



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica
Posgrado en Ingeniería Química

**Método para la solución del problema de Stokes en un canal
parcialmente ocupado por un medio poroso**

Tesis que presenta:

I.Q. Erick Daniel Loza Santos

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Ingeniería Química)

Asesor:

Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Ciudad de México, 15 mayo de 2020

Agradecimientos

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACyT) por la beca que me fue otorgada para realizar mis estudios de maestría (No. de CVU 866919 y No. de Becario 491580).

A mi asesor, el Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia, por los consejos y clases dados durante el trabajo de maestría, apoyando al desarrollo de mi proyecto. También por su gran apoyo y amistad personal.

A mi familia, la cual me apoyó en todo momento durante este viaje. Mis padres, Oscar Loza Ochoa e Irene Santos Quintero, quienes me brindaron el apoyo moral y económico que necesité para salir de mi ciudad y a mis hermanos Oscar, Gaby y José, quienes me hacían sentir en casa cada vez que visitaba. A mi hermana Irene, Q.E.P.D., quien me acompaña en espíritu y siempre se alegró de todos mis logros académicos.

A mis compañeros de generación: Luis Ángel Castillo, Lisette Samarti, Hernán Cortés, David Zamora, Emily Moreno y Alejandro Ortega, quienes me hicieron sentir en confianza a pesar de estar tan lejos de casa e hicieron de esta experiencia muy disfrutable. Además, a Victoria Tello, quien siempre daba los mejores consejos en la vida y academia y Susana González, quien hizo de vivir por mi cuenta una aventura un poco menos complicada.

A mi novia y compañera Cecilia Portillo, quien a pesar de la distancia sentí tan cerca apoyándome en todo momento, compartiendo muchos momentos especiales.

Resumen

El flujo alrededor y dentro de un medio poroso es de gran importancia en diversos aspectos de ingeniería química y es un problema que hasta la fecha se encuentra abierto. La importancia de ello radica en que, para poder describir los fenómenos de transferencia de calor y masa en este tipo de sistemas, primero es necesario conocer el perfil de velocidad. En la literatura se ha encontrado que, lejos de la inter-región, el flujo dentro de la región de fluido libre presenta un comportamiento unidimensional y unidireccional, por lo que su comportamiento podría ser descrito de forma analítica. En general, el análisis de la transferencia de cantidad de movimiento en sistemas fluido-medio poroso puede hacerse mediante simulaciones numéricas directas (DNS). Sin embargo, tal análisis es limitado por la alta demanda computacional para su aplicación en sistemas que presenten microestructuras de medio poroso complejas. En este trabajo se abordó tal problemática mediante el desarrollo de una metodología que utiliza la solución analítica de las ecuaciones de flujo en la región de fluido en conjunto con la solución numérica en el resto del sistema. Los resultados obtenidos muestran que se logra una reproducción muy buena de los valores de velocidad obtenidos por las simulaciones numéricas para distintas configuraciones de medio poroso con distintos niveles de complejidad, además de lograrse reducciones significativas en el tiempo de cómputo.

Contenido

1.	Generalidades	1
1.1.	Introducción.....	1
1.2.	Antecedentes	2
1.3.	Motivación	13
1.4.	Hipótesis.....	13
1.5.	Objetivos	13
1.5.1.	Objetivo general	13
1.5.2.	Objetivos específicos.....	13
2.	Metodología.....	14
2.1.	Descripción de la región de medio poroso	14
2.2.	Planteamiento del problema	15
2.3.	Determinación del alcance del flujo multidimensional ocasionado por la frontera divisoria en cada región homogénea	19
2.3.1.	Determinación del alcance del flujo multidimensional en la región homogénea de fluido	20
2.3.2.	Determinación del alcance del flujo multidimensional en la región homogénea de medio poroso	22
2.4.	Modelo para la región de solución analítica.....	25
2.4.1.	Geometría	26
2.4.2.	Ecuación gobernante y condiciones de frontera	26
2.4.3.	Solución.....	27
2.5.	Modelo para la región de solución numérica	27
2.6.	Acoplamiento de los modelos de solución analítica y numérica.....	29
2.7.	Cálculo del perfil de velocidad puntual.....	31
2.8.	Cálculo del perfil de velocidad promedio	33
3.	Alcance del método planteado	36
3.1.	Efecto del tamaño de malla en el cálculo del perfil de velocidad	36
3.2.	Efecto de la configuración del medio poroso en la reproducción del perfil de velocidad mediante la DNS Acoplada.....	39
3.2.1.	Variación de la fracción vacía	41
3.3.	Efecto de la localización de la frontera entre las dos regiones de solución.....	41
3.4.	Descripción de sistemas con distintos tamaños de región de fluido libre	42
3.5.	Una tercera alternativa: uso de las ecuaciones analíticas dentro del modelo de solución completo.....	43
4.	Resultados y discusión	45
4.1.	Alcance del flujo multidimensional en cada región homogénea	46
4.1.1.	Alcance en la región homogénea de fluido	46
4.1.2.	Alcance en la región homogénea de medio poroso	48
4.2.	Tamaños de malla requeridos para distintas geometrías de medio poroso.....	50
4.3.	Reproducción de los datos de velocidad para distintos sistemas.....	54
4.3.1.	Variación de la geometría de celda unitaria de medio poroso.....	56
4.3.2.	Variación de la fracción vacía	59
4.3.3.	Variación de la posición de la frontera de solución.....	62
4.3.4.	Variación del tamaño de la región de fluido libre	63
4.4.	Impacto del método sobre el uso de recursos computacionales	64

4.4.1.	Variación de la geometría de celda unitaria	64
4.4.2.	Variación de la posición de la frontera de solución.....	66
4.4.3.	Variación del tamaño de la región de fluido libre	67
4.5.	Análisis del uso de las ecuaciones analíticas en una DNS Completa.....	77
4.5.1.	Geometrías que presentan flujo bidimensional	79
4.5.2.	Geometrías que presentan flujo tridimensional	83
5.	Conclusiones	85
6.	Bibliografía.....	87
7.	Apéndices	91
A.	Adimensionalización de la ecuación de Stokes	91
B.	Selección de los valores para el intervalo de la velocidad	93
C.	Solución del modelo de la región de solución analítica	96
D.	Comportamiento de la derivada en la frontera superior del modelo de solución analítica.....	98
E.	Valores de error relativo.....	99
F.	Valores de reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo.....	106

Índice de Figuras

Fig. 1.1 Modelos de a) un dominio y b) dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y un medio poroso.....	3
Fig. 1.2 Perfil de velocidad para un canal ocupado parcialmente por un medio poroso obtenido por Beavers y Joseph (derecha) comparado con el perfil real (izquierda).....	4
Fig. 1.3 Diferentes escalas de regiones de promediado en un medio ocupado por dos fases: β y γ	6
Fig. 2.1 Representación idealizada del medio poroso compuesto por celdas unitarias de geometrías conocidas.....	14
Fig. 2.2 Composición de las celdas unitarias de medio poroso.....	15
Fig. 2.3 Canal parcialmente ocupado con un medio poroso.....	16
Fig. 2.4 Modelo simplificado para un canal parcialmente ocupado por un medio poroso.....	17
Fig. 2.5 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional).....	17
Fig. 2.6 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional).....	18
Fig. 2.7 Perfil de velocidad promedio en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso.....	19
Fig. 2.8 Tipos de flujo en un canal parcialmente lleno con un medio poroso.....	20
Fig. 2.9 Cortes para la toma de la velocidad puntual en diferentes puntos de las coordenadas x y z.....	21
Fig. 2.10 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual para distintos tipos de celda unitaria de medio poroso con flujo bidimensional:.....	23
Fig. 2.11 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la geometría de celda unitaria de cubos... ..	24
Fig. 2.12 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la geometría de celda unitaria de esferas . ..	24
Fig. 2.13 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la región de medio poroso	25
Fig. 2.14 Esquema de la región de flujo unidimensional	26
Fig. 2.15 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional)	28
Fig. 2.16 Geometría de la región de solución numérica (flujo tridimensional).....	28
Fig. 2.17 Comportamiento de la derivada de la velocidad en el modelo con respecto a la velocidad supuesta en la frontera de solución para geometría de celda unitaria de cilindros.....	30
Fig. 2.18 Gráfico para la determinación de la raíz de la función objetivo	31
Fig. 2.19 Campo de velocidad calculado para la región de solución numérica.....	32
Fig. 2.20 Corte para el cálculo del perfil de velocidad puntual en la región de solución numérica.....	32
Fig. 2.21 Puntos para el cálculo de la velocidad puntual dentro de cada celda unitaria de medio poroso..	33
Fig. 2.22 Diferentes tipos de región de promediado presentes en el sistema	34
Fig. 3.1 Malla para el sistema con un tamaño 1: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso	37
Fig. 3.2 Malla para el sistema con un tamaño 2: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso	37
Fig. 3.3 Malla para el sistema con un tamaño 3: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso	38
Fig. 3.4 Malla para el sistema con un tamaño 4: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso	38
Fig. 3.5 Geometrías de fase sólida a utilizar para el modelado del medio poroso (flujo bidimensional): a) Prismas cuadrados b) Cilindros c) Cilindros Escalonados d) Cilindros Aleatorios e) Alfombra de Sierpinski.....	39
Fig. 3.6 Geometrías de fase sólida a utilizar para el modelado del medio poroso (flujo tridimensional): a) Cubos b) Esferas.....	40
Fig. 3.7 Celdas unitarias con distinta fracción vacía: a) $\varepsilon_{\beta} = 0.4$, b) $\varepsilon_{\beta} = 0.5$, c) $\varepsilon_{\beta} = 0.6$, d) $\varepsilon_{\beta} = 0.7$, e) $\varepsilon_{\beta} = 0.8$	41

Fig. 3.8 Representación del sistema de solución numérica para distintos valores de y_c	42
Fig. 3.9 Representación del modelo de la DNS Completa para distintos valores de L_η	43
Fig. 4.1 Alcance del flujo multidimensional en la región de fluido libre para distintas microestructuras de medio poroso	46
Fig. 4.2 Campo de la componente de velocidad u_y a distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$	47
Fig. 4.3 Líneas de corriente en la cercanía de la frontera divisoria para distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$	48
Fig. 4.4 Alcance del flujo multidimensional en la región de medio poroso para distintas microestructuras de medio poroso	49
Fig. 4.5 Líneas de corriente dentro de la región de medio poroso para distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$	49
Fig. 4.6 Mallado del sistema para: a) DNS Completa, b) DNS Acoplada	51
Fig. 4.7 Mallado cerca de la inter-región para: a) DNS Completa, b) DNS Acoplada	52
Fig. 4.8 Perfil de velocidad puntual en distintas zonas del sistema.....	54
Fig. 4.9 Perfil de velocidad promedio en distintas zonas del sistema	55
Fig. 4.10 Error relativo entre los métodos de solución en términos de velocidades puntuales	57
Fig. 4.11 Error relativo entre los métodos de solución en términos de velocidades promedio	59
Fig. 4.12 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad puntual	60
Fig. 4.13 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad promedio	61
Fig. 4.14 Error relativo promedio en el sistema a distintas posiciones de la frontera de solución en términos de velocidad puntual.....	62
Fig. 4.15 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de tamaño de la región de fluido libre en términos de velocidad puntual.....	63
Fig. 4.16 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintas geometrías de medio poroso	65
Fig. 4.17 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintas posiciones de la frontera de solución.....	67
Fig. 4.18 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintos tamaños de la región de fluido libre	68
Fig. 4.19 Tiempos de cómputo para la obtención del campo de velocidad del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)	69
Fig. 4.20 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)	71
Fig. 4.21 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)	71
Fig. 4.22 Tiempos de cómputo para la obtención del campo de velocidad del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional).....	74

Fig. 4.23 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional).....	75
Fig. 4.24 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional).....	76
Fig. 4.25 Perfil de velocidad puntual en distintas regiones del sistema	78
Fig. 4.26 Perfil de velocidad promedio en distintas regiones del sistema.....	78
Fig. 4.27 Error relativo promedio del sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad puntual	79
Fig. 4.28 Error relativo promedio del sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad promedio.....	80
Fig. 4.29 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo bidimensional).....	82
Fig. 4.30 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo bidimensional).....	82
Fig. 4.31 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo tridimensional).....	83
Fig. 4.32 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo tridimensional).....	84
Fig. 7.1 Canal limitado por dos placas paralelas	93
Fig. 7.2 Comportamiento de la derivada de la velocidad en el modelo con respecto a la velocidad supuesta en la frontera de solución para geometría de celda unitaria de medio poroso: a) Prismas Cuadrados, b) Cilindros, c) Cilindros Escalonados, d) Cilindros Aleatorios, e) Alfombra de Sierpinski.....	98

Índice de Tablas

Tabla 4.1 Número de elementos necesarios para la obtención del perfil de velocidad por DNS Completa (geometrías con flujo bidimensional).....	50
Tabla 4.2 Número de elementos necesarios para la obtención del perfil de velocidad por DNS Completa (geometrías con flujo tridimensional)	50
Tabla 4.3 Reducción de elementos necesarios para el modelo de solución numérica en la DNS Acoplada respecto a la DNS Completa (Geometrías con flujo bidimensional).....	52
Tabla 4.4 Reducción de elementos necesarios para el modelo de solución numérica en la DNS Acoplada respecto a la DNS Completa (Geometrías con flujo tridimensional)	53
Tabla 7.1 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso	99
Tabla 7.2 Valores de error relativo en términos de velocidad promedio en diversas zonas del sistema para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso	99
Tabla 7.3 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema a distintos valores de fracción vacía.....	100
Tabla 7.4 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema a distintos valores de fracción vacía.....	101
Tabla 7.5 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintas posiciones de la frontera de solución	102
Tabla 7.6 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintos tamaños de la región de fluido libre.....	103
Tabla 7.7 Valores de error relativo en términos de velocidad promedio en diversas zonas del sistema para distintos tamaños de la región de fluido libre.....	104
Tabla 7.8 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintos valores de fracción vacía (DNS Semiacoplada).....	105
Tabla 7.9 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso.....	106
Tabla 7.10 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintas posiciones de la frontera de solución.....	107
Tabla 7.11 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintos tamaños de la región de fluido libre	108

1. Generalidades

1.1. Introducción

El flujo alrededor y dentro de un medio poroso tiene una gran presencia en diversos aspectos de la ingeniería química y es un problema que hasta la fecha se encuentra abierto. Algunos ejemplos son los reactores químicos heterogéneos de lecho empacado (Yakovlev y Zambalov, 2019), intercambiadores de calor (Imke, 2004) y filtración a través de membranas (Wang et al., 2010).

La importancia del estudio de este tema radica en la necesidad de conocer el perfil de velocidad del fluido para poder describir los fenómenos de transferencia de calor y masa de estos sistemas. Para ello, deben desarrollarse modelos matemáticos que describan adecuadamente el flujo en sistemas fluido-medio poroso, con el fin de obtener los coeficientes efectivos de transporte. Lo anterior atrae fuerte interés y lleva a trabajar sobre esta línea de investigación, específicamente en este proyecto. A pesar de haber varios avances reportados en la literatura, aún existen dudas sobre la efectividad de los métodos utilizados para la descripción de estos fenómenos.

En general, el análisis del transporte de movimiento en sistemas fluido-medio poroso suele hacerse en términos de ecuaciones de conservación macroscópicas en cada región homogénea, las cuales son acopladas mediante condiciones de frontera en una superficie divisoria entre ambas regiones. No obstante, el reemplazar una inter-región por una superficie divisoria requiere el uso de las ecuaciones de conservación en la zona de transición, donde las restricciones de longitudes de escala impuestas no se satisfacen debido a las variaciones significativas de la microestructura.

Tal problema ha sido analizado por Valdés-Parada et al., (2013), mediante el desarrollo de condiciones de salto, que involucran coeficientes efectivos. Sin embargo, el desarrollo de dichas condiciones de frontera implica la solución de problemas de cerradura. Dichos problemas en algunas ocasiones son abordados mediante el uso de geometrías simplificadas, lo cual pone en duda su certeza debido a la información que se pierde de la microestructura del medio poroso, especialmente en la zona de transición.

Otra manera de describir estos sistemas es a través del uso de ecuaciones de movimiento a escala del continuo, utilizando simulaciones numéricas. Así, se calculan los perfiles de velocidad y los coeficientes de transporte a través de la discretización y solución numérica de dichas ecuaciones. Sin embargo, el uso de este tipo de aproximación es limitada por la gran demanda de poder de cómputo que se requiere para representar sistemas de tamaños elevados o que involucren geometrías de medio poroso muy complejas.

En la literatura se ha encontrado que, lejos de la zona de transición entre las regiones de fluido y medio poroso, el comportamiento de la velocidad dentro de cada región homogénea alcanza un comportamiento no influenciado por los cambios de estructura de dicha zona. Es decir, el comportamiento en el seno de cada región homogénea es similar al de un sistema libre. De esta

manera, dentro de la región de fluido libre se tiene un comportamiento parabólico del perfil de velocidad, similar al flujo de Poiseuille, el cual puede ser descrito de forma analítica.

En este trabajo se trata el desarrollo de una metodología que incorpore la solución analítica de las ecuaciones de movimiento en la región homogénea de fluido con los métodos de solución numéricos en la zona de transición y región homogénea del medio poroso. Con esto, se pretende entender mejor el comportamiento dentro de dicha región de fluido y se pretende facilitar el cálculo del perfil dentro de estos sistemas. Con ello, además, es posible reducir la carga computacional y el tiempo requerido para el análisis de este tipo de sistemas.

1.2. Antecedentes

Se ha deseado entender el comportamiento fundamental del transporte de movimiento, calor y masa en un medio poroso a escala microscópica desde tan atrás como hace un siglo. Como se mencionó en la introducción de este trabajo, en la literatura se distinguen principalmente dos maneras de abordar el problema del cálculo del perfil de velocidad en sistemas fluido-medio poroso: el uso de ecuaciones a nivel puntual y el uso de ecuaciones de medio efectivo.

Al utilizar las ecuaciones de movimiento a nivel puntual es necesario considerar la microestructura del medio poroso, de manera que el desarrollo de soluciones analíticas es prácticamente imposible, debido a la complejidad presentada para describir a la geometría de la fase fluida en algunos casos. Una forma de abordar esta problemática es mediante el uso de técnicas de discretización de las ecuaciones diferenciales gobernantes del sistema, reduciendo las mismas a un sistema de ecuaciones algebraicas, que regularmente se soluciona de forma numérica.

En el desarrollo de las ecuaciones de medio efectivo se buscan obtener ecuaciones de movimiento escaladas para la velocidad en estos sistemas, sin tomar en cuenta la microestructura del medio poroso. Sin embargo, para el desarrollo de dichos modelos se requiere información de las variables a nivel microscópico, obtenida usando problemas de cerradura. Estos se pueden resolver analíticamente mediante simplificaciones de la geometría del sistema o, en algunas ocasiones, requieren de soluciones numéricas.

Ambos enfoques suelen ser usados complementariamente y, a continuación, se describirán trabajos sobre su desarrollo y relación.

Ecuaciones de medio efectivo

A través de este enfoque se formulan modelos que describan los fenómenos de transferencia de cantidad de movimiento, masa y calor en el sistema a nivel macroscópico. En este contexto existen principalmente dos tipos de modelado (Goyeau et al., 2003): El modelo de un dominio (*One Domain Approach*, ODA) y el modelo de dos dominios (*Two Domain Approach*, TDA). Una vista general de ambos se puede apreciar en la Fig. 1.1.

Primero hemos de definir el concepto de *región homogénea*. Se le llama así a una región del sistema que no es influenciada por sus fronteras y cuyas propiedades no dependen de la posición.

El ODA supone que el sistema fluido-medio poroso consta de dos regiones homogéneas y una zona de transición, a la cual se le llama inter-región. Así, se obtiene una sola ecuación llamada Ecuación Generalizada de Transporte (*Generalized Transport Equation, GTE*), la cual es válida para todo el sistema. Además, los coeficientes efectivos son dependientes de la posición dentro de la inter-región (dicha dependencia debe determinarse). Este tipo de modelado tiene como ventaja no tener suposiciones o restricciones por longitud de escala, además de no requerir condiciones de frontera.

Por otro lado, el TDA considera que el sistema fluido-medio poroso se compone de dos regiones homogéneas separadas por una superficie divisoria, la cual reemplaza a la inter-región. Aquí se desarrollan ecuaciones promedio escaladas para cada una de las dos regiones homogéneas, donde los coeficientes efectivos se mantienen constantes con la posición. Para el acoplamiento de las ecuaciones de cada región homogénea son necesarias condiciones de frontera (de salto), las cuales capturen la información de la inter-región.

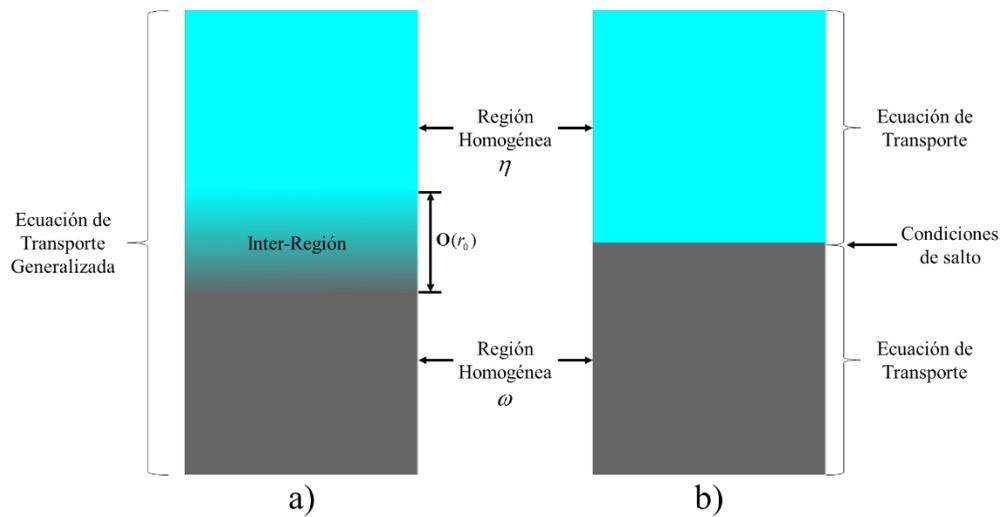


Fig. 1.1 Modelos de a) un dominio y b) dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y un medio poroso

A continuación se detallan algunos trabajos donde se ha realizado este tipo de modelado.

Beavers y Joseph (1967) estudiaron de manera teórica y experimental un sistema compuesto por un canal con flujo de Poiseuille entre una pared superior impermeable y una pared inferior permeable que conecta con un medio poroso saturado con fluido. El flujo en este sistema es uniforme, unidireccional, totalmente desarrollado y es generado por una caída de presión constante. La disposición del sistema es tal que en la región del medio poroso se considera válida la ecuación de Darcy, mientras que se utiliza la ecuación de Navier-Stokes para modelar el flujo en la región de fluido libre.

Para acoplar ambas ecuaciones, se utilizó una condición de frontera semi-empírica con la forma de la Ley de Enfriamiento de Newton, en función de un coeficiente ajustable adimensional α , solo dependiente de la microestructura del medio poroso. Utilizando valores entre 0.1 y 4 para α , pudieron reproducirse las observaciones experimentales del perfil de velocidad en el sistema. El amplio rango de valores muestra la gran dependencia que tiene el perfil de la velocidad en la inter-región con la microestructura. Una comparación entre el perfil experimental y el obtenido a través del modelo propuesto se puede apreciar en la Fig. 1.2.

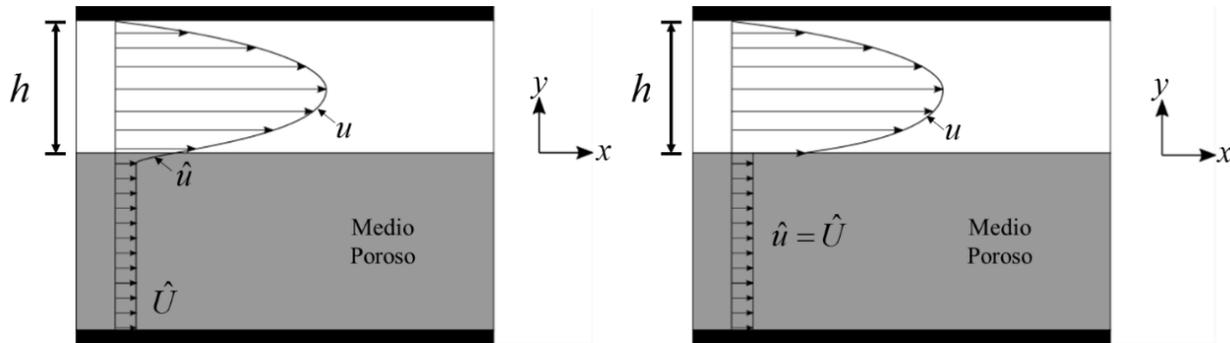


Fig. 1.2 Perfil de velocidad para un canal ocupado parcialmente por un medio poroso obtenido por Beavers y Joseph (derecha) comparado con el perfil real (izquierda)

Se aprecia que el utilizar un modelo que conste de dos ecuaciones acopladas ocasiona una discrepancia entre los perfiles de velocidad teórico y experimental en la región de transición. Esto se atribuye a la falta de términos que describan esfuerzos viscosos en la ley de Darcy.

Con esta información, infirieron que el comportamiento en la zona de transición se debe a una penetración de los esfuerzos producidos desde una región homogénea a la otra. Cabe destacar tal penetración solo afectan a cierta parte de ambas regiones homogénea, de manera que el flujo dentro del seno de cada región homogénea exhibe un comportamiento similar al del caso donde ambas se encuentran aisladas.

El trabajo de Beavers y Joseph fue un punto de partida para numerosos estudios en este tipo de sistemas. El objetivo es el entendimiento de su condición de frontera, dada su naturaleza semi-empírica y su gran utilidad para reproducir resultados experimentales.

Fijándose en esto, Neale y Nader (1974) continuaron el trabajo de Beavers y Joseph, utilizando la ley de Darcy con la corrección de Brinkman en la región de medio poroso, considerando los esfuerzos viscosos. Se obtuvieron los mismos resultados, con el coeficiente α igual a $\sqrt{\mu_{eff} / \mu_{\beta}}$, donde μ_{eff} es la viscosidad efectiva y μ_{β} es la viscosidad del fluido. Sin embargo, está limitado a la poca precisión para estimar a μ_{eff} en la región de medio poroso. Con este trabajo se reiteró la utilidad de la condición de frontera de Beavers y Joseph, aunque sea físicamente incorrecta.

Posteriormente, Sahraoui y Kaviany (1992) estudiaron el sistema de Beavers y Joseph con simulaciones numéricas, representando al medio poroso con un sistema de celdas unitarias de geometrías simplificadas. Determinaron que α depende de la microestructura de la inter-región, además de la dirección de flujo, la porosidad, el número de Reynolds (Re), la altura de fluido sobre el medio poroso y la posición de la superficie divisoria. Sin embargo, esto puede ser consecuencia del uso de geometrías simplificadas. El uso de geometrías más complejas de celda sería el siguiente paso, sin embargo, esto es complicado y costoso computacionalmente, más en esa época.

Hasta este punto, los estudios de esta clase de sistemas se habían centrado en la obtención de condiciones de frontera semi-empíricas, por lo que no hay una dependencia explícita con la microestructura de la inter-región y, por ende, no se tiene certeza de su precisión.

Una herramienta que permitió el desarrollo de modelos para la descripción explícita de dicha dependencia fue el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1969). Este es una técnica utilizada para derivar ecuaciones gobernantes en sistemas multifásicos. Partiendo de ecuaciones válidas en cada fase, se llega a ecuaciones válidas en todo el sistema, sin considerar los detalles ni la geometría a escala local.

Esto presenta ventajas con respecto al uso de ecuaciones puntuales, debido a que, a medida que la complejidad de la geometría del dominio de solución aumenta, la solución analítica de las ecuaciones de movimiento se vuelve inviable y es necesario recurrir a métodos numéricos.

En un medio con dos fases, se puede especificar una región de promediado V , localizada en alguna parte de un sistema de dos fases, de manera que:

$$V = V_{\beta} + V_{\gamma} \quad (1.1)$$

Donde V_{β} y V_{γ} son los volúmenes ocupados por cada una de las fases en dicha región, como se observa en la Fig. 1.3. Así, pueden definirse dos operadores: promedio superficial y promedio intrínseco. Para una propiedad arbitraria ψ_{β} de la fase β , estos se definen de la siguiente manera:

Promediado superficial

$$\langle \psi_{\beta} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_{\beta}} \psi_{\beta} dV \quad (1.2)$$

Promediado intrínseco

$$\langle \psi_{\beta} \rangle^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}} \int_{V_{\beta}} \psi_{\beta} dV \quad (1.3)$$

Estos operadores están relacionados entre sí por medio de la fracción volumétrica de fluido, porosidad o fracción vacía ε_{β} .

$$\langle \psi_\beta \rangle = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \varepsilon_\beta \quad (1.4)$$

Ya que:

$$V_\beta = \varepsilon_\beta V \quad (1.5)$$

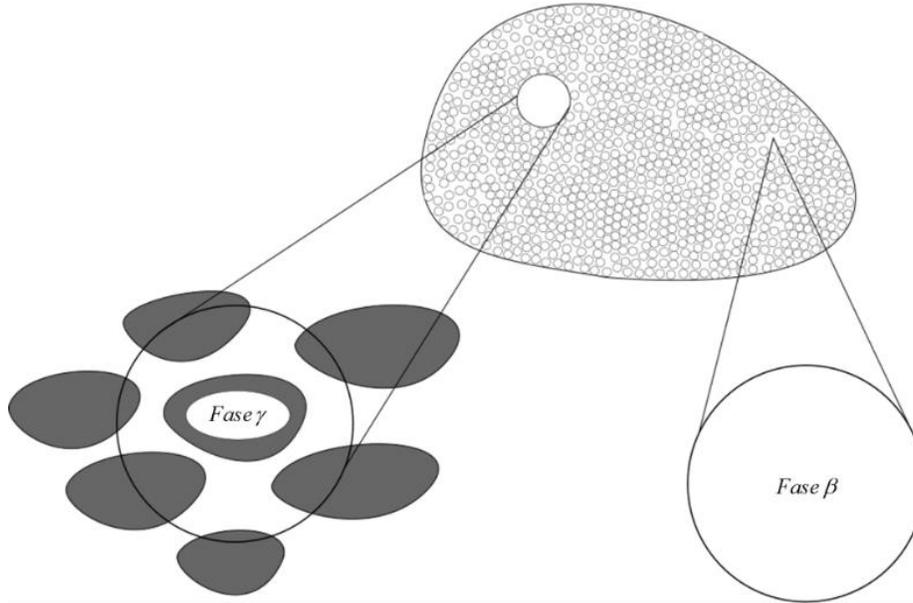


Fig. 1.3 Diferentes escalas de regiones de promediado en un medio ocupado por dos fases: β y γ

Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) abordaron el sistema de Beavers y Joseph por medio del método del promedio volumétrico, buscando obtener una condición de frontera de manera teórica. Para ello, presentaron dos alternativas.

En la primera, se planteó un ODA, con una GTE obtenida promediando la ecuación de Stokes, la cual se reduce a la ecuación de Stokes en la región de fluido y a la ecuación de Darcy-Brinkman en la región de medio poroso. Así, se obtiene un término conocido como la segunda corrección de Brinkman. En la segunda, se planteó un TDA a partir de dicha GTE, acoplando las ecuaciones en cada región con una condición de salto en función de un coeficiente ajustable β , con valor estimado del orden de la unidad.

Se validaron ambos modelos contra los datos experimentales de Beavers y Joseph (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b). Si bien el ODA no fue capaz de reproducir dichos datos, proporcionó información del efecto de la inter-región sobre el flujo. Por otro lado, el TDA fue capaz de reproducir los valores al utilizar valores de β entre -1 y 1.47, probando su utilidad.

Más tarde, Ochoa-Tapia y Whitaker (1998) utilizaron esta metodología para derivar una condición de frontera de transferencia de cantidad de movimiento considerando efectos inerciales. Promediando la ecuación de Navier-Stokes, obtuvieron una GTE que se reduce a la ecuación de

Navier-Stokes en la región de fluido y a la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer en la región de medio poroso. Dicha condición estaba en términos de dos coeficientes ajustables β_1 y β_2 del orden de la unidad, asociados con los esfuerzos viscosos e inerciales en exceso, respectivamente.

Los trabajos de Ochoa-Tapia y Whitaker proporcionaron una alternativa teórica para la obtención condiciones de frontera en este tipo de sistemas. Sin embargo, su limitación radica en que los coeficientes de salto carecían dependencia explícita con los fenómenos en la inter-región e interpretación física concreta. Por ello, eran *condiciones de frontera abiertas*.

Atendiendo tal problema, Wood et al. (2000) propusieron una metodología que permitió obtener una condición de salto para la transferencia de masa entre una superficie catalítica no homogénea adyacente a un fluido. Dicha condición está en términos de un coeficiente de reacción efectivo, cuya dependencia espacial en la inter-región fue determinada mediante un problema de valor a la frontera similar a los de las regiones homogéneas, pero con un dominio de solución limitado a una región representativa de la superficie catalítica. En el contexto del método del promedio volumétrico, esto se conoce como problema de cerradura local (PCL).

Goyeau et al. (2003) plantearon una metodología que permite la obtención de una expresión semi-analítica del coeficiente β en la condición de salto Ochoa-Tapia y Whitaker. Esta consiste en acoplar un ODA que incorpora los efectos de la inter-región en los coeficientes efectivos con un TDA dado por la ecuación de Stokes y la ecuación de Darcy-Brinkman. Así, determinaron la dependencia de β con los coeficientes efectivos, y la velocidad promedio en la inter-región.

Tales valores de β se compararon con los de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b) y validaron con los datos experimentales de Beavers y Joseph, logrando buenas predicciones. Este estudio puso en evidencia la influencia de la inter-región en todo el sistema, siendo un paso intermedio en la determinación exacta del coeficiente β , para lo cual debe plantearse un PCL que considere dentro de su dominio de solución a la inter-región.

Siguiendo la idea propuesta en el trabajo Wood et al. (2000), Valdés-Parada et al., (2007, 2009) desarrollaron una condición de salto para el esfuerzo libre de coeficientes ajustables. Para ello se planteó un PCL, mismo que debió resolverse de forma simplificada, por su gran complejidad. De esta manera pudo cerrarse el ODA propuesto por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a, 1995b). Además, propusieron una metodología para el cálculo de β , obteniendo una expresión semi-analítica, con resultados idénticos a los de Goyeau et al. (2003).

Los trabajos de Valdés-Parada et al., (2007, 2009) aportaron una metodología de condiciones de salto cerradas que completan el TDA propuesto en Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a). Sin embargo, estos tienen limitaciones, una de ellas la imposición de la continuidad de la velocidad.

Tales problemas fueron atendidos por Valdés-Parada et al. (2013), desarrollando una metodología más general para obtener los coeficientes de salto, planteando un problema de cerradura

macroscópico con dos restricciones integrales, pudiéndose obtener la condición de salto tanto para el esfuerzo como para la velocidad.

Recientemente, Hernández-Rodríguez (2017) calculó el perfil de velocidad y la permeabilidad en un sistema de Beavers y Joseph de forma analítica, representando al medio poroso como un arreglo periódico de placas paralelas. Esto le permitió ver que, dentro de un rango limitado de valores de la fracción vacía, era posible reproducir los datos de los problemas de cerradura de la literatura. Además, sugirió que se pueden obtener los mismos resultados para geometrías más complicadas mediante el uso de DNS.

Simulaciones numéricas

Como se dijo anteriormente, en este enfoque se busca pasar de las ecuaciones diferenciales puntuales que modelan el sistema continuo a una serie de ecuaciones algebraicas válidas solo en ciertas regiones o puntos del sistema. Sin embargo, esto conlleva ciertos problemas. Por una parte, debe de establecerse una técnica eficiente para la selección de dichos puntos, evitando omitir fenómenos importantes y el uso de un número de ecuaciones algebraicas mayor al necesario. Incluso así, esta cantidad es suficientemente alta para que se sea inviable resolverlas manualmente, por lo cual se acude a los sistemas computacionales.

En el contexto de la dinámica de fluidos computacional (*Computational Fluid Dynamics*, CFD), existen diferentes acercamientos para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de movimiento.

Algunos métodos se basan en la simulación de movimiento y colisiones a nivel partícula, como lo son el método de *Lattice Gas Automata* (LGA) (Hardy et al., 1973, 1976; Frisch et al., 1986), que posteriormente derivaría en el método de Lattice Boltzmann (*Lattice Boltzmann Method*, LBM) (McNamara y Zanetti, 1988) y el método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) (Gingold y Monaghan, 1977). Si bien estos métodos han probado ser útiles para la descripción del flujo en distintos sistemas, tienen complicaciones para ser acoplados con modelos de transferencia de calor y de masa, o en la descripción de fronteras muy complicadas, en el caso del método SPH.

Otros se basan en la discretización de las ecuaciones de movimiento a escala del continuo. Algunas alternativas para la discretización de las ecuaciones de movimiento son el método de diferencias finitas (*Finite Difference Method*, FDM) (Courant et al., 1967), el método del elemento finito (*Finite Element Method*, FEM) (Clough, 1960; Courant, 1943) y el método de volumen finito (*Finite Volume Method*, FVM) (Demirdžić y Martinović, 1993).

Debido a la complejidad de las ecuaciones para flujo turbulento o con disposiciones geométricas complejas, muchas veces se requiere de simplificaciones de las ecuaciones de movimiento, ya sea con modelos RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*) (Chen et al., 1990) o con modelos LES (*Large Eddy Simulation*) (Kuwahara et al., 2006), los cuales hacen uso de promediado espacial y/o temporal, para atenuar la carga computacional asociada.

Sin embargo, ya que se busca obtener información a nivel local del flujo en sistemas tipo Beavers y Joseph, estas alternativas no son atractivas. Esto es debido a que el promediado de dichas ecuaciones tiende a omitir información.

Por otro lado, las Simulaciones Numéricas Directas (*Direct Numerical Simulation*, DNS) permiten obtener el perfil de velocidad en los sistemas fluido-medio poroso mediante la discretización de las ecuaciones de transporte en la escala del continuo. Esto no implica ningún tipo de simplificación, más allá de las condiciones del problema en sí. Por ello, suele estar limitado a condiciones de flujo laminar y estado estacionario, justo como en el caso del sistema de Beavers y Joseph. De esta manera, las DNS son una buena alternativa para la obtención de información a escala local.

El interés en aplicar técnicas numéricas para la descripción del flujo en sistemas fluido-medio poroso surgió al querer describir fenómenos de transferencia de calor y masa en equipos con injertos porosos. Estos cuentan con arreglos de cilindros o esferas dentro de su configuración geométrica. Algunos de los trabajos sobre la descripción del perfil de velocidad en sistemas con arreglos de este tipo se presentan a continuación.

Utilizando el método propuesto por Hamielec, Johnson, et al. (1967) y Hamielec, Hoffman, et al., (1967) para el modelado del flujo a través de partículas esféricas estáticas, Pruppacher et al. (1970) estudiaron el flujo de un fluido newtoniano e incompresible bajo condiciones de estado estacionario y bajos números de Reynolds. Para ello, utilizaron el MDF en la ecuación de Navier-Stokes y solucionaron de forma numérica. Así, presentaron resultados de coeficiente de arrastre y vorticidad con buena concordancia contra datos experimentales, validando su metodología.

Sin embargo, en los modelos de Pruppacher se considera a cada una de las partículas independientemente, rodeadas de una frontera donde se imponen condiciones de flujo libre. Esto ponía en duda los resultados obtenidos, debido a que se desprecia el efecto que tiene cada una de las formas sólidas sobre las demás.

Tomando en consideración esto, Launder y Massey (1979) estudiaron el flujo laminar a través de un banco de partículas, así como la transferencia de calor. Ellos propusieron un nuevo modelo donde se construye una malla polar alrededor de cada partícula del arreglo, conectada con una malla cartesiana que cubre a todo el fluido. Con esto, se pretendía conocer el efecto de los fenómenos ocurridos en cada partícula sobre todo el sistema. Se compararon resultados de campo de flujo, la función de corriente, presión, número de Stanton y Nusselt contra datos experimentales, obteniendo mejores resultados que el modelo inicial de Pruppacher.

El desarrollo de los procedimientos de solución numérica dado en estos trabajos hizo posible su uso en otras áreas, siendo una de ellas el flujo sobre y dentro de un medio poroso. Como se mencionó antes, los medios porosos pueden ser representados por arreglos de celdas unitarias con geometrías representativas.

Larson y Higdon (1986, 1987) estudiaron el flujo cercano a la superficie en un medio poroso con flujo bidimensional compuesto de celdas unitarias cuadradas y hexagonales cuya fase sólida está en forma de cilindros. Resolvieron de manera numérica las ecuaciones de Stokes utilizando LBM. Consideraron dos casos: flujo por una caída de presión de un fluido viscoso en arreglos periódicos de celdas unitarias y flujo ocasionado por el movimiento de una pared en un arreglo semi-infinito de celdas unitarias. En ambos casos se estudió flujo en dirección axial y transversal a la fase sólida de cada celda unitaria medio poroso.

Además, se detalla el uso de una geometría simplificada de celdas unitarias de medio poroso, así como las condiciones de frontera necesarias en cada celda unitaria. Finalmente, utilizaron este procedimiento para el estudio del efecto de la estructura del medio poroso sobre la permeabilidad utilizando distintos valores para la fracción vacía.

Analizando los cambios en las líneas de corriente causados por variar la fracción vacía, se remarca la importancia de los fenómenos a escala local, puesto que cambios no significativos desde un punto de vista macroscópico pueden ocasionar cambios importantes a escala microscópica. Esto comprueba que utilizar modelos macroscópicos omite cierta información de la escala microscópica, lo cual (hasta la fecha) hace dudar de las simplificaciones hechas en los modelos de ecuaciones de medio efectivo. Aun así, se explica que estos resultados pueden ser utilizados para la obtención de los coeficientes en modelos TDA, con buena concordancia.

Posteriormente, Sahraoui y Kaviany (1992) estudiaron numéricamente el efecto del flujo sobre el coeficiente α de la condición de Beavers y Joseph. En este estudio se resolvieron de forma numérica las ecuaciones de Navier-Stokes, utilizando una discretización por medio del MDF. El medio poroso se representa mediante un sistema compuesto de un arreglo de celdas unitarias cuadradas, donde la fase sólida tiene forma de cilindros. Además, dichas celdas se consideraron en dos configuraciones: en línea y escalonadas.

Un resultado importante en este trabajo es la determinación de la distancia a la cual el comportamiento de cada región homogénea deja de ser influenciado por la adyacente, es decir, donde se alcance el comportamiento del seno de cada región homogénea. Sin embargo, los valores obtenidos pueden ser efecto del uso de geometrías simplificadas, generando dudas de su veracidad. Tales dudas podrían ser resueltas mediante el uso de geometrías más cercanas a las reales. Sin embargo, esto conlleva un costo computacional elevado, con el cual no se podía lidiar en esa época.

Más tarde, con la evolución de las computadoras digitales, fue posible la representación de los sistemas mediante geometrías celda unitaria de medio poroso aún más complejas. De esta manera, fue posible evaluar la eficacia de los modelos promedio tomando como base un perfil de velocidad a escala local y obteniendo el perfil macroscópico aplicando operadores de promediado.

Breugem y Boersma (2005) realizaron DNS para modelar el flujo turbulento sobre y dentro de un medio poroso compuesto por arreglos de cubos. Se realizaron dos simulaciones numéricas: una utilizando la ecuación de Navier-Stokes para toda la fase fluida y otra utilizando en todo el dominio

la ecuación de Navier-Stokes promediada volumétricamente, basada en el trabajo de Whitaker (1996). En este trabajo se encontró que al utilizar la ecuación promediada volumétricamente se pueden reproducir los resultados de la DNS a escala microscópica, con una reducción en el tiempo de cómputo significativa. Sin embargo, para la utilización del modelo promedio fue necesario utilizar PCL con una geometría simplificada para el esfuerzo, poniendo en duda su validez.

Rosenzweig y Shavit (2007) estudiaron un sistema fluido-medio poroso con dirección de flujo normal al medio poroso, el cual se modela con celdas unitarias con forma de alfombra de Sierpinski de dos niveles. Se solucionaron de forma numérica las ecuaciones de Navier-Stokes mediante paquetería comercial que utiliza el método del volumen finito. Los datos de velocidad local obtenidos se compararon con datos experimentales medidos con velocimetría de imagen de partícula (*Particle Image Velocimetry*, PIV), mostrando una buena reproducción y dando validez al esquema numérico utilizado.

Además, derivaron una ecuación de Brinkman modificada para el perfil de velocidad a escala macroscópica, comparándola con el perfil obtenido al aplicar un promediado volumétrico a la velocidad numérica local. Tal ecuación pudo predecir de forma aceptable los valores de velocidad dentro del medio poroso y en la zona de transición, valores bajos del Reynolds ($Re_d < 1$).

Con estos trabajos se puede intuir que, a pesar de que las ecuaciones promedio sean derivadas para configuraciones geométricas muy simples, son capaces de realizar buenas predicciones de la velocidad en medios porosos con microestructuras más complejas. Sin embargo, aún no se sabe hasta qué punto la simplificación de las geometrías omite información importante respecto a los fenómenos ocurridos en el sistema, especialmente en la zona de transición.

Por otro lado, la descripción de los procesos de transporte a escala local en geometrías complejas (especialmente las que involucran geometrías tridimensionales) solo ha sido posible hasta tiempos recientes, debido a los avances en métodos computacionales. Algunos trabajos recientes muestran esfuerzos en este sentido, como se muestra a continuación.

Duman y Shavit, (2009) utilizaron como base el trabajo de Ochoa-Tapia y Whitaker, (1995a) para el desarrollo de una metodología de predicción de la velocidad en sistemas fluido-medio poroso mediante DNS. Dicha metodología no es afectada por la posición de la frontera divisoria y fue corroborada contra mediciones experimentales hechas mediante PIV para distintos tipos de configuraciones geométricas tridimensionales complicadas. Este estudio está limitado a sistemas con una transición súbita en la fracción en la inter-región, por lo que debe ser extendida a sistemas con cambios graduales en la microestructura en tal zona.

Mediante arreglos aleatorios de esferas como representación de un medio poroso, Wood et al. (2015) compararon los perfiles de velocidad obtenidos por DNS con perfiles obtenidos experimentalmente por PIV para flujo laminar. El medio poroso consistía en un lecho empacado con esferas de vidrio óptico sujetas con una celda del mismo material. El modelo geométrico

introducido a la paquetería de software tiene la misma configuración y escala, salvo el error experimental. Se obtuvieron perfiles experimentales y numéricos de alta resolución con un error entre ambos del 11.32 % y 4.74 % para la velocidad axial y normal, respectivamente.

Estos trabajos respaldan el uso de las DNS para el cálculo de perfiles de velocidad en medios porosos, puesto que son capaces de reproducir modelos realistas con suficiente precisión. Así, las DNS pueden ser utilizadas para la descripción satisfactoria del flujo en dichos sistemas. Ochoa-Tapia et al. (2017) han propuesto el uso de geometrías más realistas para, por medio de DNS, realizar los cálculos de PCL para recabar información acerca de los fenómenos en la inter-región y validar su uso.

Respecto a lo visto en la literatura, las DNS han probado poder describir el flujo en sistemas que involucran flujo sobre y a través de medios porosos. Además, ha habido grandes avances en el desarrollo de ecuaciones analíticas que describan el flujo en este tipo de sistemas.

Desde los trabajos de Beavers y Joseph se sabe que el contacto entre dos regiones homogéneas ocasiona cambios cualitativos en el flujo solo en la cercanía de la zona de transición. Bajo las condiciones presentadas, el perfil de velocidad en la región de fluido libre presenta un comportamiento parabólico similar al del flujo de Poiseuille, cuyo modelo matemático puede ser solucionado de manera analítica. Esto lleva a pensar que en la región de fluido libre de sistemas tipo Beavers y Joseph, el perfil de velocidad también puede obtenerse también de forma analítica.

Así, en este trabajo se analizará la posibilidad del uso conjunto de ecuaciones analíticas en la región de fluido libre con DNS en la región de medio poroso y la zona de transición para la obtención de la velocidad en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso y si tal acercamiento presenta ventajas sobre el uso de DNS para la solución de todo el sistema, que faciliten el estudio de sistemas de mayor tamaño con microestructuras de medio poroso más complicadas.

1.3. Motivación

Las simulaciones numéricas son una alternativa viable para el estudio del flujo en sistemas fluido-medio poroso y están respaldadas con comparaciones contra datos experimentales. Sin embargo, presentan problemas para representar sistemas de gran tamaño o con microestructura de medio poroso compleja, lo cual limita su uso, debido a la gran demanda computacional requerida.

En la literatura sobre estos sistemas se describe que el efecto del contacto de cada región homogénea (fluido y medio poroso) en el comportamiento del perfil de velocidad sobre su contraria es apreciable solo en la cercanía de la zona de transición. Se ha observado que el perfil de velocidad en el seno de la región de fluido libre presenta un comportamiento parabólico similar al caso de un flujo entre dos placas paralelas, el cual puede describirse mediante una ecuación analítica.

Con lo anterior, se propone plantear una metodología que haga uso de una ecuación analítica en la región de fluido libre en conjunto con DNS en la región de medio poroso y la zona de transición. Con esto se podría corroborar que el contacto con la región de medio poroso no tiene un impacto cualitativo en el flujo en el seno de la región de fluido libre y, además, puede ayudar a paliar la alta demanda de recursos computacionales requeridos en estos casos, al evitar el uso de soluciones numéricas en dicha región.

1.4. Hipótesis

Es posible utilizar una solución analítica en la región de fluido libre, en conjunto con el cálculo numérico del perfil de velocidad en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Desarrollar una metodología para el cálculo del perfil de velocidad en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso bajo régimen de Stokes mediante el uso de una solución analítica en la región de fluido libre en conjunto con la solución numérica en la región de medio poroso..

1.5.2. Objetivos específicos

- Determinar la distancia de alcance del efecto provocado por la presencia del medio poroso en cada región homogénea
- Desarrollar una metodología que incorpore la solución analítica en la región de flujo parabólico a las simulaciones numéricas
- Validar la metodología propuesta utilizando distintas microestructuras para la representación del medio poroso

2. Metodología

En este capítulo se describirán las dos maneras de realizar el cálculo del perfil de velocidad en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso que nos concierne para este estudio. Una de ellas es la utilización de DNS en toda la región de solución, a la que a partir de ahora se le llamará *DNS Completa*. Por otro lado, se propondrá un método que utilice DNS en la región de medio poroso y la zona de transición en conjunto con soluciones analíticas dentro del seno de la región de fluido libre, al que de ahora en más se le llamará *DNS Acoplada*. Para el planteamiento de esta última, es necesario conocer el alcance del efecto en cada región homogénea ocasionado por la presencia de la otra. Por ello, la metodología a seguir para encontrar tal alcance es descrita dentro de las primeras secciones de este capítulo, previo al planteamiento de la DNS Acoplada.

2.1. Descripción de la región de medio poroso

De acuerdo con Quintard y Whitaker (1993), los medios porosos pueden ser representados mediante arreglos de celdas unitarias con geometrías idealizadas, como se muestra en la Fig. 2.1.

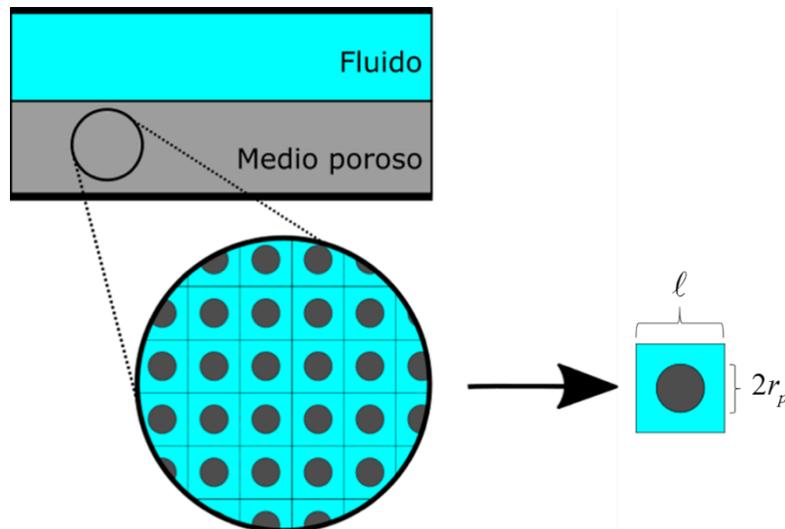


Fig. 2.1 Representación idealizada del medio poroso compuesto por celdas unitarias de geometrías conocidas

Cada celda unitaria que compone al medio poroso consta tanto de fase sólida como de fase fluida, llamadas “fase γ ” y “fase β ”, respectivamente. A la longitud de cada celda unitaria de medio poroso se le llamará ℓ y a la longitud característica de la fase γ en cada celda unitaria se le llamará ℓ_γ . Además, se llamará $A_{\beta\gamma}$ a la interface entre la fase sólida y la fase fluida del medio poroso. Esto se puede ver de forma más detallada en la Fig. 2.2. Se considerará que la fase sólida dentro de las celdas unitarias de medio poroso es rígida e impermeable. Por ello, se puede considerar una condición de no deslizamiento en las fronteras de la fase sólida de cada celda unitaria de medio poroso, al igual que en las placas que delimitan al sistema.

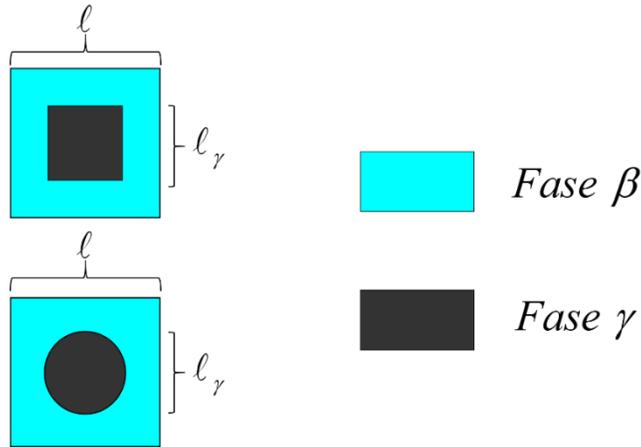


Fig. 2.2 Composición de las celdas unitarias de medio poroso

2.2. Planteamiento del problema

El sistema a estudiar es un canal parcialmente ocupado por un medio poroso con régimen de flujo reptante y en estado estacionario. En este se aprecian dos regiones: la región de fluido libre denominada “región η ” y la región del medio poroso denominada “región ω ”. Se le llama L_η al tamaño de la región de fluido libre y L_ω al de la región de medio poroso. (Ver Fig. 2.3).

El flujo, en promedio, se da a través de la coordenada x y es ocasionado por una caída de presión en dicha dirección, la cual es constante dentro de todo el sistema y de baja magnitud, de manera que solo se consideran efectos viscosos. Además, se toma una región lo suficientemente lejos de las entradas y salidas del sistema, de manera que se considera flujo completamente desarrollado. Además, se considera al canal lo suficientemente grande en la dirección z , de manera que se pueden despreciar los efectos en dicha dirección.

Además, tanto la fase sólida que compone al medio poroso como las paredes superior e inferior que delimitan al canal se consideran sólidas e impermeables, por lo cual se puede considerar una condición de no deslizamiento en las interfaces sólido-fluido.

En resumen, el sistema está bajo las siguientes condiciones:

- Estado estacionario
- Flujo reptante (efectos convectivos despreciables)
- Flujo totalmente desarrollado (efectos de entrada y salida despreciables)
- Flujo incompresible (densidad constante)
- La fase sólida del medio poroso es rígida e impermeable
- Las paredes delimitantes del sistema son rígidas e impermeables
- Caída de presión constante y solo en la dirección del flujo (dirección x)

Las ecuaciones que rigen el transporte de movimiento en este sistema son la ecuación de Stokes y la ecuación de continuidad:

$$0 = -\nabla p + \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.2)$$

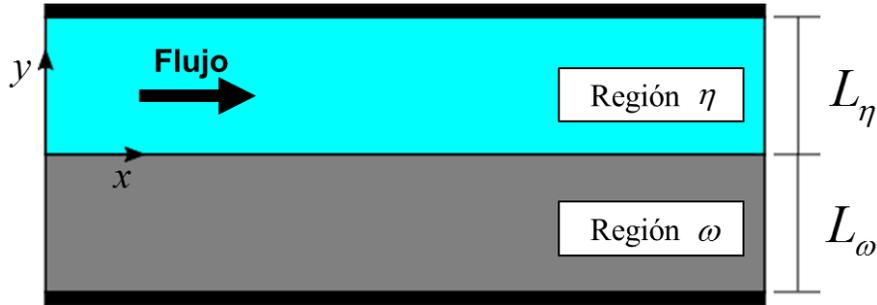


Fig. 2.3 Canal parcialmente ocupado con un medio poroso

Las condiciones de frontera asociadas al problema son las siguientes:

$$\text{En } y = L_\eta, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{En } y = -L_\omega, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{En } A_{\beta\gamma}, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

Para facilitar el tratamiento y la solución de este modelo, este es llevado a su forma adimensional (procedimiento descrito en el Apéndice A). El modelo adimensional se muestra a continuación:

Ecuación Gobernante

$$0 = c + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Condiciones de Frontera

$$\text{En } Y = Y_\eta, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{En } Y = Y_\omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{En } A_{\beta\gamma}, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

Donde u es la velocidad adimensional, Y es la coordenada adimensional perpendicular al flujo.

En la literatura sobre estos sistemas se ha encontrado que, lejos de las entradas, el campo de velocidad se vuelve periódico con respecto a la dirección del flujo (Sahraoui y Kaviany, 1992). Por

esto, es posible abordar este problema con un sistema formado por una columna de una celda unitaria de espesor, como en la Fig. 2.4:

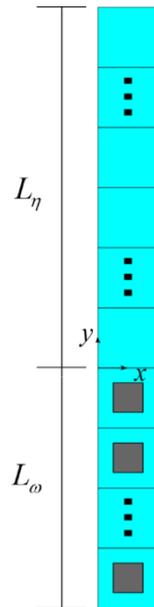
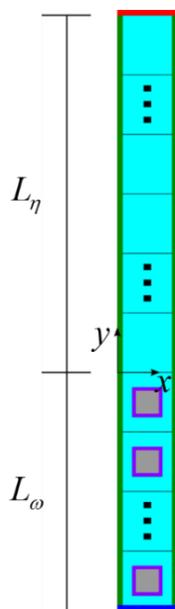


Fig. 2.4 Modelo simplificado para un canal parcialmente ocupado por un medio poroso

El modelo para el sistema simplificado se presenta a continuación:



Ecuaciones Gobernantes

$$0 = \mathbf{i}c + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.11)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.12)$$

Caída de presión

$$-\nabla P = \mathbf{i}c \quad (2.13)$$

Frontera Superior

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.14)$$

Fronteras Laterales

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \ell \mathbf{i}) \quad (2.15)$$

Frontera Inferior

$$\frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = 0 \quad (2.16)$$

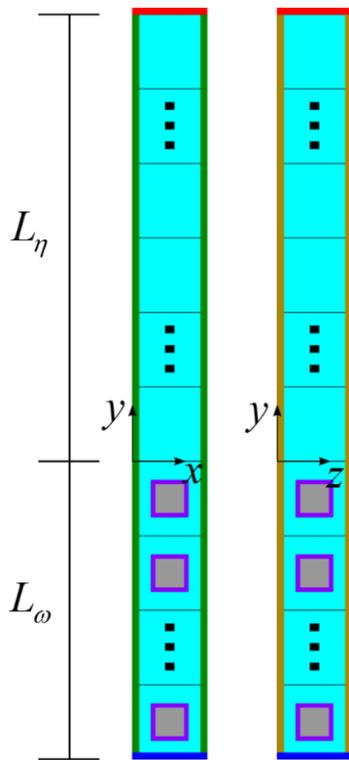
Fronteras Sólido-Fluido

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.17)$$

Fig. 2.5 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional)

En las fronteras laterales se impone una condición de periodicidad de flujo. Además, suficientemente lejos de la frontera divisoria dentro de la región ω se alcanza el comportamiento del seno del medio poroso, el cual es periódico, de manera que cada celda unitaria presenta el mismo campo de velocidad. Por ello, puede hacerse uso de la condición de simetría en la frontera inferior para representar a la región de medio poroso con una longitud menor a la real (esto se abordará en la sección posterior).

Sin embargo, este sistema supone que la geometría ocasiona un flujo bidimensional. Para un sistema con una geometría de celda unitaria que ocasiona flujo tridimensional (donde existen las tres componentes del vector de velocidad y son dependientes de las tres variables), el modelo a considerar será el mostrado en la Fig. 2.6:



Ecuación Gobernante

$$0 = \mathbf{ic} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.18)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.19)$$

Caída de presión

$$-\nabla P = \mathbf{ic} \quad (2.20)$$

Frontera Superior

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.21)$$

Fronteras Laterales

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \ell \mathbf{i}) \quad (2.22)$$

Fronteras Laterales

$$\frac{\partial u_x}{\partial Z} = \frac{\partial u_y}{\partial Z} = \frac{\partial u_z}{\partial Z} = 0 \quad (2.23)$$

Frontera Inferior

$$\frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = \frac{\partial u_z}{\partial Y} = 0 \quad (2.24)$$

Interface Sólido-Fluido

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.25)$$

Fig. 2.6 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional)

La condición de simetría dada en las fronteras a través de la coordenada z indica que bajo la condición de flujo completamente desarrollado y estando lejos de las entradas, el flujo es periódico en esa dirección, por lo cual es suficiente con analizar el sistema en una región de una celda unitaria sobre esa coordenada. Resolviendo este sistema, se obtiene un perfil de velocidad promedio con un comportamiento como el que se muestra en la Fig. 2.7.

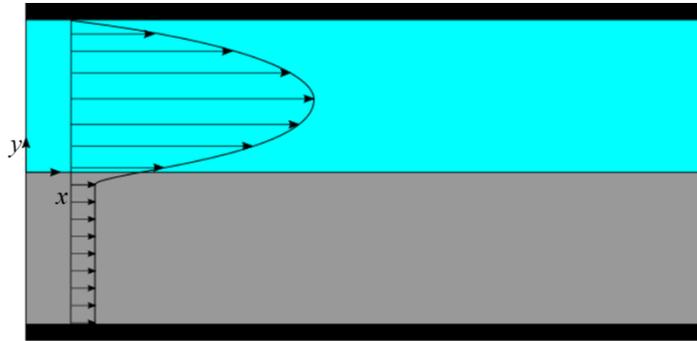


Fig. 2.7 Perfil de velocidad promedio en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso

El contacto de las regiones homogéneas η y ω en la frontera divisoria ocasiona una desviación del comportamiento esperado en cada caso aislado; esto es, para el flujo de un fluido libre en un canal y el flujo a través de medio poroso. Sin embargo, este efecto está limitado a la región cercana a dicha frontera. Por lo tanto, el objetivo de este análisis será determinar la distancia dentro de cada una de las regiones homogéneas a la cual dicho efecto deja de ser apreciable.

Dentro de la región η , cerca de la frontera divisoria el flujo es multidimensional y multidireccional por la influencia del contacto con la superficie de la región de medio poroso. A partir de cierta distancia de la frontera divisoria, el perfil de velocidad toma una forma parabólica que concuerda con el flujo de Stokes, el cual es unidimensional y unidireccional. Traes un análisis breve de este comportamiento, se infiere que en gran parte de la región η puede obtenerse tal perfil a través de una solución analítica, tal y como en un canal libre. Siguiendo esta idea, se propondrá un modelo de solución análogo al de un canal con flujo de Stokes para el perfil de velocidad en dicha región.

Por otra parte, dentro de la región de medio poroso y suficientemente lejos de la frontera divisoria el perfil de velocidad se torna periódico. Es decir, el perfil de velocidad será el mismo para cada celda unitaria de medio poroso a partir de cierta distancia dentro del medio poroso. Por ello, es posible modelar un sistema de cualquier tamaño utilizando un valor de L_η pequeño. Esto ayuda a reducir aún más la cantidad de nodos necesarios para la discretización de la ecuación de Stokes y, a su vez, reducir la carga computacional.

Por lo tanto, el objetivo en la siguiente sección será establecer una metodología para determinar la distancia con respecto a la frontera divisoria a la cual el flujo dentro de cada región homogénea toma las características mencionadas anteriormente.

2.3. Determinación del alcance del flujo multidimensional ocasionado por la frontera divisoria en cada región homogénea

En resumen, suficientemente lejos de la frontera fluido-medio poroso, el flujo dentro de la región η pasa a ser unidimensional y unidireccional y perfil de velocidad toma la forma parabólica

característica del flujo de Stokes. Por otro lado, suficientemente lejos la superficie divisoria, el perfil de velocidad en la región ω pasa a ser periódico. De esta manera, pueden apreciarse dos regiones principales con respecto al tipo de flujo, las cuales se muestran en la Fig. 2.8.



Fig. 2.8 Tipos de flujo en un canal parcialmente lleno con un medio poroso

El objetivo de este procedimiento será determinar la distancia a la cual el flujo multidimensional cerca de la frontera divisoria pasa a tomar el comportamiento del seno de cada región. Dicho de otra manera, se determinará la penetración de los esfuerzos de cada región homogénea sobre la otra. Para cumplir este objetivo es necesario analizar el comportamiento del perfil de velocidad puntual en cada región del sistema. Para esto, se realiza una DNS para la solución del modelo descrito en la Sección 2.2. Al alcance de la penetración de los esfuerzos de la región de medio poroso sobre la de fluido se le llamará d_η y, en el caso contrario, se llamará d_ω . A continuación se presentan los procedimientos a seguir en cada una de las regiones homogéneas para la determinación de estos valores.

2.3.1. Determinación del alcance del flujo multidimensional en la región homogénea de fluido

Para determinar el alcance del efecto multidimensional y multidireccional en la región η , se realizarán dos procedimientos diferentes (uno para cada región homogénea), los cuales se describen a continuación.

Primero, debe determinarse la distancia a la cual el flujo pasa a ser unidireccional, es decir, solo existe la componente en la dirección del flujo. Para esto, se realizarán cortes en las coordenadas x y y como los presentados en la Fig. 2.9.

Se evaluarán, a diferentes valores de la coordenada y , cada una de las componentes de la velocidad. Posteriormente se calcularán los cocientes u_y/u_x y u_z/u_x . Se considerará que las componentes de la velocidad no paralelas al flujo dejan de tener una contribución importante a partir de la distancia a la cual sus valores sean menores a una millonésima parte con respecto a la componente u_x en todos los cortes realizados, es decir, cuando se cumpla lo siguiente:

$$\left| \frac{u_y^e}{u_x^e} \right|_i < 10^{-6} \quad (2.26)$$

$$\left| \frac{u_z^e}{u_x^e} \right|_i < 10^{-6} \quad (2.27)$$

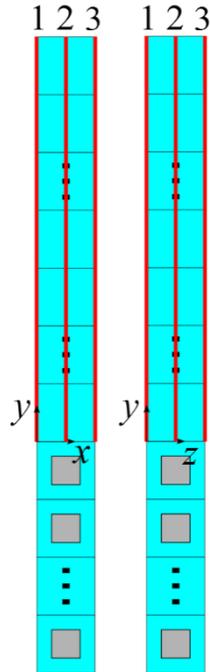


Fig. 2.9 Cortes para la toma de la velocidad puntual en diferentes puntos de las coordenadas x y z

Donde el subíndice i indica el valor de la coordenada x y el subíndice e indica el valor de la coordenada y a la cual se están evaluando dichas componentes.

Posteriormente, se habrá determinar la distancia a la cual el flujo pasa a ser unidimensional, es decir, la distancia a la cual la componente de la velocidad en dirección al flujo presenta dependencia de solo una coordenada.

Así, se tomarán los valores de velocidad puntual en los cortes señalados en la Fig. 2.9. Para determinar cuándo dos valores de velocidad no presentan variación, se establece que una vez que el error relativo entre los valores de la velocidad en cada línea sea menor a 10^{-3} , se considerarán iguales.

$$\% \text{ Error relativo} = \left| \frac{u_{L.C.1}^e - u_{L.C.2}^e}{u_{L.C.1}^e} \right| < 10^{-3} \quad (2.28)$$

Donde e indica la posición de la coordenada y a la cual se evalúa la velocidad.

Se compararán los valores de velocidad a diferentes valores de la coordenada y en los cortes 1 y 3, para corroborar la periodicidad del flujo en la dirección x . Posteriormente se repetirá esto para los valores de velocidad en las otras parejas de cortes. A partir de la distancia en y a la cual se cumpla el criterio anterior, se considerará que el flujo ha pasado a ser unidimensional.

En geometrías de medio poroso que presentan flujo bidimensional, solo será necesario determinar la distancia hasta la cual la componente en dirección al flujo es dependiente de la coordenada x , mientras que en las geometrías que presentan flujo tridimensional se ha de determinar hasta dónde dicha componente es dependiente de las coordenadas x y z .

Al valor de la coordenada y al cual el sistema presenta flujo unidimensional y unidireccional en la región η se le denominará d_η . Este será el mayor de los dos valores determinados anteriormente.

2.3.2. Determinación del alcance del flujo multidimensional en la región homogénea de medio poroso

En la región ω debe determinarse a partir de qué celda unitaria de medio poroso el perfil de velocidad se vuelve periódico, es decir, a partir de qué distancia el perfil de velocidad dentro de cada celda unitaria es igual al anterior.

Para determinar esto, tomarán valores de velocidad en algunos puntos dentro de cada celda unitaria de medio poroso. El objetivo en este caso es evitar las discontinuidades que presenta la velocidad a escala microscópica, debido a la presencia de la fase sólida en el medio poroso. Los puntos a evaluar para geometrías con flujo bidimensional se muestran en la Fig. 2.10. Asimismo, los puntos a evaluar para geometrías con flujo tridimensional se muestran en la Fig. 2.11 y la Fig. 2.12.

El criterio para establecer que no existe variación entre dos valores de velocidad en celdas unitarias consecutivas será el error relativo entre los valores de velocidad en cada uno de las parejas de puntos correspondientes. Se considerarán a dos velocidades iguales una vez que el error relativo entre estas sea menor a 10^{-3} , es decir:

$$\% \text{ Error relativo} = \left| \frac{u_{e,i}^{n-1} - u_{e,i}^n}{u_{e,i}^n} \right| < 10^{-3} \quad (2.29)$$

Donde e indica la componente del campo de velocidad, n indica la celda unitaria donde se evalúa el valor de la velocidad (ver Fig. 2.13) e i indica la posición dentro de la celda a la cual se está evaluando la velocidad.

Así, se compararán uno a uno cada par de conjuntos de valores obtenidos en los puntos señalados en cada par de celdas unitarias consecutivas. Una vez que cada uno de estos pares de valores no presente variación, se ha encontrado hasta qué celda unitaria la penetración de los esfuerzos de la región de fluido libre afecta al flujo dentro de la región de medio poroso, es decir, d_ω .

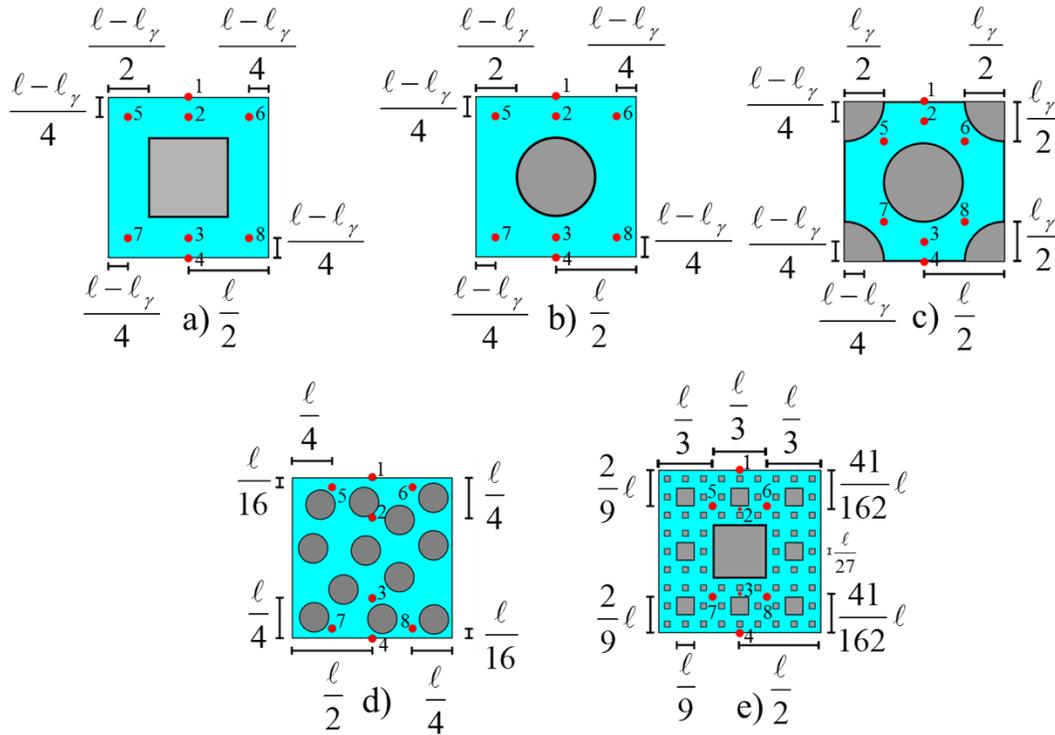


Fig. 2.10 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual para distintos tipos de celda unitaria de medio poroso con flujo bidimensional:

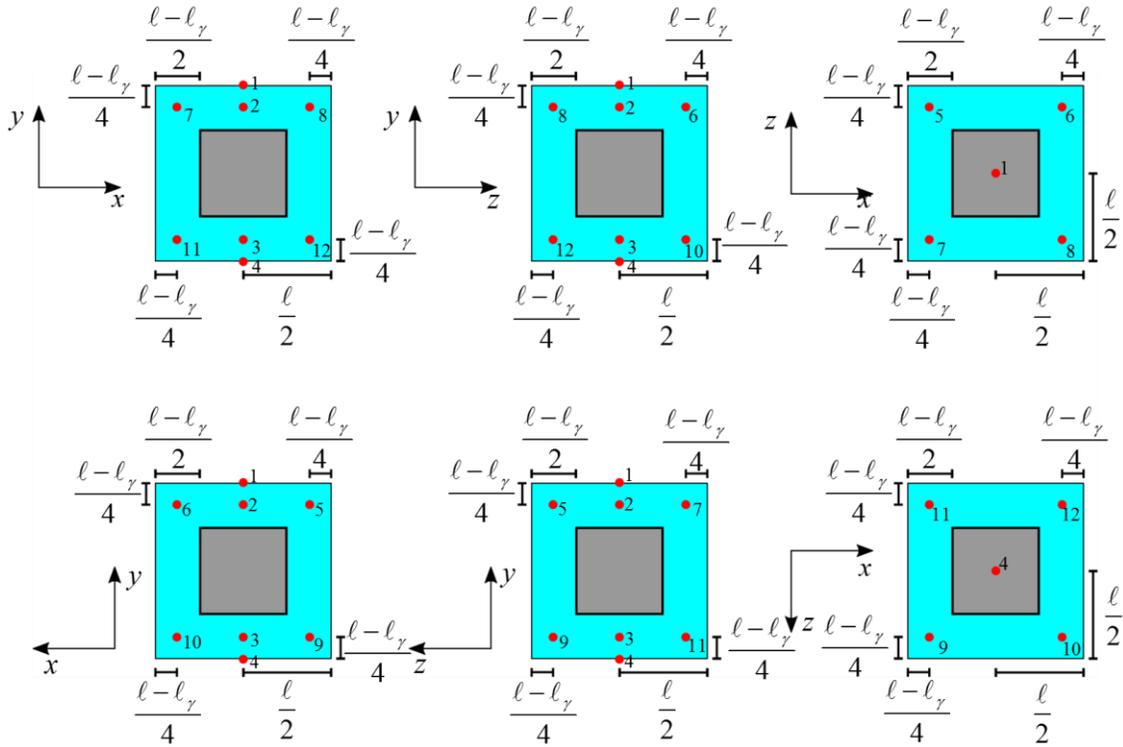


Fig. 2.11 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la geometría de celda unitaria de cubos

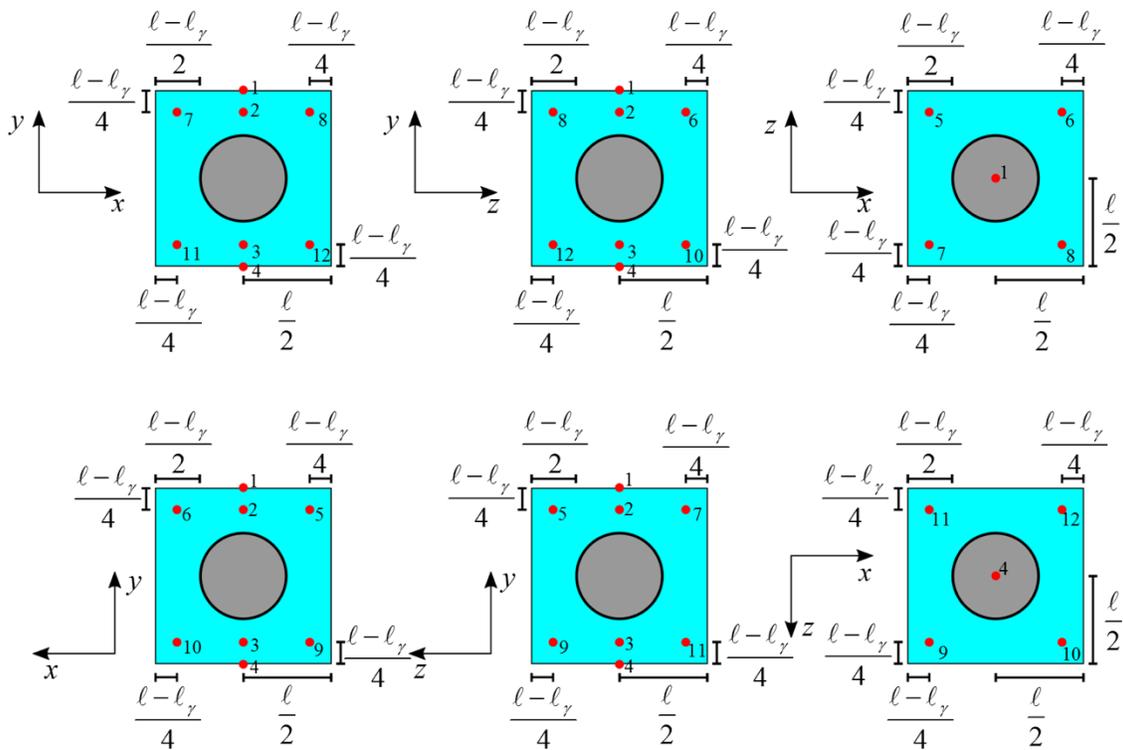


Fig. 2.12 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la geometría de celda unitaria de esferas

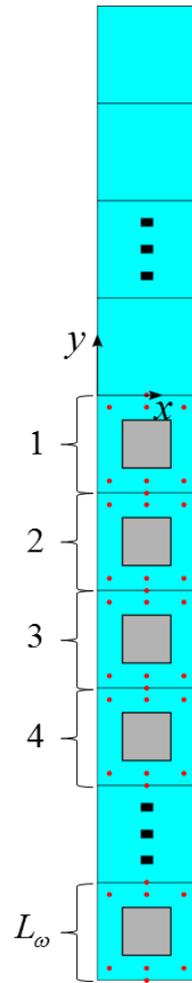


Fig. 2.13 Puntos para la evaluación de la velocidad puntual en la región de medio poroso

2.4. Modelo para la región de solución analítica

Con base en lo anterior, se plantea un nuevo sistema de solución para la región de flujo unidimensional.

2.4.1. Geometría

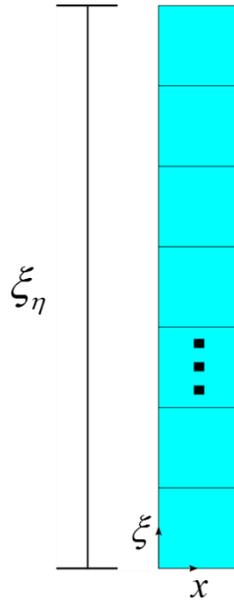


Fig. 2.14 Esquema de la región de flujo unidimensional

Nótese que la este nuevo sistema estará sujeto a una nueva coordenada perpendicular al flujo, cuyo origen estará situado donde se haya alcanzado el flujo unidimensional y unidireccional.

2.4.2. Ecuación gobernante y condiciones de frontera

La ecuación de movimiento adimensional para esta región de solución es la siguiente:

$$0 = c + \frac{d^2 u_x}{d \xi^2} \quad (2.30)$$

Además, las condiciones de frontera asociadas a esta ecuación son:

$$\text{En } \xi = \xi_\eta, u_x = 0 \quad (2.31)$$

$$\text{En } \xi = 0, u_x = u_c \quad (2.32)$$

Donde c es la caída de presión adimensional en la dirección del flujo. Además con el objetivo de simplificar el modelo se utiliza ξ , una coordenada adimensional perpendicular a la dirección de flujo cuyo origen está localizado en y_c . El valor ξ_η indica la longitud del canal hasta la placa superior del canal y se llama u_c a la velocidad en $\xi = 0$, donde hay la certeza de que el flujo es unidireccional y unidimensional.

2.4.3. Solución

De esta manera, al resolver la ecuación diferencial en esta región, se encuentra que la velocidad adimensional u , para la región en la cual el flujo es unidimensional y unidireccional, está dada por la siguiente ecuación:

$$u = -\frac{c}{2} \xi_\eta^2 \left[\left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right)^2 \right] + u_c \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) \right] \quad (2.33)$$

Nótese la forma del lado derecho de la Ec. (2.33), cuyo primer término indica un perfil parabólico característico del flujo de Stokes, mientras que el segundo indica que la velocidad de la pared inferior del canal es diferente de cero y tiene un valor u_c .

Además, la derivada de la velocidad está dada por:

$$\frac{du}{d\xi} = -c \left(\xi - \frac{\xi_\eta}{2} \right) - \frac{u_c}{\xi_\eta} \quad (2.34)$$

Es importante conocer también la derivada evaluada en la frontera entre las regiones de solución, debido a que posteriormente se utilizará para el acoplamiento de la solución analítica ya calculada con la solución numérica en la región de medio poroso.

$$\left. \frac{du}{d\xi} \right|_{\xi=0} = c \left(\frac{\xi_\eta}{2} \right) - u_c \left(\frac{1}{\xi_\eta} \right) \quad (2.35)$$

Una vez obtenidas estas expresiones analíticas, se procede al planteamiento del modelo de solución numérica, indicado en la siguiente sección.

2.5. Modelo para la región de solución numérica

Por otro lado, el perfil de velocidad correspondiente a la región de fluido cercana a la frontera divisoria y la región de medio poroso se obtendrá a través de simulaciones numéricas realizadas en el software COMSOL Multiphysics[®] 5.3.

Debido a la obstrucción del medio poroso, la velocidad presentará dependencia de dos o tres variables, de acuerdo con la geometría que presente el medio poroso. El modelo del sistema se muestra en la Fig. 2.15 para el caso bidimensional y en la Fig. 2.16 para el caso tridimensional.

Cabe señalar que la solución de ambos modelos presentados está en función del valor de la velocidad u_c en la frontera entre las dos regiones de solución. Sin embargo, este valor no es conocido de antemano, lo cual hace que estos modelos no puedan utilizarse directamente. En la siguiente sección se presentará la metodología mediante la cual es posible conocer este valor y, por ende, acoplar ambos modelos de solución.

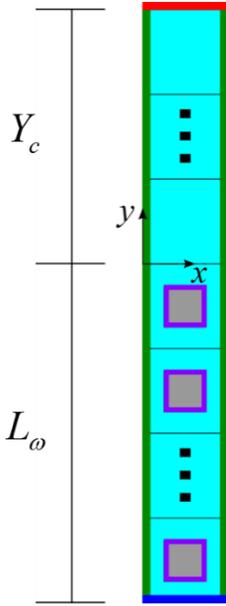


Fig. 2.15 Geometría de la región de solución numérica (flujo bidimensional)

Ecuaciones Gobernantes

$$0 = \mathbf{i}c + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.36)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.37)$$

Caída de Presión

$$-\nabla P = \mathbf{i}c \quad (2.38)$$

Frontera Superior

$$u_x = u_c \quad (2.39)$$

$$u_y = u_z = 0 \quad (2.40)$$

Fronteras Laterales

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \ell \mathbf{i}) \quad (2.41)$$

Frontera Inferior

$$\frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = \frac{\partial u_z}{\partial Y} = 0 \quad (2.42)$$

Fronteras Sólido-Fluido

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.43)$$

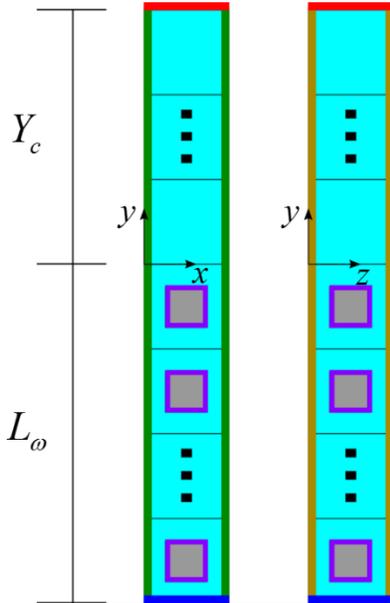


Fig. 2.16 Geometría de la región de solución numérica (flujo tridimensional)

Ecuaciones Gobernantes

$$0 = \mathbf{i}c + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.44)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.45)$$

Caída de presión

$$-\nabla P = \mathbf{i}c \quad (2.46)$$

Frontera Superior

$$u_x = u_c \quad (2.47)$$

$$u_y = u_z = 0 \quad (2.48)$$

Fronteras Laterales

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \ell \mathbf{i}) \quad (2.49)$$

Fronteras Laterales

$$\frac{\partial u_x}{\partial Z} = \frac{\partial u_y}{\partial Z} = \frac{\partial u_z}{\partial Z} = 0 \quad (2.50)$$

Frontera Inferior

$$\frac{\partial u_x}{\partial Y} = \frac{\partial u_y}{\partial Y} = \frac{\partial u_z}{\partial Y} = 0 \quad (2.51)$$

Fronteras Sólido-Fluido

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.52)$$

2.6. Acoplamiento de los modelos de solución analítica y numérica

Como se mencionó en la introducción de este trabajo, el objetivo es usar un modelo analítico para la región de fluido libre en conjunto con un modelo solucionado de manera numérica en la región de medio poroso. La ventaja es la reducción del número de nodos para la representación discretizada de las ecuaciones de movimiento, con lo que se facilitaría el modelado de estos sistemas, pudiendo conocer valores de velocidad mediante ecuaciones analíticas en lugar de evaluaciones numéricas.

El acoplamiento de los modelos de ambas regiones requiere que se cumpla tanto con la continuidad del campo de velocidad como con la continuidad del esfuerzo tangencial. La continuidad del campo de velocidad se impone en la condición frontera donde colindan ambas regiones de solución. Por otra parte, la continuidad del esfuerzo tangencial se logra al cumplir lo siguiente:

En $y = y_c$, es decir, $\xi = 0$:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=y_c}^{Numérica} = \left. \frac{du_x}{d\xi} \right|_{\xi=0}^{Analítica} \rightarrow \left. \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}^{Analítica} - \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=y_c}^{Numérica} = 0 \quad (2.53)$$

Así, el problema será encontrar la raíz de una función objetivo, es decir, la velocidad en la frontera entre la región de solución analítica y numérica, como se indica a continuación:

$$f(u_c) = \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=y_c}^{Numérica} - \left. \frac{du_x}{d\xi} \right|_{\xi=0}^{Analítica} \quad (2.54)$$

De esta manera, la solución asociada a cada región homogénea se encuentra en términos de la velocidad u_c . Ahora, para encontrar el valor de la raíz de la función objetivo, hay que analizar su comportamiento, la cual está compuesta de dos términos.

El término correspondiente a la región de solución analítica se muestra en la Ec. (2.35). Puede apreciarse que este término tiene la misma forma que tendría en el caso de un canal sin presencia de medio poroso (véase Apéndice B), con la excepción del término que incorpora a la velocidad en la pared inferior permeable.

Tal expresión tiene un comportamiento lineal con respecto de u_c . Ya que los demás términos son constantes, esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left. \frac{du_x}{d\xi} \right|_{\xi=0}^{Analítica} = b_1 - a_1 u_c \quad (2.55)$$

Y, como se dijo en la Sección 2.3, el valor de y_c tomado para este modelo se encuentra más lejos de la frontera que la distancia real donde termina el flujo multidimensional. De esta forma, aún en el modelo numérico, la derivada de la velocidad debe de ser lineal con respecto de u_c . Para corroborar, se resolvió el modelo de la Sección 2.5 a distintos valores de u_c , evaluando la derivada en la frontera superior para cada caso. Resultando en el comportamiento dado en la Fig. 2.17.

Al realizar un ajuste lineal se obtuvo un coeficiente de determinación $R^2 = 1$. Es decir, el comportamiento es lineal, como se esperaba. Este comportamiento es igual para todas las celdas unitarias (ver Apéndice D). Así, el comportamiento puede ser descrito mediante la expresión:

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=y_c}^{\text{Numérica}} = b_2 - a_2 u_c \quad (2.56)$$

Por lo tanto, la función objetivo a encontrar tiene el siguiente comportamiento:

$$f(u_c) = \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=y_c}^{\text{Numérica}} - \left. \frac{du_x}{d\xi} \right|_{\xi=0}^{\text{Analítica}} = [-b_2 + a_2 u_c] - [b_1 - a_1 u_c] \quad (2.57)$$

$$f(u_c) = -(b_2 - b_1) + (a_2 + a_1) u_c \quad (2.58)$$

$$f(u_c) = -b + a u_c \quad (2.59)$$

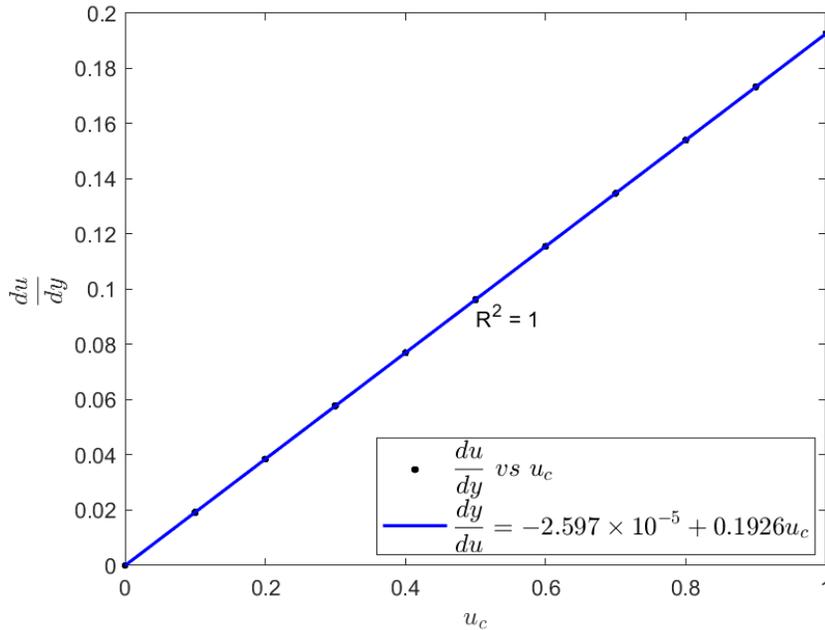


Fig. 2.17 Comportamiento de la derivada de la velocidad en el modelo con respecto a la velocidad supuesta en la frontera de solución para geometría de celda unitaria de cilindros

Ahora, habrá que seleccionar dos valores de velocidad u_u y u_l en la vecindad del valor de la raíz, donde se tiene la certeza que el comportamiento de esta función es lineal. Estos valores de velocidad se escogerán tomando como referencia el perfil de velocidad de un canal no ocupado por medio poroso, proceso que se describe en el Apéndice B.

Una vez seleccionados dichos valores, procedemos a hacer una exploración del comportamiento de la función objetivo mediante la gráfica de la Fig. 2.18.

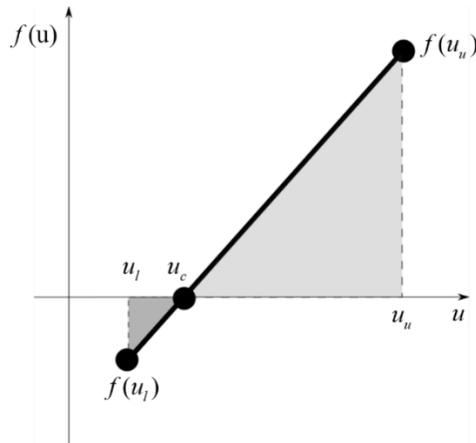


Fig. 2.18 Gráfico para la determinación de la raíz de la función objetivo

Por una interpolación lineal se obtiene:

$$\frac{f(u_l)}{u_c - u_l} = \frac{f(u_u)}{u_c - u_u} \quad (2.60)$$

Y manipulando algebraicamente despejamos el valor deseado u_c .

$$u_c = \frac{f(u_u)(u_l - u_u)}{f(u_l) - f(u_u)} \quad (2.61)$$

2.7. Cálculo del perfil de velocidad puntual

Una vez calculado el valor de la velocidad u_c es posible solucionar cada uno de los modelos en ambas regiones para obtener el perfil de velocidad puntual en todo el sistema de solución.

El campo de velocidad de la región de solución numérica vendrá dado por un conjunto de datos numéricos en distintos puntos del sistema, como se muestra en la Fig. 2.19.

Para facilitar el reporte de los datos, se tomará un corte justo en $x = \ell/2$, como se muestra en la Fig. 2.20. Se tomarán los valores de velocidad a diferentes valores de la coordenada vertical. La velocidad en la región de solución analítica no tiene dependencia de la coordenada horizontal, por lo cual no es necesario estipular su posición.

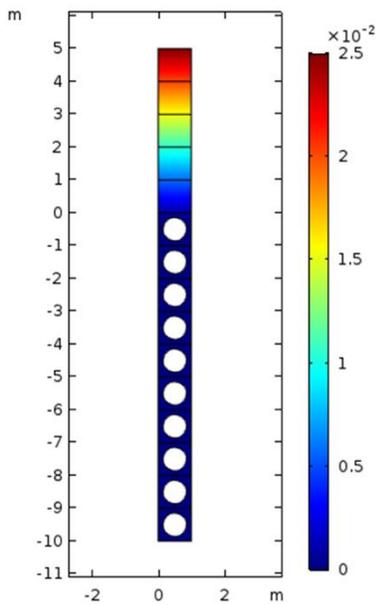


Fig. 2.19 Campo de velocidad calculado para la región de solución numérica

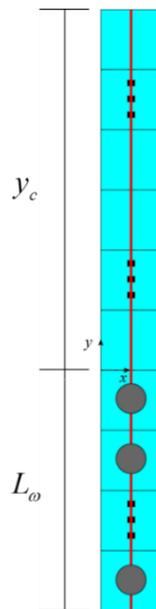


Fig. 2.20 Corte para el cálculo del perfil de velocidad puntual en la región de solución numérica

Sin embargo, para evitar la saturación de puntos para la toma de la velocidad (cuya interpolación requiere aún más tiempo de cálculo), se tomarán puntos específicos sobre ese corte en cada una de las celdas unitarias que componen al medio poroso, como en la Fig. 2.21.

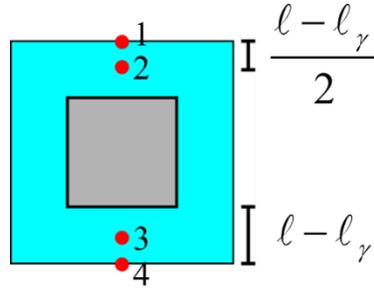


Fig. 2.21 Puntos para el cálculo de la velocidad puntual dentro de cada celda unitaria de medio poroso

Una vez obtenido el perfil de velocidad puntual, se procede a la siguiente sección, donde se especifica el procedimiento seguido para el cálculo del perfil de velocidad promedio.

2.8. Cálculo del perfil de velocidad promedio

Debido a la complejidad de la geometría dentro de la región de medio poroso, donde existen discontinuidades en la velocidad puntual, es más conveniente reportar valores de velocidad promedio. El procedimiento de promediado seguido para lograr esto es descrito a continuación.

Una vez resuelto el modelo para ambas regiones y obtenido el perfil de velocidad puntual, se procede a aplicar un operador de promediado superficial para la obtención de la velocidad promedio.

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \mathbf{u} dV \quad (2.62)$$

Se procede entonces a definir una región de promediado. Debido a la forma del sistema presentado, se pueden destacar tres tipos distintos de regiones de promediado (Ver Fig. 2.22):

- Regiones que contienen solo celdas unitarias de medio poroso
- Regiones que contienen celdas unitarias de medio poroso y celdas unitarias de fluido libre
- Regiones que contienen solo celdas unitarias de fluido libre

Conociendo las dimensiones de la región de promediado, es posible definir los límites de las integrales del operador de promediado y simplificar la expresión, de la siguiente manera.

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2r_0 \ell^2} \int_0^\ell \int_0^\ell \int_{\xi-r_0}^{\xi+r_0} \mathbf{u} d\xi dX dZ \quad (2.63)$$

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2r_0} \int_{\xi-r_0}^{\xi+r_0} \mathbf{u} d\xi \quad (2.64)$$

Donde $\hat{\xi}$ denota al centroide de la región de promediado.

Para el primer tipo de región de promediado se calcularán las integrales de manera numérica

Para el segundo tipo de región de promediado se separarán las integrales en dos partes, y se solucionará cada una de ellas de la manera correspondiente.

Para el tercer tipo de región de promediado, la ecuación analítica de velocidad puede ser integrada directamente para obtener la velocidad promedio, como sigue:

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{2r_0} \int_{\hat{\xi}-r_0}^{\hat{\xi}+r_0} u_x d\xi \quad (2.65)$$

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{2r_0} \int_{\hat{\xi}-r_0}^{\hat{\xi}+r_0} \left\{ -\frac{c}{2} \xi_\eta^2 \left[\left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right)^2 \right] + u_c \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) \right] \right\} d\xi \quad (2.66)$$

$$\langle u_x \rangle = \left[u_c \xi - \left(\frac{c\xi_\eta}{4} + \frac{2u_c}{\xi_\eta} \right) \xi^2 + \frac{c}{6} \xi^3 \right]_{\hat{\xi}-r_0}^{\hat{\xi}+r_0} \quad (2.67)$$

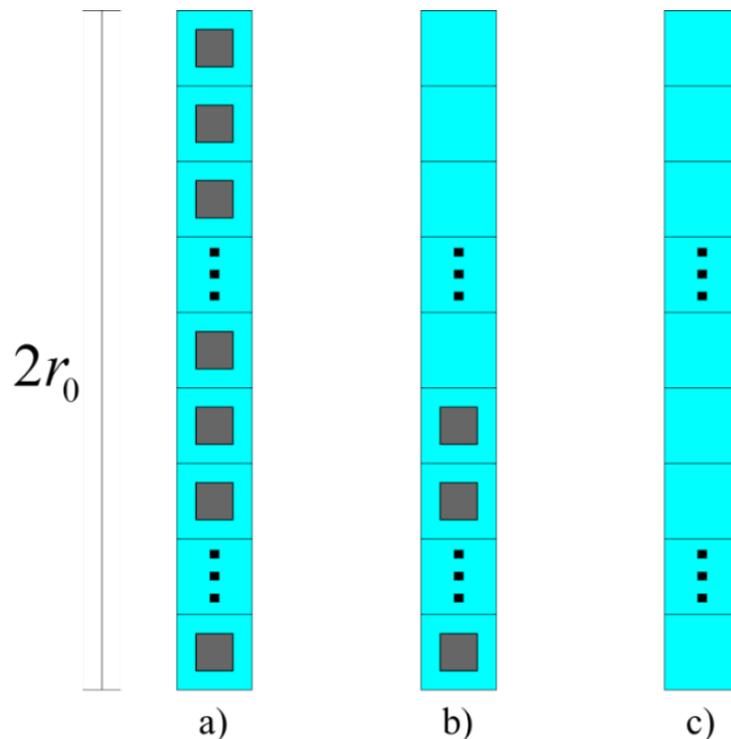


Fig. 2.22 Diferentes tipos de región de promediado presentes en el sistema

De esta manera, es posible obtener el perfil de velocidad promedio a través una cantidad significativamente menor de integrales numéricas, reemplazando las mismas por la fórmula analítica de la Ec. (2.67). Esto facilita obtener valores de velocidad promedio en la región del fluido y el cálculo de valores derivados (por ejemplo, el caudal). Además, se espera una reducción significativa de recursos computacionales para la obtención de los perfiles de velocidad promedio.

3. Alcance del método planteado

A lo largo de este capítulo se presentan distintos estudios con la finalidad de evaluar la eficacia de la DNS Acoplada para reproducir los perfiles de velocidad (puntual y promedio) obtenidos mediante una DNS Completa. Por lo tanto, para cada uno de los casos se realizará el cálculo del campo de velocidad utilizando ambas metodologías. Interesa calcular el error relativo entre los valores de velocidad calculados y el tiempo de cómputo necesario para la obtención de los mismos.

Se comienza describiendo los valores del tamaño de malla mínimo necesario para la obtención de resultados representativos para ambos métodos, con el fin de evitar una demanda de recursos de cómputo mayor a la necesaria. Posteriormente, se procede a estipular las diferentes configuraciones de celda unitaria de medio poroso a estudiar. Además, se estudiará la reproducción de la velocidad a distintos valores de fracción vacía y de localización de la frontera que separa a las regiones de solución analítica y de solución numérica.

Finalmente, se propone la alternativa del uso de las ecuaciones analíticas a partir de la velocidad calculadas por medio de una DNS Completa.

3.1. Efecto del tamaño de malla en el cálculo del perfil de velocidad

El interés principal de esta sección es determinar el tamaño de malla mínimo necesario para la obtención de resultados precisos del perfil de velocidad. Esto con el fin de evitar un mal condicionamiento de las matrices de solución o la propagación de error dentro del modelo de solución numérica.

Debido a la utilización de paquetería comercial, la construcción de la malla para nuestro sistema es limitada a las opciones ofrecidas dentro del programa COMSOL Multiphysics. Por lo tanto, se utilizarán los distintos tamaños predeterminados de malla para medir la independencia numérica de la solución.

Estos tamaños de malla se enumeran como sigue dentro del software:

1. Extremely Fine (Extremadamente fino)
2. Extra fine (Extra fino)
3. Finer (Más fino)
4. Fine (Fino)

Ya que COMSOL construye una malla de acuerdo a la física del problema propuesto, es decir, toma en cuenta los gradientes esperados de las variables con respecto a la geometría del sistema, es de esperarse que la mayor concentración de nodos en el sistema se encuentre cerca de la zona de transición y dentro del medio poroso. Esto es debido a que la microestructura ocasiona grandes cambios en escalas pequeñas en la velocidad puntual dentro de cada celda unitaria de medio poroso y dicho efecto llega a cierta parte de la región de fluido libre (ver Sección 2.3).

A continuación se presenta una serie de figuras donde se muestra lo mencionado anteriormente.

Puede apreciarse, entonces, que la cantidad de puntos de malla necesarios para representar a la región homogénea de fluido libre es pequeña. Sin embargo, para los casos donde se presenta una gran disparidad de escala, la construcción de una geometría grande y su consiguiente mallado requiere un consumo de memoria alto. Por esto, el no requerir representar la mayor parte de esta región da un alivio en cuanto a la cantidad de memoria y poder de procesamiento necesario para el cálculo del perfil de velocidad en este tipo de sistemas.

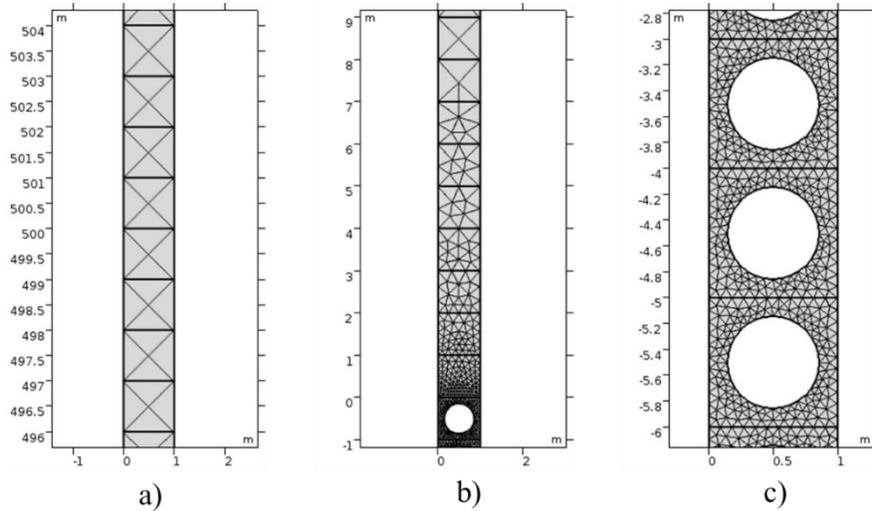


Fig. 3.1 Malla para el sistema con un tamaño 1: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso

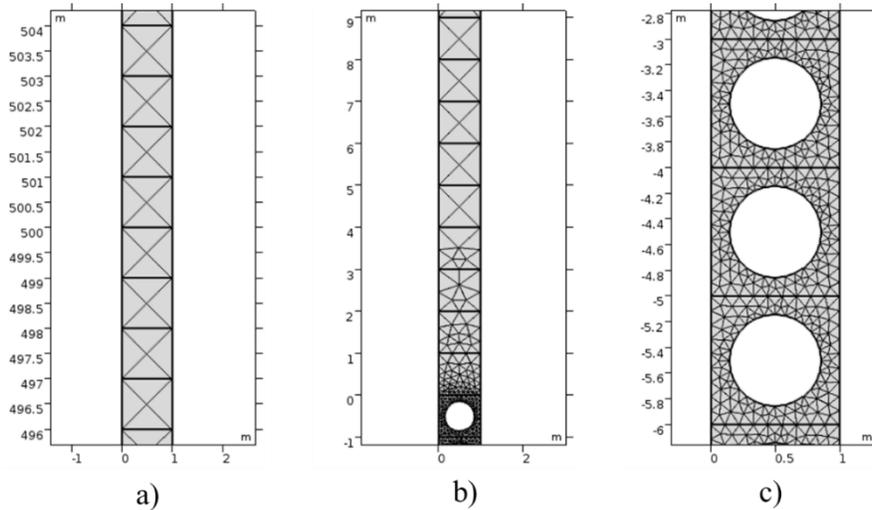


Fig. 3.2 Malla para el sistema con un tamaño 2: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso

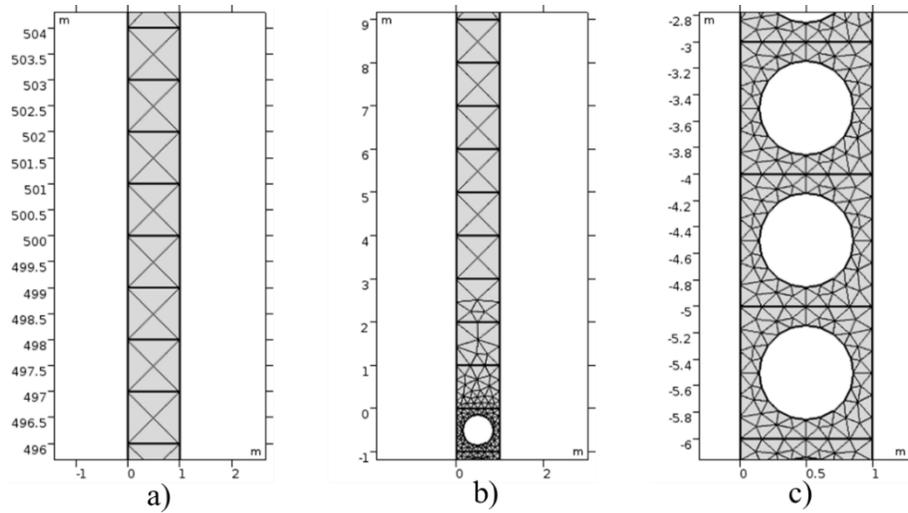


Fig. 3.3 Malla para el sistema con un tamaño 3: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso

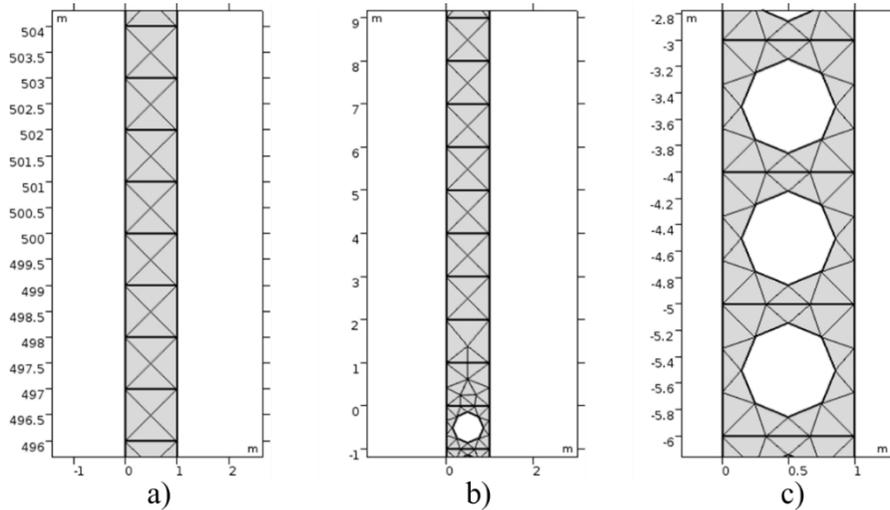


Fig. 3.4 Malla para el sistema con un tamaño 4: a) Región homogénea de fluido libre b) Zona de transición c) Región homogénea de medio poroso

De esta manera, una vez haya sido determinado el tamaño de malla al cual ya no se presente una variación significativa de la solución, se tomarán los mismos parámetros para la construcción de malla del modelo acoplado. Esto es necesario, puesto que el software realiza la construcción de malla tomando en cuenta el tamaño de la geometría construida para el mallado, de tal manera que si se utiliza directamente dicha opción en la construcción del modelo para la DNS Acoplada, se terminará con una densidad de nodos en la malla radicalmente distinta a la construida en el modelo para la DNS Completa.

Una vez obtenida la solución mediante las dos metodologías, se podrá estipular la reducción en la cantidad de nodos y el tiempo de cómputo para cada uno de los casos que se enunciarán

posteriormente en este capítulo como medidas de la reducción de poder computacional que conlleva la DNS Acoplada.

3.2. Efecto de la configuración del medio poroso en la reproducción del perfil de velocidad mediante la DNS Acoplada

Uno de los principales intereses dentro de este trabajo es facilitar la representación de medios porosos a través de celdas unitarias con configuraciones más complejas. Por esto, es menester analizar la efectividad de la DNS Acoplada al aplicarla a diferentes configuraciones de medio poroso. Según la geometría empleada, se pueden presentar diferentes tipos de flujo: bidimensional y tridimensional. Cada caso presenta consideraciones distintas en el modelo correspondiente a la región de solución analítica de la DNS Acoplada, las cuales fueron ya enunciadas en el capítulo 2.

Cabe destacar que la representación de un sistema que presenta flujo bidimensional requiere de una cantidad menor de poder computacional (y, por ende, de tiempo de cómputo) que para el caso de flujo tridimensional, por lo cual algunos estudios realizados en las siguientes secciones se realizarán, principalmente, para este tipo de flujo. Para este tipo de geometrías habrá únicamente de considerarse la existencia de dos componentes del campo de velocidad: u_x y u_y . Además, la cantidad de nodos necesaria para la discretización es significativamente menor a la necesaria para geometrías con flujo tridimensional.

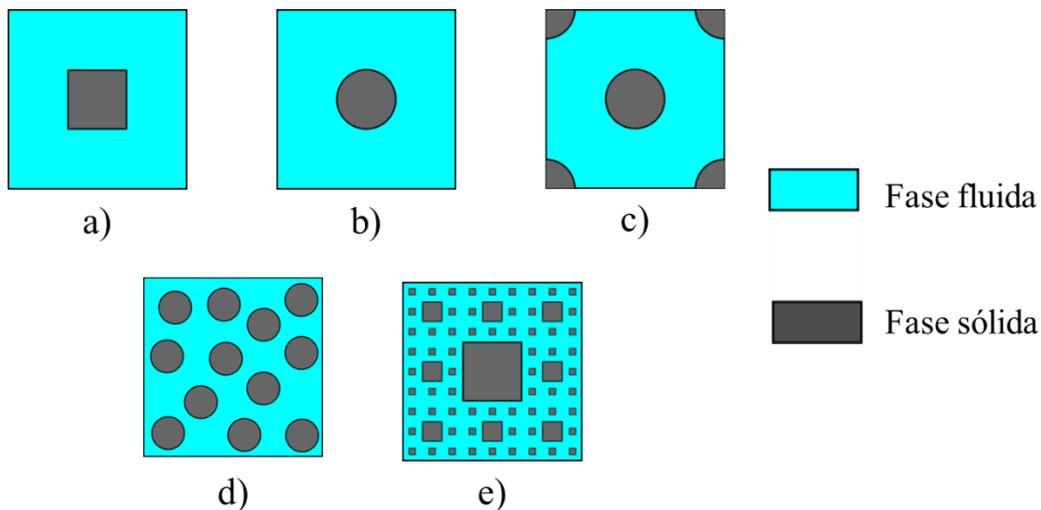


Fig. 3.5 Geometrías de fase sólida a utilizar para el modelado del medio poroso (flujo bidimensional): a) Prismas cuadrados b) Cilindros c) Cilindros Escalonados d) Cilindros Aleatorios e) Alfombra de Sierpinski

Dicho esto, se espera que la representación del sistema por medio de un sistema de menor tamaño, sumado al uso de las ecuaciones analíticas para el cálculo del perfil de velocidad puntual y promedio en la mayor parte de la región η ocasione una reducción en la carga computacional requerida y, por ende, en el tiempo de cómputo. Las geometrías de celda unitaria de medio poroso

donde se presenta flujo bidimensional, las cuales serán empleadas en esta sección se muestran en la Fig. 3.5.

En geometrías que presentan flujo tridimensional el análisis deberá incluir las tres componentes del campo de velocidad. Además, la representación geométrica del sistema no es tan simple como en el caso bidimensional, por lo que la cantidad de nodos necesaria para la discretización del sistema aumenta de manera drástica. Por esto, se espera una reducción notable en el uso de recursos computacionales con el uso de la metodología propuesta, ya que las integrales numéricas a realizar en la región η son de mayor complejidad que las necesarias en el caso de geometrías bidimensionales. Además, la representación de geometrías tridimensionales en COMSOL (o en cualquier paquetería de software) de tamaño elevado requiere una gran cantidad de memoria del equipo de cómputo, por lo cual se espera que la reducción del tamaño tenga un impacto significativo en la memoria requerida y en el tiempo de cómputo requerido para el cálculo del perfil de velocidad dentro de estos sistemas.

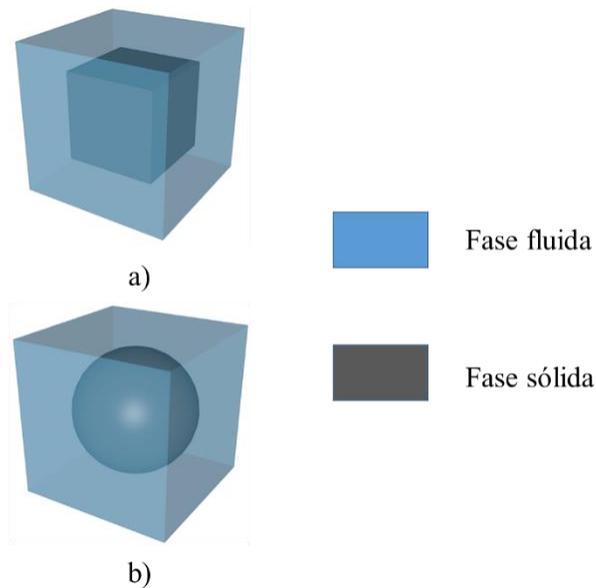


Fig. 3.6 Geometrías de fase sólida a utilizar para el modelado del medio poroso (flujo tridimensional): a) Cubos b) Esferas

La representación de dicho tipo de geometrías mediante este método mostrará su utilidad para representar geometrías de celda unitaria de medio poroso más realistas, que generalmente presentan flujo tridimensional y son de alta complejidad en su representación. Aunque esto ya es posible en equipos de cómputo modernos, su disponibilidad no es tan amplia. Por ello, de ser posible la representación de estos sistemas mediante la metodología propuesta, sería de gran utilidad en casos donde no sea posible acceder a equipos más modernos y/o potentes, de ahí la importancia de extender el estudio a este tipo de geometrías.

Siendo así, las geometrías de celda unitaria a utilizar dentro de esta sección serán las mostradas en la Fig. 3.6.

3.2.1. Variación de la fracción vacía

Como se vio en la anteriormente, el efecto de la fracción vacía en la penetración de los efectos de una región homogénea sobre la otra es de cierta importancia. Por lo tanto, corroborar la eficacia del método para poder reproducir el perfil de velocidad a diferentes valores de la fracción vacía es de interés. Como se puede ver en la Fig. 3.7.

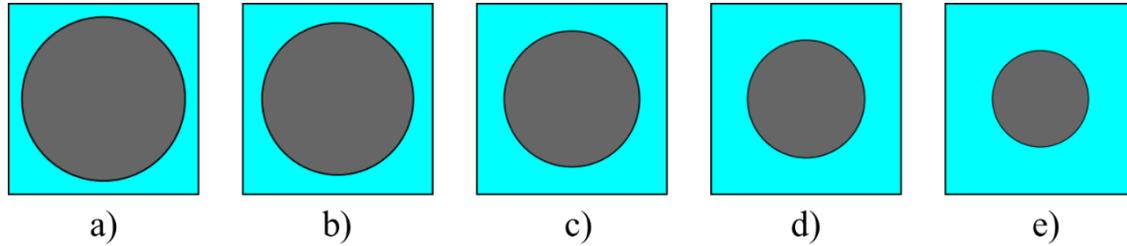


Fig. 3.7 Celdas unitarias con distinta fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$

3.3. Efecto de la localización de la frontera entre las dos regiones de solución

En la Sección 2.3 se describió la metodología para la determinación de la frontera entre las regiones de solución analítica y numérica. Asimismo, se dijo que dicha frontera se desplazaría aún más lejos de la superficie divisoria para garantizar que el flujo sea unidimensional y unidireccional y trabajar de manera homogénea las distintas geometrías de medio poroso. Por lo tanto, es importante estudiar el impacto que tiene la selección de esta frontera de solución en la reproducción de los valores de velocidad obtenidos mediante una DNS tradicional utilizando el método de cálculo propuesto en este trabajo.

De esta manera, el sistema a resolver será de tamaño variable, lo cual puede apreciarse de mejor manera en la Fig. 3.8.

Se espera que el efecto de la variación de y_c sobre los valores del perfil de velocidad no será considerable, debido a que, una vez alcanzada la región de flujo parabólico el modelo se mantiene con la misma forma, variando únicamente el valor calculado para la velocidad en la frontera, es decir, u_c .

Además, siempre y cuando no se aleje de manera drástica el valor de y_c del valor de d_η , no es de esperar que exista un cambio considerable en el tiempo de cómputo, puesto que la cantidad de nodos necesaria en el modelo numérico no variará de manera significativa, al menos en caso de flujo bidimensional. Esto debido a que, como se observó anteriormente, la cantidad de nodos

requerida para representar a las celdas unitarias en la región homogénea de fluido es significativamente menor.

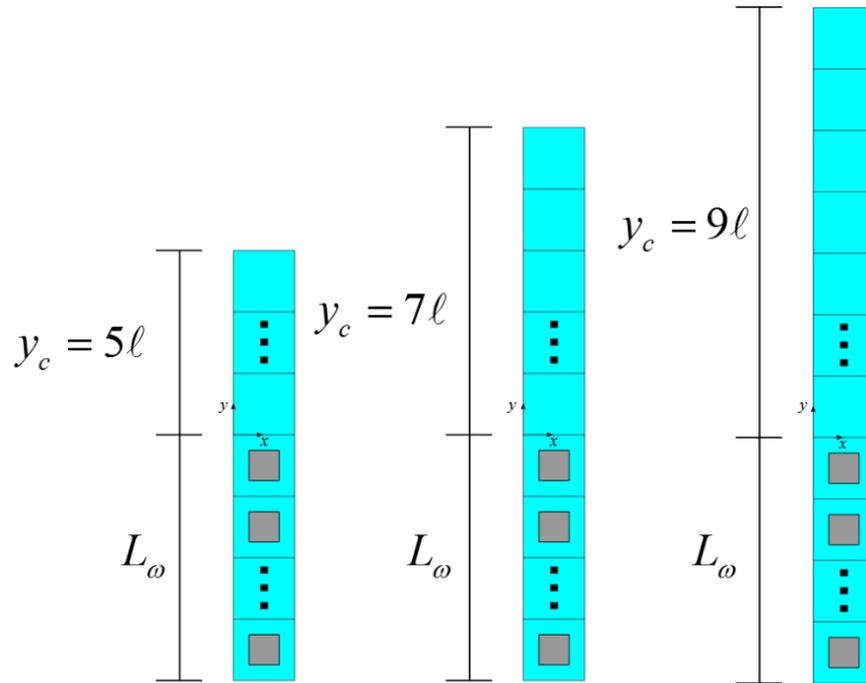


Fig. 3.8 Representación del sistema de solución numérica para distintos valores de y_c .

3.4. Descripción de sistemas con distintos tamaños de región de fluido libre

A medida que se emplean microestructuras con mayor complejidad, la densidad de elementos de malla dentro de la región de medio poroso será mucho mayor a la de la región de fluido libre. Sin embargo, en sistemas que presenten una disparidad de escalas elevada, es decir, donde el tamaño de la región de fluido libre sea mucho mayor al de la región de medio poroso ($L_\eta \gg L_\omega$), la cantidad de elementos de malla requeridos en la DNS Completa será grande, siendo un porcentaje elevado de la cantidad total. Además, esto conlleva un aumento en la cantidad de integrales numéricas a solucionar para la obtención del perfil de velocidad promedio.

Por otro lado, la utilización de una DNS Acoplada no padece de estos problemas, debido a que puede mantenerse la geometría del sistema a un tamaño mínimo, siempre y cuando la frontera de solución se encuentre en la región de flujo parabólico. Además, de las ecuaciones analíticas significa una carga computacional mínima con respecto a la de utilizar integrales numéricas para el cálculo de velocidades promedio. Por lo tanto, se espera que la DNS Acoplada tenga un mejor ahorro de recursos computacionales en sistemas con mayor tamaño de la región de fluido.

Para corroborar esto, se debe obtener el perfil de velocidad mediante el método completo y acoplado para sistemas con diferentes valores de L_η (ver Fig. 3.9), comparando los resultados.

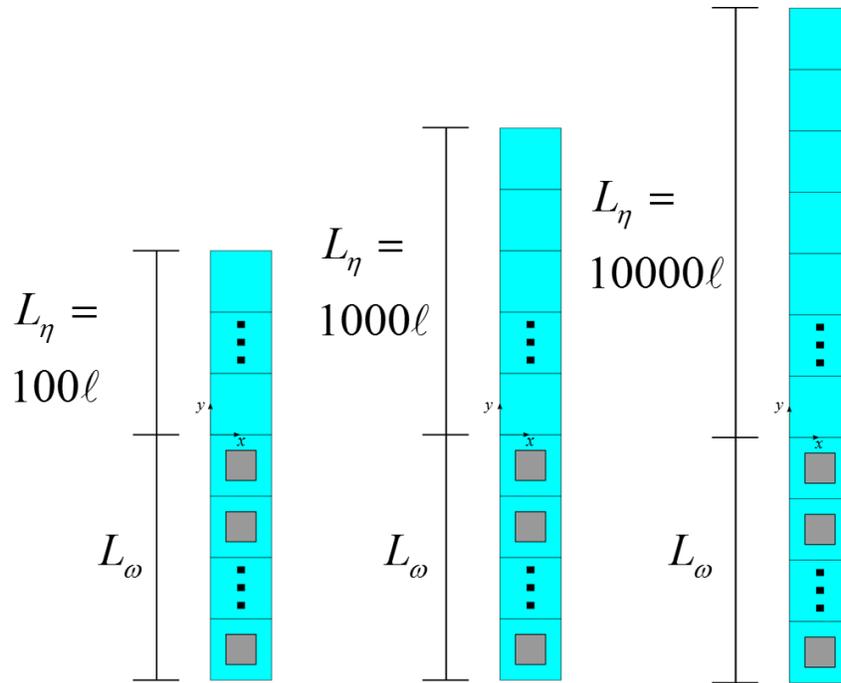


Fig. 3.9 Representación del modelo de la DNS Completa para distintos valores de L_η

3.5. Una tercera alternativa: uso de las ecuaciones analíticas dentro del modelo de solución numérica completo

Una alternativa al cálculo del perfil de velocidad dentro de la región de fluido libre por medio de interpolaciones para el caso puntual o de integrales numéricas para el caso promedio es el empleo de la Ec. (2.33) para el cálculo del perfil de velocidad puntual una vez que haya sido solucionado el modelo de la DNS Completa descrito en la Sección 2.2 y obteniendo la velocidad en y_c por una evaluación puntual. Hacer esto permite la reducción de tiempo de cómputo asociada al método acoplado sin necesidad de recurrir a solucionar un modelo múltiples veces. Además, una vez conocido el valor de u_c se puede utilizar la Ec. (2.67) para el cálculo del perfil de velocidad promedio lejos de la zona de transición. A este método se le llamará de ahora en adelante *DNS Semiacoplada*.

La principal ventaja de este método es el de no requerir múltiples soluciones del modelo numérico para la obtención del valor de u_c y esto permite asegurar que este no sea afectado por el truncamiento presente en el cálculo de la DNS Acoplada, por lo que se tiene total certeza de su valor. Asimismo, conocer dicho valor de velocidad permite reducir el error en el cálculo en el operador de promediado en la región de fluido libre.

No obstante, como se explicó en la sección anterior, para casos donde el tamaño de la región de fluido libre y, por consiguiente, la región de flujo unidimensional es muy elevado, la DNS Completa tiende a requerir una cantidad muy elevada memoria y la cantidad de ecuaciones

requeridas para la obtención del campo de velocidad es mucho mayor, lo cual se ve reflejado en tiempos de cómputo muy altos.

Por lo tanto, se evaluará si es más conveniente la utilización de la DNS Semiacoplada frente a la utilización de la DNS Acoplada en términos de la reproducción de los perfiles de velocidad de la DNS Completa y el ahorro de tiempo de cómputo para los distintos casos mencionados con anterioridad en las pasadas secciones.

4. Resultados y discusión

Dentro de este capítulo se presentan los resultados obtenidos para los estudios propuestos en el Capítulo 3. Se toman dos criterios importantes mediante los cuales se puede medir la efectividad que tiene la DNS Acoplada propuesta en este trabajo con respecto a una DNS Completa: error relativo y el tiempo de cómputo.

La meta principal es reproducir con exactitud los perfiles de velocidad obtenidos por medio de una DNS Completa. Para corroborar esto, se realizará una comparación de los valores de velocidad puntual y de velocidad promedio dentro de las distintas regiones del sistema y se calculará el error relativo entre cada valor y el error relativo promedio. Dichos datos serán una medida de la exactitud del cálculo del perfil de velocidad obtenido mediante el método propuesto en este trabajo.

Dicho error se calcula de la siguiente manera:

$$Error\ relativo = \left| \frac{u_{DNS\ Completa} - u_{DNS\ Acoplada}}{u_{DNS\ Completa}} \right| \quad (4.1)$$

Además de la exactitud del método, es de interés en este trabajo medir la reducción de la cantidad de recursos computacionales al hacer uso del método de DNS Acoplada con respecto a la DNS Completa. Dos de las medidas principales en las cuales se ve reflejado esto son: la reducción de elementos de malla y la reducción de tiempo de cómputo. Se medirán tres tiempos de cómputo, principalmente:

- 1) Tiempo para la solución del modelo y la obtención del campo de velocidad completo
- 2) Tiempo para el cálculo del perfil de velocidad puntual en el corte de la Fig. 2.20
- 3) Tiempo para el cálculo del perfil de velocidad promedio

El tiempo reportado para el cálculo de cada uno de los perfiles de velocidad incluye también al tiempo utilizado para la obtención del campo de velocidad. Esto debido a que es necesario el primer procedimiento para la realización del segundo, por lo cual carece de sentido evaluarlos por separado. Además, los tiempos de cálculo para los perfiles de velocidad puntual y promedio son de magnitudes dispares con respecto a la solución del modelo para algunos casos, lo cual podría ocasionar confusión con respecto a si se está realmente logrando un ahorro de tiempo o no.

Una vez realizado el análisis de la DNS Acoplada, en la última sección se hará una comparación general de estos resultados con el uso la DNS Semiacoplada en distintos casos, determinando sus ventajas y desventajas.

4.1. Alcance del flujo multidimensional en cada región homogénea

4.1.1. Alcance en la región homogénea de fluido

A continuación se presentan los valores de d_η calculados para las distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso estudiadas en este trabajo. Los valores se reportan como múltiplos del tamaño de celda unitaria y se fueron calculados para sistemas regido bajo los siguientes parámetros: $L_\eta = 1000$, $L_\omega = 10$, $c = 10^{-5}$.

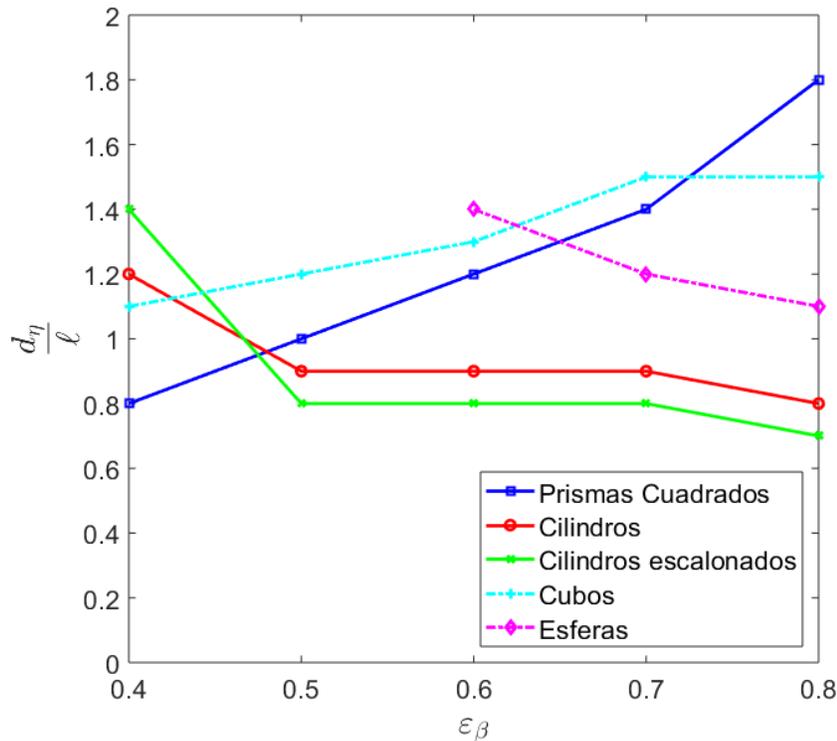


Fig. 4.1 Alcance del flujo multidimensional en la región de fluido libre para distintas microestructuras de medio poroso

Una de las dudas planteadas más frecuentemente sobre la utilización de modelos promedio para la descripción de la velocidad en este tipo de sistemas es la pérdida de la información ocasionada por el uso de celdas unitarias representativas con geometrías simplificadas para la representación del medio poroso. Sin embargo, los resultados mostrados en la Fig. 4.1 parecen indicar que la penetración de esfuerzos de una región a otra no presenta una variación significativa entre distintas celdas unitarias de medio poroso.

Además, puede apreciarse que la dependencia de dicho alcance con la fracción vacía depende de la configuración del medio poroso. Sin embargo, en todos los casos se mantiene dentro de un rango de valores menor a una distancia de dos celdas unitarias. Cabe destacar que los aparentes cambios

súbitos son debido a los valores utilizados de fracción vacía utilizados. Este comportamiento debería ser más suavizado al utilizarse intervalos más pequeños para la medición.

Una vez determinado el alcance del flujo multidimensional en la región de fluido libre, puede utilizarse el modelo de flujo parabólico en dicha región. Para garantizar que el flujo haya pasado completamente a ser unidireccional y unidimensional, además de homogeneizar el procedimiento de acoplamiento para todas las geometrías de celda unitaria, la colocación de la frontera entre regiones de solución se desplazará hasta un valor de $y_c = 5\ell$ para todos los casos.

Dando un vistazo al campo de la componente de la velocidad u_y , se confirma visualmente que su magnitud tiende a ser despreciable en las distancias antes mencionadas. Además, el efecto de dicha componente varía con la fracción vacía, dependiendo de la microestructura del medio poroso.

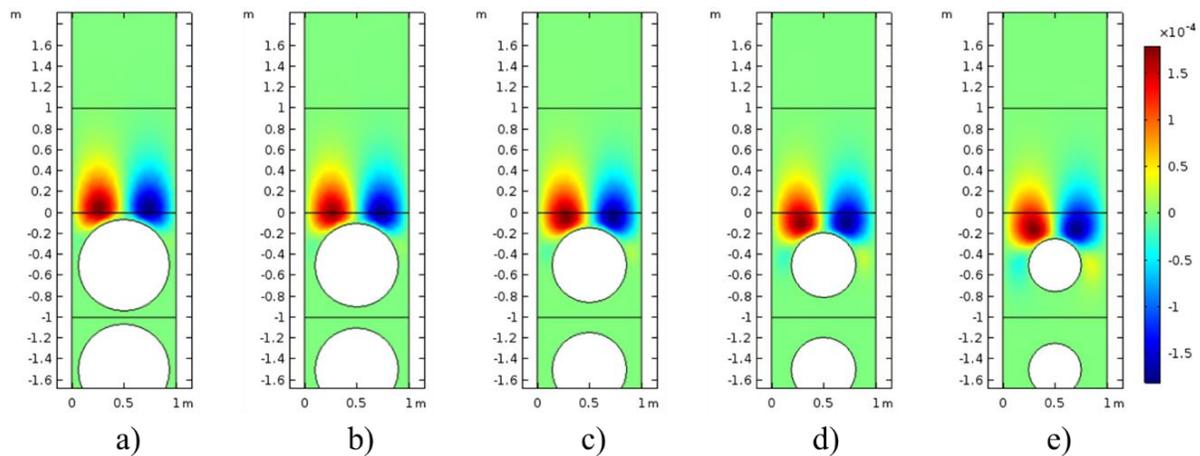


Fig. 4.2 Campo de la componente de velocidad u_y a distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$

Además, es de notar que el efecto multidimensional tiene un mayor alcance cuando el flujo producido dentro de la región de medio poroso es tridimensional. Esto tiene sentido, al existir una componente adicional de la velocidad y del esfuerzo que puede penetrar en la región de fluido libre, además de la dependencia de una variable adicional en el campo de velocidad.

Para ver de manera más detallada el efecto de la fracción vacía en la penetración de los esfuerzos en la región de fluido, pueden verse las líneas de flujo en la cercanía de la frontera divisoria (Ver Fig. 4.3). Puede apreciarse que la contribución de la componente de velocidad perpendicular al flujo deja de ser perceptible dentro de la primera celda de fluido libre para geometrías de flujo bidimensional, lo cual coincide con lo anterior. En el caso de flujo tridimensional, no hay un aumento drástico en la penetración de los esfuerzos y tampoco se muestra una variación significativa entre la penetración de los esfuerzos para las geometrías de celda unitaria estudiadas.

Con estos resultados se infiere que, a mismos valores de fracción vacía, utilizar distintas geometrías de celda unitaria para el modelado de medio poroso no afecta significativamente a la descripción de los fenómenos de penetración de esfuerzos de en la región de fluido libre.

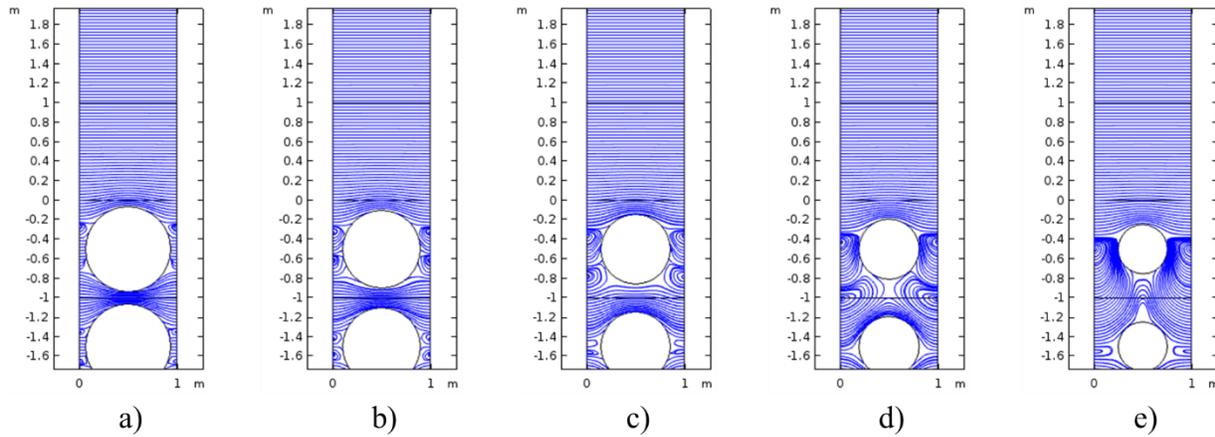


Fig. 4.3 Líneas de corriente en la cercanía de la frontera divisoria para distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_{\beta} = 0.4$, b) $\varepsilon_{\beta} = 0.5$, c) $\varepsilon_{\beta} = 0.6$, d) $\varepsilon_{\beta} = 0.7$, e) $\varepsilon_{\beta} = 0.8$

4.1.2. Alcance en la región homogénea de medio poroso

En la Fig. 4.2 se presentan los valores de d_w obtenidos para distintas geometrías y valores de fracción vacía en el medio poroso. Estos valores fueron calculados en un sistema sujeto a los mismos parámetros de la sección anterior.

Esto apoya la idea de que el utilizar geometrías simplificadas es una buena aproximación para el modelado del flujo en sistemas fluido-medio poroso, incluso para diferentes tipos de flujo. Esto genera interés, ya que la descripción de los fenómenos en la cercanía de la inter-región a escala microscópica es de suma importancia para el cálculo de los coeficientes de transporte.

La variación de la fracción vacía, por otro lado, parece tener un efecto más importante en la penetración de los esfuerzos dentro de la región de medio poroso que para la región de fluido libre, tanto para el caso de flujo bidimensional como para el tridimensional. Este alcance puede llegar desde la primera celda unitaria de medio poroso hasta la cuarta, dentro del intervalo de valores de fracción vacía reportado.

Esto se puede apreciar de manera visual analizando las líneas de corriente dentro de las celdas unitarias de medio poroso cercanas a la frontera divisoria, mostrado en la Fig. 4.5. Tras analizar las líneas de corriente, puede verse que, a diferentes valores de fracción vacía, el flujo cercano a la frontera divisoria tiene un comportamiento a escala microscópica muy diferente y ocasiona una variación en la penetración de los esfuerzos de la región de medio poroso. Esto es debido en parte a la canalización que ocurre por el aumento de la distancia entre la fase sólida de las celdas unitarias de medio poroso.

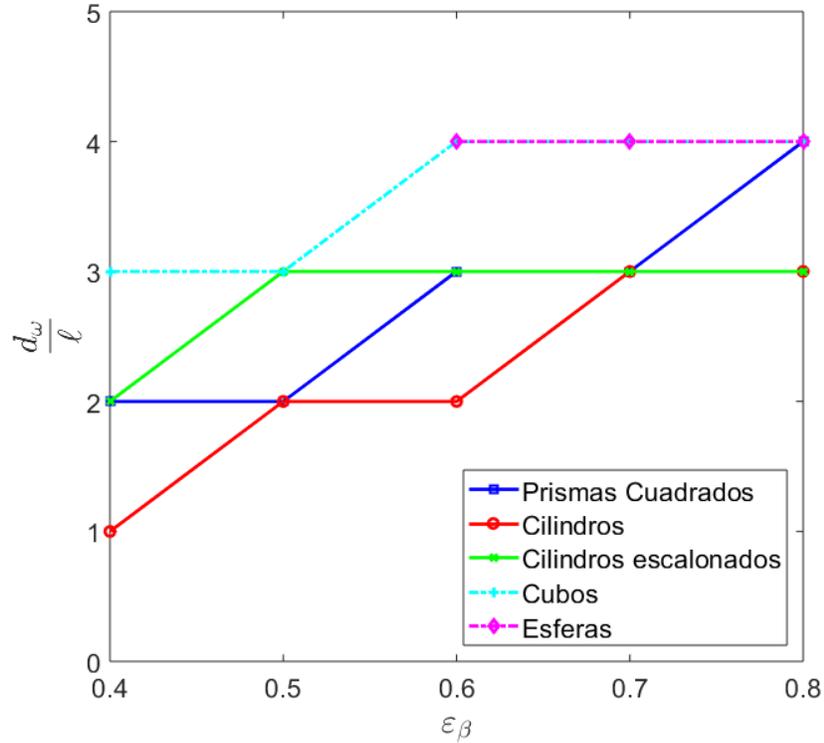


Fig. 4.4 Alcance del flujo multidimensional en la región de medio poroso para distintas microestructuras de medio poroso

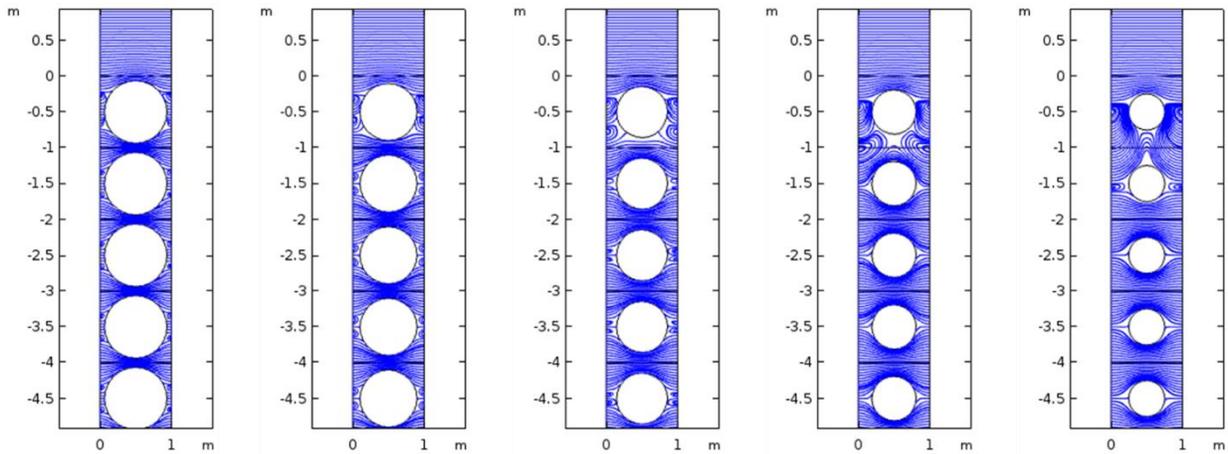


Fig. 4.5 Líneas de corriente dentro de la región de medio poroso para distintos valores de fracción vacía: a) $\varepsilon_\beta = 0.4$, b) $\varepsilon_\beta = 0.5$, c) $\varepsilon_\beta = 0.6$, d) $\varepsilon_\beta = 0.7$, e) $\varepsilon_\beta = 0.8$

Después de la distancia calculada, todas las celdas unitarias de medio poroso tendrán el mismo campo de velocidad, por lo cual no es necesario continuar su cálculo numérico, puesto que esto solo conlleva una mayor cantidad de elementos de malla necesarios para su representación. Dicho esto, se puede limitar L_ω a valores del mismo orden que los encontrados para d_ω , en pos de reducir la carga computacional.

4.2. Tamaños de malla requeridos para distintas geometrías de medio poroso

En este apartado se presentan los datos de los tamaños de malla mínimos para la obtención del perfil de velocidad de manera precisa mediante una DNS Completa. Esto para sistemas bajo los siguientes parámetros: $L_\eta = 1000$, $L_\omega = 10$, $c = 10^{-5}$. Además, el valor de la fracción vacía se mantuvo constante en $\varepsilon_\beta = 0.6$ (exceptuando los casos con valor de fracción vacía fijo). Los valores se presentan dentro de la Tabla 4.1.

Geometría	Tipo de elementos	No. de elementos	Total de elementos
Primas Cuadrados	1	3430	10548
	2	5056	
	3	2062	
Cilindros	1	3577	11689
	2	6050	
	3	2062	
Cilindros escalonados	1	4001	17348
	2	11237	
	3	2110	
Cilindros aleatorios	1	8306	57036
	2	46228	
	3	2502	
Alfombra de Sierpisky	1	7611	35682
	2	23129	
	3	4942	

Tabla 4.1 Número de elementos necesarios para la obtención del perfil de velocidad por DNS Completa (geometrías con flujo bidimensional)

Geometría	Tipo de elementos	No. de elementos	Total de elementos
Cubos	1	62569	98403
	2	31710	
	3	4124	
Esferas	1	73510	113878
	2	36264	
	3	4104	

Tabla 4.2 Número de elementos necesarios para la obtención del perfil de velocidad por DNS Completa (geometrías con flujo tridimensional)

Las mallas constan de tres tipos de elementos:

1. Elementos de dominio
2. Elementos de borde o de frontera

3. Elementos de vértice

Los elementos de dominio pueden ser de forma cuadrada o triangular para las geometrías bidimensionales o de forma de prisma triangular y tetraédrica para las geometrías tridimensionales. Son aquellas que se encuentran contenidas dentro del dominio y son formadas por los nodos de la malla generada. Por otro lado, los elementos de borde o frontera son aquellos elementos que se encuentran en la delimitación de la geometría del sistema, similar a los elementos de vértice, siendo estos últimos los nodos que se encuentran en los límites de la geometría del sistema.

Analizando los valores de la Tabla 4.1, se puede apreciar que, para sistemas del mismo tamaño y fracción vacía, el tipo de geometría de celda unitaria puede causar gran variación en la cantidad de elementos de malla. Como ejemplo, podemos tomar las geometrías de cilindros, cilindros escalonados y la de cilindros aleatorios. De la primera a la segunda, existe un aumento del 148 % y de la primera a la tercera este es del 488 %, es decir, casi 5 veces el número de elementos para su representación. Además, fijándose en la Tabla 4.2, vemos que para la representación de flujo tridimensional, son necesarios una cantidad de nodos, incluso para geometrías sencillas de celda unitaria (alrededor del doble que las geometrías más complicadas que presentan flujo bidimensional)

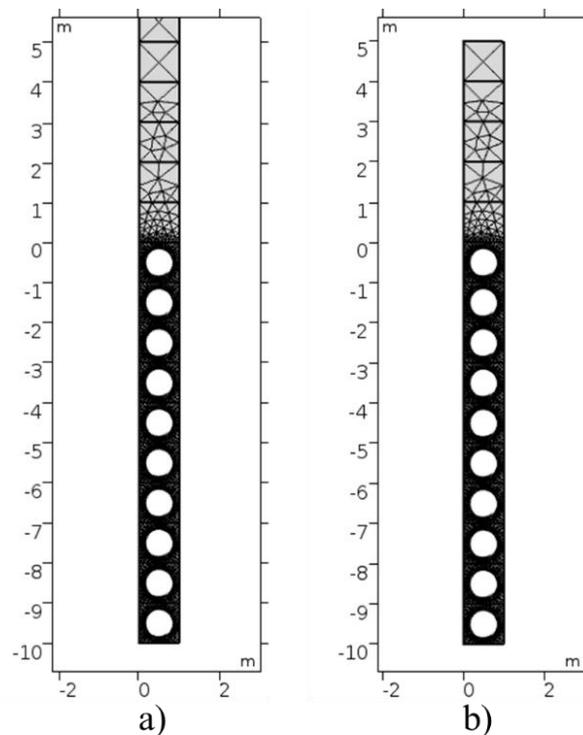


Fig. 4.6 Mallado del sistema para: a) DNS Completa, b) DNS Acoplada

De esta manera, una vez determinados los parámetros de construcción de malla que se deben emplear en la DNS Completa, estos son replicados en la DNS Acoplada, buscando obtener un

mallado idéntico en la medida de lo posible, como puede verse en la Fig. 4.6 y Fig. 4.7. Esto es necesario para emplear una comparación directa de los valores de velocidad. En la Tabla 4.3 y la Tabla 4.4 se presentan la cantidad de elementos de malla requeridos para la obtención del perfil de velocidad tanto para la DNS Completa como para la DNS Acoplada y el porcentaje de reducción en los elementos de malla.

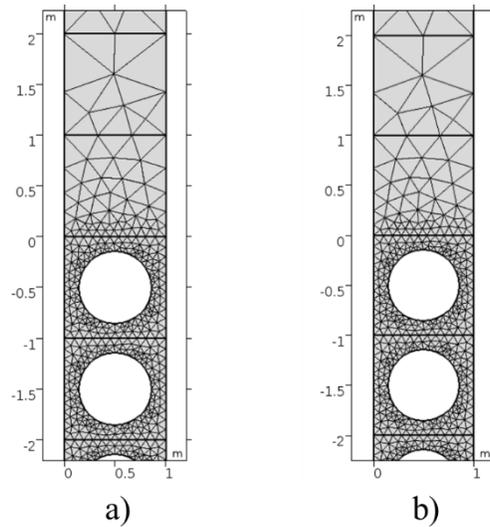


Fig. 4.7 Mallado cerca de la inter-región para: a) DNS Completa, b) DNS Acoplada

Geometría	Tipo de elementos	No. de elementos		% Reducción	Total de elementos		% Reducción
		DNS Completa	DNS Acoplada		DNS Completa	DNS Acoplada	
Primas Cuadrados	1	3430	445	87.03%			
	2	5056	1076	78.72%	10548	1593	84.90%
	3	2062	72	96.51%			
Cilindros	1	3577	698	80.49%			
	2	6050	2796	53.79%	11689	3566	69.49%
	3	2062	72	96.51%			
Cilindros escalonados	1	4001	918	77.06%			
	2	11237	6525	41.93%	17348	7553	56.46%
	3	2110	110	94.79%			
Cilindros aleatorios	1	8306	5321	35.94%			
	2	46228	42194	8.73%	57036	48027	15.80%
	3	2502	512	79.54%			
Alfombra de Sierpinski	1	7611	4626	39.22%			
	2	23129	19149	17.21%	35682	26727	25.10%
	3	4942	2952	40.27%			

Tabla 4.3 Reducción de elementos necesarios para el modelo de solución numérica en la DNS Acoplada respecto a la DNS Completa (Geometrías con flujo bidimensional)

En cada una de las geometrías puede apreciarse que la mayor reducción se da en los elementos de vértice, especialmente en las geometrías de celda unitaria más complejas. Esto es así por el incremento en el tamaño de la geometría, teniendo más extensión en sus fronteras y siendo necesaria, por consiguiente, una cantidad más elevada de elementos para delimitarla. Sin embargo, este no es el caso para la geometría de celda unitaria de alfombra de Sierpinski, debido a que presenta una mayor cantidad de fronteras dentro de cada una de las celdas unitarias de medio poroso, ocasionando que la densidad de este tipo de elementos sea mayor.

Por otro lado, la reducción de elementos de dominio y de frontera en geometrías sencillas es elevada, pero pasa a ser menor con la complicación de las celdas unitarias, pasando de alrededor del 80 % en geometrías sencillas a ser menor al 40 % en geometrías más complicadas. Esto es de esperarse, puesto que para dichas geometrías hay una densidad mucho más elevada de elementos de malla dentro de la región de medio poroso, siendo así menos significativa tal reducción.

En términos globales sucede algo similar, ya que existe una reducción de elementos mucho más importante para las geometrías planteadas con menor complejidad, donde puede ser mayor al 70 u 80 %. A medida que se complica, la reducción puede llegar a ser mucho menor, llegando incluso a ser menor del 20 %. Esto va de acuerdo con que, como se dijo anteriormente, en geometrías de mayor complejidad, la relación entre los elementos de malla necesarios en la región de fluido con los de dentro de la región de medio poroso es baja.

Geometría	Tipo de elementos	No. de elementos		% Reducción	Total de elementos		% Reducción
		DNS Completa	DNS Acoplada		DNS Completa	DNS Acoplada	
Cubos	1	62569	40978	34.51%	98403	52888	46.25%
	2	31710	11766	62.89%			
	3	4124	144	96.51%			
Esferas	1	73510	40978	44.26%	113878	57484	49.52%
	2	36264	16382	54.83%			
	3	4104	124	96.98%			

Tabla 4.4 Reducción de elementos necesarios para el modelo de solución numérica en la DNS Acoplada respecto a la DNS Completa (Geometrías con flujo tridimensional)

A simple vista estos resultados indican que el modelo acoplado necesita de menos elementos en su representación. Sin embargo, debe recordarse el modelo correspondiente a la región de medio poroso y la zona de transición de la DNS Acoplada requiere ser resuelto tres veces, ya que se necesita de dos valores iniciales para la obtención del valor de la velocidad en la frontera entre las regiones de solución. Por lo tanto, en principio no es obvia la reducción en el uso de recursos computacionales. En secciones posteriores se presentan comparaciones entre tiempos de cómputo requeridos por ambas metodologías, atendiendo a estas dudas.

4.3. Reproducción de los datos de velocidad para distintos sistemas

En esta sección se analiza la efectividad de la DNS Acoplada para reproducir los valores de velocidad de la DNS Completa para distintas condiciones, haciendo especial énfasis en el uso de distintas microestructuras de medio poroso.

Para facilitar el análisis, los perfiles de velocidad aquí presentados se han normalizado utilizando el valor de velocidad máxima en cada caso, denotado como u_{\max} , de tal manera que el intervalo valores de velocidad esté entre 0 y 1. Para fines de simplicidad, se muestran resultados para una sola geometría de celda unitaria de medio poroso (geometría de cilindros) bajo los siguientes parámetros: $L_{\eta} = 1000$, $L_{\omega} = 10$, $c = 10^{-5}$, $y_c = 5$. Sin embargo, el comportamiento mostrado en dichas figuras es análogo para las distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso

En la Fig. 4.8 y la Fig. 4.9 se muestran el perfil de velocidad puntual y promedio, respectivamente, para distintas zonas del sistema. Es importante recordar que, como fue descrito en la Sección 2.7, los valores reportados en esta sección se obtienen al realizar un corte en $x = 0.5 \ell$ (ver Fig. 2.20), dado que en la región de medio poroso la velocidad depende de más de una variable.

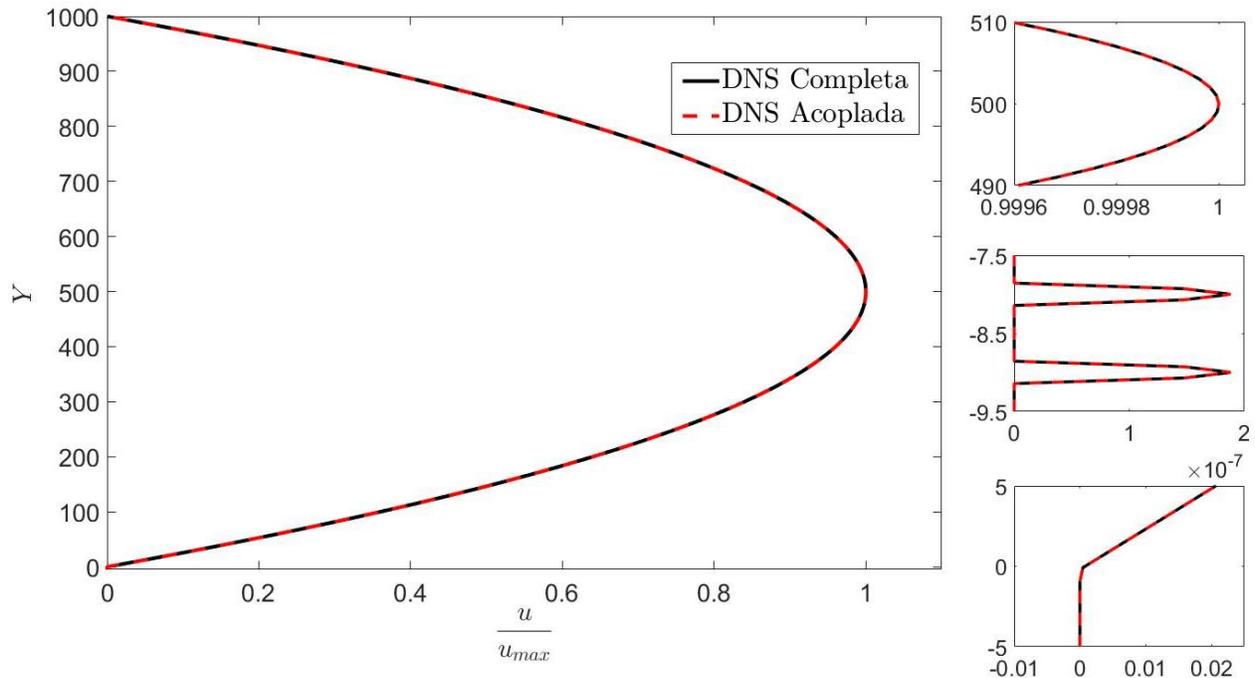


Fig. 4.8 Perfil de velocidad puntual en distintas zonas del sistema

Puede apreciarse que el método de solución acoplado es capaz de reproducir a nivel puntual los valores de velocidad de la DNS Completa, incluyendo a la región de medio poroso, la zona de transición y la zona cercana al punto de máxima velocidad. Así, de forma cualitativa, se puede ver que presenta el mismo comportamiento. El poder reproducir los valores de velocidad en la zona

dentro del medio poroso y en la zona de transición con fidelidad es un requerimiento importante, debido a que uno de los retos que actualmente se busca afrontar es obtener más información dentro de dichas zonas para la validación de los modelos promedio.

Sin embargo, más adelante se realiza un análisis más exhaustivo con respecto al error relativo entre los valores de velocidad puntual y promedio bajo diferentes parámetros del sistema. Con esto, se pretende estudiar si el método de solución aquí propuesto tiene alguna limitación en cuanto a la configuración del medio poroso. Es importante revisar esto último, debido a que lo que se busca es facilitar los cálculos para sistemas que presenten configuraciones de medio poroso cada vez más complicadas.

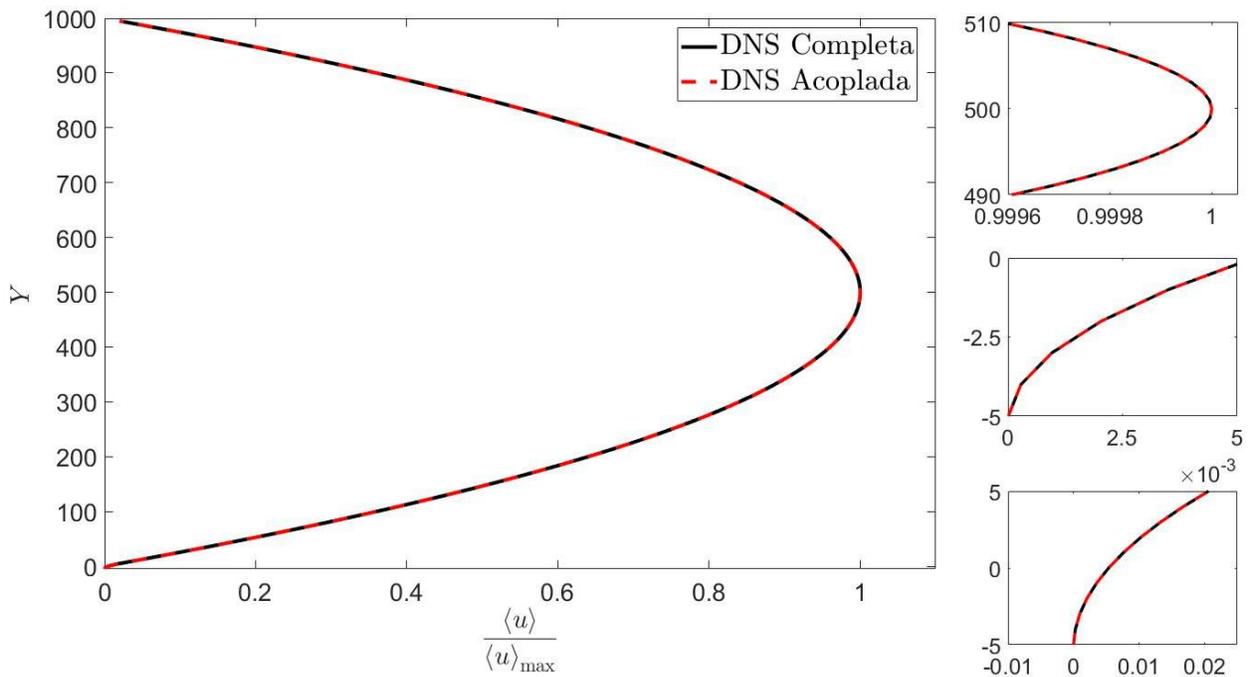


Fig. 4.9 Perfil de velocidad promedio en distintas zonas del sistema

Por otro lado, el método también es capaz de reproducir los perfiles de velocidad promedio para todo el sistema. Esto es de esperarse, puesto que, dentro de la región de solución numérica, estos son calculados a partir de la velocidad puntual calculada anteriormente. Sin embargo, en gran parte de la región de fluido libre, la DNS Acoplada calcula estos valores de velocidad mediante una ecuación analítica. De esta manera, se puede ver que dicha ecuación, en principio, puede reproducir el comportamiento parabólico obtenido de forma numérica, corroborando la hipótesis que dentro de esta región, el comportamiento es muy similar al flujo de Poiseuille.

4.3.1. Variación de la geometría de celda unitaria de medio poroso

Lo anteriormente dicho puede ser corroborado observando la Fig. 4.10, donde se presentan los valores de error relativo en términos de velocidad puntual para cada uno de las geometrías de celda unitaria estudiadas. Los sistemas analizados en esta sección están bajo los siguientes parámetros:

$$L_{\eta} = 1000, L_{\omega} = 10, c = 10^{-5}, y_c = 5, \varepsilon_{\beta} = 0.6.$$

Se presenta el error relativo promedio en áreas de importancia:

- Todo el sistema ($-L_{\omega} \leq y \leq L_{\eta}$)
- Región de solución analítica ($-y_c \leq y \leq L_{\eta}$)
- Región de solución numérica ($-L_{\omega} \leq y \leq y_c$)
- Zona de transición ($-5\ell \leq y \leq 5\ell$)
- Error relativo máximo

Se puede apreciar que, a medida que se complican las configuraciones del medio poroso, el error relativo aumenta, especialmente cuando se utilizan geometrías que ocasionan flujo tridimensional. En una geometría tan simple como la de prismas cuadrados, se tiene una reproducción casi idéntica de los valores en todo el sistema, ya que los errores son de orden muy bajo (menor a 10^{-8}).

Aun así, el error es bajo en todas las regiones del sistema para todos los casos, teniendo valores máximos de orden de 10^{-3} , es decir, menores al 1 % en todos los puntos del sistema en el caso de flujo bidimensional y de orden de 10^{-2} en el caso de flujo tridimensional. Sin embargo, errores de esta magnitud se encuentran solo en la zona de transición, mientras que el error promedio en la región de solución numérica y la zona de transición son de orden de 10^{-4} o menor (para mayor detalle, consultar el Apéndice E).

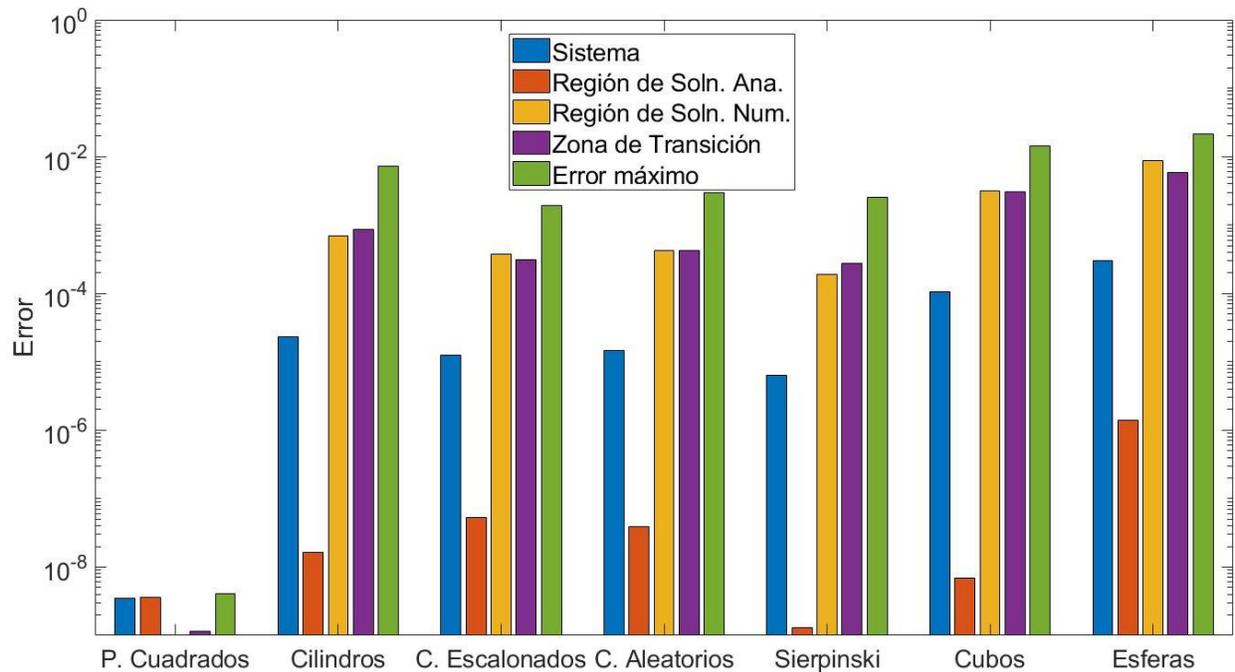


Fig. 4.10 Error relativo entre los métodos de solución en términos de velocidades puntuales

En general, se logra una buena reproducción del perfil de velocidad de la DNS Completa. Cabe destacar que el error en la región de solución analítica es mucho menor que el de la solución numérica. Esto se debe en parte al posible error por truncamiento en el cálculo de u_c , el cual se propaga dentro de la región de medio poroso y, al ser los valores de velocidad de un orden muy bajo (de orden de 10^{-7} o 10^{-8} , según el caso), se da un mayor error.

Este mismo orden bajo indica que las diferencias se encuentran en dígitos del orden de 10^{-10} y 10^{-11} , lo cual puede atribuírsele a error numérico, pues debe recordarse que la precisión en la representación aritmética en punto flotante usada en los sistemas de computación tiende a ser menor dentro de valores con órdenes de magnitud tan bajos, aunado a la diferencia entre los números de condición de las matrices. Además, el cálculo de los valores dentro del corte de la Fig. 2.9 se hace por medio de interpolaciones de los valores del campo de velocidad numérico, lo cual implica también cierto error numérico.

Los errores dentro de la región de solución analítica son de orden de 10^{-8} o menor (salvo en el caso de esferas), lo cual indica una reproducción idéntica de los valores de velocidad de la DNS Completa. Este resultado muestra que es posible obtener el perfil de velocidad en la región de fluido libre mediante ecuaciones analíticas, corroborando el planteamiento dado en el Capítulo 2.

Lo mencionado anteriormente se cumple incluso en las geometrías de mayor complejidad, como lo son la de cilindros dispuestos de manera aleatoria y el arreglo fractal de la alfombra de Sierpinski

o incluso en las geometrías que presentan flujo tridimensional, como en el caso de cubos. Sin embargo, cabe destacar que los errores en las geometrías que presentan flujo tridimensional tienden a ser por lo menos de un orden de magnitud mayores a las geometrías con flujo bidimensional en todo el sistema. Esto puede deberse a la complejidad del mallado o a mal condicionamiento de las matrices de solución, dada la cantidad de elementos de malla.

Sin embargo, en general puede intuirse que el arreglo de las celdas, ya sea periódico o aleatorio, no influye de forma significativa en la capacidad del método para el cálculo del perfil de velocidad. Además, estos resultados sugieren que este debe ser funcional en geometrías aún más complejas, con configuraciones realistas.

El método acoplado presenta más cantidad de ventajas para el cálculo de la velocidad promedio, debido a que las integrales requeridas en las regiones de promediado dentro de dicha región pueden calcularse mediante una expresión analítica dada por la Ec. (2.67). En la Fig. 4.11 se presentan los errores relativos en términos de velocidades promedio para los distintos casos abordados.

En general, como ya fue dicho, los errores relativos en este caso son de orden menor al caso de velocidad puntual, siendo en general los valores máximos de error relativo de un orden de magnitud de 10^{-4} o menor. Esto es de esperarse, ya que el procedimiento de promediado reduce la magnitud del error en los cálculos. Además, los valores de velocidad promedio dentro de la región de medio poroso son de varios órdenes de magnitud mayores a los del caso puntual, evitando así el error numérico.

Debido al gran interés por describir coeficientes de transporte efectivos para este tipo de sistemas, este resultado es significativo. La descripción del perfil promedio mediante un método que utilice ecuaciones analíticas y además sea más eficiente en términos de uso de recursos de cómputo puede facilitar el desarrollo de modelos efectivos para el perfil de velocidad en canales parcialmente ocupados por medio poroso. Además, su efectividad dentro de la inter-región tanto en términos promedio como puntuales permite obtener información para la determinación de coeficientes de transporte.

Aunado a esto, el uso de ecuaciones analíticas para el cálculo de los valores de velocidad dentro de la región de fluido permita que se puedan hacer evaluaciones de valores de velocidad en puntos deseados de manera mucho más sencilla, además de que contar con tal ecuación facilita el cálculo de valores derivados de la velocidad.

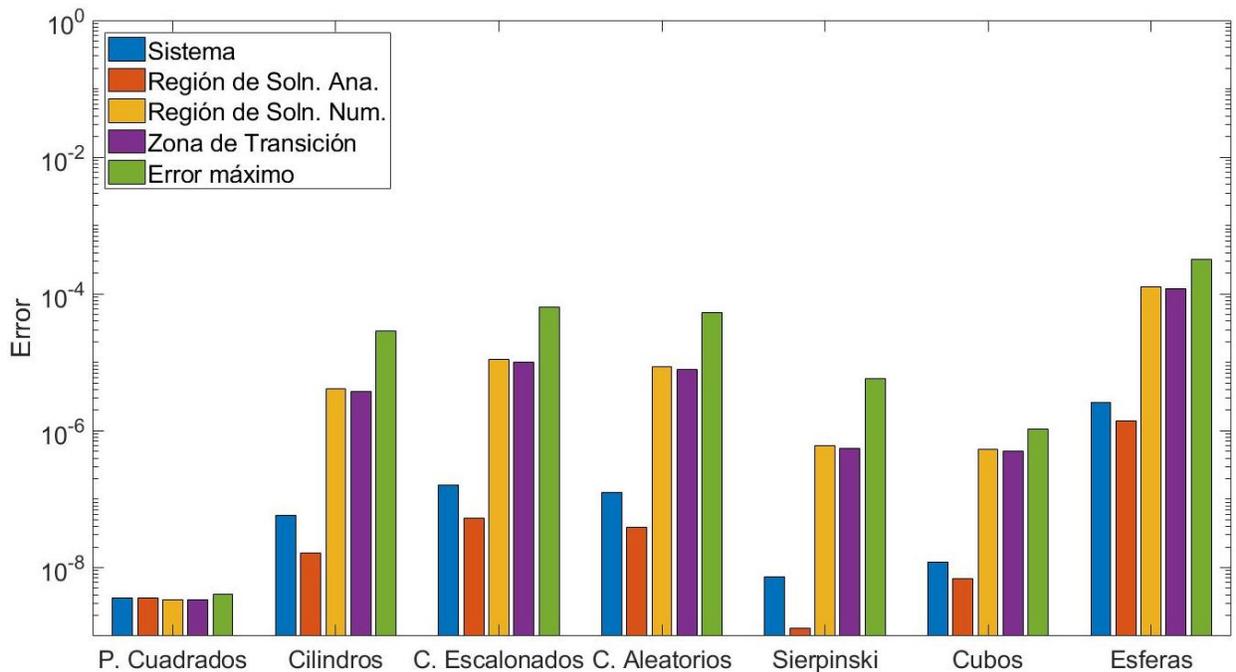


Fig. 4.11 Error relativo entre los métodos de solución en términos de velocidades promedio

Con la información obtenida hasta este momento, se puede intuir que el tipo de celda unitaria utilizado para la representación del medio poroso no afecta la reproducibilidad de los valores de la DNS Completa mediante la utilización de la DNS Acoplada. Sin embargo, aún debe evaluarse la capacidad del método para reproducir distintos valores de fracción vacía.

4.3.2. Variación de la fracción vacía

Aquí se estudiará en qué medida la variación del valor de la fracción vacía afecta la reproducción de los perfiles de velocidad mediante la DNS Acoplada. Los resultados presentados en esta sección corresponden a sistemas bajo los siguientes parámetros: $L_\eta = 1000$, $L_\omega = 10$, $c = 10^{-5}$, $y_c = 5$.

Dado que la mayoría de sistemas naturales y aplicaciones dentro de la ingeniería química donde se presenta flujo en medios porosos, estos presentan valores de fracción vacía de alrededor de 0.6 (Nield y Bejan, 1992), este análisis se limitará a valores cercanos al estipulado. En conjunto con el uso de distintas microestructuras de medio poroso, evaluar la funcionalidad del método ante diferentes valores de fracción vacía permite evaluar la posibilidad de su uso en sistemas con configuraciones de medio poroso más apegadas a las reales.

En la Fig. 4.12 se presentan los valores del porcentaje de error relativo para distintos valores de fracción vacía en cada una de las geometrías de celda unitaria utilizadas en esta sección.

Es importante destacar que en la región de solución numérica y la región de transición el error relativo promedio tiende a aumentar en valores altos de la porosidad, aunque no a valores significativos. Como se explicó anteriormente, esto puede deberse en parte a la baja magnitud de los valores de velocidad en tales regiones, lo cual se acentúa debido a la baja obstrucción que se presenta en sistemas con esa disposición.

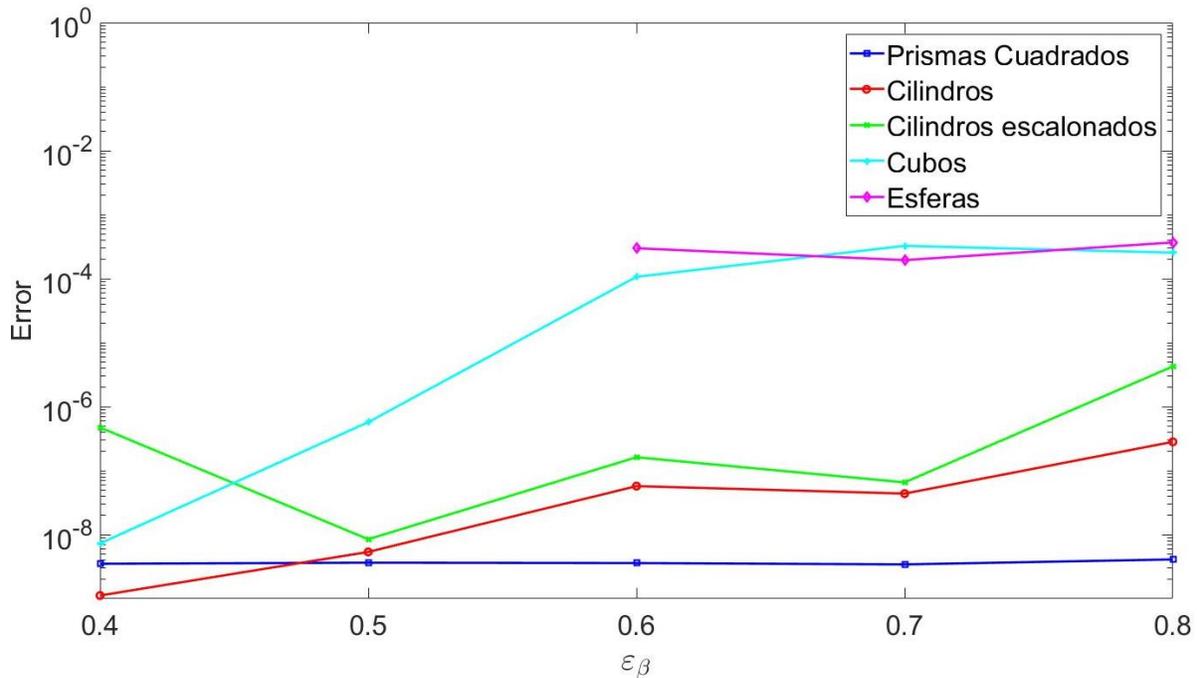


Fig. 4.12 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad puntual

Puede verse que, sin importar el valor dado de fracción vacía, la DNS Acoplada reproduce los valores de velocidad promedio obtenidos con la DNS Completa, incluso en la zona de transición. Con este resultado se puede intuir que el método planteado funciona sin importar la microestructura del medio poroso.

De nuevo, es de esperarse que los perfiles de velocidad promedio calculados mediante el método acoplado concuerden con los datos de la DNS Completa, dado que estos se calculan a partir de los valores de velocidad puntual y se puede ver en la Fig. 4.13. Esto se corrobora observando los valores de error relativo dados en el Apéndice E, donde se presentan los valores de error relativo para cada uno de los casos descritos anteriormente.

Analizando estos datos, se puede ver que para todos los casos el método acoplado puede reproducir el perfil de velocidad en términos promedio con errores de orden de magnitud muy bajos en todas las regiones del sistema, manteniendo la tendencia mostrada en los perfiles de velocidad puntuales de aumentar dicho error en casos de alta porosidad. Sin embargo, en general, los órdenes de

magnitud de estos errores tienden a ser bastante bajos, de manera que se reproducen fielmente los datos de la DNS Completa.

La capacidad para reproducir los perfiles promedio con casi nulo error hace que el método propuesto en este trabajo sea una alternativa viable para la evaluación de modelos que involucren el uso de ecuaciones de medio efectivo.

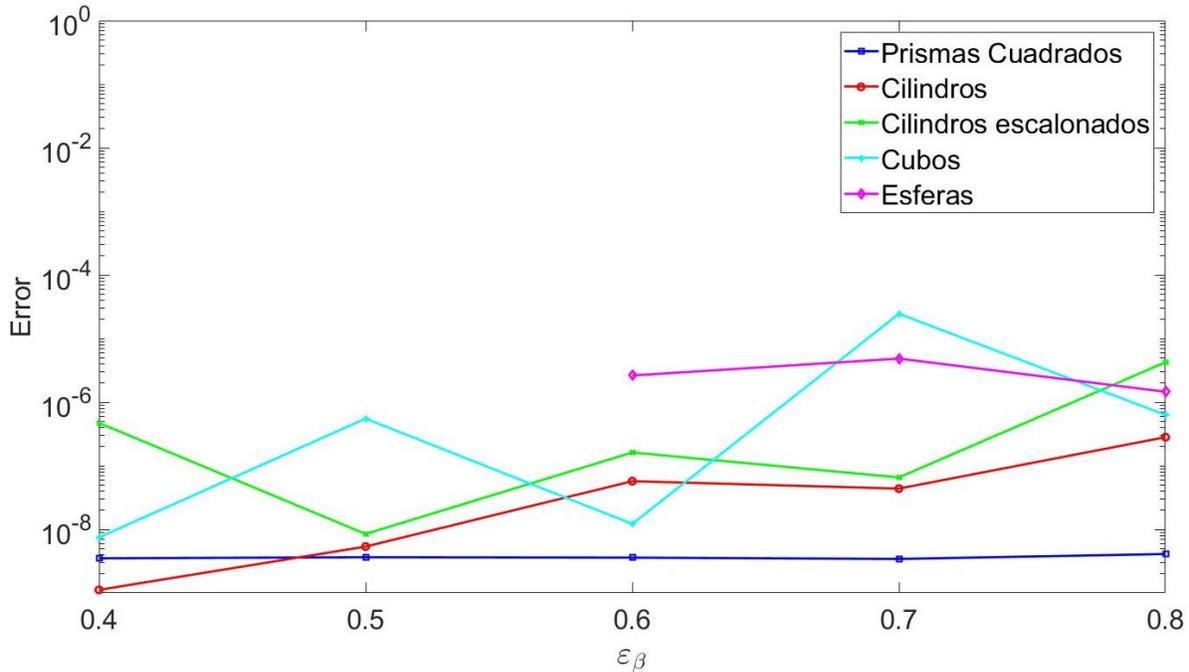


Fig. 4.13 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad promedio

En conjunto con los resultados de la sección anterior, se puede intuir que no hay limitaciones en cuanto a la disposición de la fase sólida dentro de la celda unitaria de medio para la reproducción de los valores de velocidad por medio de la DNS Acoplada. También debe notarse que, incluso cuando la representación del medio poroso se hace a través de celdas unitarias con flujo tridimensional, la DNS Acoplada funciona a diferentes valores de fracción vacía.

Comparando estos valores con los del caso de flujo bidimensional, se aprecia un aumento en los errores relativos. Esto es de mayor importancia dentro de la región de solución numérica y en la zona de transición, elevándose incluso al 2 % y 4 % en algunos casos. Como ya se dijo antes, estos valores corresponden a puntos cercanos a la zona de transición, donde la velocidad presenta una magnitud muy baja, por lo que esto puede atribuirse en parte a error numérico. Sin embargo, el error relativo promedio en la región de solución numérica y la zona de transición es del orden de 10⁻³ o menor (exceptuando un solo caso), por lo que se puede decir que existe una buena reproducción de los valores de velocidad.

Por otra parte, los valores dentro de la región de solución analítica se dan con un error relativo promedio de 10^{-6} o menor en todos los casos, mostrando que se logra calcular exitosamente el valor de u_c y reforzando la validez del uso de las ecuaciones analíticas de velocidad lejos de la zona de transición, incluso cuando el flujo dentro de la región de medio poroso es tridimensional.

En resumen, con los resultados presentados hasta ahora, puede intuirse que la DNS Acoplada es capaz de reproducir los perfiles de velocidad de la DNS Completa en términos puntuales y promedio sin importar la microestructura del medio poroso.

4.3.3. Variación de la posición de la frontera de solución

En las líneas siguientes se evalúa el efecto que tiene la selección del valor donde comienza el cálculo del perfil de velocidad mediante las ecuaciones analíticas en el método acoplado. Se realizará este análisis para distintas geometrías de medio poroso. Los resultados presentados corresponden a sistemas bajo los siguientes parámetros: $L_\eta = 1000$, $L_\omega = 10$, $c = 10^{-5}$, $\varepsilon_\beta = 0.6$. En la Fig. 4.14 se presentan los errores relativos en términos de velocidad puntual para distintos valores de y_c .

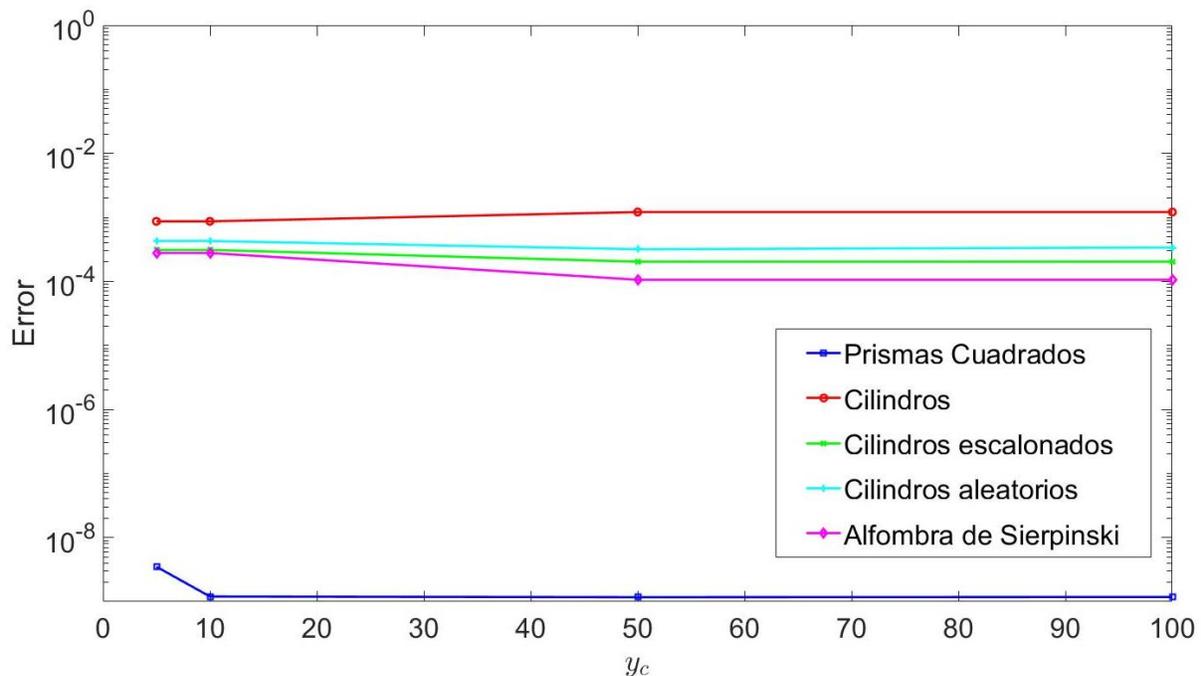


Fig. 4.14 Error relativo promedio en el sistema a distintas posiciones de la frontera de solución en términos de velocidad puntual

Tras una mirada a la figura, se puede ver que la elección del valor de y_c no es de particular relevancia para la reproducción de los perfiles de velocidad puntual de la DNS Completa. Esto es

cierto incluso para la zona de transición del sistema y la zona cercana al valor de velocidad máxima, comprobando que la eficacia del método, siempre y cuando la frontera de solución esté colocada dentro de la zona de flujo unidimensional y unidireccional.

Sin embargo, la colocación de dicha frontera cada vez más lejos de la región de medio poroso lleva consigo un incremento notable en el número de elementos de malla necesarios para la representación del sistema, además de requerir un mayor número de interpolaciones y de integrales numéricas para la obtención de los perfiles de velocidad puntual y promedio, respectivamente. Este problema será abordado en la sección posterior.

4.3.4. Variación del tamaño de la región de fluido libre

En las siguientes líneas se estudia el efecto que tiene el tamaño de la región de fluido libre en la reproducción de los valores de DNS Completa por medio de la DNS Acoplada. Los sistemas presentados están sujetos a los siguientes parámetros: $L_w = 10$, $c = 10^{-5}$, $y_c = 5$, $\varepsilon_\beta = 0.6$.

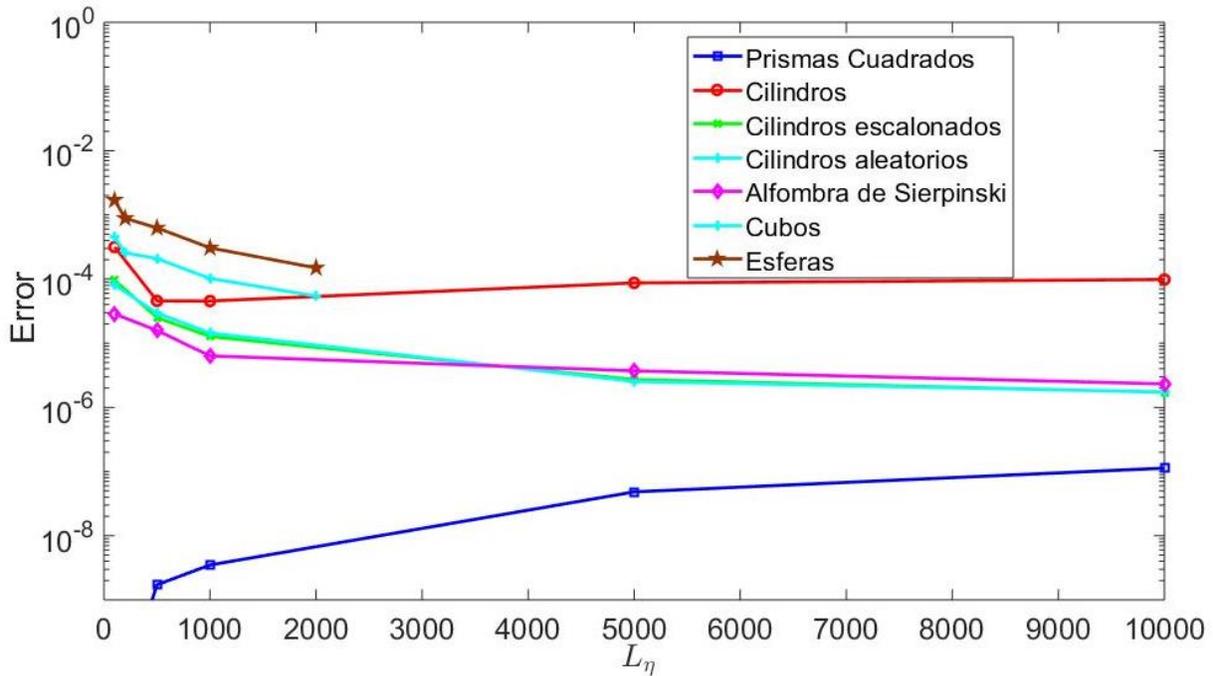


Fig. 4.15 Error relativo promedio en el sistema a distintos valores de tamaño de la región de fluido libre en términos de velocidad puntual

Como puede verse en la Fig. 4.15, incluso en sistemas de tamaño muy elevado, la DNS Acoplada puede reproducir el perfil de velocidad puntual con valores muy bajos de error relativo en cada una de las regiones del sistema, en el caso de flujo bidimensional.

En casi todos los casos, los errores relativos máximos en el sistema se mantienen en un orden de 10^{-3} , o menores al 1 %. Además, tanto en la región de solución numérica como en la zona de transición se tienen errores relativos del orden de 10^{-4} y en la región de solución analítica del orden de 10^{-7} o menor, lo cual indica muy buena reproducción de los valores de la DNS Completa.

Los resultados mostrados, en conjunto con los ya tratados en los puntos anteriores, demuestran que el uso de la DNS Acoplada es factible para prácticamente cualquier sistema, sin importar la geometría utilizada para la representación de la región de medio poroso, la fracción vacía o el tamaño del sistema involucrado. Con esto, puede intuirse que el método debe funcionar sin importar la disposición del sistema, siempre y cuando este mantenga las condiciones a las cuales sea posible utilizar ecuaciones analíticas dentro de la región de fluido libre.

La reproducción de los valores de velocidad en sistemas de gran disparidad de escala es de sumo interés, debido a que son los sistemas que conllevan una mayor demanda de recursos computacionales. Esto será abordado en la sección posterior.

4.4. Impacto del método sobre el uso de recursos computacionales

Como se mencionó antes, una de las ventajas del uso de la DNS Acoplada es reducir la carga computacional necesaria para la solución del modelo y la obtención de los perfiles de velocidad puntual y promedio. Como ya fue mencionado antes, esto se medirá por la reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo.

4.4.1. Variación de la geometría de celda unitaria

En la Fig. 4.16 se presenta la reducción en la cantidad de nodos y tiempo de cómputo para el cálculo del perfil de velocidad en cada una de las geometrías de celda unitaria empleadas.

Como ya fue mencionado, el método acoplado presenta mayor ventaja en términos del cálculo de los perfiles de velocidad promedio, de acuerdo a la información mostrada anteriormente en la figura, donde se presentan las reducciones de tiempos de cómputo para el cálculo de perfiles de velocidad promedio para los distintos casos de estudio presentados en esta sección. Nótese que la reducción en el número de elementos de malla es la misma, puesto que este procedimiento es posterior a la obtención del campo de velocidad.

Fijándose en estos datos, se aprecia que, a mayor complejidad de geometría de celda unitaria, la reducción de elementos es cada vez menor, pasando de más del 80 % en geometrías muy sencillas a menos del 20 % en geometrías complejas. Esto sucede debido a que la representación de celdas unitarias con geometrías más complicadas produce que la cantidad de elementos en la región de fluido libre sea muy alta con respecto a la región de medio poroso.

Esto impacta directamente en el tiempo de cómputo, ya que, como se mencionó antes, la DNS Acoplada requiere solucionar el modelo tres veces, lo cual puede llegar a superar el tiempo de obtención del campo de velocidad por medio de la DNS Completa (ver Apéndice F). Sin embargo, la utilización de las ecuaciones analíticas para la obtención de los perfiles de velocidad puntual y promedio compensa con creces dicho aumento, bajo los parámetros establecidos. Más adelante se abordan estudios donde dichos parámetros son modificados, atendiendo las dudas que esto genera.

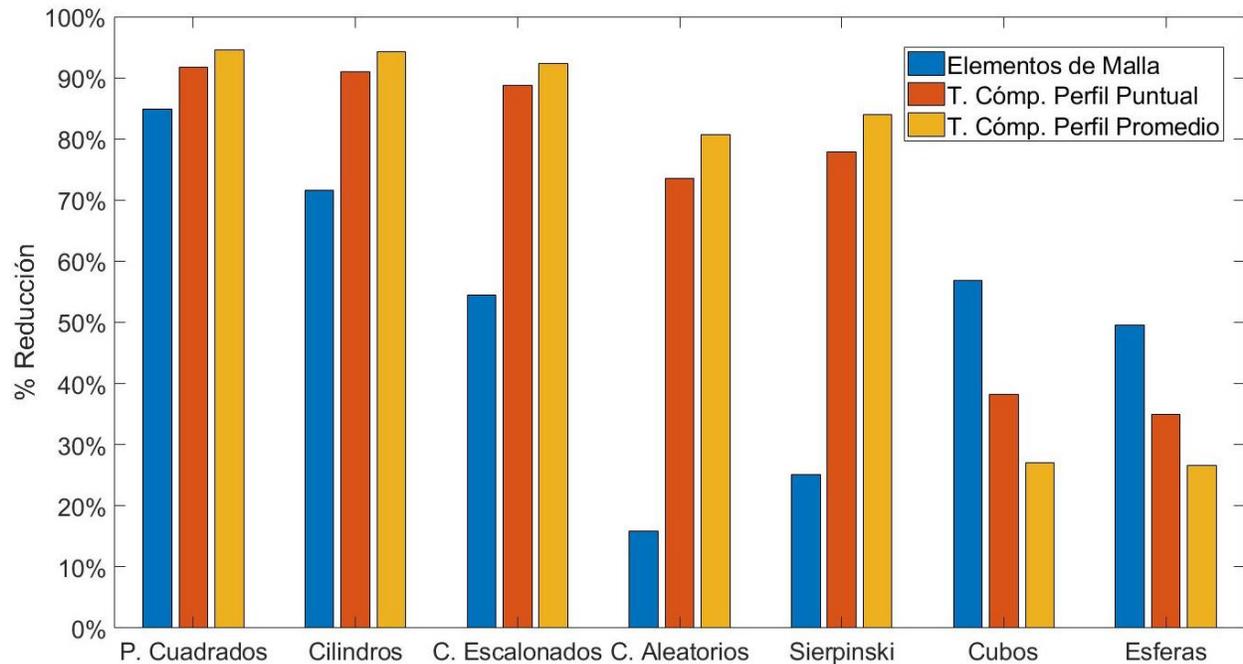


Fig. 4.16 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintas geometrías de medio poroso

Globalmente, se tiene una reducción del tiempo de cómputo mayor al 70 % para el cálculo de velocidad puntual y mayor al 80 % para el cálculo de la velocidad promedio para todos los casos con flujo bidimensional.

De igual manera, el contar con una expresión analítica para el cálculo de los perfiles de velocidad en la zona de fluido libre facilita la evaluación de valores de velocidad en puntos específicos, lo cual requeriría de evaluaciones o interpolaciones en el campo de velocidad en el caso de una DNS tradicional. De igual manera, se facilita el cálculo de valores derivados como son el caudal, la velocidad máxima, entre otros.

Por otra parte, el requerir la construcción de una geometría de mucho menor tamaño reduce la cantidad de memoria utilizada por el equipo y uso del procesador para el renderizado de las geometrías. De esta manera, equipos muy limitados en términos de memoria gráfica y poder de procesamiento pueden ser capaces de realizar este tipo de cálculos mediante una DNS Acoplada.

Es de esperarse que en geometrías de flujo tridimensional el impacto en el tiempo de cómputo sea menor, como ya fue explicado anteriormente. Puede apreciarse que la reducción de elementos de malla es similar en ambos casos, rondando el 50 %. Si bien esto parece ser mayor al visto en las geometrías más complicadas del caso bidimensional. Sin embargo, debido a que la cantidad de elementos de malla para la representación de este tipo de geometrías es más alta que en el caso de flujo bidimensional (ver Apéndice F).

Aunque se tenga en cuenta esto, se observa una reducción en el tiempo de cómputo para de alrededor del 45 % en términos del perfil de sistemas bajo los parámetros descritos, así como del 35 y 26 % en términos del cálculo del perfil de velocidad puntual y promedio, respectivamente. Debe notarse que, para este tipo de geometrías, la magnitud del tiempo de cómputo del campo de velocidad con respecto a los perfiles es más elevada, lo cual se abordará más adelante.

El porcentaje de reducción en el tiempo de cómputo en términos promedio es aún mayor que para el caso de velocidad puntual. Esto es debido a que, como se menciona anteriormente, el número de integrales numéricas que el sistema debe de calcular para la obtención del perfil de velocidad promedio en el método acoplado es mínimo en comparación al necesario para una DNS del sistema completo (aproximadamente de orden del 1 % del total, para un valor de $y_c = 5$), reemplazando estas por la expresión analítica dada por la Ec. (2.67).

Esto igualmente implica que habrá mayor facilidad para la obtención de cantidades derivadas como el caudal, al contarse con expresiones analíticas para las integrales de la velocidad en la gran mayoría de la región de fluido libre.

4.4.2. Variación de la posición de la frontera de solución

Es necesario hacer un análisis del impacto del valor de y_c en la reducción de elementos de malla y de tiempo de cómputo. Esto se detalla en la Fig. 4.17. Se puede ver que hay una reducción en el tiempo de cómputo cada vez menor a medida que se coloca la frontera de solución más lejos de la región de medio poroso. Incluso, se llega a tener un aumento de tiempo de cómputo para la obtención del campo de velocidad en el valor más alejado de la región de medio poroso, es decir, $y_c = 500\ell$ (ver Apéndice F).

Por otro lado, la reducción en el tiempo de cómputo en el valor más elevado para el caso de los perfiles de velocidad puntual y promedio es de alrededor del 50 % para las geometrías más sencillas y del 30% para las geometrías más complicadas. En contraste, utilizando la colocación de la frontera de solución más cercana a la región de medio poroso, las reducciones son de alrededor del 90 % para las geometrías más sencillas y del 80 % para las más complicadas. Dada la magnitud del tiempo de cómputo, la cual es bastante mayor para el cálculo de los perfiles de velocidad puntual

y promedio que para la obtención del campo de velocidad (para geometrías con flujo bidimensional), esto es de esperarse.

Estos, en conjunto con los resultados mostrados en el análisis anterior, son resultados bastante convenientes. Ya que, al mantener la colocación de esta frontera tan cerca de la región de medio poroso como sea posible, puede reducirse la cantidad de elementos de malla utilizada para la obtención del campo de velocidad dentro de la región de fluido libre al mínimo, aunado al ahorro de memoria en la construcción de la geometría, que será de mucho menor tamaño con respecto a la de la DNS Completa.

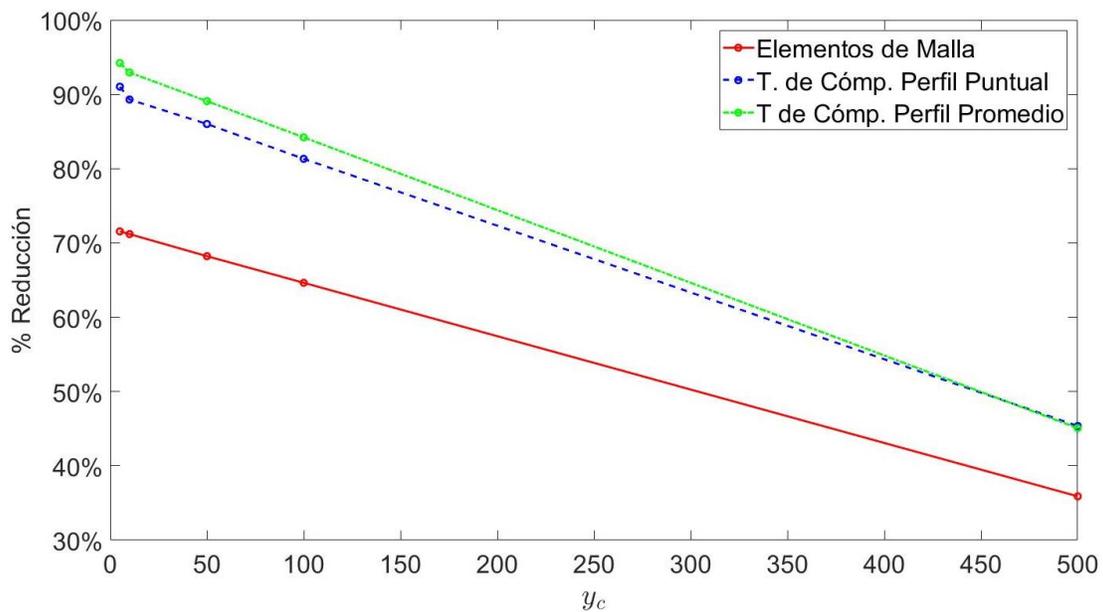


Fig. 4.17 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintas posiciones de la frontera de solución

En conclusión, anteriormente se mostró que la colocación de la frontera entre las regiones de solución analítica no tiene un impacto significativo en la exactitud de los valores reproducidos por medio de la DNS Acoplada. Además, cuanto más alejada se encuentra dicha frontera de la región de medio poroso, es mayor la demanda de recursos computacionales. Por lo tanto, siempre se debe utilizar el valor más cercano a la región de medio poroso posible, respetando que se encuentre dentro de la zona donde el flujo ya haya pasado a ser unidireccional y unidimensional. Dicho de otra forma, se debe escoger un valor de y_c lo más cercano a d_η como sea posible.

4.4.3. Variación del tamaño de la región de fluido libre

En la Fig. 4.18 se muestran las reducciones de elementos de malla y tiempos de cómputo para cada geometría de celda unitaria de medio poroso a diferentes tamaños de la región de fluido libre.

La reducción de elementos es mayor a medida que el tamaño del sistema crece. Esto es lógico, debido a que el tamaño de la región de solución numérica de la DNS Acoplada no se ve impactado por el aumento en el tamaño de la región de fluido libre. Siempre y cuando el valor de y_c esté dentro de la región de flujo parabólico, se requiere de la misma cantidad de elementos de malla para la representación de cualquier tamaño de sistema.

En contraparte, un mayor tamaño de la región de fluido libre sí afecta a la geometría de la DNS Completa. Por lo tanto, con estos resultados puede intuirse en primera instancia que la DNS Acoplada es una mejor alternativa a medida que se requiere la representación de sistemas con disparidades de escala muy elevadas.

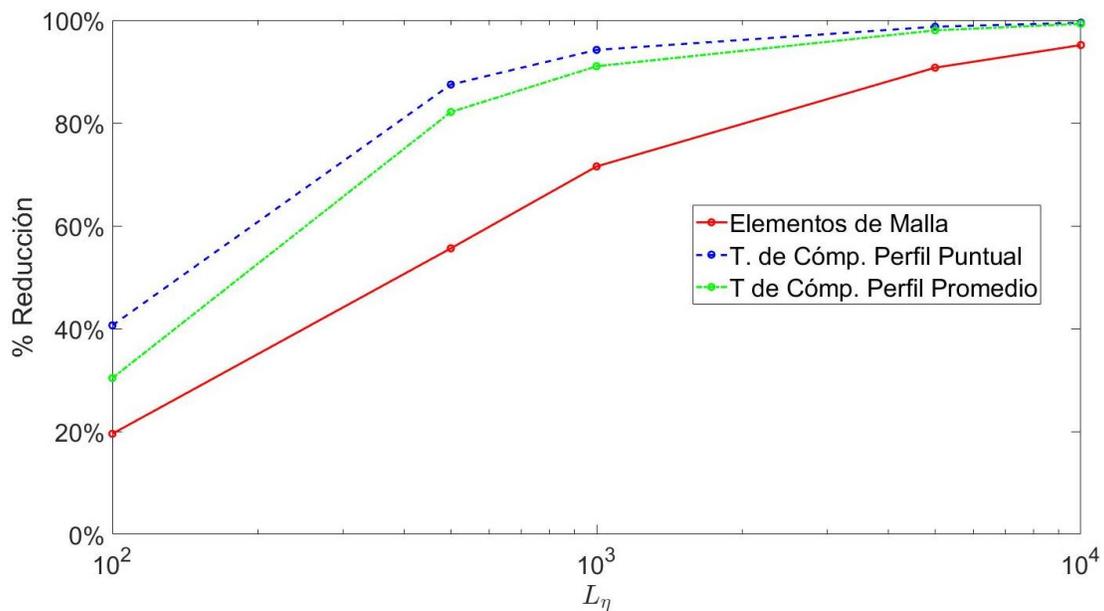


Fig. 4.18 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para distintos tamaños de la región de fluido libre

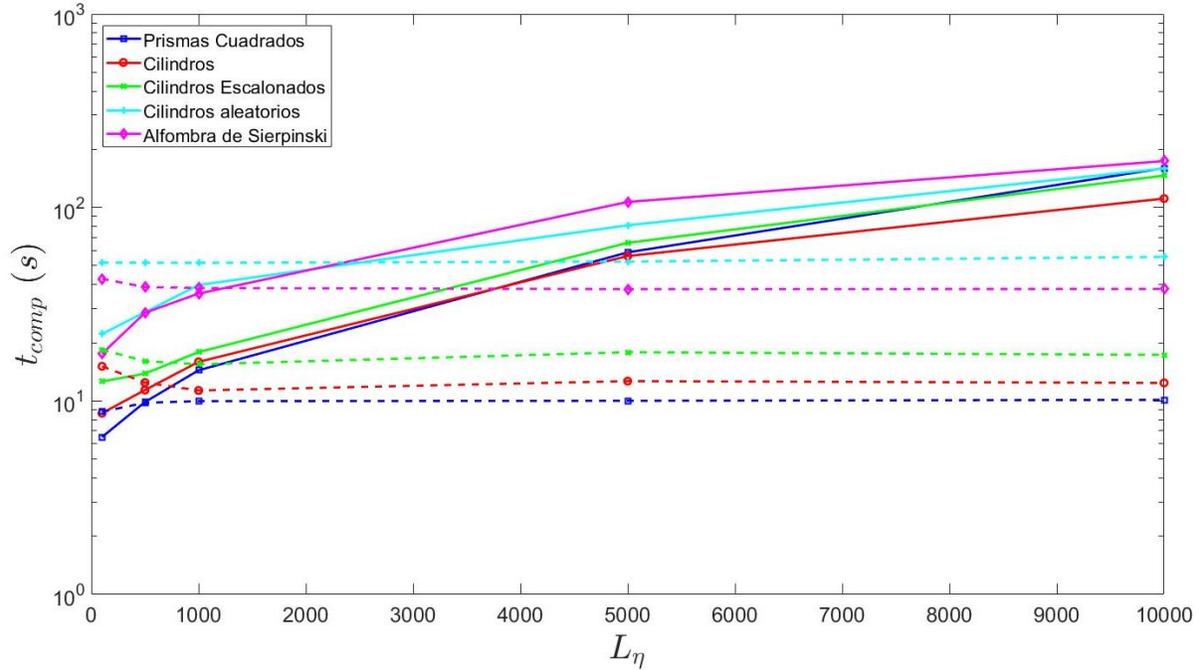


Fig. 4.19 Tiempos de cómputo para la obtención del campo de velocidad del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)

Siguiendo lo anteriormente dicho, se intuye que el aumento en el tiempo de cómputo de la DNS Acoplada debe ser prácticamente nulo para la obtención del campo de velocidad a medida que crece el tamaño de la región de fluido libre. En la Fig. 4.19 se muestran los tiempos de cómputo para diferentes tamaños de la región de fluido libre obtenidos mediante la DNS Completa y la DNS Acoplada para las distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso que presentan flujo bidimensional.

Observando la figura se comprueba lo planteado anteriormente, viendo que los valores de tiempo de cómputo de la DNS Acoplada no se ven afectados por el aumento en el tamaño de la región de fluido libre, mientras que los tiempos de cómputo de la DNS Completa tienen un aumento drástico.

Para cada configuración de medio poroso, hay un tamaño de sistema en el cual se vuelve más económico el uso de la DNS Completa en términos del campo de velocidad. Para el caso de las geometrías más sencillas (Prismas Cuadrados, Cilindros y Cilindros Escalonados) esto se cumple en valores alrededor de $L_\eta = 500$, mientras que en geometrías más complicadas esto se cumple hasta valores alrededor de $L_\eta = 2500$.

En lo que concierne al ahorro en tiempo de cómputo para el cálculo del campo de velocidad dado por la DNS Acoplada, a medida que se utilicen geometrías más complejas para la representación

de la región del medio poroso, se requiere un mayor tamaño de los sistemas a representar para que se justifique su uso.

Este no es el caso para la obtención de los perfiles de velocidad puntual y promedio. Esto ya que, como se mencionó anteriormente, los valores de tiempo de cómputo de los perfiles mencionados son de al menos un orden de magnitud mayor que para la obtención del campo de velocidad.

Aunado a lo anterior, el incremento en el tamaño del sistema es mucho más notorio en este caso, ya que el cálculo de los perfiles de velocidad puntual y promedio en la DNS Completa requiere de interpolaciones e integrales numéricas que consumen gran cantidad de recursos computacionales. Por otro lado, la DNS Acoplada solo requiere del uso de ecuaciones analíticas. Por ello, el impacto del aumento del tamaño de la región de fluido libre en el tiempo de cómputo de los perfiles de velocidad puntual y promedio será mucho más notorio en la DNS Completa.

Como se puede apreciar en la Fig. 4.20, hay un incremento muy notable en el tiempo de cómputo de la DNS Completa con el tamaño de sistema. Como se dijo antes, esto se puede explicar, en parte, debido al incremento que se mostró antes en el tiempo de cómputo necesario para la obtención del campo de velocidad. Además, el número de interpolaciones necesarias para el cálculo del perfil de velocidad puntual aumenta con el tamaño de la región de fluido libre, llegando a aumentar hasta en dos órdenes de magnitud desde el menor tamaño utilizado ($L_\eta = 100$) hasta el mayor tamaño utilizado ($L_\eta = 10000$).

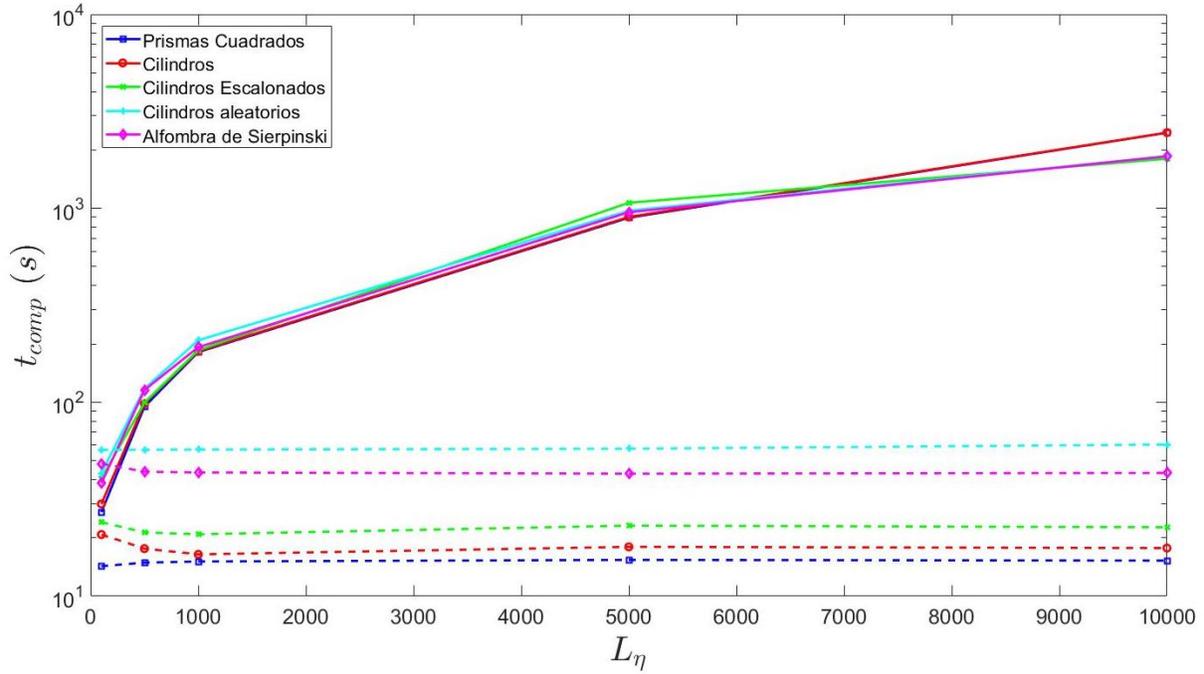


Fig. 4.20 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)

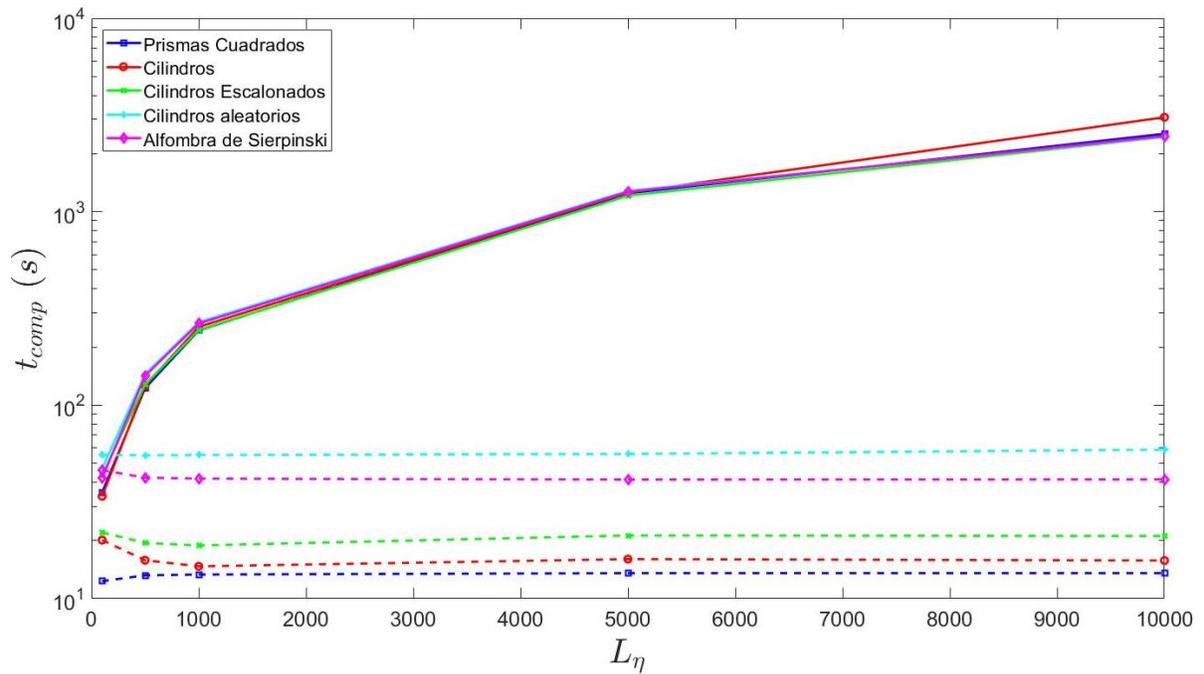


Fig. 4.21 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo bidimensional)

Este no es el caso para la DNS Acoplada, donde el tiempo de cómputo se mantiene prácticamente igual que en el caso del cálculo del campo de velocidad. Al calcularse los valores de velocidad en la región de fluido libre por medio de la ecuación analítica, se reduce considerablemente el tiempo de cómputo, manteniéndose dentro del mismo orden que para el cálculo del campo de velocidad.

Con estos resultados, se puede concluir que, a medida que se requiera la obtención del perfil de velocidad puntual en sistemas de tamaño más elevado, la DNS Acoplada representa una mejor alternativa a la DNS Completa, pudiendo reproducir los valores de la DNS Completa con una mejor eficiencia de uso de recursos de cómputo.

Para el caso del tiempo de cómputo en el perfil de velocidad promedio, se observa la misma tendencia que para el perfil de velocidad puntual. Sin embargo, los valores de tiempo de cómputo tienden a ser más elevados, por lo cual hay una mayor reducción en el tiempo de cómputo.

En este caso, el incremento en el tamaño de la DNS Completa se da debido a la mayor cantidad de integrales numéricas que el sistema debe solucionar dentro de la región de fluido libre a medida que se incrementa su tamaño. De esta manera, al usarse la Ec. (2.61) en lugar de dichas integrales para el cálculo de la velocidad, se aligera enormemente la carga computacional y se logra llegar al resultado en un espacio de tiempo mucho menor.

Si bien a simple vista puede parecer raro que los tiempos de cómputo para los perfiles de velocidad puntual y promedio tengan valores cercanos, hay que recordar que la densidad de elementos de malla dentro de la región de fluido libre es muy baja, por lo cual las integrales numéricas no presentan una carga tan elevada y es comparable a la de las interpolaciones necesarias para la obtención del perfil de velocidad puntual.

Por otro, en el caso de velocidad puntual no hay una diferencia muy grande de tiempo de cálculo entre las distintas geometrías de celda unitaria. Las pequeñas diferencias pueden ser explicadas en parte por el incremento en el tiempo de cómputo en el cálculo del campo de velocidad para las geometrías más complicadas y las interpolaciones que se dan en la región de medio poroso, debido a la alta densidad de elementos de malla en esos casos.

Sin embargo, en términos del sistema completo, estas no tienen un efecto tan notorio. En el caso del cálculo de la velocidad promedio sí existe un mayor incremento a medida que se complican las geometrías de celda unitaria de medio poroso, lo cual puede deberse a la complejidad de las integrales numéricas necesarias para el cálculo de la velocidad promedio dentro de la región de medio poroso, sumado al tiempo de cómputo requerido para la obtención del campo de velocidad.

En resumen, para el cálculo de perfiles de velocidad promedio, a medida que se incrementa el tamaño de la región de fluido libre para el sistema que se desea representar, la DNS Acoplada se

vuelve una mejor alternativa a la DNS Completa, dando resultados con buena exactitud y con un ahorro enorme de tiempo de cómputo.

Según los datos mostrados en la (ver Apéndice F), la DNS Acoplada no presenta problemas en la reproducción del perfil de velocidad en sistemas de tamaños elevados, teniendo un error relativo promedio en todo el sistema de orden de 10^{-4} en la mayoría de los casos, incluso cuando se presenta flujo tridimensional. Dado lo ya estudiado en secciones anteriores, nos da a entender que no hay limitaciones para el tipo de sistema que la DNS Acoplada es capaz de reproducir.

Por otro lado, la variación del tamaño de la región de fluido libre también proporciona información de interés acerca de la reducción de tiempo de cómputo y de elementos de malla, como se muestra dentro de la (ver Apéndice F). Como es de esperarse, a medida que se incrementa el tamaño del sistema, la reducción de elementos de malla es mucho mayor, siendo incluso más notorio el comportamiento que en el caso de flujo tridimensional, esto debido a que la densidad de elementos de malla en la región de fluido libre es mayor en este caso.

También, se observa la misma tendencia en cuanto al tiempo de cómputo requerido para los distintos resultados que para el caso bidimensional. En tamaños de región de fluido libre bajos, se tiene un aumento en el tiempo de cómputo por parte de la DNS Acoplada. Justo como en el caso de las geometrías más complicadas que presentan flujo bidimensional, la elevada densidad de elementos de malla dentro de la región de medio poroso con respecto a la de fluido libre, ocasiona que para tamaños bajos de sistema, la reducción de elementos de malla sea muy pobre, de manera que es mucho más costoso resolver el modelo de solución numérica de la DNS Acoplada tres veces con respecto al de la DNS Completa, que solo debe resolverse una vez.

Que exista una reducción de tiempo de cómputo, incluso dada la cantidad elevada de elementos de malla necesarios para el uso de geometrías donde se presenta flujo tridimensional, apunta a que este planteamiento puede ayudar a aliviar la carga computacional en la representación de sistemas con geometrías más complicadas.

Para geometrías con flujo tridimensional, se necesita una cantidad más elevada de elementos de malla en su representación. Por ello, esto da como resultado una cantidad de tiempo más elevada para la obtención del campo de velocidad del sistema que para el cálculo de los perfiles de velocidad puntual y promedio. Por ello, como se puede apreciar en la Fig. 4.22, Fig. 4.23 y Fig. 4.24, se tiene un comportamiento similar entre los tiempos de cómputo para los distintos resultados.

La DNS Acoplada, justo como en el caso de flujo bidimensional, es de mayor utilidad a medida que aumenta el tamaño de la región de fluido libre. Para el caso de la geometría de celda unitaria representada por cubos, se necesita de tamaños no tan elevados para ocasionar una reducción en el

tiempo de cómputo para el cálculo del campo de velocidad ($L_\eta > 200$), mientras que en el caso de la geometría de esferas, este es más elevado ($L_\eta > 600$), como se observa en la Fig. 4.22.

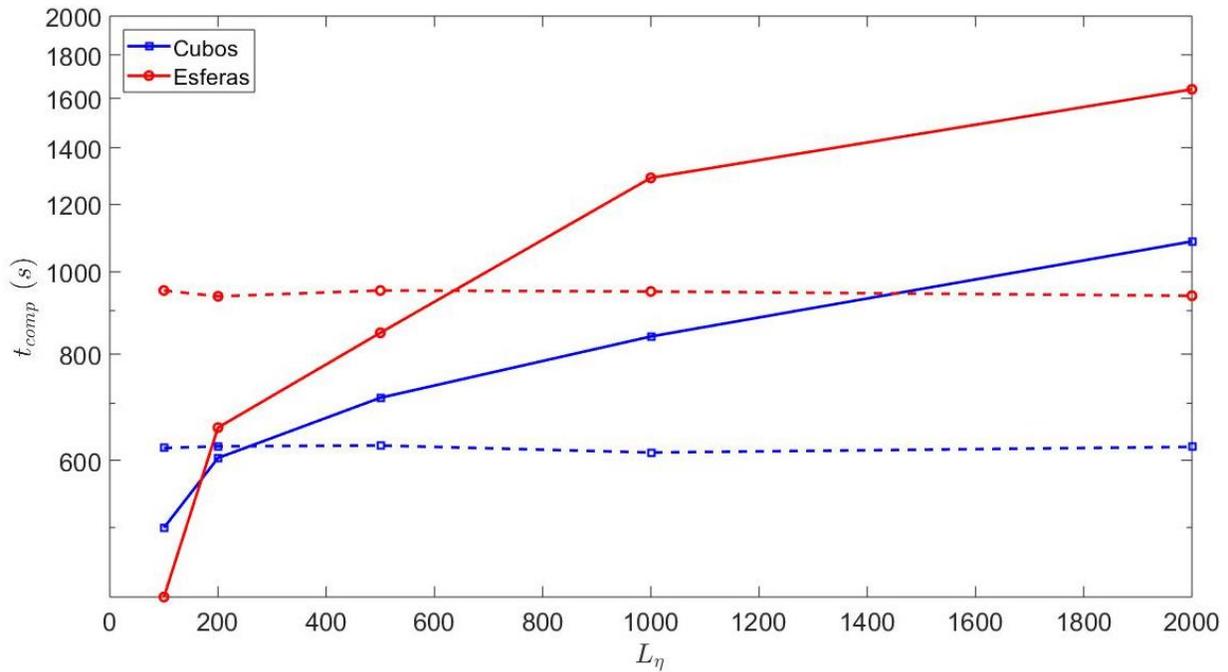


Fig. 4.22 Tiempos de cómputo para la obtención del campo de velocidad del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional)

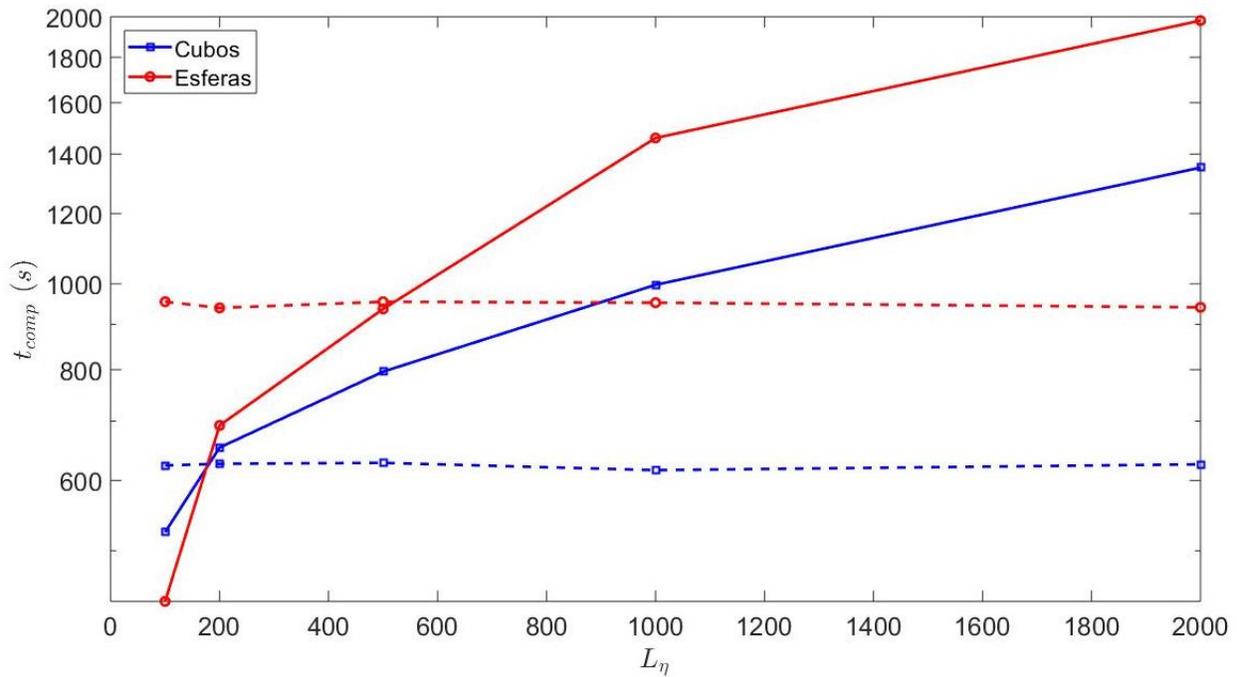


Fig. 4.23 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional)

Cabe destacar que, aun con el equipo de cómputo más potente utilizado para el caso del cálculo de los sistemas que presentan flujo bidimensional, la representación de geometrías de tamaños muy elevados ($L_\eta > 3000$), ocasiona problemas en el modelo, llegando en algunos casos a no converger en tiempos de cómputo de días. Sin embargo, la DNS Acoplada sigue manteniendo el mismo tiempo de cómputo incluso en sistemas de dicho tamaño. Así, para flujo tridimensional, se estima que se puede utilizar la DNS Acoplada para la obtención de la velocidad en sistemas cuyos tamaños sumamente elevados hacen no viable su solución mediante una DNS Completa.

Para el caso del cálculo del perfil de velocidad puntual, se puede ver en la Fig. 4.23 que el incremento de tiempo de cómputo en el cálculo del perfil de velocidad sigue una tendencia muy parecida al del caso del campo de velocidad. Sin embargo, con el incremento del tamaño del sistema, el valor del tiempo de cómputo tiene un mayor aumento con respecto al del campo de velocidad (recuérdese que el tiempo de cómputo del perfil de velocidad puntual y promedio incluye al de la obtención del campo de velocidad), esto es debido a que se necesita de cada vez más interpolaciones para la obtención de los valores de velocidad.

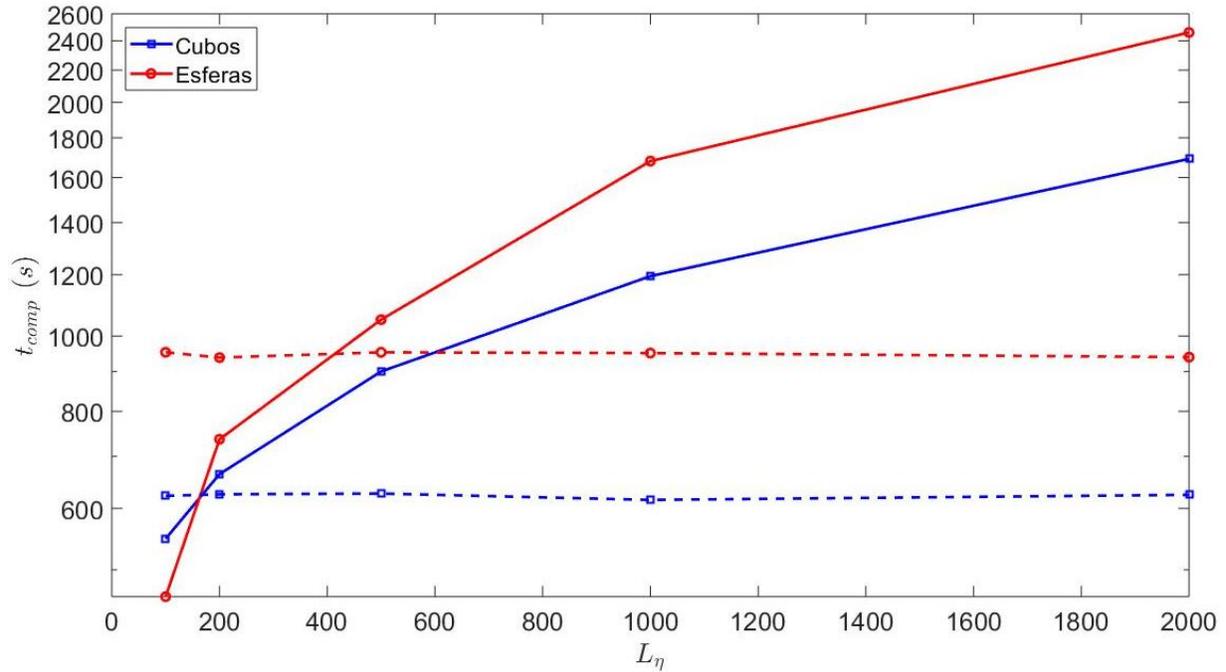


Fig. 4.24 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio del sistema de la DNS Completa y la DNS Acoplada a distintos tamaños de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (Flujo tridimensional)

Para ocasionar una reducción de tiempo de cómputo en este caso, se necesitan de tamaños de sistema similares al caso anterior, con lo cual se comprueba que la magnitud del tiempo de cómputo en el cálculo del perfil de velocidad puntual es mucho menor a la de la obtención del campo de velocidad para la DNS Completa. Si bien existe un incremento en el costo computacional de las interpolaciones necesarias para el cálculo de la velocidad en la región de fluido libre, ocasionada por la mayor densidad de elementos de malla en geometrías tridimensionales, este no es comparable a la solución del modelo que requiere una cantidad significativamente mayor de elementos de malla mayor al del caso de flujo bidimensional.

Por otro lado, la DNS Acoplada no presenta una variación significativa de cómputo para el cálculo del perfil de velocidad puntual con respecto del cálculo del campo de velocidad. El uso de una ecuación analítica para la obtención de la velocidad dentro de esta zona es incluso más conveniente para este caso, dado que las interpolaciones necesarias para su obtención de manera numérica son computacionalmente más costosas, debido a la densidad de elementos de malla mayor.

Por último, en la Fig. 4.24, podemos observar un comportamiento parecido a los dos casos anteriores. Sin embargo, el incremento en el tiempo de cómputo con respecto al caso donde solo se calcula el campo de velocidad, es significativamente mayor, en contraste al caso de velocidad puntual. Como se dijo antes, para la representación de geometrías con flujo tridimensional, la densidad de elementos de malla en la región de fluido libre es mayor, lo cual ocasiona que el cálculo

de las integrales numéricas requeridas para la obtención de los valores de velocidad promedio sean significativamente más costosas, de manera que hay un aumento notable en el tiempo de cómputo. Lo anterior no es el caso para la DNS Acoplada, que utiliza solo una ecuación analítica para el cálculo de la velocidad promedio, con lo que el ahorro de tiempo de cómputo es sumamente notorio, manteniéndose prácticamente igual al tiempo de cómputo requerido para la solución del modelo.

En resumen, en esta sección se encontraron dos resultados importantes. Por un lado, el incremento en el tamaño de la región de fluido libre no afecta de manera notable a la reproducción de los valores de velocidad de la DNS Completa. Además, dicho incremento ocasiona una reducción de tiempo de cómputo mayor. Por lo tanto, la DNS Acoplada tiene una mejor efectividad a medida que el tamaño de los sistemas a representar se vuelve mayor.

4.5. Análisis del uso de las ecuaciones analíticas en una DNS Completa

Siguiendo lo descrito dentro de la Sección 3.5, a continuación se analizarán distintos casos donde se compara el uso de la DNS Acoplada y la DNS Semiacoplada presentada con anterioridad, comparándolas en cuanto a la exactitud de la reproducción de los valores de velocidad de la DNS Completa y el tiempo de cómputo requerido para el cálculo del campo de velocidad y los perfiles de velocidad puntual y promedio.

Los resultados de esta sección corresponden a sistemas regidos por los siguientes parámetros:

$$L_{\eta} = 1000, L_{\omega} = 10, c = 10^{-5}, \varepsilon_{\beta} = 0.6.$$

Para evitar cargar demasiado este capítulo y, en cambio, centrarse en resultados más importantes, se omite las gráficas de perfil de velocidad correspondientes a otras geometrías de celda unitaria, mostrando únicamente para la geometría de cilindros.

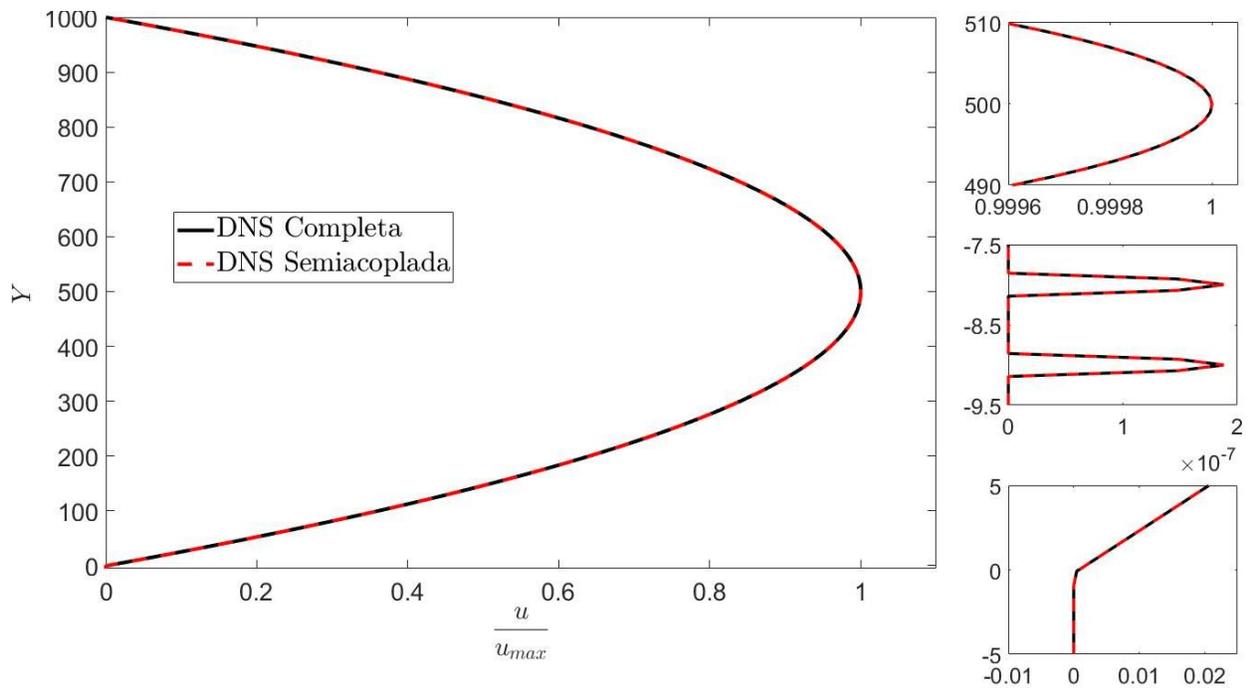


Fig. 4.25 Perfil de velocidad puntual en distintas regiones del sistema

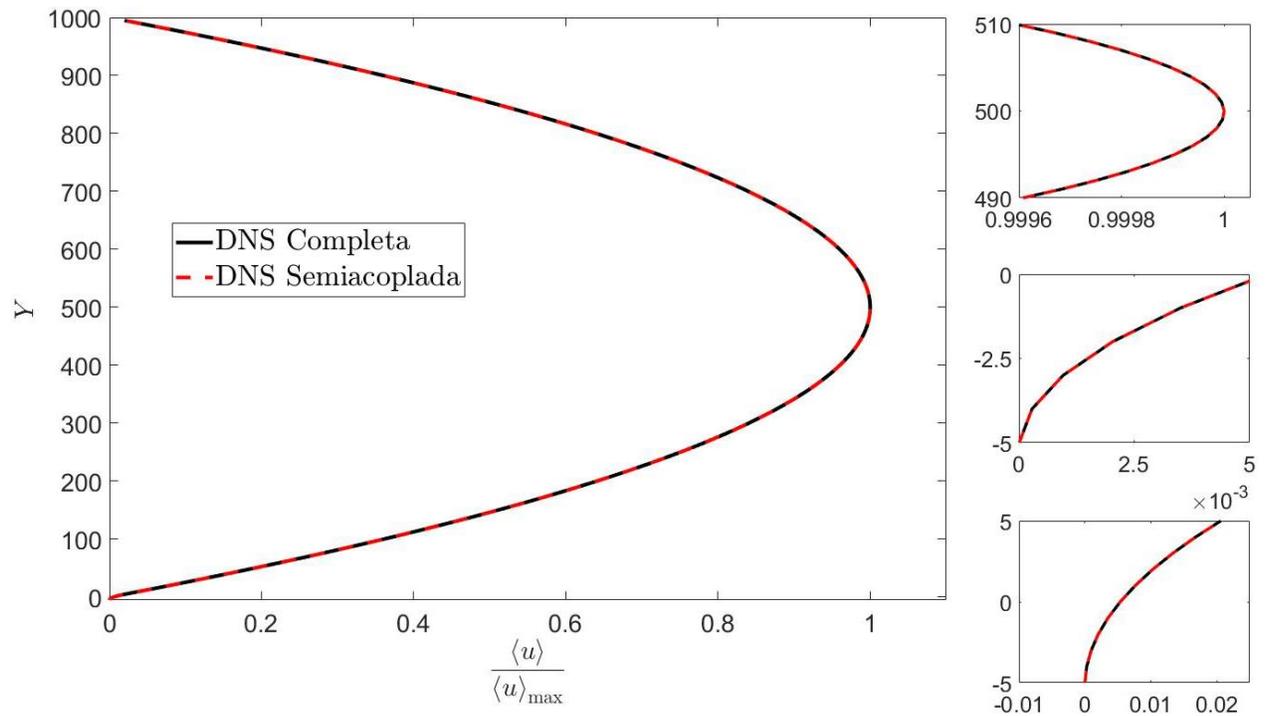


Fig. 4.26 Perfil de velocidad promedio en distintas regiones del sistema

Justo como en el caso de la DNS Acoplada, se puede ver que el perfil de velocidad obtenido con la DNS Semiacoplada tiene una concordancia perfecta con los valores de velocidad puntual de la

DNS Completa, llegando a reproducir exactamente el perfil de velocidad incluso en la región de máxima velocidad y la zona de transición.

4.5.1. Geometrías que presentan flujo bidimensional

El uso de la DNS Semiacoplada trae consigo la ventaja de tomar los valores de velocidad puntual y promedio dentro de toda la región de solución numérica directamente del campo de velocidad la DNS Completa. Además, como se dijo anteriormente, de esta manera se tiene total certeza del valor de u_c , de manera que los valores calculados dentro de la región de solución analítica tendrán errores relativos aún más bajos que en el caso de al DNS Acoplada. Todo esto puede verse con mayor claridad en la Fig. 4.27.

Puede apreciarse que para las distintas geometrías que presentan flujo bidimensional y en todos los valores de fracción vacía reportados, los errores relativos en el perfil de velocidad entre la DNS Completa y la DNS Semiacoplada son nulos para la región de solución analítica (que incluye a la zona de transición). Como se dijo antes, debido a que los valores de velocidad se toman desde el modelo calculado por la DNS Completa, este resultado es bastante obvio.

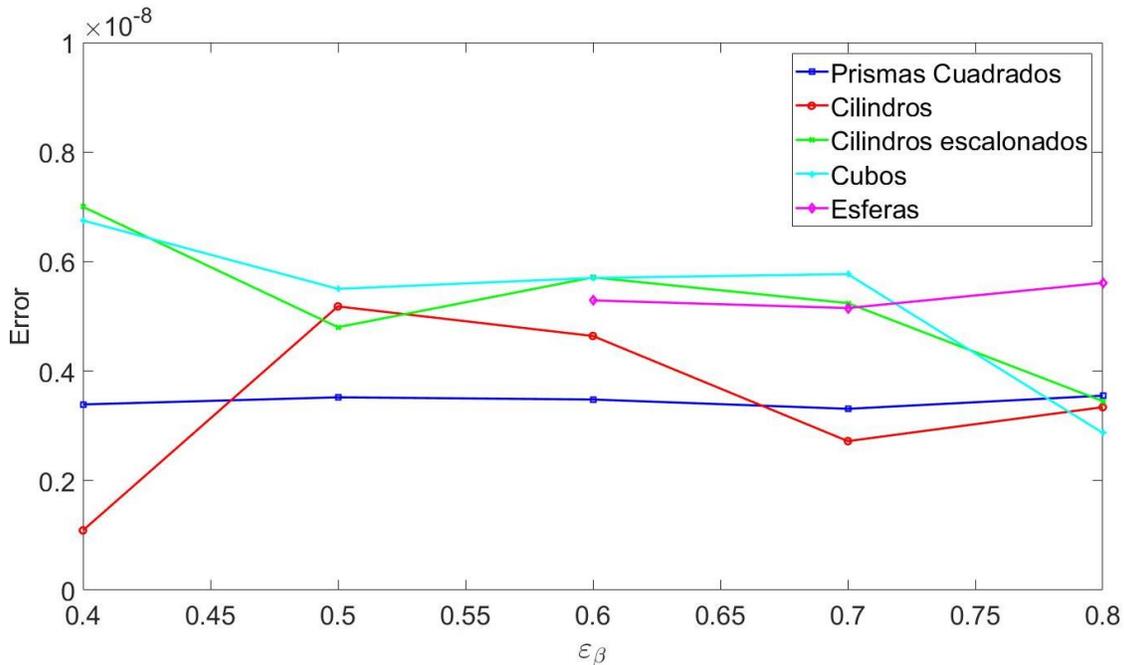


Fig. 4.27 Error relativo promedio del sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad puntual

Mirando los resultados en la región de solución analítica, se observan errores relativos de orden de 10^{-9} , es decir, prácticamente una reproducción idéntica de los valores.

En comparación a la DNS Acoplada, este método puede verse como una mejor alternativa si solo se miran estos datos. Sin embargo, si bien el error relativo en la DNS Acoplada es mayor, no es tan

significativo como para descartar su efectividad. Sin embargo, este descenso se le puede atribuir a que el valor de u_c no se ve afectado por errores de truncamiento, ya que se extrae directamente del campo de velocidad calculada por la DNS Completa.

La reproducción prácticamente idéntica del perfil de velocidad dentro de la región de fluido libre da a entender que la suposición de que el comportamiento suficientemente lejos de la zona de transición puede ser descrito con ecuaciones analíticas, es válida.

Por otro lado, el error relativo en la reproducción de los valores de velocidad promedio se puede ver en la Fig. 4.28. De nuevo, la reproducción de los valores se da con error relativo sumamente bajo, menor al 10^{-9} en todos los casos de geometrías de flujo bidimensional. Con el uso de las ecuaciones analíticas para resolver las integrales del operador de promediado dentro de la región de solución analítica, se puede reproducir de forma idéntica el perfil de velocidad promedio.

Dentro de la región de solución numérica, igualmente se puede apreciar que el error relativo es nulo, esto debido a que en esta región el cálculo de la velocidad promedio, como se vio anteriormente en la Sección 2.8, se da con las mismas integrales numéricas que se utilizan para la solución del modelo completo. La zona de transición, al incluir parte de la región donde se utilizan las ecuaciones analíticas para el cálculo de velocidad, no tiene un error negativo nulo. Sin embargo, este puede considerarse como despreciable.

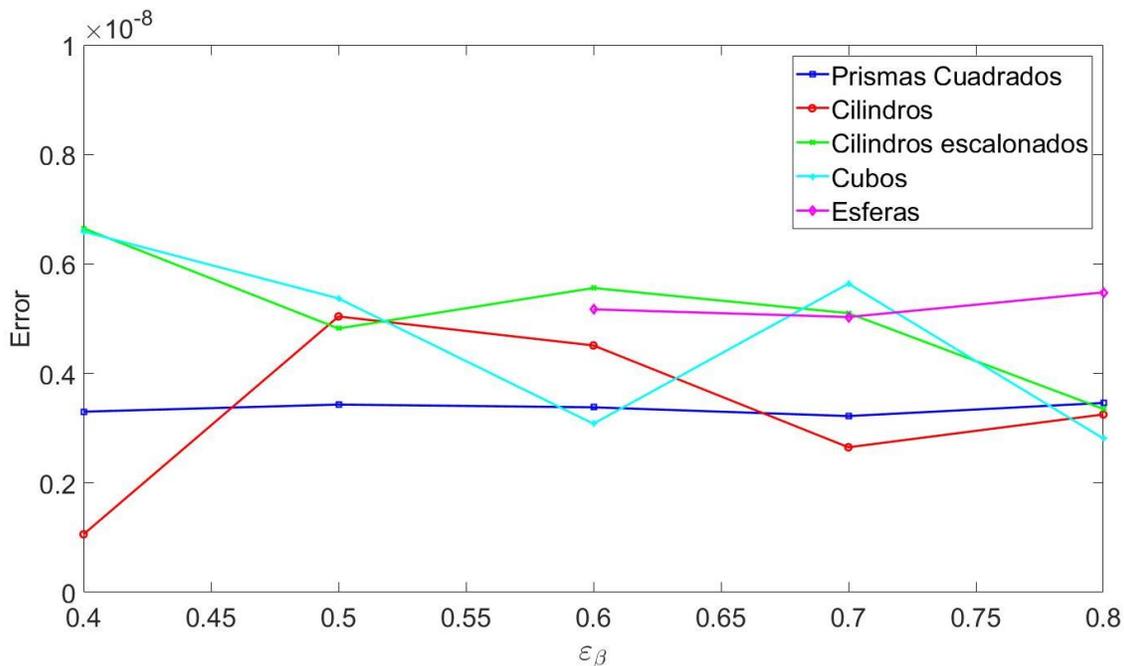


Fig. 4.28 Error relativo promedio del sistema a distintos valores de fracción vacía en términos de velocidad promedio

Además de la facilidad que proporciona el uso de una ecuación analítica en comparación al uso de interpolaciones o integrales numéricas, esto conlleva una reducción en el tiempo de cómputo. Este modelo tiene como desventaja no presentar reducción de tiempo de cómputo en la solución del modelo para el cálculo del campo de velocidad.

Sin embargo, sí presenta reducción de tiempo de cómputo para el caso del perfil de velocidad puntual y promedio. Como fue explicado en la Sección 4.7, el orden de magnitud de tiempo de cómputo requerido por la DNS Acoplada en el cálculo de los perfiles de velocidad es significativamente menor que para el caso de la DNS Completa. Por lo tanto, se comparará directamente el tiempo de cómputo que requiere la DNS Semiacoplada con respecto a la DNS Acoplada para diferentes tamaños del sistema. Se omite la presentación de los valores de tiempos de cómputo para el cálculo de velocidad, puesto que estos son idénticos a los presentados anteriormente en la Fig. 4.19.

Como puede verse en la Fig. 4.29, a medida que se incrementa el tamaño del sistema, la DNS Semiacoplada tiene un aumento en el tiempo de cómputo en el cálculo del perfil de velocidad. Sin embargo, comparando con la Fig. 4.20, se puede observar que este incremento es mucho menos drástico que en el caso de la DNS Completa. Esto es debido a que la utilización de las ecuaciones analíticas reduce considerablemente el tiempo de cómputo. De esta manera, el aumento de tiempo de cómputo se mantiene igual para el cálculo del campo de velocidad y los perfiles de velocidad puntual y promedio.

La DNS Semiacoplada representa una mejor alternativa cuando los tamaños de sistema son pequeños ($L_\eta < 1000$ en el caso de las geometrías de celda unitaria más sencillas, llegando a $L_\eta < 4000$ en el caso de geometrías más complicadas) debido a que el tiempo de cómputo requerido es menor para la obtención de los perfiles de velocidad. Esto, sumado al menor error relativo sumamente bajo, lleva a considerarla una mejor alternativa con respecto a la DNS Acoplada.

Sin embargo, la DNS Acoplada sigue teniendo la ventaja de tener una construcción geométrica de menor tamaño y de necesitar menor cantidad de elementos de malla. Esto hace que, para equipos de cómputo muy limitados en cuanto a memoria y procesador, la DNS Acoplada se posicione como una mejor alternativa.

Además, en la Fig. 4.30 se puede apreciar la misma tendencia en el cálculo de los perfiles de velocidad promedio en cuanto al tiempo de cómputo que en el caso del perfil de velocidad puntual. Por lo tanto, para ambos casos, la DNS Semiacoplada se posiciona como una alternativa superior al de la DNS Acoplada para sistemas de tamaños de región de fluido libre no muy elevados.

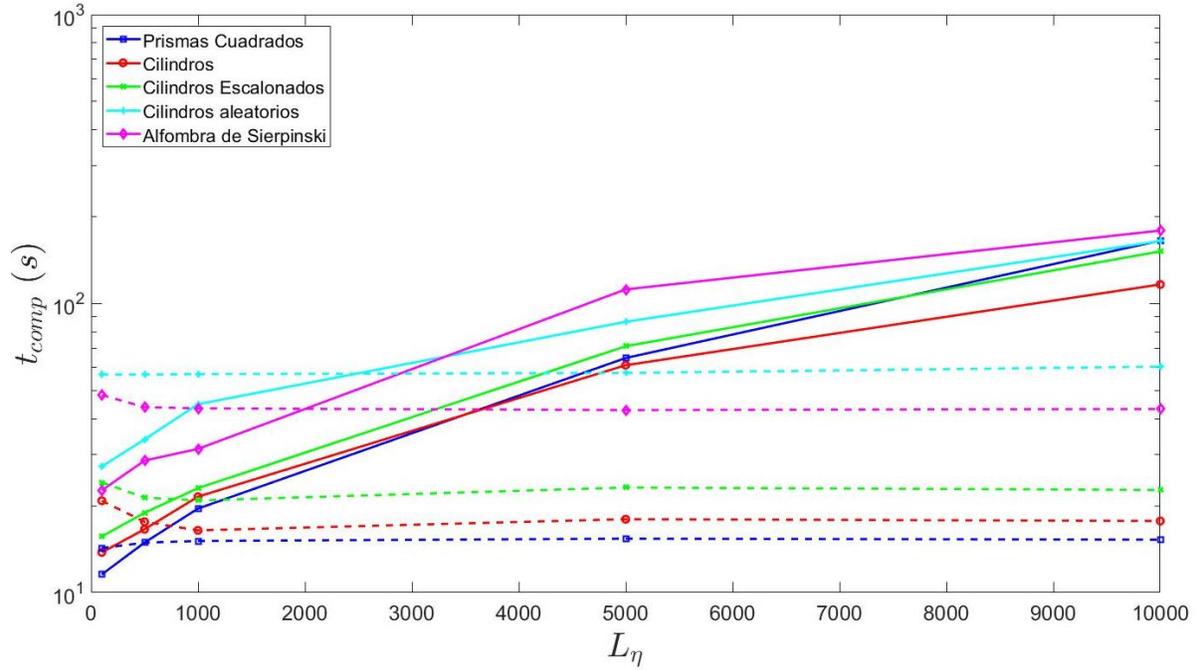


Fig. 4.29 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo bidimensional)

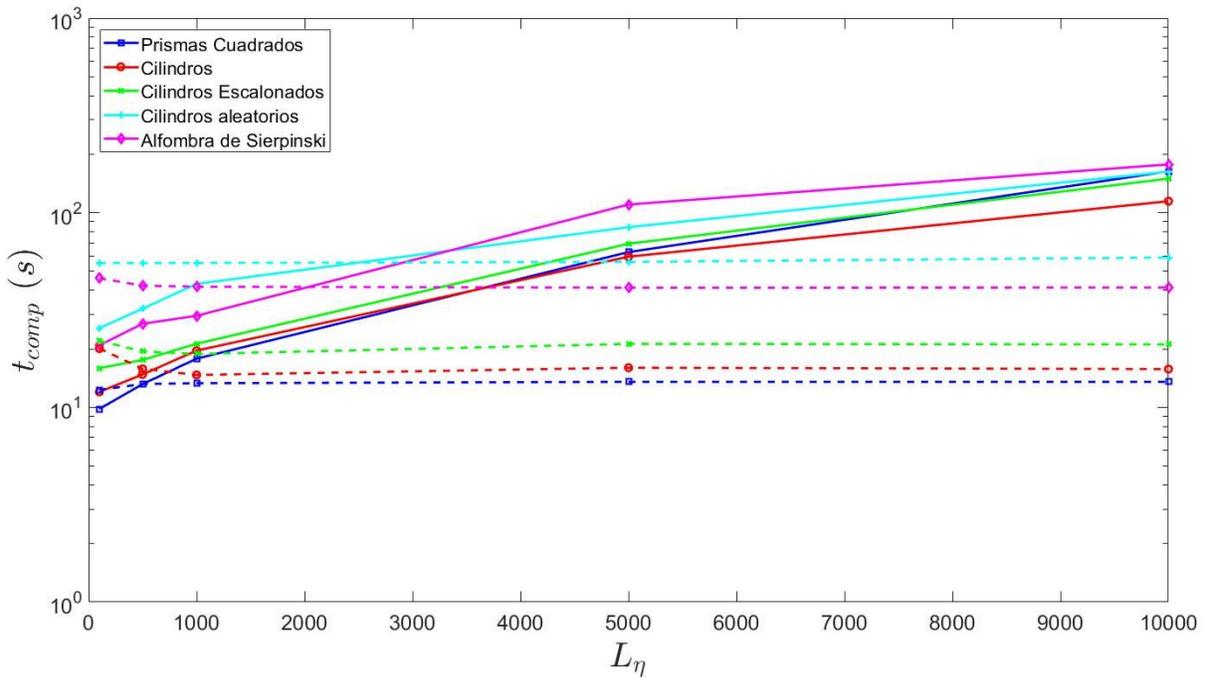


Fig. 4.30 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo bidimensional)

4.5.2. Geometrías que presentan flujo tridimensional

Justo como en el caso anterior, se puede apreciar que la reproducción de los valores puntuales para distintos valores de tamaño de la región de fluido libre por parte de la DNS Semiacoplada tienen un error relativo nulo dentro de la región de solución numérica (ver Apéndice F), además, los errores dentro de la región de solución analítica son sumamente bajos (del orden de 10^{-9}).

Tanto para flujo bidimensional como para tridimensional, se tiene una reproducción exacta de los valores de velocidad dentro de la región de fluido libre utilizando la Ec. (2.33), con lo cual se comprueba que el comportamiento del campo de velocidad en esta región sigue la ecuación de Stokes.

Además, en términos de velocidades promedio, el método tiene un error relativo aún menor, teniendo así una reproducción exacta del perfil de velocidad en todas las zonas del sistema.

Como se dijo antes, la desventaja que presenta el uso de la DNS Semiacoplada con respecto de la DNS Acoplada, es que se debe solucionar el modelo de la DNS Completa para el posterior uso de las ecuaciones analíticas para el cálculo de velocidad. En este caso esto es aún más importante, debido a que, como se explicó en la Sección 4.6, la magnitud del tiempo de cómputo para el cálculo del campo de velocidad en el caso de flujo tridimensional es mayor a la que requieren tanto el cálculo de velocidad puntual como el promedio.

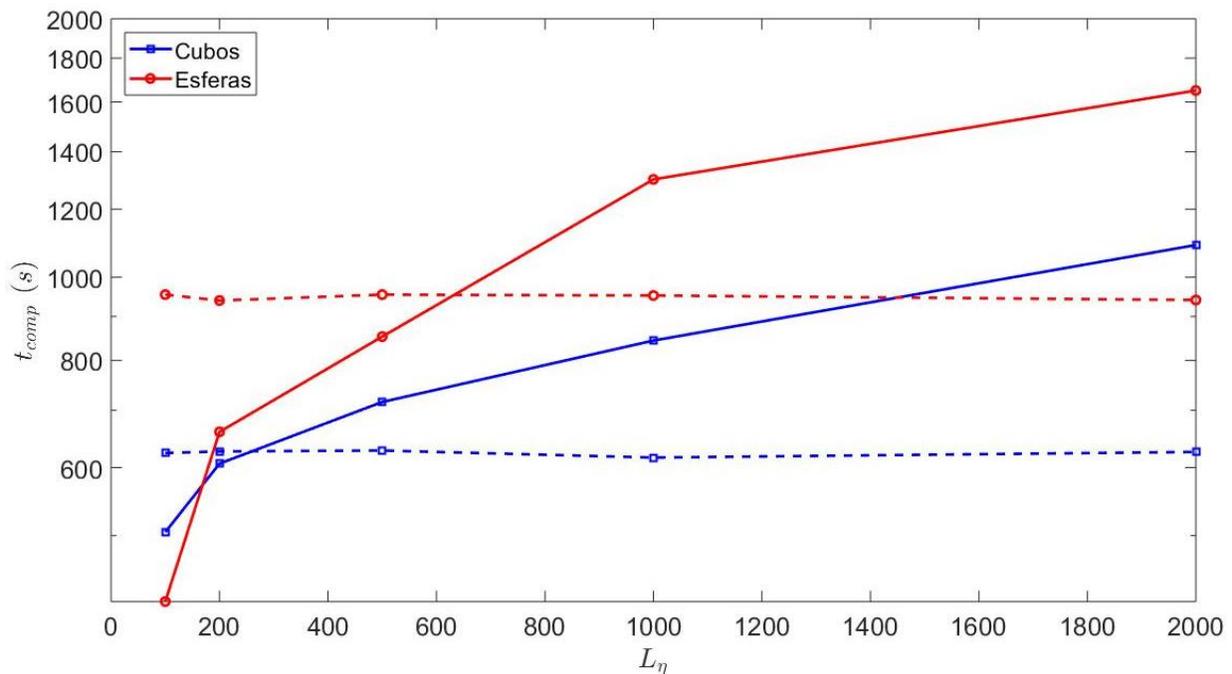


Fig. 4.31 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad puntual de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo tridimensional)

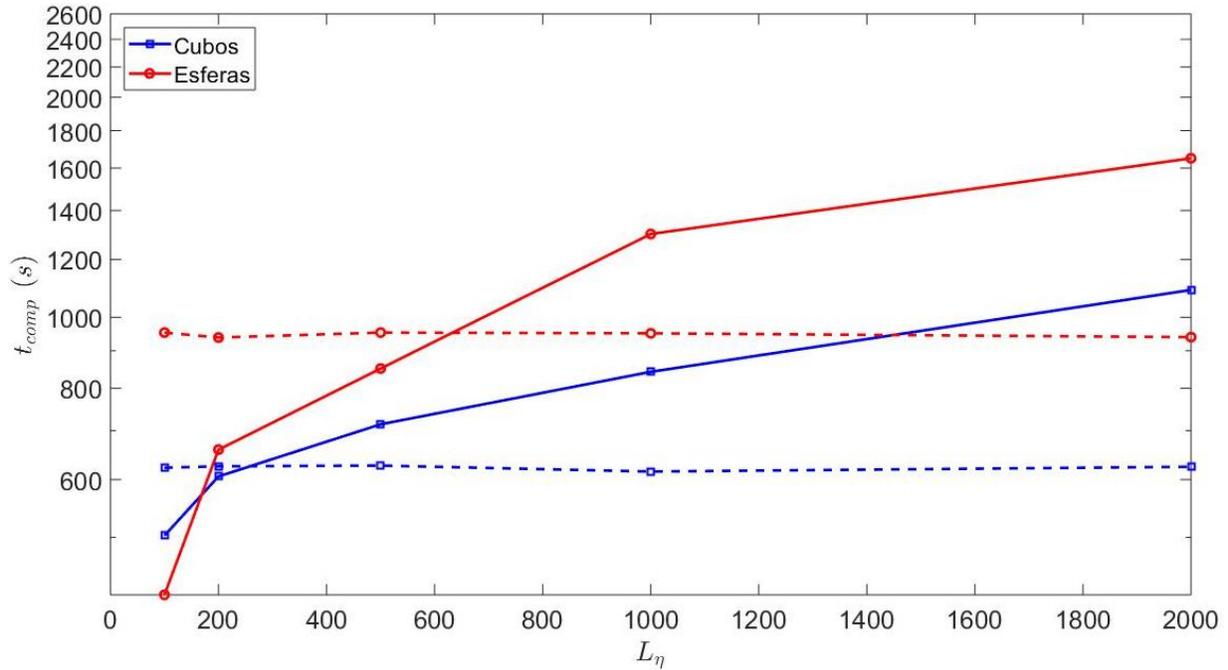


Fig. 4.32 Tiempos de cómputo para la obtención del perfil de velocidad promedio de la DNS Semiacoplada y la DNS Acoplada contra tamaño de la región de fluido libre para diferentes geometrías de medio poroso (flujo tridimensional)

Tanto en la Fig. 4.31 como en la Fig. 4.32 se puede observar un comportamiento prácticamente idéntico. Dado que la mayor parte del tiempo de cómputo en este caso se debe a la obtención del campo de velocidad y ambos métodos utilizan las mismas ecuaciones para el cálculo del perfil de velocidad tanto puntual como promedio en la región de fluido libre, se observa una tendencia como la de la Fig. 4.22.

Así, la DNS Acoplada funciona mejor cuando el tamaño del sistema es mayor para sistemas con flujo tridimensional ($L_\eta > 200$ para la geometría de cubos y $L_\eta > 600$ para la geometría de esferas).

En resumen, la DNS Semiacoplada presenta una reproducción perfecta de los valores de velocidad de la DNS Completa. Sin embargo, esto lleva consigo que, a medida que se necesite la reproducción de la región de medio poroso mediante geometrías más complicadas, sumado a tamaños elevados de la región de fluido libre, el incremento en el tiempo de cómputo haga que se prefiera el uso de la DNS Acoplada. Los dos tipos de uso de las ecuaciones analíticas son capaces de realizar una reproducción idéntica de los valores de velocidad dentro de la región de fluido libre, por lo cual hay suficiente evidencia para afirmar que la descripción del flujo en la región de fluido libre por medio de ecuaciones analíticas es válido.

5. Conclusiones

En este trabajo se plantearon dos métodos alternativos para el cálculo del perfil de velocidad en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso bajo el régimen de Stokes. Para ello, se planteó que, suficientemente lejos de la frontera divisoria entre las dos regiones homogéneas del sistema y dentro de la región de fluido libre, el campo de velocidad puede ser descrito mediante la ecuación de Stokes. El objetivo de lo anterior es reducir la cantidad de recursos computacionales requeridos en esta tarea que, a medida que se utilizan geometrías más complicadas en la representación de la región de medio poroso, es cada vez más elevada. Algunas conclusiones generales obtenidas en este trabajo son:

- Se determinó el alcance del flujo multidimensional que ocasiona la penetración de esfuerzos de cada región homogénea sobre la contraria. Para todos los casos estudiados, el efecto de flujo multidimensional en de la región de medio poroso tiene un alcance de $d_{\omega} \leq 5\ell$, mientras que tal alcance en la región de fluido libre es de $d_{\eta} < 2\ell$.
- Una vez determinado el alcance del efecto multidimensional, se planteó un método de solución que consta de dos modelos: uno numérico (correspondiente a la región de medio poroso y la región de penetración del flujo multidimensional de la región de fluido libre) y uno analítico (correspondiente a la región de fluido libre que presenta flujo unidireccional y unidimensional). Asimismo, se establecieron las condiciones para el acoplamiento de ambos modelos.
- Se evaluó la capacidad de la DNS Acoplada para reproducir perfiles de velocidad puntual y promedio de la DNS Completa para distintas microestructuras de celda unitaria de medio poroso. Se encontró muy alta concordancia entre los valores de velocidad puntual en todo el sistema (error relativo promedio del orden de 10^{-5} para flujo bidimensional y de 10^{-4} para flujo tridimensional), especialmente en la región de solución analítica (con error relativo promedio del orden de 10^{-8} para flujo bidimensional y de 10^{-6} para flujo tridimensional). De esta manera, se comprueba que se pueden utilizar ecuaciones analíticas para describir el flujo en la región de fluido libre satisfactoriamente.
- En la región de solución numérica y la zona de transición, el error relativo promedio tiende a ser relativamente mayor (del orden de 10^{-4}), llegando a tener errores máximos de orden de 10^{-3} cerca de la frontera divisoria. Sin embargo, debido a la magnitud tan baja de los valores de velocidad en dicha región (del orden de 10^{-7} o menor), puede atribuírsele a error numérico. Esto hace que el método de solución planteado sea una alternativa útil para la obtención de información en la zona de transición y la obtención de coeficientes de transporte.

- En geometrías de celda unitaria con flujo bidimensional, se tiene una reducción de elementos de malla mayor al 80 % en la configuración más sencilla, llegando a ser menor al 16 % para la más complicada estudiada. Además, se tienen reducciones de tiempo de cómputo para el cálculo del perfil de velocidad puntual y promedio mayores al 70 % en todos los casos, llegando a ser mayores del 90 % para las geometrías de celda unitaria más sencillas. Por otro lado, en geometrías con flujo tridimensional, se observa una reducción en el número de elementos de malla de aproximadamente 50 % en ambos casos presentados. Además, se observó una reducción de tiempo de cómputo mayor al 35 % y al 25% para el cálculo de la velocidad puntual y promedio, respectivamente.
- Se encontró que la colocación de la frontera entre las regiones de solución no tiene efecto significativo en la reproducción de los valores de la DNS Completa. Por lo tanto, es mejor mantener dicha frontera lo más cerca posible al valor de d_η , para generar la mayor reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo.
- Se compararon los resultados de la DNS Acoplada con la DNS Semiacoplada. Dado que este último toma los valores de velocidad directamente del modelo completo, presenta nulo error con respecto de la DNS Completa en la región de solución numérica. Además, presenta errores bajos (de orden de 10^{-7} o menor) para los valores de velocidad en la región de solución numérica.
- Se evaluó el tiempo de cómputo requerido para la obtención de los perfiles de velocidad puntual y promedio para cada método planteado en diferentes tamaños del sistema. Se encontró que la DNS Acoplada no presenta variación significativa del tiempo de cómputo con respecto al tamaño de sistema, mientras que tanto para la DNS Completa como para la DNS Semiacoplada el tiempo de cómputo aumenta a mayor tamaño del sistema. De esta manera, la metodología planteada en este trabajo es una mejor alternativa para el estudio de sistemas de gran tamaño.

Como nota final, debe mencionarse que la cantidad de configuraciones de celda unitaria utilizadas en este trabajo es limitada. Por lo tanto, como trabajo a futuro puede proponerse la utilización de mayor cantidad de configuraciones, aunque se espera que ambos métodos sigan reproduciendo los perfiles de velocidad sin problema alguno. Por otra parte, para geometrías de flujo tridimensional en sistemas con tamaños elevados, la DNS Completa presenta problemas de convergencia o tiende a tardar un tiempo excesivo (del orden de días), mientras que la DNS Acoplada no tiene problemas. En estudios posteriores podría realizarse un análisis de condicionamiento de las matrices de solución generadas a partir de la malla para la DNS Completa y la DNS Acoplada, para un mejor entendimiento de este fenómeno.

6. Bibliografía

- Beavers, G. S., & Joseph, D. D. (1967). Boundary conditions at a natural permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(1), 197–207.
- Breugem, W. P., & Boersma, B. J. (2005). Direct numerical simulations of turbulent flow over a permeable wall using a direct and a continuum approach. *Physics of Fluids*, 17(2), 1–15.
- Chen, H. C., Patel, V. C., & Ju, S. (1990). Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for three-dimensional incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 88(2), 305–336.
- Clough, R. W. . (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings of American Society of Civil Engineers*, (23), 345–378.
- Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of the Ornstein-Zernicke equation in inhomogeneous systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(1), 1–23.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1967). Oh the Partial Difference Equations in Mathematical Physics. *IBM Journal of Reasearch and Development*, 11(2), 215–234.
- Demirdžić, I., & Martinović, D. (1993). Finite volume method for thermo-elasto-plastic stress analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 109(3–4), 331–349.
- Duman, T., & Shavit, U. (2009). An apparent interface location as a tool to solve the porous interface flow problem. *Transport in Porous Media*, 78(3 SPEC. ISS.), 509–524.
- Frisch, U., Hasslacher, B., & Pomeau, Y. (1986). Good Practice Guidance for the Treatment of Noise during the Planning of National Road Schemes. *Physical Review Letters*, 56(14), 1505–1508.
- Gingold, R. A. ., & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(1), 375–389.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D., & Velarde, M. G. (2003). Momentum transport at a fluid-porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(21), 4071–4081.
- Hamielec, A. ., Johnson, A. I., & Houghton, W. T. (1967). Numerical solution of the Navier-Stokes equation for flow past spheres: Part II. Viscous flow around circulating spheres of low viscosity. *AICHE Journal*, 13(2), 220–224.
- Hamielec, A. E., Hoffman, T. W., & Ross, L. L. (1967). Numerical solution of the Navier-Stokes equation for flow past spheres: Part I. Viscous Flow Around Spheres and Without Radial Mass Efflux. *AICHE Journal*, 13(2), 212–219.
- Hardy, J., De Pazzis, O., & Pomeau, Y. (1976). Molecular dynamics of a classical lattice gas:

- Transport properties and time correlation functions. *Physical Review A*, 13(5), 1949–1961.
- Hardy, J., Pomeau, Y., & De Pazzis, O. (1973). Time evolution of a two-dimensional classical lattice system. *Physical Review Letters*, 31(5), 276–279.
- Hernández-Rodríguez, R. (2017). Modelos de uno y dos dominios para el transporte de cantidad de movimiento entre un fluido homogéneo y un medio poroso. Maestría en Ciencias (Ingeniería Química), Universidad Autónoma Metropolitana.
- Imke, U. (2004). Porous media simplified simulation of single- and two-phase flow heat transfer in micro-channel heat exchangers. *Chemical Engineering Journal*, 101(1–3), 295–302.
- Kuwahara, F., Yamane, T., & Nakayama, A. (2006). Large eddy simulation of turbulent flow in porous media. *International Communications in Heat and Mass Transfer*.
- Larson, R. E., & Higdon, J. J. L. (1986). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part 1. Axial flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 166, 449–472.
- Larson, R. E., & Higdon, J. J. L. (1987). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part 2. Transverse flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 178, 119–136.
- Lauder, B. E. ., & Massey, T. H. (1979). The Numerical Prediction of Viscous Flow and Heat Transfer in Tube Banks. *Journal of Heat Transfer*, 100(November 1978), 565–571.
- McNamara, G. R., & Zanetti, G. (1988). Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical Review Letters*, 61(20), 2332–2335.
- Neale, G., & Nader, W. (1974). Practical significance of brinkman’s extension of darcy’s law: Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52(4), 475–478.
- Nield, D. A. ., & Bejan, A. (1992). *Convection in Porous Media* (1st ed.). New York: Springer.
- Ochoa-Tapia, J. A. ., Valdés-Parada, F. J. ., Goyeau, B. ., & Lasseux, D. (2017). Movimiento de Fluido en la Inter-Región Fluido/Medio Poroso. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 16(3), 923–938.
- Ochoa-Tapia, J. A., & Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14), 2635–2646.
- Ochoa-Tapia, J. A., & Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14), 2647–2655.
- Ochoa-Tapia, J. A., & Whitaker, S. (1998). Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: inertial effects. *Journal of Porous Media*, 1(3),

201–217.

- Pruppacher, H. R., Le Clair, B. P., & Hamielec, A. E. (1970). Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(4), 781–790.
- Quintard, M., & Whitaker, S. (1993). Transport in Ordered and Disordered Porous Media: Volume-Averaged Equations, Closure Problems, and Comparison with Experiment. *Chemical Engineering Science*, 48(14), 2537–2564.
- Rosenzweig, R., & Shavit, U. (2007). The laminar flow field at the interface of a Sierpinski carpet configuration. *Water Resources Research*, 43(10), 1–17.
- Sahraoui, M., & Kaviany, M. (1992). Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(4), 927–943.
- Valdés-Parada, F.J., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B., & Ochoa-Tapia, J. A. (2009). Computation of jump coefficients for momentum transfer between a porous medium and a fluid using a closed generalized transfer equation. *Transport in Porous Media*, 78(3 SPEC. ISS.), 439–457.
- Valdés-Parada, Francisco J., Aguilar-Madera, C. G., Ochoa-Tapia, J. A., & Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in Water Resources*, 62, 327–339.
- Valdés-Parada, Francisco J., Goyeau, B., & Ochoa-Tapia, J. A. (2007). Jump momentum boundary condition at a fluid-porous dividing surface: Derivation of the closure problem. *Chemical Engineering Science*, 62(15), 4025–4039.
- Wang, Y., Brannock, M., Cox, S., & Leslie, G. (2010). CFD simulations of membrane filtration zone in a submerged hollow fibre membrane bioreactor using a porous media approach. *Journal of Membrane Science*.
- Whitaker, S. (1969). Advances in theory of fluid motion in porous media. *Industrial and Engineering Chemistry*, 61(12), 14–28.
- Whitaker, S. (1996). The Forchheimer equation: A theoretical development. *Transport in Porous Media*, 25(1), 27–61.
- Wood, B. D., Apte, S. V., Liburdy, J. A., Ziazi, R. M., He, X., Finn, J. R., & Patil, V. A. (2015). A comparison of measured and modeled velocity fields for a laminar flow in a porous medium. *Advances in Water Resources*, 85, 45–63.
- Wood, B. D., Quintard, M., & Whitaker, S. (2000). Jump conditions at non-uniform boundaries: The catalytic surface. *Chemical Engineering Science*, 55(2000), 5231–5245.
- Yakovlev, I., & Zambalov, S. (2019). Three-dimensional pore-scale numerical simulation of

methane-air combustion in inert porous media under the conditions of upstream and downstream combustion wave propagation through the media. *Combustion and Flame*, 209(2019), 74–98.

7. Apéndices

A. Adimensionalización de la ecuación de Stokes

Partiendo del modelo dimensional mostrado en la Sección 2.2

Ecuación Gobernante

$$0 = -\nabla p + \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.1)$$

Condiciones de Frontera

$$y = L_\eta, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

$$y = -L_\omega, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (7.3)$$

$$A_{\beta\sigma}, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (7.4)$$

Definición de la presión corregida

$$-\nabla P^* = -\nabla p + \mathbf{g} \quad (7.5)$$

Para facilitar la manipulación de estas ecuaciones, se llevarán a su forma adimensional, utilizando las siguientes variables y parámetros adimensionales:

Velocidad de referencia

$$v^* = \frac{v}{\ell} \quad (7.6)$$

Esta velocidad de referencia se calcula mediante la viscosidad cinemática del fluido utilizado ν y la longitud de la celda unitaria de medio poroso ℓ .

Variables adimensionales

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v^*} = \frac{\mathbf{v}\ell}{v} \quad (7.7)$$

$$P = \frac{P^*}{\rho(v^*)^2} = \frac{p\ell^2}{\rho\nu^2} \quad (7.8)$$

$$Y = \frac{y}{\ell} \quad (7.9)$$

Parámetros adimensionales

$$\mathbf{i}c = -\nabla P \quad (7.10)$$

$$Y_\eta = \frac{L_\eta}{\ell} \quad (7.11)$$

$$Y_\omega = \frac{L_\omega}{\ell} \quad (7.12)$$

Así, la Ec. (7.1) puede expresarse como:

$$0 = -\left(\frac{\rho v^2}{\ell^3}\right) \nabla P + \left(\frac{\rho \nu \mu}{\rho \ell^3}\right) \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.13)$$

$$0 = -\left(\frac{\rho v^2}{\ell^3}\right) \frac{dP}{dX} + \left(\frac{\rho \nu^2}{\ell^3}\right) \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.14)$$

Lo cual nos lleva a la ecuación de Stokes en forma adimensional:

$$0 = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.15)$$

$$0 = \mathbf{c} \mathbf{i} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.16)$$

Por lo que el modelo adimensional quedará de la siguiente forma:

Ecuación Gobernante

$$0 = \mathbf{c} \mathbf{i} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.17)$$

Condiciones de Frontera

$$Y = Y_\eta, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (7.18)$$

$$Y = -Y_\omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (7.19)$$

$$A_{\beta\sigma}, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (7.20)$$

B. Selección de los valores para el intervalo de la velocidad

Para el procedimiento señalado en la Sección 2.6, se deben seleccionar los valores en los cuales evaluar la función objetivo, con el fin de encontrar su raíz. Dichos valores iniciales deben ser seleccionados dentro de un intervalo factible de búsqueda, de tal manera que se mantenga el comportamiento lineal de la función. Es preferible que dicho intervalo sea reducido en la medida de lo posible. Dicho esto, es conveniente analizar el perfil de velocidad de un canal compuesto por dos placas paralelas no ocupado por medio poroso. Esto con el fin de obtener información que nos permita hacer una estimación válida del intervalo adecuado para la búsqueda de la raíz de la función objetivo anteriormente mencionada.

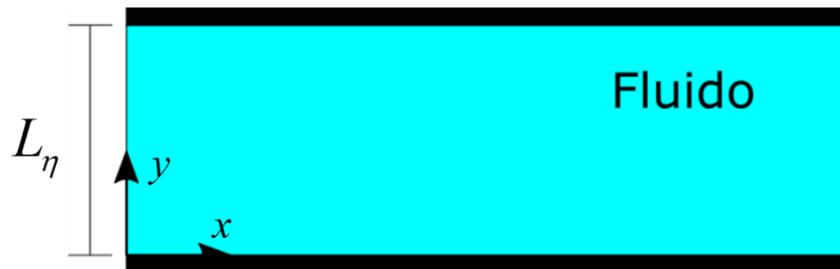


Fig. 7.1 Canal limitado por dos placas paralelas

Por lo tanto, se obtendrá el perfil de velocidad en un canal delimitado por dos placas paralelas sujeto a las siguientes condiciones:

- Estado estacionario
- Flujo reptante (efectos convectivos despreciables)
- Flujo totalmente desarrollado
- Caída de presión constante y solo en la dirección del flujo

El sistema que representa a este tipo de flujo se muestra en la Fig. 7.1 y las ecuaciones en forma adimensional que describen el transporte de movimiento en dicho sistema son las siguientes:

Ecuación Gobernante

$$0 = c + \frac{d^2u}{dY^2} \quad (7.21)$$

Condiciones de Frontera

$$\text{En } Y = L_\eta, \mathbf{u} = 0 \quad (7.22)$$

$$\text{En } Y = 0, \mathbf{u} = 0 \quad (7.23)$$

Se procede a entonces a obtener la solución del sistema, de la siguiente manera:

Despejando la segunda derivada en la Ec. (7.21), se obtiene

$$\frac{d^2u}{dY^2} = -c \quad (7.24)$$

Posteriormente, integrando dos veces la ecuación se llega a

$$\frac{du}{dY} = -cY + A \quad (7.25)$$

$$u = -\frac{c}{2}Y^2 + AY + B \quad (7.26)$$

Una vez obtenida la solución general dada por la Ec. (7.26), se proceden a evaluar las condiciones de frontera para poder conocer las constantes de integración A y B y obtener la solución particular de la ecuación.

Reemplazando (7.23) en (7.26)

$$0 = B \quad (7.27)$$

Reemplazando (7.22) en (7.26)

$$0 = -\frac{c}{2}L_\eta^2 + AL_\eta \quad (7.28)$$

Y despejando la constante de integración A de la Ec. (7.28), se obtiene

$$\frac{c}{2}L_\eta = A \quad (7.29)$$

Por lo tanto, se reescribe la Ec. (7.26) reemplazando los valores de A y B encontrados y, manipulando algebraicamente la expresión, se llega a la solución particular del problema.

$$u = -\frac{c}{2}Y^2 + \frac{c}{2}L_\eta Y \quad (7.30)$$

$$u = -\frac{c}{2}(Y^2 - L_\eta Y) \quad (7.31)$$

$$u = -\frac{c}{2}L_\eta^2 \left[\left(\frac{Y}{L_\eta} \right)^2 - \left(\frac{Y}{L_\eta} \right) \right] \quad (7.32)$$

Además, se tiene también la expresión de la derivada de la velocidad con respecto a la coordenada perpendicular al flujo dada por:

$$\frac{du}{dY} = -cY + \frac{c}{2}L_\eta \quad (7.33)$$

$$\frac{du}{dY} = c \left[\frac{L_\eta}{2} - Y \right] \quad (7.34)$$

Nótese que la altura del canal mostrado en la Fig. 7.1 debe ser de la misma altura que la región η en el sistema donde se desea obtener el perfil de velocidad por el método iterativo propuesto. De esta manera, puede analizarse el flujo que se presenta en la región η en ausencia del efecto presentado por el medio poroso.

Debido a que la superficie del medio poroso consiste tanto de fase sólida como de fase fluida, es decir, no es una pared rígida bajo la condición de no deslizamiento, la velocidad en $y = 0$ para un canal parcialmente ocupado con medio poroso debe ser mayor a 0. Por lo tanto, la velocidad a la altura y_c también debe ser mayor a la del caso del canal sin medio poroso.

Así, con base en este caso, es posible calcular el valor de la velocidad correspondiente a la altura y_c y obtener una primera estimación de la velocidad u_c , mediante la siguiente expresión

$$u_l = -\frac{c}{2}L_\eta^2 \left[\left(\frac{Y_c}{L_\eta} \right)^2 - \left(\frac{Y_c}{L_\eta} \right) \right] \quad (7.35)$$

Debido a que el efecto de la presencia del medio poroso sobre el perfil de velocidad no es muy grande, es decir, hay poca variación entre el perfil de velocidad de un canal libre a la región de fluido en el sistema ocupado por medio poroso, u_l es una estimación muy cercana a u_c .

Dicho esto, se elige como límite superior para el método de la falsa posición la velocidad en $y = 2y_c$ para un canal libre, dado que el intervalo de búsqueda no será muy amplio e incluye a la raíz. Es decir:

$$u_u = -\frac{c}{2}L_\eta^2 \left[\left(\frac{2Y_c}{L_\eta} \right)^2 - \left(\frac{2Y_c}{L_\eta} \right) \right] \quad (7.36)$$

C. Solución del modelo de la región de solución analítica

Partiendo del modelo adimensional de la Sección 2.4.

Ecuación Gobernante

$$0 = c + \frac{d^2 u_x}{d\xi^2} \quad (7.37)$$

Condiciones de Frontera

$$\text{En } \xi = \xi_\eta, u_x = 0 \quad (7.38)$$

$$\text{En } \xi = 0, u_x = u_c \quad (7.39)$$

Haciendo el despeje correspondiente en la Ec. (7.37), obtenemos:

$$\frac{d^2 u_x}{d\xi^2} = -c \quad (7.40)$$

$$\frac{du_x}{d\xi} = -c\xi + A \quad (7.41)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$u_x = -\frac{c}{2}\xi^2 + A\xi + B \quad (7.42)$$

Aplicando la condición de frontera de la Ec. (7.39) en la Ec. (7.42) se obtiene la constante de integración B:

$$u_c = B \quad (7.43)$$

Aplicando la condición de frontera de la Ec. (7.38) en la Ec. (7.42), se obtiene:

$$0 = -\frac{c}{2}\xi_\eta^2 + A\xi_\eta + B \quad (7.44)$$

Posteriormente reemplazando la Ec. (7.43) en la Ec. (7.44), se llega a:

$$0 = -\frac{c}{2}\xi_\eta^2 + A\xi_\eta + u_c \quad (7.45)$$

Y despejamos para encontrar el valor de la constante de integración A:

$$A = \frac{c}{2} \frac{\xi}{\xi_\eta} - \frac{u_c}{\xi_\eta} \quad (7.46)$$

Ahora, con los valores de las constantes de integración A y B, se obtiene la solución particular de la ecuación diferencial, dada por:

$$u_x = -\frac{c}{2} \xi^2 + \frac{c}{2} \frac{\xi}{\xi_\eta} \xi - \frac{\xi}{\xi_\eta} u_c + u_c \quad (7.47)$$

Manipulando esta expresión, se obtiene:

$$u_x = -\frac{c}{2} \xi^2 \left[\left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right)^2 - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) \right] + u_c \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_\eta} \right) \right] \quad (7.48)$$

Una vez obtenida esta expresión, calculamos la expresión correspondiente a la derivada, que es utilizada en el algoritmo para la obtención de la velocidad en la frontera de solución

$$\frac{du_x}{d\xi} = -c\xi + \frac{c}{2} \frac{\xi}{\xi_\eta} - \frac{u_c}{\xi_\eta} \quad (7.49)$$

Manipulando esta expresión, se obtiene:

$$\frac{du_x}{d\xi} = -c \left(\xi - \frac{\xi_\eta}{2} \right) - \frac{u_c}{\xi_\eta} \quad (7.50)$$

Evaluando la derivada en la frontera entre las soluciones analítica y numérica ($\xi = 0$), se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{du_x}{d\xi}_{\xi=0} = c \left(\frac{\xi_\eta}{2} \right) - \frac{u_c}{\xi_\eta} \quad (7.51)$$

D. Comportamiento de la derivada en la frontera superior del modelo de solución analítica

Aquí se muestran las gráficas de la variación de la derivada en la frontera superior del modelo analítico con respecto a la variación del parámetro u_c . En cada una se muestra su coeficiente de ajuste R^2 , así como la ecuación de ajuste correspondiente.

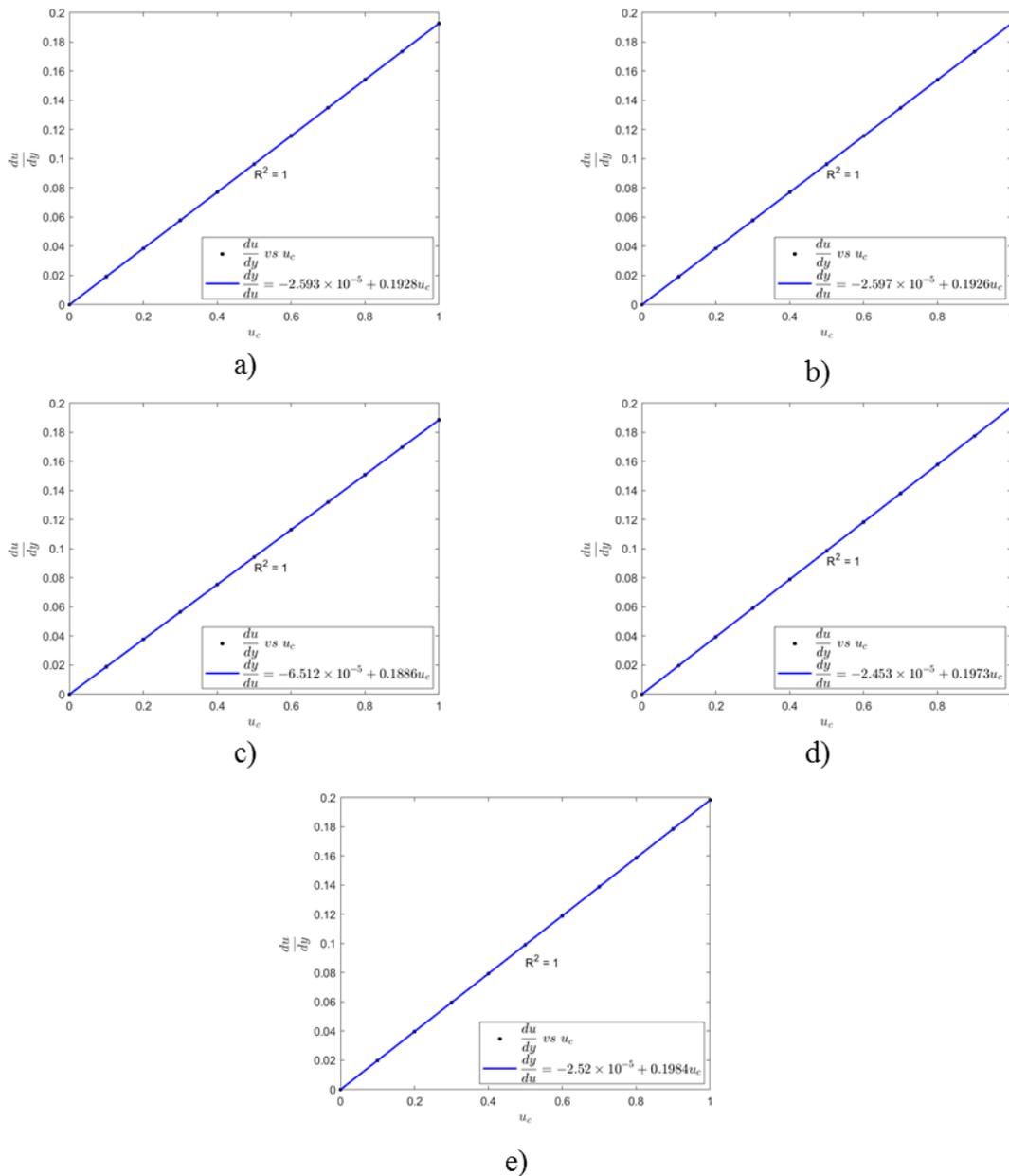


Fig. 7.2 Comportamiento de la derivada de la velocidad en el modelo con respecto a la velocidad supuesta en la frontera de solución para geometría de celda unitaria de medio poroso: a) Prismas Cuadrados, b) Cilindros, c) Cilindros Escalonados, d) Cilindros Aleatorios, e) Alfombra de Sierpinski

E. Valores de error relativo

Geometría de Celda Unitaria	Error relativo promedio				Error relativo máximo
	Sistema	Región de solución analítica	Región de solución numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	3.50E-09	3.60E-09	6.01E-10	1.16E-09	4.11E-09
Cilindros	2.34E-05	1.66E-08	6.89E-04	8.66E-04	7.23E-03
Cilindros escalonados	1.27E-05	5.32E-08	3.73E-04	3.10E-04	1.91E-03
Cilindros aleatorios	1.44E-05	3.92E-08	4.23E-04	4.27E-04	2.95E-03
Alfombra de Sierpinski	6.34E-06	1.29E-09	1.87E-04	2.78E-04	2.56E-03
Cubos	1.07E-04	6.87E-09	3.15E-03	3.06E-03	1.42E-02
Esferas	2.99E-04	1.38E-06	8.77E-03	5.92E-03	2.16E-02

Tabla 7.1 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso

Geometría de Celda Unitaria	Error relativo promedio				Error relativo máximo
	Sistema	Región de solución analítica	Región de solución numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	3.60E-09	3.60E-09	3.41E-09	3.42E-09	4.11E-09
Cilindros	5.73E-08	1.66E-08	4.09E-06	3.76E-06	2.92E-05
Cilindros escalonados	1.62E-07	5.34E-08	1.09E-05	1.01E-05	6.50E-05
Cilindros aleatorios	1.25E-07	3.94E-08	8.58E-06	7.91E-06	5.40E-05
Alfombra de Sierpinski	7.39E-09	1.30E-09	6.11E-07	5.56E-07	5.81E-06
Cubos	1.22E-08	6.86E-09	5.39E-07	5.12E-07	1.07E-06
Esferas	2.63E-06	1.38E-06	1.26E-04	1.19E-04	3.24E-04

Tabla 7.2 Valores de error relativo en términos de velocidad promedio en diversas zonas del sistema para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso

Geometría de Celda Unitaria	Fracción Vacía	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	0.4	3.41E-09	3.51E-09	5.77E-10	1.12E-09	4.03E-09
	0.5	3.54E-09	3.65E-09	6.05E-10	1.18E-09	4.19E-09
	0.6	3.50E-09	3.60E-09	6.01E-10	1.16E-09	4.11E-09
	0.7	3.37E-09	3.42E-09	1.87E-09	3.27E-09	1.93E-08
	0.8	3.58E-06	3.68E-09	1.05E-04	1.79E-09	8.91E-04
Cilindros	0.4	8.83E-08	1.12E-09	2.57E-06	3.77E-06	3.79E-05
	0.5	1.72E-06	5.34E-09	5.05E-05	4.85E-05	2.65E-04
	0.6	2.34E-05	1.66E-08	6.89E-04	8.66E-04	7.23E-03
	0.7	1.35E-05	1.27E-08	3.97E-04	5.53E-04	4.79E-03
	0.8	2.38E-05	8.60E-08	6.98E-04	1.11E-03	7.95E-03
Cilindros escalonados	0.4	5.52E-05	1.27E-07	1.62E-03	1.72E-03	8.18E-03
	0.5	1.07E-05	4.98E-09	3.16E-04	2.60E-04	1.43E-03
	0.6	1.27E-05	5.32E-08	3.73E-04	3.10E-04	1.91E-03
	0.7	3.21E-06	2.58E-08	9.37E-05	9.46E-05	3.54E-04
Cubos	0.8	6.46E-05	1.25E-06	1.87E-03	3.04E-03	1.97E-02
	0.4	7.29E-09	7.22E-09	9.18E-09	1.58E-08	7.01E-08
	0.5	5.73E-07	2.14E-07	1.08E-05	1.78E-05	1.37E-04
	0.6	1.07E-04	6.87E-09	3.15E-03	3.06E-03	1.42E-02
Esferas	0.7	3.26E-04	5.66E-06	9.45E-03	8.08E-03	1.79E-02
	0.8	2.55E-04	2.52E-07	7.52E-03	5.82E-03	1.86E-02
	0.6	2.99E-04	1.38E-06	8.77E-03	5.92E-03	2.16E-02
	0.7	1.95E-04	1.78E-06	5.70E-03	4.76E-03	2.38E-02
	0.8	3.68E-04	7.89E-07	1.08E-02	8.86E-03	4.27E-02

Tabla 7.3 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema a distintos valores de fracción vacía

Geometría de Celda Unitaria	Fracción Vacía	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	0.4	3.51E-09	3.51E-09	3.37E-09	3.37E-09	4.03E-09
	0.5	3.65E-09	3.65E-09	3.52E-09	3.52E-09	4.19E-09
	0.6	3.60E-09	3.60E-09	3.41E-09	3.42E-09	4.11E-09
	0.7	3.43E-09	3.43E-09	3.23E-09	3.24E-09	3.88E-09
	0.8	4.10E-09	3.68E-09	4.52E-08	4.14E-08	4.25E-07
Cilindros	0.4	1.12E-09	1.12E-09	9.42E-10	9.40E-10	1.69E-09
	0.5	5.37E-09	5.35E-09	7.49E-09	7.22E-09	3.36E-08
	0.6	5.73E-08	1.66E-08	4.09E-06	3.76E-06	2.92E-05
	0.7	4.38E-08	1.28E-08	3.12E-06	2.89E-06	1.71E-05
	0.8	2.82E-07	8.64E-08	1.97E-05	1.82E-05	1.15E-04
Cilindros escalonados	0.4	4.73E-07	1.28E-07	3.47E-05	3.20E-05	2.20E-04
	0.5	8.47E-09	4.88E-09	3.64E-07	3.43E-07	8.13E-07
	0.6	1.62E-07	5.34E-08	1.09E-05	1.01E-05	6.50E-05
	0.7	6.56E-08	2.59E-08	4.00E-06	3.70E-06	2.15E-05
	0.8	4.26E-06	1.25E-06	3.02E-04	2.78E-04	1.82E-03
Cubos	0.4	7.49E-09	7.26E-09	4.67E-08	3.33E-08	7.02E-08
	0.5	5.52E-07	2.54E-07	4.98E-05	3.16E-05	1.49E-04
	0.6	1.22E-08	8.13E-09	6.83E-07	5.12E-07	5.12E-07
	0.7	2.46E-05	6.80E-06	2.97E-03	1.74E-03	1.34E-02
	0.8	6.30E-07	3.00E-07	5.54E-05	3.54E-05	1.67E-04
Esferas	0.6	2.63E-06	1.64E-06	1.67E-04	1.19E-04	3.24E-04
	0.7	4.86E-06	2.13E-06	4.57E-04	2.87E-04	1.53E-03
	0.8	1.46E-06	9.42E-07	8.68E-05	6.37E-05	1.93E-04

Tabla 7.4 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema a distintos valores de fracción vacía

Geometría de Celda Unitaria	Valor de $y_c(\ell)$	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	5	3.50E-09	3.60E-09	6.01E-10	1.16E-09	4.11E-09
	10	1.20E-09	6.19E-10	3.60E-09	3.50E-09	4.11E-09
	50	1.17E-09	6.03E-10	3.59E-09	3.49E-09	4.10E-09
	100	1.18E-09	6.09E-10	3.58E-09	3.48E-09	4.10E-09
	500	3.37E-10	1.75E-10	7.18E-10	7.00E-10	1.33E-09
Cilindros	5	8.66E-04	6.89E-04	1.66E-08	2.34E-05	7.23E-03
	10	8.66E-04	6.89E-04	1.66E-08	2.34E-05	7.23E-03
	50	1.21E-03	1.54E-03	4.79E-09	5.23E-05	8.94E-03
	100	1.21E-03	1.54E-03	4.70E-09	5.23E-05	8.94E-03
	500	1.66E-10	8.60E-11	1.71E-09	1.65E-09	2.53E-09
Cilindros escalonados	5	3.10E-04	3.73E-04	5.32E-08	1.27E-05	1.91E-03
	10	3.10E-04	3.73E-04	5.32E-08	1.27E-05	1.91E-03
	50	2.03E-04	2.93E-04	3.44E-08	9.97E-06	1.32E-03
	100	2.03E-04	2.93E-04	3.43E-08	9.97E-06	1.32E-03
	500	2.98E-06	9.90E-06	3.58E-09	3.40E-07	1.20E-04
Cilindros aleatorios	5	4.27E-04	4.23E-04	3.92E-08	1.44E-05	2.95E-03
	10	4.27E-04	4.23E-04	3.92E-08	1.44E-05	2.95E-03
	50	3.18E-04	3.22E-04	6.12E-09	1.09E-05	1.35E-03
	100	3.38E-04	3.93E-04	1.10E-08	1.33E-05	2.48E-03
	500	4.54E-04	4.20E-04	8.98E-09	1.43E-05	2.29E-03
Alfombra de Sierpinski	5	2.78E-04	1.87E-04	1.29E-09	6.34E-06	2.56E-03
	10	2.78E-04	1.87E-04	1.29E-09	6.34E-06	2.56E-03
	50	1.06E-04	9.54E-05	1.44E-09	3.24E-06	1.52E-03
	100	1.06E-04	9.54E-05	1.41E-09	3.24E-06	1.52E-03
	500	2.10E-09	1.22E-09	9.12E-10	9.22E-10	3.25E-08

Tabla 7.5 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintas posiciones de la frontera de solución

Geometría de Celda Unitaria	Valor de $L_{\eta}(\ell)$	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	100	1.54E-11	1.55E-11	1.52E-11	2.95E-11	8.99E-11
	500	1.72E-09	1.83E-09	2.25E-10	4.36E-10	2.07E-09
	1000	3.50E-09	3.60E-09	6.01E-10	1.16E-09	4.11E-09
	5000	4.82E-08	4.25E-08	7.91E-09	1.50E-08	4.54E-08
	10000	1.13E-07	1.02E-07	2.63E-08	4.85E-08	1.44E-07
Cilindros	100	3.16E-04	6.99E-08	1.18E-03	7.10E-04	9.04E-03
	500	4.56E-05	2.23E-08	6.91E-04	8.70E-04	7.23E-03
	1000	4.54E-05	1.66E-08	6.89E-04	8.66E-04	7.23E-03
	5000	8.70E-05	9.48E-08	1.32E-03	1.42E-03	8.68E-03
	10000	9.82E-05	1.39E-07	1.49E-03	1.78E-03	1.18E-02
Cilindros escalonados	100	9.58E-05	1.11E-07	3.58E-04	2.06E-04	1.33E-03
	500	2.51E-05	8.41E-08	3.80E-04	3.11E-04	1.94E-03
	1000	1.27E-05	5.32E-08	3.73E-04	3.10E-04	1.91E-03
	5000	2.71E-06	1.68E-07	3.72E-04	3.38E-04	1.64E-03
	10000	1.72E-06	4.68E-07	3.71E-04	3.36E-04	1.64E-03
Cilindros aleatorios	100	8.02E-05	1.67E-07	3.00E-04	3.44E-04	1.57E-03
	500	2.96E-05	5.17E-08	4.49E-04	4.70E-04	2.29E-03
	1000	1.44E-05	3.92E-08	4.23E-04	4.27E-04	2.95E-03
	5000	2.53E-06	8.71E-08	3.54E-04	3.66E-04	1.90E-03
	10000	1.74E-06	1.92E-07	4.49E-04	4.21E-04	1.98E-03
Alfombra de Sierpinski	100	2.86E-05	1.73E-09	1.07E-04	1.34E-04	1.28E-03
	500	1.58E-05	9.23E-10	2.40E-04	3.67E-04	4.43E-03
	1000	6.34E-06	1.15E-09	1.87E-04	2.78E-04	2.56E-03
	5000	3.71E-06	3.88E-08	5.28E-04	6.77E-04	6.44E-03
	10000	2.32E-06	2.29E-07	5.94E-04	7.86E-04	6.25E-03
Cubos	100	4.50E-04	6.26E-06	1.67E-03	1.52E-03	7.09E-03
	200	2.56E-04	3.76E-06	1.67E-03	1.52E-03	7.09E-03
	500	2.08E-04	1.21E-08	3.16E-03	3.07E-03	1.42E-02
	1000	1.02E-04	6.61E-09	3.01E-03	2.39E-03	1.42E-02
	2000	5.41E-05	2.01E-08	3.14E-03	3.03E-03	1.42E-02
Esferas	100	1.70E-03	6.76E-06	6.36E-03	5.44E-03	2.07E-02
	200	8.83E-04	8.26E-06	5.78E-03	5.43E-03	2.42E-02
	500	6.26E-04	1.18E-07	9.50E-03	5.96E-03	3.04E-02
	1000	3.06E-04	1.33E-06	8.95E-03	6.37E-03	2.16E-02
	2000	1.49E-04	6.54E-07	8.59E-03	7.48E-03	2.54E-02

Tabla 7.6 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintos tamaños de la región de fluido libre

Geometría de Celda Unitaria	Fracción Vacía	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	0.4	3.30E-09	3.41E-09	0.00E+00	0.00E+00	3.97E-09
	0.5	3.43E-09	3.55E-09	0.00E+00	0.00E+00	4.12E-09
	0.6	3.38E-09	3.50E-09	0.00E+00	0.00E+00	4.05E-09
	0.7	3.22E-09	3.33E-09	0.00E+00	0.00E+00	3.83E-09
	0.8	3.46E-09	3.58E-09	0.00E+00	0.00E+00	4.10E-09
Cilindros	0.4	1.06E-09	1.10E-09	0.00E+00	0.00E+00	1.17E-09
	0.5	5.04E-09	5.22E-09	0.00E+00	0.00E+00	5.72E-09
	0.6	4.51E-09	4.67E-09	0.00E+00	0.00E+00	5.15E-09
	0.7	2.65E-09	2.74E-09	0.00E+00	0.00E+00	3.01E-09
	0.8	3.25E-09	3.36E-09	0.00E+00	0.00E+00	3.97E-09
Cilindros escalonados	0.4	6.65E-09	6.88E-09	0.00E+00	0.00E+00	7.54E-09
	0.5	4.82E-09	4.99E-09	0.00E+00	0.00E+00	5.75E-09
	0.6	5.56E-09	5.75E-09	0.00E+00	0.00E+00	6.24E-09
	0.7	5.10E-09	5.28E-09	0.00E+00	0.00E+00	5.83E-09
Cilindros Aleatorios	0.8	3.35E-09	3.47E-09	0.00E+00	0.00E+00	3.96E-09
	0.66	6.34E-09	6.56E-09	0.00E+00	0.00E+00	7.23E-09
Alfombra de Sierpinski	0.7023	1.22E-09	1.26E-09	0.00E+00	0.00E+00	1.37E-09
Cubos	0.4	6.59E-09	6.82E-09	0.00E+00	0.00E+00	1.02E-08
	0.5	5.37E-09	5.56E-09	0.00E+00	0.00E+00	9.23E-09
	0.6	3.08E-09	3.19E-09	0.00E+00	0.00E+00	6.98E-09
	0.7	5.64E-09	5.84E-09	0.00E+00	0.00E+00	1.01E-08
	0.8	2.81E-09	2.91E-09	0.00E+00	0.00E+00	7.01E-09
Esferas	0.6	5.17E-09	5.35E-09	0.00E+00	0.00E+00	9.01E-09
	0.7	5.03E-09	5.21E-09	0.00E+00	0.00E+00	8.50E-09
	0.8	5.48E-09	5.68E-09	0.00E+00	0.00E+00	9.72E-09

Tabla 7.7 Valores de error relativo en términos de velocidad promedio en diversas zonas del sistema para distintos tamaños de la región de fluido libre

Geometría de Celda Unitaria	Fracción Vacía	Error relativo promedio				Error relativo máximo
		Sistema	Región de Solución Analítica	Región de Solución Numérica	Zona de transición	
Prismas Cuadrados	0.4	3.39E-09	3.42E-09	0.00E+00	2.13E-10	3.97E-09
	0.5	3.52E-09	3.56E-09	0.00E+00	2.23E-10	4.12E-09
	0.6	3.48E-09	3.51E-09	0.00E+00	2.15E-10	4.05E-09
	0.7	3.31E-09	3.34E-09	0.00E+00	2.03E-10	3.83E-09
	0.8	3.55E-09	3.59E-09	0.00E+00	2.13E-10	4.10E-09
Cilindros	0.4	1.09E-09	1.10E-09	0.00E+00	6.28E-11	1.17E-09
	0.5	5.18E-09	5.23E-09	0.00E+00	2.82E-10	5.72E-09
	0.6	4.64E-09	4.68E-09	0.00E+00	2.63E-10	5.15E-09
	0.7	2.72E-09	2.75E-09	0.00E+00	1.36E-10	3.01E-09
Cilindros escalonados	0.8	3.34E-09	3.37E-09	0.00E+00	2.05E-10	3.97E-09
	0.4	7.00E-09	7.06E-09	0.00E+00	3.84E-10	7.79E-09
	0.5	4.80E-09	4.84E-09	0.00E+00	2.19E-10	5.61E-09
	0.6	5.71E-09	5.76E-09	0.00E+00	3.11E-10	6.24E-09
Cilindros Aleatorios	0.7	5.24E-09	5.29E-09	0.00E+00	2.71E-10	5.83E-09
	0.8	3.45E-09	3.48E-09	0.00E+00	2.01E-10	3.96E-09
	0.66	6.51E-09	6.57E-09	0.00E+00	3.63E-10	7.23E-09
Alfombra de Sierpinski	0.7023	7.25E-09	1.16E-09	0.00E+00	5.57E-07	5.81E-06
Cubos	0.4	6.75E-09	6.79E-09	0.00E+00	2.81E-10	1.01E-08
	0.5	5.50E-09	5.53E-09	0.00E+00	1.96E-10	9.11E-09
	0.6	5.70E-09	5.83E-09	0.00E+00	2.56E-10	1.01E-08
	0.7	5.77E-09	5.81E-09	0.00E+00	1.79E-10	1.01E-08
	0.8	2.87E-09	2.88E-09	0.00E+00	5.43E-11	6.94E-09
Esferas	0.6	5.29E-09	5.32E-09	0.00E+00	1.62E-10	8.95E-09
	0.7	5.15E-09	5.18E-09	0.00E+00	1.74E-10	8.43E-09
	0.8	5.61E-09	5.65E-09	0.00E+00	1.54E-10	9.65E-09

Tabla 7.8 Valores de error relativo en términos de velocidad puntual en diversas zonas del sistema para distintos valores de fracción vacía (DNS Semiacoplada)

F. Valores de reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo

Geometría de Celda Unitaria	% Reducción de elementos de malla	% Reducción de tiempo de cómputo		
		Modelo	Perfil puntual	Perfil promedio
Prismas Cuadrados	84.90%	30.75%	91.68%	94.53%
Cilindros	71.55%	28.85%	91.03%	94.21%
Cilindros escalonados	54.41%	13.53%	88.76%	92.32%
Cilindros aleatorios	15.80%	-32.05%	73.58%	80.74%
Alfombra de Sierpinski	25.10%	-46.60%	77.87%	83.92%
Cubos	56.79%	48.49%	38.19%	26.99%
Esferas	49.52%	43.55%	34.99%	26.64%

Tabla 7.9 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintas geometrías de celda unitaria de medio poroso

Geometría de Celda Unitaria	Valor de $y_c(\ell)$	% Reducción de elementos de malla	% Reducción de tiempo de cómputo		
			Modelo	Perfil puntual	Perfil promedio
Prismas Cuadrados	5	84.90%	30.75%	91.68%	94.53%
	10	84.47%	32.42%	91.46%	94.17%
	50	81.06%	20.57%	87.28%	89.78%
	100	76.79%	14.84%	82.90%	84.86%
	500	42.66%	-47.76%	45.14%	44.08%
Cilindros	5	71.55%	28.85%	91.03%	94.21%
	10	71.19%	16.12%	89.30%	92.94%
	50	68.22%	14.19%	86.01%	89.09%
	100	64.64%	4.89%	81.32%	84.21%
	500	35.90%	-54.51%	45.36%	45.07%
Cilindros escalonados	5	54.41%	13.53%	88.76%	92.32%
	10	54.13%	13.44%	88.42%	91.82%
	50	51.74%	9.93%	84.98%	87.95%
	100	49.03%	-1.12%	80.27%	82.57%
	500	27.15%	-63.04%	43.83%	41.46%
Cilindros aleatorios	5	15.80%	-32.05%	73.58%	80.74%
	10	15.72%	-37.88%	72.16%	79.53%
	50	15.01%	-38.63%	69.18%	76.12%
	100	14.23%	-64.83%	61.03%	68.45%
	500	7.93%	-104.18%	25.82%	30.17%
Alfombra de Sierpinski	5	25.10%	-46.60%	77.87%	83.92%
	10	24.97%	-50.79%	76.85%	83.00%
	50	23.96%	-54.53%	73.57%	79.17%
	100	22.70%	-74.25%	67.29%	72.70%
	500	12.61%	-125.93%	31.20%	32.48%

Tabla 7.10 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintas posiciones de la frontera de solución

Geometría de Celda Unitaria	Valor de L_η (ℓ)	% Reducción de elementos de malla	% Reducción de tiempo de cómputo		
			Modelo	Perfil puntual	Perfil promedio
Prismas Cuadrados	100	34.93%	-35.17%	47.33%	65.16%
	500	73.66%	0.86%	84.32%	89.22%
	1000	84.90%	30.75%	91.68%	94.53%
	5000	95.64%	82.92%	98.39%	99.09%
	10000	97.77%	93.66%	99.38%	99.46%
Cilindros	100	19.56%	-74.76%	30.40%	40.64%
	500	55.62%	-9.27%	82.13%	87.47%
	1000	71.55%	28.85%	91.03%	94.21%
	5000	90.75%	77.45%	98.01%	98.72%
	10000	95.15%	88.86%	99.28%	99.49%
Cilindros escalonados	100	10.55%	-46.02%	40.44%	49.18%
	500	37.41%	-16.09%	78.57%	84.82%
	1000	54.41%	13.53%	88.76%	92.32%
	5000	82.24%	72.82%	98.88%	98.25%
	10000	90.26%	88.17%	98.74%	99.14%
Cilindros aleatorios	100	1.83%	-133.76%	-31.87%	-17.34%
	500	8.54%	-80.17%	51.60%	61.86%
	1000	15.80%	-30.22%	72.68%	79.47%
	5000	42.11%	35.06%	94.08%	95.64%
	10000	59.32%	65.12%	96.74%	97.59%
Alfombra de Sierpinsky	100	3.10%	-144.23%	-26.30%	-9.75%
	500	14.29%	-35.89%	62.10%	70.23%
	1000	25.10%	-48.24%	77.41%	84.25%
	5000	56.68%	64.56%	95.51%	96.75%
	10000	72.36%	78.17%	97.67%	98.32%
Cubos	100	12.32%	-24.14%	-18.93%	-13.56%
	200	21.40%	-3.20%	4.12%	5.82%
	500	39.61%	43.19%	36.93%	31.43%
	1000	56.79%	48.49%	38.19%	26.99%
	2000	72.46%	63.07%	53.71%	42.70%
Esferas	100	8.52%	-112.85%	-124.53%	-136.79%
	200	16.71%	-27.40%	-35.68%	-42.71%
	500	33.82%	6.31%	-5.08%	-15.68%
	1000	49.52%	43.55%	34.99%	26.64%
	2000	65.91%	61.75%	52.51%	42.99%

Tabla 7.11 Reducción de elementos de malla y tiempo de cómputo para el cálculo de los valores de velocidad para distintos tamaños de la región de fluido libre



Método para la solución del problema de Stokes en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso.



ERICK DANIEL LOZA SANTOS
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 15 del mes de mayo del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ
DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ
DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: ERICK DANIEL LOZA SANTOS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

VOCAL

DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ

SECRETARIO

DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA