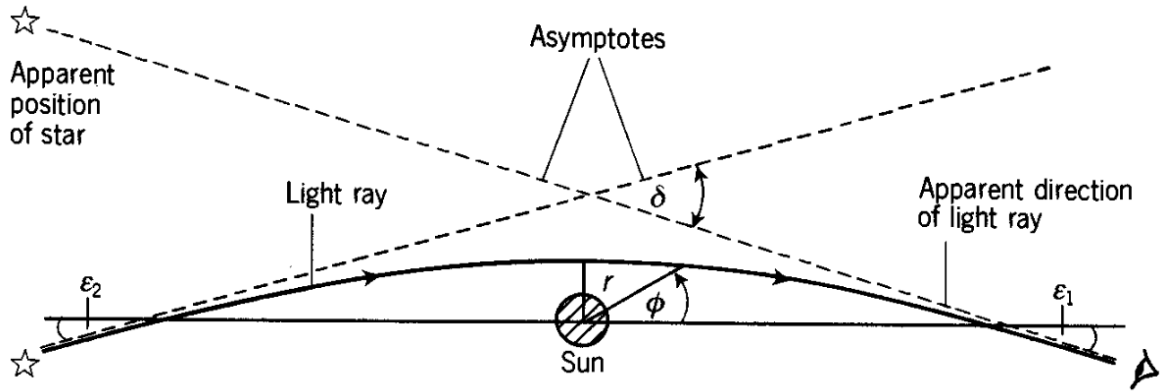


Figura 4: Deflexión de la luz por un campo gravitacional. Los ángulos ϵ_1 y ϵ_2 , son respectivamente los ángulos incidentes del observador y la fuente. El rayo de luz tiene coordenadas (r, ϕ) . El ángulo de deflexión está denotado por δ . Imagen proveniente de [32]

Existen varios efectos, que son consecuencia de este resultado [33]:

- Múltiples imágenes.

La deflexión de la luz permite que dos rayos provenientes de la misma fuente lleguen a un mismo observador a través de trayectorias diferentes. El observador vería dos o más copias del mismo objeto en diferentes lugares del cielo (ver Fig. 5). Además, el campo gravitacional actúa como un lente gravitacional. Una familia de rayos de luz puede converger y producir una línea en el eje $\phi = 0$. Cuando la fuente se encuentra justo detrás de la lente, lo que se observa es un anillo circular centrado en la posición de la fuente. Este anillo es llamado anillo de Einstein. Un ejemplo de observación de anillo de Einstein se presenta en la Fig. 6. El radio (angular) del anillo de Einstein demarca una frontera para la observación del efecto de múltiples imágenes. Cuando la fuente se encuentra dentro del radio de Einstein de la lente, se puede observar este efecto.

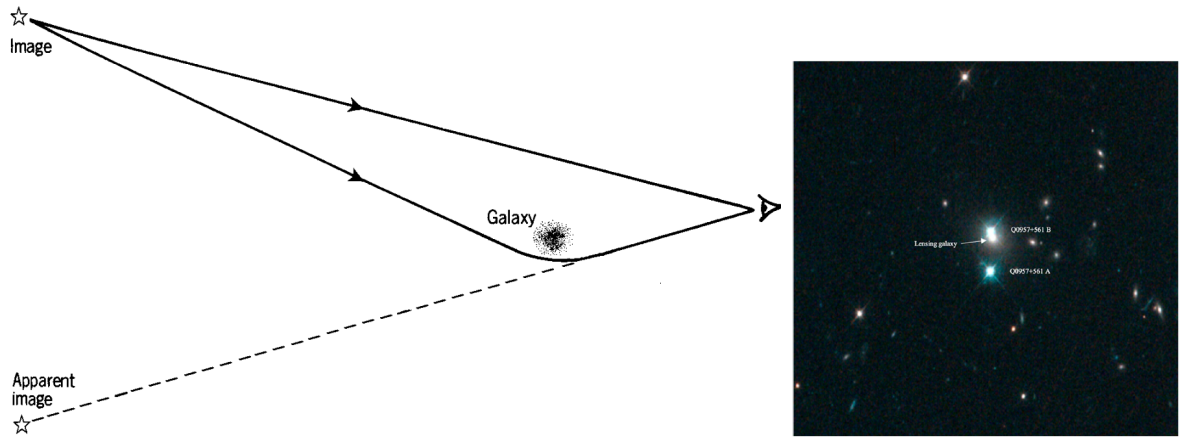


Figura 5: Izquierda: esquema de la observación de dos imágenes (imagen proveniente de [32]). Derecha: doble imagen de quasar QSO 0957+561 (imagen de NASA/ESA/Hubble, obtenida de [34]).

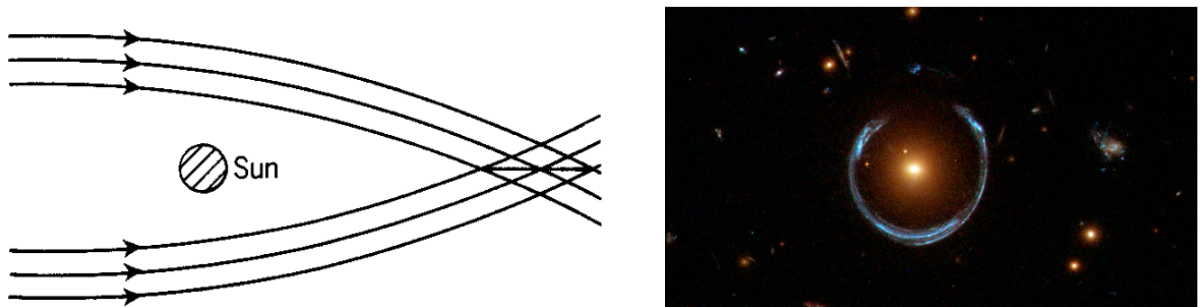


Figura 6: Izquierda: esquema de la convergencia de los rayos de luz, resultando en el efecto de lente gravitacional (imagen proveniente de [32]). Derecha: anillo de Einstein de la galaxia roja luminosa (LGR, *Luminous Red Galaxy*) LRG 3-757 (imagen de NASA/ESA/Hubble, obtenida de [34]).

- Retardo temporal.

Otro efecto es el llamado retardo temporal, compuesto por dos causantes. El primero es geométrico: cuando dos rayos de luz de la misma fuente, siguen trayectorias distintas, pero convergen en la posición del observador, el tiempo que tardan en recorrer sus respectivas trayectorias es diferente. Llegan a diferentes tiempos, es decir, uno de los rayos está retardado. Para Venus el retardo es de $200\mu s$. En galaxias es del orden de meses.

El segundo es resultado de que el tiempo por sí mismo es modificado por el contenido de materia-energía que curva el espacio-tiempo. Es directamente causado por el campo gravitacional y se conoce como retardo temporal de Shapiro [32].

- Magnificación y microlensing.

El flujo de luz llega de múltiples direcciones y depende de su forma aparente. La magnificación μ está dada por la razón entre el tamaño de la fuente después y antes del lensing. Para fuentes cuyos rayos pasan dentro del radio del anillo de Einstein θ_E , la magnificación se aproxima a $\mu \approx \theta_E/\beta$, con β la distancia real de la fuente a la línea de visión.

Cuando la fuente se está moviendo, su imagen se ve magnificada el tiempo que se encuentre dentro de θ_E . Esta breve magnificación es llamada microlensing. Si la fuente se mueve perpendicularmente a una velocidad v , el microlensing dura $t \approx D_L \theta_E / v$, con D_L la distancia del observador a la lente. Cuando la fuente es una estrella lejana, un planeta de su sistema causa un microlensing de alrededor de un día si es del tamaño de Júpiter, y de una hora si es del tamaño de la Tierra. Así suelen descubrirse los exoplanetas.

1.3.2. La sombra del agujero negro

Como se explicó anteriormente, en la teoría de la relatividad de Einstein, la materia curva el espacio-tiempo, según sea el contenido de materia. Esta curvatura, a su vez, afecta al resto de la materia, incluyendo a los fotones, describiendo su dinámica. Entonces, cuando se tiene mayor contenido de materia, mayor es la curvatura del espacio-tiempo y mayor es el doblamiento de la luz que pasa a través de él. Los objetos ultra-compactos (UCOs, *ultra-compact objects*) pueden doblar extremadamente la luz en ángulos de gran magnitud. Como un caso extremo de este tipo de doblamiento hallamos a los anillos de luz, que son órbitas de luz circulares [20]. Los agujeros negros son objetos increíblemente densos y su campo gravitacional es extremadamente fuerte, por lo que permiten la existencia de estos anillos de luz y, por lo tanto, de la llamada sombra del agujero negro.

Un observador distante recibe los rayos de luz de una fuente. En el caso de los agujeros negros, el observador recibiría la señal del horizonte de eventos. Sin embargo, éste no es una fuente de radiación, por lo que la sombra del agujero negro realmente corresponde a una ausencia de radiación. Esto está asociado con la sección eficaz de absorción del agujero negro a altas frecuencias, si los rayos de luz fueran observados atrás en el tiempo [20]. Un esquema de la formación de la sombra de un agujero negro se presenta en la Fig. 7 y se describe como sigue [35]:

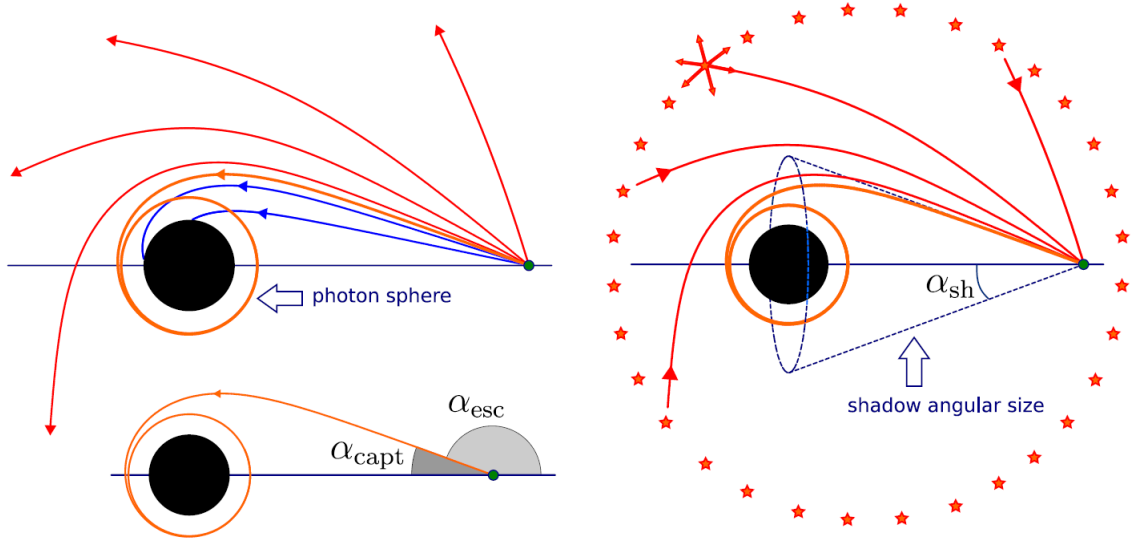


Figura 7: Esquema de la formación de la sombra del agujero negro de Schwarzschild (imagen proveniente de [35]).

- En el marco del *backwards ray-tracing* (trazado de rayos hacia atrás en el tiempo), el observador no recibe los rayos, sino que los "emite". Algunos rayos son deflectados hacia infinito por el agujero negro (líneas rojas) y otros son capturados por el agujero negro (líneas azules). La frontera entre ambos casos corresponde a los rayos que orbitan circularmente hacia el anillo de luz (líneas naranjas). Los fotones que alcanzan el anillo de luz conforman la sombra del agujero negro.
- Lo que ocurre en realidad, es que existen muchas fuentes de luz alrededor de un agujero negro. Los rayos provenientes de estas fuentes pueden ser capturados o deflectados, e incluso alcanzar al observador distante. Los rayos capturados son percibidos por el observador como ausencia de radiación. Los rayos del anillo de luz forman la frontera de la sombra y su tamaño angular corresponde al ángulo del cono de captura de rayos de luz.
- Adicionalmente, el tamaño angular de la sombra del agujero negro no es equivalente al tamaño angular del agujero negro ni al del anillo de luz, como se muestra a la izquierda de la Fig. 8. Esto se debe a un efecto de lensing gravitacional.
- Cuando el agujero negro rota, la forma y el tamaño de la sombra se ven alteradas (ver derecha de la Fig. 8). La sombra también se modifica cuando el agujero negro está descrito por más

parámetros. El estudio de la sombra inherente a un agujero negro resulta de gran interés debido a que nos ofrece información concreta de las propiedades del agujero negro en cuestión. Observar la sombra del agujero negro es observar la huella digital del espacio-tiempo alrededor de éste.

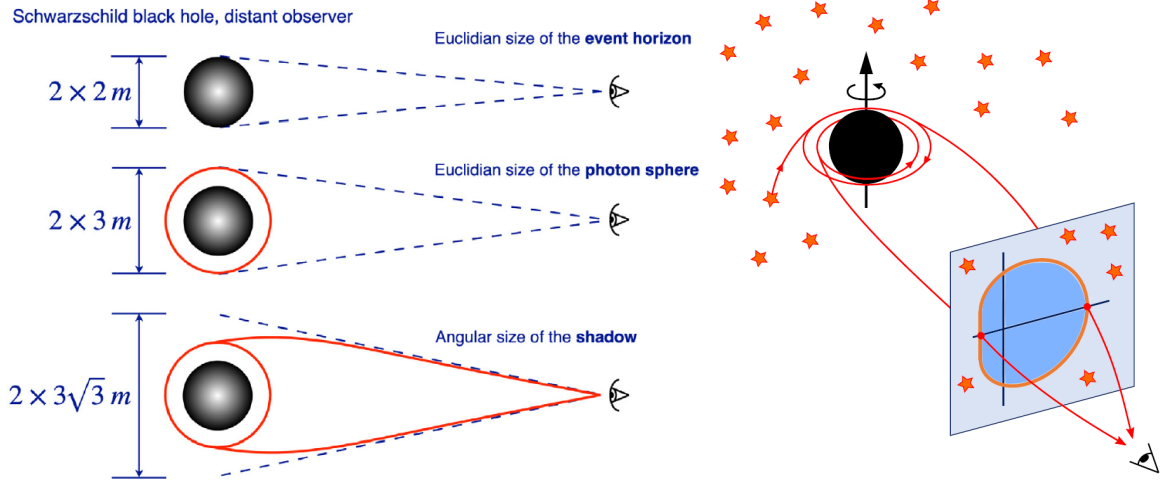


Figura 8: Izquierda: diferencia del tamaño angular del horizonte de eventos, el anillo de luz y de la sombra del agujero negro de Schwarzschild. Derecha: modificación de la sombra debido a la rotación del agujero negro. Imágenes provenientes de [35].

1.3.3. El Telescopio Horizonte de Eventos

Las mediciones astronómicas se pueden realizar a diferentes longitudes de onda del espectro electromagnético, cada una aportando información diferente pero complementaria que permite formar un panorama más completo del objeto observado. Existen también algunas complicaciones, una de ellas debida a nuestra atmósfera. Los telescopios terrestres tienen la limitante de que sólo los rayos de luz en el visible y en el radio llegan hasta la superficie. En las longitudes de onda del orden de milímetros (mm), no sólo la atmósfera es transparente, sino que también lo son la Vía Láctea y el disco de acreción alrededor de SagA*.

Con el estudio de las trayectorias de las estrellas- S se ha podido determinar la distancia a la que Sag A* se encuentra de nosotros. El llamado tamaño angular θ de un objeto astronómico depende de la distancia observada d (por ejemplo el diámetro de una estrella) y de la distancia D a la que se encuentra de nosotros, de la siguiente manera:

$$\theta = \left(\frac{180}{\pi} \right) \frac{d}{D}. \quad (1.2)$$

El diámetro de SagA* es de aproximadamente $d \sim 6.2 \times 10^7 km$, nueve veces más grande que el sol, mientras que está a $D \sim 2.6 \times 10^{17} km$ de nosotros. Sustituyendo estos valores en la ecuación (1.2), se tiene que el tamaño angular al que se observaría SagA* es de $14 \times 10^{-9} grados$. Es decir, en unidades utilizadas en astronomía, la resolución que se debe de alcanzar es de algunas decenas de micro-arcosegundos (μas).

Para hacernos una idea de esta resolución, consideremos el ejemplo de la Fig. 9. Sea el Objeto-1 un objeto en la Luna a $D_1 \sim 3.8 \times 10^5 km$ de nosotros, mientras que el Objeto-2 es el diámetro de SagA* que se encuentra a $D_2 \sim 2.6 \times 10^{17} km$. La relación que cumplen las distancias es $\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2}$. Despejando d_1 y sustituyendo los valores correspondientes ($d_2 = 6.2 \times 10^7 km$), se tiene que $d_1 \approx 9 cm$. Es decir, la resolución necesaria para observar a SagA* es análoga a aquella necesaria para observar una naranja en la superficie de la Luna. El Telescopio Espacial Hubble, uno de los que cuentan con mayor resolución, tiene una resolución de 50 mili-arcosegundos.

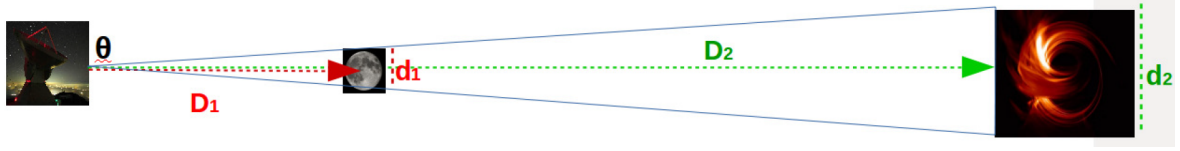


Figura 9: Esquema del tamaño angular θ de un objeto astronómico. Para un mismo ángulo de observación se observan dos objetos:

El ángulo de resolución θ_{Res} de un telescopio, depende tanto de su tamaño D_{Tel} como de la longitud de onda λ a la que observa:

$$\theta_{Res} = \left(\frac{180}{\pi} \right) \frac{\lambda}{D_{Tel}}. \quad (1.3)$$

Para tener una mayor resolución, se debe observar a menores longitudes de onda o contar con telescopios más grandes. En longitudes de onda en el óptico (nm), llegar a una resolución de microarcosegundos, requeriría contar con un telescopio de $200\ m$, algo aún tecnológicamente inalcanzable. La otra parte del espectro electromagnético que atraviesa la atmósfera comprende al espectro de radio (μm - km). Si observamos, por ejemplo, a $1\ mm$, alcanzar la resolución deseada correspondería a un telescopio de $4000\ km$. El radio de la Tierra es de $6,400\ km$, por lo que se necesitaría un telescopio del tamaño de la Tierra.

Es por esto que el EHT comprende un arreglo de telescopios milimétricos alrededor del mundo cuyo objetivo es obtener imágenes de las sombras de agujeros negros, con una resolución cercana a sus horizontes de eventos. El EHT está compuesto por un arreglo de telescopios localizados en Estados Unidos (California, Arizona y Hawái), Chile, Groenlandia, Antártica, España, Francia, entre otros, incluido además aquél en el volcán Sierra Negra en Puebla, México (véase Fig. 10).

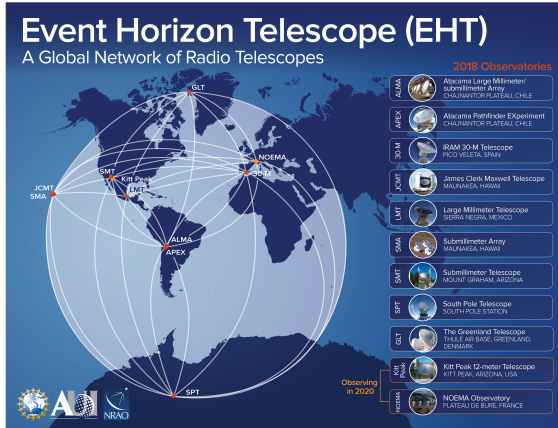


Figura 10: Izquierda: arreglo de telescopios milimétricos alrededor del mundo que componen el EHT y que se usó para observar la imagen de M87* en 2017. Imagen de NRAO/ESO disponible en <https://www.eso.org/public/images/eso1907p/>. Derecha: Gran Telescopio Milimétrico (LMT, *Large Millimeter Telescope*) ubicado en el volcán Sierra Negra en Puebla, México. El LMT opera entre $0.85\ mm$ y $4\ mm$. Imagen del New York Times, disponible en <https://www.nytimes.com/2015/06/09/science/black-hole-event-horizon-telescope.html>.

Las primeras observaciones de SagA* fueron realizadas en 2008 a $1.3\ mm$ con los telescopios en California, Arizona y Hawái. Éstas demostraron que la escala de la imagen era menor a ~ 5 veces el radio de Schwarzschild. Gracias a estas observaciones se motivó la construcción del EHT, el cual en 2017 operó por primera vez con el arreglo completo de telescopios, resultando en la primera imagen de un agujero negro [3]. En los últimos años, el EHT ha trabajado en mejorar las imágenes de los dos agujeros negros supermasivos observados, M87* y SagA*. La Figura 11 presenta las imágenes de sus sombras, más detalladas hasta la fecha. Las primeras observaciones del EHT ya han mostrado ciertos aspectos [31]:

1. Estructuras a escala del horizonte.
2. Subestructuras de la fuente y variabilidad.
3. Emisión fuertemente polarizada a escala del horizonte (campos magnéticos de gran escala en la vecindad del agujero negro).

Sin embargo aún existen ciertos detalles que deben considerarse. Los resultados que se obtengan a partir de las observaciones del EHT no sólo nos permitirán verificar que efectivamente el objeto compacto supermasivo en el centro de nuestra galaxia es un agujero negro, sino que además nos permitirá poner a prueba la teoría de la Relatividad General de Einstein y algunos de sus teoremas más importantes. La diferencia con todas las pruebas por las que ha pasado con éxito esta teoría, es que los espacio-tiempos de los agujeros negros nos proporcionan información fundamental como la presencia de singularidades esenciales en sus centros. Pondrán a prueba la hipótesis del sensor cósmico, la hipótesis nula de la métrica de Kerr, el teorema de no-pelo y podrían permitir la observación de estructuras cuánticas cercanas al horizonte de eventos.

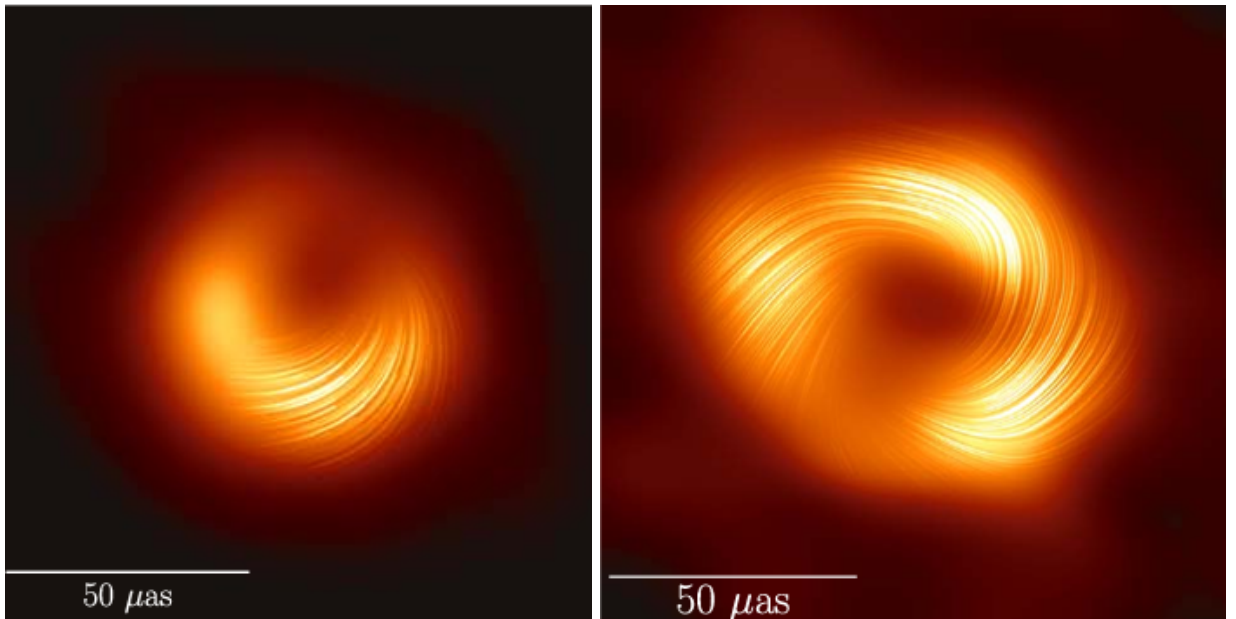


Figura 11: Izquierda: La sombra de M87* con polarización (imagen proveniente de [24]). Derecha: la sombra de SagA* con polarización (imagen proveniente de [25]).

2. La teoría de Einstein-Euler-Heisenberg

Hoy en día, el avance tecnológico ha permitido la obtención de las primeras imágenes de agujeros negros supermasivos, así como el análisis detallado de órbitas de estrellas cercanas y discos de acreción alrededor de éstos. De esta manera, el estudio de trayectorias de partículas de prueba (cargadas, no cargadas y especialmente fotones) alrededor de agujeros negros, resulta relevante para poder describir y entender los fenómenos físicos que ocurren en las vecindades de estos misteriosos objetos. Los agujeros negros funcionan como laboratorios que involucran muchas áreas de la física, desde la física nuclear y el electromagnetismo, hasta la física de fluidos y la mecánica cuántica. Todo lo anterior en el régimen de campos gravitacionales intensos.

El colapso gravitacional de una estrella a un agujero negro de Kerr-Newman, con todos los aspectos involucrados de la física nuclear y la electrodinámica, es un problema complejo en la astrofísica. Es más probable que los agujeros negros sean neutros, sin embargo, es de esperarse que, durante el colapso gravitacional, ocurra un proceso de separación de la carga, cuando la energía rotacional del núcleo colapsante es transformado en energía electromagnética y eventualmente en pares electrón-positrón creados por polarización del vacío [36]. Tales efectos de electrodinámica cuántica (QED) han sido estudiados por Ruffini et al. [37, 38] en el mecanismo de alimentación de los GRBs mediante la extracción de la energía del agujero negro y usando datos observacionales.

Los agujeros negros creados a partir de estrellas colapsantes, son los agujeros negros estelares y la electrodinámica que toma en cuenta tales efectos de polarización del vacío es la electrodinámica de Euler-Heisenberg, la cual dota al vacío con una constante dieléctrica efectiva. Si bien actualmente no contamos con la resolución necesaria para observar las inmediaciones de agujeros negros estelares, es importante realizar los cálculos, investigar los posibles efectos de Euler-Heisenberg y estimar si existen condiciones observacionales especiales, bajo las cuales tales efectos puedan ser observados. En este proyecto estudiamos soluciones de agujeros negros eléctricamente cargados al sistema acoplado de la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg. Analizamos las órbitas de partículas de pruebas neutras y cargadas, así como las trayectorias de los rayos de luz, el lensing gravitacional y la sombra del agujero negro. Esto para ambas, la solución estática y la solución rotante de agujero negro. Finalmente, estudiamos la termodinámica del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg.

2.1. La electrodinámica de Euler-Heisenberg

Las correcciones de QED a la teoría lineal de Maxwell-Lorentz, después de un loop de cuantización, pueden ser explicadas por una teoría no-lineal efectiva del campo electromagnético, derivado por Euler y Heisenberg [39, 40], usando la teoría de electrón-positrón de Dirac. Schwinger reformuló este resultado en el marco de la formulación invariante de norma de QED [41]. Cuando los campos eléctricos son más intensos que el valor crítico

$$D_c \equiv \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar}, \quad (2.1)$$

ocurre la producción espontánea de pares electrón-positrón, disminuyendo la energía de vacío. Aquí, c es la velocidad de la luz, $\hbar = h/(2\pi)$ es la constante de Planck reducida y m_e y e son respectivamente la masa y carga del electrón. En la teoría de Euler-Heisenberg, el vacío es tratado como un tipo específico de medio, cuyas propiedades de polarizabilidad y magnetizabilidad están determinadas por las nubes de cargas virtuales que rodean a las corrientes y cargas reales [42]. Este efecto puede ser interpretado como una constante dieléctrica efectiva del vacío. El Lagrangiano efectivo de Euler-Heisenberg

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^4 \hbar}{360 \pi^2 m_e^4 c^7} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] + \dots, \quad (2.2)$$

sólo es válido para campos electromagnéticos constantes y frecuencias $\nu \ll m_e c^2/h$. Ésta es una teoría física válida [43] y una medición directa del efecto de Euler-Heisenberg ya ha sido propuesta [44]. Adicionalmente, es el límite de campo débil de la teoría electrodinámica no-lineal de Born-Infeld [42].

2.2. Sistemas acoplados con electrodinámica no-lineal

El interés en la electrodinámica no-lineal comenzó en 1912, cuando Mie [45] presentó el primer modelo de electrodinámica no-lineal. Entre 1932 y 1935, Born e Infeld [46] propusieron su teoría no-lineal, la cual representa una generalización clásica de la teoría de Maxwell-Lorentz para obtener soluciones estables para la descripción de los electrones. Ésta considera a una carga puntual e como la fuente de un campo $D_r = e/r^2$, el cual diverge para $r \rightarrow 0$. En cambio, el campo eléctrico $E_r = e/\sqrt{r_0^4 + r^4}$ siempre es finito, a diferencia de la bien conocida singularidad $1/r^2$ del campo Coulombiano en la teoría lineal. El cociente adicional se identifica como una constante dieléctrica del espacio, aunque también es interpretado como una distribución espacial de la carga del electrón en un diámetro finito [46]. A grandes distancias de la carga puntual, i.e., $r \gg r_0$, los campos D_r y E_r coinciden.

Adicionalmente, en la teoría no-lineal la superficie característica, el cono de luz, depende de la intensidad del campo, y el principio de superposición para el campo electromagnético, ya no es válido. Ya se han encontrado soluciones de agujero negro con la electrodinámica no-lineal de Born-Infeld como fuente. Primero en 1935 [47] y después en 1987 [48].

En 1970, Jerzy Plebański [49] postuló un formalismo general de electrodinámicas no-lineales, el cual incluye a la teoría de Born-Infeld como un caso particular. En la electrodinámica no-lineal de Plebański, pueden emerger términos de violación de paridad [50]. Una solución regular de agujero negro a esta teoría, i.e., un agujero negro cuyos invariantes de curvatura (R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$) son no-singulares, fue obtenida por Ayón-Beato et al. [51] en 1998. Más aún, en 2002 Bretón estudió [52] las trayectorias de partículas de prueba en una geometría que es la generalización electromagnética no-lineal de la solución de Reissner-Nordström en la teoría de Born-Infeld. Actualmente regresó el interés en las electrodinámicas no-lineales, dado que la teoría efectiva que surge de súper-cuerdas es una electrodinámica del tipo de Born-Infeld [53, 54, 55, 56]. Además, la interpretación de las soluciones a las ecuaciones de Born-Infeld como estados de D-branas [57], ha recibido bastante atención.

2.3. La teoría de Einstein-Euler-Heisenberg

La teoría de Euler-Heisenberg [39] también puede ser descrita en el marco del formalismo de Plebański [49]. La acción para la teoría de la gravedad de Einstein, mínimamente acoplada a una teoría lineal o no-lineal de Maxwell está dada por [58]

$$W = \frac{1}{16\pi G} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} R + W_M(X, Y), \quad (2.3)$$

en donde R es el escalar de curvatura de Ricci, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ y G es la constante de Newton, la cual consideraremos $G = 1$. Las variables X y Y son los únicos dos invariantes relativistas independientes, que se pueden construir a partir del campo de Maxwell en cuatro dimensiones, es decir,

$$X = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad Y = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} {}^* F^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ es el tensor de Faraday y A_μ el cuadripotencial electromagnético. Su dual se define como

$${}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}, \quad (2.5)$$

siendo $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ el tensor completamente antisimétrico que satisface la relación $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -4!$. Las componentes de $F_{\mu\nu}$ son el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y la intensidad del campo magnético $\mathbf{B}$. De tal manera que los dos invariantes están dados por $X = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)/2$, y $Y = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$.

Para el caso de la teoría de Euler-Heisenberg, el componente electromagnético en (2.3) está dado por

$$W_M = \frac{1}{4\pi} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} \left(-X + \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} \{4X^2 + 7Y^2\} \right), \quad (2.6)$$

en donde m_e es la masa del electrón y α es la constante de estructura fina. El campo de Euler-Heisenberg derivado de esta acción, puede ser descrito de manera más sencilla en términos de la descripción dual

de Legendre de la electrodinámica no-lineal [49], la cual introduce el tensor de Plebański, $P_{\mu\nu}$, definido de la siguiente manera:

$$dL(X, Y) = -\frac{1}{2}P^{\mu\nu}dF_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

en donde $L(X, Y)$ es la densidad Lagrangiana de la electrodinámica no-lineal. En general, está dado por

$$P_{\mu\nu} = -(L_X F_{\mu\nu} + L_Y {}^*F_{\mu\nu}), \quad (2.8)$$

en donde los subíndices en L representan las derivadas con respecto a los invariantes. El tensor de Plebański $P_{\mu\nu}$ coincide con el tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ en el caso lineal, es decir, en la teoría usual de Maxwell. En nuestro caso, resulta

$$P_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \frac{4\alpha^2}{45m_e^4} \{4X F_{\mu\nu} + 7Y {}^*F_{\mu\nu}\}. \quad (2.9)$$

Las componentes de $P_{\mu\nu}$ son la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{D}$ y el campo magnético $\mathbf{H}$. De tal manera que la ecuación (2.9) puede ser interpretada como las relaciones constitutivas o materiales de la electrodinámica de Euler-Heisenberg. Los dos invariantes independientes en términos de las variables duales de Plebański $P_{\mu\nu}$ serán denotados por $\tilde{s}$ y $\tilde{t}$, y están dados por

$$\tilde{s} = -\frac{1}{4}P_{\mu\nu}P^{\mu\nu}, \quad \tilde{t} = -\frac{1}{4}P_{\mu\nu}{}^*P^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

con la definición del tensor dual

$${}^*P^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}P_{\sigma\rho}. \quad (2.11)$$

En términos de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$, los dos invariantes pueden reescribirse como $\tilde{s} = (\mathbf{D}^2 - \mathbf{H}^2)/2$, y $\tilde{t} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}$.

La función de estructura $H(\tilde{s}, \tilde{t})$ está dada por

$$H(\tilde{s}, \tilde{t}) = -\frac{1}{2}P^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - L, \quad (2.12)$$

la cual para la teoría de Euler-Heisenberg, a primer orden en α , se reduce a

$$H(\tilde{s}, \tilde{t}) = \tilde{s} - \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} \{4\tilde{s}^2 + 7\tilde{t}^2\}. \quad (2.13)$$

Para regresar a las variables originales, podemos usar las relaciones constitutivas

$$F_{\mu\nu} = H_{\tilde{s}}P_{\mu\nu} + H_{\tilde{t}}{}^*P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4} \left[\tilde{s}P_{\mu\nu} + \frac{7}{4}\tilde{t}{}^*P_{\mu\nu} \right], \quad (2.14)$$

en donde, una vez más, los subíndices en H indican derivación.

Las ecuaciones de movimiento para la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg son la ecuación de Faraday y la ecuación de Maxwell [50], respectivamente,

$$d^*F = 0, \quad dP = 0, \quad (2.15)$$

así como la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

con el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[H_{\tilde{s}}P_{\mu}{}^{\beta}P_{\nu\beta} + g_{\mu\nu}(2\tilde{s}H_{\tilde{s}} + \tilde{t}H_{\tilde{t}} - H) \right]. \quad (2.17)$$

Los tensores $F_{\mu\nu}$ y ${}^*P_{\mu\nu}$ son rotacionales y pueden ser escritos como el gradiente de un potencial electromagnético. El tensor de energía-momento para la electrodinámica de Euler-Heisenberg está dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(1 - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4}\tilde{s} \right) P_{\mu}{}^{\beta}P_{\nu\beta} + g_{\mu\nu} \left(\tilde{s} - \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} \{12\tilde{s}^2 + 7\tilde{t}^2\} \right) \right]. \quad (2.18)$$

2.4. La propagación de la luz y la birrefringencia

En la electrodinámica lineal de Maxwell-Lorentz, las discontinuidades del campo electromagnético se propagan de acuerdo a la ecuación para las superficies características, la cual en la óptica estándar se conoce como la ecuación de la eikonal. En un espacio-tiempo curvo, la ecuación de las superficies características está dada por

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = 0, \quad (2.19)$$

en donde $S_{,\mu}$ son los vectores normales a la superficie característica S . Los fotones lineales correspondientes viajan a través de geodésicas nulas de la métrica geométrica $g^{\mu\nu}$.

En la electrodinámica no-lineal de Euler-Heisenberg, los fotones se propagan a través de geodésicas nulas de la pseudo-métrica efectiva de Plebański $\gamma^{\mu\nu}$ [49], dada por

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{64\pi\alpha^2}{45m_e^4} T^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

la cual difiere de la métrica geométrica $g^{\mu\nu}$, debido a que además contiene al tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$. Por lo tanto, el tensor de energía-momento del campo no-lineal de Euler-Heisenberg es el responsable del hecho de que estas superficies no sean superficies nulas de la métrica geométrica que obedecen la ecuación de propagación (2.19). Sin embargo, para $\alpha = 0$ ambas métricas coinciden. La ecuación de propagación para las discontinuidades del campo electromagnético no-lineal

$$\gamma^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = 0, \quad (2.21)$$

ahora está dada por

$$\left[g^{\mu\nu} + \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2} (4\pi T^{\mu\nu}) \right] S_{,\mu} S_{,\nu} = 0, \quad (2.22)$$

en donde se ha usado la relación $\frac{16\alpha^2}{45m_e^4} = \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2}$, con D_c el campo crítico (2.1).

Por otro lado, en el enfoque presentado por Novello et al. [59], la propagación de los fotones no-lineales depende de la dirección de polarización, lo cual causa el fenómeno de birrefringencia. En este caso, existen dos modos de propagación, uno para cada dirección de polarización, y están definidos por las dos métricas efectivas

$$\gamma_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\mathcal{L}_X - 2\mathcal{L}_{YY} X) g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{L}_{YY} F_\lambda^\mu F^{\lambda\nu}, \quad (2.23)$$

$$\gamma_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \mathcal{L}_X g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{L}_{XX} F_\lambda^\mu F^{\lambda\nu}. \quad (2.24)$$

Para el Lagrangiano de Euler-Heisenberg y usando las relaciones constitutivas (2.14), las métricas efectivas en términos de las variables duales están dadas por

$$\gamma_{(1)}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{45\pi D_c^2} \tilde{s} \right] g^{\mu\nu} + \frac{7\alpha}{45\pi D_c^2} P_\lambda^\mu P^{\lambda\nu} \right), \quad (2.25)$$

$$\gamma_{(2)}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left(\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2} \tilde{s} \right] g^{\mu\nu} + \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2} P_\lambda^\mu P^{\lambda\nu} \right). \quad (2.26)$$

2.5. El enfoque de electrodinámica cuántica (QED)

Con el fin de obtener soluciones a la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg, se pueden seguir dos enfoques. El primero fue presentado por Yajima et al. [60], quienes consideran al sistema acoplado como una acción efectiva de una teoría de supercuerdas, es decir, el Lagrangiano efectivo de Euler-Heisenberg es considerado como un límite de bajas energías de la teoría de Born-Infeld. Asimismo, obtienen numérica o analíticamente soluciones de agujero negro cargado eléctrica, magnética o diónicamente. En este enfoque, los parámetros no-lineales son tratados como parámetros libres y surge un término adicional Q^4/r^6 en la función $f(r)$ de masa-energía, el cual modifica la estructura geométrica y la

termodinámica de la teoría lineal de Maxwell [61, 62]. Algunos estudios que siguen este enfoque son [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70], y no pueden ser interpretados como soluciones de Maxwell apantallado.

En el segundo enfoque, Ruffini et al. [71] reducen el problema a soluciones de Maxwell apantallado, siguiendo el enfoque clásico de Sauter, de Heisenberg y Euler, y de Schwinger para el proceso de polarización del vacío en la presencia de campos electromagnéticos. En este enfoque, no es apropiado integrar los términos no-lineales en las ecuaciones de Einstein, debido a que el integrando proviene del Lagrangiano efectivo de Euler-Heisenberg, el cual sólo es válido para campos constantes. Por lo tanto, Ruffini et al. redujeron sus soluciones estáticas esféricamente simétricas con carga eléctrica, magnética monopolar y diónica, a soluciones de Reissner-Nordström apantallado. Las correcciones no-lineales son almacenadas en los términos de apantallamiento de las cargas electromagnéticas que generan las nubes de cargas virtuales alrededor de las cargas y corrientes reales. De esta manera, el espacio-tiempo sólo es afectado mediante los valores apantallados de las cargas reales, y las propiedades geométricas y termodinámicas del agujero negro cargado son modificadas.

3. La solución estática de agujero negro cargado eléctricamente

En esta sección se presenta una solución esféricamente simétrica a la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg considerando como fuente a un agujero negro estático con carga eléctrica, obtenida en el marco de la interpretación de QED y en términos de las variables duales de Plebański $P_{\mu\nu}$. Se estudió el espacio-tiempo resultante, así como las trayectorias de partículas de prueba. En particular, se analizó la propagación de los fotones, es decir, la deflexión de la luz o lensing gravitacional, incluyendo la sombra del agujero negro. Los resultados de esta sección fueron publicados en [72] y [73].

3.1. La solución a las ecuaciones de Einstein

Como ansatz de la métrica usamos una métrica tipo Schwarzschild, es decir, de agujero negro estático y esféricamente simétrico, dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

con signatura $\{-, +, +, +\}$ y la función métrica

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (3.2)$$

El ansatz para el campo electromagnético es

$$P_{\mu\nu} = \frac{Q}{r^2} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^1 - \delta_\mu^1 \delta_\nu^0), \quad (3.3)$$

el cual satisface las ecuaciones electromagnéticas (2.15). Los invariantes electromagnéticos (2.10) son

$$\tilde{s} = \frac{Q^2}{2r^4}, \quad \tilde{t} = 0. \quad (3.4)$$

El invariante $\tilde{s}$ es $\frac{1}{2}\mathbf{D}^2$, mientras que el pseudo-invariante $\tilde{t}$ se anula. Sustituir estos valores en el tensor de energía-momento (2.18), resulta en dos ecuaciones de Einstein independientes. De la componente- tt , la ecuación resultante es

$$m'(r) = \frac{Q^2}{2r^2} \left[1 - \frac{4\alpha^2}{45m_e^4} \frac{Q^2}{r^4} \right], \quad (3.5)$$

en donde la derivada con respecto a r está denotada por un apóstrofo (o primado). Usamos la relación $\alpha = e^2/(4\pi)$ para expresar las correcciones de Euler-Heisenberg a primer orden en α . De esta manera, y de acuerdo a la interpretación de QED, estas correcciones deben ser consideradas constantes y ser almacenadas en los valores apantallados de la carga. De (3.5), definimos la carga apantallada como

$$Q \rightarrow \tilde{Q} = Q \left[1 - \frac{\alpha}{45\pi} D_Q^2(r) \right]^{1/2}, \quad (3.6)$$

con el campo eléctrico D_Q dado por

$$D_Q(r) \equiv \frac{Q}{r^2 D_c}. \quad (3.7)$$

Cuando el campo eléctrico del agujero negro, Q/r^2 , sobrepasa el valor crítico (2.1), $D_c \equiv m_e^2 c^3/(e\hbar)$, comienza la producción de pares electrón-positrón, y entonces éste es apantallado y disminuido hasta el valor crítico D_c [71]. Por simplicidad utilizamos las unidades geometrizadas para las cuales $\hbar = c = 1$.

Por lo tanto, la ecuación (3.5), puede ser reescrita como $m'(r) = \tilde{Q}^2/(2r^2)$, y tras su integración, la función de masa-energía resulta

$$m(r) = M - \frac{\tilde{Q}^2}{2r}. \quad (3.8)$$

Puede verificarse que esta función satisface la ecuación de Einstein restante. Como consecuencia, la métrica de agujero negro estático eléctricamente cargado de Einstein-Euler-Heisenberg luce como la solución de Reissner-Nordström apantallada:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\tilde{Q}^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\tilde{Q}^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (3.9)$$

Ésta se comporta asintóticamente ($r \rightarrow \infty$) como la métrica de Reissner-Nordström, la cual a su vez es recuperada para el caso lineal $\alpha = 0$. Además, para $Q = 0$, se reduce a la métrica de Schwarzschild.

La definición (3.6) de la carga apantallada difiere de aquella presentada en [71, 72] por un factor de $1/5$. Esto se debe a que (3.6) se definió previo a la integración de la ecuación de Einstein (3.5), la cual no debe ser realizada en el marco de la interpretación QED [71]. En este caso, el apantallamiento depende localmente del punto en el que se estén analizando los efectos de Euler-Heisenberg. Por ejemplo, al estudiar el horizonte de eventos del agujero negro, se debe considerar el campo eléctrico $D_Q(R_H)$ como un campo constante evaluado en el radio del horizonte de eventos R_H del agujero negro de Reissner-Nordström correspondiente. En cambio, si queremos estudiar los efectos en la sombra del agujero negro, D_Q tendrá que evaluarse en el radio del anillo de luz. Cada caso será explicado y puntualizado en las siguientes secciones.

3.1.1. El horizonte de eventos

Los horizontes del espacio-tiempo descrito por la métrica (3.9) están definidos por los puntos en los que la función métrica se anula, $f(r_{\pm}) = 0$. Éstos corresponden a las raíces reales y positivas del polinomio cuadrático

$$r_{\pm}^2 - 2Mr_{\pm} + \tilde{Q}_{\pm}^2 = 0, \quad \rightarrow \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \tilde{Q}_{\pm}^2}, \quad (3.10)$$

con la carga apantallada $\tilde{Q}_{\pm}$ evaluada en el horizonte correspondiente de la solución de Reissner-Nordström via (3.6). El signo negativo de $r_{\pm}$ es el horizonte de Cauchy, mientras que el signo positivo es el horizonte de eventos. Dado que sólo estamos interesados en estudiar las propiedades del agujero negro sobre y fuera del horizonte de eventos, usaremos sólo el signo positivo y lo denotaremos como

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - \tilde{Q}_H^2}, \quad (3.11)$$

con la carga apantallada

$$\tilde{Q}_H = Q \left[1 - \frac{\alpha}{45\pi} D_Q^2(R_H) \right]^{1/2}, \quad (3.12)$$

y el horizonte de eventos de Reissner-Nordström

$$R_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.13)$$

De acuerdo a esta relación, R_H crece a medida que la carga Q disminuye. Entonces, dado que la carga del agujero negro está apantallada por las nubes de cargas virtuales que la rodean, $\tilde{Q}_H < Q$, y el horizonte de eventos del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg es más grande que el de Reissner-Nordström, $r_+ > r_H$. Además, el efecto es mayor a medida que la carga aumenta. Todo lo anterior se puede observar en las Figuras 12 y 13.

3.1.2. Termodinámica del agujero negro

Una consecuencia inmediata del cambio en el tamaño del horizonte de eventos, es la modificación de la termodinámica del agujero negro. La energía electromagnética de un agujero negro cargado puede ser extraída, lo que llevaría a una disminución de su masa. Sin embargo, tal disminución no es indefinida, y la masa irreducible está dada por la fórmula de Christodoulou, la cual en el caso estático es [71]

$$M_{\text{ir}} \equiv \frac{r_+}{2} > \frac{R_H}{2} = M_{\text{ir}}^{\text{RN}}. \quad (3.14)$$

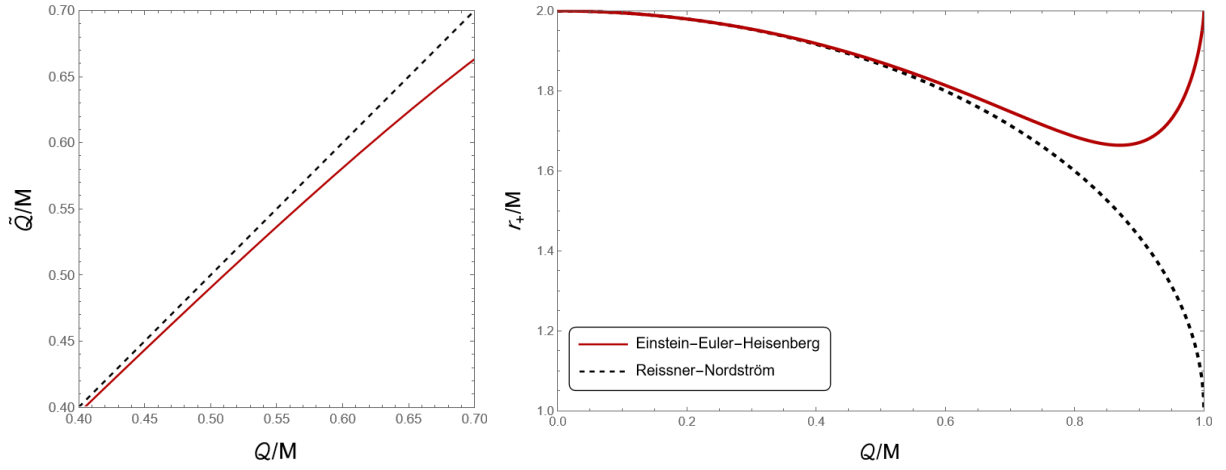


Figura 12: Izquierda: la carga apantallada $\tilde{Q}_H$ en el horizonte de eventos (3.13). Conforme Q crece, el apantallamiento aumenta. Derecha: el radio r_+ del horizonte de eventos (3.11) como función de la carga del agujero negro. Las líneas discontinuas corresponden al caso de Reissner-Nordström, mientras que las continuas al de Einstein-Euler-Heisenberg. El valor usado para la masa es $M = 10^4 M_\odot$.

La masa irreducible del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg es mayor que aquélla del agujero negro de Reissner-Nordström, por lo que menos energía puede extraerse del primero. La corrección no-lineal a primer orden en α resulta

$$M_{\text{ir}} = M_{\text{ir}}^{\text{RN}} + \frac{\alpha}{180\pi D_c^2} \frac{Q^4}{R_H^4} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right). \quad (3.15)$$

Reescribiendo (3.14), el contenido total de masa-energía del agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg está dado por

$$M^2 = \left(M_{\text{ir}} + \frac{\tilde{Q}^2}{4M_{\text{ir}}} \right)^2, \quad (3.16)$$

la cual incluye la contribución de la energía Coulombiana. Dado que la carga es apantallada, $\tilde{Q} < Q$, y la masa irreducible aumenta, $M_{\text{ir}} > M_{\text{ir}}^{\text{RN}}$, el término electromagnético $\tilde{Q}^2/(4M_{\text{ir}})$ es menor que en el caso de Reissner-Nordström. Es decir, hay menos energía electromagnética disponible para ser extraída por procesos de inserción de materia. Los efectos de Euler-Heisenberg a la masa irreducible y máxima energía extraíble de la solución estática fueron estudiados en [71].

En la sección 5 presentamos el caso rotante, incluyendo una descripción detallada del proceso de Penrose y las cuatro leyes termodinámicas del agujero negro. Por lo pronto, ya hemos usado en la interpretación de (3.16), que la masa del agujero negro corresponde a la energía del sistema termodinámico. Adicionalmente, la masa irreducible está relacionada con el área del horizonte de eventos A y la entropía S_{BH} , de la siguiente manera:

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4} = 4\pi M_{\text{ir}}^2. \quad (3.17)$$

Es decir, un incremento en la masa irreducible implica un incremento en el área del horizonte y en la entropía. La termodinámica del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, presenta efectos adicionales más interesantes debidos a la rotación del agujero negro.

3.2. Trayectorias de partículas de prueba neutras

Las ecuaciones de Einstein nos explican cómo un contenido de materia-energía curva el espacio-tiempo a su alrededor. Pero además, nos describen cómo esta curvatura dicta el movimiento de otros contenidos de materia, como lo son las partículas de prueba o los discos de acreción. Dado que la polarización

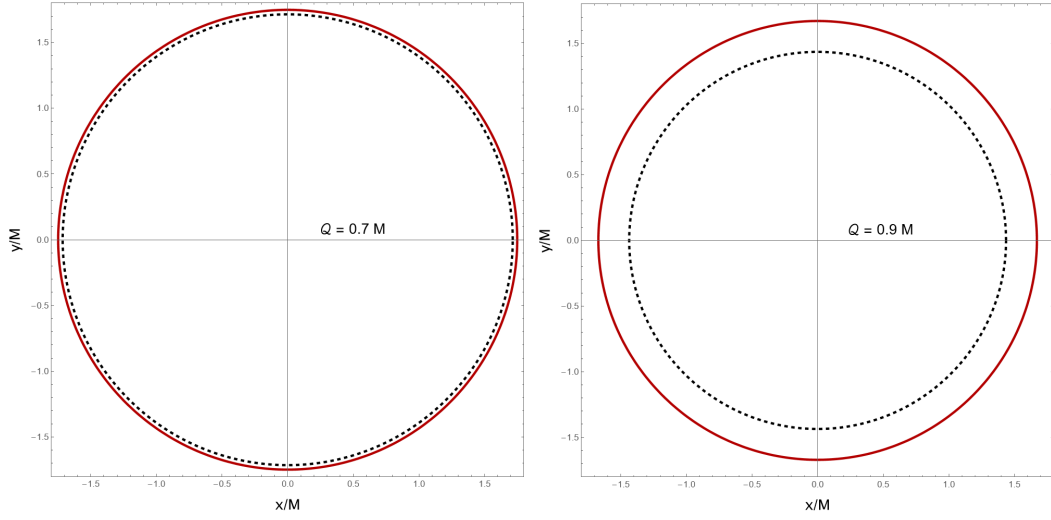


Figura 13: El efecto de la polarización del vacío de Euler-Heisenberg en el horizonte de eventos para diferentes valores de la carga Q del agujero negro. Las líneas discontinúas corresponden al caso de Reissner-Nordström, mientras que las continuas al de Einstein-Euler-Heisenberg. El apantallamiento de la carga aumenta el radio del horizonte y el efecto es mayor para cargas mayores. Se usó una masa de $M = 10^4 M_\odot$.

del vacío de Euler-Heisenberg modifica el espacio-tiempo alrededor del agujero negro mediante el apantallamiento de su carga, también debe existir un efecto en el movimiento de la materia cercana a él. En esta sección presentamos el análisis de las trayectorias de partículas de prueba neutras (sin carga electromagnética), mientras que en las siguientes secciones mostramos el caso de partículas cargadas y el de los fotones. En todos los casos, estudiamos la ecuación geodésica, mediante la definición de potenciales efectivos y aprovechándonos de la simetría esférica del caso estático.

Debido a la simetría esférica de la solución estática del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg (3.9), podemos considerar sólo a las trayectorias en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) sin perder generalidad [74]. Los puntos sobre las coordenadas denotan la derivada con respecto al parámetro afín s . Existen dos cantidades conservadas, correspondientes a los dos vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ . Éstas son respectivamente la energía E y el momento angular L de la partícula de prueba, las cuales en el plano ecuatorial están dadas por

$$E = g_{tt}\dot{t} = f(r)\dot{t}, \quad L = g_{\phi\phi}\dot{\phi} = r^2\dot{\phi}. \quad (3.18)$$

Por otro lado, la ecuación geodésica para partículas de prueba neutras es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (3.19)$$

y la condición de normalización en el plano ecuatorial, está dada por

$$\mathcal{L} = -f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + \frac{L^2}{r^2}. \quad (3.20)$$

Las partículas de prueba masivas (con masa) viajan en geodésicas temporaloides, $\mathcal{L} = -1$, mientras que aquellas sin masa en geodésicas nulas $\mathcal{L} = 0$. El caso de partículas sin masa (distinto al de fotones) se omitirá por falta de relevancia. El caso más interesante, el de los fotones, se presentará en una sección posterior. Las componentes de la ecuación geodésica para partículas de prueba neutras (3.19) son:

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= -\frac{f'(r)}{f(r)}\dot{r}\dot{t}, \\ \ddot{r} &= -\frac{1}{2}f(r)f'(r)\dot{t}^2 + \frac{f'(r)}{2f(r)}\dot{r}^2 + rf(r)\dot{\phi}^2, \\ \ddot{\phi} &= -2L\frac{\dot{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo las cantidades conservadas en la condición de normalización, se obtiene la ecuación tipo de conservación de la energía, para la coordenada- r

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad (3.22)$$

con el potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = f(r) \left(\frac{L^2}{r^2} - \mathcal{L} \right). \quad (3.23)$$

La Figura 14 muestra el comportamiento del potencial efectivo variando el momento angular L de la partícula de prueba masiva, $\mathcal{L} = -1$, y variando la carga Q del agujero negro. El potencial efectivo crece conforme L aumenta (véase lado izquierdo). Existen máximos del potencial efectivo para valores de L mayores que $L = 4M$. Estos máximos están asociados con órbitas circulares inestables de radio r_c , que además permiten la existencia de puntos de retorno en la trayectoria radial de la partícula de prueba.

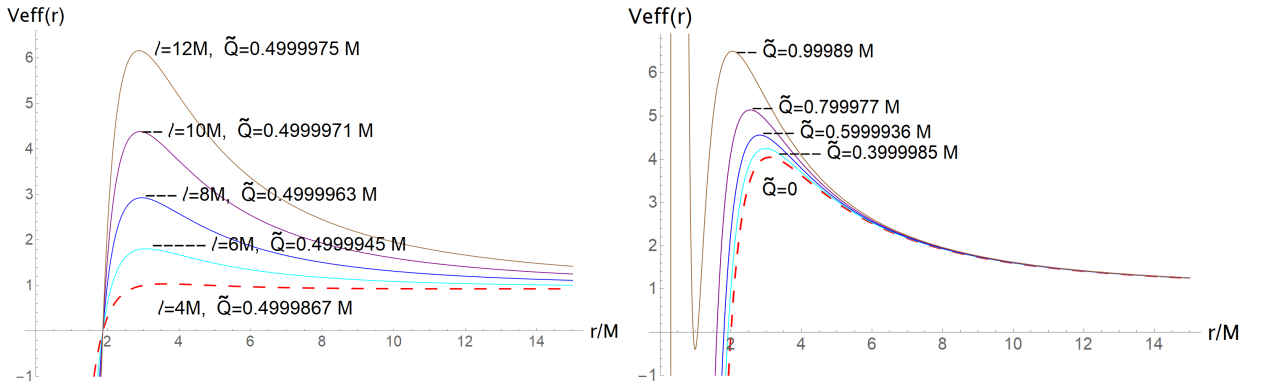


Figura 14: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ para partículas masivas, $\mathcal{L} = -1$ y una masa del agujero negro de $M = 10^5 M_\odot$. Izquierda: variamos el momento angular L con una carga fija $Q = 0.5M$. La línea discontinua corresponde al valor $L = 4M$, mientras que cada curva superior corresponde a un valor más grande del momento angular ($L/M = \{4, 6, 8, 10, 12\}$). Derecha: variamos la carga Q para un momento angular fijo $L = 10M$. La línea discontinua corresponde al caso de Schwarzschild $Q = 0$. Las cargas usadas son $Q/M = \{0, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

El potencial también crece conforme la carga Q aumenta (véase lado derecho). Por lo tanto, es de esperarse que el efecto de Euler-Heisenberg en el potencial efectivo sea disminuirlo, ya que la carga es apantallada, $\tilde{Q} < Q$. Esto se puede observar en el lado derecho de la Fig. 15, la cual muestra el potencial efectivo variando la masa del agujero negro. El máximo del potencial es menor para masas más pequeñas del agujero negro, cuando los efectos de Euler-Heisenberg aumentan. Aquí puede observarse que existe una asíntota horizontal para masas que corresponderían a agujeros negros supermasivos. En este caso, los efectos ya no son visibles y la asíntota $M \rightarrow \infty$ corresponde al caso de Reissner-Nordström, $\alpha = 0$.

Por otra parte, el potencial efectivo puede contar con mínimos (véase lado izquierdo de la Fig. 15). Éstos corresponden a órbitas circulares estables de radio r_s . Pueden ocurrir órbitas cerradas debido a la existencia de este mínimo. Los efectos en el potencial efectivo no son grandes, ya que la solución es asintóticamente la solución de Reissner-Nordström. Sin embargo, la carga es apantallada en cada posición. Por ejemplo, para un agujero negro de masa $M = 10^4 M_\odot$, una carga real de $Q = 0.5M$ es apantallada en el radio r_c de la órbita circular inestable, resultando en $\tilde{Q} \approx 0.499867M$. El apantallamiento es menor en el mínimo, pues éste se encuentra a un radio mayor, $r_s > r_c$. Los efectos aumentan conforme nos acercamos al horizonte de eventos.

3.2.1. Órbitas circulares

Para que una partícula de prueba masiva, $\mathcal{L} = -1$, se mantenga en una órbita circular de radio constante $r = r_n$, las condiciones que se deben cumplir son: $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. De la definición del potencial efectivo (3.23), estas condiciones se traducen respectivamente a las condiciones $E^2 - V_{\text{eff}}(r_n) = 0$, y $V'_{\text{eff}}(r_n) = 0$.

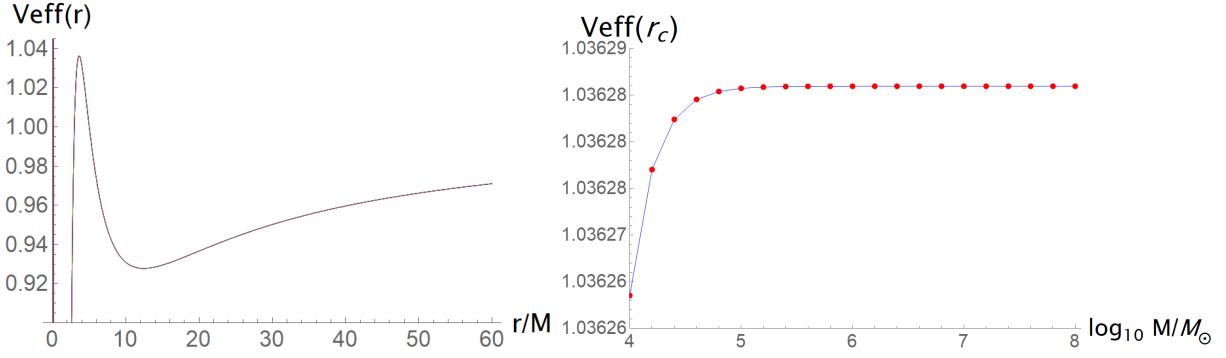


Figura 15: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ variando M para partículas de prueba masivas $\mathcal{L} = -1$. Los parámetros son: $L = 4M$, $Q = 0.5M$ y $M/M_\odot = \{10^5, 10^6, 10^7, 10^8\}$. Encontramos mínimos del potencial para estos parámetros. Izquierda: el efecto de Euler-Heisenberg apenas es visible al variar M . Derecha: la masa varía de $M = 10^4 M_\odot$ a $M = 10^8 M_\odot$ en pasos de $10^{1/5} M_\odot$. La carga apantallada está evaluada en el máximo del potencial en r_c . El máximo del potencial $V_{\text{eff}}(r_c)$ es disminuido por el efecto de Euler-Heisenberg, para masas más pequeñas.

La primera condición indica un punto de retorno en la trayectoria de la partícula de prueba. La segunda corresponde a los mínimos y máximos del potencial efectivo, los cuales, como se mencionó, están respectivamente asociados a las órbitas circulares estables e inestables. Explícitamente, estas condiciones están dadas por

$$(1 - E^2)r_n^4 - 2Mr_n^3 + (L^2 + \tilde{Q}_n^2)r_n^2 + 2ML^2r_n + \tilde{Q}_n^2L^2 = 0, \quad (3.24)$$

$$r_n^3 - \frac{L^2 + \tilde{Q}_n^2}{M}r_n^2 + 3L^2r_n - \frac{2\tilde{Q}_n^2L^2}{M} = 0, \quad (3.25)$$

en donde $\tilde{Q}_n$ es la carga apantallada (3.6), que en este caso estará evaluada en el radio de la correspondiente órbita circular del caso de Reissner-Nordström.

La idea es la siguiente. Si una partícula de prueba alcanza y se mantiene en una órbita circular en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, y nubes de pares virtuales son producidas por un efecto de Euler-Heisenberg, estas partículas de prueba sentirán localmente el efecto de la polarización del vacío vía el apantallamiento de la carga del agujero negro. Sin embargo, la magnitud de este apantallamiento depende del valor del campo eléctrico (3.7) en este punto, es decir a la distancia radial r_n .

El radio r_n es una de las raíces reales y positivas del polinomio cúbico (3.25). Éstas pueden encontrarse analíticamente mediante el método de Cardano [75] (véase Apéndice A), resultando

$$\frac{r_n}{M} = \mathcal{R} + 2\sqrt{\mathcal{D}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \mathcal{B} + \frac{2}{3} n\pi \right), \quad n = 0, 1, 2, \quad (3.26)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{L^2 + \tilde{Q}_n^2}{3M^2}, & \mathcal{D} &= \mathcal{R}^2 - \frac{L^2}{M^2}, \\ \mathcal{B} &= \left[\mathcal{R}^3 - \frac{L^2}{2M^4}(L^2 - \tilde{Q}_n^2) \right] \mathcal{D}^{-3/2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

El subíndice n denota cada una de las raíces del polinomio cúbico. La solución $n = 0$ usualmente coincide con la distancia radial r_s de la órbita circular estable (el mínimo del potencial), mientras que la solución $n = 2$, con el radio r_c de la órbita circular inestable (máximo del potencial). La carga apantallada para una partícula que se encuentra en r_s , estará evaluada en el radio de la órbita circular estable de Reissner-Nordström, denotado como $r_{s\text{RN}}$, el cual a su vez es la solución (3.26) con $n = 0$ y para el caso lineal, es decir, con Q en lugar de $\tilde{Q}_n$. De manera análoga, para una partícula de prueba en r_c , el apantallamiento es evaluado en $r_{c\text{RN}}$, el cual corresponde a la solución (3.26) con $n = 2$ y Q .

La Tabla 1 presenta el efecto de Euler-Heisenberg en los radios de las órbitas circulares estables e inestables de partículas de prueba neutras y masivas. El radio de la órbita estable apenas se contrae,

mientras que el de la inestable sí crece. Esto debido a que el máximo del potencial se encuentra más cerca del agujero negro que el mínimo. El efecto también es mayor a medida que la carga Q del agujero negro aumenta. Finalmente, de las ecuaciones (3.24) y (3.25), la energía y el momento angular de una partícula de prueba, en términos de r_n y $\tilde{Q}$ están dados por

$$L^2 = \frac{r_n^2(Mr_n - \tilde{Q}^2)}{r_n^2 - 3Mr_n + 2\tilde{Q}^2}, \quad (3.28)$$

$$E^2 = \frac{(r_n^2 - 2Mr_n + \tilde{Q}^2)^2}{r_n^2(r_n^2 - 3Mr_n + 2\tilde{Q}^2)}. \quad (3.29)$$

Tabla 1: El radio de la órbita circular estable r_s y el de la inestable r_c , para un momento angular fijo de la partícula de prueba $L = 4M$, orbitando un agujero negro cargado de masa $M = 10^4 M_\odot$ y variando el valor de la carga Q . La órbita circular estable se encoje, mientras que la inestable crece. En esta última, el efecto es más visible, pues está más cerca del agujero negro. El efecto es mayor para cargas mayores.

Q/M	$r_{s\text{RN}}/M$	r_s/M	$r_{c\text{RN}}/M$	r_c/M
0	12	12	4	4
0.4	12.2875032397	12.2874995822	3.76172757151	3.76207769511
0.5	12.4445459138	12.444537594	3.62827573829	3.62926426927
0.6	12.6324529087	12.6324370222	3.46430937001	3.46679897762
0.7	12.8493802318	12.8493533984	3.26711179011	3.27308977367
0.8	13.0935240652	13.0934826753	3.03031429272	3.04484143439
0.9	13.3631933343	13.363133794	2.73852052206	2.77734467066
1	13.6568542495	13.6567731932	2.34314575051	2.48221432418

3.2.2. Órbita más cercana (ISCO)

El caso en el que las soluciones (3.26) están degeneradas, corresponde a la órbita circular estable más interna (ISCO, *innermost stable circular orbit*). Esto ocurre cuando el discriminante $\Delta = \sqrt{4\mathcal{D}^3(\mathcal{B}^2 - 1)}$ de la cúbica se anula, es decir cuando $\mathcal{B}^2 = 1$. Usando su definición (3.27), podemos obtener, para un valor fijo de la carga $\tilde{Q}_n$, el valor del momento angular L_i que satisface esta condición. Otra forma de calcular L_i es la siguiente [74]. El radio r_i de la ISCO satisface la condición extremal sobre el potencial efectivo

$$V''_{\text{eff}}(r_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2Mr_i^3 - 3\tilde{Q}_i^2 r_i^2 - L_i^2 (3r_i^2 - 12Mr_i + 10\tilde{Q}_i^2) = 0, \quad (3.30)$$

la cual, junto con la relación (3.28), para $r_n = r_i$ y $L = L_i$, resulta en el polinomio cúbico para r_i ,

$$r_i^3 - 6Mr_i^2 + 9\tilde{Q}_i^2 r_i - 4\tilde{Q}_i^4/M = 0, \quad (3.31)$$

que sólo depende en los parámetros del agujero negro, Q y M , y la constante de estructura fina α . En este caso, la carga apantallada estará evaluada en la solución correspondiente $r_{i\text{RN}}$ del caso de Reissner-Nordström y estará denotada por $\tilde{Q}_i$. Por lo tanto, para un valor fijo de $\tilde{Q}_i$ y M , uno puede sustituir la solución r_i del polinomio cúbico (3.31) y calcular, con (3.28), el correspondiente valor L_i del momento angular requerido para que una partícula de prueba alcance la ISCO. La Tabla 2 muestra el efecto de Euler-Heisenberg en el radio de la ISCO y en el momento angular asociado a ella. El tamaño de la ISCO crece, y un valor mayor del momento angular es necesario para alcanzarla, aunque el efecto en el último es pequeño. La ISCO que alcanzaría una partícula con cierto momento angular, sería más externa, si hay nubes de pares virtuales alrededor del agujero negro cargado.

Tabla 2: El radio de la ISCO para un valor fijo de la masa del agujero negro de $M = 10^4 M_\odot$ y variando la carga Q . Se muestra además el momento angular correspondiente requerido para que la partícula de prueba alcance esta órbita. La polarización del vacío de Euler-Heisenberg incrementa el radio de la ISCO.

Q/M	$L_{i_{\text{RN}}}/M$	$r_{i_{\text{RN}}}/M$	$\tilde{Q}_i/M$	L_i/M	r_i/M
0	$\sqrt{12}$	6	0	$\sqrt{12}$	6
0.4	3.38472087992	5.75278042865	0.399946012601	3.38474299569	5.75284924229
0.5	3.33773707112	5.60664342765	0.499883124927	3.33779928428	5.60683687591
0.6	3.27765312724	5.41984472573	0.599768724302	3.27780872462	5.42032846541
0.7	3.20222027898	5.18522733245	0.699561624231	3.20258902198	5.18637505398
0.8	3.10779315774	4.89076667057	0.7991732279	3.10866639381	4.89349654513
0.9	2.98786442196	4.51374504672	0.898377431442	2.99006990606	4.52072772482
1	2.82842712475	4	0.99639102676	2.83518414474	4.02226704189

3.2.3. La segunda integración y las trayectorias

Para realizar una segunda integración de la ecuación (3.23), definimos la distancia radial inversa

$$u = \frac{1}{r}. \quad (3.32)$$

Para partículas masivas $\mathcal{L} = -1$, la integral a ser resuelta es

$$\pm\phi = \int \frac{du}{\sqrt{[E^2 - 1 + 2Mu]/L^2 - \left(1 + \tilde{Q}^2/L^2\right)u^2 + 2Mu^3 - \tilde{Q}^2u^4}}. \quad (3.33)$$

El polinomio argumento de la raíz cuadrada en el denominador, se anula en las raíces de (3.25), como lo es la posición de la órbita circular estable $u_s = 1/r_s$. De esta manera, la integral (3.33) resulta

$$\pm\phi = \int \frac{du}{(u - u_s)\sqrt{-\tilde{Q}^2u^2 + 2\left(M - \tilde{Q}^2u_s\right)u + u_s\left(M - \tilde{Q}^2u_s - M/(L^2u_s^2)\right)}}. \quad (3.34)$$

Usando el cambio de variable $\xi = (u - u_s)^{-1}$, se obtiene

$$\mp\phi = \int \frac{d\xi}{\xi\sqrt{-\tilde{Q}^2 + \beta\xi + \delta\xi^2}}, \quad (3.35)$$

con $\beta = 2\left(M - 2\tilde{Q}^2u_s\right)$ y $\delta = u_s\left(3M - 4\tilde{Q}^2u_s - M^2/(L^2u_s^2)\right)$. La solución está dada por

$$\begin{aligned} \mp\phi &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \left[2\sqrt{\delta\left(-\tilde{Q}^2 + \beta\xi + \delta\xi^2\right)} + 2\delta\xi + \beta \right], & \delta > 0, \\ \mp\phi &= -\frac{1}{\sqrt{-\delta}} \arcsin \left[\frac{2\delta\xi + \beta}{\sqrt{4\delta\tilde{Q}^2 + \beta^2}} \right], & \delta < 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

La Figura 16 presenta las trayectorias de las partículas de prueba masivas en el espacio-tiempo del agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg. Por claridad, en la figura hemos cambiado las notaciones de los radios involucrados. El del horizonte de eventos r_+ está denotado por r_h , mientras que el del horizonte interno r_- por $r_{h_{\text{int}}}$ y el de la ISCO r_i por r_{isco} . Las notaciones de los radios de las órbitas circulares estables e inestables, se mantienen, es decir, r_s y r_c respectivamente.

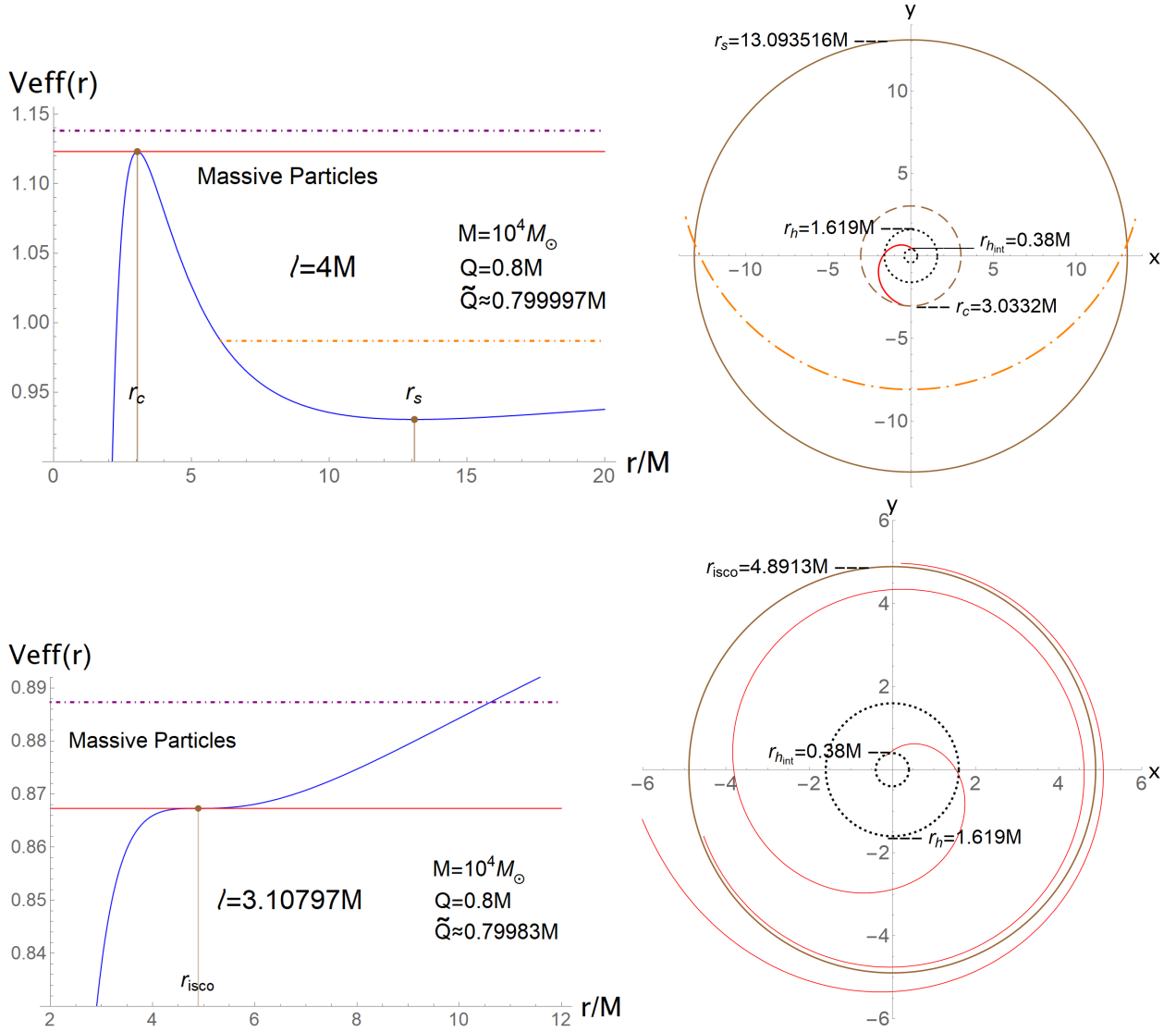


Figura 16: Izquierda: potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r)$ para partículas de prueba neutras masivas $\mathcal{L} = -1$, variando el momento angular L . Los parámetros del agujero negro son $Q = 0.8M$ y $M = 10^4 M_\odot$. Derecha, las trayectorias correspondientes a cada potencial. El círculo de línea continua corresponde a la órbita circular estable de radio r_s , mientras que aquél de línea discontinua a la órbita circular inestable de radio r_c . Los círculos punteados son el horizonte de eventos de radio r_h y el horizonte de Cauchy de radio $r_{h_{\text{int}}}$. La línea mixta (raya-punto) es la trayectoria de una partícula masiva, la cual se acerca al agujero negro, encuentra un punto de retorno y escapa de nuevo a infinito. Finalmente, la línea continua corresponde a la trayectoria de una partícula que alcanza la órbita circular inestable y luego cae al interior del agujero negro. Las figuras superiores presentan el caso $L = 4M$, para el cual hay un máximo y un mínimo del potencial. Las figuras inferiores corresponden al caso de la ISCO, con $L = 3.10797M$. La carga $\tilde{Q}$ está apantallada en la ISCO (ver Tabla 2).

En el lado izquierdo de la Fig. 16, se presentan los potenciales efectivos, de los cuales se pueden describir cualitativamente las trayectorias. Del lado derecho, mostramos ejemplos de tales trayectorias. En las figuras superiores, se presenta un caso en el que el potencial efectivo cuenta con un máximo y un mínimo, dando lugar a la existencia de órbitas circulares estables e inestables (3.26). El máximo corresponde a la inestable en $r_c = 3.0332M$, mientras que el mínimo a la estable en $r_s = 13.093516M$. La línea mixta ejemplifica el caso en que una partícula de prueba se acerca al agujero negro, encuentra un punto de retorno y se escapa a $r \rightarrow \infty$. Este punto de retorno se encuentra entre el máximo y el mínimo del potencial, i.e., entre las órbitas circulares. También se muestra un ejemplo de una partícula que alcanza el máximo del potencial, por lo que orbita en la órbita circular inestable, y después cae al agujero negro. Esta partícula es capturada, cruza el horizonte de eventos (3.11) de radio $r_h = 1.619M$ y alcanza al horizonte interno en $r_{h_{\text{int}}} = 0.38M$.

En las figuras inferiores se presenta el caso en que la solución de las órbitas circulares está degenerado, es decir, el de la ISCO. Aquí, la partícula se acerca al agujero negro, alcanza la ISCO en $r_{\text{isco}} = 4.8913M$ y después es capturada por el agujero negro. Dado que corresponde a un agujero negro con los mismos parámetros que en las figuras superiores, los radios de los horizontes son los mismos. Las trayectorias están dadas por la solución (3.36), graficadas en coordenadas polares (recordemos que estamos en el plano ecuatorial). Las trayectorias pueden estudiarse cualitativamente mediante el análisis de los potenciales efectivos o analíticamente/numéricamente, mediante la integración de la ecuación geodésica.

Las trayectorias en el espacio-tiempo del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg presentan las mismas propiedades que las del caso de Reissner-Nordström. Sin embargo, los tamaños de las órbitas circulares y de los horizontes, se ven modificados por la presencia de las nubes de cargas virtuales. Esto puede alterar la trayectoria de una partícula que, por ejemplo, orbita al agujero negro en el momento en el que se genera la producción de pares. En el caso de la órbita circular inestable, el efecto es mayor, y, dada la inestabilidad, una alteración de este tipo puede causar su consecuente captura o escape. Este efecto es meramente geométrico, por medio del apantallamiento de la carga. En el caso en el que las partículas cuenten con carga eléctrica, existirá una fuerza electromagnética adicional.

3.3. Trayectorias de partículas de prueba cargadas

En el caso de una partícula de prueba con carga q y masa μ , la ecuación geodésica incluye la contribución de la fuerza de Lorentz,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\delta}{d\tau} = -\frac{q}{\mu} F^\alpha{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.37)$$

Ésta puede ser reescrita, usando las ecuaciones materiales (2.14) de la electrodinámica de Euler-Heisenberg, de la siguiente manera [49]:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\delta}{d\tau} = -\frac{q}{\mu} \left(1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right) P^\alpha{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (3.38)$$

El Lagrangiano del cual esta ecuación geodésica proviene está dado por [74]

$$\mathcal{L} = \left[-f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 \dot{\phi}^2 \right] - \frac{2\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r} \dot{t}, \quad (3.39)$$

en donde la carga de prueba q también está apantallada por las nubes de cargas virtuales que rodean al agujero negro, i.e.,

$$q \rightarrow \tilde{q} = q \left[1 - \frac{\alpha}{15\pi} D_Q^2 \right]^{1/2}. \quad (3.40)$$

No obstante, éste se interpreta como un apantallamiento inducido por la carga del agujero negro.

El momento angular de la partícula de prueba cargada sigue siendo $L = r^2 \dot{\phi}$, pero la cantidad conservada asociada con su energía ahora incluye al potencial Coulombiano con las cargas apantalladas $\tilde{Q}$ y $\tilde{q}$,

$$\mathcal{E} = f(r)\dot{t} + \frac{\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r}. \quad (3.41)$$

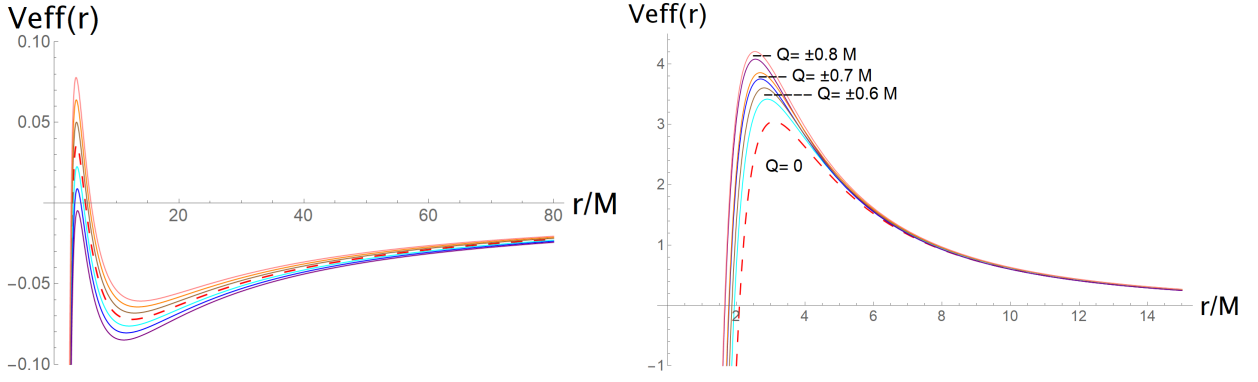


Figura 17: Izquierda: el potencial efectivo $V_{\text{eff}}(r) = R(r)$ variando la carga q de la partícula de prueba. Los parámetros son: $L = 4M$, $\mathcal{E} = 1$, $M = 10^4 M_\odot$ y $Q = 0.5M$. La línea discontinua en el centro corresponde al caso de la partícula neutra $q = 0$. Las curvas superiores corresponden a cargas de prueba positivas, mientras que las inferiores a cargas de prueba negativas. Se usaron los valores $q/\mu = \{-0.15, -0.10, -0.05, 0, 0.05, 0.10, 0.15\}$. Derecha: el potencial $V_{\text{eff}}(r) = R(r)$ variando la carga Q del agujero negro. Los parámetros son: $L = 10M$, $\mathcal{E} = 1$, $q/\mu = 0.1$ y $M = 10^5 M_\odot$. La línea discontinua es el caso de Schwarzschild $Q = 0$. El potencial crece conforme $|Q|$ aumenta, pero para cada valor de $|Q|$ hay una curva superior y una inferior, que corresponde respectivamente a un valor de Q positivo y a uno negativo. Se usaron los valores $Q/M = \{-0.8, -0.7, -0.6, 0, 0.6, 0.7, 0.8\}$.

Para $q = 0$, las energías (3.18) y (3.41) coinciden, i.e., $\mathcal{E} = E$. Adicionalmente, las componentes de la ecuación geodésica para partículas de prueba cargadas (3.38) son:

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{f'(r)}{f(r)} \dot{r} \dot{t} &= \frac{\dot{r}}{f(r)} \frac{\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r^2}, \\ \ddot{r} + \frac{1}{2} f(r) f'(r) \dot{t}^2 - \frac{f'(r)}{2f(r)} \dot{r}^2 - r f(r) \dot{\phi}^2 &= \frac{\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r^2} f(r) \dot{t}, \\ \ddot{\phi} + 2l \frac{\dot{r}}{r^3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3.1. El potencial efectivo y los puntos de retorno

Usando las cantidades conservadas, la ecuación de movimiento de la componente- r es la ecuación tipo conservación de la energía

$$\dot{r}^2 + R(r) = 0, \quad (3.43)$$

con la función

$$R(r) = f(r) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right) - \left[\mathcal{E} - \frac{\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r} \right]^2. \quad (3.44)$$

Ésta funge como potencial efectivo, i.e., $R(r) = V_{\text{eff}}(r)$. Para observar el efecto de la fuerza de Lorentz, presentamos en la Fig. 17, cómo el potencial crece o decrece dependiendo del signo de la carga del agujero negro y de la carga de la partícula de prueba. Cuando ambas, $\tilde{Q}$ y $\tilde{q}$, tienen el mismo signo, se cumple $\tilde{q}\tilde{Q} > 0$, y el potencial es mayor al de una partícula neutra, debido a la acción de una fuerza de repulsión. Cuando los signos de ambas cargas son opuestas, se tiene $\tilde{q}\tilde{Q} < 0$, y el potencial decrece debido a una fuerza de atracción. Sin embargo, y como es de esperarse, el efecto causado por la carga de prueba es menor que aquél causado por la carga del agujero negro. Éste último también se muestra en la Fig. 17.

A partir de la ecuación (3.43), podemos analizar los puntos de retorno de la trayectoria de la carga de prueba. La existencia de máximos y mínimos del potencial implica la posibilidad de órbitas circulares estables e inestables, como se analizó en el caso de las partículas de prueba neutras. Un punto de retorno de una órbita está dado por la condición $\dot{r} = 0$, el cual de la ecuación (3.43), corresponde a encontrar las raíces reales y positivas del polinomio de orden cuatro en r definido por $R(r) = 0$. Sin embargo, aunque las raíces de un polinomio cuártico pueden ser encontradas numéricamente, el

estudiarlas analíticamente resulta más complejo que el método de Cardano. En cambio, preferimos seguir el desarrollo presentado por Grunau et al. [76], el cual define otros potenciales efectivos como solución a un polinomio cuadrático en $\mathcal{E}$, i.e.,

$$0 = \dot{r} = R(r) = (\mathcal{E} - V_{\text{eff}}^+)(\mathcal{E} - V_{\text{eff}}^-), \quad (3.45)$$

con

$$V_{\text{eff}}^\pm(r) = \frac{\tilde{q}\tilde{Q}}{\mu r} \pm \sqrt{\frac{f(r)}{r^2} [r^2 + L^2]}. \quad (3.46)$$

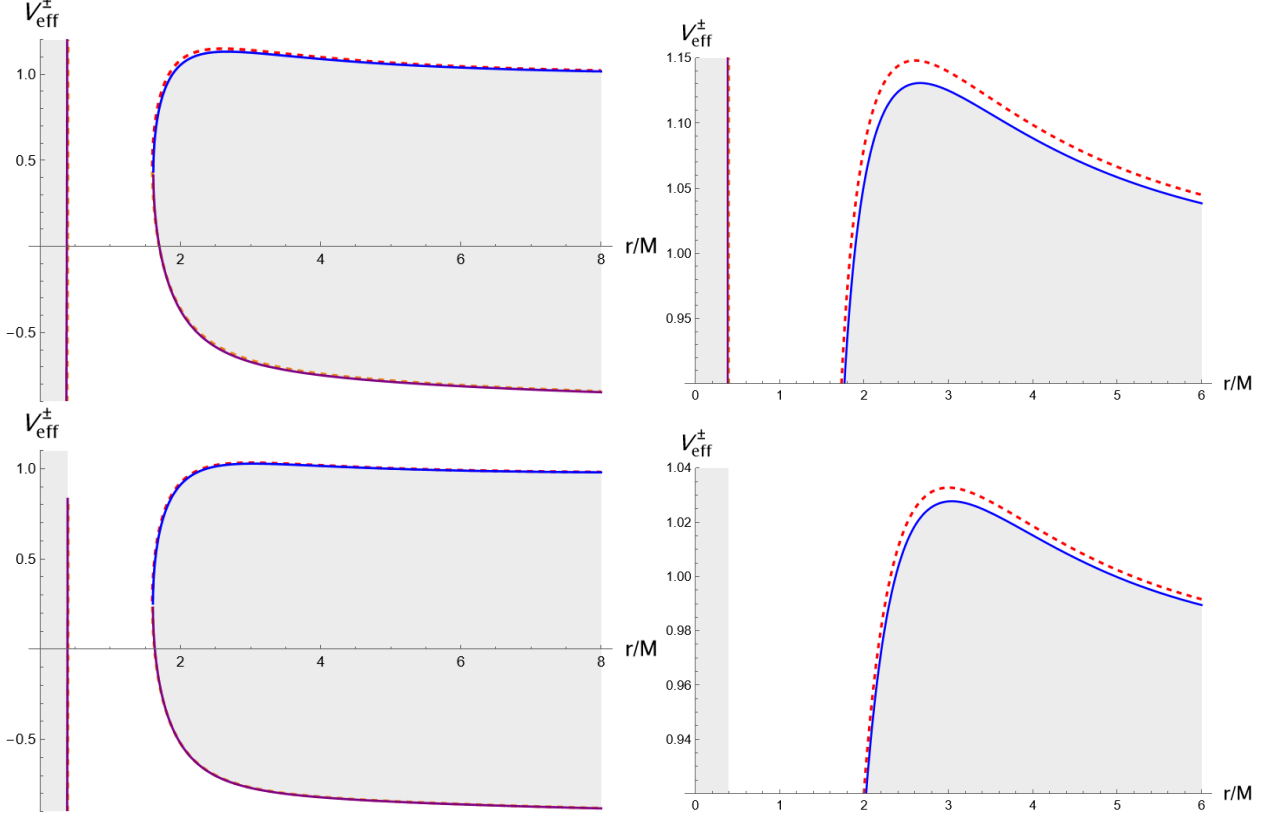


Figura 18: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}^\pm$ para $q = 0.5\mu$ (figura inferior) y $q = 0.9\mu$ (figura superior), con un valor fijo del momento angular $L = 3M$. Los parámetros del agujero negro son $Q = 0.8M$ y $M = 10^4 M_\odot$. La figura a la derecha muestra el zoom de la figura correspondiente a la izquierda. El caso de Reissner-Nordström es representado por líneas discontinuas y el de Euler-Heisenberg por líneas continuas.

Estos potenciales efectivos también dependen del producto de las cargas apantalladas $\tilde{q}$ y $\tilde{Q}$. Cuando las cargas tienen el mismo signo, $\tilde{q}\tilde{Q} > 0$, el potencial V_{eff}^+ es siempre positivo. Cuando los signos son opuestos, $\tilde{q}\tilde{Q} < 0$, ambos potenciales $V_{\text{eff}}^\pm$ pueden tener valores negativos, lo que correspondería a valores negativos de la energía. Más aún, los potenciales dependen del momento angular de la carga de prueba. Si L incrementa, el potencial V_{eff}^+ crece, pero V_{eff}^- adquiere un valor más negativo.

Ambos potenciales $V_{\text{eff}}^\pm$ coinciden en los horizontes $r_\pm$, en donde la función métrica se anula, i.e., $f(r_\pm) = 0$. El horizonte de eventos r_+ encierra una región interior incomunicable con un mundo exterior asintóticamente plano, y en principio, una partícula cruzando el horizonte de eventos migraría a un mundo diferente [76]. Sin embargo, la región entre el horizonte de eventos y el de Cauchy, $r_- < r < r_+$, no forma parte del dominio de (3.46), ya que la función métrica en esa región es negativa $f(r) < 0$, lo que además implica $R \neq 0$. Es decir, no puede haber puntos de retorno entre ambos horizontes, y sólo hay un punto de retorno en un horizonte si la energía de la partícula de prueba cargada es igual a la energía Coulombiana, $\mathcal{E} = \tilde{q}\tilde{Q}/(\mu r_\pm)$.

Las Figuras 18 y 19 presentan el comportamiento de estos potenciales para diferentes valores de los parámetros de la carga de prueba. Las áreas grises en las figuras indican zonas prohibidas. Hay una

barrera de potencial localizada en el intervalo $0 < r \leq r_-$, mientras que afuera del horizonte de eventos, en la región $r_+ \leq r < \infty$, existe la posibilidad de órbitas cerradas estables e inestables. Su límite en infinito es $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}^\pm = \pm 1$.

En cuanto al efecto de la polarización del vacío, para cargas q y Q con el mismo signo, el potencial V_{eff}^+ es disminuido por el efecto de Euler-Heisenberg, ya que ambas cargas son apantalladas por las nubes de cargas virtuales, resultando en un decremento de la fuerza eléctrica ($|\tilde{q}\tilde{Q}| < |qQ|$). Además, el efecto de Euler-Heisenberg es mayor cerca del máximo del potencial que del mínimo, debido a que el primero se encuentra más cercano al agujero negro. Asimismo, el efecto crece conforme la carga de la partícula de prueba aumenta.

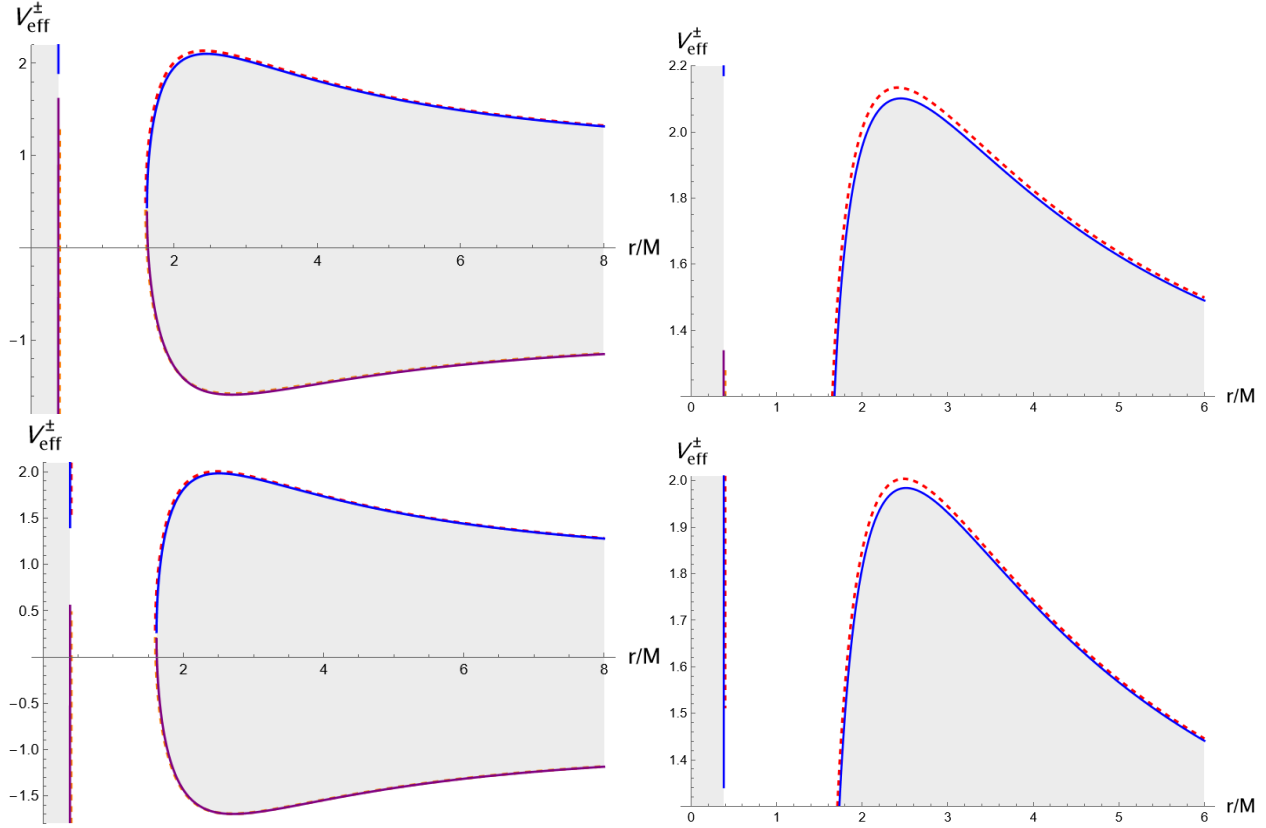


Figura 19: El potencial efectivo $V_{\text{eff}}^\pm$ para $q = 0.5\mu$ (figura inferior) y $q = 0.9\mu$ (figura superior), con un valor fijo del momento angular $L = 8M$. Los parámetros del agujero negro son $Q = 0.8M$ y $M = 10^4 M_\odot$. La figura a la derecha muestra el zoom de la figura correspondiente a la izquierda. El caso de Reissner-Nordström es representado por líneas discontinuas y el de Euler-Heisenberg por líneas continuas.

3.3.2. La segunda integración

Con la finalidad de realizar una segunda integración de la componente- r de la ecuación geodésica, (3.44), usaremos la distancia radial inversa (3.32), $u = 1/r$. La integral a resolver es

$$\pm\phi = \int \frac{du}{\sqrt{[\mathcal{E}^2 - 1 + 2(M - \mathcal{E}\tilde{Q}\tilde{q}/\mu)u]/L^2 - \left[1 + \tilde{Q}^2/L^2 - \tilde{q}^2\tilde{Q}^2/(\mu^2 L^2)\right]u^2 + 2Mu^3 - \tilde{Q}^2u^4}}. \quad (3.47)$$

Análogamente, el polinomio argumento de la raíz cuadrada se anula en los puntos críticos u_{ch} , por lo que la integral (3.47) se puede reescribir como

$$\pm\phi = \int \frac{du}{(u - u_{ch})\sqrt{-\tilde{Q}^2u^2 + 2\left(M - \tilde{Q}^2u_{ch}\right)u + u_{ch}\left(M - \tilde{Q}^2u_{ch} - (M - \mathcal{E}\tilde{Q}\tilde{q}/\mu)/(L^2u_{ch}^2)\right)}}. \quad (3.48)$$

Usando el cambio de variable $\xi = (u - u_{ch})^{-1}$, la integral a resolver es equivalente a aquella resuelta anteriormente (3.35), pero en este caso con las cantidades $\delta = u_{ch} \left(3M - 4\tilde{Q}^2 u_{ch} - (M - \mathcal{E}\tilde{Q}\tilde{q}/\mu)/(L^2 u_{ch}^2) \right)$ y $\beta = 2 \left(M - 2\tilde{Q}^2 u_{ch} \right)$. En consecuencia, la solución es (3.36) con los valores correspondientes de β y δ . Las trayectorias son análogas al caso de partículas de prueba neutras, sólo que las órbitas circulares y los puntos de retorno se ven ligeramente modificados por la fuerza de Lorentz adicional, como se dedujo del análisis de los potenciales efectivos. A continuación presentamos un caso más interesante, el de los fotones. Éste da lugar al efecto de lensing gravitacional, el cual estudiamos con más detalle.

3.4. Trayectoria de los fotones

Como se explica en la Sec. 2.4, en la electrodinámica no-lineal de Euler-Heisenberg los fotones se propagan a través de geodésicas nulas de la pseudo-métrica de Plebański (2.22),

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2} (4\pi T^{\mu\nu}), \quad (3.49)$$

la cual difiere de la métrica geométrica $g^{\mu\nu}$ por incluir al tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. Sustituyendo (2.18) y los invariantes (3.4), $\tilde{t} = 0$ y $2\tilde{s} = D_Q^2 D_c^2$, ésta puede escribirse en términos de las variables de Plebański como

$$\gamma^{\mu\nu} = \left(1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right) g^{\mu\nu} + \frac{20\alpha}{225\pi D_c^2} P^{\mu\beta} P^\nu_\beta. \quad (3.50)$$

Usando la métrica efectiva, la condición nula, $\gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$, resulta

$$\left[g_{\mu\nu} - \frac{20\alpha^2}{225\pi D_c^2} (4\pi T_{\mu\nu}) \right] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3.51)$$

En el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$), la energía y el momento angular están dados por

$$E = \gamma_{tt} \dot{t} = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] f(r) \dot{t}, \quad L = \gamma_{\phi\phi} \dot{\phi} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] r^2 \dot{\phi}. \quad (3.52)$$

Asimismo, sustituyendo estas constantes de movimiento en la condición nula (3.51), se obtiene la ecuación de movimiento para la coordenada- r

$$\dot{r} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \sqrt{\mathcal{R}(r)}, \quad (3.53)$$

con la función potencial

$$\mathcal{R}(r) = E^2 - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{f(r)}{r^2} L^2. \quad (3.54)$$

En el caso de los fotones, el potencial efectivo no cuenta con un mínimo, por lo que no existen órbitas circulares estables. Sin embargo, para ciertos valores de los parámetros, pueden haber máximos que corresponden a órbitas circulares inestables.

Para comparar con el caso de Reissner-Nordström, de la condición nula se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{r}^2 + \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{f(r)}{r^2} (r^2 \dot{\phi})^2 = (f(r) \dot{t})^2. \quad (3.55)$$

Definamos un potencial efectivo análogo al de Reissner-Nordström,

$$V_{\text{eff}} = \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{f(r)}{r^2} L_{\text{RN}}^2 \quad (3.56)$$

escrito en términos del momento angular del caso lineal, $L_{\text{RN}} = r^2 \dot{\phi}$. Este potencial efectivo es una buena aproximación para comparar ambos casos, dado que las constantes de movimiento de Einstein-Euler-Heisenberg (3.52) se comportan asintóticamente como las de Reissner-Nordström. Los efectos

de la polarización del vacío se reflejan en la función métrica $f(r)$ y, principalmente, en el término adicional que incluye la corrección $-\frac{20\alpha}{225\pi}D_Q^2$. La trayectoria del fotón no sólo se ve modificada por el apantallamiento de la carga del agujero negro, sino por su propagación en el medio dieléctrico efectivo.

En el lado izquierdo de la Fig. 20 se presenta el potencial efectivo variando la carga Q del agujero negro. Conforme Q aumenta, el potencial crece. Además, siempre se encuentra por debajo del caso de Reissner-Nordström. Ésto se ejemplifica en el lado derecho de la figura, en donde se varía la masa M del agujero negro. Mientras que no es relevante para agujeros negros supermasivos, el efecto de Euler-Heisenberg es más notorio para masas de $M = 10^4 M_\odot$. El efecto se observa sobre todo en el máximo del potencial, el cual corresponde a las órbitas circulares inestables. A medida que un fotón se acerca al agujero negro, su trayectoria se ve afectada por la polarización del vacío, modificando el radio de la órbita circular inestable que sigue. Adicionalmente, no existen órbitas circulares estables afuera del horizonte de eventos, dado que no hay mínimos del potencial en esa región.

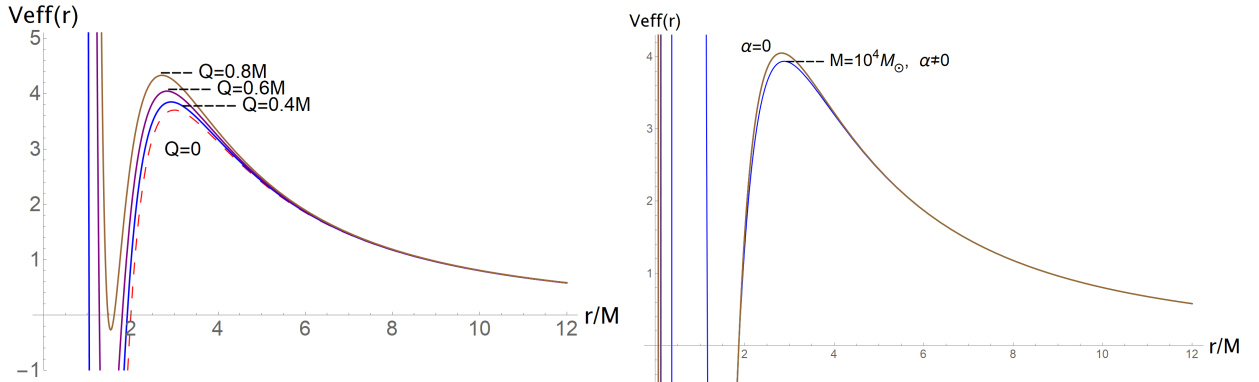


Figura 20: Izquierda: el potencial efectivo (3.56), para diferentes valores de la carga Q del agujero negro. Los parámetros son: $L_{RN} = 10M$, $M = 10^4 M_\odot$, y $Q/M = \{0, 0.4, 0.6, 0.8\}$. La línea discontinua corresponde al caso de Schwarzschild $Q = 0$. Derecha: el potencial efectivo variando la masa M del agujero negro y para valores fijos de la carga $Q = 0.5M$ y del momento angular $L_{RN} = 10M$. Los casos $M/M_\odot = \{10^5, 10^6\}$ se encuentran muy cercanos al caso lineal $\alpha = 0$, pero los efectos de Euler-Heisenberg son visibles para $M = 10^4 M_\odot$.

3.4.1. Órbitas circulares inestables y las trayectorias

Análogamente al caso de partículas masivas, las condiciones extremas para que un fotón alcance la órbita circular inestable son $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. La primera condición se traduce a la condición sobre el potencial $\mathcal{R}(r_c) = 0$, del cual podemos obtener, a primer orden en α , el parámetro de impacto

$$\eta^2 \equiv \frac{L}{E} = \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{r_c^2}{f(r_c)}. \quad (3.57)$$

La segunda condición, $\ddot{r} = 0$, se traduce a la condición sobre el potencial $\mathcal{R}'(r_c) = 0$, de la cual se obtiene el polinomio cuadrático

$$r_c(r_c - 3M) + 2\tilde{Q}^2 = 0, \quad (3.58)$$

recordando que los términos no-lineales son considerados constantes de acuerdo con la interpretación de QED. De esta manera, el radio de la órbita circular inestable para los fotones es la raíz más grande del polinomio (3.58), es decir,

$$r_c = \frac{3}{2}M \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \left(\frac{\tilde{Q}_c}{M} \right)^2} \right). \quad (3.59)$$

La otra raíz se encuentra siempre dentro del horizonte de eventos, por lo que no es de nuestro interés en este momento. La carga apantallada $\tilde{Q}_c$ está evaluada en el radio de la órbita circular inestable de

Reissner-Nordström, denotado por r_{cRN} , el cual a su vez es la solución (3.59) para el caso lineal, i.e., con Q en lugar de $\tilde{Q}_c$.

Para realizar una segunda integración de la ecuación (3.53) y estudiar las trayectorias, usamos nuevamente la distancia radial inversa (3.32), $u = 1/r$. La integral a resolver es

$$\pm\phi = \int \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] du}{\sqrt{-\tilde{Q}^2 u^4 + 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{\eta_Q^2}}}, \quad (3.60)$$

$$= \int \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] du}{(u - u_c) \sqrt{-\tilde{Q}^2 u^2 + 2(M - \tilde{Q}^2 u_c)u + u_c(M - \tilde{Q}^2 u_c)}}. \quad (3.61)$$

con $\eta_Q = [1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2]\eta$, proporcional al parámetro de impacto (3.57). En este caso, se factorizó el término $(u - u_c)$, debido a que el punto en el que el polinomio, argumento dentro de la raíz en (3.60), se anula, es la órbita circular inestable $u_c = 1/r_c$. Por lo tanto, usando el cambio de variable $\xi = (u - u_c)^{-1}$ e integrando, la solución es la función (3.36), con $\beta = 2(M - 2\tilde{Q}^2 u_c)$, $\delta = u_c(3M - 4\tilde{Q}^2 u_c)$, y considerando el término no-lineal, $[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2]$, adicional en el integrando de (3.61).

La Figura 21 muestra la diferencia entre las trayectorias de los fotones en el espacio-tiempo del agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg y aquellas en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström. Una vez más, usamos las notaciones de la Fig. 16 para los horizontes, es decir, $r_h = r_+$ es el horizonte de eventos y $r_{h_{\text{int}}} = r_-$ el horizonte interno. Aquí no hay órbitas circulares estables, y la órbita circular inestable está denotada por r_c . Del lado izquierdo, se presentan los respectivos potenciales efectivos (3.56). El máximo del potencial, el cual se encuentra en r_c , permite la existencia de puntos de retorno en la trayectoria radial de los fotones. Éste adquiere un valor inferior en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, como se discutió en la Fig. 20.

Del lado derecho de la Fig. 21, mostramos las trayectorias respectivas. En este ejemplo, los fotones alcanzan la órbita circular inestable, y después son capturadas por el agujero negro, cruzando el horizonte de eventos y alcanzando el horizonte interno. En ambos casos, las trayectorias son similares, pero las distancias involucradas se ven ligeramente modificadas por la polarización del vacío. En el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, el radio (3.11) del horizonte de eventos crece de $R_H = 1.6M$ a $r_h = 1.619M$, mientras que el radio del horizonte interno disminuye de $R_{H_{\text{int}}} = 0.4M$ a $r_{h_{\text{int}}} = 0.38M$. Análogamente, el radio de la órbita circular inestable aumentó de $r_{\text{cRN}} = 2.485M$ a $r_c = 2.4889M$.

La órbita circular inestable de los fotones, también es llamada anillo de luz, y da lugar a la frontera de la sombra del agujero negro, como se explicó en la Sec. 1.3.2. La presencia de las nubes de cargas virtuales alrededor del agujero negro, altera la trayectoria de los fotones que orbitan en el anillo de luz, causando su captura o escape. Aquellos fotones que escapan, pueden llegar a un observador lejano, el cual observa la sombra. Por lo tanto, el efecto de Euler-Heisenberg en el radio del anillo de luz, tiene consecuencias directas en la sombra observada.

Hemos presentado brevemente los efectos de la polarización del vacío en las trayectorias de partículas de prueba neutras, cargadas y de los fotones, en el espacio-tiempo del agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg. El efecto de Euler-Heisenberg en las trayectorias de las partículas neutras, se debe a un efecto meramente geométrico, causado por el apantallamiento de la carga del agujero negro por las nubes de cargas virtuales que lo rodean. El caso de las partículas cargadas implica una fuerza eléctrica adicional, y el efecto de Euler-Heisenberg también incluye el apantallamiento de la carga de prueba. Finalmente, las trayectorias de los fotones se ven principalmente modificadas por el hecho de que éstos se propagan en un medio dieléctrico efectivo, constituido por las mismas nubes de cargas virtuales que apantallan a las cargas reales. Todas las trayectorias fueron analizadas en el plano ecuatorial. A continuación, se presenta un análisis más detallado y general para el caso de los fotones, comenzando por mostrar las ecuaciones de movimiento no restringidas a $\theta = \pi/2$. Asociamos las constantes de movimiento a cantidades observables, analizamos la sombra del agujero negro y el lensing gravitacional, definiendo la llamada ecuación de la lente.

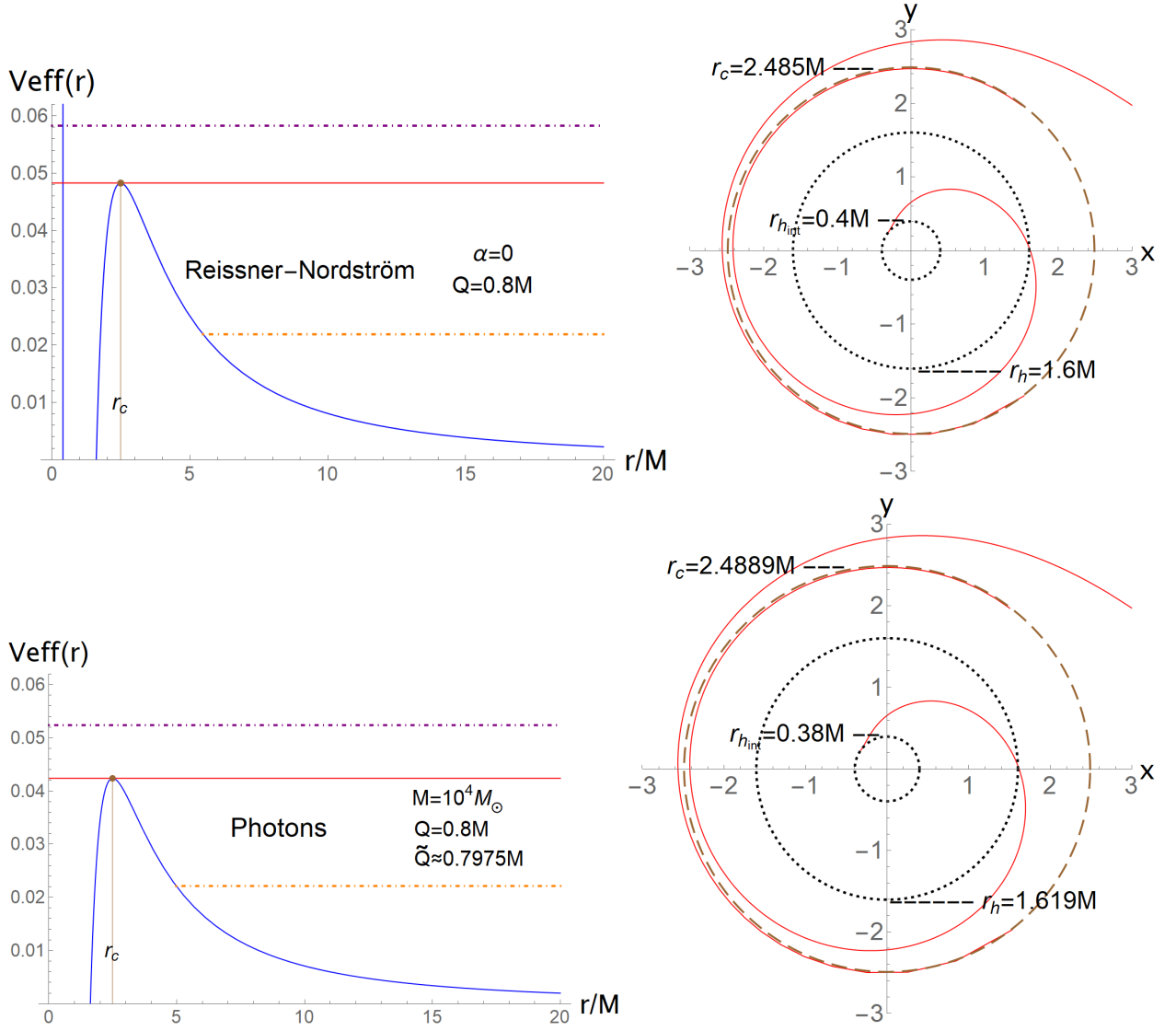


Figura 21: Izquierda: el potencial efectivo (3.56) para fotones, con la carga y masa del agujero negro $Q = 0.8M$ y $M = 10^4 M_\odot$. La presencia del máximo, permite la existencia de órbitas cerradas inestables y puntos de retorno. Derecha: las trayectorias correspondientes a cada potencial. El círculo de línea discontinua corresponde a la órbita circular inestable de radio r_c . Los círculos punteados son el horizonte de eventos de radio r_h y el horizonte de Cauchy de radio r_{int} . La línea continua corresponde a la trayectoria de una partícula que alcanza la órbita circular inestable y luego cae al interior del agujero negro. Las figuras superiores presentan el caso de Reissner-Nordström, mientras que las inferiores el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, con la carga $\tilde{Q}$ apantallada en r_c .

3.5. Lensing gravitacional y la sombra del agujero negro

Los estudios de lensing gravitacional suelen emplear el enfoque de thin-lens (lente delgada), el cual asume que la lente es una perturbación del espacio-tiempo de fondo. En este enfoque, los rayos de luz viajan en líneas rectas en todo lugar, menos en el plano de la lente, en donde ocurre el doblamiento de la luz. En la aproximación de thin-lens de campo débil, sólo se consideran ángulos de deflexión pequeños. No obstante, en campos gravitacionales intensos, como aquellos producidos por los agujeros negros, los rayos de luz se pueden doblar significativamente e incluso orbitar la lente múltiples veces. El modelo de thin-lens de campo fuerte [77, 78, 79], es el método más empleado para lensing gravitacional intenso. Describe cómo el ángulo de doblamiento se aproxima a infinito conforme los rayos de luz se acercan a la órbita circular inestable. Sin embargo, ambos modelos de thin-lens, el de campo débil y el de campo fuerte, asumen que tanto la fuente como el observador se encuentran en infinito, lo cual no suele ocurrir en escenarios astrofísicos reales.

El enfoque más general, desarrollado por Frittelli et al. [80, 81, 82, 83], se basa en el estudio exacto de las geodésicas nulas seguidas por el rayo de luz. En el enfoque de lens-exacto, el doblamiento de la luz no ocurre sólo en el plano de la lente, y las posiciones del observador y la fuente no están restringidas a infinito. De esta manera, este método nos permite estudiar una mayor variedad de condiciones astrofísicas, así como escenarios de lensing más complejos; por ejemplo, los efectos de campos gravitacionales intensos en la luz proveniente de fuentes muy cercanas a la lente, como lo son fuentes que yacen en discos de acreción, así como modificaciones a la propagación de la luz, debidas a influencias gravitacionales o electromagnéticas fuertes.

En nuestro caso particular, la luz se propaga a través de un medio dieléctrico, formado por las nubes de cargas virtuales producidas por el campo eléctrico del agujero negro. Como hemos visto, los efectos de Euler-Heisenberg son mayores a medida que nos acercamos más al agujero negro, por lo que el enfoque de lens-exacto resulta más conveniente. En la siguiente sección se resume, cómo se construye la ecuación de la lente dentro de este enfoque.

3.5.1. La ecuación de la lente

Para comenzar, consideremos el diagrama de lens-exacto de la Fig. 22. Las coordenadas del observador están denotadas por $x_0^a(\tau)$, en donde τ es el tiempo propio. El observador mide los rayos de luz que llegan a él desde geodésicas nulas pasadas, cuyas coordenadas en la esfera celestial del observador son denotadas por (η_1, η_2) . Las coordenadas de las geodésicas nulas x^a están parametrizadas por el parámetro afín s y satisfacen las ecuaciones de geodésicas nulas. Estas coordenadas locales están en función de la posición del observador, de las coordenadas celestiales y del parámetro afín, es decir, $x^a = x^a(x_0^a(\tau), \eta_1, \eta_2, s)$. Como de costumbre, x^0 es una coordenada temporaloide, mientras que las coordenadas x^i ($i = 1, 2, 3$) son espacialoides. Es posible reparametrizar las geodésicas en términos de x^1 , por ejemplo, realizando una inversión $x^1(x_0^a(\tau), \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow s(x_0^a(\tau), \eta_1, \eta_2, x^1)$, de la siguiente manera:

$$x^0 = x^0(\tau, \eta_1, \eta_2, x^1), \quad (3.62)$$

$$x^1 = x^1, \quad (3.63)$$

$$x^A = x^A(\tau, \eta_1, \eta_2, x^1), \quad A = 2, 3. \quad (3.64)$$

Cuando se estudia la trayectoria de la luz, se suele seguir el método de *backwards ray-tracing* (trazado del rayo hacia atrás), en donde la luz se propaga del observador a la fuente. Por lo tanto, el punto inicial es la posición del observador x_0^a , mientras que x^a determina la posición de la fuente. El rayo de luz llega a la posición del observador en un tiempo τ y dirección en la esfera celestial (η_1, η_2) . Si el valor de x^1 también puede determinarse a partir de alguna observación, la relación (3.62) corresponde a la ecuación del tiempo exacto de llegada, mientras que la relación (3.64) a la ecuación de la lente exacta.

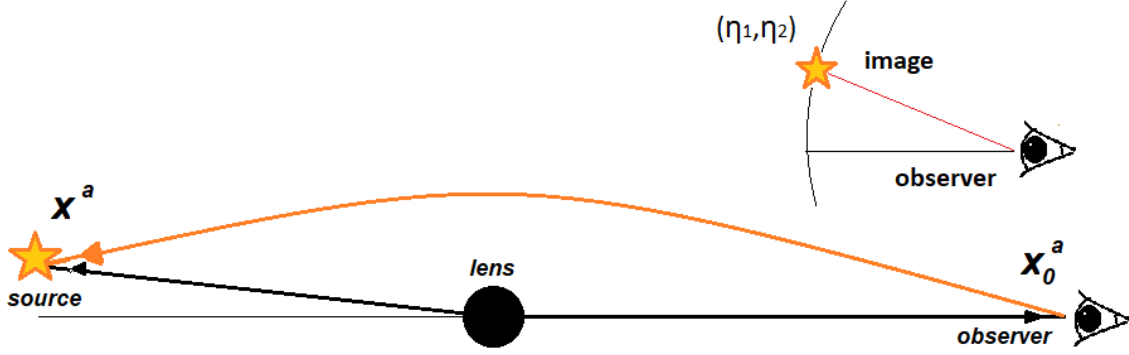


Figura 22: El diagrama de lens-exacto. El rayo de luz viaja hacia atrás en el tiempo, desde la posición del observador x_0^a , hasta la posición de la fuente x^a , con respecto a la lente. El observador mide una posición de la imagen con coordenadas celestiales (η_1, η_2) .

La coordenada espacial x^1 es usualmente elegida como la coordenada radial, mientras que las coordenadas x^A como las coordenadas angulares. Entonces, la ecuación de la lente (3.64) nos brinda la posición angular de la fuente. Corresponde a un mapeo de los ángulos de la imagen (η_1, η_2) , a los ángulos de la fuente (x^2, x^3) . Su Jacobiano está dado por

$$J(\tau, \eta_1, \eta_2, x^1) = \det \frac{\partial (x^2, x^3)}{\partial (\eta_1, \eta_2)}. \quad (3.65)$$

$J = 0$ corresponde a la observación de múltiples imágenes de la misma fuente.

El valor de x^1 debe estar relacionado con algún observable, como lo es la distancia del diámetro angular. Este último se define como $D_A(\tau, \eta_1, \eta_2, x^1) \equiv |dA_s/d\Omega_0|$, en donde dA_s es el área infinitesimal abarcada por la congruencia geodésica del observador en la posición de la fuente [84], y $d\Omega_0 = K d\eta_1 d\eta_2$ es el ángulo sólido, con $K = K(\eta_1, \eta_2)$. Si tomamos los vectores de desviación geodésica

$$M_1^a = \frac{\partial x^a}{\partial \eta_1}, \quad M_2^a = \frac{\partial x^a}{\partial \eta_2}, \quad (3.66)$$

el área dA_s resulta

$$dA_s = \left| 2 \left[(M_1 \cdot M_1) (M_2 \cdot M_2) - (M_1 \cdot M_2)^2 \right] \right|^{1/2} d\eta_1 d\eta_2, \quad (3.67)$$

en donde el producto punto indica producto escalar. La distancia de diámetro angular está dada por

$$D_A^2 = 2K^{-2} \left| (M_1 \cdot M_1) (M_2 \cdot M_2) - (M_1 \cdot M_2)^2 \right|^{1/2}. \quad (3.68)$$

El valor de D_A^2 está directamente relacionado con las cantidades observables, como lo son la luminosidad $\hat{L}$ de la fuente, su brillo aparente $\hat{S}$ y su corrimiento al rojo $\hat{z}$, de la siguiente manera:

$$\hat{S} = \frac{\hat{L}}{4\pi (1+z)^4 D_A^2}. \quad (3.69)$$

En el caso en el que se observen múltiples imágenes, D_A^2 está relacionada con la magnificación relativa de la imagen

$$\mu_{12} = \frac{D_A^2(\eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, x^1)}{D_A^2(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, x^1)}, \quad (3.70)$$

en donde los superíndices de (η_1, η_2) indican la imagen observada.

Observando la imagen de la fuente, se pueden medir las cantidades η_1 , η_2 y τ , mientras que la distancia de diámetro angular se puede determinar de la ecuación (3.69) o de (3.70). Además, con (3.68), puede realizarse la inversión $D_A(\tau, \eta_1, \eta_2, x^1) \rightarrow x^1(\tau, \eta_1, \eta_2, D_A)$, y la ecuación (3.64) puede interpretarse como la ecuación de la lente exacta. A continuación se presenta el método de lens-exacto para el caso del agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg.

3.5.2. Las ecuaciones de movimiento generales

Para comenzar a estudiar las trayectorias de los fotones, resulta conveniente usar la distancia radial inversa (3.32), $u = 1/r$. A partir de la pseudo-métrica efectiva de Plebański (2.22), las componentes de la ecuación geodésica para un ángulo arbitrario θ , es decir, no restringidas al plano ecuatorial, son:

$$\dot{t} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{E}{f(u)}, \quad (3.71)$$

$$\dot{u} = \pm \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] E u^2 \sqrt{1 - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\mathcal{C}}{E} \right)^2 u^2 f(u)}, \quad (3.72)$$

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{u^2} \right)^2 = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]^2 \left(\mathcal{C}^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad (3.73)$$

$$\dot{\phi} = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{L u^2}{\sin^2 \theta}. \quad (3.74)$$

El signo positivo en la ecuación (3.72), describe a rayos de luz entrantes, mientras que el negativo a rayos de luz salientes. Una vez más, el campo eléctrico $D_Q(u) \equiv Q^2 u^2 / D_c^2$ estará evaluado en una distancia radial inversa u fija, dependiendo del caso particular que se esté considerando. Por ejemplo, al estudiar el anillo de luz en u_c , será evaluado en el anillo de luz del caso de Reissner-Nordström, es decir, $D_Q(u_{c_{\text{RN}}}) = Q^2 u_{c_{\text{RN}}}^2 / D_c^2$. Similarmente para la distancia u_p al punto de máximo acercamiento, $D_Q(u_{p_{\text{RN}}}) = Q^2 u_{p_{\text{RN}}}^2 / D_c^2$, y para la posición del observador, $D_Q(u_0) = Q^2 u_0^2 / D_c^2$.

La constante E es la energía del fotón y funciona como un parámetro de escalamiento para el potencial efectivo, la constante L es el momento angular del fotón, y $\mathcal{C}$ es la constante de Carter. Estas constantes de movimiento se relacionan con el punto inicial de la trayectoria del fotón, la cual en el marco del método de *backwards ray-tracing* corresponde a la posición del observador $(t_0, u_0, \theta_0, \phi_0)$. Adicionalmente, están relacionadas con el ángulo incidente ψ que la geodésica nula hace con el eje óptico, definido por

$$\cot \psi = \sqrt{\gamma_{rr}} dr / (\sqrt{\gamma_{\theta\theta}} d\theta), \quad (3.75)$$

así como con el ángulo azimutal γ que la dirección del rayo de luz hace alrededor del eje óptico, definido por

$$\cot \gamma = \sqrt{\gamma_{\theta\theta}} d\theta / (\sqrt{\gamma_{\phi\phi}} d\phi). \quad (3.76)$$

Ambos ángulos se definen en términos de $\gamma^{\mu\nu}$, dado que los fotones siguen geodésicas nulas de la pseudo-métrica (2.22). Para que éstos representen las coordenadas angulares de la imagen en la esfera celestial del observador, se deben evaluar en su posición. La Figura 23 presenta el esquema de estos ángulos.

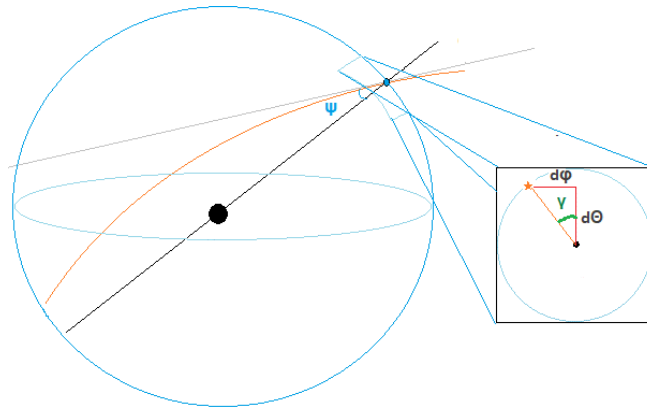


Figura 23: El esquema de los ángulos de la imagen. El rayo de luz llega a la posición del observador, quien mide una dirección angular de la imagen (Ψ, γ) . Ésta corresponde a una posición aparente, ya que el rayo de luz ha sido deflexionado al pasar por la lente.

Las constantes de movimiento pueden escribirse en términos de las coordenadas del observador (u_0, θ_0) y de los ángulos de la imagen (ψ, γ) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{C}{E}\right)^2 = \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \frac{\sin^2 \psi}{u_0^2 f(u_0)}, \quad (3.77)$$

$$\left(\frac{L}{E}\right)^2 = \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \sin^2 \theta_0 \sin^2 \gamma \frac{\sin^2 \psi}{u_0^2 f(u_0)}. \quad (3.78)$$

Cuando el observador se encuentra lejos del agujero negro, $u_0 \rightarrow 0$, el término no-lineal se anula, $D_Q^2(u_0) \rightarrow 0$. Sin embargo, la contribución no-lineal resulta relevante para observadores más cercanos al agujero negro. Mientras que los ángulos (ψ, γ) son identificados como los ángulos de la imagen, los ángulos (θ, ϕ) corresponden a los ángulos de la fuente. Las ecuaciones (3.71)-(3.74) pueden reescribirse, para $E = 1$, en términos de la posición del observador y los ángulos de la imagen, como

$$\dot{t} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \frac{1}{f(u)}, \quad (3.79)$$

$$\dot{u} = \pm \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] u^2 \sqrt{1 - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \left(\frac{\sin^2 \psi}{u_0^2 f(u_0)}\right) u^2 f(u)}, \quad (3.80)$$

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{u^2}\right)^2 = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]^2 \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \left(\frac{\sin^2 \psi}{u_0^2 f(u_0)} - \frac{(\sin \theta_0 \sin \gamma \sin \psi)^2}{u_0^2 f(u_0) \sin^2 \theta}\right), \quad (3.81)$$

$$\dot{\phi} = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \frac{u^2 \sin \theta_0 \sin \gamma \sin \psi}{u_0 \sqrt{f(u_0)} \sin^2 \theta}. \quad (3.82)$$

3.5.3. El punto de máximo acercamiento y el anillo de luz

Como se mencionó anteriormente, la luz se propaga desde el observador, hacia atrás en el tiempo, hasta alcanzar la fuente. Primero, el rayo de luz se dirige en dirección entrante al agujero negro ($\dot{u} > 0$), hasta alcanzar el punto de máximo acercamiento u_p . Después, el rayo de luz se propaga en dirección saliente, ($\dot{u} < 0$), hacia la posición de la fuente. El valor de u_p se obtiene de la condición $\dot{u} = 0$, y es la menor de las raíces reales y positivas del polinomio cuártico

$$\tilde{Q}_p^2 u_p^4 - 2M u_p^3 + u_p^2 - \frac{u_0^2 \left(1 - 2M u_0 + \tilde{Q}_0^2 u_0^2\right)}{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})\right] \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right] \sin^2 \psi} = 0. \quad (3.83)$$

Las cargas apantalladas, $\tilde{Q}_0$ en la posición del observador y $\tilde{Q}_p$ en el punto más cercano, están dadas explícitamente por

$$\tilde{Q}_0 = Q \left[1 - \frac{\alpha}{45\pi} D_Q^2(u_0)\right]^{1/2}, \quad (3.84)$$

$$\tilde{Q}_p = Q \left[1 - \frac{\alpha}{45\pi} D_Q^2(u_{pRN})\right]^{1/2}, \quad (3.85)$$

en donde u_{pRN} corresponde al caso de Reissner-Nordström, es decir, a la raíz del polinomio (3.83) para $\alpha = 0$ y con $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}_p = Q$. El punto de máximo acercamiento u_p está asociado al punto en el cual el potencial (3.54) se anula, $\mathcal{R} = 0$, es decir, al punto de retorno de la trayectoria del fotón (ver Fig. 21).

El punto de retorno más cercano que puede alcanzar un rayo de luz, i.e., lo más cerca que puede llegar sin ser capturado por el agujero negro, es la órbita circular inestable asociada al máximo del potencial, el anillo de luz. Si los rayos de luz cruzan el anillo de luz, son atrapados por el agujero negro. La distancia radial inversa del anillo de luz del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, está denotada por u_c y se obtiene de las condiciones $\dot{u} = 0$ y $\ddot{u} = 0$. Esto significa que u_c es el valor crítico del punto

de máximo acercamiento u_p . De la ecuación (3.80), u_c es la menor de las raíces reales y positivas del polinomio cuadrático

$$1 - 3Mu_c + 2\tilde{Q}_c^2 u_c^2 = 0. \quad (3.86)$$

Para calcular u_c , se debe recordar que la carga está apantallada en el anillo de luz u_{cRN} del agujero negro de Reissner-Nordström, esto es

$$\tilde{Q}_c = Q \left[1 - \frac{\alpha}{45\pi} D_Q^2(u_{\text{cRN}}) \right]^{1/2}, \quad (3.87)$$

con el campo eléctrico $D_Q(u_{\text{cRN}}) \equiv Q^2 u_{\text{cRN}}^2 / E_c^2$. Entonces, se obtiene la solución

$$u_c = \frac{3M}{4\tilde{Q}_c^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \frac{\tilde{Q}_c^2}{M^2}} \right), \quad (3.88)$$

en donde u_{cRN} corresponde al caso lineal, a (3.88) con Q en lugar de $\tilde{Q}_c$. El radio del anillo de luz está dado por $r_c = 1/u_c$. Es equivalente a la solución (3.59) y sólo depende de los parámetros del agujero negro, Q y M , y de la constante de estructura fina α .

El ángulo incidente crítico correspondiente ψ_c , puede ser obtenido de la ecuación (3.83). Para que el rayo de luz no sea capturado por el agujero negro [85], su ángulo incidente debe satisfacer la condición

$$\sin^2 \psi \geq \sin^2 \psi_c = \frac{\left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{cRN}}) \right] u_0^2 f(u_0)}{\left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0) \right] u_c^2 f(u_c)}, \quad (3.89)$$

en donde las funciones métricas son $f(u_c) = 1 - 2Mu_c + \tilde{Q}_c^2 u_c^2$, con la carga apantallada (3.87), y $f(u_0) = 1 - 2Mu_0 + \tilde{Q}_0^2 u_0^2$, con la carga (3.84).

3.5.4. La sombra del agujero negro

Los fotones que se encuentran en el anillo de luz, forman el borde del anillo de emisión que suele observarse en las imágenes de los agujeros negros [3, 4], es decir la llamada sombra del agujero negro (véase Sec. 1.3.2). El radio r_{sh} de la sombra está relacionado con el ángulo crítico de la siguiente manera: $r_{sh} = r_0 \tan \psi_c$, el cual se aproxima a $r_{sh} \approx r_0 \sin \psi_c$, para un ángulo crítico pequeño. De la ecuación (3.89), el radio de la sombra del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, para una posición arbitraria del observador, está dado por

$$r_{sh} = \sqrt{\frac{1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{cRN}})}{1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)}} \frac{\sqrt{f(u_0)}}{u_c \sqrt{f(u_c)}}. \quad (3.90)$$

Para observadores muy distantes ($u_0 \rightarrow 0$), se cumple $D_Q(u_0) \rightarrow 0$ y $f(u_0) \rightarrow 1$, y el radio (3.90) se reduce a

$$r_{sh} \approx \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{cRN}}) \right]}{u_c \sqrt{f(u_c)}}. \quad (3.91)$$

El caso de Reissner-Nordström se recupera para $\alpha = 0$. Cabe mencionar que se suelen medir los radios angulares de la sombra. Por ejemplo, para Sag A*, se ha medido un diámetro angular de la sombra de $\sim 48.7 \pm 7.0 \mu\text{as}$ [4], lo cual corresponde a un radio angular de $\Psi_c \sim 24.35 \mu\text{as}$. Éste equivale al ángulo incidente crítico, a la dirección angular de la imagen.

La Figura 24 presenta el radio de las sombras (3.90) de los agujeros negros de Einstein-Euler-Heisenberg y Reissner-Nordström como función de la posición del observador. Las respectivas asíntotas corresponden al caso de un observador en infinito. Las sombras para un observador en infinito y un

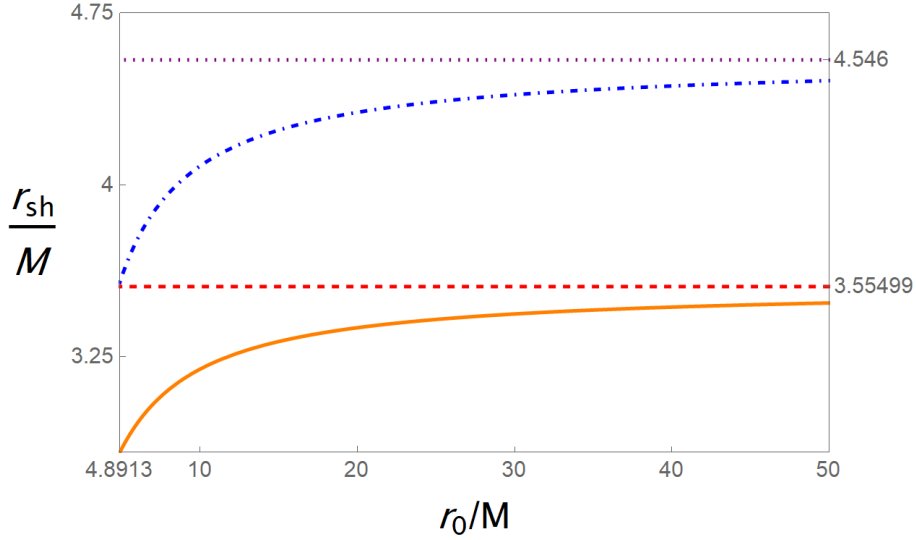


Figura 24: El radio de la sombra para una masa $M = 10^4 M_\odot$ y carga $Q = 0.8M$ fijas. La línea continua corresponde al caso de Einstein-Euler-Heisenberg como función de la posición del observador r_0 . Su asíntota es la línea discontinua cerca de $r_{sh} = 3.55499M$. La línea mixta (punto- raya) corresponde al caso de Reissner-Nordström. Su asíntota es la línea punteada cerca de $r_{sh_{RN}} = 4.546M$.

observador en la ISCO se muestran en la Fig. 25. La sombra de Euler-Heisenberg está siempre dentro de la de Reissner-Nordström.

Otra manera de estudiar la sombra de un agujero negro es aquella presentada por Bardeen [9, 10], la cual se muestra a continuación. En el plano ecuatorial, el momento covariante $p_\mu = \gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ del fotón no-lineal, a primer orden en α , está dado por

$$p_\mu = \left(-E, \frac{\sqrt{R(r)}}{f(r)}, 0, L \right), \quad (3.92)$$

con la función $\mathcal{R}(r)$ definida en (3.54). Ahora, se calcula el plano de la imagen para un observador distante en el plano ecuatorial, cuyas coordenadas fijas son $(r_0, \theta_0 = \pi/2)$, y cuyas líneas de mundo son perpendiculares a la hipersuperficie $t = t_0 = \text{const.}$ Una base ortonormal para este marco se define como

$$\begin{aligned} e_{(t)}^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}, 0, 0, 0 \right), & e_{(r)}^\mu &= \left(0, \sqrt{f(r)}, 0, 0 \right), \\ e_{(\theta)}^\mu &= \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right), & e_{(\phi)}^\mu &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.93)$$

En esta base, el momento del fotón, $\mathbf{p}^{(\alpha)} = \eta^{(\alpha\beta)} e_{(\beta)}^\mu p_\mu$, resulta

$$\mathbf{p}^{(\alpha)} = \left(\frac{E}{\sqrt{f(r)}}, \sqrt{\frac{R(r)}{f(r)}}, 0, \frac{L}{r} \right). \quad (3.94)$$

En términos del parámetro de impacto η (3.57), las coordenadas celestiales x y y , para $r_0 \rightarrow \infty$ y $\theta_0 = \pi/2$, están dadas por

$$y = r_0 \left(\frac{\mathbf{p}^{(\theta)}}{\mathbf{p}^{(t)}} \right)_0 = 0, \quad x = -r_0 \left(\frac{\mathbf{p}^{(\phi)}}{\mathbf{p}^{(t)}} \right)_0 = -\eta. \quad (3.95)$$

Es importante mencionar que si el observador está en el plano ecuatorial, el anillo de luz sólo determina dos puntos de la frontera de la sombra. Sin embargo, se puede hacer uso de la simetría esférica del

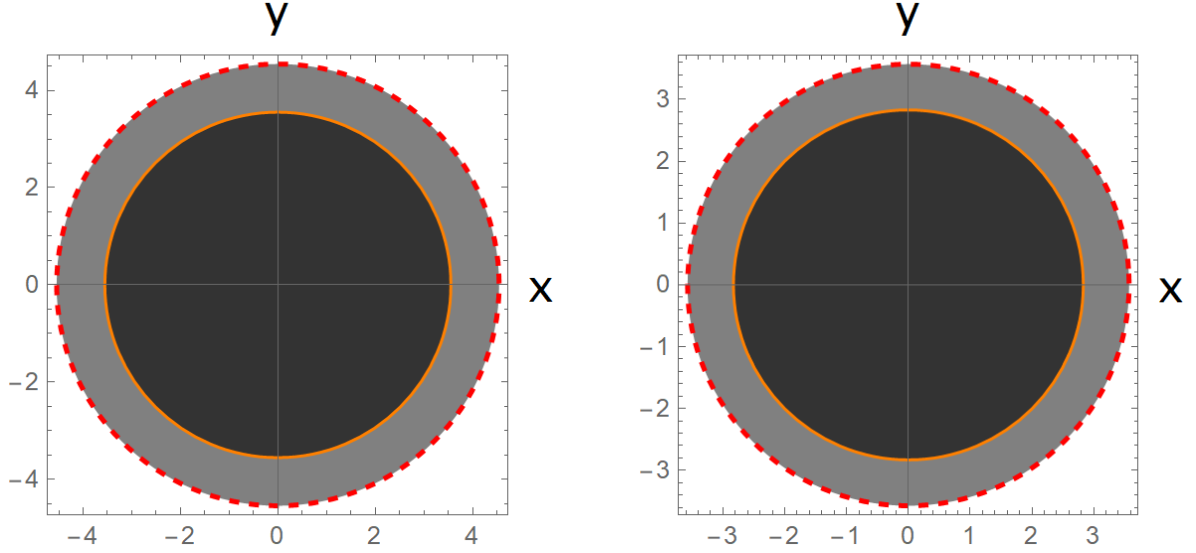


Figura 25: Las sombras para una masa $M = 10^4 M_\odot$ y carga $Q = 0.8M$ fijas, y diferentes posiciones del observador. Izquierda: el caso de un observador en infinito, $r_0 \rightarrow \infty$. Derecha: el caso de un observador en la ISCO correspondiente, $r_0 = r_{\text{isco}} = 4.8913M$. En ambos casos, la sombra del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg (círculo más oscuro) está dentro del de Reissner-Nordström (círculo más claro).

problema, para generalizar este resultado para observadores distantes fuera del plano ecuatorial. Por lo tanto, las coordenadas celestiales satisfacen la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{cRN}}) \right] \frac{r_c}{\sqrt{f(r_c)}} \right)^2, \quad (3.96)$$

de la cual se define el radio de la sombra y equivale al resultado anterior (3.91). Un ejemplo de una gráfica de esta ecuación del círculo, se muestra en el lado izquierdo de la Fig. 25.

Este resultado significa que, mientras que el radio del anillo de luz es r_c , el radio de la sombra medida por observadores distantes contiene, no sólo el factor $f(r_c)^{-1/2}$, sino que también un término no-lineal, $\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{cRN}}) \right]$, la corrección debida a la polarización del vacío. Este factor siempre es menor a la unidad, por lo que la sombra del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg yace siempre dentro de la del agujero negro de Reissner-Nordström, $r_{\text{shEH}} < r_{\text{shRN}}$, como se mostró en las Figuras 24 y 25. Finalmente, en la Fig. 26 se presenta el radio de la sombra variando la carga Q y la masa M .

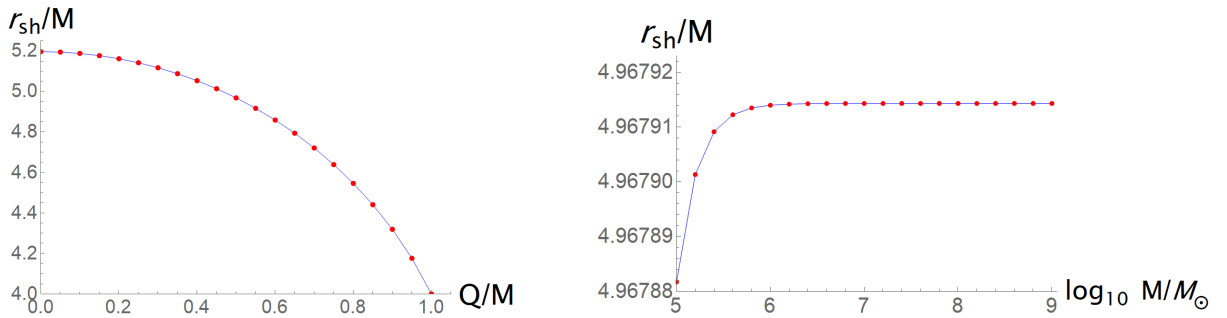


Figura 26: El radio de la sombra r_{sh} del agujero negro (3.91), para un observador en infinito. Izquierda: se varía la carga del agujero negro, de $Q = 0$ a $Q = M$, en incrementos de $0.05M$ y con una masa fija de $M = 10^5 M_\odot$. Conforme Q aumenta, la sombra disminuye. Derecha: se varía la masa del agujero negro, de $M = 10^5 M_\odot$ a $M = 10^9 M_\odot$, en incrementos de $10^{1/5} M_\odot$ y con una carga fija de $Q = 0.5M$. Conforme M aumenta, r_{sh} crece, siendo la asíntota en $M \rightarrow \infty$, el caso de Reissner-Nordström.

3.5.5. La integración de las coordenadas angulares

La trayectoria de un fotón que no forma parte del anillo de luz, tendrá un punto de máximo acercamiento definido por la ecuación (3.83), con $u_p < u_c$. Usando además la relación (3.77), con $E = 1$, podemos reescribir la constante de Carter $\mathcal{C}$ en términos de u_p de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})\right] u_p^2 f(u_p)}. \quad (3.97)$$

Es decir, el punto de máximo acercamiento de un fotón está relacionado con las condiciones iniciales del mismo, las cuales dependen de la posición del observador u_0 y del ángulo incidente ψ en esa posición.

Para integrar las ecuaciones geodésicas de las coordenadas angulares (θ, ϕ) , introducimos un ángulo Θ , el cual, de las ecuaciones (3.77), (3.82) y (3.81), está dado por

$$\dot{\Theta}^2 \equiv \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] u^2 \mathcal{C}^2. \quad (3.98)$$

Primero, integraremos las ecuaciones geodésicas en el plano $x - z$ [81], en donde $\phi = 0$ y Θ va de 0 a 2π . El punto inicial es la posición del observador en este plano, $\tilde{x}_0^a = (t_0, u_0, \theta_0 = \pi, \phi_0 = 0)$, mientras que el punto final es $x^a = (t, u, \Theta, \phi = 0)$. De esta manera, se obtiene el punto inicial $\Theta_0 = \pi$. Usando la ecuación (3.80) para la distancia radial inversa u , junto con (3.83), la solución a la componente angular en el plano $x - z$ es

$$\begin{aligned} \phi &= 0, \\ \Theta &= \pi - \int_{u_0}^u \frac{\pm \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] du'}{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{C}^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] u'^2 f(u')}}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

con $\mathcal{C}$ dada por la relación (3.97), y con $f(u') = 1 - 2Mu' + u'^2 \tilde{Q}^2$. Aquí la tilde denota a la variable de integración, no diferenciación. El signo en el integrando depende de la dirección radial del rayo de luz.

En el método de *backwards ray-tracing*, la trayectoria del rayo de luz se puede dividir en dos parches o secciones. Primero, el rayo parte de u_0 a u_p , en dirección entrante al agujero negro. Después, viaja en dirección saliente de u_p hasta la fuente en u_s . Lo anterior se ilustra en el diagrama de la Fig. 27, en donde además se presentan todas las cantidades introducidas anteriormente. Entonces, el ángulo $\Theta(u_s, u_0, u_p)$ en términos de estas distancias, está dado por

$$\begin{aligned} \Theta(u_s, u_0, u_p) &= \pm \left(\pi - \int_{u_0}^{u_p} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right] du'}{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{C}^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right] u'^2 (1 - 2Mu' + u'^2 \tilde{Q}^2)}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{u_s}^{u_p} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2\right] du'}{\sqrt{\frac{1}{\mathcal{C}^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2\right] u'^2 (1 - 2Mu' + u'^2 \tilde{Q}^2)}} \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Dada la interpretación de QED [71], los términos de Euler-Heisenberg deben ser considerados constantes. En consecuencia, la integral (3.100) debe ser realizada considerando al campo D_Q como constate. Para integraciones numéricas, podemos evaluarlo en un punto intermedio de la trayectoria, $D_{Q+}(r) = D_{Q+}([r_0 + r_p]/2)$ en la primera integral, y $D_{Q-}(r) = D_{Q-}([r_s + r_p]/2)$ en la segunda, con $r_p = 1/u_p$. Adicionalmente, el ángulo $\Theta(u_s, u_0, \psi)$ depende del ángulo incidente ψ vía el punto de máximo acercamiento u_p . La integral (3.100) es general, para cualquier posición del observador y la fuente. En particular, podemos estudiar sistemas en los que la fuente se encuentre muy cercana a la lente, por ejemplo, en el disco de acreción, en la ISCO u otra órbita circular. Para estos casos, con observadores más lejanos, se cumple $u_s > u_0$. La Figura 27 ejemplifica este caso ($r_s < r_0$).

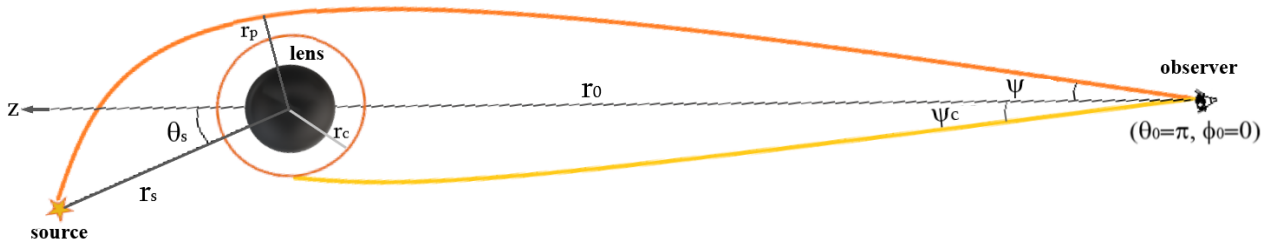


Figura 27: El diagrama de lens-exact, restringido al plano $\phi = 0$. El rayo de luz viaja atrás en el tiempo, de la posición del observador en el eje- z , $(r_0, \theta_0 = \pi, \phi_0 = 0)$, a la posición de la fuente $(r_s, \theta_s = \Theta, \phi_s = 0)$, con respecto a la lente, pasando por el punto de máximo acercamiento r_p . El observador mide un ángulo de la imagen ψ . Sólo los rayos de luz para los cuales se cumple $\psi \geq \psi_c$, evitan ser capturados por el agujero negro, siendo ψ_c el ángulo crítico que corresponde al anillo de luz (de radio r_c) y forma el borde de la sombra.

En otros sistemas, la fuente se encuentra más alejada de la lente que el observador, $u_s < u_0$. Por ejemplo, cuando la luz de una estrella lejana es deflectada por nuestro Sol. Un sistema análogo se puede formar con un agujero negro como lente. Para este caso específico, la segunda parte de la trayectoria del rayo también se puede separar en dos parches, uno de u_p a u_0 y otro de u_0 a u_s , por lo que las integrales en (3.100) se pueden reescribir como

$$\Theta = \pm \left(\pi - \int_{u_0}^{u_p} \frac{2 \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2 \right] du'}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2 \right] u'^2 (1 - 2Mu' + u'^2 \tilde{Q}^2)}} - \int_{u_s}^{u_0} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2 \right] du'}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2 \right] u'^2 (1 - 2Mu' + u'^2 \tilde{Q}^2)}} \right), \quad (3.101)$$

con $D_{Q-}(r) = D_{Q-}([r_s + r_0]/2)$. Una gráfica de Θ como función del ángulo de la imagen, para u_0 y u_s fijas, se muestra en la Fig. 28. El ángulo Θ está asociado a las coordenadas angulares del rayo de luz. Más adelante se analizará su significado físico. Por lo pronto, observamos una asíntota vertical que corresponde al ángulo crítico ψ_c . Es decir, mientras más se acerque el rayo al anillo de luz, más vueltas dará alrededor del agujero negro.

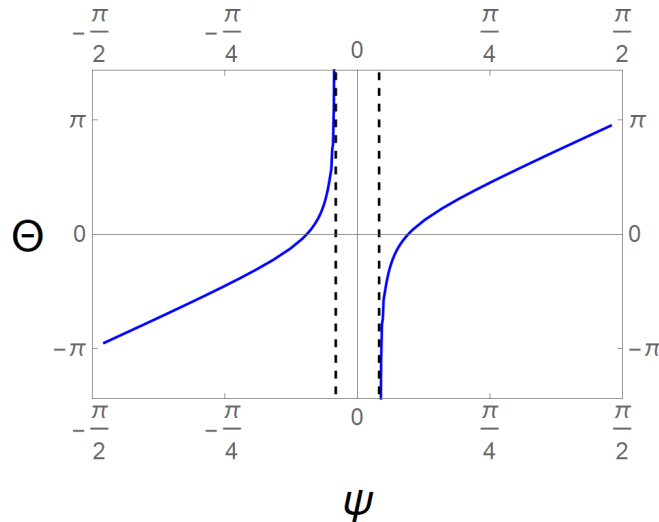


Figura 28: El ángulo Θ (3.100) como función del ángulo de la imagen ψ . La línea discontinua corresponde al ángulo crítico ψ_c , (3.89). Los parámetros del agujero negro son: $M = 10^4 M_\odot$, $Q = 0.8M$. Tanto el observador como la fuente se encuentran a $r_0 = r_s = 30M$.

La integración (3.99) fue realizada en el plano x - z , para un observador en el eje- z , con coordenadas

angulares ($\theta_0 = \pi, \phi_0 = 0$). Ésta puede ser generalizada mediante una rotación a partir de un punto inicial arbitrario $x_0^a = (t_0, u_0, \theta_0, \phi_0)$. El ángulo Θ se mantiene constante a lo largo de la rotación. Para ello, es conveniente introducir la variable estereográfica compleja ζ y su complejo conjugado $\bar{\zeta}$ [81],

$$\zeta = \cot \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad \bar{\zeta} = \cot \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}. \quad (3.102)$$

La rotación corresponde a la transformación $SU(2)$, definida por

$$\zeta' = \frac{a \cot \frac{\Theta}{2} + b}{c \cot \frac{\Theta}{2} + d}, \quad (3.103)$$

en donde a, b, c y d , son los parámetros de Cayley-Klein, los cuales pueden ser escritos en términos de los ángulos de Euler [86], con respecto al punto inicial. En términos de las coordenadas angulares del punto inicial, (θ_0, ϕ_0) , la variable estereográfica resulta

$$\zeta = e^{i\phi_0} \left(\frac{\cot \frac{\theta_0}{2} + e^{i\gamma} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}}{1 - e^{i\gamma} \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}} \right). \quad (3.104)$$

Finalmente, regresando a nuestras variables originales (θ, ϕ) , se obtienen las relaciones angulares

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\cos \theta_0 \cos \Theta + \sin \theta_0 \sin \Theta \cos \gamma, \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi_0 \sin \theta_0 - \tan \Theta (\cos \phi_0 \sin \gamma - \sin \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}{\cos \phi_0 \sin \theta_0 + \tan \Theta (\sin \phi_0 \sin \gamma + \cos \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

En el Apéndice B se presenta el método detallado de la generalización de la solución de la parte angular de la trayectoria del rayo de luz, mediante el uso de las variables estereográficas complejas.

De acuerdo a la sección 3.5.1, la ecuación (3.105) se puede interpretar como la ecuación de la lente exacta para el agujero negro estático de Einstein-Euler-Heisenberg, debido a que se cumplen las siguientes dos características:

1. Conociendo la posición del observador (u_0, θ_0, ϕ_0) , la dirección angular de la imagen (γ, ψ) , y consecuentemente el ángulo $\Theta(u_s, u_0, \psi)$ (3.100), podemos calcular la posición angular real de la fuente (θ, ϕ) .
2. La inversión $u_s(x_0^a, \gamma, \psi, s) \rightarrow s(x_0^a, \gamma, \psi, u_s)$ puede realizarse integrando la ecuación (3.80) y usando la relación (3.97), i.e.,

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_0}^{u_p} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})} \right] u^2 f(u)}} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2 \right] \frac{du}{u^2} + \\ &+ \int_{u_s}^{u_p} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})} \right] u^2 f(u)}} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2 \right] \frac{du}{u^2}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Es decir, a partir de medir la dirección de la imagen, la cual describe la posición aparente de la fuente medida por el observador, podemos calcular su posición real.

Para el caso particular en el que el observador se encuentre a lo largo del eje- z , $\theta_0 = \pi$ y $\phi_0 = 0$, la ecuación (3.105) se reduce a $\cos \theta = \cos \Theta$. Consecuentemente, la ecuación de la lente exacta es

$$\theta = \Theta(u_s, u_0, \psi), \quad (3.107)$$

y el ángulo Θ describe entonces la posición angular real de la fuente, θ .

En la Fig. 29 se presenta el ángulo Θ como función del ángulo ψ de la imagen, para el agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg y el de Reissner-Nordström. Para valores de ψ más grandes, la

diferencia es apenas visible, pero ésta se vuelve relevante para valores del ángulo de la imagen más cercanos al radio angular de la sombra ψ_c . Interpretemos la figura, para el caso $\theta = \Theta$, en donde Θ es la posición de la fuente. Para empezar, la diferencia entre el caso de Einstein-Euler-Heisenberg y el de Reissner-Nordström, significa que, para cada imagen observada, existirá una predicción diferente de la posición angular de la fuente. Por ejemplo, de la Fig. 29 con $r_s = r_0 = 3000M$, y fijándonos en una imagen en la dirección $\psi = 0.0025$:

- Considerar el espacio-tiempo de Reissner-Nordström asignaría una posición real $\theta \sim -0.85$ de la fuente (o, en grados, $\theta \sim -48.7^\circ$).
- En cambio, considerar los efectos de la polarización del vacío, i.e., el espacio-tiempo de Einstein-Euler-Heisenberg, asignaría una posición real $\theta \sim -0.65$ (o $\theta \sim -37.2^\circ$).

Es decir, existe una diferencia de más de 10° en la predicción de la posición real de la fuente. Si bien, en este ejemplo estamos considerando a un observador bastante cercano a la lente ($r_0 = 3000M$), también consideramos a una fuente bastante lejana ($r_s = 3000M$). Para observadores muy lejanos, una diferencia del orden de μas puede ser muy relevante. Además, mientras más cerca esté la fuente del agujero negro, más grandes serán los efectos de Euler-Heisenberg en la trayectoria de sus rayos de luz.

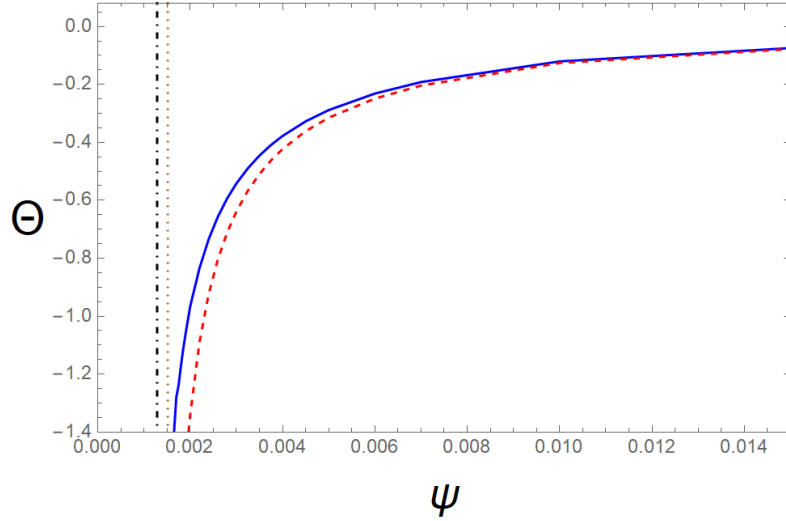


Figura 29: El ángulo Θ (3.100), como función del ángulo incidente ψ para el agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) y para el de Reissner-Nordström (línea discontinua). La línea mixta (punto- raya) corresponde al ángulo incidente crítico ψ_c (3.89), mientras que la punteada al caso lineal $\alpha = 0$. Los parámetros son: $M = 10^4 M_\odot$, $Q = 0.8M$, $r_0 = r_s = 3000M$.

Las asíntotas verticales en la Fig. 29 representan el caso en el que un rayo alcanza el anillo de luz, lo orbita múltiples veces y eventualmente escapa hacia el observador. Los valores que están afuera del rango $-\pi < \Theta < \pi$ corresponden a múltiples vueltas alrededor de la lente. Esto resulta en la observación de múltiples imágenes de la misma fuente (véase Sec. 1.3.1), cada una observada en diferentes direcciones ψ . Las imágenes de órdenes superiores aparecen en direcciones más cercanas al radio angular de la sombra ψ_c . Además, similarmente a la Fig. 28, existe una contraparte de la Fig. 29, para valores negativos del ángulo de la imagen, $-\pi/2 \leq \psi \leq 0$, los cuales corresponden a valores positivos de Θ y a rayos de luz pasando por el lado opuesto de la lente. Éstos también generan la observación de imágenes adicionales. Finalmente, los anillos de Einstein se observan cuando la fuente está alineada con la lente y el observador, i.e., para los valores $\Theta = \dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

Cabe mencionar que así como existe una diferencia entre el caso de Reissner-Nordström y el de Einstein-Euler-Heisenberg, en el último puede existir un efecto de birrefringencia [59]. En dado caso, la diferencia entre los estados de polarización de los rayos de luz se traduciría a la observación de imágenes polarizadas en diferentes ángulos de la imagen.

3.5.6. Comparación con las ecuaciones de lente delgada

La ecuación de la lente exacta (3.105) fue obtenida tras estudiar la trayectoria del rayo de luz a lo largo de la geodésica nula. Sin embargo, como se mencionó en la Sección 3.5, existen otros enfoques para el estudio del lensing gravitacional, como lo son los enfoques de thin-lens (lente delgada), en los cuales la deflexión sólo ocurre en el plano de la lente. Además, el observador y la fuente se encuentran sobre el mismo plano y en infinito ($r_s, r_0 \rightarrow \infty$).

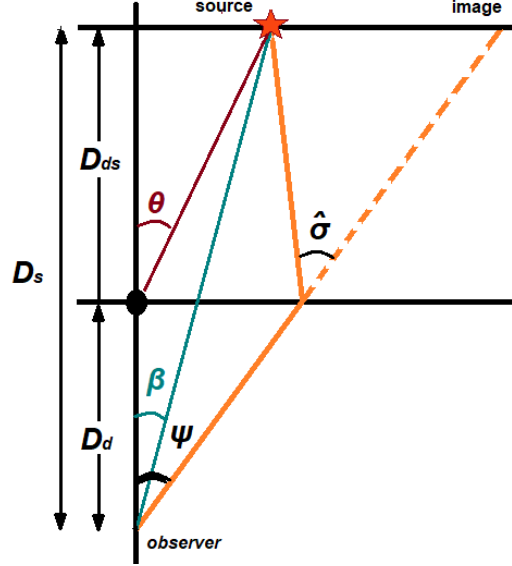


Figura 30: El diagrama de thin-lens.

En la Fig. 30 se presenta el diagrama de thin-lens. D_s es la distancia del plano del observador al plano de la fuente, mientras que D_d es aquella al plano de la lente. La posición angular de la fuente con respecto al observador es β , y la de la imagen es ψ . Ésta es la posición aparente de la fuente y corresponde al ángulo incidente del rayo de luz en la posición del observador. D_{ds} es la distancia al plano de la fuente medida desde el plano de la lente. La posición angular de la fuente con respecto al agujero negro es θ , y el ángulo de deflexión es $\hat{\sigma}$. El ángulo de deflexión de una lente delgada de campo débil, es pequeño, mientras que en el caso de una lente delgada de campo fuerte, éste puede incrementar hasta infinito a medida que los rayos se aproximan a la órbita circular inestable [77, 78].

Ecuación de lente delgada de campo fuerte

De la geometría del diagrama de thin-lens, Figura 30, la ecuación de la lente delgada de campo fuerte está dada por [78]

$$\tan \beta = \tan \psi - \frac{D_{ds}}{D_s} [\tan \psi + \tan (\hat{\sigma} - \psi)] . \quad (3.108)$$

Dado que en este enfoque, tanto el observador como la fuente se encuentran en infinito, el cambio total en θ de un rayo de luz que viaja de la fuente al observador, es el doble del cambio de ∞ al punto de máximo acercamiento r_p [87]. Nótese que sin deflexión alguna, el cambio total en el ángulo sería π , lo que correspondería a una línea recta. Por lo tanto, el ángulo de deflexión $\hat{\sigma}$ en términos de la coordenada radial inversa, $u = 1/r$, está dado por

$$\hat{\sigma} = 2 \int_0^{u_p} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 (r_p/2) \right] du'}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 (r_p/2) \right] u'^2 f(u')}} - \pi , \quad (3.109)$$

con la constante de Carter $\mathcal{C}$ (3.97), y $f(u') = 1 - 2Mu' + \tilde{Q}^2 u'^2$. Aquí, $r \rightarrow \infty$ corresponde a $u = 0$.

Con el fin de comparar la ecuación (3.108) con la correspondiente ecuación de la lente exacta (3.107), debemos analizar cada uno de los términos. De las integrales (3.109) y (3.100), se puede verificar que se cumple la siguiente relación:

$$\hat{\sigma} = -\Theta(u_s, u_0, \psi)|_{u_s=u_0=0}. \quad (3.110)$$

Introduciendo la coordenada radial inversa, las distancias de la Fig. 30 se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{D_{ds}}{D_s} \tan \theta, & D_d &= \frac{1}{u_0}, \\ D_{ds} &= \frac{\cos \theta}{u_s}, & D_s &= \frac{1}{u_0} + \frac{\cos \theta}{u_s}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.110) y (3.111) en (3.108), se obtiene la ecuación de la lente delgada de campo fuerte

$$\theta = \psi + \Theta|_{u_s=u_0=0} + \arcsin \left[\frac{u_s}{u_0} \tan \psi \cos (\Theta|_{u_s=u_0=0} + \psi) \right]. \quad (3.112)$$

Ecuación de lente delgada de campo débil

En la aproximación de thin-lens para campo débil, se asume que los ángulos β , ψ y α son pequeños, es decir, se usa la aproximación $\tan x \approx x$. De esta manera, la ecuación de la lente (3.108) resulta, para campo débil,

$$\beta = \psi - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\sigma}. \quad (3.113)$$

En este caso, el ángulo de deflexión puede calcularse mediante el desarrollo de Robertson [87] de la integral (3.109), en el cual se asume que la distancia al punto de máximo acercamiento es mucho mayor que la masa del agujero negro, $r_p \gg 2M$. Adicionalmente, debido a que la solución de Einstein-Euler-Heisenberg se comporta asintóticamente como la de Reissner-Nordström, los respectivos puntos de máximo acercamiento son prácticamente equivalentes, $r_{\text{PRN}} \approx r_p$. El ángulo de deflexión para campo débil a primer orden en α y a segundo orden en M/r_p , resulta

$$\hat{\sigma} = \frac{4M}{r_p} + \frac{4M^2}{r_p^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{4r_p^2} + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_p) \left[\frac{4M}{r_p} + \frac{10M^2}{r_p^2} \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{2r_p^2} \right]. \quad (3.114)$$

El cálculo de este desarrollo de Robertson se presenta en el Apéndice C.

El ángulo de deflexión para la solución de Reissner-Nordström fue estudiado dentro del enfoque de thin-lens en [88] y [89]. Para la solución de Einstein-Euler-Heisenberg como límite de campo débil de Born-Infeld, es decir, en el enfoque estándar, fue analizado en [90] y [91]. Por otro lado, la expresión (3.114) fue calculada en el marco de la interpretación de QED de la teoría de Euler-Heisenberg para campos electromagnéticos constantes, y además considerando que los fotones se propagan en geodésicas nulas de la pseudo-métrica efectiva de Plebański $\gamma^{\mu\nu}$, lo que se interpreta como que el rayo de luz atraviesa un medio dieléctrico compuesto por las nubes de cargas virtuales.

Para escribir la ecuación (3.114) en términos del ángulo incidente ψ , de la Fig. 30, usamos la aproximación $r_p = D_d \tan \psi \approx D_d \psi$. Así, las ecuaciones (3.111) se reducen a

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{D_{ds}}{D_s} \theta, & D_d &= \frac{1}{u_0}, \\ D_{ds} &= \frac{1}{u_s}, & D_s &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_s}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Sustituyendo $r_p = \psi/u_0$, la ecuación de la lente delgada de campo débil está dada por

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{u_s + u_0}{u_0} \left(\psi - \frac{4M}{\psi} \frac{u_0^2}{u_s + u_0} - \left[\frac{4M^2}{\psi^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{4\psi^2} \right] \frac{u_0^3}{u_s + u_0} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_p) \left\{ \frac{4M}{\psi} \frac{u_0^2}{u_s + u_0} + \left[\frac{10M^2}{\psi^2} \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{2\psi^2} \right] \frac{u_0^3}{u_s + u_0} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

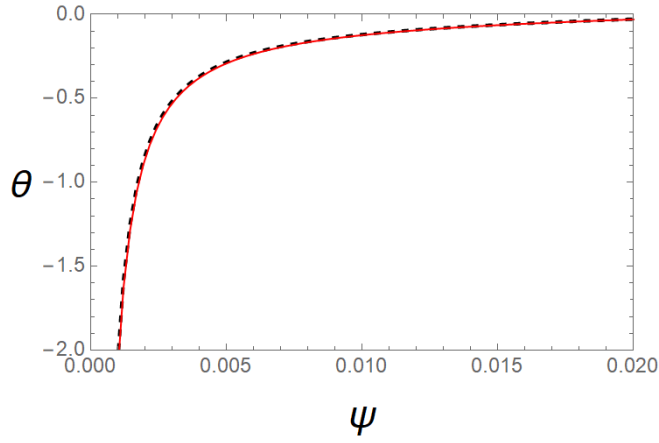


Figura 31: La posición angular de la fuente θ (3.116), para campo débil, como función del ángulo de la imagen ψ , para el caso de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) y el de Reissner-Nordström (línea discontinua). Los parámetros son: $M = 10^4 M_\odot$, $Q = 0.8M$, $r_0 = r_s = 3000M$.

La Figura 31 presenta el ángulo θ de la fuente para campo débil (3.116), como función de ψ para los casos de Einstein-Euler-Heisenberg y Reissner-Nordström. El efecto de Euler-Heisenberg no es relevante para campo débil, además de que la fuente y el observador están ubicados lejos del agujero negro, en $r_0 = r_s = 3000M$. En cambio, para el ángulo exacto θ de la fuente (3.107), los efectos no-lineales sí son visibles para ángulos de la imagen pequeños ψ , como se mostró en la Fig. 29.

La posición real de la fuente, para el caso de lente delgada de campo débil, así como el caso exacto, se presentan en la Fig. 32. Vemos que existe diferencia entre ambos enfoques, lo que se traduce a una predicción distinta de la posición real a partir de la imagen aparente. Una vez más se han usado posiciones lejanas de la fuente y el observador, con el fin de que el caso de campo débil (3.116) sea una buena aproximación. Incluso así, las diferencias son evidentes. Es de esperarse que para fuentes más cercanas, en donde el ángulo de deflexión de los rayos puede ser mayor, la diferencia entre ambos enfoques crezca. Por lo tanto, concluimos que el enfoque exacto es más adecuado para analizar los efectos de Euler-Heisenberg, y en general, de modificaciones de la propagación de la luz causadas por influencias gravitacionales intensas. Más aún, este enfoque es más preciso para el estudio de efectos de campo fuerte en la luz proveniente de fuentes muy cercanas a la lente, permitiendo la investigación de un mayor número de condiciones astrofísicas.

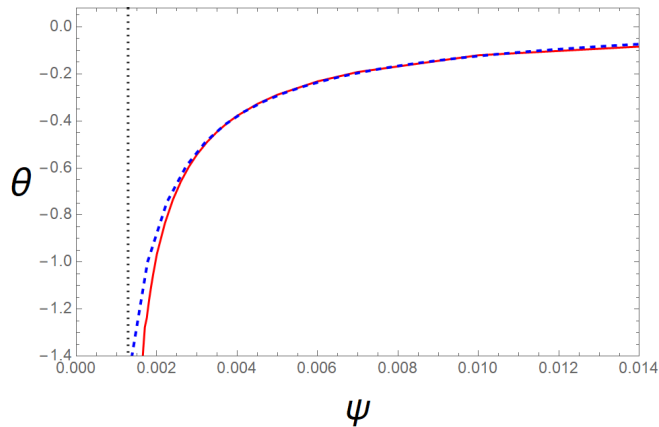


Figura 32: La posición angular de la fuente θ como función del ángulo de la imagen ψ , como predicción de la ecuación de la lente exacta (3.107) (línea continua), y de la ecuación de lente delgada de campo débil (3.116) (línea discontinua). La línea punteada corresponde a la asíntota ψ_c (3.89), al tamaño angular de la sombra. Los parámetros son: $M = 10^4 M_\odot$, $Q = 0.8M$, $r_0 = r_s = 3000M$.

3.5.7. Cantidades observables

Como se mencionó anteriormente, para que la ecuación (3.105) pueda ser interpretada como la ecuación de la lente exacta, el valor de la distancia radial debe estar relacionado con una cantidad observable. Con el fin de obtener la expresión exacta para la distancia de diámetro angular (3.68), debemos calcular los vectores conectores (3.66), los cuales para las coordenadas $x^a = (t, u, \theta, \phi)$ y los ángulos de la imagen (γ, ψ) , están dados por

$$M_1^a = \left(0, 0, \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right), \quad (3.117)$$

$$M_2^a = \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}, 0, \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right). \quad (3.118)$$

Realizando las siguientes derivadas parciales de la posición angular (3.105), se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = \frac{\sin \theta_0 \sin \Theta \sin \gamma}{\sin \theta}, \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = -\frac{\cos \theta_0 \sin \Theta + \sin \theta_0 \cos \Theta \cos \gamma}{\sin \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \psi}, \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = -\frac{\sin \Theta (\sin \Theta \cos \theta_0 + \cos \Theta \sin \theta_0 \cos \gamma)}{\sin^2 \theta}, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi} = -\frac{\sin \theta_0 \sin \gamma}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \psi}. \quad (3.122)$$

Por otro lado, dado que en este caso la luz se propaga a lo largo de geodésicas nulas de $\gamma^{\mu\nu}$ (2.20), los productos de los vectores conectores resultan

$$M_1 \cdot M_1 = \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]}{u^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \gamma}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma}\right)^2 \right], \quad (3.123)$$

$$M_2 \cdot M_2 = -\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] f(u) \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]}{u^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi}\right)^2 \right], \quad (3.124)$$

$$M_1 \cdot M_2 = \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]}{u^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \gamma}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right) + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi}\right) \right]. \quad (3.125)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.67), el área dA_s resulta

$$dA_s = \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]^2 \frac{\sin^2 \theta}{u^4} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right]^2 - \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] f(u) \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)^2 M_1 \cdot M_1 \right)^{1/2} d\gamma d\psi. \quad (3.126)$$

El primer término corresponde al Jacobiano del mapeo de los ángulos de la imagen (γ, ψ) a los ángulos de la fuente (θ, ϕ) , como se definió en la ecuación (3.65). Usando las ecuaciones (3.119)-(3.122), se puede escribir como $J = -(\sin \Theta / \sin \theta) \partial \Theta / \partial \psi$. Además, el producto en el segundo término resulta $M_1 \cdot M_1 = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \sin^2 \Theta / u^2$. De esta manera, el área dA_s se reduce a

$$dA_s = \frac{\sin \Theta}{u^2} \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \psi}\right)^2 - u^2 f(u) \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)^2 \right)^{1/2} d\gamma d\psi. \quad (3.127)$$

En la posición del observador, el ángulo sólido está escrito en términos de los ángulos de la imagen, como $d\Omega_0 = \sin \psi \, d\psi d\gamma$. Entonces, la distancia de diámetro angular resulta

$$D_A^2 = \frac{\sin \Theta}{u^2 \sin \psi} \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \psi}\right)^2 - u^2 f(u) \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.128)$$

La derivada $\partial t/\partial\psi$ es proporcional a $\partial\Theta/\partial\psi$. Las componentes del vector nulo tangente a los rayos de luz son $l^a \equiv (\dot{t}, \dot{u}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, y la condición de ortogonalidad es $\gamma_{ab}M_2^a l^b = 0$. Ambos vectores conectores M_1^a y M_2^a son ortogonales a l^a . Usando las ecuaciones geodésicas para θ y ϕ , (3.81) y (3.82) respectivamente, así como las derivadas explícitas (3.120) y (3.122), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial t}{\partial\psi} = - \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right]}{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right]} \frac{\sin\psi}{\sqrt{u_0^2 f(u_0)}} \frac{\partial\Theta}{\partial\psi}. \quad (3.129)$$

Sustituyéndola en las ecuaciones (3.127) y (3.128), el área y la distancia de diámetro angular se reducen respectivamente a

$$dA_s = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \frac{\sin\Theta}{u^2} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\psi} \right| \left(1 - \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right]^2 \sin^2\psi \frac{u^2 f(u)}{u_0^2 f(u_0)}\right)^{1/2} d\gamma d\psi, \quad (3.130)$$

$$D_A^2 = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] \frac{\sin\Theta}{u^2 \sin\psi} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\psi} \right| \left(1 - \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_0)\right]^2 \sin^2\psi \frac{u^2 f(u)}{u_0^2 f(u_0)}\right)^{1/2}. \quad (3.131)$$

La ecuación (3.131) nos provee la distancia de diámetro angular en términos del parámetro radial inverso u . Si la posición del rayo de luz es la posición de la fuente, $u = u_s$, podemos realizar numéricamente la inversión: $D_A(x_0^a, \gamma, \psi, u_s) \rightarrow u_s(x_0^a, \gamma, \psi, D_A)$.

De la observación de una imagen, podemos determinar D_A y los ángulos (γ, ψ) , vía las ecuaciones (3.69) o (3.70). Calculando el lado derecho de la ecuación (3.131), para un u_0 fijo y usando el D_A previamente determinado, se obtendría el valor de u_s . Para ello, se emplearía la expresión (3.100) y su derivada parcial $\partial\Theta/\partial u_p$ con respecto al punto de máximo acercamiento, la cual mediante la regla integral de Leibniz resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial u_p} = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{u_0}^{u_p - \epsilon} \frac{2 \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right] \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p \left(1 - 3Mu_p + 2u_p^2 \tilde{Q}_p^2\right) du'}{\left(\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p^2 f(u_p) - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right] u'^2 f(u')\right)^{3/2}} + \right. \\ & \left. - \frac{2 \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right]}{\sqrt{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p^2 f(u_p) - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2\right] u'^2 f(u')}} \right|_{u'=u_p - \epsilon} \Bigg\} + \\ & + \int_{u_s}^{u_0} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2\right] \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p \left(1 - 3Mu_p + 2u_p^2 \tilde{Q}_p^2\right) du'}{\left(\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p^2 f(u_p) - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2\right] u'^2 f(u')\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

3.5.8. Retardo temporal

En esta sección integramos la ecuación geodésica para la coordenada- t , lo cual nos permite obtener la ecuación exacta del tiempo de llegada del rayo de luz. Usando la ecuación (3.97), la ecuación geodésica (3.71), se integra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t = & \int_{u_0}^{u_p} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})}\right] u^2 f(u)}} \frac{du}{u^2 f(u)} + \\ & + \int_{u_s}^{u_p} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})}\right] u^2 f(u)}} \frac{du}{u^2 f(u)}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Esta ecuación es la ecuación exacta para el tiempo de llegada. Análogamente al caso de la ecuación de la lente (3.100), cuando la fuente está más lejos que el observador, (3.133) se puede reescribir como

$$t = 2 \int_{u_0}^{u_p} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q+}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})} \right] u^2 f(u)}} \frac{du}{u^2 f(u)} + \int_{u_s}^{u_0} \sqrt{\frac{u_p^2 f(u_p)}{u_p^2 f(u_p) - \left[\frac{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_{Q-}^2}{1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{pRN})} \right] u^2 f(u)}} \frac{du}{u^2 f(u)}. \quad (3.134)$$

Estamos interesados en el caso en que dos rayos de luz provenientes de la misma fuente alcancen al observador mediante dos trayectorias diferentes, es decir, cuando se observan dos imágenes con su respectivo ángulo de la imagen ψ . La diferencia entre el tiempo de llegada de cada rayo de luz Δt , corresponde al tiempo de retardo exacto. En la Fig. 33, se presenta el retardo temporal exacto como función de la dirección angular real de la fuente β con respecto al observador (véase el diagrama de lens, Fig. 30). Conforme la distancia de la fuente al eje óptico incrementa, el retardo temporal crece. Cuando la fuente, la lente y el observador yacen sobre una misma línea, se tiene que $\Delta t = 0$, como se espera de la simetría esférica. El efecto de Einstein-Euler-Heisenberg en el tiempo de retardo apenas es visible cuando se compara con el caso de Reissner-Nordström, debido a que estos rayos de luz no orbitan alrededor del agujero negro múltiples veces. Para observadores más lejanos, la diferencia es incluso menor.

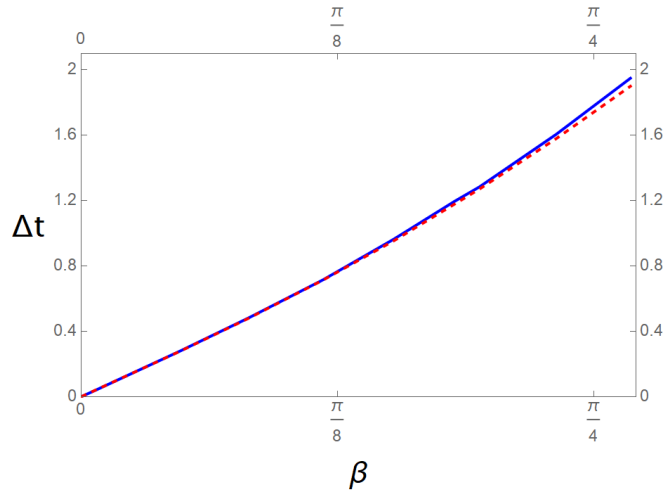


Figura 33: El tiempo de retardo exacto en segundos, como función de la dirección angular de la fuente β en radianes. La línea continua corresponde al caso de Einstein-Euler-Heisenberg, mientras que la discontinua al caso de Reissner-Nordström. Los parámetros son: $M = 10^4 M_\odot$, $Q = 0.8M$, $r_0 = r_s = 30M$.

4. La solución rotante de agujero negro cargado eléctricamente

En la sección anterior, presentamos la solución estática de agujero negro cargado eléctricamente, con la electrodinámica de Euler-Heisenberg como fuente. Si bien, la solución estática nos permite estudiar algunas propiedades directamente relacionadas con la carga del agujero negro, es de esperarse que los agujeros negros astrofísicos roten. De las observaciones de las sombras de los agujeros negros supermasivos M87* [3] y Sag A* [4], se concluye que ambos rotan. Más aún, los agujeros negros estelares, para los cuales los efectos de la polarización del vacío son más relevantes, provienen del colapso gravitacional de una estrella. Si tal estrella rotaba, siendo más compacto y debido a la conservación del momento angular, el agujero negro resultante rotaría aún más.

En esta sección presentamos la solución de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, derivada por Bretón et al. [92], usando un ansatz para un espacio-tiempo tipo-Kerr y considerando las simetrías de las métricas de Petrov tipo-D para resolver las ecuaciones de Einstein. En este trabajo se integraron las ecuaciones de Einstein en el marco de la interpretación de QED, y su solución se redujo a la solución apantallada de Kerr-Newman. Nosotros estudiamos las trayectorias de partículas de prueba cargadas y de los fotones, así como los efectos de Euler-Heisenberg en la sombra del agujero negro. Los resultados de esta sección fueron publicados en [93].

4.1. La solución a las ecuaciones de Einstein

Para obtener la solución de agujero negro rotante cargado eléctricamente [92], el potencial de la parte electromagnética de la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg, para las variables duales de Plebański, en las coordenadas de Boyer-Lindquist, está dado por el ansatz

$$B = B_\alpha dx^\alpha = -\frac{Qa \cos \theta}{\Sigma} \left(dt - \frac{(r^2 + a^2)}{a} d\phi \right). \quad (4.1)$$

A partir de éste, la dos-forma dual de Plebański, $*P = dB$, resulta

$$\begin{aligned} *P &= \frac{2Q}{\Sigma^2} ar \cos \theta dr \wedge (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \\ &+ \frac{Q}{\Sigma^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \wedge [adt - (r^2 + a^2) d\phi]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sus componentes satisfacen las relaciones

$$*P_{r\phi} = a \sin^2 \theta *P_{tr}, \quad a *P_{\theta\phi} = (r^2 + a^2) *P_{t\theta}. \quad (4.3)$$

Asimismo, la dos-forma de Plebański está dada por

$$\begin{aligned} P &= \frac{Q}{\Sigma^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \\ &+ \frac{Q}{\Sigma^2} ar \sin 2\theta d\theta \wedge [(r^2 + a^2) d\phi - adt], \end{aligned} \quad (4.4)$$

y sus componentes también están relacionadas de la siguiente manera:

$$P_{r\phi} = a \sin^2 \theta P_{tr}, \quad a P_{\theta\phi} = (r^2 + a^2) P_{t\theta}. \quad (4.5)$$

De la ecuación (2.10), los invariantes $\tilde{s}$ y $\tilde{t}$ resultan

$$\tilde{s} = \frac{Q^2}{2\Sigma^2} - \frac{4\mathcal{M}^2 r^2 \cos^2 \theta}{\Sigma^4}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{t} = \frac{2Qr \cos \theta}{\Sigma^4} \mathcal{M} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta), \quad (4.7)$$

en donde se introdujo el momento dipolar magnético inducido rotacionalmente [94], $\mathcal{M} = Qa$. Dado que las componentes de B_μ se obtienen de la ecuación (4.1), podemos calcular las componentes A_μ del

potencial electromagnético, usando las relaciones constitutivas (2.14). Estas ecuaciones relacionan las variables de Plebański $P_{\mu\nu}$ y ${}^*P_{\mu\nu}$, con las variables estándar de Maxwell $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, y ${}^*F_{\mu\nu}$. Por lo tanto, se puede derivar la solución para $A = A_\nu dx^\nu$,

$$A = \left\{ 1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 + \frac{10\alpha}{225\pi} H_Q^2 + \frac{60\alpha}{225\pi} H_Q^2 \frac{H_Q^2}{D_Q^2} \right\} \frac{Qr}{\Sigma} [dt - a \sin^2 \theta d\phi] , \quad (4.8)$$

en donde el cuadrado de las componentes radiales de los campos electromagnéticos está dado por

$$D_Q^2 = \frac{Q^2}{\Sigma^2 D_c^2} , \quad H_Q^2 = \frac{\mathcal{M}^2 \cos^2 \theta}{\Sigma^3 D_c^2} , \quad (4.9)$$

con el campo crítico (2.1), $D_c = m_e^2 c^3 / (e\hbar)$. Para el caso lineal, $\alpha = 0$, se recupera el potencial electromagnético usual para el agujero negro de Kerr-Newman.

Por otro lado, sólo dos componentes contravariantes del tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ para la teoría de Einstein-Euler-Heisenberg (2.18), son independientes:

$$8\pi T^{rr} = -\frac{\Delta Q^2}{\Sigma^3} \left(1 - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4} \tilde{s} \right) - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4} \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\tilde{s}^2 + \frac{7}{4} \tilde{t}^2 \right) , \quad (4.10)$$

$$8\pi T^{\theta\theta} = \frac{Q^2}{\Sigma^3} \left(1 - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4} \tilde{s} \right) - \frac{16\alpha^2}{45m_e^4} \frac{1}{\Sigma} \left(\tilde{s}^2 + \frac{7}{4} \tilde{t}^2 \right) , \quad (4.11)$$

mientras que, debido a la simetría particular [92], el resto de las componentes no-nulas son combinaciones lineales de éstas, i.e.,

$$T^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta^2} T^{rr} + a^2 \sin^2 \theta T^{\theta\theta} , \quad (4.12)$$

$$T^{t\phi} = -\frac{(r^2 + a^2)a}{\Delta^2} T^{rr} + a T^{\theta\theta} , \quad (4.13)$$

$$T^{\phi\phi} = -\frac{a^2}{\Delta^2} T^{rr} + \frac{1}{\sin^2 \theta} T^{\theta\theta} . \quad (4.14)$$

De acuerdo a la interpretación de QED, la polarización del vacío actúa como nubes de cargas virtuales apantallando a la carga eléctrica real y, consecuentemente, al momento dipolar magnético inducido. Por lo tanto, en [92], los efectos de la polarización del vacío son considerados cuasi-constantes y la geometría sólo es modificada mediante los valores apantallados de las cargas, como ocurre en el espacio-tiempo plano [36]. La solución resultante a las ecuaciones de Einstein aparece como una solución apantallada de Kerr-Newman, dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - \tilde{Q}^2}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \frac{(2Mr - \tilde{Q}^2)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\ + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - \tilde{Q}^2)a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (4.15)$$

con las funciones métricas

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta , \\ \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + \tilde{Q}^2 = (r - r_+) (r - r_-) . \quad (4.16)$$

La solución está caracterizada por tres parámetros: la masa M , el momento angular a y la carga eléctrica apantallada $\tilde{Q}$, definida como

$$\tilde{Q}^2 = Q^2 \left\{ 1 - \frac{5\alpha}{225\pi} \left[D_Q^2 - 4H_Q^2 \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma} \right) \left(7 - 12 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma} + 12 \frac{a^4 \cos^4 \theta}{\Sigma^2} \right) \right] \right\} , \quad (4.17)$$

con los campos electromagnéticos D_Q y H_Q definidos en la ecuación (4.9). Ambos dependen de la carga real Q del agujero negro, así como del campo crítico D_c , a partir del cual se crean los pares electrón-positrón. El campo magnético H_Q es inducido por la rotación a y la carga Q del agujero negro, dado que surge del momento dipolar magnético $\mathcal{M} = Qa$. Adicionalmente, el apantallamiento del momento magnético es $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{Q}a$.

Ambos campos D_Q y H_Q también dependerían de las coordenadas r y θ , vía la función métrica $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, en el marco de la interpretación de QED, los términos de Euler-Heisenberg en el apantallamiento (4.17) son localmente considerados constantes. Esto significa que la carga apantallada $\tilde{Q}(r, \theta)$ debe estar evaluada en r y θ constantes, dependiendo del punto en el que se pretenden analizar los efectos de la polarización del vacío. Por ejemplo, cuando se estudia la termodinámica del agujero negro, se analizan los efectos cerca del horizonte de eventos, por lo que la carga apantallada se evaluaría en el radio del horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newman. Lo análogo ocurre, como se ejemplificó en el caso estático, para partículas de prueba en las órbitas circulares. En particular, para una partícula que sigue una órbita cerrada cerca de la órbita circular estable, i.e., que encuentra dos puntos de retorno alrededor del mínimo del potencial, el apantallamiento se puede evaluar en el radio de la órbita circular estable, pues el movimiento ocurre alrededor de ésta.

En el caso rotante, existe además una dependencia en θ . En este caso, podemos realizar una evaluación similar. Si una partícula orbita el agujero negro entre dos ángulos, $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, dada la simetría axial del espacio-tiempo, uno puede considerar al plano ecuatorial como el punto promedio de la trayectoria. De esta manera, resulta natural evaluar la carga apantallada en $\theta = \pi/2$, para una variedad de situaciones astrofísicas, como los discos de acreción. De cualquier manera, una desalineación con el plano ecuatorial introduciría una corrección menor en el término de Euler-Heisenberg, el cual es por sí mismo pequeño. Más aún, podemos estudiar localmente los efectos de la polarización del vacío, en lugares específicos como el plano ecuatorial o los polos.

Finalmente, para el caso estático, se recupera la solución de Reissner-Nordström apantallada (3.9), así como el correspondiente apantallamiento (3.6), dado que para $a = 0$, el campo magnético inducido rotacionalmente se anula, i.e., $H_Q = 0$.

4.1.1. El horizonte de eventos y la ergoregión

De la condición $\Delta = 0$, el horizonte de eventos r_+ y el horizonte interno r_- están dados por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}. \quad (4.18)$$

La ergoregión es la región $r_+ < r < r_{\text{st}}$, entre el horizonte de eventos y la superficie de límite estático

$$r_{\text{st}} = M + \sqrt{M^2 - \tilde{Q}^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.19)$$

Por lo tanto, se recuperan las características de un agujero negro de Kerr-Newman, pero con la carga del agujero negro apantallada (4.17). En la Sec. 5, se presenta un análisis más detallado de las cantidades geométricas del agujero negro, así como de sus cantidades termodinámicas asociadas. Por el momento, nos enfocaremos en el estudio de las trayectorias de las partículas de prueba cargadas y de los fotones.

4.2. Trayectorias de partículas de prueba cargadas

Comenzamos analizando las órbitas de partículas de prueba con carga eléctrica q . Para ello, el Lagrangiano correspondiente que interactúa con el campo eléctrico es [86]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - q A_\mu \dot{x}^\mu. \quad (4.20)$$

Su acoplamiento con el campo electromagnético es exactamente el mismo que en la electrodinámica lineal [49]. Por su parte, el Hamiltoniano está dado por la transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}, \quad (4.21)$$

con el momento canónico

$$\pi_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - qA_\mu. \quad (4.22)$$

El Hamiltoniano resulta [94]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\pi_\mu + qA_\mu)(\pi_\nu + qA_\nu). \quad (4.23)$$

Dado que no depende explícitamente del tiempo propio τ , es una constante de movimiento, $\mathcal{H} = -\mu^2/2$, determinada por la condición de normalización para las geodésicas temporaloides,

$$\mu^2 = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1. \quad (4.24)$$

A partir de las ecuaciones de Hamilton, $dx^\mu/d\tau = \partial\mathcal{H}/\partial\pi_\mu$, se obtienen las constantes de movimiento

$$E = -\pi_t = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi} + qA_t, \quad (4.25)$$

$$L = \pi_\phi = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} - qA_\phi. \quad (4.26)$$

Para determinar la constante de movimiento adicional, la constante de Carter $\mathcal{C}$ [95], debemos resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$-2\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\tau} = g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x^\mu} + qA_\mu\right)\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x^\nu} + qA_\nu\right). \quad (4.27)$$

Las componentes A_μ están dadas por la ecuación (4.8). Como en el caso estático, la carga de la partícula de prueba también será apantallada. En términos de A_t , la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.27) se reduce a

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\tau} = & -\frac{1}{\Sigma\Delta}\left\{(r^2 + a^2)\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + a\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\phi} + q\Sigma A_t\right\}^2 + \frac{1}{\Sigma\sin^2\theta}\left\{a\sin^2\theta\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\phi}\right\}^2 \\ & + \frac{1}{\Sigma}\left\{\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\theta}\right)^2\right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con el fin de obtener el valor apantallado de la carga de prueba se requiere que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} q\Sigma A_t &= \left\{1 - \frac{10\alpha}{225\pi}D_Q^2 + \frac{10\alpha}{225\pi}H_Q^2 + \frac{60\alpha}{225\pi}H_Q^2\frac{H_Q^2}{D_Q^2}\right\}qQr, \\ &= \tilde{q}\tilde{Q}r, \end{aligned} \quad (4.29)$$

en donde $\tilde{Q}$ es la carga apantallada del agujero negro (4.17), y $\tilde{q}$ es la carga apantallada de la partícula de prueba

$$\tilde{q}^2 = q^2\left\{1 - \frac{5\alpha}{225\pi}\left[3D_Q^2 + 4H_Q^2\left(1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{\Sigma}\right)\left(13 - 12\frac{a^2\cos^2\theta}{\Sigma} + 12\frac{a^4\cos^4\theta}{\Sigma^2}\right)\right]\right\}, \quad (4.30)$$

la cual depende de D_Q y H_Q . Este apantallamiento es inducido tanto por el campo eléctrico del agujero negro que genera las nubes de cargas virtuales, como por el campo magnético generado por su rotación.

Para realizar la separación de variables, se usa el ansatz para la función de Hamilton

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\mu^2\tau - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (4.31)$$

con las constantes de integración μ , E y L . Las soluciones para S_r y S_θ están dadas por

$$S_r(r) = \int^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr, \quad S_\theta(\theta) = \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta, \quad (4.32)$$

en donde las funciones R , $\mathcal{P}$ y Θ , se definen como

$$R(r) \equiv \mathcal{P}^2(r) - \Delta (\mu^2 r^2 + K) , \quad (4.33)$$

$$\mathcal{P}(r) \equiv (r^2 + a^2)E - aL - \tilde{q}\tilde{Q}r , \quad (4.34)$$

$$\Theta(\theta) \equiv \mathcal{C} - [L^2 \csc^2 \theta + a^2(\mu^2 - E^2)] \cos^2 \theta , \quad (4.35)$$

con la constante de Carter modificada $K \equiv \mathcal{C} + [L - aE]^2$. De esta manera, las ecuaciones de movimiento resultan

$$\Sigma \dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \mathcal{P}(r) + a \{L - aE \sin^2 \theta\} , \quad (4.36)$$

$$(\Sigma \dot{r})^2 = R(r) , \quad (4.37)$$

$$(\Sigma \dot{\theta})^2 = \Theta(\theta) , \quad (4.38)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{a}{\Delta} \mathcal{P}(r) + \frac{\{L - aE \sin^2 \theta\}}{\sin^2 \theta} . \quad (4.39)$$

Estas ecuaciones de movimiento son equivalentes a aquéllas para el caso de Kerr-Newman, pero con las cargas reemplazadas por las cargas apantalladas (4.17) y (4.30). La descripción completa del movimiento de partículas cargadas en espacio-tiempos de Kerr-Newman, así como las soluciones analíticas en términos de las funciones elípticas de Weierstrass, fueron presentadas con detalle por Hackmann et al. [96]. Sus soluciones y clasificación pueden ser retomadas para nuestro caso de Einstein-Euler-Heisenberg, reemplazando Q y q , por $\tilde{Q}$ y $\tilde{q}$.

Las ecuaciones (4.36)-(4.39), se obtuvieron mediante el método usual de Hamilton-Jacobi, análogo al caso de Kerr-Newman. Un ejemplo de este método, pero empleado para el movimiento de los fotones, se presenta en el Apéndice D.

4.2.1. El potencial efectivo

El punto de retorno de una órbita está dado por la condición $\dot{r} = 0$, el cual usando la ecuación (4.37), corresponde a $R = 0$. Una vez más, siguiendo el procedimiento en [76], definimos el potencial efectivo como solución al polinomio cuadrático en E , i.e.,

$$0 = (\Sigma \dot{r})^2 = R(r) = (E - V_{\text{eff}}^+) (E - V_{\text{eff}}^-) , \quad (4.40)$$

en este caso con

$$V_{\text{eff}}^{\pm} = \frac{1}{(r^2 + a^2)} \left[aL + \tilde{q}\tilde{Q}r \pm \sqrt{(\mu^2 r^2 + K) \Delta} \right] . \quad (4.41)$$

Si las cargas tienen el mismo signo, $\tilde{q}\tilde{Q} > 0$, el potencial efectivo V_{eff}^+ es siempre positivo. Para signos opuestos, $\tilde{q}\tilde{Q} < 0$, ambos potenciales efectivos $V_{\text{eff}}^{\pm}$ pueden tomar valores negativos, lo que corresponde a valores negativos de la energía. En infinito, el valor límite del potencial efectivo está dado por $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}^{\pm} = \pm 1$. Además, ambos potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ coinciden en los horizontes $r_{\pm}$, en donde $\Delta = 0$. La región entre los dos horizontes, $r_- < r < r_+$, no forma parte del dominio de (4.41), dado que aquí $\Delta < 0$, lo que a su vez implica que $R > 0$. Es decir, no puede haber ningún punto de retorno, $R = 0$, entre los horizontes y hay un punto de retorno en un horizonte si, y sólo si, $\mathcal{P}(r_{\pm}) = 0$.

Las Figuras 34 a 36 combinan ambos potenciales efectivos $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r para diferentes valores de los parámetros. Las áreas grises marcan regiones físicamente prohibidas. Existe una barrera de potencial localizada en el intervalo $0 < r \leq r_-$, mientras que afuera del horizonte de eventos, en la región $r > r_+$, la existencia de máximos y mínimos del potencial implican la posibilidad de órbitas cerradas estables e inestables.

Presentamos un ejemplo en la Fig. 34, en donde se muestra un acercamiento a la región que abarca al máximo y al mínimo del potencial. Debido al apantallamiento de la carga de la partícula de prueba,

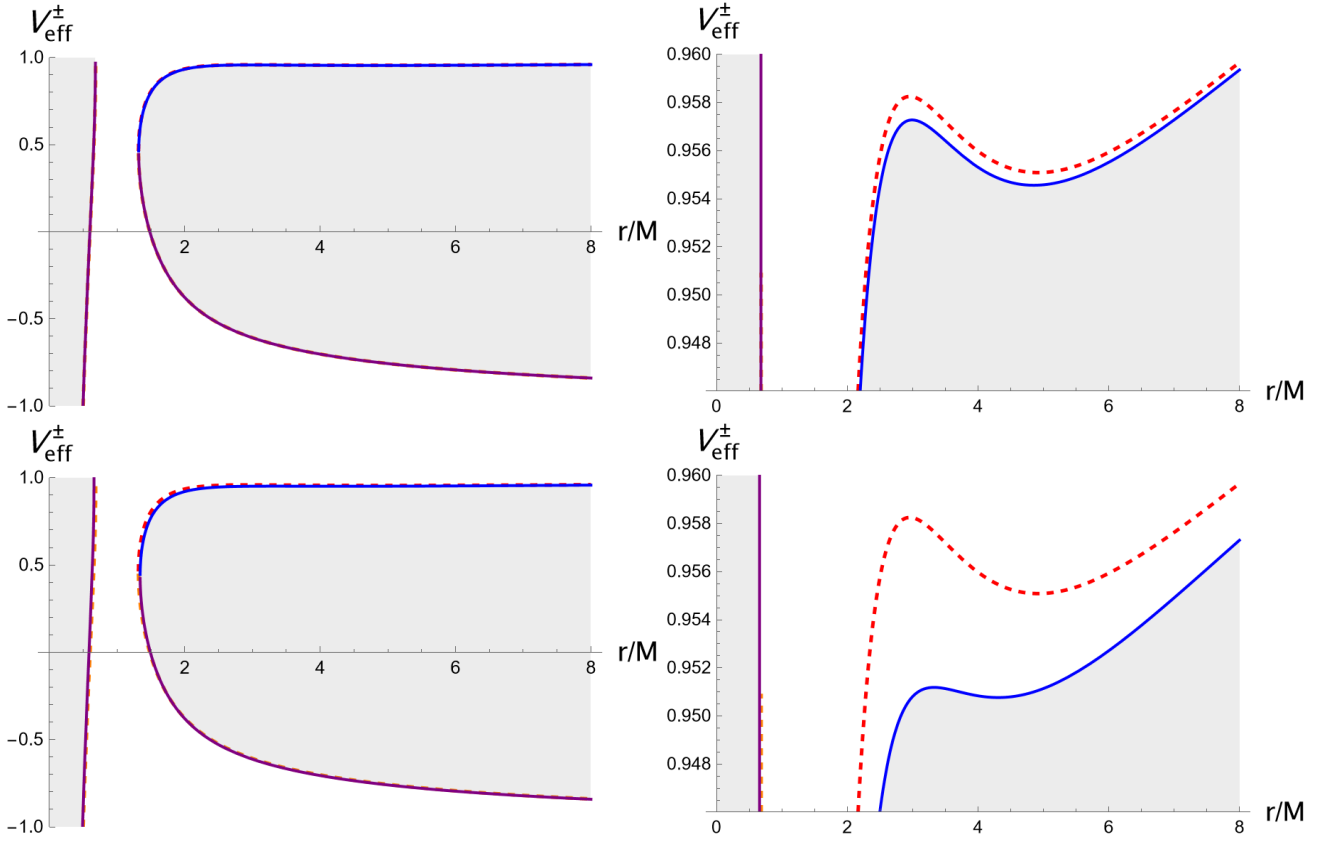


Figura 34: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman (línea discontinua) y el caso rotante de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua). Derecha: el zoom de la región correspondiente de la figura del lado izquierdo. Para las figuras superiores, $\tilde{q}$ está apantallada en el radio del mínimo del potencial de Kerr-Newman, mientras que para las figuras inferiores, el apantallamiento está evaluado en el máximo. Los otros parámetros son: $M = 1 \times 10^4 M_{\odot}$, $Q = 0.9M$, $a = 0.3M$, $\mu = 1$, $L = 0.8M$, $K = 4M^2$ y $q = 0.5$.

el potencial efectivo de Einstein-Euler-Heisenberg se encuentra por debajo del de Kerr-Newman. Si hay una carga de prueba que, por ejemplo, alcanza una órbita cerrada en la región cercana al mínimo del potencial de Kerr-Newman y cargas virtuales son producidas por la carga del agujero negro, entonces la carga de prueba seguirá la órbita descrita por el espacio-tiempo de Einstein-Euler-Heisenberg, con ambas cargas $\tilde{q}$ y $\tilde{Q}$ siendo apantalladas en el radio de este mínimo. Algo similar ocurriría si la carga de prueba alcanza el máximo del potencial, pero el efecto sería más visible, debido a que éste se encuentra a una distancia radial r menor.

Las Figuras 35 y 36 presentan el efecto del apantallamiento en el potencial efectivo para diferentes valores de la masa M del agujero negro. El efecto es más visible para masas más pequeñas, como se esperaba. El potencial puede ser reducido lo suficiente, de tal manera que su máximo y mínimo desaparezcan. Esto último se ejemplifica en la Fig. 35. Recordemos que la presencia de los máximos y mínimos implican la existencia de órbitas cerradas y puntos de retorno. En el caso en el que éstos desaparezcan, la carga de prueba no alcanzaría una órbita cerrada afuera del horizonte de eventos, por lo que sería capturada por el agujero negro. Esto es un ejemplo de cómo la polarización del vacío puede alterar significativamente la trayectoria de la partícula de prueba cargada, por medio del apantallamiento de las cargas reales. Análogamente al caso estático, las distancias radiales a las que se encuentran las órbitas cerradas estables e inestables, asociadas respectivamente al mínimo y al máximo del potencial, se ven modificadas por el efecto de Euler-Heisenberg. Aquí hemos analizado cualitativamente las trayectorias, describiendo los potenciales efectivos. El análisis detallado es análogo a aquél en [96]. Finalmente, otro ejemplo, pero con un valor mayor de la carga de prueba, se presenta en la Fig. 36.

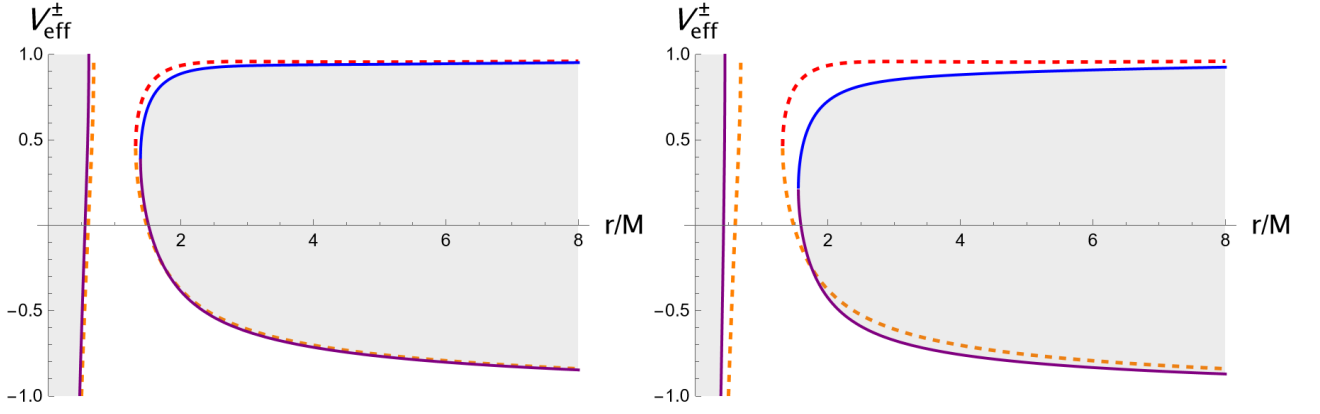


Figura 35: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman (línea discontinua) y el caso de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua), con el valor apantallado $\tilde{q}$ en el mínimo del potencial de Kerr-Newman. Izquierda: la masa del agujero negro se fijó a $M = 2 \times 10^3 M_{\odot}$. Derecha: se usó una masa de $M = 1 \times 10^3 M_{\odot}$. Debido al efecto de apantallamiento de las cargas, los máximos y mínimos desaparecen. El resto de los parámetros son: $Q = 0.9M$, $a = 0.3M$, $\mu = 1$, $L = 0.8M$, $K = 4M^2$, y $q = 0.5$.

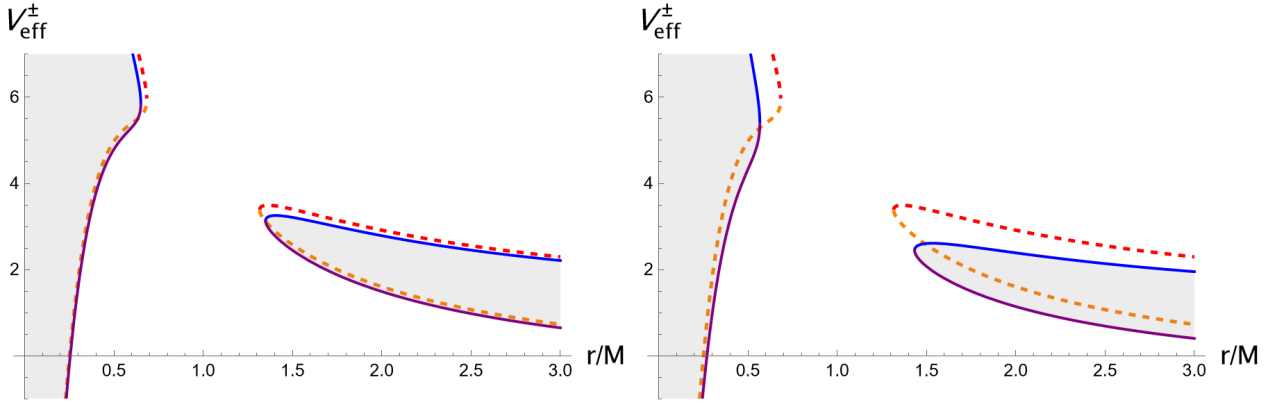


Figura 36: Los potenciales $V_{\text{eff}}^{\pm}$ como funciones de r/M para el caso de Kerr-Newman (línea discontinua) y el caso de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua), con el apantallamiento $\tilde{q}$ evaluado en el mínimo del potencial de Kerr-Newman y para un valor mayor de la carga de prueba $q = 5$. Izquierda: la masa se fijó a $M = 4 \times 10^4 M_{\odot}$. Derecha: la masa es de $M = 2 \times 10^4 M_{\odot}$. El resto de los parámetros son: $Q = 0.9M$, $a = 0.3M$, $\mu = 1$, $L = 0.8M$, y $K = 4M^2$.

4.3. Las geodésicas de luz

Dado que en la electrodinámica no-lineal de Euler-Heisenberg, los fotones se propagan a través de geodésicas nulas de la pseudo-métrica efectiva de Plebański (2.22),

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{80\alpha}{225D_c^2} T^{\mu\nu}, \quad (4.42)$$

las ecuaciones de movimiento en el caso rotante, se calculan a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi escrita en términos de $\gamma^{\mu\nu}$, i.e.,

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\nu}. \quad (4.43)$$

El procedimiento es similar al de las partículas cargadas, y el método detallado se presenta en el Apéndice D. Primero, se propone una función de Hamilton con la forma de (4.31), y las constantes de movimiento E , L , y $\mathcal{C}$. En el caso de los fotones, la condición de normalización para geodésicas nulas está dada por

$$\mu^2 = -\gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (4.44)$$

Después, se realiza la separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi, resultando en las siguientes soluciones:

$$S_r(r) = \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr, \quad (4.45)$$

$$S_\theta(\theta) = \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta, \quad (4.46)$$

en donde las funciones R , $\mathcal{P}$ y Θ están definidas como

$$R(r) \equiv \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \mathcal{P}^2(r) - K\Delta, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{P}(r) \equiv (r^2 + a^2)E - aL, \quad (4.48)$$

$$\Theta(\theta) \equiv \mathcal{C} - [L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2] \cos^2 \theta. \quad (4.49)$$

De nuevo hemos introducido una constante de Carter modificada $K \equiv \mathcal{C} + [L - aE]^2$.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento de los fotones son las siguientes:

$$\Sigma \dot{t} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \mathcal{P}(r) + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a \{ L - aE \sin^2 \theta \}, \quad (4.50)$$

$$(\Sigma \dot{r})^2 = R(r), \quad (4.51)$$

$$(\Sigma \dot{\theta})^2 = \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Theta(\theta), \quad (4.52)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{a}{\Delta} \mathcal{P}(r) + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\{ L - aE \sin^2 \theta \}}{\sin^2 \theta}. \quad (4.53)$$

Estas ecuaciones difieren de aquéllas para partículas sin masa, es decir, (4.36)-(4.39) con $\mu = 0$ y $q = 0$. Adicionalmente, además de la carga apantallada en la función métrica Δ , aparecen coeficientes no-lineales provenientes de la métrica efectiva, es decir, de la propagación de la luz en el medio dieléctrico efectivo formado por las nubes de cargas virtuales. Estos términos son los que más modifican la trayectoria de los fotones, y tendrán un efecto directo en la sombra del agujero negro.

Antes de continuar, es importante mencionar que sólo fue posible separar completamente la ecuación de Hamilton-Jacobi, en el marco de la interpretación de QED, considerando los campos de Euler-Heisenberg cuasi-constantes. El campo eléctrico $D_Q \equiv Q^2/(D_c^2 \Sigma^2)$ es considerado como constante en la localidad del fotón. Para más detalles, véase el Apéndice D.

4.3.1. La foto-región

A partir de la ecuación (4.51), obtenemos las condiciones bajo las cuales los rayos de luz alcanzan la foto-región (*photon region*), $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. Ésta es una generalización del anillo de luz definido en el caso estático, y la distancia radial a la que se encuentra estará denotada por $r = r_c$. Las condiciones anteriores se traducen a las condiciones $R(r_c) = 0$ y $R'(r_c) = 0$, y nos permiten calcular las expresiones para las constantes

$$\eta \equiv \frac{L}{E} = \frac{r_c^3 - 3Mr_c^2 + (a^2 + 2\tilde{Q}_c^2) r_c + Ma^2}{a(M - r_c)}, \quad (4.54)$$

$$\chi \equiv \frac{\mathcal{C}}{E^2} = \frac{r_c^2}{a^2 (r_c - M)^2} \left[4Mr_c (a^2 + \tilde{Q}_c^2) - 4\tilde{Q}_c^2 \Delta_c - r_c^2 (r_c - 3M)^2 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(\Sigma_c) (4a^2 \Delta_c) \right], \quad (4.55)$$

en donde $\Delta_c = r_c^2 + a^2 - 2Mr_c + \tilde{Q}_c^2$. En este caso, el apantallamiento de la carga está evaluada en la distancia radial de la foto-región de Kerr-Newman r_c^{KN} , i.e.,

$$\tilde{Q}_c^2 = Q^2 \left\{ 1 - \frac{5\alpha}{225\pi} \left[D_Q^2(\Sigma_c) - 4H_Q^2(\Sigma_c) \left(7 - 12 \frac{a^2 \cos^2 \theta_c^{\text{KN}}}{\Sigma_c} + 12 \frac{a^4 \cos^4 \theta_c^{\text{KN}}}{\Sigma_c^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta_c^{\text{KN}}}{\Sigma_c} \right) \right] \right\}, \quad (4.56)$$

con los campos eléctrico $D_Q(\Sigma_c) = Q^2/(D_c^2 \Sigma_c^2)$, y magnético $H_Q(\Sigma_c) = \mathcal{M}^2 \cos^2 \theta_c^{\text{KN}}/(D_c^2 \Sigma_c^3)$, y con la función métrica $\Sigma_c = (r_c^{\text{KN}})^2 + a^2 \cos^2 \theta_c^{\text{KN}}$.

De la ecuación (4.54), se obtiene el polinomio cúbico en r_c

$$r_c^3 - 3Mr_c^2 + \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] r_c + aM(a - \eta) = 0. \quad (4.57)$$

Éste tiene tres raíces reales, o una raíz real y dos raíces complejas. Las raíces reales pueden tener multiplicidad dos o tres, y pueden ser positivas o negativas. Siguiendo el método de Cardano (véase Apéndice A), determinamos los valores de los parámetros con los cuales el polinomio tiene soluciones reales y positivas. Las soluciones exactas son

$$\begin{aligned} \mathcal{A} > 0, \mathcal{B} \leq 1 & : r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} \right), \\ \mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 1 & : r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \mathcal{B} \right), \\ \mathcal{A} < 0 & : r_c = M - 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \sinh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

en donde las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están definidas por

$$\mathcal{A} \equiv M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right], \quad (4.59)$$

$$\mathcal{B} \equiv M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) \mathcal{A}^{-3/2}. \quad (4.60)$$

Además de los parámetros del agujero negro, Q , a y M , y la constante de estructura fina α , estas soluciones dependen de la constante η . Es decir, sustituyendo las soluciones (4.58) en la ecuación (4.55), se obtiene una función paramétrica $\chi(\eta)$. Este resultado es importante para la obtención de la sombra, y este método fue introducido por Cunha y Herdeiro [20], para el agujero negro de Kerr. La distancia radial r_c^{KN} de la foto-región del agujero negro de Kerr-Newman, se obtiene de la correspondiente solución (4.58), pero para $\alpha = 0$, con Q en lugar de $\tilde{Q}_c$. El ángulo θ_c^{KN} también debe ser fijado. Por ejemplo, para una fuente en el disco de acreción, lo podemos fijar en el plano ecuatorial, i.e., $\theta_c^{\text{KN}} = \pi/2$.

4.3.2. La sombra del agujero negro

En esta sección seguiremos el enfoque de Bardeen et al. [9], en el cual se considera un conjunto de observadores locales que "rotan con la geometría", los llamados marcos localmente no-rotantes (LNRF, *locally nonrotating frames*). Las líneas de mundo del observador son perpendiculares a las hipersuperficies $t = t_0$, y sus coordenadas son $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, y $\phi = \omega t + \phi_0$, con t_0 , r_0 , θ_0 , y ϕ_0 constantes. Cada observador tiene localmente su base de coordenadas Minkowskianas, i.e., una tétrada ortonormal. En el caso de un espacio-tiempo axialmente simétrico como (4.15), la tétrada para los LNRFs está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(t)} &= \sqrt{-g^{tt}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{g^{t\phi}}{\sqrt{-g^{tt}}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \mathbf{e}_{(r)} &= \sqrt{g^{rr}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_{(\theta)} = \sqrt{g^{\theta\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \mathbf{e}_{(\phi)} &= \sqrt{g^{\phi\phi} - \frac{(g^{t\phi})^2}{g^{tt}}} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

En este caso, dado que la tétrada está asociada al observador, se debe utilizar la métrica geométrica $g_{\mu\nu}$. Las componentes de Boyer-Lindquist de la base vectorial del LNRF son $e_{(i)} = e_{(i)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

En la electrodinámica no-lineal el momento de los rayos de luz se calcula empleando la pseudo-métrica efectiva de Plebański (4.42), $\gamma_{\mu\nu}$, es decir, se tiene $p_\mu = \gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$. Por lo tanto, en esta base, el momento se obtiene a partir de la expresión

$$\mathbf{p}^{(i)} = \eta^{(i)(j)} e_{(j)}^\mu \gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (4.62)$$

con la métrica de Minkowski $\eta^{(i)(j)} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$. A partir de sus componentes, podemos calcular las coordenadas celestiales en el plano de la imagen medidas por el observador, definidas como

$$(x, y) = \left(-r \frac{\mathbf{p}^{(\phi)}}{\mathbf{p}^{(t)}}, r \frac{\mathbf{p}^{(\theta)}}{\mathbf{p}^{(t)}} \right)_0. \quad (4.63)$$

El signo en x es válido para un agujero negro rotando de izquierda a derecha, desde el punto de vista del observador [10]. El subíndice cero denota su posición (r_0, θ_0) . Para observadores distantes, $r_0 \rightarrow \infty$, las coordenadas celestiales se reducen a

$$x = -\frac{\eta}{\sin \theta_0}, \quad (4.64)$$

$$y = \sqrt{\chi - (\eta^2 \csc^2 \theta_0 - a^2) \cos^2 \theta_0}. \quad (4.65)$$

Si se conoce la posición angular del observador θ_0 , entonces de la ecuación (4.64), se obtiene una función paramétrica $\eta(x)$, la cual, vía (4.58) y (4.55), nos permite reparametrizar la coordenada celestial y , como función de x , i.e.,

$$y(x) = \sqrt{\chi(x) - (x^2 - a^2) \cos^2 \theta_0}. \quad (4.66)$$

Esta función paramétrica difiere de aquélla para el caso lineal, dado que existe un término de Euler-Heisenberg adicional en la relación (4.55), proveniente del uso de la pseudo-métrica efectiva de Plebański.

Por un lado, la solución (4.15) corresponde a una solución de Kerr-Newman con carga apantallada, por lo que podría esperarse que la sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg fuera equivalente a la sombra del agujero negro de Kerr-Newman, pero para una carga más pequeña. Sin embargo, éste no es el caso, dado que esta contribución no-lineal adicional en la ecuación paramétrica de la sombra, es, en efecto, la contribución más importante, y surge del hecho de que el vacío adquiere una constante dieléctrica efectiva. Los rayos de luz se propagan a través de este medio dieléctrico efectivo, y, consecuentemente, las nubes de cargas virtuales que rodean al agujero negro cargado, tienen un impacto directo en la forma y tamaño de su sombra.

Se debe tener en mente que el enfoque de Bardeen sólo es apropiado para observadores a distancias lejanas. Las coordenadas celestiales o los parámetros de impacto, (4.64) y (4.65), tienen la dimensión de una longitud, por lo que tienen que ser divididos por r_0 para poder ser identificados como ángulos medidos en la esfera celestial del observador [35]. En las figuras siguientes, los parámetros de impacto x y y , están escritos en unidades de la masa M del agujero negro. Asimismo, las órbitas de los fotones y la sombra, para el caso lineal (Kerr-Newman), fueron estudiadas, por ejemplo, en [97]. A continuación, analizamos los efectos de Euler-Heisenberg en las sombras.

La Figura 37 presenta la sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, para una masa y momento angular fijos, y diferentes valores de la carga. Los parámetros del agujero negro satisfacen siempre la condición del horizonte de eventos, $a^2 + \tilde{Q}^2 \leq M^2$. Los términos no-lineales dependen de la carga real Q del agujero negro, dado que incluyen los campos electromagnéticos DQ y HQ , definidos en (4.9). Como es de esperarse, para mayores valores de la carga, el efecto de Euler-Heisenberg aumenta.

Cuando se estudia el caso de Kerr-Newman, una carga menor resulta en un tamaño más grande de la sombra. Esto puede observarse en la Fig. 37, en donde la sombra de Kerr-Newman (línea discontinua) para $Q = 0.2M$ es mayor que aquélla para $Q = 0.8M$, por ejemplo. En nuestro caso, la carga es apantallada, i.e., $\tilde{Q} < Q$. Entonces, uno esperaría que la sombra del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg fuera mayor que la de Kerr-Newman, cosa que no ocurre. Esto se debe al hecho de que

la luz se propaga a través del medio dieléctrico descrito por la pseudo-métrica $\gamma_{\mu\nu}$, como se mencionó anteriormente, lo que da lugar a términos no-lineales adicionales. Debido a estos términos, el tamaño de la sombra disminuye, comparado con el caso de Kerr-Newman, efecto directo de la polarización del vacío.

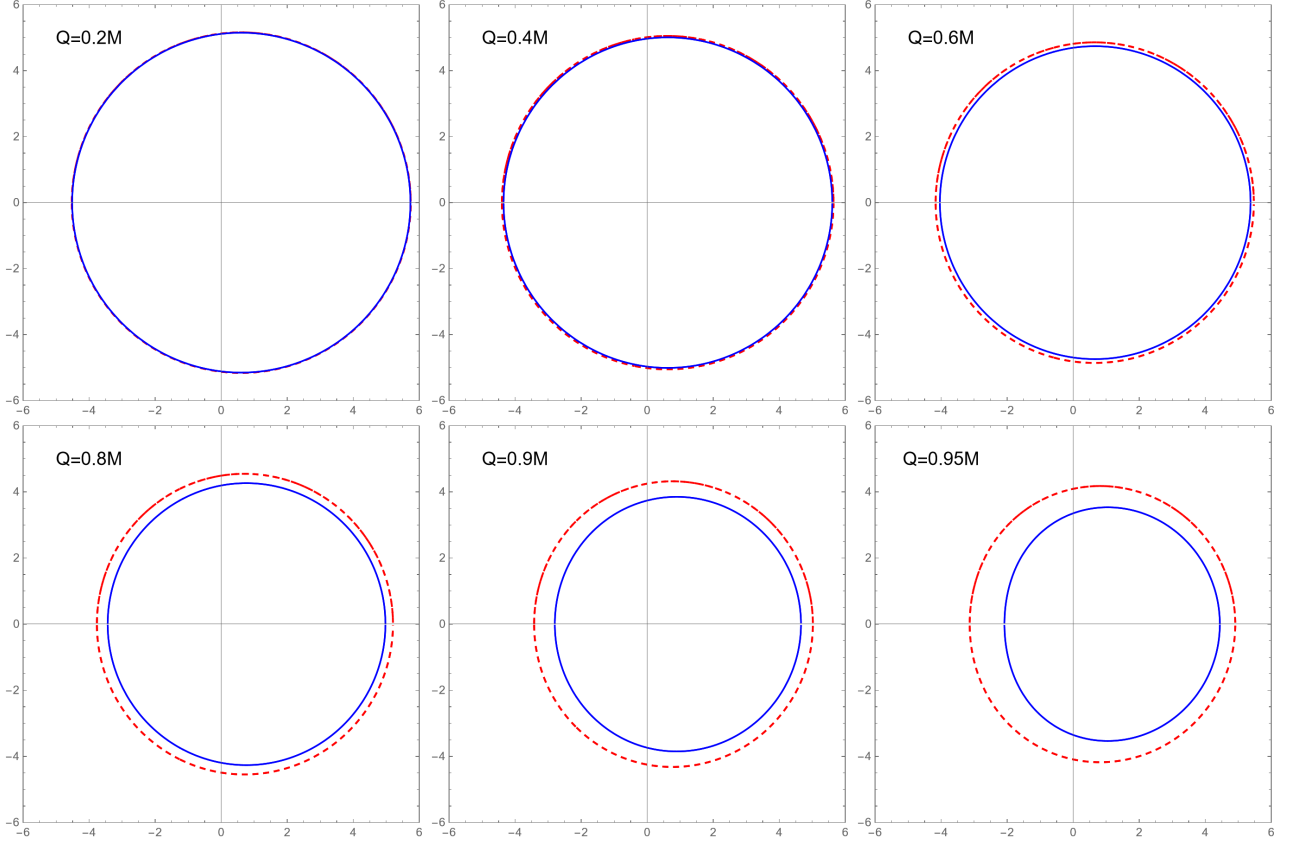


Figura 37: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) y la de Kerr-Newman (línea discontinua), para diferentes valores de la carga Q del agujero negro. Conforme Q crece, el efecto de Euler-Heisenberg se vuelve más visible. Los parámetros son: $M = 1 \times 10^4 M_\odot$, $a = 0.3M$, y $\theta_0 = \pi/2$.

La Figura 38 muestra la sombra para diferentes valores de la masa del agujero negro, y para valores fijos de los parámetros Q/M y a/M . Para valores más grandes de M , el efecto de Euler-Heisenberg no es visible, pero para valores más pequeños, el efecto se vuelve relevante. Para un valor fijo de Q/M , el efecto desaparece para masas muy grandes. Lo mismo ocurre en el caso estático (Sec. 3.5.4). Para agujeros negros supermasivos, el efecto de Euler-Heisenberg en la propagación de los fotones no es apreciable. Uno puede entender esto, analizando brevemente las dimensiones de las correcciones no-lineales, las cuales son todas proporcionales a $\frac{\alpha}{225\pi} D_Q^2(\Sigma_c)$. Por ejemplo, en el caso estático el término no-lineal es $\frac{\alpha}{225\pi D_c^2} \left(\frac{Q/M}{r_c^{\text{KN}}/M} \right)^2 \frac{1}{M^2}$, en donde el parámetro Q/M está restringido por la condición de horizonte de eventos, $0 \leq |Q|/M \leq 1$. El radio de la foto-región, $r_c^{\text{KN}}/M = \frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 8Q^2/(9M^2)} \right)$, sólo puede tomar valores entre $2 \leq r_c^{\text{KN}}/M \leq 3$. El factor restante, $1/M^2$, es el responsable de la dimensión de las correcciones no-lineales. Para masas más pequeñas el efecto es mayor. En la Sec. 5.4 se analiza lo anterior con más detalle.

El efecto de la polarización del vacío en la sombra del agujero negro depende de los valores de M , Q y del apantallamiento, como en el caso estático. En este último, considerar valores muy pequeños de la carga, resultaría en una reducción completa de los efectos, y la sombra se aproximaría a la sombra del agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo, en el caso rotante, el efecto de Euler-Heisenberg depende

adicionalmente del momento angular a del agujero negro. Esto puede observarse, del último término de la ecuación (4.55). Entonces, uno puede considerar valores muy pequeños de Q , junto con valores pequeños de M y valores no-nulos de a , de tal forma que el efecto en la sombra aún sea visible. Lo último se presenta en la Fig. 39, en la cual se muestra la sombra para valores fijos de M y Q , y variando el momento angular. Conforme a aumenta, el efecto de Euler-Heisenberg en la sombra crece.

Para agujeros negros estelares, cuyas masas son un par de masas solares más grandes que la masa crítica de las estrellas de neutrones, $M > 3.2M_\odot$, los valores de a son enormes, debido a la conservación del momento angular. Además, la carga del agujero negro puede ser distinta de cero durante el proceso de colapso gravitacional de una estrella y la acreción de materia cargada como el plasma. Un muy ligero aumento en la carga de un agujero negro estelar, lleva a la consecuente producción de pares por polarización del vacío. Por lo tanto, el efecto de Euler-Heisenberg en la propagación de la luz resulta relevante, incluso para cargas muy pequeñas, como aquella usada en la Fig. 39. Aunque hoy en día no es tecnológicamente posible, si se contara con la resolución para observar las vecindades del horizonte de eventos de agujeros negros estelares, estos efectos en sus sombras podrían ser probados.

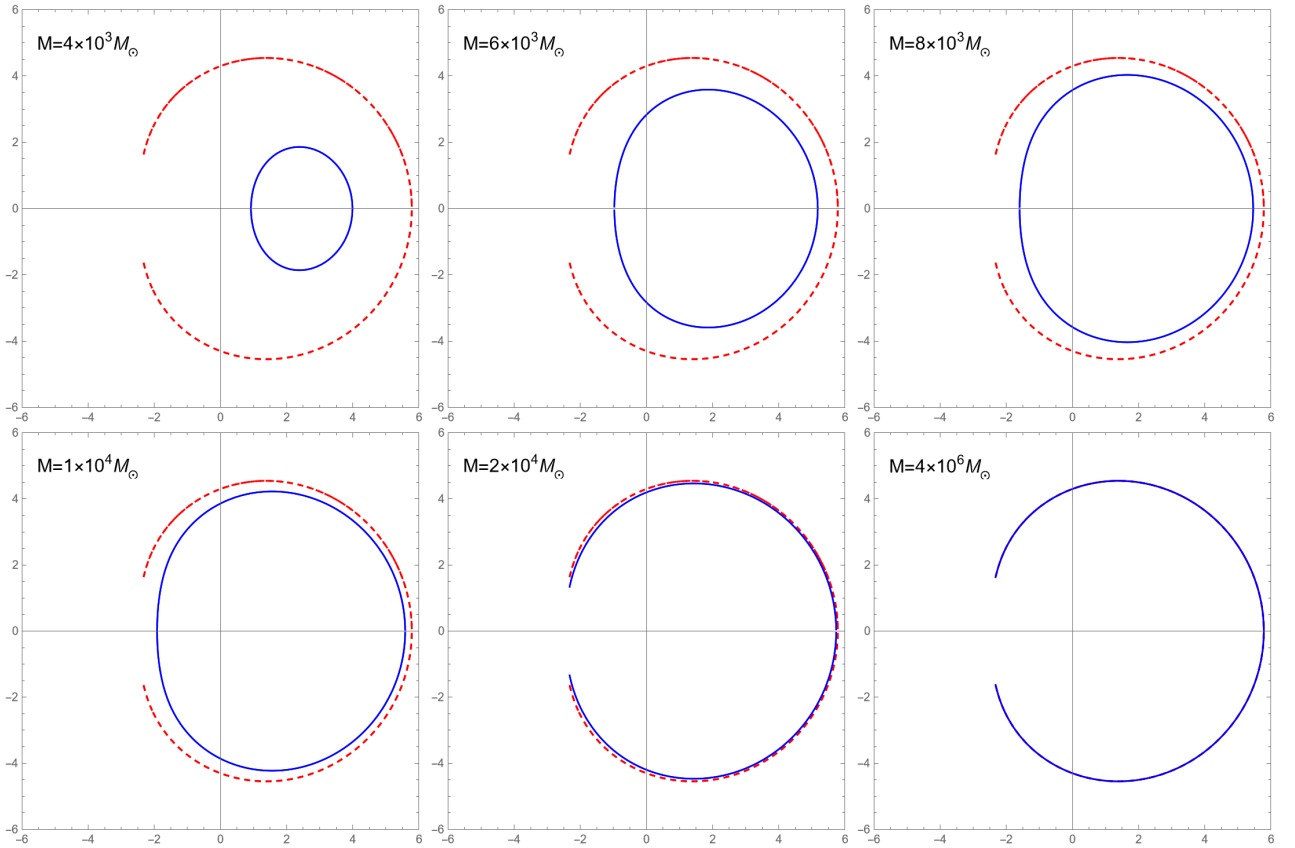


Figura 38: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) y la de Kerr-Newman (línea discontinua), para diferentes valores de la masa M . A medida que M disminuye, los efectos de Euler-Heisenberg se vuelven más relevantes. Los parámetros son: $Q = 0.8M$, $a = 0.6M$, y $\theta_0 = \pi/2$.

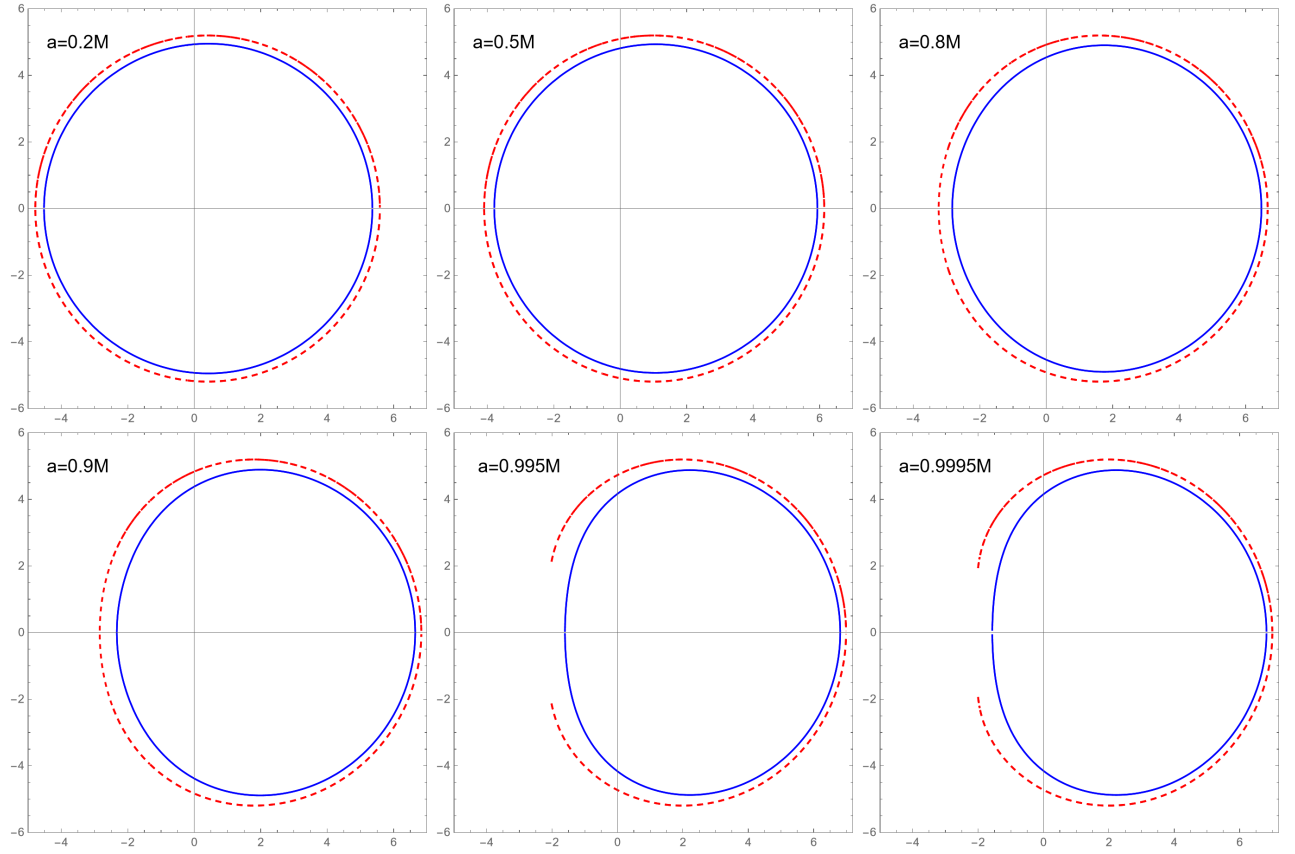


Figura 39: La sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) y la de Kerr-Newman (línea discontinua), para valores no-nulos del momento angular a . Incluso para un valor fijo muy pequeño de la carga del agujero negro, $Q = 5 \times 10^{-4}M$, el efecto de Euler-Heisenberg es aún visible. Esto se debe a la contribución no-lineal que depende de a , en (4.55). La masa se fija a $M = 5M_{\odot}$, la cual corresponde a un agujero negro estelar. Los parámetros satisfacen la condición $a^2 + \tilde{Q}^2 \leq M^2$. El ángulo del observador se fijó al valor $\theta_0 = \pi/2$.

5. Termodinámica del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg

Tras haber estudiado las trayectorias de las partículas de prueba alrededor del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, así como los efectos de la polarización del vacío en su sombra, queda una cuestión más por analizar: la termodinámica del agujero negro. Debido a su intenso campo gravitacional, un agujero negro atrae materia a su alrededor, la cual al cruzar el horizonte de eventos, ya no puede escapar. La materia capturada modifica las propiedades del agujero negro, el cual entonces puede ser considerado como un sistema termodinámico. En esta sección, se presenta un estudio detallado de la termodinámica del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, comenzando con una revisión de los efectos de la polarización del vacío en sus cantidades geométricas. Los resultados siguientes fueron publicados en [98].

5.1. La solución rotante

El espacio-tiempo de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg corresponde a la solución (4.15) de Kerr-Newman apantallada, que aquí se reescribe:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - \tilde{Q}^2}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \frac{(2Mr - \tilde{Q}^2)2a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\ + \Sigma d\theta^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - \tilde{Q}^2)a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2,$$

con

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2 + \tilde{Q}^2 = (r - r_+)(r - r_-). \end{aligned} \quad (5.1)$$

La carga apantallada, en términos de los campos electromagnéticos (4.9), está dada por la expresión (4.17), i.e.,

$$\tilde{Q}^2 = Q^2 \left\{ 1 - \frac{5\alpha}{225\pi} \left[D_Q^2 - 4H_Q^2 \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma} \right) \left(7 - 12 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma} + 12 \frac{a^4 \cos^4 \theta}{\Sigma^2} \right) \right] \right\},$$

con

$$D_Q^2 = \frac{Q^2}{\Sigma^2 D_c^2}, \quad H_Q^2 = \frac{\mathcal{M}^2 \cos^2 \theta}{\Sigma^3 D_c^2}. \quad (5.2)$$

Ambos campos D_Q y H_Q dependen de las variables r y θ , vía la función métrica $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Sin embargo, como se ha recalado anteriormente, la solución rotante (5.1) fue obtenida en el marco de la interpretación de QED de la electrodinámica de Euler-Heisenberg [92], de tal manera, que los términos no-lineales en el apantallamiento (5.2) deben ser considerados cuasi-constantes. Esto significa que la carga apantallada $\tilde{Q}(r, \theta)$ debe estar evaluada en r y θ constantes, dependiendo del punto en el que se pretenden analizar los efectos de la polarización del vacío.

En esta sección consideramos al agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg como un sistema termodinámico que está siendo afectado por materia capturada en el plano ecuatorial. Por lo tanto, evaluamos $\tilde{Q}$ en el horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newman,

$$R_H = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \quad (5.3)$$

y en el ángulo perpendicular al eje de rotación, $\theta = \pi/2$, de tal forma que la carga apantallada se reduce a

$$\tilde{Q} = Q \left\{ 1 - \frac{\alpha}{90\pi} \frac{Q^2}{R_H^4 D_c^2} \right\}. \quad (5.4)$$

Ésta sólo depende de los parámetros del agujero negro a , Q , y M , de la constante de estructura fina α y del campo crítico (2.1), D_c . Además, siempre está apantallada, i.e., $\tilde{Q} < Q$. Nótese que, conforme a o Q incrementan, R_H disminuye y, por lo tanto, el apantallamiento aumenta, dado que el término no-lineal es proporcional a R_H^{-4} . La Figura 40 presenta a la carga apantallada $\tilde{Q}$ como función del momento angular del agujero negro, mientras que la Fig. 41 muestra a $\tilde{Q}$ como función de su carga real Q .

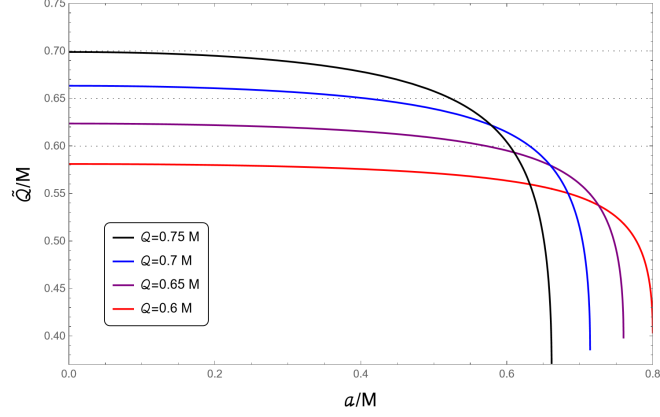


Figura 40: La carga apantallada $\tilde{Q}$ (5.4) como función del momento angular a , para diferentes valores de la carga Q y una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. En el caso de Kerr-Newman, la carga no depende del valor de a , y es constante.

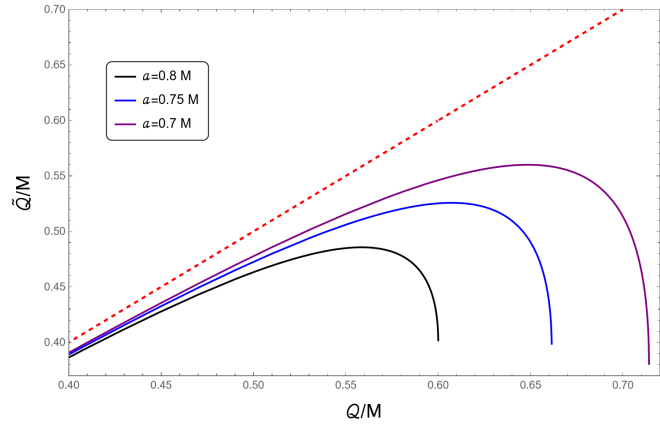


Figura 41: La carga apantallada $\tilde{Q}$ (5.4) como función de la carga real Q , para diferentes valores del momento angular a y una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman.

5.1.1. El horizonte de eventos

A partir de la condición $\Delta = 0$, se definen el horizonte de eventos r_+ y el horizonte interno, u horizonte de Cauchy, r_- , i.e., (4.18),

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}. \quad (5.5)$$

El horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newman es una esfera (o esferoide) de radio R_H , y su tamaño se ve modificado debido al apantallamiento de su carga, a un radio mayor $r_+ \geq R_H$, como se muestra en la Fig. 42. Asimismo, la Fig. 43 presenta al radio r_+ como función de la carga real del agujero negro y del momento angular.

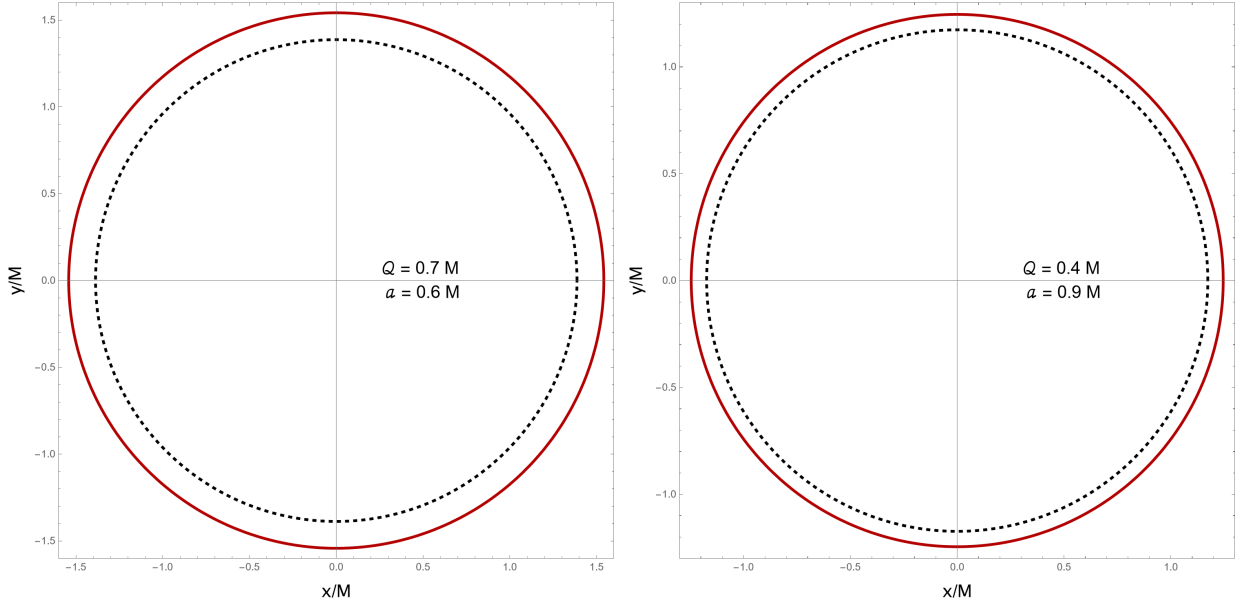


Figura 42: El horizonte de eventos para diferentes valores de los parámetros del agujero negro y para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman, mientras que la línea continua al de Einstein-Euler-Heisenberg. El horizonte de eventos crece debido a la polarización del vacío.

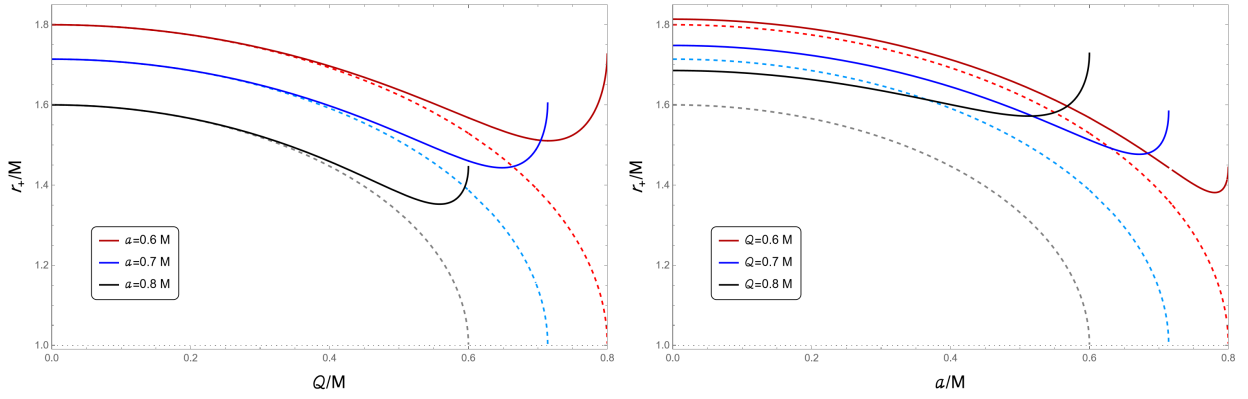


Figura 43: El radio r_+ del horizonte de eventos (5.5) del agujero negro de Eistein-Euler-Heisenberg (línea continua) comparado con el de Kerr-Newman (línea discontinua), para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. Izquierda: como función de la carga real Q para diferentes valores de a . Derecha: como función del momento angular a , para diferentes valores de Q .

5.1.2. El área del horizonte de eventos

El área A de la hipersuperficie del horizonte de eventos, con $t = \text{const.}$ y $r = r_+$ constantes, se define como

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi (r_+^2 + a^2), \\ &= 4\pi \left[2M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2} \right) - \tilde{Q}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Puede ser reescrita a primer orden en α de la siguiente manera:

$$A = A^{\text{KN}} + \frac{4\alpha}{45D_c^2} \frac{Q^4}{R_H^3} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right), \quad (5.7)$$

con $A^{\text{KN}} = 4\pi (R_H^2 + a^2)$, el área del horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newman. Las cantidades correspondientes al caso de Kerr-Newman están etiquetadas con un súperíndice KN , mientras que aquéllas correspondientes al caso de Einstein-Euler-Heisenberg no cuentan con etiquetas.

Los valores de los parámetros M , a y Q cambian cuando el agujero negro absorbe partículas con masa, momento angular o carga, y consecuentemente el área varía. En este caso, el área incrementa debido al efecto de Euler-Heisenberg. En particular, conforme Q aumenta, el área crece. Asimismo, el caso extremo de Kerr-Newman, $M^2 = a^2 + Q^2$, está restringido.

5.1.3. La gravedad superficial

La gravedad superficial de un agujero negro general no está bien definida. Sin embargo, uno puede definirla para un agujero negro cuyo horizonte de eventos es un horizonte de Killing. La gravedad superficial κ_+ de un horizonte de Killing estático es la aceleración, ejercida desde infinito, necesaria para mantener a un objeto en el horizonte de eventos. Matemáticamente, si un vector de Killing k^a está normalizado, $k^a k_a = -1$, entonces la gravedad superficial está definida por la ecuación

$$k^a \nabla_a k^b = \kappa_+ k^b, \quad (5.8)$$

la cual está evaluada en el horizonte de eventos.

Para un espacio-tiempo estático y asintóticamente plano, como la solución de Schwarzschild, k^a es un vector de Killing de traslación temporal, el cual se vuelve nulo en el horizonte, i.e., $k^a \partial_a = \frac{\partial}{\partial t}$. Un espacio-tiempo estacionario es axial-simétrico con un campo vectorial de Killing rotacional $k^b \partial_b = \frac{\partial}{\partial \phi}$, adicional al de traslación temporal. Entonces, $(k^a \partial_a)$ será una combinación lineal de ambos,

$$(k^a \partial_a)_\pm = \frac{\partial}{\partial t} \pm \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (5.9)$$

La combinación lineal de los vectores de Killing de traslación temporal y de simetría axial es nula en el horizonte de eventos, en donde Ω es la velocidad angular del agujero negro, la cual es constante en el horizonte de eventos y está dada por la ecuación (5.15).

De esta manera, la gravedad superficial en el horizonte de eventos, para un agujero negro de Kerr-Newman apantallado es

$$\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}{2M^2 - \tilde{Q}^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}, \quad (5.10)$$

la cual a primer orden en α puede ser reescrita como

$$\kappa_+ = \kappa_+^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{90\pi} \frac{(2a^2 + Q^2)}{D_c^2 (R_H^2 + a^2)^2} \left(\frac{Q^4}{R_H^4 \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right), \quad (5.11)$$

en donde $\kappa_+^{\text{KN}} = \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} / (R_H^2 + a^2)$ denota a la gravedad superficial del agujero negro de Kerr-Newman. El caso extremo de este último, está restringido de nuevo.

5.1.4. La ergoregión y otras propiedades

La ergoregión es la región $r_+ < r < r_{\text{st}}$ entre el horizonte de eventos y la superficie de límite estático (4.19),

$$r_{\text{st}} = M + \sqrt{M^2 - \tilde{Q}^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.12)$$

La Figura 44 muestra el efecto de Euler-Heisenberg en la ergoregión del agujero negro. Tanto la superficie de límite estático, como el horizonte de eventos, crecen. Sin embargo, dado que en general el efecto de Euler-Heisenberg es mayor en r_+ que en r_{st} , debido a que $r_+ \leq r_{\text{st}}$, la ergoregión del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg es más pequeña que la del agujero negro de Kerr-Newman. Consecuentemente, menos energía podría ser extraída del primero. Si bien ésta es una conclusión cualitativa, más adelante se analiza el proceso de extracción de energía del agujero negro.

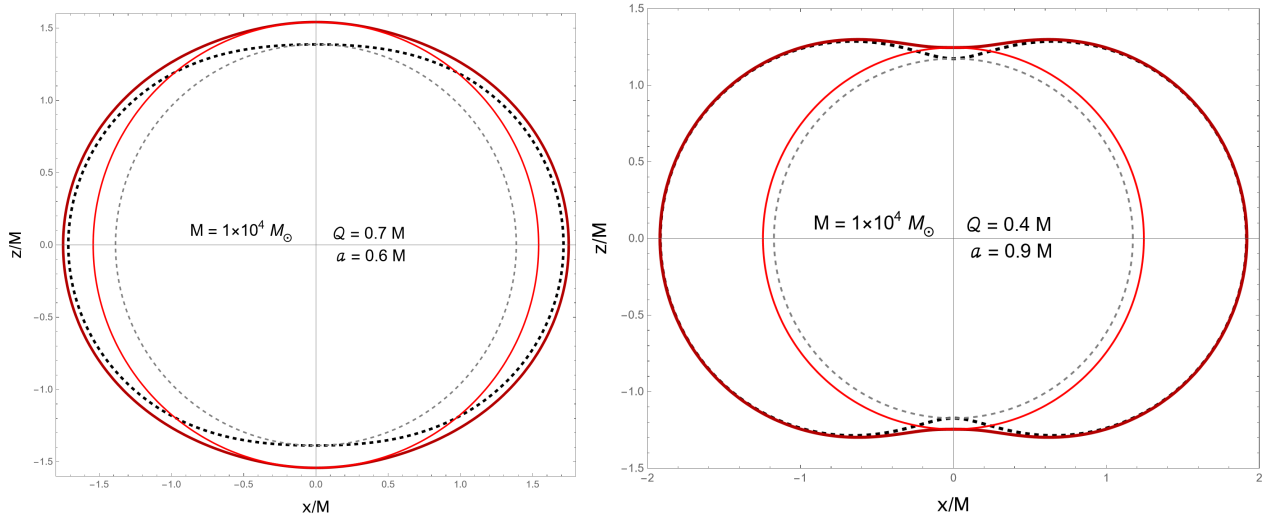


Figura 44: La ergoregión del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua) comparada con la ergoregión del de Kerr-Newman (línea discontinua), para diferentes valores de los parámetros del agujero negro Q y a , y para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. El área de la ergoregión en el caso de Kerr-Newman es mayor que aquélla en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, por lo que se puede extraer menor energía en este último.

Algunas cantidades adicionales son el parámetro de masa-energía,

$$M_E = \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+} = \frac{\left(2M \left[M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}\right] - \tilde{Q}^2\right)}{2 \left(M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}\right)}, \quad (5.13)$$

el momento angular del agujero negro,

$$J = a \left[\frac{r_+^2 + a^2}{2r_+} \right] = \frac{a \left(2M \left[M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}\right] - \tilde{Q}^2\right)}{2 \left(M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}\right)}, \quad (5.14)$$

la velocidad angular del horizonte de eventos,

$$\Omega_{r_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2M^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2} - \tilde{Q}^2}, \quad (5.15)$$

y el potencial eléctrico del agujero negro en el horizonte de eventos

$$\Phi_{r_+} = \frac{\tilde{Q}r_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (5.16)$$

5.2. El proceso de Penrose y la extracción de energía

El mecanismo de extracción de energía rotacional de un agujero negro de Kerr fue propuesto por primera vez en 1971 por Roger Penrose [99], por lo que actualmente es conocido como el proceso de Penrose. Debido a la existencia de la ergoregión, las partículas cuya componente axial de su momento angular es negativa, pueden ser absorbidas por el agujero negro a lo largo de una órbita de energía negativa. Esto reduce el momento angular del agujero negro, mientras que las partículas se llevan el momento angular reducido lejos de la ergoregión, hacia infinito. Si llegan hasta un observador estacionario en infinito, éste desde su perspectiva, concluye que el agujero negro realiza un trabajo sobre estas partículas. Adicionalmente, la masa-energía del agujero negro disminuye en este proceso, pero tal decremento no es indefinido.

Christodoulou mostró en 1970 [100], que sólo hasta alrededor del 29% de la masa-energía de un agujero negro extremo de Kerr puede ser extraído como energía rotacional. Además, Christodoulou y Ruffini [101] consideraron la extracción de energía de un agujero negro estático cargado, y mostraron que también puede extraerse energía electromagnética. Hasta un 50% de la masa-energía de un hipotético agujero negro extremo de Reissner-Nordström puede ser extraído. Más aún, en el caso de los agujeros negros cargados, la ergoregión generalizada incluye la contribución de las cargas del agujero negro y de la partícula capturada [102, 103].

La extracción de energía mediante el proceso de Penrose puede ser descrita como sigue [94]:

1. Considérese un agujero negro rotante y una partícula de prueba A lanzada desde infinito con cierta energía E_A , carga q_A y componente axial de momento angular L_A , y que llega, siguiendo una geodésica, a un punto (r, θ) muy cercano al horizonte de eventos r_+ .
2. En este punto, se "separa" en dos partículas, $A \rightarrow B + C$, con los parámetros correspondientes (E_B, q_B, L_B) , y (E_C, q_C, L_C) . La partícula B cruza el horizonte de eventos, mientras que la partícula C escapa a infinito.
3. La partícula capturada B modificará entonces la masa, la carga y el momento angular intrínseco del agujero negro.

Las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba cargada alrededor de un agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, son las ecuaciones (4.36)-(4.39). Las constantes de movimiento de la partícula de prueba correspondientes a los vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ , son respectivamente la energía E (4.25), y la componente axial del momento angular L (4.26), es decir,

$$E = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi} + \tilde{q}\tilde{Q}r/\Sigma, \quad (5.17)$$

$$L = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} + a \sin^2 \theta \tilde{q}\tilde{Q}r/\Sigma, \quad (5.18)$$

en donde la carga apantallada de la partícula de prueba (4.30), evaluada en el horizonte de eventos y en el plano ecuatorial, está dada por

$$\tilde{q} = q \left\{ 1 - \frac{\alpha}{30\pi} \frac{Q^2}{R_H^4 D_c^2} \right\}. \quad (5.19)$$

Dado que el término de apantallamiento sólo depende de los parámetros del agujero negro, los cuales son los mismos para las tres partículas al momento de la separación, se puede verificar fácilmente que aún se cumple la conservación de la carga, $\tilde{q}_A = \tilde{q}_B + \tilde{q}_C$, i.e.,

$$\tilde{q}_A = (q_B + q_C) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{30\pi} \frac{Q^2}{R_H^4 D_c^2} \right\} = \tilde{q}_B + \tilde{q}_C. \quad (5.20)$$

Asimismo, después de la separación, el 4-momento total se conserva, $p_A^\mu = p_B^\mu + p_C^\mu$. Por lo tanto, de las ecuaciones (5.17) y (5.18), la energía y la componente axial del momento angular también se conservan:

$$E_A = E_B + E_C, \quad L_A = L_B + L_C. \quad (5.21)$$

Para un observador en infinito, el cambio en la masa del agujero negro δM es igual a $\delta M = E_A - E_C$, en donde E_A es la energía de la partícula que es separada en dos cerca del horizonte, y E_C es la energía de la partícula saliente, ambas medidas en infinito. De forma similar ocurre para δJ y para $\delta \tilde{Q}$. De las ecuaciones (5.20) y (5.21), se obtiene entonces

$$\delta M = E_B, \quad \delta J = L_B, \quad \delta \tilde{Q} = \tilde{q}_B. \quad (5.22)$$

Los cambios en la masa, carga y momento angular del agujero negro son equivalentes a la energía, carga y componente axial del momento angular, que la partícula capturada B trae consigo al interior del horizonte de eventos.

En un agujero negro rotante, la superficie de límite estático r_{st} se define a partir de la condición $g_{tt} = 0$, y sólo coincide con el horizonte de eventos r_+ en los polos. En la región entre ambas superficies, el vector de Killing ∂_t se vuelve espacialoide, i.e., en la ergoregión, en donde la energía E de una partícula de prueba neutra puede ser negativa. Si la energía de la partícula capturada es negativa, $E_B < 0$, entonces la partícula saliente que alcanza infinito tendrá más energía que la partícula original, $E_C > E_A$, y la masa del agujero negro disminuye, i.e., $\delta M < 0$. Éste es el proceso de Penrose de la extracción de la energía [99].

En el caso de una partícula de prueba cargada, la energía (5.17) también incluye una contribución electromagnética. Por lo tanto, la región alcanzada por partículas cargadas con $E < 0$, corresponde a una "ergoregión generalizada" [102, 103]. Para cargas $\tilde{q}$ y $\tilde{Q}$ con signo opuesto, la ergoregión generalizada es mayor que la original, mientras que es menor cuando el signo de $\tilde{q}$ y de $\tilde{Q}$ es el mismo.

Por otro lado, si los objetos capturados por el agujero negro son extremadamente pequeños comparados con éste, harán cambios infinitesimales en sus parámetros, i.e., dM , $d\tilde{Q}$ y dJ . Estos cambios se determinan a partir del estudio de la trayectoria de una partícula de prueba, analizando los valores que su energía en infinito E debe tener para que alcance un punto cerca del horizonte de eventos. Las ecuaciones de movimiento de una carga de prueba en el espacio-tiempo del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg tienen la misma forma que para el caso de Kerr-Newman, pero con las cargas reales reemplazadas por las cargas apantalladas, es decir, (4.37) y (4.38),

$$(\Sigma \dot{r})^2 = \left[(r^2 + a^2)E - aL - \tilde{q}\tilde{Q}r \right]^2 - \Delta (\mu^2 r^2 + K), \quad (5.23)$$

$$(\Sigma \dot{\theta})^2 = K - [L - aE]^2 - [L^2 \csc^2 \theta + a^2(\mu^2 - E^2)] \cos^2 \theta, \quad (5.24)$$

en donde K es la constante de Carter modificada y μ es la masa de la partícula de prueba. Estas ecuaciones dependen de tres constantes de movimiento, y pueden ser combinadas para obtener un polinomio cuadrático en E , en términos de L y de las velocidades $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$. Entonces, de las ecuaciones (5.23) y (5.24), el polinomio cuadrático, $\zeta E^2 - 2\chi E + \rho = 0$, resulta

$$\begin{aligned} & [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] E^2 - 2 \left[(aL + \tilde{q}\tilde{Q}r) (r^2 + a^2) - aL\Delta \right] E \\ & + \left(aL + \tilde{q}\tilde{Q}r \right)^2 - \Delta L^2 \csc^2 \theta - \mu^2 \Delta \Sigma - \Sigma^2 [\dot{r}^2 + \Delta \dot{\theta}^2] = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

La solución correspondiente al 4-momento apuntando al futuro, es aquélla con una raíz cuadrada positiva [94], i.e.,

$$E = \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - \zeta \rho}}{\zeta}, \quad (5.26)$$

con

$$\zeta = (r^2 + a^2)\Sigma + (2Mr - \tilde{Q}^2)a^2 \sin^2 \theta, \quad (5.27)$$

$$\chi = (2Mr - \tilde{Q}^2)aL + (r^2 + a^2)\tilde{q}\tilde{Q}r, \quad (5.28)$$

$$\rho = \left(aL + \tilde{q}\tilde{Q}r \right)^2 - \Delta L^2 \csc^2 \theta - \mu^2 \Delta \Sigma - \Sigma^2 [\dot{r}^2 + \Delta \dot{\theta}^2]. \quad (5.29)$$

Para que ocurra el proceso de extracción de energía, E debe ser negativa. Fuera del horizonte de eventos, la función ζ es positiva, $\zeta > 0$, por lo que para obtener $E < 0$ en la ecuación (5.26), la función χ debe ser siempre negativa, $\chi < 0$. Esto sólo ocurre cuando se cumple $aL < 0$, ó bien $\tilde{q}\tilde{Q} < 0$, lo que disminuiría respectivamente la magnitud del momento angular y la carga del agujero negro.

Adicionalmente, la contribución de las velocidades $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ a la energía E es siempre positiva. Por lo tanto, de la ecuación (5.29), la energía mínima requerida para la extracción de energía del agujero negro, por medio de la captura de una partícula que cruza el horizonte de eventos, sólo puede ocurrir cuando las velocidades se anulan, i.e., para $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$. De la primera condición, $\dot{r} = 0$ en r_+ , usando la ecuación (5.23), la energía mínima está dada por

$$E_{\min} = \frac{aL + \tilde{q}\tilde{Q}r_+}{(r_+^2 + a^2)}. \quad (5.30)$$

De la ecuación (5.22), con $dM \geq E_{\min}$, y $J = aM$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$dM \geq \frac{a}{(r_+^2 + a^2)} dJ + \frac{\tilde{Q} r_+}{(r_+^2 + a^2)} d\tilde{Q}. \quad (5.31)$$

En particular, para el caso extremo, $r_+^2 = M^2 = a^2 + \tilde{Q}^2$, se satisface la desigualdad

$$MdM \geq ada + \tilde{Q}d\tilde{Q}. \quad (5.32)$$

Ésta se interpreta como la preservación del horizonte de eventos, lo que significa que no pueden crearse singularidades desnudas por medio de procesos infinitesimales. Corresponde a la conjetura de censura-cósmica de Penrose.

Como hemos observado, podemos extraer energía rotacional y electromagnética de un agujero negro rotante y cargado, lo que llevaría a una disminución de su masa-energía. Sin embargo, tal disminución no es indefinida [100]. La masa irreducible de un agujero negro rotante cargado se define como [101]

$$M_{\text{ir}} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + a^2}, \quad (5.33)$$

y se usa para calcular la cantidad de energía que puede ser extraída de un agujero negro. Debido a que la masa irreducible del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, M_{ir} , es mayor que la del agujero negro de Kerr-Newman, $M_{\text{ir}}^{\text{KN}}$, i.e.,

$$M_{\text{ir}} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + a^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{R_{\text{H}}^2 + a^2} \equiv M_{\text{ir}}^{\text{KN}}, \quad (5.34)$$

entonces menos energía puede ser extraída del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, como se concluyó del análisis cualitativo de las respectivas ergoregiones (véase Fig. 44). Más aún, de la ecuación (5.33), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{(r_+ - r_-)}{2M_{\text{ir}}} dM_{\text{ir}} &= dM - \frac{r_+ \tilde{Q}}{r_+^2 + a^2} d\tilde{Q} - \frac{a}{r_+^2 + a^2} dJ, \\ &= dM - \Phi_{r_+} d\tilde{Q} - \Omega_{r_+} dJ, \end{aligned} \quad (5.35)$$

y usando la ecuación (5.31), se llega a la desigualdad

$$dM_{\text{ir}} \geq 0. \quad (5.36)$$

La masa irreducible de un agujero negro no puede ser disminuida mediante procesos infinitesimales de inyección de materia. Los procesos en los cuales la masa irreducible permanece constante, son denominados reversibles. Finalmente, reescribiendo la ecuación (5.33), la masa del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg está dada por

$$M^2 = \left(M_{\text{ir}} + \frac{\tilde{Q}^2}{4M_{\text{ir}}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{ir}}^2}, \quad (5.37)$$

la cual incluye la contribución de las energías rotacional y electromagnética a la masa-energía total M del agujero negro. Por un lado, hasta un 29% de la masa-energía de un agujero negro extremo de Kerr ($Q = 0$) puede ser almacenada en su energía rotacional [100]. Por otro lado, en el caso de una agujero negro cargado, debido a que la carga es apantallada, $\tilde{Q} < Q$, y la masa irreducible es aumentada, $M_{\text{ir}} > M_{\text{ir}}^{\text{KN}}$, ambos, el término electromagnético $\frac{\tilde{Q}^2}{4M_{\text{ir}}}$ y el término rotacional $\frac{J^2}{4M_{\text{ir}}^2}$ son menores que aquéllos en el caso de Kerr-Newman. Consecuentemente, hay menos energía rotacional y electromagnética almacenada en el agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, que en el de Kerr-Newman, es decir, hay menos energía disponible para ser extraída.

Con el fin de interpretar el hecho anterior, podemos repasar la producción de pares en el espacio-tiempo de Kerr-Newman. Considerando que ambos campos de fondo, el gravitacional y el electromagnético, del agujero negro de Kerr-Newman son estacionarios, Damour et al. [104] obtuvieron la tasa de producción de pares alrededor del agujero negro de Kerr-Newman, aplicando localmente la fórmula de Schwinger [41, 36],

$$\frac{\Gamma}{V} = \frac{\alpha}{4\pi^2} E_{(1)} B_{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \coth \left(n\pi \frac{B_{(1)}}{E_{(1)}} \right) \exp \left(-n\pi \frac{E_c}{E_{(1)}} \right). \quad (5.38)$$

Aquí, Γ/V es la tasa de decaimiento por unidad de volumen en el campo electromagnético del agujero negro de Kerr-Newman, $E_{(1)} = Q\Sigma^{-2}[r^2 - a^2 \cos^2 \theta]$, y $B_{(1)} = 2\mathcal{M}\Sigma^{-2}r \cos \theta$, son las componentes paralelas a $\omega^{(1)}$ de los campos eléctrico y magnético inducido, en el marco Lorentziano de un observador estacionario definido por la siguiente tétrada [105]:

$$\begin{aligned} \omega^{(0)} &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} [dt - a \sin^2 \theta d\phi], \\ \omega^{(1)} &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr, \\ \omega^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, \\ \omega^{(3)} &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Sigma}} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Más aún, obtuvieron que el número de pares producidos en una región $\mathcal{D}$ del espacio-tiempo del agujero negro de Kerr-Newman,

$$\mathcal{N} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} \frac{\Gamma}{V}, \quad (5.40)$$

crece conforme al incremento de la carga o del momento angular.

Uniendo ambos resultados, concluimos lo siguiente. Mientras más altos sean los valores de Q y a , mayor cantidad de pares son producidos y, en consecuencia, los efectos de Euler-Heisenberg se vuelven más visibles, es decir, cada vez hay menos energía rotacional o electromagnética disponible para ser extraída, en comparación con el caso de Kerr-Newman. Esto lo interpretamos como que parte de la energía almacenada por el agujero negro de Kerr-Newman es utilizada para la producción de pares.

5.3. Termodinámica del agujero negro

El proceso de Penrose de extracción de energía [99] y los trabajos de Christodoulou [100, 101], permitieron una analogía entre la mecánica y la termodinámica de los agujeros negros. Las cuatro leyes termodinámicas de los agujeros negros fueron propuestas en 1973 por Bardeen et al. [106]. En esta analogía, la masa del agujero negro corresponde a la energía de un sistema termodinámico, la gravedad superficial a su temperatura y el área del horizonte de eventos a su entropía, como había sido previamente propuesto por Bekenstein [107, 108, 109]. Finalmente, en 1975 Hawking [110] publicó la derivación semi-clásica de la radiación de un agujero negro.

Por un lado, de las ecuaciones (5.6) y (5.33), el área del agujero negro A en términos de la masa irreducible M_{ir} se escribe como

$$A = 16\pi M_{\text{ir}}^2, \quad (5.41)$$

y la desigualdad (5.36) resulta $dA \geq 0$. Por otro lado, Bekenstein [107, 109] estudió la entropía de un agujero negro, considerándolo como un sistema termodinámico. Cerca del equilibrio, un sistema termodinámico a temperatura T cambia su estado. Los incrementos consecuentes de su energía y entropía están relacionados por la primera ley de la termodinámica [108]:

$$TdS = dE - dW, \quad (5.42)$$

en donde dW es el trabajo realizado sobre el sistema por agentes externos. El cambio dM en la masa del agujero negro es el cambio dE en su energía. Dado que un agente externo incrementa la carga del agujero negro por $d\tilde{Q}$ y su momento angular por dJ , el término $\frac{r_+ \tilde{Q}}{r_+^2 + a^2} d\tilde{Q} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} dJ$, en la ecuación (5.35), representa el trabajo dW realizado sobre el sistema. Usando la ecuación (5.41) y comparando con (5.42), se obtiene la relación

$$TdS = \frac{(r_+ - r_-)}{4A} dA = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA, \quad (5.43)$$

con la gravedad superficial (5.10).

En 1973 Bardeen, Carter y Hawking formularon las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros [106], las cuales son análogas a las cuatro leyes de la termodinámica. Las cuatro leyes de la termodinámica de los agujeros negros propuestas, se resumen de la siguiente manera:

1. La ley cero de la mecánica de agujeros negros afirma que la gravedad superficial κ_+ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos, lo que es esencialmente el requerimiento de transitividad del estado de equilibrio.
2. La primera ley manifiesta la relación entre las variaciones de la masa M , del área del horizonte de eventos A , del momento angular J y de la carga apantallada $\tilde{Q}$, cuando el agujero negro es perturbado,

$$dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA + \Omega_{r_+} dJ + \Phi_{r_+} d\tilde{Q}, \quad (5.44)$$

en donde κ_+ es la gravedad superficial (5.10), Ω_{r_+} la velocidad angular del horizonte de eventos (5.15), y Φ_{r_+} el potencial electrostático (5.16) del agujero negro en su horizonte de eventos.

3. La segunda ley mecánica de los agujeros negros es el teorema del área de Hawking, el cual afirma que el área superficial del horizonte de eventos nunca decrece con el tiempo,

$$dA \geq 0. \quad (5.45)$$

4. La tercera ley formula que es imposible alcanzar $\kappa_+ = 0$, mediante una serie finita de procesos físicos.

La fuerte analogía entre las cuatro leyes mecánicas y las cuatro leyes termodinámicas es muy interesante. En ésta, la masa del agujero negro corresponde matemáticamente a la energía de un sistema termodinámico, el área del horizonte a la entropía y la gravedad superficial a la temperatura. Mientras que la correspondencia entre la masa y la energía es una identidad física, las otras dos correspondencias son sólo analogías en la relatividad general clásica. Los agujeros negros clásicos tienen cero temperatura y el área del horizonte de eventos tiene una dimensión de longitud al cuadrado. Con la interpretación física de la entropía de Bekenstein [108] y la derivación semi-clásica de la radiación de Hawking [110], podemos tratar a los agujeros negros como sistemas termodinámicos con la entropía de Bekenstein-Hawking

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4} = \pi (r_+^2 + a^2) = \frac{r_+ - r_-}{4T_{\text{H}}}, \quad (5.46)$$

y la temperatura de Hawking

$$T_{\text{H}} = \frac{\kappa_+}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}. \quad (5.47)$$

Algunas investigaciones en sistemas gravitantes indican que suelen aparecer funciones de entropía con naturaleza no-extensiva en sistemas con interacciones de largo-alcance, como la gravedad [111]. La entropía de Bekenstein-Hawking de agujero negro también parece ser no-extensiva dado que es proporcional al área del horizonte de eventos, en lugar de ser proporcional a su volumen. Es importante mencionar que el cálculo del volumen de un agujero negro y su relación con el área correspondiente de su horizonte de eventos, resulta en un problema nada trivial [112].

La entropía del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg está dada, a primer orden en α , por

$$S_{\text{BH}} = S_{\text{BH}}^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{45D_c^2} \frac{Q^4}{R_{\text{H}}^3} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right), \quad (5.48)$$

con $S_{\text{BH}}^{\text{KN}} = \pi (R_{\text{H}}^2 + a^2)$. La Figura 45 presenta la entropía de Bekenstein-Hawking (5.46) como función de la carga y del momento angular del agujero negro. Los parámetros del agujero negro satisfacen la condición del horizonte de eventos, $a^2 + Q^2 < M^2$, en donde el caso extremo de Kerr-Newman está prohibido de acuerdo con la tercera ley. La entropía del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg es mayor que la del agujero negro de Kerr-Newman, lo que implicaría que el caso de Einstein-Euler-Heisenberg corresponde a un estado más probable. El efecto de Euler-Heisenberg en la entropía es mayor para valores altos de Q y de a .

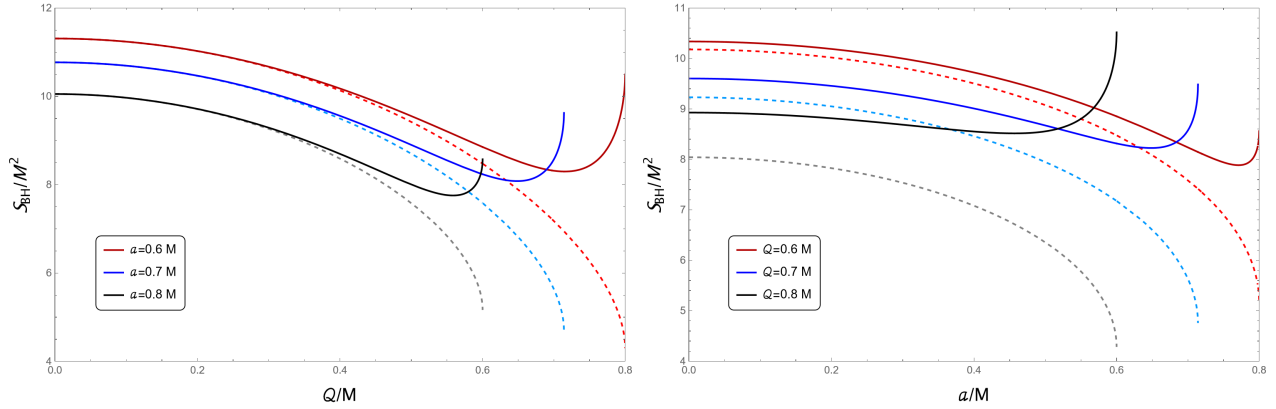


Figura 45: La entropía del agujero negro como función de los parámetros del agujero negro y para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_{\odot}$. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman y la línea continua al de Einstein-Euler-Heisenberg.

Para interpretar este comportamiento, podemos considerar el siguiente proceso hipotético:

1. Existen partículas cargadas siendo capturadas por el agujero negro en el plano ecuatorial, lo que modifica sus cantidades termodinámicas. En particular, ocurre un proceso de carga del agujero negro, en donde Q incrementa debido a que las partículas capturadas tienen el mismo signo en su carga. Éstas realizan un trabajo sobre el agujero negro, reduciendo su entropía, como ocurre en el caso de Kerr-Newman, de acuerdo al lado izquierdo de la Fig. 45. Recordemos que para que la entropía de un sistema decrezca, un trabajo debe ser realizado sobre éste por un agente externo. En este caso, el agente sería materia entrante en procesos de acreción.
2. Sólo en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, cuando la carga alcanza el punto crítico, ocurre la producción de pares. Entonces, para valores más grandes de Q , el efecto de Euler-Heisenberg se vuelve más relevante y la entropía comienza a aumentar. El ir de un estado de baja entropía a uno de mayor entropía implica la posibilidad de obtener energía del sistema. Además, las partículas virtuales se están produciendo a una tasa mayor, en concordancia con la ecuación (5.38).
3. Por otro lado, consideremos el proceso de descarga, en donde Q disminuye debido a que ahora cargas de signo opuesto cruzan el horizonte de eventos. Lo natural en este proceso, es que la entropía aumente. La entropía de un sistema sobre el que no se realiza trabajo alguno, aumenta. En un proceso de descarga las cargas de signo opuesto son adicionalmente atraídas por la fuerza eléctrica, por lo que no debe realizarse ningún trabajo en contra de una fuerza eléctrica repulsiva.
4. Sin embargo, para el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, la entropía tendrá que disminuir primero, si previamente se habían alcanzado valores casi extremos de los parámetros del agujero negro, es decir, si previamente ocurrió un largo proceso de carga. Energía tendrá que ser extraída del sistema, y algún trabajo tendrá que ser realizado, para frenar la rápida producción de pares.

Este proceso sugiere un mecanismo de carga y descarga del agujero negro, vía el efecto de Euler-Heisenberg de la polarización del vacío. Éste podría estar relacionado con procesos astrofísicos de extracción de energía de un agujero negro, como lo son los GRBs y, en general, los jets relativistas. Nótese que también existe un proceso análogo asociado a la rotación del agujero negro, como se muestra en el lado derecho de la Fig. 45.

La Figura 46 presenta la entropía como función de la masa del agujero negro. El límite cuando la masa tiende a cero corresponde a la evaporación del agujero negro. En el caso de Kerr-Newman, la entropía tiende a cero conforme la masa decrece. En el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, la entropía tiende a un valor diferente de cero. Esto se debe al hecho de que estamos considerando la corrección de Euler-Heisenberg a la entropía hasta primer orden en α , i.e., la ecuación (5.48), la cual es diferente de cero en ese límite. Asociamos la diferencia con la polarización del vacío alrededor del agujero negro. No obstante, para alcanzar el límite $M \rightarrow 0$, primero se requiere extraer toda la energía rotacional y electromagnética del agujero negro. Más aún, dado que la masa irreducible no puede ser disminuida mediante inyección de materia, el agujero negro sólo puede ser evaporado por radiación de Hawking. En la Sec. 5.6, se discuten las diferencias entre el proceso de Euler-Heisenberg y la radiación de Hawking. A continuación se revisan, en el contexto del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, las leyes termodinámicas con mayor profundidad.

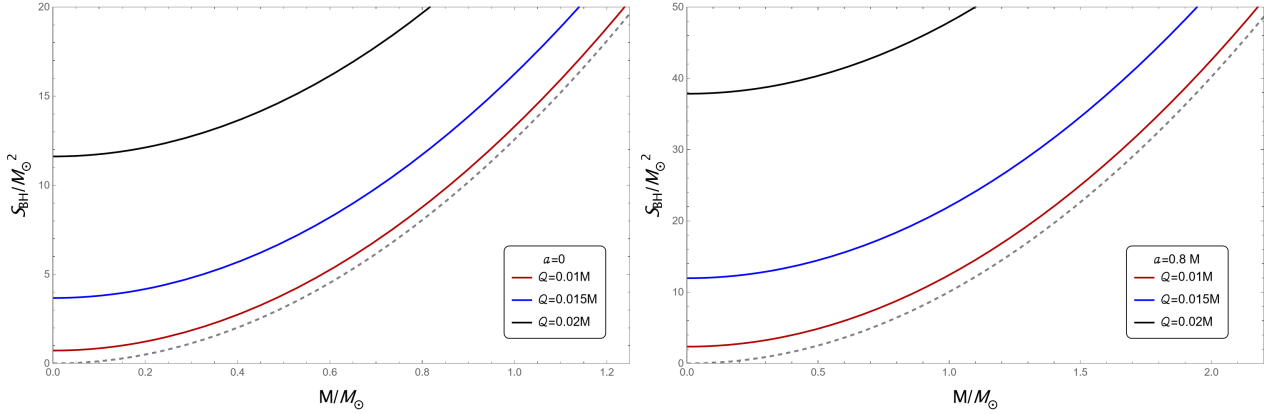


Figura 46: La entropía como función de la masa del agujero negro y para diferentes valores de sus parámetros. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman y la continua al caso de Einstein-Euler-Heisenberg.

5.3.1. La ley cero

La ley cero de la mecánica de un agujero negro: la gravedad superficial es constante sobre el horizonte de eventos, es análoga a la ley cero de la termodinámica, la cual afirma que la temperatura es constante a lo largo de un cuerpo en equilibrio térmico. La ley cero sugiere que la gravedad superficial es análoga a la temperatura, i.e., una temperatura T_H constante en equilibrio térmico para un sistema normal es análoga a una gravedad superficial κ_+ constante sobre el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario.

Existen dos versiones independientes de la ley cero de la mecánica de agujeros negros. La primera, perteneciente a Carter [113, 114], afirma que para cualquier agujero negro que sea estacionario y simétrico axial, que cuente con la propiedad de ortogonalidad $t - \phi$, la gravedad superficial κ_+ debe ser constante sobre su horizonte de eventos. Este resultado es completamente geométrico debido a que no involucra ninguna ecuación de campo. La segunda, perteneciente a Bardeen, Carter y Hawking [106], establece que si las ecuaciones de Einstein se cumplen con el tensor de energía-momento satisfaciendo la condición de energía dominante, entonces κ_+ debe ser constante en cualquier horizonte de Killing. Aquí la propiedad de ortogonalidad $t - \phi$ ya no es requerida.

Por lo tanto, la ley cero de la mecánica de agujeros negros afirma que la gravedad superficial (5.8) de un agujero negro estacionario, es constante sobre el horizonte de eventos, lo que esencialmente equivale al requerimiento de transitividad del estado de equilibrio.

La temperatura de Hawking del horizonte de eventos del agujero negro es proporcional a la gravedad superficial, es decir,

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{1}{2\pi} \kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}, \\ &= \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}{2\pi(2M^2 - \tilde{Q}^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2})}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

la cual a primer orden en α está dada por

$$T_H = T_H^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{180\pi^2} \frac{(2a^2 + Q^2)}{D_c^2 (R_H^2 + a^2)^2} \frac{Q^4}{R_H^4 \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}, \quad (5.50)$$

con $T_H^{\text{KN}} = \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} / [2\pi(R_H^2 + a^2)]$, la temperatura del agujero negro de Kerr-Newman. De la ecuación (5.46), la temperatura puede escribirse en términos de la entropía como $T_H = (r_+ - r_-)/(4S_{\text{BH}})$.

La temperatura de Hawking se presenta en la Fig. 47, como función de la carga y del momento angular, los cuales satisfacen la condición de horizonte de eventos. La temperatura del agujero negro de Kerr-Newman decae conforme Q o a incrementan. Sólo para el caso de Einstein-Euler-Heisenberg la temperatura comienza a aumentar en algún momento, cuando las producción de pares se intensifica. La Figura 48 muestra la temperatura como función de la masa M del agujero negro. En este caso, la temperatura tiende a infinito conforme el agujero negro se evapora, lo que es denominado la explosión del agujero negro. Esto ocurre antes que en el caso de Kerr-Newman, es decir, para masas más grandes, dado que el término de Euler-Heisenberg en la ecuación (5.50) es proporcional a M^{-3} , mientras que el de Kerr-Newman es proporcional a M^{-1} , como se puede verificar.

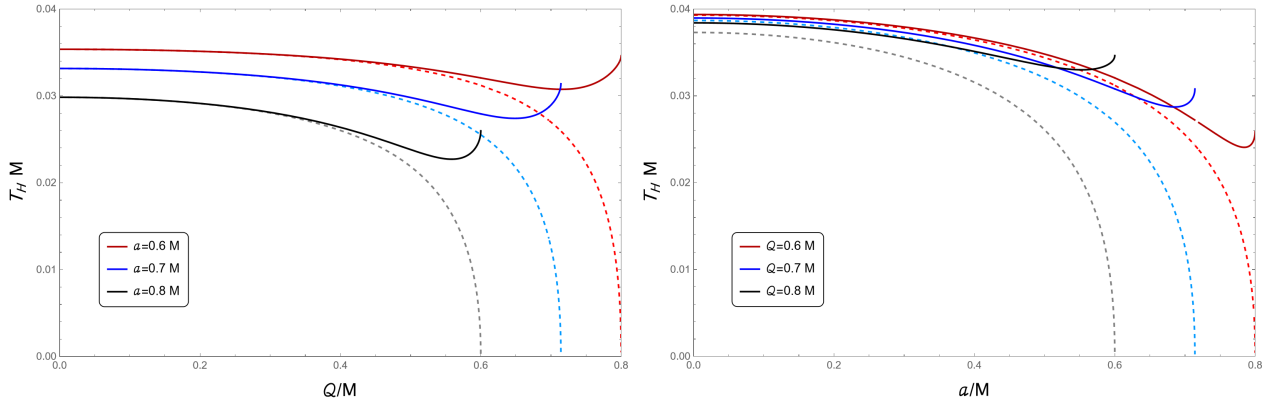


Figura 47: La temperatura del agujero negro como función de sus parámetros y para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman y la continua al caso de Einstein-Euler-Heisenberg.

5.3.2. La primera ley

La relación termodinámica fundamental, la cual contiene toda la información acerca el estado termodinámico del agujero negro, fue establecida en 1973 por Smarr [115],

$$M^2 = \frac{1}{4} \frac{A}{4\pi} + \frac{4\pi}{A} \left[J^2 + \frac{1}{4} \tilde{Q}^4 \right] + \frac{1}{2} \tilde{Q}^2, \quad (5.51)$$

y es equivalente a la relación (5.37). Los parámetros A , J y $\tilde{Q}$ son un conjunto completo de cantidades para el sistema del agujero negro, $M = M(A, J, \tilde{Q})$. En la termodinámica ordinaria, los parámetros extensivos pueden sumarse para sistemas compuestos. Sin embargo, la ecuación (5.51) no es homogénea a primer orden en A , J y $\tilde{Q}$. Aunque las áreas de dos agujeros negros son aditivas, la suma de las áreas

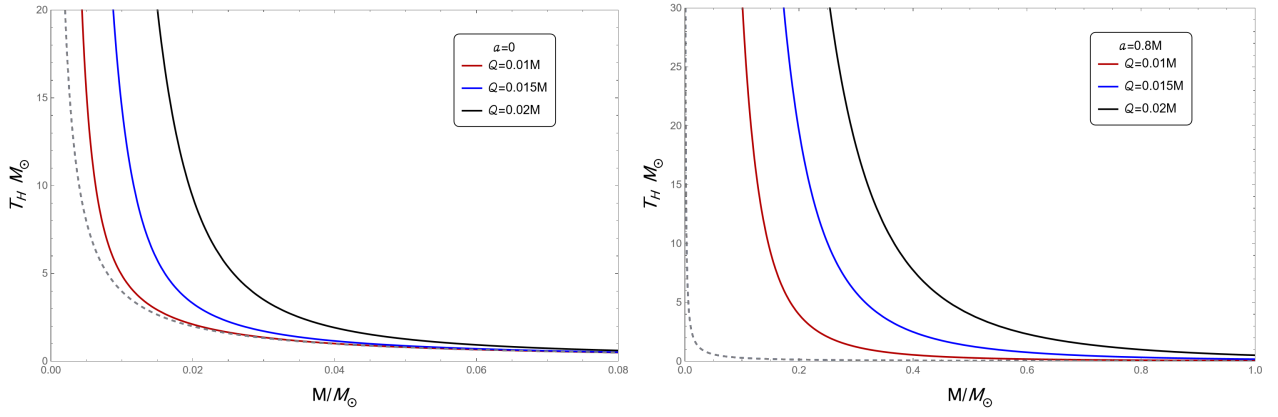


Figura 48: La temperatura del agujero negro como función de su masa y para diferentes valores de sus parámetros. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman y la continua al caso de Einstein-Euler-Heisenberg.

de dos agujeros negros de masas M_1 y M_2 siempre es menor que el área de un agujero negro obtenido de la fusión de ambos, i.e., $(M_1^2 + M_2^2) \leq (M_1 + M_2)^2$. Más aún, es posible identificar el área A del horizonte de eventos con la entropía S_{BH} :

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4} k_B A, \quad (5.52)$$

con k_B la constante de Boltzmann. De esta manera, la relación (5.51), en unidades en las que $k_B = 1/8\pi$, puede reescribirse como

$$M^2 = \left[2S_{\text{BH}} + \frac{1}{8S_{\text{BH}}} \left(J^2 + \frac{1}{4} \tilde{Q}^4 \right) + \frac{1}{2} \tilde{Q}^2 \right], \quad (5.53)$$

la cual es usada usualmente en su forma invertida

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4} M^2 - \frac{1}{8} \tilde{Q}^2 + \frac{1}{4} M^2 \left(1 - \frac{J^2}{M^4} - \frac{\tilde{Q}^2}{M^2} \right)^{1/2}. \quad (5.54)$$

La ecuación (5.53) representa la relación termodinámica fundamental $M = M(S_{\text{BH}}, J, \tilde{Q})$, en términos de los parámetros S_{BH} , J y $\tilde{Q}$.

La primera ley de la termodinámica afirma que la energía total en cualquier sistema termodinámico se conserva,

$$dE = T_{\text{H}} dS_{\text{BH}} + dW = T_{\text{H}} dS_{\text{BH}} + \Omega_{r_+} dJ + \Phi_{r_+} d\tilde{Q}, \quad (5.55)$$

en donde dE es el cambio de energía, correspondiente al cambio en la masa del agujero negro, y dW es el trabajo realizado sobre el sistema por agentes externos. Cuando un sistema rota con velocidad angular Ω_{r_+} y está cargado a un potencial eléctrico Φ_{r_+} , los cambios en su momento angular J y en su carga $\tilde{Q}$ contribuyen al trabajo. Si M cambia infinitesimalmente, entonces

$$dM = T_{\text{H}} dS_{\text{BH}} + \Omega_{r_+} dJ + \Phi_{r_+} d\tilde{Q}, \quad (5.56)$$

con T_{H} , Ω_{r_+} y Φ_{r_+} dados por

$$T_{\text{H}} = \frac{\partial M}{\partial S_{\text{BH}}} = M^{-1} \left[1 - \frac{J^2 + \frac{1}{4} \tilde{Q}^4}{16S_{\text{BH}}^2} \right], \quad (5.57)$$

$$\Omega_{r_+} = \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{J}{8MS_{\text{BH}}}, \quad (5.58)$$

$$\Phi_{r_+} = \frac{\partial M}{\partial \tilde{Q}} = \frac{\tilde{Q}(\tilde{Q}^2 + 8S_{\text{BH}})}{16MS_{\text{BH}}}. \quad (5.59)$$

Éstos son los parámetros intensivos correspondientes, constantes en cualquier lugar sobre el horizonte de eventos: Ω_{r_+} es la velocidad angular del horizonte ligada al momento angular J , Φ_{r_+} es el potencial eléctrico asociado a la carga eléctrica apantallada $\tilde{Q}$, y T_H es la temperatura relacionada con la entropía S_{BH} .

Finalmente, si uno considera $M = M(S_{BH}, J, \tilde{Q}^2)$, entonces la ecuación (5.53) es homogénea de grado $1/2$ en estos parámetros. El teorema de Euler requiere que

$$\frac{1}{2}M = T_H S_{BH} + \Omega_{r_+} J + \Theta \tilde{Q}^2 = T_H S_{BH} + \Omega_{r_+} J + \frac{1}{2} \Phi_{r_+} \tilde{Q}, \quad (5.60)$$

con el potencial eléctrico por unidad de carga

$$\Theta = \frac{\Phi_{r_+}}{2\tilde{Q}} = \frac{\tilde{Q}^2 + 8S_{BH}}{32MS_{BH}}. \quad (5.61)$$

Esta relación fue introducida por primera vez por Smarr [115] y constituye la versión para agujeros negros de la relación de Gibbs-Duhem de la termodinámica ordinaria. Ahora, derivando la ecuación (5.60) y usando la primera ley (5.56), se obtiene

$$-\frac{1}{2}dM = S_{BH}dT_H + Jd\Omega_{r_+} + \tilde{Q}^2d\Theta, \quad (5.62)$$

de la cual resultan las relaciones

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T_H}\right)_{\Omega_{r_+}, \Theta} = -2S_{BH}, \quad (5.63)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Omega_{r_+}}\right)_{T_H, \Theta} = -2J, \quad (5.64)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Theta}\right)_{T_H, \Omega_{r_+}} = -2\tilde{Q}^2. \quad (5.65)$$

5.3.3. La segunda ley

En la termodinámica ordinaria, la segunda ley requiere que la entropía de un sistema cerrado siempre aumente. Mientras que esta ley puede ser satisfecha por un sistema incluyendo a un agujero negro, no es del todo clara en su forma original. Por ejemplo, si existe materia ordinaria cayendo dentro del agujero negro, su entropía ordinaria S_0 se vuelve invisible para un observador en el exterior, por lo que el decir que la entropía aumenta no provee ninguna información. Por lo tanto, se debe incluir la entropía del agujero negro en la entropía total, con el fin de brindar una ley más útil, la segunda ley de la termodinámica generalizada [116]: la suma de la entropía ordinaria afuera de los agujeros negros S_0 y la entropía total del agujero negro, siempre aumenta [117], i.e.,

$$dS_0 + dS_{BH} = dS_0 + \frac{2\pi}{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}} \left[\left(\tilde{Q}^2 - 2M\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2} - 2M^2 \right) dM + \left(M + \sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2} \right) \tilde{Q}d\tilde{Q} + adJ \right] \geq 0. \quad (5.66)$$

Cuando la entropía de la materia fluye hacia el interior de un agujero negro, la segunda ley generalizada demanda que el incremento en la entropía de un agujero negro debe compensar la desaparición de la entropía ordinaria que está siendo observada.

5.3.4. La tercera ley

Para llevar a un sistema a la temperatura de cero absoluto, se requiere un número infinito de pasos. De la ecuación (5.49), la temperatura del agujero negro se anula cuando se cumple $M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2 = 0$. Los agujeros negros tipo-Kerr-Newman que satisfacen esta condición son denominados extremos. Para $T_H = 0$, la entropía del agujero negro no sólo no se anula, sino que depende del momento angular por unidad de masa a , en analogía con un parámetro termodinámico intensivo directamente relacionado con la velocidad angular del agujero negro Ω_{r_+} . De esta manera, es imposible lograr $\kappa_+ = 0$ en una serie finita de procesos físicos. Más aún, no es posible la existencia del caso extremo $M^2 = a^2 + \tilde{Q}^2$, ya que en éste, el agujero negro pierde sus dos horizontes y la gravedad superficial, por lo que la temperatura de Hawking asociada se anula.

La gravedad superficial establece un límite para el agujero negro, consistente con la tercera ley de la termodinámica. De ésta, se establece una expresión para la temperatura de Hawking de un agujero negro tipo-Kerr-Newman como función de su masa M , su momento angular J y su carga apantallada $\tilde{Q}$. Conforme el agujero negro pierde masa, su temperatura aumenta de manera inversamente proporcional. La temperatura del agujero negro disminuye cuando la masa aumenta, por lo que tiene un calor específico negativo.

5.3.5. El calor específico y la transición de fase

Podemos reescribir las ecuaciones (5.15) y (5.16) en términos de la temperatura de Hawking, de la siguiente manera:

$$\Omega_{r_+} = a \left(\frac{r_+ - r_-}{4\pi T_H} \right), \quad (5.67)$$

$$\Phi_{r_+} = \tilde{Q} r_+ \left(\frac{r_+ - r_-}{4\pi T_H} \right). \quad (5.68)$$

Ésta es una relación entre incrementos en propiedades mecánicas y geométricas. Resulta que Ω_{r_+} es precisamente la velocidad angular del horizonte de eventos del agujero negro, a la que circunnavega cualquier partícula de prueba muy cercana. Φ_{r_+} resulta ser el potencial eléctrico del agujero negro, en el sentido que equivale a la integral de línea de su campo eléctrico desde infinito hasta cualquier punto del horizonte de eventos.

De la primera ley (5.56), la capacidad calorífica a Q y M constantes, está dada por

$$C_{\tilde{Q}} = T_H \left(\frac{\partial S_{\text{BH}}}{\partial T_H} \right)_{\tilde{Q}, M} = -\Omega_{r_+} \frac{\partial J}{\partial T_H}, \quad (5.69)$$

mientras que la capacidad calorífica a J y M constantes es

$$C_J = T_H \left(\frac{\partial S_{\text{BH}}}{\partial T_H} \right)_{J, M} = -\Phi_{r_+} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T_H}. \quad (5.70)$$

Para J o $\tilde{Q}$ mantenidas constantes, se puede reescribir en términos de M , J , $\tilde{Q}$, T y S_{BH} como

$$C_{J, \tilde{Q}} = T_H \left(\frac{\partial S_{\text{BH}}}{\partial T_H} \right)_{J, \tilde{Q}} = \frac{8MS_{\text{BH}}^3 T_H}{J^2 + \tilde{Q}^4/4 - 8T_H^2 S_{\text{BH}}^3}. \quad (5.71)$$

El calor específico diverge cuando su denominador se vuelve cero. Esto corresponde a una transición de fase de segundo orden, que separa dos agujeros negros con diferente masa/radio del horizonte. Hay una masa crítica M_0 que separa ambas fases. Analizando numéricamente dónde ocurre la transición (ver Fig. 49), concluimos que la transición de fase del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg ocurre para cargas más grandes que las del agujero negro de Kerr-Newman, y con parámetros (M, a) fijos. El cálculo de la masa crítica M_0 que separa las dos fases puede ser realizado a partir de la expresión

de la entropía como función de la temperatura. Uno de los métodos consiste en buscar un punto de retorno en la curva (T_H, S_{BH}) [118]. La temperatura a la que ocurre la transición de fase también puede ser calculada resolviendo, para T_H , cuándo el denominador del calor específico resulta igual a cero, resultando

$$T_0 = \frac{M_0}{\pi(r_+^2 + a^2)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\pi(r_+^2 + a^2)}{M_0^2}} - 1 \right\}, \quad (5.72)$$

la cual es menor que aquélla correspondiente al caso de Kerr-Newman. La masa crítica en términos de T_0 y S_0 está dada por

$$M_0 = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{2} T_0 S_0. \quad (5.73)$$

Para el agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, existen casos con una o dos discontinuidades de las capacidades caloríficas. Esto se ejemplifica en la Fig. 49. Considerando que una capacidad calorífica negativa está asociada con inestabilidad, y que una capacidad calorífica positiva apunta a estabilidad del sistema, entonces de la capacidad calorífica a carga constante (lado derecho de la figura), el agujero negro pasa de inestabilidad a estabilidad para cargas en el intervalo $Q \leq 0.6M$, mientras que en el caso de cargas $Q \sim 0.8M$, el sistema se vuelve inestable de nuevo cuando el momento angular aumenta a un valor de $a \sim 0.6M$. Por otro lado, en el caso de la capacidad calorífica a J constante (lado izquierdo de la figura), se obtienen conclusiones contrastantes. Aquí para $a \geq 0.7M$ el sistema es estable, $C_J > 0$, pero para el rango $0 \leq a \leq 0.6M$, el sistema transita de inestabilidad a estabilidad y luego de nuevo a inestabilidad después de una segunda discontinuidad para valores más grandes de Q .

Como se mencionó, estas discontinuidades en C_Q y C_J corresponden a transiciones de fase del sistema. Siguiendo la interpretación en [118], la existencia de estos puntos en donde ocurren las divergencias, corresponde a transiciones de fase de un agujero negro con masa inferior a uno con masa superior. Lo anterior se puede relacionar con la ecuación (5.37), en donde un aumento de la carga o del momento angular del agujero negro, equivale a un aumento en el contenido total de masa-energía M del sistema. Analicemos, por ejemplo, el caso de C_J . Si existen dos valores de Q para los que C_J diverge, dígame Q_1 y Q_2 , entonces habrán dos transiciones de fase. Primero, el sistema pasa de un agujero negro inestable ($C_J < 0$) con masa más pequeña ($Q < Q_1$), a uno estable ($C_J > 0$) con masa intermedia ($Q_1 < Q < Q_2$). Después, pasa de este último a un agujero negro inestable ($C_J < 0$) con masa más grande ($Q > Q_2$). Sin embargo, esta segunda transición de fase sólo ocurre en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, en donde se considera la interacción con la polarización del vacío.

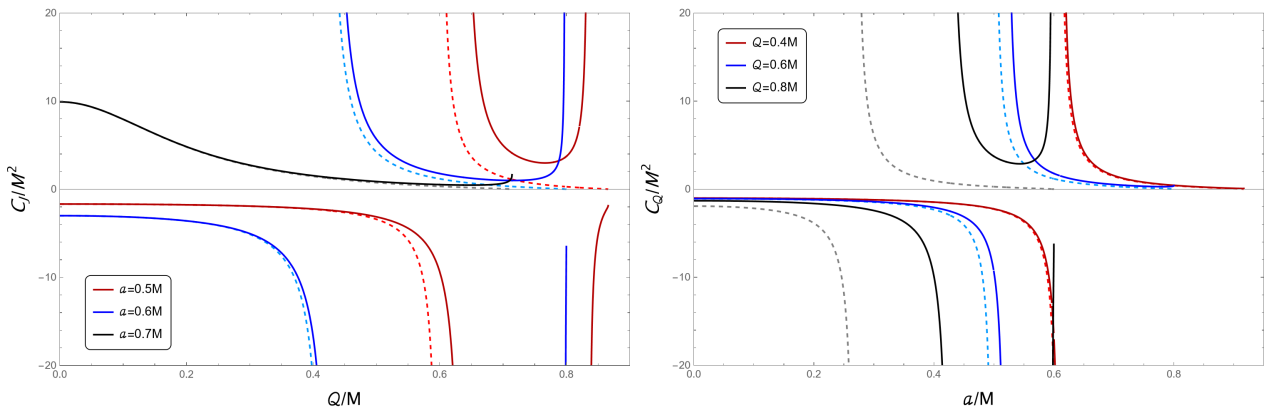


Figura 49: Izquierda: la capacidad calorífica C_J , a $J = aM$ constante, y para diferentes valores de a . Derecha: la capacidad calorífica C_Q , a Q constante, y para diferentes valores de Q . Ambas para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. Las líneas discontinuas corresponden al caso de Kerr-Newman, en donde sólo hay una transición de fase. La línea continua corresponde al caso de Einstein-Euler-Heisenberg, en la cual puede ocurrir una transición de fase adicional, para valores de los parámetros del agujero negro casi extremos.

5.4. Agujeros negros supermasivos, estelares y primordiales

La carga de un agujero negro puede ser diferente de cero durante la acreción de materia cargada, como plasma, y durante el colapso gravitacional de una estrella a un agujero negro de Kerr-Newman. En las últimas condiciones, ocurren procesos de separación de carga y consecuente producción de pares por polarización de vacío, cuando la energía gravitacional del núcleo colapsante se transforma en energía electromagnética y en pares electrón-positrón [36]. Más aún, debido a la conservación del momento angular, se espera que estos agujeros negros rotantes cuenten con valores muy altos de su espín. Los agujeros negros formados a partir de estrellas colapsantes son los agujeros negros estelares, con masas del orden de unas cuantas masas solares más que la masa crítica de las estrellas de neutrones, $M > 3.2M_\odot$.

Como se analizó brevemente, el tamaño de los efectos de Einstein-Euler-Heisenberg depende de la masa del agujero negro. El término no-lineal de la carga apantallada (5.4), puede reescribirse como

$$\left(\frac{\alpha}{90\pi D_c^2 M^2} \right) \frac{(Q/M)^2}{(R_H/M)^4} \approx 9.24 \times 10^7 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \frac{(Q/M)^2}{(R_H/M)^4}, \quad (5.74)$$

con el horizonte de Kerr-Newman acotado, $1 \leq R_H/M \leq 2$, y la carga del agujero negro siempre satisfaciendo la condición del horizonte de eventos de Kerr-Newman, i.e., $0 \leq |Q|/M \leq 1$. Entonces, el término $1/M^2$ es el responsable del tamaño de las correcciones de Euler-Heisenberg. En muchos ejemplos previos, se usó una masa de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$, lo que resulta en el valor $\sim 0.924 (Q/M)^2/(R_H/M)^4$. Mientras más masivo sea el agujero negro, se necesitan cargas mas grandes para visualizar los efectos de apantallamiento. Más aún, surgen términos similares en las modificaciones de Euler-Heisenberg de las propiedades del agujero negro, como en la entropía (5.48) y en la temperatura (5.50).

5.4.1. Agujeros negros supermasivos

Las correcciones de Euler-Heisenberg son inversamente proporcionales a la masa del agujero negro. Los agujeros negros astrofísicos más grandes son los agujeros negros supermasivos, con masas de millones a miles de millones de masas solares. Por ejemplo, Sagitario A* tiene una masa de $M = 4.0 \times 10^6 M_\odot$ [4], mientras que la masa de M87* es de $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ [3]. La ecuación (5.74) para Sag A* resulta $\sim 5.774 \times 10^{-6} (Q/M)^2/(R_H/M)^4$. Si elegimos el valor más grande posible de la carga, $Q = M$, el cual correspondería a un agujero negro extremo estático, i.e., de Reissner-Nordström, con $R_H = M$, el efecto de Euler-Heisenberg en la carga sería del orden de $\sim 5.774 \times 10^{-6}$. Análogamente, para M87* el efecto sería del orden de $\sim 2.187 \times 10^{-12}$. Esto significa que para un agujero negro supermasivo con una carga extrema y, por lo tanto, cero rotación, los efectos de Euler-Heisenberg difícilmente serían visibles.

No es de esperarse que los agujeros negros astrofísicos cuenten con grandes cargas, y las mediciones del Telescopio Horizonte de Eventos de las sombras de Sag A* y M87* sugieren que ambos rotan [3, 4]. Incluso si los agujeros negros supermasivos estuvieran descritos por soluciones extremas estáticas de Einstein-Euler-Heisenberg, las pequeñas variaciones inducidas en las sombras por la polarización del vacío, no serían observables, al menos que se contara con mediciones extremadamente precisas de la masa y la distancia del agujero negro, lo que no suele ocurrir. Además, un agujero negro de Kerr con una masa ligeramente perturbada, podría producir exactamente la misma sombra.

5.4.2. Agujeros negros estelares

Para los agujeros negros estelares, los efectos de Euler-Heisenberg se vuelven relevantes, incluso para cargas pequeñas. Para una agujero negro estelar con una masa de diez masas solares, la ecuación (5.74) resulta $\sim 9.24 \times 10^5 (Q/M)^2/(R_H/M)^4$. Se pueden considerar cargas del orden de $Q \sim M/1000$ y todavía tener un impacto de la polarización del vacío. Además, estas cargas pequeñas son compatibles con valores muy grandes del momento angular, lo cual es de esperarse debido a su conservación durante el proceso de colapso gravitacional. Por otro lado, también se requieren cargas pequeñas para que las modificaciones de Euler-Heisenberg puedan ser consideradas como correcciones de primer orden a un agujero negro estelar de Kerr-Newman.

La carga apantallada de un agujero negro estelar con $M = 10M_\odot$ se presenta en la Fig. 50. Si este agujero negro es estático, la carga máxima permitida es del orden de $Q \sim 0.004M$. Sin embargo, para $a = 0.8M$, la carga $Q = 0.004M$ no está permitida, ya que el término de Euler-Heisenberg ya no podría considerarse como una corrección. Por lo tanto, se deben elegir valores de los parámetros que se encuentren dentro del área formada por la curva $\tilde{Q}$ positiva y cero (el eje horizontal). En las siguientes figuras, con el fin de comparar los efectos de Euler-Heisenberg para diferentes valores de los parámetros en la misma escala, usamos valores casi extremos cercanos a $Q \sim 0.001M$ y $a \sim 0.9999995M$.

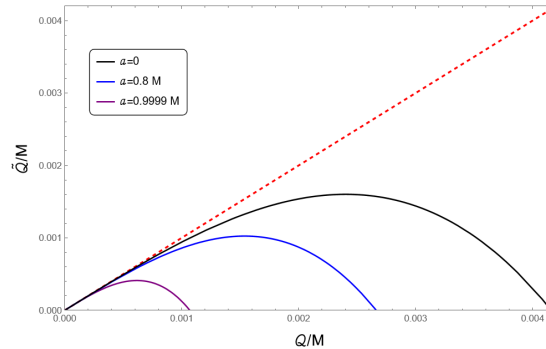


Figura 50: La carga apantallada $\tilde{Q}$ (5.4) como función de la carga real Q , para diferentes valores del momento angular a y una masa estelar fija de $M = 10M_\odot$. La línea discontinua corresponde al caso de Kerr-Newman.

Algunos ejemplos de modificaciones del horizonte de eventos y de la ergoregión se muestran en la Fig. 51. La ergoregión apenas es afectada. Los efectos de Euler-Heisenberg en el horizonte de eventos sí son visibles, aunque pequeños.

El tamaño de los efectos de Euler-Heisenberg en las propiedades termodinámicas también son diferentes para los agujeros negros estelares. Para valores más grandes del momento angular, la temperatura y la entropía crecen, mientras que en el caso de Kerr-Newman, ambas siguen disminuyendo (véase la Fig. 52). El efecto aumenta abruptamente conforme se alcanzan valores casi extremos de a , cuando se intensifica la producción de pares.

Algo similar ocurre cuando la carga del agujero negro crece, aunque en este caso, los efectos de Euler-Heisenberg en la entropía y la temperatura se vuelven muy visibles con incrementos muy pequeños de Q (véase Fig. 53). En el caso de Kerr-Newman, las variaciones por tales valores pequeños de Q no son visibles, por lo que las propiedades termodinámicas son muy similares a las de un agujero negro de Kerr. De esta manera, los agujeros negros estelares son mucho más sensibles a los cambios en su carga, dado que las nubes de cargas virtuales producidas por el campo eléctrico correspondiente también modifican las propiedades geométricas y termodinámicas.

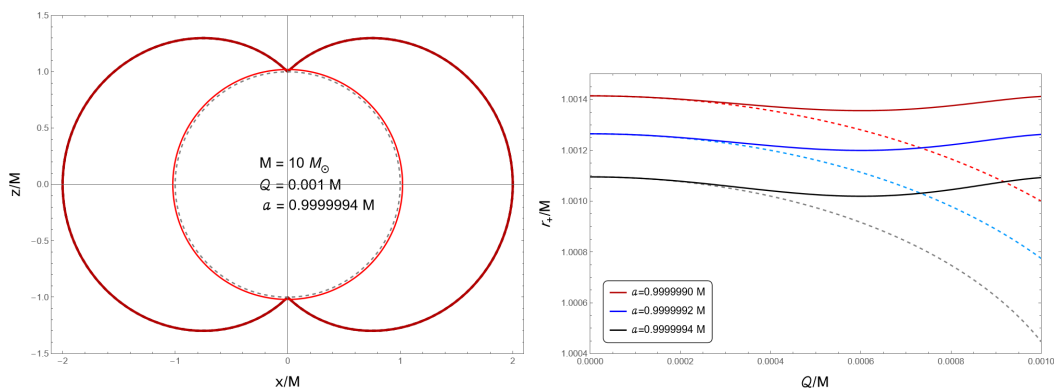


Figura 51: Izquierda: los efectos de Euler-Heisenberg en el horizonte de eventos y en la ergoregión. Derecha: el radio del horizonte de eventos como función de Q , para diferentes valores de a y una masa estelar fija de $M = 10M_\odot$. Las líneas continuas corresponden al caso de Einstein-Euler-Heisenberg, mientras que las discontinuas al caso de Kerr-Newman.

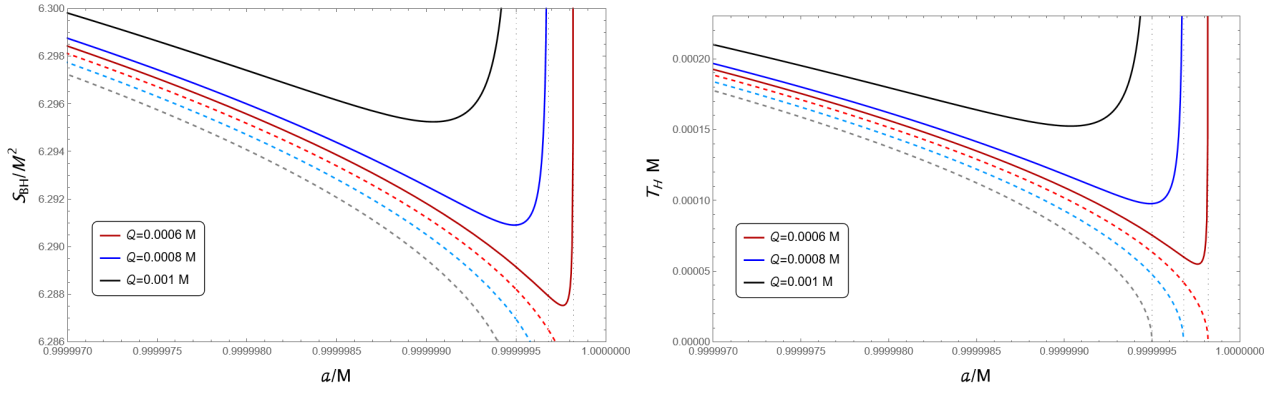


Figura 52: Izquierda: la entropía del agujero negro. Derecha: su temperatura. Ambas como función del momento angular a y para un agujero negro estelar de $M = 10M_\odot$. Las líneas continuas corresponden al agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, mientras que las líneas discontinuas al de Kerr-Newman.

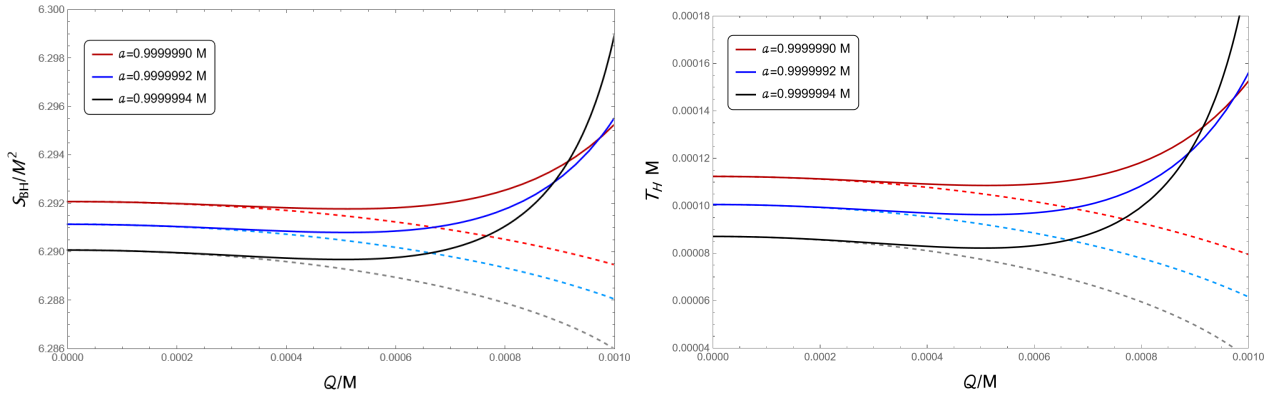


Figura 53: Izquierda: la entropía del agujero negro. Derecha: su temperatura. Ambas como función de la carga real Q y para un agujero negro estelar de $M = 10M_\odot$. Las líneas continuas corresponden al agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg, mientras que las líneas discontinuas al de Kerr-Newman.

5.4.3. Agujeros negros primordiales

La existencia de galaxias en nuestros días implica inhomogeneidad en las etapas tempranas de nuestro universo. Se conjetura que algunas regiones se volvieron lo suficientemente comprimidas, causando que la atracción gravitacional venciera a la presión y produjera agujeros negros con masas desde $10^{-5}g$ en adelante [119]. Estos son llamados agujeros negros primordiales, y algunos de ellos habrían crecido mediante la acreción de materia circundante.

Para un agujero negro primordial con una masa igual a la de la Tierra, $M \sim 5.97 \times 10^{24}kg \sim 3 \times 10^{-6}M_\odot$, la ecuación (5.74) resulta $\sim 3.08 \times 10^{13} (Q/M)^2/(R_H/M)^4$. Cargas del orden de $Q \sim 10^{-7}M$ podrían producir efectos de Euler-Heisenberg.

A partir del tiempo de evaporación mediante radiación de Hawking (5.92), y usando la edad del universo $\sim 13.78 \times 10^9$ años, la masa de un agujero negro de Schwarzschild aislado, que ya se habría evaporado por completo, sería del orden de $M \sim 10^{12}kg$. Para un agujero negro primordial de Kerr-Newman con esta masa, la ecuación (5.74) resulta $\sim 1.84 \times 10^{26} (Q/M)^2/(R_H/M)^4$, y los efectos de la polarización del vacío serían relevantes para cargas del orden de $Q \sim 10^{-14}M$.

5.5. Hipotética dependencia en θ

La solución de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg (5.1) fue obtenida en el marco de la interpretación de QED de la electrodinámica no-lineal de Euler-Heisenberg [92], la cual afirma que los efectos de la polarización del vacío son cuasi-constantes y sólo afectan a la geometría mediante los valores apantallados de las cargas reales [36]. Cuando un campo electromagnético de un agujero negro de Kerr-Newman alcanza el campo crítico D_c (2.1), ocurre la producción de pares y las nubes

de cargas virtuales afectan a su carga real. Tales modificaciones están descritas por la definición de la carga $\tilde{Q}$, (5.2), la cual debe ser evaluada a r y θ constantes, dependiendo del punto en el que se analizan los efectos de Euler-Heisenberg. En las secciones previas, consideramos al agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg como un sistema termodinámico afectado sólo por materia capturada en el plano perpendicular al eje de rotación. Consecuentemente, $\tilde{Q}$ fue fijada para $\theta = \pi/2$ y $r = R_H$, es decir, se usó la carga (5.4).

Por otro lado, a pesar de que el Lagrangiano efectivo de QED de Euler-Heisenberg sólo es válido para campos constantes, con el fin de obtener cierta intuición física, en esta sección consideramos a las modificaciones de Euler-Heisenberg evaluadas en otras posiciones, eligiendo diferentes valores de θ en la carga apantallada (5.2). Si las correcciones de Euler-Heisenberg dependieran de θ , la carga del agujero negro sería apantallada en puntos cercanos al plano ecuatorial, y magnificada cerca de los polos, como puede observarse en la Fig. 54. El efecto en $\tilde{Q}$ puede cambiar drásticamente para algunos valores de θ . Por ejemplo, para una partícula capturada en los polos del agujero negro, en donde $\theta = 0, \pi$, se obtiene

$$\tilde{Q}^2 = Q^2 \left\{ 1 - \frac{5\alpha}{225\pi} \frac{Q^2}{(R_H^2 + a^2)^2 D_c^2} \left[1 - \frac{4a^2}{(R_H^2 + a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{(R_H^2 + a^2)} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(7 - \frac{12a^2}{(R_H^2 + a^2)} + \frac{12a^4}{(R_H^2 + a^2)^2} \right) \right] \right\}, \quad (5.75)$$

y la carga es magnificada para algunos valores del momento angular a , i.e., $\tilde{Q} > Q$, contrario a nuestra suposición de QED de Maxwell apantallado. Este hecho es ejemplificado en la Fig. 55, en donde la carga modificada del agujero negro puede aparecer apantallada o magnificada para algunos valores de los parámetros y para diferentes valores fijos de θ . En particular, la carga puede ser magnificada después de haber sido apantallada previamente, debido al incremento del momento angular. Esto podría interpretarse como si la mayor parte de las cargas virtuales producidas, fueran arrastradas por la rotación del agujero negro hacia el plano ecuatorial, modificando la distribución de la carga. De esta manera, las cargas virtuales arrastradas cerca de $\theta = \pi/2$, apantallarían a la carga real en ese punto, mientras que en los polos, el campo magnético dipolar inducido la magnificaría.

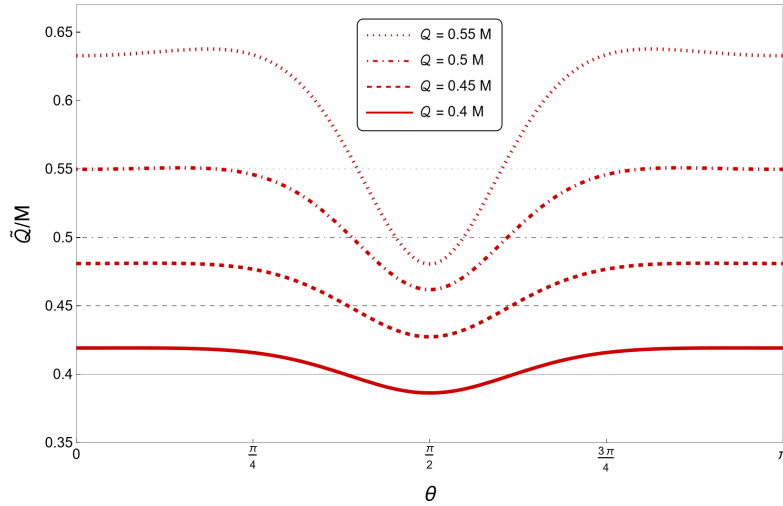


Figura 54: La hipotética distribución de la carga en el horizonte de eventos R_H , como función de θ y para diferentes valores de Q . Los parámetros del agujero negro son: $M = 1 \times 10^4 M_\odot$, y $a = 0.8M$. El valor mínimo de $\tilde{Q}$ ocurre en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, cuando el campo magnético inducido se anula, i.e., $H_Q = 0$.

Consecuentemente, esta hipotética distribución de la carga tendría efectos directos en las cantidades geométricas y termodinámicas del agujero negro. Por ejemplo, el horizonte de eventos sería encogido cerca de los polos y expandido cerca del plano ecuatorial, como se muestra en la Fig. 56. Más aún, mientras que el horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newman es una esfera de radio R_H , el horizonte de eventos del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg ya no sería una esfera, sino que estaría deformado, como se presenta en la Fig. 57.

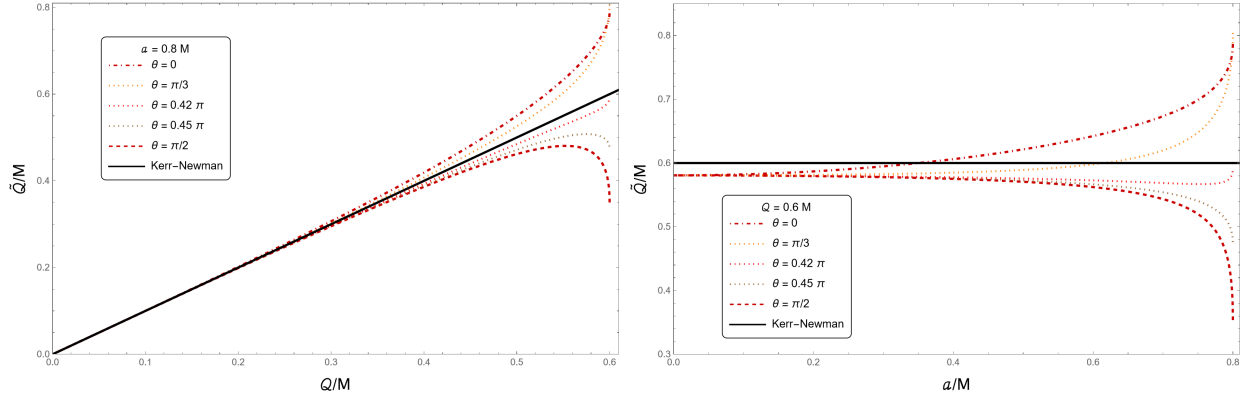


Figura 55: La carga $\tilde{Q}$ (5.2) como función de Q y a , para diferentes valores de θ y una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$.

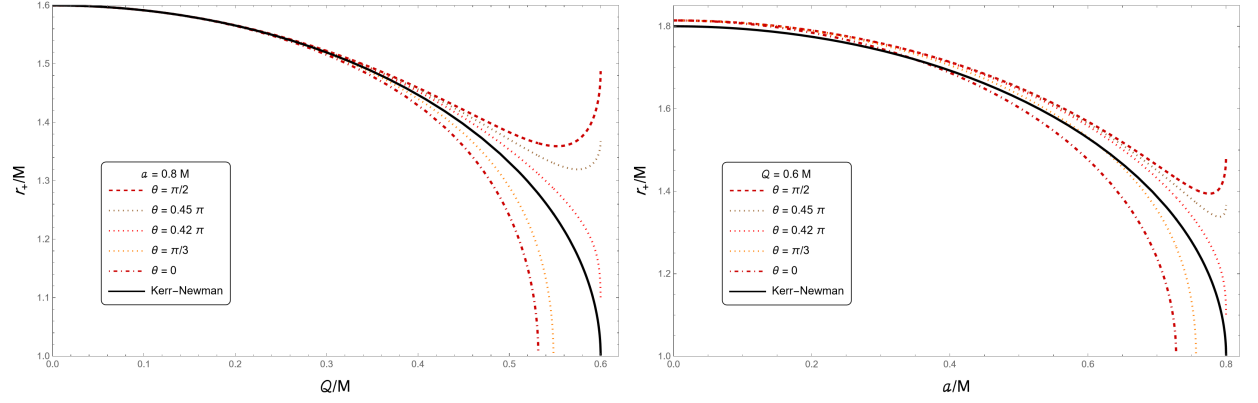


Figura 56: El radio del horizonte de eventos r_+ (5.5) como función de Q y a , para diferentes valores fijos de θ y una masa de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$.

A continuación, analizamos brevemente los efectos en las cantidades termodinámicas. Consideramos de nuevo a una partícula capturada por el agujero negro, pero ahora en diferentes ángulos θ .

La energía mínima requerida para la extracción de energía por el proceso de Penrose (5.30), no depende explícitamente de θ , y se define de la condición $\dot{r} = 0$. Sin embargo, la condición $\dot{\theta} = 0$ también debe ser satisfecha, como se concluyó durante el análisis de la ecuación (5.29). En consecuencia, todavía se puede usar la definición de la masa irreducible (5.33), así como la fórmula de Smarr asociada (5.37). De esta manera, cerca de los polos del agujero negro, en donde la carga se magnifica, $\tilde{Q} > Q$, se cumple que $M_{\text{ir}} < M_{\text{ir}}^{\text{KN}}$. Por lo tanto, hay mayor cantidad de energía almacenada, disponible para ser extraída, dado que ambas, la energía electromagnética y la energía rotacional, aumentan, i.e., se tiene $\frac{\tilde{Q}^2}{4M_{\text{ir}}} > \frac{Q^2}{4M_{\text{ir}}^{\text{KN}}}$, y $\frac{J^2}{4M_{\text{ir}}^2} > \frac{J^2}{4(M_{\text{ir}}^{\text{KN}})^2}$.

Para la entropía, relacionada al área del horizonte, sucede algo similar. Por un lado, el plano ecuatorial es un lugar con mayor entropía, como se muestra en la Fig. 58. De hecho, la entropía adquiere ahí su valor más alto. Por otro lado, el lugar con menor entropía corresponde a los polos. Esto puede ser interpretado como si hubieran más nubes de cargas virtuales cerca del plano ecuatorial, lo que también indicaría que la producción de pares se intensifica ahí. Si relacionamos a la entropía con probabilidad, es más probable encontrar a las nubes de partículas virtuales cerca del ecuador. También es más probable que una partícula sea capturada sobre este plano, que en los polos.

Ahora, retomemos el proceso de descarga del agujero negro descrito anteriormente, el cual se daba tras un proceso previo de carga, que incluía un decremento de la entropía y la posibilidad de obtener energía del sistema. En el plano ecuatorial, la producción de pares se intensifica y entonces la entropía local vuelve a aumentar. En los polos, en cambio, la entropía local disminuye, por lo que ahí hay incluso más energía disponible para ser extraída. Este resultado podría apoyar la idea de relacionar estos procesos con el mecanismo de formación de jets en los GRBs.

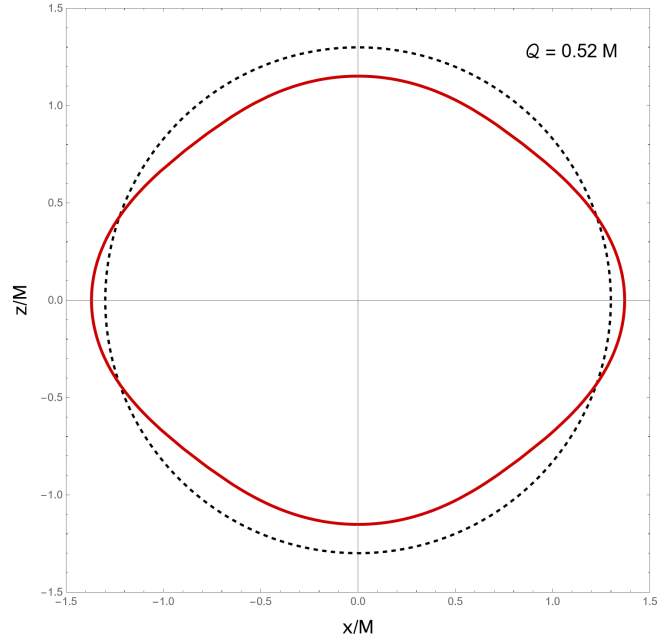


Figura 57: El hipotético horizonte de eventos deformado del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg (línea continua), comparado con el de Kerr-Newman (línea discontinua). Los parámetros son: $M = 1 \times 10^4 M_\odot$, y $a = 0.8M$.

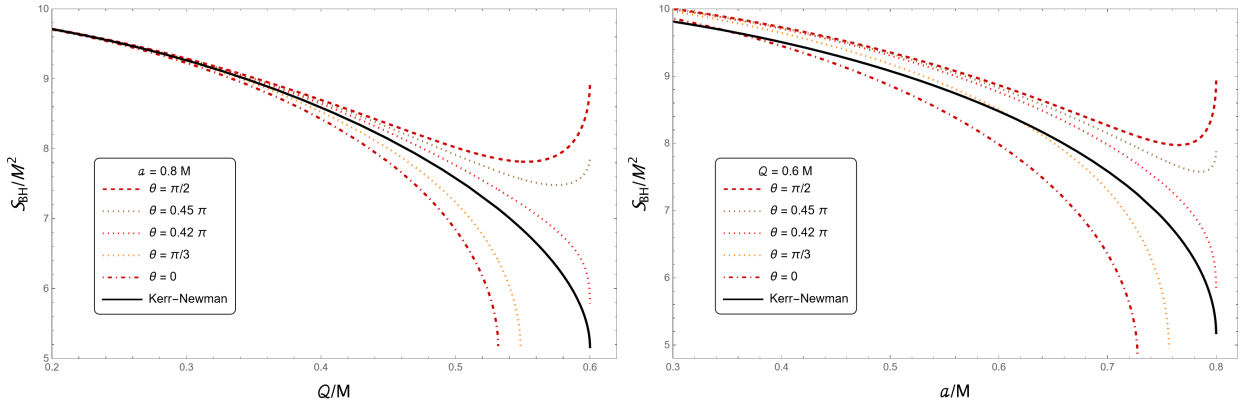


Figura 58: La entropía (5.46) como función de Q y a , para diferentes valores fijos de θ y para una masa de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$.

Lo anterior es válido para valores de θ fijos, analizando el valor que adquiere la entropía en diferentes ángulos. Sin embargo, la entropía de un agujero negro es una cantidad global de éste. Si existiera una hipotética distribución de la carga, descrita por un perfil similar al de la Fig. 54, la entropía $S_{\text{BH}} = A/4$ (y el área del horizonte de eventos A) debe ser integrada explícitamente con respecto a θ , de acuerdo con la expresión (5.6). De esta manera, la entropía resultaría

$$\begin{aligned}
 S_{\text{BH}} &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} d\theta d\phi, \\
 &= S_{\text{BH}}^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{10800D_c^2} \frac{Q^4}{R_{\text{H}}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right) \left[\frac{405R_{\text{H}}^9}{(R_{\text{H}}^2 + a^2)^5} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{165\arctan(a/R_{\text{H}})}{a} - \frac{165a^8R_{\text{H}} + 850a^6R_{\text{H}}^3 + 368a^4R_{\text{H}}^5 + 430a^2R_{\text{H}}^7}{(R_{\text{H}}^2 + a^2)^5} \right], \quad (5.76)
 \end{aligned}$$

la cual sólo depende de los parámetros del agujero negro a , Q y M . Éstos pueden ser restringidos numéricamente a valores para los cuales la entropía es siempre mayor que la entropía del agujero negro de Kerr-Newman, i.e., $S_{\text{BH}} > S_{\text{BH}}^{\text{KN}}$. La Figura 59 presenta a la entropía (5.76) como función de su carga

y momento angular. Si el momento angular incrementa, la entropía puede ser menor que en el caso de Kerr-Newman. Para valores más pequeños de a , la entropía es mayor. En el caso estático, $a \rightarrow 0$, la entropía siempre es mayor.

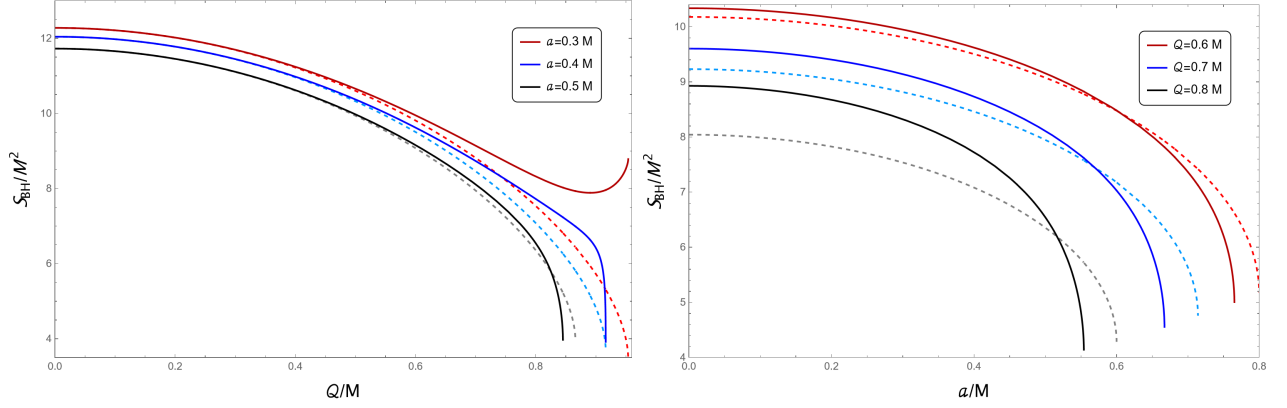


Figura 59: La entropía (5.76) como función de Q y a , para una masa fija de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$. Las líneas discontinuas corresponden al caso de Kerr-Newman y la líneas continuas al de Einstein-Euler-Heisenberg.

Asimismo, la temperatura también se vería modificada por la nueva distribución de carga que depende de θ . La temperatura estaría dada por (véase Apéndice E)

$$T_H = T_H^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{180\pi^2 D_c^2} \left(\frac{Q^4}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \right) \left[\frac{4a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(R_H^2 + a^2)} \frac{\Theta_0}{\Sigma_H^8} + \frac{(2a^2 + Q^2)}{(R_H^2 + a^2)^2} \frac{\Theta_1}{\Sigma_H^2} \right], \quad (5.77)$$

con $\Sigma_H = R_H^2 + a^2 \cos^2 \theta$, y las cantidades

$$\Theta_0 = 15R_H^8 - 58R_H^6 a^2 \cos^2 \theta + 32R_H^4 a^4 \cos^4 \theta - 38R_H^2 a^6 \cos^6 \theta + a^8 \cos^8 \theta, \quad (5.78)$$

$$\Theta_1 = \left[1 - 4 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} \right) \left(7 - 12 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} + 12 \frac{a^4 \cos^4 \theta}{\Sigma_H^2} \right) \right]. \quad (5.79)$$

La Figura 60 muestra la temperatura como función de θ . Es más alta cerca del plano ecuatorial y más baja cerca de los polos. La temperatura del agujero negro se presenta en la Fig. 61, como función de Q y a , y para diferentes valores fijos de θ .

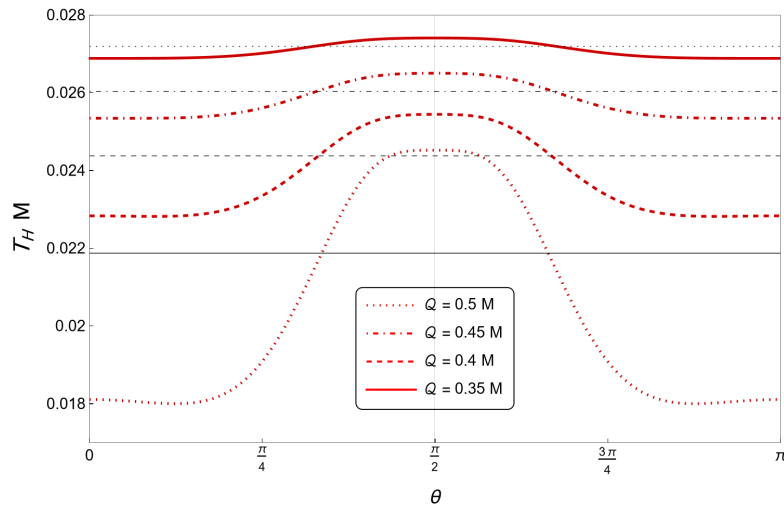


Figura 60: La temperatura (5.77) como función de θ y para diferentes valores de Q . Los parámetros del agujero negro son: $M = 1 \times 10^4 M_\odot$, y $a = 0.8M$. La temperatura máxima ocurre en el plano ecuatorial.

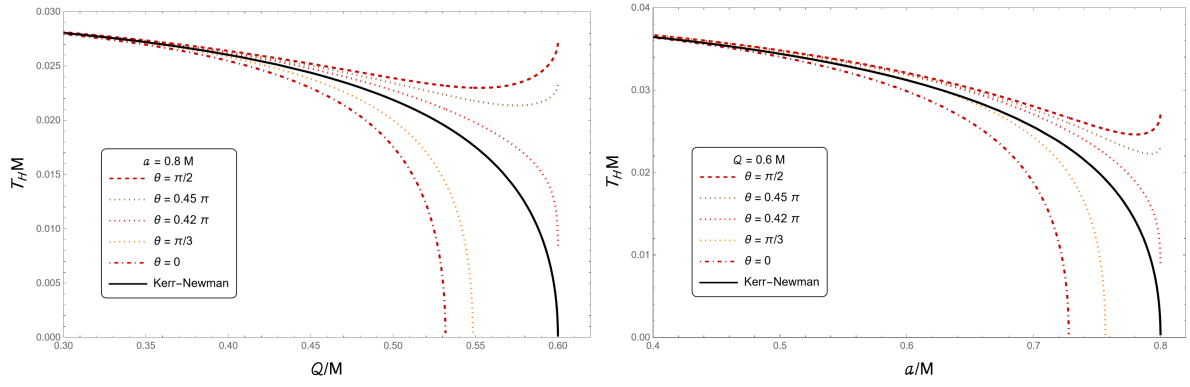


Figura 61: La temperatura (5.47) como función de Q y a , para diferentes valores fijos de θ y una masa de $M = 1 \times 10^4 M_\odot$.

Por otra parte, podríamos promediar la hipotética distribución de carga (5.2) integrando $\tilde{Q}(R_H, \theta)$ con respecto a las coordenadas angulares, de la siguiente manera:

$$\hat{Q} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{Q}(R_H, \theta) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (5.80)$$

$$= Q \left\{ 1 - \frac{\alpha}{21600\pi D_c^2} \frac{Q^2}{R_H^3} \left[\frac{405 R_H^9}{(R_H^2 + a^2)^5} - \frac{165 \arctan(a/R_H)}{a} - \frac{165 a^8 R_H + 850 a^6 R_H^3 + 368 a^4 R_H^5 + 430 a^2 R_H^7}{(R_H^2 + a^2)^5} \right] \right\}, \quad (5.81)$$

y estudiar la solución de agujero negro como una solución de Kerr-Newman con carga promedio efectiva $\hat{Q}$, la cual sólo depende de los parámetros del agujero negro. Es posible restringir sus valores de tal forma que la carga esté siempre apantallada y no magnificada. Esto corresponde exactamente a la misma restricción para la entropía, la cual una vez más estaría dada por la ecuación (5.76). Además, la masa irreducible estaría dada por la relación (5.36), pero con $\hat{Q}$ en lugar de $\tilde{Q}$. Por lo tanto:

- Cuando $\hat{Q}$ es apantallada, hay menos energía almacenada, dado que parte de la energía es utilizada para la producción de pares. Además, la entropía es mayor que la de Kerr-Newman, por lo que corresponde a un caso más probable.
- Si $\hat{Q}$ fuera magnificada, se podría extraer más energía y la entropía sería menor que en el caso de Kerr-Newman. Éste sería un estado menos probable.
- La definición de la carga promedio efectiva (5.81), podría ayudarnos a restringir los valores de nuestros parámetros, de tal manera que el proceso de polarización del vacío de Euler-Heisenberg resulte un proceso natural en el que la entropía global del agujero negro aumenta. Sin embargo, se mostró que localmente existen lugares con mayor y menor entropía, dada la redistribución de la carga causada por las nubes de cargas virtuales circundantes.

Para resumir, las correcciones de Euler-Heisenberg descritas por la solución (5.1) deben ser consideradas constantes debido a que la electrodinámica no-lineal de Euler-Heisenberg sólo es válida para campos constantes. Esto nos permite estudiar localmente las propiedades termodinámicas del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg como correcciones al caso de Kerr-Newman y en diferentes lugares, como en los polos o en el plano ecuatorial. Podemos considerar a la carga $\tilde{Q}$ (5.2) como explícitamente dependiente en θ , y la distribución de la carga sería diferente a aquella del caso de Kerr-Newman, lo que modificaría las propiedades del agujero negro. De cualquier manera, esta distribución de la carga $\tilde{Q}$ proviene de la simetría particular de la estructura del espacio-tiempo y del tensor de energía-momento [92].

Si consideráramos el enfoque estándar [60], en el cual el Lagrangiano de Euler-Heisenberg es obtenido como límite de baja energía de la teoría de Born-Infeld, debería obtenerse otra distribución de carga. Sin embargo, se espera que tales soluciones de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg presenten efectos similares en su termodinámica.

5.6. La radiación de Hawking y la evaporación del agujero negro

El proceso de evaporación de un agujero negro puede ser considerado como radiación de cuerpo negro. Bajo esta suposición básica, la temperatura del agujero negro medida por un observador estacionario en infinito es la temperatura de Hawking, y el proceso de radiación debe satisfacer una ley de Stefan-Boltzmann. Para escribir la ley de Stefan-Boltzmann generalizada para el agujero negro apantallado de Kerr-Newman, cambiamos a las coordenadas de Eddington-Finkelstein [101, 120], ν y ξ ,

$$d\nu = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\xi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad (5.82)$$

con las cuales la métrica de Kerr-Newman apantallada adquiere la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\nu^2 + 2d\nu dr - \frac{2a(r^2 + a^2 - \Delta) \sin^2 \theta}{\Sigma} d\nu d\xi \\ & + \Sigma^2 d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\xi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} d\xi^2. \end{aligned} \quad (5.83)$$

La ley de Stefan-Boltzmann generalizada, que puede ser usada para investigar la radiación de Hawking con energía, carga y momento angular, puede escribirse como [117]

$$\begin{aligned} -\sigma T_{\text{H}}^4 A &= \frac{dM}{d\nu} - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \frac{dJ}{d\nu} - \frac{\tilde{Q}r_+}{r_+^2 + a^2} \frac{d\tilde{Q}}{d\nu}, \\ &= \frac{dM}{d\nu} - \Omega_{r_+} \frac{dJ}{d\nu} - \Phi_{r_+} \frac{d\tilde{Q}}{d\nu}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

en donde σ es una constante positiva, relacionada con el número de campos de materia cuantizados acoplados a la gravedad, A es el área del horizonte de eventos y r_+ es su radio. Identificando los coeficientes como la velocidad angular del horizonte de eventos (5.15) y el potencial eléctrico (5.16), los términos de corrección en las leyes modificadas son respectivamente los términos dJ y $d\tilde{Q}$, de la primera ley de la termodinámica (5.56). Entonces, la ley generalizada de Stefan-Boltzmann puede considerarse consistente con la primera ley. De esta manera, la entropía de Bekenstein-Hawking satisface la relación $dS_{\text{BH}} = -\sigma T_{\text{H}}^3 A d\nu$, y su ecuación de evolución está dada por

$$\frac{dS_{\text{BH}}}{d\nu} = -\frac{\sigma}{16\pi^2} \frac{(r_+ - r_-)^3}{(r_+^2 + a^2)^2}. \quad (5.85)$$

Durante el proceso de radiación de Hawking, el área del agujero negro y, por lo tanto, su entropía disminuyen con el tiempo, ya que la masa del agujero negro decrece, violando la segunda ley de la termodinámica (5.45). Este hecho refleja un fallo de la condición de energía como resultado de las fluctuaciones cuánticas que producen la radiación. La segunda ley generalizada (5.66) predice que la entropía de la radiación de Hawking emergente debe contribuir a la compensación de la disminución de la entropía del agujero negro. Para satisfacer la segunda ley generalizada, la entropía ordinaria afuera del agujero negro debe aumentar, $dS_0/d\nu > 0$.

Por otro lado, hemos reescrito la entropía del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg como la entropía del agujero negro de Kerr-Newman más una corrección, i.e., (5.48). También podemos reescribir su ecuación de evolución como sigue:

$$\frac{dS_{\text{BH}}}{d\nu} = \frac{dS_{\text{BH}}^{\text{KN}}}{d\nu} - \frac{\alpha \sigma}{180\pi^3} \frac{Q^4}{D_c^2 R_{\text{H}}^4} \frac{(R_{\text{H}}^2 + 3a^2)}{(R_{\text{H}}^2 + a^2)^3} \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \quad (5.86)$$

con

$$\frac{dS_{\text{BH}}^{\text{KN}}}{d\nu} = -\frac{\sigma}{2\pi^2} \frac{(M^2 - a^2 - Q^2)^{3/2}}{(R_{\text{H}}^2 + a^2)^2}, \quad (5.87)$$

o reescribir (5.86) como

$$\frac{dS_{\text{BH}}}{d\nu} = \left[1 + \frac{\alpha}{90\pi} \frac{Q^4}{D_c^2 R_H^4} \frac{(R_H^2 + 3a^2)}{(R_H^2 + a^2)} \left(\frac{1}{M^2 - a^2 - Q^2} \right) \right] \frac{dS_{\text{BH}}^{\text{KN}}}{d\nu}, \quad (5.88)$$

la cual es la relación de proporcionalidad entre ambas entropías, con un coeficiente positivo que crece conforme uno se aproxima al caso extremo. Esto significa que, bajo la radicación de Hawking, la entropía de Euler-Heisenberg cambia a una tasa mayor que la de Kerr-Newman. Asimismo, la entropía ordinaria S_0 afuera del agujero negro, también debe cambiar a una tasa mayor.

Como fue puntualizado por Damour et al. [104], el proceso de creación de partículas en el marco de Euler-Heisenberg difiere del proceso de la radiación de Hawking, de la siguiente manera:

- Para comenzar, el proceso de Euler-Heisenberg no requiere una geometría de fondo que varíe en el tiempo, y es causada necesariamente por la presencia de un campo eléctrico o magnético. La tasa de producción de pares alrededor de un agujero negro de Kerr-Newman se obtiene de aplicar localmente la fórmula de Schwinger [41] al caso de una geometría curva de Kerr-Newman, basándose en el principio de equivalencia. Entonces, la producción de pares ocurre cuando el campo eléctrico del agujero negro alcanza el valor crítico D_c .
- Adicionalmente, la producción de pares en el proceso de Euler-Heisenberg usa parte de la energía rotacional y electromagnética del agujero negro de Kerr-Newman [121], e incrementa su masa irreducible, como se verificó al obtener la ecuación (5.34). La entropía y la masa irreducible están relacionadas vía las ecuaciones (5.41) y (5.46), como

$$S = 4\pi M_{\text{ir}}^2. \quad (5.89)$$

Consecuentemente, cuando ocurre la producción de pares de Euler-Heisenberg, la entropía aumenta, como se analizó por ejemplo en la ecuación (5.48) y en la Fig. 45, satisfaciendo la segunda ley de la termodinámica. Por el contrario, en el proceso de radiación de Hawking, la entropía disminuye, violando la segunda ley. La masa irreducible es irradiada y decrece con el tiempo, lo que se denomina la evaporación del agujero negro. Para analizar brevemente lo anterior, consideremos el siguiente proceso. Considérese un agujero negro de Schwarzschild, cuya masa es la masa irreducible, i.e., $M = M_{\text{ir}}$ de la relación (5.37) con $\tilde{Q} = J = 0$. La ley de Stefan-Boltzmann (5.84) para el agujero negro de Schwarzschild está dada por

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma A T_H^4 \propto -M^2 \left(\frac{1}{M} \right)^4 = -\frac{1}{M^2}. \quad (5.90)$$

Después de integrarla de una masa inicial M_0 , a una masa cercana a la masa de Planck m_p , bajo la suposición $M_0 \gg m_p$, se obtiene [122]

$$t(M_0) \propto (M_0^3 - m_p^3) \propto \left(\frac{M_0}{m_p} \right)^3. \quad (5.91)$$

Regresando a nuestras unidades, usando el tiempo de Planck t_p de tal forma que se obtiene $t(M_0) = t_p (M_0/m_p)^3$, el tiempo requerido para que un agujero negro de masa M_0 se evapore es

$$t(M_0) \approx 10^{65} \left(\frac{M_0}{M_\odot} \right)^3 \text{ años}. \quad (5.92)$$

- Finalmente, los efectos de Euler-Heisenberg pueden cobrar relevancia para agujeros negros astrofísicos, en particular para los agujeros negros estelares, con masas más grandes que la masa crítica de las estrellas de neutrones [36], $M \geq 3.2M_\odot$, como se analizó en la sección previa. Por otra parte, de la ecuación (5.92), el tiempo requerido para que un agujero negro estelar de Schwarzschild de $4M_\odot$ se evapore mediante radiación de Hawking es de alrededor de 10^{66} años, lo cual es más de 10^{56} veces la edad del universo, $\sim 10^{10}$ años.

En resumen, un agujero negro astrofísico rodeado de materia seguirá las leyes de la termodinámica de los agujeros negros. Almacena energía rotacional y electromagnética, y su masa irreducible, área y entropía siempre aumentan. Sólo un agujero negro completamente aislado puede comenzar a evaporarse por medio de procesos de polarización del vacío, como se explica a continuación. Un agujero negro rotante cargado, con un campo eléctrico mayor que el campo crítico D_c , crea partículas por procesos de Euler-Heisenberg, lo que consume su carga y parte de su momento angular. Cuando el campo eléctrico es menor que D_c , el agujero negro cargado continua perdiendo su carga mediante la emisión espontánea de partículas [123]. Para la energía rotacional algo similar ocurre. Como lo mostró Page [124], un agujero negro rápidamente rotante pierde su momento angular por procesos de Hawking muchas veces más rápido que su masa. El área y la entropía de un agujero negro rotante aumentarían inicialmente con el tiempo conforme el calor fluye a su interior, proveniente de los pares de partículas creados en la ergoregión. Conforme la rotación disminuye, la emisión térmica comienza a dominar, contrarrestando el calor afuera del agujero negro y disminuyendo su área. De esta manera, cualquier agujero negro inicialmente rotante, frena su rotación hasta un estado casi no-rotante, antes de que la mayor parte de su masa haya sido consumida. Cuando la carga y la rotación del agujero negro finalmente se terminan, i.e., $M = M_{\text{ir}}$ de la ecuación (5.37), la masa irreducible es irradiada por procesos de Hawking, lo que corresponde a la evaporación de un agujero negro de Schwarzschild.

6. Resumen y conclusiones

El estudio de los agujeros negros nos permite entender procesos nucleares, electromagnéticos y cuánticos, en el régimen de campos gravitacionales intensos. La carga de un agujero negro puede ser distinta de cero durante la acreción de materia cargada o durante el colapso gravitacional de una estrella, en el cual ocurre un proceso de separación de la carga, cuando la energía rotacional del núcleo colapsante se transforma en energía electromagnética y eventualmente en pares electrón-positrón creados por polarización del vacío [36].

La electrodinámica que toma en cuenta tales efectos de polarización del vacío es la electrodinámica de Euler-Heisenberg [39]. En ésta, el vacío adquiere una constante dieléctrica efectiva, conformada por las nubes de cargas virtuales que rodean a las cargas y corrientes reales. Cuando el campo eléctrico de un agujero negro cargado alcanza el valor crítico $D_c \equiv m_e^2 c^3 / (e\hbar)$, comienza la producción de pares. Estas nubes de cargas virtuales tienen un efecto inverso en la carga del agujero negro, el cual se presenta como su apantallamiento. De esta manera, la geometría se ve indirectamente modificada mediante los valores apantallados de la carga del agujero negro. Más aún, las nubes de cargas virtuales afectan la propagación de la luz, la cual ahora atraviesa el medio dieléctrico efectivo.

Tales modificaciones de la geometría del espacio-tiempo y de la propagación de la luz, tienen un efecto directo en las trayectorias de las partículas de prueba que orbitan alrededor del agujero negro. En particular, afectan a los fotones que se encuentran en el anillo de luz, por lo que la sombra del agujero negro se ve modificada. Pequeños cambios en la trayectoria de la luz pueden implicar diferencias notorias en el lensing gravitacional. Asimismo, los efectos en el horizonte de eventos se traducen a modificaciones de la termodinámica del agujero negro.

En este proyecto doctoral hemos considerado las correcciones de Euler-Heisenberg a la teoría lineal de Maxwell. Primero, se derivó una solución de agujero negro estático cargado eléctricamente en el marco de la interpretación de QED [71], y del formalismo de electrodinámica no-lineal de Plebański [49]. Se estudiaron las trayectorias de partículas de prueba neutras, cargadas y fotones, cualitativamente mediante el análisis de los potenciales efectivos y analíticamente tras la integración de las ecuaciones geodésicas.

Las nubes de cargas virtuales afectan tanto los radios de los horizontes de eventos, como los radios de las órbitas circulares estables e inestables, y los puntos de retorno. En el caso de las partículas de prueba cargadas, la carga de prueba también es apantallada, aunque en este caso el apantallamiento es inducido por el campo eléctrico del agujero negro. En el caso de los fotones, el radio del anillo de luz crece, pero la sombra del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg yace siempre dentro de la sombra del de Reissner-Nordström. Estos resultados fueron publicados en [72].

Después, estudiamos la propagación de los fotones con mayor detalle. Analizamos el punto de máximo acercamiento de un rayo de luz que pasa cerca del agujero negro cargado. Éste está determinado por las condiciones iniciales de la trayectoria del rayo, las cuales, en el marco del método de *backwards ray-tracing*, corresponden a la posición del observador y a los ángulos de la imagen, i.e., a las coordenadas angulares aparentes que el observador asigna a la fuente en su esfera celestial. El anillo de luz es el punto más cercano que un fotón puede alcanzar sin ser capturado por el agujero negro. Sólo depende de los parámetros del agujero negro, y los fotones que lo componen conforman la frontera de su sombra.

Se derivó la ecuación de la lente exacta [82], y se concluyó que considerar la presencia de las nubes de cargas virtuales, implica determinar una posición real de la fuente diferente. El efecto de Euler-Heisenberg puede ser relevante para fuentes que se encuentran más cerca del agujero negro, por ejemplo, en la ISCO, en el disco de acreción. Además, se compararon los efectos con los casos de lente delgada y se relacionaron las cantidades con cantidades observables. Lo anterior se reportó en [73].

Por otro lado, una solución rotante de Einstein-Euler-Heisenberg fue obtenida en el marco de la interpretación de QED por nuestro grupo de investigación [92]. Como parte de este proyecto doctoral, estudiamos las trayectorias de partículas de prueba cargadas, analizando el potencial efectivo correspondiente. La carga de prueba también es apantallada. Asimismo, estudiamos las ecuaciones de movimiento de los fotones y analizamos las modificaciones de la sombra del agujero negro. En el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, la sombra es más pequeña que en el caso de Kerr-Newman. En el caso

rotante, podemos considerar valores muy pequeños de la carga del agujero negro junto con valores casi extremos de su momento angular y todavía tener efectos de la polarización del vacío. Igualmente, los resultados de estos análisis se publicaron en [93].

Finalmente, consideramos al agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg como un sistema termodinámico afectado por materia capturada en el plano ecuatorial. Mediante el análisis del proceso de Penrose [99], y la definición de la masa irreducible [100], se concluyó que hay menos energía almacenada disponible para ser extraída en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg, dado que parte de la energía electromagnética y rotacional del agujero negro de Kerr-Newman, se emplea para la creación de pares.

Se presentaron las cuatro leyes de la termodinámica de los agujeros negros [106], y se estudiaron los efectos de Euler-Heisenberg en la entropía y temperatura del agujero negro. La entropía aumenta debido a las nubes de cargas virtuales, por lo que la producción de pares es un proceso natural y más probable durante el proceso de carga del agujero negro. Conforme la carga del agujero negro aumenta, la producción de pares se intensifica y se debe realizar un trabajo para contrarrestarla y disminuir la entropía. Después, el agujero negro se descarga y la entropía vuelve a aumentar gradualmente. Algo similar ocurre con el momento angular. Este proceso propuesto de carga y descarga del agujero negro, considerando los efectos de la polarización del vacío, pueden estar relacionados con el mecanismo de formación de jets en los GRBs.

Asimismo, la temperatura también aumenta comparada con la del agujero negro de Kerr-Newman, y la transición de fase ocurre a valores más grandes de la carga y del momento angular. Más aún, en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg ocurre una nueva transición de fase para valores casi extremos de los parámetros del agujero negro.

Se analizaron los términos de Euler-Heisenberg y se llegó a la conclusión que, aunque tales efectos no son visibles para agujeros negros supermasivos, pueden cobrar relevancia para los agujeros negros estelares. Pequeños incrementos en la carga de un agujero negro estelar pueden producir efectos de Euler-Heisenberg relevantes. Lo mismo ocurre para los agujeros negros primordiales. Adicionalmente, se presentaron las diferencias entre el proceso de Euler-Heisenberg y la radiación de Hawking [110].

Por último, se analizaron las modificaciones de las cantidades termodinámicas para una partícula fuera del plano ecuatorial, siendo los polos el lugar en donde ocurren los cambios más contrastantes. Se discutieron brevemente las consecuencias de considerar explícitamente la dependencia angular en el apantallamiento de la carga. Debido a la rotación del agujero negro y al consecuente arrastre de las nubes de cargas virtuales, la distribución de la carga cambia, comparada con el caso de Kerr-Newman, lo que deforma el horizonte de eventos y modifica las cantidades termodinámicas del agujero negro. En particular, cerca de los polos hay menor producción de pares, puede extraerse más energía y tanto la entropía como la temperatura disminuyen. Uno puede integrar la distribución de la carga a lo largo de las variables angulares y definir una carga promedio efectiva. La restricción de apantallamiento de esta carga promedio, la cual corresponde a la restricción del aumento de la entropía global del sistema, nos impone un límite en los parámetros del agujero negro.

El análisis de la termodinámica del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg fue presentado en [98].

6.1. Alcances y cuestiones por explorar

Mientras que la solución de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg estudiada en este proyecto doctoral, fue derivada en el marco de la interpretación de QED de la teoría de Euler-Heisenberg [92], una solución rotante siguiendo el enfoque estándar [60], no ha sido obtenida hasta la fecha. Hallar tal solución y estudiar todas sus propiedades, incluyendo las trayectorias de partículas de prueba a su alrededor, es un objetivo que queda por resolverse.

La solución de Kerr-Newman apantallada puede emplearse como una primera aproximación para estudiar efectivamente los efectos de la polarización del vacío en agujeros negros cargados. Quedan por estudiarse los modos quasi-normales y las ondas gravitacionales del agujero negro, así como los efectos de birrefringencia en la sombra derivados de los estados de polarización que adquieren los rayos de luz al pasar por el medio dieléctrico efectivo [59]. Asimismo, quedan por explorarse procesos astrofísicos

interesantes, como los discos de acreción, y ahondar en el proceso de carga y descarga de agujeros negros estelares y su posible verificación con los datos obtenidos de las mediciones de los GRBs.

Estudios similares para soluciones de las ecuaciones de Einstein, con electrodinámicas no-lineales como fuentes, pueden ser realizados. Desde la obtención de la solución, hasta el análisis de las trayectorias, el lensing gravitacional, las sombras y la termodinámica.

Existen diferentes enfoques para estudiar los efectos de la polarización del vacío alrededor de agujeros negros, no necesariamente cargados. Uno fue presentado por Drummond et al. [126], en donde existe un acoplamiento no-mínimo de la teoría de Einstein y la electrodinámica lineal de Maxwell-Lorentz. Los métodos aprendidos durante el proyecto doctoral, como lo son el análisis de las trayectorias y del lensing gravitacional, pueden emplearse para el estudio de la propagación de la luz en estos enfoques. Esto se hizo para el caso de la q-métrica generalizada [127], sin ser parte del proyecto, pero durante el doctorado, resultando en la publicación adicional [128].

6.2. Publicaciones realizadas

- ⊙ D. Amaro and A. Macías,
Geodesic structure of the Euler-Heisenberg static black hole,
Phys. Rev. D 102, 104054 (2020).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.104054>
- ⊙ D. Amaro and A. Macías,
Exact lens equation for the Einstein-Euler-Heisenberg static black hole,
Phys. Rev. D 106, 064010 (2020).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.064010>
- ⊙ D. Amaro, C. Lämmerzahl, and A. Macías,
Particle motion in the Einstein-Euler-Heisenberg rotating black hole spacetime,
Phys. Rev. D 107, 084040 (2023).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.084040>
- ⊙ D. Amaro, N. Breton, C. Lämmerzahl, and A. Macías,
Thermodynamics of the Einstein-Euler-Heisenberg rotating black hole,
Phys. Rev. D 110, 124020 (2024).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.124020>
- ⊙ D. Amaro and S. Faraji,
Vacuum polarization effects in the background of a deformed compact object and implications for photon velocity,
Phys. Rev. D 111, 045003 (2025).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.111.045003>

7. Bibliografía

- [1] B.P. Abbot et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), **Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger**, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2015)
- [2] R. Genzel, **A Forty Year Journey**, *arXiv:2102.13000* [astro-ph.GA].
- [3] The Event Horizon Telescope Collaboration, **First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole**, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
- [4] The Event Horizon Telescope Collaboration, **First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way**, *Astrophys. J. Lett.* **930**, L12 (2022).
- [5] R. Penrose, **Gravitational Collapse and Space-Time Singularities**, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965).
- [6] D. Raine, E. Thomas, **Black Holes**, *Imperial College Press* (2010).
- [7] M. Begelman, **Evidence for black holes**, *Science* **300**, 5627 (2003).
- [8] B. Kiziltan, H. Baumgardt, A. Loeb, **An intermediate-mass black hole in the centre of the globular cluster 47 Tucanae**, *Nature* **542**, 203–205 (2017).
- [9] J.M. Bardeen, W.H. Press, and S. Teukolsky, **Rotating Black Holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation**, *Astrophys. J.* **178**, 347 (1972).
- [10] J.M. Bardeen, **Timelike and null geodesics in the Kerr metric**, in C. DeWitt and B. S. DeWitt (eds.): *Black Holes*, **215** (*Gordon and Breach*, New York, 1973).
- [11] J.-P. Luminet, **Image of a spherical Black Hole with thin accretion disk**, *Astron. Astrophys.* **75**, 228-235 (1979).
- [12] A.M. Ghez, B. L. Klein, M. Morris, and E. E. Becklin, **High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A*: Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy**. *Astrophys. J.* **509**, 678 (1998) .
- [13] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel et al., **A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way**, *Nature* **419**, 694-696 (2002).
- [14] A. Eckart, R. Schödel, C. Straubmeier, **The Black Hole at the Center of the Milky Way**, *Imperial College Press* (2005).
- [15] Gravity Collaboration, **Modeling the orbital motion of Sgr A*'s near-infrared flares**, *Astron. Astrophys.* **635**, A143 (2020).
- [16] H. Falcke, F. Melia, and E. Agol, **Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center**, *Astrophys. J.* **528**, L13 (1999).
- [17] R. Takahashil, **Shapes and Positions of Black Hole Shadows in Accretion Disks and Spin Parameters of Black Holes**, *Astrophys. J.* **611**, 996–1004 (2004).
- [18] A.E. Broderick, T. Johannsen, A. Loeb, D. Psaltis, **Testing the No-hair Theorem with Event Horizon Telescope Observations of Sagittarius A***, *Astrophys. J.* **784**, 7 (2014).
- [19] V. Cunha, A. Herdeiro, E. Radu, **Fundamental photon orbits: Black hole shadows and spacetime instabilities**, *Phys. Rev. D* **96**, 024039 (2017).

- [20] V.P. Cunha, A.R. Herdeiro, **Shadows and strong gravitational lensing: a brief review**, *Gen.Rel.Grav.* **50**, 42 (2018).
- [21] A. Grenzebach, V. Perlick and C. Lämmerzahl, **Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant**, *Phys. Rev. D* **89**, 124004 (2014).
- [22] A. Grenzebach, **The Shadow of Black Holes, An Analytic Description**, *Springer* (2016).
- [23] V. Perlick, O. Tsupko, and S. Bisnovatyi, **Black hole shadow in an expanding universe with a cosmological constant**, *Phys. Rev. D* **97**, 104062 (2018).
- [24] The Event Horizon Telescope Collaboration, **First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring**, *Astrophys. J. Lett.* **910**, L12 (2021).
- [25] The Event Horizon Telescope Collaboration, **First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring**, *Astrophys. J. Lett.* **964**, L25 (2024).
- [26] B. Balick and R. Brown, **Intense sub-arcsecond structure in the galactic center**, *ApJ* **194**, 265–270 (1974).
- [27] A. Ghez et al., **The accelerations of stars orbiting the Milky Way’s central black hole**, *Nature* **407**, 349–351 (2000).
- [28] F. Melia and H. Falcke, **The supermassive black hole at the galactic center**, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39**, 309–52 (2001).
- [29] M.R. Morris, L. Meyer and A. Ghez, **Galactic Center Research: Manifestations of the Central Black Hole**, *Res. Astron. Astrophys.* **12**, 995 (2012).
- [30] A. Eckart, et. al., **The Milky Way’s Supermassive Black Hole: How Good a Case Is It?**, *Found. Phys.* **47**, 553–624 (2017).
- [31] D. Psaltis, **Testing General Relativity with the Event Horizon Telescope**, *Gen. Rel. Grav.* **51**, 137 (2019).
- [32] R. d’Inverno, **Introducing Einstein’s Relativity**, *Oxford University Press*, 192–210 (1992).
- [33] S. Dodelson, **Gravitational Lensing**, *Cambridge University Press* (Cambridge, England, 2017).
- [34] J.L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G.F. Smoot, **The Legacy of Einstein’s Eclipse, Gravitational Lensing**, *Universe* **6**, 9 (2020).
- [35] V. Perlick and O. Tsupko, **Calculating black hole shadows: Review of analytical studies**, *Physics Reports* **947**, 1–39 (2022).
- [36] R. Ruffini, G. Vereshchagin, and S.-S. Xue, **Electron-positron pairs in physics and astrophysics: From heavy nuclei to black holes**, *Physics Reports* **487**, 1 (2010).
- [37] J. Rueda and R. Ruffini, **The blackholic quantum**, *The European Physical Journal C* **80**, 1 (2020).
- [38] J. Rueda and R. Ruffini, **The quantum emission of an alive black hole**, *In. J. Mod. Phys. D* **30**, 2141003 (2021).
- [39] W. Heisenberg and H. Euler, **Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons**, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [40] S. Weinberg, **The quantum theory of fields, Vol. 2**, *Cambridge University Press* (1995).
- [41] J. Schwinger, **On Gauge Invariance and Vacuum Polarization**, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).

- [42] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, **Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric**, Vol. **33**, *Springer Science and Business Media* (2003).
- [43] G. Boillat, **Nonlinear Electrodynamics: Lagrangians and Equations of Motion**, *J. Math. Phys.* (N.Y.) **11**, 941 (1970).
- [44] G. Brodin, M. Marklund, and L. Stenflo, **Proposal for detection of QED vacuum nonlinearities in Maxwell's equations by the use of waveguides**, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 171801 (2001).
- [45] G. Mie, **Grundlagen einer Theorie der Materie**, *Ann. Phys.* (N.Y.) **342**, 511 (1912).
- [46] M. Born, L. Infeld, and R. H. Fowler, **Foundations of the new field theory**, *Proc. R. Soc. A* **144**, 425 (1934).
- [47] B. Hoffmann, **Gravitational and electromagnetic mass in the Born-Infeld electrodynamics**, *Phys. Rev.* **47**, 877 (1935).
- [48] A. García, H. Salazar, and J. Plebański, **Type-D solutions of the Einstein and Born-Infeld nonlinear-electrodynamics equations**, *Il Nuovo Cimento* **B84**, 65 (1984).
- [49] J. F. Plebański, **Lectures on Nonlinear Electrodynamics**, *Nordita* (Copenhagen, 1970).
- [50] H. Salazar, A. García, and J. Plebański, **Duality rotations and type D solutions to Einstein equations with nonlinear electromagnetic sources**, *J. Math. Phys.* (N.Y.) **28**, 2171 (1987).
- [51] E. Ayón-Beato and A. García, **Regular Black Hole in General Relativity coupled to nonlinear electrodynamics**, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5056 (1998).
- [52] N. Bretón, **Geodesic structure of the Born-Infeld black hole**, *Class. Quantum Grav.* **19**, 601 (2002).
- [53] E. Fradkin and A. Tseytlin, **Non-linear electrodynamics from quantized strings**, *Phys. Lett. B* **163**, 123 (1985).
- [54] A. Tseytlin, **Vector field effective action in the open superstring theory**, *Nucl. Phys. B* **276**, 391 (1986).
- [55] R. G. Leigh, **Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet σ -model**, *Mod. Phys. Lett. A* **04**, 2767 (1989).
- [56] L. de Fossé, P. Koerber, and A. Sevrin, **The uniqueness of the Abelian Born-Infeld action**, *Nucl. Phys. B* **603**, 413 (2001).
- [57] G.W. Gibbons, **Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes**, *Nucl. Phys. B* **514**, 603 (1998).
- [58] G. Gibbons and C. A. R. Herdeiro, **The Melvin universe in Born-Infeld theory and other theories of nonlinear electrodynamics**, *Class. Quantum Grav.* **18**, 1677 (2001).
- [59] M. Novello, V. De Lorenci, J. Salim, and R. Klippert, **Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **61**, 045001 (2000).
- [60] H. Yajima and T. Tamaki, **Black hole solutions in Euler-Heisenberg theory**, *Phys. Rev. D* **63**, 064007 (2001).
- [61] Heng Dai, Zixu Zhao, Shuhang Zhang, **Thermodynamic phase transition of Euler-Heisenberg-AdS black hole on free energy landscape**, *Nucl. Phys. B* **991**, 116219 (2023).
- [62] A. Bakopoulos, T. Karakasis, N. E. Mavromatos, T. Nakas, and E. Papantonopoulos, **Exact black holes in string-inspired Euler-Heisenberg theory**, *Phys. Rev. D* **110**, 024014 (2024).

- [63] V.A. De Lorenci, N. Figueiredo, H.H. Fliche, and M. Novello, **Dyadosphere bending of light**, *A&A* **369**, 690-693 (2001).
- [64] A. Allahyari, M. Allahyari, S. Vagnozzi, and D.F. Mota, **Magnetically charged black holes from non-linear electrodynamics and the Event Horizon Telescope**, *JCAP* **02**, 003 (2020).
- [65] S. Vagnozzi, R. Roy, Y.D. Tsai, L. Visinelli, et al., **Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A***, *Class. Quantum Grav.* **40**, 165007 (2023).
- [66] D. Magos and N. Bretón, **Thermodynamics of the Euler-Heisenberg-AdS black hole**, *Phys. Rev. D* **102**, 084011 (2020).
- [67] T. Karakasis, G. Koutsoumbas, A. Machattou, and E. Papantonopoulos, **Magnetically charged Euler-Heisenberg black holes with scalar hair**, *Phys. Rev. D* **106**, 104006 (2022).
- [68] M. Maceda and A. Macías, **Non-commutative inspired black holes in Euler-Heisenberg non-linear electrodynamics**, *Phys. Lett. B* **788**, 446 (2019).
- [69] H. Rehman, G. Abbas, T. Zhu, and G. Mustafa, **Matter accretion onto the magnetically charged Euler-Heisenberg black hole with scalar hair**, *Eur. Phys. J. C* **83**, 856 (2023).
- [70] N. Bretón and L.A. López, **Birefringence and quasinormal modes of the Einstein-Euler-Heisenberg black hole**, *Phys. Rev. D* **104**, 024064 (2021).
- [71] R. Ruffini, Y.-B. Wu, and S.-S. Xue, **Einstein-Euler-Heisenberg theory and charged black holes**, *Phys. Rev. D* **88**, 085004 (2013).
- [72] D. Amaro and A. Macías, **Geodesic structure of the Euler-Heisenberg static black hole**, *Phys. Rev. D* **102**, 104054 (2020).
- [73] D. Amaro and A. Macías, **Exact lens equation for the Einstein-Euler-Heisenberg static black hole**, *Phys. Rev. D* **106**, 064010 (2020).
- [74] S. Chandrasekhar, **The Mathematical Theory of Black Holes**, *Oxford University Press* (New York, 1983).
- [75] D. Nickalls, **A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed**, *Math. Gaz.* **77**, 354 (1993).
- [76] S. Grunau and V. Kagramanova, **Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner-Nordström space-time: Analytical solutions**, *Phys. Rev. D* **83**, 044009 (2011).
- [77] K. Virbhadra, D. Narasimha, and S. Chitre, **Role of the scalar field in gravitational lensing**, *Astron. Astrophys.* **337**, 1 (1998).
- [78] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, **Schwarzschild black hole lensing**, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [79] V. Bozza, **Gravitational lensing in the strong field limit**, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002).
- [80] S. Frittelli and E. T. Newman, **Exact universal gravitational lensing equation**, *Phys. Rev. D* **59**, 124001 (1999).
- [81] T. P. Kling and E. T. Newman, **Null cones in Schwarzschild geometry**, *Phys. Rev. D* **59**, 124002 (1999).

- [82] S. Frittelli, T. P. Kling, and E. T. Newman, **Spacetime perspective of Schwarzschild lensing**, *Phys. Rev. D* **61**, 064021 (2000).
- [83] J. Ehlers, S. Frittelli, and E. T. Newman, **Gravitational lensing from a space-time perspective**, in *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, Springer, pp. 281–304 (Netherlands, 2003).
- [84] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, **Gravitational Lenses**, Springer-Verlag (New York, Berlin, Heidelberg, 1992).
- [85] J. L. Synge, **The escape of photons from gravitationally intense stars**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **131**, 463-466 (1966).
- [86] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, **Classical Mechanics**, Addison Wesley (Reading, MA, 2002).
- [87] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**, John Wiley and Sons, Inc. (New York, 1972).
- [88] E. F. Eiroa, G. E. Romero, and D. F. Torres, **Reissner-Nordström black hole lensing**, *Phys. Rev. D* **66**, 024010 (2002).
- [89] X. Pang and J. Jia, **Gravitational lensing of massive particles in Reissner–Nordström black hole spacetime**, *Class. Quantum Grav.* **36**, 065012 (2019).
- [90] Q.-M. Fu, L. Zhao, and Y.-X. Liu, **Weak deflection angle by electrically and magnetically charged black holes from nonlinear electrodynamics**, *Phys. Rev. D* **104**, 024033 (2021).
- [91] X.-J. Gao, J.-M. Chen, H. Zhang, Y. Yin, and Y.-P. Hu, **Investigating strong gravitational lensing with black hole metrics modified with an additional term**, *Phys. Lett. B* **822**, 136683 (2021).
- [92] Nora Breton, Claus Lämmerzahl, and Alfredo Macías, **Rotating structure of the Euler-Heisenberg black hole**, *Phys. Rev. D* **105**, 104046 (2022).
- [93] D. Amaro, C. Lämmerzahl, and A. Macías, **Particle motion in the Einstein-Euler-Heisenberg rotating black hole spacetime**, *Phys. Rev. D* **107**, 084040 (2023).
- [94] K. S. Thorne, C.W. Misner, and J. A. Wheeler, **Gravitation**, Freeman (San Francisco, 2000).
- [95] B. Carter, **Global structure of the Kerr family of gravitational fields**, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
- [96] E. Hackmann and H. Xu, **Charged particle motion in Kerr-Newman space-times**, *Phys. Rev. D* **87**, 124030 (2013).
- [97] A. de Vries, **The apparent shape of a rotating charged black hole, closed photon orbits and the bifurcation set A4**, *Class. Quantum Grav.* **17**, 123 (2000).
- [98] D. Amaro, N. Breton, C. Lämmerzahl, and A. Macías, **Thermodynamics of the Einstein-Euler-Heisenberg rotating black hole**, *Phys. Rev. D* **110**, 124020 (2024).
- [99] R. Penrose and R.M. Floyd, **Extraction of Rotational Energy from a Black Hole**, *Nature Physical Science* **229** (1971).
- [100] D. Christodoulou, **Reversible and irreversible transformations in black hole physics**, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1596 (1970).

- [101] D. Christodoulou and R. Ruffini, **Reversible transformations of a charged black hole**, *Phys. Rev. D* **4**, 3552 (1971).
- [102] G. Denardo and R. Ruffini, **On the energetics of Reissner-Nordström geometries**, *Phys. Lett. B* **45**, 3 (1973).
- [103] G. Denardo, L. Hively and R. Ruffini, **On the generalized ergosphere of the Kerr-Newman geometry**, *Phys. Lett. B* **50**, 270-272 (1974).
- [104] T. Damour and R. Ruffini, **Quantum Electrodynamical Effects in Kerr-Newmann Geometries**, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 7 (1975).
- [105] B. Carter, **Hamilton-Jacobi and Schrödinger Separable Solutions of Einstein's Equations**, *Commun. Math. Phys.* **10**, 280-310 (1968).
- [106] J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking, **The Four laws of black hole mechanics**, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [107] J.D. Bekenstein, **Black holes and the second law**, *Lett. Nuo. Cim.* **4**, 737 (1972).
- [108] J.D. Bekenstein, **Black holes and entropy**, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [109] J.D. Bekenstein, **Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics**, *Phys. Rev. D* **9**, 3292 (1974).
- [110] S.W. Hawking, **Particle Creation by Black Holes**, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [111] T. Padmanabhan, **Statistical Mechanics of Gravitating Systems**, *Phys. Rep.* **188**, 285–362 (1990).
- [112] Y.C. Ong, **Never judge a black hole by its area**, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015**, 3 (2015).
- [113] B. Carter, **Black Hole Equilibrium States**, in C. DeWitt and B. S. DeWitt (eds.): *Black Holes* (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [114] I. Racz and R.M.Wald, **Global extensions of spacetimes describing asymptotic final states of black holes**, *Class. Quantum Grav.* **13**, 539 (1996).
- [115] L. Smarr, **Mass Formula for Kerr Black Holes**, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973).
- [116] J.D. Bekenstein, **Bekenstein-Hawking entropy**, *Scholarpedia*, **3**(10):7375 (2008).
- [117] X.-Y. Wang and W.-B. Liu, **Information paradox in a Kerr-Newman black hole under generalized Hawking radiation**, *Nuclear Physics B* **943**, 114614 (2019).
- [118] R. Banerjee and D. Roychowdhury, **Critical phenomena in Born-Infeld AdS black holes**, *Phys. Rev. D* **85**, 044040 (2012).
- [119] S. Hawking, **Gravitationally collapsed objects of very low mass**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **152**, 75 (1971).
- [120] C. Heinicke and F.W. Hehl, **Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction**, *Int. J. Mod. Phys D* **24**, 153006 (2015).
- [121] T. Damour and R. Ruffini, **Black-hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism**, *Phys. Rev. D* **35**, 2 (1976).
- [122] C. Kiefer, **Quanteneigenschaften Schwarzer Löcher**, *Phys. Unserer Zeit* **28**, 22 (1997).

- [123] G. W. Gibbons, **Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes**, *Comm. Math. Phys.* **44**, 245-264 (1975).
- [124] Don N. Page, **Particle emission rates from a black hole. II. Massless particles from a rotating hole**, *Phys. Rev. D* **14**, 12 (1975).
- [125] R. M. Wald, **General Relativity**, *The University of Chicago Press* (Chicago and London, 1984).
- [126] I. T. Drummond and S. J. Hathrell, **QED vacuum polarization in a background gravitational field and its effect on the velocity of photons**, *Phys. Rev. D* **22**, 343 (1980).
- [127] S. Faraji, **Circular geodesics in a new generalization of q-metric**, *Universe* **8**, 195 (2022).
- [128] D. Amaro and S. Faraji, **Vacuum polarization effects in the background of a deformed compact object and implications for photon velocity**, *Phys. Rev. D* **111**, 045003 (2025).

A. El método de Cardano

Con el fin de presentar el método de Cardano para la obtención analítica de las raíces de un polinomio cúbico, usaremos como ejemplo aquél que resulta de estudiar la sombra del agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg, es decir, el polinomio (4.57),

$$r_c^3 - 3Mr_c^2 + \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] r_c + aM(a - \eta) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Comenzamos proponiendo el siguiente cambio de variable:

$$z = r_c - M \quad \Rightarrow \quad r_c = z + M. \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.1),

$$0 = (z + M)^3 - 3M(z + M)^2 + \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] (z + M) + aM(a - \eta),$$

y agrupando términos, el polinomio cúbico en z resulta

$$z^3 + p z + q = 0. \quad (\text{A.3})$$

Explícitamente está dado por

$$z^3 - 3 \left(M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] \right) z - 2M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Adicionalmente, si introducimos las cantidades u y v , mediante el cambio de variable $z = u + v$, el polinomio toma la forma

$$z^3 - 3uvz - (u^3 + v^3) = 0, \quad (\text{A.5})$$

en donde u y v se relacionan con nuestros parámetros de la siguiente manera:

$$uv = M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right], \quad (\text{A.6})$$

$$u^3 + v^3 = 2M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right). \quad (\text{A.7})$$

De la segunda ecuación, podemos obtener u^3 como función de v^3 . Sustituyéndola en el cubo de la primera ecuación,

$$\left[2M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) - v^3 \right] v^3 = \left\{ M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] \right\}^3,$$

la ecuación cuadrática para v^3 está dada por

$$(v^3)^2 - 2M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) (v^3) + \left\{ M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] \right\}^3 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Debido a la simetría entre u y v , podemos realizar un procedimiento análogo para obtener la ecuación cuadrática para u^3 . Las soluciones de ambas ecuaciones cuadráticas son

$$\begin{aligned} v^3 &= \mathcal{B}\mathcal{A}^{3/2} + \sqrt{\mathcal{A}^3(\mathcal{B}^2 - 1)}, \\ u^3 &= \mathcal{B}\mathcal{A}^{3/2} - \sqrt{\mathcal{A}^3(\mathcal{B}^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

con las cantidades $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dependiendo de nuestros parámetros de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{B} = M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) \mathcal{A}^{-3/2}. \quad (\text{A.11})$$

Las soluciones a la ecuación de tercer grado para z , son las combinaciones de las raíces-cúbicas de estas soluciones. Sin embargo, se deben considerar las raíces primitivas de la unidad. Esto es, las tres soluciones son

$$\begin{aligned} z_1 &= u + v, \\ z_2 &= ju + j^2v, \\ z_3 &= j^2u + jv, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

en donde

$$j = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad j^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}. \quad (\text{A.13})$$

En este método de Cardano, el tipo de soluciones que resulten depende del valor que tome el discriminante

$$\Delta_{\text{disc}} = 4\mathcal{A}^3 (\mathcal{B}^2 - 1), \quad (\text{A.14})$$

que corresponde a una relación entre nuestros parámetros, en este caso, entre los parámetros del agujero negro M , Q y a , y el parámetro de impacto η . Usualmente, buscamos soluciones reales y positivas de r , por lo que las soluciones complejas de z no son de mayor interés. Consideremos entonces los tres casos del determinante.

- El discriminante es cero ($\Delta_{\text{disc}} = 0$).

Esto ocurre, de la ecuación (A.14), cuando $\mathcal{A} = 0$ ó $\mathcal{B}^2 = 1$. Sin embargo, observamos que $\mathcal{A} = 0$ implica que todas las soluciones son nulas, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, sustituyendo las soluciones (A.9) en aquellas (A.12). Por lo tanto, regresando a nuestras variables originales, la solución con multiplicidad tres, en este caso, es $r_c = M$, y la sombra está en el interior del horizonte de eventos, por lo que no es una solución físicamente válida. Entonces el caso a considerar es $\mathcal{B}^2 = 1$, que en términos de los parámetros M , a y η resultan en la condición

$$M^2 \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right)^2 - \left(M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right] \right)^3 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Para este caso $\mathcal{B}^2 = 1$, las soluciones coinciden, $u = v$, y se obtiene

$$z_1 = 2u = 2\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}^{1/3}. \quad (\text{A.16})$$

De aquí podemos observar que la solución será real, siempre y cuando se cumpla

$$\mathcal{A} > 0, \quad \Rightarrow \quad M^2 > \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right]. \quad (\text{A.17})$$

De su definición en la ecuación (A.10)) y dada la condición del horizonte de eventos, $M^2 > a^2 + \tilde{Q}_c^2$, esto implica que de los dos valores $\mathcal{B} \pm 1$ que puede obtener, nos quedamos con la positiva, $\mathcal{B} = 1$. Así, regresando a las variables originales, la solución es

$$r_{c_1} = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} = M + 2\sqrt{M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right]}. \quad (\text{A.18})$$

Rápidamente observamos que cuando el agujero negro es estático ($a = 0$) y neutro ($Q = 0$), se reduce al caso de Schwarzschild $r_{c_1} = 3M$.

Se puede realizar un procedimiento análogo para las otras dos soluciones, en las cuales existe multiplicidad, $z_2 = z_3 = -u = -\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}^{1/3}$. Igualmente será real si $\mathcal{A} > 0 \Rightarrow \mathcal{B} = 1$, y por lo tanto se obtienen las soluciones

$$r_{c_2} = r_{c_3} = M - \sqrt{\mathcal{A}} = M - \sqrt{M^2 - \frac{1}{3} \left[a(a + \eta) + 2\tilde{Q}_c^2 \right]}. \quad (\text{A.19})$$

Éstas siempre serían menor a M , por lo que se encuentran dentro del horizonte de eventos. En especial, para Schwarzschild, coinciden con la singularidad esencial $r = 0$.

- Si el discriminante es positivo ($\Delta_{\text{disc}} > 0$), entonces las soluciones u y v son reales y z_1 es real, mientras que z_2 y z_3 son complejas.
- Si el discriminante es negativo ($\Delta_{\text{disc}} < 0$), entonces u y v son complejas, pero siempre habrá al menos una solución z_i real, pudiendo existir incluso el caso en que las tres soluciones sean reales.

Por otro lado, el polinomio cúbico en z (A.4) puede reescribirse en términos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, es decir,

$$z^3 - 3\mathcal{A}z - 2\mathcal{B}\mathcal{A}^{3/2} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Un cambio de variable más útil es aquél en el que introducimos la función coseno hiperbólico y hacemos uso de sus propiedades [75]:

$$z = 2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \beta. \quad (\text{A.21})$$

Sustituyéndola en la ecuación (A.20), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \beta\right)^3 - 3\mathcal{A} \left(2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \beta\right) - 2\mathcal{B}\mathcal{A}^{3/2} &= 0, \\ 2\mathcal{A}^{3/2} (4 \cosh^3 \beta - 3 \cosh \beta) &= 2\mathcal{A}^{3/2} \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Usando una identidad, $\cosh(3\beta) = 4 \cosh^3 \beta - 3 \cosh \beta$, el polinomio cúbico se reduce a

$$\cosh(3\beta) = \mathcal{B}. \quad (\text{A.22})$$

De la forma más general, se considerará que el ángulo β es un ángulo complejo, i.e.,

$$3\beta = \sigma + i\delta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{3}(\sigma + i\delta), \quad (\text{A.23})$$

en donde las cantidades $\sigma \geq 0$ y $\delta \geq 0$, son positivas y reales. De la definición del coseno hiperbólico,

$$\begin{aligned} \cosh(\sigma + i\delta) &= \frac{1}{2} \left(e^{(\sigma+i\delta)} + e^{-(\sigma+i\delta)} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left[e^\sigma (\cos \delta + i \sin \delta) + e^{-\sigma} (\cos \delta - i \sin \delta) \right], \\ &= \cosh \sigma \cos \delta + i \sinh \sigma \sin \delta. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Entonces, $\mathcal{B}$ se separa en una componente real y en una componente imaginaria, es decir,

$$\mathcal{B} = \cosh \sigma \cos \delta + i \sinh \sigma \sin \delta. \quad (\text{A.25})$$

De la relación (A.10), $\mathcal{B} = M \left(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2 \right) \mathcal{A}^{-3/2}$, si $\mathcal{A} > 0$ es positiva, entonces $\mathcal{B}$ es positiva y real. Si $\mathcal{A} < 0$ es negativa, $\mathcal{B}$ es imaginaria. Sólo nos interesaremos en los valores reales de la variable z , con el fin de obtener valores reales de r_c . En ambos casos, $\mathcal{A} > 0$ y $\mathcal{A} < 0$, de la definición (A.21), se requiere analizar cuándo $\cosh \beta$ es real.

1. $\mathcal{A} > 0 \Rightarrow \mathcal{B} > 0$ y real. Para tener un valor real de $\mathcal{B}$, la componente imaginaria en la ecuación (A.25), debe anularse. Esto ocurre para dos valores, i.e.,

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = \cos \delta \quad (\text{A.26})$$

$$\delta = n\pi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = (-1)^n \cosh \sigma. \quad (\text{A.27})$$

Es fácil observar que en el primer caso, (A.26), se tiene $\mathcal{B} \leq 1$, dado que $-1 \leq \cos \delta \leq 1$. Estamos interesados en dos posibilidades:

- $\mathcal{B} > 1$.

En este caso, la única opción para que se cumpla $\mathcal{B} > 1$ es el segundo caso, (A.27), dado que se tiene $\cosh \sigma \geq 1$. Adicionalmente, dado que $\mathcal{B} > 0$ es positiva, entonces n debe ser un número par, y la solución es

$$\delta = 2n\pi, \quad \sigma = \cosh^{-1} \mathcal{B}, \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2. \quad (\text{A.28})$$

En términos de las variables originales, usando los cambios de variable (A.23), (A.21) y (A.2), se obtiene

$$\beta = \frac{1}{3} \cosh^{-1} \mathcal{B} + \frac{2n\pi}{3} i, \quad (\text{A.29})$$

$$z = 2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \mathcal{B} + \frac{2n\pi}{3} i \right), \quad (\text{A.30})$$

$$r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \mathcal{B} \right). \quad (\text{A.31})$$

En la última ecuación, se fijó el valor $n = 0$, ya que de la ecuación (A.24), para que se anule la componente imaginaria, se debe satisfacer $\sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) = 0$. El valor $n = 0$ da la única solución real.

- $0 < \mathcal{B} < 1$.

Esta condición sólo es satisfecha por la ecuación (A.26), es decir, $\sigma = 0$ y $\delta = \cos^{-1} \mathcal{B}$. En términos de las variables originales, se tiene

$$\beta = \frac{i}{3} \cos^{-1} \mathcal{B}. \quad (\text{A.32})$$

Dado que corresponde a la solución a la cúbica, requerimos tener tres soluciones. El procedimiento correcto es considerar las siguientes dos fases de $2n\pi$, i.e.,

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} \right), \\ z_2 &= 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} + \frac{2\pi}{3} \right), \\ z_3 &= 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} + \frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

usando la ecuación (A.21) y la identidad $\cosh(i\gamma) = \cos(\gamma)$. Para el radio r_c de la esfera de fotones, para $z = z_1$ y usando el cambio de variable (A.2), la solución es

$$r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} \right). \quad (\text{A.33})$$

Adicionalmente, para $\mathcal{B} = 1$, se obtiene

$$z_1 = 2\sqrt{\mathcal{A}}, \quad (\text{A.34})$$

$$z_2 = z_3 = -\sqrt{\mathcal{A}}, \quad (\text{A.35})$$

dado que $\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -1/2$. Por lo tanto, la solución (A.33) también es válida para $\mathcal{B} = 1$.

2. $\mathcal{A} < 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ imaginaria

En este último caso, la componente real de la ecuación (A.25) debe anularse. Si reescribimos

$$\mathcal{B} \equiv -i|\mathcal{B}| = -i M(M^2 - a^2 - \tilde{Q}_c^2) |\mathcal{A}|^{-3/2}, \quad (\text{A.36})$$

con $\mathcal{A} = -|\mathcal{A}|$, entonces (A.25) resulta

$$-i|\mathcal{B}| = \cosh \sigma \cos \delta + i \sinh \sigma \sin \delta. \quad (\text{A.37})$$

La parte real se anula para los valores $\delta = (2n - 1)\pi/2$. Sin embargo, tomando en cuenta el signo negativo del lado izquierdo, sólo elegimos los valores para los cuales se tiene $\sin \delta = -1$. Por lo tanto, nos quedamos con las soluciones

$$\delta = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sinh^{-1} |\mathcal{B}|. \quad (\text{A.38})$$

En términos de las variables originales, via (A.23) y (A.21), obtenemos

$$z_1 = 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \cdot i \cosh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| + \frac{3\pi}{6} i \right), \quad (\text{A.39})$$

$$z_2 = 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \cdot i \cosh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| + \frac{7\pi}{6} i \right), \quad (\text{A.40})$$

$$z_3 = 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \cdot i \cosh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| + \frac{11\pi}{6} i \right), \quad (\text{A.41})$$

y usando la identidad (A.24),

$$\begin{aligned} z_j &= 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \cdot i [\cosh \omega \cos(\gamma_j) + i \sinh \omega \sin(\gamma_j)], \\ &= 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \cdot [-\sinh \omega \sin(\gamma_j) + i \cosh \omega \cos(\gamma_j)], \end{aligned}$$

con $\omega = \frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}|$, y $\gamma_j = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. De la relación (A.2), la solución real, que corresponde al valor $\gamma_1 = 3\pi/6$, resulta

$$r_c = M - 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \sinh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| \right). \quad (\text{A.42})$$

Como conclusión, las tres soluciones analíticas reales y positivas, del polinomio cúbico (A.1) para el radio r_c de la esfera de fotones, son

$$\begin{aligned} \mathcal{A} > 0, \mathcal{B} \leq 1 & : \quad r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \mathcal{B} \right), \\ \mathcal{A} > 0, \mathcal{B} > 1 & : \quad r_c = M + 2\sqrt{\mathcal{A}} \cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \mathcal{B} \right), \\ \mathcal{A} < 0 & : \quad r_c = M - 2\sqrt{|\mathcal{A}|} \sinh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} |\mathcal{B}| \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, (A.10), dependen de los parámetros que aparecen en nuestro polinomio. En este caso, (A.1), dependen de los parámetros del agujero negro (M , Q y a) y del parámetro de impacto η . Para otros polinomios cúbicos, los parámetros son distintos y los cambios de variable que deben realizarse serán diferentes. Sin embargo, el procedimiento es análogo y las soluciones serán similares, con sus funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ particulares.

B. Variables estereográficas complejas

La solución (3.100) para la parte angular de las ecuaciones geodésicas se obtuvo en el plano $\phi = 0$ y para un observador a lo largo del eje- z , en $\theta_0 = \pi$. Debido a la simetría esférica del problema, podemos generalizarla realizando una rotación hacia un punto inicial arbitrario $x_0^a = (t_0, u_0, \theta_0, \phi_0)$, en donde en general se tiene $\theta_0 \neq \pi$ y $\pi \neq 0$. Con la nueva solución, el movimiento ocurrirá en un nuevo plano, pero el ángulo $\Theta(u, u_0, u_p)$ se preservará [81]. Para esto, conviene representar las coordenadas angulares (θ, ϕ) en términos de las variables estereográficas complejas

$$\zeta = \cot \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad \bar{\zeta} = \cot \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (\text{B.1})$$

en donde $\bar{\zeta}$ denota al complejo conjugado de ζ . El punto inicial arbitrario en términos de estas variables es $x_0^a = (t_0, u_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0)$.

La solución restringida al plano $x-z$ es la ecuación (3.99). En términos de las variables estereográficas, ésta resulta

$$\zeta(u, u_0, u_p) = \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2} = \bar{\zeta}(u, u_0, u_p). \quad (\text{B.2})$$

Su transformación bajo una rotación $SU(2)$ está dada por

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \frac{a \cot \frac{\Theta}{2} + b}{c \cot \frac{\Theta}{2} + d}, \quad (\text{B.3})$$

en donde el apóstrofo denota la transformación, y con a, b, c y d los parámetros de Cayley-Klein [86]. Éstos pueden ser expresados en términos de los ángulos de Euler, α, β y γ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a &= \sin \frac{\alpha}{2} e^{i(\gamma+\beta)/2}, & b &= \cos \frac{\alpha}{2} e^{i(-\gamma+\beta)/2}, \\ c &= -\cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\gamma-\beta)/2}, & d &= \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\gamma+\beta)/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ahora, debemos determinar el valor de los ángulos de Euler. Para ello, recordamos que el punto inicial de la solución restringida al plano $\phi = 0$ correspondía a un valor de $\Theta = \pi$. Este punto inicial se transforma como

$$\zeta' = \frac{a \cot \frac{\pi}{2} + b}{c \cot \frac{\pi}{2} + d} = \frac{b}{d} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} e^{i(-\gamma+\beta)/2}}{\sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\gamma+\beta)/2}} = \cot \frac{\alpha}{2} e^{i\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Por otro lado, en el punto inicial arbitrario es $\zeta_0 = \cot(\theta_0/2) e^{i\phi_0}$. Para que éste coincida con la rotación del punto inicial restringido, se debe cumplir que $\zeta'(\Theta = \pi) = \zeta_0$, resultando en la identificación de los valores

$$\alpha = \theta_0, \quad \beta = \phi_0. \quad (\text{B.6})$$

La parte angular del punto inicial arbitrario, en términos de los ángulos de Euler, está dada por $(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = (\cot[\alpha/2] e^{i\beta}, \cot[\alpha/2] e^{-i\beta})$. De ésta, encontramos análogamente las siguientes relaciones:

$$\zeta_0 \bar{\zeta}_0 = \cot^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} = e^{2i\beta}, \quad \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} = e^{-2i\beta}. \quad (\text{B.7})$$

De las últimas dos encontramos directamente que

$$e^{i\beta/2} = \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/4}, \quad e^{-i\beta/2} = \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \right)^{1/4}. \quad (\text{B.8})$$

Asimismo, de la primera obtendremos otro par de expresiones, usando las siguientes relaciones trigonométricas: $\sin x = (1 + \cot^2 x)^{-1/2}$, y $\cos x = (1 + \tan^2 x)^{-1/2} = (\cot^2 x / [1 + \cot^2 x])^{1/2}$, siendo x un ángulo arbitrario. En nuestro caso, $x = \alpha/2$, resulta

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}}. \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las relaciones (B.8) y (B.9), en el conjunto de parámetros de Cayley-Klein (B.4), se obtiene

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/4} e^{i\gamma/2}, & b &= \sqrt{\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/4} e^{-i\gamma/2}, \\ c &= -\sqrt{\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \right)^{1/4} e^{i\gamma/2}, & d &= \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \right)^{1/4} e^{-i\gamma/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

El ángulo restante γ , da la orientación del plano en el que se mueve la geodésica. Actúa como un ángulo alrededor del nuevo eje de simetría, por lo que es el ángulo azimutal (3.76). Si el punto inicial está sobre el eje- z , se tiene $\gamma = \phi$.

Una vez encontrados los parámetros de Cayley-Klein en términos del punto inicial arbitrario, podemos encontrar el punto posterior ζ' sustituyéndolos en la ecuación (B.3), es decir,

$$\zeta' = \frac{\sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/4} e^{i\gamma/2} \cot \frac{\Theta}{2} + \sqrt{\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/4} e^{-i\gamma/2}}{-\sqrt{\frac{\zeta_0 \bar{\zeta}_0}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \right)^{1/4} e^{i\gamma/2} \cot \frac{\Theta}{2} + \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0 \bar{\zeta}_0}} \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \right)^{1/4} e^{-i\gamma/2}}. \quad (\text{B.11})$$

Factorizando términos y quitando la notación primada, la posición angular posterior en términos de la inicial $(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)$ está dada por

$$\zeta = \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/2} \left(\frac{e^{i\gamma/2} \cot \frac{\Theta}{2} + \sqrt{\zeta_0 \bar{\zeta}_0} e^{-i\gamma/2}}{e^{-i\gamma/2} - \sqrt{\zeta_0 \bar{\zeta}_0} e^{i\gamma/2} \cot \frac{\Theta}{2}} \right). \quad (\text{B.12})$$

Lo siguiente es reescribirla en términos de nuestras variables originales. Primero, pasaremos del punto inicial $(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)$ a la posición angular inicial (θ_0, ϕ_0) . Para ello, consideramos la ecuación (B.8), la igualdad $\sqrt{\zeta_0 \bar{\zeta}_0} = \cot(\alpha/2)$, y la identificación (B.6), obteniendo

$$\left(\frac{\zeta_0}{\bar{\zeta}_0} \right)^{1/2} = e^{i\phi_0}, \quad \sqrt{\zeta_0 \bar{\zeta}_0} = \cot \frac{\theta_0}{2}. \quad (\text{B.13})$$

Sustituyendo estas relaciones, la posición angular posterior $(\zeta, \bar{\zeta})$ en términos de la posición inicial (θ_0, ϕ_0) resulta

$$\zeta = e^{i\phi_0} \left(\frac{\cot \frac{\theta_0}{2} + e^{i\gamma} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}}{1 - e^{i\gamma} \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}} \right), \quad (\text{B.14})$$

y, análogamente, su complejo conjugado

$$\bar{\zeta} = e^{-i\phi_0} \left(\frac{\cot \frac{\theta_0}{2} + e^{-i\gamma} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}}{1 - e^{-i\gamma} \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta(u, u_0, u_p)}{2}} \right). \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, debemos regresar a nuestras variables originales para la posición angular final, i.e., (θ, ϕ) , mediante el cambio de variable (B.1). Primero obtendremos la ecuación para la coordenada angular θ . Observemos que se cumple, análogamente a (B.9), la relación

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\zeta \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}}. \quad (\text{B.16})$$

Usando la relación trigonométrica $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, aplicada a nuestro caso $2x = \theta$, y despejando, se obtiene

$$\cos \theta = \frac{\zeta \bar{\zeta} - 1}{\zeta \bar{\zeta} + 1}. \quad (\text{B.17})$$

Lo siguiente es escribir explícitamente el producto $\zeta\bar{\zeta}$, de sus valores (B.14) y (B.15). El cálculo es extenso, por lo que sólo presentaremos algunos pasos intermedios.

Usando la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, se tiene la identidad $e^{i\gamma} + e^{-i\gamma} = 2 \cos \gamma$. Sustituyendo, el producto se reduce a

$$\zeta\bar{\zeta} = \frac{\cot^2 \frac{\theta_0}{2} + 2 \cos \gamma \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta}{2} + \cot^2 \frac{\Theta}{2}}{1 - 2 \cos \gamma \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta}{2} + \cot^2 \frac{\theta_0}{2} \cot^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (\text{B.18})$$

Ahora, de la ecuación (B.17), observamos que el término que nos interesa calcular es $\zeta\bar{\zeta} \pm 1$. Comencemos con el signo positivo. Llamando D_θ al denominador del lado derecho de (B.18), se puede verificar que se cumple

$$D_\theta(\zeta\bar{\zeta} + 1) = \left(1 + \cot^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \left(1 + \cot^2 \frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \frac{\Theta}{2}}, \quad (\text{B.19})$$

en donde se ha usado la identidad trigonométrica $(1 + \cot^2 x) = 1/\sin^2 x$. Análogamente, para el signo negativo se cumple

$$\begin{aligned} -D_\theta(\zeta\bar{\zeta} - 1) &= \left(1 - \cot^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \left(1 - \cot^2 \frac{\Theta}{2}\right) - 4 \cos \gamma \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta}{2}, \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \frac{\Theta}{2}} \left[(-\cos \theta_0)(-\cos \Theta) - 4 \cos \gamma \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} \right\} \left\{ \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Aquí se han considerado las relaciones trigonométricas: $\cot x = \cos x / \sin x$, $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, y $(1 - \cot^2 x) = -\cos 2x / \sin^2 x$. Podemos identificar que el término afuera de los corchetes es justamente $D_\theta(\zeta\bar{\zeta} + 1)$, de la ecuación (B.19). Pasándolo al lado izquierdo de la igualdad, tenemos que la coordenada angular θ (B.17), se puede reescribir como

$$\cos \theta = -\cos \theta_0 \cos \Theta + \sin \theta_0 \sin \Theta \cos \gamma. \quad (\text{B.21})$$

Se ha usado la identidad $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$ en los términos entre llaves. La ecuación (B.21) está escrita en términos de las posiciones angulares iniciales (θ_0, ϕ_0) , así como de las direcciones angulares de la imagen (ψ, γ) , vía $\Theta(u, u_0, \psi)$.

Realizaremos un procedimiento análogo para encontrar la ecuación para la coordenada angular ϕ . Para ello, partimos de la relación

$$i \tan \phi = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{\zeta + \bar{\zeta}}. \quad (\text{B.22})$$

Igualmente, calculamos tanto el numerador como el denominador, sumando las expresiones explícitas (B.14) y (B.15), es decir,

$$\zeta \pm \bar{\zeta} = e^{i\phi_0} \left(\frac{\cot \frac{\theta_0}{2} + e^{i\gamma} \cot \frac{\Theta}{2}}{1 - e^{i\gamma} \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta}{2}} \right) \pm e^{-i\phi_0} \left(\frac{\cot \frac{\theta_0}{2} + e^{-i\gamma} \cot \frac{\Theta}{2}}{1 - e^{-i\gamma} \cot \frac{\theta_0}{2} \cot \frac{\Theta}{2}} \right), \quad (\text{B.23})$$

Factorizando el común divisor, el cual vamos a llamar D_ϕ , se puede verificar que se cumple

$$\begin{aligned} D_\phi(\zeta \pm \bar{\zeta}) &= \left(e^{i\phi_0} \pm e^{-i\phi_0} \right) \left(1 - \cot^2 \frac{\Theta}{2} \right) \cot \frac{\theta_0}{2} + \\ &+ \left\{ \left(e^{i\phi_0} e^{i\gamma} \pm e^{-i\phi_0} e^{-i\gamma} \right) - \left(e^{i\phi_0} e^{-i\gamma} \pm e^{-i\phi_0} e^{i\gamma} \right) \cot^2 \frac{\theta_0}{2} \right\} \cot \frac{\Theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En el primer término podemos usar las identidades

$$e^{i\phi_0} + e^{-i\phi_0} = 2 \cos \phi_0, \quad e^{i\phi_0} - e^{-i\phi_0} = 2i \sin \phi_0, \quad (\text{B.25})$$

mientras que para los términos entre corchetes, y usando una vez más la fórmula de Euler, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{i\phi_0} e^{i\gamma} + e^{-i\phi_0} e^{-i\gamma} &= 2 \cos \phi_0 \cos \gamma - 2 \sin \phi_0 \sin \gamma, \\ e^{i\phi_0} e^{i\gamma} - e^{-i\phi_0} e^{-i\gamma} &= 2i \cos \phi_0 \sin \gamma + 2i \sin \phi_0 \cos \gamma, \\ e^{i\phi_0} e^{-i\gamma} + e^{-i\phi_0} e^{i\gamma} &= 2 \cos \phi_0 \cos \gamma + 2 \sin \phi_0 \sin \gamma, \\ e^{-i\phi_0} e^{i\gamma} - e^{i\phi_0} e^{-i\gamma} &= -2i \cos \phi_0 \sin \gamma + 2i \sin \phi_0 \cos \gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Analizaremos cada caso por separado. Primero, sustituiremos en (B.24), las relaciones (B.25) y (B.26) que corresponden al signo positivo. Agrupando términos y usando las identidades trigonométricas $(1 - \cot^2 x) = -\cos 2x / \sin^2 x$, y $(1 + \cot^2 x) = 1 / \sin^2 x$, se obtiene

$$D_\phi(\zeta + \bar{\zeta}) = \frac{2 \cos \Theta \cos \phi_0 \cot \frac{\theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} - \frac{2 \tilde{L}_1 \cot \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}} = \frac{-2 \left[\cos \Theta \cos \phi_0 \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \tilde{L}_1 \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \right]}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}. \quad (\text{B.27})$$

con

$$\tilde{L}_1 = (\cos \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0 + \sin \phi_0 \sin \gamma). \quad (\text{B.28})$$

Finalmente, usando la relación $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$, en ambos términos dentro de los corchetes, y factorizando $\cos \Theta$, (B.27) se reduce a

$$D_\phi(\zeta + \bar{\zeta}) = -\frac{\cos \Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \left[\cos \phi_0 \sin \theta_0 + \tilde{L}_1 \tan \Theta \right]. \quad (\text{B.29})$$

Por otro lado, para el signo negativo de (B.24), sustituyendo las relaciones (B.25) y (B.26) correspondientes, se tiene

$$D_\phi(\zeta - \bar{\zeta}) = -\frac{2i \cos \Theta \sin \phi_0 \cot \frac{\theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} + \frac{2i \tilde{L}_2 \cot \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}} = \frac{-2i \left[\cos \Theta \sin \phi_0 \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} - \tilde{L}_2 \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \right]}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}, \quad (\text{B.30})$$

con

$$\tilde{L}_2 = (\cos \phi_0 \sin \gamma - \sin \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0). \quad (\text{B.31})$$

De esta manera, aplicando una vez más las relaciones trigonométricas correspondientes, la ecuación (B.30) se reduce a

$$D_\phi(\zeta - \bar{\zeta}) = -\frac{i \cos \Theta}{\sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \left[\sin \phi_0 \sin \theta_0 - \tilde{L}_2 \tan \Theta \right]. \quad (\text{B.32})$$

Ya hemos calculado tanto el numerador como el denominador de la ecuación (B.22), las expresiones (B.32) y (B.29) respectivamente. Dividiéndolas, podemos reescribir la coordenada angular ϕ como

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi_0 \sin \theta_0 - \tilde{L}_2 \tan \Theta}{\cos \phi_0 \sin \theta_0 + \tilde{L}_1 \tan \Theta}. \quad (\text{B.33})$$

Para finalizar, sustituiremos las cantidades $\tilde{L}_1$ (B.28) y $\tilde{L}_2$ (B.31) y la agruparemos ambas ecuaciones (B.21) y (B.33). Éstas son:

$$\cos \theta = -\cos \theta_0 \cos \Theta + \sin \theta_0 \sin \Theta \cos \gamma, \quad (\text{B.34})$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi_0 \sin \theta_0 - \tan \Theta (\cos \phi_0 \sin \gamma - \sin \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}{\cos \phi_0 \sin \theta_0 + \tan \Theta (\sin \phi_0 \sin \gamma + \cos \phi_0 \cos \gamma \cos \theta_0)}, \quad (\text{B.35})$$

en donde $\Theta = \Theta(u, u_0, \psi)$. Ambas ecuaciones dependen de la posición inicial (u_0, θ_0, ϕ_0) , la cual en el marco del *backwards ray-tracing* corresponde a la posición del observador. También dependen de los ángulos de la imagen (ψ, γ) . Por lo tanto, si conocemos la posición del observador y los ángulos de la imagen, podemos conocer los límites de la integral (3.100), y consecuentemente la posición angular real (θ, ϕ) de la fuente. Entonces, estas ecuaciones se pueden identificar como la ecuación de la lente exacta, la cual ha sido generalizada para una posición arbitraria del observador.

C. El desarrollo de Eddington-Robertson

En esta sección presentamos el método empleado para la integración aproximada del ángulo de deflexión del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg para el caso de lente delgada, i.e., la integral (3.109). Éste es conocido como el desarrollo de Eddington-Robertson [87], y el cálculo es extenso, por lo que sólo mostraremos aquellos pasos que sirvan de guía. El ángulo de deflexión para lente delgada se define como $\hat{\sigma} \equiv 2|\phi(r_p) - \phi(\infty)| - \pi$. La integral a desarrollar, de (3.109), es

$$I(u_p) \equiv \phi(u_p) - \phi(u_0 = 0) = \int_{u_0=0}^{u_p} \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] du'}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] u'^2 f(u')}} , \quad (\text{C.1})$$

en donde $f(u') = 1 - 2Mu + u'^2 \tilde{Q}^2$. Recordemos que el apóstrofe denota a la variable de integración. Con el fin de desarrollar esta integral para campo débil, en donde $r_p \gg M$, usaremos la relación (3.97), $\frac{1}{c^2} = \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p^2 f(u_p)$, resultando

$$I(u_p) = - \int_{u_p}^0 \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] du'}{\sqrt{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(u_{\text{PRN}})\right] u_p^2 f(u_p) - \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] u'^2 f(u')}} , \quad (\text{C.2})$$

en donde hemos intercambiado los límites de integración. Primero, regresaremos a la variable radial $r = 1/u$, obteniendo, a primer orden el α ,

$$I(r_p) \approx \int_{r_p}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] f(r)^{-1/2}}{\sqrt{\frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}})\right] r_p^2 f(r_p)}{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] r_p^2 f(r)} - 1}} \frac{dr}{r} , \quad (\text{C.3})$$

con las funciones métricas $f(r) = 1 - 2M/r + \tilde{Q}^2/r^2$, $f(r_p) = 1 - 2M/r_p + \tilde{Q}_p^2/r_p^2$, y la carga apantallada $\tilde{Q}_p$ (3.6) evaluada en el punto de máximo acercamiento de Reissner-Nordström r_{PRN} , similar a (3.85). Dividiendo ambas funciones, hasta segundo orden en M y Q , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(r_p)}{f(r)} &= \left(1 - \frac{2M}{r_p} + \frac{\tilde{Q}_p^2}{r_p^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\tilde{Q}^2}{r^2}\right)^{-1} , \\ &\approx 1 + 2M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p}\right) + M^2 \left\{ 4 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_p r}\right] + \left[\frac{(\tilde{Q}_p/M)^2}{r_p^2} - \frac{(\tilde{Q}/M)^2}{r^2} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Reescribiendo el término entre corchetes que involucra a las cargas apantalladas con los apantallamientos explícitos y factorizando $(Q/M)^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(r_p)}{f(r)} &\approx 1 + 2M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p}\right) + M^2 \left\{ 4 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_p r}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(Q/M)^2}{r_p^2 r^2} \left([r^2 - r_p^2] - \frac{\alpha}{45\pi} [r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]\right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Sustituiremos este desarrollo en el argumento completo de la raíz, al cual llamaremos por el momento

$$K \equiv \frac{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}})\right] r_p^2 f(r_p)}{\left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2\right] r_p^2 f(r)} - 1 \approx \left\{ \frac{r_p^2 f(r_p)}{r_p^2 f(r)} - 1 \right\} + \frac{20\alpha}{225\pi} [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2] \frac{r_p^2 f(r_p)}{r_p^2 f(r)} . \quad (\text{C.6})$$

Sea K_1 el término entre llaves y K_2 el que contiene el término no-lineal, de tal forma que $K = K_1 + K_2$. Analizaremos ambos términos y sustituiremos en ellos el desarrollo de $f(r_p)/f(r)$. El primero se puede escribir como

$$K_1 \equiv \frac{r^2}{r_p^2} \frac{f(r_p)}{f(r)} - 1 \approx \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] \left\{ 1 + 2M \frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) + M^2 \left[\frac{4 \frac{r^2}{r_p^2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_p r} \right]}{r^2/r_p^2 - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{Q}{M} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{r_p^4} [r^2 - r_p^2]}{r^2/r_p^2 - 1} - \frac{\alpha}{45\pi} \frac{\frac{1}{r_p^4} [r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]}{r^2/r_p^2 - 1} \right) \right] + \dots \right\}. \quad (\text{C.7})$$

Ahora, calcularemos cada término por separado. Sean K_{11} el término que multiplica a $2M$ y K_{12} aquél que multiplica a M^2 , de tal forma que $K_1 = \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] \{ 1 + 2MK_{11} + M^2 K_{12} \}$. El primero es

$$K_{11} \equiv \frac{\frac{r^2}{r_p^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right)}{\frac{1}{r_p^2} (r^2 - r_p^2)} = \frac{\frac{r}{r_p} (r_p - r)}{(r - r_p)(r + r_p)} = -\frac{r}{r_p(r + r_p)},$$

mientras que el segundo

$$K_{12} \equiv \frac{4 \frac{r^2}{r_p^2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_p r} \right]}{\frac{1}{r_p^2} (r^2 - r_p^2)} + \left(\frac{Q}{M} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{r_p^4} [r^2 - r_p^2]}{\frac{1}{r_p^2} (r^2 - r_p^2)} - \frac{\alpha}{45\pi} \frac{\frac{1}{r_p^4} [r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]}{\frac{1}{r_p^2} (r^2 - r_p^2)} \right).$$

Sustituyendo ambos, K_1 resulta

$$K_1 = \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] \left\{ 1 - 2M \frac{r}{r_p(r + r_p)} + M^2 \left(-\frac{4}{r_p(r + r_p)} + \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} - \frac{\alpha}{45\pi} \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} \frac{[r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]}{(r^2 - r_p^2)} \right) \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Para K_2 realizamos un procedimiento análogo. Sea

$$K_2 \equiv \frac{20\alpha}{225\pi} [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2] \frac{r^2}{r_p^2} \frac{f(r_p)}{f(r)}, \quad (\text{C.9})$$

nombraremos por el momento $[\Delta\mathcal{E}] \equiv \frac{20\alpha}{225\pi} [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2]$. De tal forma que $K_2 = [\Delta\mathcal{E}] \frac{r^2}{r_p^2} \frac{f(r_p)}{f(r)}$. Entonces, se tiene

$$\frac{K_2}{[\Delta\mathcal{E}]} \approx \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] \left\{ \frac{r^2/r_p^2}{(r^2/r_p^2 - 1)} + 2M \frac{r^2/r_p^2}{(r^2/r_p^2 - 1)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) + M^2 \frac{r^2/r_p^2}{(r^2/r_p^2 - 1)} \left[4 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_p r} \right) + \frac{(Q/M)^2}{r_p^2 r^2} \left([r^2 - r_p^2] - \frac{\alpha}{225\pi} [r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2] \right) \right] + \dots \right\}.$$

Analizaremos los términos entre llaves. El primero, el cual corresponde al orden cero en M , sería $K_{20} \equiv \frac{r^2/r_p^2}{(r^2/r_p^2 - 1)} = \frac{r^2}{(r^2 - r_p^2)}$. El segundo K_{21} , el cual acompaña a $2M$, es equivalente al obtenido anteriormente $K_{21} = K_{11} = \frac{-r}{r_p(r + r_p)}$. Lo mismo ocurre para el tercer término, el cual acompaña a M^2 , $K_{22} = K_{12}$. Por lo tanto, despejando se tiene que

$$K_2 = \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] [\Delta\mathcal{E}] \left[\frac{r^2}{(r^2 - r_p^2)} + 2MK_{11} + M^2 K_{12} \right]. \quad (\text{C.10})$$

Por su parte, sabiendo ya las expresiones exactas de cada componente, sustituimos en $K = K_1 + K_2$ (C.6), el cual, como se puede verificar, se reduce a

$$K \approx \left[\frac{r^2}{r_p^2} - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{\Delta \mathcal{E} r^2}{(r^2 - r_p^2)} - 2M \frac{[1 + \Delta \mathcal{E}] r}{r_p (r + r_p)} + M^2 [1 + \Delta \mathcal{E}] K_{12} \right\}, \quad (\text{C.11})$$

con

$$\Delta \mathcal{E} \equiv \frac{20\alpha}{225\pi} [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2], \quad (\text{C.12})$$

$$K_{12} = -\frac{4}{r_p (r + r_p)} + \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} - \frac{\alpha}{45\pi} \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} \frac{[r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]}{(r^2 - r_p^2)}. \quad (\text{C.13})$$

Definamos al término entre llaves de la ecuación (C.11) como una función $b(r, r_p)$, tal que se cumple $K^{-1/2} = b^{-1/2} / [r^2/r_p^2 - 1]^{1/2}$. Es decir, definimos

$$b \equiv 1 + \frac{\Delta \mathcal{E} r^2}{(r^2 - r_p^2)} - 2M \frac{[1 + \Delta \mathcal{E}] r}{r_p (r + r_p)} + M^2 [1 + \Delta \mathcal{E}] K_{12}, \quad (\text{C.14})$$

de tal forma que la integral (C.3) se reescribe como

$$I(r_p) = \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] f(r)^{-1/2} b(r, r_p)^{-1/2} \frac{dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}}. \quad (\text{C.15})$$

Desarrollaremos tanto a $f^{-1/2}$, como a $b^{-1/2}$. Se puede verificar que éstos se desarrollan de la siguiente manera:

$$f^{-1/2} \approx 1 + \frac{M}{r} - \frac{M^2}{2r^2} [(\tilde{Q}/M)^2 - 3], \quad (\text{C.16})$$

$$b^{-1/2} \approx 1 - \frac{\Delta \mathcal{E} r^2}{2(r^2 - r_p^2)} + M \left[\frac{[1 + \Delta \mathcal{E}] r}{r_p (r + r_p)} - \frac{3\Delta \mathcal{E} r^3}{2r_p (r + r_p) (r^2 - r_p^2)} \right] + \frac{M^2}{2} \left[-[1 + \Delta \mathcal{E}] K_{12} + \frac{3[1 + 2\Delta \mathcal{E}] r^2}{r_p^2 (r + r_p)^2} + \frac{3\Delta \mathcal{E} r^2 K_{12}}{2(r^2 - r_p^2)} \right]. \quad (\text{C.17})$$

Se usó el hecho de que la cantidad $\Delta \mathcal{E}$ depende linealmente de α , por lo que $(\Delta \mathcal{E})^2$ es de orden cuadrático en α , y lo consideramos despreciable.

El siguiente paso es desarrollar el producto de ambos, al cual llamaremos $I_d \equiv b^{-1/2} f^{-1/2}$, a orden lineal en α y a orden cuadrático en M . Esto es, de las ecuaciones (C.16) y (C.17), agrupando términos como coeficientes de potencias de M , se tiene

$$I_d \equiv f^{-1/2} b^{-1/2} = I_{d_0} + I_{d_1} M + I_{d_2} \frac{M^2}{2}, \quad (\text{C.18})$$

con

$$I_{d_0} \equiv 1 - \frac{\Delta \mathcal{E} r^2}{2(r^2 - r_p^2)}, \quad (\text{C.19})$$

$$I_{d_1} \equiv \frac{r}{r_p (r + r_p)} + \frac{1}{r} + \Delta \mathcal{E} \left[\frac{r}{r_p (r + r_p)} - \frac{3r^3}{2r_p (r + r_p) (r^2 - r_p^2)} - \frac{r}{2(r^2 - r_p^2)} \right]. \quad (\text{C.20})$$

Mientras que para I_{d_2} tenemos que sustituir explícitamente K_{12} (C.13), debido a que depende de la variable de integración r . Tras un cálculo extenso el término que multiplica a $M^2/2$ se puede reescribir

como

$$\begin{aligned}
I_{d_2} = & \frac{6}{r_p(r+r_p)} + \frac{3r^2}{r_p^2(r+r_p)^2} + \frac{3}{r^2} - \left(\frac{Q}{M}\right)^2 \left(\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r^2}\right) + \\
& + \frac{\alpha}{225\pi} \left\{ 60 [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2] \left[\frac{2}{r_p(r+r_p)} + \frac{2r^2}{r_p^2(r+r_p)^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3r^2}{r_p(r+r_p)(r^2-r_p^2)} - \frac{1}{2(r^2-r_p^2)} \right] + \right. \\
& \quad + \left(\frac{Q}{M}\right)^2 \left(-\frac{20 [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2]}{r_p^2} + \frac{30r^2 [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2]}{r_p^2(r^2-r_p^2)} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{10 [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2]}{(r^2-r_p^2)} + \frac{[r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2]}{r_p^2(r^2-r_p^2)} + \frac{D_Q^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (\text{C.21})
\end{aligned}$$

Para esto, se usó la aproximación $(\tilde{Q}/M)^2 \Delta \mathcal{E} \approx (Q/M)^2 \Delta \mathcal{E}$, ya que $\Delta \mathcal{E}$ es de orden lineal en α . Además, se agruparon en los términos que involucran a α como correcciones al caso de Reissner-Nordström.

Con la forma de la ecuación (C.18), la integral (C.15) se aproxima, a segundo orden en M , de la siguiente manera:

$$I(r_p) \approx \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(I_{d_0} + I_{d_1} M + I_{d_2} \frac{M^2}{2} \right) \frac{dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}}. \quad (\text{C.22})$$

Ahora ya podemos integrar cada término que compone esta integral. Comenzamos con el término de orden cero, usando la ecuación (C.19), la cual consta de dos términos. Llamemos I_{01} a la integral que resulta del primero,

$$I_{01} = \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = \left\{ \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \arctan \left(\sqrt{(r/r_p)^2 - 1} \right) \right\}_{r_p}^{\infty}.$$

Es decir,

$$I_{01} = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{C.23})$$

Hemos integrado considerando el campo eléctrico D_Q constante, siguiendo la interpretación de QED. A su vez, lo hemos evaluado en los límites de integración. Por ejemplo, en $r \rightarrow \infty$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D_Q^2(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q^2}{E_c^2 r^4} = 0,$$

es decir, un fotón en infinito, no siente el efecto de la polarización del vacío causada por el campo eléctrico del agujero negro cargado. Por su parte, $D_Q^2(r_p) = \frac{Q^2}{E_c^2 r_p^4}$, ya que el punto de máximo acercamiento es el lugar en el que las nubes de cargas virtuales afectan más al fotón. En esta integral, al evaluar en r_p , existe una función, $\arctan(0) = 0$, que anula ese término.

De manera análoga, la integral I_{02} asociada al segundo término de (C.19) que contiene a $\Delta \mathcal{E}$ (C.12),

resulta

$$\begin{aligned}
I_{02} &= -\frac{20\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)] r^2}{2r_p^2 [(r/r_p)^2 - 1]} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)] dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}}, \\
&= \frac{10\alpha}{225\pi} \left\{ \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{\sqrt{(r/r_p)^2 - 1}} \right\}_{r_p}^{\infty}, \\
&= \frac{10\alpha}{225\pi} \left\{ 0 - \lim_{r \rightarrow r_p} \frac{[\frac{Q^2}{E_c^2 r_{\text{PRN}}^4} - \frac{Q^2}{E_c^2 r^4}]}{\sqrt{(r/r_p)^2 - 1}} \right\}.
\end{aligned}$$

Existirán algunos términos como éste, el cual diverge si no lo analizamos con cuidado. En el *thin-lens* de campo débil, el punto de máximo acercamiento $r_p \gg M$, por lo que, dado que Euler-Heisenberg es asintóticamente Reissner-Nordström, supondremos que $r_p \approx r_{\text{PRN}}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
I_{02} &\approx \frac{-10\alpha}{225\pi} \frac{Q^2}{E_c^2 r_p^4} \lim_{r \rightarrow r_p} \left(\frac{[1 - (r_p/r)^4]}{\sqrt{(r/r_p)^2 - 1}} \right) = \frac{-10\alpha}{225\pi} \frac{Q^2}{E_c^2 r_p^4} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{[1 - x^{-4}]}{\sqrt{x^2 - 1}} \right), \\
&\doteq \frac{-10\alpha}{225\pi} \frac{Q^2}{E_c^2 r_p^4} \lim_{x \rightarrow 1} \left((4x^{-5}) \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\frac{1}{2}(2x)} \right).
\end{aligned}$$

Hemos definido una variable adimensional $x \equiv r/r_p$ con el fin de usar la regla de L'Hopital en el último paso. Su uso está denotado por la igualdad $\doteq$. Por lo tanto, realizando el límite, se obtiene

$$I_{02} = 0. \quad (\text{C.24})$$

El término de orden cero en M es la suma de las ecuaciones (C.23) y (C.24), i.e.,

$$I_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{C.25})$$

Se realizó un procedimiento análogo al presentado para el término de orden cero en M . Éste involucra la integración mediante el uso del programa *Wolfram-Mathematica* y un posterior límite en caso de divergencia. En algunos casos, fue necesario aplicar la regla de L'Hopital para efectuar el límite. A continuación, se presentan directamente los resultados de cada integral realizada. El término de orden lineal en M consta, a partir de la ecuación (C.20), de cinco términos. Se obtuvieron los resultados:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{r}{r_p (r + r_p)} \frac{dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = \frac{1}{r_p}, \\
I_{12} &= \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{(1/r) dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = \frac{1}{r_p}, \\
I_{13} &= \frac{20\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)] r}{r_p (r + r_p)} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)] dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = \frac{2}{r_p} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\
I_{14} &= -\frac{60\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)] r^3}{2r_p (r + r_p) (r^2 - r_p^2)} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)] dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = -\frac{1}{r_p} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\
I_{15} &= -\frac{20\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)] r}{2 (r^2 - r_p^2)} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)] dr}{r [(r/r_p)^2 - 1]^{1/2}} = \frac{1}{r_p} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right].
\end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

La suma de estas ecuaciones nos da el término de primer orden en M ,

$$I_1 = \frac{2}{r_p} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right]. \quad (\text{C.27})$$

Realizamos el mismo procedimiento para los términos de segundo orden en M , mediante las ecuaciones (C.21) y (C.22). Los primeros tres términos corresponden a Schwarzschild:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{6}{r_p(r+r_p)} \frac{dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} = \frac{3\pi}{r_p^2} - \frac{6}{r_p^2}, \\ I_{22} &= \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{3r^2}{r_p^2[r+r_p]^2} \frac{dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} = \frac{2}{r_p^2}, \\ I_{23} &= \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \frac{3}{r^2} \frac{dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} = \frac{3\pi}{4r_p^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

El cuarto y el quinto términos corresponden a Reissner-Nordström:

$$\begin{aligned} I_{24} &= - \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \left(\frac{Q}{M} \right)^2 \frac{1}{r_p^2} \frac{dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} = - \frac{(Q/M)^2 \pi}{2r_p^2}, \\ I_{25} &= - \int_{r_p}^{\infty} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r) \right] \left(\frac{Q}{M} \right)^2 \frac{1}{r^2} \frac{dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} = - \frac{(Q/M)^2 \pi}{4r_p^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Los restantes son las correcciones no-lineales de Euler-Heisenberg, provenientes tanto del efecto de apantallamiento de la carga, como de la métrica efectiva. De éstas, cuatro no involucran directamente a la carga Q del agujero negro, sino que por medio del campo eléctrico D_Q , i.e.,

$$\begin{aligned} I_{26} &= \frac{120\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{r_p[r+r_p]} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)]}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} dr, \\ &= \frac{6\pi}{r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right] - \frac{12}{r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\ I_{27} &= \frac{120\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{r_p^2[r+r_p]^2} \frac{r^2}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)]}{dr} = \frac{8}{r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\ I_{28} &= - \frac{180\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{r_p[r+r_p][r^2 - r_p^2]} \frac{r^2}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)]}{dr} = - \frac{6}{r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\ I_{29} &= - \frac{30\alpha}{225\pi} \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{[r^2 - r_p^2]} \frac{[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)]}{r \left[(r/r_p)^2 - 1 \right]^{1/2}} dr = \frac{3\pi}{2r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Finalmente, las correcciones de Euler-Heisenberg que involucran directamente a la carga Q del agujero

negro son:

$$\begin{aligned}
I_{210} &= -\frac{20\alpha}{225\pi} \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} \int_{r_p}^{\infty} [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)] \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)\right] dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1\right]^{1/2}}, \\
&= -\frac{(Q/M)^2 \pi}{r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\
I_{211} &= \frac{30\alpha}{225\pi} \frac{(Q/M)^2}{r_p^2} \int_{r_p}^{\infty} \frac{r^2 [D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{(r^2 - r_p^2)} \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)\right] dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1\right]^{1/2}} = 0, \\
I_{212} &= \frac{10\alpha}{225\pi} (Q/M)^2 \int_{r_p}^{\infty} \frac{[D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - D_Q^2(r)]}{(r^2 - r_p^2)} \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)\right] dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1\right]^{1/2}}, \\
&= -\frac{(Q/M)^2 \pi}{2r_p^2} \left[\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \right], \\
I_{213} &= \frac{\alpha}{225\pi} (Q/M)^2 \int_{r_p}^{\infty} \frac{[r^2 D_Q^2(r_{\text{PRN}}) - r_p^2 D_Q^2(r)]}{r_p^2 (r^2 - r_p^2)} \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)\right] dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1\right]^{1/2}} = 0, \\
I_{214} &= \frac{\alpha}{225\pi} (Q/M)^2 \int_{r_p}^{\infty} \frac{D_Q^2(r)}{r^2} \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r)\right] dr}{r \left[(r/r_p)^2 - 1\right]^{1/2}} = 0.
\end{aligned} \tag{C.31}$$

El término completo que multiplicará a $M^2/2$ corresponde a la suma de las ecuaciones (C.28)-(C.31). Esto es, la suma $I_2 \equiv \sum_{j=1}^{14} I_{2j}$, resulta

$$I_2 = \frac{4}{r_p^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 1 \right) - \frac{3(Q/M)^2 \pi}{4r_p^2} + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \left\{ \frac{10}{r_p^2} \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \frac{3(Q/M)^2 \pi}{2r_p^2} \right\}. \tag{C.32}$$

Para terminar, la integral completa se calcula de sumar cada contribución de las integrales anteriores. Usando las ecuaciones (C.25), (C.27) y (C.32), y agrupando términos los términos que corresponden a las correcciones no-lineales, la aproximación de la integral (C.22) está dada por:

$$\begin{aligned}
I(r_p) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{r_p} + \frac{2M^2}{r_p^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 1 \right) - \frac{3Q^2\pi}{8r_p^2} + \\
&\quad + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \left\{ \frac{2M}{r_p} + \frac{5M^2}{r_p^2} \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \frac{3Q^2\pi}{4r_p^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

De esta manera, se obtiene el desarrollo de Eddington-Robertson del ángulo de deflexión, definido en términos (C.33) como $\hat{\sigma} \equiv |2I(r_p)| - \pi$, para la métrica del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \frac{4M}{r_p} + \frac{4M^2}{r_p^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{4r_p^2} + \\
&\quad + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2(r_{\text{PRN}}) \left[\frac{4M}{r_p} + \frac{10M^2}{r_p^2} \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) - \frac{3\pi Q^2}{2r_p^2} \right].
\end{aligned} \tag{C.34}$$

D. La ecuación de Hamilton-Jacobi

En esta sección presentamos el método para obtener las ecuaciones de movimiento de partículas de prueba en el espacio-tiempo de agujero negro rotante de Einstein-Euler-Heisenberg. Usamos como ejemplo el caso de los fotones, y resaltamos que este método fue empleado en el marco de la interpretación de QED, en donde los términos de Euler-Heisenberg son considerados cuasi-constantes. Para las partículas de prueba cargadas, el método es análogo y, tras la definición de la carga de prueba apantallada, es muy similar al caso del agujero negro de Kerr-Newman.

Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento para los fotones, partimos de la ecuación de Hamilton-Jacobi en términos de la pseudo-métrica efectiva de Plebański (2.22), i.e.,

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\nu}, \quad (\text{D.1})$$

en donde $\mathcal{S}$ es la función de Hamilton. Los fotones no-lineales se propagan en geodésicas nulas de $\gamma^{\mu\nu}$, lo cual en el caso de Einstein-Euler-Heisenberg se asocia al hecho de que la luz se propaga a través de un medio dieléctrico efectivo. Las componentes no-nulas de $\gamma^{\mu\nu}$ (4.42), están dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma^{rr} &= \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] g^{rr}, \\ \gamma^{\theta\theta} &= \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] g^{\theta\theta}, \\ \gamma^{tt} &= \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] g^{tt} + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ \gamma^{t\phi} &= \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] g^{t\phi} + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a}{\Sigma}, \\ \gamma^{\phi\phi} &= \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] g^{\phi\phi} + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a^2}{\Delta \Sigma}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación de Hamilton-Jacobi (D.1), se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} &= \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]}{\Sigma \Delta} \left\{ (r^2 + a^2) \Sigma + (2Mr - \tilde{Q}^2) a^2 \sin^2 \theta \right\} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 \\ &\quad - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{2a}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{2(2Mr - \tilde{Q}^2)a}{\Sigma \Delta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) + \\ &\quad - \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a^2}{\Delta \Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 + \\ &\quad - \frac{1}{\Sigma} \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Algunos cálculos son extensos, por lo que nos limitamos a sólo mostrar ciertos pasos intermedios más relevantes. El término en la primera línea, el cual incluye a la derivada con respecto a t , se puede reescribir como

$$-\gamma^{tt} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 = \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left\{ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma \Delta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 \right\} - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2.$$

Sustituyendo, se tiene

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = & -\frac{1}{\Sigma} \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{\Sigma \Delta} \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2)^2 \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a^2 \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a^2 \sin^4 \theta \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] 2(2Mr - \tilde{Q}^2)a}{\Sigma \Delta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) + \\
& - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \left[\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 + \frac{2a}{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) + \frac{a^2}{\Sigma \Delta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 \right]. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Se puede usar la relación $2Mr - \tilde{Q}^2 = (r^2 + a^2) - \Delta$ en la línea cuatro, para separar este término cruzado en dos partes. Una parte se podrá juntar con la segunda línea de (D.3), mientras que la otra con la tercera línea. Tras un poco de álgebra, y quedándonos a primer orden en α , la ecuación (D.3) se reduce a

$$\begin{aligned}
2\Sigma \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = & \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[1 - \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \left[1 + \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right\}^2 \\
& - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left\{ \left[1 - \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a \sin^2 \theta \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \left[1 + \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right\}^2 + \\
& - \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 - \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \\
& - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 a \left[a \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right)^2 + \left\{ \frac{r^2 + a^2}{\Delta} + 1 \right\} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} + \frac{a}{\Delta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 \right]. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

El siguiente paso es separar variables. Para ello se propone una función de Hamilton con la forma

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \mu^2 \tau - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \tag{D.5}$$

con las constantes de integración μ , E , y L . Las derivadas parciales de S están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} = L, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} = S'_r(r), \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = S'_\theta(\theta), \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \mu^2, \tag{D.6}$$

en donde la notación primada denota a la derivada de cada función con respecto a la correspondiente variable de la que dependen. Sustituyendo las derivadas parciales en la ecuación (D.4), resulta

$$\begin{aligned}
\Sigma \mu^2 = & \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[1 - \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) E - \left[1 + \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] aL \right\}^2 + \\
& - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left\{ \left[1 - \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] aE \sin^2 \theta - \left[1 + \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] L \right\}^2 + \\
& - \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta S'^2_r - \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] S'^2_\theta + \\
& - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 a \left[aE^2 \sin^2 \theta - \left\{ \frac{r^2 + a^2}{\Delta} + 1 \right\} EL + \frac{aL^2}{\Delta} \right]. \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Podemos usar la identidad trigonométrica $\csc^2 \theta = 1 + \cos^2 \theta \csc^2 \theta$, para que el término de la segunda línea se reduzca a: $(L - aE)^2 + (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 [L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2 \sin^2 \theta]$.

Adicionalmente, se puede usar la relación $\Sigma\mu^2 = r^2\mu^2 + a^2\cos^2\theta\mu^2$, de tal forma que la ecuación (D.7) se reescribe como

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta S_r'^2 - \frac{1}{\Delta} \left[\left[1 - \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) E - \left[1 + \frac{5\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] aL \right]^2 + \right. \\ & \quad + (L - aE)^2 + r^2\mu^2 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \left[- \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} + 1 \right) aEL + \frac{a^2 L^2}{\Delta} \right] \Big\} + \\ & \quad + \left\{ \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] S_\theta'^2 + (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \mu^2 a^2 \cos^2 \theta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 [L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2 \sin^2 \theta + 2a^2 E^2 \sin^2 \theta] \right\} = 0. \quad (\text{D.8}) \end{aligned}$$

Estamos a punto de separar la ecuación de Hamilton-Jacobi, ya que el primer término entre corchetes, i.e., las primeras dos líneas, sólo depende explícitamente de la variable r . El segundo término casi depende en su mayoría de θ , pero en éste aún podemos separar un término $\frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 [L^2 + a^2 E^2]$, que puede ser juntado con el primer grupo. Tras un poco de álgebra, pasando un grupo al otro lado de la ecuación, multiplicando por un factor $[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2]$, y a primer orden en α , se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} & \left\{ S_\theta'^2 + (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \mu^2 a^2 \cos^2 \theta \right\} \\ & = - \left\{ \left[1 - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta S_r'^2 + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] ([L - aE]^2 + r^2 \mu^2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Delta} \left[\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) E - aL \right]^2 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \left[L^2 + a^2 E^2 - 2 \left\{ \frac{r^2 + a^2}{\Delta} + 1 \right\} aEL + \frac{2a^2 L^2}{\Delta} \right] \right\}. \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

Esta ecuación ya puede ser separada, dado que el término del lado izquierdo sólo depende explícitamente de θ , mientras que el del lado derecho, sólo de r . Sin embargo, aquí empleamos la interpretación de QED, por lo que consideramos el campo eléctrico (4.9), $D_Q \equiv Q^2/(D_c^2 \Sigma^2)$, constante, i.e., que no depende de r y θ , vía la función métrica Σ , sino que estará evaluada en el punto en el que nos interesa estudiar los efectos de la polarización del vacío. De esta manera, introducimos la constante de Carter $\mathcal{C}$, a partir de la separación de variables, i.e.,

$$S_\theta'^2 + (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \mu^2 a^2 \cos^2 \theta = \mathcal{C}. \quad (\text{D.10})$$

Si definimos la función

$$\Theta(\theta) \equiv \mathcal{C} - (L^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta - \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \mu^2 a^2 \cos^2 \theta, \quad (\text{D.11})$$

la solución S_θ esta dada por

$$S_\theta(\theta) = \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta. \quad (\text{D.12})$$

Más aún, multiplicando (D.9) por Δ y reescribiendo algunos términos, la constante de Carter también satisface la siguiente ecuación para la variable r :

$$\begin{aligned} \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Delta S_r' \right)^2 & = \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) E - aL \right\}^2 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 [(r^2 + a^2) aEL - a^2 L^2] \\ & \quad - \Delta \left\{ \mathcal{C} + [L - aE]^2 + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] r^2 \mu^2 \right\}. \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

Si definimos la función

$$R(r) \equiv \left\{ \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (r^2 + a^2) E - aL \right\}^2 - \Delta \left\{ \mathcal{C} + [L - aE]^2 + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \mu^2 r^2 \right\} + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 [(r^2 + a^2) aEL - a^2 L^2], \quad (\text{D.14})$$

la solución S_r está dada por

$$S_r(r) = \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr, \quad (\text{D.15})$$

y la función de Hamilton (D.5) resulta

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \mu^2 \tau - Et + L\phi + \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr + \int^\theta \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta. \quad (\text{D.16})$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento, debemos calcular las derivadas parciales $\mathcal{S}$ con respecto a las constantes de movimiento, e igualarlas a cero.

- La constante de Carter $\mathcal{C}$:

Usando las funciones (D.11) y (D.14), la derivada con respecto a la constante de Carter, está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{C}} &= \frac{1}{2} \int^r \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]}{\Delta} \left(\frac{\partial R}{\partial \mathcal{C}} \right) \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + \frac{1}{2} \int^\theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathcal{C}} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \\ &= -\frac{1}{2} \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + \frac{1}{2} \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \end{aligned}$$

Si la derivada es igual a cero, i.e., $\partial \mathcal{S} / \partial \mathcal{C} = 0$, se obtiene la siguiente relación:

$$\int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \quad (\text{D.17})$$

y, por lo tanto, se cumple

$$\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\dot{r}}{\sqrt{R(r)}} = \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \quad (\text{D.18})$$

- La masa de la partícula de prueba μ :

Para la derivada con respecto a μ^2 , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu^2} &= \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \int^r \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]}{\Delta} \left(\frac{\partial R}{\partial \mu^2} \right) \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + \frac{1}{2} \int^\theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mu^2} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \\ &\approx \frac{1}{2} \tau - \frac{1}{2} \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R(r)}} - \frac{1}{2} a^2 \int^\theta \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \end{aligned}$$

a primer orden en α . Si hacemos $\partial \mathcal{S} / \partial \mu^2 = 0$, se llega a la relación

$$\tau = \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R(r)}} + a^2 \int^\theta \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \quad (\text{D.19})$$

por lo que se cumple

$$1 = \frac{r^2 \dot{r}}{\sqrt{R(r)}} + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{a^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \quad (\text{D.20})$$

- La energía E de la partícula de prueba:

La siguiente es la derivada con respecto a E , esto es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} &= -t + \frac{1}{2} \int^{\theta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial E} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} + \frac{1}{2} \int^r \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]}{\Delta} \left(\frac{\partial R}{\partial E} \right) \frac{dr}{\sqrt{R(r)}}, \\ &= -t + E \left[a^2 \int^{\theta} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \right] + \int^r \mathcal{S}_E \frac{dr}{\Delta \sqrt{R(r)}},\end{aligned}\tag{D.21}$$

con $\mathcal{S}_E \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \left(\frac{\partial R}{\partial E} \right)$, dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E &= \Delta \left(\left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \{ (r^2 + a^2)E - aL \} + \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a[L - aE] \right) \\ &\quad + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (2Mr - \tilde{Q}^2) \{ (r^2 + a^2)E - aL \}.\end{aligned}$$

Asimismo, de la ecuación (D.20), el segundo término en (D.21) se puede reescribir como

$$E a^2 \int^{\theta} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} \approx \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] E \tau - \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] E r^2 \frac{dr}{\sqrt{R(r)}}.$$

Por lo tanto, haciendo $\partial \mathcal{S} / \partial E = 0$, la ecuación (D.21) se reduce a

$$\begin{aligned}t &= \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] E \tau - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \int^r \frac{\{ r^2 E - a(L - aE) \}}{\sqrt{R(r)}} dr \\ &\quad + \int^r \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (2Mr - \tilde{Q}^2) \{ r^2 E - a(L - aE) \} \frac{dr}{\Delta \sqrt{R(r)}}.\end{aligned}\tag{D.22}$$

Es decir, se obtiene la ecuación para la coordenada t ,

$$\begin{aligned}\dot{t} &= \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] E - \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \{ r^2 E - a(L - aE) \} \frac{\dot{r}}{\sqrt{R(r)}} \\ &\quad + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] (2Mr - \tilde{Q}^2) \{ r^2 E - a(L - aE) \} \frac{\dot{r}}{\Delta \sqrt{R(r)}}.\end{aligned}\tag{D.23}$$

- El momento angular L de la partícula de prueba:

Finalmente, la derivada con respecto a L resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L} &= \phi + \frac{1}{2} \int^{\theta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial L} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} + \frac{1}{2} \int^r \frac{\left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right]}{\Delta} \left(\frac{\partial R}{\partial L} \right) \frac{dr}{\sqrt{R(r)}}, \\ &\approx \phi - L \int^{\theta} \frac{\csc^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} - a \int^r \left((r^2 + a^2)E - \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] aL \right) \frac{dr}{\Delta \sqrt{R}} \\ &\quad - [L - aE] \left\{ \int^r \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{dr}{\sqrt{R}} \right\} + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \int^r [(r^2 + a^2)aE - 2a^2 L] \frac{dr}{\Delta \sqrt{R}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (D.17) en el término entre corchetes, haciendo $\partial \mathcal{S} / \partial L = 0$, y usando la identidad trigonométrica $1 + \csc^2 \theta \cos^2 \theta = \csc^2 \theta$, se puede verificar que se cumple

$$\phi = a \int^r \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{[(r^2 + a^2)E - aL]}{\Delta \sqrt{R(r)}} dr + \int^{\theta} \frac{[L \csc^2 \theta - aE]}{\sqrt{\Theta(\theta)}} d\theta.\tag{D.24}$$

Entonces, la ecuación de movimiento está dada por

$$\dot{\phi} = a \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] [(r^2 + a^2)E - aL] \frac{\dot{r}}{\Delta \sqrt{R(r)}} + [L \csc^2 \theta - aE] \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \quad (\text{D.25})$$

Las ecuaciones de movimiento para el rayo de luz son las ecuaciones (D.18), (D.20), (D.23), y (D.25). Sustituyendo (D.18) en (D.20), y a primer orden en α , la ecuación para la coordenada- θ está dada por

$$(\Sigma \dot{\theta})^2 = \left[1 + \frac{20\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \Theta(\theta). \quad (\text{D.26})$$

Asimismo, multiplicando (D.18) por Σ , y usando (D.26), se obtiene la ecuación para la coordenada- r ,

$$(\Sigma \dot{r})^2 = R(r). \quad (\text{D.27})$$

Además, multiplicando (D.25) por Σ , y usando (D.26) y (D.27), la ecuación para la coordenada- ϕ es

$$\Sigma \dot{\phi} = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{L - aE \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{a}{\Delta} \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] [(r^2 + a^2)E - aL]. \quad (\text{D.28})$$

Finalmente, multiplicando (D.23) por Σ , usando (D.27), así como las definiciones de las funciones métricas Δ y Σ , se puede verificar que la ecuación para la coordenada- t resulta

$$\Sigma \dot{t} = \left[1 + \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] a \{L - aE \sin^2 \theta\} + \left[1 - \frac{10\alpha}{225\pi} D_Q^2 \right] \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \{(r^2 + a^2)E - aL\}. \quad (\text{D.29})$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento del rayo de luz que se propaga a través del medio dieléctrico efectivo, descrito por la pseudo-métrica efectiva de Plebański. Corresponden a las ecuaciones presentadas en la Sec. 4.3, i.e., (4.50)-(4.53).

E. La gravedad superficial para la hipotética dependencia en θ

La gravedad superficial de un agujero negro se define a partir de la ecuación (5.8), la cual incluye a la derivada covariante

$$\nabla_\nu \chi^\mu = \partial_\nu \chi^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \chi^\sigma. \quad (\text{E.1})$$

Ésta se escribe en términos de los símbolos de Christoffel, los cuales, a su vez, dependen de las derivadas de la métrica correspondiente, i.e.,

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\sigma\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\sigma} - g_{\nu\sigma,\rho}). \quad (\text{E.2})$$

Consideremos la métrica descrita por el elemento de línea (5.1). Si asumimos que la carga $\tilde{Q}$, de su definición (5.2), depende explícitamente de las variables r y θ , es decir, que los términos no-lineales no son cuasi-constantes, entonces al calcular los símbolos de Christoffel uno debe considerar tales dependencias. Denotando a la derivada de $\tilde{Q}$ con respecto a la variable r como $\tilde{Q}'$, y a su derivada con respecto a θ como $\dot{\tilde{Q}}$, las componentes no-nulas de los símbolos de Christoffel son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \tilde{\Gamma}_{rr}^r - \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Delta}, & \Gamma_{rr}^\theta &= \tilde{\Gamma}_{rr}^\theta + \frac{\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{\Delta}, \\ \Gamma_{r\theta}^r &= \Gamma_{\theta r}^r = \tilde{\Gamma}_{r\theta}^r - \frac{\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{\Delta}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \tilde{\Gamma}_{r\theta}^\theta, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \tilde{\Gamma}_{\theta\theta}^r, & \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \tilde{\Gamma}_{\theta\theta}^\theta, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r + \frac{a^2 \sin^4 \theta \Delta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\tilde{Q}', & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta + \frac{a^2 \sin^4 \theta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}, \\ \Gamma_{t\phi}^r &= \Gamma_{\phi t}^r = \tilde{\Gamma}_{t\phi}^r - \frac{a \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\tilde{Q}', & \Gamma_{t\phi}^\theta &= \Gamma_{\phi t}^\theta = \tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta - \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \tilde{\Gamma}_{tt}^r + \frac{\Delta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\tilde{Q}', & \Gamma_{tt}^\theta &= \tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \frac{\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{\Sigma^2}, \\ \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \tilde{\Gamma}_{r\phi}^\phi - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\tilde{Q}', & \Gamma_{r\phi}^t &= \Gamma_{\phi r}^t = \tilde{\Gamma}_{r\phi}^t - \frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2)}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\tilde{Q}', \\ \Gamma_{rt}^\phi &= \Gamma_{tr}^\phi = \tilde{\Gamma}_{rt}^\phi + \frac{a}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\tilde{Q}', & \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \tilde{\Gamma}_{rt}^t + \frac{(r^2 + a^2)}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\tilde{Q}', \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi - \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}, & \Gamma_{\theta\phi}^t &= \Gamma_{\phi\theta}^t = \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t - \frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2)}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}, \\ \Gamma_{t\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta t}^\phi = \tilde{\Gamma}_{t\theta}^\phi + \frac{a}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}, & \Gamma_{t\theta}^t &= \Gamma_{\theta t}^t = \tilde{\Gamma}_{t\theta}^t + \frac{(r^2 + a^2)}{\Sigma \Delta} \tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}. \end{aligned}$$

Aquí, $\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu$ son los símbolos de Christoffel del espacio-tiempo de Kerr-Newman, pero con la carga $\tilde{Q}$ en lugar de Q . Los términos adicionales dependen de las derivadas de $\tilde{Q}$, por lo que son proporcionales a la constante de estructura fina α .

La gravedad superficial puede ser calculada a partir de la fórmula [125]

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^\mu \chi^\nu) (\nabla_\mu \chi_\nu), \quad (\text{E.3})$$

en donde el tensor de Killing está dado por $\chi^a = (1, 0, 0, \Omega_H)$, con la velocidad angular definida como $\Omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$. Usando la propiedad de compatibilidad métrica de la conexión, i.e., $\nabla_a g_{bc} = 0$, se obtiene la expresión

$$-2\kappa^2 = g^{tc} g_{bd} (\nabla_t \chi_d) (\nabla_c \chi_b) + g^{rc} g_{bd} (\nabla_r \chi_d) (\nabla_c \chi_b) + g^{\theta c} g_{bd} (\nabla_\theta \chi_d) (\nabla_c \chi_b) + g^{\phi c} g_{bd} (\nabla_\phi \chi_d) (\nabla_c \chi_b). \quad (\text{E.4})$$

A continuación, calcularemos cada uno de los cuatro términos del lado derecho de la ecuación (E.4), denotados respectivamente por κ_i .

- El primer término, κ_1 :

El primer término de (E.4) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\kappa_1 = & g^{tt}g_{rr}(\Gamma_{tt}^r + \Omega_H\Gamma_{t\phi}^r)^2 + g^{t\phi}g_{rr}(\Gamma_{tt}^r + \Omega_H\Gamma_{t\phi}^r)(\Gamma_{t\phi}^r + \Omega_H\Gamma_{\phi\phi}^r) \\ & + g^{t\phi}g_{\theta\theta}(\Gamma_{tt}^\theta + \Omega_H\Gamma_{t\phi}^\theta)(\Gamma_{t\phi}^\theta + \Omega_H\Gamma_{\phi\phi}^\theta) + g^{tt}g_{\theta\theta}(\Gamma_{t\phi}^\theta + \Omega_H\Gamma_{\phi\phi}^\theta)^2.\end{aligned}\quad (\text{E.5})$$

Asimismo, el primer término de (E.5) resulta

$$\begin{aligned}\kappa_{11} = & g^{tt}g_{rr}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r + (1 - \Omega_H a \sin^2 \theta) \frac{\Delta}{\Sigma^2} \tilde{Q}\tilde{Q}'\right]^2, \\ \approx & g^{tt}g_{rr}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r\right]^2 + 2\frac{g^{tt}}{(r^2 + a^2)}\frac{g_{rr}\Delta}{\Sigma}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r\right]\tilde{Q}\tilde{Q}',\end{aligned}$$

donde se usó la igualdad $(1 - \Omega_H a \sin^2 \theta) = \Sigma/(r^2 + a^2)$. El primer término, $\tilde{\kappa}_{11} \equiv g^{tt}g_{rr}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r\right]^2$, corresponde al término tipo Kerr-Newman, pero escrito con $\tilde{Q}$ en lugar de Q . El segundo término puede ser calculado con los componentes de la métrica y usando la relación

$$\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r = -\frac{\Delta}{\Sigma^2} \frac{r(\tilde{Q}^2 - Mr) + a^2 M \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2)}.$$

De esta manera, el primer componente de (E.5) puede reescribirse como el término tipo Kerr-Newman más una corrección que depende de $\tilde{Q}'$, i.e., $\kappa_{11} = \tilde{\kappa}_{11} + k_{11}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{11} = -2\frac{g^{tt}\tilde{Q}\tilde{Q}'}{(r^2 + a^2)^2}\frac{\Delta}{\Sigma^2} \left[r(\tilde{Q}^2 - Mr) + a^2 M \cos^2 \theta\right]. \quad (\text{E.6})$$

Este cálculo se presenta como ejemplo. Los cálculos siguientes son análogos y sólo se presentarán los resultados. El objetivo es reescribir cada término como un término tipo Kerr-Newman más una corrección que depende de las derivadas de $\tilde{Q}$.

El segundo término de (E.5) resulta

$$\kappa_{12} \approx g^{t\phi}g_{rr}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r\right]\left[\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r\right] + \frac{g^{t\phi}g_{rr}\Delta}{(r^2 + a^2)\Sigma}\left[\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r - a \sin^2 \theta (\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^r)\right]\tilde{Q}\tilde{Q}',$$

y se puede reescribir como $\kappa_{12} = \tilde{\kappa}_{12} + k_{12}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{12} = -\frac{g^{t\phi}\tilde{Q}\tilde{Q}'}{(r^2 + a^2)^2}\frac{a \sin^2 \theta \Delta}{\Sigma^2} \left[2r(\tilde{Q}^2 - Mr) + a^2 M \cos^2 \theta - \Sigma r\right]. \quad (\text{E.7})$$

Asimismo, el tercer término de (E.5) es

$$\kappa_{13} \approx g^{t\phi}g_{\theta\theta}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta\right]\left[\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta\right] + \frac{g^{t\phi}g_{\theta\theta}}{(r^2 + a^2)\Sigma}\left[\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta - a \sin^2 \theta (\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta)\right]\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}},$$

y se puede reescribir como $\kappa_{13} = \tilde{\kappa}_{13} + k_{13}(\dot{\tilde{Q}})$, con

$$k_{13} = -\frac{g^{t\phi}\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{(r^2 + a^2)^2}\frac{\Delta}{\Sigma} a \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{E.8})$$

Finalmente, el último término de (E.5) resulta

$$\kappa_{14} \approx g^{tt}g_{\theta\theta}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta\right]^2 + \frac{g^{tt}}{(r^2 + a^2)}\frac{g_{\theta\theta}}{\Sigma}\left[\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H\tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta\right]\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}},$$

y se puede reducir a $\kappa_{14} = \tilde{\kappa}_{14} + k_{14}(\dot{\tilde{Q}})$, con

$$k_{14} = 0. \quad (\text{E.9})$$

- El segundo término κ_2 :

El segundo término de (E.4) se reescribe como

$$\kappa_2 = g^{rr} g_{tt} (\Gamma_{rt}^t + \Omega_H \Gamma_{r\phi}^t)^2 + 2g^{rr} g_{t\phi} (\Gamma_{rt}^\phi + \Omega_H \Gamma_{r\phi}^\phi) (\Gamma_{rt}^t + \Omega_H \Gamma_{r\phi}^t) + g^{rr} g_{\phi\phi} (\Gamma_{rt}^\phi + \Omega_H \Gamma_{r\phi}^\phi)^2, \quad (\text{E.10})$$

en donde se consideró que la velocidad angular, $\Omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$, sólo depende de θ , es decir, se usó $\partial_r \Omega_H = 0$. Esto ocurre debido a que el horizonte de eventos (5.5) depende de θ vía $\tilde{Q}$, pero no depende de r dado que está evaluado en el horizonte de eventos R_H de Kerr-Newman (5.3).

El primer término de (E.10) es

$$\kappa_{21} \approx g^{rr} g_{tt} [\tilde{\Gamma}_{rt}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^t]^2 + 2g^{rr} g_{t\phi} [\tilde{\Gamma}_{rt}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^t] \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Delta},$$

y se puede reescribir como $\kappa_{21} = \tilde{\kappa}_{21} + k_{21}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{21} = 2g_{tt} \left[\frac{(r-M)}{\Delta} - \frac{r}{r^2 + a^2} \right] \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Sigma}. \quad (\text{E.11})$$

El segundo término de E.10 es

$$\kappa_{22} \approx 2g^{rr} g_{t\phi} [\tilde{\Gamma}_{rt}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^\phi] [\tilde{\Gamma}_{rt}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^t] + 2g^{rr} g_{t\phi} \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Delta} [\tilde{\Gamma}_{rt}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^\phi + \frac{a}{r^2 + a^2} (\tilde{\Gamma}_{rt}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^t)],$$

y se reduce a $\kappa_{22} = \tilde{\kappa}_{22} + k_{22}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{22} = \frac{2 g_{t\phi} a}{(r^2 + a^2)^2 \Delta} [a^2(r-2M) + r(r^2 - \tilde{Q}^2)] \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Sigma}. \quad (\text{E.12})$$

El tercer término de (E.10) está dado por

$$\kappa_{23} \approx g^{rr} g_{\phi\phi} [\tilde{\Gamma}_{rt}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^\phi]^2 + 2g^{rr} g_{\phi\phi} \frac{a}{(r^2 + a^2)} \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Delta} [\tilde{\Gamma}_{rt}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{r\phi}^\phi],$$

y se puede escribir como $\kappa_{23} = \tilde{\kappa}_{23} + k_{23}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{23} = 2g_{\phi\phi} \frac{a^2(r-M)}{(r^2 + a^2)^2 \Delta} \frac{\tilde{Q}\tilde{Q}'}{\Sigma}. \quad (\text{E.13})$$

- El tercer término κ_3 :

Como se explicó, Ω_H depende de θ vía $\tilde{Q}$. Por lo tanto, en este caso $\partial_\theta \Omega_H \neq 0$, habrá una corrección adicional al término tipo Kerr-Newman que dependerá de la derivada de Ω_H con respecto a θ . Entonces, el tercer término de (E.4) está dado por

$$\begin{aligned} \kappa_3 = & g^{\theta\theta} g_{tt} (\Gamma_{\theta t}^t + \Omega_H \Gamma_{\theta\phi}^t)^2 + 2g^{\theta\theta} g_{t\phi} (\partial_\theta \Omega_H + \Gamma_{\theta t}^\phi + \Omega_H \Gamma_{\theta\phi}^\phi) (\Gamma_{\theta t}^t + \Omega_H \Gamma_{\theta\phi}^t) \\ & + g^{\theta\theta} g_{\phi\phi} (\partial_\theta \Omega_H + \Gamma_{\theta t}^\phi + \Omega_H \Gamma_{\theta\phi}^\phi)^2. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Más aún, la derivada de la velocidad angular es proporcional a $\dot{\tilde{Q}}$, i.e.,

$$\partial_\theta \Omega_H = \frac{4ar_+}{(r_+^2 + a^2)^2} \frac{\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{(r_+ - r_-)}, \quad (\text{E.15})$$

por lo que es proporcional a α . Es decir, despreciaremos los términos que incluyen el producto $(\dot{Q})(\partial_\theta \Omega_H)$, el cual es de segundo orden en α .

El primer término de (E.14) es

$$\kappa_{31} \approx g^{\theta\theta} g_{tt} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t \right]^2 + 2g^{\theta\theta} g_{tt} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t \right] \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\Delta},$$

y se puede escribir como $\kappa_{31} = \tilde{\kappa}_{31} + k_{31}(\dot{Q})$, con

$$k_{31} = -2g_{tt} \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta (2Mr - \tilde{Q}^2)}{(r^2 + a^2) \Sigma^2} \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\Delta}. \quad (\text{E.16})$$

Para el segundo término de (E.14), se obtiene

$$\begin{aligned} \kappa_{32} \approx & 2g^{\theta\theta} g_{t\phi} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \right] \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t \right] + 2g^{\theta\theta} g_{t\phi} \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\Delta} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \right. \\ & \left. + \frac{a}{(r^2 + a^2)} \left(\tilde{\Gamma}_{\theta t}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t \right) \right] + 2g^{\theta\theta} g_{t\phi} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^t + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^t \right] \partial_\theta \Omega_H, \end{aligned}$$

y se reescribe como $\kappa_{32} = \tilde{\kappa}_{32} + k_{32}(\dot{Q})$, con

$$k_{32} = 2g_{t\phi} \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{(r^2 + a^2)^2 \Sigma^2 \Delta} \frac{a \cos \theta}{\sin \theta} \left[(r^2 + a^2) \Sigma - (2Mr - \tilde{Q}^2) (\Sigma + 2a^2 \sin^2 \theta) \right]. \quad (\text{E.17})$$

El último término de (E.14) es

$$\begin{aligned} \kappa_{33} \approx & g^{\theta\theta} g_{\phi\phi} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \right]^2 + 2g^{\theta\theta} g_{\phi\phi} \frac{a}{(r^2 + a^2)} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \right] \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\Delta} \\ & + 2g^{\theta\theta} g_{\phi\phi} \left[\tilde{\Gamma}_{\theta t}^\phi + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi + \frac{a}{(r^2 + a^2)} \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\Delta} \right] \partial_\theta \Omega_H, \end{aligned}$$

y se obtiene $\kappa_{33} = \tilde{\kappa}_{33} + k_{33}(\dot{Q})$, con

$$k_{33} = \frac{2g^{\theta\theta} g_{\phi\phi}}{(r^2 + a^2)^2 \Sigma \Delta} \frac{a^2 \cos \theta}{\sin \theta} \left[\Sigma - (2Mr - \tilde{Q}^2) \right] \tilde{Q}\dot{Q}. \quad (\text{E.18})$$

- El cuarto término κ_4 :

El cuarto y último término del lado derecho de (E.4) está dado por

$$\begin{aligned} \kappa_4 = & g^{\phi\phi} g_{rr} \left(\Gamma_{\phi t}^r + \Omega_H \Gamma_{\phi\phi}^r \right)^2 + g^{t\phi} g_{rr} \left(\Gamma_{\phi t}^r + \Omega_H \Gamma_{\phi\phi}^r \right) \left(\Gamma_{tt}^r + \Omega_H \Gamma_{t\phi}^r \right) \\ & + g^{t\phi} g_{\theta\theta} \left(\Gamma_{\phi t}^\theta + \Omega_H \Gamma_{\phi\phi}^\theta \right) \left(\Gamma_{tt}^\theta + \Omega_H \Gamma_{t\phi}^\theta \right) + g^{\phi\phi} g_{\theta\theta} \left(\Gamma_{\phi t}^\theta + \Omega_H \Gamma_{\phi\phi}^\theta \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

El primer término de (E.19) es

$$\kappa_{41} \approx g^{\phi\phi} g_{rr} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r \right]^2 - 2g^{\phi\phi} g_{rr} \frac{a \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)} \frac{\Delta}{\Sigma} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r \right] \tilde{Q}\tilde{Q}',$$

y resulta $\kappa_{41} = \tilde{\kappa}_{41} + k_{41}(\tilde{Q}')$, con

$$k_{41} = -g^{\phi\phi} \frac{\Delta}{\Sigma^2} \frac{a^2 \sin^4 \theta}{(r^2 + a^2)^2} \left[r(\tilde{Q}^2 - Mr) + a^2 M \cos^2 \theta - \Sigma r \right] \tilde{Q}\tilde{Q}'. \quad (\text{E.20})$$

Para el segundo término de (E.19), se tiene

$$\kappa_{42} \approx g^{t\phi} g_{rr} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r \right] \left[\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{t\phi}^r \right] + \frac{g^{t\phi} g_{rr} \Delta}{(r^2 + a^2) \Sigma} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^r - a \sin^2 \theta \left(\tilde{\Gamma}_{tt}^r + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{t\phi}^r \right) \right] \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}},$$

el cual se puede escribir como $\kappa_{42} = \tilde{\kappa}_{42} + k_{42}(\dot{\tilde{Q}})$, con

$$k_{42} = \frac{g^{t\phi} a \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)^2} \frac{\Delta}{\Sigma^2} \left[2r(\tilde{Q}^2 - Mr) + a^2 M \cos^2 \theta - \Sigma r \right] \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}}. \quad (\text{E.21})$$

El tercer término de (E.19) resulta

$$\kappa_{43} \approx g^{t\phi} g_{\theta\theta} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \right] \left[\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta \right] + \frac{g^{t\phi} g_{\theta\theta}}{(r^2 + a^2)} \frac{\tilde{Q} \dot{\tilde{Q}}}{\Sigma} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta - a \sin^2 \theta \left(\tilde{\Gamma}_{tt}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{t\phi}^\theta \right) \right],$$

y se reescribe como $\kappa_{43} = \tilde{\kappa}_{43} + k_{43}(\dot{\tilde{Q}})$, con

$$k_{43} = -g^{t\phi} \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{a \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2)^2} \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}}. \quad (\text{E.22})$$

Finalmente, el último término de (E.19) es

$$\kappa_{44} \approx g^{\phi\phi} g_{\theta\theta} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \right]^2 - 2g^{\phi\phi} g_{\theta\theta} \frac{a \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2) \Sigma} \left[\tilde{\Gamma}_{\phi t}^\theta + \Omega_H \tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \right] \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}},$$

y se reduce a $\kappa_{44} = \tilde{\kappa}_{44} + k_{44}(\dot{\tilde{Q}})$, con

$$k_{44} = 2g^{\phi\phi} a \sin^2 \theta \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{a \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2)^2} \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}}. \quad (\text{E.23})$$

Ya hemos terminado de calcular cada componente de la gravedad superficial (E.4). Ahora, procedemos a sumarlas de la siguiente manera. Primero, agrupamos todos los términos tipo Kerr-Newman, es decir, aquéllos que hemos denotado como $\tilde{\kappa}_{ij}$. A su suma la llamaremos κ_0^2 , y está dada por

$$\kappa_0^2 \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \tilde{\kappa}_{ij} = \left[\frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \right]^2. \quad (\text{E.24})$$

Como podemos ver, ésta corresponde al caso en el que el apantallamiento no depende explícitamente de r y θ , y en donde las derivadas de $\tilde{Q}$ se anulan, i.e., a la ecuación (5.10) empleada para el estudio de la termodinámica del agujero negro de Einstein-Euler-Heisenberg en el marco de la interpretación de QED. Si existiera una hipotética dependencia en θ del apantallamiento, surgirían los siguientes términos, que incluyen las derivadas de $\tilde{Q}$. La suma de éstos están denotados por k_0 , i.e.,

$$k_0 \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \kappa_{ij}, \quad (\text{E.25})$$

y puede ser dividida en dos grupos. Por un lado, se encuentran los términos que dependen de $\dot{\tilde{Q}}$, y por el otro aquéllos que dependen de $\tilde{Q}'$. En el primer grupo tenemos:

$$k_{0A} \equiv k_{13} + k_{14} + k_{31} + k_{32} + k_{33} + k_{43} + k_{44}. \quad (\text{E.26})$$

Es decir, la primera corrección a los términos tipo Kerr-Newman está dada por

$$k_{0A} = 4 \left[\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2)^2 \Sigma} \right] \tilde{Q} \dot{\tilde{Q}}. \quad (\text{E.27})$$

Por otro lado, se encuentran las correcciones que dependen de $\tilde{Q}'$,

$$k_{0_B} \equiv k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} + k_{23} + k_{41} + k_{42}, \quad (\text{E.28})$$

Sin embargo, así como la velocidad angular se evalúa desde el comienzo en el horizonte de eventos, podemos elegir que la carga esté evaluada en el horizonte de eventos de Kerr-Newman, i.e., se tiene que $\tilde{Q} = \tilde{Q}(R_H, \theta)$. De esta manera, su derivada con respecto a r se anula, $\tilde{Q}' = 0$.

Finalmente, encontramos a las correcciones proporcionales a $\partial_\theta \Omega_H$. A su suma las llamaremos k_{0_Ω} , y resultan

$$k_{0_C} = 2g^{\theta\theta} \frac{a \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2)} \Delta \partial_\theta \Omega_H. \quad (\text{E.29})$$

En este caso, dado que la gravedad superficial debe estar evaluada en horizonte de eventos r_+ , se tiene que la función métrica se anula, i.e., $\Delta = 0$. Por lo tanto, sólo contribuyen el término tipo Kerr-Newman (E.24) y la corrección (E.27), es decir, $\kappa^2 = \kappa_0^2 - \frac{1}{2}k_{0_A}$. Sacando la raíz cuadrada y a primer orden en α , la gravedad superficial $\kappa = \kappa_+$ está dada por

$$\kappa_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}{(r_+^2 + a^2)} - \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{(r^2 + a^2)\Sigma} \frac{\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}}}{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}} \Big|_{r=r_+}, \quad (\text{E.30})$$

con la derivada de $\tilde{Q}$ con respecto a θ ,

$$\tilde{Q}\dot{\tilde{Q}} \approx -\frac{4\alpha}{90\pi} \frac{Q^4 a^2 \sin \theta \cos \theta}{D_c^2 \Sigma^7} [15r^8 - 58r^6 a^2 \cos^2 \theta + 32r^4 a^4 \cos^4 \theta - 38r^2 a^6 \cos^6 \theta + a^8 \cos^8 \theta].$$

El hecho de que la gravedad superficial debe estar evaluada en el horizonte de eventos r_+ , implica que las correcciones de Euler-Heisenberg deben estar evaluadas en el horizonte de eventos de Kerr-Newman, R_H . Definiendo la cantidad

$$\Theta_0 \equiv 15R_H^8 - 58R_H^6 a^2 \cos^2 \theta + 32R_H^4 a^4 \cos^4 \theta - 38R_H^2 a^6 \cos^6 \theta + a^8 \cos^8 \theta, \quad (\text{E.31})$$

observamos que la gravedad superficial depende de θ , i.e.,

$$\kappa_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}{(r_+^2 + a^2)} + \frac{4\alpha}{90\pi D_c^2} \frac{Q^4 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(R_H^2 + a^2)\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}} \frac{\Theta_0}{\Sigma_H^8}, \quad (\text{E.32})$$

con $\Sigma_H = R_H^2 + a^2 \cos^2 \theta$. El primer término (el término tipo Kerr-Newman) corresponde al caso en el que el apantallamiento no depende explícitamente de θ , es decir a la ecuación (5.10). Más aún, podemos reescribir este último como el término lineal κ_+^{KN} más una corrección de Euler-Heisenberg, de tal forma que la gravedad superficial se puede reescribir como

$$\kappa_+ = \kappa_+^{\text{KN}} + \frac{\alpha}{90\pi D_c^2} \left(\frac{Q^4}{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}} \right) \left[\frac{4a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(R_H^2 + a^2)} \frac{\Theta_0}{\Sigma_H^8} + \frac{(2a^2 + \tilde{Q}^2)}{(R_H^2 + a^2)^2} \frac{\Theta_1}{\Sigma_H^2} \right], \quad (\text{E.33})$$

en donde $\Theta_0(\theta)$ es la función (E.31), la función Θ_1 está definida por

$$\Theta_1 = \left[1 - 4 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} \left(1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} \right) \left(7 - 12 \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma_H} + 12 \frac{a^4 \cos^4 \theta}{\Sigma_H^2} \right) \right], \quad (\text{E.34})$$

y con la gravedad superficial del agujero negro de Kerr-Newman

$$\kappa_+^{\text{KN}} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - \tilde{Q}^2}}{(R_H^2 + a^2)}. \quad (\text{E.35})$$

Nótese que la ecuación (E.33) difiere de la expresión (5.11), dado que incluye las correcciones provenientes de la hipotética redistribución de la carga. Además, dada la definición de la temperatura de Hawking (5.47), $T_H = \kappa_+/(2\pi)$, a partir de la expresión (E.33), se obtiene el resultado (5.77).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00063

Matricula: 2163802884

Agujero negro de
Einstein-Euler-Heisenberg:
efectos de electrodinámica
cuántica en agujeros negros
cargados.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas
del día 13 del mes de agosto del año 2025 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR
DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el ultimo, se reunieron a la presentación de la
Disertación Pública cuya denominación aparece al margen,
para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: DANIEL ERNESTO AMARO SANCHEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento
de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma
Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al
interesado el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DANIEL ERNESTO AMARO SANCHEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

VOCAL

DR. MARCO ANTONIO MACEDA
SANTAMARIA

VOCAL

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

VOCAL

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

SECRETARIO

DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL