



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Unidad Iztapalapa

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# ANÁLISIS Y APLICACIONES DE LA BIFURCACIÓN DE TAKENS-BOGDANOV EN SUS CASOS GENÉRICO Y NO GENÉRICO

Tesis que presenta:  
**Ana Contreras Méndez**  
Para obtener el grado de  
**Maestra en Ciencias**  
(Matemáticas Aplicadas e Industriales )

Asesores:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
UAM-I

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro  
UNISON

Jurado:

Presidente:

Dr. Eric Campos Cantón

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, San Luis Potosí, México

Secretario:

Dr. Mario Medina Valdez  
UAM-I, CDMX, México

Vocal:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
UAM-I, CDMX, México

Vocal:

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro  
UNISON, Sonora, México

Noviembre del 2017



# Agradecimientos

Gracias a mis asesores el Dr. Baltazar Aguirre Hernández y Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro. Por su apoyo, paciencia, observaciones acertadas sobre mi trabajamos, dedicación y comprensión en varias adversidades que se me han presentado.

Le agradezco a mis sinodales Dr. Eric y Dr. Mario Medina por su apoyo.

Agradezco a CONACYT por la beca que me proporcionaron durante la maestría y además que también que me haya apoyado en la Beca Mixta, que me permitió realizar mi estancia satisfactoria de un mes en Sonora con mi Co-asesor Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro y a la Universidad de Sonora.

Gracias a la Maestría en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales) por apoyarme para poder asistir al Congreso del ENOAN en Tabasco, donde dí una ponencia sobre mi tesis y también al Dr. Baltazar Aguirre Hernández y UNISON por apoyarme para poder ir al Taller de Control y Sistemas Dinámicos en Sonora que fue en Marzo del 2016 y Marzo del 2017, en esta fecha dí una ponencia.

Agradezco Dr. Héctor Juárez, Dr. Hector Morales, Dra. María Luisa Sandoval, Dra. Patricia Saveedra, Dr. Gabriel, Dr. Mario Medina, Dr. Julio que fueron mis profesores durante la maestría, por brindarme los conocimientos en las diferentes áreas de las matemáticas. Transmitirme la curiosidad de saber más y no quedarme con las dudas. Por su puesto no puedo olvidarme del Dr. Gustavo Izquierdo y Dr. Luis Aguirre por regalarme un poco de su tiempo, para resolver mis dudas.

Le agradezco a la Maestra Iseo por resolver mis dudas del posgrado en MCMAI y a Lic. Jaquelin por resolver mis dudas y tramites sobre mi estancia que realice en Sonora.

Le doy gracias a Dios por no dejar que pierda la fe y esperanza. Por mandarme a los angelitos que me han ayudado, que no me dejan dar por vencida.

Gracias Mamí por el cariño que nos das, apoyarme, darme aliento y decirme que nunca me debo de rendir. Que todo tiene solución, menos la muerte. Por contagiarme de esa alegría y valentía que te distingue.

Gracias Papá por enseñarnos a ser independientes, ver que los milagros existen y que lo imposible es posible.

Gracias Lila por ser mi hermana por apoyarme, darme esos consejos precisos y demostrarme que uno solo puede llegar hasta donde uno quiere, eres un claro ejemplo.

Gracias Ribyn por el apoyo cuando mas te he necesitado, por el cariño que me brindas, por

tu alegría, sinceridad y el optimismo que me transmite. Le doy gracias a Dios por conocerte y que este a mi lado. Por decirme que crees en mí y que debo de estar segura de mí.

Gracias Jessy por tú amistad desde infancia. Agradezco tus consejos, apoyo y esas risas tan discretas. Demostrarme que hay que tener mucha disciplina para lograr lo que uno quiere y que los sueños se pueden hacer realidad.

Gracias Naye y Wendy por apoyarme, escuchar mis locuras como yo de ustedes y por hacerme reír. Aunque pase mucho tiempo nuestra amistad sigue integra y con mucho cariño, aunque hayamos tomados diferentes caminos de la vida.

Gracias a la Familia Sánchez Gutiérrez por ser como una segunda familia para mí.

Gracias Rosa Isela por esos ánimos, escucharme, aconsejarme, decirme que no me debo rendir y que cada suceso malo, hay que sacar lo bueno. Tratar de mirar hacia adelante y dejar el pasado atrás. Y también de esas risas que se escucha a dos cuerdas.

Gracias Via por tu apoyo y la amistad desde el bachillerato. Agradezco por contagiarme ese optimismo, de seguir adelante y no darse por vencida. Se que hay adversidades que se nos han presentado muy difícil, que estás nos han permitido ver que tan fuerte podemos ser. Acuérdate amiga se como un chapulín así te conocí, se que las personas cambia pero la esencia sigue ahí.

Gracias Lau por tu amistad, escucharme, aconsejarme, tus ánimos, hacerme reír, me haces pensar mas de lo normal, es decir, el saber el ¿porqué de las cosas? y agradezco que te haya puesto Dios en mi camino, pero no sé si es destino o casualidad.

Gracias Sandy, Hugo, Mariana, Carina e Iván por ser mis amigos, que me han apoyado y de compartir la pasión de estudiar matemáticas.

Gracias Yadira, Ernesto y Badillo por ser mis amigos de la MCMAI y por el apoyo que me brindaron durante la maestría que hicimos. También mis amigos de inglés por contagiarme de esa alegría peculiar Liz y Mau.

Gracias a mi tía Malena por apoyarnos desde chiquitas a mi hermana y a mí. Demostrarnos que hay que luchar por lo que se quiere y que no debemos depender de nadie. También a mi prima Laura, Marcela, Gaby por su apoyo y por esos momentos que hemos compartidos, que han sido gratos y de convivir con mis sobrinos (Emy, Arturo, Michael, Danny, Ezequiel).

Agradezco a mis amiguitas Naye, Andy y su mamá Rosita por brindarme esa linda amistad y esa connivencia que hemos tenidos.

Gracias Abuelita Noberta por ser esa abuelita postiza para nosotras y darnos ese cariño de abuelita.

Por último agradezco a mis animalitos (Felipe, Sansón, Amor, Cuca, Chimeca, Popis, Momo, Mis hijas, Sombra, Grey, Mi hermano,...) por darme su amor incondicional y su alegría que me transmiten.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Definiciones y conceptos . . . . .	9
2.2. Teorema de Existencia y Unicidad . . . . .	11
2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	11
2.4. Sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	13
2.5. Estabilidad . . . . .	15
2.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales . . . . .	18
2.7. Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	18
2.8. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	19
2.9. Ciclo y Estabilidad de conjuntos invariantes . . . . .	19
2.10. Criterio de Bendixson . . . . .	20
2.11. Equivalencia de Sistemas Dinámicos . . . . .	21
2.12. Teorema de Variedad Estable . . . . .	22
2.13. Estabilidad Estructural . . . . .	23
<b>3. Variedad Central y Formas Normales</b>	<b>25</b>
3.1. Variedad Central . . . . .	25
3.2. Puntos de equilibrio no hiperbólicos en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	27
3.3. Formas Normales . . . . .	29
<b>4. Bifurcaciones, formas normales topológicas y algo más</b>	<b>33</b>
4.1. Ejemplos . . . . .	33
4.2. Bifurcación . . . . .	39
4.3. Forma Normal topológica para bifurcaciones . . . . .	40
4.4. Teorema de Sotomayor . . . . .	42
4.5. Bifurcación de Hopf . . . . .	44
4.6. Teoría de Melnikov . . . . .	46
4.7. Bifurcación homoclínica . . . . .	48
<b>5. Bifurcación Takens- Bogdanov</b>	<b>49</b>
5.1. Caso genérico . . . . .	49
5.2. Caso no genérico . . . . .	59
<b>6. Problemas de aplicaciones de la bifurcación TB</b>	<b>71</b>
6.1. Modelo Depredador-Presa con defensa de grupo. . . . .	71
6.1.1. Antecedentes . . . . .	71
6.1.2. Modelo matemático de depredador-presa con defensa de grupo. . . . .	72
6.1.3. Simulación . . . . .	75
6.2. Modelo de red neuronal . . . . .	77

6.2.1. Introducción . . . . .	77
6.2.2. Modelo . . . . .	77
6.2.3. Simulación del modelo de la red neuronal recurrente con tres neuronas . . . . .	83
<b>7. Apéndice</b>	<b>93</b>
7.1. Apéndice A) . . . . .	93
7.2. Apéndice B) . . . . .	93
7.2.1. Apéndice B.1) código . . . . .	94

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la bifurcación Takens-Bogdanov (BTB), también conocida como doble cero, la cual tiene la propiedad de que al linealizar el sistema y evaluar el punto de equilibrio, se obtiene un valor propio cero de multiplicidad dos. Esta bifurcación fue descubierta por los matemáticos Floris Takens y Rifkat Bogdanov simultáneamente pero sus trabajos fueron por separado y con distinta forma normal (estas formas normales se podrán ver en el Capítulo 4).

Es una de las bifurcaciones de codimensión dos más estudiada en su versión genérica, no tanto así en su versión no genérica o degenerada. La BTB se dice degenerada cuando alguno de los coeficientes de la parte cuadrática de su deformación versal (o desdoblamiento universal) es cero, entonces es necesario agregar unos parámetros de bifurcación por lo que la bifurcación doble cero se transforma en una bifurcación de codimensión dos y se dice que es la bifurcación doble cero degenerada. Para el caso no degenerado se tiene que la codimensión que tiene es dos y su forma normal de los términos que tiene son de grado tres.

En el primer capítulo, comento sobre los preliminares, en el cual, se exponen conceptos sobre sistemas dinámicos que nos permitirán formalizar y comprender los teoremas y conceptos de los cuales son: Teorema de Hartman-Grobman, Criterio de Bendixson (que nos permite establecer si existen órbitas periódicas), sistema Hamiltoniano y estabilidad estructural.

En el capítulo segundo, se describen las herramientas que utilizamos para determinar el comportamiento de la BTB, en este capítulo veremos que la parte lineal del sistema dinámico puede ser puesto en la forma canónica de Jordan  $\dot{x} = Jx$ , la cual hace fácil resolver el sistema lineal. El teorema de Variedad Central Local muestra que, en una vecindad de un punto de equilibrio no hiperbólico, el comportamiento cualitativo del sistema dinámico podrá ser reducido al problema de determinar el comportamiento cualitativo del sistema no lineal  $\dot{x} = Jx + F(x)$ , donde  $Jx$  es la parte lineal y  $F(x)$  de la parte no lineal del sistema en la variedad central. Ya que la dimensión de la variedad central es menor que la dimensión del sistema original, esto simplifica el problema. Por otra parte, la teoría de las formas normales simplifica la parte no lineal  $F(x)$  de la ecuación que esta arriba. Y también la teoría de Melnikov nos proporciona condiciones para establecer la existencia de trayectorias homoclínicas transversales para órbitas periódicas de sistemas dinámicos perturbados.

En el capítulo 3, estudiamos el concepto de bifurcación y además presento algunas bifurcaciones como: silla-nodo, transcritical, tenedor, Hopf, las cuales son de codimensión uno, algunas aparecen en la BTB. También enuncié el teorema de Sotomayor, el cual me ayuda para determinar en un sistema dinámico si ocurre en él, una bifurcación silla-nodo, tenedor o transcritical

y para lo cual se deben satisfacer ciertas condiciones suficientes.

En el capítulo 4, mostramos y desarrollamos la riqueza de la bifurcación Takens-Bogdanov en sus dos casos diferentes, en los cuales son: *genérico* y *no genérico* los cuales son de codimensión dos. En el caso genérico, los términos son de grado dos y al variar los parámetros surgen la bifurcación silla-nodo, Hopf y homoclínica. Y en el caso no genérico, los términos de su forma normal del sistema, tiene términos de orden tres y las bifurcaciones que aparecen son tenedor, Hopf y homoclínica.

Por último en el capítulo 5, mostramos la aplicación para cada caso de la BTB. Primero para el caso genérico por medio del modelo depredador-presa con un grupo de defensa y el segundo para el caso no genérico es con un modelo de red neuronal recurrente con tres neuronas.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este primer capítulo se definirán algunos conceptos importantes que se utilizan en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Comenzaremos con el teorema de existencia y unicidad para una EDO y posteriormente para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### 2.1. Definiciones y conceptos

Como motivación hablaremos de una ecuación diferencial y posteriormente de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea  $I$  un intervalo abierto de la recta real  $\mathbb{R}$  y  $x : I \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto x(t)$  una función diferenciable con valor real de una variable real  $t$ . Se usará como notación  $\dot{x}$  o  $\dot{x}$  para denotar la derivada  $\frac{dx}{dt}$ . Entonces podemos decir, que una *ecuación diferencial* con una condición inicial es una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.1.1)$$

Una función  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de (2.1.1), si

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = f(\alpha(t), t) \text{ y } \alpha(t_0) = x_0. \quad (2.1.2)$$

Ahora bien, si definimos  $\beta(t) = \alpha(t + t_0)$ , observamos que  $\beta(t)$  también es una solución de (2.1.1) que pasa por  $(x_0, 0)$  dado que

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(t + t_0) = f(\alpha(t + t_0)) = f(\beta(t)) \text{ y } \beta(t_0) = x_0. \quad (2.1.3)$$

Si

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1.4)$$

se dice que la ecuación diferenciable es *autónoma*, en caso contrario, le llamamos *no autónoma*.

Ahora bien, decimos que un sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma:

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \text{ y } F(X, t) = \begin{pmatrix} f_1(X, t) \\ \vdots \\ f_n(X, t) \end{pmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, t) \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Decimos que una curva solución, trayectoria u órbita de (2.1.4)  $\varphi(x_0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es invariante con respecto a la traslación en el tiempo, basado en las soluciones en tiempo  $t_0 \neq 0$ , puede ser siempre trasladada a  $t_0 = 0$ .

La base geométrica de los objetos asociados con un sistema dinámico  $\{X, \varphi_t\}$  son estas órbitas en el espacio de estados y el retrato fase compuesto de ellas.

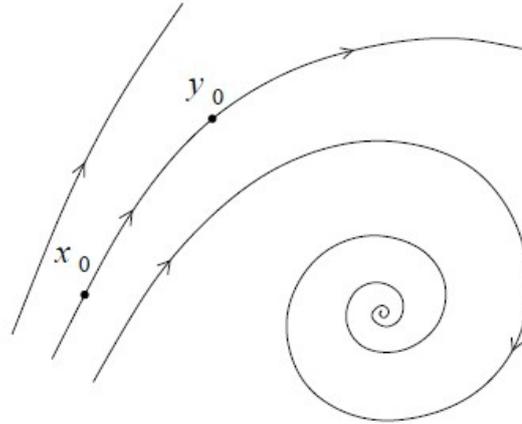


Figura 2.1: Órbitas de un sistema tiempo-continuo

El comportamiento global de el flujo  $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido para todo punto  $x \in U$ , se observa en la Figura 2.2. En particular, el concepto de variedad invariante suave esta compuesta de las curvas de soluciones.

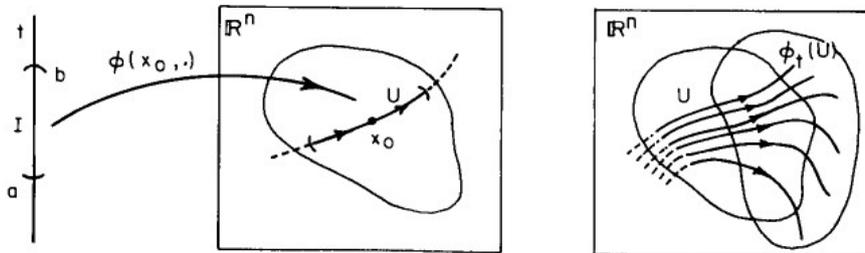


Figura 2.2: Una curva solución y el flujo. a) La curva solución  $\phi_t(x_0)$ ; b) el flujo  $\phi_t$ .

**Definición 2.1.1** *Un sistema dinámico es una pareja  $\{X, \varphi_t\}$ , donde  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  es un espacio de estados y  $\varphi_t : X \rightarrow X$  el cual es llamado flujo. Que satisface las siguientes propiedades:*

[I]  $\varphi_0 = id$

[II]  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

Se tiene una condición inicial

$$x(0) = x_0 \in U \tag{2.1.7}$$

en la cual se busca una solución  $\varphi(x_0, t)$  tal que  $\varphi(x_0, 0) = x_0$ .

## 2.2. Teorema de Existencia y Unicidad

Describiremos este teorema para un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (2.1.4), bajo la hipótesis que  $f \in C^1(U)$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Este teorema se puede demostrar por el método de Picard de aproximaciones sucesivas. El método de aproximaciones sucesivas no sólo permite establecer la existencia y unicidad de la solución asociada al problema (2.1.4), sino también nos permite establecer la continuidad y diferenciabilidad de la solución con respecto a la condición inicial y parámetros.

**Definición 2.2.1** *Supongamos que  $f \in C(U)$  donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $x(t)$  es una **solución** de la ecuación diferencial (2.1.1) sobre un intervalo  $I$  si  $x(t)$  es diferenciable en  $I$  y para todo  $t \in I$ ,  $x(t) \in U$  y  $x'(t) = f(x(t))$  y obtenemos  $x_0 \in U$ ,  $x(t)$  es una solución del problema de valor inicial sobre un intervalo  $I$  si  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  y  $x(t)$  es una solución de la ecuación diferencial (2.1.4) sobre el intervalo  $I$ .*

**Teorema 2.2.1** *(Fundamental de Existencia y Unicidad) Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y suponemos que  $f \in C^1(U)$ . Entonces existe un  $a > 0$  tal que el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

*tiene una solución única  $x(t)$  sobre el intervalo  $(x_0 - a, x_0 + a)$ .*

La demostración esta en el libro [Perko,1996].

## 2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias es de la forma:

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3.1)$$

Se sabe de la teoría de sistemas lineales que si los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , de una matriz  $A$  son reales y distintos, entonces el conjunto de vectores propios correspondientes  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , forma una base de  $\mathbb{R}^n$ , en cuyo caso la matriz

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

donde  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  son los vectores columnas de  $P$  y existe su invertible, entonces

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

si se realiza el cambio de coordenadas

$$y = P^{-1}x \quad y(0) = P^{-1}x(0)$$

en donde  $P$  es la matriz inversa anterior, se obtiene

$$\dot{y} = P^{-1}APy$$

por tanto

$$y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]y(0)$$

y así se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= Py(t) \\ &= P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] y(0) \\ &= P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] P^{-1} x(0). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Supongamos el caso en que la matriz  $A$  tenga valores propios reales y complejos, y además algunos de ellos tenga multiplicidad, se tiene un resultado análogo al anterior, pero de mayor complejidad. Sea  $A$  una matriz real que posea los valores propios reales  $\lambda_i, i = 1, \dots, k$  y los valores propios complejos

$$\lambda_i = a_i + ib_i, \bar{\lambda}_i = a_i - ib_i, i = k + 1, \dots, n$$

Entonces existe una base para  $\mathbb{R}_{2n-k}$

$$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n$$

en donde  $v_i, i = 1, \dots, n$  y  $w_i = u_i \pm iv_i, i = 1, \dots, n$  son los vectores propios generalizados de  $A$ , tal que

$$P = [v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n]$$

es una matriz invertible y

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}$$

donde los bloques elementales  $B_j$  de Jordan son de la forma

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

para un valor propio real múltiple  $\lambda$  de  $A$ , o bien de la forma

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & D & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para un valor propio complejo múltiple  $\lambda = a + ib$  de  $A$ . La solución del sistema lineal se escribe en este caso:

$$x(t) = P \text{diag}[e^{B_i t}] P^{-1} x(0).$$

Considérese el caso del sistema lineal de dos dimensiones

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3.3)$$

en donde  $A$  es una matriz real. Entonces existe una matriz  $P$  real y cuyas columnas son vectores propios tal que

$$B = P^{-1} A P$$

tiene una de las formas siguientes:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema dinámico lineal en este caso es de la forma

$$\dot{x} = Bx, \quad x(0) = x_0 \quad (2.3.4)$$

en donde cada uno de los tres casos anteriores implicaría que

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} x_0$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0$$

y

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} x_0$$

El comportamiento de las soluciones (2.3.3) se deduce de (2.3.4).

## 2.4. Sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección estudiaremos los sistemas autónomos de dimensión 2.

Sea

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.4.1)$$

en el cual su campo vectorial está dado por una función lineal, es decir, un sistema lineal puede ser escrito de la forma

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.4.2)$$

Si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son soluciones del sistema  $\dot{x} = Ax$  entonces la matriz  $X(t) = [x_1(t) \mid x_2(t)]$  se denomina *matriz solución*; si además las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son linealmente independientes para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces se dice que  $X(t)$  es una *matriz fundamental de soluciones* de  $\dot{x} = Ax$ . Si  $X(t)$  es una matriz fundamental de soluciones de  $\dot{x} = Ax$  y cumple la condición inicial  $X(0) = I$ , entonces se dice que es una matriz principal de soluciones.

Si  $X(t)$  es una matriz fundamental de soluciones, la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = Ax$  que satisface la condición inicial  $x(0) = x_0$  está dada por la expresión:

$$\varphi_t(x_0) \equiv e^{At} x_0,$$

donde

$$e^{At} \equiv X(t)[X(0)]^{-1}.$$

Ahora bien, dos sistemas lineales  $\dot{x} = Ax$  y  $\dot{y} = By$  se dice que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que transforma las órbitas  $\dot{x} = Ax$  en las de  $\dot{y} = By$  y conserva su sentido en el tiempo. Es decir:

$$h(e^{At} x) = e^{Bt} h(x) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^2.$$

Recordando que un homeomorfismo es continuo y que su inversa es continua.

Por lo tanto, cuando el punto de equilibrio es no hiperbólico se tiene los siguientes 3 casos:

[I]  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$   $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , es un sumidero hiperbólico.

[II]  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$   $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , es una fuente hiperbólico.

[III]  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$   $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ , es un punto silla hiperbólico.

**Teorema 2.4.1** *Si la matriz de coeficientes  $A$  tiene al menos un valor propio con parte real cero (no hiperbólico), entonces el sistema  $\dot{x} = Ax$  es topológicamente equivalente a uno de los siguientes cinco sistemas lineales:*

[I]  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  matriz cero, cualquier órbita es una punto de equilibrio.

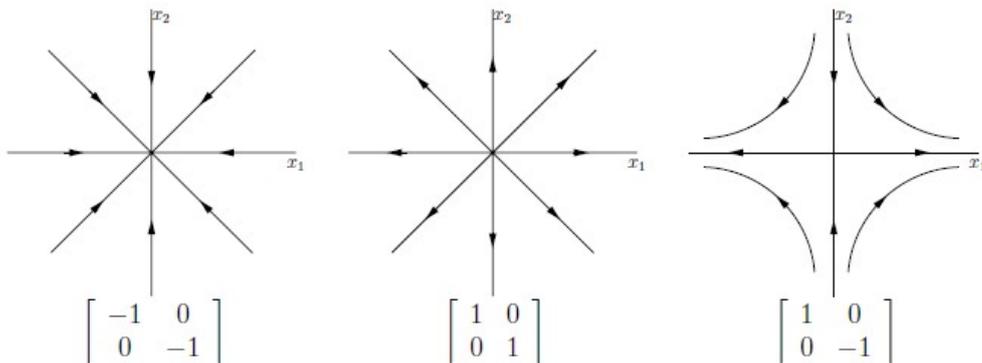
[II]  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\lambda_1 < 0$  y otro cero, los conjuntos  $\omega$ -límite (finales) de todas las órbitas positivas (hacia adelante) son puntos de equilibrio.

[III]  $\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$   $\lambda_2 > 0$  y otro cero. Los conjuntos  $\alpha$ -límite (inicio) de todas las órbitas negativas (hacia atrás) son puntos de equilibrio.

[IV]  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  dos valores propios cero con rango 1.

[V]  $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$  dos valores propios imaginarios puros. Cada órbita que no sea un equilibrio es periódica.

Se observa en la Figura 2.3, los retrato fase correspondiente de cada caso anterior.



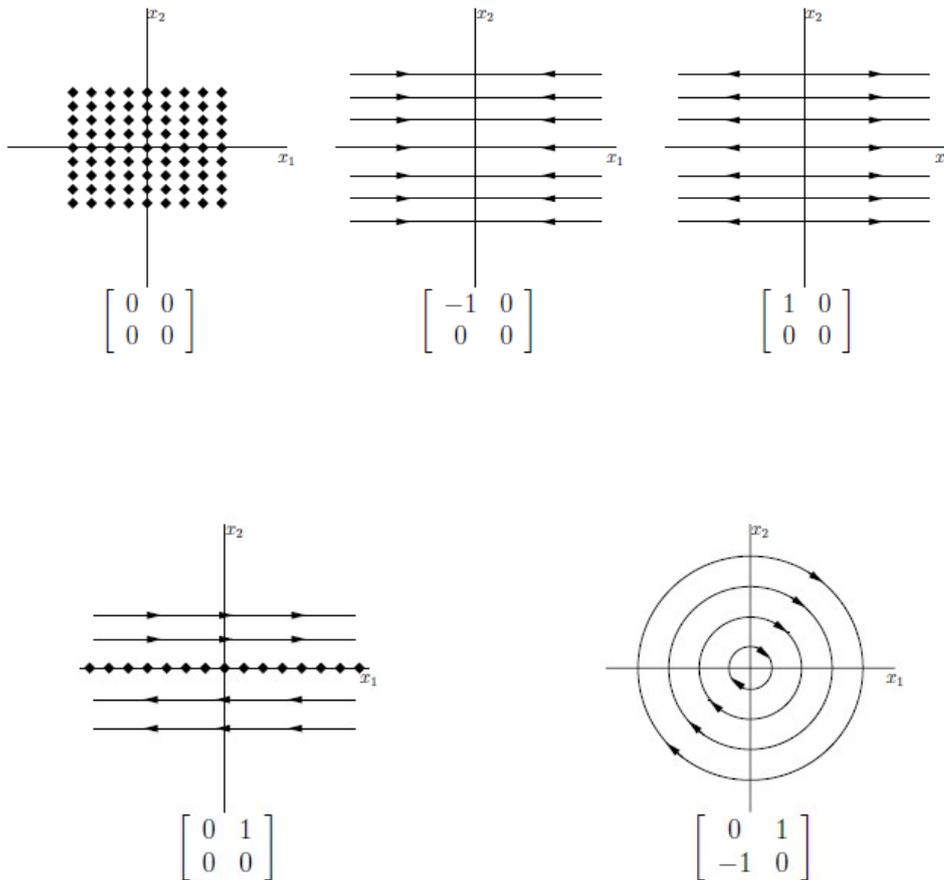


Figura 2.3: Retrato fase respectivo de las equivalencia topológica de los sistemas lineales en  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.5. Estabilidad

Si los valores propios de una matriz  $A$  de dimensión  $n \times n$  tienen parte real distinta de cero, se dice que el flujo:

$$e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es hiperbólico. El punto de equilibrio único  $x = 0$  se dice que es un *punto de equilibrio hiperbólico*.

El punto de equilibrio hiperbólico puede ser o bien un pozo (si todos los valores propios tienen parte real estrictamente negativa) o una fuente (si todos los valores propios tienen parte real positiva) o bien un punto silla (los valores propios tienen signos diferentes). Si  $x = 0$  es un pozo o una fuente, las soluciones se acercan a (o se separan de)  $x = 0$  de dos formas, las cuales son: nodo o foco. Sean el determinante y la traza de  $A$ , respectivamente,  $\delta = \det A$  y  $\tau = \text{traza} A$  y considérese el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde  $x = 0$  es un punto de equilibrio.

Los valores propios se pueden escribir de la matriz  $A$  de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

Se tendría los siguientes casos:

a) Silla si  $\delta < 0$

b) Un nodo estable si

$$\delta > 0, \quad \tau^2 - 4\delta \geq 0, \quad y \quad \tau < 0$$

c) Un nodo inestable si

$$\delta > 0, \quad \tau^2 - 4\delta \geq 0, \quad y \quad \tau > 0$$

d) Un foco estable si

$$\delta > 0, \quad \tau^2 - 4\delta < 0, \quad y \quad \tau < 0$$

e) Un foco inestable si

$$\delta > 0, \quad \tau^2 - 4\delta < 0, \quad y \quad \tau > 0$$

f) Un centro si

$$\delta > 0, \quad \tau = 0$$

En la Figura 2.4 el retrato fase indica tiene comportamiento de foco y nodo.

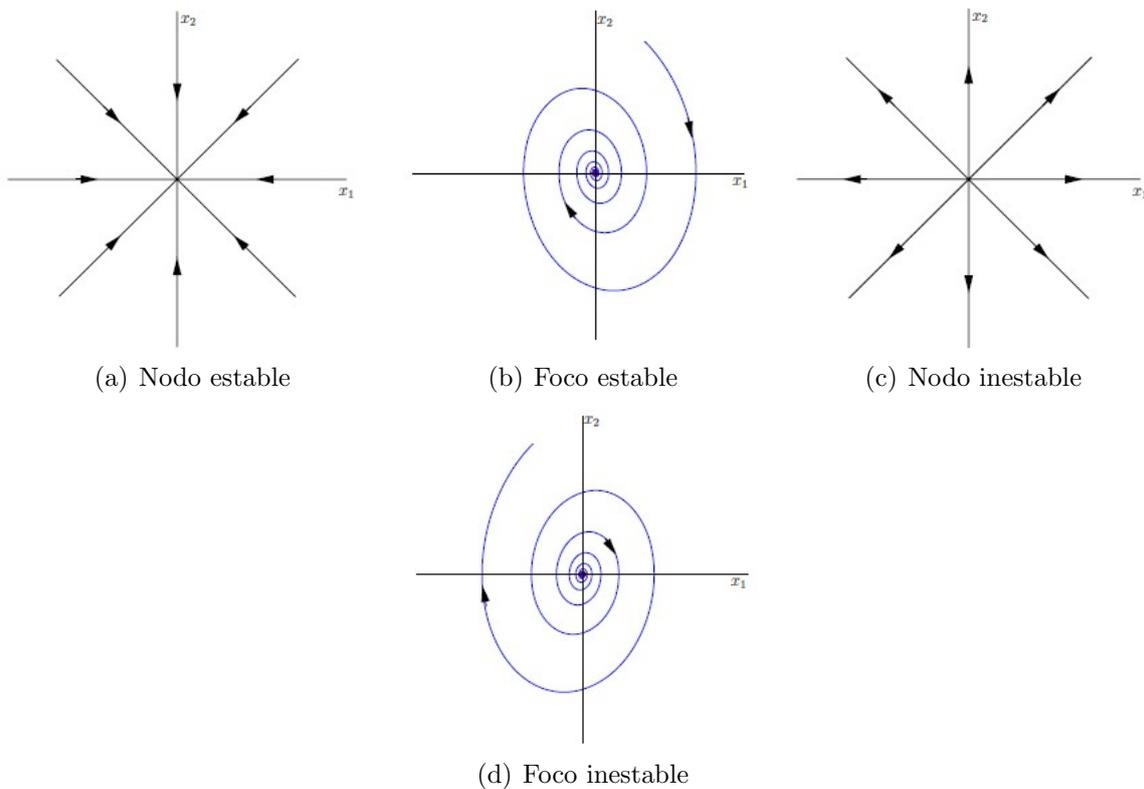


Figura 2.4: Retrato fase

En el caso general para  $n \geq 1$  se tiene lo siguiente. De acuerdo con lo que se ha visto anteriormente la solución de un sistema lineal en  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \tag{2.5.1}$$

se escribe como:

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

La aplicación  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  describe el comportamiento del punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a lo largo de las trayectorias de (2.5.1). Un subespacio  $E \subset \mathbb{R}^n$  se dice invariante bajo el flujo  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

si  $e^{At}E \subset E$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Sea  $E$  el espacio generado por los vectores propios de la matriz  $A$  correspondientes a un valor propio  $\lambda$ , entonces

$$AE \subset E$$

Para demostrar este resultado sea  $\{v_1, \dots, v_k\}$  una base de  $E$  formada por los vectores propios generalizados. Sea  $v \in E$ ,

$$v = \sum_{i=1}^k c_i v_i$$

y, por linealidad,

$$Av = \sum_{i=1}^k c_i Av_i.$$

Para cada  $v_i$

$$(A - \lambda I)^{k_i} v_i = 0$$

para un cierto  $k_i$  mínimo, se puede escribir

$$(A - \lambda I)v_i = V_i$$

o lo que es lo mismo  $V_i \in (A - \lambda I)^{k_i-1} \subset E$ . Se deduce que  $Av_i \in E$  y por tanto  $Av \in E$ .

Se define los subespacios estable e inestable,  $E^s, E^u$  respectivamente, de un sistema lineal (2.5.1). Supongamos que la matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene  $k$  valores propios negativos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  y  $n-k$  valores propios positivos  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  y estos valores propios son distintos.

Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un conjunto correspondiente de vectores propios. Entonces el subespacio estable e inestable del sistema lineal (2.5.1)  $E^s$  y  $E^u$ , son los subespacios lineales generados por  $\{v_1, \dots, v_k\}$  y  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  respectivamente, es decir,

$$E^s = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

$$E^u = \text{Span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Si la matriz  $A$  tiene valores propios puros imaginarios, es decir, con parte real nula, entonces ahí también es un subespacio central  $E^c$ .

**Definición 2.5.1** Sea  $\lambda_j = a_j + ib_j, w_j = u_j + iv_j$ . Entonces

$$E^s = \text{Span}\{u_j, v_j | a_j < 0\},$$

$$E^c = \text{Span}\{u_j, v_j | a_j = 0\},$$

y

$$E^u = \text{Span}\{u_j, v_j | a_j > 0\}.$$

es decir,  $E^s, E^c$  y  $E^u$  son subespacios de  $\mathbb{R}^n$  generados por los vectores propios reales e imaginarios  $w_j$  con su correspondiente valor propio  $\lambda_j$  con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.

**Teorema 2.5.1** Sea  $A$  una matriz real  $n \times n$ . Entonces

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

donde  $E^s, E^c$  y  $E^u$  es subespacio estable, central e inestable respectivamente; además  $E^s, E^c$  y  $E^u$  son invariantes con respecto al flujo  $e^{At}$  de (2.5.1) respectivamente.

Referencia [Perko,1996]

## 2.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

Consideremos

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0. \quad (2.6.1)$$

El estudio de los sistemas dinámicos no lineales comprenden dos partes: una más elemental de carácter local, que se relaciona con el estudio de sistemas lineales cuando evaluamos el punto de equilibrio hiperbólico, analizamos su comportamiento en el entorno de este y una parte más específica en la que se ponen en evidencia comportamientos completamente nuevos con relación a los sistemas lineales.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f \in C^1(U)$  en donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $\bar{x}(t)$  es una solución de la ecuación diferencial no lineal

$$\dot{x} = f(x)$$

sobre un intervalo  $I$ , si  $\bar{x}(t)$  es diferencial sobre  $I$  y para todo  $t \in I$ .

Del sistema no lineal (2.6.1) determinaremos los puntos de equilibrio y describiremos el comportamiento de (2.6.1) cerca de estos puntos. El comportamiento del sistema no lineal de (2.6.1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$  es determinado cualitativamente por el comportamiento de la linealización de (2.6.1)

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con la matriz  $A = Df(x_0)$ , que tiene tamaño  $n \times n$  constante y que tiene todos sus valores propios reales y distintos. La función lineal  $Ax = Df(x_0)x$  es llamado la parte lineal de  $f$  en  $x_0$ .

**Definición 2.6.1** *Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de (2.6.1) si  $f(x_0) = 0$ . Un punto de equilibrio  $x_0$  es llamado un punto de equilibrio hiperbólico de (2.6.1) si ninguno de los valores propios de la matriz  $Df(x_0)$  tiene parte real cero. El sistema lineal (2.5.1) con la matriz  $A = Df(x_0)$  es llamado linealización de (2.6.1) en  $x_0$ .*

Notemos que si  $x_0$  es un punto de equilibrio de (2.6.1) y  $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el flujo asociado a la ecuación diferencial (2.6.1), entonces  $\varphi_t(x_0) = x_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Así,  $x_0$  es llamado un punto fijo del flujo  $\varphi_t$ ; también llamado un cero, punto crítico o punto singular de el campo vectorial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

En el caso lineal

$$\dot{x} = Ax,$$

el flujo asociado a este sistema, se escribe de la forma

$$\varphi_t(x_0) = e^{At}x_0.$$

## 2.7. Teorema de Hartman-Grobman

Este teorema muy importante en la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$ ,

$$\dot{x} = f(x),$$

tiene la misma estructura cualitativa como el sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  con  $A = Df(x_0)$ .

**Definición 2.7.1** Sean dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales tal como (2.5.1) y (2.6.1). Se dice que tienen **topología equivalente** en una vecindad en el origen o tiene **la misma estructura cualitativa cerca del punto de equilibrio el cual es el origen** si hay un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen sobre un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen, el cual mapea las trayectorias de (2.6.1) en  $U$  sobre las trayectorias de (2.5.1) en  $V$  y preserva la orientación en el tiempo en el sentido que si una trayectoria es dirigida desde  $x_1$  a  $x_2$  en  $U$ , entonces su imagen bajo  $H$  es dirigida desde  $H(x_1)$  a  $H(x_2)$  en  $V$ . Si el homeomorfismo  $H$  preserva la parametrización por tiempo, entonces los sistemas (2.5.1) y (2.6.1) se dice que son **topológicamente conjugado** en una vecindad del origen.

**Teorema 2.7.1 (Hartman-Grobman)** Sean  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $f \in C^1(U)$ , y  $\varphi_t$  el flujo del sistema no lineal (2.6.1). Supongamos  $f(0) = 0$  y que la matriz  $A = Df(0)$  no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen sobre un conjunto abierto  $V$  que contiene el origen tal que para cada  $x_0 \in U$ , en un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene al cero, tal que  $x_0 \in U$  y  $t \in I_0$

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

es decir,  $H$  es un mapeo de trayectorias de (2.5.1) cerca del origen sobre las trayectorias de (2.6.1) cerca del origen y preserva la parametrización del tiempo.

## 2.8. Sistemas Hamiltonianos

**Definición 2.8.1** Sea  $E \subset \mathbb{R}^{2n}$  y sea  $H \in C^2(E)$  donde  $H = H(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

donde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left( \frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T,$$

es llamado sistema Hamiltoniano con  $n$  grados de libertad en  $E$ .

## 2.9. Ciclo y Estabilidad de conjuntos invariantes

**Definición 2.9.1** Un **ciclo** es una órbita periódica, es decir, una órbita  $L_0$  sin punto de equilibrio, tal que cada punto  $x_0 \in L_0$ , los satisface  $\varphi_{t+T_0}x_0 = \varphi_t x_0$  con algún  $T_0 > 0$ , para todo  $t \in T$ .

El  $T$  mínimo con esta propiedad es llamado el *período* del ciclo  $L_0$ . Si un sistema empieza su evolución en un punto  $x_0$  en el ciclo, éste regresará al mismo punto después de cada  $T_0$  unidades de tiempo. En el caso de tiempo-continuo el ciclo  $L_0$  es una curva cerrada en el plano como se ve en la siguiente Figura: 2.5.

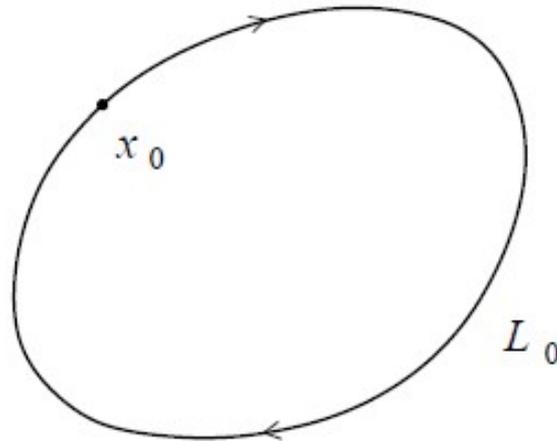


Figura 2.5: Órbitas periódicas en un sistema en tiempo-continuo

**Definición 2.9.2** Un ciclo de un sistema dinámico tiempo-continuo, en una vecindad en la cual no hay otros ciclos, es llamado **ciclo límite**.

**Definición 2.9.3** Un **conjunto invariante** de un sistema dinámico  $\{X, \varphi_t\}$  es un subconjunto  $S \subset X$  tal que  $x_0 \in S$  implica  $\varphi_t x_0 \in S$  para todo  $t > 0$ .

Para representar un estado asintóticamente estable de un sistema dinámico, un conjunto invariante  $S_0$  puede ser estable; en otras palabras, éste debe atraer órbitas cercanas. Supongamos que tenemos un sistema dinámico con un espacio métrico completo  $X$ . Sea  $S_0$  un conjunto invariante cerrado entonces enunciamos la siguiente:

**Definición 2.9.4** Un conjunto invariante  $S_0$  es llamado **estable** si

- I) para cualquier vecindad suficientemente pequeña  $U \supset S_0$  existe una vecindad  $V \supset S_0$  tal que  $\varphi_t x \in U$  para toda  $x \in V$  y todo  $t > 0$
- II) Existe una vecindad  $U_0 \supset S_0$  tal que  $\varphi_t x \rightarrow S_0$  para todo  $x \in U_0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

La propiedad (I) de la definición es llamada *estabilidad según Lyapunov*. La propiedad (II) es llamada *estabilidad asintótica*. Hay conjuntos invariantes que son estables según Lyapunov pero no asintóticamente estables.

## 2.10. Criterio de Bendixson

El criterio de Bendixson nos permite establecer cuando no existen soluciones periódicas de campos vectoriales autónomos en el plano. Se denota el campo vectorial por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), & (x, y) &\in \mathbb{R}^2 \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

**Teorema 2.10.1** Si en una región simplemente conexa  $D \subset \mathbb{R}^2$  (es decir  $D$  no tiene agujeros esta región) la expresión de  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  es no idénticamente cero y no cambia de signo, entonces (2.10.1) no tiene órbitas cerradas en la región  $D$ .

**Teorema 2.10.2** Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.10.2}$$

con  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f$  y  $g$  tiene primeras derivadas parciales continuas en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Una órbita periódica siempre encierra al menos un punto de equilibrio. Si sólo encierra uno, no es punto silla.

## 2.11. Equivalencia de Sistemas Dinámicos

En esta sección se introducen y se discuten las ideas fundamentales que se utilizarán en el siguiente capítulo: equivalencia topológica de sistemas dinámicos y sus clasificaciones, bifurcación, diagrama de bifurcación, y las formas normales topológicas para bifurcaciones.

La comparación de cualquier objeto está basada en una relación de equivalencia. Nos permite definir clases de objetos equivalentes y hacer el estudio de transiciones entre estas clases. Así, tenemos que especificar que significa que dos sistemas dinámicos sean cualitativamente similares equivalentes. Consideremos dos sistemas dinámicos como equivalentes si sus esquemas fase son que cualitativamente similares, es decir, si un esquema puede ser obtenido de otro par de transformación continua.

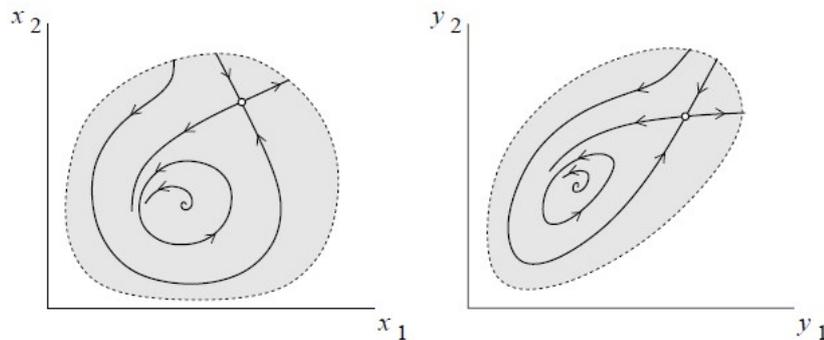


Figura 2.6: Topológicamente equivalente

**Definición 2.11.1** Un sistema dinámico  $\{\mathbb{R}^n, \varphi_t\}$  es **topológicamente equivalente** a  $\{\mathbb{R}^n, \psi_t\}$  si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapeando órbitas del primer sistema a órbitas del segundo sistema, preservando la dirección en el tiempo.

Consideremos dos sistemas a tiempo continuo topológicamente equivalentes:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.11.1}$$

y

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{2.11.2}$$

donde las funciones de la derecha son suaves. Sean  $\varphi_t$  y  $\psi_t$  los flujos correspondientes. Supongamos que  $y = h(x)$  es un mapeo invertible  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el cual es suave junto con su inversa ( $h$  es un difeomorfismo) y tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x)), \tag{2.11.3}$$

donde

$$M(x) = \frac{dh(x)}{dx} \tag{2.11.4}$$

es la matriz Jacobiana de  $h(x)$  evaluada en el punto  $x$ . Entonces, el sistema (2.11.1) es topológicamente equivalente al sistema (2.11.2). Efectivamente, el sistema (2.11.2) es obtenida del sistema (2.11.1) por el cambio suave de coordenadas  $y = h(x)$ . Así,  $h$  mapea las soluciones de (2.11.1) en las soluciones de (2.11.2),

$$h(\varphi_t x) = \psi_t h(x), \quad (2.11.5)$$

y puede hacer el papel de la regla del homeomorfismo en la definición (2.11.1).

**Definición 2.11.2** *Dos sistemas (2.11.1) y (2.11.2) satisfaciendo (2.11.3) para algún difeomorfismo  $h$  son llamados **suavemente equivalente(o difeomórficos)**.*

Dos sistemas difeomórficos son prácticamente idénticos y puede verse como el mismo sistema escrito usando diferentes coordenadas. Ciclos límite difeomórficos tienen los mismos multiplicadores y períodos. Supongamos que  $\mu = \mu(x) > 0$  es una función escalar positiva suave y que los miembros de la derecha de (2.11.1) y (2.11.2) están relacionados por

$$f(x) = \mu(x)g(x) \quad (2.11.6)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.11.3** *Dos sistemas (2.11.1) y (2.11.2) satisfaciendo (2.11.6) para una función positiva suave  $\mu$  son llamados **órbitalmente equivalentes**.*

Claramente, dos sistemas dinámicos son órbitalmente equivalentes pueden ser no-difeomorficos, teniendo ciclos que parezcan la misma curva cerrada en el espacio fase pero tienen períodos diferentes. Muy a menudo estudiamos sistemas dinámicos localmente, es decir, no en todo el espacio de  $\mathbb{R}^n$  si no en algunas regiones  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.11.4** *Un sistema dinámico  $\{\mathbb{R}^n, \varphi_t\}$  es llamado **localmente topológicamente equivalente** cerca de un punto de equilibrio  $x_0$  a un sistema dinámico  $\{\mathbb{R}^n, \psi_t\}$  cerca de un equilibrio  $y_0$  si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

[I] *Es definido en una vecindad pequeña  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$*

[II] *Satisface  $y_0 = h(x_0)$*

[III] *Mapea las órbitas del primer sistema en  $U$  dentro de órbitas del segundo sistema en  $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ , preservando la dirección en el tiempo.*

**Definición 2.11.5** *Dos sistemas (2.11.1) y (2.11.2) son llamados **suave órbitalmente equivalentes** si (2.11.2) es suavemente equivalente a un sistema que es órbitalmente equivalente a (2.11.1).*

## 2.12. Teorema de Variedad Estable

Es uno de los resultados más importante en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$ , el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.12.1)$$

tiene variedades estables e inestable  $W_s$  y  $W_u$  tangente en  $x_0$  a los subespacios estables  $E^s$  e inestables  $E^u$  del sistema linealizado

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.12.2)$$

donde  $A = Df(x_0)$ . Además  $W_s$  y  $W_u$  son de la misma dimensión como  $E^s$  y  $E^u$ , y si  $\varphi_t$  es el flujo del sistema no lineal (2.12.1), entonces  $W_s$  y  $W_u$  son positivamente y negativamente invariante bajo  $\varphi_t$  respectivamente y satisface los siguientes conjuntos invariantes:

$$W^s(x_0) = \{x : \varphi_t x \rightarrow x_0 t \rightarrow +\infty\}, \quad W^u(x_0) = \{x : \varphi_t x \rightarrow x_0 t \rightarrow -\infty\} \quad (2.12.3)$$

donde  $\varphi_t$  es el flujo asociado (2.12.1).

**Definición 2.12.1**  $W^s(x_0)$  es llamado **variedad estable** de  $x_0$ , mientras  $W^u(x_0)$  es llamado **variedad inestable** de  $x_0$ .

**Teorema 2.12.1** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo  $C^1$  con un punto de equilibrio hiperbólico  $x_0$ . Entonces hay una variedad estable e inestable  $W_{loc}^s$  y  $W_{loc}^u$ , son tangente a los subespacios estable e inestable  $E^s$  y  $E^u$  de  $Df(x_0)$  en  $x_0$  y de dimensiones correspondientes.  $W_{loc}^s$  y  $W_{loc}^u$  tan suave como el mapeo de  $f(x)$ .

## 2.13. Estabilidad Estructural

Entenderemos que si la estructura cualitativa del flujo no cambia para pequeñas variaciones del parámetro.

**Definición 2.13.1** Sean  $f$  y  $g$  son dos funciones. La distancia  $C^0$  entre  $f$  y  $g$ , denotada  $d_0(f, g)$ , está dada por

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|. \quad (2.13.1)$$

La distancia  $C^r$  denotada  $d_r(f, g)$ , está dada por:

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|) \quad (2.13.2)$$

**Observación** Usaremos la distancia  $C^r$  solo como una medida de proximidad de dos funciones y no como una métrica global sobre todas las funciones. section

**Teorema 2.13.1** Sea  $J \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : J \rightarrow J$ . Se dice que  $f$  es  $C^r$  **estructuralmente estable** en  $J$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $g : J \rightarrow J$  es conjugada topológica de  $f$  siempre que  $d_r(f, g) < \epsilon$ .



# Capítulo 3

## Variedad Central y Formas Normales

En este capítulo introduciré dos herramientas importantes para el análisis del comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos no lineales con sus puntos de equilibrio no hiperbólicos.

### 3.1. Variedad Central

El teorema de la Variedad Central nos permite determinar la estabilidad y el comportamiento cualitativo en una vecindad de un punto de equilibrio no hiperbólico  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  del sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  donde  $A = Df(x_0)$ ,  $\det A = 0$  pero  $A \neq 0$ .

Sea

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1.1)$$

donde  $f$  es suficientemente suave,  $f(0) = 0$ . Supongamos que el punto de equilibrio es no hiperbólico, es decir, que existe valores propios con parte real cero. Supongamos que hay  $u$  valores propios con  $Re\lambda > 0$ ,  $c$  valores propios con parte real  $Re\lambda = 0$ , y  $s$  valores propios con  $Re\lambda < 0$ . Sea  $E^c$  el espacio propio (generado) lineal que corresponde a la unión de los  $c$  valores propios con parte real cero. Bajo los supuestos anteriormente expuestos, el siguiente teorema sostiene

#### **Teorema 3.1.1 Teorema de La Variedad Central.**

*Hay localmente definida una variedad invariante de dimension  $c$  suave  $W_{loc}^c(0)$  de (3.1.1) que es tangente a  $E^c$  en  $x = 0$ . Además, hay una vecindad  $U$  de  $x_0 = 0$ , tal que si  $\phi_t x \in U$  para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ), entonces  $\phi_t x \rightarrow W_{loc}^c(0)$  para  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).*

**Definición 3.1.1** *La variedad  $W_{loc}^c(0)$  es llamada la Variedad Central Local.*

Ya que la variedad central es generalmente de dimensión más pequeña que el sistema (3.1.1), esta nos proporciona una simplificación del problema de determinar la estabilidad y el comportamiento cualitativo del flujo cerca del punto de equilibrio no hiperbólico de (3.1.1). La matriz  $A = Df(x_0) = \text{diag}[C, P, Q]$  y la matriz cuadrada  $C$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero, la matriz  $P$  tiene  $s$  valores propios con parte real negativos y la matriz cuadrada  $Q$  tiene  $u$  valores propios con parte real positiva, es decir, el sistema (3.1.1) puede ser escrito en la forma diagonal.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Cx + F(x, y, z) \\ \dot{y} &= Py + G(x, y, z) \\ \dot{z} &= Qz + H(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

donde  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ ,  $F(0) = 0$ ,  $G(0) = 0$ ,  $H(0) = 0$  y  $DF(0) = 0$ ,  $DG(0) = 0$ ,  $DH(0) = 0$ .

Se analizará el caso cuando  $u = 0$ , sea  $(F, G) \in C^r(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  con  $r \geq 1$ , existe  $W^s(0)$  una

variedad estable invariante de dimensión  $s$  tangente a el subespacio estable  $E^s$  de (3.1.1) en 0 y existe  $W^c(0)$  una variedad central invariante de dimensión  $c$  tangente a el subespacio central  $E^c$  de (3.1.1) en 0. Esto siguiendo que la variedad central es local de (3.1.2) en 0,

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = 0\} \quad (3.1.3)$$

en el origen. Este resultado es parte de el teorema de la Variedad Central Local, el cual es probado por [Carr].

**Teorema 3.1.2 Teorema de la Variedad Central Local.**

Sea  $f \in C^r(E)$ , donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene el origen y  $r \geq 1$ . Supongamos que  $f(0) = 0$  y que  $Df(0)$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero y  $s$  son los valores propios con parte real negativa, donde  $c + s = n$ . El sistema (3.1.1) puede ser escrito en la forma diagonal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Cx + F(x, y), \\ \dot{y} &= Py + G(x, y). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ,  $C$  es una matriz cuadrada con  $c$  valores propios con parte real cero y  $P$  es una matriz cuadrada con  $s$  valores propios con parte real negativa y  $F(0) = G(0) = 0$ ,  $DF(0) = DG(0) = 0$ , aun más, existe una  $\delta > 0$  y una función  $h \in C^r(N_\delta(0))$  ( $N_\delta(0)$  es una vecindad en el origen ) que define la variedad central local (3.1.3) y satisface

$$Dh(x)[Cx + F(x, h(x))] - Ph(x) - G(x, h(x)) = 0, \quad (3.1.5)$$

para  $|x| < \delta$ ; y el flujo en la variedad central local  $W^c(0)$  es definida por el sistema de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = Cx + F(x, h(x)), \quad (3.1.6)$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^c$  con  $|x| < \delta$ . La ecuación (3.1.5) para la función  $y = h(x)$  se sigue del hecho que la variedad central  $W^c(0)$  es invariante bajo el flujo definido por el sistema (3.1.1) por la sustitución  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  del sistema (3.1.4) teorema 3.1.2 en la ecuación

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}, \quad (3.1.7)$$

se obtiene por regla de la cadena al momento de derivar  $y = h(x)$  definida en la variedad central. La ecuación (3.1.5) es una ecuación diferencial parcial cuasi-lineal para los componentes de  $h(x)$ , por lo cual se realiza un método de aproximación de esta función, a cualquier grado que deseamos. En donde  $h(x)$  se aproxima por una serie de expansión. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, el cual también muestra que es necesario una aproximación para la forma de la variedad central local  $W_{loc}^c(0)$ .

**Ejemplo 3.1.1** Considere el siguiente sistema con  $c = s = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2y - x^5 \\ \dot{y} &= -y + x^2 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Tenemos que  $C = 0$ ,  $P = [-1]$ ,  $F(x, y) = x^2y - x^5$  y  $G(x, y) = x^2$ . Se propone la siguiente

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4) \text{ y } Dh(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3),$$

se sustituye en la ecuación:

$$Dh(x)[Cx + F(x, h(x))] - Ph(x) - G(x, h(x)) = 0$$

obtenemos

$$(2ax + 3bx^2 + \dots)(ax^4 + bx^5 + \dots - x^5) + ax^2 + bx^3 + \dots - x^2 = 0.$$

Realizando las simplificaciones necesarias se obtienen como valores de los coeficientes  $a - 1 = 0, b = 0, c = 0$ . Por lo tanto se tiene que

$$h(x) = x^2 + O(x^5),$$

Este resultado obtenido, se sustituye en la ecuación (3.1.6), entonces

$$\dot{x} = x^4 + O(x^5).$$

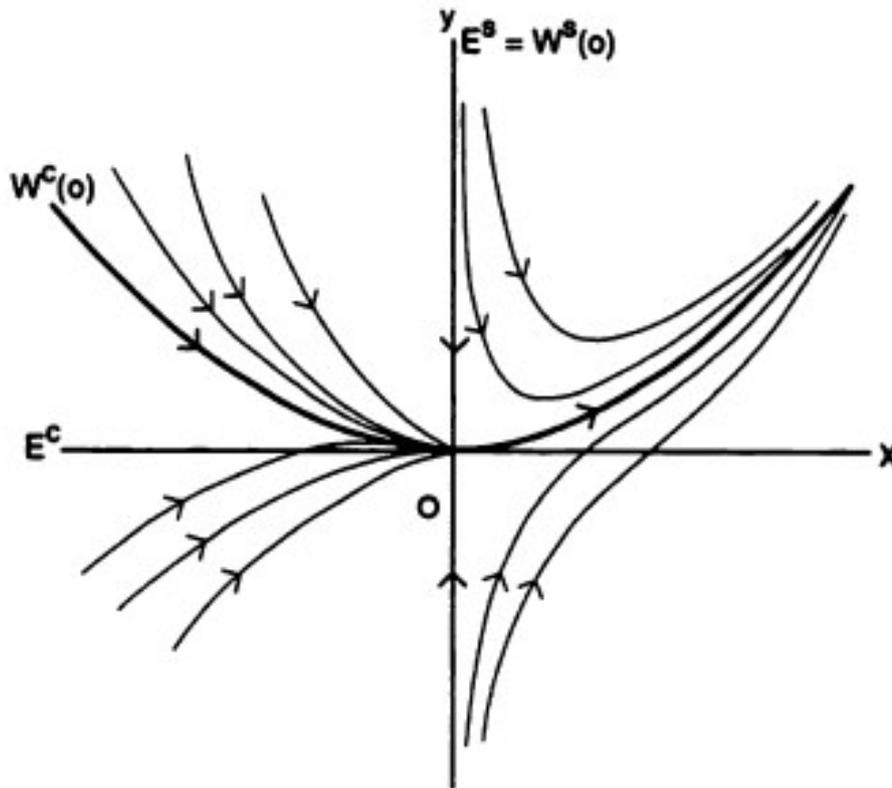


Figura 3.1: Retrato fase de (3.1.8) con la variedad central.

### 3.2. Puntos de equilibrio no hiperbólicos en $\mathbb{R}^2$

Supongamos que el origen es un punto de equilibrio aislado del sistema plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde  $P$  y  $Q$  son analíticas en alguna vecindad del origen. Se obtienen algunos resultados de estabilidad para el caso cuando la matriz  $A = Df(x)$  tiene uno o dos valores propios ceros, pero  $A \neq 0$ . Y estos resultados pueden ser extendidos en altas dimensiones. Notemos que si  $P$  y  $Q$  son de grado  $m$ , los cuales se denota como  $P_m$  y  $Q_m$ :

Supongamos que  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  en (3.2.1) son funciones analíticas de  $x$  y  $y$  en algún subconjunto abierto  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  contiene el origen y supongamos que la expansión de Taylor de  $P$  y  $Q$  sobre el origen  $(0, 0)$  comienza con términos de grado  $m$   $P_m(x, y)$  y  $Q_m(x, y)$  con  $m \geq 1$ . Entonces cualquier trayectoria de (3.2.1) se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 3.2.1** *Supongamos que  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  en (3.2.1) son funciones analíticas de  $x$  y  $y$  en algún subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  contiene al origen y supongamos que la expansión de Taylor de  $P$  y  $Q$  alrededor del  $(0, 0)$  empieza con términos de grado  $m$  los cuales son  $P_m(x, y)$  y  $Q_m(x, y)$  con  $m \geq 1$ . Entonces cualquier trayectoria de (3.2.1) se aproxima al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , ya sea espirales hacia el origen cuando  $t \rightarrow \infty$  o esta tienda al origen en una dirección definida  $\theta = \theta_0$ . Si  $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y)$  es no idénticamente cero, entonces todas las direcciones se aproxima,  $\theta_0$  satisface la ecuación*

$$\cos\theta_0 Q_m(\cos\theta_0, \sin\theta_0) - \sin\theta_0 P_m(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = 0 \quad (3.2.2)$$

Se tiene que la función

$$g(\theta) = \cos\theta Q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta P_m(\cos\theta, \sin\theta) \quad (3.2.3)$$

no es idénticamente cero, entonces hay al menos  $2(m + 1)$  direcciones  $\theta = \theta_0$  a lo largo de las trayectorias se aproximan al origen. Estas direcciones son obtenidas por las soluciones de la ecuación  $g(\theta) = 0$ .

Supongamos que  $g(\theta)$  no es idénticamente cero, entonces las curvas de soluciones de  $\dot{x} = f(x)$  que se aproxima al origen a lo largo de esta línea, divide una vecindad de el origen en número finito de regiones abiertas llamadas *sectores*.

Hay tres tipos de sectores los cuales se definen de la siguiente manera:

**Definición 3.2.1** *Un sector el cual es topologicamente equivalente a el sector que se muestra en la figura 3.2 a) es llamado un **sector hiperbólico**. Un sector el cual es topologicamente equivalente a el sector que se muestra en la figura 3.2 b) es llamado un **sector parabólico**. Y un sector el cual es topologicamente equivalente al sector que se muestre en la figura 3.2 c) es llamado **sector elíptico**.*

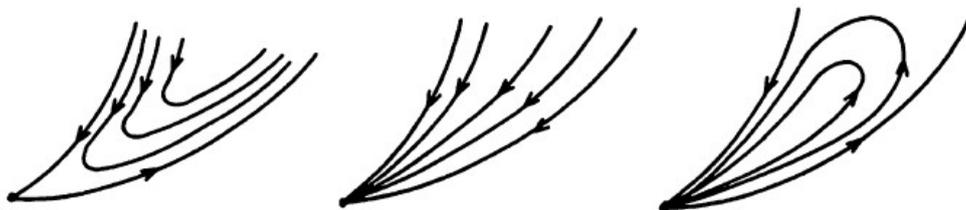


Figura 3.2: a) Sector hiperbólico b) Sector parabólico c) Sector elíptico

Ahora consideramos el caso cuando  $A$  tiene 2 valores propios cero, es decir,  $A = 0$ ,  $\det A = 0$  y  $\text{tr} A = 0$ . En donde el sistema se puede escribir de la forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde  $h(x), g(x)$  y  $R(x, y)$  son analítica en una vecindad de el origen,  $h(0) = g(0) = 0, k \geq 2, a_k \neq 0$  y  $n \geq 1$ .

El sistema  $\dot{x} = f(x)$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_2(x, y) \\ \dot{y} &= y + q_2(x, y)\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

**Teorema 3.2.2** *Sea  $k = 2m + 1$  con  $m \geq 1$  en (3.2.4) y sea  $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$ . Entonces si  $a_k > 0$ , el origen es una silla topología. Si  $a_k < 0$ , el origen es un foco o un centro si  $b_n = 0$  y también si  $b_n \neq 0$  y  $n > m$  o si  $n = m$  y  $\lambda < 0$ , de (3.2.5) es un nodo si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número par y  $n < m$ , y también si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número par,  $n = m$  y  $\lambda \geq 0$  y de (3.2.4) un punto de equilibrio con un dominio elíptico si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar y  $n < m$  y también si  $b_n \neq 0$ ,  $n$  es un número impar,  $n = m$  y  $\lambda \geq 0$ .*

**Teorema 3.2.3** *Sea  $k = 2m$  con  $m \geq 1$  en (3.2.4). Entonces el origen es una cúspide si  $b_n = 0$  y también si  $b_n \neq 0$  y  $n \geq m$  y (3.2.5) una silla-nodo si  $b_n \neq 0$  y  $n < m$ .*

Observamos que si  $Df(x_0)$  tiene un valor propio cero, entonces el punto de equilibrio  $x_0$  podría ser un nodo, una topología de silla, o una silla-nodo; y si  $Df(x_0)$  tiene dos valores propios ceros, entonces el punto crítico  $x_0$  podría ser un foco, un centro, nodo, una silla topológica, silla-nodo, cúspide o un punto crítico con un dominio elíptico.

Notar un punto de equilibrio con un dominio elíptico consiste un sector elíptico, un sector hiperbólico, dos sectores parabólicos y dos separatrices.

### 3.3. Formas Normales

Supongamos que el sistema dinámico no lineal:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n\tag{3.3.1}$$

puede escribirse de la forma

$$\dot{x} = Ax + F(x), A \in \mathbb{R}^{n \times n}\tag{3.3.2}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de coeficientes de la linealización de  $f(x)$  y  $F(x)$  es la parte no lineal. Necesitamos saber qué hacer con los puntos de equilibrio no hiperbólicos. Supongamos que el término  $F(x)$  ha sido truncado, de tal manera que representa un polinomio de grado  $k$ . Un proceso de cambios no lineales nos permiten eliminar los términos cuadráticos, luego los cúbicos y así sucesivamente lo ideal sería eliminar todos los términos no lineales con sucesivos cambios de variable, pero esto no es posible, ya que reduciríamos la ecuación (3.3.2) a una ecuación diferencial lineal, y el Teorema de Hartmann- Grobman solo lo permite para puntos hiperbólicos. Los términos que no se pueden eliminar reciben el nombre de *términos resonantes*. Si se diera el caso de que tras sucesivos cambios se hubiesen eliminado todos los términos considerados en el desarrollo de  $F(x)$  en un entorno de un punto no hiperbólico, entonces se debe considerar un desarrollo de  $F(x)$  con más términos hasta obtener un término resonante. En caso contrario habríamos reducido la expresión de  $F(x)$  a un sistema lineal, y no puede hacerse en el entorno de el punto de equilibrio no hiperbólico.

Una vez que se han eliminado todos los términos no resonantes de  $F(x)$ , la expresión resultante recibe el nombre de *forma normal*. Es el polinomio más sencillo que contiene toda la información necesaria para comprender su sistema dinámico. Dado un sistema dinámico no lineal

$$\dot{x} = f(x),\tag{3.3.3}$$

con  $f(0) = 0$ , buscar un cambio de coordenadas  $x = y + h(y)$  tal que el sistema en las nuevas coordenadas tenga la expresión *más simple posible*.

Supongamos que el campo  $f(x)$  ha sido desarrollado en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio  $x = 0$ , y que, además, su parte lineal se encuentra en forma de Jordan,

$$\dot{x} = Jx + F_2(x) + F_3(x) + \cdots, \quad (3.3.4)$$

donde  $F_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ . Supongamos que el campo  $f(x)$  posee términos no lineales de grado  $r$  en adelante, es decir,

$$\dot{x} = Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots. \quad (3.3.5)$$

Considere el cambio de coordenadas

$$x = y + h_r(y), \quad (3.3.6)$$

donde  $h_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ , tal que  $\|h_r(y)\| \ll 1$ . La idea es encontrar  $h_r$  tal que, el sistema (3.3.5) en las nuevas coordenadas no posea términos de grado  $r$ . Derivando (3.3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{y} + Dh_r(y)\dot{y} \\ &= (I + Dh_r(y))\dot{y}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

pero  $I + Dh_r(y)$  tenemos que  $\|Dh_r(y)\| \ll 1$ , entonces es una matriz invertible, tal que

$$(I + Dh_r(y))^{-1} = I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots, \quad (3.3.8)$$

luego, de (3.3.7) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I + Dh_r(y))^{-1}\dot{x} \\ &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots)(Jx + F_r(x) + F_{r+1}(x) + \cdots). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Pero  $F_r(y + h_r(y)) = F_r(y) + DF_r(y)h_r(y) + \cdots$ , luego entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (I - Dh_r(y) + (Dh_r(y))^2 + \cdots)(J(y + h_r(y)) + F_r(y) + O(\|y\|^{r+1})) \\ &= Jy + (F_r(y) + Jh_r(y) - Dh_r(y)Jy) + O(\|y\|^{r+1}) \\ &= Jy + \tilde{F}_r(y) + O(\|y\|^{r+1}), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

donde  $\tilde{F}_r(y) = F_r(y) - (Dh_r(y)Jy - Jh_r(y))$ .

**Observación** Observe que si el campo vectorial  $f(x)$  posee términos no lineales a partir de orden  $r$ , entonces el cambio de coordenadas  $x = y + h_r(y)$  produce un nuevo campo vectorial también con términos no lineales a partir de orden  $r$ . section

Veamos bajo que condiciones es posible asegurar la existencia de  $h_r$  tal que  $\tilde{F}_r = 0$ . Considere el espacio vectorial  $H^r$  de los campos vectorial cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado  $r$ , y sea  $L_J : H^r \rightarrow H^r$  el operador lineal dado por

$$L_J(h_r(y)) = Dh_r(y)Jy - Jh_r(y). \quad (3.3.11)$$

Tal operación se conoce como el paréntesis de Lie (o corchete de Lie) de los campos vectoriales  $Jy$  y  $h_r(y)$ . Basta probar que  $L_J$  es invertible, ya que  $\tilde{F}_r = 0 \Leftrightarrow h_r(y) = L_J^{-1}(F_r(y))$ .

Estudiando las formas normales de puntos de equilibrio no hiperbólicas en el plano para el sistema  $\dot{x} = f(x)$  de dimensión dos. Con un cambio de variable desplazamos el punto fijo al origen, y el sistema se escribe  $\dot{y} = g(y)$ . La existencia de puntos no hiperbólicos impone restricciones a los valores propios de  $Dg(0)$ . Son los siguientes casos:

- a)  $Dg(0)$  tiene dos valores propios reales. Uno de ellos es cero,  $\lambda_1 \neq 0, \lambda = 0$ , es decir,  $\det Dg(0) = 0$  y la  $\text{traza} Dg(0) \neq 0$ . La forma normal es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^k \begin{pmatrix} a_r y_1 y_2^{r-1} \\ b_r y_2^r \end{pmatrix} + O(|y|^{k+1}), \text{ con } a_r, b_r \in \mathbb{R}.$$

- b)  $Dg(0)$  tiene dos valores propios conjugados imaginarios,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Es decir,  $\det Dg(0) > 0$  y  $\text{traza} Dg(0) = 0$ . La forma normal es

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{1}{2}(k-1) \rfloor} (y_1^2 + y_2^2)^r \begin{pmatrix} a_r y_1 \\ b_r y_2 \end{pmatrix} + O(|y|^{k+1}), \text{ } a_r, b_r \in \mathbb{R}.$$

- c)  $Dg(0) \neq 0$  y tiene dos valores propios nulos  $\lambda_1 = \lambda = 0$ , donde  $0$  es la matriz nula, es decir,  $\det Dg(0) = \text{traza} Dg(0) = 0$ . La forma normal es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{r=2}^k \begin{pmatrix} a_r y_1^r \\ b_r y_2^r \end{pmatrix} + O(|y|^{k+1}), \text{ } a_r, b_r \in \mathbb{R}.$$



# Capítulo 4

## Bifurcaciones, formas normales topológicas y algo más

Para definir bifurcación en una ecuación diferencial, primero se introducirán algunos unos ejemplos para saber como es el comportamiento cualitativo de una EDO cuando ésta tiene un parámetro el cual va variando sus valores.

### 4.1. Ejemplos

#### Ejemplo 4.1.1 *Insensible.*

*Considere la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = c - x = F(c, x), \tag{4.1.1}$$

*donde  $c$  es un parámetro real.*

Para  $c = 0$ , se tiene que  $F(0, x) = -x$ . En este caso se podría decir que de la ecuación (4.1.1) sufre una perturbación en el campo vectorial  $\dot{x} = -x$ . El efecto de la introducción del parámetro  $c$  es que  $F(0, x) = -x$  es trasladada verticalmente una distancia  $c$ . De cualquier forma es conveniente para nuestro propósito el dejar la línea fija y trasladar el eje  $x$  verticalmente a  $-c$ . Al hacer esto, podemos determinar fácilmente los flujos para todos los valores del parámetro  $c$  de la gráfica de  $F(c, x)$ . Como se muestra en la Figura 4.1, para todos los valores del parámetro  $c$  existe un solo punto de equilibrio hiperbólico el cual es asintóticamente estable.

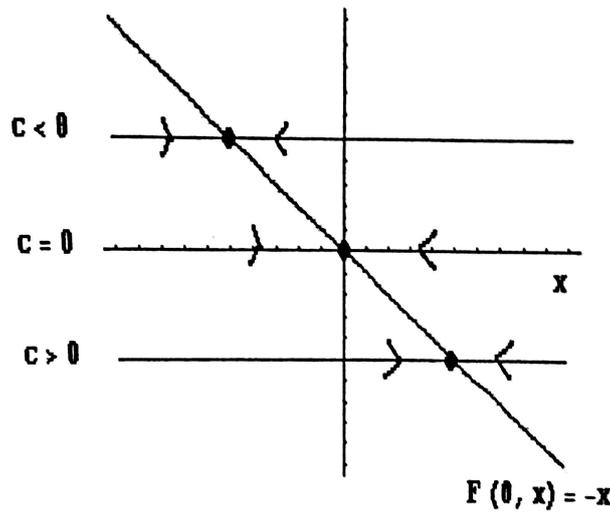


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación de (4.1.1).

**Ejemplo 4.1.2** *Bifurcación silla-nodo.*

Consideremos la ecuación escalar

$$\dot{x} = \mu - x^2. \tag{4.1.2}$$

Para  $\mu > 0$  hay dos puntos equilibrio en  $x = \pm\sqrt{\mu}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ , el punto equilibrio  $x = \sqrt{\mu}$  es estable y  $x = -\sqrt{\mu}$  es inestable. Para  $\mu = 0$  hay solo un punto de equilibrio  $x = 0$ , este es un punto de equilibrio no hiperbólico ya que  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ . Para  $\mu < 0$  no hay puntos de equilibrio.

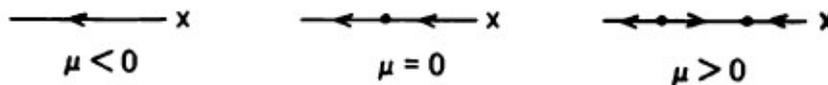


Figura 4.2: Retrato fase de (4.1.2).

Para el caso de  $\mu > 0$  se obtiene que la variedad estable e inestable son  $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$  y  $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$ . Y para  $\mu = 0$  la variedad central es  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ . El diagrama de bifurcación se observa en la Figura 4.3 y la curva que determina  $\mu - x^2 = 0$  determina la posición de los puntos de equilibrio.

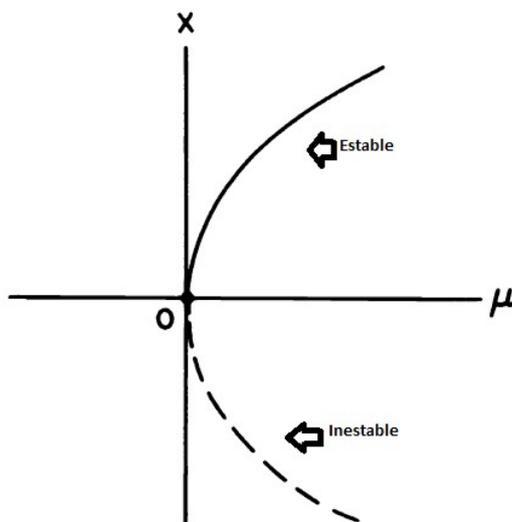


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación de la bifurcación silla-nodo.

El estudio de los cambios en la estructura cualitativa del flujo de una ecuación cuando los parámetros son variados son llamados *teoría de bifurcación*.

Para un valor dado del parámetro, decimos que una ecuación diferencial es *estructuralmente estable* si la estructura cualitativa del flujo no cambia para pequeñas variaciones del parámetro.

Un valor del parámetro para el cual el flujo no es estructuralmente estable es llamado *valor de bifurcación*, y decimos que la ecuación tiene un *punto de bifurcación*. La ecuación (4.1.1) tiene una estructura de órbita estable para todos sus valores de  $c$  y la ecuación (4.1.2) tiene todas las órbitas estable para  $c \neq 0$ , pero tiene un punto de bifurcación en  $c = 0$ .

Se requiere de un método que consiste en bosquejar las curvas en el plano  $(c, x)$ , donde las curvas representan los puntos de equilibrio para cada valor del parámetro. En particular, un punto  $(c_0, x_0)$  permanece en una de estas curvas, sí y sólo sí,  $F(c_0, x_0) = 0$ . El bosquejo que se obtiene es llamado *diagrama de bifurcación*.

### Ejemplo 4.1.3 Bifurcación Transcrítica

Considerando la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (4.1.3)$$

Los puntos de equilibrio son  $x = 0$  y  $x = \mu$ . Para  $\mu > 0$  el origen es inestable y existe otro punto de equilibrio  $x_e = \mu$  el cual es estable. Para  $\mu = 0$  hay un sólo punto de equilibrio no hiperbólico, ya que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ . Sucede que el campo vectorial  $f(x) = -x^2$  es estructuralmente inestable entonces  $\mu = 0$  es una valor de bifurcación. Para  $\mu < 0$  el origen es estable y  $x_e = \mu$  es inestable. Se observa el retrato fase de la ecuación (4.1.3) en la Figura 4.4 y el diagrama de bifurcación en la Figura 4.5.

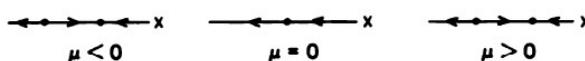


Figura 4.4: Retrato fase de la ecuación (4.1.3).

Para  $\mu = 0$  tenemos  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ ; el diagrama de bifurcación se ve en la Figura 4.1.

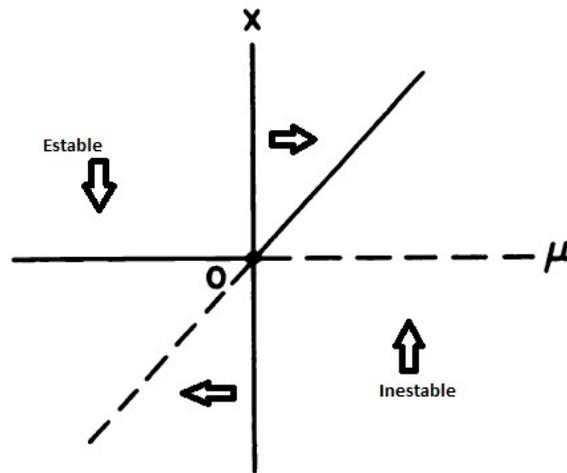


Figura 4.5: Diagrama de bifurcación de la bifurcación transcítica.

**Ejemplo 4.1.4** *Histéresis*

Considerando la ecuación diferencial cúbica que contiene un parámetro real  $c$ :

$$\dot{x} = c + x - x^3 \tag{4.1.4}$$

La variación de  $c$  determina un cambio vertical del eje  $x$  de la gráfica de  $F(c, x) = c + x - x^3$  en la Figura 4.6 se observa el flujo de la ecuación (4.1.4).

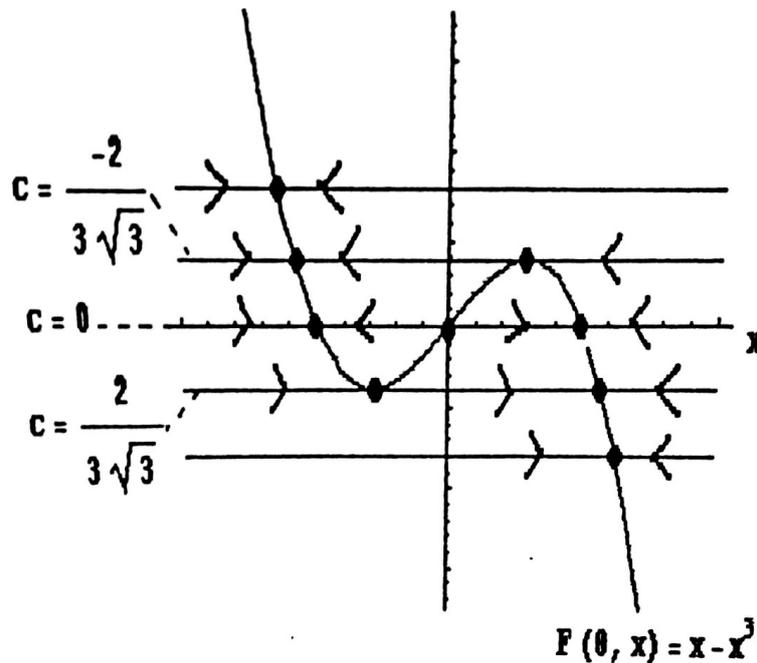


Figura 4.6: Retrato fase de 4.1.4

Para  $c = 0$ , es una estructura de órbita estable. El flujo continua teniendo estructura estable para pequeños valores de el parámetro, esto es,  $-c_1 < c < c_1$  donde  $c_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , ya que  $F(0, x) = -x^3 + x$ . Derivo  $F'(0, x) = -3x^2 + 1 = 0$  para encontrar el punto de equilibrio y el

cual es  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Evaluando  $F\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$  es el valor máximo local y es el mínimo local de  $F(0, x)$ .

Para  $c = -c_1$  o  $c = c_1$ , la ecuación tiene un punto de bifurcación. Para los valores del parámetro  $c < -c_1$  y  $c > c_1$ , la ecuación tiene estructura estable. En la Figura 4.7 vemos el diagrama de bifurcación de la ecuación (4.1.4).

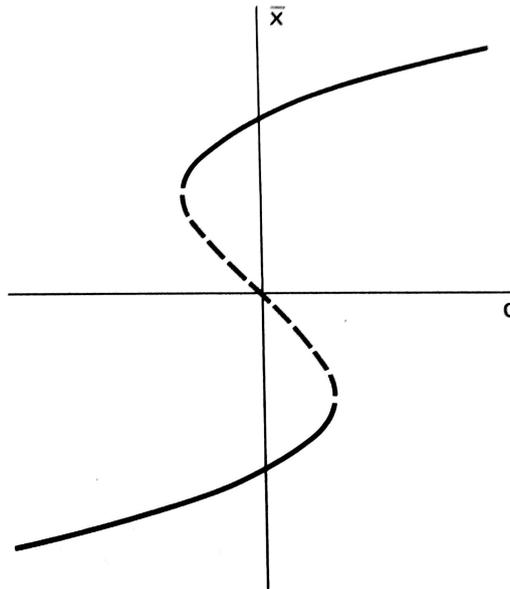


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación de histéresis.

**Ejemplo 4.1.5 Bifurcación Tenedor**

*Considerando*

$$\dot{x} = \mu x - x^3. \tag{4.1.5}$$

Para  $\mu > 0$  hay tres puntos equilibrios en  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Para  $\mu \leq 0$  se tiene el punto equilibrio  $x = 0$ . Para  $\mu = 0$  hay un punto equilibrio no hiperbólico en  $x = 0$ , ya que  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ ; el campo vectorial  $f(x) = -x^3$  es estructuralmente inestable; y  $\mu = 0$  es un valor de bifurcación. Observamos en la Figura 4.8 y el diagrama de bifurcación en la Figura 4.9.



Figura 4.8: Retrato fase (4.1.5)

Para  $\mu < 0$  se tiene como variedad estable  $W^s(0) = (-\infty, \infty)$ ; sin embargo, para  $\mu = 0$  tenemos  $W^s(0) = \phi$  y  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ .

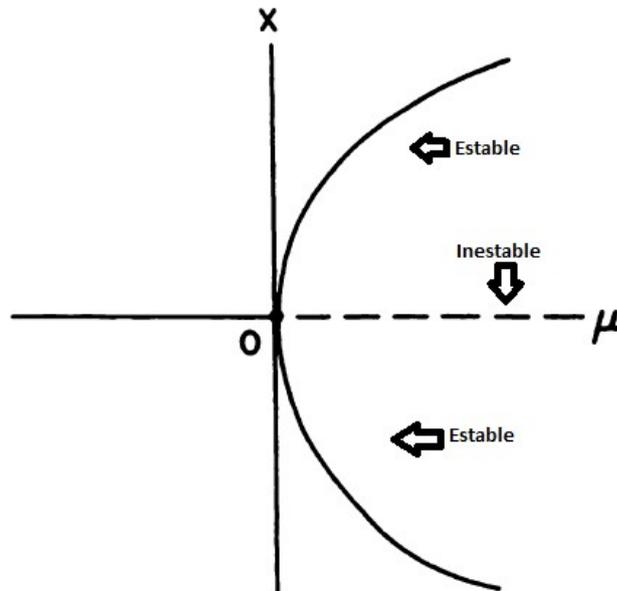


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación de la bifurcación de el tenedor

**Ejemplo 4.1.6 Cúspide***Consideramos*

$$\dot{x} = c + dx - x^3 = F(c, d, x) \quad (4.1.6)$$

que depende de los parámetros  $c$  y  $d$ . El campo vectorial (4.1.6) es la perturbación más general de la función  $-x^3$  con términos de orden menor, porque cualquier término que involucre a  $x^2$  puede ser eliminado mediante un  $-x^3 + ex^2 + \tilde{d}x + \tilde{c}$ , se usa el cambio de variable  $x \mapsto e/3 + x$  y se determinan los nuevos coeficientes  $c$  y  $d$  en términos de  $e$ ,  $\tilde{c}$  y  $\tilde{d}$ . Ahora en este problema debemos obtener los puntos de bifurcación. Las condiciones para que una ecuación diferencial tenga un punto de equilibrio no hiperbólico es la siguiente:

$$F(c, d, x) = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial x} F(c, d, x) = 0. \quad (4.1.7)$$

Para este ejemplo, se sustituyen las ecuaciones (4.1.7):

$$c + dx - x^3 = 0 \text{ y } -3x^2 + d = 0.$$

Debemos determinar todos los valores de  $c$  y  $d$  que satisfagan ambas ecuaciones. Por lo tanto, podemos considerar estas ecuaciones definiendo  $c$  y  $d$  paramétricamente en términos de  $x$ . Resolviendo la segunda ecuación para  $d$  y sustituyendo el resultado en la primera ecuación tenemos:

$$d = 3x^2 \text{ y } c = -2x^3.$$

Si ahora eliminamos a  $x$  de estas dos ecuaciones, obtenemos la siguiente ecuación para una cúspide:

$$4d^3 = 27c^2. \quad (4.1.8)$$

En la Figura 4.10 hemos dibujado la gráfica de la Ecuación (4.1.8) en el plano  $(c, d)$ ; ésta gráfica es una cúspide. Esta gráfica es dividida en regiones en donde aparecen distintos retrato fase, en los cuales se analiza diferentes comportamientos. En cada uno de estos bosquejos indicamos el flujo, y lo determinamos a partir de la ecuación (4.1.6).

En la Figura 4.10 incluye la dinámica de la ecuación (4.1.4) y (4.1.5), al extraer la dinámica (4.1.4) se fija a  $d$  en un valor positivo, decimos  $d = 1$ , y entonces obtenemos el diagrama de bifurcación de histéresis. Al extraer la dinámica de la ecuación (4.1.5), se fija  $c = 0$  y se obtiene el diagrama de bifurcación tenedor.

Aunque con algunas dificultades para dibujarlo el diagrama de bifurcación completo de la ecuación (4.1.6) en el espacio tridimensional  $(c, d, x)$  puede ser construido a partir de la ecuación  $c + dx - x^3 = 0$ .

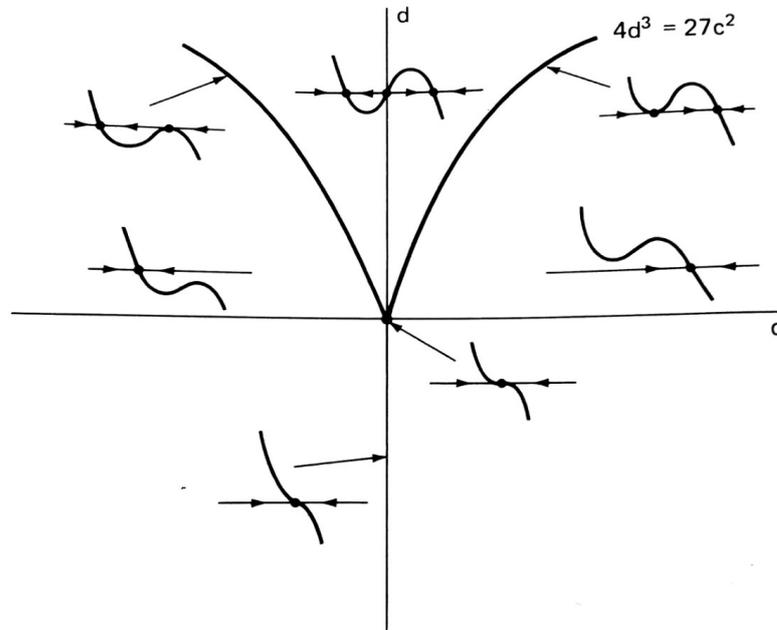


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación Cuspíde

## 4.2. Bifurcación

A continuación daremos una definición formal para el concepto de bifurcación, consideremos un sistema dinámico que depende de parámetros. En el caso tiempo-continuo se escribirá como

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (4.2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  representan las variables fase y parámetros respectivamente. Como los parámetros varían, el retrato fase también varía. Existen dos posibilidades: el sistema permanece topológicamente equivalente al original o su topología cambia.

**Definición 4.2.1** *La presencia de una topología no equivalente al esquema fase bajo la variación de parámetros será una **bifurcación**.*

Entonces una bifurcación es un cambio del tipo topológico del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor de bifurcación (crítico). Las bifurcaciones de ciclos límites que corresponden a bifurcaciones locales de mapeos de Poincaré asociados, son llamadas **bifurcaciones locales de ciclos**. También existen bifurcaciones que pueden ser detectadas buscando en vecindades pequeñas de puntos de equilibrio o ciclos, esta bifurcación son llamada **globales**.

**Definición 4.2.2** *Un **diagrama de bifurcación** del sistema dinámico es una estratificación de su espacio paramétrico inducido por la equivalencia topológica, junto con su esquema fase representativo para cada estado.*

La bifurcación de Hopf de un punto de equilibrio es caracterizada por la presencia de un par de valores propios imaginarios puros de la matriz Jacobiana evaluada en su equilibrio.

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0.$$

**Definición 4.2.3** La **codimensión** de una bifurcación en el sistema (4.2.1) es la diferencia entre la dimensión del espacio paramétrico y la dimensión de la correspondiente frontera de bifurcación.

Nos referimos a este concepto de codimensión de una bifurcación como el número mínimo de parámetros en una familia de sistemas necesarios para reproducir la bifurcación.

### 4.3. Forma Normal topológica para bifurcaciones

Afortunadamente, los diagramas de bifurcación no son enteramente caóticos. Consideremos dos sistemas dinámicos.

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (4.3.1)$$

y

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (4.3.2)$$

con  $f$  y  $g$  suaves con el mismo número de variables y parámetros. La siguiente definición es parecida a la definición (1.11), sólo que esta tiene modificaciones necesarias debido a la dependencia de parámetros.

**Definición 4.3.1** El sistema dinámico (4.3.1) es **topológicamente equivalente** a (4.3.2) si

- a) Existe un homeomorfismo del espacio paramétrico  $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \beta = p(\alpha)$ ;
- b) Existe un homeomorfismo paramétrico dependiente del espacio fase  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, y = h_\alpha(x)$ , mapeando órbitas del primer sistema con valores paramétricos  $\alpha$  dentro de órbitas del segundo sistema con valores paramétricos  $\beta = p(\alpha)$  preservando la dirección en el tiempo.

Hay otra definición que surge en relación a (4.2.1) para comportamientos locales del sistema.

**Definición 4.3.2** Dos sistemas (4.3.1) y (4.3.2) son llamados **localmente topológicamente equivalentes cerca del origen** si existe un mapeo  $(x, \alpha) \rightarrow (h_\alpha(x), p(\alpha))$  definido en una vecindad pequeña de  $(x, \alpha) = (0, 0)$  en el producto directo  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y tal que

- a)  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un homeomorfismo definido en una vecindad pequeña de  $\alpha = 0, p(0) = 0$ .
- b)  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo parámetro dependiente definido en una vecindad pequeña  $U_\alpha$  de  $x = 0, h_0(0) = 0$  y mapeando órbitas de (4.3.1) en  $U_\alpha$  dentro de órbitas de (4.3.2) en  $h_\alpha(U_\alpha)$ , preservando la dirección del tiempo.

Sea el sistema

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta, \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (4.3.3)$$

el cual tiene en  $\beta = 0$  un equilibrio  $\xi = 0$  satisfaciendo  $k$  condiciones de bifurcación determinando una codim  $k$  de bifurcación de este punto de equilibrio. Aquí  $\sigma$  es un vector de coeficientes  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$  del polinomio involucrado en (4.3.3). En todos los casos consideramos que hay un número infinito de regiones en el espacio de coeficientes correspondiente a los diagramas de

bifurcación topológicamente no equivalentes de (4.3.3). En la situación más simple, los coeficientes  $\sigma_i = 1$  excepto un simple  $\sigma_{i0} = \pm 1$ . En situaciones más complejas, algunas componentes de  $\sigma$  pueden tomar valores reales (modulados). Junto con el sistema (4.3.3), consideremos un sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k \quad (4.3.4)$$

teniendo en  $\alpha = 0$  un equilibrio  $x = 0$ .

**Definición 4.3.3 Forma normal topológica.**

El sistema (4.3.4) es llamado una forma normal topológica para la bifurcación, si cualquier sistema genérico (4.3.3) con el punto de equilibrio  $x = 0$  satisfaciendo las mismas condiciones de bifurcación en  $\alpha = 0$ , es localmente topológicamente equivalente cerca del origen de (4.3.4) para algún valor del coeficiente  $\sigma_i$ .

Naturalmente, tenemos que explicar que significa un sistema genérico. En todos los casos consideramos, *genérico* aquel sistema que satisface un número finito de condiciones genéricas. Estas condiciones tendrán la forma de no igualdad:

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

donde cada  $N_i$  es alguna función(algebraica) de ciertas derivadas parciales de  $f(x, \alpha)$  con respecto a  $x$  y  $\alpha$  evaluada en  $(x, \alpha) = (0, 0)$ . Así, un sistema típico parámetro-dependiente satisface estas condiciones. Actualmente, el valor de  $\sigma$  esta determinando por valores de  $N_i, i = 1, \dots, s$ . Esto es útil para distinguir estas condiciones genéricas, las cuales son determinadas por el sistema en el valor de parámetro crítico  $\alpha = 0$ . Estas condiciones pueden ser expresadas en términos de derivadas parciales de  $f(x, 0)$  con respecto a  $x$  evaluado en  $x = 0$ , y son llamadas *condiciones no degenerativas*. Todas las otras condiciones, en la cual las derivadas de  $f(x, \alpha)$  con respecto al parámetro  $\alpha$  están involucradas, son llamadas *condiciones de transversalidad*. El papel de estos dos tipos de condiciones es diferente. Las condiciones no degenerativas garantizan que los equilibrios (singularidades) no son también degenerativas, mientras que las condiciones de transversalidad aseguran que los parámetros desarrollan estas singularidades en una forma genérica.

**Definición 4.3.4 Sistema inducido.** El sistema

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (4.3.5)$$

se dice ser **inducido** por el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (4.3.6)$$

si  $g(y, \beta) = f(y, p(\beta))$ , donde  $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un mapeo continuo.

Note que el mapeo  $p$  no es necesariamente un homeomorfismo, entonces este puede no ser invertible.

**Definición 4.3.5 Deformación Versal.** La familia de campos vectoriales suaves (4.3.1) y (4.3.2) es llamada una **deformación versal** de

$$\dot{x} = f(x, \lambda_0) \quad (4.3.7)$$

en el punto  $x = x_0$ , si cada familia  $m$ -paramétrica suave que se reduce (4.3.7) para una elección particular de los parámetros es equivalente a una familia de campos vectoriales inducida por (4.3.1) y (4.3.2).

## 4.4. Teorema de Sotomayor

A continuación se enunciará el teorema de Sotomayor, el cual nos permite analizar un sistema dinámico para saber que tipos de bifurcaciones hay en el, las cuales podrían ser silla-nodo, tenedor o transcítica.

**Teorema 4.4.1** *Sea el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.4.1)$$

*Supongamos que  $f(x_0, \mu_0) = 0$  y que la matriz  $A = Df(x_0, \mu_0)$  de tamaño  $n \times n$  tiene un valor propio simple  $\lambda = 0$  con su respectivo vector propio  $v$  y que  $A^T$  tiene un vector propio  $w$  correspondiente al valor propio  $\lambda = 0$ . Además, supongamos que  $A$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa y  $(n - k - 1)$  valores propios con parte real positiva y que las siguientes condiciones se satisfacen*

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0. \quad (4.4.2)$$

*Entonces hay una curva suave de puntos de equilibrio de (4.4.1) en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  que pasa por  $(x_0, \mu_0)$  y tangente al hiperplano  $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$ . Dependiendo del signo de la expresión (4.4.2), no hay puntos de equilibrios de (4.4.1) cerca  $x_0$  cuando  $\mu < \mu_0$  (o cuando  $\mu > \mu_0$ ) y hay dos puntos de equilibrios de (4.4.1) cerca de  $x_0$  cuando  $\mu > \mu_0$  (o cuando  $\mu < \mu_0$ ).*

*El sistema (4.4.1) experimenta una **bifurcación silla-nodo** en el punto de equilibrio  $x_0$  cuando el parámetro  $\mu$  pasa a través de el valor de bifurcación  $\mu = \mu_0$ .*

La siguiente condición es la que satisface el comportamiento de una **bifurcación transcítica**:

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) = 0, \quad w^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] \neq 0 \quad (4.4.3)$$

$$w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0$$

Por último, la siguiente condición es para el comportamiento de la **bifurcación del tenedor**:

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) = 0, \quad w^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)] \neq 0 \quad (4.4.4)$$

$$w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] = 0 \quad \text{y} \quad w^T [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] \neq 0.$$

**Ejemplo 4.4.1** *Consideremos el sistema plano*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

El sistema (4.4.5) tiene como punto de equilibrio  $(0, 0)$  con el valor del parámetro  $\mu = 0$  con sus respectivos valores propios  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -1$  y como linealización

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.6)$$

El vector propio  $v = w = (1, 0)^T$  corresponde al valor propio  $\lambda_1 = 0$ . Este sistema satisface la condición (4.4.2), ya que  $w^T f_\mu(0, 0) = 1$  y  $w^T [D^2 f(0, 0)(v, v)] = w^T [v^T D^2 f(0, 0)v] = -2$ , entonces hay una bifurcación silla-nodo. Para  $\mu < 0$  no hay puntos de equilibrios.

Para  $\mu > 0$  hay dos puntos de equilibrios en  $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ ,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  es un nodo estable y  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  es una silla. Observación: en el eje  $x$  la dirección del vector propio  $v$  y que este es una variedad central analítica de el punto de equilibrio no hiperbólico en el origen para  $\mu = 0$ .

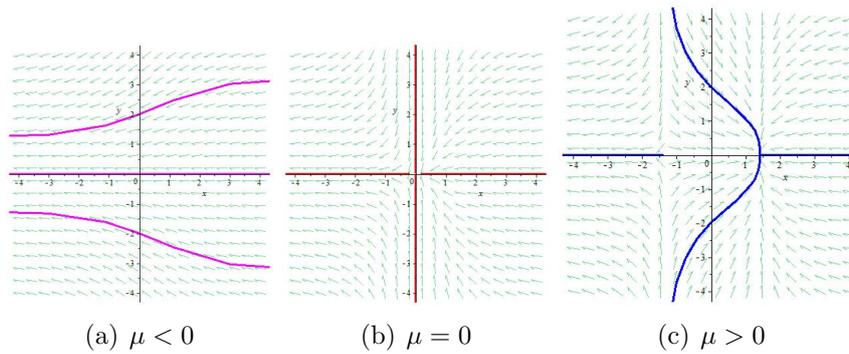


Figura 4.11: Retrato fase

**Ejemplo 4.4.2** Consideremos el siguiente sistema en el plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Sea  $\mu_0 = 0$  el valor de bifurcación y  $(0, 0)$  el punto crítico no hiperbólico. Se tiene como vector propio  $v = w^T = (1, 0)^T$  y

$$A = Df_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que  $w^T f_\mu(0, 0) = 0$ ,  $w^T [Df_\mu(0, 0)v] = 1$  y  $w^T [D^2 f(0, 0)(v, v)] = w^T [v^T D^2 f(0, 0)v] = -2$ . Por lo que satisface las condiciones (4.4.3), por tanto es una bifurcación transcritical. A continuación se muestra el retrato fase del sistema (4.4.7):

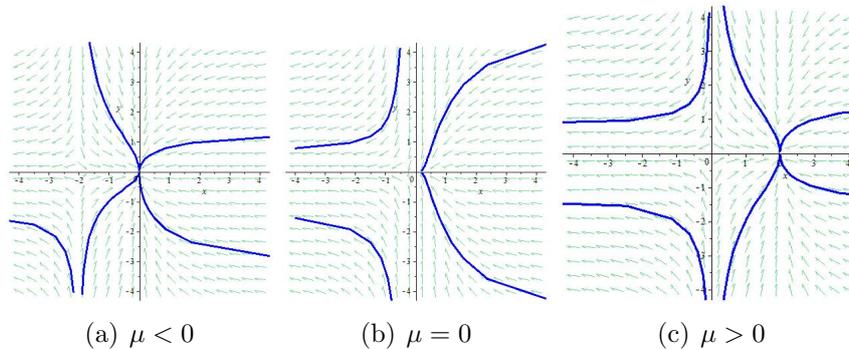


Figura 4.12: Retrato fase

**Ejemplo 4.4.3** El sistema es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Se tiene como punto crítico  $x_0 = (0, 0)$  con el valor de bifurcación  $\mu_0 = 0$ . Sea su vector propio de  $\lambda = 0$ ,  $v = w = (1, 0)^T$ . Se satisface la condición (4.4.4), ya que se cumple que  $w^T f_\mu(x_0, \mu_0) = 0$ ,  $w^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] = 1$ ,  $w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] = 0$  y  $w^T [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] = -6$ . Por lo tanto el sistema tiene un comportamiento de bifurcación de tenedor. Para  $\mu \leq 0$  el único punto crítico es el origen y para  $\mu > 0$  hay puntos críticos los cuales son el origen y  $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ . Además para  $\mu = 0$ , el punto crítico no hiperbólico en el origen es un nodo. El retrato fase se observa a continuación:

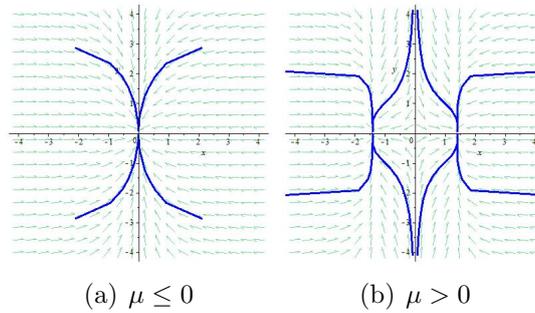


Figura 4.13: Retrato fase del sistema (4.4.8)

## 4.5. Bifurcación de Hopf

Este sistema tiene como característica que tiene un punto de equilibrio no hiperbólico con dos valores propios imaginarios puros. Por el teorema de la variedad central el campo vectorial tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & -\operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ \operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, \mu) \\ f_2(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (4.5.1)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son no lineales en  $x$  y  $y$ , y  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  son los valores propios de el campo vectorial linealizado sobre el punto de equilibrio en el origen.

Es de la forma

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu),$$

con la suposición

$$\alpha(0) = 0, \omega(0) \neq 0.$$

La forma normal que tiene el sistema (4.5.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5) \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Se realiza el cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

De (4.5.3) se omiten los términos de orden superior

$$\begin{aligned} \dot{r} &= d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2 \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

donde se define

$$\acute{\alpha}(0) = d, \quad a(0) = a, \quad \omega(0) = \omega, \quad \acute{\omega}(0) = c, \quad b(0) = 0. \quad (4.5.5)$$

Observaciones para precisar los valores de  $r > 0$  y  $\mu$  para el cual  $\dot{r} = 0$ , pero  $\dot{r} \neq 0$ , corresponde a órbitas periódicas de (4.5.4).

**Lema 4.5.1** Para  $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$  y  $\mu$  suficientemente pequeña

$$(r(t), \theta(t)) = \left( \sqrt{\frac{-\mu d}{a}}, [\omega + (c - \frac{bd}{a})\mu]t + \theta_0 \right) \quad (4.5.6)$$

es una órbita periódica para (4.5.4).

Demostración en [Wiggins,2003].

**Lema 4.5.2** *La órbita periódica es*

*i) asintóticamente estable para  $a < 0$ ;*

*ii) inestable para  $a > 0$ .*

Donde  $a$  es el primer coeficiente de Liapunov. Notemos que debemos tener  $r > 0$ , (4.5.6) es una sola órbita periódica posible para (4.5.4). Por tanto, para  $\mu \neq 0$ , (4.5.4) posee una única órbita periódica teniendo amplitud  $O(\sqrt{\mu})$ .

**Observación:** para el caso de que  $a < 0$  es posible que la órbita periódica exista ya sea para  $\mu > 0$  o  $\mu < 0$ ; sin embargo, para cada caso la órbita periódica es asintóticamente estable. Similarmente, para  $a > 0$  es posible que la órbita periódica exista ya sea para  $\mu > 0$  o  $\mu < 0$ ; sin embargo, en cada caso la órbita periódica es inestable. El caso  $a < 0$  se refiere cuando la bifurcación es *supercrítica*, y el otro caso  $a > 0$  se refiere cuando la bifurcación es *subcrítica*.

Si  $a \neq 0$  y  $d \neq 0$  estas soluciones se encuentran a lo largo de la parábola  $\mu = \frac{-ar^2}{d}$ . Esto implica que la superficie de las órbitas periódicas tiene una tangencia cuadrática con su plano tangente  $\mu = 0$  en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . El contenido del teorema de la bifurcación de Hopf es que las propiedades cualitativas de (4.5.3) cerca de el origen permanece inalterable si los términos de orden superior son agregados al sistema:

**Teorema 4.5.1** *Supongase que el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.5.7)$$

*tiene un equilibrio  $(x_0, \mu_0)$  que las siguientes propiedades se satisfacen:*

*H1)  $\frac{\partial f(x_0, \mu_0)}{\partial x}$  tiene un simple par de valores propios imaginarios puros.*

*Entonces H1) implica que hay una curva suave de equilibrio  $(x(\mu), \mu)$  con  $x(\mu_0) = x_0$ . Los valores propios  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  de  $\frac{\partial f(x(\mu), \mu_0)}{\partial x}$  los cuales son imaginarias en  $\mu = \mu_0$  varía suavemente con  $\mu$ . Si, por otra parte*

*H2)*

$$\frac{d}{d\mu}(\text{Re}\lambda(\mu)) \Big|_{\mu = \mu_0} = d \neq 0, \quad (4.5.8)$$

*entonces hay una única variedad central de dimensión tres pasa a través  $(x_0, \mu_0)$  en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y un sistema suave de coordenadas para el cual la expansión de Taylor de grado 3 en la variedad central es obtenida por (4.5.3). Si  $a \neq 0$ , hay una superficie de soluciones periódicas en la variedad en la cual tiene una tangencia cuadrática con el espacio propio de  $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0)$  aceptando segundo orden con el paraboloides  $\mu = -(\frac{a}{d})(x^2 + y^2)$ .*

Los cálculos explícitos puede ser encontrados en [Hassard, Kazarinoff y Wan], [Marsden y McCracken] y [Guckenheimer, 1993]; ahí justifica este resultado. Se tiene la siguiente forma normal del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, 0) \\ f_2(x, y, 0) \end{pmatrix} \quad (4.5.9)$$

con  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  y  $Df_1(0) = Df_2(0) = 0$  y el primer coeficiente de Lyapunov  $a(0) \equiv a$  es obtenido por

$$a = \frac{1}{16}[f_{1xxx} + f_{1xyy} + f_{2xxy} + f_{2yyy}] + \frac{1}{16\omega}[f_{1xy}(f_{1xx} + f_{1yy}) - f_{2xy}(f_{2xx} + f_{2yy}) - f_{1xx}f_{2xx} + f_{1yy}f_{2yy}] \quad (4.5.10)$$

en donde las derivadas parciales son evaluadas en el punto de bifurcación.

## 4.6. Teoría de Melnikov

La teoría de Melnikov nos permite establecer la existencia de puntos transversales homoclínicos del mapeo de Poincaré para una órbita periódica de un sistema dinámico perturbado de la forma

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.6.1)$$

donde:

- i)  $f$  es un campo vectorial Hamiltoniano de clase  $C^r, r \geq 2$ .
- ii)  $\epsilon g(x, t)$  es la  $\epsilon$ -perturbación con  $\epsilon > 0$  y  $g$  es una aplicación periódica de período  $T > 0$  de clase  $C^r$  con  $r \geq 2$ .

Los campos vectoriales  $f$  y  $g$  son acotados en conjuntos acotados.

**Definición 4.6.1** Sea  $p_0$  un punto de equilibrio hiperbólico tipo silla para el sistema (4.6.1) cuando  $\epsilon = 0$ . Un punto  $p \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $p \in W_u(p_0) \cap W^s(p_0)$  es llamado **punto homoclínico**.

Si  $W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$  tiene intersección transversal, entonces el punto es llamado punto homoclínico transversal.

**Definición 4.6.2** Sea  $p \in W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$  con  $p \neq p_0$ , entonces la órbita de  $p$ , en el sistema (4.6.1) para  $\epsilon = 0$ , que se aproxima a  $p_0$ , cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , es llamada **órbita homoclínica**.

Se desarrollará un método que permita probar la existencia o no existencia de puntos homoclínicos transversales de la aplicación de primer mapeo de Poincaré para una órbita periódica. Para realizar el estudio, vamos a suponer lo siguiente:

- A1) Para  $\epsilon = 0$ , la ecuación (4.6.1) posee una órbita homoclínica  $q_0(t)$  para el punto de equilibrio hiperbólico de tipo silla  $p_0$ .
- A2)  $\Gamma^0 = \{q_0(t) | t \in \mathbb{R} \cup \{p_0\}\}$  es tal que el  $int(\Gamma^0)$  está llena de una familia continua  $\{q^\alpha\}_{\alpha \in (-1,0)}$  de órbitas periódicas. Siendo  $d(x, \Gamma^0) = \inf_{q \in \Gamma^0} |x - q|$ , entonces se tiene que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d(q^\alpha(t), \Gamma^0) = 0$ .
- A3)  $h_\alpha = H(q^\alpha(t))$  es constante para todo  $t$  y  $q^\alpha(t + T_\alpha) = q^\alpha(t)$ . Entonces  $T_\alpha$  es una función diferenciable de  $h_\alpha$  y  $\frac{dT_\alpha}{dh_\alpha} > 0$  en el  $int(\Gamma^0)$ , donde  $H$  es la función Hamiltoniana del campo vectorial  $f$ . Se observa la siguiente Figura 4.14

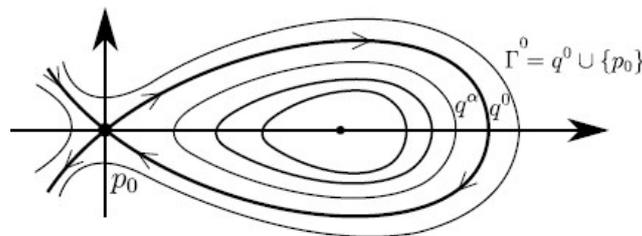


Figura 4.14: El diagrama de fase para el sistema (4.6.1) asociado a las hipótesis A1), A2) y A3).

**Definición 4.6.3** Considere la sección transversal  $\Sigma^{t_0}$  y el punto  $q^0(0) \in \Sigma^{t_0}$ . Se sabe que  $f(q^0(0))$  es un vector tangente a la órbita homoclínica en  $P^0$  en  $q^0(0)$ . Se considera la recta  $L$ , recta normal a  $f(q^0(0))$  en  $q^0(0)$  y cuya dirección es dada por:

$$f^\perp(q^0(0)) = (-f_2(q^0(0)), f_1(q^0(0)))^T. \quad (4.6.2)$$

Como las variedades invariantes  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$  están  $C^r$ -próximas de  $\Gamma^0$ , estas variedades cruzan la recta  $L$ . Sean  $q_\epsilon^u(t_0) = q_\epsilon^u(t_0, t_0)$  y  $q_\epsilon^s(t_0) = q_\epsilon^s(t_0, t_0)$  los únicos puntos en  $W^u(p_\epsilon^{t_0}) \cap L$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0}) \cap L$  de manera que la distancia a  $p_\epsilon^{t_0}$  sea mínima. Se define la separación de las variedades  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$  en la sección  $\Sigma^{t_0}$  en  $q^0(0)$  por la siguiente igualdad

$$D(t_0) = q_\epsilon^u(t_0) - q_\epsilon^s(t_0). \quad (4.6.3)$$

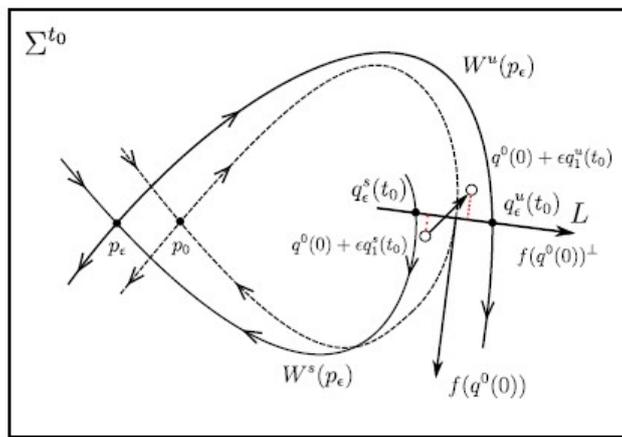


Figura 4.15: La separación de las variedades  $W^u(p_\epsilon^{t_0})$  y  $W^s(p_\epsilon^{t_0})$

Sea la función de Melnikov:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t) dt, \quad (4.6.4)$$

aquí,  $q^0(t)$  es la órbita homoclínica del sistema no perturbado y cuya integral converge absolutamente; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(q^0(t-t_0)) \wedge g(q^0(t-t_0), t)| dt, \quad (4.6.5)$$

es convergente y  $f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$ . A continuación se presenta un resultado que relaciona la distancia  $d$  con la función de Melnikov, el cual permite medir la distancia entre las variedades estable e inestable del sistema perturbado. De esta manera, cuando la función de Melnikov se anula, se tiene la intersección de las variedades estable e inestable.

**Teorema 4.6.1** Si la función de Melnikov tiene un cero simple en  $t_0$ , es decir,  $M(t_0) = 0$  y  $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$  y no depende de  $\epsilon$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $W^u(p_\epsilon)$  y  $W^s(p_\epsilon)$  se intersectan transversalmente. Y si la función de Melnikov no posee ceros, entonces  $W^u(p_\epsilon) \cap W^s(p_\epsilon) = \emptyset$

La demostración se ve en [Guckenheimer,1993].

## 4.7. Bifurcación homoclínica

Supongamos el campo vectorial (4.6.1) (donde el sistema no perturbado es un sistema Hamiltoniano), en este caso la función de Melnikov depende del parámetro  $\mu$ , es decir, se denota  $M(t_0, \mu)$  y tenemos el siguiente teorema de bifurcación para la función de Melnikov.

**Teorema 4.7.1** *Si para (4.6.4), se satisface que  $M(t_0, \mu_0) = 0$ ,  $\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0, \mu_0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 M}{\partial t_0^2}(t_0, \mu_0) \neq 0$  y  $\frac{\partial M}{\partial \mu}(t_0, \mu_0) \neq 0$ , entonces para  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema (4.6.4) experimenta una bifurcación homoclínica a partir del valor de bifurcación  $\mu = \mu_0 + O(\epsilon)$ .*

# Capítulo 5

## Bifurcación Takens- Bogdanov

Supongamos que tenemos un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$  con un punto de equilibrio en el cual la matriz asociada con la linealización del campo vectorial evaluada en el, tiene un valor propio cero de multiplicidad dos. En este caso sabemos que el estudio de la dinámica cerca de este punto de equilibrio no hiperbólico puede ser reducido al estudio de la dinámica del campo vectorial restringido a la variedad central asociada de dimensión dos.

Supongamos que la reducción de la variedad central de dimensión dos que se ha hecho, y la forma canónica de Jordan de la parte lineal del campo vectorial esta dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.0.1)$$

Desarrollamos en este capítulo los dos diferentes casos de la bifurcación Takens-Bogdanov el primer caso es el genérico o no degenerado, que tiene la siguiente forma normal con términos de segundo grado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy. \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

Para su estudio se agrega una deformación versal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y + ax^2 + bxy, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son los parámetros. Que al variar estos parámetros aparecerán distintas dinámicas.

Por otra parte, el segundo caso es el no genérico o degenerado, su forma normal tiene términos de tercer grado y esta dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax^3 + bx^2y. \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

De igual manera, se agrega una deformación versal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y + ax^3 + bx^2y, \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son parámetros, y también al variar estos parámetros se encontrarán distintas dinámicas.

### 5.1. Caso genérico

Iniciaremos con el desarrollo de la forma normal del caso genérico, que se había comentado anteriormente en el sistema (5.0.2), empezamos con los términos de segundo orden.

Tenemos

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.1.1)$$

Donde  $H_2$  es el conjunto de vectores del monomio de grado 2, los cuales forman una colección de vectores linealmente independientes. Por otra parte, por medio de la teoría de Lie, se define un mapeo denotado por  $L_J(H_2)$  como:

$$L_J(H_2) \equiv -(DH_2(y)J_y - JH_2(y)). \quad (5.1.2)$$

Así que calculamos  $L_J(H_2)$ , en donde se realiza la acción de cada uno de los elementos de la base de  $H_2$ .

$$\begin{aligned} L_J \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \\ L_J \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ L_J \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ L_J \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \\ L_J \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, \\ L_J \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Para (5.1.3) tenemos

$$L_J(H_2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.1.4)$$

Para este conjunto, los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.1.5)$$

son linealmente independientes y por tanto, los términos de segundo orden que son combinaciones lineales de estos 4 vectores pueden ser eliminados. Ahora bien, se calcula el espacio complementario de  $L_J(H_2)$ . Este espacio, se denota como  $G_2$ , será de dimensión dos.

Para calcular  $G_2$  será útil primero obtener una representación matricial para el operador lineal  $L_J(\cdot)$ . Esto se hará con respecto a la base dada en (5.1.1), se construyen las columnas de la matriz de los coeficientes que multiplican cada elemento de la base que son obtenidos cuando  $L_J(\cdot)$  actúa individualmente en cada elemento de la base de  $H_2$  dada en (5.1.1). Usando (5.1.3), la representación de la matriz de  $L_J(\cdot)$  es dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Una forma de encontrar el espacio complementario  $G_2$  podría ser que de 6 vectores seleccionamos 2 que son linealmente independientes y ortogonales (usando el producto punto en  $\mathbb{R}^6$ ) de cada columna de la matriz (5.1.6), o en otras palabras 2 vectores propios izquierdo linealmente independientes de el valor propio cero. Los cuales son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.7)$$

Por tanto, los vectores son de la forma

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.1.8)$$

es un subespacio de dimensión dos de la base de  $H_2$  que es el complementario de  $L_J(H_2)$ . Esto implica que la forma normal a través de los términos de segundo orden es obtenido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_1x^2 + O(3), \\ \dot{y} &= a_2xy + a_3x^2 + O(3), \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

donde  $a_1, a_2, a_3$  son constantes.

La elección el espacio complementario no es única, es decir, se puede escoger de otra forma. Ahora seleccionamos

$$G_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.1.10)$$

Este espacio complementario puede ser obtenido por tomar el vector

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}, \quad (5.1.11)$$

dado por(5.1.8) y añadiendo el vector

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}x^2 \\ -\frac{1}{2}xy \end{pmatrix}$$

contenido en  $L_J(H_2)$ . Tenemos como resultado al vector

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4}x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(y la constante  $\frac{5}{4}$  es irrelevante). Para el otro elemento de la base del espacio complementario, simplemente retenemos el vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

dado en (5.1.8). Entonces el espacio complementario tiene como elementos:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.1.12)$$

Con esta elección de  $G_2$ , tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_1x^2 + O(3), \\ \dot{y} &= a_2x^2 + O(3).\end{aligned}\tag{5.1.13}$$

Esta forma normal cerca del punto de equilibrio de un campo vectorial en el plano con la parte lineal dada por (5.0.1) fue primero estudiada por [Takens,1974].

Otra posibilidad para  $G_2$  es obtener a partir de

$$G_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \right\},\tag{5.1.14}$$

donde el segundo vectores es obtenido por la resta del vector

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix},$$

que esta contenido en (5.1.5) y el vector

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix},$$

que esta en (5.1.8). Entonces por esta selección de  $G_2$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + O(3) \\ \dot{y} &= a_1x^2 + b_2xy + O(3);\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

esta es la forma normal para un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  cerca del punto de equilibrio con la parte lineal dada por (5.0.1) que fue primero estudiada por [Bogdanov, 1975].

Dada la forma normal de Bogdanov,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + O(|x|^3, |y|^3) \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + O(|x|^3, |y|^3); (x, y) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}\tag{5.1.16}$$

Se omitirán los términos  $O(3)$  en (5.1.16) y se analizará el resultado de la forma normal truncada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy.\end{aligned}\tag{5.1.17}$$

Hacemos un cambio de variables para realizar el reescalamiento de las variables, que se proponen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \alpha x, \\ y &\rightarrow \beta y, \\ t &\rightarrow \gamma t, \gamma > 0\end{aligned}$$

Este nuevo cambio se sustituye en (5.1.17) y , se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left( \frac{\gamma\beta}{\alpha} \right) y \\ \dot{y} &= \left( \frac{\gamma a \alpha^2}{\beta} \right) x^2 + (\gamma b a) xy.\end{aligned}\tag{5.1.18}$$

Donde se selecciona  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  como coeficientes de (5.1.18) y son lo más simple posible. Lo ideal sería que estos coeficientes fuera la unidad

$$\frac{\gamma\beta}{\alpha} = 1\tag{5.1.19}$$

o

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

De la ecuación (5.1.19) fijamos  $\gamma$ . Requerimos que  $\alpha$  y  $\beta$  tengan el mismo signo, ya que la estabilidad no sería afectada bajo el reescalamiento (dado que  $\gamma$  es escala de tiempo). Por lo tanto se requiere que

$$\frac{\gamma a \alpha^2}{\beta} = 1. \quad (5.1.20)$$

Usando (5.1.19) y (5.1.20) se convierten en

$$\frac{a \alpha^3}{\beta^2} = a \alpha \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = 1 \quad (5.1.21)$$

En la ecuación (5.1.21) se fija  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

Finalmente requiere

$$\gamma b \alpha = 1 \quad (5.1.22)$$

pero, usando (5.1.19) y (5.1.22) obtenemos

$$\frac{b \alpha^2}{\beta} = b \beta \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = 1. \quad (5.1.23)$$

Se tiene que  $a$  y  $b$  puede tener signo diferente y que  $\alpha$  y  $\beta$  debe tener el mismo signo. Para (5.1.21) donde  $a$  y  $\alpha$  deben tener el mismo signo. Por consiguiente, si (5.1.23) esta se cumple, se concluye que  $b$  y  $a$  tiene el mismo signo. Esto es demasiado restrictivo, entonces se puede dejar de la siguiente forma:

$$b \beta \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = \pm 1, \quad (5.1.24)$$

de modo que, en el reescalamiento de las variables, la forma normal es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 \pm xy. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

En [Carrillo, 2014], se dio una generalización al teorema de la bifurcación Takens-Bogdanov, analizada originalmente para el plano y con dos parámetros. Esta generalización se consiguió para  $\mathbb{R}^n$ , con  $m$  parámetros a continuación presentamos de manera breve dicha generalización. Consideremos el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (5.1.26)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2$  y  $f \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ ,  $r \geq 2$ . Supongamos que existe  $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , tal que

H1)  $f(x_0, \mu_0) = 0$ , y

H2)  $\sigma(Df(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_j \in C \mid \lambda_{1,2} = 0, Re(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\}$ , considerando el caso no semisimple.

Definamos la matriz  $A = Df(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces, por hipótesis H2) se sigue que  $A$  es similar a  $J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$ , donde  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

y  $J_1$  es una matriz no singular. Sean  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$  vectores propios generalizados de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda = 0$  se obtiene  $Ap_1 = 0$  y  $Ap_2 = p_1$ . Sea  $P = (p_1, p_2, P_0)$ , donde  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times (n-2)}$  contiene los vectores propios (generalizados) de la matriz  $J_1$ . De la teoría de Jordan,  $J = P^{-1}AP$ . Entonces,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \begin{cases} q_2^T A = 0, \\ q_1^T A = q_2^T \end{cases}$$

Esto es,  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$  son los vectores propios izquierdos generalizados de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda = 0$ .

**Definición 5.1.1** Dado  $v \in \mathbb{R}^n, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  y  $L \in \mathbb{R}^{n \times (r \times s)}, L^T = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}^T$  donde  $L_i \in \mathbb{R}^{r \times s}$ , definimos el producto punto por  $v \cdot L^T = \sum_{i=1}^n v_i L_i^T$ .

Consideremos ahora la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov genérica

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_1 z_2, \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

donde  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  y  $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ , con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1, \\ \alpha_2 &= p_1^T (q_1 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Finalmente estableceremos el teorema que generaliza la bifurcación Takens-Bogdanov. Para esto definimos los siguientes  $m$ -vectores:

$$\begin{aligned} S_1 &= f_\mu^T(x_0, \mu_0) q_2, \\ S_2 &= \left\{ \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} [p_1^T (q_1 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2] - p_1^T (q_2 \cdot D^2 f(x_0, \mu_0)) p_2 \right\} f_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 - \\ &\quad \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} \sum_{i=1}^2 \{ q_i [f_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 f_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 f(x_0, \mu_0)] \} p_i \\ &\quad + [q_2 \cdot (f_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 f_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 f(x_0, \mu_0))] p_1, \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

donde  $A_0 = P_0 J_1^{-1} Q_0$ .

**Teorema 5.1.1** Dado el sistema no lineal (5.1.26) que satisface H1) y H2) condiciones de no hiperbolicidad, y las condiciones

H3)  $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ , (no degeneracidad)

H4)  $S_1$  y  $S_2$  son linealmente independientes. (transversalidad)

Entonces, la dinámica sobre la variedad central del sistema (5.1.26) en  $x = x_0$  y  $\mu \approx \mu_0$ , es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov (5.1.27). Además, la relación entre los parámetros es dada por  $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$ , y  $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  están dadas por (5.1.29).

Ahora bien, comenzando el análisis de la bifurcación se agrega la deformación versal o desdoblamiento universal dada por Guckenheimer al sistema de Bogdanov (5.1.17):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + ax^2 + bxy, \quad b = \pm 1. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Estudiando la dinámica local de (5.1.30), tomando el caso de  $a = 1$  y  $b = 1$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y + x^2 + xy.\end{aligned}\tag{5.1.31}$$

Primero obtenemos el punto de equilibrio de (5.1.31), los cuales son:

$$(x_{\pm}, 0) = (\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$$

para  $\mu_1 \leq 0$ .

Calculando la matriz Jacobiana del sistema (5.1.31) y evaluando los puntos de equilibrio:

$$Df(x_{\pm}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2(\pm\sqrt{-\mu_1}) & \mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1} \end{pmatrix}.$$

Analizando los casos se tiene que:

Para  $\mu_1 > 0$  no hay puntos de equilibrio.

Para  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  el sistema (5.1.31) se reduce al sistema (5.1.25), el cual tiene un punto de equilibrio no hiperbólico en el origen, y por el teorema 3.2.3 el sistema (5.1.25) tiene el comportamiento como cúspide en el origen. Para el punto de equilibrio  $(x_+, 0)$  el comportamiento es una silla, ya que  $\text{Det}(Df(x_+, 0)) = -2\sqrt{-\mu_1}$  para  $\mu_1 < 0$  y para toda  $\mu_2$ .

Mientras en  $(x_-, 0)$ , se tiene que  $\text{Det}(Df(x_-, 0)) = 2\sqrt{-\mu_1} > 0$  y  $\text{Tr}(Df(x_-, 0)) = \mu_2 - \sqrt{-\mu_1}$  se puede tener una fuente cuando  $\{\mu_2 > \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$  y un sumidero cuando  $\{\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$ .

Por otra parte, ocurre la bifurcación de Hopf en la curva  $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}$ , que esta se demuestra a continuación. Estudiando la estabilidad de esta bifurcación, realizamos un cambio de coordenadas para dejar el sistema representado el campo vectorial en la forma estándar mas la forma no lineal y además que se hace la traslación del punto crítico al origen. Sea  $\bar{x} = x - x_-, \bar{y} = y$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}\bar{y} + \bar{x}^2 \end{pmatrix}.\tag{5.1.32}$$

Entonces, usando la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{-2x_-} & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de la parte real e imaginaria de los vectores propios de los valores imaginarios  $\lambda = \pm i\sqrt{-2x_-}$ , que son obtenidos de la parte linealizada del sistema (5.1.32). Realizando los cálculos necesarios se obtiene, el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-2x_-} \\ \sqrt{-2x_-} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} uv + \frac{v^2}{\sqrt{-2x_-}} \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{5.1.33}$$

El sistema (5.1.33) es de la forma del sistema (4.5.9), el cual es la forma normal de la bifurcación de Hopf, entonces podemos calcular el primer coeficiente de Lyapunov de la manera que se propone en (4.5.10) para determinar la estabilidad:

$$a = \frac{1}{16}[0] + \frac{1}{16\sqrt{-2x_-}} \left[ 1 \left( 0 + \frac{2}{\sqrt{-2x_-}} \right) \right] = \frac{1}{16\sqrt{-\mu_1}} > 0.$$

Como  $a > 0$  nos indica que hay una órbita periódica que es inestable, se refiere a la bifurcación de Hopf subcrítica y además en  $(x_-, 0)$  es un foco inestable en  $\mu_2 = -\sqrt{-\mu_1}$  y  $(x_-, 0)$  será foco estable rodeado por un ciclo límite inestable para  $\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}$ .

Para  $\mu_1 = 0$  y  $\mu_2 \neq 0$ , el sistema tiene un punto de equilibrio no hiperbólico en el origen, que por medio del teorema de la variedad central, obtenemos una aproximación de la forma  $y = \frac{-x^2}{\mu_2} + O(x^3)$  cuando  $x \rightarrow 0$ , es decir,  $\dot{x} = \frac{-x^2}{\mu_2} + O(x^3)$  y que este resultado es una silla-nodo en el origen. Y por el Teorema de Sotomayor el sistema tiene un valor propio cero y su vector propio es  $v = (1, 0)^T$  y  $w = (\mu_2, -1)$ . Entonces el sistema satisface las condiciones, ya que  $w^T f_\mu(x_0, \mu_0) = \mu_2 \neq 0$ ,  $w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq -2$ .

Por lo tanto hay una familia de comportamiento de silla-nodo en los puntos a lo largo del eje  $\mu_2$  en el plano  $\mu$ :

a)  $SN^+ = \{\mu_1 = 0 \text{ y } \mu_2 > 0\}$

b)  $SN^- = \{\mu_1 = 0 \text{ y } \mu_2 < 0\}$

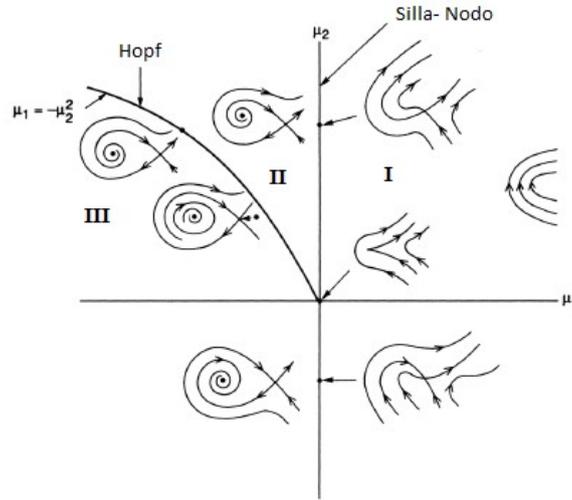


Figura 5.1: Conjunto de bifurcaciones

Observaciones en el retrato fase en la Figura 5.1 en al región **III** cerca de  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 < 0$  y  $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1} > 0$  no son homeomorfos, para la última poseen ciclos límites mientras en la primera no hay. El comportamiento de silla y sumidero no cambia el tipo topológico en esta región, y así la bifurcación global debe tener lugar, quizás una silla lazo (saddle loops) en el cual el ciclo límite desaparece y la variedad estable e inestable del punto silla se cruzan. Estudiando esto, usaremos una transformación de reescalamiento, se propone de la forma:

$$x = \epsilon^2 u, \quad y = \epsilon^3 v, \quad \mu_1 = \epsilon^4 \nu_1, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu_2, \quad \epsilon \geq 0, \quad (5.1.34)$$

y el reescalamiento de el tiempo  $t \rightarrow \epsilon t$ , se sustituye este nuevo cambio en el sistema (5.1.31), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \nu_1 + \epsilon \nu_2 v + \epsilon u v + u^2. \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

El análisis de la deformación ahora se convierte en el análisis de tres parámetros en el sistema (5.1.35) con  $\nu_1, \nu_2$  de  $O(1)$  y  $\epsilon$  pequeño. Observemos que sólo nos interesa el caso  $\nu_1 < 0$  ( $\mu_1 <$

0), ya que no hay punto de equilibrio para  $\nu_1 > 0$ ; y más significativamente, si dejamos  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $\nu_1 \neq 0$  fijo, el sistema (5.1.35) se convierte en un sistema Hamiltoniano integrable

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \nu_1 + u^2,\end{aligned}\tag{5.1.36}$$

con la función Hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \nu_1 u - \frac{u^3}{3}.\tag{5.1.37}$$

La motivación del reescalamiento es ahora evidente, ya que podemos perturbar las curvas de la solución global de (5.1.36) para pequeña  $\epsilon$ , y por tanto revela el comportamiento de (5.1.31), con  $\nu_1$  fija (y tomamos  $\nu_1 = -1$ , corresponde  $\mu_1 \leq 0$ ) contiene todos los comportamientos de la deformación. Se puede notar que en la Figura 5.2, que las órbitas cerradas y la conexión silla  $\Gamma_0$  corresponde a la curva de nivel  $H(u, v) = \frac{2}{3}$ .

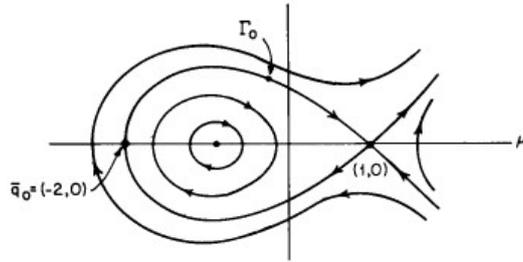


Figura 5.2: Retrato fase (5.1.36)

Ahora bien, tenemos que buscar la silla lazo (saddle loops) que ocurre en el valor  $\nu_2$ ,  $\epsilon \neq 0$  para el cual la conexión silla se mantiene, que por medio del método de Melnikov. La solución en  $\Gamma_0$  basada en el punto  $\bar{q}_0 = (-2, 0)$  es obtenida por

$$(u_0(t), v_0(t)) = \left( 1 - 3\operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 3\sqrt{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\tanh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right).\tag{5.1.38}$$

En este caso, la función de Melnikov  $M(t_0)$  no es dependiente del tiempo, ya que la perturbación del campo vectorial constante  $\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_2 v + uv \end{pmatrix}$ , y tenemos

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ \nu_1 + u^2 \end{pmatrix} \text{ y } g(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_2 v + uv \end{pmatrix}.$$

Se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned}M(\nu_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t - t_0)) \wedge g(q^0(t - t_0), t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_0(t)(\nu_2 v_0(t) + u_0(t)v_0(t)) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\nu_2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} 18\operatorname{sech}(\tau)\tanh^2(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - 3\operatorname{sech}^2\tau)18\operatorname{sech}^4(\tau)\tanh^2(\tau) d\tau \right],\end{aligned}$$

donde  $\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}$ . La situación de la bifurcación, cuando la conexión silla es preservada, es dada por  $M \equiv 0$ , o para  $\epsilon$  pequeña:

$$\nu_2 \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (1 - 3\operatorname{sech}^2 \tau) 18\operatorname{sech}^4(\tau) \tanh^2(\tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\tau) \tanh^2(\tau) d\tau}$$

donde  $\operatorname{sech}^2(\tau) = 1 - \tanh^2(\tau)$ .

Se resuelve la integral como se ve en el Apéndice A) en (7.1.1) y simplificando, se llega a que

$$\nu_2 = \frac{5}{7},$$

Finalmente, recordando que  $\nu_1 = -1$  y usando (5.1.34) ( $\mu_1 = -\epsilon^4, \mu_2 = \epsilon^2 \nu_2$ ), obtenemos la aproximación de la curva de bifurcación

$$\mu_1 = -\left(\frac{49}{25}\right) \mu_2^2, \quad \mu_2 \geq 0. \quad (5.1.39)$$

La verdadera curva de bifurcación será tangente a esta semiparábola en  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . Comparando esto con la ecuación para el conjunto de bifurcación de Hopf  $B_h$ :

$$\mu_1 = -\mu_2^2; \quad \mu_2 > 0. \quad (5.1.40)$$

Vemos que existe, de hecho, una segunda curva de bifurcación  $B_{sc}$  situada a la izquierda (5.1.40) y tangente a esta (y a  $\mu_1 = 0$ ) en  $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ . En  $B_{sc}$  el retrato fase tiene un lazo silla. El signo que toma la función de Melnikov  $M$  para  $\mu_1 > (<) -\left(\frac{49}{25}\right) \mu_2^2$  dada la posición relativa de la variedad estable e inestable (separatrices de la silla). Notemos que la traza es positiva en la curva

$$\operatorname{tr} Df(+\sqrt{-\mu_1}, 0) = \mu_2 + \sqrt{-\mu_1} = \frac{12}{5} \mu_2 > 0$$

y así la órbita homoclínica es un  $\alpha$ -límite establecido para puntos cercanos. En la Figura 5.3 se observa la bifurcación global:

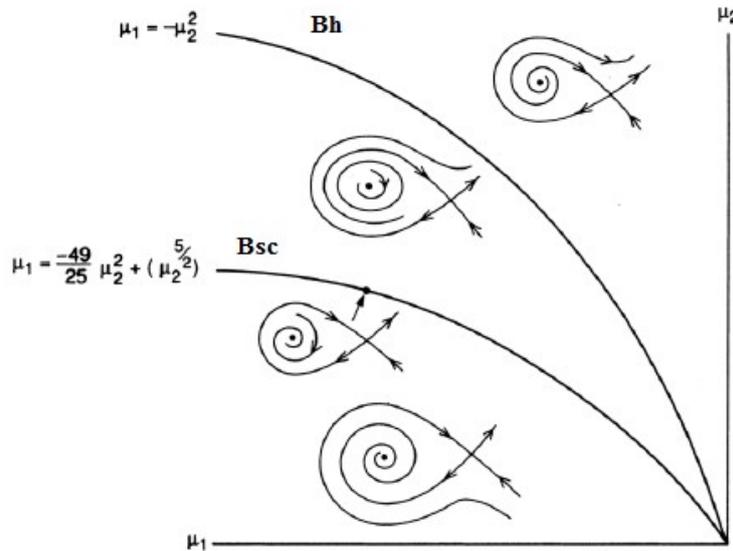


Figura 5.3: Bifurcación global.

## 5.2. Caso no genérico

Takens estudió también las deformaciones de la forma normal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \pm x^3 - x^2y,\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

Ahora bien, al sistema (5.2.1) se le agrega la deformación versal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1x + \mu_2y \pm x^3 - x^2y\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

donde  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ . Primero consideramos el caso que tiene el signo positivo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu_1x + \mu_2y + x^3 - x^2y.\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

Para el caso cuando  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$  tenemos como punto de equilibrio el origen. Para determinar el comportamiento del retrato fase, se divide en dos regiones. Primero cuando estamos en el semiplano superior  $y > 0$ , las soluciones alrededor de la recta  $y = x$  se comportan como indica la siguiente Figura 5.4 a) y cuando estamos en el semiplano inferior vemos en la Figura 5.4 b). De modo que en el origen las soluciones se comportan en general como se observa en la Figura 5.4 c)

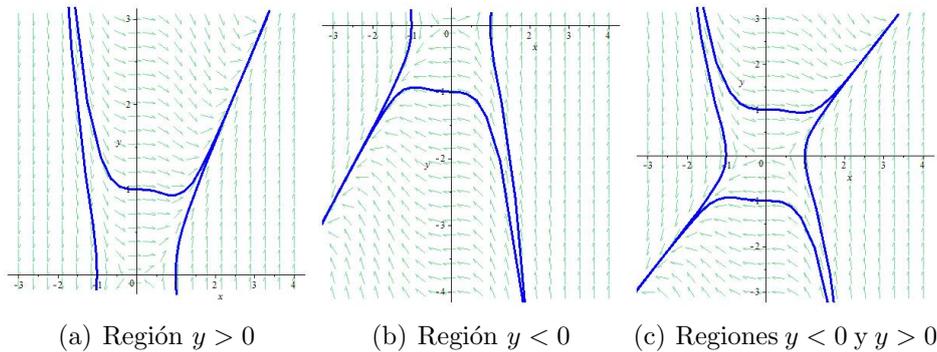


Figura 5.4:  $\mu_1 = 0$  y  $\mu_2 = 0$

Para el caso  $\mu_1 < 0$  hay tres puntos de equilibrio, los cuales son

$$x_0^* = (0, 0), x_{\pm}^* = (\pm\sqrt{-\mu_1}, 0).$$

Obtenemos la linealización del sistema (5.2.3) y evaluamos cada uno de los puntos de equilibrio para determinar el comportamiento de cada uno de ellos:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ y } Df(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\mu_1 & \mu_2 + \mu_1 \end{pmatrix}.$$

En el origen es un punto equilibrio su comportamiento es de una fuente, ya que  $Tr(Df(0, 0)) = \mu_2 > 0$  y  $Det(Df(0, 0)) = -\mu_1 > 0$  para  $\mu_2 > 0$  y un sumidero para  $\mu_2 \leq 0$  porque  $Tr(Df(0, 0)) = \mu_2 < 0$ .

Para el caso de los puntos de equilibrio  $x_{\pm}^*$  se tiene que  $Det(Df(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)) = -4\mu_1 > 0$ ,  $\mu_1 < 0$  y  $Tr(Df(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)) = \mu_2 + \mu_1 > 0 \implies \mu_2 > -\mu_1$  implicaría que serían fuentes y si

$Tr(Df(\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)) = \mu_2 + \mu_1 < 0 \implies \mu_2 < -\mu_1$  por lo que serían sumideros. Existe una bifurcación tenedor en los puntos en el eje  $\mu_2$  con  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$ , ya que cuando  $\mu_1 = 0$  solo hay un punto de equilibrio el cual es el origen y cuando  $\mu_1 \neq 0$  se origina dos puntos de equilibrios.

Por otra parte, cuando  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 = 0$  existe la bifurcación Hopf Supercrítica, ya que existen valores propios complejos puros. Entonces con el sistema (5.2.3) se realiza un cambio de variable para que quede de la forma normal (4.5.9), como se ve a continuación:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 - x^2y \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

Entonces, usando la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de los vectores propios que corresponde a los valores propios complejos  $\lambda = \pm i\sqrt{\mu_1}$ , que se obtuvo de la parte lineal del sistema (5.2.4), así tenemos el sistema con la parte lineal en la forma estándar:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\mu_1} \\ \sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}}v^3 - v^2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así se tiene que con esto obtenemos el valor del primer coeficiente de Liapunov:

$$a = -\frac{1}{8} < 0.$$

También obtenemos el valor de  $d$ , el cual es:

$$d = \frac{dRe\lambda}{d\mu_2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Por medio de los cálculos anteriores, podemos decir que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para  $\mu_1 < 0$  y punto de equilibrio inestable para  $\mu_1 > 0$ , con una órbita periódica asintóticamente estable para  $\mu_1 < 0$ , como se observa en la Figura 5.5:

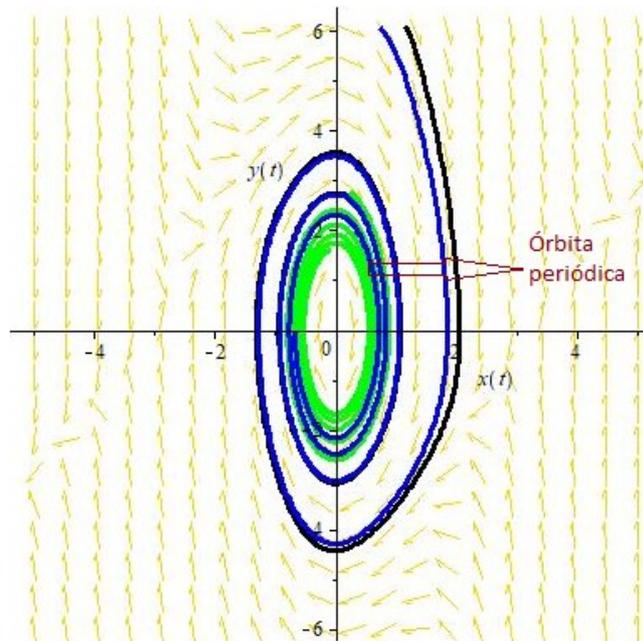


Figura 5.5: Bifurcación de Hopf.

En los siguientes casos se mostrará que no hay órbitas periódicas

- i)  $\mu_1 > 0$  Por el Teorema 2.10.2, como en este caso solo hay un punto de equilibrio el cual es el origen y su comportamiento es una silla. Ya que este Teoremas nos dice que hay una órbita periódica que siempre encierra al menos un punto de equilibrio. Si sólo encierra uno, no es punto silla, pero tenemos que sólo hay un punto de equilibrio y además es una silla, por lo que contradice este teorema. Por lo tanto no existe una órbita periódica.

- ii)  $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$  Por el teorema de Bendixson 2.10.1 tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \mu_2 - x^2 \neq 0$$

y además no cambia el signo ya que  $\mu_2 - x^2 < 0$ . Por lo tanto cumple las condiciones del teorema 2.10.1 por lo que no tiene órbitas periódicas en este caso.

Se observa el conjunto de bifurcación del sistema (5.2.3) en la Figura (5.6).

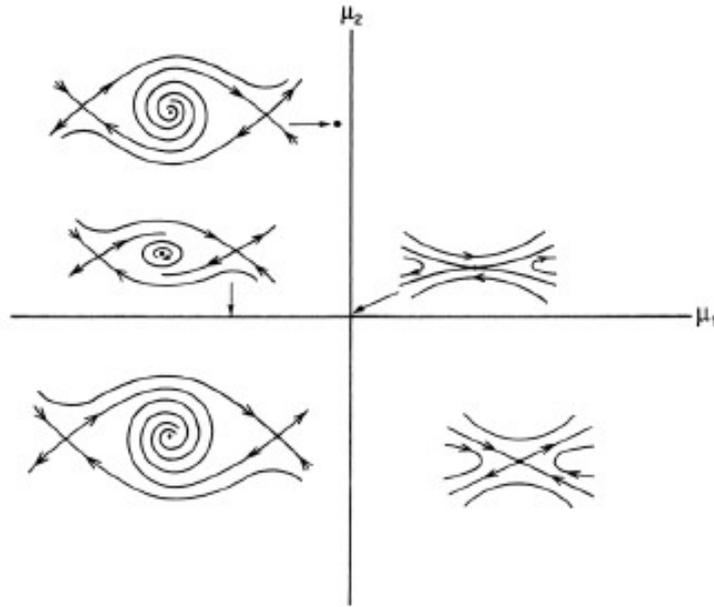


Figura 5.6: El diagrama de bifurcación del sistema (5.2.3)

Para el caso  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 > 0$  aparece la bifurcación homoclínica, se hace el siguiente reescalamiento para la transformación que nos permite obtener la curva en la cual se presenta.

Sea

$$x = \epsilon u, \quad y = \epsilon^2, \quad \mu_1 = -\epsilon^2, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu_2$$

y  $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ , el cual se sustituye en el sistema (5.2.3) llegamos a

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -u + u^3 + \epsilon(\nu_2 v - u^2 v). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Ahora tenemos tres parámetros los cuales son  $\nu_1, \nu_2$  de  $O(1)$  y  $\epsilon$  pequeño. En nuestro caso sólo nos interesa cuando  $\nu_1 < 0$  ( $\mu_1 < 0$ ), ya que no hay puntos de equilibrio para  $\nu_1 > 0$ ; y si dejamos  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $\nu_1 \neq 0$  fijo, se convierte en un sistema integrable Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -u + u^3, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

con el Hamiltoniano

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}. \quad (5.2.7)$$

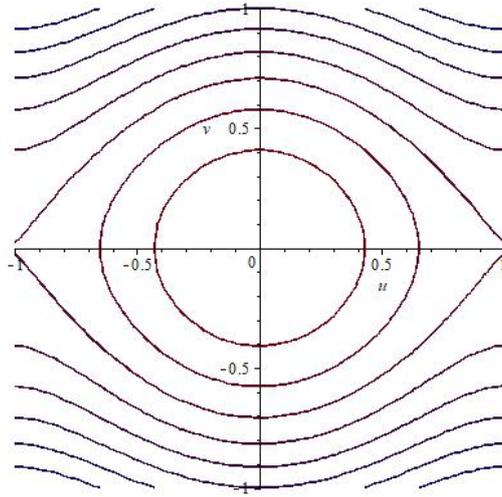


Figura 5.7: Retrato fase (5.2.7)

Ahora bien, por medio de la teoría de Melnikov obtenemos el valor de  $\nu_2, \epsilon \neq 0$  que me permite saber cual es la curva de bifurcación homoclínica. La familia uni-paramétrica de órbitas  $\gamma_\alpha(t) = (x_\alpha(t), y_\alpha(t))^T$  pueden ser expresadas en términos de funciones elípticas como la siguiente:

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \operatorname{sn} \left( \frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \alpha \right) \\ v_\alpha(t) &= \frac{\sqrt{2}\alpha}{1+\alpha^2} \operatorname{cn} \left( \frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \alpha \right) \operatorname{dn} \left( \frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \alpha \right) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

para  $0 \leq t \leq T_\alpha$ , donde el periodo  $T_\alpha = 4K(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}$  y el parámetro  $\alpha \in (0, 1)$ ; con  $K(\alpha)$  es la integral elíptica completa de primer especie. El parámetro  $\alpha$  esta relacionado a la distancia a lo largo del eje  $u$  por

$$u^2 = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad \text{o} \quad \alpha^2 = \frac{u^2}{2-u^2},$$

notamos que

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{(1+\alpha^2)(2/3)} > 0$$

para  $\alpha \in (0, 1)$  o, equivalentemente, para  $u \in (0, 1)$ . Para  $\epsilon = 0$  el sistema (5.2.6) es Hamiltoniano, es decir,  $\nabla \cdot f(x) = 0$ . La función de Melnikov a lo largo de la órbita periódica  $\gamma_\alpha(t)$ . Por tanto es dada por

$$M(\alpha, \nu_2) = \int_0^{T_\alpha} f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), 0, \nu_2) dt, \quad (5.2.9)$$

donde

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} v \\ -u + u^3 \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_2 v - u^2 v \end{pmatrix}.$$

Se sustituye

$$\begin{aligned} M(\alpha, \nu_2) &= \int_0^{T_\alpha} v(\nu_2 v - u^2 v) dt \\ &= \int_0^{T_\alpha} (\nu_2 v^2 - u^2 v^2) dt. \end{aligned}$$

Entonces, se sustituye la fórmula anterior para  $u_\alpha(t)$  y  $v_\alpha(t)$  y se deja  $x = \frac{t}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ , así que

$$M(\alpha, \nu_2) = \nu_2 \int_0^{4K(\alpha)} \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} cn^2 x dn^2 x dx - \int_0^{4K(\alpha)} \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} * \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} cn^2 x dn^2 x dx. \quad (5.2.10)$$

Utilizando las propiedades de funciones elípticas de Jacobi, las cuales son

$$cn(x) = \sqrt{1 - sn^2 x} \quad dn(x) = \sqrt{1 - \alpha^2 sn^2(x)}$$

Se sustituyen y simplifica en la integral (5.2.10):

$$\begin{aligned} &= \nu_2 \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \left\{ \int_0^{4K(\alpha)} du - (1+\alpha) \int_0^{4K(\alpha)} sn^2(u) du + \alpha^2 \int_0^{4K(\alpha)} sn^4(u) du \right\} \\ &\quad - \frac{4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^3} \left\{ \int_0^{4K(\alpha)} sn^2(u) du - (1+\alpha) \int_0^{4K(\alpha)} sn^4(u) du \right\}. \end{aligned}$$

Las soluciones de las integrales se puede ver en el Apéndice B) (7.2.1), (7.2.2) y (7.2.3)

$$\begin{aligned} &= \nu_2 \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \left\{ 4K(\alpha) - (1+\alpha) \left[ \frac{4}{\alpha^2} [K(\alpha) - E(\alpha)] \right] + \alpha^2 \left[ \frac{4}{3\alpha^2} [(2+\alpha^2)K(\alpha) - 2(1+\alpha^2)E(\alpha)] \right] \right\} \\ &\quad - \frac{4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^3} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} [K(\alpha) - E(\alpha)] - (1+\alpha) \left[ \frac{4}{3\alpha^2} [(2+\alpha^2)K(\alpha) - 2(1+\alpha^2)E(\alpha)] \right] \right\} \\ &\quad + \frac{4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^3} \left\{ \alpha^2 \left[ \frac{4}{15\alpha^6} [(4\alpha^2 + 3\alpha^2 + 8)K(\alpha) - (8\alpha^4 + 7\alpha^2 + 8)E(\alpha)] \right] \right\} \end{aligned}$$

Por el teorema de Melnikov se tiene que  $M(\nu_2) \equiv 0$  entonces

$$\nu_2 = \frac{(a+b)}{c} \quad (5.2.11)$$

donde

$$a = \frac{4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^3} \left[ \frac{4}{\alpha^2} [K(\alpha) - E(\alpha)] - (1+\alpha) \left[ \frac{4}{3\alpha^2} [(2+\alpha^2)K(\alpha) - 2(1+\alpha^2)E(\alpha)] \right] \right],$$

$$b = \frac{4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^3} \left[ \alpha^2 \left[ \frac{4}{15\alpha^6} [(4\alpha^2 + 3\alpha^2 + 8)K(\alpha) - (8\alpha^4 + 7\alpha^2 + 8)E(\alpha)] \right] \right],$$

y

$$c = \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \left\{ 4K(\alpha) - (1+\alpha) \left[ \frac{4}{\alpha^2} [K(\alpha) - E(\alpha)] \right] + \alpha^2 \left[ \frac{4}{3\alpha^2} [(2+\alpha^2)K(\alpha) - 2(1+\alpha^2)E(\alpha)] \right] \right\}.$$

Para saber el valor aproximado de  $\nu_2$ , tuvimos que realizar una aproximación de las integrales elípticas de primer y segunda especie con sus respectivas representaciones de serie como estan en Apéndice B) en (7.2.4) y (7.2.5). Ocupamos el programa Wolfram Mathematics, que puede ver en sección del Apéndice B.1) el código, si tomamos el valor  $\alpha = 0,9999$  obtenemos que

$$\nu_2 \approx 0,1998$$

y si  $\alpha = 1$  se tiene

$$\nu_2 \approx \frac{1}{5}.$$

Finalmente se obtiene con  $\mu_1 = -\epsilon^2$ ,  $\mu_2 = \epsilon^2\nu_2$ , sustituyendo el valor de  $\nu_2$  e igualando, tenemos que la curva de bifurcación homoclínica donde hay una conexión heteroclínica, se aproxima a la siguiente curva

$$\mu_2 = -\frac{1}{5}\mu_1$$

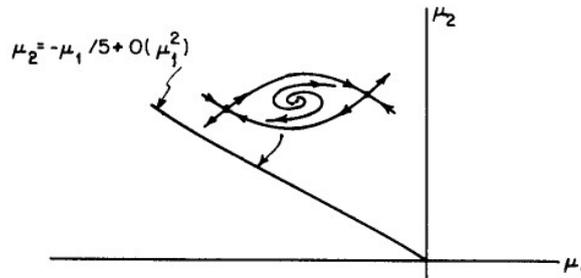


Figura 5.8: Bifurcación homoclínica.

Del sistema (5.2.2) ahora tomamos el caso con el signo menos, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y - x^3 - x^2 y. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Para el caso que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

El campo vectorial del sistema (5.2.13) se comporta de la siguiente forma :

- Si  $y > 0 \implies \dot{x} > 0$

$$\bullet \text{ Si } -x^3 - x^2 y = -x^2(x + y) > 0 \implies \begin{cases} -x^2 < 0 \implies x < 0 \vee x > 0 \\ \wedge \\ x + y < 0 \implies x < -y \end{cases} \implies \dot{y} > 0$$

- Si  $y < 0 \implies \dot{x} < 0$

$$\bullet \text{ Si } -x^3 - x^2 y = -x^2(x + y) < 0 \implies \begin{cases} -x^2 < 0 \implies x < 0 \vee x > 0 \\ \wedge \\ x + y > 0 \implies x > -y \end{cases} \implies \dot{y} < 0.$$

Con el análisis anterior se obtiene el retrato fase, que se observa en la Figura 5.9

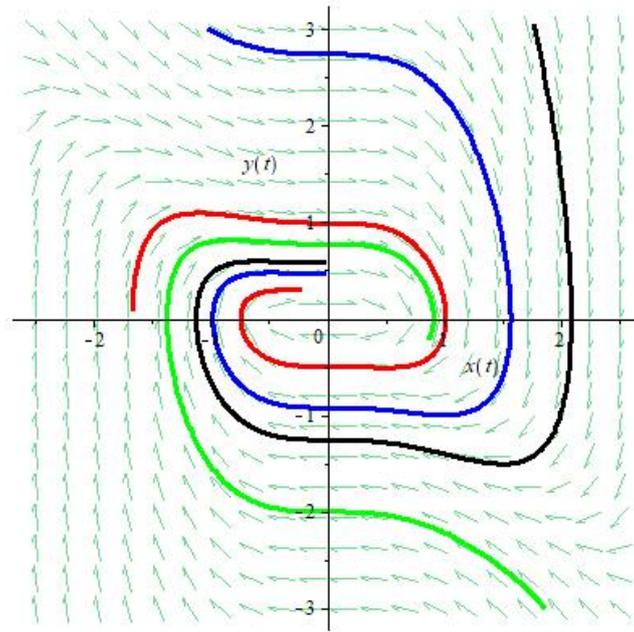


Figura 5.9: Retrato fase del sistema (5.2.13).

Primero obtenemos los puntos de equilibrio, los cuales son:

$$\bar{x}_0^* = (0, 0) \quad \bar{x}_\pm^* = (\pm\sqrt{\mu_1}, 0), \quad \mu_1 > 0.$$

La linealización del sistema (5.2.13) y evaluando los puntos de equilibrio:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ y } Df(\pm\sqrt{\mu_1}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu_1 & \mu_2 - \mu_1 \end{pmatrix}.$$

El comportamiento del primer punto de equilibrio que es el  $\bar{x}_0^* = (0, 0)$ , si  $\text{Det}(Df(\bar{x}_0^*)) = -\mu_1 < 0$ ,  $\mu_1 > 0$  es una silla y para los puntos de equilibrio  $\bar{x}_\pm^*$ , si  $\text{Det}(Df(\bar{x}_\pm^*)) = 2\mu_1 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$  y  $\text{Tr}(Df(\bar{x}_\pm^*)) = \mu_2 - \mu_1 > 0 \implies \mu_2 > \mu_1$  es una fuente, por otra parte si  $\text{Tr}(Df(\bar{x}_\pm^*)) = \mu_2 - \mu_1 < 0 \implies \mu_2 < \mu_1$  es un sumidero.

Se presenta la bifurcación tenedor para  $\mu_1 = 0$ , tenemos como punto de equilibrio el origen y para  $\mu_1 > 0$  surgen dos puntos de equilibrios más, los cuales son  $\bar{x}_\pm^*$ .

Para el caso  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 = \mu_1$  ocurre la bifurcación de Hopf, como lo había comentado antes realizo un cambio de variable para que el sistema tenga la forma normal (4.5.9).

Tengo que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 - x^2y \end{pmatrix}.$$

Entonces, la transformación lineal es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\mu_1} \end{pmatrix},$$

es la matriz de vectores propios de los valores propios complejos puros  $\lambda = \pm\sqrt{2\mu_1}i$ . Con esto se obtiene la forma normal (4.5.9):

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2\mu_1} \\ \sqrt{2\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\mu_1}}v^3 - v^2u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.14)$$

Calculamos el primer coeficiente de Lyapunov en donde evaluó  $(u, v) = (0, \sqrt{\mu_1})$ :

$$a = \frac{1}{16}(-2) + \frac{1}{16\sqrt{2\mu_1}} \left[ -2\sqrt{\mu_1} \left( -\frac{6\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{2\mu_1}} \right) \right] = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} > 0.$$

Como  $a = \frac{2}{8} > 0$  nos indica que ocurre una bifurcación de Hopf subcrítica y en los puntos de equilibrios  $\bar{x}_{\pm}^*$  son focos estables y su órbita periódica es inestable.

Para el caso de  $\mu_2 < 0$  no hay órbitas periódicas, ya que satisface las condiciones del Teorema de Bendixson 2.10.1. Como  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \mu_2 - x^2 \neq 0$  es distinta de cero y no hay cambio de signo porque  $\mu_2 < 0$  por lo que no tiene órbitas cerradas.

Cuando  $\mu_1 < 0$  y  $\mu_2 > 0$  se tiene que el único punto de equilibrio es el origen, además en la región  $\left\{ -\frac{\mu_2^2}{4} > \mu_1, \mu_1 < 0 \right\}$  se forma una órbita periódica, que se puede ver el retrato fase en la Figura 5.10 y cruzando el eje  $\mu_1$  desaparece las órbitas periódicas.

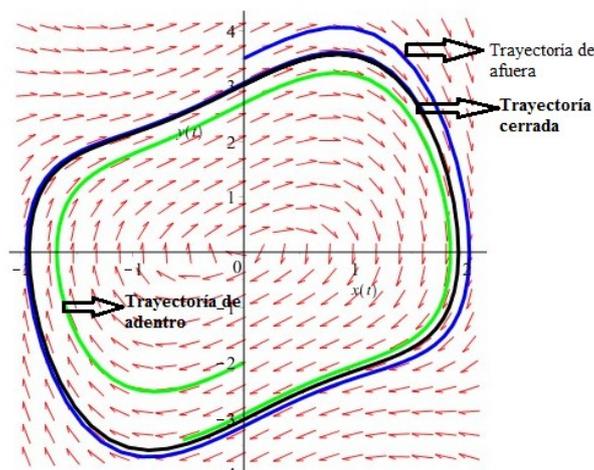


Figura 5.10: Órbita periódica para  $\mu_1 < 0$ .

Se observa el diagrama de bifurcación del sistema (5.2.12) en la Figura 5.11.

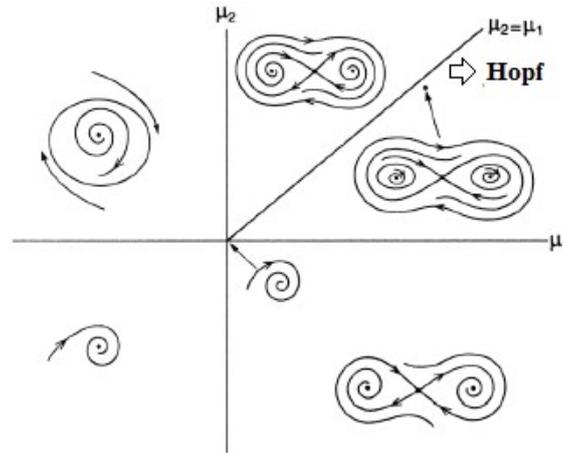


Figura 5.11: El diagrama de bifurcación del sistema (5.2.12).

Por último ocurre la bifurcación homoclínica, para esto realizamos un reescalamiento de las variables :

Sea

$$x = \epsilon u, \quad y = \epsilon^2 v, \quad \mu_1 = \epsilon^2, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu_2$$

y  $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ , esto se sustituye en el sistema (5.2.12) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + \epsilon(\nu_2 v - u^2 v). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Para  $\epsilon = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Obtengo que el Hamiltoniano de este sistema es

$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$$

Ahora bien, por medio de la teoría de Melnikov obtendremos el valor de  $\nu_2, \epsilon \neq 0$ . La solución  $\Gamma_0$  esta dada por

$$\Gamma_0^\pm : \gamma^\pm(t) = \pm(\sqrt{2}\operatorname{secht}, -\sqrt{2}\operatorname{sechttanht})^T.$$

La función de Melnikov  $M(t_0)$  no depende del tiempo, ya que la perturbación es el campo vectorial constante. Sea

$$f = \begin{pmatrix} v \\ u - u^3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_2 v - u^2 v \end{pmatrix} \tag{5.2.17}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
M(\nu_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_0(t)(\nu_2 v_0(t) - u_0^2(t)v_0(t))dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2}\operatorname{sech}t \tanh t (-\sqrt{2}\nu_2 \operatorname{sech}t \tanh t + 2\sqrt{2}\operatorname{sech}^2 t \operatorname{sech}t \tanh t))dt \\
&\vdots \\
&= 2\nu_2 \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t + 4(1 - \tanh^2 t)\operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t)dt & (5.2.18) \\
&= 2\nu_2 \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t dt + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t dt - 4 \int_{-\infty}^{\infty} \tanh^4 t \operatorname{sech}^2 t dt \\
&= 2\nu_2 \frac{\tanh^2 t}{3} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 4 \frac{\tanh^2 t}{3} \Big|_{-\infty}^{\infty} - 4 \frac{\tanh^4 t}{5} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{4}{3}\nu_2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(\frac{2}{5}\right)
\end{aligned}$$

Por el teorema de Melnikov se tiene que  $M \equiv 0$  entonces

$$\nu_2 \approx \frac{4}{5}.$$

Finalmente, obtenemos con  $\mu_1 = -\epsilon^2$ ,  $\mu_2 = \epsilon^2\nu_2$ , se sustituye el valor de  $\nu_2$  e igualamos. Tenemos que la curva de bifurcación homoclínica en donde hay una conexión heteroclínica, se aproxima a

$$\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1.$$



# Capítulo 6

## Problemas de aplicaciones de la bifurcación TB

### 6.1. Modelo Depredador-Presa con defensa de grupo.

En nuestro planeta existe un conjunto de factores selectivos que han influido enormemente en la evolución de los seres lo que habitan. Por esta razón ninguna especie puede vivir aislada de las otras, ni de los individuos de su misma especie. Lo anterior da origen a un sin número de relaciones entre los distintos organismos que coexisten en unidades integradas y las cuales reciben el nombre de comunidades bióticas. La selección natural (lucha en donde sobrevive el que tiene características más apropiadas para las circunstancias) ha conducido al establecimiento de grupos de especies que coexisten con un mínimo de competencia y explotándose al mismo tiempo unos a otros para sobrevivir. El resultado de estas luchas entre organismos ha originado las relaciones depredador-presa. La depredación comprende el uso de una especie llamada presa como alimento, por parte de otra llamada depredador.

De este modo una de las tareas de la Ecología es el desarrollo de una teoría que permita comprender la organización de las comunidades. Lo que significa entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacciones de las especies y el comportamiento en el tamaño de población a lo largo del tiempo. Es por eso que a través de numerosos estudios y observaciones, los ecólogos han ido afinando sus teorías para explicarse el fenómeno de la biodiversidad.

#### 6.1.1. Antecedentes

Para estudiar estos comportamientos la ecología se ha apoyado del uso de los modelos matemáticos que permiten simular la evolución en el tamaño de una población y la interacción con otras, a lo largo del tiempo, variando la tasa de reproducción, de captura y de mortalidad, entre otras. Uno de los modelos que ha sido la base para las propuestas actuales en sistemas depredador presa es el modelo de Lotka Volterra:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon_1 x - \alpha xy, \\ \dot{y} &= -\epsilon_2 y + \beta xy.\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

Este sistema modela el comportamiento de la población presa  $x$  ante la presencia de una población depredadora  $y$ . Suponiendo que la población presa en ausencia de la población depredadora crece exponencialmente y que la población depredadora en ausencia de la presa decrece exponencialmente. En general un modelo depredador-presa tipo Lotka-Volterra con densidad de la

presa  $x$  y densidad del depredador  $y$ , es cualquier sistema cuadrático de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 = F(x, y), \\ \dot{y} &= b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 = G(x, y).\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

Estos modelos han sido estudiados en las últimas décadas, gracias a la riqueza que se tiene desde el punto de vista dinámico y porque constituyen una base para la modelación del crecimiento de poblaciones. La debilidad de esta familia es que no se considera una cota en el consumo que hace el depredador de la presa, ni el control del beneficio que recibe el depredador al consumirla. Quien introduce como elemento importante de los modelos matemáticos, la cantidad de presa devorada por el depredador por unidad de tiempo, es Holling, a esta cantidad le da el nombre de respuesta funcional y da lugar al nacimiento de una nueva generación de modelos (tipo Gause), los cuales tienen la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xg(x, K) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-d + q(x)).\end{aligned}\tag{6.1.3}$$

Este modelo (6.1.3) surge en 1932. G.F. Gause inició una serie de experimentos diseñados para verificar en el laboratorio las oscilaciones predichas por Volterra; para ello utilizó como depredador al protozoo *Didinum nasatum* y como presa al *Paramecium caudatum*. En el primer experimento colocó dentro de un cultivo de bacterias para alimentar al *Paramecium*. Después de unos días el *Didinum* exterminaba a la población de *Paramecia* y él mismo se extinguía poco más tarde, por falta de alimento. Cuando en un segundo experimento colocó escondites para la presa, el depredador se extinguió y la población de presas pudo sobrevivir. En 1935, Gause usó la levadura *Saccharomyces exiguus* como alimento del *Paramecium aurelia* y obtuvo tres ciclos completos. En los años siguientes mucho trabajo de laboratorio fue realizado con muy diversos resultados, lo que condujo a la cuestión de identificar a los distintos tipos de depredador de acuerdo con la forma en que se apropian de su alimento. Trabajos muy importantes en esta dirección son los realizados por Holling, que fue quien introdujo el concepto de *respuesta funcional* para referirse a la relación que existe entre el número de presas devoradas por un solo depredador y el número de presa disponibles. Holling reconoció cuatro tipos de repuestas funcionales. Por lo que, se pondrá atención especial en  $p(x)$ , ya que dependiendo del tipo de función que ésta sea, tendremos también un cierto tipo de dinámica en el modelo.

### 6.1.2. Modelo matemático de depredador-presa con defensa de grupo.

Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xg(x, K) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-d + q(x))\end{aligned}\tag{6.1.4}$$

Sea  $x$  e  $y$  funciones del tiempo que representan densidades poblacionales de la presa y el depredador, respectivamente  $K > 0$  es la capacidad de carga de la presa, es decir, es la cota máxima de densidad poblacional que su medio ambiente puede soportar,  $d > 0$  es la tasa de mortalidad del depredador, la función  $g(x, K)$  representa la tasa de crecimiento específico de la presa en ausencia de depredador y satisface que

$$g(0, K) > 0, \quad g(K, K) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(K, K) < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, K) \leq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, K) > 0, \text{ para toda } x > 0.$$

La función  $q(x)$  representa la tasa de conversión de presa a depredador, en el modelo de Gause,  $q(x) = cp(x)$ , donde  $c$  es la tasa de conversión de las presas en nuevos nacimientos de depredadores. Existen muchos ejemplos específicos para esta función, una de ellas es la función logística

$g(x, K) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ , es considerada un prototipo, donde  $r$  es la tasa intrínseca o per cápita de crecimiento de las presas.

La función  $p(x)$  denota la función de respuesta o defensa de grupo o tasa de consumo, expresa la acción del depredador en la tasa de crecimiento de las presas que se refiere [Turchin,2003]. Se refiere al cambio en la densidad de presas muertas(o consumidas) por unidad de tiempo y por depredador cuando la densidad de presa está cambiando [ Freedman,1980].

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r(x) - f(x)y, \\ \dot{y} &= (g(x) - \mu)y.\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

En este sistema (6.1.5),  $r(x)$  representa el comportamiento de la presa en ausencia del depredador. A la función  $g(x)$  se le llama respuesta numérica y mide el beneficio que obtiene el depredador de su presa,  $\mu$  es la tasa de mortalidad del depredador y la función  $f(x)$ , es la respuesta funcional que representa la cantidad que devora cada depredador por unidad de tiempo.

Ahora bien, si en el sistema (6.1.4) se sustituye la función  $g(x, K)$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - yp(x), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x)),\end{aligned}\tag{6.1.6}$$

donde  $x$  e  $y$  denotan densidades poblacionales de presas y depredadores respectivamente,  $r, K, d$  y  $c$  son constantes positivas. Entnces el campo vectorial de la ecuación (6.1.6) lo podemos definir como

$$f(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - yp(x) \\ y(-d + cp(x)) \end{pmatrix} \quad \text{con } \mu = (r, K, d, c)^T,\tag{6.1.7}$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $\mu \in \mathbb{R}^4$ . Para depredadores y presas, una respuesta funcional es la tasa de consumo de un depredador en función de la densidad de depredadores. Por lo general se asocia con la respuesta numérica, que es la tasa de reproducción de un depredador en función de la densidad de la presa. Siguiendo Holling [Holling], las funciones de respuestas fueron clasificadas originalmente en cuatro tipos, que se denominan tipo de Holling I,II III y IV, que se observa en el cuadro 6.1

Tipo Holling	Definición	Forma generalizada
I	$p(x) = mx$	
II	$p(x) = \frac{mx}{b+x}$	
III	$p(x) = \frac{mx^2}{c+x^2}$	$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+1} \quad (b > -2\sqrt{a})$
IV	$p(x) = \frac{mx}{c+x^2}$	$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+1} \quad (b > -2\sqrt{a})$

Cuadro 6.1: Funciones de respuesta del tipo Holling y sus generalizaciones.

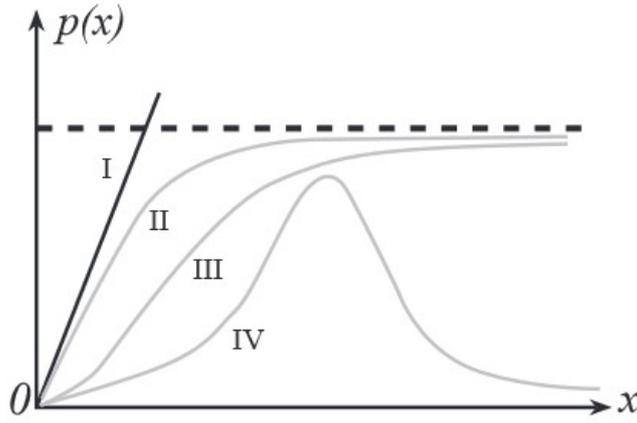


Figura 6.1: Funciones de respuesta de tipo Holling.

Tomaremos como función de respuesta del tipo Holling IV en su forma generalizada donde  $\alpha$  y  $m$  son constantes positivas y  $b > -2\sqrt{a}$  ( $ax^2 + bx + 1 > 0$ ) para toda  $x \geq 0$  y de aquí  $p(x) > 0$  para toda  $x > 0$ ) se exhibe el fenómeno llamado defensa de grupo. Tenemos que en (6.1.7),  $\mu = (r, K, d, c, m)^T$ . Tomando el valor de  $a = \frac{4}{K^2}$  y  $b = \frac{Kmc - 4d}{dK}$ , donde  $Kmc > 0$  (es decir, satisface la condición previa  $b > -2\sqrt{a}$ ), sólo se tiene un único punto de equilibrio en el

primer cuadrante  $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}K, \frac{rcK}{4d}\right)$ , evaluando en el Jacobiano  $D(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

el cual tiene un valor propio  $\lambda = 0$  de multiplicidad doble. Obtenemos los siguientes vectores propios  $\{p_1, p_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c}{d} \end{pmatrix} \right\}$ , que conforman la matriz  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}$  con

$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}$ . Por otra parte se calculan los coeficientes de la parte no lineal

de la deformación versal por medio de (5.1.28) se tiene:  $\alpha_1 = \frac{2d^2r}{cK^2m}$  y  $\alpha_2 = -\frac{2r(Kmc - 2d)}{K^2cm}$ ,

por lo que  $\alpha_1\alpha_2 = -\frac{4d^2r^2(Kmc - 2d)}{c^2K^4m^2} \neq 0$ , y usando (5.1.29) se tiene:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}rK \\ \frac{1}{4}rKd \\ -\frac{4}{1}rKd \\ -\frac{4}{1}rKd \\ -\frac{4}{4}m \end{pmatrix} \text{ y } S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2d^2r}{(Kmc - 2d)K} \\ -\frac{Kmc - 2d}{2d^2} \\ \frac{Kmc - 2d}{2d^3} \\ \frac{(Kmc - 2d)c}{2d^3} \\ \frac{(Kmc - 2d)m}{(Kmc - 2d)m} \end{pmatrix},$$

donde  $S_1$  y  $S_2$ , son linealmente independientes.

El campo vectorial (6.1.7) con  $p(x)$  del tipo Holling IV generalizada, con  $\mu = (r, K, d, c, m)^T$ , existe un punto  $(x_0, y_0, \mu_0) = \left(\frac{1}{2}K_0, \frac{r_0c_0K_0}{4d_0}, r_0, K_0, d_0, c_0, m_0\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^5$ , tal que se cumple H1)- H4) del Teorema 5.1.1), donde

$$\beta_1 = -\frac{1}{4} \frac{r_0 K_0 (d_0 m_0 c + m c_0 d_0 - d m_0 c_0 - d_0 c_0 m_0)}{m_0 c_0} \text{ y}$$

$$\beta_2 = \frac{2d_0^2(r_0 c_0 m_0 K - r_0 c_0 m_0 K_0 + K_0 m c_0 d_0 + K_0 m_0 c d_0 - d K_0 m_0 c_0 - d_0 K_0 c_0 m_0)}{(K_0 m_0 c_0 - 2d_0) K_0 c_0 m_0}.$$

Con lo anterior, se demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.1** *Considere el sistema (6.1.6) con  $p(x)$  del tipo Holling IV generalizada. Si  $a = \frac{4}{K_0^2}$  y  $b = \frac{K_0 m_0 c_0 - 4d_0}{d_0 K_0}$ , entonces este sistema experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov alrededor del punto de equilibrio  $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}K_0, \frac{r_0 c_0 K_0}{4d_0}\right)$  para  $\mu \approx \mu_0$ .*

El Teorema 6.1.1 se ilustra con el siguiente ejemplo en particular.

### 6.1.3. Simulación

Consideremos el sistema (6.1.6) con el campo vectorial (6.1.7), donde tomamos los parámetros:  $r_0 = 0.6$ ,  $K_0 = 0.9$ ,  $d_0 = 0.25$ ,  $c_0 = 1$ ,  $m_0 = 0.5$  así  $\beta_1 = 0.135d - 0.03375c - 0.0675m + 0.03375$  y  $\beta_2 = -1.666K + 2.5d - 0.625 - 1.25m + 2.125$ , dejamos libres los parámetros  $K$  y  $c$ , los cuales serán los parámetros de bifurcación, estos a su vez dependen de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Se toman valores fijos para los otros parámetros  $r = d = m = 0.5$ , mientras que las constantes de la función de repuesta tiene como valores  $a = 4.938271604$  y  $b = -2.4444444444$ . Los valores de los parámetros que se tomaron anteriormente fueron elegidos sin considerar poblaciones de depredadores y presas en particular, es decir, este ejemplo es sólo un ejercicio para la aplicación del Teorema 6.1.1. Sin embargo, los valores numéricos considerados no están muy alejados de la realidad. Si tomamos los valores  $K = 1.688888889$  y  $c = 2.296296296$ , tenemos que el punto de equilibrio  $(x_0, y_0, \mu_0)$  es un foco inestable como se ve en la Figura 6.2.

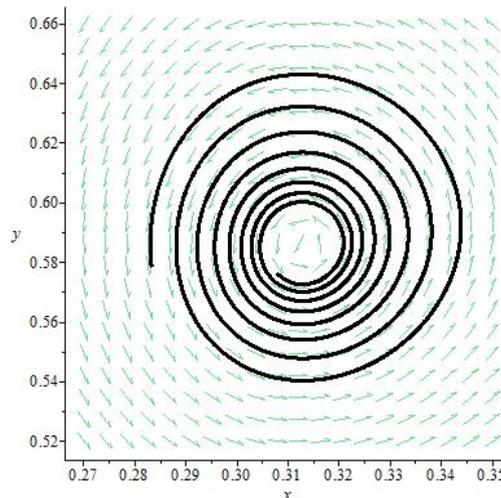


Figura 6.2: Foco inestable para  $K = 1.688888889$  y  $c = 2.296296296$ .

Si ahora tomamos el valor de  $K = 1.644444444$  y  $c = 2.414814815$  tenemos que alrededor del punto de equilibrio  $(x_0, y_0, \mu_0)$  surge una órbita cerrada repulsora y el punto de equilibrio pasa a ser un foco asintóticamente estable, como se ve en la Figura 6.3 y por último con los valores  $K = 1.618888889$  y  $c = 2.482962963$  se aprecia el comportamiento de un foco asintóticamente estable en la Figura 6.4.

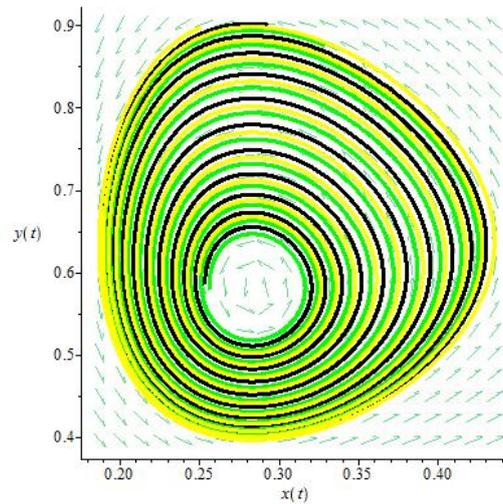


Figura 6.3: Órbita cerrada inestable y foco asintóticamente estable para  $K = 1.644444444$  y  $c = 2.414814815$ .

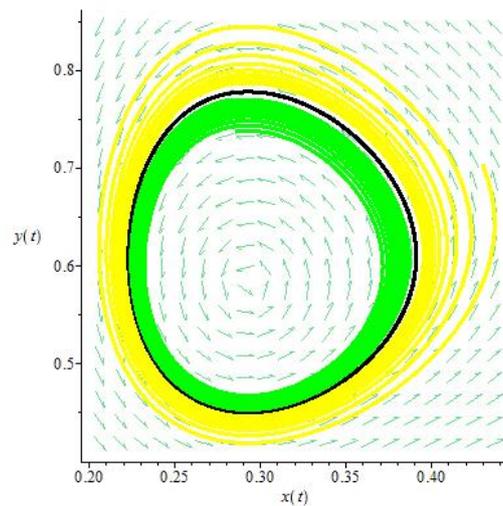


Figura 6.4: Foco asintóticamente estable para  $K = 1.618888889$  y  $c = 2.482962963$ .

En las tres simulaciones anteriores se puede observar, que en la primera se tiene una dinámica con una bifurcación silla-nodo, al pasar por los valores de bifurcación apropiadamente de  $K = 1.6$  y  $c = 2.4$ , surge una bifurcación de Hopf, y siguiendo con la decrementación de estos parámetros volvemos a obtener la bifurcación silla-nodo. Nótese que antes de obtener un foco asintóticamente estable, se debe pasar por una dinámica dada por una bifurcación homoclínica. La interpretación biológica de estas simulaciones donde se exhibe una bifurcación de Hopf cuando se satisfacen la hipótesis del Teorema 6.1.1, es que al perturbar adecuadamente los parámetros naturales de las poblaciones involucradas en el modelo de estudio, en este caso  $K$  y  $c$  se puede conseguir que sin importar los tamaños poblacionales iniciales, cada uno de estos tiende a un valor tal que ambas poblaciones puedan coexistir permanentemente, o se puede conseguir lo contrario, es decir, que sin importar los tamaños poblacionales iniciales, eventualmente una o ambas de las poblaciones se extinguirán.

## 6.2. Modelo de red neuronal

### 6.2.1. Introducción

En el artículo [Farzaneh,2010] desarrollan la aplicación del caso no genérico de la bifurcación de Takens-Bogdanov.

Las redes neuronales recurrentes se desarrollaron en los años ochenta. Las redes de Hopfield fueron inventadas por John Hopfield en 1982. En 1993, un sistema de compresores de historia neural resolvió una tarea de aprendizaje muy profundo que requería más de 1000 capas subsiguientes en una RNN (recurrent neural network) desplegada en el tiempo.

Una **red neuronal** puede verse como una máquina diseñada originalmente para modelar la forma en que el sistema nervioso de un ser vivo realiza una determinada tarea. Para lograr este objetivo, una red neuronal está formada por un conjunto de unidades de procesamiento interconectadas llamadas **neuronas**.

Cada neurona recibe como entrada un conjunto de señales discretas o continuas, las pondera e integra, y transmite el resultado a las neuronas conectadas a ella. Cada conexión entre dos neuronas tiene una determinada importancia asociada denominada **peso sináptico** o, simplemente, **peso**. En los pesos para lograr un determinado objetivo se denomina aprendizaje o entrenamiento y el procedimiento concreto utilizando para ello se conoce como algoritmo de aprendizaje o algoritmo de entrenamiento. El ajuste de peso es la principal forma de aprendizaje de las redes neuronales.

Los RNN básicos son una red de nodos tipo neurona, cada uno con una conexión dirigida (unidireccional) a cada nodo. Cada nodo (neurona) tiene una activación de valor real que varía en función del tiempo. Cada conexión (sinapsis) tiene un peso real modificable. Los nodos son entradas (que reciben datos de fuera de la red), nodos de salida (que producen resultados) o nodos ocultos (que modifican los datos en ruta de entrada a salida). Una red neuronal recurrente [Goller,1996] se crea mediante la aplicación del mismo conjunto de pesos de forma recursiva sobre una estructura diferenciable, gráfico, al recorrer la estructura en orden topológico.

Las topologías neuronales, se interconectan las neuronas de una red neuronal, define un grafo dirigido. Si este grafo es acíclico, la red se denomina red neuronal hacia adelante (en inglés, feedforward network) y en el caso de que posea ciclos, se denomina red neuronal recurrente. En este caso, los ciclos existentes tiene un profundo impacto en la capacidad de aprendizaje de la red y las hacen especialmente indicadas para el procesamiento de secuencias temporales.

Uno de los principales enfoques de investigación de RNNs siempre ha sido la existencia de soluciones periódicas y mecanismos bajo los cuales las soluciones emergen. Estudiando la relación de la existencia de soluciones periódicas en un cierto tipo de ciclo de las configuraciones neuronales recurrentes. Una característica natural de las RNNs es la presencia del retraso del tiempo en sus modelos dinámicos.

### 6.2.2. Modelo

El estudio de una red neuronal con tres neuronas en la configuración de realimentación. [Ruiz,1998] estudio este modelo en [Ruiz,1998] para el primer tiempo. En la Figura 6.5 ilustra la clase de redes neuronales recurrentes que ellos consideran en su investigación. Teniendo que  $u(t)$  es la entrada y  $y(t)$  es la salida de la red.

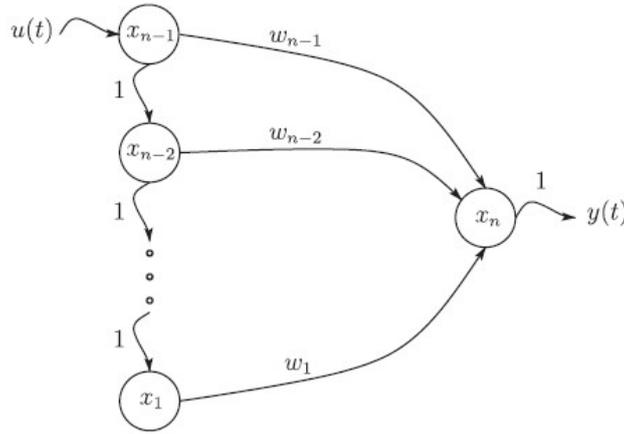


Figura 6.5: Clase de redes neuronales recurrentes estudiada por Ruiz

Esta red puede ser descrita por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + f(x_2(t)), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= -x_{n-1}(t) + u(t), \\
 \dot{x}_n(t) &= -x_n(t) + w_1 f(x_1(t)) + \cdots + w_{n-1} f(x_{n-1}(t)), \\
 y(t) &= f(x_n(t)).
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

donde,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado,  $w_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  son los parámetros o pesos,  $u(t)$  es la entrada y  $y(t)$  es la salida. La función  $f(\cdot)$  representa la función de transferencia de las neuronas. En [Ruiz,1998] muestra que una red de tres neuronas de la forma del sistema (6.2.1), con  $f(\cdot) = \tanh(\cdot)$ , tiene la capacidad de aprender una clase específica de tiempo-señales periódicas variadas. De acuerdo, con el sistema (6.2.1) se recibe la entrada  $u(t)$  cuando se desconoce la señal y entonces después de un largo período  $T > 0$ , durante el cual  $w_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , son adaptados, la entrada  $u(t)$  es remplazada por la salida  $y(t)$ . La red de tres-nodos estudiada por [Ruiz,1998] y [Townley,2000] en la configuración de realimentación, con  $u(t) = y(t)$  es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + f(x_2(t)), \\
 \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + f(x_3(t)), \\
 \dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + w_1 f(x_1(t)) + w_2 f(x_2(t)),
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

con  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  son fijos. Es importante notar que el sistema (6.2.2) con  $f(\cdot) = \tanh(\cdot)$ , es  $\mathbb{Z}_2$ -simétrico, en otras palabras es invariante bajo la rotación a través del ángulo  $\pi$ . Consideramos en el sistema (6.2.2) tomando como una función de transferencia general. Reemplazando  $\tanh(\cdot)$  por medio de un expansión de serie de Taylor en el origen con la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i-1} x^{2i-1} \tag{6.2.3}$$

donde  $\alpha_{2i-1} > 0$  para  $i$  impar y  $\alpha_{2i-1} < 0$  para  $i$  par. Esta nueva función de transferencia todavía preserva las mismas propiedades de singularidad, continuidad, monotonicidad y suavidad y además suponemos que es acotada.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + O(x_2^5) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2 + \alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_3^3 + O(x_3^5) \\ \dot{x}_3(t) &= x_3 + w_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + O(x_2^5)) + w_2(\alpha_1 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + O(x_2^5)) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

donde,  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  son variables de estado,  $w_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$  son los parámetros de red o de peso. La linealización del sistema (6.2.4) en el punto de equilibrio  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 0)$  se tiene como matriz de coeficientes a

$$J(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 w_1 & \alpha_1 w_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.5)$$

con el polinomio característicos,

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 - \alpha_1^2 w_2)\lambda + (1 - \alpha_1^2 w_2 - \alpha_1^3 w_1) = 0. \quad (6.2.6)$$

si se toma  $w_1 = w_1^* = -2/\alpha^3$  y  $w_2 = w_2^* = 3/\alpha_1^2$ , sustituyendo en (6.2.6), tenemos  $\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$  las raíces de el polinomio son  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = -3$ . Entonces el sistema experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov o doble cero. Necesitamos reducir el sistema (6.2.4) a la variedad central de dimensión dos la cual le corresponde el par de valores propios cero simple. Para esto, se considera la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \frac{1}{4}\alpha_1^2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (6.2.7)$$

implica

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9\alpha_1^2} \begin{pmatrix} 8 & 2\alpha_1 & -\alpha_1^2 \\ -6 & 3\alpha_1 & 3\alpha_1^2 \\ 4 & -8\alpha_1 & 4\alpha_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (6.2.8)$$

Usando las transformaciones (6.2.7) y (6.2.8), ponemos el sistema (6.2.4) en la forma estándar

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2, y_3) \\ F_2(y_1, y_2, y_3) \\ F_3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}, \quad (6.2.9)$$

donde

$$F_1(y_1, y_2, y_3) = a_{300}y_1^3 + a_{210}y_1^2y_2 + a_{120}y_1y_2^2 + a_{030}y_2^3 + a_{201}y_1^2y_3 + a_{102}y_1y_3^2 + a_{021}y_2^2y_3 + a_{012}y_2y_3^2 + a_{003}y_3^3 + a_{111}y_1y_2y_3 + O(|y_1, y_2, y_3|^5),$$

$$F_2(y_1, y_2, y_3) = b_{300}y_1^3 + b_{210}y_1^2y_2 + b_{120}y_1y_2^2 + b_{030}y_2^3 + b_{201}y_1^2y_3 + b_{102}y_1y_3^2 + b_{021}y_2^2y_3 + b_{012}y_2y_3^2 + b_{003}y_3^3 + b_{111}y_1y_2y_3 + O(|y_1, y_2, y_3|^5),$$

y

$$F_3(y_1, y_2, y_3) = c_{300}y_1^3 + c_{210}y_1^2y_2 + c_{120}y_1y_2^2 + c_{030}y_2^3 + c_{201}y_1^2y_3 + c_{102}y_1y_3^2 + c_{021}y_2^2y_3 + c_{012}y_2y_3^2 + c_{003}y_3^3 + c_{111}y_1y_2y_3 + O(|y_1, y_2, y_3|^5).$$

donde

$$\begin{aligned} a_{300} &= \frac{\alpha_3}{9\alpha_1}(2 + 5\alpha_1^2 + 2\alpha_1^4), & a_{210} &= \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(4 + 5\alpha_1^2), & a_{120} &= \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(8 + 5\alpha_1^2), \\ a_{030} &= \frac{\alpha_3}{9\alpha_1}(16 + 5\alpha_1^2), & a_{201} &= \frac{\alpha_3}{6\alpha_1}(4 - 5\alpha_1^2 + \alpha_1^4), & a_{111} &= -\frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(-8 + 5\alpha_1^2), \end{aligned}$$

$$a_{012} = \frac{\alpha_3}{12\alpha_1}(16 + 5\alpha_1^2), \quad a_{003} = \frac{\alpha_3}{288\alpha_1}(64 - 20\alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad a_{021} = \frac{-\alpha_3}{6\alpha_1}(-16 + 5\alpha_1^2),$$

$$a_{102} = \frac{\alpha_3}{24\alpha_1}(16 + 10\alpha_1^2 + \alpha_1^4)$$

y

$$b_{300} = -\frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(-1 - \alpha_1^2 + 2\alpha_1^4), \quad b_{210} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(2 + \alpha_1^2), \quad b_{120} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(4 + \alpha_1^2),$$

$$b_{030} = \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(8 + \alpha_1^2), \quad b_{201} = -\frac{\alpha_3}{2\alpha_1}(-2 + \alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad b_{111} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(-4 + \alpha_1^2),$$

$$b_{012} = \frac{\alpha_3}{4\alpha_1}(8 + \alpha_1^2), \quad b_{003} = -\frac{\alpha_3}{96\alpha_1}(-32 + 4\alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad b_{021} = -\frac{\alpha_3}{2\alpha_1}(-8 + \alpha_1^2),$$

$$b_{102} = -\frac{\alpha_3}{8\alpha_1}(-8 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^4)$$

$$c_{300} = -\frac{8\alpha_3}{9\alpha_1}(1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad c_{210} = \frac{16\alpha_3}{3\alpha_1}(-1 + \alpha_1^2), \quad c_{120} = \frac{16\alpha_3}{3\alpha_1}(-2 + \alpha_1^2)$$

$$c_{030} = \frac{16\alpha_3}{9\alpha_1}(-4 + \alpha_1^2), \quad c_{201} = -\frac{2\alpha_3}{3\alpha_1}(4 + 4\alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad c_{111} = -\frac{16\alpha_3}{3\alpha_1}(2 + \alpha_1^2)$$

$$c_{012} = \frac{4\alpha_3}{3\alpha_1}(-4 + \alpha_1^2), \quad c_{003} = -\frac{\alpha_3}{72\alpha_1}(64 + 16\alpha_1^2 + \alpha_1^4), \quad c_{021} = -\frac{8\alpha_3}{3\alpha_1}(4 + \alpha_1^2), \quad c_{102} = -\frac{\alpha_3}{6\alpha_1}(16 - 8\alpha_1^2 + \alpha_1^4).$$

Reducimos el sistema (6.2.9) a la variedad central de dimensión dos la cual corresponde al par de valores propios cero. Ya que el espacio propio estable  $E^s$  es de dimensión uno, la variedad central es de la forma  $y_3 = h(y_1, y_2)$ . Se considera un polinomio de grado tres, ya que los términos de segundo grado son ceros. Por lo que, se considera la variedad central de la forma

$$y_3 = h(y_1, y_2) = ay_1^3 + by_1^2y_2 + cy_1y_2^2 + dy_2^3 + O(|(y_1, y_2)|^5). \quad (6.2.10)$$

Sustituyendo a la variedad central (6.2.10) en la tercera ecuación de (6.2.9),

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = -3y_3 + F_3(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow & 3ay_1^2\dot{y}_1 + 2by_1y_2\dot{y}_1 + by_1^2\dot{y}_2 + c\dot{y}_1y_2^2 + 2cy_1y_2\dot{y}_2 + 3d\dot{y}_2^2y_2 = \\ & -3(ay_1^3 + by_1^2y_2 + cy_1y_2^2 + dy_2^3) + c_{300}y_1^3 + c_{210}y_1^2y_2 + c_{120}y_1y_2^2 + c_{030}y_2^3 + c_{201}y_1^2y_3 + \\ & c_{102}y_1y_2^2 + c_{021}y_2^2y_3 + c_{012}y_2y_3^2 + c_{003}y_3^3 + c_{111}y_1y_2y_3 \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

en la ecuación (6.2.11), se sustituye  $\dot{y}_1$  y  $\dot{y}_2$  de (6.2.10) y entonces igualando las potencias  $y_1^3, y_1^2y_2, y_1y_2^2$  y  $y_2^3$  en ambos lados, para el primer término  $y_1^3$  obtenemos su valor de la siguiente ecuación

$$3a = c_{300} \Rightarrow a = -\frac{8\alpha_3}{27\alpha_1}(1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^4). \quad (6.2.12)$$

Para el término  $y_1^2y_2$

$$-3b = 3a - c_{210} \Rightarrow -3b = 3\left(\frac{-8\alpha_3}{27\alpha_1}(1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^4)\right) - \frac{16\alpha_3}{3\alpha_1}(-1 + \alpha_1^2) \Rightarrow b = \frac{8\alpha_3}{27\alpha_1}(\alpha_1^4 + 4\alpha_1^2 - 5). \quad (6.2.13)$$

Para el término  $y_1y_2^2$

$$-3c + c_{120} = 2b \Rightarrow c = 2\frac{8\alpha_3}{27\alpha_1}(\alpha_1^4 + 4\alpha_1^2 - 5) - \frac{16\alpha_3}{3\alpha_1}(-2 + \alpha_1^2) \Rightarrow c = -\frac{16\alpha_3}{81\alpha_1}(\alpha_1^4 - 5\alpha_1^2 + 13). \quad (6.2.14)$$

Para el término  $y_2^3$

$$-3d + c_{030} = c \Rightarrow -3d = -\frac{16\alpha_3}{81\alpha_1}(\alpha_1^4 - 5\alpha_1^2 + 13) - \frac{16\alpha_3}{9\alpha_1}(\alpha_1^2 - 4) \Rightarrow d = \frac{16\alpha_3}{243\alpha_1}(\alpha_1^4 + 4\alpha_1^2 - 23). \quad (6.2.15)$$

Entonces, esto son los valores de la variedad central:

$$a = -\frac{8\alpha_3}{27\alpha_1}(-2\alpha_1^2 + \alpha_1^4 + 1), \quad b = \frac{8\alpha_3}{27\alpha_1}(4\alpha_1^2 + \alpha_1^4 - 5),$$

$$c = -\frac{16\alpha_3}{81\alpha_1}(-5\alpha_1^2 + \alpha_1^4 + 13), \quad d = \frac{16\alpha_3}{243\alpha_1}(4\alpha_1^2 + \alpha_1^4 - 23).$$

Por tanto, el sistema (6.2.9) es reducido al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \beta_{30}y_1^3 + \beta_{21}y_1^2y_2 + \beta_{12}y_1y_2^2 + \beta_{03}y_2^3 + O(|y_1, y_2|^5), \\ \dot{y}_2 &= \sigma_{30}y_1^3 + \sigma_{21}y_1^2y_2 + \sigma_{12}y_1y_2^2 + \sigma_{03}y_2^3 + O(|y_1, y_2|^5), \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_{30} &= \frac{\alpha_3}{9\alpha_1}(5\alpha_1 + \alpha_1^4 + 2), \quad \beta_{21} = \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(5\alpha_1^2 + 4) \\ \beta_{12} &= \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(5\alpha_1^2 + 8), \quad \beta_{03} = \frac{\alpha_3}{9\alpha_1}(5\alpha_1^2 + 16), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{30} &= -\frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(-\alpha_1^2 + 2\alpha_1^4 - 1), \quad \sigma_{21} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(\alpha_1^2 + 2), \\ \sigma_{12} &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(\alpha_1^2 + 4), \quad \sigma_{03} = \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(\alpha_1^2 + 8). \end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo a [Kuznetsov, 2000], se introducen las nuevas variables  $(u_1, u_2)$  por

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1, \\ u_2 &= \tilde{F}_1(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

donde

$$\tilde{F}(y_1, y_2) = y_2 + \beta_{30}y_1^3 + \beta_{21}y_1^2y_2 + \beta_{12}y_1y_2^2 + \beta_{03}y_2^3 + O(|y_1, y_2|^5). \quad (6.2.18)$$

la transformación (6.2.18) se sustituye en el sistema (6.2.17) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= h_{30}u_1^3 + h_{21}u_1^2u_2 + h_{12}u_1u_2^2 + h_{03}u_2^3 + O(|u_1, u_2|^5), \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} h_{30} &= -\frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(-\alpha_1^2 + 2\alpha_1^4 - 1), \quad h_{12} = \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(13\alpha_1^2 + 20) \\ h_{21} &= \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1}(4\alpha_1^2 + \alpha_1^4 + 4), \quad h_{03} = \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1}(3\alpha_1^2 + 8). \end{aligned}$$

El sistema (6.2.19) puede ser reescrito cuando

$$\dot{U} = J_{BT}U + G_3(U) + O(|U|^5), \quad (6.2.20)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad J_{BT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_3(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_{30}u_1^3 + h_{21}u_1^2u_2 + h_{12}u_1u_2^2 + h_{03}u_2^3 \end{pmatrix}.$$

Dada la simplicidad de los términos de tercer orden en el sistema (6.2.20), consideremos el cambio de coordenadas ([Guckenheimer, 1993]); que es,

$$U = V + H(V), \quad (6.2.21)$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad H(V) = \begin{pmatrix} f_{30}v_1^3 + f_{21}v_1^2v_2 + f_{12}v_1v_2^2 + f_{03}v_2^3 \\ g_{30}v_1^3 + g_{21}v_1^2v_2 + g_{12}v_1v_2^2 + g_{03}v_2^3 \end{pmatrix}, \quad (6.2.22)$$

con

$$f_{30} = \frac{\alpha_3}{18\alpha_1}(13\alpha_1^2 + 20), \quad f_{21} = \frac{\alpha_3}{3\alpha_1}(3\alpha_1^2 + 8),$$

$$g_{21} = \frac{\alpha_3}{6\alpha_1}(13\alpha_1^2 + 20), \quad g_{12} = \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1}(3\alpha_1^2 + 8),$$

y  $f_{12} = f_{03} = g_{30} = g_{03} = 0$ . La transformación (6.2.21) se sustituye en el sistema (6.2.20) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 + O(|v_1, v_2|^5), \\ \dot{v}_2 &= a_3v_1^3 + b_3v_1^2v_2 + v_2 + O(|v_1, v_2|^5). \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

En el sistema (6.2.23) el coeficiente  $a_3$  será no cero si  $\alpha_1 \neq 1$ . De acuerdo a [Guckenheimer, 1993], los términos de alto orden puede ser omitidos del sistema (6.2.23) debido a la estabilidad estructural; por tanto, el siguiente sistema se tendrá en cuenta:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= a_3v_1^3 + b_3v_1^2v_2. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

El sistema (6.2.24) representa la forma normal del sistema (6.2.4) en el punto de bifurcación Takens-Bogdanov donde  $(w_1^*, w_2^*) = (-2/\alpha_1^3, 3/\alpha_1^2)$ . Ya que  $\alpha_1 > 0$  y  $\alpha_3 < 0$ ,  $b_3$  es siempre negativo. Si  $\alpha_1 < 1$ , entonces  $a_3 < 0$  y si  $\alpha_1 > 0$ , entonces  $a_3 > 0$ . Por otra parte, se repite el mismo procedimiento de reducir la variedad central y aplicando el cambio de coordenadas (6.2.17) y (6.2.21) en la vecindad de  $(w_1^*, w_2^*)$  para  $\alpha_1 \neq 1$ , se obtendrá la forma normal cuyos coeficientes son funciones de  $w_1$  y  $w_2$ . Así, que los términos de deformación emergerán automáticamente. Por tanto, el sistema (6.2.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= \mu_1(w_1, w_2)v_1 + \mu_2(w_1, w_2)v_2 + \tilde{a}_3(w_1, w_2)v_1^3 + \tilde{b}_3(w_1, w_2)v_1^2v_2 \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

con

$$\begin{aligned} \mu_1(w_1, w_2) &= \frac{1}{3}(w_1\alpha_1^2 - 1), \\ \mu_2(w_1, w_2) &= \frac{1}{9}(-w_1\alpha_1^3 + 2w_2\alpha_1^2 - 8), \end{aligned}$$

y

$$\mu_1(w_1^*, w_2^*) = \mu_2(w_1^*, w_2^*) = 0, \quad \tilde{a}_3(w_1^*, w_2^*) = a_3, \quad \tilde{b}_3(w_1^*, w_2^*) = b_3.$$

Ya que tenemos que aplicar el cambio de coordenadas de (6.2.7), (6.2.8), (6.2.17) y (6.2.21) en una pequeña vecindad de  $(w_1^*, w_2^*)$ , los coeficientes  $\tilde{a}_3$  y  $\tilde{b}_3$  preservan el signo de  $a_3$  y  $b_3$  debido a su continua dependencia en los parámetros. Se introduce el cambio de variables y reescalamiento de tiempo

$$\xi_1 = \frac{\tilde{b}_3}{\sqrt{|\tilde{a}_3|}}v_1, \quad \xi_2 = \frac{\tilde{b}_3^2}{|\tilde{a}_3| \sqrt{|\tilde{a}_3|}}v_2, \quad \tau = -\frac{|\tilde{a}_3|}{\tilde{b}_2}t,$$

realizando la sustitución de (6.2.2) al sistema (6.2.25) llegamos a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \tilde{\mu}_1\xi_1 + \tilde{\mu}_2\xi_2 + s\xi_1^3 - \xi_1^2\xi_2 \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

donde  $s = \text{sgn}(\tilde{a}_3)$ , y

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1(w_1, w_2) &= \left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{b}_3}\right)^2 \mu_1(w_1, w_2), \\ \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2(w_1, w_2) &= -\frac{|\tilde{a}_3|}{\tilde{b}_3} \mu_2(w_1, w_2).\end{aligned}\tag{6.2.27}$$

Para usar el sistema (6.2.26) podemos estudiar el comportamiento cualitativo del sistema original (6.2.4) codimensión dos de Takens-Bogdanov,  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, w_1^*, w_2^*) = (0, 0, 0, -2/\alpha_1^3, 3/\alpha_1^2)$ , y el análisis de bifurcación del sistema (6.2.26) se puede ver en el Capítulo 4, para el caso  $s = 1$  es con el sistema (5.2.3) y para  $s = -1$  es con el sistema (5.2.12). Donde los puntos de equilibrio tienen la forma

$$E_1(s) = (0, 0) \quad \text{y} \quad E_{2,3}(s) = \left(\mp \sqrt{-\frac{\tilde{\mu}_1}{s}}, 0\right).$$

### 6.2.3. Simulación del modelo de la red neuronal recurrente con tres neuronas

Ahora bien, realizando las simulaciones del sistema (6.2.4) podemos observar los siguientes retratos fases:

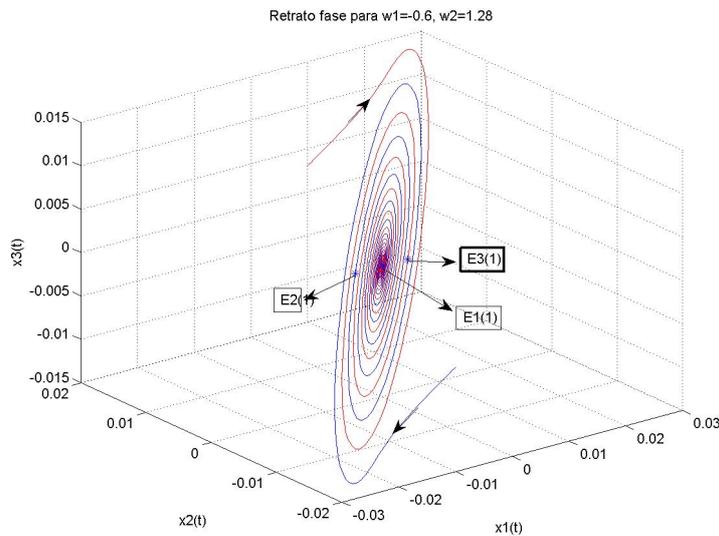


Figura 6.6:  $E_1(1)$  es estable,  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$  son inestables, aparece la bifurcación tender.

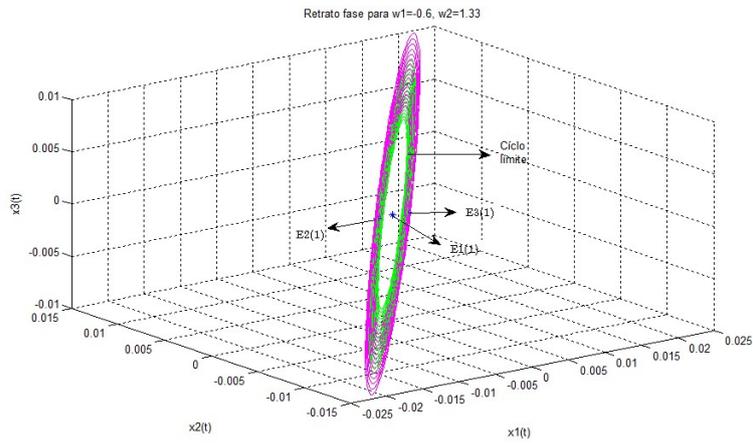


Figura 6.7: Aparece un ciclo límite estable que emerge alrededor de  $E_1(1)$ , la cual es la bifurcación de Hopf Supercrítica.

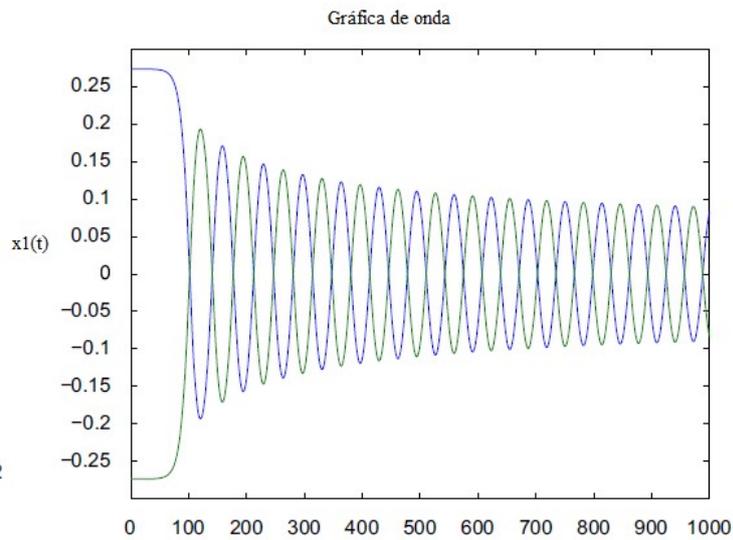


Figura 6.8: Ciclo limite

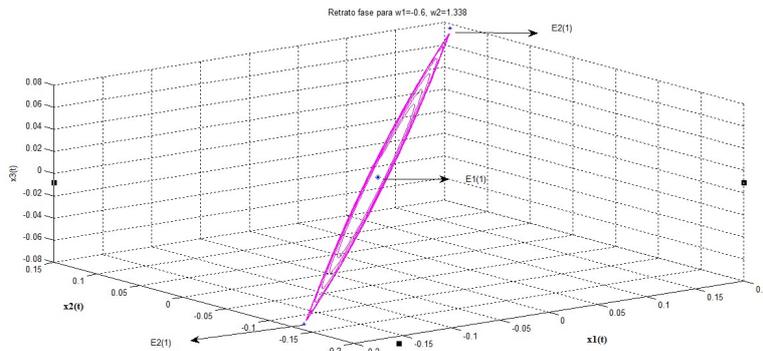


Figura 6.9: Curva heteroclínica que esta entre los puntos  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$ .

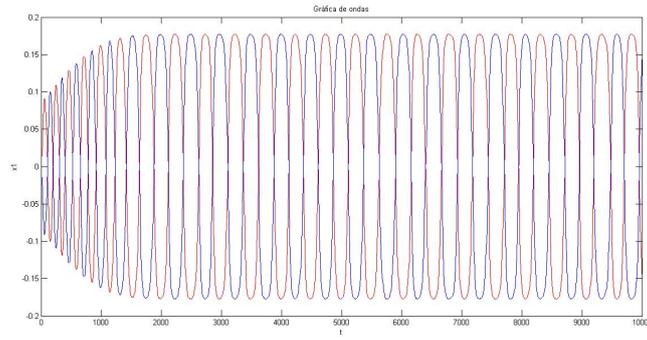


Figura 6.10: Muestra que  $(w_1, w_2)$  se acerca a la curva Heteroclínica  $E_{2,3}(1)$  el ciclo límite, generado por la bifurcación de Hopf, tiende a forma una conexión heteroclínica  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$ .

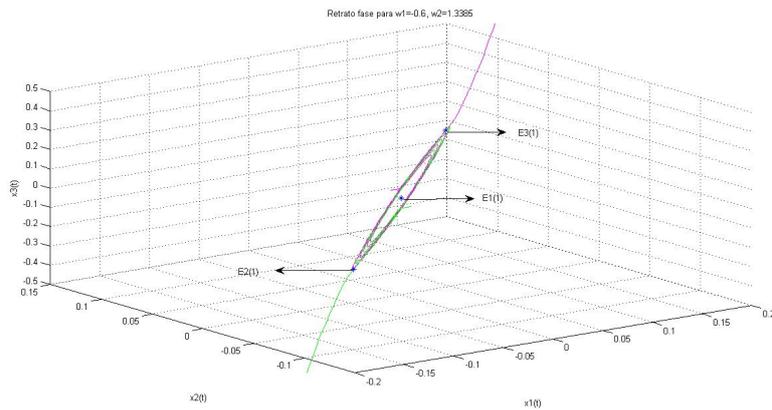


Figura 6.11: Las órbitas heteroclínicas desaparecen.

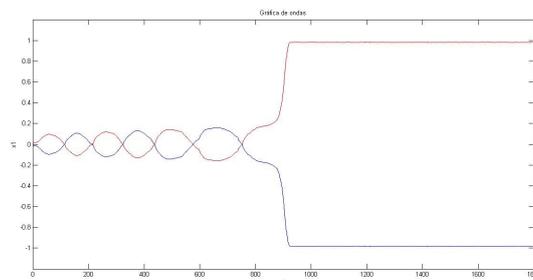


Figura 6.12:  $E_1(1)$  permanece inestable y repelen todas las trayectorias cercas incluyendo las dos variedades estables de los equilibrios  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$ .

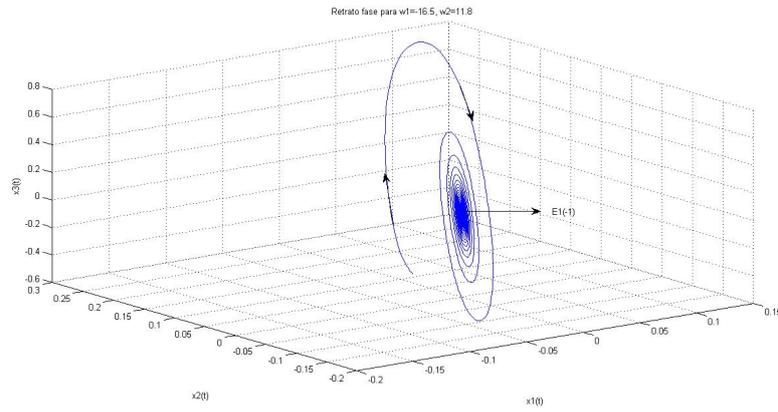


Figura 6.13: Sólo hay un punto de equilibrio,  $E_1(1)$  es una espiral estable.

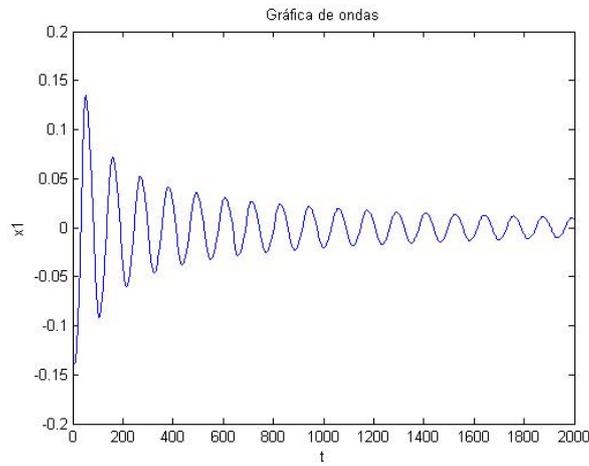


Figura 6.14: Muestra el comportamiento de la espiral estable.

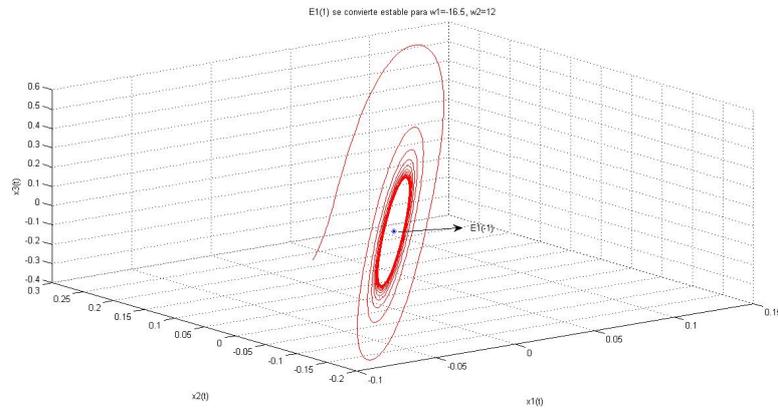


Figura 6.15: Un ciclo límite estable emergerá alrededor  $E_1(-1)$  hace que ocurra la bifurcación de Hopf Supercrítica.

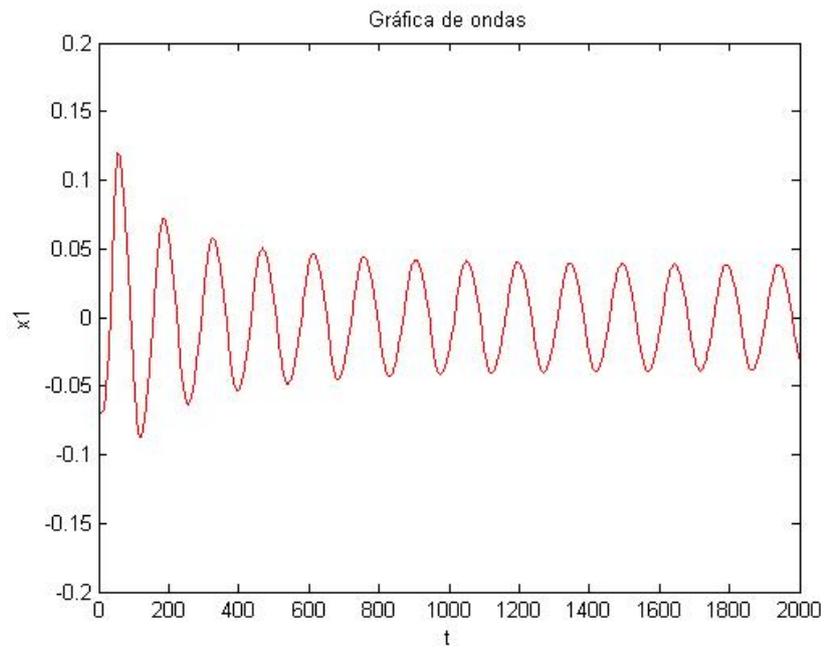


Figura 6.16: El ciclo límite es estable.

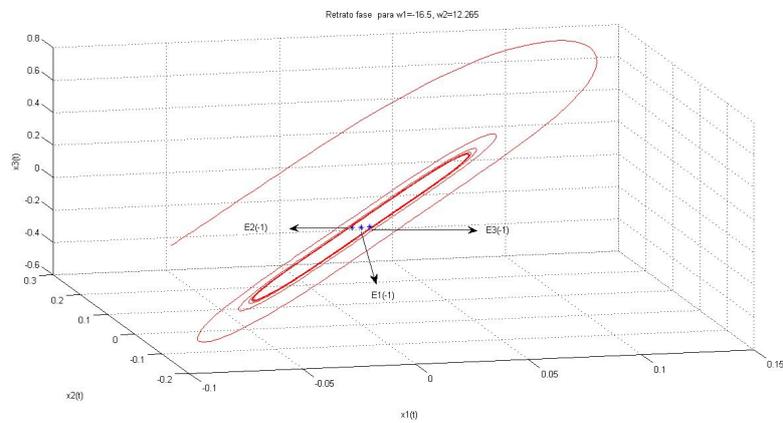


Figura 6.17: Aparece un ciclo límite estable el cual es previamente generado por la bifurcación de Hopf.

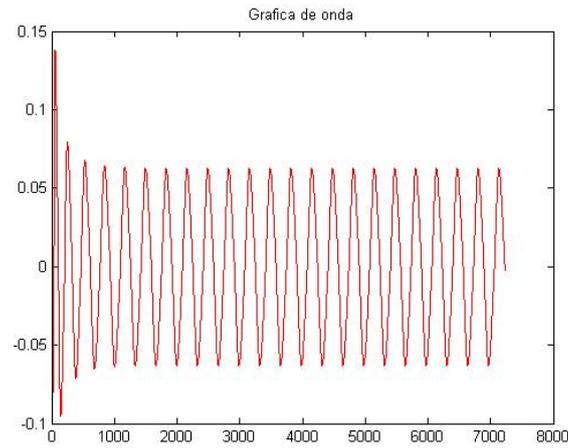


Figura 6.18: Muestra que todas las trayectorias, empezando desde un punto arbitrario en una vecindad de el origen fuera del gran ciclo límite estable, son atrayentes por el ciclo límite estable.

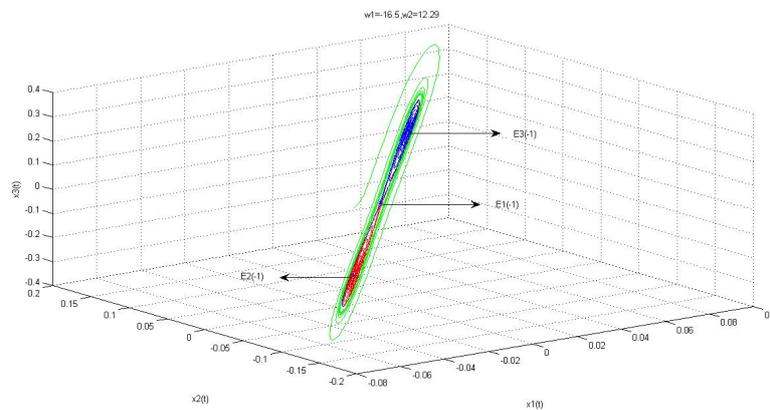


Figura 6.19: Cruza la curva homoclínica y todas las trayectorias cerca de  $E_2(-1)$  y  $E_3(-1)$ , son atrayentes para uno de estos puntos de equilibrio no cero.

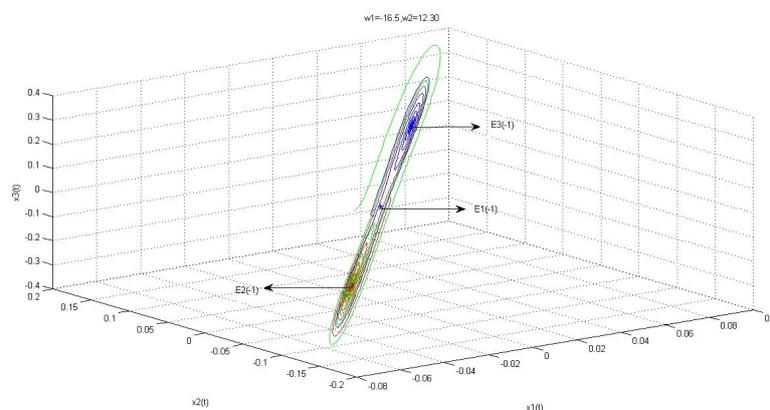


Figura 6.20: Desaparecen los dos ciclos límites y se colisionan, todas las trayectorias, empezando desde un punto arbitrario en una vecindad del origen, será atrapado por la cuenca de atracción de uno de los puntos de equilibrio no cero.

Para el caso  $s = 1$ , tenemos que los valores de  $\alpha_1 = 3/2$  y  $\alpha_3 = -1/2$  son fijos, que son los coeficientes de la función de transferencia. Por otra parte, los valores de bifurcación  $w_1$  y  $w_2$  que fueron escogidos para demostrar la existencia de las distintas bifurcaciones que aparecieron. Para la Figura 6.6 surge la bifurcación cuando el punto de equilibrio  $E_1(1)$  llega a ser estable, aparecen los otros dos puntos de equilibrios  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$ . En la Figura 6.7 surge la bifurcación de Hopf supercrítica en  $E_1(1)$ ; por tanto emerge un ciclo límite estable alrededor  $E_1(1)$  y el punto de equilibrio llega a ser inestable y se puede ver en la gráfica de onda el comportamiento de un ciclo límite como se ve Figura 6.8. En la Figura 6.9 el ciclo límite generado por la bifurcación de Hopf tiende a formar una conexión de órbitas heteroclinicas entre los puntos de equilibrios  $E_2(1)$  y  $E_3(1)$ , como se puede observar la gráfica de ondas Figura 6.10. Por último en la Figura 6.11 desaparecen las órbitas heteroclinicas.

Para  $s = -1$  y la función de transferencia de las neuronas, se toman los valores  $\alpha_1 = 1/2$  y  $\alpha_3 = -1/6$ . En la Figura 6.13 tiene un único punto de equilibrio  $E_1(-1)$  que su comportamiento es de forma de una espiral y se puede observar su gráfica de onda Figura 6.14. En la Figura 6.17 surge la bifurcación de Hopf Supercrítica en  $E_1(-1)$ ; por tanto, el ciclo límite estable emerge alrededor de  $E_1(-1)$  y el punto de equilibrio en si mismo llega a ser inestable. En la Figura 6.19 se ilustra la aparición de la bifurcación Homoclinica y desaparecen los dos pequeños ciclos límites inestables. Y la Figura 6.20 muestra que no tiene ciclo límite, todas las trayectorias empezando un punto arbitraria en una vecindad de el origen, convergerá a uno de los dos puntos de equilibrio que son diferente de cero  $E_2(-1)$  y  $E_3(-1)$ .



# Conclusiones

El trabajo que he presentado, muestra la riqueza dinámica de la bifurcación Takens-Bogdanov o doble cero, la cual al momento de linealizar el sistema dinámico y evaluar el punto de equilibrio tiene un valor propio cero con multiplicidad cero.

El caso genérico, presenta términos de segundo orden en el sistema dinámico. Para determinar el comportamiento cualitativo de este, se agrega una deformación o desdoblamiento universal dado por Guckenheimer, en donde se agregan dos parámetros  $(\mu_1, \mu_2)$  que determinan la codimensión del sistema, la cual es dos. Además tiene dos puntos de equilibrios los que dependen del parámetro  $\mu_1$ . Al momento de variar los valores de los parámetros, aparecen distintas dinámicas y bifurcaciones. Cuando  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  presenta el comportamiento cualitativo de una cúspide, para  $\mu_1 > 0$  no hay puntos de equilibrios, para  $\{\mu_1 < 0, \mu_2 > 0, \mu_2 = \sqrt{-\mu_1}\}$  ocurre la bifurcación Hopf subcrítica, para  $\{\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0\}$  sucede la bifurcación silla-nodo y para  $\{\mu_1 < 0, \mu_2 \geq 0, \mu_1 = -\left(\frac{49}{25}\right)\mu_2^2\}$  es la bifurcación homoclínica.

El caso no genérico, se puede abordar de dos maneras. Una de ellas es como presenta en [Kuznetsov,2000] que la codimensión es tres y en el trabajo presentado tomamos como la presenta [Guckenheimer,1993]. En donde el sistema dinámico tiene términos de tercer orden y es de codimensión dos. Tenemos el sistema (5.2.2) tomando el caso con signo positivo del sistema, tenemos que tiene tres puntos de equilibrio. Existe una bifurcación tenedor en los puntos en el eje  $\mu_2$  con  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ . Para  $\{\mu_1 < 0, \mu_2 = 0\}$  aparece la bifurcación de Hopf Supercrítica y  $\mu_1 > 0$  no existe órbitas periódicas. Por último la bifurcación Homoclínica ocurre cuando  $\{\mu_1 > 0, \mu_2 = -\frac{\mu_1}{5}\}$ . En el caso con signo negativo, tenemos para  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$  tenemos una bifurcación tenedor, para  $\mu_1 = \mu_2, \mu_1 > 0$  surge una bifurcación de Hopf subcrítica, para  $\mu_2 < 0$  no existe órbitas periódicas y por último en la curva  $\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1$  existe la bifurcación homoclínica.

Después de haber comprobado teóricamente los resultados que aparecían en la bifurcación de Takens-Bogdanov y por último concluimos la tesis con aplicaciones para los dos casos de la bifurcación. Para el caso genérico es el modelo de depredador-presa con defensa de un grupo. En este modelo se realiza tres simulaciones variando los valores de bifurcación  $K$  y  $c$  en donde surge la bifurcación Hopf y silla-nodo. La interpretación biológica de estas simulaciones donde se exhibe una bifurcación de Hopf cuando se satisfacen la hipótesis del Teorema 6.1.1, es que al perturbar adecuadamente los parámetros naturales de las poblaciones involucradas en el modelo de estudio, en este caso  $K$  y  $c$  se puede conseguir que sin importar los tamaños poblacionales iniciales, cada uno de estos tiende a un valor tal que ambas poblaciones puedan coexistir permanentemente, o se puede conseguir lo contrario, es decir, que sin importar los tamaños poblacionales iniciales, eventualmente una o ambas de las poblaciones se extinguirán. Para el caso no genérico es sobre el modelo una de red neuronal recurrente con tres neuronas, es representado por un sistema de 3 ecuaciones diferenciales, que tienes dos parámetros de bifurcaciones  $w_1$  y  $w_2$ , donde se fijo las constantes  $\alpha_1, \alpha_3$ . Que al momento de calcular la linealización y evaluar el punto de equilibrio que era el origen, tenemos que sus valores propios son -3 y 0 con multiplicidad dos, se calculo la variedad central y disminuyo la dimensión del sistema. Se realizo varios cambios de variables hasta lograr llegar a la forma (5.2.2), en donde nosotros ya

teníamos el análisis de este caso. Las dinámicas que caracteriza al modelo de una red neuronal recurrente ha sido la existencia de soluciones periódicas y mecanismos bajo los cuales las soluciones emergen. Los ciclos existentes tiene un profundo impacto en la capacidad de aprendizaje de la red y las hacen especialmente indicadas para el procesamiento de secuencias temporales.

# Capítulo 7

## Apéndice

### 7.1. Apéndice A)

Solución de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\tau) \tanh^k(\tau) d\tau = \frac{\tanh^{k+1}(\tau)}{k+1} = \frac{2}{k+1}, \quad (7.1.1)$$

### 7.2. Apéndice B)

La solución de las siguientes integrales de las funciones elípticas de Jacobi:

$$\int_0^{4K(\alpha)} \operatorname{sn}^2(u) du = \frac{4}{\alpha^2} [K(\alpha) - E(\alpha)], \quad (7.2.1)$$

$$\int_0^{4K(\alpha)} \operatorname{sn}^4(u) du = \frac{4}{3\alpha^4} [(2 + \alpha^2)K(\alpha) - 2(1 + \alpha^2)E(\alpha)], \quad (7.2.2)$$

y

$$\int_0^{4K(\alpha)} \operatorname{sn}^6(u) du = \frac{4}{15\alpha^6} [(4\alpha^4 + 3\alpha^2 + 8)K(\alpha) - (8\alpha^4 + 7\alpha^2 + 8)E(\alpha)] \quad (7.2.3)$$

donde  $K(\alpha)$  y  $E(\alpha)$  son las integrales elípticas completas de primer y segundo tipo respectivamente.

El valor de la integral completa de primer especie fue obtenido por Gauss como resultado de sus investigaciones acerca de la media aritmética geométrica y de las series hipergeométricas:

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(\theta)}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right] \alpha^{2n}. \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

El valor de la integral completa de segunda especie se calcula de manera análoga:

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{\alpha^{2n}}{2n-1} \right), \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

en donde  $0 < \alpha < 1$ .

## 7.2.1. Apéndice B.1) código

```

a = 0.9999; (*alpha*)
(*Primer especie*)
K_alpha = Pi / 2 * ( Sum_{n=0}^{10} ( ((2*n-1)!! / (2*n)!! )^2 * a^(2*n) ) );
(*Segunda especie *)
S_alpha = Pi / 2 * ( 1 - Sum_{n=0}^{10} ( ((2*n-1)!! / (2*n)!! )^2 * (a)^(2*n) / (2*n-1) ) );

c =
  ( 4*a^4 / (1+a^2)^3 * ( ( 4*(K_alpha - S_alpha) / a^2 ) - 4*(a+1) / (3*a^2) * ((2+a^2)*K_alpha - 2*(1+a^2)*S_alpha) +
    a^2 * ( 4 / (15*a^6) * ((4*a^4 + 3*a^2 + 8)*K_alpha - (8*a^4 + 7*a^2 + 8)*S_alpha) ) ) );
b = 2*a^2 / (1+a^2)^2 * ( 4*K_alpha - (a+1) * ( 4 / a^2 * (K_alpha - S_alpha) ) + a^2 * ( 4 / (3*a^2) * ((2+a^2)*K_alpha - 2*(1+a^2)*S_alpha) ) );
(*Resultado de nu_2*)
nu2 = c / b
nu2 = 0.19988548935540776`

```

# Bibliografía

- [Wiggins,2003] S. Wiggs, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Texts in Applied Mathematics, Vol.2, Springer- Verlag, Second Edition. 2003.
- [Perko,1996] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, Vol. 7, Springer, Second Edition, 1996. pag 1 - 169.
- [Wiggins] S.Wiggins, Global Bifurcations and chaos. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, 1998.
- [Guckenheimer,1993] J. Guckenheimer y P.Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences 42. Springer- Verlag, New York, 1993, pag 117 - 212.
- [Kuznetsov,2000] Y.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences, Vol.112, Springer- Verlag, Second Edition, 2000.
- [Hirsch] M. W. Hirsch. and Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press , New York.
- [Carr] J.Carr, Applications of center Manifold Theory, Springer - Verlag: New York, 1981.
- [Turchin,2003] P. Turchin, Complex Population Dynamics A Theoretical Empirical Synthesis, Princeton University Press,Princeton, New Jersey, 2003.
- [ Freedman,1980] H. I.Freedman , Deterministic Mathematical Model in Population Ecology, Marcel Dekker, 1980.
- [Holling] Holling, C. S. 1965. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. Memoirs of the Entomological Society of Canada 45, pag 5 - 60
- [Carrillo, 2014] F. A.Carrillo, Análisis de la Bifucación de Takens- Bogdanov en el Modelo Depredador- Presa con defensa de grupo ,2014, Epistemus, pag 1-4.
- [Carrillo,2010] F.A. Carrillo, F.Verduzco and J. Delgado,Analysisi of the Takens- Bogadanov bifurcation on m-parameterized vectors fields, Int J.Bif and Chaos. Vol.20, No.4, pp 995-1005, 2010
- [Takens,1974] Takens, F, Singularities of vector fields,Publi.Math, IHES 43, pag 47-100, 1974
- [Bogdanov, 1975] Bogdanov R.I, Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues, Functional Anal, Appl 9(2), pag 144-145.
- [Goller,1996] C. Goller y A. Küchler, (1996). .Aprendizaje de las representaciones distribuidas dependientes de tareas por backpropagation a través de la estructuraIEEE Conferencia Internacional sobre Redes Neuronales, 1996 . 1 : 347. ISBN 0-7803-3210-5 . doi : 10.1109 / ICNN.1996.548916 .

- [Farzaneh,2010] M. Farzaneh, Babak Beheshti, Amirhossein Hajihosseini, Gholam Reza Rokni Lamookii, The Bogdanov-Takens bifurcation analysis on a three dimensional recurrent neural network, *Neurocomputing*,73(2010),3066-3078.
- [Ruiz,1998] A. C. Ruiz, G.H.Owens, S.Townley, Existence, learning and replication of periodic motions in recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* 9(1998) 651-661
- [Townley,2000] S.Townley, A. Ilchman, M.G.Weiss, W.Mcclements,A.C Ruiz, D.H Owens, D.Praetzel-Wolters, Existence and learning of oscillations in recurrent neural networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11(2000) 205-214.
- [Carr] J. Carr. *Application of Centre Manifold Theory*,Springer- Verlag.
- [Hassard,Kazarinoff y Wan] Hassard,B.D., Kazarinoff, N.D, and Wan, Y.H, 1980. *Theory and Applications of the Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press:Cambridge.
- [Marsden y McCracken] Marsden ,J.E. and MCCracken , M. 1976, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Spriger-Verlag:New York, Heidelberg, Berlin.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 0017

Matrícula: 211882962

ANÁLISIS Y APLICACIONES DE LA BIFURCACIÓN DE TAKENS-BODDANGY EN SUS CASOS GENÉRICO Y NO GENÉRICO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 13 del mes de noviembre del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ERIC CAMPOS CANTON
- DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ
- DR. FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO
- DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: ANA CONTRERAS MENDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ANA CONTRERAS MÉNDEZ  
ALUMNA

LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSÉ GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. ERIC CAMPOS CANTON

VOCAL

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOCAL

DR. FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO

SECRETARIO

DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ