



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
**Unidad Iztapalapa**

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Básicas

**“Dinámica de un modelo matemático de interacción  
entre saltamontes del té verde y ácaros ”**

Tesis que presenta

Ahida Ortiz Santos

Matrícula 2212801586

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Matemáticas)

---

Directora: Dra. Martha Álvarez Ramírez

Jurados

Dr. Julio Ernesto Solís Daun

Dr. Joaquín Delgado Fernández

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Iztapalapa, Ciudad de México, febrero 2024



Agradezco a mi asesora por ser mi guía durante todo este proceso académico. Su apoyo, paciencia y dedicación han sido fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

Gracias, mamá, por tu amor eterno, tu inquebrantable apoyo y por ser mi fortaleza en los momentos de incertidumbre. A mi familia, amigos y seres queridos por todo su apoyo.

Este proyecto fue llevado a cabo con el apoyo de la beca de CONAHCyT con el número 1147239. Agradezco a esta institución ya que sin su generosa contribución, este proyecto no hubiera sido posible.

# Índice general

Contenido	I
Introducción	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1. Puntos no hiperbólicos en $\mathbb{R}^2$	7
1.2. Teoría de la variedad central	9
1.3. Bifurcación de Andronov-Hopf	10
1.3.1. Teoremas de Hopf	12
1.4. Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov	13
<b>2. Modelo presa-depredador del saltamontes del té verde <i>Empoasca onukii</i> y ácaros <i>Anystis baccarum</i></b>	<b>15</b>
2.1. Planteamiento del modelo	15
2.2. Puntos de equilibrio y estabilidad	19
2.3. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio	27
<b>3. Bifurcaciones</b>	<b>34</b>
3.1. Bifurcaciones silla-nodo y cúspide	34

3.2. Bifurcación de Hopf . . . . .	43
<b>4. Estudio numérico de diagramas de bifurcación</b>	<b>49</b>
<b>5. Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov para los puntos de Hopf obtenidos con MatCont</b>	<b>59</b>
5.1. $l_1$ para el punto de Hopf mostrado en la figura 4.1 . . . . .	59
5.2. $l_1$ para el punto de Hopf mostrado en la figura 4.6 . . . . .	63
<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>A. Demostración de <math>A_2 &gt; 0</math></b>	<b>67</b>
<b>B. Forma normal</b>	<b>70</b>
B.1. Forma normal del sistema (3.7) . . . . .	70
B.2. Forma normal del sistema (3.11) . . . . .	74

# Índice de figuras

- 1. El diagrama de bifurcación muestra la coexistencia de los puntos de equilibrio y su transformación en nuevos equilibrios al fusionarse. Los puntos  $S_1$  y  $S_2$  colisionan cuando los parámetros  $\kappa_2 = \kappa_2^-(\kappa_1)$  y coinciden en el equilibrio  $S_{12}$ . De la misma manera, el equilibrio  $S_2$   $S_3$  colisionan cuando  $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$  dando lugar a  $S_{23}$ . Si  $\kappa_1 = \kappa_1^*$  and  $\kappa_2 = \kappa_2^*$  esto ocurre cuando todos los puntos de equilibrio colapsan, originando  $S_{12} = S_{23} = S_{123}$ . 5
- 1.1. a) sector hiperbólico. b) sector parabólico. c) sector elíptico. . 7
- 2.1. Existencia de equilibrios positivos (número y posición) del sistema (2.5) con  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  como parámetros. Existen 0, 1, 2 y 3 equilibrios positivos en las regiones  $V_0, V_1, V_2$  y  $V_3$ , respectivamente. Se produce una bifurcación de nodo de silla hiperbólica cuando los parámetros cruzan  $C_{\Delta}^{\pm}$ , y se produce una bifurcación transcítica cuando se cruza la línea  $C_0$ . Esta figura fue tomada de [?]. . . . . 26
- 4.1. Diagrama fase de los puntos de coexistencia con parámetros  $a = 1, c = 1, m = 1, r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57, \kappa_2 = 0.026671$  y  $\kappa_1$  libre. En la figura se muestra que las linea continua representa estabilidad y la linea punteada inestabilidad. 51
- 4.2. Diagrama fase de los ciclos originados por el punto de Hopf, con coordenadas  $E_1 = 0.614426554662767, E_2 = 0.528099623732648, M = 72.9478611523887$ , con parámetro  $\kappa_1 = 23.2197961461739$  y  $\ell_1 = 0.02036690$  . . . . . 52

4.3.	$(E_1, E_2, M)$ - plano fase del punto de Hopf cuyas coordenadas son $E_1 = 0.614426554662767$ , $E_2 = 0.528099623732648$ $M = 72.9478611523887$ . Se muestran los ciclos límites inestables (LPC) de la bifurcación de Hopf. . . . .	53
4.4.	Diagrama fase de la continuación del punto límite de bifurcación (fold) (LP) con coordenadas $E_1 = 0.284780227879295$ , $E_2 = 0.244768605862254$ y $M = 67.362972393605$ con parámetros $a = 1, c = 1, m = 1, r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57, \kappa_2 = 0.026671$ . . . . .	54
4.5.	Diagrama de la continuación del punto silla-nodo (SN) cuyas coordenadas son $E_1 = 0.171556$ , $E_2 = 0.147452$ , $M = 64.808363$ y parámetros $r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57$ mientras que $\kappa_1$ y $\kappa_2$ son libres. Se observan puntos de bifurcación Bogdanov-Takens (BT) y Hopf Generalizada (GH) . . . . .	56
4.6.	Retrato fase de los ciclos de la bifurcación de Bautin $E_1 = 0.513868$ , $E_2 = 0.441669$ , $M = 70.794719$ , y parámetros $\kappa_1 = 24.665343$ , $\kappa_2 = 0.026928$ y $\ell_2 = -0.00191430$ . También se muestra el ciclo límite, el cual es el punto límite (LPC). . . . .	57
4.7.	Espacio fase de los ciclos originados por la bifurcación de Bautin (GH) cuyas coordenadas son $E_1 = 0.513868$ , $E_2 = 0.441669$ , $M = 70.794719$ y parámetros $\kappa_1 = 24.665343$ , $\kappa_2 = 0.026928$ y $\ell_2 = -0.00191430$ . . . . .	58
4.8.	Amplificación del LPC en el punto GH de la figura 4.7. . . . .	58

# Índice de tablas

2.1. Significado biológico de los parámetros del sistema (2.1). . . . .	16
4.1. Notación y caracterización de las diferentes bifurcaciones de codimensión 2. . . . .	49
4.2. Resumen de los diferentes tipos de bifurcaciones. . . . .	50
4.3. Los valores de los parámetros y coordenadas del punto de equi- librio de diversos puntos de bifurcación de la figura 4.1. . . . .	55
4.4. Datos de la continuación del primer punto límite (LP). . . . .	56
4.5. Datos de la continuación del punto de bifurcación silla-nodo, ver figura 4.5. . . . .	57

# Introducción

En la década de 1920, Lotka y Volterra propusieron de forma independiente un modelo matemático para describir la dinámica de dos especies que coexisten en un hábitat donde la presa tiene abundante comida, y el depredador tiene como suministro de alimento exclusivamente a la población de presas. Este modelo clásico es conocido como modelo Lotka-Volterra, el cual se ha convertido desde entonces en un modelo icónico de la biología matemática, ver [?]. Sin embargo, las observaciones empíricas han mostrado que se requieren cambios sucesivos a estos supuestos, dando lugar a otros modelos, tales como modelos depredador-presa dependientes de la proporción de la población, los cuales son más adecuados para las interacciones depredador-presa cuando los depredadores buscan, capturan o matan a otras presas.

El *Empoasca onukii* o saltamontes del té verde es una de las plagas que amenazan la producción de té en China y otros países de Asia, y el ácaro *Anystis baccarum* se ha venido utilizado como agente para el control de esta plaga, ver [?]. Es ampliamente conocido que el uso de grandes cantidades de insecticidas inevitablemente da lugar a la resistencia de los saltamontes a éstos, además algunos químicos contenidos en los pesticidas afectan a la salud humana y a la producción de té. Con el fin de reducir las pérdidas económicas, y evitar los pesticidas que se usan comúnmente, así como el resurgimiento de plagas y los residuos de pesticidas no deseados, la técnica de control biológico ha recibido una creciente atención en los últimos años considerando al ácaro como depredador potencial.

Existen estudios sobre el control biológico de plagas en las plantaciones de té verde. En particular resaltamos el trabajo de Chen et al. [?, ?] quienes realizaron estudios de campo sobre el uso de *Anystis baccarum* como agente

para el control de *Empoasca onukii*. En dicho estudio se considero que *Anystis baccarum* es un depredador generalista que ayuda al control biológico de *Empoasca onukii*. La dinámica de interacción entre las dos especies en campos de cultivo de té y otros entornos similares que involucran depredadores generalistas se ha modelado y estudiado en trabajos recientes, ver por ejemplo [?, ?, ?, ?, ?]. Los ácaros se adhieren a lo largo de las venas de las alas y se alimentan de la hemolinfa del saltamontes. Una vez llenos, los ácaros caerán del saltamontes de la misma manera que lo haría una garrapata hinchada en un humano, lo cual afecta al crecimiento del saltamontes impidiendo que se desarrolle por completo.

Sean  $E(t)$  y  $M(t)$  la densidad de población de *Empoasca onukii* y *Anystis baccarum* en el tiempo  $t$ , respectivamente. En 2021, P. Yuan et. al [?] propusieron un modelo bidimensional depredador-presa para estudiar la dinámica que describe el control biológico de la plaga de saltamontes, el cual es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= r_1 E \left(1 - \frac{E}{K_1}\right) - \frac{mEM}{a + E}, \\ \frac{dM}{dt} &= r_2 M \left(1 - \frac{M}{K_2}\right) + \frac{mEM}{a + E},\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $r_1 > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseco de saltamontes,  $r_2 > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseco de ácaros,  $K_1$  es la capacidad de carga en ausencia de ácaro,  $K_2$  es la capacidad de carga en ausencia de saltamontes,  $a > 0$  describe el número de saltamontes controlados por el ácaro en el período de tiempo promedio en que el ácaro busca y captura con éxito un saltamontes,  $m$  es el número máximo de saltamontes que los ácaros pueden manipular como forraje en un período de tiempo y  $c$  es la tasa de conversión.

El modelo (1) fue propuesto y estudiado por P. Yuan et al. [?], quienes concluyeron que la naturaleza eurífaga<sup>1</sup> es crucial para que el depredador sobreviva en la naturaleza, y es una característica muy importante de la especie que facilita la coexistencia de las dos especies. Este modelo descrito por el sistema (1) tiene apariencia matemática simple, pero exhibe una dinámica muy compleja. A través del análisis de bifurcación, P. Yuan et al. demostraron que

---

<sup>1</sup>Especies eurífagas son aquellas que pueden nutrirse de una muy amplia variedad de alimentos.

pueden existir diferentes estados de equilibrio cuando los parámetros varían en las plantaciones de té, y las bifurcaciones asociadas y la dinámica de estos equilibrios revelan los posibles escenarios. En particular, el sistema (1) tiene tres equilibrios sobre los ejes coordenados (o puntos frontera) en el primer cuadrante y un máximo de tres equilibrios de coexistencia, y su dinámica es tan complicada que involucra la bifurcación de Bogdanov-Takens, y bifurcaciones de singularidad nilpotente donde  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $K_1$  y  $K_2$  son los parámetros de bifurcación.

Los datos registrados en la literatura revelan que la erradicación de la plaga de saltamontes es difícil, y dinámicamente se ha observado que cuando la capacidad de carga del ácaro es lo suficientemente alta ( $K_2 > \frac{r_1 a}{m}$ ), el equilibrio libre de plagas es localmente estable (punto sobre el eje  $M$  con  $E = 0$ ). Pero todavía existe el estado de equilibrio estable de alta población de saltamontes. La erradicación de la plaga también depende de la condición inicial de la población de saltamontes, tal como fue observado in [?] por Seo y Wolkowicz. Por lo tanto, es plausible suprimir la plaga en lugar de erradicarla. El análisis del equilibrio de coexistencia también es crucial para la estrategia de supresión de plagas. Mas aún, resultado del estudio de la dinámica ellos concluyen que la coexistencia de estas dos especies siempre es posible.

Con el fin de considerar un modelo más general, debemos tomar en cuenta que en la naturaleza cada especie suele tener su propio ciclo de vida con diferentes etapas, además de que los adultos depredadores pueden tener una mayor capacidad de depredación. Por otro lado, los adultos de las presas pueden tener una mayor capacidad para evitar la depredación, y la plaga (presa) inmadura puede estar protegida por las cáscaras de sus huevo. En una plantación de té, el desarrollo de ácaros pasa por las etapas de huevo, prelarva, larva, ninfa y adulto. Una vez que pasan a la etapa de larva, se vuelven activos y pueden alimentarse de presas adecuadas [?]. El saltamontes crece pasando por las etapas de huevo, ninfa y adulto, y la etapa de ninfa se compone de cinco estadios. Los huevos generalmente se ponen debajo del floema de los brotes tiernos de té para evitar enemigos naturales [?]. Uno esperaría construir un modelo que incluyera todas las etapas de las dos especies, sin embargo no es fácil trabajar con la complejidad de ecuaciones diferenciales de dimensiones superiores con múltiples interacciones no lineales entre las etapas.

Una opción para mejorar la dinámica descrita por el sistema (1) es considerar con dos etapas de reproducción y desarrollo de la población de saltamontes. Un modelo que tiene estas características fue propuesto por P. Yuan y H. Zhu en el artículo [?] y es dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= r_1 E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2 - \frac{m E_2 M}{a + E_2}, \\ \frac{dM}{dt} &= r_2 M - \kappa_2 M^2 + \frac{cm E_2 M}{a + E_2},\end{aligned}\tag{2}$$

donde  $E_1(t)$  y  $E_2(t)$  denotan la densidad de huevos e individuos nacidos (ninfas y adultos) de saltamontes en el tiempo  $t$ , respectivamente, mientras que  $M(t)$  denota la densidad de ácaros. Aquí se ignora la tasa de muerte natural de los huevos de saltamontes debido a su protección, y  $\alpha$  es la tasa de eclosión de los huevos de saltamontes,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son las tasas de competencia intraespecífica<sup>2</sup> de los adultos de saltamontes y ácaros, respectivamente.

El objetivo de esta tesis es estudiar la dinámica descrita por el modelo (2). Luego, los resultados presentados en este trabajo están inspirados en el artículo de P. Yuan y H. Zhu en [?].

La organización de esta tesis es la siguiente. Con el fin de hacer auto contenido el trabajo, en el capítulo 1 presentamos los resultados necesarios para dar contexto a lo concluido en la tesis. En el capítulo 2 mostraremos que el sistema (2) tiene tres equilibrios de frontera (sobre los ejes coordenado en el primer octante)  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  y hasta tres equilibrios de coexistencia  $S_{12}$ ,  $S_{12}$ , los cuales para ciertos valores de los parámetros se fusionan, ver el diagrama de la figura 1. El capítulo 3 Además, la bifurcación y la dinámica compleja asociada involucran la bifurcación del nodo de silla de codimensión 1 y 2, bifurcación de Hopf, bifurcación de Hopf degenerada. Finalmente en el capítulo 4 presentamos simulaciones numéricas que ejemplifican la dinámica compleja, y por lo tanto la diversidad de bifurcaciones presentes en las ecuaciones diferenciales(2). Las simulaciones numéricas fueron realizadas con

---

<sup>2</sup>La *competencia intraespecífica* es la interacción entre individuos de una misma especie, que conduce a una disminución en la disponibilidad de recursos debido a su uso compartido cuando se encuentra en cantidades limitantes, y afecta la probabilidad de supervivencia y reproducción.

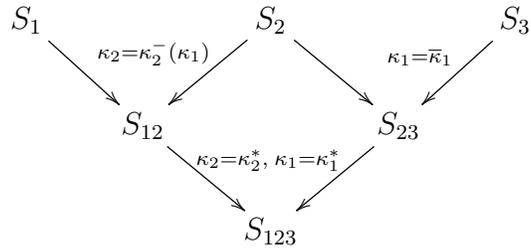


Figura 1: El diagrama de bifurcación muestra la coexistencia de los puntos de equilibrio y su transformación en nuevos equilibrios al fusionarse. Los puntos  $S_1$  y  $S_2$  colisionan cuando los parámetros  $\kappa_2 = \kappa_2^-(\kappa_1)$  y coinciden en el equilibrio  $S_{12}$ . De la misma manera, el equilibrio  $S_2$   $S_3$  colisionan cuando  $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$  dando lugar a  $S_{23}$ . Si  $\kappa_1 = \kappa_1^*$  and  $\kappa_2 = \kappa_2^*$  esto ocurre cuando todos los puntos de equilibrio colapsan, originando  $S_{12} = S_{23} = S_{123}$ .

el software *Mathematica* y el paquete *MatCont* para el estudio numérico de continuación y bifurcación de sistemas dinámicos que involucran parámetros. La parte final presentamos una breve sección de conclusiones.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo contiene resultados que nos servirán para el análisis cualitativo del modelo a estudiar, los cuales hemos extraído de los libros de Guckenheimer y Holmes [?] y Perko [?].

Sea el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

con  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Luego el sistema (1.1) es topológicamente equivalente al sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

en un entorno del origen, donde  $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ .

**Definición 1.** *Sea  $p = \mathbf{0}$  el punto de equilibrio del sistema (1.2) con  $n = 2$ . Entonces*

- *$p$  es no degenerado si ambos valores propios de la matriz  $A$  son diferentes de cero.*
- *$p$  se llama hiperbólico si los dos valores propios de  $A$  tiene parte real diferente de cero.*
- *$p$  es un punto semi hiperbólico si  $A$  tiene exactamente un valor propio igual a cero.*

- $p$  es un punto nilpotente si ambos valores propios de  $A$  son igual con cero, pero  $A \neq 0$ .

**Definición 2.** Un sector del retrato fase del sistema (1.1) que es topológicamente equivalente a los sectores que se muestran en la figura 1.1

- se dice que es un sector hiperbólico si es topológicamente equivalente a la figura 1.1 a)
- se dice que es un sector parabólico si es topológicamente equivalente a la figura 1.1 b)
- se dice que es un sector elíptico si es topológicamente equivalente a la figura 1.1 c)

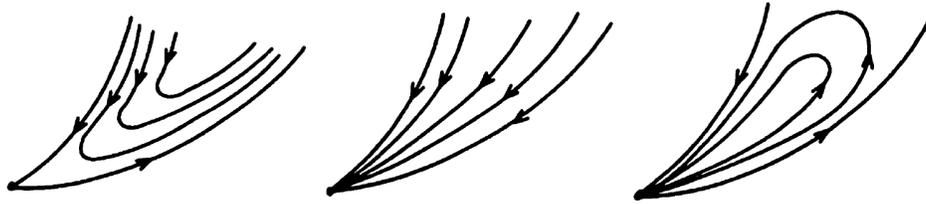


Figura 1.1: a) sector hiperbólico. b) sector parabólico. c) sector elíptico.

## 1.1. Puntos no hiperbólicos en $\mathbb{R}^2$

En esta sección presentamos los casos para los cuales la matriz  $A$  tiene uno o dos valores propios cero, pero  $A \neq 0$  con  $n = 2$ .

Iniciemos con el caso cuando la matriz  $A$  tiene un valor propio cero, es decir,  $\det(A) = 0$  pero  $\text{tr}(A) \neq 0$ , entonces el sistema (1.1) tiene la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_2(x, y), \\ \dot{y} &= y + q_2(x, y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde  $p_2$  y  $q_2$  son analíticas en una vecindad del origen y tiene expansiones que comienzan con término de segundo grado en  $x$  y  $y$ . Los siguientes teoremas sirven para identificar los tipos de puntos.

**Teorema 1.** *Supongamos que el origen es un punto de equilibrio aislado del sistema analítico (1.3). Sea  $y = \phi(x)$  una solución de la ecuación  $y + q_2(x, y) = 0$  y  $\psi(x) = a_m x^m + \dots$  donde  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$  la expansión en una vecindad de  $x = 0$  de la función  $\psi(x) = p_2(x, \phi(x))$ .*

1. Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$ , entonces el origen es un nodo inestable.
2. Si  $m$  es impar y  $a_m < 0$ , entonces el origen es una silla.
3. Si  $m$  es par, entonces el origen es una silla-nodo.

Ahora, consideremos el caso cuando  $A$  tiene dos valores propios cero, es decir,  $\det(A) = 0$  y  $\text{tr}(A) = 0$  pero  $A \neq 0$ . En este caso la forma normal del sistema (1.1) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a_k x^k (1 + h(x)) + b_n x^n y (1 + g(x)) + y^2 R(x, y), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $h(x)$ ,  $g(x)$  y  $R(x, y)$  son analíticas en una vecindad alrededor del origen,  $h(0) = g(0) = 0$ ,  $k \geq 2$ ,  $a_k \neq 0$  y  $n \geq 1$ .

**Teorema 2.** *Sea  $k = 2m + 1$  con  $m \geq 1$  en (1.4) y  $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$  con  $m \geq 1$ .*

1. Si  $a_k > 0$  entonces el origen es una silla.
2. El origen es un foco o un centro, si  $a_k < 0$  y se satisface alguna de las siguientes condiciones;  $b = 0$  ó  $b_n \neq 0$  y  $n > m$  ó  $b_n \neq 0$ ,  $n = m$  y  $\lambda < 0$ .
3. El origen es un nodo con un dominio elíptico y  $b_n \neq 0$ , si  $n$  es impar y  $n < m$  o bien, si  $b_n \neq 0$  y  $n$  es impar,  $n = m$  y  $\lambda \geq 0$

**Teorema 3.** *Sea  $k = 2m$  con  $m \geq 1$  en el sistema (3). El origen de 1.1 es*

1. una cúspide si  $b_n = 0$  ó  $b_n \neq 0$  y  $n \geq m$

2. una silla-nodo si  $b_n \neq 0$  y  $n < m$ .

La demostración de los teoremas 2 y 3 se pueden consultar en el libro de Andronov et al. [?].

## 1.2. Teoría de la variedad central

Consideremos el caso donde  $A = Df(\mathbf{0}) = \text{diag}[C, P, Q]$ , tal que la matriz cuadrada  $C$  tiene  $c$  valores propios con parte real cero, la matriz cuadrada  $P$  tiene  $s$  valores propios con parte real negativa, y la matriz cuadrada  $Q$  tiene  $u$  valores propios con parte real positiva, es decir, el sistema (1.1) puede escribirse en la siguiente forma diagonal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cx + F(x, y, z), \\ \dot{y} &= Py + G(x, y, z), \\ \dot{z} &= Qz + H(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ ,  $F(0) = G(0) = H(0) = 0$  y  $DF(0) = DG(0) = DH(0) = 0$ . El siguiente resultado es fundamental en la teoría de la variedad central.

**Teorema 4** (Carr [?]). *Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  una vecindad del origen y  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ . Si 0 es un punto de equilibrio del sistema (1.1),  $A = Df(0) = \text{diag}[C, P, Q]$ , entonces existe una vecindad alrededor del origen  $U \in \mathbb{R}^c$  y  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^1(E)$ , tales que el sistema (1.1) es una vecindad del origen se escribe como*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cx + F(x, h_1(x), h_2(x)), \\ \dot{y} &= Py, \\ \dot{z} &= Qz\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$  y las funciones  $h_1, h_2$ , satisfacen,

$$\begin{aligned}Dh_1(x)(Cx + F(x, h_1(x), h_2(x))) - Ph_1(x) - G(x, h_1(x), h_2(x)) &= 0, \\ Dh_2(x)(Cx + F(x, h_1(x), h_2(x))) - Qh_2(x) - H(x, h_1(x), h_2(x)) &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

### 1.3. Bifurcación de Andronov-Hopf

Considere el siguiente sistema en el plano

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y; \mu), \quad (1.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = h(x, y; \mu), \quad (1.9)$$

donde  $\mu$  es un parámetro y sea  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ . Por otra parte, tenemos la notación

$$\frac{dX}{dt} = f(X) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, sea  $\bar{X}(\mu) = (\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$  el punto de equilibrio. La matriz jacobiana el vector en el campo  $f(X)$  en  $\bar{X}$  es

$$Df(\bar{X}) = \begin{bmatrix} g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ h_x(\bar{x}, \bar{y}) & h_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix},$$

Los valores propios de  $Df(\bar{X})$  son funciones que dependen del parámetro  $\mu$ . En términos de la  $\text{tr}(Df)$  y del determinante  $\det(Df)$ , los valores propios de la jacobiana son

$$\lambda_{\pm}(\mu) = \frac{\text{tr}(Df) \pm \sqrt{(\text{tr}(Df))^2 - 4 \det(Df)}}{2}.$$

Aquí consideramos el caso especial en que el parámetro  $\mu = \mu_0$ ,

$$\text{tr} Df(\bar{x}(\mu_0)) = 0, \quad \det Df(\bar{x}(\mu_0)) > 0. \quad (1.10)$$

Cuando estas dos condiciones se satisfacen, los valores propios de  $Df(\bar{X})$  son imaginarios puros. Además, si la condición de transversalidad

$$\left. \frac{d}{d\mu} \{\text{Re}(\lambda(\mu))\} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0, \quad (1.11)$$

se satisface, entonces la bifurcación de Hopf se presenta en el punto de bifurcación  $(\bar{X}(\mu_0), \mu_0)$ . Notemos que  $\text{Re}(z)$  es la parte real de  $z$ . Por lo tanto la

bifurcación de Hopf para algún  $\mu$  cerca de  $\mu_0$ , existen oscilaciones de pequeña amplitud (ciclos límite). La amplitud de estas oscilaciones se aproxima a cero cuando  $\mu$  se aproxima a  $\mu_0$ . Aunque la teoría de Hopf garantice la existencia de tales órbitas periódicas para  $\mu \approx \mu_0$ , esto no nos garantiza la existencia de oscilaciones para  $\mu$  mas alejadas de  $\mu_0$ . Sin embargo, las órbitas periódicas persisten y aumentar en amplitud cuando  $|\mu - \mu_0|$  incrementa. Cuando  $\mu = \mu_0$  el sistema lineal (linealización de (1.8) y (1.9) en  $\bar{X}$ ) es

$$\frac{dz}{dt} = Df(\bar{X})z, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.12)$$

en  $z = 0$ . Entonces, las soluciones de  $z(t)$  son de la forma

$$z(t) = c_1 \vec{\zeta}_1 \cos(\omega t) + c_2 \vec{\zeta}_2 \sin(\omega t),$$

para algún  $c_k$  constante real y vector constante  $\zeta_k$ ,  $k = 1, 2$ . Si se cumple las condiciones (1.10),  $\lambda_{\pm} = \pm \omega i$  donde  $i^2 = -1$  y

$$\omega = \sqrt{\det Df}. \quad (1.13)$$

Si (1.10) y (1.11) se cumplen, la teoría de Hopf garantiza que para todo  $\mu$  con  $|\mu - \mu_0|$  suficientemente pequeño, existe una órbita  $T$ -periódica (ciclo límite)  $X_p(t; \mu)$  que satisface (1.8) y (1.9). Si el periodo es  $T = T(\mu)$ , la teoría de Hopf garantizan que

$$\lim_{|\mu - \mu_0| \rightarrow 0} T(\mu) = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.14)$$

En otras palabras, para  $\mu$  muy cercano de  $\mu_0$  el período de las órbitas periódicas de (1.8) y (1.9) es casi igual al período de las órbitas periódicas del sistema lineal (1.12).

Luego, la matriz jacobiana tiene la forma

$$Df(\bar{X}_0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_0 = \bar{X}(\mu_0).$$

La expansión en serie de Taylor hasta tercer orden de (1.8) y (1.9) alrededor de  $\bar{X}$  tiene la siguiente forma

$$\frac{dz_1}{dt} = (\delta\mu + a(z_1^2 + z_2^2))z_1 - (\omega + c\mu + b(z_1^2 + z_2^2))z_2, \quad (1.15)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = ((\omega + c\mu + b(z_1^2 + z_2^2))z_1 + (\delta\mu + a(z_1^2 + z_2^2))z_2) \quad (1.16)$$

y su expresión en coordenadas polares es

$$\frac{dr}{dt} = (\delta\mu + ar^2)r, \quad (1.17)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega + c\mu + br^2) \quad (1.18)$$

donde  $a, b, c, \delta$  son constantes, con  $\omega, z_1 = r \cos \omega$  y  $z_2 = r \sin \omega$ . Notemos que la ecuación para  $r(t)$  no está acoplada a la ecuación para  $\omega$ . Además, dependiendo de los signos de las constantes  $a$  y  $\delta$ , el polinomio de tercer grado  $\delta\mu r + ar^3$ , el sistema posee órbitas periódicas a lo largo del lugar geométrico

$$\mu = -\frac{ar^2}{\delta}, \quad \delta \neq 0$$

se puede mostrar que

$$\delta = \left. \frac{d}{d\mu} \{\operatorname{Re}(\lambda_+(\mu))\} \right|_{\mu=\mu_0}$$

la existencia de las órbitas periódicas locales en el punto de bifurcación depende de  $\delta \neq 0$ . Esta es solo la condición de transversalidad (1.11).

### 1.3.1. Teoremas de Hopf

Ahora consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + p(x, y), \\ \dot{y} &= x + \mu y + q(x, y). \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Teorema 5.** *Sea  $\ell_1$  el primer coeficiente de Lyapunov. Si  $\ell_1 \neq 0$ , entonces una bifurcación de Hopf ocurre en el origen del sistema plano analítico (1.19) cuando  $\mu = 0$ . En particular,*

1.  $\ell_1 < 0$ , entonces el único ciclo límite estable se bifurca cerca del origen de (1.19) para  $\mu$  crece desde cero.
2.  $\ell_1 > 0$ , entonces el único ciclo límite inestable se bifurca en el origen de (1.19) para  $\mu$  decreciendo desde cero.

Para el caso en que  $\ell_1 < 0$ , el teorema 5 garantiza la existencia de un ciclo límite estable, cuando  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = 0$ , en este caso se dice que hay una *bifurcación de Hopf supercrítica*. Para el segundo caso, con  $\ell_1 > 0$ , el punto crítico genera un ciclo límite inestable cuando  $\mu$  pasa a través del valor de bifurcación  $\mu = 0$ , y se genera la llamada *bifurcación de Hopf subcrítica*; para mayores detalles ver capítulo 4 de [?].

**Teorema 6** (Bifurcación de Hopf). *Sea*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

*un sistema bi-dimensional, con  $f$  diferenciable. El sistema (1.20) en el punto de equilibrio  $x = 0$  tiene valores propios*

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \beta(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

*donde  $\beta(\mu_0) = 0$ ,  $\omega(\mu_0) = \omega_0 > 0$ . Si se satisface*

- *Sea  $\ell_1$  es el primer coeficiente de Lyapunov, si  $\ell_1(\mu_0) \neq 0$ ,*
- *$\frac{d\beta}{d\mu}(\mu_0) \neq 0$ , i.e.  $\frac{d}{d\mu}\{\text{Re}(\lambda_{1,2}(\mu))\} \neq 0$ .*

*Entonces el sistema (1.20), es una vecindad del origen es topológicamente equivalente al sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + s(y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

## 1.4. Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria en dimensión  $n$  en un punto de bifurcación de Hopf no degenerado. Supongamos que el punto de equilibrio lo trasladamos al origen de coordenadas,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + g(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.21)$$

donde  $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2)$  y  $A = (a_{ij})$ . Escribimos la expansión de Taylor de  $f(\mathbf{x})$  en un entorno de  $\mathbf{x} = 0$  de la siguiente forma

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \mathcal{O}(|x|^4),$$

donde  $B(x, y)$  y  $C(x, y, z)$  son las formas multilineales cuyas componentes son

$$B_j(x, y) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 g_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_k y_l, \quad (1.22)$$

$$C_j(x, y, z) = \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 g_j(\xi, 0)}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\xi=0} x_k y_l z_m, \quad (1.23)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, n$ . Sean  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  con  $\omega > 0$  los valores propios de la matriz  $A$ . Sea  $q \in \mathbb{C}^N$  un vector propio complejo de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda_1 = i\omega$  y  $p \in \mathbb{C}^N$  el correspondiente vector propio de la matriz transpuesta  $A^T$  entonces

$$\begin{aligned} Aq &= i\omega q, & A\bar{q} &= -i\omega\bar{q}, \\ A^T p &= -i\omega p, & A\bar{q} &= i\omega\bar{q}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  denotan el conjugado de las componentes complejas de los vectores. Se sigue que el primer coeficiente de Lyapunov se puede calcular dada la siguiente fórmula invariante

$$\begin{aligned} \ell_1(0) &= \frac{1}{2\omega} \left[ \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, -A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega I_N - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Podemos normalizar a  $p$  tal que el producto interno de  $p$  con  $q$  en  $\mathbb{C}$  (producto Hermitiano) cumple

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}^T q = \sum_{j=1}^N \bar{p}_j q_j = 1.$$

Para el caso de bidimensional en el espacio vectorial dado por  $g(g^1, g^2)$  el cálculo del primer coeficiente de Lyapunov dada en la expresión (1.25) se puede expresar de la siguiente forma (ver [?], página 110):

$$\ell_1 = \frac{1}{2\omega^2} \operatorname{Re}((\bar{p}^T B(q, q))(\bar{p}^T B(q, \bar{q})) + \omega \bar{p}^T C(q, q, \bar{q})). \quad (1.26)$$

Observemos que la notación utilizada no es única, ver por ejemplo [?].

## Capítulo 2

# Modelo presa-depredador del saltamontes del té verde *Empoasca onukii* y ácaros *Anystis baccarum*

### 2.1. Planteamiento del modelo

El saltamontes del té verde, *Empoasca onukii*, es una de las plagas de insectos que amenazan la producción de té verde en China, Japón, Indonesia y otros países de Asia. El control de esta plaga se basa principalmente en insecticidas, pero estos pueden aumentar la resistencia a los insecticidas de *Empoasca onukii*, además los residuos de insecticidas representa una pérdida económica [?].

Estudios sobre el control biológico de plagas en la plantaciones de té verde sugieren el uso de *Anystis baccarum* como agente para el control de *Empoasca onukii*. En los últimos tiempos se ha observado que las etapas de reproducción y desarrollo son las que más contribuyen a la población adulta de *Empoasca onukii*.

El modelo presa-depredador que planteamos en esta tesis considera dos etapas de desarrollo de vida para la presa ya que considerar más de dos hace

el estudio del modelo tenga mayor complejidad. Sea  $E_1(t)$  y  $E_2(t)$  la densidad de huevos e individuos eclosionados de *Empoasca onukii* en el tiempo  $t$ , respectivamente, y  $M(t)$  a la densidad de *Anystis baccarum*. A partir de ahora nos referiremos a *Empoasca onukii* y *Anystis baccarum* por sus nombre vulgares, saltamontes y ácaro, respectivamente.

Para describir la dinámica de estas poblaciones utilizaremos el modelo presa-depredador con depredador generalista y dos etapas en el desarrollo de la presa, el cual es descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= r_1 E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2 - \frac{mM}{a + E_2} E_2, \\ \frac{dM}{dt} &= r_2 M - \kappa_2 M^2 + \frac{cmM}{a + E_2} E_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $r_1, r_2, \alpha, a, c, m, k_1$  y  $k_2$  son parámetros positivos y su significado biológico es dado en la tabla 2.1.

Parámetro	Descripción
$r_1$	tasa de crecimiento intrínseco de E. onukii
$r_2$	tasa de crecimiento intrínseco de Anystis baccarum
$\alpha$	tasa de eclosión de los huevos de E. onukii
$a$	número de E. onukii controlados por el A. baccarum
$c$	tasa de conversión
$m$	número máximo de E. onukii que A. baccarum puede manipular como forraje en un período de tiempo
$\kappa_1$	tasa de competencia intraespecífica de E. onukii
$\kappa_2$	tasa de competencia intraespecífica A. baccarum

Tabla 2.1: Significado biológico de los parámetros del sistema (2.1).

Para llevar a cabo el estudio del modelo , introducimos el reescalamiento del tiempo  $t = \frac{1}{cm}\tau$ , y el cambio de variable

$$E_1(t) = aX_1(t), \quad E_2(t) = aX_2(t), \quad M(t) = acY(t),$$

es decir,

$$X_1(t) = \frac{1}{a}E_1(t), \quad X_2(t) = \frac{1}{a}E_2(t), \quad Y(t) = \frac{1}{ac}M(t).$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= \frac{dE_1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \dot{E}_1 cm, \\ \frac{dE_1}{d\tau} &= \frac{dE_1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = E'_1 \frac{1}{cm}.\end{aligned}$$

donde  $\cdot = \frac{d}{d\tau}$  y  $' = \frac{d}{dt}$ .

Notemos que la última ecuación la podemos escribir como  $X'_1 = \dot{E}_1 = \frac{dE_1}{d\tau}$ . Si sustituimos  $\frac{dE_1}{dt} = r_1 E_2 - \alpha E_1$ , obtenemos

$$\begin{aligned}X'_1 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{a} E_1 \right) \\ &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{cm} E'_1 \right) = \frac{1}{acm} (r_1 E_2 - \alpha E_1) \\ &= \frac{r_1}{cm} \left( \frac{1}{a} E_2 \right) - \frac{\alpha}{cm} \left( \frac{1}{a} E_1 \right).\end{aligned}$$

Ahora, considerando las variables  $X_1$  y  $X_2$  obtenemos la siguiente ecuación

$$X'_1 = \hat{r}_1 X_2 - \hat{\alpha} X_1, \quad (2.2)$$

donde  $\hat{r}_1 = \frac{r_1}{cm}$  y  $\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{cm}$ . Ahora consideremos la segunda ecuación de (2.1) y obtenemos

$$\begin{aligned}X'_2 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{a} E_2 \right) = \frac{1}{acm} E'_2 \\ &= \frac{1}{acm} \left[ \alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2 - \frac{m E_2 M}{a + E_2} \right].\end{aligned}$$

Lo siguiente es sustituir  $E_2$  y  $M$  en la expresión anterior,

$$\begin{aligned}X'_2 &= \frac{\alpha}{cm} \left( \frac{1}{a} E_1 \right) - \frac{\kappa_1}{acm} (a X_2)^2 - \frac{m(a X_2)(a Y)}{acm(a + a X_2)} \\ &= \frac{\alpha}{cm} \left( \frac{1}{a} E_1 \right) - \frac{a \kappa_1}{cm} X_2^2 - \frac{X_2 Y}{1 + X_2}.\end{aligned}$$

Finalmete llegamos a

$$X_2' = \hat{\alpha}X_1 - \hat{\kappa}_1X_2^2 - \frac{X_2Y}{1 + X_2}, \quad (2.3)$$

donde  $\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{cm}$  y  $\hat{\kappa}_1 = \frac{a\kappa_1}{cm}$ . Por último, consideramos la tercera ecuación de (2.1):

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{ac}M \right) = \frac{1}{ac^2m}M' \\ &= \frac{1}{ac^2m} \left[ r_2M - \kappa_2M^2 + \frac{cmE_2M}{a + E_2} \right]. \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos  $E_2 = aX_2$  y  $M = acY$ ,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{ac^2m} \left[ r_2(acY) - \kappa_2(acY)^2 + \frac{cm(aX_2)(acY)}{a + (aX_2)} \right] \\ &= \frac{r_2}{cm}Y - \frac{a^2c^2\kappa_2}{ac^2m}Y^2 + \frac{a^2c^2mX_2Y}{a^2c^2m(1 + X_2)} \\ &= \frac{r_2}{cm}Y - \frac{a\kappa_2}{m}Y^2 + \frac{X_2Y}{1 + X_2}. \end{aligned}$$

En pocas palabras, hemos obtenido

$$Y' = \hat{r}_2Y - \hat{\kappa}_2Y^2 + \frac{X_2Y}{1 + X_2}, \quad (2.4)$$

donde  $\hat{r}_2 = \frac{r_2}{cm}$  y  $\hat{\kappa}_2 = \frac{a\kappa_2}{m}$ .

Notemos que las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) son el reescalamiento del sistema (2.1). Sin pérdida de generalidad, a partir de ahora denotaremos por  $E_1$ ,  $E_2$  y  $M$  a  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y$ , respectivamente. Luego, las ecuaciones (2.1) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= \hat{r}_1E_2 - \hat{\alpha}E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \hat{\alpha}E_1 - \hat{\kappa}_1E_2^2 - \frac{E_2M}{1 + E_2}, \\ \frac{dM}{dt} &= \hat{r}_2M - \hat{\kappa}_2M^2 + \frac{E_2M}{1 + E_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $\widehat{r}_1 = \frac{r_1}{cm}$ ,  $\widehat{r}_2 = \frac{r_2}{cm}$ ,  $\widehat{\alpha} = \frac{\alpha}{cm}$ ,  $\widehat{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{cm}$  y  $\widehat{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{cm}$ . Observemos que ahora este sistema tiene sólo 5 parámetros libres. Con el fin de hacer más sencilla la notación, a partir de ahora omitiremos los gorros en los parámetros.

**Remark 1.** *Los sistemas (2.1) y (2.5) son topológicamente equivalentes pues las transformaciones de escala en las variables y tiempo no cambian la topología del sistema.*

Tomando el cambio de variable  $E_1 = aX_1$ ,  $E_2 = aX_2$ ,  $M = acY$  y el reescalamiento en el tiempo dado por  $\tau = cmt$ , se construye la función

$$\varphi : \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R},$$

tal que  $\varphi(X_1, X_2, Y, \tau) = (aX_1, aX_2, acY, \frac{1}{cm}\tau) = (E_1, E_2, M, t)$  con determinante

$$\det D\varphi(X_1, X_2, Y, \tau) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{cm} \end{pmatrix},$$

donde  $\varphi$  es un difeomorfismo que preserva la orientación del tiempo. Además  $\det D\varphi(X_1, X_2, Y, \tau) > 0$ , en particular el modelo que considera el ácaro y saltamontes tenemos que  $\det D\varphi(X_1, X_2, Y, \tau) = \frac{a^3}{m}$  con  $a > 0$  y  $m > 0$ , entonces los sistemas (2.1) y (2.5) son topológicamente equivalentes.

Para mayores detalles consulta el libro [?].

## 2.2. Puntos de equilibrio y estabilidad

Iniciemos observando que en el caso  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = 0$  y  $M = 0$  obtenemos que el origen  $S_0 = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio. Luego, para localizar los equilibrios no triviales debemos encontrar los ceros simultáneos de las ecuaciones (2.5).

Usando la primera ecuación de (2.5) tenemos que

$$r_1 E_2 - \alpha E_1 = 0,$$

es decir,  $E_1 = \frac{E_2 r_1}{\alpha}$ . Ahora, sustituimos esta expresión en las otras dos ecuaciones de (2.5) y tenemos que

$$-E_2^2 \kappa_1 - \frac{E_2 m M}{a + E_2} + E_2 r_1 = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{c E_2 m M}{a + E_2} - \kappa_2 M^2 + M r_2 = 0. \quad (2.7)$$

Igualando las ecuaciones (2.6) y (2.7) y resolviendo para  $M$ , obtenemos las siguientes dos posibles soluciones

$$M = \frac{(E_2 r_1 - E_2^2 \kappa_1)(a + E_2)}{E_2 m} = \left( \frac{\alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2}{E_2} \right) \left( \frac{a + E_2}{m} \right), \quad (2.8)$$

$$M = \frac{(a + E_2) r_2 + c E_2 m}{(a + E_2) \kappa_2} = \frac{1}{\kappa_2} \left( r_2 + \frac{c m E_2}{a + E_2} \right), \quad (2.9)$$

donde hemos considerado que  $E_1 = p_1 E_2$  con  $p_1 = \frac{r_1}{\alpha}$ .

Notemos que ambas expresiones de  $M$  son válidas, pues se deben satisfacer ambas para obtener los puntos de equilibrio.

Sea

$$U_1(E_2) = \left( \frac{\alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2}{E_2} \right) \left( \frac{a + E_2}{m} \right), \quad (2.10)$$

y

$$U_2(E_2) = \frac{1}{\kappa_2} \left( r_2 + \frac{c m E_2}{a + E_2} \right).$$

Para garantizar la existencia de un punto de equilibrio de coexistencia de las especies, denotado por  $\bar{S}(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{M})$ , estudiaremos la intersección de las curvas de  $U_1$  y  $U_2$  en el plano  $E_2 M$ . Iniciemos por tomar la diferencia de las expresiones (2.10),

$$\left( \frac{\alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2}{E_2} \right) \left( \frac{a + E_2}{m} \right) - \frac{1}{\kappa_2} \left( r_2 + \frac{c m E_2}{a + E_2} \right) = 0,$$

lo cual equivale a

$$\frac{1}{(a + E_2) \kappa_2} (a^2 E_2 \kappa_1 \kappa_2 + 2a E_2^2 \kappa_1 \kappa_2 + E_2^3 \kappa_1 \kappa_2 + c E_2 m^2 - a^2 \kappa_2 r_1 - 2a E_2 \kappa_2 r_1 - E_2^2 \kappa_2 r_1 + a m r_2 + E_2 m r_2) = 0.$$

Ya que los parámetros son todos positivos, se sigue que el denominador  $(a + E_2)\kappa_2 \neq 0$ . Por lo tanto, los valores de  $E_2$  donde se interceptan las curvas  $U_1(E_2)$  y  $U_2(E_2)$  son los ceros del siguiente polinomio de grado 3:

$$E_2^3 \kappa_1 \kappa_2 + (2a\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_2 r_1) E_2^2 + (a^2 \kappa_1 \kappa_2 + cm^2 - 2a\kappa_2 r_1 + mr_2) E_2 + amr_2 - a^2 \kappa_2 r_1 = 0.$$

Ahora vamos a calcular las raíces de este polinomio, para lo cual lo dividimos entre  $\kappa_1 \kappa_2$  y obtenemos un nuevo polinomio de grado 3 en términos de la variable  $E_2$  :

$$U(E_2) = E_2^3 - \left( \frac{r_1}{\kappa_1} - 2a \right) E_2^2 + \left[ a^2 - 2a \frac{r_1}{\kappa_1} + \frac{m(cm + r_2)}{\kappa_1 \kappa_2} \right] E_2 + \frac{a^2 r_1}{\kappa_1 \kappa_2} \left[ \frac{mr_2}{ar_1} - \kappa_2 \right] = 0. \quad (2.11)$$

Aplicando el teorema fundamental del álgebra obtenemos que  $U(E_2) = 0$  tiene a lo más 3 raíces, las cuales pueden ser positivas. Notemos que el término independiente se anula cuando  $\frac{mr_2}{ar_1} - \kappa_2 = 0$ , o equivalentemente

$$\kappa_2 = \frac{mr_2}{ar_1}.$$

En este valor de  $\kappa_2$ ,  $E_2 = 0$  es una raíz de (2.11). Definimos

$$\kappa_2 = \bar{\kappa}_2 = \frac{mr_2}{ar_1}. \quad (2.12)$$

Dado que  $E_1 = \frac{r_1}{\alpha} E_2$ , tenemos que si  $E_2 = 0$ , entonces  $E_1 = 0$  y  $M = \frac{r_2}{\kappa_2}$ . Denotamos este punto de equilibrio como  $S_{01} = (0, 0, K_2)$ , donde  $K_2 = \frac{r_2}{\kappa_2}$ , cuya interpretación biológica es que la plantación de té verde está libre de plaga de saltamontes.

Ya que  $\frac{mr_2}{ar_1} - \kappa_2 > 0$  implica que  $\frac{mr_2}{ar_1} > \kappa_2$ , entonces los coeficientes de (2.11) tiene a lo más dos cambios de signo. Luego aplicando la regla de Descartes [?], si  $\kappa_2 < \bar{\kappa}_2$  la ecuación (2.11) tiene a lo más dos raíces positivas. En lo que sigue vamos a analizar el discriminante de Cardano-Ferrari asociado a la ecuación (2.11), ver la pág. 95 de [?].

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los coeficientes cuadrático, lineal e independiente, respec-

tivamente, del polinomio (2.11), es decir

$$\begin{aligned} A &= 2a - \frac{r_1}{\kappa_1}, \\ B &= a^2 - \frac{2ar_1}{\kappa_1} + \frac{m(cm + r_2)}{\kappa_1\kappa_2}, \\ C &= \frac{a^2r_1}{\kappa_1\kappa_2} \left[ \frac{mr_2}{ar_1} - \kappa_2 \right]. \end{aligned}$$

Para aplicar las fórmulas de Cardano-Ferrari definimos

$$p = \frac{3B - A^2}{3}, \quad q = \frac{2A^3 - 9AB + 27C}{27}. \quad (2.13)$$

Luego, el discriminante es

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2, \quad (2.14)$$

el cual en términos de los parámetros del modelo toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{4}{27} \left[ \left( \frac{r_1}{\kappa_1} - 2a \right)^2 + 3 \left( a^2 - \frac{2ar_1}{\kappa_1} + \frac{m(cm + r_2)}{\kappa_1\kappa_2} \right) \right]^3 \\ &\quad + \frac{1}{27} \left[ 2 \left( 2a - \frac{r_1}{\kappa_1} \right)^3 + \frac{27a(-a\kappa_2r_1 + mr_2)}{\kappa_1\kappa_2} \right. \\ &\quad \left. + 9 \left( \frac{r_1}{\kappa_1} - 2a \right) \left( a^2 - \frac{2ar_1}{\kappa_1} + \frac{m(cm + r_2)}{\kappa_1\kappa_2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Simplificando las expresiones tenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\kappa_1^4\kappa_2^3} m^2 \left( 4a^4c\kappa_1^3\kappa_2^2 + 12a^3c\kappa_1^2\kappa_2^2r_1 + (cm + r_2)^2(4c\kappa_1m^2 - \kappa_2r_1^2 + 4\kappa_1mr_2) \right. \\ &\quad \left. - 2a\kappa_2r_1(10c^2\kappa_1m^2 - 2c\kappa_2r_1^2 + 11c\kappa_1mr_2 + \kappa_1r_2^2) \right. \\ &\quad \left. + a^2\kappa_1\kappa_2(8c^2\kappa_1m^2 - \kappa_1r_2^2 + 4c(3\kappa_2r_1^2 - 5\kappa_1mr_2)) \right), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^4c\kappa_1^3\kappa_2^2 + 12a^3c\kappa_1^2\kappa_2^2r_1 + (cm + r_2)^2(4c\kappa_1m^2 - \kappa_2r_1^2 + 4\kappa_1mr_2) \\ &\quad - 2a\kappa_2r_1(10c^2\kappa_1m^2 - 2c\kappa_2r_1^2 + 11c\kappa_1mr_2 + \kappa_1r_2^2) \\ &\quad + a^2\kappa_1\kappa_2(8c^2\kappa_1m^2 - \kappa_1r_2^2 + 4c(3\kappa_2r_1^2 - 5\kappa_1mr_2)). \end{aligned}$$

Ahora factorizamos los términos comunes y obtenemos la siguiente expresión más simple:

$$\Delta = \frac{m^2}{\kappa_1^4 \kappa_2^3} \left[ 4ac(a\kappa_1 + r_1)^3 \kappa_2^2 + (a^2(8c^2m^2 - 20cmr_2 - r_2^2)\kappa_1^2 - 2ar_1(10c^2m^2 + 11cmr_2 + r_2^2)\kappa_1 - r_1^2(r_2 + cm)^2)\kappa_2 + 4\kappa_1m(cm + r_2)^3 \right].$$

Observemos que hemos obtenido un polinomio de grado 2 en la variable  $\kappa_2$ , el cual lo escribimos de forma abreviada como

$$\Delta_0 = \Delta_0(\kappa_2) = \frac{m^2}{\kappa_1^4 \kappa_2^3} [a_2(\kappa_1)\kappa_2^2 + a_1(\kappa_1)\kappa_2 + a_0(\kappa_1)], \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_2(\kappa_1) &= 4ac(a\kappa_1 + r_1)^3, \\ a_1(\kappa_1) &= a^2(8c^2m^2 - 20cmr_2 - r_2^2)\kappa_1^2 - 2ar_1\delta_1(10cm + r_2)\kappa_1 - r_1^2\delta_1^2, \\ a_0(\kappa_1) &= 4m\delta_1^3\kappa_1, \end{aligned}$$

con  $\delta_1 = r_2 + cm$ . Notemos que  $\frac{m^3}{\kappa_1^4 \kappa_2^3} \neq 0$ . Luego  $\Delta_0$  se anula cuando  $a_2(\kappa_1)\kappa_2^2 + a_1(\kappa_1)\kappa_2 + a_0(\kappa_1) = 0$ . Para simplificar la notación, definimos

$$f(\kappa_1) = a_2(\kappa_1)\kappa_2^2 + a_1(\kappa_1)\kappa_2 + a_0(\kappa_1). \quad (2.17)$$

Con el fin de determinar las raíces de  $f(\kappa_1)$ , definimos  $\Delta_1(\kappa_1)$  como el discriminante de la fórmula general de segundo grado asociado a (2.17), es decir,

$$\Delta_1(\kappa_1) = (a\kappa_1r_2 + r_1\delta_1)(r_1\delta_1 - a\kappa_1\delta_2)^3,$$

donde  $\delta_2 = 8cm - r_2$ .

Un cálculo directo nos muestra que  $\Delta_1(\kappa_1) = 0$  cuando

$$\kappa_1 = \frac{r_1\delta_1}{a\delta_2}, \quad \text{ó} \quad \kappa_1 = -\frac{r_1\delta_1}{ar_2}.$$

Ya que buscamos raíces positivas de  $f(\kappa_1)$ , descartamos la segunda solución y elegimos

$$\kappa_1 = \kappa_1^* = \frac{r_1 \delta_1}{a \delta_2}. \quad (2.18)$$

Entonces, cuando  $0 < \kappa_1 < \kappa_1^*$  la ecuación  $\Delta_0(\kappa_2) = 0$  puede tener a lo más dos raíces positivas dadas por

$$\kappa_2 = \kappa_2^-(\kappa_1) = \frac{-a_1(\kappa_1) - \sqrt{\Delta_1(\kappa_1)}}{2a_2(\kappa_1)}, \quad \kappa_2 = \kappa_2^+(\kappa_1) = \frac{-a_1(\kappa_1) + \sqrt{\Delta_1(\kappa_1)}}{2a_2(\kappa_1)}.$$

Sustituyendo el valor de  $\kappa_1^*$  en  $\Delta_0(\kappa_2)$  obtenemos

$$\Delta_0(\kappa_2) = \frac{3a^3 m^3 \delta_2 (8c^3 m^3 + 6cmr_2^2 - r_2^3 + 3c^2 m(5mr_2 - 9a\kappa_2 r_1))^2}{\kappa_2^3 r_1^3 \delta_1^4}, \quad (2.19)$$

el cual se anula cuando

$$\kappa_2^* = \frac{\delta_1^2 \delta_2}{27r_1 a c^2 m}. \quad (2.20)$$

Observemos que los valores de  $\kappa_1^*$  y  $\kappa_2^*$  son aquellos para los cuales  $p$  y  $q$  dados en (2.13) se anulan.

Ahora, sustituimos (2.12) en  $\Delta_0(\kappa_2)$  y tenemos

$$\Delta_0(\bar{\kappa}_2) = \frac{m(4ack_1 m - r_1 r_2)(cmr_1 + a\kappa_1 r_2 - r_1 r_2)^2}{ar_1^2}.$$

Es claro que  $\Delta_0(\bar{\kappa}_2) = 0$  cuando

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{r_1(r_2 - cm)}{r_2 a}, \quad \text{donde } r_2 > cm. \quad (2.21)$$

El siguiente resultado nos permite determinar el número y bifurcación de los puntos de equilibrio del sistema (2.5) en términos los parámetros  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , para lo cual debemos tomar en cuenta los signos del determinante de Cardano-Ferrari (2.14) o equivalente de (2.16).

**Proposición 1.** *En el plano  $(\kappa_1, \kappa_2)$ , las tres curvas*

$$\begin{aligned} C_0 &: \kappa_2 = \bar{\kappa}_2, & \kappa_1 &> 0, \\ C_\Delta^- &: \kappa_2 = \kappa_2^-(\kappa), & 0 &< \kappa_1 < \kappa_1^*, \kappa_2 > 0, \\ C_\Delta^+ &: \kappa_2 = \kappa_2^+(\kappa), & 0 &< \kappa_1 < \kappa_1^*, \kappa_2 > 0, \end{aligned}$$

dividen la región  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$  en cuatro subregiones  $V_0, V_1, V_2$  y  $V_3$  (ver la figura 2.1):

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(\kappa_1, \kappa_2) \mid \kappa_1 > 0, (\kappa_2 < \kappa^-(\kappa_1)) \cap (\kappa_2 < \bar{\kappa}_2)\}, \\ V_1 &= \{(\kappa_1, \kappa_2) \mid \kappa_1 > 0, \kappa_2 < \bar{\kappa}_2\} \setminus V_3, \\ V_2 &= \{(\kappa_1, \kappa_2) \mid \kappa_1 > 0, \kappa_2^-(\kappa_1) < \kappa_2 < \bar{\kappa}_2\}, \\ V_3 &= \{(\kappa_1, \kappa_2) \mid 0 < \kappa_1 < \kappa_1^*, \kappa_2^-(\kappa_1) < \kappa_2 < \kappa_2^+(\kappa_1) \cap (\kappa_2 > \bar{\kappa}_2)\}. \end{aligned}$$

En las regiones  $V_0, V_1, V_2$  y  $V_3$  el sistema (2.5) tiene 0, 1, 2 y 3 equilibrios positivos, respectivamente. Sean  $S_1, S_2$  y  $S_3$  los tres equilibrios de coexistencia simple que pueden existir, donde la correspondientemente coordenada  $\bar{E}_2$  satisfacen  $\bar{E}_2(S_1) < \bar{E}_2(S_2) < \bar{E}_2(S_3)$ .  $S_{12}$ , si existe, denota el equilibrio positivo donde  $S_1$  y  $S_2$  se fusionan. Las definiciones similares pueden ser adaptadas para  $S_{23}$  y  $S_{123}$ . Para el sistema (2.5) se cumplen las siguientes condiciones.

1. En la curva  $C_0$ , donde  $\bar{C} = (\bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2)$ 
  - Si  $\kappa_1 > \bar{\kappa}_1$ , no existen puntos de equilibrio de coexistencia;
  - Si  $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$ , existe un punto de equilibrio de coexistencia de multiplicidad 2,  $S_{23}$ ;
  - Si  $\kappa_1 < \bar{\kappa}_1$ , existen dos puntos de equilibrio de coexistencia,  $S_2$  y  $S_3$ .
2. En la curva  $C_\Delta^+$ , existe un punto de equilibrio de coexistencia  $S_3$  y un punto de equilibrio de coexistencia de multiplicidad 2,  $S_{12}$ .
3. En la curva  $C_\Delta^-$ ,
  - Si  $\kappa_2 > \bar{\kappa}_2$ , entonces existe un punto de equilibrio de coexistencia  $S_1$ , y un punto de equilibrio de coexistencia de multiplicidad 2,  $S_{23}$ ;
  - Si  $\kappa_2 \leq \bar{\kappa}_2$ , entonces coexiste un equilibrio de multiplicidad 2,  $S_{23}$ ;
4. En el punto  $C^*(\kappa_1^*, \kappa_2^*) = \left( \frac{r_1 \delta_1}{a \delta_2}, \frac{\delta_1^2 \delta_2}{27 r_1 a c^2 m} \right)$ , existe un punto de equilibrio de coexistencia de multiplicidad 3,  $S_{123} = \left( \frac{r_1 a \delta_3}{\delta_1 \alpha}, \frac{a \delta_3}{\delta_1}, \frac{18 r_1 a c^2 m}{\delta_1 \delta_2} \right)$  donde  $0 < r_2 < 2cm$ , donde  $\delta_3 =$

En la figura 2.1 mostramos las curvas  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  del sistema (2.5), el cual puede tener 1 equilibrio de coexistencia  $S_1$  ó  $S_2$  ó  $S_3$ , ó 1 equilibrio de coexistencia degenerado  $S_{23}$  ó  $S_{123}$ , ó 2 equilibrios de coexistencia  $S_1, S_{23}$  ó  $S_{12}, S_3$  ó  $S_2, S_3$ , ó 3 equilibrios de coexistencia  $S_1, S_2$ , y  $S_3$ , simultáneamente. Notemos que las curvas  $C_\Delta^+$  y  $C_\Delta^-$  representan los valores de los parámetros para los cuales el polinomio cúbico (2.11) tiene una raíz de multiplicidad 2 y una de multiplicidad 1. Las coordenadas del punto  $\bar{C}$  son los valores de los parámetros para los cuales  $E_2 = 0$  es raíz de (2.11) y el punto  $C^*$  corresponde a valores de los parámetros donde todas las raíces son reales, y al menos 2 de ellas son iguales.

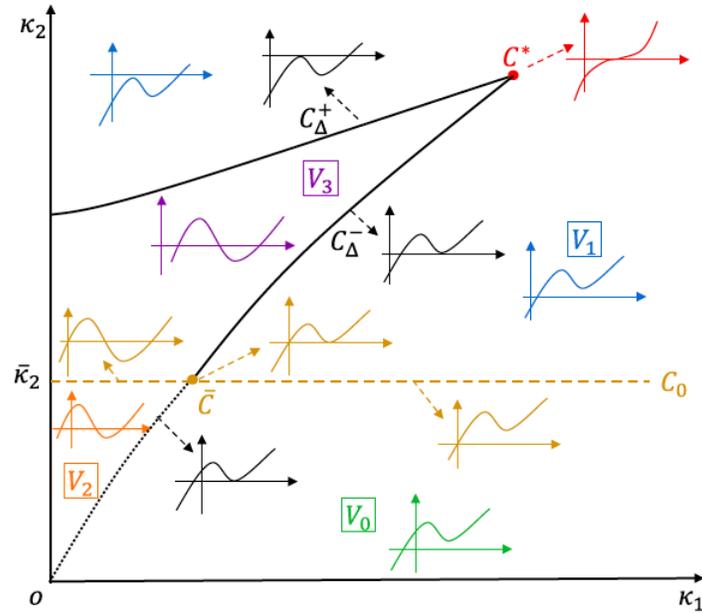


Figura 2.1: Existencia de equilibrios positivos (número y posición) del sistema (2.5) con  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  como parámetros. Existen 0, 1, 2 y 3 equilibrios positivos en las regiones  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ , respectivamente. Se produce una bifurcación de nodo de silla hiperbólica cuando los parámetros cruzan  $C_\Delta^\pm$ , y se produce una bifurcación transcritical cuando se cruza la línea  $C_0$ . Esta figura fue tomada de [?].

## 2.3. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio

En esta sección vamos a estudiar la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio del sistema (2.5), para lo cual usaremos la matriz siguiente jacobiana asociada a (2.1),

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & -2\kappa_1 E_2 + \frac{mME_2}{(a+E_2)^2} - \frac{mM}{a+E_2} & -\frac{mE_2}{a+E_2} \\ 0 & \frac{acmM}{(a+E_2)^2} & r_2 - 2\kappa_2 M + \frac{cmE_2}{a+E_2} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & -2\kappa_1 E_2 + MP'(E_2) & -P(E_2) \\ 0 & cMP'(E_2) & r_2 - 2\kappa_2 M + P(E_2) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

donde  $P(E_2) = \frac{mE_2}{a+E_2}$ .

Iniciemos con el estudio de la estabilidad lineal del punto  $S_0 = (0, 0, 0)$ , cuya matriz jacobiana es

$$J(S_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

y polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = (r_2 - \lambda)(\lambda^2 + \alpha\lambda - r_1\alpha).$$

Luego un valor propio es  $\lambda_1 = r_2$ , y los otros dos valores propios los obtenemos de las raíces del polinomio de segundo grado  $\lambda^2 + \alpha\lambda - r_1\alpha$ , es decir,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha r_1} \right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \left( -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha r_1} \right)$$

con  $\alpha > 0$ .

Notemos que  $\alpha^2 + 4\alpha r_1 > \alpha^2$ , es decir  $-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha r_1} > 0$ , entonces  $\lambda_2$  es positivo, mientras que  $\lambda_3$  es negativo. Luego,  $S_0$  tiene dos valores propios positivos y uno negativo, y concluimos que es un punto de equilibrio *inestable*.

Para analizar la estabilidad del punto  $S_{10} = (p_1 K_1, K_1, 0)$  con  $K_1 = \frac{r_1}{\kappa_1}$ , consideramos (2.5) con  $M = 0$ , y obtenemos el sistema

$$\frac{dE_1}{dt} = r_1 E_2 - \alpha E_1, \quad \frac{dE_2}{dt} = \alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2, \quad \frac{dM}{dt} = 0.$$

Como consecuencia las coordenadas del punto de equilibrio  $S_{10}$  son  $E_1 = \frac{r_1^2}{\kappa_1 \alpha}$  y  $E_2 = \frac{r_1}{\kappa_1}$ , con  $M = 0$ . Ya que en el punto de equilibrio  $E_1 = \frac{r_1}{\alpha} E_2$ , obtenemos que la matriz jacobiana en  $S_{10}$  es

$$J(S_{10}) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & -2r_1 & -\frac{mr_1}{a\kappa_1 + r_1} \\ 0 & 0 & \frac{cmr_1 + a\kappa_1 r_2 + r_1 r_2}{a\kappa_1 + r_1} \end{pmatrix},$$

con ecuación característica

$$\frac{[(r_1 + \kappa_1 a)\lambda - (r_2 \kappa_1 a + r_1 r_2 + cmr_1)] [\lambda^2 + (2r_1 + \alpha)\lambda + r_1 \alpha]}{a\kappa_1 + r_1} = 0.$$

Tomando en cuenta que los parámetros son positivos, es suficiente considerar el numerador de la expresión anterior para determinar las raíces, es decir,

$$[(r_1 + \kappa_1 a)\lambda - (r_2 \kappa_1 a + r_1 r_2 + cmr_1)] [\lambda^2 + (2r_1 + \alpha)\lambda + r_1 \alpha] = 0.$$

Notemos que el primer factor se anula cuando

$$(r_1 + \kappa_1 a)\lambda - (r_2 \kappa_1 a + r_1 r_2 + cmr_1) = 0,$$

es decir,

$$\lambda = \lambda_1 = r_2 + \frac{cmr_1}{r_1 + \kappa_1 a},$$

pues  $r_1 + \kappa_1 a \neq 0$ . Dado que todos los parámetros son mayores a cero, el valor propio  $\lambda_1$  es positivo si  $r_2 + \frac{cmr_1}{r_1 + \kappa_1 a} > 0$ , y los otros dos valores propios son las soluciones de  $\lambda^2 + (2r_1 + \alpha)\lambda + r_1\alpha = 0$ , es decir,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( -2r_1 - \alpha + \sqrt{4r_1^2 + \alpha^2} \right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \left( -2r_1 - \alpha - \sqrt{4r_1^2 + \alpha^2} \right).$$

Observemos que  $-2r_1 - \alpha < \sqrt{4r_1^2 + \alpha^2}$ , de donde obtenemos que  $\lambda_2$  es positivo, mientras que  $\lambda_3$  es negativo. Como consecuencia podemos concluir que  $S_{10} = (p_1 K_1, K_1, 0)$  es un punto de equilibrio inestable.

En el siguiente paso es estudiar la estabilidad del tercer punto de equilibrio, el cual ocurre cuando el sistema está libre de plaga, es decir, se elimina el saltamontes ( $E_1 = 0, E_2 = 0$ ). Sea  $S_{01} = (0, 0, K_2)$  con  $K_2 = \frac{r_2}{\kappa_2}$ , entonces el sistema (2.5) toma la forma

$$\frac{dE_1}{dt} = 0, \quad \frac{dE_2}{dt} = 0, \quad \frac{dM}{dt} = -\kappa_2 M^2 + Mr_2.$$

La tercera ecuación se anula cuando  $M = 0$  ó  $M = \frac{r_2}{\kappa_2}$ . Recordemos que en este caso los depredadores (ácaros) permanecen, luego  $M = \frac{r_2}{\kappa_2} \neq 0$ . Ahora evaluamos (2.22) en el punto  $S_{01}$  y obtenemos

$$J(S_{01}) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & -\frac{mr_2}{a\kappa_2} & 0 \\ 0 & \frac{cmr_2}{a\kappa_2} & -r_2 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es

$$(-r_2 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2} \right) \lambda + \alpha \left( \frac{mr_2}{a\kappa_2} - r_1 \right) \right] = 0. \quad (2.23)$$

Es evidente que un valor propio es  $\lambda_1 = -r_2 < 0$ , mientras que los otros dos

valores propios los determinamos de la ecuación cuadrática de (2.23),

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[ -\left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right) + \sqrt{\left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right)^2 - 4\alpha \left(\frac{mr_2}{a\kappa_2} - r_1\right)} \right], \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left[ -\left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right) - \sqrt{\left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right)^2 - 4\alpha \left(\frac{mr_2}{a\kappa_2} - r_1\right)} \right].\end{aligned}\tag{2.24}$$

En lo que sigue vamos a caracterizar cuándo estos valores propios son reales o complejos. Iniciemos por notar que

$$-\left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right) < 0 \quad \text{y} \quad \left(\alpha + \frac{mr_2}{a\kappa_2}\right)^2 > 0,$$

pues todos los parámetros son positivos. Por otro lado tenemos que

$$\frac{mr_2}{a\kappa_2} - r_1 = 0 \quad \text{cuando} \quad \kappa_2 = \bar{\kappa}_2 = \frac{mr_2}{ar_1},$$

es decir, en este caso los valores propios son  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = -(r_1 + \alpha) < 0$ , el cual corresponde a una situación degenerada y la estabilidad del punto no puede ser determinada por el teorema de Hartman–Grobman. Luego el estudio de su estabilidad lo llevaremos a cabo en el capítulo 2.

Los resultados obtenidos hasta ahora nos permiten concluir lo siguiente:

- cuando  $\kappa_2 < \bar{\kappa}_2$  el discriminante de la raíz cuadrada en (2.24) es negativo, luego  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son complejos conjugados y tienen parte real negativa, entonces  $S_{01}$  es *asintóticamente estable*.
- cuando  $\kappa_2 > \bar{\kappa}_2$  el discriminante en (2.24) es positivo, entonces  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son reales de signos contrarios, entonces  $S_{01}$  es *inestable*.

Continuando con la discusión de la estabilidad local, consideremos el punto de equilibrio de coexistencia  $\bar{S}$ , es decir, el sistema (2.5) en términos de las expresiones de  $U_1$  y  $U_2$  dadas en (2.10). Ya que la ecuación  $\frac{dE_1}{dt}$  en (2.5)

no depende de  $M$ , esta queda invariante, mientras que

$$\begin{aligned}\frac{dE_2}{dt} &= \frac{(\alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2)(a + E_2)}{a + E_2} - \frac{mE_2 M}{a + E_2}, \\ &= \frac{mE_2}{a + E_2} \left[ \left( \frac{\alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2}{E_2} \right) \left( \frac{a + E_2}{m} \right) - M \right].\end{aligned}$$

Ahora sustituimos a  $P(E_2)$  y  $U_1(E_2)$  y obtenemos

$$\frac{dE_2}{dt} = P(E_2)(U_1(E_2) - M). \quad (2.25)$$

Por otro lado, realizamos las respectivas sustituciones en la última ecuación de (2.5) y llegamos a

$$\frac{dM}{dt} = \kappa_2 M \left( \frac{1}{\kappa_2} \left( r_2 + \frac{cmE_2}{a + E_2} \right) - M \right). \quad (2.26)$$

Resumiendo los cálculos anteriores, el sistema (2.1) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= r_1 E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= P(E_2)(U_1(E_2) - M), \\ \frac{dM}{dt} &= \kappa_2 M (U_2(E_2) - M).\end{aligned} \quad (2.27)$$

Con el fin de analizar la estabilidad del punto  $\bar{S}$ , calculamos la matriz jacobiana asociada al sistema (2.27),

$$J(S) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & P'(E_2)U_1(E_2) + P(E_2)U_1'(E_2) - P'(E_2)M & -P(E_2) \\ 0 & \kappa_2 M U_2'(E_2) & \kappa_2 U_2(E_2) - 2\kappa_2 M \end{pmatrix}.$$

donde  $' = \frac{d}{dE_2}$ .

Notemos que  $M = U_1(E_2)$  implica que  $\frac{dE_2}{dt} = 0$ , mientras que  $\frac{dM}{dt} = 0$  cuando  $M = U_1(E_2)$ . Luego al evaluar la matriz  $J(S)$  en  $\bar{S} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{M})$ ,

en la entrada 22 la  $\overline{M} = U_1(E_2)$ , y en la entrada 33 la  $\overline{M} = U_2(E_2)$ , de tal forma que

$$J(\overline{S}) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2) & -P(\overline{E}_2) \\ 0 & \kappa_2\overline{M}U'_2(\overline{E}_2) & -\kappa_2\overline{M} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

cuyo polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = & -\lambda^3 - (\alpha + \kappa_2\overline{M} - P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2))\lambda^2 \\ & + (\kappa_2\overline{M}P(\overline{E}_2)(U'_1(\overline{E}_2) - U'_2(\overline{E}_2)) + \alpha(P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2) - \kappa_2\overline{M} + r_1))\lambda \\ & + \alpha\kappa_2\overline{M}P(\overline{E}_2)(U'_1(\overline{E}_2) - U'_2(\overline{E}_2)) + \alpha\kappa_2\overline{M}r_1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para poder caracterizar las raíces del polinomio  $p(\lambda)$  lo escribimos de la siguiente forma:

$$\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0, \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha + \kappa_2\overline{M} - P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2), \\ A_1 &= \alpha(\kappa_2\overline{M} - P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2) - r_1) + \kappa_2\overline{M}P(\overline{E}_2)(U'_2(\overline{E}_2) - U'_1(\overline{E}_2)), \\ A_0 &= \alpha\kappa_2\overline{M}P(\overline{E}_2)(U'_1(\overline{E}_2) - U'_2(\overline{E}_2)) + \alpha\kappa_2\overline{M}r_1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Antes de seguir adelante, hagamos las siguientes observaciones.<sup>1</sup> En la ecuación característica (2.30),  $A_2 = -\text{tr}(J(\overline{S}))$  que corresponde a la suma de los valores propios, mientras que  $A_0 = \det(J(\overline{S}))$  es igual al producto de los valores propios. Por otro lado, tenemos que  $A_2 > 0$  (ver la demostración en el apéndice A), luego tenemos

$$\text{tr}(J(\overline{S})) = -A_2 = -\alpha - \kappa_2\overline{M} + P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2) < 0.$$

Entonces uno de los valores propios debe de ser negativo. Por otra parte, el determinante de (2.22) es

$$\det(J(\overline{S})) = A_0 = \alpha\kappa_2\overline{M}P(\overline{E}_2)[U'_1(\overline{E}_2) - U'_2(\overline{E}_2)] + \alpha\kappa_2\overline{M}r_1. \quad (2.32)$$

---

<sup>1</sup>Si  $\mathcal{A}$  es una matriz de tamaño  $n \times n$ , entonces el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^n - (\text{tr}\mathcal{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}(\text{tr}(\text{adj}\mathcal{A}))\lambda + (-1)^n \det \mathcal{A},$$

donde  $\text{tr}\mathcal{A}$ ,  $\text{adj}\mathcal{A}$  y  $\det \mathcal{A}$  denota la traza, la adjunta y determinante de la matriz  $\mathcal{A}$ , respectivamente.

Luego,  $J(\bar{S})$  tiene un valor propio cero cuando  $A_0 = 0$ . En otras palabras, cuando se satisface la siguiente ecuación:

$$\alpha \kappa_2 \bar{M} \left( P(\bar{E}_2) (U'_1(\bar{E}_2) - U'_2(\bar{E}_2)) + r_1 \right) = 0,$$

lo cual se cumple cuando  $U'_2(\bar{E}_2) - U'_1(\bar{E}_2) = \frac{r_1}{P(\bar{E}_2)}$ .

Ya que vamos a estudiar el punto de equilibrio  $\bar{S}$  con  $\bar{E}_2 > 0$ ,  $\bar{M} > 0$  y los parámetros  $\alpha, \kappa > 0$ , entonces el signo del  $\det(J(\bar{S}))$  es definido por el signo de  $U'_2(\bar{E}_2) - U'_1(\bar{E}_2)$ . Sea  $k_1 = U'_1(\bar{E}_2)$ ,  $k_2 = U'_2(\bar{E}_2)$  y  $\bar{k} = \frac{r_1}{P(\bar{E}_2)}$ .

**Proposición 2.** *Para el sistema (2.5) se cumple lo siguiente:*

1. *El punto de equilibrio  $S_{01}$ , asociado a la extinción del depredador, es una silla hiperbólica.*
2. *El punto de equilibrio  $S_{01}$  asociado a la extinción de la presa, es:*
  - *si  $\kappa_2 > \bar{\kappa}_2$  es una silla hiperbólica;*
  - *si  $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$  es una silla-nodo de codimensión 1;*
  - *si  $\kappa_2 < \bar{\kappa}_2$  es un nodo localmente estable.*
3. *Si existe el punto de equilibrio  $\bar{S}$  entonces se cumple lo siguiente:*
  - *$S_1$  y  $S_3$  son una anti-silla (foco o nodo);*
  - *$S_2$  es una silla hiperbólica;*
  - *si  $J(S_{12(23)})$  todos los valores propios son reales y uno de estos es cero, y  $\text{tr}(J(S_{12(23)})) \neq 0$ , entonces  $S_{12(23)}$  es un silla-nodo de codimensión 1;*
  - *si  $J(S_{1(3)})$  tiene un valor propio negativo y dos imaginarios puros, entonces  $\text{tr}(J(S_{1(3)})) < 0$  y  $\det(J(S_{1(3)})) < 0$ . Luego  $S_{1(3)}$  es un punto de bifurcación de Hopf;*
  - *si  $J(S_{12(23)})$  tiene dos valores propios cero y  $\text{tr}(J(S_{12(23)})) < 0$ , entonces  $S_{12(23)}$  es un punto de bifurcación tipo Bogdanov-Takens (BT).*

# Capítulo 3

## Bifurcaciones

En un un sistema dinámico no lineal dependiente de parámetros, cuando cambian algunos parámetros puede cambiar el comportamiento cualitativo y topológico del retrato fase del sistema, es decir, ocurre una *bifurcación*. En este escenario es cuando pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas periódicas, o bien desaparecer los que ya existen, o tal vez cambiar sus estabildades.

La dinámica del modelo (2.1) es mucho más complicada que la del modelo clásico de presa-depredador, pues involucra 5 parámetros libres y 3 ecuaciones diferenciales no lineales. Por otro lado, hemos visto que tiene 3 puntos de equilibrio sobre los ejes coordenados (en la frontera del primer octante) y a lo más 3 puntos de equilibrio en el interior o de coexistencia. Estas particularidades implican que la dinámica involucra varios tipos de bifurcaciones.

En este capítulo analizaremos algunas de las bifurcaciones presentes en el sistema (2.1).

### 3.1. Bifurcaciones silla-nodo y cúspide

**Teorema 7.** *El sistema (2.1) con  $\text{tr}(J(S_{12(23)})) \neq 0$  los puntos de equilibrio de coexistencia  $S_{12}$  ó  $S_{23}$ ,*

1. si existen, son puntos silla-nodo de codimensión 1, cuando  $\kappa_2 = \kappa_2^\pm(\kappa_1)$ , entonces el sistema experimenta una bifurcación de tipo silla-nodo.
2. si  $\kappa_1 = \kappa_1^*$  y  $\kappa_2 = \kappa_2^*$  entonces  $S_{12} = S_{23} = S_{123}$  es una silla-nodo de codimensión 2. En este caso el sistema experimenta una bifurcación tipo cúspide.

El desdoblamiento (*unfolding*) del punto semi-hiperbólico de codimensión 2 lo mostramos en el plano  $\kappa_1$ - $\kappa_2$ ; ver la figura 2.1.

*Demostración.* Tomando en cuenta la proposición 2, el equilibrio  $S_{12}$  ó  $S_{23}$  es una silla-nodo de codimensión 1, pues  $\kappa_1$  es un parámetro libre y  $\kappa_2$  está fijo. Con el fin de evitar confusiones, a partir de ahora  $(\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{M})$  denotará las coordenadas de los equilibrios  $S_{12}$  ó  $S_{23}$ .

Ahora supongamos que hay un valor propio cero, entonces  $A_0 = 0$ . Luego, el polinomio característico queda factorizando como

$$\lambda(\lambda^2 + A_2\lambda + A_1) = 0,$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son los definidos en (2.31). Tomando en cuenta que

$$E_1 = \frac{r_1}{\alpha} E_2, \quad P(E_2) = \frac{E_2 m}{a + E_2} \quad \text{y} \quad \bar{k} = \frac{r_1}{P(E_2)},$$

el vector propio asociado al valor propio cero, denotado como  $\tilde{\lambda}_2 = 0$ , lo obtenemos de la solución del sistema

$$J\tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{r_1 v_2 - v_1 \alpha}{a + E_2} v_2 - \frac{E_2 m}{a + E_2} v_3 + v_1 \alpha \\ \kappa_2 M \kappa_2 v_2 - M \kappa_2 v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Un cálculo directo muestra que el vector propios es

$$\tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha} \\ 1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ya que uno de los valores propios es cero, entonces  $\det(J) = 0$  y el término constante del polinomio (2.30)  $A_0 = 0$ , es decir

$$\alpha\kappa_2\overline{M}(P(\overline{E}_2)k_1 - P(\overline{E}_2)k_2 + r_1) = 0,$$

o equivalentemente  $k_2 - k_1 = \frac{r_1}{P(\overline{E}_2)}$ , de donde obtenemos que

$$\kappa_2 = \overline{\kappa}_2 = \frac{acm^2\overline{E}_2}{(a + \overline{E}_2)^2(a + 2\overline{E}_2)(r_1 - \overline{E}_2\kappa_1)}.$$

Ahora vamos a obtener los otros dos valores propios, los cuales son la solución de  $\lambda^2 + A_2\lambda + A_1 = 0$ , es decir

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{-\tilde{A}_2 + \sqrt{\tilde{A}_2^2 - 4\tilde{A}_1}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{-\tilde{A}_2 - \sqrt{\tilde{A}_2^2 - 4\tilde{A}_1}}{2},$$

donde

$$\tilde{A}_2 = \frac{2\kappa_1\overline{E}_2^2 + (-r_1 + \delta_1 + \alpha + a\kappa_1)\overline{E}_2 + a(r_2 + \alpha)}{(a + \overline{E}_2)},$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{2\alpha\kappa_1\overline{E}_2^2 + (\alpha(\delta_1 - 2r_1 + a\kappa_1) + \delta_1r_1)\overline{E}_2 + a(r_1r_2 - r_1\alpha + r_2\alpha)}{a + \overline{E}_2}.$$

Estas expresiones los obtenemos al sustituir  $M$  de (2.9) y tomando la expresión de  $U_2(\overline{E}_2)$  en (2.10), así como  $A_1$  y  $A_2$  de (2.31).

Por otro lado, los respectivos vectores propios los obtenemos de resolver el sistema  $(J - \lambda_i)\tilde{V}_i = 0$  para  $i = 1, 3$ . Con el fin de simplificar los cálculos, llevaremos el cómputo de manera formal usando la matriz jacobiana (2.28). Luego, para  $i = 1, 3$  tenemos el sistema

$$(J - \tilde{\lambda}_i)\tilde{V}_i = \begin{pmatrix} -\alpha - \tilde{\lambda}_i & r_1 & 0 \\ \alpha & P(\overline{E}_2)U'_1(\overline{E}_2) - \tilde{\lambda}_i & -P(\overline{E}_2) \\ 0 & \kappa_2\overline{M}U'_2(\overline{E}_2) & -\kappa_2\overline{M} - \tilde{\lambda}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{i1} \\ \tilde{V}_{i2} \\ \tilde{V}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el cual se puede escribir como el siguiente sistema de tres ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} (-\alpha - \tilde{\lambda}_i)\tilde{V}_{i1} + r_1\tilde{V}_{i2} &= 0, \\ \alpha\tilde{V}_{i1} + (P(\overline{E}_2)k_1 - \tilde{\lambda}_i)\tilde{V}_{i2} - P(\overline{E}_2)\tilde{V}_{i3} &= 0, \\ \kappa_2\overline{M}k_2\tilde{V}_{i2} - (\kappa_2\overline{M} - \tilde{\lambda}_i)\tilde{V}_{i3} &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde  $k_1 = U'_1(\overline{E}_2)$ ,  $k_2 = U'_2(\overline{E}_2)$  y  $\overline{M} = M$  de (2.9). La solución de (3.2), para  $i = 1, 3$ , son fáciles de obtener y nos da los respectivos vectores propios de  $\tilde{\lambda}_1$  y  $\tilde{\lambda}_3$ , cuyas expresiones son las siguientes:

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha + \tilde{\lambda}_1} \\ 1 \\ \frac{\kappa_2 \overline{M} k_2}{\kappa_2 \overline{M} + \tilde{\lambda}_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_3 = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha + \tilde{\lambda}_3} \\ 1 \\ \frac{\kappa_2 \overline{M} k_2}{\kappa_2 \overline{M} + \tilde{\lambda}_3} \end{pmatrix}.$$

Ahora, para estudiar la estabilidad de los puntos  $S_{12}$  y  $S_{23}$ , vamos a calcular la forma normal haciendo uso de la variedad central, la cual tiene dimensión 1 en este sistema. Para mayores detalles sobre este t3pico el lector puede consultar la secci3n 2.11 en [?].

Para llevar a cabo el proceso de forma normal, el primer paso es trasladar el origen de coordenadas al punto de equilibrio, es decir,  $X_1 = E_1 - \overline{E}_1$ ,  $X_2 = E_2 - \overline{E}_2$  y  $Y = M - \overline{M}$ .

Considerando que  $E_1 = X_1 + \overline{E}_1$ ,  $E_2 = X_2 + \overline{E}_2$  y  $M = Y + \overline{M}$ , la matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto de equilibrio es

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & \frac{m(\overline{E}_2 + X_2)(\overline{M} + Y)}{(a + \overline{E}_2 + X_2)^2} - \frac{m(\overline{M} + Y)}{a + \overline{E}_2 + X_2} - 2(\overline{E}_2 + X_2)\kappa_1 & -\frac{m(\overline{E}_2 + X_2)}{a + \overline{E}_2 + X_2} \\ 0 & \frac{acm(\overline{M} + Y)}{(a + \overline{E}_2 + X_2)^2} & r_2 + \frac{cm(\overline{E}_2 + X_2)}{a + \overline{E}_2 + X_2} - 2(\overline{M} + Y)\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Con el fin de diagonalizar esta matriz, es decir a la parte lineal del sistema (2.1) en una vecindad del punto de equilibrio, calculamos la matriz de cambio de base dada por la matriz  $\mathcal{M} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3)$ . Luego las nuevas coordenadas son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{M}^{-1}$  es la matriz inversa de  $\mathcal{M}$ . Lo siguiente es evaluar la matriz  $J$

en  $(X_1, X_2, Y) = (0, 0, 0)$  para obtener

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & r_1 & 0 \\ \alpha & -\frac{am\overline{M}}{(a + \overline{E}_2)^2} - 2\overline{E}_2\kappa_1 & -\frac{m\overline{E}_2}{a + \overline{E}_2} \\ 0 & \frac{acm\overline{M}}{(a + \overline{E}_2)^2} & \frac{cm\overline{E}_2}{a + \overline{E}_2} + r_2 - 2\overline{M}\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Notemos que la matriz transpuesta de  $\mathcal{M}$  es

$$\mathcal{M}^T = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha + \lambda_1} & \frac{r_1}{\alpha} & \frac{r_1}{\alpha + \lambda_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_2 M \kappa_2}{\lambda_1 + \kappa_2 M} & k_2 & \frac{\kappa_2 k_2 M}{\lambda_3 + \kappa_2 M} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

mientras que la matriz inversa  $\mathcal{M}^{-1}$  es

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(\alpha + \lambda_1)(\alpha + \lambda_3)(\lambda_1 + \kappa_2 M)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)r_1(\alpha - \kappa_2 M)} & \frac{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 + \kappa_2 M)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)} & \frac{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 + \kappa_2 M)(\lambda_3 + \kappa_2 M)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)k_2(\alpha - \kappa_2 M)} \\ -\frac{\alpha\kappa_2 M(\alpha + \lambda_1)(\alpha + \lambda_3)}{\lambda_1\lambda_3 r_1(\alpha - \kappa_2 M)} & \frac{\alpha\kappa_2 M}{\lambda_1\lambda_3} & \frac{\alpha(\lambda_1 + \kappa_2 M)(\lambda_3 + \kappa_2 M)}{\lambda_1\lambda_3 k_2(\alpha - \kappa_2 M)} \\ \frac{\alpha(\alpha + \lambda_1)(\alpha + \lambda_3)(\lambda_3 + \kappa_2 M)}{(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_3 r_1(\alpha - \kappa_2 M)} & -\frac{(\alpha + \lambda_3)(\lambda_3 + \kappa_2 M)}{(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_3} & -\frac{(\alpha + \lambda_3)(\lambda_1 + \kappa_2 M)(\lambda_3 + \kappa_2 M)}{(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_3 k_2(\alpha - \kappa_2 M)} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

de tal forma que

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix},$$

donde

$$w_1 = \frac{(\alpha + \lambda_1)(\kappa_2 M + \lambda_1) \left( -\alpha^2 k_2 X_1 + k_2 r_1 X_2 (\alpha - \kappa_2 M) + \kappa_2 M r_1 Y + \lambda_3 (r_1 Y - \alpha k_2 X_1) \right)}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_3) k_2 r_1 (\alpha - \kappa_2 M)},$$

$$w_2 = \frac{\alpha}{\lambda_1 \lambda_3 k_2 r_1 (\alpha - \kappa_2 M)} \left( \kappa_2 M \left( -\alpha^2 k_2 X_1 + k_2 r_1 X_2 (\alpha - \kappa_2 M) + \kappa_2 M r_1 Y + \lambda_3 (r_1 Y - \alpha k_2 X_1) \right) \right. \\ \left. + \lambda_1 \left( \kappa_2 M (r_1 Y - \alpha k_2 X_1) + \lambda_3 (r_1 Y - \kappa_2 k_2 M X_1) \right) \right),$$

$$w_3 = \frac{(\alpha + \lambda_3)(\kappa_2 M + \lambda_3) \left( -\alpha^2 k_2 X_1 + k_2 r_1 X_2 (\alpha - \kappa_2 M) + \kappa_2 M r_1 Y + \lambda_1 (r_1 Y - \alpha k_2 X_1) \right)}{\lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) k_2 r_1 (\alpha - \kappa_2 M)}.$$

El siguiente paso es desarrollar las  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  en serie de potencias de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $Y$  en un entorno del origen, y como consecuencia obtener la forma normal del sistema en los puntos de equilibrio  $S_{12}$  y  $S_{23}$ . Llevando a cabo ese proceso obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{\lambda}_1 x_1 + \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2} \tilde{a}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^3), \\
\dot{x}_2 &= \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2,3} \tilde{b}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^4), \\
\dot{x}_3 &= \tilde{\lambda}_3 y + \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2} \tilde{c}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^3),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{020} &= \frac{\alpha(r_2 a + \delta_1 \overline{E}_2)}{\tilde{A}_1(a + \overline{E}_2)^3[(\delta_1 - \alpha)\overline{E}_2 + a(r_2 - \alpha)]} (q_3 \overline{E}_2^3 + q_2 \overline{E}_2^2 + q_1 \overline{E}_2 + q_0), \\
q_3 &= -\kappa_1(\delta_1 - \alpha), \\
q_2 &= -\kappa_1 a(\delta_1 + r_2 - 2\alpha) + (\delta_1 + \tilde{\lambda}_1), \\
q_1 &= -a[\kappa_1 a(r_2 - \alpha)], \\
q_0 &= a^2(r_2 + \tilde{\lambda}_1).
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 1, página 151 de [?] tenemos que el origen  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$  es un punto *silla-nodo*. Los detalles del cálculo se pueden consultar en el apéndice B.

El sistema (3.7) reducido a la variedad de dimensión 1 generada por el valor propio cero, cuyo flujo es dado por la ecuación diferencial

$$\dot{x}_2 = \bar{b}_{020} x_2^2 + O(|x_2|^3),$$

donde hay dos parámetros libres  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ . Luego, el punto de equilibrio  $S_{12} = S_{23}$  es de codimensión 2. En el caso que  $\bar{b}_{020} = 0$  el flujo en la variedad central es determinado por la ecuación

$$\dot{x}_2 = \bar{b}_{030} x_2^3 + O(|x_2|^4),$$

lo cual implica que  $x_2 = 0$  es un punto de equilibrio de multiplicidad 3, así como un punto de pliegue (*fold point*). En la sección 2.2 vimos que el punto

de equilibrio tiene multiplicidad 3 cuando  $\kappa_1 = \kappa_2^*$  y  $\kappa_2 = \kappa_2^*$ , y por el teorema 3 del capítulo 1, el equilibrio  $x_2 = 0$  es tipo cúspide. Para mayores detalles ver [?].  $\square$

**Teorema 8.** *El punto de equilibrio  $S_{01}$  para el sistema (2.1) asociado a la extinción de la plaga, satisface lo siguiente*

1. *si  $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$ , es un equilibrio silla-nodo de codimensión 1. A lo largo de la curva  $C_0$  el sistema experimenta una bifurcación silla-nodo;*
2. *si  $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$  y  $\kappa_1 = \bar{\kappa}_1$ , es decir  $S_{01} = S_{12}$  y son un punto silla-nodo de codimensión 2. Además el sistema experimenta una bifurcación tipo cúspide.*

*Demostración.* En el caso  $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$ , el sistema (2.1) se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= r_1 E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha E_1 - \kappa_1 E_2^2 - \frac{mE_2 M}{a + E_2}, \\ \frac{dM}{dt} &= Mr_2 + \frac{cE_2 m M}{a + E_2} - \frac{mM^2 r_2}{ar_1}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Recordemos que el punto de equilibrio que estamos analizando es el que tiene por coordenadas  $E_1 = 0$  y  $E_2 = 0$ . Luego,  $Mr_2 - \frac{mM^2 r_2}{ar_1} = 0$ , cuyas soluciones son  $M = 0$  y  $M = \frac{r_1 a}{m}$ . Ya que buscamos soluciones positivas, entonces  $M \neq 0$  y  $S_{01} = \left(0, 0, \frac{r_1 a}{m}\right)$ .

Ahora, si suponemos que  $\kappa_2 = \bar{\kappa}_2$  entonces la ecuación característica (2.23) se transforma en  $-(\lambda + r_2)[\lambda^2 + (\alpha + r_1)\lambda] = 0$ . En otras palabras, buscamos los ceros del siguiente polinomio

$$(\lambda + r_2)(\lambda^2 + (\alpha + r_1)\lambda) = 0.\tag{3.9}$$

Notemos que el segundo factor de la ecuación anterior es un polinomio de grado 2, el cual no tiene término constante, lo cual implica que  $\det(J(S_{01})) =$

0, en otras palabras, hay un valor propio cero. Por lo tanto los valores propios de  $J(S_{01})$  son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -r_2$  y  $\lambda_3 = -\alpha - r_1$ . Para continuar con la demostración, debemos realizar un procedimiento similar al llevado a cabo en la demostración en el teorema anterior. Iniciamos por trasladar el equilibrio al origen de coordenadas usando el cambio de variable  $X_1 = E_1$ ,  $X_2 = E_2$ ,  $Y = M - \frac{r_1 a}{m}$ , y realizamos la transformación

$$\mathcal{N}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = (\widehat{W}_1, \widehat{W}_2, \widehat{W}_3),$$

donde los vectores propios asociados los valores propios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , respectivamente, son

$$\widehat{W}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{cr_1}{r_2 - r_1 - \alpha} \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_2 = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\alpha} \\ 1 \\ \frac{cr_1}{r_2} \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz de cambio de base tiene la siguiente forma

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{r_1}{\alpha} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{cr_1}{r_2 - r_1 - \alpha} & \frac{cr_1}{r_2} & 1 \end{pmatrix},$$

y su matriz inversa es:

$$\mathcal{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{r_1}{(-1 - \frac{r_1}{\alpha})\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{-1 - \frac{r_1}{\alpha}} & -\frac{1}{-1 - \frac{r_1}{\alpha}} & 0 \\ \frac{\frac{cr_1}{r_2} + \frac{cr_1}{r_1 - r_2} + \alpha}{-1 - \frac{r_1}{\alpha}} & \frac{\frac{cr_1}{r_2} - \frac{cr_1^2}{\alpha(r_1 - r_2 + \alpha)}}{-1 - \frac{r_1}{\alpha}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia obtenemos las nuevas coordenadas considerando

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathcal{N}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{r_1 X_2 - X_1 \alpha}{r_1 + \alpha}, \\ u_2 &= \frac{(X_1 + X_2) \alpha}{r_1 + \alpha}, \\ u_3 &= Y + \frac{c r_1 (-r_2 X_2 + (X_1 + X_2) \alpha)}{r_2 (-r_1 + r_2 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Continuando con el procedimiento, el siguiente paso es desarrollar las expresiones de  $u_1$ ,  $u_2$ , y  $u_3$  en serie de potencias de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $Y$  en un entorno el origen. Finalmente, obtenemos la forma normal del sistema en el punto de equilibrio  $S_1$ , es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-r_1 - \alpha)x_1 + \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2} \bar{a}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^3), \\ \dot{x}_2 &= \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2,3} \bar{b}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^4), \\ \dot{x}_3 &= -r_2 y + \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}}^{i+j+k=2} \bar{c}_{ijk} x_1^i x_2^j y^k + O(|x_1, x_2, y|^3), \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde

$$\widehat{b}_{020} = \frac{\alpha[r_1(r_2 - cm) - \kappa_1 r_2 a]}{r_2 a(r_1 + \alpha)}.$$

Notemos que hay dos parámetros libres,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , además el punto de equilibrio  $S_{12} = S_{01}$  tiene un valor propio cero y dos negativos, entonces es un punto de tipo semi hiperbólico de codimensión 2. Para mayores detalles ver la definición 1 del capítulo 1, así como el libro [?].

□

## 3.2. Bifurcación de Hopf

Seguindo la proposición 2, cuando los puntos de equilibrio  $S_1$  ó  $S_3$  existan, entonces el sistema (2.1) presentará una bifurcación de Hopf, además  $\text{tr}(J(S_i)) < 0$  y  $\det(J(S_i)) < 0$ , con  $i = 1, 3$ . Aquí vamos a considerar a  $\alpha$  como el parámetro de bifurcación.

Con el fin de facilitar los cálculos, seguiremos usando  $\overline{E}_2$  para denotar la coordenada  $E_2$  en los puntos de equilibrio  $S_1$  ó  $S_3$ . Como primer paso, consideremos el polinomio dado en (2.30),

$$\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0.$$

Para que la bifurcación de Hopf exista en los puntos de equilibrio  $S_1$  ó  $S_3$ , deben tener dos valores propios imaginarios puros. Luego el polinomio característico debe tener la siguiente factorización

$$(\lambda + A_2)(\lambda^2 + A_1) = 0, \quad (3.12)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  están dados en (2.31) y  $A_0 > 0$ . Ahora, si desarrollamos el (3.12) obtenemos

$$\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_2A_1 = 0,$$

es decir,

$$A_0 = A_1A_2, \quad \text{con } A_1 > 0.$$

Esta ecuación la podemos definir como la siguiente función en términos del parámetro  $\alpha$ ,

$$H(\alpha) = A_0 - A_1A_2 = h_2\alpha^2 + h_1\alpha + h_0, \quad (3.13)$$

donde:

$$h_2 = \frac{-2\kappa_1\overline{E}_2^2 + (-a\kappa_1 - \delta_1 + 2r_1)\overline{E}_2 + a(r_1 - r_2)}{a + \overline{E}_2},$$

$$h_1 = \frac{1}{(a + \overline{E}_2)^2} \left( -4\kappa_1^2\overline{E}_2^4 + ((6r_1 - 4\delta_1)\kappa_1 - 4a\kappa_1^2)\overline{E}_2^3 \right. \\ \left. - (a^2\kappa_1^2 + a\kappa_1(2cm - 5r_1 + 6r_2) + 2r_1(r_1 - \delta_1) + \delta^2)\overline{E}_2^2 \right. \\ \left. + ((r_1 - 2r_2)a^2\kappa_1 - a(2r_2\delta_1 - 2r_1r_2 + r_1^2))\overline{E}_2 - a^2r_2^2 \right),$$

$$h_0 = -\frac{\delta_1 \overline{E_2} + ar_2}{\kappa_2(a + \overline{E_2})^5} \left( 2\kappa_1 \overline{E_2}^2 + (a\kappa_1 + \delta_1 - r_1)\overline{E_2} + ar_2 \right) \\ \left( 2\kappa_1 \kappa_2 \overline{E_2}^4 + (5a\kappa_1 \kappa_2 - r_1 \kappa_2)\overline{E_2}^3 + 2a\kappa_2(2a\kappa_1 - r_1)\overline{E_2}^2 \right. \\ \left. + a(cm^2 - ar_1 + a^2 \kappa_1 \kappa_2)\overline{E_2} \right).$$

Ahora vamos a calcular los valores de  $\alpha$  para los cuales  $H(\alpha) = 0$ . Sea  $\Delta_h$  el discriminante de la formula general de grado 2 asociada a la función  $H(\alpha)$ , el cual tiene la siguiente forma

$$\Delta_h = h_1^2 - 4h_0h_2 \\ = \frac{1}{(a + \overline{E_2})^4} \left( 4\kappa_1^2 \overline{E_2}^4 + (4a\kappa_1^2 + 4\delta_1 \kappa_1 - 6r_1 \kappa_1)\overline{E_2}^3 \right. \\ \left. + (\delta_1^2 + 2a\kappa_1 \delta_1 - 2r_1 \delta_1 + (r_1 - a\kappa_1)^2 - a(3r_1 - 4r_2)\kappa_1 + r_1^2)\overline{E_2}^2 \right. \\ \left. + a(r_1^2 - 2r_1 r_2 + 2r_2 \delta_1 - ar_1 \kappa_1 + 2ar_2 \kappa_1)\overline{E_2} + a^2 r_2^2 \right) \\ - \frac{4\overline{E_2}(\delta_1 \overline{E_2} + ar_2)}{(a + \overline{E_2})^6 \kappa_2} \left( (2\kappa_1 \overline{E_2} + a\kappa_1 + \delta_1 - 2r_1)\overline{E_2} + a(r_2 - r_1) \right) \\ \left( (2\kappa_1 \overline{E_2} + a\kappa_1 + \delta_1 - r_1)\overline{E_2} + ar_2 \right) \left( (\overline{E_2} + a)^2 ((a + 2\overline{E_2})\kappa_1 - r_1)\kappa_2 + acm^2 \right).$$

Observemos que la ecuación  $H(\alpha) = 0$  tiene dos raíces reales y posible-mente positivas cuando  $\Delta_h > 0$ , cuya expresión son de la siguiente forma

$$\alpha^- = \frac{-h_1 - \sqrt{\Delta_h}}{2h_2}, \quad \alpha^+ = \frac{-h_1 + \sqrt{\Delta_h}}{2h_2}.$$

Por otro lado, en el caso  $\Delta_h = 0$  la ecuación  $H(\alpha) = 0$  tiene una raíz doble. Sea  $\alpha^*$  esta únicas solución,

$$\alpha^* = -\frac{h_1}{2h_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(a + \overline{E}_2)(\overline{E}_2\kappa_1(a + 2\overline{E}_2) + (\delta_1 - 2r_1)\overline{E}_2 + ar_2 - ar_1)} \\
&\quad \left( -4\kappa_1^2\overline{E}_2^4 - 2\kappa_1(2a\kappa_1 + \delta_1 - 3r_1)\overline{E}_2^3 \right. \\
&\quad - (a^2\kappa_1^2 + a(2cm - 5r_1 + 6r_2) + 2r_1(\delta_1 + r_1) + \delta_1^2)\overline{E}_2^2 \\
&\quad \left. + a(-r_1^2 + r_1(2r_2 + a\kappa_1) - 2r_2(a\kappa_1 + \delta_1))\overline{E}_2 - a^2r_2^2 \right).
\end{aligned}$$

Notemos que este es un caso degenerado, es decir, la bifurcación es una Hopf degenerada. Ahora, estamos en el caso de la bifurcación de Hopf, por lo que la traza es negativa, además tiene dos valores propios imaginarios puros y el tercer valor propio es negativo, por lo que  $A_1 > 0$  dada en (2.31), se cumple bajo las siguientes condiciones

$$r_1 > \frac{(a + E_2)(cmE_2 + (a + E_2)r_2)\alpha}{cmE_2^2 + (a + E_2)(a\alpha + E_2(r_2 + 2\alpha))},$$

$$0 < \kappa_1 < \frac{cmE_2[E_2(r_1 - \alpha) - a\alpha] + (a + E_2)[a(r_1 - r_2)\alpha - r_2\alpha E_2 + E_2r_1(r_2 + 2\alpha)]}{E_2(a + 2E_2)[cmE_2 + (a + E_2)(r_2 + \alpha)]},$$

obtenemos que para  $\kappa_2 > \widehat{\kappa}_2$ , cuando

$$\widehat{\kappa}_2 = \frac{-acm^2\overline{E}_2(\delta_1\overline{E}_2 + ar_2)}{(a + \overline{E}_2)^2(\widetilde{q}_3\overline{E}_2^3 + \widetilde{q}_2\overline{E}_2^2 + \widetilde{q}_1\overline{E}_2 + \widetilde{q}_0)},$$

$$\widetilde{q}_3 = 2\kappa_1(\delta_1 + \alpha^\pm),$$

$$\widetilde{q}_2 = a\kappa_1(cm + 3\alpha^\pm + 3r_2) - 2\alpha^\pm r_1 + \delta_1(\alpha^\pm - r_1),$$

$$\widetilde{q}_1 = a(a\kappa_1(r_2 + \alpha^\pm) + (cm - 3r_1 + 2r_2)\alpha^\pm - r_1r_2),$$

$$\widetilde{q}_0 = a^2\alpha^\pm(r_2 - r_1).$$

Lo siguiente es verificar la condición de transversalidad. Sean  $\widehat{\lambda}_1$ ,  $\widehat{\lambda}_2$  y  $\widehat{\lambda}_3$  los valores propios asociados a la ecuación (2.11), la cual tiene al menos un valor propio real negativo, sin pérdida de generalidad, tomamos  $\widehat{\lambda}_1 < 0$ . Recordemos que  $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_3 = -A_2$ , y como consecuencia  $\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_3 = -A_2 - \widehat{\lambda}_1$ . Ahora, si  $\widehat{\lambda}_2$  y  $\widehat{\lambda}_3$  son complejos conjugados, entonces  $2\gamma = \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_3$ , donde  $\gamma$  es la parte real de  $\widehat{\lambda}_2$  y  $\widehat{\lambda}_3$ , tal que satisfacen la ecuación (2.30).

$$\gamma = \frac{1}{2}(\text{tr}(J(\overline{E}_2)) - \widehat{\lambda}_1).$$

Ya que  $A_0 - A_1 A_2 = 0$  y  $A_1 > 0$ , entonces  $A_2 = \frac{A_0}{A_1}$ . Luego  $\text{tr}(J(\overline{E}_2)) = \frac{A_0}{A_2}$ , se sigue que

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{A_0}{A_1} - \tilde{\lambda}_1 \right),$$

donde

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{(ac\overline{E}_2 m^2 + (a + \overline{E}_2)^2 (a + 2\overline{E}_2) (-r_1 + \overline{E}_2 \kappa_1) \kappa_2) (\delta_1 \overline{E}_2 + ar_2) \alpha}{\overline{\rho}_5 \overline{E}_2^5 + \overline{\rho}_4 \overline{E}_2^4 + \overline{\rho}_3 \overline{E}_2^3 + \overline{\rho}_2 \overline{E}_2^2 + \overline{\rho}_1 \overline{E}_2 + \overline{\rho}_0}$$

con

$$\overline{\rho}_5 = 2(\delta_1 + \alpha) \kappa_1 \kappa_2,$$

$$\overline{\rho}_4 = a(5cm + 7r_2) \kappa_1 \kappa_2 - \alpha(2r_1 - 7a\kappa_1) \kappa_2 - \delta_1(r_1 - \alpha) \kappa_2,$$

$$\overline{\rho}_3 = a(9a(r_2 + \alpha) \kappa_1 + cm(-2r_1 + 3\alpha + 4a\kappa_1) - (7r_1 + 4r_2)\alpha - 3r_1 r_2) \kappa_2,$$

$$\overline{\rho}_2 = a(a^2(cm + 5r_2 + 5\alpha) \kappa_1 \kappa_2 + a(cmr_1 + 3r_1 r_2 - 3cm\alpha + 9r_1\alpha + 6r_2\alpha) \kappa_2 + c^2 m^2 + cm^2 r_2),$$

$$\overline{\rho}_1 = a^2(a^2(r_2 + \alpha) \kappa_1 \kappa_2) - a(r_1 r_2 - (cm - 5r_1 + 4r_2)\alpha) \kappa_2 + cm^2 r_2,$$

$$\overline{\rho}_0 = a^4(r_2 - r_1) \alpha \kappa_2.$$

Luego, el cálculo de la derivada de  $\gamma$  se traduce a derivar el cociente  $\frac{A_0}{A_1}$ , es decir,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\text{tr}(J(\overline{E}_2))) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{A_0}{A_1} \right).$$

Al evaluar en  $\alpha = \alpha^\pm$  tenemos

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^\pm} = \frac{\overline{E}_2 (\delta_1 \overline{E}_2 + r_2 a)^2 [\kappa_2 (a + \overline{E}_2)^2 (-r_1 + (a + 2\overline{E}_2) \kappa_1 + acm^2)] [(a + \overline{E}_2)^2 (a + 2\overline{E}_2) (-r_1 + \overline{E}_2 \kappa_1) \kappa_2 + acm^2 \overline{E}_2]}{[(\overline{q}_3 \overline{E}_2^3 + \overline{q}_2 \overline{E}_2^2 + \overline{q}_1 \overline{E}_2 + \overline{q}_0) (a + \overline{E}_2)^2 \kappa_2 + acm^2 (\delta_1 \overline{E}_2 + r_2 a) \overline{E}_2]^2}$$

$$\overline{q}_3 = 2(\alpha^\pm + \delta_1) \kappa_1,$$

$$\overline{q}_2 = (3a\kappa_1 + \delta_1) \alpha^\pm + a\kappa_1(3r_2 + cm) - r_1 \delta_1,$$

$$\overline{q}_1 = a(cm + r_1 + 2r_2 + a\kappa_1) \alpha^\pm + ar_2(-r_1 + a\kappa_1),$$

$$\overline{q}_0 = a^2(r_2 + r_1) \alpha^\pm.$$

Un cálculo algebraico nos indica que  $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^\pm} = 0$  si y sólo si

$$acm^2\bar{E}_2 + (a + \bar{E}_2)^2(a + 2\bar{E}_2)(-r_1 + \kappa_1\bar{E}_2)\kappa_2 = 0, \quad (3.14)$$

ó

$$acm^2 + (a + \bar{E}_2)^2(-r_1 + (a + 2\bar{E}_2)\kappa_1)\kappa_2 = 0. \quad (3.15)$$

Despejando  $\kappa$  de (3.14) obtenemos que

$$\kappa_2 = \frac{acm^2\bar{E}_2}{(a + \bar{E}_2)^2(a + 2\bar{E}_2)(r_1 - \kappa_1\bar{E}_2)},$$

esto es,  $\kappa_2 = \tilde{\kappa}_2$  cuando  $D(J(\bar{S})) = 0$  para  $\bar{S} = S_{12}$  ó  $\bar{S} = S_{23}$ . Así mismo, la ecuación (3.15) se cumple para

$$\kappa_2 = \frac{acm^2}{(a + \bar{E}_2)^2(r_1 - a\kappa_1 - 2\kappa_1\bar{E}_2)}. \quad (3.16)$$

Un cálculo directo muestra que el equilibrio  $\bar{S} = S_{123}$  existe si se cumplen las siguientes igualdades  $U(E_2) = 0$ ,  $\frac{dU}{dE_2} = 0$  y  $\frac{d^2U}{dE_2^2} = 0$  se cumplen simultáneamente, entonces

$$E_2^* = a \left( -1 + \frac{3cm}{\delta_1} \right), \quad \kappa_1 = \kappa_1^* = \frac{r_1\delta_1}{a\delta_2}, \quad \kappa_2 = \kappa_2^* = \frac{\delta_1^2\delta_2}{27ac^2mr_1}.$$

Ahora, después de sustituir  $\bar{E}_2 = E_2^*$  y  $\kappa_1 = \kappa_1^*$  en (3.16) obtenemos  $\kappa_2 = \kappa_2^*$ . Luego (3.16) esta asociado con el equilibrio  $\bar{S} = S_{123}$ . Por lo tanto,  $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^\pm} \neq 0$  y la condición de transversalidad se satisface. Entonces, en el sistema (2.1) existe una bifurcación de Hopf cuando  $\alpha^\pm$ .

Estos resultados demuestran el siguiente teorema, el cual describe las condiciones necesarias para que se produzca una bifurcación de Hopf.

**Proposición 3.** *Para el sistema (2.1), si  $\kappa_2 > \hat{\kappa}_2$ , el punto de equilibrio de coexistencia  $S_1$  ó  $S_3$ , cuando existe, entonces*

1. *si  $\alpha = \alpha^-$  ó  $\alpha = \alpha^+$ , entonces el sistema experimenta una bifurcación de Hopf;*

2. si  $\alpha = \alpha^*$ , entonces el sistema experimenta una bifurcación de Hopf degenerada.

**Remark 2.** En el artículo [?] erróneamente consideraron  $\kappa_2 < \widehat{\kappa}_2$ , pues al parecer confundieron y consideraron  $\text{tr}(J(\bar{S})) = A_2$  y no  $\text{tr}(J(\bar{S})) = -A_2$ , así como  $A_0 = -\det(J(\bar{S}))$  en lugar de  $A_0 = \det(J(\bar{S}))$

# Capítulo 4

## Estudio numérico de diagramas de bifurcación

Este capítulo está dedicado al estudio numérico de bifurcaciones para ilustrar los resultados teóricos realizados en los capítulos 2 y 3. Para llevar a cabo el estudio utilizaremos *MatCont* el cual es un software de *Matlab* para el estudio numérico de continuación y bifurcación de puntos de equilibrio. Particularmente mostrando algunos ejemplos de bifurcaciones que presentan los puntos de equilibrio de coexistencia del sistema (2.5), para los valores fijos de los parámetros.

Primero listamos algunas las abreviaciones para las bifurcaciones en la salida del programa *MatCont*.

Abreviación	Nombre	Propiedades
<i>CP</i>	Cúspide	$\lambda_1 = 0, a = 0$
<i>GH</i>	Bautin	$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \ell_1 = 0$
<i>BT</i>	Bogdanov-Takens	$\lambda_{1,2} = 0$
<i>ZH</i>	Cero Hopf	$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \omega > 0$

Tabla 4.1: Notación y caracterización de las diferentes bifurcaciones de codimensión 2.

En la tabla 4.2 resumimos las condiciones que se deben cumplir en el sistema (2.5) para la existencia de las diferentes bifurcaciones, así como las

codimensiones de cada una.

Resumen de los diferentes tipos de bifurcaciones en el sistema		
Condiciones	Tipo de bifurcación	codimensión
Punto de equilibrio libre de plagas $S_{01}(0, 0, \frac{r_2}{\kappa_2})$		
$\kappa_2 = \frac{r_2 m}{r_1 a}$	silla-nodo	1
$\kappa_2 = \frac{r_2 m}{r_1 a}, \kappa_1 = \frac{r_1(r_2 - cm)}{r_2 a} (r_2 > cm)$	silla-nodo	2
Puntos de coexistencia $\bar{S}(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{M})$		
$U(\bar{E}_2) = 0, k_2 - k_1 = \bar{k}, \text{tr}(J(\bar{S})) \neq 0$	silla-nodo	1
$U(\bar{E}_2) = 0, k_2 - k_1 = \bar{k}, U''(\bar{E}_2) = 0, \text{tr}(J(\bar{S})) \neq 0$	silla-nodo	2
$U(\bar{E}_2) = 0, \text{tr}(J(\bar{S})) \neq 0, \det(J(\bar{S})) \neq 0$	Hopf	$\geq 1$

Tabla 4.2: Resumen de los diferentes tipos de bifurcaciones.

Con el fin de hacer los cálculos menos tediosos, en las simulaciones numéricas consideraremos  $a = 1, c = 1, m = 1$ . Biológicamente esto significa que el número de individuos adultos de los saltamontes que se desaparecen por ser atacados por ácaros es igual a  $\frac{E_2 M}{1 + E_2}$ .

Sean  $r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57, \kappa_1 = 23.15, \kappa_2 = 0.026671$ . Con estos valores de los parámetros los puntos de equilibrio del sistema (2.5) son

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (0.630679, 0.542069, 73.1729), \\
 p_2 &= (0.0341976, 0.0293928, 61.0631), \\
 p_3 &= (0.0236545, 0.0203311, 60.7396), \\
 p_4 &= (0, 0, 59.9925), \\
 p_5 &= (3.01547, 2.59179, 0), \\
 p_6 &= (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Sin embargo, para el estudio de las bifurcaciones elegiremos sólo los puntos de coexistencia  $p_1, p_2$  y  $p_3$ .

En primer lugar elegimos al punto  $p_1$  y lo continuamos numéricamente, el diagrama de bifurcación obtenido lo mostramos en el plano  $(\kappa_1, M)$ , ver

la figura 4.1. Hacemos notar que hemos elegido ese plano porque es donde hemos podido visualizar los resultados numéricos.

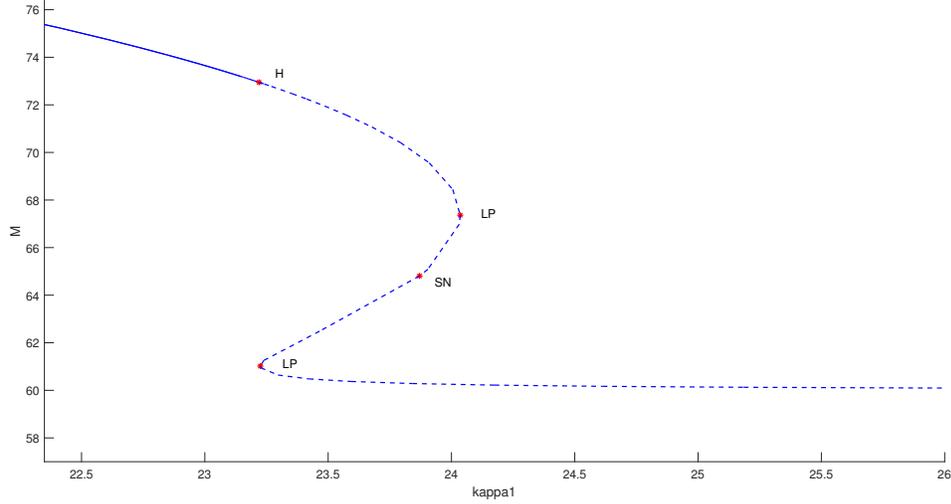


Figura 4.1: Diagrama fase de los puntos de coexistencia con parámetros  $a = 1, c = 1, m = 1, r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57, \kappa_2 = 0.026671$  y  $\kappa_1$  libre. En la figura se muestra que las línea continua representa estabilidad y la línea punteada inestabilidad.

Notemos que en la continuación del punto  $p_1$  obtenemos que hay valores de  $\kappa_1$  para los cuales el punto de equilibrio es: Hopf (H), punto límite de bifurcación (LP) y silla-nodo (SN). Los valores de los parámetros y coordenadas del punto de equilibrio los hemos desplegado en las tablas 4.3.

Además, se tiene que  $\hat{\kappa}_2 = 0.0000801963 < \kappa_2 = 0.026671$ , por lo que se cumple la hipótesis del Teorema 3. Con ayuda del software *MatCont* obtuvimos el primer coeficiente de Lyapunov, que corresponde a  $\ell_1 = 0.02036690 > 0$ , ya que el coeficiente sea positivo y por el Teorema 5 concluimos que la bifurcación de Hopf (H) es de tipo subcrítica, es decir, el ciclo límite que surge cerca del punto de equilibrio es inestable.

Notemos que no importa qué punto se elija para el análisis, pues en cualquier punto obtendremos el mismo resultado. Como siguiente paso es llevar a cabo la continuación del primer punto límite de bifurcación (LP) el

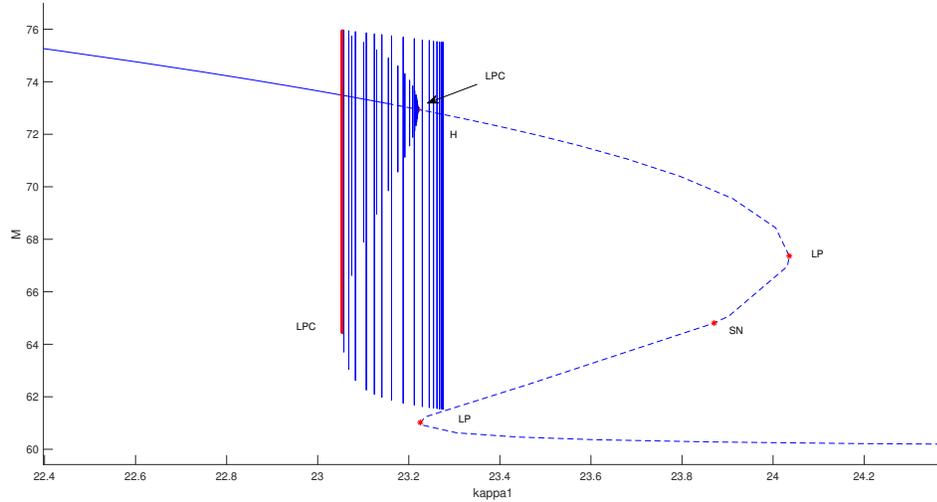


Figura 4.2: Diagrama fase de los ciclos originados por el punto de Hopf, con coordenadas  $E_1 = 0.614426554662767$ ,  $E_2 = 0.528099623732648$ ,  $M = 72.9478611523887$ , con parámetro  $\kappa_1 = 23.2197961461739$  y  $\ell_1 = 0.02036690$

cual tiene coordenadas  $E_1 = 0.284780227879295$ ,  $E_2 = 0.244768605862254$ ,  $M = 67.362972393605$ ,  $\kappa_1 = 24.0355038650836$ . Para realizar ésta continuación se dejan libres dos parámetros  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , ver la figura 4.4.

La información de los puntos de bifurcación están dados en la siguiente tabla 4.4.

En el plano se puede observar un punto cúspide (CP), ver la figura 4.4, la interpretación cualitativa de este punto no tiene sentido, pues las coordenadas  $E_1$  y  $E_2$  son negativas. Sin embargo, numéricamente es relevante, pues un punto de bifurcación Bogdanov-Takens se generan punto cúspide, Hopf (ciclos límite) y silla-nodo.

Ahora realizamos la continuación en el punto silla-nodo (SN). Observemos que al variar los parámetros  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  se obtienen los siguientes puntos de bifurcación; Bogdanov-Takens (BT) y Hopf Generalizada (GH), ambas de codimensión 2, ver la figura 4.5. Los datos de estos puntos están desplegados en la tabla 4.5.

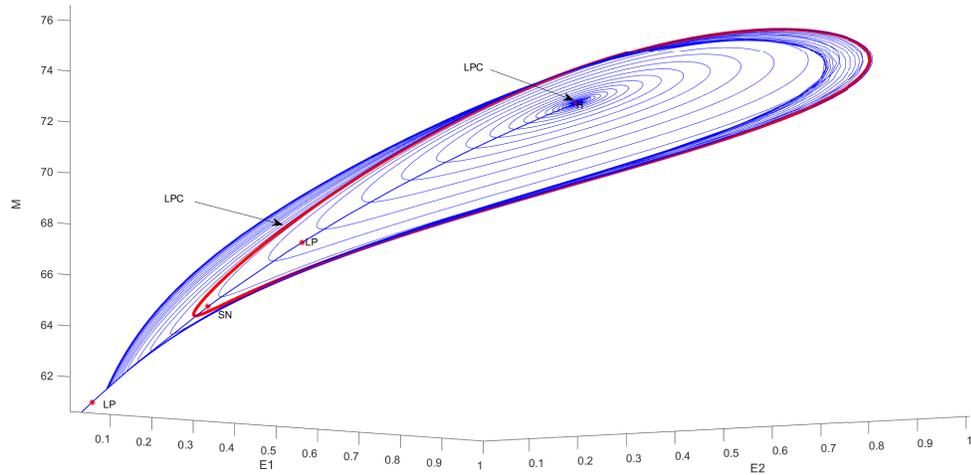


Figura 4.3:  $(E_1, E_2, M)$ - plano fase del punto de Hopf cuyas coordenadas son  $E_1 = 0.614426554662767$ ,  $E_2 = 0.528099623732648$   $M = 72.9478611523887$ . Se muestran los ciclos límites inestables (LPC) de la bifurcación de Hopf.

El primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1$  se hace cero, por lo que se tiene una bifurcación de Hopf degenerada. Con apoyo de *MatCont* obtenemos que el segundo coeficiente de Lyapunov es  $\ell_2 = -0.001914430$ , entonces este punto es una bifurcación de Bautin o bien Hopf generalizada (GH).

Para visualizar los ciclos límite debemos dejar libre a dos parámetros,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ . La bifurcación la ilustramos en las siguientes figuras 4.6 y 4.7 donde los LPC representan el colapso de los ciclos límite estables e inestables.

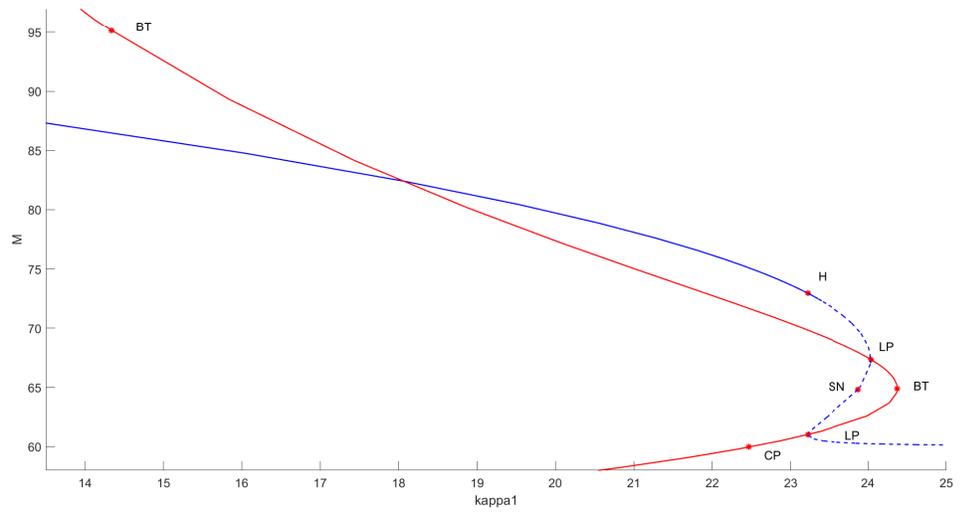


Figura 4.4: Diagrama fase de la continuación del punto límite de bifurcación (fold) (LP) con coordenadas  $E_1 = 0.284780227879295$ ,  $E_2 = 0.244768605862254$  y  $M = 67.362972393605$  con parámetros  $a = 1, c = 1, m = 1, r_1 = 60, r_2 = 1.6, \alpha = 51.57, \kappa_2 = 0.026671$

Hopf (H)	
Coordenadas	
$E_1$	0.614426554662767
$E_2$	0.528099623732648
$M$	72.9478611523887
Parámetro	
$\kappa_1$	23.2197961461739
Valores propios	
$\lambda_1$	-109.28094024998
$\lambda_2$	1.09824705073231 <i>i</i>
$\lambda_3$	-1.09824705073231 <i>i</i>
$\ell_1$	0.02036690

Punto límite (LP)	
Coordenadas	
$E_1$	0.284780227879295
$E_2$	0.244768605862254
$M$	67.362972393605
Parámetro	
$\kappa_1$	24.0355038650836
Valores propios	
$\lambda_1$	-109.020512050922
$\lambda_2$	0
$\lambda_3$	0.421

Silla-Nodo (SN)	
Coordenadas	
$E_1$	0.171556
$E_2$	0.147452
$M$	64.808363
Parámetro	
$\kappa_1$	23.870555
Valores propios	
$\lambda_1$	-109.02051205
$\lambda_2$	-0.2531784
$\lambda_3$	0.2531784

Punto límite (LP)	
Coordenadas	
$E_1$	0.032836
$E_2$	0.028223
$M$	61.019395
Parámetro	
$\kappa_1$	23.225161
Valores propios	
$\lambda_1$	-111.0409
$\lambda_2$	-1.1831
$\lambda_3$	0

Tabla 4.3: Los valores de los parámetros y coordenadas del punto de equilibrio de diversos puntos de bifurcación de la figura 4.1.

Bogdanov-Takens(BT)		Bogdanov-Takens(BT)		Cúspide (CP)	
Coordenadas		Coordenadas		Coordenadas	
$E_1$	1.516355	$E_1$	0.178996	$E_1$	-0.000767
$E_2$	1.303307	$E_2$	0.153847	$E_2$	-0.000660
$M$	95.150806	$M$	64.903875	$M$	59.971703
Parámetros		Parámetros		Parámetros	
$\kappa_1$	14.340046	$\kappa_1$	24.375000	$\kappa_1$	22.469134
$\kappa_2$	0.022762	$\kappa_2$	0.026706	$\kappa_2$	0.026667
Valores propios		Valores propios		Valores propios	
$\lambda_1$	-109.0501145	$\lambda_1$	-109.55332	$\lambda_1$	-111.5816256
$\lambda_2$	0	$\lambda_2$	0	$\lambda_2$	-1.610453
$\lambda_3$	0	$\lambda_3$	0	$\lambda_3$	0.0016199

Tabla 4.4: Datos de los continuación del primer punto límite (LP).

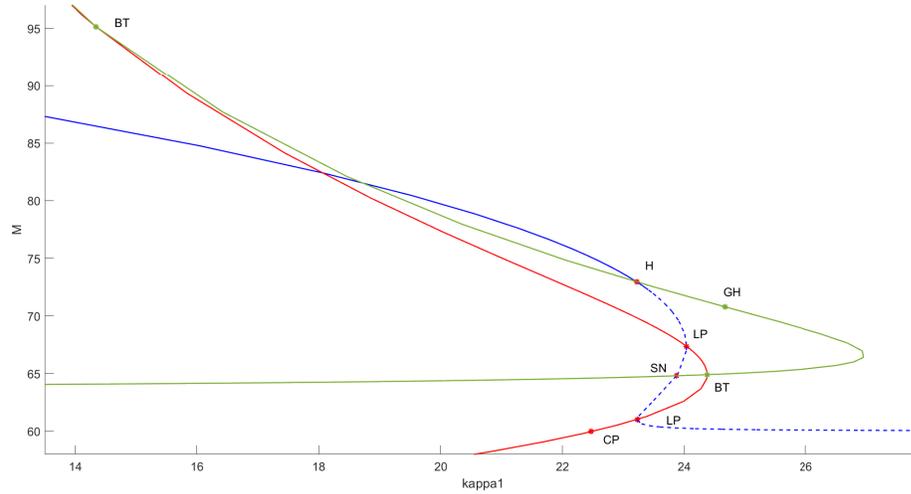


Figura 4.5: Diagrama de la continuación del punto silla-nodo (SN) cuyas coordenadas son  $E_1 = 0.171556$ ,  $E_2 = 0.147452$ ,  $M = 64.808363$  y parámetros  $r_1 = 60$ ,  $r_2 = 1.6$ ,  $\alpha = 51.57$  mientras que  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son libres. Se observan puntos de bifurcación Bogdanov-Takens (BT) y Hopf Generalizada (GH)

Bogdanov-Takens (BT)		Hopf Generalizada (GH)	
Coordenadas		Coordenadas	
$E_1$	-0.000767	$E_1$	0.513868
$E_2$	-0.000660	$E_2$	0.441669
$M$	59.971703	$M$	70.794719
Parámetro		Parámetro	
$\kappa_1$	22.469134	$\kappa_1$	24.665343
$\kappa_2$	0.026667	$\kappa_2$	0.026928
Valores propios		Valores propios	
$\lambda_1$	-111.5816256	$\lambda_1$	-109.326162726243
$\lambda_2$	-1.610453	$\lambda_2$	1.0910208605339 <i>i</i>
$\lambda_3$	0.016199	$\lambda_3$	-1.0910208605339 <i>i</i>
		$\ell_2$	-0.001914430

Tabla 4.5: Datos de la continuación del punto de bifurcación silla-nodo, ver figura 4.5.

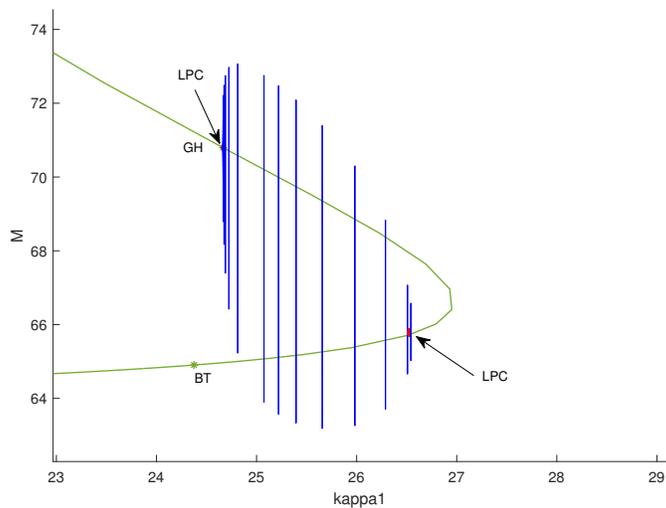


Figura 4.6: Retrato fase de los ciclos de la bifurcación de Bautin  $E_1 = 0.513868$ ,  $E_2 = 0.441669$ ,  $M = 70.794719$ , y parámetros  $\kappa_1 = 24.665343$ ,  $\kappa_2 = 0.026928$  y  $\ell_2 = -0.00191430$ . También se muestra el ciclo límite, el cual es el punto límite (LPC).

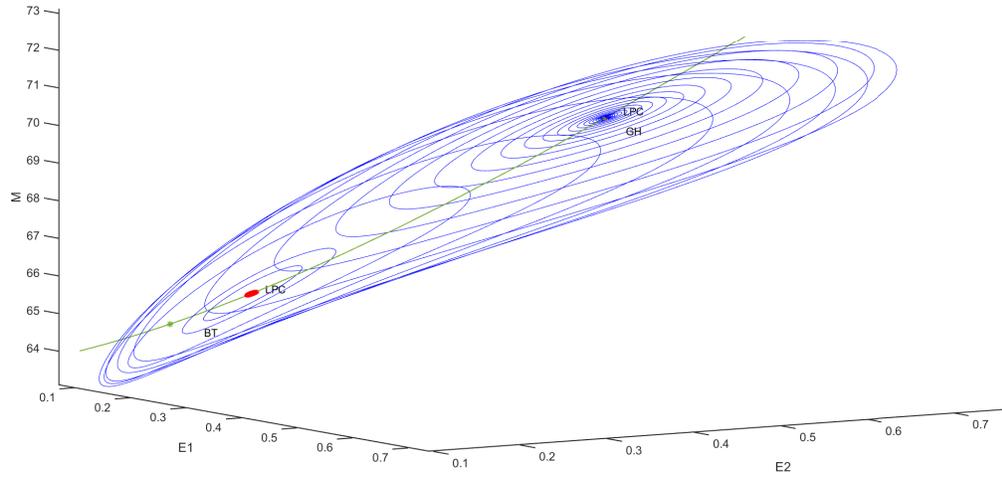


Figura 4.7: Espacio fase de los ciclos originados por la bifurcación de Bautin (GH) cuyas coordenadas son  $E_1 = 0.513868$ ,  $E_2 = 0.441669$ ,  $M = 70.794719$  y parámetros  $\kappa_1 = 24.665343$ ,  $\kappa_2 = 0.026928$  y  $\ell_2 = -0.00191430$

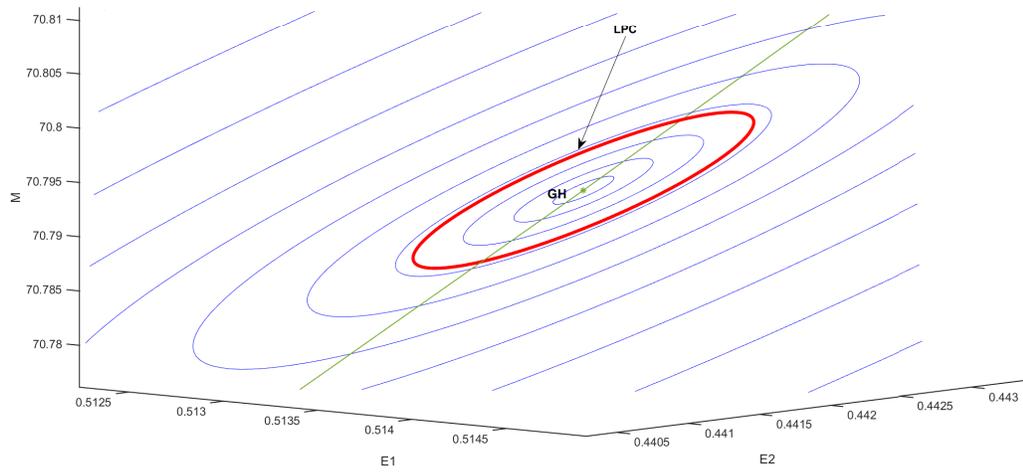


Figura 4.8: Amplificación del LPC en el punto GH de la figura 4.7.

## Capítulo 5

# Cálculo del primer coeficiente de Lyapunov para los puntos de Hopf obtenidos con MatCont

En esta sección vamos a llevar a cabo el cálculo de  $\ell_1$  de los puntos de Lyapunov obtenidos en los diagramas de bifurcación en las figuras 4.1 y 4.6. El proceso de cálculo lo haremos siguiendo el planteamiento dado en el libro de Kuznetsov [?].

### 5.1. $\ell_1$ para el punto de Hopf mostrado en la figura 4.1

Consideremos el sistema (2.5) con los parámetros  $r_1 = 60$ ,  $r_2 = 1.6$ ,  $\kappa_1 = 23.2197961461739$ ,  $\kappa_2 = 0.026671$  y  $\alpha$  libre, pues es el parámetro de

bifurcación. Luego tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= 60E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha E_1 - 23.2198E_2^2 - \frac{E_2 M}{1 + E_2}, \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{E_2 M}{1 + E_2} + \frac{8}{5}M - 0.026671M^2.\end{aligned}$$

Ahora, con la ayuda de *Mathematica* encontramos el punto de equilibrio de coexistencia, y obtenemos que las coordenadas son:

$$E_1 = \frac{31.68597742395891}{\alpha}, \quad E_2 = 0.5280996237326485, \quad M = 72.94786115238868.$$

Luego trasladamos el origen de coordenadas a este punto de equilibrio, de tal forma que la matriz jacobiana asociada al nuevo sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 60 & 0 \\ \alpha & -55.7646 & -0.345592 \\ 0 & 31.2399 & -1.94559 \end{pmatrix} - \quad (5.1)$$

Además, el polinomio característico asociado es

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \lambda^3 + (57.71019414394609 + \alpha)\lambda^2 + (119.29144757976023 \\ &\quad - 2.289805856053907\alpha)\lambda + 2.5559032920387246\alpha.\end{aligned} \quad (5.2)$$

Ya que el punto de equilibrio es tipo Hopf, entonces satisface la ecuación (3.13) y obtenemos

$$\begin{aligned}2.5559032920387246 \alpha &= \\ (119.29144757976023 - 2.289805856053907\alpha)(57.71019414394609 + \alpha),\end{aligned}$$

cuya solución es  $\alpha = 51.5712$ . Los valores propios asociados a (5.2) son

$$\lambda_1 = -109.28, \quad \lambda_2 = 1.09825i, \quad \lambda_3 = -1.09825.$$

Ahora, vamos a calcular los vectores propios, para lo cual debemos considerar que se debe cumplir  $Aq = i\omega q$  y  $A\bar{q} = -i\omega\bar{q}$ . Notemos que la segunda igualdad es equivalente a calcular  $A^t p = -i\omega p$  y  $A^t \bar{p} = i\omega \bar{p}$ .

Para los valores que estamos considerando la frecuencia es  $\omega = 1.0982470818879984$ , entonces

$$q = \left( 0.0732975462990058 + 0.03934107194069i, \right. \\ \left. 0.062279144318043225 + 0.035155301974447585i, 1 \right),$$

$$p = (-5.694825237686602 + 3.056589758837869i, \\ -5.629731376612385 + 3.177868108931161i, 1),$$

donde  $\langle p, q \rangle = 0$ , luego son vectores ortogonales.

Ahora, tomamos el conjugado de  $p$ ,

$$\bar{p} = (-5.694825237686602 - 3.056589758837869i, \\ -5.629731376612385 - 3.177868108931161i, 1),$$

y el vector  $q$  normalizado es

$$q_n = (0.000868078 + 0.0863774i, -0.000834949 + 0.0742573i, 0.500243 + 0.909953i),$$

pero lo seguiremos denotando por  $q$ . Luego, tenemos que

$$\langle \bar{p}, q \rangle = 1,$$

es decir,  $\bar{p}$  y  $q$  son vectores ortonormales. Además ambos cumplen las condiciones (1.24), es decir,

$$Aq = i\omega q \\ = (-0.0948637 + 0.000953364i, -0.0815528 - 0.00091698i, -0.999353 + 0.54939i), \\ A\bar{q} = -i\omega\bar{q} \\ = (-0.0948637 - 0.000953364i, -0.0815528 + 0.00091698i, -0.999353 - 0.54939i), \\ A^T\bar{p} = i\omega\bar{p} \\ = (3.35689 - 6.25433i, 3.49008 - 6.18284i, 0. + 1.09825i).$$

Ahora estamos en posibilidad de calcular la forma bilineal y trilineal (1.22) y (1.23),

$$B(\epsilon, \delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5.55238\epsilon_2\delta_2 - 0.428249(\epsilon_3\delta_2 + \epsilon_2\delta_3) \\ -40.8872\epsilon_2\delta_2 - 0.053342\epsilon_3\delta_3 + 0.428249(\epsilon_3\delta_2 + \epsilon_2\delta_3) \end{pmatrix},$$

$$C(\gamma, \zeta, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -80.2707\zeta_2\gamma_2\eta_2 + 0.560499(\zeta_3\gamma_2\eta_2 + \zeta_2\gamma_3\eta_2 + \zeta_2\gamma_2\eta_3) \\ 80.2707\zeta_2\gamma_2\eta_2 - 0.560499(\zeta_3\gamma_2\eta_2 + \zeta_2\gamma_3\eta_2 + \zeta_2\gamma_2\eta_3) \end{pmatrix}.$$

Con el fin de calcular  $\ell_1$  mediante la fórmula (1.25) (ver [?], página 197), definimos las siguientes expresiones auxiliares:

$$(2i\omega I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -0.295803 - 0.314622i & -0.301793 - 0.327221i & 0.0524176 - 0.00105358i \\ -0.259391 - 0.281247i & -0.247412 - 0.292295i & 0.0450915 + 0.00101337i \\ -4.07257 + 0.0818572i & -4.07605 - 0.0916035i & 0.552362 - 0.6073236i \end{pmatrix},$$

$$B(q, q) = (0, 0.0888446 - 0.0304768i, 0.198017 - 0.0123268i),$$

$$B(q, \bar{q}) = (0, -0.0881368, -0.225486),$$

$$A^{-1}B(q, \bar{q}) = (0.0425856, 0.0366023, 0.70361),$$

$$C(q, q, \bar{q}) = (0, 0.00185304 - 0.0244695i, -0.00185304 + 0.0244695i),$$

$$B\langle \bar{q}, (2i\omega I_3 - A)^{-1}B(q, q) \rangle = (0, 0.0199196 - 0.0220339i, 0.0515561 - 0.0668563i),$$

$$B\langle q, A^{-1}B(q, \bar{q}) \rangle = (0, -0.00741999 - 0.0517299i, -0.00993586 - 0.108645i),$$

donde  $I_3$  es la matriz identidad  $3 \times 3$ .

Finalmente el primer coeficiente es

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left\langle (-5.69483 - 3.05659i, -5.62973 - 3.17787i, 1), \right. \\ &\quad (0, 0.00185304 - 0.0244695i, -0.00185304 + 0.0244695i) \\ &\quad - 2(0, -0.00741999 - 0.0517299i, -0.00993586 - 0.108645i) \\ &\quad \left. + (0, 0.0199196 - 0.0220339i, 0.0515561 - 0.0668563i) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}(0.0444554 - 0.262097i) \\ &\approx 0.02023924438087691 \end{aligned}$$

Notamos que  $\ell_1 \approx 0.020239244380876910$  coincide con el obtenido por Mat-Cont. Por otro lado tenemos que  $\ell_1 > 0$ , luego el teorema 5 nos permite concluir que la bifurcación de Hopf (H) es de tipo subcrítica.

## 5.2. $\ell_1$ para el punto de Hopf mostrado en la figura 4.6

Usando un proceso similar al de la sección anterior, vamos a calcular  $\ell_1$  para el punto de bifurcación Hopf generalizado o Bautin (GH), considerando los valores de los parámetros  $r_1 = 60$ ,  $r_2 = 1.6$ ,  $\kappa_1 = 24.665343$ ,  $\kappa_2 = 0.026928$  y dejando  $\alpha$  libre, pues es el parámetro de bifurcación.

Con estos valores el sistema (2.5) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= 60E_2 - \alpha E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha E_1 - \frac{E_2 M}{E_2 + 1} - 24.6653E_2^2, \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{E_2 M}{E_2 + 1} + \frac{8}{5}M - 0.026928M^2.\end{aligned}$$

El programa *Mathematica* lo usamos para encontrar el punto de equilibrio de coexistencia, y obtenemos que las coordenadas son:

$$E_1 = \frac{26.50046796593474}{\alpha}, \quad E_2 = 0.4416744660989123, \quad M = 70.79479107587791.$$

Al igual que en el caso anterior, trasladamos el origen de coordenadas a este punto de equilibrio. Luego la matriz jacobina asociada al nuevo sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 60 & 0 \\ \alpha & -55.8498 & -0.306362 \\ 0 & 34.0617 & -1.90636 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

y la ecuación característica asociada es

$$-\lambda^3 - (57.7562 + \alpha)\lambda^2 + (-116.905 + 2.24379\alpha)\lambda - 2.52354\alpha = 0. \quad (5.4)$$

Este punto satisface la siguiente ecuación (3.13) cuando

$$2.5235385718128294\alpha = (116.90526661728725 - 2.243788629612523\alpha)(57.756211370387476 + \alpha).$$

Al resolver obtenemos que el valor de  $\alpha = 51.5712$  y los valores propios son

$$\lambda_1 = -109.327, \quad \lambda_2 = 1.09105i, \quad \lambda_3 = -1.09105i.$$

Los vectores propios los obtenemos de las relaciones  $Aq = i\omega q$  y  $A\bar{q} = -i\omega\bar{q}$ , y para el segundo  $A^T p = -i\omega p$  y  $A^T \bar{p} = i\omega\bar{p}$ , de tal forma que la frecuencia es  $\omega = 1.0910485264119107$ .

En este caso

$$q = \left( 0.06587415414227442 + 0.03587307517131684i, \right. \\ \left. 0.05596783556827626 + 0.03203149256441818i, 1 \right),$$

$$p = \left( -6.295103455128673 + 3.428123251029728i, \right. \\ \left. -6.222577538004387 + 3.5613034543197695i, 1 \right),$$

donde  $\langle p, q \rangle = 0$ , luego son vectores ortogonales. El vector  $q$  normalizado a considerar es

$$q_n = (0.000868078 + 0.0863774i, -0.000834949 + 0.0742573i, 0.500243 + 0.909953i),$$

e igual que antes lo seguiremos denotando por  $q$ . Notemos que estos vectores satisfacen la propiedad de ortogonalización  $\langle \bar{p}, q \rangle = 1$ .

Ahora estamos en posibilidad de aplicar la fórmula (1.25), y obtenemos

$$\ell_1 = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}(0.0444535 - 0.262095i) \\ \approx 0.000000583006$$

Notemos que  $\ell_1$  no es idéaticamente cero, pero es del orden de  $10^{-7}$ , lo cual numéricamente es aceptable y coincide con el resultado obtenido de MatCont.

# Conclusiones

Si una plaga está generando graves daños al ecosistema o plantaciones en una región y si ésta es inevitable, entonces se deben planear políticas de regulación que minimice el daño del ecosistema.

El control biológico de plagas agrícolas consiste en reducir las poblaciones plaga por medio del uso de enemigos naturales, los cuales pueden ser otros insectos benéficos como depredadores. En el caso de los saltamontes del té verde se usa a los ácaros como de depredadores, los cuales ayudan al control biológico para reducir a la plaga a niveles que no causen daños económicos y ecológicos.

Esta tesis está centrada en el estudio del modelo depredador-presa descrito por tres ecuaciones diferenciales del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (2.1), donde se considera dos etapas de crecimiento de los saltamontes del té verde y la población de ácaros, los cuales son el agente de control biológico de la plaga de saltamontes.

En este trabajo nos hemos enfocado en el estudio de la existencia los puntos de equilibrio de coexistencia de las dos poblaciones y sus bifurcaciones, así como su estabilidad lineal. Particular atención hemos puesto en las bifurcaciones de Hopf, las cuales son de interés en los modelos biológicos. Utilizamos métodos numéricos para mostrar que el modelo (2.1) posee puntos de equilibrio estables e inestables, así como ciclos límite que bifurcan de puntos de Hopf.

Los ciclos límite estables son de interés en ecología, pues dan garantía de la existencia de la oscilaciones periódicas de las poblaciones. Las simulaciones numéricas llevadas a cabo con el programa MatCont solo hemos podido identificar, bajo ciertas condiciones en los parámetros, la existencia de ciclos

límite inestables envolviendo a un punto de equilibrio estable. Además, localizamos la presencia de un punto de Hopf generalizado (GH, punto de Hopf donde el primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1 = 0$ ), el cual influye profundamente en el comportamiento cualitativo del sistema dinámico generado por las ecuaciones diferenciales (2.1).

Un posible trabajo en un futuro muy próximo es localizar numéricamente ciclos límite estables que bifurquen de puntos de Hopf.

# Apéndice A

## Demostración de $A_2 > 0$

Sea

$$\begin{aligned} A_2 &= -\alpha - \kappa_2 \overline{M} + P(\overline{E}_2)U_1'(\overline{E}_2), \\ &= \frac{cm\overline{E}_2 + a(r_2 + \alpha) + 2\kappa_1\overline{E}_2 + \overline{E}_2(a\kappa_1 - r_1 + r_2 + \alpha)}{a + \overline{E}_2}. \end{aligned}$$

Notemos que  $A_2$  está bien definida para valores de  $\overline{E}_2 \neq -a$ . Vamos a tomar el caso cuando  $\overline{E}_2 > 0$ .

Vamos a ver cómo es la gráfica de  $A_2$ . Iniciemos por ver que el numerador de  $A_2$  en  $\overline{E}_2 = -a$  es

$$a(-cm + r_1 + a\kappa_1).$$

Luego, calculamos

$$\lim_{\overline{E}_2 \rightarrow -a^+} A_2 = a(-cm + r_1 + a\kappa_1)$$

donde  $-cm + r_1 + a\kappa_1 > 0$  y  $\overline{E}_2 > 0$  para valores cercanos a la derecha de  $-a$ , con lo que el  $\lim_{\overline{E}_2 \rightarrow -a^+} A_2 = \infty$ .

Por otro lado, si evaluamos  $A_2$  en  $\overline{E}_2 = 0$  obtenemos  $r_2 + \alpha > 0$ , pues los

parámetros son positivos. Si calculamos las raíces de  $A_2 = 0$  para  $\overline{E}_2$  tenemos

$$\begin{aligned}\overline{E}_2 &= -\frac{1}{4\kappa_1} \left( \eta + \sqrt{-8a(r_2 + \alpha)\kappa_1 + \eta^2} \right), \\ \overline{E}_2 &= -\frac{1}{4\kappa_1} \left( \eta - \sqrt{-8a(r_2 + \alpha)\kappa_1 + \eta^2} \right),\end{aligned}$$

donde  $\eta = cm - r_1 + r_2 + \alpha + a\kappa_1$  y todos los parámetros son positivos, en particular  $-cm + r_1 + a\kappa_1 > 0$ , o bien  $a\kappa_1 > a\kappa_1 - cm > -r_1$ , además  $-8a(r_2 + \alpha)\kappa_1 < 0$ , luego

$$\sqrt{-8a(r_2 + \alpha)\kappa_1 + (cm - r_1 + r_2 + \alpha + a\kappa_1)^2} < |cm - r_1 + r_2 + \alpha + a\kappa_1|,$$

Ya que  $a\kappa_1 > -r_1$  se sigue que  $cm - r_1 + r_2 + \alpha + a\kappa_1 < 0$ , entonces las dos raíces de  $A_2$  son negativas. En seguida calculamos la primera derivada de  $A_2$  respecto de  $\overline{E}_2$  con la finalidad de encontrar los puntos críticos, si los hay.

$$\frac{dA_2}{d\overline{E}_2} = \frac{2\kappa_1\overline{E}_2^2 + 4a\kappa_1\overline{E}_2 + a(a\kappa_1 + cm - r_1)}{(a + \overline{E}_2)^2}.$$

Observamos que el denominador no se anula, entonces encontrar los puntos críticos se reduce a solucionar una ecuación de segundo grado para  $\overline{E}_2$ . Luego los puntos críticos son

$$E_2 = -\frac{2a\kappa_1 + \sqrt{2a\kappa_1(-cm + r_1 + a\kappa_1)}}{2\kappa_1}, \quad (\text{A.1})$$

$$E_2 = \frac{-2a\kappa_1 + \sqrt{2a\kappa_1(-cm + r_1 + a\kappa_1)}}{2\kappa_1}. \quad (\text{A.2})$$

Notemos que [A.1](#) es negativo, mientras que el signo del segundo punto crítico no está bien definido. Con el fin de determinar el signo de [A.2](#), analizamos la derivada  $\frac{dA_2}{d\overline{E}_2}$  en  $E_2 = 0$ , y obtenemos

$$\left. \frac{dA_2}{d\overline{E}_2} \right|_{E_2=0} = \frac{cm - r_1 + a\kappa_1}{a}.$$

Observemos que  $-cm + r_1 + a\kappa_1$ , de donde  $-cm + r_1 > -a\kappa_1$ . Si multiplicamos por  $-1$  obtenemos  $cm - r_1 < a\kappa_1$ . Ya que  $\kappa_1 > 0$  concluimos que  $cm - r_1 + a\kappa_1 > 0$ . Luego la primera derivada en  $\overline{E}_2$  es positiva. Entonces el punto crítico [A.2](#) es positivo.

Con el fin de obtener más información sobre calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2 A_2}{d\bar{E}_2^2} = \frac{d}{d\bar{E}_2} \frac{2a(-cm + r_1 + a\kappa_1)}{(a + \bar{E}_2)^3},$$

observamos que la segunda derivada siempre es positiva para valores  $\bar{E}_2 > -a$ , por lo tanto no hay puntos de inflexión. Ahora, para determinar si el punto crítico (A.2) es máximo o mínimo lo evaluamos en la segunda derivada, y obtenemos

$$\frac{d^2 A_2}{d\bar{E}_2^2}(\bar{E}_2) = \frac{4\sqrt{2}\kappa_1^2}{\sqrt{a\kappa_1(-cm + r_1 + a\kappa_1)}}$$

es positivo por lo tanto es un punto mínimo. Bajo todo esto análisis se puede concluir que  $A_2 > 0$

# Apéndice B

## Forma normal

### B.1. Forma normal del sistema (3.7)

Desarrollo en series del sistema (3.7) de grado 1 y 2 Desarrollo de los coeficientes de la forma normal del sistema (3.7). Sea  $\Pi = \tilde{\kappa}_2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\frac{\alpha + \lambda_1}{k_2(a + \overline{E}_2)^3(\alpha - \Pi\kappa_2)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \lambda_1(2a^3k_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + 2k_2\overline{E}_2^3\kappa_1(\alpha - \Pi) \right. \\ & + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2) + 6\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\ & + a(2cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2^2m\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2) + 6k_2\overline{E}_2^2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \\ & - k_2m(c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) - acm(ak_2 + k_2\overline{E}_2 - 2\overline{M}\lambda_3) + 2\Pi\kappa_2 \\ & (a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + k_2\overline{E}_2^3(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) \\ & + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + 3k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2) + 3\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\ & + a(cm\Pi\kappa_2\overline{M} + 3k_2\kappa_1\overline{E}_2^2(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2^2\overline{E}_2(3\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\ & - k_2m(c\Pi\kappa_2\overline{E}_2 + \overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \\ & \left. + (acm(\overline{M} - k_2\overline{E}_2) + a^3k_2^2\kappa_2 + 3ak_2\kappa_2\overline{E}_2^2 + k_2^2\kappa_2\overline{E}_2^3 + a^2k_2(-cm + 3k_2\kappa_2\overline{E}_2)\lambda_3) \right) x_1x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha + \lambda_1}{k_2(a + \overline{E_2})^3(\alpha - \Pi\kappa_2)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\Pi\kappa_2 + \lambda_3)} \left( \Pi\kappa_2 \left( 2\Pi\kappa_2(a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1))) \right. \right. \\
& + k_2\overline{E_2}^3(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + 3k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E_2} + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 3\kappa_1\overline{E_2}(\alpha - \Pi\kappa_2)) + a(cm\Pi\kappa_2\overline{M} + 3k_2\kappa_1\overline{E_2}^2(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2^2\overline{E_2}(3\Pi\kappa_2^2\overline{E_2} + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& - k_2m(c\Pi\kappa_2\overline{E_2} + \overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) + (2a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) \\
& + 2k_2\overline{E_2}^3(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + a^2k_2(-3cm\Pi\kappa_2 + 6k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E_2} + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 6\kappa_1\overline{E_2}(\alpha - \Pi\kappa_2)) + a(4cm\Pi\kappa_2\overline{M} + k_2^2\overline{E_2}(6\Pi\kappa_2^2\overline{E_2} + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + k_2(6\kappa_1\overline{E_2}^2(\alpha - \Pi\kappa_2) + m(-2\alpha\overline{M} - 3c\kappa_2\Pi\overline{E_2} + 2\Pi\kappa_2\overline{M}))) \lambda_3 - acm(ak_2 + k_2\overline{E_2} - 2\overline{M})\lambda_3^2 \Big) \\
& - \lambda_1 \left( \Pi\kappa_2(-2a^3\kappa_1k_2(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2k_2\kappa_1\overline{E_2}^3(\alpha - \Pi\kappa_2) + a^2k_2(-k_2m\alpha - 6\overline{E_2}\alpha\kappa_1 + cm\Pi\kappa_2 \right. \\
& + k_2m\Pi\kappa_2 + 6\Pi\overline{E_2}\kappa_1\kappa_2) + a(-2cm\Pi\overline{M}\kappa_2 - 6k_2\overline{E_2}^2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \\
& + k_2^2m\overline{E_2}(-\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(c\Pi\overline{E_2}\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \Big) + \left( -2a^3k_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \right. \\
& - 2k_2\overline{E_2}^3\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + a^2k_2(cm\Pi\kappa_2 - 6\overline{E_2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + a(-4cm\Pi\overline{M}\kappa_2 - 6k_2\overline{E_2}^2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2m(c\Pi\overline{E_2}\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \Big) \lambda_3 \\
& - 2acm\overline{M}\lambda_3^2 \Big) x_1 y \\
& + \frac{1}{k_2(a + \overline{E_2})^2(\alpha - \kappa_2\Pi)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\lambda_1^2 \left( a^2k_2(\alpha^2 + 2\alpha\kappa_1\overline{E_2} - 2\Pi\kappa_1\kappa_2\overline{E_2}) \right. \right. \\
& + k_2\overline{E_2}^2(\alpha^2 + 2\overline{E_2}\alpha\kappa_1 - 2\Pi\overline{E_2}\kappa_1\kappa_2) + a(-cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2m\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 2k_2\overline{E_2}(\alpha^2 + 2\overline{E_2}\alpha\kappa_1 - 2\Pi\overline{E_2}\kappa_1\kappa_2)) + (-acm\overline{M} + a^2k_2\alpha + 2ak_2\overline{E_2}\alpha + k_2\overline{E_2}^2\alpha)\lambda_3 \Big) \\
& + \alpha\Pi\kappa_2 \left( k_2\overline{E_2}^2(-2\overline{E_2}\alpha\kappa_1 + cm\Pi\kappa_2 + \Pi r_2\kappa_2 + 2\Pi\overline{E_2}\kappa_1\kappa_2 - 2\Pi\overline{M}\kappa_2^2 + (r_1 - k_2m)(\alpha - \Pi\kappa_2)) \right. \\
& + a^2k_2(r_1(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E_2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + \Pi\kappa_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2)) \\
& + a(cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2^2m\overline{E_2}(-\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(-\overline{M}\alpha + c\Pi\overline{E_2}\kappa_2 + \Pi\overline{M}\kappa_2)) \\
& + 2k_2\overline{E_2}(r_1(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E_2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + \Pi\kappa_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2)) \\
& + (acm(k_2p_2 + \overline{M}) + a^2k_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2) + 2ak_2\overline{E_2}(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2) + k_2\overline{E_2}^2(cm + r_2 - 2\overline{M}\kappa_2))\lambda_3 \Big) \\
& + \lambda_1 \left( k_2\overline{E_2}^2(r_1\alpha(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E_2}\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) + \Pi\kappa_2(-\alpha^2 + k_2m(-\alpha + \Pi\kappa_2) \right. \\
& + \Pi\kappa_2(cm + r_2 - 2\overline{M}\kappa_2))) + a^2k_2(r_1\alpha(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E_2}\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) - \Pi\kappa_2(\alpha^2 + M\kappa_2(-r_2 + 2\overline{M}\kappa_2))) \\
& + a(k_2^2m\Pi\overline{E_2}\kappa_2(-\alpha + \Pi\kappa_2) + cm\Pi\overline{M}\kappa_2(\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(-\overline{M}\alpha^2 + c\Pi^2\overline{E_2}\kappa_2^2 \\
& + \Pi^2\overline{M}\kappa_2^2) - 2k_2\overline{E_2}(r_1\alpha(-\alpha + \Pi\kappa_2) + 2\overline{E_2}\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) + \Pi\kappa_2(\alpha^2 + \Pi\kappa_2(-r_2 + 2\overline{M}\kappa_2))) \\
& + (a^2k_2\Pi\kappa_2(r_2 - \alpha - 2\overline{M}\kappa_2) + k_2\Pi\overline{E_2}^2\kappa_2(cm + r_2 - \alpha - 2\overline{M}\kappa_2)) \\
& - 2ak_2\Pi\overline{E_2}\kappa_2(-r_2 + \alpha + 2p_3\kappa_2) + acm(k_2\Pi\overline{E_2}\kappa_2 + \overline{M}(\alpha + \Pi\kappa_2))\lambda_3 \Big) x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 = & -\frac{\alpha}{k_2(a + \overline{E}_2)^3(\alpha - \Pi\kappa_2)\lambda_1\lambda_3} \left( \left( acm(-k_2\overline{E}_2 + \overline{M}) + a^3k_2^2\kappa_2 + 3ak_2^2\overline{E}_2^{-2}\kappa_2 + k_2^2\overline{E}_2^{-3}\kappa_2 \right. \right. \\
& + a^2k_2(-cm + 3k_2\overline{E}_2\kappa_2) \left. \right) \lambda_1(\Pi\kappa_2 + \lambda_3) + \Pi\kappa_2 \left( a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(-\kappa_1 + k_2\kappa_2)) \right. \\
& + k_2\overline{E}_2^{-3}(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(-\kappa_1 + k_2\kappa_2)) + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + 3k_2\Pi\overline{E}_2\kappa_2^2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2) + 3\overline{E}_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + a(cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + 3k_2\overline{E}_2^{-2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2^2\overline{E}_2(3\Pi\overline{E}_2\kappa_2^2 + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) - k_2m(c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + \overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \\
& \left. \left. + (acm(-k_2\overline{E}_2 + \overline{M}) + a^3k_2^2\kappa_2 + 3ak_2^2p2^2\kappa_2 + k_2^2\overline{E}_2^{-3}\kappa_2 + a^2k_2(-cm + 3k_2\overline{E}_2\kappa_2))\lambda_3 \right) \right) x_2^2 \\
\dot{y} = & -\frac{\alpha + \lambda_1}{k_2(a + \overline{E}_2)^3(\alpha - \Pi\kappa_2)\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \lambda_1(2a^3k_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + 2k_2\overline{E}_2^{-3}\kappa_1(\alpha - \Pi)) \right. \\
& + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2) + 6\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + a(2cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2^2m\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2) + 6k_2\overline{E}_2^{-2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \\
& - k_2m(c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) - acm(ak_2 + k_2\overline{E}_2 - 2\overline{M}\lambda_3) + 2\Pi\kappa_2 \\
& (a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + k_2\overline{E}_2^{-3}(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1))) \\
& + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + 3k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2) + 3\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + a(cm\Pi\kappa_2\overline{M} + 3k_2\kappa_1\overline{E}_2^{-2}(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2^2\overline{E}_2(3\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& - k_2m(c\Pi\kappa_2\overline{E}_2 + \overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \\
& \left. \left. + (acm(\overline{M} - k_2\overline{E}_2) + a^3k_2^2\kappa_2 + 3ak_2\kappa_2\overline{E}_2^{-2} + k_2^2\kappa_2\overline{E}_2^{-3} + a^2k_2(-cm + 3k_2\kappa_2\overline{E}_2))\lambda_3 \right) \right) x_1x_2 \\
& - \frac{\alpha + \lambda_1}{k_2(a + \overline{E}_2)^3(\alpha - \Pi\kappa_2)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\Pi\kappa_2 + \lambda_3)} \left( \Pi\kappa_2 \left( 2\Pi\kappa_2(a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1))) \right. \right. \\
& + k_2\overline{E}_2^{-3}(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + a^2k_2(-cm\Pi\kappa_2 + 3k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 3\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) + a(cm\Pi\kappa_2\overline{M} + 3k_2\kappa_1\overline{E}_2^{-2}(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2^2\overline{E}_2(3\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& - k_2m(c\Pi\kappa_2\overline{E}_2 + \overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \left. \right) + (2a^3k_2(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) \\
& + 2k_2\overline{E}_2^{-3}(\alpha\kappa_1 + \Pi\kappa_2(k_2\kappa_2 - \kappa_1)) + a^2k_2(-3cm\Pi\kappa_2 + 6k_2\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + k_2m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 6\kappa_1\overline{E}_2(\alpha - \Pi\kappa_2)) + a(4cm\Pi\kappa_2\overline{M} + k_2^2\overline{E}_2(6\Pi\kappa_2^2\overline{E}_2 + m(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + k_2(6\kappa_1\overline{E}_2^{-2}(\alpha - \Pi\kappa_2) + m(-2\alpha\overline{M} - 3c\kappa_2\Pi\overline{E}_2 + 2\Pi\kappa_2\overline{M}))) \lambda_3 - acm(ak_2 + k_2\overline{E}_2 - 2\overline{M})\lambda_3^2 \left. \right) \\
& - \lambda_1 \left( \Pi\kappa_2(-2a^3\kappa_1k_2(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2k_2\kappa_1\overline{E}_2^{-3}(\alpha - \Pi\kappa_2) + a^2k_2(-k_2m\alpha - 6\overline{E}_2\alpha\kappa_1 + cm\Pi\kappa_2 \right. \\
& + k_2m\Pi\kappa_2 + 6\Pi\overline{E}_2\kappa_1\kappa_2) + a(-2cm\Pi\overline{M}\kappa_2 - 6k_2\overline{E}_2^{-2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \\
& + k_2^2m\overline{E}_2(-\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \left. \right) + \left( -2a^3k_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) \right. \\
& - 2k_2\overline{E}_2^{-3}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + a^2k_2(cm\Pi\kappa_2 - 6\overline{E}_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& \left. \left. + a(-4cm\Pi\overline{M}\kappa_2 - 6k_2\overline{E}_2^{-2}\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + k_2m(c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + 2\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2))) \right) \lambda_3 \right) \\
& - 2acm\overline{M}\lambda_3^2 \left. \right) x_1y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{k_2(a + \overline{E}_2)^2(\alpha - \kappa_2\Pi)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\lambda_1^2 \left( a^2 k_2 (\alpha^2 + 2\alpha\kappa_1\overline{E}_2 - 2\Pi\kappa_1\kappa_2\overline{E}_2) \right. \right. \\
& + k_2\overline{E}_2^2 (\alpha^2 + 2\overline{E}_2\alpha\kappa_1 - 2\Pi\overline{E}_2\kappa_1\kappa_2) + a(-cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2m\overline{M}(\alpha - \Pi\kappa_2)) \\
& + 2k_2\overline{E}_2(\alpha^2 + 2\overline{E}_2\alpha\kappa_1 - 2\Pi\overline{E}_2\kappa_1\kappa_2) + (-acm\overline{M} + a^2k_2\alpha + 2ak_2\overline{E}_2\alpha + k_2\overline{E}_2^2\alpha)\lambda_3 \Big) \\
& + \alpha\Pi\kappa_2 \left( k_2\overline{E}_2^2(-2\overline{E}_2\alpha\kappa_1 + cm\Pi\kappa_2 + \Pi r_2\kappa_2 + 2\Pi\overline{E}_2\kappa_1\kappa_2 - 2\Pi\overline{M}\kappa_2^2 + (r_1 - k_2m)(\alpha - \Pi\kappa_2)) \right. \\
& + a^2k_2(r_1(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E}_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + \Pi\kappa_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2)) \\
& + a(cm\Pi\overline{M}\kappa_2 + k_2^2m\overline{E}_2(-\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(-\overline{M}\alpha + c\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + \Pi\overline{M}\kappa_2)) \\
& + 2k_2\overline{E}_2(r_1(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E}_2\kappa_1(\alpha - \Pi\kappa_2) + \Pi\kappa_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2)) \\
& + (acm(k_2p_2 + \overline{M}) + a^2k_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2) + 2ak_2\overline{E}_2(r_2 - 2\overline{M}\kappa_2) + k_2\overline{E}_2^2(cm + r_2 - 2\overline{M}\kappa_2))\lambda_3 \Big) \\
& + \lambda_1 \left( k_2\overline{E}_2^2(r_1\alpha(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E}_2\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) + \Pi\kappa_2(-\alpha^2 + k_2m(-\alpha + \Pi\kappa_2)) \right. \\
& + \Pi\kappa_2(cm + r_2 - 2\overline{M}\kappa_2)) + a^2k_2(r_1\alpha(\alpha - \Pi\kappa_2) - 2\overline{E}_2\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) - \Pi\kappa_2(\alpha^2 + M\kappa_2(-r_2 + 2\overline{M}\kappa_2))) \\
& + a(k_2^2m\Pi\overline{E}_2\kappa_2(-\alpha + \Pi\kappa_2) + cm\Pi\overline{M}\kappa_2(\alpha + \Pi\kappa_2) + k_2m(-\overline{M}\alpha^2 + c\Pi^2\overline{E}_2\kappa_2^2 \\
& + \Pi^2\overline{M}\kappa_2^2) - 2k_2\overline{E}_2(r_1\alpha(-\alpha + \Pi\kappa_2) + 2\overline{E}_2\kappa_1(\alpha^2 - \Pi^2\kappa_2^2) + \Pi\kappa_2(\alpha^2 + \Pi\kappa_2(-r_2 + 2\overline{M}\kappa_2)))) \\
& + (a^2k_2\Pi\kappa_2(r_2 - \alpha - 2\overline{M}\kappa_2) + k_2\Pi\overline{E}_2^2\kappa_2(cm + r_2 - \alpha - 2\overline{M}\kappa_2) \\
& \left. - 2ak_2\Pi\overline{E}_2\kappa_2(-r_2 + \alpha + 2p_3\kappa_2) + acm(k_2\Pi\overline{E}_2\kappa_2 + \overline{M}(\alpha + \Pi\kappa_2))\lambda_3 \right) \Big) x_1.
\end{aligned}$$

## B.2. Forma normal del sistema (3.11)

Desarrollo en serie de potencias del sistema (3.11) hasta orden 1 y 2

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (-\alpha - r_1)x_1 - \frac{mr_1}{a(r_1 + \alpha)}x_2y - \frac{mr_1}{a(r_1 + \alpha)}x_1y \\
&+ \frac{r_1(cm r_1(r_1 - 2r_2 + \alpha) - 2r_2(r_1 - r_2 + \alpha)(r_1 - a\kappa_1))}{ar_2(-r_1 + r_2 - \alpha)(r_1 + \alpha)}x_1x_2 + \frac{2cr_1}{a^2(r_1 + \alpha)}x_1x_2y, \\
\dot{x}_2 &= \frac{\alpha(r_1(r_2 - cm) - \kappa_1r_2a)}{ar_2(r_1 + \alpha)}x_2^2 - \frac{m\alpha}{a(r_1 + \alpha)}x_2y - \frac{m\alpha}{a(r_1 + \alpha)}x_1y \\
&+ \frac{\alpha(cm r_1(r_1 - 2r_2 + \alpha) - 2r_2(r_1 - r_2 + \alpha)(r_1 - a\kappa_1))}{ar_2(-r_1 + r_2 - \alpha)(r_1 + \alpha)}x_1x_2 + \frac{m\alpha}{a^2(r_1 + \alpha)}x_2^2y \\
&+ \frac{2m\alpha}{a^2(r_1 + \alpha)}x_1x_2y + \frac{r_1\alpha(cm(-2r_1 + 3r_2 - 2\alpha) + 3r_2(r_1 - r_2 + \alpha))}{a^2r_2(-r_1 + r_2 - \alpha)(r_1 + \alpha)}x_1x_2^2 - \frac{3m\alpha}{a^3(r_1 + \alpha)}x_1x_2^2y \\
&+ \frac{\alpha(cm r_1 + (r_1 - r_2 + \alpha)(r_1 - a\kappa_1))}{a(r_1 + \alpha)(r_1 - r_2 + \alpha)}x_1^2 + \frac{m\alpha}{a^2(r_1 + \alpha)}x_1^2y \\
&- \frac{r_1\alpha(3r_2(-r_1 + r_2 + \alpha) + cm(r_1 - 3r_2 + \alpha))}{a^2r_2(-r_1 + r_2 - \alpha)(r_1 + \alpha)}x_1^2x_2 - \frac{3\alpha m}{a^3(r_1 + \alpha)}x_1^2x_2 + y \\
&+ \frac{3r_1\alpha(2r_2(-r_1 + r_2 - \alpha) + cm(r_1 - 2r_2 + \alpha))}{a^3r_2(-r_1 + r_2 - \alpha)(r_1 + \alpha)}x_1^2x_2^2 + \frac{6m\alpha}{a^4(r_1 + \alpha)}x_1^2x_2^2y, \\
\dot{y} &= -r_2y - \frac{cm(r_2(r_2 - \alpha) + r_1(-2r_2 + \alpha))}{ar_2(-r_1 + r_2 - \alpha)}x_2y - \frac{cm(r_2^2 + r_1\alpha + r_2\alpha)}{ar_2(-r_1 + r_2 - \alpha)}x_1y + \frac{cr_1}{a^2r_2(r_1 - r_2 + \alpha)^2} \\
&[cm(r_1(r_2^2 + r_1\alpha) - \alpha(r_1 + r_2)(r_2 - \alpha)) - 2r_2(r_1 - r_2 + \alpha)(\alpha r_1 - (r_2 - \alpha)(r_2 - a\kappa_1))]x_1x_2 \\
&+ \frac{2cm(-r_2^2 + r_1\alpha + r_2\alpha)}{a^2r_2(-r_1 + r_2 - \alpha)}x_1x_2y.
\end{aligned}$$



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00235

Matrícula: 2212801586

Dinámica de un modelo matemático de interacción entre saltamontes del té verde y ácaros.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 9 del mes de febrero del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA  
DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN  
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: AHIDA ORTIZ SANTOS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

## A P R O B A R

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



AHIDA ORTIZ SANTOS  
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

*Roman Linares Romero*  
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

*Manuel Jesus Falconi Magaña*  
DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA

VOCAL

*Julio Ernesto Solis Daun*  
DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

SECRETARIO

*Joaquin Delgado Fernandez*  
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ