UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Grupos Topológicos Densamente Independientes y la Dualidad de Pontryagin

Tesis que presenta

Edgar Márquez Rodríguez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Asesores

Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Dr. Iván Sánchez Romero

Sinodales

Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich
Dr. Richard Wilson Roberts
Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

19 de febrero del 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Grupos Topológicos Densamente Independientes y la Dualidad de Pontryagin

Tesis que presenta

Edgar Márquez Rodríguez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Asesores

Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Dr. Iván Sánchez Romero

Sinodales

Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Dr. Richard Wilson Roberts

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

19 de febrero del 2020

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

A mis padres por apoyarme en todo momento.

A cada miembro de mi familia por estar siempre conmigo.

A mis amigos por esos momentos inolvidables.

Al Dr. Mikhail por aceptar trabajar conmigo y enseñarme lo maravilloso que son las matemáticas.

Al Dr. Iván por todos sus consejos para poder realizar con éxito este trabajo.

Al Dr. Richard y al Dr. Ángel por aceptar revisar este trabajo y ser parte del jurado.

Índice general

Resumen

El presente trabajo está centrado en el área de los grupos topológicos llamados densamente independientes. Dado un grupo topológico G de cardinalidad $\mathfrak{c}$, se dice que G es un grupo densamente independiente si para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un subgrupo denso y numerable H de G tal que $S \cap H = \{e_G\}$, donde e_G es el elemento identidad de G. Algunos ejemplos de grupos densamente independientes son el grupo de los números reales $\mathbb{R}$ y el grupo del círculo unitario de los números complejos $\mathbb{T}$. También se utiliza la dualidad de Pontryagin para mostrar algunos ejemplos de grupos densamente independientes. Como convención todos los grupos que se consideran en este trabajo serán Hausdorff.

El principal objetivo de esta tesis es dar una caracterización de los grupos abelianos, compactos y metrizables que son densamente independientes. Dicha Caracterización aparece al final del tercer capítulo en el teorema 3.2.5. Este teorema establece que un grupo topológico G es densamente independiente, si y sólo si, el grupo G no es de torsión o para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$, donde G_{p_i} es la componente p_i-primaria de G y $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$.

Introducción

La noción de grupo topológico densamente independiente aparece por primera vez en [14]. En este trabajo A. Leiderman y M. Tkachenko demuestran que si κ es un cardinal tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y S es un subgrupo del grupo compacto $C = \mathbb{Z}(2)^\kappa$ tal que $|S| < \mathfrak{c}$, entonces C contiene un subconjunto independiente, denso y numerable X tal que $\langle X \rangle \cap S = \{e\}$ (ver [14, Proposition 3.2]). En nuestra terminología esto implica que el grupo C es densamente independiente. Este resultado es utilizado en [14] para probar que existen grupos topológicos abelianos y pseudocompactos G y H tales que todos los subgrupos cerrados de G y H son separables pero el grupo $G \times H$ contiene un subgrupo cerrado y σ-compacto que no es separable.

En el teorema 3.1.19 se muestra que si G es un grupo topológico abeliano metrizable, separable con exponente un número primo p y tal que $|G| = \mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente. Este resultado extiende [14, Proposition 3.2], cuando $\kappa = \mathfrak{c}$.

También en [14], los autores muestran que la propiedad de ser densamente independiente no se puede extender a grupos abelianos, compactos, metrizables que son de torsión. Para probar la afirmación muestran que si $G_1 = \mathbb{Z}(2)^\omega$ y $G_2 = \mathbb{Z}(4)$, entonces para el grupo $G = G_1 \times G_2$ y el subgrupo $S = \{e_{G_1}\} \times G_2$ de G, cualquier subgrupo denso D de G es tal que $D \cap S \neq \emptyset$ (ver [14, Remark 3.3]). En el ejemplo 3.1.17 se prueba que si p y q son números primos distintos y si r y l son enteros positivos tales que $r \geq 1$ y $l > 1$, entonces los grupos $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)^r$ y $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p^l)$ no son densamente independientes. Lo mencionado anteriormente generaliza lo mencionado en [14, Remark 3.3].

Recientemente en [24], los autores probaron que si S es un subgrupo de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ tal que $|S| \leq \mathfrak{c}$, entonces existe $x \in \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ tal que $\langle x \rangle$ es denso en $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ y $S \cap \langle x \rangle = \{e\}$. En el corolario 3.1.15 se demuetra que si G es un grupo topológico abeliano, metrizable, separable y casi libre de torsión tal que $|G| =$

$\mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente.

El primer capítulo de esta tesis presenta algunos resultados básicos sobre teoría de grupos topológicos que serán de utilidad en los capítulos posteriores. En la segunda sección de este capítulo se presta especial atención a los grupos topológicos ω-estrechos y sus principales propiedades.

El segundo capítulo está dedicado a la teoría de la dualidad de Pontryagin van-Kampen para grupos compactos. Esta teoría es importante pues nos da información de la estructura algebraica y topológica de los grupos compactos. En este trabajo se exponen algunos de los resultados más importantes acerca de la dualidad de Pontryagin-van Kampen para grupos compactos y discretos. El enfoque que se presenta en este tabajo acerca de la dualidad de Pontryagin está basado en el presentado en [1].

En general, la teoría de Pontryagin-van Kampen establece una relación entre un grupo topológico abeliano G y su grupo dual $\hat{G}$, el cual consiste de todos los homomorfismos continuos de G en el grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Por ejemplo, si G es un grupo topológico abeliano se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es disctero, [8, teorema 23.17].

b) Si G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto, [8, teorema 23.17].

c) El grupo G es conexo si y sólo si $\hat{G}$ es libre de torsión, [8, teorema 24.25].

d) Si G es compacto y Hausdorff, entonces G es metrizable si y sólo si $\hat{G}$ es numerable, [8, teorema 24.17].

Por lo anterior, podemos ver que hay propiedades topológicas que pueden caracterizarse mediante propiedades algebraicas de su grupo dual.

El tercer capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se define el concepto de grupo topológico densamente independiente y se establecen algunas de las propiedades que debe cumplir un grupo topológico para que sea densamente independiente. Por ejemplo, en el lema 3.1.11 se muestra que si G es un grupo topológico abeliano, metrizable y separable de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces G será densamente independiente si se cumple que para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y cada abierto no vacío U de G existe $x \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e_G\}$. Usando el lema 3.1.11 se prueba, por ejemplo, que cualquier grupo topológico abeliano, metrizable, separable y casi libre de torsión de cardinalidad $\mathfrak{c}$ es densamente independiente. También el lema 3.1.11 es de utilidad para probar que si G es un grupo topológico abeliano metrizable, separable con exponente un número primo p y tal que $|G| = \mathfrak{c}$, entonces el grupo G es densamente independiente.

Otra propiedad interesante que aparece en la sección 3.1 es que el producto numerable de grupos densamente independientes es también densamente independiente. Al final de la tesis se da un ejemplo donde se muestra que el recíproco de esta afirmación es falsa.

Además en la sección 3.1 se muestra en el teorema 3.1.32 que todo grupo abeliano, compacto y metrizable tal que su grupo dual tiene un elemento de orden infinito es densamente independiente. Como corolario de este hecho se tiene que todo grupo no trivial que es compacto, metrizable y conexo es densamente independiente.

La sección 3.2 esta dedicada al propósito principal de esta tesis que es encontrar una caracterización de los grupos abelianos, compactos y metrizables que son densamente independientes. Tal caracterización se encuentra en el teorema 3.2.5. En particular, el teorema 3.2.5 muestra que todo grupo G que es abeliano, compacto, metrizable y que no es de torsión es densamente independiente. Para el caso cuando G es de torsión, se cumple que es densamente independiente, si y sólo si, para cada número natural m, el grupo mG es trivial o tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Es decir, los grupos abelianos, compactos y metrizables que son densamente independientes pueden ser caracterizados por una propiedad puramente algebraica. Además en el teorema 3.2.5 muestra que la propiedad de ser densamente independiente en grupos abelianos, compactos y de torsión queda perfectamente establecida en base de sus componentes p_i-primarias como sigue: un grupo G que es abeliano, compacto, metrizable y de torsión es densamente independiente, si y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$, donde G_{p_i} es la componente p_i-primaria de G y $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$.

Usando el teorema 3.2.5 se puede demostrar que si p es un número primo y $l \in \mathbb{N}^+$, el grupo $\mathbb{Z}(p^l)^\omega \times \mathbb{Z}(p)$ es densamente independiente. Este ejemplo contrasta con el ejemplo 3.1.17, pues en él se prueba que para el caso cuando $l > 1$, entonces el grupo $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p^l)$ no es densamente independiente.

También como corolario del teorema 3.2.5 se demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}^+$, el grupo $\mathbb{Z}(n)^\omega$ es densamente independiente.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se exponen resultados básicos acerca de la teoría de grupos topológicos. También se definen algunos de los conceptos que se estudiarán a lo largo del presente trabajo.

El propósito de este capítulo es dar una breve introducción a la teoría de grupos topológicos y puesto que existe una abundante bibliografía al respecto, en este capítulo se omitirá la mayoría de las demostraciones. El lector interesado en una lectura más profunda puede consultar [1], el cual contiene un extenso desarrollo sobre los grupos topológicos.

1.1. Grupos topológicos

La teoría de grupos topológicos parte de la interacción de dos ramas fundamentales de la matemática: la teoría de grupos y la topología. Intuitivamente un grupo topológico es un conjunto con una operación binaria que lo convierte en un grupo y con una estructura topológica que cumple además que la multiplicación y la operación inversa sean funciones continuas.

Desde este punto de vista, cada grupo dotado con la topología discreta automáticamente se convierte en un grupo topológico.

Los grupos topológicos fueron estudiados *per se* por primera vez por Otto Schreier en 1926 y por Franciszek Leja en 1927 en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* en donde aparece por primera vez la definición de grupo topológico.

Definición 1.1.1. *Sea G un conjunto con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G. Entonces G se llama grupo topológico si se* *cumplen las siguientes condiciones:*

a) $(G, \cdot)$ *es un grupo.*

b) (G, τ) *es un espacio topológico.*

c) Las funciones $l_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *y* $l_2 : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ *dadas por* $l_1(x, y) = x \cdot y$ *y* $l_2 = x^{-1}$ *son continuas, donde* x^{-1} *es el inverso del elemento* x*.*

En ocasiones se prescindirá del uso del símbolo $\cdot$ de la operación binaria, además cuando se hable de grupos abelianos o conmutativos se usará el símbolo $+$ para la operación binaria así como también una notación aditiva. El símbolo e_G denotará a la identidad del grupo G. Cuando no cause confusión simplemente se hará referencia a G como grupo topológico en lugar de la terna $(G, \cdot, \tau)$.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son los siguientes:

a) El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual.

b) El grupo del círculo unitario de los números complejos denotado por $\mathbb{T}$, el cual consiste de todos los números complejos de la forma $e^{2\pi i x}$ donde $x \in \mathbb{R}$, con la multiplicación de los números complejos y la topología que hereda como subespacio del plano complejo.

c) Cualquier grupo dotado con la topología discreta.

d) Cualquier grupo con la topología indiscreta.

e) El grupo multiplicativo de los numeros reales positivos con la topología usual.

f) El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ no degeneradas, con la multiplicación usual de matrices y dotado con la topología inducida por el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$.

g) El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ de matrices $n \times n$ no degeneradas, con la multiplicación usual de matrices y dotado con la topología inducida por el espacio $\mathbb{C}^{n^2}$.

Alternativamente a la definición de grupo topológico tenemos el siguiente lema:

Lema 1.1.2. *Sean $(G,\cdot)$ un grupo y τ una topología en G. Entonces $(G,\cdot,\tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función $l_3 : (G,\tau)\times(G,\tau) \longrightarrow (G,\tau)$ dada como $l_3(x,y) = xy^{-1}$ es continua.*

Así como en teoría de grupos existen los isomorfismos y en topología existen los homeomorfismos, en teoría de grupos topológicos podemos definir las funciones que preservan tanto la estructura algebraica como la topológica.

Definición 1.1.3. *Sean G y H grupos topológicos. Una función $f : G \longrightarrow H$ se llama homomorfismo continuo si es un homomorfismo de grupos y es continua. Además si f es homeomorfismo entonces f se llama isomorfismo topológico. En este caso G y H son topológicamente isomorfos.*

Los siguientes resultados muestran algunas propiedades de los grupos topológicos.

Teorema 1.1.4. *Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento arbitrario cualquiera, entonces las funciones $\varrho_g : G \longrightarrow G$ y $\lambda_g : G \longrightarrow G$ definidas para cada $x \in G$ como $\varrho_g(x) = xg$ y $\lambda_g(x) = gx$ son homeomorfismos. Además la función $f : G \longrightarrow G$ dada como $f(x) = x^{-1}$ es también un homeomorfismo.*

Las funciones ϱ_g y λ_g del teorema 1.1.4 se llaman traslaciones por la derecha e izquierda de g, respectivamente.

Teorema 1.1.5. *Sean G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base local para la identidad e_G del grupo. Entonces las familias $\{xU : x \in G,\ U \in \mathcal{B}\}$ y $\{Ux : x \in G,\ U \in \mathcal{B}\}$ son bases para la topología de G.*

En lo sucesivo se denotará por $\mathcal{B}$ a la familia de vecindades abiertas de e_G en grupo topológico G. Dado un subconjunto E de un espacio topológico X, se define la cerradura de E como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a E. En este trabajo la cerradura de un subconjunto E será denotada como $\overline{E}$.

Teorema 1.1.6. *Sea G un grupo topológico.*

a) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$.

b) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^n \subseteq U$, donde $V^n = V \cdot V \cdot \cdots \cdot V$, n factores.

c) Si $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.

Otra forma de enunciar el teorema 1.1.6 es decir que las vecindades simétricas de e_G constituyen una base local para la identidad e_G del grupo topológico G.

Proposición 1.1.7. *Sean G un grupo topológico, $g \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G. Entonces:*

a) Si O es abierto, entonces los conjuntos gO, Og, O^{-1}, MO y OM son abiertos.

b) Si A es cerrado, entonces aA, Aa y A^{-1} son subconjuntos cerrados.

c) Si A y B son compactos, entonces AB y A^{-1} son compactos.

d) Se cumple que
$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$$

Teorema 1.1.8. *Sea G un grupo topológico T_0 y $\mathcal{B}$ una base local de e_G. Entonces:*

a) Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

b) Para cualesquiera $U \in \mathcal{B}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $Vx \subseteq U$.

c) Para cualesquiera $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.

d) Para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq U$.

e) Para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

f) Se cumple que
$$\{e_G\} = \bigcap \mathcal{B}.$$

Recíprocamente, si G es un grupo y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones anteriores entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología τ tal que (G, τ) es un grupo topológico T_1. Adicionalmente, la familia $\{aU : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la misma topología en G.

Teorema 1.1.9. *Todo grupo topológico es un espacio regular.*

Proposición 1.1.10. *Todo grupo topológico T_1 es Tychonoff.*

Sea G un grupo topológico, entonces la función l_3 definida en el lema 1.1.2 es continua. Si D es un subgrupo de G y consideramos a D con la topología que hereda como subespacio de G, entonces se cumple que la función $l_3|_D$ es continua. Por lo tanto, aplicando nuevamente el lema 1.1.2 se tiene que D es un grupo topológico. Lo anterior se resume en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.11. *Sea G un grupo topológico y D un subgrupo de G con la topología relativa como subespacio de G. Entonces D es un grupo topológico.*

Para evitar confusión entre los espacios topológicos normales y los subgrupos que son normales (desde el punto de vista algebraico), se llamará a estos últimos subgrupos invariantes.

Proposición 1.1.12. *Sea D un subgrupo de un grupo topológico G. Entonces se satisface lo siguiente:*

a) La cerradura $\overline{D}$ de D es un subgrupo de G.

b) Si D es un subgrupo invariante de G, entonces $\overline{D}$ es un subgrupo invariante de G.

c) D es abierto si y sólo si su interior no es vacío.

d) Si G es Hausdorff y D es abeliano, entonces $\overline{D}$ es abeliano.

Corolario 1.1.13. *Si G es un grupo topológico, entonces $\overline{\{e\}}$ es un subgrupo cerrado e invariante de G.*

Otra propiedad interesante de los grupos topológicos es la siguiente:

Proposición 1.1.14. *Cualquier subgrupo abierto de un grupo topológico también es cerrado.*

Proposición 1.1.15. *Si U es una vecindad simétrica de la identidad e_G de un grupo topológico G, entonces $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto (por lo tanto, cerrado) de G.*

Usando la proposición anterior para grupos conexos tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.16. *Sea G un grupo topológico conexo y U una vecindad de la identidad e_G. Entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, es decir, cualquier grupo conexo es generado por cualquier vecindad de e_G.*

Ahora pasaremos al estudio de algunas operaciones importantes en grupos topológicos.

Sean G un grupo topológico y D un subgrupo de G, entonces G/D es el conjunto de todas las clases laterales derechas de D, es decir, $G/D = \{Da : a \in G\}$. Introducimos en G/D una topología como sigue:

Si $\mathcal{B}$ es una base del grupo topológico G, para cada $U \in \mathcal{B}$ definamos $U^* = \{Dx : x \in U\}$ y $\mathcal{B}^* = \{U^* : U \in \mathcal{B}\}$.

Proposición 1.1.17. *Sea G un grupo topológico. Para todo subgrupo D de G, $\mathcal{B}^*$ es una base para una topología en G/D. Si D es cerrado, la topología en G/D es T_1.*

El espacio topológico G/D recibe el nombre de espacio cociente de G entre D. Si D es invariante, entonces G/D se llama grupo cociente.

Proposición 1.1.18. *Si G un grupo topológico y D un subgrupo cerrado de G, entonces la función canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ dada por $\pi(x) = Dx$ para todo $x \in G$ es continua y abierta.*

Teorema 1.1.19. *Sean G un grupo topológico T_1 y D un subgrupo cerrado de G. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) El espacio topológico G/D es un espacio regular y por lo tanto de Hausdorff.

b) El espacio topológico G/D es discreto si y sólo si D es abierto en G.

Teorema 1.1.20. *Sean G un grupo topológico y D un subgrupo cerrado e invariante de G. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) El grupo G/D con la topología cociente es un grupo topológico.

b) La función canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ es un homomorfismo abierto y continuo.

c) El grupo G/D es un espacio T_1 y por lo tanto regular.

d) El grupo G/D es discreto si y sólo si D es abierto.

Definición 1.1.21. *Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es perfecta si f es cerrada, sobreyectiva y para todo $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es compacto en X.*

Teorema 1.1.22. *Sean G un grupo topológico y D un subgrupo compacto, entonces la funcion canónica $\pi : G \longrightarrow G/D$ es perfecta.*

Otra importante operación en grupos topológicos es el producto. Sea $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de grupos topológicos. El producto directo o producto cartesiano de la familia η es el conjunto que consiste de los elementos $x = (x_\alpha)$, donde $x_\alpha \in G_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Tal conjunto es denotado por $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$. Si para cada par de elementos (x_α) y (y_α) del producto cartesiano definimos la operación $(x_\alpha)(y_\alpha) = (x_\alpha y_\alpha)$, entonces $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ toma una estructura de grupo. El elemento identidad de $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es $e = (e_{G_\alpha})$ y para cada $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, se tiene que $(x_\alpha)^{-1} = (x_\alpha^{-1})$. La topología de Tychonoff es compatible con la estructura de grupo de $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, pues la función $l : \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \times \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ dada como $l((x_\alpha), (y_\alpha)) = (x_\alpha y_\alpha^{-1})$ es continua. Esto es, el grupo $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ dotado con la topología de Tychonoff es un grupo topológico.

Ahora pasaremos a definir algunos subgrupos importantes del producto. Sean $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y tomemos $b = (b_\alpha) \in X$. El Σ-producto de η con punto base b es el subespacio de X que consiste de todos los puntos $x = (x_\alpha) \in X$ tales que sólo una cantidad numerable de x_α es distinto de b_α. Este subespacio es denotado por $\Sigma \prod \{X_\alpha : \alpha \in I\}(b)$ o por $\Sigma \prod \eta(b)$. De manera similar se define el σ-producto de η con punto base b como el subespacio de X que consiste de todos los puntos $x = (x_\alpha) \in X$ tales que sólo una cantidad finita de x_α es distinto de b_α. El σ-producto se denota por $\sigma \prod \{X_\alpha : \alpha \in I\}(b)$ o por $\sigma \prod \eta(b)$.

Proposición 1.1.23. *Suponga que $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de grupos topológicos, e_α es el elemento identidad de G_α y $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, entonces el Σ-producto $\Sigma \prod \eta$ y el σ-producto $\sigma \prod \eta$ con punto base $e = (e_\alpha)$ son subgrupos densos de G.*

Algunas propiedades importantes de la teoría de grupos como la torsión, divisibilidad y torsión libre también resultan ser muy útiles en la teoría de grupos topológicos.

Definición 1.1.24. *Sea G un grupo y $g \in G$. El elemento g se llama de torsión si existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g^n = e_G$. Si todo elemento de G es de torsión, entonces G es llamado de torsión. Si $g \in G$, tal que g es distinto de e_G y es un elemento de torsión, entonces el mínimo $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g^n = e_G$ es el orden de g y se denota como $o(g) = n$. Si existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $o(g) \leq m$ para todo $g \in G$, entonces el grupo G es un grupo de torsión acotada o de exponente finito. El menor $m \in \mathbb{N}^+$ con esta propiedad se llama exponente del grupo G. Un grupo G que no tiene elementos de torsión se llama libre de torsión.*

El grupo aditivo $\mathbb{R}$ de los números reales es un ejemplo de un grupo libre de torsión. Para cada entero $n \geq 2$, denotemos por $\mathbb{Z}(n)$ al grupo discreto $\{0, \ldots, n-1\}$ con adición módulo n. Si p es un número primo, entonces $\mathbb{Z}(p)$ es un grupo de torsión acotada y p es el exponente de $\mathbb{Z}(p)$.

En lo sucesivo $tor(G)$ denotará al conjunto de todos los elementos de torsión de un grupo G. Claramente si G es un grupo abeliano, entonces $tor(G)$ es un subgrupo de G. En este contexto $tor(G)$ es llamado el subgrupo de torsión de G.

Definición 1.1.25. *Un elemento g de un grupo abeliano G es divisible en G entre un entero positivo m si $g = mh$, para algún $h \in G$. Un grupo abeliano G es divisible si cada elemento de G es divisible entre cada entero positivo.*

La siguiente proposición nos muestra una manera más simple de ver a los grupos divisibles.

Proposición 1.1.26. *Sea G un grupo y consideremos el conjunto*

$$nG = \{nx : x \in G\},$$

entonces G es divisible si y sólo si $G = nG$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejemplo 1.1.27. El grupo del círculo unitario de los números complejos $\mathbb{T}$ es divisible. En efecto, de acuerdo con la proposición 1.1.26 es suficiente con demostrar la igualdad $\mathbb{T} = n\mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Es claro que $n\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Por lo tanto, sólo resta demostrar $\mathbb{T} \subseteq n\mathbb{T}$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Sean $z \in \mathbb{T}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. Debemos demostrar que $z \in n\mathbb{T}$. Para el polinomio $nx = z$ existe $y \in \mathbb{T}$ que lo satisfce. Es decir, $ny = z$ para algún $y \in \mathbb{T}$. Así $z \in n\mathbb{T}$ y, por lo tanto, $\mathbb{T} = n\mathbb{T}$.

En el teorema 2.2.19 se mostrará que las propiedades de divisibilidad y conexidad son equivalentes en grupos compactos abelianos.

Definición 1.1.28. *Un subgrupo H de un grupo abeliano G se dice que es puro si $nG \cap H = nH$ para cada entero $n > 0$. Es decir, H es puro si todo elemento de H que es divisible entre n en G, también es divisible entre n en H.*

En particular para grupos abelianos y compactos tenemos el siguiente resultado que relaciona la torsión con la torsión acotada.

Proposición 1.1.29. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto. Si G es de torsión, entonces existe un número $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $mx = e_G$ para cada $x \in G$, es decir, G es de torsión acotada.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$ es un subgrupo cerrado de G. Como G es de torsión, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$. Así por el Teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $G[n_0]$ tiene interior no vacío en G. Además para cada $k \in \mathbb{N}$, $G[n_0] \subset G[kn_0]$, así $G[kn_0]$ es un subgrupo abierto de G. Como G es compacto y se cumple que $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G[kn_0]$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G = \bigcup_{k=1}^{k_0} G[kn_0]$. Consideremos $m = k_0!$, entonces $mx = e_G$ para cada $x \in G$. □

Un resultado similar se obtiene como sigue.

Proposición 1.1.30. *Sea G un grupo de torsión con la propiedad de Baire y conexo. Entonces G es de torsión acotada.*

Demostración. Por hipótesis $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$ y $G[n]$ es un subgrupo cerrado de G. Como G tiene la propiedad de Baire, existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $G[k]$ tiene interior no vacío. Por lo tanto $G[k]$ es abierto en G. Puesto que G es conexo, $G[k]$ es cerrado y abierto se tiene que $G = G[k]$. □

1.2. Grupos ω-estrechos

En esta sección se estudia la clase de grupos topológicos ω-estrechos. Estos grupos fueron introducidos por I. Guran en [7] para caracterizar a los subgrupos de productos de familias de grupos topológicos segundo numerables.

Antes de iniciar con la teoría de los grupos topológicos ω-estrechos introducimos algunos conceptos relacionados con la teoría de conjuntos. El concepto de número cardinal en teoría de conjuntos se introduce para clasificar y estudiar los diferentes tipos de infinitos. En este contexto, la cardinalidad de los números naturales $\mathbb{N}$ se denota por ω. Los conjuntos de los números enteros $\mathbb{Z}$ y de los números racionales $\mathbb{Q}$ tienen el mismo cardinal que los números naturales. Así todos los conjuntos anteriores se llaman numerables. Por otra parte, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene un cardinal más grande denotado por $\mathfrak{c}$ y su valor es igual a 2^ω.

Definición 1.2.1. *Un grupo topológico G es ω-estrecho si para toda vecindad U de la identidad de G existe un conjunto numerable $A \subseteq G$ tal que $G = AU$.*

Proposición 1.2.2. *Sea G un grupo topológico ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Si U es una vecindad de la identidad en G, entonces $|U| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad en G. Puesto que G es ω-estrecho, existe $A \subset G$ tal que $|A| \leq \omega$ y $G = AU$. La familia $\mathcal{U} = \{xU : x \in A\}$ es una cubierta numerable de G, donde $|xU| = |U|$ para todo $x \in A$. Como $|G| = \mathfrak{c}$ se sigue que $|U| = \mathfrak{c}$. $\square$

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos no vacíos mutuamente ajenos de X es llamada una familia celular. La celularidad de X se define por $c(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ es una familia celular$\} + \omega$.*

Definición 1.2.4. *La densidad de X se define como*

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso en } X\} + \omega.$$

Proposición 1.2.5. *Si G es un grupo topológico con celularidad numerable, entonces G es ω-estrecho.*

Demostración. Sea U una vecindad de e_G y supongamos que $G \neq AU$ para cada subconjunto numerable A de G. Tomemos a V como una vecindad simétrica de la identidad en G tal que $V \cdot V^{-1} \subset U$. Construyamos recursivamente una sucesión $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de elementos de G como sigue: sea $x_0 = e_G$. Si $\gamma < \omega_1$ y los elementos x_α ya fueron definidos para cada $\alpha < \gamma$, podemos tomar $x_\gamma \in G \setminus (A_\gamma \cdot U)$, donde $A_\gamma = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Por construcción, si $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$, entonces $x_{\alpha_2} \notin x_{\alpha_1}U$. Finalmente probaremos que $\{x_\alpha V : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular. Sean $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega_1$ y supongamos que $(x_{\alpha_1}V) \cap (x_{\alpha_2}V) \neq \emptyset$. Entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $x_{\alpha_1}v_1 = x_{\alpha_2}v_2$, es decir, $x_{\alpha_2} = x_{\alpha_1}v_1v_2^{-1}$ y así $x_{\alpha_2} \in x_{\alpha_1}V \cdot V^{-1} \subset x_{\alpha_1}U$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior, G es ω-estrecho. □

Puesto que $c(X) \leq d(X)$ para todo espacio X, deducimos de la proposición anterior lo siguiente:

Corolario 1.2.6. *Si G es un grupo topológico separable entonces G es ω-estrecho.*

Los siguientes resultados muestran que la clase de grupos topológicos ω-estrechos es estable bajo operaciones de gran importancia.

Proposición 1.2.7. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es ω-estrecho y si existe un homomorfismo continuo y sobre $f : G \longrightarrow H$ entonces H es ω-estrecho.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico ω-estrecho. Sea U una vecindad abierta de la identidad e_H de H. Como f es continua, existe una vecindad V de la identidad e_G de G tal que $f(V) \subset U$. Como G es ω-estrecho existe un subconjunto numerable A de G tal que $AV = G$. Por lo tanto $f(A)f(V) = f(AV) = f(G) = H$, de donde, $f(A)U = H$. Como A es numerable se tiene que $f(A)$ es numerable y por lo tanto H es ω-estrecho. □

Proposición 1.2.8. *Sea $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de grupos topológicos ω-estrechos. Entonces $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es ω-estrecho.*

Demostración. Sea U un abierto básico de G tal que $e_G = (e_{G_\alpha})_{\alpha \in I} \in U$. Digamos que $U = \prod_{\alpha \in B} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} G_\alpha$, donde B es un subconjunto finito de I. Dado que G_α es ω-estrecho para cada $\alpha \in I$, existe un subconjunto numerable A_α de G_α tal que $U_\alpha A_\alpha = G_\alpha$. Considere el subconjunto $A = \prod_{\alpha \in B} A_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} \{e_\alpha\}$. Como B es finito se tiene que A es un subconjunto numerable de G. Finalmente se cumple que

$$\begin{aligned}
AU &= (\prod_{\alpha \in B} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} G_\alpha)(\prod_{\alpha \in B} A_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} \{e_\alpha\}) \\
&= \prod_{\alpha \in B} U_\alpha A_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} G_\alpha \\
&= \prod_{\alpha \in B} G_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus B} G_\alpha \\
&= \prod_{\alpha \in I} G_\alpha = G.
\end{aligned}$$

Como lo anterior sucede para cualquier abierto básico se concluye que G es ω-estrecho. $\square$

El siguiente resultado muestra que la propiedad de ser ω-estrecho se hereda a subgrupos.

Proposición 1.2.9. *Cualquier subgrupo de un grupo topológico ω-estrecho es ω-estrecho.*

Demostración. Sean G un grupo topológico ω-estrecho y H un subgrupo de G. Tomemos una vecindad U de la identidad e en H. Existen vecindades V y W de e en G, tales que $V \cap H = U$ y $W^{-1}W \subseteq V$. Como G es ω-estrecho podemos encontrar un subconjunto numerable K de G tal que $K \cdot W = G$. Si $x \in K$ y xW interseca al subgrupo H, escogemos un punto $a_x \in H \cap (xW)$, en otro caso, hacemos $a_x = e$. Se tiene que el conjunto $A = \{a_x : x \in K\}$ es numerable. Finalmente veamos que $A \cdot U = H$. La inclusión $A \cdot U \subseteq H$ es clara, pues A y U son subconjuntos de H. Sea $y \in H$ un elemento arbitrario. Como $K \cdot W = G$ se tiene que existe $x \in K$ tal que $y \in xW$. Entonces $a_x \in xW$, o bien $x \in a_x W^{-1}$ y por lo tanto,

$$y \in xW \subseteq a_x W^{-1} \cdot W \subseteq a_x V.$$

Puesto que $y, a_x \in H$, concluimos que $a_x^{-1} y \in V \cap H \subseteq U$. Así, $y \in a_x U$ y la inclusión $H \subseteq A \cdot U$ queda demostrada. $\square$

Otro resultado importante de los grupos topológicos ω-estrechos es el siguiente.

Proposición 1.2.10. *Cualquier grupo topológico ω-estrecho y primero numerable tiene una base numerable.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una base local de la identidad e_G de G. Como G es ω-estrecho, para cada $n \in \omega$ existen conjuntos numerables $C_n \subset G$ tales que $U_n C_n = G$. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{xU_n : x \in C_n,\ n \in \omega\}$ es numerable, por lo tanto, sólo resta ver que $\mathcal{B}$ es una base del grupo G.

Sea O una vecindad de un punto $a \in G$. Como $\{U_n : n \in \omega\}$ es una base local de e_G existen $k, l \in \omega$ tal que $aU_k \subset O$ y $U_l^{-1} U_l \subset U_k$. Además existe $x \in C_l$ tal que $a \in xU_l$ y por consiguiente $x \in aU_l^{-1}$. Por lo tanto

$$xU_l \subset (aU_l^{-1})U_l = a(U_l^{-1}U_l) \subset aU_k \subset O,$$

esto es, xU_l es una vecindad abierta de a y $xU_l \subset O$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base numerable para G. $\square$

El siguiente teorema es el más importante de la sección, en el se aborda una caracterización de suma importancia para los grupos topológicos ω-estrechos.

Teorema 1.2.11 (I. Guran)**.** *Sea G un grupo topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) *El grupo G es ω-estrecho.*

b) *El grupo G es topológicamente isomorfo a un subgrupo del producto topológico de alguna familia de grupos segundo numerables.*

La demostración de este teorema se omitirá en este trabajo pero puede consultarse en [7] y [1, teorema 3.4.23].

Capítulo 2

Dualidad Pontryagin-van Kampen

En este capitulo se exponen algunos de los resultados más importantes acerca de la dualidad de Pontryagin-van Kampen para grupos compactos y discretos. Una lectura más detallada puede encontrarse en [8] y [15]. Algunos de estos resultados serán de utilidad en el capitulo 3.

2.1. Introducción a la dualidad de Pontryagin-van Kampen para grupos compactos y discretos

En general, la teoría de Pontryagin-van Kampen establece una relación entre un grupo topológico abeliano G y su grupo dual $\hat{G}$, el cual consiste de todos los homomorfismos continuos de G en el grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Por ejemplo, si G es un grupo topológico abeliano se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto, [8, teorema 23.17].

b) Si G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto, [8, teorema 23.17].

c) El grupo G es conexo si y sólo si $\hat{G}$ es libre de torsión, [8, teorema 24.25].

d) Si G es compacto y Hausdorff, entonces G es metrizable si y sólo si $\hat{G}$ es numerable, [8, teorema 24.17].

Por lo anterior, podemos ver que hay propiedades topológicas que pueden caracterizarse mediante propiedades algebraicas de su grupo dual.

Definición 2.1.1. *Sea G es un grupo topologíco abeliano. Un carácter de G es un homomorfismo continuo $\psi : G \longrightarrow \mathbb{T}$. La colección de todos los caracteres se llama el dual de Pontryagin del grupo G o simplemente el dual del grupo G y es denotado por $\hat{G}$.*

Como una observación tenemos que para cada par de elementos $\psi_1, \psi_2 \in \hat{G}$, se define la operación $(\psi_1 + \psi_2)(g) = \psi_1(g)\psi_2(g)$, entonces $\hat{G}$ se convierte en un grupo abeliano pues $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano.

Si G es un grupo topológico abeliano y compacto y $\hat{G}$ es su grupo dual, entonces $\hat{G}$ dotado con la topología discreta se transforma en un grupo topológico. De manera análoga, si G es un grupo topológico abeliano y discreto, entonces $\hat{G}$ con la topología de la convergencia puntual se convierte en un grupo topológico, [15, proposición 29].

Antes de continuar, enunciamos algunos conceptos conocidos sobre C_p-teoría. Sean X un espacio de Tychonoff y G un grupo topológico. Denotamos por $C_p(X, G)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X en G. Si $f_1, f_2 \in C_p(X, G)$, entonces $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$ define una operación binaria en $C_p(X, G)$. Con la topología de la convergencia puntual y con la operación $+$ introducida anteriormente, el espacio $C_p(X, G)$ es un grupo topológico. Para cada $x \in X$ existe una correspondiente función evaluación $\hat{x} : C_p(X, G) \longrightarrow G$, definida por $\hat{x}(f) = f(x)$, para cada $f \in C_p(X, G)$. Claramente la función $\hat{x}$ es continua. Si Y es un subespacio de $C_p(X, G)$, definimos la función $\Psi_Y : X \longrightarrow C_p(Y, G)$ que asigna a cada $x \in X$ la restricción de $\hat{x}$ a el espacio Y. La función Ψ_Y es conocida como la función reflección o evaluación y es continua para cada subespacio Y de $C_p(X, G)$.

Si H y G son grupos topológicos, denotamos por $Hom_p(H, G)$ al subespacio de $C_p(H, G)$ que consiste de todos los homomorfismos continuos de H a G.

Proposición 2.1.2. *Si G y H son grupos topológicos, entonces el subespacio $Hom_p(H, G)$ es cerrado en $C_p(H, G)$.*

Demostración. Sean x, y elementos distintos de H y consideremos el conjunto:

$$F(x, y) = \{f \in C_p(H, G) : f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1}\}.$$

Entonces $F(x, y)$ es un subespacio cerrado de $C_p(H, G)$ para cada $x, y \in H$. El subespacio $Hom_p(H, G)$ es la intersección de los conjuntos $F(x, y)$, con $x, y \in H$. Por lo anterior $H_p(H, G)$ es cerrado en $C_p(H, G)$. $\square$

Proposición 2.1.3. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es abeliano, entonces $Hom_p(H, G)$ es un subgrupo topológico del grupo topológico $C_p(H, G)$.*

Demostración. En la demostración usaremos una notación aditiva para los grupos G y $Hom_p(G, H)$. Sean $x, y \in H$ y $f, g \in Hom_p(H, G)$. Entonces para el elemento $f + g$ de $C_p(H, G)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (f+g)(xy) &= f(xy) + g(xy) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) \\ &= (f+g)(x) + (f+g)(y). \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} (f+g)(x^{-1}) &= f(x^{-1}) + g(x^{-1}) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) \\ &= -((f+g)(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g \in Hom_p(H, G)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} (-f)(xy) &= -(f(xy)) = -(f(x) + f(y)) = -f(x) - f(y) \\ &= (-f)(x) + (-f)(y). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} (-f)(x^{-1}) &= -(f(x^{-1})) = -(-(f(x))) \\ &= -((-f)(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-f \in Hom_p(H, G)$. Por lo anterior, $Hom_p(H, G)$ es cerrado bajo las operaciones de suma e inverso. Por lo tanto $Hom_p(H, G)$ es un subgrupo del grupo topológico $C_p(H, G)$. $\square$

Teorema 2.1.4. *Sean G y H grupos topológicos. Si G es abeliano y Ψ es la función restricción Ψ_Y, donde $Y = Hom_p(H, G)$, entonces Ψ es un homomorfismo continuo de H al grupo topológico abeliano $Hom_p(Hom_p(H, G), G)$.*

Demostración. Claramente Ψ es una función continua. Por la proposición 2.1.3, $Hom_p(Hom_p(H, G), G)$ es un grupo topológico. Puesto que $C_p(H, G)$ es abeliano, se tiene que $Hom_p(Hom_p(H, G), G)$ es un grupo abeliano.

Para ver que Ψ es homomorfismo, tomemos $a, b \in H$ y $f \in Y$, donde $Y = Hom_p(H, G)$. Entonces $\Psi(ab)(f) = f(ab) = f(a)f(b) = \Psi(a)(f)\Psi(b)(f)$, por lo tanto, $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$. De manera análoga se puede demostrar que $\Psi(-a) = -\Psi(a)$. Por lo anterior se tiene que Ψ es un homomorfismo continuo. $\square$

Proposición 2.1.5 (L. S. Pontryagin)**.** *Si G es un grupo abeliano y discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto y Hausdorff.*

Demostración. Si G es discreto, entonces cualquier función $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ será continua. Por lo tanto, $C_p(G, \mathbb{T})$ coincide con el producto $\mathbb{T}^G$ con la topología de Tychonoff. Como $\mathbb{T}^G$ es compacto y Hausdorff, se tiene que $C_p(G, \mathbb{T})$ es compacto y Hausdorff. Por otro lado, $\hat{G}$ coincide con $Hom_p(G, \mathbb{T})$. Por la proposición 2.1.2 se tiene que $\hat{G}$ es cerrado en $C_p(G, \mathbb{T})$. Por lo tanto $\hat{G}$ es compacto y Hausdorff. $\square$

La siguiente proposición es una consecuencia del teorema 2.1.4.

Proposición 2.1.6. *Para cualquier grupo topológico compacto y abeliano G, la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un homomorfismo continuo.*

Lema 2.1.7. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Si $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es la evaluación canónica, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) La evaluación canónica Ψ es uno a uno.

b) El grupo G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Es decir, para cada $g, h \in G$, con $g \neq h$, existe $f \in \hat{G}$ tal que $f(g) \neq f(h)$.

Demostración. Para la prueba de la necesidad, supongamos que $g, h \in G$, $g \neq h$, son tales que $f(g) = f(h)$, para cada $f \in \hat{G}$. Entonces $\hat{g}(f) = \hat{h}(f)$, para todo $f \in \hat{G}$. Por lo tanto $\hat{g} = \hat{h}$, es decir, $\Psi(g) = \Psi(h)$. Como Ψ es uno a uno, se tiene que $g = h$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G tiene suficientes caracteres para separar puntos.

Para demostrar la suficiencia, supongamos que G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Sean $g, h \in G$ tales que $g \neq h$. Entonces existe $f \in \hat{G}$ tal que $f(g) \neq f(h)$, es decir, $\hat{g}(f) \neq \hat{h}(f)$. Por lo tanto $\hat{g} \neq \hat{h}$. De donde $\Psi(g) \neq \Psi(h)$. $\square$

La demostración del siguiente teorema fundamental puede consultarse en [16] y en [1, teorema 9.4.11].

Teorema 2.1.8 (Peter, Weyl)**.** *Todo grupo abeliano compacto tiene suficientes caracteres para separar puntos.*

Como una consecuencia del teorema 2.1.8 y el lema 2.1.7 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.1.9. *Para cualquier grupo topológico compacto y abeliano G, la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es uno a uno.*

El siguente ejemplo presenta al dual del grupo discreto $\mathbb{Z}$, el cual, por la proposición 2.1.5 debe ser compacto y Hausdorff.

Ejemplo 2.1.10. El grupo dual de Pontryagin $\hat{\mathbb{Z}}$ del grupo discreto $\mathbb{Z}$ es el grupo compacto $\mathbb{T}$. Si $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ es un carácter de $\mathbb{Z}$, este está determinado por el valor $h(1) \in \mathbb{T}$, con $1 \in \mathbb{Z}$, pues $\mathbb{Z}$ es generado por 1. Además $h(1)$ puede ser cualquier elemento de $\mathbb{T}$. Por lo anterior cualquier elección de un número complejo en $\mathbb{T}$ da un carácter en $\hat{\mathbb{Z}}$. Finalmente, si V es un abierto básico de h en la topología de la convergencia puntual en $\hat{\mathbb{Z}}$, entonces V corresponde a una vecindad arbitraria de $h(1)$ en el espacio $\mathbb{T}$. De esto, $\hat{\mathbb{Z}}$ es isomorfo y homeomorfo al grupo $\mathbb{T}$.

Los siguientes resultados son hechos conocidos sobre el grupo de los números reales los cuales se mencionan con el propósito de establecer el grupo dual del grupo $\mathbb{T}$.

Lema 2.1.11. *Cada subgrupo no discreto H de $\mathbb{R}$ es denso.*

Demostración. Debemos probar que $H \cap (x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \emptyset$ para cualquier $\epsilon > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$. Como H no es discreto, 0 no es un punto aislado, entonces existe $x_\epsilon \in H \cap (0, \epsilon)$. Como los intervalos $[nx_\epsilon, (n+1)x_\epsilon]$, $n = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots$ cubren a $\mathbb{R}$ y tienen tamaño menor a ϵ, para alguna n, se cumple que $nx_\epsilon \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Claramente $nx_\epsilon \in H$, pues H es subgrupo. $\square$

Lema 2.1.12. *Sea A un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces $A = \{0\}$, $A = \mathbb{R}$ o A es un subgrupo discreto de la forma $a\mathbb{Z}$, para alguna $a > 0$.*

Demostración. Si A es cerrado y propio, entonces A no es denso en $\mathbb{R}$. Así A debe ser discreto por el lema 2.1.11. Si $A \neq \{0\}$, entonces A contiene algún número real positivo b. Entonces $[0, b] \cap A$ es un subconjunto cerrado no vacío del subconjunto compacto $[0, b]$. Por lo tanto $[0, b] \cap A$ es compacto y discreto. De donde $[0, b] \cap A$ es finito. Por lo anterior existe $a > 0$, tal que

a es el elemento mínimo positivo en A. Para cada $x \in A$, sea $\left[\frac{x}{a}\right]$ la parte entera de $\frac{x}{a}$. Entonces $x - \left[\frac{x}{a}\right] a \in A$ y como $\left[\frac{x}{a}\right] \leq \frac{x}{a} < 1 + \left[\frac{x}{a}\right]$ se tiene que $0 \leq x - \left[\frac{x}{a}\right] a < a$. Como a es el mínimo en A con esta propiedad, se sigue que $x - \left[\frac{x}{a}\right] a = 0$. Por lo tanto, $x = na$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. □

El siguiente resultado determina los subgrupos cerrados de $\mathbb{T}$. En particular declara que cada subgrupo cerrado infinito de $\mathbb{T}$ coincide con $\mathbb{T}$.

Proposición 2.1.13. *Sea K un subgrupo de $\mathbb{T}$. Si K es cerrado, entonces $K = \mathbb{T}$ o K es cíclico finito.*

Demostración. Sea K un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Además supongamos que $K \neq \{1\}$. Recordando que $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, consideremos la función canónica $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Entonces π es un homomorfismo continuo y abierto. Por lo anterior, $\pi^{-1}(K)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$ y por el lema 2.1.12, $\pi^{-1}(K) = \mathbb{R}$ o $\pi^{-1}(K)$ es un grupo cíclico discreto. Si $\pi^{-1}(K) = \mathbb{R}$, entonces $K = \pi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pues π es una función sobreyectiva. Si $\pi^{-1}(K) = \langle r \rangle$, para algún $r \in \mathbb{R}$, entonces $K = \langle \pi(r) \rangle$. Además como $\pi^{-1}(K)$ es discreto, y la función π es abierta tenemos que K es discreto. Puesto que $\mathbb{T}$ es compacto, se tiene que K es finito. □

Como una consecuencia de la proposición 2.1.13 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.14. *Si K es un subgrupo cerrado y conexo de $\mathbb{T}$, entonces $K = \mathbb{T}$ o $K = \{1\}$.*

Demostración. Como K es cerrado, por la proposición 2.1.13 se tiene que $K = \mathbb{T}$ o K es cíclico finito. Como K es conexo, $K = \mathbb{T}$ o $K = \{1\}$. □

Proposición 2.1.15. *Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe sólo un subgrupo de $\mathbb{T}$ que consta de exactamente n elementos.*

Ahora se expone el grupo dual de Pontryagin del grupo del círculo $\mathbb{T}$.

Ejemplo 2.1.16. El grupo dual de Pontryagin $\hat{\mathbb{T}}$ del grupo compacto $\mathbb{T}$ es el grupo discreto $\mathbb{Z}$. Sea $h : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ un carácter de $\hat{\mathbb{T}}$, denotemos por K al nucleo de h. Si h no es trivial, entonces por la proposición 2.1.13, K es un subgrupo cíclico finito de $\mathbb{T}$. Por la proposición 2.1.15, existe sólo un subgrupo de $\mathbb{T}$ que consta de exactamente n elementos, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, cada carácter $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ tiene la forma $f(z) = z^n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Por lo anterior, existe una correspondencia entre el grupo de caracteres y el conjunto de números enteros. Por lo tanto, $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$.

Definición 2.1.17. *Supongamos que G es un grupo topológico compacto o discreto. Decimos que G satisface la dualidad de Pontryagin o que G es un grupo reflexivo si la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Los siguientes resultados muestran que los grupos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}$ satisfacen la dualidad de Pontryagin.

Proposición 2.1.18. *La función evaluación $\Psi : \mathbb{T} \longrightarrow \hat{\hat{\mathbb{T}}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. La función identidad separa los puntos de $\mathbb{T}$ y por el lema 2.1.7 se tiene que la función evaluación Ψ de $\mathbb{T}$ a $\hat{\hat{\mathbb{T}}}$ es uno a uno. Como $\mathbb{T}$ es compacto, se tiene que $\Psi(\mathbb{T})$ es un subgrupo cerrado infinito de $\hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Por los ejemplos anteriores tenemos que $\mathbb{T} = \hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Por la proposición 2.1.13 tenemos que $\Psi(\mathbb{T}) = \hat{\hat{\mathbb{T}}}$. Finalmente como Ψ es continua y $\mathbb{T}$ es compacto, tenemos que Ψ es un isomorfismo topológico. $\square$

Proposición 2.1.19. *La función evaluación $\Psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\hat{\mathbb{Z}}}$ es un isomorfismo topológico.*

Proposición 2.1.20. *Sea K un grupo topológico cíclico finito. Entonces $\hat{K}$ es isomorfo a K.*

Demostración. Suponga que $K = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Entonces $\psi \in \hat{K}$ si y sólo si $\psi(1) = z \in \mathbb{T}$, con $z^n = 1$. Es decir $\psi(1)$ sólo tiene n posibilidades, a saber, las n-ésimas raices de la unidad. Por lo tanto, la correspondencia $\psi \longrightarrow \psi(1) \in W$, donde, $W = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ es una biyección. Por lo tanto, $\hat{K} \simeq W \simeq K$. $\square$

Proposición 2.1.21. *La función evaluación de K al grupo discreto $\hat{\hat{K}}$ es un isomorfismo topológico, para cualquier grupo cíclico finito K.*

Por las proposiciones anteriores se sigue que $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$, y cualquier grupo cíclico finito satisfacen la dualidad de Pontryagin. De acuerdo con la teoría de grupos, un grupo G se dice finitamente generado si existe un subconjunto finito S de G tal que $\langle S \rangle = G$. Cualquier grupo abeliano finitamente generado es el producto de un número finito de grupos cíclicos, finitos o infinitos.

El siguiente teorema puede encontrarse en [18].

Teorema 2.1.22 (L. S. Pontryagin)**.** *Supongamos que G es el producto de una colección finita de grupos abelianos y discretos G_i, $i = 1, \ldots, m$, donde cada G_i satisface la dualidad de Pontryagin, X_i es el grupo de caracteres de G_i, $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$, y $[x, a] = x_1(a_1) \cdot \cdots \cdot x_m(a_m)$, para cada $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ y cada $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$. Entonces $[\cdot, \cdot]$ cumple lo siguiente:*

a) Para cada $x \in X$, la correspondencia $a \longrightarrow [x, a]$, donde a corre sobre G, es un carácter sobre el grupo G.

b) Para cada carácter $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ de G, existe $x \in X$ tal que $f(a) = [x, a]$, para cada $a \in G$.

c) Para cada $a \in G$, la correspondencia $x \longrightarrow [x, a]$, donde x corre sobre X, es un carácter continuo sobre el grupo compacto X.

d) Para cada carácter continuo $\psi : X \longrightarrow \mathbb{T}$, existe $a \in G$ tal que $\psi(x) = [x, a]$, para cada $x \in X$.

Demostración.

Primero probemos a). Utilizando una notación aditiva para el grupo G se tiene que:

$$\begin{aligned} [x, a + b] &= \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} x_k(b_k) \\ &= [x, a] \cdot [x, b]; \end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b \in G$, así la correspondencia $a \longrightarrow [x, a]$ es un carácter en G.

Para demostrar b) notemos que G_i puede ser identificado canónicamente con el subgrupo de G que consiste de todos los $a \in G$ tales que cada coordenada a_j de a, excepto a_i, es el elemento identidad e_j de G_j.

Sea $x_i = f|_{G_i}$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Entonces x_i es un carácter en G_i. Consideremos $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$. Tomemos cualquier $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$. Bajo esta interpretación de G_i, tenemos que $G_i \subset G$ y $a = a_1 + \cdots + a_m$. Así tenemos que

$$[x, a] = \prod_{k=1}^{m} x_k(a_k) = \prod_{k=1}^{m} f(a_k) = f(a).$$

La prueba de c) es análoga a la prueba de 1.

Finalmente demostremos d). Cada X_i puede ser identificado canónicamente como un subgrupo topológico de X. Entonces $\psi_i = \psi|_{X_i}$ es un carácter continuo en X_i, para cada $i = 1, \ldots, m$. Dado que G_i satisface la dualidad de Pontryagin, existe $a_i \in G_i$ tal que $\psi(x_i) = x_i(a_i)$, para cada $x_i \in X_i$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$. Entonces $\psi(x) = [x, a]$, para cada $x \in X$. □

Como una consecuencia inmediata del teorema 2.1.22 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.23. *Supongamos que G es el producto de una cantidad finita de grupos abelianos discretos G_i, $i = 1 \ldots, m$, donde cada G_i satisface la dualidad de Pontryagin. Entonces el grupo dual $\hat{G}$ de G es el producto de los grupos duales $\hat{G}_i$, $i = 1 \ldots, m$, y los grupos G y $\hat{G}$ también satisfacen la dualidad de Pontryagin.*

Corolario 2.1.24. *Supongamos que G es el producto de una colección finita de grupos compactos elementales (el grupo topológico $\mathbb{T}$ y todos los grupos cíclicos finitos). Entonces G satisface la dualidad de Pontryagin.*

Demostración. Se sigue del corolario 2.1.23 y las proposiciones 2.1.18 y 2.1.21. □

Otro resultado interesante acerca de los grupos compactos elementales es el siguiente:

Proposición 2.1.25. *Supongamos que F es un subgrupo cerrado del grupo topológico $\mathbb{T}^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces F es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales.*

Demostración. La demostración se hará por inducción. Usando la proposición 2.1.13 se tiene el caso cuando $n = 1$. Supongamos que cualquier subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^{n-1}$ es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales. Considere la proyección natural p de $\mathbb{T}^n$ sobre $\mathbb{T}^{n-1}$, donde $n > 1$. Como F es cerrado, $p(F)$ es cerrado, así satisface la hipótesis, es decir, $p(F)$ es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales. Por la proposición 2.1.13 se tiene que $K = \ker(p|F)$ es finito o $K = \ker(p) = \mathbb{T}$, pues K es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Por lo tanto F es topológicamente isomorfo al producto $K \times p(F)$. □

Las siguientes proposiciones serán de utilidad en las demostraciones de los teoremas de dualidad expuestos al final de esta sección.

Proposición 2.1.26. *Supongamos que G es un grupo abeliano y compacto. Si f es un carácter de $\hat{\hat{G}}$, esto es, f es un homomorfismo de $\hat{G}$ a $\mathbb{T}$, entonces para cada conjunto finito $h_1, \ldots, h_m$ de elementos de $\hat{G}$, existe $a \in G$ tal que $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo continuo $\rho : G \longrightarrow \mathbb{T}^m$ dado como $\rho(g) = (h_1(g), \ldots, h_m(g))$. Sea $F = \ker(\rho) = \bigcap_{i=1}^m \ker h_i$, entonces F es un subgrupo cerrado de G. Por lo tanto, el grupo cociente G/F es topológicamente isomorfo a $\rho(G)$. Como G es compacto se tiene que G/F es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}^m$. Así G/F es topológicamente isomorfo al producto de un número finito de grupos compactos elementales, por la proposición 2.1.25. Ahora por el corolario 2.1.24 se tiene que G/F satisface la dualidad de Pontryagin. Sea $\pi : G \longrightarrow G/F$ el homomorfismo cociente. Consideremos la función $\pi^* : \widehat{G/F} \longrightarrow \hat{G}$, donde $\pi^*(q) = q \circ \pi$, para cada $q \in \widehat{G/F}$. Entonces π^* es un isomorfismo de $\widehat{G/F}$ sobre un subgrupo M de $\hat{G}$ tal que $h_i \in M$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Sean $q_1, \ldots, q_m$ en $\widehat{G/F}$ tal que $\pi^*(q_i) = h_i$, para cada $i = 1 \ldots, m$.

Por otro lado, $\phi = f \circ \pi^*$ es un carácter en $\widehat{G/F}$. Como $\widehat{G/F}$ satisface la dualidad de Pontryagin existe $c \in G/F$ tal que $\phi(q_i) = q_i(c)$, para $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, $\phi(q_i) = f(\pi^*(q_i)) = f(h_i)$, para $i = 1, \ldots, m$. Tomemos $a \in G$ tal que $\pi(a) = c$. Como $h_i = q_i \circ \pi$, se tiene que $h_i(a) = q_i(\pi(a)) = q_i(c)$. Así, $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Proposición 2.1.27. *Existe una vecindad abierta V de la identidad 1 del grupo $\mathbb{T}$ tal que el único subgrupo de $\mathbb{T}$ contenido en V es $\{1\}$. De hecho, se puede tomar la vecindad $V = \{e^{\pi i x} : \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$.*

Proposición 2.1.28. *Para cualquier grupo abeliano y compacto G y cualquier subgrupo propio cerrado H de G, existe un carácter no trivial f en G tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.*

Demostración. Como G es compacto se tiene que G/H es un grupo topológico compacto, además, como H es un subgrupo propio cerrado de G se sigue que G/H no es trivial. Aplicando el teorema 2.1.8, existe un carácter no trivial f' en el grupo cociente G/H. Sea $f = f' \circ \pi$, donde π es el homomorfismo cociente de G sobre G/H. Claramente, f es un carácter de G y $f(h) = 1$ para cada $h \in H$. $\square$

El siguiente resultado muestra que cada grupo topológico discreto tiene suficientes caracteres para separar puntos.

Proposición 2.1.29. *Para cualquier grupo abeliano G y cualquier elemento $a \in G$ distinto de la identidad e_G de G, existe un homomorfismo f de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ tal que $f(a) \neq 1$.*

De manera análoga, utilizando la proposición 2.1.29 en el cociente G/H obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.30. *Para cualquier grupo abeliano y discreto G y cualquier subgrupo propio H de G, existe un carácter no trivial f en G tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.*

Presentamos a continuación los resultados más importantes de esta sección, los cuales demuestran que todo grupo abeliano compacto o discreto satisface la dualidad de Pontryagin-van Kampen. A estos teoremas se les suele llamar los teoremas de dualidad para grupos compactos y discretos.

El teorema 2.1.31 fue probado por Pontryagin para grupos abelianos, compactos y metrizables en [17]. Poco después se extendió a grupos abelianos, localmente compactos no necesariamente metrizables por E. van Kampen en [12].

Teorema 2.1.31 (L. S. Pontryagin, E. van Kampen)**.** *Si G es un grupo abeliano y compacto, entonces la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.1.6 se cumple que la función evaluación Ψ de G sobre $\hat{\hat{G}}$ es un homomorfismo continuo. Por el teorema 2.1.8, existen suficientes caracteres en G para separar puntos de G, por lo tanto, por el corolario 2.1.9, la función evaluación Ψ es uno a uno.

Puesto que G es compacto, se sigue que Ψ es un isomorfismo topológico de G sobre el subgrupo cerrado $B = \Psi(G)$ de $\hat{\hat{G}}$. Para demostrar que la función evaluación es un isomorfismo topológico sólo resta demostrar que $B = \hat{\hat{G}}$.

Supongamos lo contrario. Sea $M = \hat{\hat{G}}$. Entonces M/B es un grupo topológico abeliano, compacto y no trivial. Como B es un subgrupo cerrado de $\hat{\hat{G}}$, por la proposición 2.1.28, podemos encontrar un carácter no trivial ξ en M tal que $\xi(b) = 1$, para cada $b \in B$. Además, por la proposición 2.1.27, existe una vecindad V de 1 en $\mathbb{T}$ tal que V no contiene subgrupos no triviales. Como ξ es continua, existe una vecindad abierta W del elemento identidad e_M de M tal que $\xi(W) \subset V$.

De acuerdo con la definición de topología de la convergencia puntual, existe una colección finita $h_1, h_2, \ldots, h_m$ de elementos de $\hat{G}$ y $\varepsilon > 0$ tal que la siguiente condición se cumple:

$$\text{si } f \in M \text{ y } |f(h_i) - 1| < \varepsilon \text{ para cada } i = 1, \ldots, m, \text{ entonces } f \in W. \tag{2.1}$$

Sea $L = \{f \in M : f(h_i) = 1 \text{ para cada } i = 1, \ldots, m\}$. Entonces L es un subgrupo de M y $L \subset W$. Puesto que $\xi(W) \subset V$, entonces $\xi(L) \subset V$. Como ξ es un homomorfismo, $\xi(L)$ es un subgrupo de $\mathbb{T}$. Así $\xi(L)$ es un subgrupo de $\mathbb{T}$ contenido en V. Por la elección de V se sigue que $\xi(L) = \{1\}$.

Tomemos ahora cualquier $f \in M$. Demostraremos que $\xi(f) = 1$. Por la proposición 2.1.26, existe $a \in G$ tal que $f(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Por la definición de la función evaluación Ψ, para $g = \Psi(a)$ se cumple también que $g(h_i) = h_i(a)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto $(fg^{-1})(h_i) = 1$, para cada $i = 1, \ldots, m$, es decir, $fg^{-1} \in L$. Así $\xi(fg^{-1}) = 1$ y nuevamente, como ξ es un homomorfismo se tiene que $\xi(f) = \xi(g)$. Como $g = \Psi(a) \in \Psi(G) = B$, tenemos que $\xi(g) = 1$, por la elección de ξ. De esto último se tiene que $\xi(f) = 1$. Por la arbitrariedad de f, se tiene que $\xi(f) = 1$ para cada $f \in M$, pero esto es una contradicción pues ξ es un carácter no trivial. Por lo tanto $B = \hat{\hat{G}}$ y así la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico. □

Teorema 2.1.32. *Si G es un grupo abeliano y discreto, entonces la función evaluación $\Psi : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo (topológico).*

Demostración. Primero veamos que Ψ es uno a uno. Sean $g, h \in G$, tales que $g \neq h$. Por lo anterior se tiene que $gh^{-1} \neq e_G$. Así, por la proposición 2.1.29 existe un carácter f de G a $\mathbb{T}$ tal que $f(gh^{-1}) \neq e_G$. De donde $f(g) \neq f(h)$. Por lo tanto, $\hat{g}(f) \neq \hat{h}(f)$, así $\hat{g} \neq \hat{h}$. Por la definición de Ψ se tiene que $\Psi(g) \neq \Psi(h)$. Por lo tanto, Ψ es uno a uno. Por el teorema 2.1.4 tenemos que Ψ es un homomorfismo. Así resta probar que Ψ es sobreyectiva. Supongamos por el contrario que Ψ no es sobreyectiva. Sea $H = \Psi(G)$. Entonces H es un subgrupo propio del grupo abeliano y discreto $\hat{\hat{G}}$. Por el corolario 2.1.30, existe un carácter no trivial $f : \hat{\hat{G}} \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$.

Por otro lado, puesto que G es discreto se tiene que $\hat{G}$ es compacto. Aplicando el teorema 2.1.31 se tiene que la función evaluación de $\hat{G}$ a su segundo grupo dual es sobreyectiva. Así, para el carácter f existe $\chi \in \hat{G}$ tal que

$$f(y) = y(\chi), \text{ para cada } y \in \hat{\hat{G}}. \tag{2.2}$$

Como f es un carácter no trivial se tiene que χ es un carácter no trivial en G. Por lo tanto, existe $a \in G$ tal que $\chi(a) \neq 1$.

Tomemos $h_0 = \Psi(a)$. Entonces $h_0(\chi) = \chi(a) \neq 1$. Por otro lado, $f(h_0) = 1$, pues $h_0 \in H = \Psi(G)$. Finalmente, por (2.2) tenemos que $h_0(\chi) = f(h_0)$. Por lo tanto, $h_0(\chi) = 1$ es una contradicción. Así se tiene que Ψ es sobreyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo. □

2.2. Teoremas estructurales para los grupos compactos abelianos

El propósito de esta sección es estudiar algunas propiedades de los grupos abelianos y compactos utilizando la teoría de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. Los siguientes resultados técnicos serán de utilidad más adelante.

Corolario 2.2.1. *Supongamos que G es un grupo abeliano, compacto o discreto, y H un subgrupo cerrado de $\hat{G}$ que separa elementos de G. Entonces $H = \hat{G}$.*

Demostración. Supongamos que $H \neq \hat{G}$. Como G es un grupo abeliano, compacto o discreto, aplicando las proposiciones 2.1.30 y 2.1.28, existe un carácter no trivial f de $\hat{G}$, tal que $f(h) = 1$, para cada $h \in H$. Por los teoremas 2.1.31 y 2.1.32, existe $a \in G$, tal que $f(y) = y(a)$, para cada $y \in \hat{G}$. Además $a \neq e_G$, pues f es no trivial. Como H separa los elementos de G, existe $h \in H$ tal que $h(a) \neq 1$. Por otro lado, por la elección de f y de a tenemos que $h(a) = f(h) = 1$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.2.2. *Sea G un grupo topológico, compacto o discreto, y H un subgrupo cerrado de G. Entonces la función restricción $\phi : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ dada por $\phi(f) = f|_H$, para cada $f \in \hat{G}$, es un homomorfismo continuo y abierto del grupo topológico $\hat{G}$ sobre el grupo topológico $\hat{H}$.*

Demostración. Claramente ϕ es un homomorfismo continuo. Como $\hat{G}$ y $\hat{H}$ son ambos compactos o discretos, la función ϕ es cerrada y, por lo tanto, cociente. De esto se sigue que ϕ es abierta. Sólo falta demostrar que ϕ es sobreyectiva. El subgrupo $\phi(\hat{G})$ separa los elementos de H, pues $\hat{G}$ separa los elementos de G. Como ϕ es cerrada, $\phi(\hat{G})$ es un subgrupo cerrado de $\hat{H}$. Se sigue del corolario 2.2.1 que $\phi(\hat{G}) = \hat{H}$. □

Teorema 2.2.3. *Suponga que G es un grupo abeliano, compacto o discreto, H es un subgrupo cerrado de G, y f es un carácter continuo en H. Entonces existe un carácter continuo g en G tal que $g|_H = f$.*

Demostración. Por la proposición 2.2.2, la función restricción $\phi : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ dada por $\phi(f) = f|_H$, para cada $f \in \hat{G}$, es un homomorfismo continuo y abierto del grupo topológico $\hat{G}$ sobre el grupo topológico $\hat{H}$. En particular, si f es un carácter continuo en H, como ϕ es sobreyectiva, existe $g \in \hat{G}$ tal que $g|_H = f$. □

Teorema 2.2.4. *Si G es un grupo finito abeliano, entonces el grupo $\hat{G}$ es isomorfo a G.*

Demostración. Cualquier grupo abeliano finito es el producto de un número finito de grupos cíclicos. Por la proposición 2.1.20, el grupo de caracteres de un grupo cíclico K es isomorfo a K. Por el corolario 2.1.23 se tiene que $\hat{G}$ es isomorfo a G. □

Teorema 2.2.5. *Para cualquier grupo abeliano, discreto y finitamente generado G, el grupo dual $\hat{G}$ es el producto de una familia finita de grupos cada uno de los cuales es o bien un grupo cíclico finito o el grupo del círculo $\mathbb{T}$.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo abeliano, discreto y finitamente generado. Entonces G es el producto de una colección finita de grupos, cada uno de los cuales es un grupo cíclico finito o el grupo discreto $\mathbb{Z}$. Aplicando la proposición 2.1.20, el corolario 2.1.23 y el hecho que $\hat{\mathbb{Z}}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}$, llegamos a la conclusión deseada. □

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [4, teorema 1.1.14].

Teorema 2.2.6. *Si el peso de un espacio topológico X es menor o igual a $\mathfrak{m}$, entonces para cualquier familia $\{U_s\}_{s\in S}$ de subconjuntos abiertos de X existe $S_0 \subset S$ tal que $|S_0| \leq \mathfrak{m}$ y $\bigcup_{s\in S_0} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.*

El próximo resultado apoyado de la dualidad de Pontryagin muestra que una propiedad puramente topológica corresponde a una propiedad de una naturaleza totalmente diferente en el grupo dual.

Teorema 2.2.7. *El peso de un grupo abeliano compacto e infinito G coincide con la cardinalidad de su grupo dual.*

Demostración. Sea e el elemento identidad de G. Consideremos los conjuntos $X = G\setminus\{e\}$, y $F_f = X \cap \ker(f)$, para cada $f \in \hat{G}$. Entonces $\xi = \{F_f : f \in \hat{G}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tales que $\bigcap \xi = \emptyset$, pues los caracteres continuos de G separan elementos de G. Sea τ el peso de G. De acuerdo con el teorema 2.2.6, existe una subfamilia η de ξ tal que $\bigcap \eta = \emptyset$ y $|\eta| \leq \tau$. En otras palabras, existe un subconjunto H de $\hat{G}$ tal que $|H| \leq \tau$ y $\bigcap\{\ker(f) : f \in H\} = \{e\}$. Además, podemos suponer que H es un subgrupo de $\hat{G}$. Puesto que H separa elementos de G, se sigue del corolario 2.2.1 que $H = \hat{G}$. Por lo tanto $|\hat{G}| \leq \tau$.

Finalmente, supongamos que $|\hat{G}| = \tau$ para algún cardinal $\tau \geq \omega$. Como $\hat{G}$ es discreto se tiene que el espacio $\hat{\hat{G}}$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{T}^{\hat{G}} \cong \mathbb{T}^\tau$. Denotemos por $w(\mathbb{T}^\tau)$ al peso de $\mathbb{T}^\tau$. Como G es homeomorfo a $\hat{\hat{G}}$, y $w(\mathbb{T}^\tau) \leq \tau$, se sigue que $w(G) \leq \tau$. Por lo tanto $w(G) = |\hat{G}|$. □

El siguiente teorema muestra una caracterización de los grupos topológicos metrizables a partir del primer axioma de numerabilidad.

Teorema 2.2.8 (G. Birkhoff, S. Kakutani)**.** *Un grupo topológico es metrizable si y sólo si es primero numerable.*

La demostración de este teorema se omitirá pero puede consultarse en [11], [3] y [1, teorema 3.3.12]. Como una consecuencia inmediata de los teoremas 2.2.7 y 2.2.8 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.9. *Un grupo abeliano compacto es metrizable si y sólo si su grupo dual $\hat{G}$ es numerable.*

De los teoremas de dualidad para grupos abelianos discretos y compactos y el corolario anterior se deriva el siguiente resultado:

Corolario 2.2.10. *Un grupo abeliano discreto G es numerable si y sólo si su grupo dual $\hat{G}$ es segundo numerable.*

Lema 2.2.11. *Suponga que f es un carácter continuo no trivial sobre un grupo abeliano compacto G. Entonces f es de orden infinito en $\hat{G}$ si y sólo si $f(G)$ es un subespacio conexo de $\mathbb{T}$.*

Demostración. Suponga que $f(G)$ es conexo. Como G es compacto y f es continua entonces $f(G)$ es un subgrupo cerrado y conexo de $\mathbb{T}$, se sigue de la proposición 2.1.14 que $f(G) = \mathbb{T}$. Como $\mathbb{T}$ es un grupo divisible, se tiene que $f^n(G) = \mathbb{T}$, para cada entero positivo n, donde, para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $f^n(x) = f(x) \cdot f^{n-1}(x)$. Así el homomorfismo f^n no es trivial para cada entero positivo n. Por lo tanto, f es de orden infinito.

Ahora supongamos que $f \in \hat{G}$ y $n \in \mathbb{N}$ satisfacen que $f^n(x) = 1$, para cada $x \in G$, donde f es un carácter distinto del elemento identidad de $\hat{G}$. Sea $K_n = \{z \in \mathbb{T} : z^n = 1\}$ y $H = f(G)$. Entonces $H \subset K_n$ y H contiene al elemento 1 y al menos un elemento más de $\mathbb{T}$ pues f no es trivial. Como K_n contiene exactamente n elementos se sigue que H es un subespacio finito que contiene más de un elemento. Por lo tanto $H = f(G)$ es disconexo. □

El siguiente resultado será de utilidad más adelante. La demostración es simple y puede consultarse en [1, teorema 3.1.8].

Proposición 2.2.12. *Suponga que G es un grupo topológico y F es una vecindad compacta y abierta de la identidad e de G. Entonces existe un subgrupo compacto y abierto H de G, tal que $H \subset F$.*

A continuación presentamos uno de los resultados más interesantes acerca de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. El cual determina que para los grupos topológicos abelianos y compactos existen propiedades topológicas que pueden caracterizarse en términos de propiedades puramente algebraicas de su grupo dual. Este resultado aparece en [17] y [18].

Teorema 2.2.13 (L. S. Pontryagin)**.** *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es conexo si y sólo si el grupo dual $\hat{G}$ es libre de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es conexo. Sea f un carácter no trivial de G. Entonces $f(G)$ es conexo y por el lema 2.2.11 se tiene que f es de orden infinito en $\hat{G}$. Como esto ocurre para todo carácter no trivial de G, se cumple que $\hat{G}$ es libre de torsión.

Ahora supongamos que G es disconexo. Entonces existe un subconjunto abierto y cerrado U de G que contiene al elemento identidad e de G. Por la proposición 2.2.12 existe un subgrupo abierto y cerrado H de G, tal que $H \subset F$.

Consideremos el grupo cociente G/H. Como H es abierto y cerrado se tiene que G/H es discreto, compacto y contiene más de un elemento, es decir, G/H es finito. Por lo tanto, existe un carácter no trivial ϕ en G/H. Sea $f = \phi \circ p$, donde $p : G \longrightarrow G/H$ es el homomorfismo canónico. Por lo tanto, f es un carácter no trivial en G, y $f(G) = \phi(G/H)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{T}$ que contiene más de un elemento. Por lo tanto, $f(G)$ es disconexo. Aplicando nuevamente el lema 2.2.11 se tiene que f es de orden finito en $\hat{G}$. $\square$

Recordemos que un espacio topológico X es totalmente disconexo si para cada $x \in X$, la componente conexa C_x de x es el conjunto $\{x\}$. Por otro lado, un espacio topológico X tiene dimensión 0 o es 0-dimensional si X tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados en X.

La demostración de los siguientes resultados referentes a espacios totalmente disconexos puede consultarse en [1, proposición 3.1.7] y [1, teorema 3.1.14], respectivamente.

Proposición 2.2.14. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, totalmente disconexo y localmente compacto. Entonces X es 0-dimensional.*

Teorema 2.2.15. *Sean G un grupo topológico localmente compacto totalmente disconexo y H un subgrupo cerrado de G. Entonces el cociente G/H es 0-dimensional.*

El siguiente teorema es una caracterización de los grupos topológicos abelianos y compactos que son totalmente disconexos.

Teorema 2.2.16. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es totalmente disconexo si y sólo si el grupo dual $\hat{G}$ es de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es totalmente disconexo. Por la proposición 2.2.14 se tiene que G es 0-dimensional. Sea f un carácter no trivial de G y defínase $F = f(G)$ y $H = \ker(f)$. La función f es cerrada pues G es un grupo compacto y f es un homomorfismo continuo. Por lo tanto, el subgrupo F de $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo al grupo cociente G/H y la función f de G sobre el subespacio F de $\mathbb{T}$ es también abierta. Aplicando el teorema 2.2.15, tenemos que el grupo cociente G/H de G es 0-dimensional. Por lo tanto, F es 0-dimensional y así $F \neq \mathbb{T}$. Como f es un carácter no trivial, se tiene que $|F| > 1$. Por lo tanto, F es disconexo y por el lema 2.2.11 se tiene que f es de orden finito.

Ahora supongamos que G no es totalmente disconexo. Por lo tanto, existe un subconjunto conexo A de G tal que $|A| > 1$. Claramente, podemos asumir que el elemento identidad e_G de G está en A. Sea $a \in A$ tal que $a \neq e_G$. Como G es compacto, por el teorema 2.1.8 existen suficientes caracteres para separar puntos. Así existe un carácter no trivial f de G, tal que $f(a) \neq 1$. Puesto que A es conexo, se tiene que $B = f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{T}$ que contiene más de un elemento. Dado que G es compacto se tiene que $f(G)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. Por lo anterior y puesto que $B \subset f(G)$ se tiene que $f(G)$ es un subgrupo cerrado e infinito de $\mathbb{T}$ y por la proposición 2.1.13, $f(G) = \mathbb{T}$, esto es, $f(G)$ es conexo. Por lo tanto, por el lema 2.2.11, f es de orden infinito en $\hat{G}$. □

Los siguientes resultados son consecuencia de los teoremas de dualidad y los teoremas 2.2.13 y 2.2.16, respectivamente.

Corolario 2.2.17. *Sea G un grupo abeliano y discreto. Entonces G no tiene elementos de orden finito distintos de la identidad si y sólo si el grupo dual $\hat{G}$ es conexo.*

Corolario 2.2.18. *Sea G un grupo abeliano y discreto. Entonces G es de torsión si y sólo si el grupo dual $\hat{G}$ es totalmente disconexo (equivalentemente 0-dimensional).*

El siguiente teorema muestra una caracterización de los grupos topológicos abelianos compactos y conexos en términos de una propiedad puramente algebraica, a saber, la divisibilidad.

Teorema 2.2.19. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Entonces G es divisible si y sólo si G es conexo.*

Demostración. Suponga que G es divisible. Sea f un carácter no trivial de G. Por el teorema 2.2.13, es suficiente probar que f es de orden infinito en $\hat{G}$, para obtener la conexidad de G.

Puesto que f es un carácter no trivial, existe $a \in G$ tal que $f(a) \neq 1$. Consideremos cualquier número entero $n > 0$. Como G es divisible, existe $b \in G$ tal que $nb = a$. Entonces $f^n(b) = (f(b))^n = f(nb) = f(a) \neq 1$. Por lo tanto $f(b) \neq 1$. Así f^n no es el elemento identidad de $\hat{G}$. Puesto que lo anterior es válido para cada entero positivo n, se concluye que f es de orden infinito en $\hat{G}$. Por lo tanto, G es conexo.

Supongamos ahora que G no es divisible. Sea $a \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny \neq a$ para cada $y \in G$. Consideremos el conjunto $F = \{ny : y \in G\}$. Claramente F es un subgrupo de G y $a \notin F$. Consideremos el producto topologico $G^n = \prod_{i=1}^n G_i$, donde cada $G_i = G$. Por lo tanto, G^n es un grupo topológico compacto. Si $\varphi : G^n \longrightarrow G$ es una función definida como $\varphi(x_1, \dots x_n) = \Sigma_{i=1}^n x_i$, tenemos que φ es una función continua. Sea Δ la diagonal del producto G^n. Como G^n es compacto y Δ es cerrado en G^n se tiene que Δ es compacto. Como $\varphi(\Delta) = F$, concluimos que F es un subespacio compacto de G y, por lo tanto, F es cerrado en G. Por lo anterior, existe un carácter f en G tal que $f(a) \neq 1$ y $f(y) = 1$, para cada $y \in F$. Por el teorema 2.2.13, para demostrar que G es disconexo, es suficiente con demostrar que f^n es el elemento identidad de $\hat{G}$. Sea $x \in G$. Entonces $nx \in F$. De donde $f^n(x) = (f(x))^n = f(nx) = 1$. Como esto es válido para cada $x \in G$, se tiene que f^n es el elemento identidad de $\hat{G}$. □

El próximo resultado es conveniente a la hora de encontrar el dual de algunos grupos topológicos con ciertas caracteristicas.

Proposición 2.2.20. *Supongamos que $G = \oplus_{i \in I} G_i$ es la suma directa de grupos abelianos, y que G tiene la topología discreta. Entonces el grupo dual $\hat{G}$ es topológicamente isomorfo al producto topológico $X = \prod_{i \in I} \hat{G}_i$, donde $\hat{G}_i$ es el grupo dual de Pontryagin de G_i, para cada $i \in I$.*

Demostración. Para cada $\chi = (\chi_i)_{i \in I}$ en X y cada $g \in G$, sea

$$[\chi, g] = \prod_{i \in I} \chi_i(g_i), \tag{2.3}$$

donde $g = \sum_{i \in I} g_i$ y $g_i \in G_i$, para cada $i \in I$. Es claro que la función $[\chi, \cdot]$ es un carácter de G, para cada $\chi \in X$. Si $j \in I$, denote por H_j al subgrupo de G cuyos elementos $h = \sum_{i \in I} g_i$ satisfacen que $g_i = e_{G_i}$, para cada $i \neq j$. Así, H_i es topológicamente isomorfo a G_i. Para cada carácter χ de G, sea χ_j la restricción de χ al subgrupo H_j, $j \in I$. Entonces χ_j es un carácter de H_j y $\varphi(\chi) = (\chi_j)_{j \in I}$ es un elemento de X. Por (2.3) se tiene que $\chi(g) = [\varphi(\chi), g]$, para cada $g \in G$, esto es, $\chi = [\varphi(\chi), \cdot]$. Así la función $T : X \longrightarrow \hat{G}$ que manda los elementos $(\chi_i)_{i \in I}$ en los elementos $[\varphi(\chi), \cdot]$ es un isomorfismo algebraico. Como X está dotado con la topología producto se tiene que T es continua. Finalmente, como X es compacto se tiene que T es un isomorfismo topológico. $\square$

Recordando que un grupo abeliano de torsión es de torsión acotada si existe un número entero positivo m, tal que $mx = e_G$, para cada $x \in G$. El mínimo entero positivo con esta propiedad es llamado el *exponente* de G. A continuación se presenta de manera puntual la estructura de los grupos topológicos abelianos y compactos que tienen exponente un número primo.

Teorema 2.2.21. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto de exponente un número primo p. Entonces G es topológicamente isomorfo al grupo $\mathbb{Z}(p)^\kappa$, para algún cardinal $\kappa \geq 0$.*

Demostración. Puesto que G es compacto se tiene que $\hat{G}$ es discreto. Sea $f \in \hat{G}$ tal que f es no trivial. Entonces para cada $x \in G$ se tiene $f^p(x) = (f(x))^p = f(px) = f(e) = 1$, donde e es el elemento identidad de G. Por lo tanto, f es de orden p en $\hat{G}$. Considere $\hat{G}$ como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Z}(p)$. Si tomamos un base de Hamel para $\hat{G}$, tenemos que $\hat{G}$ es la suma directa de κ copias del grupo $\mathbb{Z}(p)$, para algun cardinal κ, digamos, $\hat{G} \cong \oplus_{\alpha<\kappa}\mathbb{Z}(p)_\alpha$. Por la proposición 2.2.20 se tiene que G es topológicamente isomorfo al producto de κ copias del grupo dual $\hat{\mathbb{Z}}(p) = \mathbb{Z}(p)$. $\square$

Corolario 2.2.22. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto. Entonces para cada número primo p, el subgrupo $G[p] = \{x \in G : px = e_G\}$ de G es topológicamente isomorfo al grupo $\mathbb{Z}(p)^\kappa$, para algún cardinal κ.*

Demostración. Para un número primo p considere el homomorfismo ϕ_p de G a G definido por $\phi_p(x) = px$, para cada $x \in G$. Entonces ϕ_p es continua y el kernel de ϕ_p coincide con $G[p]$. Por lo tanto, $G[p]$ es un subgrupo cerrado de G. Por lo anterior, como G es compacto, se tiene que $G[p]$ es compacto. Aplicando el teorema 2.2.21, se tiene el resultado. $\square$

El siguiente teorema refleja una característica especial de la estructura algebraica de los grupos de torsión acotada. Una demostración puede encontrarse en [19, teorema 4.3.5].

Teorema 2.2.23 (Prüfer, Baer)**.** *Sea G un grupo topológico abeliano de torsión acotada. Entonces G es isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos de orden finito.*

Finalmente mostramos en el siguiente teorema una caracterización de la estructura de los grupos abelianos compactos.

Teorema 2.2.24. *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto y de torsión. Entonces G es topológicamente isomorfo al producto finito $\mathbb{Z}(n_1)^{\kappa_1} \times \mathbb{Z}(n_2)^{\kappa_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}(n_r)^{\kappa_r}$, donde $n_1, n_2, \ldots, n_r$ son enteros positivos diferentes dos a dos y $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ son cardinales arbitrarios mayores o iguales a 1.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$. Como G es un grupo de torsión se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G[n]$. Además para cada $n \in \mathbb{N}$, $G[n]$ es un subgrupo cerrado de G. Puesto que G es compacto, este cumple la propiedad de Baire, por lo tanto $G[m]$ tiene interior no vacío para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, $G[m]$ es un subgrupo abierto de G. Por lo anterior el grupo cociente $G/G[m]$ es finito. Sea s el orden de $G/G[m]$. Como G es abeliano, se tiene que para cada $x \in G$, $msx = e_G$. Es decir G es un grupo de torsión acotada. Por lo tanto, el grupo dual de G, $\hat{G}$ es también de torsión acotada. Aplicando el teorema 2.2.23, tenemos que

$$\hat{G} \cong \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}(n_i)^{\kappa_i},$$

donde $n_1, \ldots, n_r$ son enteros positivos diferentes dos a dos y $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ son números cardinales. Finalmente el resultado se obtiene aplicando el teorema 2.2.20. $\square$

Corolario 2.2.25. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Si G de torsión, entonces G es 0-dimensional.*

Capítulo 3

Grupos Topológicos Densamente Independientes

3.1. Introducción a los grupos topológicos densamente independientes

El presente capítulo se centra en el estudio de condiciones necesarias y suficientes de la siguiente propiedad: Sea G un grupo topológico tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Entonces para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un subgrupo denso y numerable H de G tal que $S \cap H = \{e_G\}$, donde e_G es el elemento identidad de G. Por ejemplo, se probará que el grupo de los números reales $\mathbb{R}$ y el grupo del círculo $\mathbb{T}$ cumplen con tal propiedad. El propósito de este capítulo es utilizar la teoría de la dualidad de Pontryagin-van Kampen para ver que características debe cumplir un grupo topológico para que se cumpla tal propiedad. Se pondrá especial atención a los grupos topológicos abelianos, compactos y metrizables de cardinalidad $\mathfrak{c}$. La noción de grupo topológico densamente independiente aparece por primera vez en [14]. En este trabajo A. Leiderman y M. Tkachenko demuestran que si κ es un cardinal tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y S es un subgrupo del grupo compacto $C = \mathbb{Z}(2)^\kappa$ tal que $|S| < \mathfrak{c}$, entonces C contiene un subconjunto independiente, denso y numerable X tal que $\langle X \rangle \cap S = \{e\}$ (ver [14, Proposition 3.2]).

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo topológico separable tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Entonces se dice que G es un grupo densamente independiente si para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un subgrupo denso y numerable H de*

G tal que $S \cap H = \{e_G\}$, donde e_G es el elemento identidad de G.

Los primeros resultados muestran ejemplos de grupos que no cumplen la propiedad.

Teorema 3.1.2. *Sean G y H grupos topológicos tales que $tor(G)$ es abierto en G y $tor(H)$ no es denso en H. Entonces para cada subgrupo denso S de $G \times H$, la intersección $S \cap (\{e_G\} \times H)$ tiene más de un elemento.*

Demostración. Sea S un subgrupo denso de $G \times H$. Como $tor(H)$ no es denso en H, existe un abierto no vacío U de H tal que $U \cap tor(H) = \emptyset$. Entonces U es un conjunto abierto que consta de elementos de orden infinito de H. Sea V un abierto no vacío de G tal que $V \subseteq tor(G)$. Tomemos el abierto $V \times U$ de $G \times H$, como S es denso de $G \times H$, existen $g \in V$ y $h \in U$, tales que $(g, h) \in S$. Dado que $V \subseteq tor(G)$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $g^n = e_G$. Como S es subgrupo, $(g^n, h^n) = (e_G, h^n) \in S$ y puesto que $h^n \neq e_H$, se tiene que $|S \cap (\{e_G\} \times H)| > 1$. $\square$

Como corolarios del teorema anterior tenemos los siguiente resultados:

Corolario 3.1.3. *Sean G un grupo topológico discreto y H un grupo topológico numerable y libre de torsión. Entonces para cada subgrupo denso S de $G \times H$, la intersección $S \cap (\{e_G\} \times H)$ tiene más de un elemento.*

Corolario 3.1.4. *Sean G un grupo topológico de torsión y H un grupo topológico libre de torsión tal que $|H| > 1$. Entonces para cada subgrupo denso S de $G \times H$, la intersección $S \cap (\{e_G\} \times H)$ tiene más de un elemento.*

A continuación, enunciamos algunos resultados que nos permitirán establecer bajo qué condiciones el grupo G es densamente independiente.

Lema 3.1.5. *Sea G un grupo topológico abeliano ω-estrecho y libre de torsión tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Sean S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y U un abierto no vacío de G. Entonces existe $x \in U$ distinto de e_G tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío de G. Supongamos que para cada $x \in U$ tal que $x \neq e_G$, $|\langle x \rangle \cap S| \geqslant 2$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx \in S$ y $nx \neq e_G$.

Para cada $x \in U \setminus \{e_G\}$, sean $n_x = \min\{n \in \mathbb{N}^+ : nx \in S\}$ y $s_x = n_x x$. Entonces la función $\psi : U \setminus \{e_G\} \longrightarrow \mathbb{N}^+ \times S$ dada como $\psi(x) = (n_x, s_x)$, no es inyectiva, pues $|\mathbb{N}^+ \times S| < \mathfrak{c}$ y $|U \setminus \{e_G\}| = \mathfrak{c}$ ya que G es ω-estrecho y, por la proposición 1.2.2, la cardinalidad de U es $\mathfrak{c}$. Así existen $x, y \in U \setminus \{e_G\}$ con $x \neq y$ tales que $(n_x, s_x) = (n_y, s_y)$, esto es $n_x = n_y$ y, por lo tanto, $n_x x = n_x y$, de donde $n_x(x - y) = e_G$, pero esto no puede ocurrir pues G es libre de torsión. Por lo tanto, existe $x \in U$ tal que $x \neq e_G$ y $|\langle x \rangle \cap S| = 1$. $\square$

El siguiente resultado es una generalización del lema 3.1.5.

Lema 3.1.6. *Sea G un grupo topológico abeliano ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$ y $|G/tor(G)| = \mathfrak{c}$. Entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe $x \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sean S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y U un abierto no vacío de G. Consideremos el homomorfismo canónico $\pi : G \longrightarrow G'$, donde $G' = G/tor(G)$. Como $|S| < \mathfrak{c}$ entonces $\pi(S)$ es un subgrupo de G' de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Puesto que π es una función abierta se tiene que $\pi(U)$ es un abierto no vacío de G'. Por otro lado G' es un grupo topológico libre de torsión y ω-estrecho pues G es ω-estrecho. Entonces por el lema 3.1.5 existe $z \in \pi(U)$, $z \neq e_{G'}$, tal que $\langle z \rangle \cap \pi(S) = \{e_{G'}\}$. Como π es una función sobreyectiva, existe $x \in U$ tal que $\pi(x) = z$. Para concluir la demostración veamos que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.

Supongamos que $|\langle x \rangle \cap S| > 1$. Entonces existe un número entero positivo m tal que $mx \in S$ y $mx \neq e_G$. Como π es homomorfismo se tiene que $\pi(mx) = mz$. Como $z \neq e_{G'}$ y G' es libre de torsión, se cumple que $mz \neq e_{G'}$. Por otro lado, tenemos que $mz \in \pi(S) \cap \langle z \rangle$ y, por lo tanto, $mz = e_{G'}$, lo cual es una contradicción. Así que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$. $\square$

Corolario 3.1.7. *Sea G un grupo topológico abeliano ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$ y $|tor(G)| < \mathfrak{c}$. Entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe $x \in U$ tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Consideremos el grupo cociente $G' = G/tor(G)$. Por el lema 3.1.6 es suficiente probar que $|G'| = \mathfrak{c}$, puesto que para cualquier subgrupo D de G se cumple

$$|G| = |G/D| \cdot |D|.$$

Dado que $|tor(G)| < \mathfrak{c}$, la igualdad anterior implica que $|G'| = \mathfrak{c}$. $\square$

Corolario 3.1.8. *Sea G un grupo topológico abeliano ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$ y $|tor(G)| < \mathfrak{c}$. Entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un elemento de orden infinito $x \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Apliquemos el corolario 3.1.7 al subgrupo $S + tor(G)$. Como $|S + tor(G)| < \mathfrak{c}$, para cada abierto no vacío U de G, existe $x \in U$ tal que $x \neq e_G$ y $|\langle x\rangle \cap (S + tor(G))| = 1$. En particular $|\langle x\rangle \cap S| = 1$ y claramente x es un elemento de orden infinito. □

Definición 3.1.9. *Sea G un grupo abeliano, decimos que G es casi libre de torsión, si para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo $G[n] = \{x \in G : nx = e_G\}$ es finito.*

Algunos ejemplos de grupos casi libres de torsión son $\mathbb{T}$ y el grupo $\mathbb{Z}(p^\infty) = \{z \in \mathbb{C} : z^{(p^n)} = 1, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$. También se cumple que si G es un grupo casi libre de torsión, entonces $|tor(G)| \leq \omega$. En vista del corolario 3.1.8, tenemos el siguiente corolario para grupos casi libres de torsión.

Corolario 3.1.10. *Sea G un grupo topológico abeliano casi libre de torsión ω-estrecho tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe $x \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $|\langle x\rangle \cap S| = 1$.*

Lema 3.1.11. *Sea G un grupo topológico abeliano, metrizable y separable tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Si para cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y cada abierto no vacío U de G existe $x \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $|\langle x\rangle \cap S| = 1$, entonces G es densamente independiente.*

Demostración. Puesto que G es metrizable y separable, existe una base numerable $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de G. Por el corolario 1.2.6, tenemos que G es ω-estrecho. Sea S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Entonces por hipótesis, para U_0 existe $x_0 \in U_0$ tal que $x_0 \neq e_G$ y $|\langle x_0\rangle \cap S| = 1$. Tomemos el subgrupo $S_1 = \langle x_0\rangle + S$ y el abierto U_1 de la base del grupo topológico. Puesto que $|S_1| < \mathfrak{c}$, por hipótesis, podemos encontrar $x_1 \in U_1$ tal que $x_1 \neq e_G$ y $|\langle x_1\rangle \cap S_1| = 1$. Por inducción, para $i \in \mathbb{N}^+$ definamos $S_i = \langle x_{i-1}\rangle + S_{i-1}$. Como $|S_i| < \mathfrak{c}$, por hipótesis existe $x_i \in U_i$ tal que $x_i \neq e_G$ y $|\langle x_i\rangle \cap S_i| = 1$. Esto termina la construcción de la sucesión $\{x_i : i \in \omega\}$.

Sea H el subgrupo generado por los x_i descritos anteriormente. Por construcción H es un subgrupo denso de G ya que $x_i \in H \cap U_i$ para cada $i \in \omega$.

Finalmente veamos que $S \cap H = \{e_G\}$. Si suponemos que $S \cap H \neq \{e_G\}$, entonces existen $s \in S$, $s \neq e_G$ y $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_l}$ generadores de H todos diferentes de e_G tales que $s = k_1x_{n_1} + k_2x_{n_2} + \cdots + k_lx_{n_l}$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_l$ son enteros diferentes de cero, $n_1 < n_2 < \cdots < n_l$ y $k_ix_{n_i}$ es diferente de e_G para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Por lo anterior, $s \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n_l}\rangle$. Además como $s = k_1x_{n_1} + k_2x_{n_2} + \cdots + k_lx_{n_l}$, entonces

$$k_1x_{n_1} + k_2x_{n_2} + \cdots + k_{l-1}x_{n_{l-1}} - s = t_lx_{n_l},$$

donde $t_l = -k_l$. De esto se tiene que $t_l x_{n_l} \in \langle x_0, x_1, \dots, x_{n_{l-1}} \rangle + S = S_{n_l}$, lo cual es una contradicción, pues por construcción $|\langle x_{n_l} \rangle \cap S_{n_l}| = 1$. Por lo tanto, $S \cap H = \{e_G\}$. □

El siguiente resultado muestra que los grupos topológicos abelianos, metrizables, separables y libres de torsión son densamente independientes.

Teorema 3.1.12. *Si G es un grupo topológico abeliano, metrizable, separable y libre de torsión tal que $|G| = \mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente.*

Demostración. La demostración se sigue de los lemas 3.1.5 y 3.1.11. □

Puesto que el grupo $\mathbb{R}$ cumple todas las hipótesis del teorema 3.1.12, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.1.13. *El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual es densamente independiente.*

Teorema 3.1.14. *Sea G un grupo topológico abeliano, metrizable, separable tal que $|G| = \mathfrak{c}$ y $|tor(G)| < \mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente.*

Demostración. La demostración se sigue del corolario 3.1.8 y el lema 3.1.11. □

De la misma manera para grupos casi libres de torsión se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1.15. *Sea G un grupo topológico abeliano, metrizable, separable casi libre de torsión tal que $|G| = \mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente.*

Por el corolario 3.1.15 se tiene el siguiente resultado para $\mathbb{T}$.

Corolario 3.1.16. *El grupo del círculo unitario de los números complejos $\mathbb{T}$ es densamente independiente.*

Ejemplo 3.1.17. Sean p y q números primos tales que $p \neq q$. Consideremos el grupo topológico $G_1 = \mathbb{Z}(p)^\omega$ y el grupo discreto $G_2 = \mathbb{Z}(q)$ y sea G el grupo topológico $G_1 \times G_2$. Tomemos el subgrupo finito $S = \{e_{G_1}\} \times G_2$ de G y cualquier subgrupo denso H de G. Como $\{1\}$ es abierto en G_2, entonces $U = G_1 \times \{1\}$ es abierto en G. Sea $x \in U \cap H$, entonces $x = (t, 1)$, con $t \in G_1$. Como H es subgrupo de G, se tiene que $px \in H$, pero $px = (pt, p) = (e_{G_1}, p) \in S$. Como (e_{G_1}, p) es distinto de la identidad de G se tiene que

$|S \cap H| > 1$. Notemos que G es un grupo topológico abeliano, compacto y de torsión no conexo ni divisible. De la misma forma pueden utilizarse argumentos para demostrar que para los números enteros $r \geq 1$ y $l > 1$, los grupos $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(q)^r$ y $\mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p^l)$ no son densamente independientes.

Lema 3.1.18. *Sea G un grupo topológico abeliano ω-estrecho con exponente un número primo p y tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Si S es un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y U es un abierto no vacío de G, entonces existe $x \in U$ distinto de e_G tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío de G. Supongamos que para cada $x \in U$ tal que $x \neq e_G$, se cumple que $|\langle x \rangle \cap S| \geq 2$. Consideremos el conjunto $K = \{1, 2, \ldots, (p-1)\}$, por lo anterior existe $n \in K$ tal que $nx \in S$ y $nx \neq e_G$.

Para cada $x \in U$, sean $n_x = \min\{n \in K : nx \in S\}$ y $s_x = n_x x$. Consideremos la función $\psi : U \setminus \{e_G\} \longrightarrow K \times S$ definida como $\psi(x) = (n_x, s_x)$. Como $|K \times S| < \mathfrak{c}$ y $|U \setminus \{e_G\}| = \mathfrak{c}$, pues G es ω-estrecho, se tiene que ψ no es una función inyectiva. Por lo tanto existen $x, y \in U \setminus \{e_G\}$ con $x \neq y$ tales que $(n_x, s_x) = (n_y, s_y)$. De esta igualdad se tiene que $n_x = n_y$ y como $s_x = s_y$, se sigue que $n_x x = n_x y$ y, por lo tanto, $n_x(x - y) = e_G$. Puesto que p es primo y $0 < n_x < p$ la igualdad anterior no puede suceder, con lo cual llegamos a una contradicción. Por lo tanto, existe $x \in U$ tal que $x \neq e_G$ y $|\langle x \rangle \cap S| = 1$. □

Teorema 3.1.19. *Sea G un grupo topológico abeliano metrizable, separable con exponente un número primo p y tal que $|G| = \mathfrak{c}$, entonces G es densamente independiente.*

Demostración. La demostración se sigue de los lemas 3.1.18 y 3.1.11. □

Corolario 3.1.20. *Sean p un número primo y $G = \mathbb{Z}(p)^\omega$ la potencia numerable del grupo topológico discreto $\mathbb{Z}(p)$ con la topología de Tychonoff. Entonces G es densamente independiente.*

Demostración. Se tiene que G es un grupo metrizable, separable de exponente p. Además como G es infinito y compacto, tenemos que $|G| = \mathfrak{c}$. Por lo tanto, por el teorema 3.1.19, G es densamente independiente. □

Los siguientes resultados muestran que la propiedad de ser densamente independiente es cerrada bajo productos a lo más numerables.

Proposición 3.1.21. *El producto finito de grupos densamente independientes es densamente independiente.*

Proposición 3.1.22. *Sea X un espacio topológico. Si Y es un subespacio denso de X y Z es un subespacio denso de Y, entonces Z es un subespacio denso de X.*

Proposición 3.1.23. *Sea $\lambda = \{G_\alpha : \alpha \in \omega\}$ una familia numerable de grupos topológicos tales que $|G_\alpha| = \mathfrak{c}$, para cada $\alpha \in \omega$. Si para cada $\alpha \in \omega$, el grupo G_α es densamente independiente, entonces el grupo $G = \prod_{\alpha\in\omega} G_\alpha$ es densamente independiente.*

Demostración. Sea S un subgrupo de G, tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Consideremos $\pi_\alpha : G \longrightarrow G_\alpha$ la función definida como $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ para cada $x \in G$, donde $x_\alpha \in G_\alpha$ es la α-ésima coordenada de x. Entonces $S_\alpha = \pi_\alpha(S)$ es un subgrupo de G_α, para cada $\alpha \in \omega$. Además $|S_\alpha| < \mathfrak{c}$, para cada $\alpha \in \omega$, pues $|S| < \mathfrak{c}$. Por lo tanto, para cada $\alpha \in \omega$, existe un subgrupo denso H_α de G_α, tal que $S_\alpha \cap H_\alpha = \{e_{G_\alpha}\}$. Sea $\eta' = \{H_\alpha : \alpha \in \omega\}$ y consideremos el σ-producto de la familia η', denotado por $\sigma \prod \eta'$. Puesto que para cada $\alpha \in \omega$, H_α es denso en G_α, entonces $H = \prod \eta'$ es denso en G. Como $\sigma \prod \eta'$ es denso en H, por la proposición 3.1.22, se tiene que $\sigma \prod \eta'$ es denso en G. Finalmente, si $x \in G$, $x \neq e_G$, es tal que $x \in S \cap \sigma \prod \eta'$, entonces existe $\alpha \in \omega$, tal que $x_\alpha = \pi_\alpha(x) \neq e_{G_\alpha}$ y $x_\alpha \in S_\alpha \cap \pi_\alpha(\sigma \prod \eta') \subseteq S_\alpha \cap H_\alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S \cap \sigma \prod \eta' = \{e_G\}$. □

El recíproco de la proposición 3.1.23 es falso, como se podrá ver en el ejemplo 3.2.8.

Corolario 3.1.24. *Si $G = \mathbb{R}^\omega$, entonces G es densamente independiente.*

Demostración. La demostración se sigue del corolario 3.1.13 y la proposición 3.1.23. □

Corolario 3.1.25. *Sea $G = \mathbb{T}^\omega$, donde $\mathbb{T}$ es el grupo del círculo. Entonces G es densamente independiente.*

Otro resultado interesante y contrastante con el ejemplo 3.1.17 se refleja en el siguiente corolario:

Corolario 3.1.26. *Sea p un número primo y consideremos el grupo $G = \mathbb{Z}(p) \times \mathbb{T}$. Entonces G es densamente independiente.*

Demostración. La prueba es clara pues G es un grupo topológico abeliano, compacto, metrizable, casi libre de torsión. Entonces aplicando el corolario 3.1.15 se tiene el resultado. $\square$

Usando un argumento similar al del corolario 3.1.26, puede demostrarse que $\mathbb{Z}(p)^r \times \mathbb{T}$, $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(q) \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z}(p)$, donde $r \in \mathbb{N}^+$ y p, q son primos, son algunos grupos densamente independientes. El próximo teorema es un resultado interesante acerca de la estructura de los grupos abelianos compactos, localmente conexos de dimensión finita. Una demostración puede encontrarse en [18] y [1, teorema 9.6.24].

Teorema 3.1.27 (L. S. Pontryagin)**.** *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto, localmente conexo y de dimensión topológica finita. Entonces G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times F$, donde $n = \dim(G)$ y F es un grupo abeliano finito.*

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 3.1.28. *Si G es un grupo topológico abeliano, compacto, localmente conexo y de dimensión finita. Entonces G es densamente independiente.*

Demostración. Por el teorema 3.1.27, se tiene que G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times F$, donde $n = \dim(G)$ y F es un grupo abeliano finito. Por otro lado, F es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}(n_m)$. Consideremos el grupo $L = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}(n_m)$, entonces $|tor(L)| = \omega$, pues $|tor(\mathbb{T})| = \omega$. Aplicando el teorema 3.1.14 tenemos que L es densamente independiente. Como $\mathbb{T}$ es densamente independiente entonces por la proposición 3.1.23 se tiene el resultado para el grupo $\mathbb{T}^{n-1} \times L$. $\square$

Lema 3.1.29. *Sean G_1 un grupo abeliano, compacto y metrizable y G_2 un grupo abeliano, compacto, metrizable y casi libre de torsión tal que $|G_2| = \mathfrak{c}$. Si $G = G_1 \times G_2$, entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G, tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un elemento de orden infinito $x \in U$ tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sea S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Consideremos un abierto no vacío U de G. Si $\pi : G \longrightarrow G_2$ es la función definida como $\pi(a, b) = b$, donde $(a, b) \in G$, entonces π es un homomorfismo continuo sobre y abierto. Como S es subgrupo de G, se tiene que $\pi(S)$ es un subgrupo de G_2, tal que $|\pi(S)| < \mathfrak{c}$. Como π es abierta, el conjunto $\pi(U)$ es abierto y no vacío.

Así, por el corolario 3.1.10, existe un elemento z en $\pi(U)$, tal que z es de orden infinito en G_2 y $\pi(S) \cap \langle z \rangle = \{e_{G_2}\}$. Sea $x \in U$, tal que $\pi(x) = z$. Como $z \notin \pi(S)$, entonces $x \notin S$. Además como z es de orden infinito en G_2, entonces x es de orden infinito en G. Veamos que $S \cap \langle x \rangle = \{e_G\}$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}^+$, tal que $nx \in S$, entonces $\pi(nx) = n\pi(x) = nz$ es un elemento de $\pi(S)$. Como $\pi(S) \cap \langle z \rangle = \{e_{G_2}\}$, entonces $nz = e_{G_2}$, es decir, z es un elemento de orden finito en G_2. Como esto último no puede suceder, se tiene que $nx \notin S$, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, es decir, $S \cap \langle x \rangle = \{e_G\}$. □

El siguiente resultado es una generalización del corolario 3.1.26. La demostración se sigue del lema anterior y el lema 3.1.11.

Teorema 3.1.30. *Sean G_1 un grupo abeliano, compacto y metrizable y G_2 un grupo abeliano, compacto, metrizable y casi libre de torsión tal que $|G_2| = \mathfrak{c}$. Si $G = G_1 \times G_2$, entonces G es densamente independiente.*

Los siguientes resultados nos dicen qué necesita cumplir el grupo dual $\hat{G}$ de un grupo abeliano, compacto y metrizable G, para garantizar que G sea densamente independiente.

Lema 3.1.31. *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto y metrizable tal que $\hat{G}$ tiene un elemento de orden infinito. Entonces para cada abierto no vacío U de G y cada subgrupo S de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$, existe un elemento de orden infinito $x \in U$ tal que $|\langle x \rangle \cap S| = 1$.*

Demostración. Sea f un elemento de orden infinito en $\hat{G}$. Por el lema 2.2.11, $f(G)$ es un subgrupo conexo de $\mathbb{T}$. Como G es compacto se tiene que $f(G)$ es cerrado en $\mathbb{T}$. Puesto que f no es un carácter trivial se tiene que $f(G) \neq \{1\}$. Entonces por la proposición 2.1.14, se tiene que $f(G) = \mathbb{T}$. Así f es una función sobre de G a $\mathbb{T}$. Como G y $\mathbb{T}$ son grupos compactos y f es sobre, se tiene que f es una función abierta.

Sean S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$ y U un abierto no vacío de G. Se tiene que $f(S)$ es un subgrupo no vacío de $\mathbb{T}$ tal que $|f(S)| < \mathfrak{c}$. Como f es un homomorfismo abierto se tiene que $f(U)$ es un conjunto abierto y no vacío de $\mathbb{T}$. Dado que $\mathbb{T}$ es casi libre de torsión, aplicando el corolario 3.1.8, existe $z \in f(U)$ tal que z es un elemento de orden infinito en $\mathbb{T}$ y $\langle z \rangle \cap f(S) = \{1\}$. Sea $x \in U$ tal que $f(x) = z$. Sólo resta demostrar que $\langle x \rangle \cap S = \{e_G\}$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx \in S$. Entonces $f(nx) = nf(x) = nz \in f(S)$. Como $\langle z \rangle \cap f(S) = \{1\}$, entonces $nz = 1$. Lo anterior implica que z es un elemento de torsión en $\mathbb{T}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\langle x \rangle \cap S = \{e_G\}$. □

El siguiente teorema muestra una aplicación de la dualidad de Pontryagin-van Kampen. La demostración es clara después de los lemas 3.1.31 y 3.1.11.

Teorema 3.1.32. *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto y metrizable tal que $\hat{G}$ tiene un elemento de orden infinito, entonces G es densamente independiente.*

Aplicando los teoremas 2.2.13, 2.2.19 y 3.1.32 se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.1.33. *Sea G un grupo abeliano, compacto y metrizable. Si G es conexo (divisible), entonces G es densamente independiente.*

3.2. Una caracterización algebraica de los grupos densamente independientes

En esta sección presentamos el principal objetivo de este trabajo que es mostrar una caracterización para los grupos topológicos abelianos, compactos y metrizables que son densamente independientes. Tal caracterización está basada en una propiedad puramente algebraica y se presenta en el teorema 3.2.5.

Proposición 3.2.1. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto que no es de torsión. Entonces para cada sucesión $U_0, \ldots, U_n$ de conjuntos abiertos no vacios de G, existe una sucesión $V_0, \ldots, V_n$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que $V_i \subset U_i$ para cada $i \leq n$, y si $(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ es tal que $0 < \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1)$, donde $x_i \in V_i$ para cada $i \leq n$, entonces se tiene que $k_0x_0 + \cdots + k_nx_n \neq e_G$.*

Demostración. Tomemos un elemento arbitrario $(k_0, \ldots, k_n)$ de $\mathbb{Z}^{n+1}$ tal que

$$0 < \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1).$$

La función $\pi : G^{n+1} \longrightarrow G$ definida como $\pi(x_0, \ldots, x_n) = k_0x_0 + \cdots + k_nx_n$ es un homomorfismo continuo. Sea $H = \pi(G^{n+1})$. Como G es compacto se tiene que el homomorfismo $\pi : G^{n+1} \longrightarrow H$ es abierto. Así, $U = \pi(U_0 \times \cdots \times U_n)$ es un abierto no vacío de H. Por la elección de $(k_0, \ldots, k_n)$, existe $j \in \{0, \ldots, n\}$

tal que $k_j \neq 0$. Por hipótesis, G contiene un elemento de orden infinito z, así $k_j z$ es un elemento de orden infinito de H. De donde, el grupo compacto H y el abierto U son infinitos.

Sea $y_i \in U_i$ para cada $i \leq n$ tal que $k_0 y_0 + \ldots + k_n y_n \neq e_G$. Como π es continua, existen conjuntos abiertos $W_0, \ldots, W_n$ de G tales que $y_i \in W_i$ para cada $i \leq n$ y $e_H \notin \pi(W_0 \times \cdots \times W_n)$. Consideremos el conjunto

$$M = \{(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} |k_i| \leq n(n+1) \text{ y } k_j \neq 0 \text{ para algún } j \leq n\}.$$

Como M es finito podemos repetir esta construcción un número finito de pasos (para cada elemento de M), para obtener los abiertos requeridos $V_0, \ldots, V_n$. $\square$

Lema 3.2.2. *Sea G un grupo topológico abeliano y compacto que no es de torsión. Entonces para cualquier conjunto abierto no vacío U de G, existe un conjunto independiente $A = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de elementos de orden infinito de G contenido en U.*

Demostración. Sea 2^n la familia de todas las funciones de $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $\{0, 1\} = 2$, donde $n \in \mathbb{N}^+$. Consideremos $\eta = \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^n$. Vamos a construir una familia de abiertos no vacíos $\{V_f : f \in \eta\}$ de G que satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada $f, g \in 2^n$ tal que $f \neq g$ se cumple que $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

(b) Si $f, g \in \eta$ y g es una extención propia de f, entonces $\overline{V_g} \subset V_f$.

(c) Si $k_f \in \mathbb{Z}$ satisface que $|k_f| \leq n$ y $x_f \in V_f$ para cada $f \in 2^n$, entonces $\sum_{f \in 2^n} k_f x_f = e_G$ si y sólo si $k_f = 0$ para cada $f \in 2^n$.

Sea U cualquier abierto no vacío de G. Para $n = 1$ y las funciones $f = (0, 0)$ y $g = (0, 1)$, tomemos dos abiertos no vacíos U_f y U_g contenidos en U tales que $\overline{U_f} \cap \overline{U_g} = \emptyset$ y $\overline{U_f} \cup \overline{U_g} \subset U$. Si k_f y k_g estan en $\mathbb{Z}$ y son tales que $|k_f| \leq 1$ y $|k_g| \leq 1$ entonces $|k_f| + |k_g| \leq 2$. Así, aplicando la proposición 3.2.1, existen abiertos no vacíos V_f y V_g tales que si $x_f \in V_f$ y $x_g \in V_g$ entonces $k_f x_f + k_g x_g = e_G$ si y sólo si $k_f = k_g = 0$. Además, como $V_f \subset U_f$ y $V_g \subset U_g$ y se cumple que $\overline{U_f} \cap \overline{U_g} = \emptyset$, entonces $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

Suponga que para $n \in \mathbb{N}^+$ hemos definido los abiertos V_f para cada $f \in 2^n$ y se cumplen las condiciones (a), (b) y (c).

Ahora probaremos que se cumplen las condiciones (a), (b) y (c) para $n+1 \in \mathbb{N}^+$. Para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 0,1$, denotemos por $f^\frown i$ la función $g \in 2^{n+1}$ tal que $g|_n = f$ y $g(n) = i$. Como G es regular, podemos elegir abiertos no vacíos $U_{f^\frown 0}$ y $U_{f^\frown 1}$ en G tales que $\overline{U_{f^\frown 0}} \cap \overline{U_{f^\frown 1}} = \emptyset$ y $\overline{U_{f^\frown 0}} \cup \overline{U_{f^\frown 1}} \subset V_f$. Consideremos la familia de todos los abiertos $U_{f^\frown 0}$ y $U_{f^\frown 1}$, para cada $f \in 2^n$. Entonces esta familia consta de 2^{n+1} elementos. Si $k_{f^\frown i} \in \mathbb{Z}$ es tal que $|k_{f^\frown i}| \leq n+1$ para cada $i = 0,1$ y cada $f \in 2^n$, entonces

$$\sum_{f \in 2^n} (|k_{f^\frown 0}| + |k_{f^\frown 1}|) \leq (n+1)2^{n+1} \leq (2^{n+1}-1)2^{n+1}.$$

Así, por la proposición 3.2.1, para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 1,0$, existen abiertos no vacíos $V_{f^\frown i}$ de G tales que $\overline{V_{f^\frown i}} \subset U_{f^\frown i}$, y si $x_{f^\frown i} \in V_{f^\frown i}$, entonces la igualdad

$$\sum_{f \in 2^n} (k_{f^\frown 0} x_{f^\frown 0} + k_{f^\frown 1} x_{f^\frown 1}) = e_G$$

se cumple si y sólo si $k_{f^\frown i} = 0$, para cada $f \in 2^n$ y cada $i = 0,1$. Lo anterior prueba (c) para $n+1$. Para demostrar (b), sea $f \in 2^{n+1}$, entonces para cada $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $t < n$, se tiene por hipótesis de inducción que $\overline{V_{f|_n}} \subset V_{f|_t}$, y puesto que por construcción se cumple que $\overline{V_f} \subset V_{f|_n}$, entonces $\overline{V_f} \subset V_{f|_t}$.

Para probar (a), sean $f, g \in 2^{n+1}$ tales que $f \neq g$. Entonces existe $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $t \leq n$ y $f|_t \neq g|_t$, donde, $f|_t, g|_t \in 2^t$. Por hipótesis de inducción, $\overline{V_{f|_t}} \cap \overline{V_{g|_t}} = \emptyset$. Como $\overline{V_f} \subset V_{f|_t}$ y $\overline{V_g} \subset V_{g|_t}$, entonces $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$.

Lo anterior termina la construcción de la familia $\{V_f : f \in \eta\}$.

Por (b) y puesto que el grupo G es compacto, para cada $f \in 2^\omega$, el conjunto $K_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_{f|_n}}$ no es vacío. Para cada $f \in 2^\omega$, tomemos un elemento $x_f \in K_f$ y sea A el conjunto formado por todos los x_f. Veamos que todos los elementos de A son de orden infinito. Tomemos cualquier $x_f \in A$ y $n \in \mathbb{N}^+$ y veamos que $nx_f \neq e_G$. Para cada $g \in 2^n$ tal que $g \neq f|_n$, tomemos $k_g = 0$ y para $f|_n$ tomemos $k_{f|_n} = n$. Entonces por (c) para cada $x_g \in V_g$ y $x_f \in V_{f|_n}$ se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} e_G &= \sum_{g \in 2^n \setminus \{f|_n\}} k_g x_g + k_{f|_n} x_f \\ &= k_{f|_n} x_f \\ &= n x_f \end{aligned}$$

si y sólo si $n = 0$. Por lo anterior se concluye que $nx_f \neq e_G$. Dado que esto pasa para cada $n \in \mathbb{N}^+$, se sigue que x_f es de orden infinito.

Ahora veamos que $|A| = \mathfrak{c}$. Sean $f, g \in 2^\omega$ y supongamos que $f \neq g$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $f|_n \neq g|_n$. Por (a), se tiene que

$$\overline{V_{f|_n}} \cap \overline{V_{g|_n}} = \emptyset.$$

Por lo anterior y por la definición de K_f y K_g se sigue que

$$K_f \cap K_g = \emptyset.$$

Así, $x_f \neq x_g$. Como $|2^\omega| = \mathfrak{c}$, se sigue que $|A| = \mathfrak{c}$.

Finalmente veamos que A es linealmente independiente. Sea $y_{f_0}, \ldots, y_{f_m}$ una colección finita de elementos distintos de A, donde, $f_0, \ldots, f_m \in 2^\omega$. Tomemos cualquier $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $m + 1 \leq n$. Se cumple que el conjunto $\{f_0|_n, \ldots, f_m|_n\}$ está contenido en 2^n. Para cada $g \in 2^n$, sea $k_g \in \mathbb{Z}$ tal que $|k_g| \leq n$ y $k_g = 0$ si $g \neq f_i|_n$, donde $i \in \{0, \ldots, m\}$. Si $|k_{f_i|_n}| \neq 0$, para alguna $i \in \{0, \ldots, m\}$, Entonces por la condición (c) se tiene que

$$k_{f_0|_n} y_{f_0} + \cdots + k_{f_m|_n} y_{f_m} \neq e_G.$$

Así, A es un conjunto linealmente independiente en G. □

Si G es un grupo abeliano y p es un número primo, denotamos por G_p al conjunto de todos los elementos g de G tales que $p^n g = e_G$, para alguna $n \in \mathbb{N}^+$. Además, como G es abeliano el conjunto G_p es un subgrupo de G, el cual es llamado la componente p-primaria de G. Si $G = G_p$, para algún número primo p, entonces G es llamado un p-grupo.

El siguiente resultado muestra la estructura de los grupos abelianos de torsión en términos de sus componentes p-primarias.

Teorema 3.2.3. *Sea G un grupo abeliano y de torsión. Entonces G es la suma directa de sus componentes p-primarias, es decir, $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$.*

La demostración de este teorema se omitirá, pero puede consultarse en [19, teorema 4.1.1].

Lema 3.2.4. *Sea G un p-grupo de cardinalidad $\lambda > \omega$. Entonces la cardinalidad del subgrupo*

$$H_j = \{g \in G : p^j g = e_G\}$$

de G es igual a λ para cada $j \in \mathbb{N}^+$.

Demostración. Denote por φ el homomorfismo de G a G tal que para cada $g \in G$, se tiene $\varphi(g) = pg$. Se tiene que $H_1 = ker(\varphi)$. Note que si $g, h \in G$ y $\varphi(h) = g$, entonces $\varphi^{-1}(g) = h + H_1$. De donde, para cada $g \in G$ se cumple que

$$|\varphi^{-1}(g)| \leq H_1.$$

Sea $|H_1| = \tau$. Supongamos que para algún $j \in \mathbb{N}^+$ se ha probado la desigualdad $|H_j| \leq \tau \cdot \omega$. Entonces $H_{j+1} = H_j \cup \varphi^{-1}(H_j)$. Por hipótesis de inducción y puesto que $|\varphi^{-1}(g)| \leq H_1$ se tiene que $|H_{j+1}| \leq \tau \cdot \omega$.

Como $G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} H_j$ y $|G| > \omega$, se tiene que $\lambda = \tau$. □

El siguiente teorema nos muestra una caracterización de los grupos abelianos, compactos y metrizables que son densamente independientes. En particular, cuando G es un grupo de torsión, el teorema 3.2.5 nos muestra qué condiciones deben cumplir sus componentes p-primarias para garantizar que G sea densamente independiente.

Teorema 3.2.5. *Sea G un grupo topológico abeliano, compacto, metrizable de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) El grupo G es densamente independiente.

b) Para cada $m \in \mathbb{N}^+$, se cumple que $|mG| = \mathfrak{c}$ o $|mG| = 1$.

c) El grupo G no es de torsión o para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$, donde G_{p_i} es la componente p_i-primaria de G y $G = \prod_{i=1}^k G_{p_i}$.

Demostración. Primero demostraremos a) implica b). Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $1 < |mG| < \mathfrak{c}$. Consideremos el homomorfismo $f : G \longrightarrow mG$, dado como $f(g) = mg$, entonces f es un homomorfismo continuo y sobre. Como G es densamente independiente, existe un subgrupo denso H de G tal que $mG \cap H = \{e_G\}$. Por lo anterior, se tiene que $f(H) = \{e_G\}$, Puesto que f es continuo se tiene que $f(G) = \{e_G\}$, lo cual es una contradicción pues mG no es trivial.

Veamos que b) implica c). Si para cada $m \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $|mG| = \mathfrak{c}$, entonces G no es un grupo de torsión. Así supongamos que G es de torsión. Como G es compacto y de torsión entonces G se puede descomponer en un producto finito de sus componentes p-primarias, digamos $G = \prod_{i=1}^k G_{p_i}$. Sea $j \in \{1, \ldots, k\}$ y consideremos la componente G_{p_j} de G. Para cada $i \in$

$\{1, \ldots, k\}$, se tiene que G_{p_i} es de torsion acotada, es decir, existe $n_i \in \mathbb{N}^+$ tal que $p_i^{n_i} G_{p_i} = \{e_{G_{p_i}}\}$. Consideremos el producto

$$l = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}.$$

Como $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} lG &= l \prod_{i=1}^{k} G_{p_i} = \prod_{i=1}^{k} lG_{p_i} \\ &\cong G_{pj}. \end{aligned}$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}^+$ y definamos $m_n = p_j^n l$. Así, por lo anterior

$$p_j^n G_{p_j} \cong m_n G.$$

Por hipótesis se tiene que $|m_n G| = 1$ o $|m_n G| = \mathfrak{c}$, de donde, $|p_j^n G_{p_j}| = 1$ o $|p_j^n G_{p_j}| = \mathfrak{c}$. Finalmente, por la arbitrariedad de j se concluye que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que $|p_i^n G_{p_i}| = \mathfrak{c}$ o $|p_i^n G_{p_i}| = 1$.

Finalmente resta probar que c) implica a). Supongamos que G tiene un elemento de orden infinito. Sean S un subgrupo de G de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$ y U un abierto no vacío de G. Por el lema 3.2.2, para U existe un conjunto independiente A de elementos de orden infinito de cardinalidad $\mathfrak{c}$ contenido en U. Como $|S| < \mathfrak{c}$, existe $x \in A$ tal que $\langle x \rangle \cap S = \{e_G\}$. Por el lema 3.1.11 se tiene que G es densamente independiente.

Ahora supongamos que G es de torsión. Como G es compacto entonces G es de torsión acotada por la proposición 1.1.29. Así, G se descompone en un producto finito de sus componentes p-primarias, digamos $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$.

Consideremos el caso cuando G es un p-grupo. Sean U un abierto no vacío de G y n el mínimo entero positivo tal que $U \cap G(p^n) \neq \emptyset$, donde, $G(p^n) = \{g \in G : p^n g = e_G\}$. Consideremos el homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ definido como $\varphi(x) = p^{n-1}x$, para cada $x \in G$. Claramente φ es continuo y por la elección de n se tiene que $\varphi(G) = p^{n-1}(G)$ no es trivial. Por hipótesis se tiene que $|\varphi(G)| = \mathfrak{c}$. Pongamos $K = \varphi(G)$. Como G es compacto se tiene que K es compacto y como el homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow K$ es sobreyectivo se cumple que φ abierta. Por otro lado, por las proposiciones 1.2.7 y 1.2.9 se tiene que $L = G(p) \cap K$ es un subgrupo ω-estrecho. Puesto que $|G| = \mathfrak{c}$, por el lema 3.2.4 se tiene que $|L| = \mathfrak{c}$. Por la elección de n tenemos que

$V = \varphi(U) \cap L$ es un abierto no vacío de L y por la proposición 1.2.2, $|V| = \mathfrak{c}$. Sea S un subgrupo de G tal que $|S| < \mathfrak{c}$. Así, existe $g \in U \setminus \{e_G\}$ tal que $\varphi(g) \in V \setminus S$. Veamos que $\langle g \rangle \cap S = \{e_G\}$.

Supongamos que existe $k \in \{1, \dots, p^n\}$ tal que $kg \in S$ y k es el mínimo con esta propiedad. Como $\varphi(g) \in L$ y L es un grupo de exponente un número primo p, entonces

$$p^n g = pp^{n-1} g = p\varphi(g) = e_G.$$

Así, $ord(g) = p^n$. Como $\varphi(g) \notin S$, entonces $p^{n-1}g \notin S$ y, por lo tanto, $g \notin S$. Consideremos el homomorfismo cociente $f : G \longrightarrow G/S$. Como $kg \in S$ se tiene que $kf(g) = f(kg) = e_{G/S}$. Así, $ord(f(g)) = k$, como f es un homomorfismo, se tiene que el orden de $(f(g))$ divide al orden de g, esto es, $k = p^i$, para alguna $i \in \mathbb{N}^+$ tal que $1 \leq i \leq n$. Como $p^{n-1}g \notin S$ entonces $p^{n-1} < k$. De esto último se tiene que $k = p^n$ y entonces $kg \in S$ sólo cuando $k = p^n$. Así, $\langle g \rangle \cap S = \{e_G\}$.

Así, por el lema 3.1.11 se tiene que G es densamente independiente cuando $G = G_p$.

Ahora supongamos el caso general, es decir, cuando $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$. Por el caso anterior se tiene que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, G_{p_i} es densamente independiente. Entonces por la proposición 3.1.23, se tiene que $G = \prod_{i=1}^{k} G_{p_i}$ es densamente independiente. □

Corolario 3.2.6. *Sean p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el grupo $G = \mathbb{Z}(p^n)^\omega$ es densamente independiente.*

Demostración. Por el teorema 3.2.5 es suficiente con demostrar que para cada $j \in \mathbb{N}$ se cumple que $|p^j G| = \mathfrak{c}$ o $|p^j G| = 1$.

Supongamos que $1 \leq j \leq n - 1$. Dado que $p^j \mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}(p^{n-j})$, entonces

$$p^j G = \mathbb{Z}(p^{n-j})^\omega.$$

Así, puesto que $|\mathbb{Z}(p^{n-j})^\omega| = \mathfrak{c}$, entonces $|p^j G| = \mathfrak{c}$.

Si $j \geq n$, entonces p^j es múltiplo de p^n y como G es un grupo de exponente p^n se tiene que $p^j G = \{e_G\}$. De donde, $|p^j G| = 1$.

Por lo tanto, $G = \mathbb{Z}(p^n)^\omega$ es densamente independiente. □

Teorema 3.2.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $G = \mathbb{Z}(n)^\omega$ es densamente independiente.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Por el teorema fundamental del aritmética n se descompone en un único producto de números primos. Es decir,

$$n = p_1^{l_1} \cdots p_n^{l_n}.$$

Donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ son números primos y l_i es un entero positivo para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Entonces $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(p_1^{l_1}) \times \cdots \times \mathbb{Z}(p_n^{l_n})$. De donde,

$$G = \mathbb{Z}(p_1^{l_1})^\omega \times \cdots \times \mathbb{Z}(p_n^{l_n})^\omega.$$

Entonces por el corolario 3.2.6, cada factor de G es densamente independiente. Alicando la proposición 3.1.23, se tiene que $G = \mathbb{Z}(p_1^{l_1})^\omega \times \cdots \times \mathbb{Z}(p_n^{l_n})^\omega$ es densamente independiente. $\square$

En la proposición 3.1.23 se probó que el producto numerable de grupos topológicos densamente independientes es densamente independiente, en el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco de esta afirmación es falso.

Ejemplo 3.2.8. Sean $n, m \in \mathbb{N}^+$, p un número primo y consideremos los grupos $G_1 = \mathbb{Z}(p)^\omega \times \mathbb{Z}(p^n)$ y $G_2 = \mathbb{Z}(p^m)^\omega$. Si $1 < n < m$ entonces el grupo $G = G_1 \times G_2$ es densamente independiente. En efecto, por el teorema 3.2.5 es suficiente con demostrar que para cada $j \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $|p^j G| = \mathfrak{c}$ o $|p^j G| = 1$. Si $1 \leq j < n$, entonces $p^j G \cong \mathbb{Z}(p^{n-j}) \times \mathbb{Z}(p^{m-j})^\omega$ y así, $|p^j G| = \mathfrak{c}$. Si $n \leq j < m$, entonces $p^j G \cong \mathbb{Z}(p^{m-j})^\omega$ y entonces $|p^j G| = \mathfrak{c}$. Finalmente si $j \geq m$, entonces $p^j G \cong \{e_G\}$ y así, $|p^j G| = 1$. Lo anterior demuestra que el recíproco de la proposición 3.1.23 no se cumple, pues por el ejemplo 3.1.17 el grupo G_1 no es densamente independiente.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se presentó un panorama general de los grupos topológicos densamente independientes, prestando especial atención a los grupos abelianos, compactos y metrizables.

Se tomó como punto de partida el artículo [14], en donde los autores A. Leiderman y M. Tkachenko muestran que el grupo $\mathbb{Z}(2)^\kappa$ es densamente independiente, para un cardinal κ tal que $\omega \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$. Este artículo motivo el interés para estudiar cuándo un grupo topológico abeliano es densamente independiente.

Además se analizan propiedades tanto algebraicas como topológicas que permiten que un grupo sea densamente independiente, por ejemplo, se demostró en el teorema 3.2.5 que todo grupo abeliano, compacto y metrizable que no es de torsión es densamente independiente. Por otro lado, el teorema 3.2.5 brinda una caracterización de los grupos topológicos, abelianos, compactos y metrizables que son de torsión en términos de una propiedad puramente algebraica. Esto muestra que los grupos densamente independientes dependen conjuntamente de propiedades algebraicas y topológicas.

La perspectiva principal de este trabajo es continuar con el estudio de los grupos topológicos densamente independientes. En especial en el caso de los grupos topológicos abelianos y compactos no necesariamente metrizables, como se presentó en este trabajo.

Por ejemplo, en esta tesis se demostró que los grupos $\mathbb{R}^\omega$, $\mathbb{T}^\omega$, $\mathbb{Z}(p)^\omega$ y $\mathbb{Z}(n)^\omega$ son densamente independientes, donde p es un número primo y n es un entero positivo mayor o igual a 2. Una pregunta natural sería demostrar o refutar si los grupos $\mathbb{R}^\mathfrak{c}$, $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$, $\mathbb{Z}(p)^\mathfrak{c}$ y $\mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$ siguen cumpliendo tal propiedad.

Con respecto al teorema 3.1.32 tenemos la siguiente pregunta: ¿se cumplirá que para cualquier grupo topológico abeliano y compacto G tal que su dual $\hat{G}$ tiene un elemento de orden infinito, entonces G es densamente independiente?.

Para grupos conexos se plantea la siguiente pregunta: ¿que condiciones algebraicas o topológicas necesita un grupo topológico abeliano, ω- estrecho y conexo para ser densamente independiente?.

Finalmente para el teorema 3.2.5: ¿se cumplirán las mismas condiciones del teorema 3.2.5 para grupos topológicos abelianos y compactos?.

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii, M. G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientific, Paris-Amsterdan 2008.

[2] D. Armacost, *The Structure of Locally Compact Abelian Groups,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 68, Marcel Dekker Inc. New York, 1981.

[3] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Comput. Math. 3 (1936) 427-430.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[5] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I, Academic Press, New York, 1970.

[6] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. II, Academic Press, New York, 1973.

[7] I. I. Guran, *On topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Math. Dokl. 23 (1981) 173-175.

[8] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, New York, 1963.

[9] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Structure of Compact Groups: A Primer for Students - A Handbook for Experts*, Walter de Gruyter Publ., Berlin, 1988.

[10] T. Jech. *Set Theory, Second edition,* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[11] S. Kakutani, *Über die metrization der topologischen gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936) 82-84.

[12] E. van Kampen, *Locally bicompact abelian groups and their character groups*, Ann. Math. 36 (1935) 448-463.

[13] K. Kunen, *Set Theory,* North Holland, Amsterdam, 1980.

[14] A. G. Leiderman, M. G. Tkachenko, *Products of topological groups in which all closed subgroups are separable,* Topology and its Applications 241 (2018) 89-101.

[15] S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 29, Cambridge Univ. Press, London, 1977.

[16] F. Peter, H. Weyl, *Die vollständigkeit der primitiven darstellungen einer geschlossenen kontinuerlichen gruppe*, Math. Ann. 97 (1927) 737-755.

[17] L. S. Pontryagin, *The theory of topological commutative groups*, Ann. Math. 35 (1934) 361-388.

[18] L. S. Pontryagin, *Continuous Groups, Third edition*, Nauka, Moscow, 1973.

[19] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups,* Springer-Verlag, New York, 1995.

[21] M. G. Tkachenko, L. M Villegas-Silva, *Refining connected topological group topologies on abelian torsion-free groups,* Journal of Pure and Applied Algebra 124 (1998) 281-288.

[22] M. G. Tkachenko, L. M Villegas-Silva, *Refining connected topological group topologies on abelian torsion groups,* Topology and its Applications 84 (1998) 77-90.

[23] M. G. Tkachenko, L. M Villegas-Silva, C. Hernández, O. Rendón, *Grupos Topológicos,* Libros de texto, manuales de prácticas y antologías, México, 1997.

[24] Z. Xiao, I. Sánchez, M. G. Tkachenko, *Topological groups whose closed subgroups are separable, and the product operation,* Topology and its Applications 259 (2019) 365-377.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00198
Matrícula: 2163802955

GRUPOS TOPOLOGICOS DENSAMENTE INDEPENDIENTES Y LA DUALIDAD DE PONTRYAGIN

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 19 del mes de febrero del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

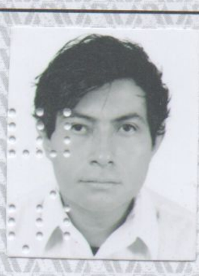
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR MARQUEZ RODRIGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



EDGAR MARQUEZ RODRIGUEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

SECRETARIO

DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH