

El jurado designado por la  
**Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente**

de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

**César Augusto Ramírez Cisneros**

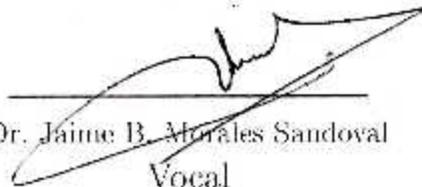
El día **5 de Julio del año 2017**  
**Miembros del Jurado**



Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez  
Presidente



Dr. Gilberto Espinosa Paredes  
Secretario



Dr. Jaime B. Morales Sandoval  
Vocal



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00019

Matrícula: 2151800870

Dinámica y control de un reactor de fusión nuclear. El caso del proyecto ITER.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 17:00 horas del día 5 del mes de julio del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ  
DR. JAIME BALTAZAR MORALES SANDOVAL  
DR. GILBERTO ESPINOSA PAREDES

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (ENERGIA Y MEDIO AMBIENTE)

DE: CESAR AUGUSTO RAMIREZ CISNEROS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



CESAR AUGUSTO RAMIREZ CISNEROS  
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA  
VELAZQUEZ

VOCAL

DR. JAIME BALTAZAR MORALES SANDOVAL

SECRETARIO

DR. GILBERTO ESPINOSA PAREDES

**Dinámica y control de un reactor de fusión nuclear.  
El caso del proyecto ITER**

Tesis que presenta

**César Augusto Ramírez Cisneros**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias (Energía y Medio Ambiente)**





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

POSGRADO DE ENERGÍA Y  
MEDIO AMBIENTE

---

---

**DINÁMICA Y CONTROL DE UN REACTOR DE  
FUSIÓN  
NUCLEAR. EL CASO DEL PROYECTO ITER**

---

---

**TESIS**

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE)**

PRESENTA:

César Augusto Ramírez Cisneros

Director:

Dr. Rodolfo Vázquez Rodríguez

Ciudad de México, Julio 2017



# Agradecimientos

A la Maestría en Ciencias (Energía y Medio Ambiente) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, pertenece al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad del CONACyT y cuenta con apoyo del mismo Consejo con el convenio 003893; por lo que agradece la beca recibida, a través del convenio No. 303662 para el desarrollo de esta tesis.

# Agradecimientos personales

A mi compañera de vida, gracias por compartir tu tiempo conmigo, por tus buenos consejos y tus llamadas de atención todo esto ha sido posible, me continúas ayudando a mejorar día a día. Compartimos este viaje hacia nuestro desarrollo que apenas va iniciando, muchas gracias.

A mi familia, por estar siempre junto a mí, por animarme a continuar en mi desarrollo personal y académico. Gracias a mis padres y hermanos ellos este trabajo fue posible así como muchas de las cosas que se dieron durante este tiempo.

A mis compañeros y amigos de maestría, su presencia y motivación ha sido de gran ayuda en este capítulo de mi vida, sus ánimos, inquietudes y alegría hicieron de esto algo para recordar. Especialmente a Alejandría y Juan Carlos, ustedes han sido un gran apoyo a lo largo del posgrado.

A mi director de tesis, Dr. Rodolfo, gracias por su comprensión y tiempo en el desarrollo de este trabajo, por los asertivos consejos en un tema poco común, hemos aprendido mucho de estos nuevos proyectos que prometen grandes cosas.

A Jaime, Francisco, Victor, Denisse, Lluvia, Alejandra, Paco y Alfredo por compartir sus experiencias en sus respectivos posgrados y por animarme a aventurarme al mío.

¡Gracias!

*“De ser cierto que la energía subatómica es usada libremente en las estrellas para mantener sus grandes hornos, parece un poco más cercano llevar a cabo nuestro sueño de controlar este poder latente para el bien de la humanidad o el suicidio de la misma.”*

-Sir Arthur Stanley Eddington-



# Comité tutorial

*Director:*

**Dr. Rodolfo Vázquez Rodríguez.** Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

El jurado designado por la  
**Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente**

de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

**César Augusto Ramírez Cisneros**

El día **5 de Julio del año 2017**  
**Miembros del Jurado**

---

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez  
Presidente

---

Dr. Gilberto Espinosa Paredes  
Secretario

---

Dr. Jaime B. Morales Sandoval  
Vocal

# Índice general

	<b>Página</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>6</b>
1.1. Fusión nuclear . . . . .	6
1.1.1. Origen de los estudios en fusión . . . . .	7
1.1.2. Desarrollo del secreto . . . . .	7
1.1.3. Hacia la cooperación internacional . . . . .	9
1.2. Métodos para dominar la energía de fusión . . . . .	10
1.2.1. Espejos magnéticos . . . . .	11
1.2.2. Stellarator . . . . .	12

1.2.3. Tokamak . . . . .	13
1.2.4. Confinamiento inercial . . . . .	14
1.3. ITER y la visión sobre el tokamak . . . . .	15
1.3.1. Reactor tokamak DEMO . . . . .	16
1.3.2. Reactor nivel planta y usos alternativos . . . . .	17
1.4. El papel del control . . . . .	18
<b>2. Fundamentos de la fusión</b>	<b>20</b>
2.1. Materia, energía y combustible . . . . .	20
2.2. Tasa de reacción . . . . .	23
2.3. Potencia de fusión y el Criterio de Lawson . . . . .	25
2.4. Pérdidas . . . . .	27
2.4.1. Radiación de frenado . . . . .	28
2.4.2. Radiación de ciclotrón . . . . .	29
2.5. Impurezas . . . . .	31
<b>3. Alcance, objetivos y metodología</b>	<b>32</b>
3.1. Alcance . . . . .	32
3.2. Objetivo general . . . . .	32
3.3. Objetivos particulares . . . . .	33
3.4. Metodología . . . . .	33
3.4.1. Planteamiento del modelo . . . . .	33
3.4.2. Controlador . . . . .	34
3.4.3. Diagrama de bloques de la metodología . . . . .	35

<b>4. Quema de fusión</b>	<b>36</b>
4.1. Modelo . . . . .	36
4.2. Simulación dinámica . . . . .	39
<b>5. Control</b>	<b>44</b>
5.1. Linealización . . . . .	45
5.2. Lazo abierto . . . . .	46
5.3. Control en lazo cerrado . . . . .	49
5.3.1. Acción de controlador PI . . . . .	53
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>59</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>
<b>A. Linealización del sistema</b>	<b>68</b>
A.1. Desarrollo de la linealización del modelo de quema de fusión . . . . .	68
<b>B. Códigos de Matlab</b>	<b>99</b>
B.1. Simulación de sistema no lineal . . . . .	99
B.2. Código del controlador . . . . .	102

# Índice de figuras

	Página
1. Evolución de niveles de $CO_2$ en la estación Mauna Loa en Hawái, adaptado de (ESRL, 2016).	4
2. Reservas de recursos combustibles . . . . .	5
1.1. El <i>perhpsatron</i> fue el primer experimento de fusión en Los Alamos, EU, imagen obtenida de Dean (2013). . . . .	8
1.2. Ilustración del tokamak T-3, imagen tomada de EUROfusion (2005). . . . .	10
1.3. Métodos para confinamiento de fusión. . . . .	11
1.4. Esquema del funcionamiento básico de una configuración de espejo magnético, imagen obtenida de (Fowler <i>et al.</i> , 2017). . . . .	11
1.5. a) El stellarator Wendeslstein 7-X, b) fotografía durante la construcción del mismo, imagen obtenida de (Ongena <i>et al.</i> , 2016). . . . .	12
1.6. Esquema de la configuración básica de un tokamak, imagen adaptada de (ININ, 2013). . . . .	14
1.7. Fusión por confinamiento inercial láser de iluminación indirecta, imagen obtenida de (NIF, 2016). . . . .	15
1.8. El tokamak ITER, con una altura total de 30 m, ITER es casi tres veces mayor que el JET, imagen obtenida de (ITER, 2009). . . . .	17
2.1. Ilustración del fenómeno de fusión, imagen adaptada de ININ (2013). . . . .	21

2.2. Energía de unión por nucleon, gráfico obtenido con información de NIST (2016). . . . .	22
2.3. Sección eficaz para varias reacciones, imagen tomada de IAEA (2012). . . . .	23
2.4. Tasa de reacción para las mezclas $DT$ y $D-^3He$ , gráfico obtenido con información de Hively (1977). . . . .	24
2.5. Evolución del producto triple alcanzado en varios experimentos magnéticos en el mundo, imagen obtenida de Mlyná (2011). . . . .	28
2.6. Radiación de frenado, imagen adaptada de Harms <i>et al.</i> (2000). . . . .	29
2.7. Radiación de ciclotrón. . . . .	30
3.1. Diagrama de la metodología de trabajo. . . . .	35
4.1. Esquema de operación del sistema. . . . .	36
4.2. Plasma como entidad uniforme. . . . .	37
4.3. Evolución del sistema sin pérdida por radiación de ciclotrón. . . . .	42
4.4. Evolución del sistema con pérdida de radiación de ciclotrón. . . . .	42
4.5. Evolución de la energía arrojada por sistema. . . . .	43
5.1. Esquema de control. . . . .	44
5.2. Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo abierto. . . . .	49
5.3. Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo cerrado sujeto a una función de prueba impulso. . . . .	53
5.4. Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo cerrado sujeto a una función de prueba escalón. . . . .	53
5.5. Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, perturbación en la densidad de partículas alfa. . . . .	54

5.6. Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón. . . . .	54
5.7. Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en la densidad de partículas de combustible. . . . .	55
5.8. Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón. . . . .	55
5.9. Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en la densidad de partículas de impurezas. . . . .	56
5.10. Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón. . . . .	56
5.11. Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en el suministro de potencia. . . . .	57
5.12. Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón. . . . .	57

# Índice de tablas

2.1. Coeficientes para la tasa de reacción de Hively (1977). . . . .	24
3.1. Parámetros de ITER de acuerdo a la revisión CDA proporcionada por Uckan (1993). . . . .	34
4.1. Punto de equilibrio. . . . .	39
5.1. Valores de las constantes $\nu_i$ . . . . .	47

# Resumen

La población mundial crece de manera constante, así como el consumo de energía. Actualmente la manera más socorrida para proveer energía es mediante el uso de combustibles fósiles. Esto gracias a la relativa facilidad con la que se pueden aprovechar, ya que están disponibles de una manera en la que su uso es casi inmediato. Sin embargo su consumo conlleva riesgos y el aumento de los niveles de  $CO_2$  es uno de ellos provocando fuertes daños al ambiente, o las tormentas que se han vuelto más recurrentes y la temperatura que en el mundo va en incremento. Además existen peleas entre países por los recursos fósiles, como en Medio Oriente. Por razones como estas se recurre a fuentes alternativas de energía, y en la actualidad ya se cuenta con plantas solares o eólicas. Sin embargo, todavía no se encuentran a la par de las plantas que funcionan a base de combustibles fósiles y las plantas de fisión nuclear tienen una acentuada problemática asociada a los desechos sólidos que generan y duran miles de años. En este panorama, la opción de fusión nuclear (aún en desarrollo) plantea la posibilidad de acceder a una forma de energía prácticamente inagotable, pues depende de algunos de los elementos más abundantes en el planeta y es capaz de proporcionar una cantidad de energía mayor que la fisión nuclear, sin los riesgos que esta última supone. Y aunque se encuentra en desarrollo esta opción, desde hace muchos años se ha perfilado como una propuesta asequible. Además ha promovido la cooperación internacional entre países que en algún momento fueron enemigos, y es una propuesta a considerar. En esta tesis se modelará el fenómeno de quema de fusión mediante un modelo de variables promedio respecto a las dimensiones totales del sistema, al que además se le acoplará un controlador proporcional e integral, que intentará regular el comportamiento del reactor para mantenerlo funcionando en un estado de equilibrio arbitrario.

# Abstract

World population grows at a continuous rate just like the energy consumption. Today the most employed way to obtain energy is through the use of fossil fuels. This is because of their relative easy harnessing. They are available in such a manner that they can be used almost immediately. But their perks have their own risks.  $CO_2$  rise is one of them because it causes strong damage to the environment. For example storms are now becoming common and world temperature is going up. Besides there are struggles between countries for fossil resources like the ones in the Middle East. This is why alternative energy sources are now attractive and we have solar and wind power plants. Nevertheless these plants are not at the fossil fuel plants level, and fission power plants have their problems with solid waste that lasts for thousands of years. In this scene, nuclear fusion option (still under development) is a limitless energy source, thanks to its dependence on two of the most abundant elements in the planet, and it also provides more energy than its fission counterpart without the associated risks. Even in its development state it is moving ahead to be an affordable approach, and is promoting international cooperation between former enemies. For this thesis fusion process will be modeled through mean variables regard the total system dimensions. It is also proposed a proportional and integral controller coupled to it. This controller is expected to regulate the reactor performance to be kept working in an equilibrium state.

# Introducción

Existen dos métodos para aprovechar la energía de los átomos, ya sea dividiendo grandes núcleos en unos más pequeños (fisión) o bien combinar unos pequeños para formar otros más grandes (fusión). La fusión nuclear es el proceso que alimenta a las estrellas y de lograrse de manera controlada y desarrollarla comercialmente en la tierra, podría solventar el problema de demanda energética. La que de acuerdo con Dobran (2012) se duplicará para el año 2050 con respecto al 2012, cuándo se agreguen dos mil millones más a la población presente. Este acelerado ritmo de crecimiento de la sociedad y sus patrones de consumo serán una presión sobre los recursos disponibles. Además el sector energético no dispone de tecnología capaz de desacoplar sustancialmente la producción de energía de las emisiones de  $CO_2$ , y si bien existen alternativas a los combustibles fósiles como la tecnología fotovoltaica, termosolar, eólica o nuclear (fisión), su uso no está completamente diseminado, con excepción de algunos pocos países, y el caso nuclear enfrenta grandes retos en cuanto a su aceptación debido a los accidentes ocurridos en plantas como Chernóbil o Fukushima.

En este panorama la tecnología de fusión nuclear controlada, se plantea como un serio candidato para la producción masiva de energía, capaz de desacoplar junto a otros métodos alternativos la generación de energía de los altos índices de emisiones de  $CO_2$ , que en el mes de Septiembre de 2016 superaron el umbral de los  $400ppm$  de manera indefinida, se estima que el 2016 será el año más caluroso del que se tenga registro (Kahn, 2016), ver fig. 1, estos niveles no habían sido observados desde que se comenzó a medir en 1958, en Mauna Loa, ni en los 800 000 años anteriores que han examinado mediante análisis de hielo. Asimismo, se estima que la última vez que se dio una situación similar fue hace unos 4,5 millones de años, cuando la temperatura era de  $3^\circ$  a  $4^\circ$  C superior a la actual (Greenpeace, 2015).

La situación discutida contrasta con la Cumbre de Naciones Unidas sobre Cambio Climático en París, donde se firma el compromiso para evitar esta situación, dónde México estuvo presente y ratificó su compromiso con las Naciones Unidas (gob.mx, 2016).

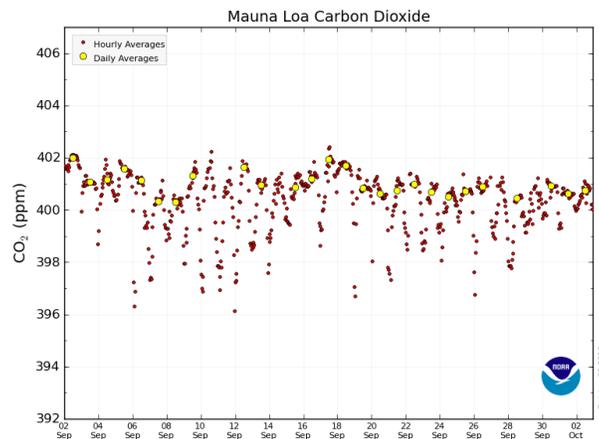


Figura 1: Evolución de niveles de  $CO_2$  en la estación Mauna Loa en Hawái, adaptado de (ESRL, 2016).

Esto concuerda con las metas propuestas de la prospectiva del sector eléctrico, donde se plantea hacer uso de energías limpias. En materia nuclear (fisión) México contempla aumentar su capacidad instalada de 1,400MW a 5,700MW en el periodo 2028-2030, esto significará una participación del 8.8% en la producción nacional (SENER, 2016). La ampliación del programa nuclear mexicano podría ser una excelente oportunidad para involucrarse en nuevos proyectos a mediano y largo plazo como la fusión nuclear, que supone ventajas considerables, aun cuando se encuentra en fase de desarrollo, los esfuerzos reunidos por varios países como Estados Unidos de América (E.U.A.), Rusia, Japón, Unión Europea (U.E.), China, India y la República de Corea, se han consolidado en el proyecto ITER o en latín el *camino*, mismo que está siendo construido en Francia y se espera que empiece operaciones en 2020, adicionalmente proyectos como el reactor ARC (*Affordable, robust, compact*) surgen como una respuesta para proyectos de menor envergadura (Sorbom *et al.*, 2015).

La fusión al igual que la fisión nuclear tiene mínimos niveles de emisiones durante su funcionamiento, sin el inconveniente que suponen los desechos sólidos radioactivos. Por otro lado el combustible, el deuterio, está disponible en los mares, 1 de cada 6500 moléculas de agua es deuterio, el tritio por otro lado no está disponible naturalmente, puede ser obtenido a partir del litio 6 y litio 7, el primero mediante una reacción exotérmica y el segundo mediante una reacción endotérmica, éste es mejor conocido como *breed* (cría de su propio combustible) (Kammash, 1982).

La abundancia del combustible es por supuesto el mayor atractivo de la fusión. De acuerdo con Cowley (2016), él toma como medida la unidad mundial de energía (*World Energy Unit* o bien *weu*),  $1weu = 7.5 \times 10^{19}J = 2.4TW \cdot año$ . Ahora una planta de fusión de un gigawatt consumiría 120kg de

deuterio y cuatro toneladas de litio cada año. El deuterio puede ser extraído del agua de mar, donde cada litro contiene  $\sim 0.02g$ , esto proporcionaría más de  $5 \times 10^{10}weu$ . En cuanto al litio se estiman reservas de 13.5 millones toneladas terrestres, suficientes para proporcionar  $\sim 10^3weu$ . Sin embargo el litio también está presente en el agua de mar en una concentración de  $0.2mg$  por litro. De modo que las 230 mil millones de toneladas de litio presentes en los mares son suficientes para proporcionar  $\sim 25 \times 10^6weu$ , de ser extraído eficientemente. Es claro que la fusión de la mezcla deuterio-tritio (DT) podría solventar la demanda de energía global por millones de años, este recurso sólo se podría ver rivalizado por la energía solar. En la fig.2 se muestra la disponibilidad de algunos recursos frente a la tecnología de fusión.

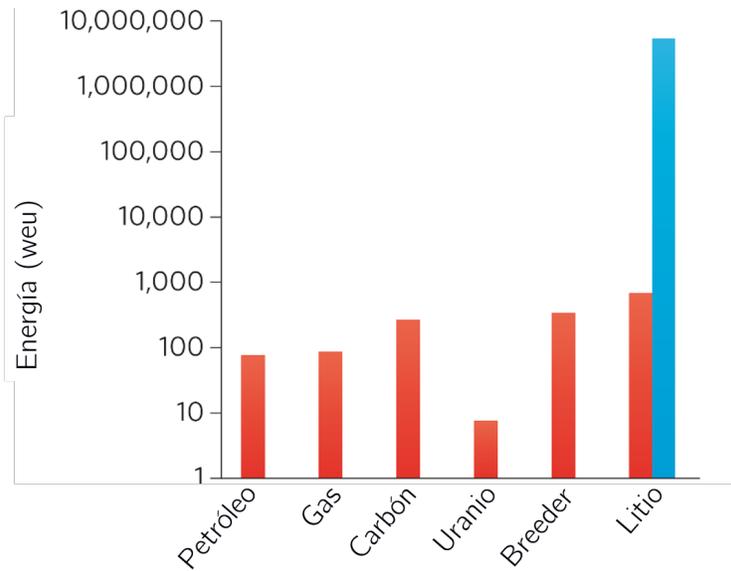


Figura 2: Reservas de recursos combustibles

Es así que nace la motivación para realizar esta tesis, donde se analiza un sistema energético con mínimo impacto ambiental, y sustentable desde el punto de vista energético. Este sistema lo constituye un reactor de fusión nuclear con confinamiento magnético, basado en información del proyecto ITER. Al sistema además le será impuesto una ley de control, esto con la finalidad de imponer un régimen de trabajo arbitrario.

# Capítulo 1

## Antecedentes

A través del siguiente capítulo se expondrá un poco acerca de como se desarrolló la investigación en fusión nuclear, desde el secretismo hasta la cooperación internacional. También como ha evolucionado la tecnología que se pretende utilizar para dominar el agresivo plasma de fusión. En el apartado que concierne a la tecnología de confinamiento se expondrán también dispositivos que no forman parte del estudio principal de esta tesis, pero vale la pena mencionarlos porque también tienen características que los hacen buenos candidatos como plantas de fusión en un futuro. Se abundará en el proyecto más grande sobre fusión nuclear controlada y su importancia. Finalmente se darán a conocer los aspectos por los cuales es necesario el uso de métodos de control.

### 1.1. Fusión nuclear

La energía de fusión es el motor de nuestro universo. El Sol provee de energía a los planetas circundantes a él, a manera de radiación electromagnética, y en el caso especial de la tierra las condiciones han sido las adecuadas para que la vida exista. Hasta el momento en el que se descubrió sobre la energía presente en los átomos, muchos científicos de una época no muy lejana iniciaron sus investigaciones sobre el tema de la energía nuclear, que más tarde culminarían en el aprovechamiento de ésta mediante la fisión y posteriormente en una gran cooperación internacional por lograr aprovechar la energía de fusión en la Tierra.

### 1.1.1. Origen de los estudios en fusión

Los orígenes de la fusión pueden rastrearse a los primeros días sobre la investigación de la física nuclear, esto le valió a Sir Ernest Rutherford para hacerse con el premio Nobel en 1908 por su trabajo sobre la estructura atómica y demostrar como elementos radioactivos podían convertirse en otros (Dean, 2013). Tiempo después en 1920 Sir Arthur Eddington, propuso que era el proceso mediante el cual el hidrógeno se convertía en helio en el Sol, lo que le brindaba energía y actualmente se conoce como fusión nuclear (Cowley, 2016). De modo que el tema de la fusión no es precisamente novedoso, y aunque parece simple, la dificultad de aprovecharla yace en las condiciones en las que la fusión nuclear se da, la temperatura necesaria para lograrlo es del orden de varios cientos de millones de grados. En este punto los electrones son arrancados de sus núcleos, a esta entidad en el que la materia es un gas cargado se le conoce como plasma. Este término fue acuñado por Irving Langmuir, que en palabras de su colega Harold M. Mott-Smith, a Langmuir le recordaba al plasma sanguíneo que transportaba los corpúsculos rojos y blancos y algunos gérmenes (Piel, 2010).

### 1.1.2. Desarrollo del secreto

A diferencia de una estrella que posee una masiva fuerza de gravedad y es capaz de alcanzar muy altas temperaturas, en la tierra no es posible lograr las condiciones de un Sol pero si es posible emular su funcionamiento de algún modo. Para lograrlo se requiere de una recipiente que sea capaz de contener al agresivo plasma de fusión. El plasma por sí mismo no puede ser contenido por ningún tipo de material, sin embargo este consiste en partículas cargadas, de modo que al estar ionizado es posible contenerlo por medio de campos eléctricos o magnéticos, o bien mediante pulsos láser que provocan miniexplosiones controladas, confinamiento inercial. En secciones posteriores se mostrarán algunos ejemplos de los métodos que se usan para contener el agresivo plasma. El estudio sobre el tema no es nuevo. Durante muchos años investigadores se han dado a la tarea diseñar un aparato que produzca mayor energía de fusión que la que consume para producirla. Aunque debido a que los estudios iniciales sobre esta tecnología tienen una estrecha relación con el uso de armas de destrucción masiva, las primeras investigaciones permanecieron en secreto durante varios años.

Desde los años 40, E.U.A., el Reino Unido y Rusia iniciaron esfuerzos por controlar las reacciones de fusión nuclear con el propósito de contar con fuentes de neutrones y energía (Herrera Velázquez, 2007).

En 1951 el New York Times publicó una noticia proveniente de Argentina, en la que el presidente Perón afirmaba que un equipo argentino había logrado reacciones de fusión. Esto pronto se encontró con la opinión escéptica de algunos personajes de aquella época como Enrico Fermi. Finalmente se descubrió que era falso tal descubrimiento, pero también sirvió para avivar la motivación de Lyman Spitzer, quien estimulado por esta noticia desarrolló su concepto "*stellarator*". En el mismo año el proyecto ruso sobre investigación en fusión es aprobado por Stalin al Consejo de Ministros de Orden, se encarga en él la construcción de un modelo a escala de laboratorio de un reactor magnético termonuclear, en tanto que en E.U.A. se dio paso al programa Sherwood (Shafranov *et al.*, 2001).

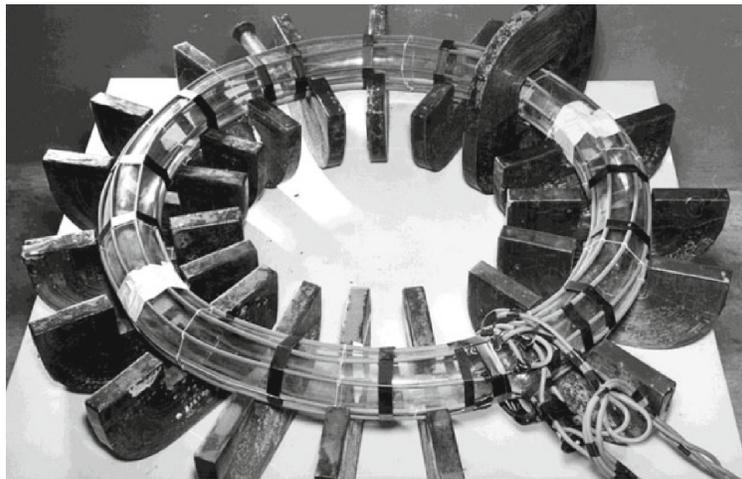


Figura 1.1: El *perhasatron* fue el primer experimento de fusión en Los Alamos, EU, imagen obtenida de Dean (2013).

De manera secreta en 1946 en Gran Bretaña G. P. Thomson y M. Blackman, patentaron un reactor toroidal que podía entregar una potencia de  $9MW$ , mientras que en laboratorios de E.U.A., científicos discutían sobre la tecnología fusión para el desarrollo de armas, y para 1952 en E.U.A. Jim Tuck construyó un dispositivo en el laboratorio nacional de Los Alamos denominado *perhasatron* (este consistía en una forma a manera de dona, con gas deuterio dentro de ella e imanes al rededor. Se inducía una corriente al gas, que lo calentaba y se formaba un plasma) (Dean, 2013), véase fig.1.1. A su funcionamiento se le conocía como efecto "*pinch*", que al incrementar la corriente en el gas y el campo que exterior, comprimía el gas y la temperatura incrementaba significativamente, así como el Perhasatron (su nombre se debía a que por aquella época era tan incierta el área de estudio que se uso como prefijo del nombre la palabra *perhaps* que significa quizá) también hubo algunos otros intentos que consistían en maquinas lineales conocidas como espejos magnéticos (Post, 1959).

### 1.1.3. Hacia la cooperación internacional

Como se ha ya se ha comentado a principios de la década de los 50 varios países, entre ellos E.U.A., Gran Bretaña y Rusia, realizaban sus investigaciones en el campo de la fusión de manera independiente, envueltas en alto secretismo militar. Se desarrollaron dispositivos lineales (espejos magnéticos) y algunos otros con forma toroidal, y aunque algunos resultados fueron obtenidos, eventualmente se llegó a la conclusión de que era necesaria la participación internacional para entender mejor el problema con el que se lidiaba, fue así que en 1956 la Unión Soviética compartió los resultados de sus investigaciones con países occidentales (Dolan *et al.*, 1995). Y así en abril del mismo año, de acuerdo con Shafranov *et al.* (2001), una delegación extranjera fue recibida en el instituto Kurchatov, más tarde en enero de 1958, en el preámbulo de la segunda conferencia de la Organización de las Naciones Unidas para el uso de la energía atómica para propósitos pacíficos en Ginebra, fueron publicados artículos británicos con resultados de experimentos en las instalaciones del proyecto ZETA (arreglo cero de energía termonuclear o bien *Zero Energy Thermonuclear Assembly*, éste estaba basado en el efecto pinch), esto coincide con Miyamoto (2005), que además añade que en el mismo año el proyecto stellarator se hizo publico también.

En septiembre de 1958 tomó lugar la conferencia de Ginebra, la estrella del programa en aquel entonces era el stellarator de Lyman Spitzer, qué de acuerdo con Shafranov *et al.* (2001) era el concepto de sistema de confinamiento magnético ideal para fusión nuclear controlada, y además influyó a tal grado que en el lado ruso se planteó la posibilidad de abandonar la construcción del tokamak T-3. Sin embargo por aquellos días la única forma de calentar un plasma implicaba inducir corriente en el gas combustible, algo que significaba una dificultad para el stellarator. Esto le permitió al tokamak sobrevivir. En la sección 1.2 se darán algunos detalles más acerca del funcionamiento de cada uno de estos métodos de confinamiento.

Con la segunda conferencia se marcó una apertura así como la cooperación internacional y también una carrera por lograr fusión controlada, éste fue precedido por una serie de convenciones sobre plasma, la primera en 1961 y la segunda en 1965. En estas dos se presentaron resultados de varios experimentos. Los tokamak ya se hacían presentes en aquellas convenciones. El primero, el T-1 entró en operación en 1958, pero fue hasta la tercera convención, en Novosibirsk, que todo el mundo tenía los ojos puestos sobre la máquina rusa. El tokamak T-3 había logrado alcanzar temperaturas de 1 keV (la fig. 1.2 ilustra a los científicos rusos a la espera de los resultados de las mediciones extranjeras que daban crédito del logro), ese año el mundo quedó convencido de que el tokamak era la vía para lograr fusión, incluso algunos experimentos sufrieron cambios para desarrollar la tecnología rusa (Miyamoto, 2005). Más tarde, en 1979 E.U.A., Japón y la U.R.S.S. bajo auspicio de la Organización Internacional de Energía Atómica (OIEA) se reunieron en una serie de talleres

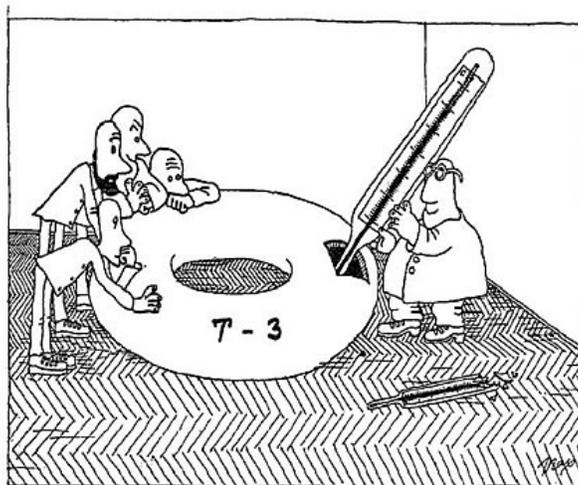


Figura 1.2: Ilustración del tokamak T-3, imagen tomada de EUROfusion (2005).

acerca de un Reactor Internacional Tokamak o INTOR (Stacey, 2010).

## 1.2. Métodos para dominar la energía de fusión

Actualmente se encuentran en fase de desarrollo varios métodos para alcanzar un plasma en combustión, aunque también se vislumbra la posibilidad de poder alcanzar el estado de ignición <sup>1</sup>, pero de entre ellos se toman sólo algunos de los más representativos, mismos que concentran a su alrededor la mayor actividad de investigación, se clasifican en confinamiento inercial y confinamiento magnético. Cada uno tiene sus propias ventajas y desventajas, sin embargo el confinamiento magnético es el que tiene una mayor aceptación. Y aunque la idea básica es la misma en los diferentes casos del confinamiento magnético, existen diferentes configuraciones, de éstas sólo se revisarán tres y sólo se abundará en el caso del tokamak, que es el caso de estudio de interés. Una de las primeras ideas fueron los espejos magnéticos, y aunque se ha abandonado un poco esta área de investigación, en Japón y Rusia se le da seguimiento a este esquema. Por otro lado están las configuraciones toroidales, el stellarator es uno de ellos, desarrollado en los E.U.A., y por último el proyecto de mayor auge en la investigación es el tokamak.

---

<sup>1</sup>La ignición se da cuando aportada la energía para calentar lo suficiente el plasma es superada por las aportaciones del plasma y ya no es necesario suministrar más potencia externa(Stacey, 2010)

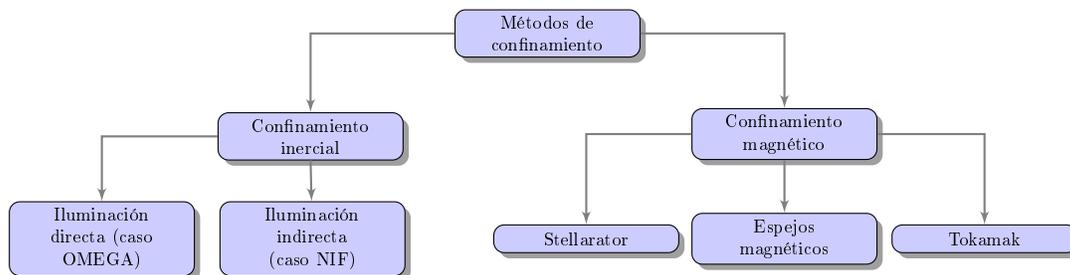


Figura 1.3: Métodos para confinamiento de fusión.

### 1.2.1. Espejos magnéticos

La configuración de espejos magnéticos es un arreglo lineal de bobinas que hacen la función de una botella, pero con cuellos magnéticos en los bordes axiales, así si un ion iniciara su trayectoria desde el centro hacia alguno de los bordes axiales experimentaría una especie de efecto de reflejo debido al intenso campo magnético de esa sección, y así lo haría hasta estabilizarse en la parte central de la botella que cuenta con un campo relativamente más pequeño que el de los bordes (Dolan, 2013).

Las fugas son un problema inherente de esta configuración, pues a pesar de ocuparse grandes campos magnéticos tiende a tener pérdidas en los bordes axiales, donde se supone que debe reflejar, sin embargo algunos piensan que esta característica podría ser aprovechada de alguna manera en esquemas de conversión directa, véase fig.1.4, y no depender de ciclos térmicos para obtener energía eléctrica (Kammash, 1982).

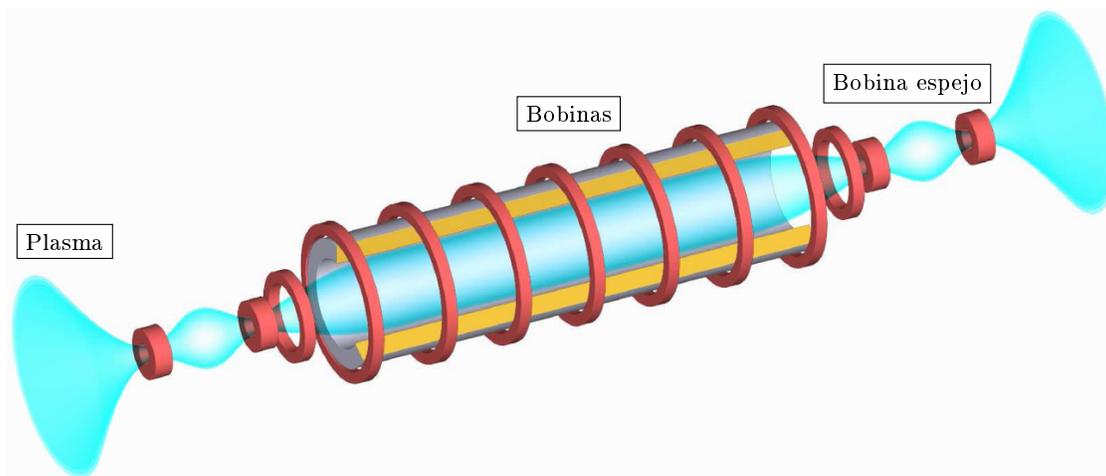


Figura 1.4: Esquema del funcionamiento básico de una configuración de espejo magnético, imagen obtenida de (Fowler *et al.*, 2017).

Aunque esta área de investigación ha tenido menor aceptación que las siguientes tres, aún es un campo activo en la investigación de fusión, y uno de sus mayores exponentes es el proyecto Gamma 10, en las instalaciones de la Universidad de Tsukuba en Japón (PCR, 2010), es así que a pesar de las dificultades para usar este tipo de tecnología podría regresar en algún momento como reactor avanzado.

### 1.2.2. Stellarator

El confinamiento dentro de una forma toroidal elimina las pérdidas en los puntos terminales, como en el caso de los espejos magnéticos, sin embargo esto acarrea otro tipo de problemas, pues al usar bobinas alrededor de un toroide en el centro el campo magnético es mayor debido a la alta concentración de líneas de campo, esto causa un desequilibrio en el campo que hace que las partículas se desvíen fuera del campo magnético, esto termina por desbaratar el plasma que se forma dentro (Chen, 2016).

Una de las primeras soluciones al problema planteado fue la configuración toroidal stellarator. Éste consiste en torcer las bobinas magnéticas alrededor de la superficie toroidal, para que las líneas de campo magnético tengan un giro adicional, y así formar una especie de malla, y evitar el desvío de las partículas fuera de plasma. La configuración stellarator se hace por medio de bobinas externas, como las mostradas en la fig. 1.5. Pero el éxito de los tokamak en durante los 60 le quitó la atención a este otro esquema, aunque éste tiene sus propias ventajas respecto a su competidor pues no tiene una limitación inherente en su tiempo de funcionamiento, gracias a que no depende de la acción constante de transformador como en el tokamak, y la destructiva terminación del plasma que deposita grandes cantidades de energía en las paredes de la cámara en cortos lapsos de tiempo (Stacey, 2012).

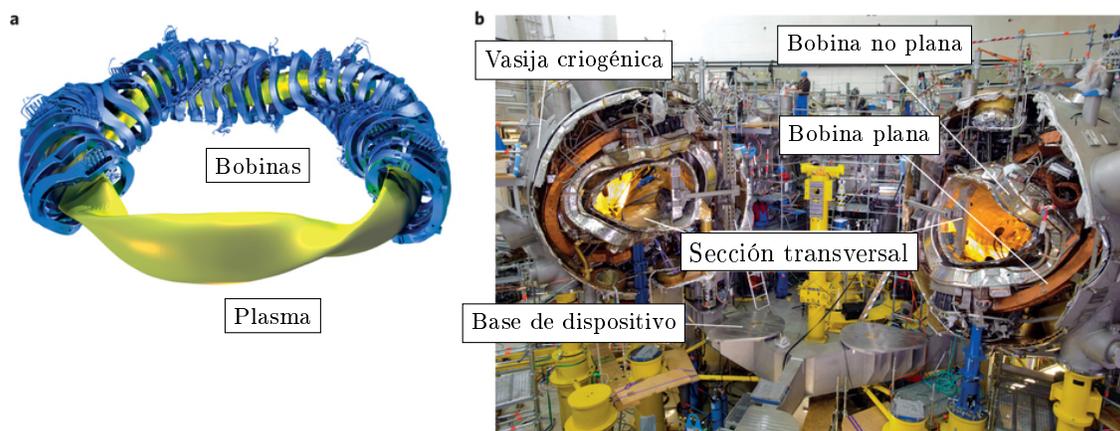


Figura 1.5: a) El stellarator Wendelstein 7-X, b) fotografía durante la construcción del mismo, imagen obtenida de (Ongena *et al.*, 2016).

A pesar de sus ventajas, también tiene limitantes como el mecanismo de pérdida denominado *microinestabilidades* (ésta es área activa de investigación), del que aún no se tiene un entendimiento concreto de como lidiar con dicho problema, además la complejidad de su estructura lo vuelve difícil de manufacturar (Dean, 2013). La investigación es limitada, pero existen proyectos prometedores, el más representativo es el *Wendelstein 7-X*, finalizado en 2014 inició operaciones a finales de 2015, localizado en Alemania (IPP, 2016), véase fig.1.5.

### 1.2.3. Tokamak

El nombre tokamak proviene del ruso *toroidalnaya kamera magnitnaya katushka*, que significa cámara toroidal con bobinas magnéticas. Este dispositivo fue dado a conocer en 1958 en la conferencia de Ginebra. Por aquellos días Rusia era el líder en tecnología de satélites, mientras que su investigación en fusión se hacía con equipo humilde y considerado hasta primitivo, lo que contrastaba con los americanos e ingleses que ostentaban máquinas caras, brillantes y con una buena ingeniería. Sin embargo el tokamak resultó ser el mejor dispositivo funcional y es el concepto principal de confinamiento magnético al día de hoy, fué desarrollado bajo el liderazgo del académico Lev Artsimovich basado en la idea de Andrei Sakharov e Igor Tamm, y ha sido adoptado por todas la naciones que trabajan en fusión por confinamiento magnético. De manera similar al stellarator, el tokamak también debe torcer las líneas de campo de forma helicoidal, la diferencia es que el tokamak lo simplifica al hacer pasar una gran corriente por el plasma que a su vez genera un campo magnético que adicionado al campo que proporcionado por las grandes bobinas toroidales, hace que las líneas de campo giren de manera helicoidal, véase fig.1.6. La corriente que pasa a través del plasma sirve para dos propósitos: tuerce el campo magnético y sirve para elevar la temperatura (Chen, 2011).

Los tokamaks son máquinas pulsadas. En cada pulso se crea un plasma, para ello la corriente en el plasma se eleva hasta a un valor constante, que se mantiene durante la descarga de plasma y ésta eventualmente disminuye hasta terminar la descarga (usualmente a estas tres fases se les conoce como *ramp-up*, *flat-top* y *ramp-down*). A pesar de su funcionamiento, los tokamaks son hoy el dispositivo más prometedor para el desarrollo de plantas de fusión. Es así que ha sido el enfoque con programas de investigación más intensivos. Prueba de ello son grandes experimentos como JET (Joint European Torus) (Inglaterra), DIII-D (E.U.A.), Asdex (Alemania) o el JT-60 (Japón) entre otros (Ariola y Pironti, 2008).

Experimentos como los antes mencionados han generado buenos resultados, como el caso del JET que en 1997, que con de una mezcla DT logró obtener 16MW de potencia de fusión, con lo que logró el récord, que aún conserva, con una  $Q = 0.65$  (factor de amplificación de potencia del plasma  $Q$ , se abundará sobre este

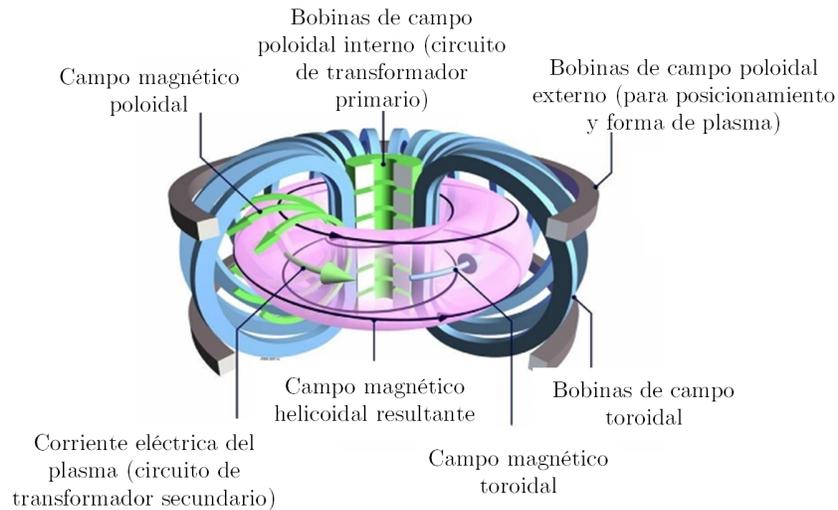


Figura 1.6: Esquema de la configuración básica de un tokamak, imagen adaptada de (ININ, 2013).

parámetro en el siguiente capítulo), es decir, obtuvo el 65% de energía invertida en el sistema para formar el plasma de fusión. Un año antes en Japón el JT-60U logró temperaturas superiores a los 520 millones de °C (Ongena *et al.*, 2016).

#### 1.2.4. Confinamiento inercial

Durante la década de los 70, con el desarrollo de láseres de alta potencia (la densidad de energía producida por un láser intenso usualmente se mide en gigabars, un gigabar de presión es equivalente a  $10^{14} \text{Jm}^{-3}$ ), semejantes condiciones de tan alta densidad de potencia podrían ser logradas en laboratorio, ha inspirado a muchos científicos que trabajaban sobre fusión no controlada. Así para 1972 John Nuckolls publica por primera vez la idea de comprimir pequeños blancos con láser, para llegar a las condiciones de ignición termonuclear (Betti y Hurricane, 2016). La fusión por confinamiento inercial también puede alcanzarse con otros métodos como el efecto z-pinch o con haces de iones, sin embargo el mayor progreso ha sido con la tecnología a base de láser, siendo NIF (National Ignition Facility) en el Laboratorio Livermore la instalación más grande en la actualidad (Chen, 2016), además la presencia de otros competidores como Megajoule Láser en Francia mantienen una gran expectativa en esta área (LMJ, 2016).

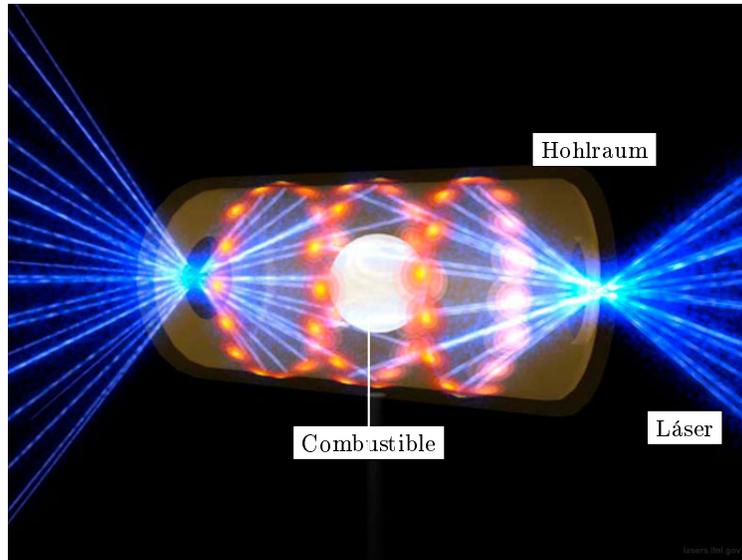


Figura 1.7: Fusión por confinamiento inercial láser de iluminación indirecta, imagen obtenida de (NIF, 2016).

En la fig.1.7, se muestra la forma en la que se lleva a cabo fusión con iluminación indirecta, en el centro el blanco con la mezcla combustible, DT, está rodeado por una capsula conocida como "hohlraum", a esta capsula se le disparan varios haces láser, para formar rayos X y estos a su vez ejercerán una gran presión sobre el combustible para que este se caliente y alcance condiciones deseadas de fusión. De acuerdo con Betti y Hurricane (2016) este tipo de experimentos son los de mayor envergadura en el NIF pero también se desarrolla un método por iluminación directa basado en el uso de un tipo de láser conocido como OMEGA.

### 1.3. ITER y la visión sobre el tokamak

El confinamiento magnético mejora con el tamaño, esto es claro desde hace mucho y es el motivo por el que se busca crear un gran dispositivo capaz de lograr un plasma en combustión. El dispositivo debe ser tan grande que no es posible costear todo para una sola nación, es así que el como surge el proyecto ITER, el camino en latín y probablemente lo sea. Alcanzar la condición de plasma en combustión, significa que el plasma producirá una ganancia superior a la energía consumida. El 80% de la energía de fusión es en forma de neutrones y tan sólo 20% es retenido en forma de partículas alfa, por lo que si bien es cierto que para lograr el equilibrio sólo se requiere alcanzar una  $Q = 1$ , para hacer que el plasma permanezca en ese estado de autocalentamiento es necesario al menos tener  $Q = 5$ , así que para tener un buen margen de seguridad, ITER ha sido diseñado para tener una  $Q = 10$ , existen otros objetivos además del anterior. Se pretende

producir una potencia de 500 MW, además muchos componentes deben ser diseñados, manufacturados y probados durante el período operación, éste también incluye las bobinas superconductoras y materiales de la coraza, se realizarán las primeras pruebas de un sistema que pueda generar tritio mediante el bombardeo de neutrones. ITER es el siguiente paso hacia la fusión, sin embargo es primordialmente un experimento (Chen, 2011). De modo que muchos problemas serán resueltos sobre la marcha, y en algunos casos probablemente sigan surgiendo nuevas interrogantes sobre el funcionamiento de la fusión.

Sin embargo pese a todas las grandes interrogantes, para 2009 ya se había concluido con el desarrollo y revisión de acuerdo a lo solicitado, así como el sitio de construcción en Cadarache en Francia. Ahora para tener una idea del tamaño de semejante máquina en la fig. 1.8 se presenta el dispositivo y a una persona de pie, que se encuentra en la parte inferior izquierda de la imagen. Este proyecto representa una gran apuesta para el mundo, que en 1985 gracias a los buenos resultados de los talleres sobre INTOR, el presidente Mijaíl Gorbachov de la U.R.S.S. le propuso al presidente Ronald Reagan de E.U.A. iniciar el desarrollo del dispositivo que eventualmente terminaría por consolidarse como el proyecto ITER, en el cual se involucraron la Unión Europea, Japón, Rusia, E.U.A., China, Corea del Sur y la India, originalmente iniciado por los primeros cuatro participantes (Stacey, 2010).

### **1.3.1. Reactor tokamak DEMO**

Con el proyecto ITER en puerta se demostrará la factibilidad de producir un plasma en combustión mediante confinamiento magnético, que use como mecanismo de calentamiento dominante las partículas alfa generadas en la reacción de fusión. Sin embargo ITER no está diseñado para producir electricidad. Por un lado el factor de amplificación de potencia de 10 no es suficiente, asumiendo una eficiencia térmica de 35% en la conversión de energía, además el funcionamiento del dispositivo estará limitado a cortos períodos seguido de largo intervalos de descanso y finalmente no será capaz de proveer su propio combustible, sólo se implementaran las pruebas de tecnología. Por lo que se ha anticipado, que a la par de ITER se desarrollará un generación de reactores demostrativos (DEMO). Estos funcionarán por periodos prolongados de tiempo en estado estacionario y con valores del factor de amplificación de plasma de entre 30 y 50, el diseño será de mayor tamaño que ITER, pero la diferencia será menor en relación a los predecesores de éste último (Ongena *et al.*, 2016).

Con ITER se marcará un nuevo límite en el campo de fusión, en el que se tendrá como tarea principal sentar las bases de lo que en algún momento serán reactores de fusión, en esto concuerda Stacey (2010) con la base de datos tokamak "convencional", que alberga los resultados logrados hasta el momento, mismos que

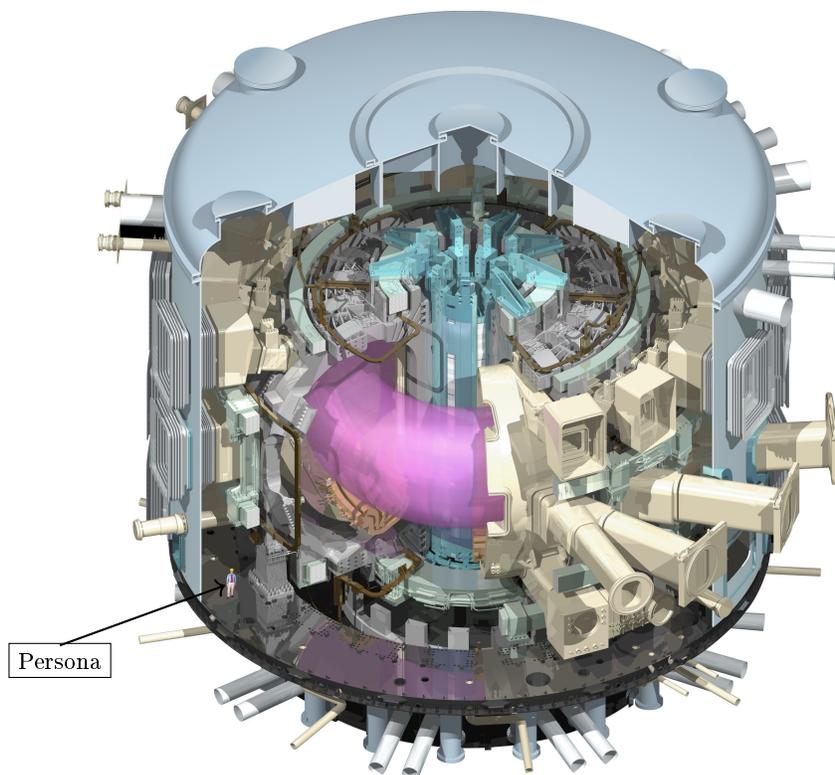


Figura 1.8: El tokamak ITER, con una altura total de 30 m, ITER es casi tres veces mayor que el JET, imagen obtenida de (ITER, 2009).

forman la base del diseño de ITER, por lo que el diseño de futuros tokamak será una extensión de esta base de datos. Por lo pronto de acuerdo con Ongena *et al.* (2016) parte considerable de la investigación sobre DEMO está planeada en el tokamak japonés JT-60SA, sucesor del JT-60U y actualmente en construcción.

### 1.3.2. Reactor nivel planta y usos alternativos

En cuanto al diseño de una planta de fusión nuclear, varios países han contribuido al desarrollo conceptual basados en el tokamak, sin embargo aún quedan muchos problemas por resolver como se planteó en el caso de DEMO. A continuación sólo se dará una breve reseña sobre los planes de E.U.A. para estos diseños y también para su uso alternativo como fuente de neutrones.

El caso estadounidense por medio del programa ARIES, fue iniciado por Robert W. Conn durante los 80. Con el pasar del tiempo se han realizado diferentes diseños de ARIES, gracias a los avances logrados en diversos ramos. Los diseños además no han sido exclusivos de los tokamak, también se ha cubierto la tecnología stellarator así como el confinamiento inercial (láser). Pero de regreso con los tokamak, el diseño

ARIES-AT (Tokamak Avanzado), tiene características que lo hacen muy atractivo, por ejemplo, al cambiar del típico ciclo de Carnot al ciclo Brayton se estima que tenga una eficiencia térmica del 59%, a un costo de cinco centavos de dolar por  $kWh$ , el diseño además producirá 1755  $MW$  de potencia de fusión, 1897  $MW$  de potencia térmica y 1136  $MW$  de electricidad. Los desechos de esta planta serán 30  $m^3$  por año, de éstos el 90% será de baja radiactividad en tanto que el resto deberá ser almacenado por 100 años. Por otro lado también los europeos han lanzado su propios diseños de planta en su programa *Estudios de una Planta de Energía Conceptual* o PPCS, al igual que en el caso de ARIES se han desarrollado varios modelos, y todos ellos con una capacidad de 1.5  $GW$  de electricidad (Chen, 2011). Las características de las plantas de fusión propuestas equiparan a las plantas convencionales actuales, y en el caso de su contraparte nuclear los desechos son mínimos y con períodos de radiactividad comparativamente reducidos.

La promesa de energía prácticamente ilimitada y amigable con el ambiente ha motivado el desarrollo de la fusión nuclear, sin embargo existen otras formas de aprovecharla, como fuente de neutrones que puede ser usada en un reactor nuclear subcrítico para criar núcleos fisionables ( $^{239}Pu$  o  $^{233}U$ ), y así reprocesar desechos almacenados de plantas de fisión, en vez de guardarlo por millones de años. En el caso del reciclaje de material transuránico, se ha examinado también la posibilidad de un reactor híbrido que puede usar una fuente de neutrones basada en el núcleo de la tecnología de ITER capaz de producir 3000  $MW_{th}$ , de modo que podría disponer del material proveniente de tres reactores de agua ligera de 1000  $MW_e$  de acuerdo con (Stacey, 2010).

## 1.4. El papel del control

Lograr producir un plasma de fusión como se ha revisado, es una gran tarea y uno de los apoyos para llevar a cabo ésto es el control retroalimentado, éste constituye una de las bases para muchas herramientas tecnológicas como los frenos ABS de un automóvil, el funcionamiento de los aviones e incluso en la naturaleza está presente, el cuerpo humano por ejemplo es capaz de regular su funcionamiento ante perturbaciones externas.

De manera explícita la necesidad de usar algoritmos de control se reduce a mitigar las posibles inestabilidades en el sistema. Éstas pueden deberse a propiedades del sistema (internas) o bien a acciones que ocurran alrededor de éste (inestabilidades externas), para asegurar un funcionamiento adecuado. Un controlador automático compara el valor real y de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un

valor pequeño (Ogata, 2010). Los controladores están asociados también con la confiabilidad y rendimiento. Ambas son de gran importancia, por un lado la confiabilidad para poder asegurar el funcionamiento del sistema durante prolongados períodos de tiempo, en tanto que el desempeño asegure por ejemplo la calidad de un buen confinamiento que es un requerimiento básico para mantener los costos de electricidad tan bajos como sea posible (Martin, 2011).

Los problemas de control en un tokamak se dividen en dos grandes tipos: control electromagnético y control de la cinética de plasma. El control electromagnético se refiere a controlar los campos magnético y eléctrico, los cuales mantienen o cambian la posición, forma y corriente del plasma. El control de la cinética del plasma se refiere a controlar las tasas de alimentación y calentamiento, para modificar la densidad, temperatura, presión y densidad de corriente del plasma (Schuster y Ariola, 2006). Y para hacer que un reactor de fusión logre dar solución a estos problemas es necesario el uso de control activo, pues aunque existen regiones de operación estables, desafortunadamente éstas se encuentran en regiones con limitantes económicas y tecnológicas, que llevan a plantear regiones operación inherentemente inestables (Schuster *et al.*, 2001).

## Capítulo 2

# Fundamentos de la fusión

A continuación se presentan conceptos básicos sobre la relación materia y energía, la elección del combustible que será usado por los reactores de fusión de primera generación así como mecanismos que intervienen en el fenómeno de fusión controlada mediante un dispositivo tokamak.

### 2.1. Materia, energía y combustible

Antes de comenzar a profundizar en los detalles que involucra la fusión, es pertinente mencionar algunas de las características propias de un gas. Éste es caracterizado por un número de partículas por unidad de volumen, o densidad de número  $n$ , con unidades en  $m^{-3}$ , y el movimiento de sus partículas por la temperatura del gas  $T$ , la cual está dada en  $keV$  (Piel, 2010).

Ahora bien la materia y la energía están estrechamente relacionadas, ésto se puede observar en las caídas de agua de una presa, donde un flujo de agua al pasar por una turbina lleva a la producción de energía, también al dividir átomos pesados se genera calor que se usa para producir vapor o bien el caso contrario en el que se unen átomos ligeros en el que se genera considerables cantidades de energía cinética de acuerdo con Harms *et al.* (2000). Así para el caso de la fisión nuclear inducida en un núcleo de  $^{235}U$ , ésta se representa de la siguiente forma:

$$n + {}^{235}U \rightarrow \nu N + \sum_i P_i, \quad (2.1)$$

dónde  $n$  representa a un neutrón,  $P_i$  es el producto de un reacción en particular y  $N$  es el número de neutrones emitidos en el proceso. La energía liberada tiene una dependencia de la energía cinética del neutrón inicial pero típicamente de  $\sim 200 \text{ MeV}$ , en tanto que para la reacción de fusión a ser usada (deuterio y tritio) está dada por:



con una energía de  $17.6 \text{ MeV}$ . Se puede apreciar que la energía producida durante la fusión es menor que la de la fisión, sin embargo es significativamente mayor por unidad de masa.

Para entender la precedencia de la energía de fusión, Ariola y Pironti (2008) explican al respecto, que la masa de los núcleos atómicos después de fusionarse no es la misma que la de sus precursores, una pequeña cantidad se pierde en el proceso, esta masa es convertida en energía y se puede cuantificar mediante la famosa fórmula de Einstein:

$$E = (m_r - m_p) c^2, \quad (2.3)$$

dónde  $E$  es la energía resultante de la reacción,  $m_r$  es la masa precursora,  $m_p$  es la masa resultante y  $c$  es la velocidad de la luz. Stacey (2012) va más allá en la explicación y propone lo siguiente: *cualquier proceso que resulte en núcleos convertidos en otros núcleos con mayor energía de unión por nucleón resultará en la conversión de masa en energía*, de modo que al fusionar dos núcleos se forma otro núcleo en estado excitado que decae en productos, con su respectiva conversión de masa a energía como se muestra en la fig.2.1.

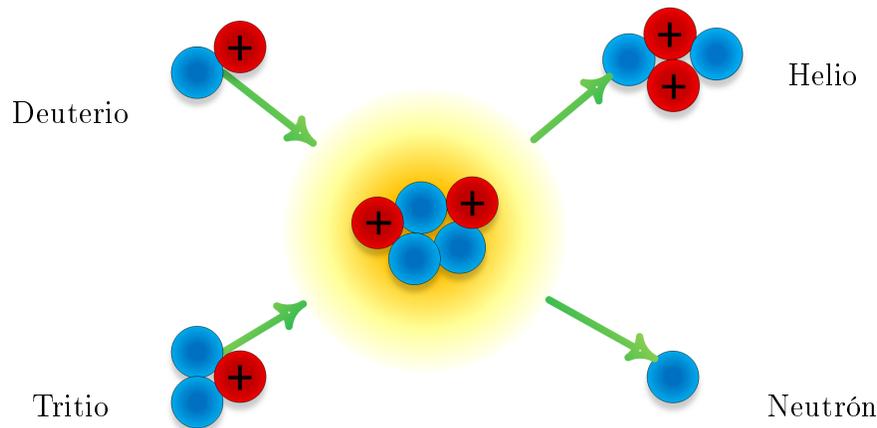


Figura 2.1: Ilustración del fenómeno de fusión, imagen adaptada de ININ (2013).

En la fig.2.2 se observa que la energía de unión por nucleón es menor para núcleos ligeros, y escala rápidamente conforme los núcleos son más pesados hasta alcanzar su máximo en el hierro. Es decir el material más estable, y a medida que los núcleos son cada vez más pesados comienza a disminuir la energía de unión por nucleón, esto se da porque la fuerza fuerte tiene un rango de acción pequeño, lo que vuelve más inestables a estos núcleos y por ende más fáciles de separar. Es esta la razón por la que para aprovechar la energía contenida en los átomos se busca fisiónar núcleos pesados o bien fusionar núcleos ligeros.

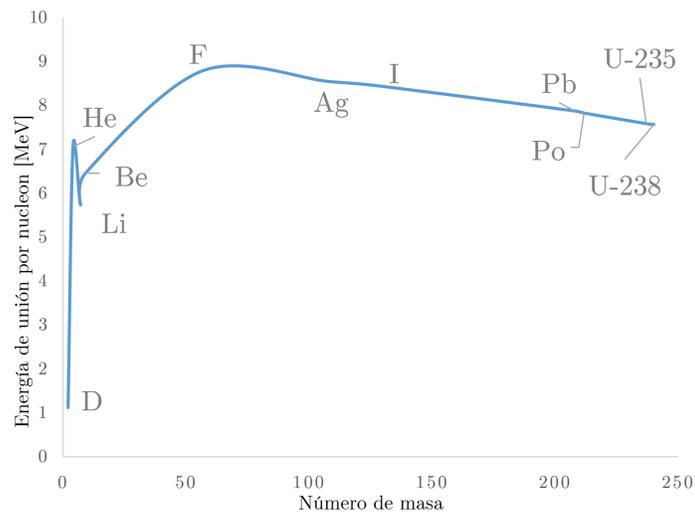


Figura 2.2: Energía de unión por nucleon, gráfico obtenido con información de NIST (2016).

Actualmente se busca fusionar la mezcla de combustible deuterio tritio o *DT*, para acortar, sin embargo no es la única a la cual se le puede sacar provecho. En la fig. 2.3, se muestran una variedad de reacciones posibles, el caso por ejemplo D-D no produce neutrones, culpables de la radiación, y sólo produce un protón que podría aprovecharse de manera directa, aunque también puede darse un caso en el ésta misma reacción produce un neutrón, y al tener los mismos precursores existe la misma probabilidad de que suceda, por otro lado el deuterio podría fusionarse también con el helio producido, esta reacción no produce neutrones pero es más complicada de lograr. La penúltima reacción se muestran sólo para dar una idea del mecanismo que se podría seguir para la obtención de tritio, y de esta manera los reactores de fusión puedan producir su propio combustible. En tanto que la última reacción se trata de un posible ciclo de combustible que no produce neutrones (IAEA, 2012).

## 2.2. Tasa de reacción

Para que una reacción de fusión pueda llevarse a cabo es necesario que los núcleos involucrados tengan energía necesaria para superar la repulsiva fuerza de Coulomb que actúa sobre ellos, y acercarse lo suficiente para que la fuerza fuerte sea lo mayor (pues el rango de la fuerza de Coulomb es superior al de la fuerza fuerte), se logra elevando la temperatura, tanto como varios millones de grados (Stacey, 2010). Cada reacción tiene su truco, y la primera es la más sencilla, en palabras de Lawson (1957) *es por mucho la más probable a bajas energías*, esto porque tiene una sección eficaz muy grande a bajas temperaturas (debajo de 1 MeV), como se muestra a continuación.

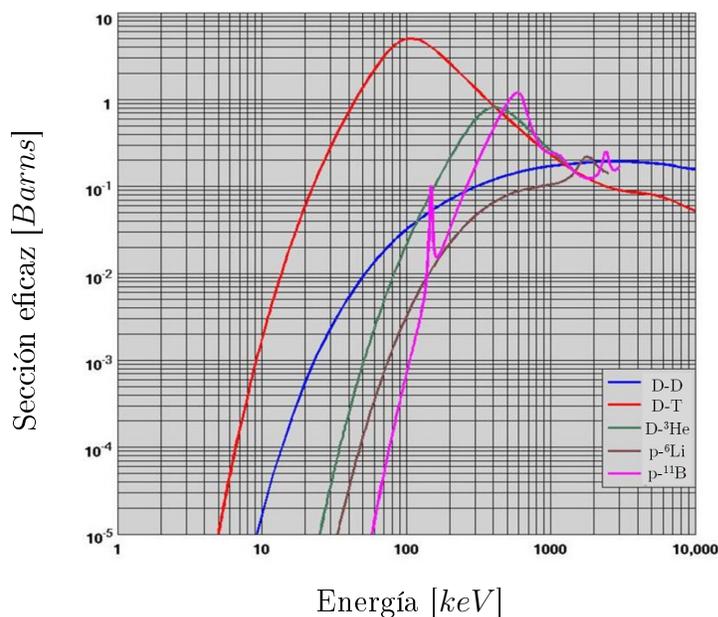


Figura 2.3: Sección eficaz para varias reacciones, imagen tomada de IAEA (2012).

En la fig. 2.3 se muestran algunas de las reacciones de fusión y sección eficaz en función de la energía a la que colisionan. La sección eficaz es la distancia máxima entre los núcleos a la cual la fuerza fuerte entra en acción y es capaz de fusionar núcleos. La tasa a la cual se fusionan los núcleos Hively (1977) la expresa como sigue:

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right), \quad (2.4)$$

dónde  $T$  es la temperatura del sistema en tanto que las constantes  $a_i$  y  $r$  para la mezcla DT tienen los valores de la tabla 2.1. La tasa de reacción está dada en unidades  $\text{cm}^3\text{s}^{-1}$ . Para propósitos de comparación en la fig. 2.4 se muestra la tasa de reacción para las mezclas DT y  $D-^3\text{He}$ , aquí se puede apreciar que los eventos de fusión son más probables para el caso de la mezcla DT a bajas temperaturas mientras que para el la mezcla  $D-^3\text{He}$  virtualmente el requerimiento de la temperatura se hace mayor, cabe mencionar que este último caso tiene la segunda mejor sección eficaz, y es esta la razón por lo que la mayoría de la investigación en la actualidad está dedicada a esta mezcla combustible.

Tabla 2.1: Coeficientes para la tasa de reacción de Hively (1977).

Variable	Valor
$a_1$	-21.377692
$a_2$	-25.204054
$a_3$	$-7.1013427 \times 10^{-2}$
$a_4$	$1.9375451^{-4}$
$a_5$	$4.9246592 \times 10^{-6}$
$a_6$	$-3.9836572 \times 10^{-8}$
$r$	0.2935

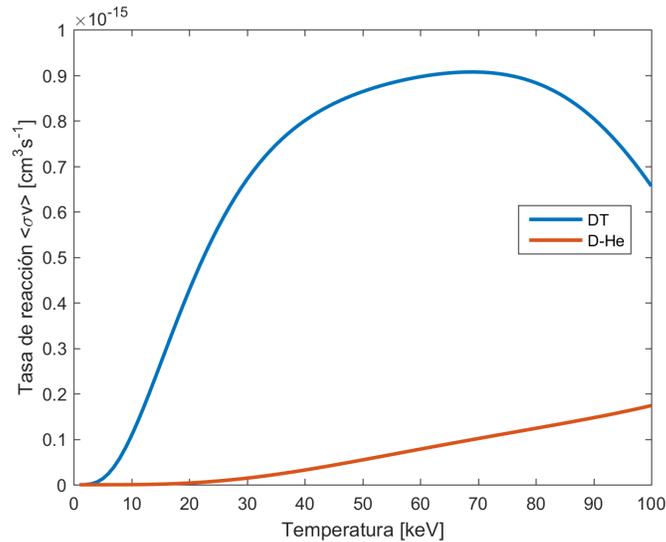


Figura 2.4: Tasa de reacción para las mezclas DT y  $D-^3\text{He}$ , gráfico obtenido con información de Hively (1977).

De los  $17.6\text{ MeV}$  producidos como energía cinética durante la reacción,  $14.1\text{ MeV}$  van al neutrón y  $3.5\text{ MeV}$  van a la partícula alfa. Las partículas alfa son retenidas en el plasma y sirven para mantener el plasma caliente, los neutrones se dispersan en el reactor para calentar, de modo que el reactor se vuelva una fuente de calor, en este punto es donde el sistema puede quedar activado por el bombardeo de neutrones, mismo que

también será utilizado en un futuro para un sistema que pueda producir tritio, es en este apartado también dónde ha sido propuesto el uso de sistema como fuente de neutrones para sistemas híbridos fusión-fisión (Stacey, 2010).

### 2.3. Potencia de fusión y el Criterio de Lawson

Una vez calentado lo suficiente, mantener el plasma en combustión y además al reactor de fusión produciendo energía, requiere que produzca más energía por unidad de tiempo de la que se pierde. Ésta es la finalidad última que persigue el tokamak así como otros ejemplos que se han revisado. A continuación se presentarán algunas de las condiciones necesarias para lograrlo. Como ya se ha dicho el combustible que se usará es la mezcla  $DT$ , para éste la densidad de energía (por unidad de volumen) de acuerdo con Schuster *et al.* (2002):

$$E = \frac{3}{2}nT, \quad (2.5)$$

dónde  $T$  la temperatura del sistema dada en  $keV$  y  $n$  es la densidad del gas en cuestión y tiene la forma:

$$n = 2n_{DT} + 3n_{\alpha} + (z_I + 1)n_I, \quad (2.6)$$

dónde  $n_{DT}$  es la densidad de la mezcla combustible,  $n_{\alpha}$  es la densidad de partículas alfa producidas,  $n_I$  es la densidad de impurezas, estas densidades están dadas en partículas por unidad de volumen ( $m^{-3}$ ), y éstas últimas harán la función de control en tanto que  $z_I$  es el número atómico de una impureza arbitraria, de modo que las densidades por unidad de volumen son  $m^{-3}$ . Con lo que se da lugar al balance de energía dado por:

$$\dot{E} = P'_{fus} + P_{aux} - P_{rad} - P_{TR}, \quad (2.7)$$

en donde  $P'_{fus}$  es la potencia que se queda en el plasma,  $P_{aux}$  es la potencia exterior suministrada para calentar el plasma y finalmente  $P_{rad}$  y  $P_{TR}$  son la potencia perdida por el plasma.

Las pérdidas en el plasma pueden ser de dos tipos: la primera por el hecho de que el confinamiento no es perfecto ( $P_{TR}$ ) por lo que el calor y algunas las partículas se pierden del plasma, el segundo mecanismo

de pérdida es debido a la radiación ( $P_{rad}$ ). La densidad de potencia producida por fusión de la densidad de partículas y la temperatura del sistema y la temperatura tan alta tiende a vencer la fuerza de repulsión y favorecer la fuerza fuerte, en tanto que la densidad aumentará la probabilidad de fusionar núcleos (Ariola y Pironti, 2008). Si se asume que la mezcla combustible contiene un igual número de ambas partículas (50% – 50%) entonces se tendrá una reactividad de la siguiente manera

$$R_{DT} = n_D n_T \langle \sigma v \rangle = \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \langle \sigma v \rangle, \quad (2.8)$$

esta reactividad está dada en  $m^{-3}s^{-1}$ . Para calcular la potencia producida basta con multiplicar la reactividad por la cantidad de energía producida en la reacción ( $Q_{fus} = 17.6 \text{ MeV}$ )

$$P_{fus} = \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \langle \sigma v \rangle Q_{fus}. \quad (2.9)$$

De manera similar si se desea encontrar la potencia presente en el plasma  $P'_{fus}$ , se usa la energía dentro de las partículas alfa ( $Q_\alpha = 3.5 \text{ MeV}$ ) en vez de la energía total de la reacción ( $Q_{fus}$ ). De regreso en la ec. 2.7, se espera que los términos de fuente superen a las pérdidas, y la energía del plasma permanezca constante. Llegado este punto es útil definir el tiempo de confinamiento de energía  $\tau_E$  y el factor de amplificación  $Q$ . Para el tiempo de confinamiento se tiene:

$$\tau_E = \frac{E}{P_{TR}}. \quad (2.10)$$

Este tiempo  $\tau_E$ , de acuerdo con (Ariola y Pironti, 2008): *es el tiempo característico del decaimiento de la energía en el plasma*, mientras que para Chen (2011): *es la medida de que tan rápida (o lenta) la energía debe ser suministrada para mantener  $T$  constante*, y finalmente para Stacey (2012): *es el tiempo mínimo que la energía debe ser confinada, por lo que debería estar definido en términos de la razón entre la energía contenida en el plasma y la tasa de pérdida de energía*. Es decir, es necesario mantener por algún tiempo mínimo la energía contenida para así sacarle provecho y aunque existen varias definiciones son muy similares. Sin embargo existen tiempos de confinamiento empíricos propuestos que conforman parte de la base de datos de ITER. Por otro lado el factor de amplificación es la proporción entre la potencia producida por fusión y la potencia auxiliar suministrada, el cual está dado por:

$$Q = \frac{P_{fus}}{P_{aux}}. \quad (2.11)$$

En el caso de tener  $Q = 1$  la potencia producida es capaz de igualar a la potencia suministrada, es en sí un estado de equilibrio en que la potencia de fusión iguala a la auxiliar. A esta condición se le conoce como *break-even*. En el caso de  $Q \rightarrow \infty$  se alcanza la condición de ignición, el plasma es capaz de sostener la reacción de fusión por sí mismo. Entonces ya no es necesario suministrar potencia auxiliar. Y es por esto que proyectos como el tokamak DEMO deben operar con un factor de amplificación considerablemente mayor que 1. Y aunque todavía hay largo camino recorrer antes de lograrlo, como ya se ha mencionado anteriormente existen máquinas como JET o JT-60 que han logrado acercarse. Cabe mencionar que el JT-60 opera únicamente con mezcla  $D-D$ , pero las condiciones del plasma son suficientes para alcanzar una  $Q > 1$  si operara con la mezcla  $DT$ . Las condiciones de break-even usualmente son expresadas por medio del criterio de Lawson (Ariola y Pironti, 2008).

El criterio de Lawson originalmente propuesto por Lawson (1957), describía, bajo el supuesto de un confinamiento ideal, la duración de un pulso dentro de un reactor de fusión, sin embargo a la fecha en los experimentos realizados se han llevado a cabo descargas de plasma mediante confinamientos limitados. Por esta razón se usa en la actualidad tiempos de confinamiento  $\tau$  (Mlyná, 2011), como la relación descrita en la ec. 2.10. En la actualidad es más frecuente encontrar lo que se conoce como el triple producto ( $n\tau T$ ), en vez del criterio de Lawson. En la fig. 2.5 se muestra la evolución del triple producto a lo largo de los años y de los diferentes experimentos que se han realizado, y en la cima las condiciones de reactor donde se puede apreciar las altas expectativas sobre ITER; se hace una distinción entre experimentos que han usado mezcla  $DT$  y  $DD$ , como se puede observar la mezcla con tritio ha tenido menores participaciones, esto debido a los problemas de retención de tritio en la pared y la activación por los neutrones (Herrera Velázquez, 2007).

## 2.4. Pérdidas

La forma en que el plasma pierde energía se debe principalmente a la emisión de radiación, pues las interacciones de algunas partículas no siempre serán las deseadas y también existen efectos relacionados con el campo magnético que promueven emisiones de radiación. Las pérdidas del plasma pueden deberse también a las imperfecciones del confinamiento, en el primer caso el tiempo de confinamiento dado por la ec. 2.10 para el cual se usará la relación ITER90H-P presentada por originalmente por Uckan (1993) y modificada más tarde por (Schuster *et al.*, 2001) para ajustarse a mejoras recientes, entonces para el tiempo de confinamiento



principal de pérdida de potencia en el plasma.

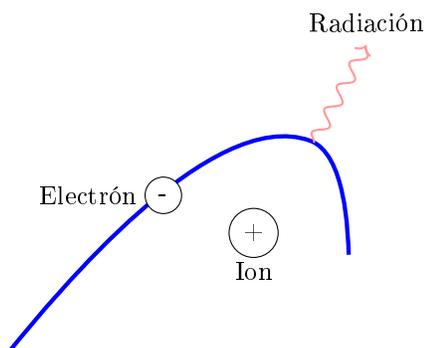


Figura 2.6: Radiación de frenado, imagen adaptada de Harms *et al.* (2000).

En la fig.2.6 se muestra que al pasar un electrón dentro de las inmediaciones del campo electrostático de un ion pesado, el primero es desviado y en consecuencia frenado, emitiendo radiación. Para la radiación de frenado Schuster *et al.* (2002) proporciona la siguiente relación:

$$P_{rad} = A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T}, \quad (2.13)$$

dónde  $A_b$  es una constante de proporcionalidad y tiene la forma  $A_b = 5.5 \times 10^{-37} W m^3 / \sqrt{KeV}$ ,  $n_e$  es la densidad de electrones, de modo que  $P_{bre}$  tiene unidades de  $W \cdot m^{-3}$ , además  $Z_{eff}$  es el número atómico efectivo para los diferentes tipos de iones y está dado por:

$$Z_{eff} = \frac{\sum_i n_i z_i}{n_e}, \quad (2.14)$$

donde la  $n_i$  es la densidad de iones presentes considerados impurezas,  $z_i$  es nuevamente el número atómico de las impurezas.

### 2.4.2. Radiación de ciclotrón

Hasta este punto ya se ha abordado la necesidad de un confinamiento que permita controlar al plasma de fusión, y evitar el contacto con las paredes del dispositivo, afortunadamente mediante el uso de campos magnéticos es posible contener al plasma y evitar así que el agresivo plasma dañe el dispositivo en cuestión.

Una partícula moviéndose en un campo magnético experimentará la fuerza de Lorentz, que es

perpendicular tanto a la dirección de movimiento de la partícula como a la dirección de campo magnético. Esta fuerza no afecta la componente de movimiento de la partícula en la dirección de campo magnético, pero causa aceleración a cierto ángulo con respecto a la dirección de la partícula en un plano perpendicular a la dirección de campo magnético, produciendo así un movimiento circular de la partícula en el plano. Por lo tanto la partícula se moverá sobre el campo magnético y además de manera circular (Stacey, 2010), formando así una hélice.

El movimiento helicoidal de una partícula cargada, guiada por las líneas de campo magnético uniforme como se muestra en la fig.2.7, de acuerdo con Harms *et al.* (2000), involucra una aceleración centrípeta y por lo tanto la lleva a emitir radiación, llamada radiación de ciclotrón y evidentemente involucra una pérdida de energía para la partícula.

Nótese además que la pequeña masa de los electrones asegurará que con ayuda de su alta aceleración (recordemos que  $a_e = F/m_e$ ) los electrones serán los principales contribuidores a esta pérdida de potencia de ciclotrón. De modo que la radiación de los iones es despreciada.

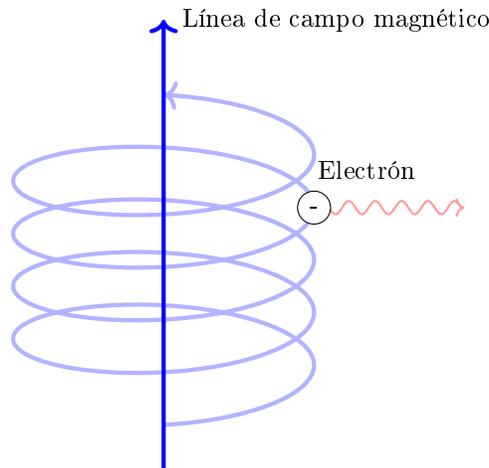


Figura 2.7: Radiación de ciclotrón.

$$P_{cyc} \propto A_{cyc} n_e B^2 T \tag{2.15}$$

Donde una constante de proporcionalidad es explícitamente introducida. Donde  $n_e$  es la densidad de electrones con unidades de  $m^{-3}$ , el campo magnético  $B$  en *Tesla*, la constante está dada por  $A_{cyc} \approx 6.3 \times (10)^{-20} J (eV)^{-1} \cdot (Tesla)^{-2} \cdot s^{-1}$  para  $P_{cyc}$  sus unidades son  $W \cdot m^{-3}$ . Así, la radiación de ciclotrón es más importante a campos magnéticos grandes y altas temperaturas de los electrones. Ciertamente, con electrones

a una posible alta energía, puede que necesiten ser estudiados con un tratamiento relativista. La radiación de ciclotrón existe en el espectro de radiación del infrarrojo lejano con una longitud de onda  $10^{-3} - 10^{-4}$  m y por lo tanto parcialmente reabsorbido por el plasma, sin embargo sólo se considerará la pérdida que se presente.

## 2.5. Impurezas

Idealmente el plasma en un reactor de fusión involucra variedades del hidrógeno. Sin embargo, las impurezas son inevitables. Se espera que al menos exista la presencia de ceniza de *He*, pero también es casi seguro que habrá interacciones con las paredes del dispositivo contenedor, por lo que en algún momento podría existir la presencia del material de las paredes en el plasma. Las impurezas dentro del plasma tienen dos funciones, una dañina y la otra benéfica, ambas tienen que ver con el enfriamiento del plasma, en el caso de las partículas de *He* son tolerables para el sistema, aunque sólo en un 10 %, pues los elementos con bajo número atómico ( $z$ ) a relativamente bajas temperaturas ( $T < 1$  keV) pierden sus electrones, quedando un núcleo desnudo, lo que resulta en una baja emisión de radiación a diferencia de los elementos con una alta  $z$ , éstos tienden a conservar algunos de sus electrones orbitales aún a altas temperaturas, lo que los convierte en emisores de radiación eficientes. Sin embargo, como se ha dicho no todos los efectos de las impurezas son dañinos, también tienen un uso benéfico pues de manera controlada se pueden usar como método de enfriamiento. Adicionalmente los elementos con una  $z$  baja pueden radiar de manera similar a los que tienen una  $z$  alta, cuándo los primeros se encuentran en el borde de la superficie del plasma, donde la temperatura del sistema es más baja. Esta situación puede resultar favorable, pues se puede usar impurezas para radiar cierta cantidad de energía cuando se va a depositar los residuos del plasma en partes del reactor como los "divertores" (Stacey, 2012), que son básicamente el escape del exceso de energía en el reactor.

## Capítulo 3

# Alcance, objetivos y metodología

### 3.1. Alcance

Esta tesis apunta a analizar y observar la inclusión de un nuevo parámetro de pérdida en un modelo no lineal promedio, sobre el fenómeno de quema de fusión nuclear. Además se promueve la idea del uso de un controlador basado en el uso de las impurezas dentro del reactor que harán la función de actuador para controlar la temperatura del sistema. Este controlador será sometido a perturbaciones en las variables de densidad y potencia auxiliar. Los datos de las simulaciones se suponen disponibles en todo momento, ya sea por medio de mediciones o estimaciones. De modo que el énfasis de esta tesis estará dirigido a los siguientes objetivos.

### 3.2. Objetivo general

Modelado y simulación para el control de un plasma de fusión abundando en los parámetros de pérdida y haciendo uso de las partículas de impureza como método de control.

### 3.3. Objetivos particulares

1. Resolver numéricamente las ecuaciones cinéticas que rigen el comportamiento del fenómeno de fusión en función de variables promedio respecto a las dimensiones del reactor.
2. Establecer una metodología para el análisis dinámico de los procesos energéticos del reactor de fusión considerado (tokamak).
3. Verificar el método con datos de literatura especializada y resultados de experimentos similares disponibles.
4. Proponer una estrategia de control para el sistema.

### 3.4. Metodología

De acuerdo a los objetivos establecidos, se describe a continuación una metodología, que contiene 3 puntos principales. En la primera etapa, se plantea el modelo de la quema de fusión para tres poblaciones involucradas y sus interacciones a una temperatura dada, y además se resuelve el modelo a través de simulaciones numéricas. En la segunda etapa se analiza la respuesta del sistema para posteriormente desarrollar un controlador, que pueda mantener el sistema funcionando en un punto de equilibrio donde se ha alcanzado un plasma en estado ígneo ( $Q \rightarrow \infty$ ).

#### 3.4.1. Planteamiento del modelo

El sistema de referencia es un tokamak. Éste deberá alcanzar temperaturas de alrededor de  $8 \text{ keV}$  ( $\sim 10^8 \text{ K}$ ), alimentado de una mezcla de combustible deuterio-tritio (50% – 50%). Las dimensiones y parámetros del dispositivo se basan en datos de la revisión del proyecto ITER-CDA (Uckan, 1993), véase la tabla 3.1.

Con esta información se inicia por definir el problema sobre el fenómeno de fusión. Se busca obtener un modelo que proporcione la información suficiente acerca de la interacción materia-energía y la influencia de partículas de impurezas sobre el proceso.

Tabla 3.1: Parámetros de ITER de acuerdo a la revisión CDA proporcionada por Uckan (1993).

Variable	Parámetro	Valor
$I$	Corriente del plasma	22 MA
$R$	Radio mayor	6.0 m
$A$	Radio menor	2.15 m
$B$	Campo magnético	4.85 T
$\kappa_\chi$	Elongación de plasma	2.2
$k_\alpha$	Cte. de confinamiento para alfas	7
$k_{DT}$	Cte. de confinamiento para combustible	3
$k_I$	Cte. de confinamiento para impurezas	10
$V$	Volumen de plasma	1100 m <sup>3</sup>

- Se elige la mezcla combustible para el estudio, dado que de ésta depende el parámetro de la tasa de reacción que nos dará la información de las interacciones a determinadas temperaturas.
- Se determinan los parámetros de ganancia y pérdida del sistema, dependiendo de cada una de las poblaciones involucradas en la fusión e inclusión de impurezas.

Será un modelo, relativamente sencillo, que trata al plasma como una entidad uniforme y cuasineutra, caracterizado por densidades de partículas de combustible, partículas alfa, partículas de impurezas y una temperatura promedio. En el modelo que se toma no existe la contribución de pérdida por parte de la radiación de ciclotrón la cual predomina en rangos distintos a los de la radiación de frenado. La primera será incluida en esta tesis para observar los efectos de ésta sobre el sistema. Se busca elaborar simulaciones mediante software Matlab para determinar variaciones que pueden presentarse por la presencia de esta nueva aportación.

### 3.4.2. Controlador

Una vez establecido el modelo para las poblaciones de partículas y la temperatura, se busca aplicar una metodología de control lineal. Llevarlo a la forma

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), y(t), t), \quad (3.1)$$

donde,  $x(t)$  es el vector de estados,  $u(t)$  la entrada del sistema y  $y(t)$  la salida. Dado que el modelo tiene una naturaleza no lineal se procederá a aplicar una linealización mediante expansión en series de Taylor para poder aproximar el modelo no lineal (se desprecian los términos de orden superior), y así éste cumpla

el principio de superposición. Esto supondrá grandes ventajas para fines de desarrollar una estrategia de control. Y aunque si bien el sistema consta de múltiples variables, sólo se tomará en cuenta la ecuación relacionada con la temperatura pues se desea mantener dentro de cierto equilibrio el sistema, adicionalmente contiene toda la información acerca del sistema. Se asume que la información de las variables se encuentran disponible ya sea por estimaciones como el escalamiento (tiempo de confinamiento  $\tau$ ) o bien por mediciones como las bolométricas que proporcionan información sobre la temperatura o bien la interferometría que proporciona información sobre densidades de partículas (estos métodos de medición no serán tomados en cuenta en el presente trabajo) de acuerdo con Orsitto *et al.* (2016), mientras que un tiempo razonable para realizar muestreos sobre este tipo de sistema estaría alrededor de 10 *ms*.

Se procederá entonces a realizar un análisis en lazo abierto, de una entrada y una salida, del sistema bajo dos señales de prueba (escalón e impulso), y determinar su comportamiento para diferentes entradas de perturbación. De igual forma se determinará el tipo del sistema lo cual ayudará a sugerir una estrategia de control, para lo que se usará a la fuente de impurezas ( $S_I$ ) como variable de control, dada su funcionalidad muy similar a la de las barras de control en el caso de un reactor de fisión.

### 3.4.3. Diagrama de bloques de la metodología

La metodología descrita anteriormente, se resume en el siguiente diagrama de bloques:

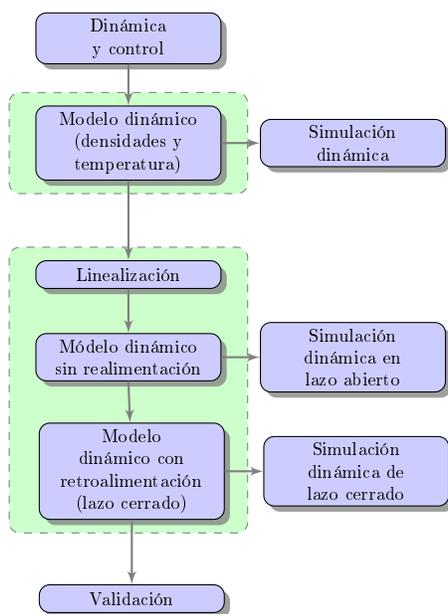


Figura 3.1: Diagrama de la metodología de trabajo.

## Capítulo 4

# Quema de fusión

A continuación a través del siguiente capítulo se dará una descripción del caso de estudio, un modelo no lineal que comprende a las especies de partículas involucradas así como la energía presente en ellas, además en este apartado es introducido un nuevo término de pérdida, y se hará uso del lenguaje de Matlab para simular el modelo mediante el método de Euler.

### 4.1. Modelo

Una vez calentado el plasma, para mantenerlo en su forma ígnea debe existir un balance entre las fuentes de calor y las pérdidas de potencia.

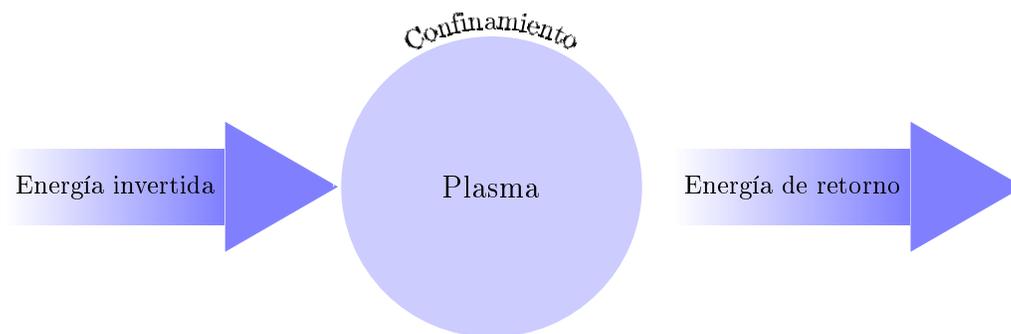


Figura 4.1: Esquema de operación del sistema.

La forma más simple de estudiar el plasma en un reactor de fusión, es tratarlo como una entidad uniforme y cuasineutra, caracterizado por densidades de electrones, iones de combustible, partículas alfa y partículas de impurezas así como la temperatura. En vez de resolver la ecuaciones de conservación de momento, para el movimiento de las partículas a través del campo magnético, se usa simplemente un tiempo  $\tau_E$  característico para las pérdidas de energía y  $\tau_i$  las partículas involucradas (el subíndice  $i$  toma las formas  $\alpha$ ,  $DT$  e  $I$  para las especies de partículas), mejor conocido como *tiempo de confinamiento* (Dolan, 1982).

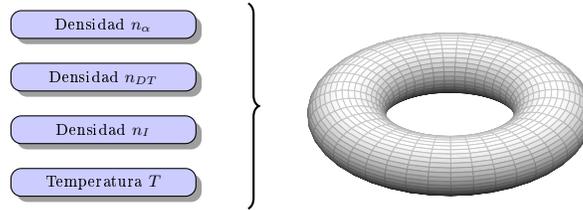


Figura 4.2: Plasma como entidad uniforme.

El plasma entonces estará conformado de igual concentración de partículas negativas y positivas por unidad de volumen, es decir:

$$n_e = n_{DT} + 2n_\alpha + \sum_i z_i n_i \quad (4.1)$$

donde la suma se usa para todas las especies de iones, excepto partículas alfa y partículas de combustible,  $z_i$  seguirá siendo el número atómico de la especie que se esté tratando en tanto que  $n_i$  hace referencia para la densidad de  $i$ -ésima especie. Por simplicidad se asume una misma concentración de especies para la mezcla combustible, además los eventos de fusión debidos al mismo tipo de partículas son despreciables en comparación con los eventos  $DT$ , y usando  $\tau_\alpha$  para el tiempo de confinamiento de las partículas alfa. La ecuación para conservación de partículas alfa es:

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = \underbrace{-\frac{n_\alpha}{\tau_\alpha}}_{\text{Pérdidas por confinamiento}} + \underbrace{\left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle}_{\text{Aportación por eventos de fusión}}. \quad (4.2)$$

Ahora, la tasa a la que son consumidos los iones por eventos de fusión será  $2R_{DT}$ , véase ec. 2.8, pues por cada evento son consumidos dos iones y usando  $\tau_{DT}$  para el tiempo de confinamiento de las partículas de combustible, la ecuación para la conservación de partículas de combustible (mezcla DT) es la siguiente:

$$\frac{dn_{DT}}{dt} = - \underbrace{\frac{n_{DT}}{\tau_{DT}}}_{\text{Pérdida por confinamiento}} - 2 \underbrace{\left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle}_{\text{Pérdida por evento de fusión}} + \underbrace{S}_{\text{Fuente de combustible}} . \quad (4.3)$$

La ecuación de conservación de la densidad de partículas de impurezas, estará dada sólo por la pérdida de estas debido al confinamiento y la inyección de la fuente externa, además se usa  $\tau_I$  para el tiempo de confinamiento de las partículas de impurezas, dando así:

$$\frac{dn_I}{dt} = - \underbrace{\frac{n_I}{\tau_I}}_{\text{Pérdida por confinamiento}} + \underbrace{S_I}_{\text{Fuente de impurezas}} . \quad (4.4)$$

Para la ecuación de la conservación de la energía del sistema se tienen en cuenta las pérdidas debidas al confinamiento y radiación mientras que para las fuentes se cuenta con la potencia externa suministrada y la potencia aportada por las partículas alfa (eventos de fusión), mientras que el tiempo de confinamiento de la energía será el de la ec. 2.12, dando así:

$$\frac{dE}{dt} = - \underbrace{\frac{E}{\tau_E}}_{\text{Pérdida de energía por confinamiento}} + \underbrace{\left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle Q_\alpha}_{\text{Aportación de energía por alfas}} - \underbrace{P_{rad}}_{\text{Pérdida por radiación}} + \underbrace{P_{aux}}_{\text{Potencia auxiliar}} . \quad (4.5)$$

Los tiempos de confinamiento para las partículas estarán dados en función del tiempo  $\tau_E$  bajo las correlaciones  $\tau_\alpha = k_\alpha \tau_E$ ,  $\tau_{DT} = k_{DT} \tau_E$ ,  $\tau_I = k_I \tau_E$  (las constantes  $k_i$  están dadas en el cuadro 3.1) (Schuster *et al.*, 2001), mientras que la energía  $E$  está dada por la ec. 2.5, por lo que la ecuación de la temperatura del sistema quedará como sigue:

$$\frac{dT}{dt} = \left[ \frac{2}{3} \left( -\frac{3nT}{2\tau_E} + \left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle Q_\alpha - P_{rad} + P_{aux} \right) - T \frac{dn}{dt} \right] \frac{1}{n} . \quad (4.6)$$

De vuelta al tiempo de confinamiento para energía, ec. 2.12, la potencia neta de calentamiento  $P$  estará dada de la siguiente forma:

$$P = \left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle Q_\alpha - P_{rad} + P_{aux} \quad (4.7)$$

éste básicamente es la cuantificación de la energía entrante y saliente sin tomar en consideración la pérdida por confinamiento y estará dada en unidades de  $W \cdot m^{-3}$ , véase ec. 4.6, dónde las pérdidas por radiación tomadas en cuenta son: la radiación de frenado (eq. 2.13), pues es el principal mecanismo por el cuál el plasma pierde potencia y se adiciona a este modelo la pérdida por radiación de ciclotrón (eq. 2.15) pues las partículas al estar en constante interacción con el campo magnético tienden a entrar en contacto con este tipo de situación, si bien no es incluida por Schuster *et al.* (2001) originalmente, es importante para otros autores como (Kammash, 1982) o bien (Stacey, 2012), pues el campo magnético es una constante en el sistema.

## 4.2. Simulación dinámica

Con ITER se pretende demostrar la factibilidad científica y técnica de la fusión al alcanzar un factor de amplificación de potencia tan grande como 10, también existe la expectativa de lograr las condiciones de ignición (IAEA, 2012); sin embargo quedan otros retos a vencer en varias áreas como menciona Herrera Velázquez (2007). Así pues con el modelo ya definido se procede a implementar una solución numérica mediante el método de Euler (véase apéndice B.1). Usando como condiciones iniciales para el plasma un punto donde ha alcanzado la ignición, véase tabla 4.1, mismo usado por Schuster *et al.* (2001). Este será útil para fines de comparación con otros trabajos como los de Hui y Miley (1992) o Schuster *et al.* (2003).

Tabla 4.1: Punto de equilibrio.

Parámetro	Símbolo	Valor
Densidad de partículas alfa	$\bar{n}_\alpha$	$6.28 \times 10^{18} m^{-3}$
Densidad de combustible	$\bar{n}_{DT}$	$8.55 \times 10^{19} m^{-3}$
Densidad de impurezas	$\bar{n}_I$	0
Temperatura	$T$	8.28 keV

Para resolver numéricamente el modelo es necesario realizar un ajuste de algunos parámetros, por lo que se introducen los siguientes parámetros en el sistema:

- Se ajusta la tasa de reacción mediante el siguiente parámetro ( $c_{\sigma v} = 1 \times 10^{-6}$ ).
- El potencial neto de calentamiento está dado en  $MWm^{-3}$  mientras que el calentamiento debido a partículas alfa es  $\left(\frac{n_{DT}}{2}\right)^2 \langle \sigma v \rangle Q_\alpha$  y tiene unidades de  $keVm^{-3}s^{-1}$ , por lo que se usa  $c_{h1} = 1.602 \times 10^{-19} J/keV$ , y en los casos de  $P_{rad}$  y  $P_{aux}$  que están dentro de  $P$ , están dadas originalmente en  $Wm^{-3}$  así que se usará el factor  $c_{h2} = 1 \times 10^{-3}$ .
- En el caso particular de la temperatura, ésta viene dada  $T$  en  $keV$ , por esta razón  $P_{rad}$  y  $P_{aux}$  que están expresadas en  $W$ , se cambian mediante el factor  $c_T = 6.2415 \times 10^{15} keVs^{-1}/W$

Así el modelo para finalidades de simulación numérica, queda expresado como se muestra a continuación, para las partículas alfa:

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha}{dt} = & -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} - c_{h2} A_{cyc} n_e B^2 T + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ & + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp\left(\frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para las partículas de combustible, mezcla  $DT$ :

$$\begin{aligned} \frac{dn_{DT}}{dt} = & -\frac{n_{DT}}{k_{DT} k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} - c_{h2} A_{cyc} n_e B^2 T + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ & - (2 \times 10^{-6}) \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp\left(\frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) + S \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para las partículas de impurezas:

$$\frac{dn_I}{dt} = -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} - c_{h2} A_{cyc} n_e B^2 T + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \quad (4.10)$$

Finalmente la temperatura del sistema:

$$\frac{dT}{dt} = \left[ \frac{2}{3} \left\{ \frac{-3}{2} \left[ \frac{T}{k} (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I) \right. \right. \right. \\ \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha - c_{h2} A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} \right. \\ \left. \left. \left. - c_{h2} A_{cyc} n_e B^2 T + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right] + c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp\left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. \left. + c_T \left( -A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} - A_{cyc} n_e B^2 T + P_{aux} \right) \right\} - T \left( 2 \frac{dn_{DT}}{dt} + 3 \frac{dn_\alpha}{dt} + (z_I + 1) \frac{dn_I}{dt} \right) \right] \\ \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \quad (4.11)$$

Como se puede apreciar esta última ecuación contiene la información de todo el sistema, esto será de utilidad posteriormente para el desarrollo de un controlador. Por lo pronto se procede a procesar el sistema sin la aportación de ciclotrón. Para las constantes consideradas se recurre a la tabla 3.1; adicionalmente como se habló al principio, las condiciones iniciales consideran al plasma en estado ígneo, es decir que  $P_{aux} = 0$ . También en esta simulación no se cuenta con una fuente de impurezas,  $S_I = 0$ . (para mayor detalle sobre la simulación, consultar el código del sistema en el apéndice B.1).

En la fig. 4.3 se presentan la respuesta simulada del sistema, donde se muestran las densidades de éste, la temperatura y la energía de la reacción, en primer lugar se realiza únicamente con pérdida de Bremsstrahlung para posteriormente comparar cuando se agrega la pérdida de radiación de ciclotrón. Se muestran las poblaciones de partículas en el reactor de fusión así como la temperatura. La curva asociada a los electrones no cuenta con una ecuación como tal, por ello se recurre la relación de la ec. 2.6. Se puede apreciar que al comienzo se queman rápidamente (fusiona) el combustible hasta encontrar un equilibrio. Inversamente la temperatura se eleva dramáticamente para después disminuir unos cuantos  $keV$  y entonces

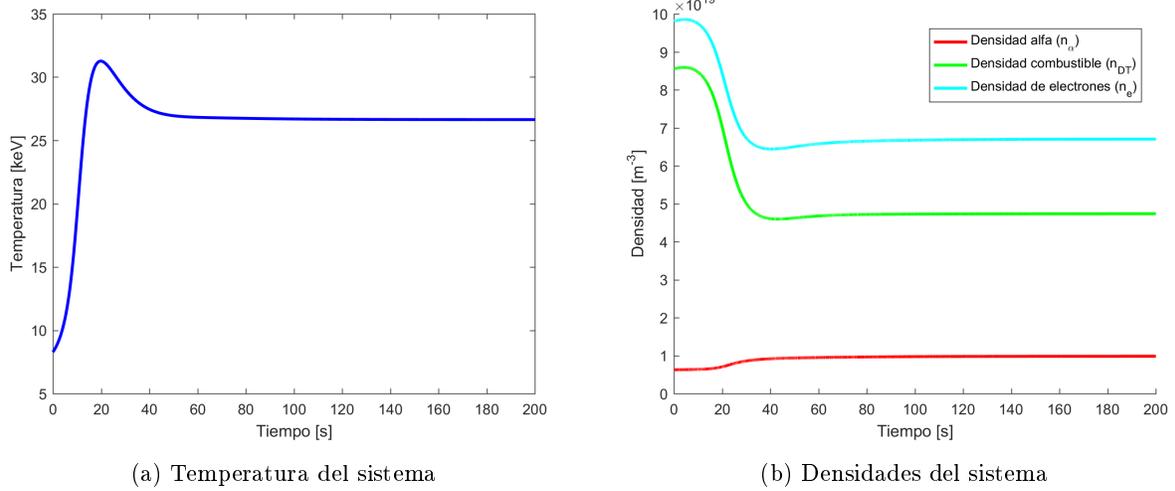


Figura 4.3: Evolución del sistema sin pérdida por radiación de ciclotrón.

establecerse, esto concuerda con los resultados de Hui y Miley (1992) y Schuster *et al.* (2003). Que aunque no comparten las mismas consideraciones los modelos para la quema de fusión reportan un comportamiento muy similar al reportado en esta tesis, y se continua a incluir la pérdida por radiación de ciclotrón para simular y observar la evolución del sistema, como se muestra a continuación.

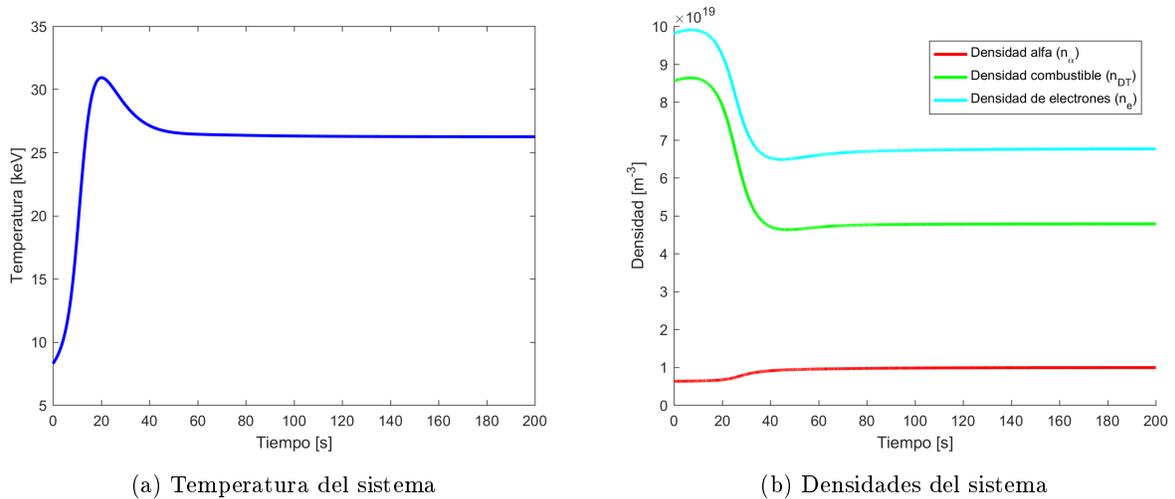
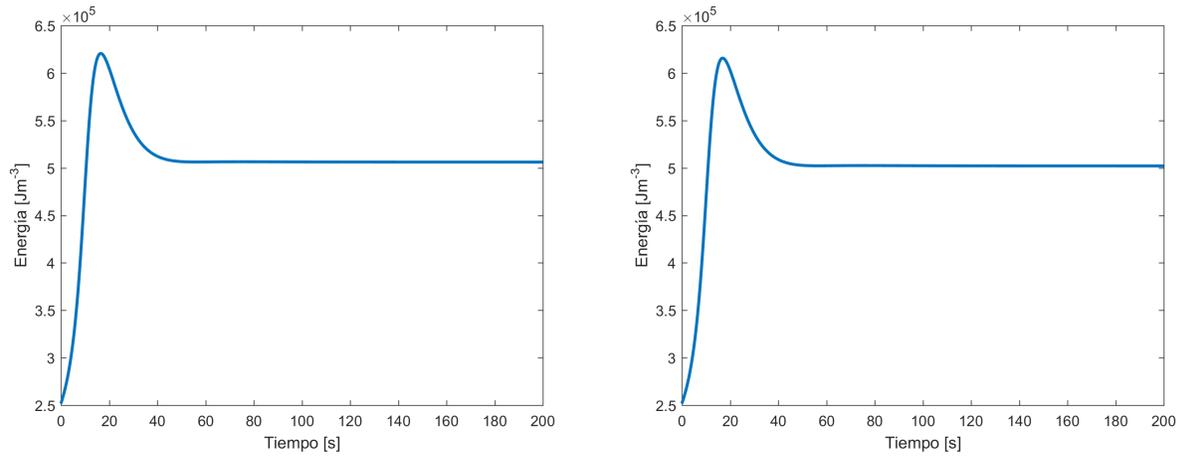


Figura 4.4: Evolución del sistema con pérdida de radiación de ciclotrón.

Al añadir la nueva pérdida, se observa que el comportamiento es el mismo, pero con algunas diferencias. En el caso donde sólo se considera la pérdida por bremsstrahlung se alcanza una temperatura de  $24.12 \text{ keV}$  en tanto que cuando se introduce la pérdida de ciclotrón la temperatura desciende a  $23.69 \text{ keV}$ , lo cual podría parecer poco pero la diferencia es de varios millones de grados, pues cada  $1 \text{ eV}$  equivale a  $11.6 \times 10^6$

K.



(a) Sólo pérdida de radiación bremsstrahlung

(b) Con pérdida adicional de radiación de ciclotrón

Figura 4.5: Evolución de la energía arrojada por sistema.

En el caso de la energía del sistema el descenso es de  $4.8 \text{ kJ}$ , por lo que a temperaturas bajas la pérdida por radiación de ciclotrón es pequeña. Por otra parte el sistema no es completamente estable, operar a bajas temperaturas y densidades altas lo vuelve inestable como lo muestra Hui y Miley (1992), pequeños cambios en la temperatura ( $\pm 5$ ) podrían llevar el sistema a colapsar o bien a apagarse completamente, en cualquiera de los casos se vuelve necesario realizar medidas de contención, por lo que se recurre a un controlador como el que se presentará a continuación en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Control

En el presente capítulo se elabora un análisis lineal del sistema que descrito en la sección 4.1, de éste se usará solamente la última ecuación, correspondiente a la temperatura del sistema. Ésta proporciona un modelo simplificado del sistema que contiene la información de las demás variables. Las información del sistema se asume disponible, no se profundizará en los métodos de medición de la temperatura. Puesto que se plantea hacer el análisis de manera lineal se usará una expansión en series de Taylor y a continuación la transformada de Laplace para obtener la función de transferencia del sistema en lazo abierto y sin ningún tipo de acción de control. En seguida se propone un método de control y se procede a elaborar una estrategia de control para el sistema, que sea capaz de corregir los comportamientos no deseados, el controlador será sometido a funciones de prueba para observar su comportamiento ante estas señales de perturbación. A continuación se muestra un diagrama a bloques donde se muestran las variables de estado  $n_\alpha$ ,  $n_{DT}$ ,  $n_I$ ,  $P_{aux}$  (información mínima del sistema), la variable controlada  $T$  (variable de salida) y la variable de control  $S_I$  (variable de entrada de control).

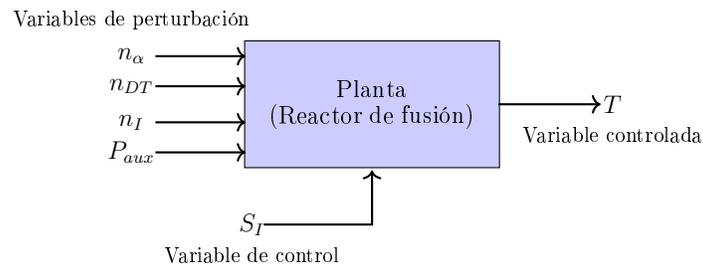


Figura 5.1: Esquema de control.

## 5.1. Linealización

Los métodos numéricos aplicados han proporcionado información suficiente para validar los resultados con la literatura disponible, para aplicar eventualmente un controlador se recurre a la linealización del modelo, esto debido a que el esquema de control propuesto será lineal, gracias a la sencillez con la que se puede obtener el controlador. La tarea para linealizar el sistema se hará mediante series de Taylor alrededor de un punto, en este caso el equilibrio proporcionado por la literatura (Schuster *et al.*, 2001).

Ahora se elige únicamente la ecuación para temperatura, ec. 4.6, pero también es necesario linealizar la demás ecuaciones para después añadirlas a la ecuación lineal que se obtendrá para la temperatura.

La expansión en series de Taylor tendrá la siguiente forma:

$$\frac{df}{dt} = f|_{eq} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{eq} (x_1 - \bar{x}_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{eq} (x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{eq} (x_n - \bar{x}_n) \quad (5.1)$$

Así para la función que se encarga de la densidad de partículas alfa, designaremos a  $\bar{f}_{n_\alpha}$  y  $f_{n_\alpha}$  la función de la densidad alfa como la función evaluada en el punto de equilibrio, y una vez que se han obtenido los coeficientes, las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables ( $n_\alpha$ ,  $n_{DT}$ ,  $n_I$ ,  $T$ ,  $S_I$  y  $P_{aux}$ ), de la función de la densidad alfa evaluados en el equilibrio la aproximación lineal de  $\frac{dn_\alpha}{dt}$  queda como:

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha}{dt} \cong \bar{f}_{n_\alpha} + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (5.2) \end{aligned}$$

Para la densidad de partículas de combustible deuterio-tritio

$$\begin{aligned} \frac{dn_{n_{DT}}}{dt} \cong \bar{f}_{n_{DT}} + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (5.3) \end{aligned}$$

Para la densidad de partículas de impurezas

$$\begin{aligned} \frac{dn_I}{dt} \approx \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_\alpha} \Bigg]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_{DT}} \Bigg]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_I} \Bigg]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial T} \Bigg]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial S_I} \Bigg]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} \Bigg]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (5.4) \end{aligned}$$

Para la temperatura del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} \approx \bar{f}_T + \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \Bigg]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \Bigg]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \Bigg]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial f_T}{\partial T} \Bigg]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \frac{\partial f_T}{\partial S_I} \Bigg]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \Bigg]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (5.5) \end{aligned}$$

Para mayor información acerca del desarrollo de la linealización consultar el apéndice

## 5.2. Lazo abierto

Para iniciar el análisis se busca primero la función de transferencia, ésta se define como el conciente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero (Ogata, 2010), en lazo abierto, es decir, el sistema funcionando únicamente por sí mismo. Así a partir del modelo representado por la ec. 5.5 para la temperatura, se establece el estado estacionario como sigue:

$$\begin{aligned} 0 = \bar{f}_T + \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \Bigg]_{eq} (n_\alpha(0) - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \Bigg]_{eq} (n_{DT}(0) - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \Bigg]_{eq} (n_I(0) - \bar{n}_I) + \frac{\partial f_T}{\partial T} \Bigg]_{eq} (T(0) - \bar{T}) \\ + \frac{\partial f_T}{\partial S_I} \Bigg]_{eq} (S_I(0) - \bar{S}_I) + \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \Bigg]_{eq} (P_{aux}(0) - \bar{P}_{aux}) \quad (5.6) \end{aligned}$$

Restando la ec. 5.6 a la ec. 5.5

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \Bigg|_{eq} (n_\alpha - n_\alpha(0)) + \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \Bigg|_{eq} (n_{DT} - n_{DT}(0)) + \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \Bigg|_{eq} (n_I - n_I(0)) + \frac{\partial f_T}{\partial T} \Bigg|_{eq} (T - T(0)) \\ + \frac{\partial f_T}{\partial S_I} \Bigg|_{eq} (S_I - S_I(0)) + \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \Bigg|_{eq} (P_{aux} - P(0)_{aux}) \quad (5.7) \end{aligned}$$

Definiendo las variables de desviación como sigue:

$$\tilde{n}_\alpha = n_\alpha - n_\alpha(0); \tilde{n}_{DT} = n_{DT} - n_{DT}(0); \tilde{n}_I = n_I - n_I(0); \tilde{T} = T - T(0); \tilde{S}_I = S_I - S_I(0); \tilde{P}_{aux} = P_{aux} - P_{aux}(0)$$

Y además

$$\frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \Bigg|_{eq} = \nu_1; \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \Bigg|_{eq} = \nu_2; \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \Bigg|_{eq} = \nu_3; \frac{\partial f_T}{\partial T} \Bigg|_{eq} = \nu_4; \frac{\partial f_T}{\partial S_I} \Bigg|_{eq} = \nu_5; \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \Bigg|_{eq} = \nu_6$$

De lo cual se obtendrá

$$\frac{dT}{dt} = \nu_1 \tilde{n}_\alpha + \nu_2 \tilde{n}_{DT} + \nu_3 \tilde{n}_I + \nu_4 \tilde{T} + \nu_5 \tilde{S}_I + \nu_6 \tilde{P}_{aux} \quad (5.8)$$

Al introducir la información la tabla 4.1 como punto de equilibrio (mismo usado por Schuster *et al.* (2001)), se obtienen los coeficientes  $\nu_i$  (consultar apéndice B.2 para mayor información) como sigue:

Tabla 5.1: Valores de las constantes  $\nu_i$

Coficiente	Valor
$\nu_1$	$-2.1299 \times 10^{-20}$
$\nu_2$	$1.3680 \times 10^{-20}$
$\nu_3$	$-7.0887 \times 10^{-20}$
$\nu_4$	0.2247
$\nu_5$	$-3.9254 \times 10^{-19}$
$\nu_6$	$1.6031 \times 10^{-5}$

Todas las entradas serán señales para perturbar el sistema y observar la influencia de ellas a la salida de sistema y se realiza a continuación la transformada de Laplace

$$s\tilde{\tau} - \tilde{T}(0) = \nu_1 \tilde{N}_\alpha + \nu_2 \tilde{N}_{DT} + \nu_3 \tilde{N}_I + \nu_4 \tilde{\tau} + \nu_5 \tilde{\sigma}_I + \nu_6 \tilde{\pi}_{aux} \quad (5.9)$$

Para  $Y_1$ , siendo  $\tilde{N}_{DT} = 0; \tilde{N}_I = 0; \tilde{\sigma}_I = 0; \tilde{\pi}_{aux} = 0$

$$\tilde{\tau}(s - \nu_4) = \nu_1 \tilde{N}_\alpha$$

$$Y_1 = \frac{\nu_1}{s - \nu_4} \tilde{N}_\alpha$$

Para  $Y_2$ , siendo  $\tilde{N}_\alpha = 0; \tilde{N}_I = 0; \tilde{\sigma}_I = 0; \tilde{\pi}_{aux} = 0$

$$\tilde{\tau}(s - \nu_4) = \nu_2 \tilde{N}_{DT}$$

$$Y_2 = \frac{\nu_2}{s - \nu_4} \tilde{N}_{DT}$$

Y así sucesivamente hasta obtener

$$Y_3 = \frac{\nu_3}{s - \nu_4} \tilde{N}_I$$

$$Y_4 = \frac{\nu_5}{s - \nu_4} \tilde{\sigma}_I$$

$$Y_5 = \frac{\nu_6}{s - \nu_4} \tilde{\pi}_{aux}.$$

El sistema es de tipo 0 dado que no tienen ningún polo en el origen (término integrador). Y gracias a que es un sistema lineal la salida será la suma de todas  $Y_i$  anteriores

$$Y(s) = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$$

Quedando finalmente la función de transferencia en lazo abierto

$$Y(s) = \frac{\nu_1 \tilde{N}_\alpha + \nu_2 \tilde{N}_{DT} + \nu_3 \tilde{N}_I + \nu_5 \tilde{\sigma}_I + \nu_6 \tilde{\pi}_{aux}}{s - \nu_4} \quad (5.10)$$

A continuación para conocer la evolución del sistema, aplicaremos la transformada inversa de Laplace (consultar tabla de transformadas de Laplace de Nauman (1990)) a la ecuación anterior, pero antes se definirá a las funciones  $\tilde{N}_\alpha = \Delta n_\alpha F(s); \tilde{N}_{DT} = \Delta n_{DT} F(s); \tilde{N}_I = \Delta n_I F(s); \tilde{\sigma}_I = \Delta \sigma_I F(s); \tilde{\pi}_{aux} = \Delta \pi F(s)$ , donde  $F(s) = \frac{1}{s}$  y además todas las amplitudes ( $\Delta$ ) son iguales a uno.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ Y(s) = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_5 + \nu_6}{s(s - \nu_4)} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{\nu_4} (e^{\nu_4 t} - 1) (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_5 + \nu_6) \quad (5.11)$$

El sistema bajo la influencia de una función escalón no puede estabilizarse, es decir, no alcanza un estado estacionario, por lo que se puede decir que no es estable

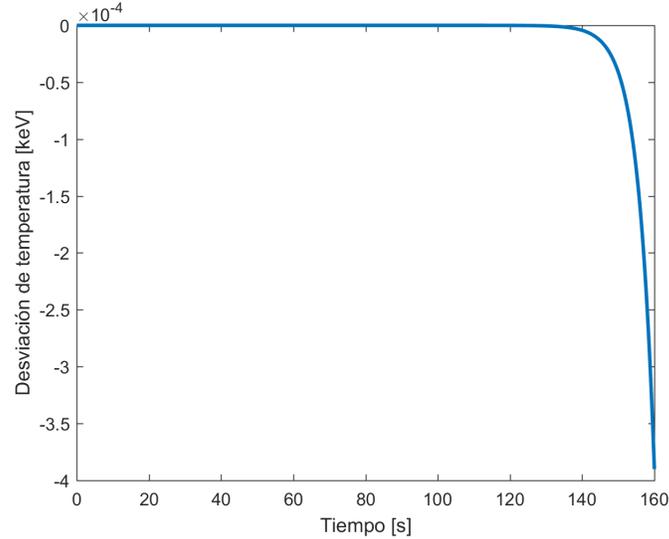


Figura 5.2: Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo abierto.

### 5.3. Control en lazo cerrado

El sistema al ser inestable requiere de la asistencia de un controlador para lograr alcanzar un estado estable, dado que es un sistema tipo 0 sería imposible alcanzar el estado estacionario utilizando únicamente la acción de control proporcional por lo que se requiere además de una acción integral, ésta añadirá un polo al sistema para facilitar el acceso al estado estacionario. A continuación se busca la función de transferencia para el caso en lazo cerrado, acción del controlador. Usando la notación anterior el sistema queda como sigue:

$$\frac{dT}{dt} = f_T + \nu_1 (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \nu_2 (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \nu_3 (n_I - \bar{n}_I) + \nu_4 (T - \bar{T}) + \nu_5 (S_I - \bar{S}_I) + \nu_6 (P_{aux} - \bar{P}_{aux})$$

De donde se elije del la fuente de impurezas,  $S_I$ , como método de control, y dado que se pretende hacer uso de un controlador PI será en este término donde se asigne dicho controlador, qué está dado por

$$S_I = S_I(0) - k_p e(t) - k_i \int_0^t e(t) dt \quad (5.12)$$

Donde definimos

$$e(t) = T - T_{sp}$$

dónde  $T_{sp}$  es la temperatura de equilibrio, se sustituye lo anterior en la ec. 5.12

$$S_I = S_I(0) - k_p (T - T_{sp}) - k_i \int_0^t (T - T_{sp}) dt \quad (5.13)$$

De la ecuación 5.5, se sustituye  $S_I$  por 5.13

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = f_T + \nu_1 (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \nu_2 (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \nu_3 (n_I - \bar{n}_I) + \nu_4 (T - \bar{T}) + \nu_6 (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \\ + \nu_5 \left( S_I(0) - k_p (T - T_{sp}) - k_i \int_0^t (T - T_{sp}) dt - \bar{S}_I \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

De regreso a la ec. 5.6 del estado estacionario y restandola de la ec. 5.14. Haciendo uso de la notación de variables de desviación se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = f_T + \nu_1 \tilde{n}_\alpha + \nu_2 \tilde{n}_{DT} + \nu_3 \tilde{n}_I + \nu_4 \tilde{T} + \nu_6 \tilde{P}_{aux} + \nu_5 \left( -k_p (T + T_{sp}) - k_i \int_0^t (T + T_{sp}) dt \right),$$

haciendo  $T_{sp} = T(0)$ , se reordena

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \nu_1 \tilde{n}_\alpha + \nu_2 \tilde{n}_{DT} + \nu_3 \tilde{n}_I + \nu_4 \tilde{T} + \nu_6 \tilde{P}_{aux} + \nu_5 \left( -k_p \tilde{T} - k_i \int_0^t \tilde{T} dt \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{dt} - \nu_4\tilde{T} - \nu_5 \left( -k_p\tilde{T} - k_i \int_0^t \tilde{T} dt \right) &= \nu_1\tilde{n}_\alpha + \nu_2\tilde{n}_{DT} + \nu_3\tilde{n}_I + \nu_6\tilde{P}_{aux}, \\ \frac{d\tilde{T}}{dt} + (k_p\nu_5 - \nu_4)\tilde{T} + \nu_5k_i \int_0^t \tilde{T} dt &= \nu_1\tilde{n}_\alpha + \nu_2\tilde{n}_{DT} + \nu_3\tilde{n}_I + \nu_6\tilde{P}_{aux}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Se procede a aplicar la transformada de Laplace

$$s\tilde{\tau} - \tilde{\tau}(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i\frac{\tilde{\tau}}{s} = \nu_1\tilde{N}_\alpha + \nu_2\tilde{N}_{DT} + \nu_3\tilde{N}_I + \nu_6\tilde{\pi}_{aux}. \quad (5.16)$$

Para encontrar entonces la función de transferencia al igual que en el caso de lazo abierto se tomará en cuenta una entrada a la vez para obtener al final la función de transferencia que será la suma de las salidas examinadas por separado.

Así para  $Y_1$

$$s\tilde{\tau} - \tilde{\tau}(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i\frac{\tilde{\tau}}{s} = \nu_1\tilde{N}_\alpha,$$

se despeja  $\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{N}_\alpha}$  e iguala a  $Y_1$

$$Y_1 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{N}_\alpha} = \frac{\nu_1}{s - (k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i\frac{1}{s}},$$

$$Y_1 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{N}_\alpha} = \frac{s\nu_1}{s^2 - s(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i}. \quad (5.17)$$

Y así sucesivamente, hasta obtener lo siguiente

$$Y_2 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{N}_{DT}} = \frac{s\nu_2}{s^2 - s(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i}, \quad (5.18)$$

$$Y_3 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{N}_I} = \frac{s\nu_3}{s^2 - s(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i}, \quad (5.19)$$

$$Y_4 = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\pi}_{aux}} = \frac{s\nu_6}{s^2 - s(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5k_i}. \quad (5.20)$$

Finalmente se tendrá

$$Y(s) = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4. \quad (5.21)$$

Ahora, se toma el denominador de la ec. 5.17 y se iguala a cero, ésta es la ecuación de característica en lazo cerrado:

$$s^2 - s(k_p\nu_5 - \nu_4) + \nu_5 k_i = 0, \quad (5.22)$$

de ésta se busca que tenga raíces negativas, esto asegurará que el sistema sea estable. Así pues para dar solución a la ecuación de segundo grado resultante, se recurre a la fórmula general

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.23)$$

Con esto en cuenta, se elaboran las siguientes restricciones

Paso 1

Para obtener  $k_p$ , se toma el coeficiente que acompaña al término  $s$  de la ec. 5.22

$$\frac{(k_p\nu_5 - \nu_4)}{2} < 0$$

De acuerdo con la información del cuadro 3 se puede observar que  $\nu_5$  tiene signo negativo, esto cambiaría el signo de la desigualdad, lo que cambiaría la desigualdad anterior dependiendo del valor que tome  $\nu_5$

$$k_p \leq \frac{\nu_4}{\nu_5} \quad (5.24)$$

Paso 2

Ahora el radicando de la fórmula general se busca que sea cero o lo más cercano a cero posible, para asegurar que las soluciones de la ecuación cuadrática sean negativas, así tendremos lo siguiente

$$(k_p\nu_5 - \nu_4)^2 - 4(1)k_i\nu_5 = 0$$
$$k_i = \frac{(k_p\nu_5 - \nu_4)^2}{4\nu_5} \quad (5.25)$$

### 5.3.1. Acción de controlador PI

Una vez obtenidos los parámetros del controlador PI, se implementa en Matlab el código (consultar apéndice B.2), la acción del controlador sobre el sistema. Se presenta la evolución del sistema ante las perturbaciones impulso y escalón (sólo para fines demostrativos).

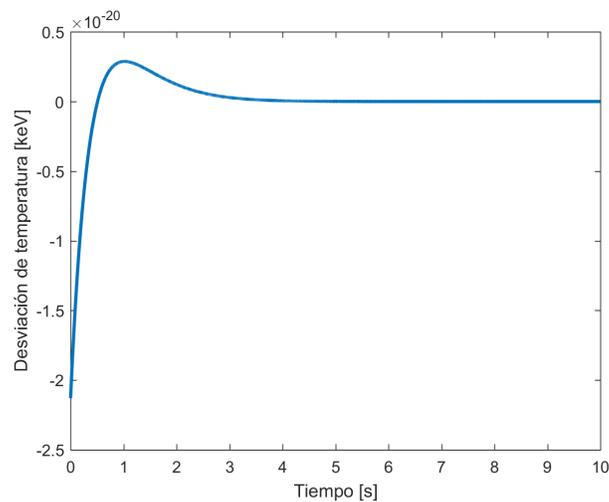


Figura 5.3: Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo cerrado sujeto a una función de prueba impulso.

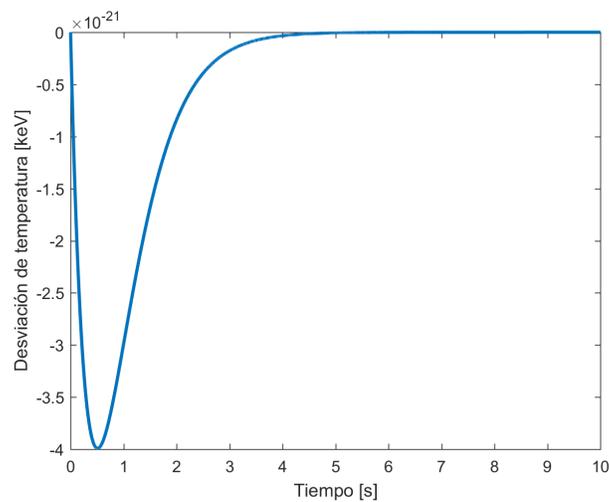


Figura 5.4: Evolución en la desviación de la temperatura del sistema en lazo cerrado sujeto a una función de prueba escalón.

A partir de la información disponible sobre el sistema, función de transferencia, también fue posible obtener las gráficas de Bode que proporcionan información adicional acerca del sistema.

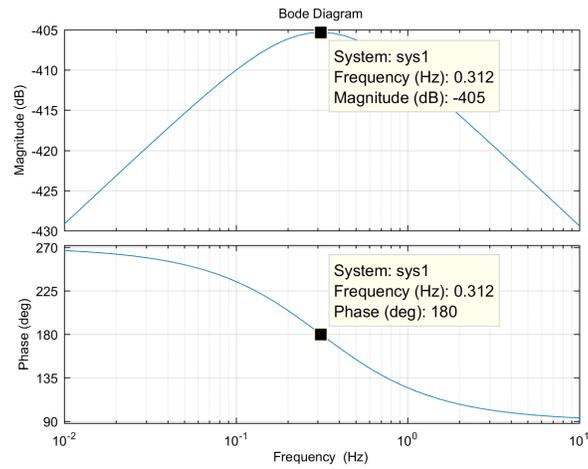


Figura 5.5: Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, perturbación en la densidad de partículas alfa.

De esta gráfica se puede observar que el sistema aún tiene un margen de ganancia muy amplio ( $\sim 405dB$ ), como este sistema es de fase mínima se puede decir que es estable, y además esto servirá para obtener las siguientes gráficas.

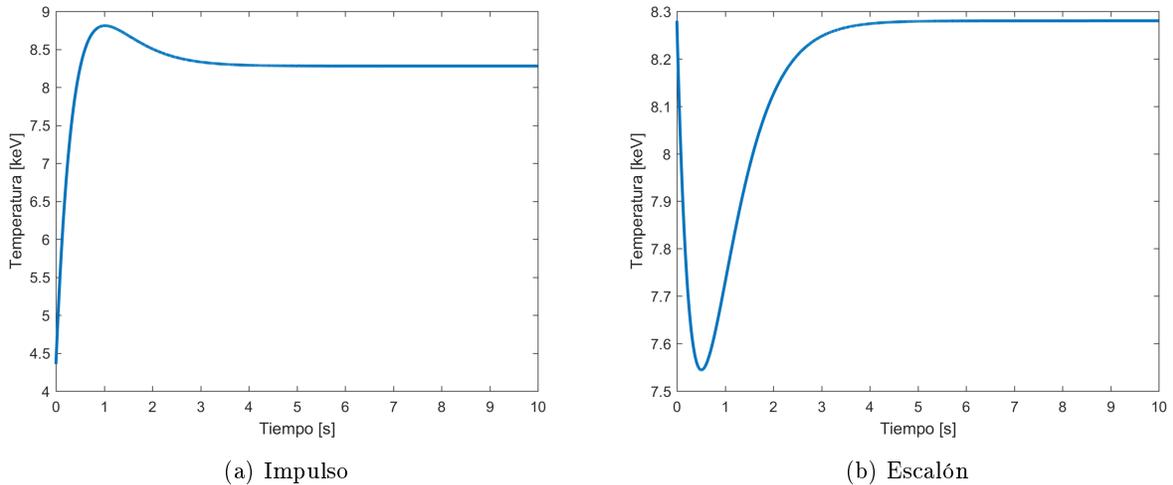


Figura 5.6: Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón.

En la fig. 5.6 se puede apreciar la evolución del sistema en respuesta a dos señales de prueba distintas, que muestran el comportamiento del sistema ante un caso en el que se presenten perturbaciones que pudieran crear inestabilidades, sin embargo el sistema rechaza rápidamente el comportamiento no deseado, le toma

apenas unos cuantos segundos en lograrlo ( $\sim 3s$ ). Por otra parte también se desea conocer el comportamiento del sistema ante las eventualidades en las densidades de combustible ( $n_{DT}$ ) e impurezas ( $n_I$ ) y además en el caso de existir un evento en el suministro de potencia externa ( $P_{aux}$ ). Para lo cual se obtienen los respectivos diagramas de Bode para conocer algunas de las características del sistema.

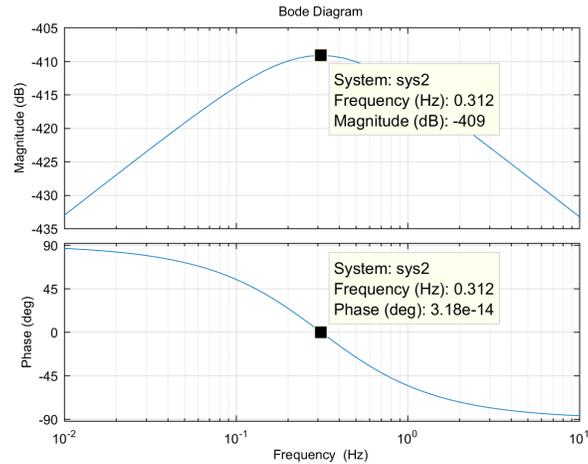


Figura 5.7: Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en la densidad de partículas de combustible.

Se observa que el sistema aún tiene un margen de ganancia muy amplio ( $\sim 409dB$ ), como este sistema es de fase mínima se puede decir que es estable, y además esto servirá para obtener las siguientes gráficas.

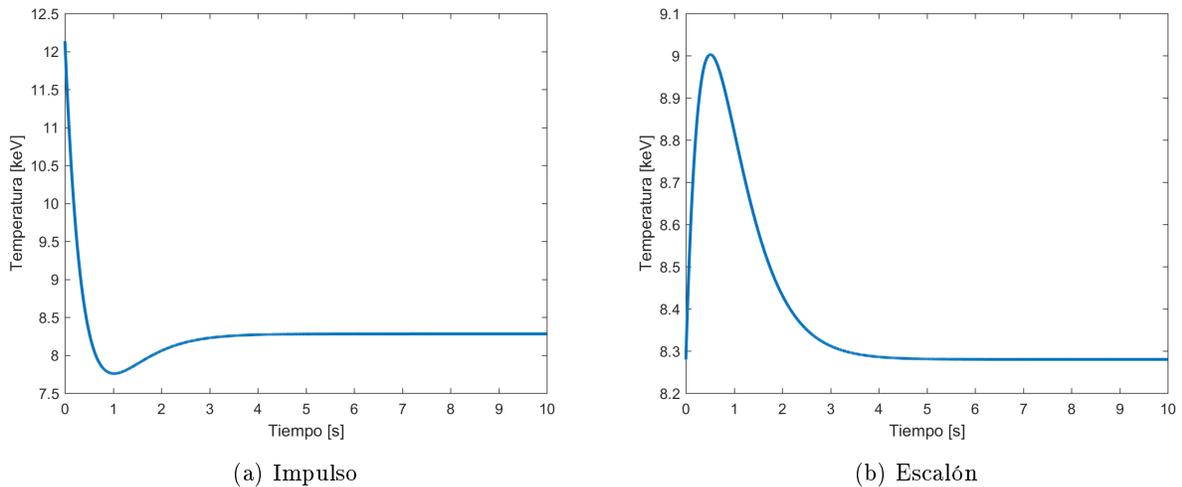


Figura 5.8: Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón.

En caso de la fig. 5.8 se puede apreciar que el sistema responde disminuyendo la temperatura del sistema para alcanzar la temperatura deseada mientras a diferencia del caso en el que  $n_\alpha$ , donde el sistema necesita elevar la temperatura. A continuación se busca conocer los efectos debidos a eventualidades en la densidad de impurezas ( $n_I$ ). Se obtiene el diagrama de Bode correspondiente del sistema.

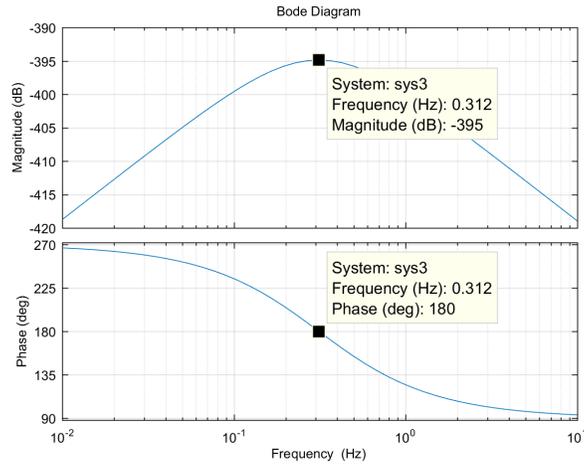


Figura 5.9: Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en la densidad de partículas de impurezas.

Se observa que el sistema tiene un margen de ganancia de  $\sim 395dB$ , como este sistema es de fase mínima se puede decir que es estable, y además esto servirá para obtener las siguientes gráficas.

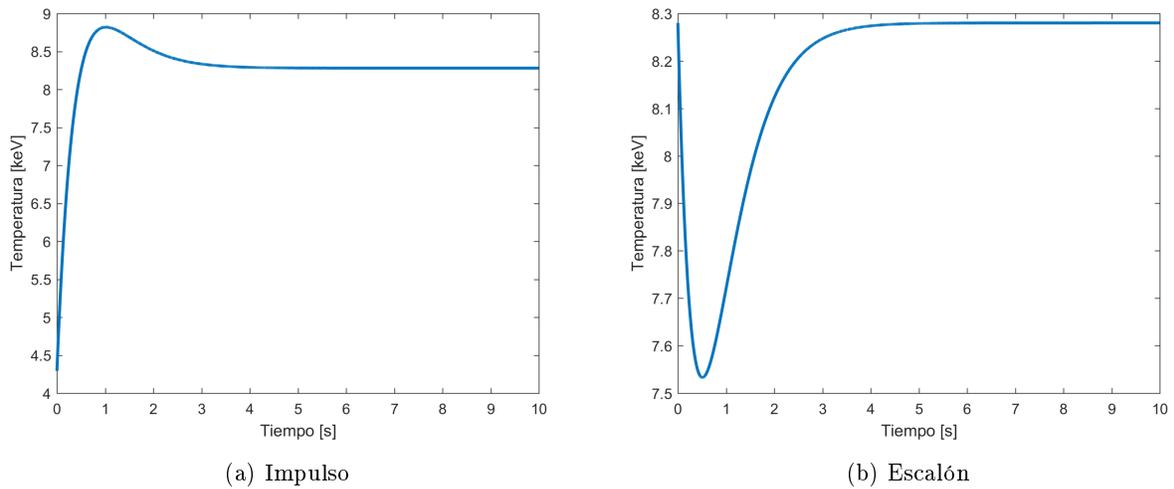


Figura 5.10: Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón.

Para el caso de la fig. 5.10 se puede apreciar que el sistema responde extrayendo las impurezas que en principio producen un efecto de enfriamiento, en el caso impulso se puede observar un pequeño sobreimpulso en tanto que la respuesta escalón está sobreamortiguada, este comportamiento muy similar a cuando la perturbación se lleva a cabo en  $n_{\alpha}$ . Finalmente se busca conocer los efectos debidos a eventualidades en el suministro de potencia ( $P_{aux}$ ). Se obtiene el diagrama de Bode correspondiente.

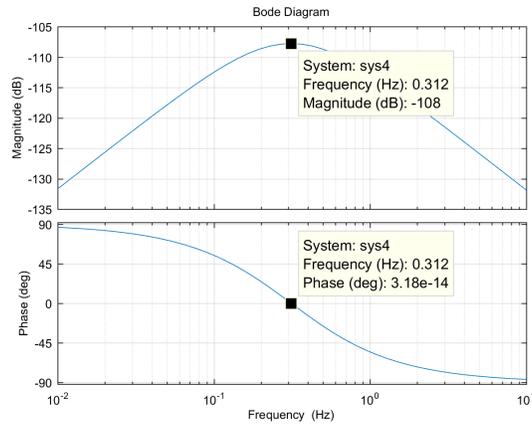


Figura 5.11: Respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, ante perturbación en el suministro de potencia.

Se observa que el sistema tiene un margen de ganancia de  $\sim 108$  dB, como este sistema es de fase mínima se puede decir que es estable, y además esto servirá para obtener las siguientes gráficas.

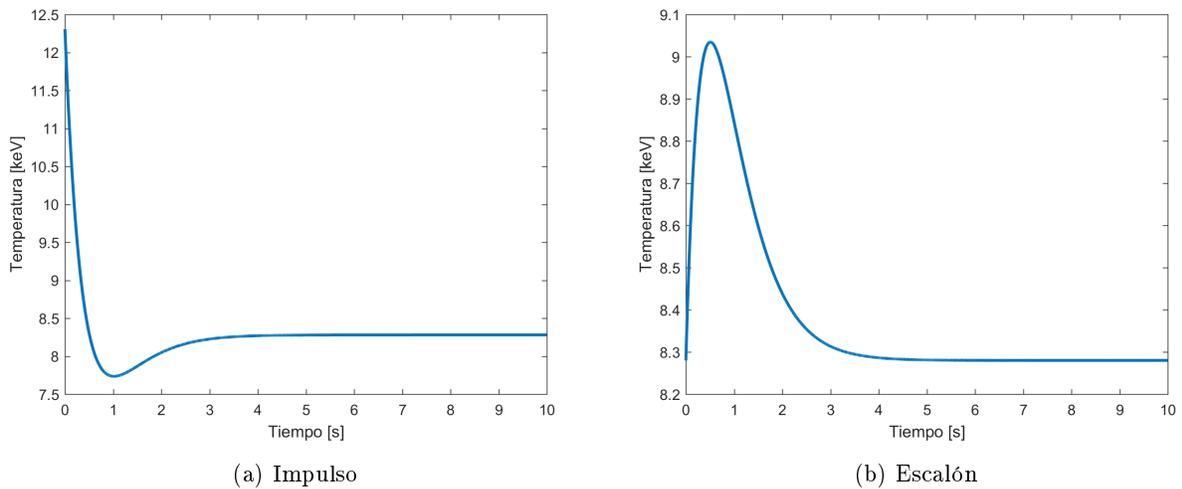


Figura 5.12: Respuesta tipo escalón del sistema en el dominio del tiempo a señales de prueba tipo impulso y escalón.

Para el caso de la fig. 5.12 se puede apreciar que el sistema responde introduciendo impurezas que disminuyen la temperatura del sistema hasta el punto de equilibrio deseado, en ambos casos, impulso y escalón, se puede observar un pequeño sobreimpulso, en el caso escalón es ligeramente mayor que en el impulso, este comportamiento muy similar a cuando la perturbación se lleva a cabo en  $n_{DT}$ .

# Conclusiones y perspectivas

## Conclusiones

En esta tesis se presentó un modelo matemático y numérico para la quema de fusión en un reactor nuclear al cual se adicionó un parámetro de pérdida presente en todo momento dentro del sistema, se realizaron además simulaciones numéricas para observar el comportamiento del sistema y así contrastar los resultados arrojados. Se llevó a cabo el desarrollo de una estrategia de control de tipo PI para una entrada y una salida, para lo cual se usó como actuador a la inyección de impurezas para controlar la temperatura del sistema. A continuación se enlistan los principales resultados y conclusiones de la tesis:

- El modelo descrito mediante las características principales del sistema es capaz de predecir el comportamiento esperado.
- Incluir un parámetro de pérdida demuestra una pérdida pequeña,  $4.8 \text{ kJ}$  mientras que la de temperatura descendió  $0.43 \text{ keV}$  algo superior a los 4 millones de grados, sin embargo esta pérdida podría crecer aún más si la temperatura se eleva, lo cual se espera que suceda conforme al avance de la proyección para los reactores de las futuras plantas de fusión.
- Las simulaciones realizadas proveen un comportamiento satisfactorio, se ajusta a los resultados de propuesta similares.
- El estado estacionario con las condiciones de ignición usadas es inestable, pero se puede corregir el comportamiento con los controles propuestos.
- En general es posible rechazar perturbaciones por medio del control de la fuente de impurezas.
- El código tiene además la facilidad de adaptarse a diferentes condiciones de equilibrio.

## Perspectivas

De acuerdo a los resultados obtenidos, es recomendable dar continuidad al enfoque trabajado, a continuación se provee una lista de las perspectivas de esta tesis:

- Abundar en el uso de impurezas para simular la interacción de posibles restos de la pared en el plasma podría aportar mayor precisión al sistema.
- Impurezas con alto número atómico podrían verse envueltas en el proceso, lo que podría significar incluir nuevos parámetros de pérdida relacionado con estas impurezas.
- Ampliar las consideraciones del controlador, el enfoque múltiple entrada múltiple salida podría mejorar la acción de control, permitiendo manipular las densidades que sea requeridas en un momento dado.
- Al ser no lineal el modelo también se podría explorar la posibilidad de un método de control no lineal, ésto eliminaría la operación alrededor de un punto de equilibrio único y le otorgaría mayor flexibilidad en los rangos de operación del sistema.

# Nomenclatura

$a$	radio menor del tokamak
$A_b$	coeficiente de radiación de frenado
$A_{cyc}$	coeficiente de radiación de ciclotrón
$B$	campo magnético
$DT$	mezcla combustible deuterio-tritio
$E$	energía
${}^2H$	deuterio
${}^3H$	tritio
$He$	helio
$I$	corriente presente en el plasma
$k_\alpha$	constante del tiempo de confinamiento para partículas alfa
$k_{DT}$	constante de tiempo de confinamiento para mezcla combustible
$k_I$	constante de tiempo de confinamiento para partículas de impurezas
$k_i$	constante integral del controlador
$k_p$	constante proporcional del controlador
$Li$	litio
$n$	densidad general del plasma
$n_\alpha$	densidad de partículas alfa
$n_{DT}$	densidad de partículas de mezcla combustible $DT$
$n_e$	densidad de electrones
$n_I$	densidad de impurezas
$\bar{n}_\alpha$	densidad de equilibrio para partículas alfa
$\bar{n}_{DT}$	densidad de equilibrio de partículas de mezcla combustible $DT$
$\bar{n}_I$	densidad de equilibrio de impurezas

$\tilde{n}_\alpha$	desviación para partículas alfa
$\tilde{n}_{DT}$	desviación para partículas de mezcla combustible $DT$
$\tilde{n}_I$	desviación para impurezas
$\tilde{N}_\alpha$	transformada de Laplace de la desviación para partículas alfa
$\tilde{N}_{DT}$	transformada de Laplace de la desviación para partículas de mezcla combustible $DT$
$\tilde{N}_I$	transformada de Laplace de la desviación para impurezas
$P_{aux}$	potencia auxiliar
$P_{brem}$	pérdida por radiación bremsstrahlung
$P_{rad}$	pérdida por radiación de ciclotrón
$P_{rad}$	pérdida de potencia por radiación
$P_{TR}$	pérdida por confinamiento
$Q$	factor de amplificación de potencia
$Q_\alpha$	energía de las partículas alfa
$Q_{fus}$	energía liberada por evento de fusión
$R$	radio mayor del tokamak
$R_{DT}$	reactividad de la mezcla $DT$
$s$	variable del dominio de Laplace
$S$	fuelle de mezcla combustible $DT$
$S_I$	fuelle de impurezas
$T$	temperatura del sistema
$T_{sp}$	temperatura de set point
$\bar{T}$	temperatura de equilibrio del sistema
$\tilde{T}$	desviación de la temperatura del sistema
$Y_i$	funciones de transferencia para cada una de las perturbaciones que tratadas
$Z_{eff}$	número atómico efectivo de los iones de impurezas presentes en el plasma
$z_I$	número atómico de una impureza arbitraria

**Letras griegas**

$\kappa_\chi$	elongación del plasma
$\nu_i$	coeficientes de linealización
$\langle \sigma v \rangle$	tasa de reacción
$\tilde{\tau}$	transformada de Laplace de la desviación de la temperatura
$\tau_E$	tiempo de confinamiento de la energía
$\tau_\alpha$	tiempo de confinamiento para partículas alfa

$\tau_{DT}$	tiempo de confinamiento para partículas mezcla combustible DT
$\tau_I$	tiempo de confinamiento para partículas de impurezas

# Bibliografía

- Ariola, M. y Pironti, A. (2008). *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. Springer London.
- Betti, R. y Hurricane, O. (2016). Inertial-confinement fusion with lasers. *Nature Physics*, 12(5):435–448.
- Chen, F. F. (2011). *An Indispensable Truth*. Springer-Verlag New York.
- Chen, F. F. (2016). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer International Publishing, New York.
- Cowley, S. C. (2016). The quest for fusion power. *Nature Physics*, 12(5):384–386.
- Dean, S. O. (2013). *Search for the Ultimate Energy Source*. Springer-Verlag, New York.
- Dobran, F. (2012). Fusion energy conversion in magnetically confined plasma reactors. *Progress in nuclear energy*, 60:89–116.
- Dolan, T. J. (1982). *Fusion Research: principles, experiments and reaserch*. Pergamon Press.
- Dolan, T. J. (2013). *Magnetic Fusion Technology*. Springer London Heidelberg.
- Dolan, T. J., Jackson, D. P., Kouvshinnikov, B., y Banner, D. L. (1995). Cooperación mundial en materia de fusión nuclear: Historial de progresos sostenidos. *IAEA Bulletin*, 37(4):16–21.
- ESRL (2016). Trends in atmospheric carbon dioxide. <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/monthly.html>; consultada el mes de septiembre, 2016.
- EUROfusion (2005). Success of T-3: breakthrough for tokamaks. <https://www.euro-fusion.org>; consultado el mes de abril, 2017.
- Fowler, T., Moir, R., y Simonen, T. (2017). A new simpler way to obtain high fusion power gain in tandem mirrors. *Nuclear Fusion*, 57(5):181–184.

- gob.mx (2016). México, de los primeros 55 países en ratificar el acuerdo de París. <https://www.gob.mx/gobmx/articulos/mexico-de-los-primeros-55-paises-en-ratificar-el-acuerdo-de-paris>; consultada el mes de octubre, 2016.
- Greenpeace (2015). COP 21 de París. la cumbre de los héroes anónimos por el clima. <http://www.greenpeace.org/espana/es/Informes-2015/Noviembre/COP-21-de-Paris-La-Cumbre-de-los-heroes-anonimos-por-el-clima/>; consultada el mes de octubre, 2016.
- Harms, A. A., Schoepf, K. F., Miley, G. H., y Kingdon, D. R. (2000). *Principles of fusion energy: An introduction to fusion energy for students of science and engineering*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Herrera Velázquez, J. J. (2007). La fusión nuclear como una opción energética para el siglo XXI. *Sociedad Mexicana de Física*, 21(2):83–93.
- Hively, L. (1977). Convenient computational forms for maxwellian reactivities. *Nuclear Fusion*, 17(4):873.
- Hui, W. y Miley, G. (1992). Burn control by refueling. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 37(6):1399.
- IAEA (2012). *Fusion Reaserch: principles, experiments and reaserch*. International Atomic Energy Agency. Vienna, Austria.
- ININ (2013). Fusión nuclear. <http://inin.gob.mx/temasdeinteres/fusionnuclear.cfm>; consultada el mes de marzo, 2016.
- IPP (2016). Wendelstein 7-X. <http://www-lmj.cea.fr/index-en.htm>; consultada el mes de diciembre, 2016.
- ITER (2009). Unlimited energy. <https://www.iter.org/>; consultada el mes de marzo, 2017.
- Kahn, B. (2016). The world passes 400 ppm threshold. Permanently. <http://www.climatecentral.org/news/world-passes-400-ppm-threshold-permanently-20738>; consultada el mes de septiembre, 2016.
- Kammash, T. (1982). *Fusion reactor physics: principles and technology*. Ann Arbor Science, Michigan.
- Lawson, J. D. (1957). Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1):6.

- LMJ (2016). Le laser mégajoule. <http://www-lmj.cea.fr/index-en.htm>; consultada el mes de marzo, 2017.
- Martin, P. (2011). Feedback control in magnetic nuclear fusion. *Europhysics News*, 42(6):40–44.
- Miyamoto, K. (2005). *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Springer Berlin Heidelberg.
- Mlyná, J. (2011). Focus on: JET the european centre of fusion research. <https://www.euro-fusion.org>; consultado el mes de abril, 2017.
- Nauman, E. B. (1990). *Introductory Systems Analysis for Process Engineers*. Newnes.
- NIF (2016). National Ignition Facility and photo science. <https://lasers.llnl.gov/media/photo-gallery>; consultada el mes de marzo, 2017.
- NIST (2016). Atomic weights and isotopic compositions with relative atomic masses. <https://www.nist.gov/>; consultada el mes de junio, 2016.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación S. A., Madrid.
- Ongena, J., Koch, R., Wolf, R., y Zohm, H. (2016). Magnetic-confinement fusion. *Nature Physics*, 12(5):398–410.
- Orsitto, F., Villari, R., Moro, F., Todd, T., Lilley, S., Jenkins, I., Felton, R., Biel, W., Silva, A., Scholz, M., Rzadkiewicz, J., Duran, I., Tardocchi, M., Gorini, G., Morlock, C., Federici, G., y Litnovsky, A. (2016). Diagnostics and control for the steady state and pulsed tokamak demo. *Nuclear Fusion*, 56(2):026009.
- PCR, T. U. (2010). The largest tandem mirror in the world. <http://www.prc.tsukuba.ac.jp/en/>; consultada el mes de agosto, 2016.
- Piel, A. (2010). *Plasma Physics: An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas*. Springer Berlin Heidelberg, London.
- Post, R. (1959). Summary of UCRL pyrotron (mirror machine) program. Technical Report A/CONF.15/P/377, California. Univ., Livermore. Radiation Lab.
- Schuster, E. y Ariola, M. (2006). The role of controls in nuclear fusion. *Decision and Control 2006 45th IEEE Conference on*, pp. 2201–2206.
- Schuster, E., Krstic, M., y Tynan, G. (2001). Burn control in fusion reactors via nonlinear stabilization techniques. *Fusion Science and Technology*, 43:18–37.

- Schuster, E., Krstic, M., y Tynan, G. (2002). Nonlinear burn control in fusion reactors. *Proceedings of the 19th IEEE/IPSS Symposium on Fusion Engineering. 19th SOFE (Cat. No.02CH37231)*, pp. 430–433.
- Schuster, E., Krstic, M., y Tynan, G. (2003). Burn control in fusion reactors via nonlinear stabilization techniques. *Fusion Science and Technology*, 43(1):18–73.
- SENER (2016). Prospectiva del sector eléctrico 2016-2030. [http://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/177626/Prospectiva\\_del\\_Sector\\_El\\_ctrico\\_2016-2030.pdf](http://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/177626/Prospectiva_del_Sector_El_ctrico_2016-2030.pdf); consultada el mes de febrero, 2017.
- Shafranov, V. D., Bondarenko, B. D., Goncharov, G. A., Lavrentev, O. A., y Sakharov, A. D. (2001). On the history of the research into controlled thermonuclear fusion. *Phys. Usp.*, 44(8):835–843.
- Sorbom, B., Ball, J., Palmer, T., Mangiarotti, F., Sierchio, J., Bonoli, P., Kasten, C., Sutherland, D., Barnard, H., Haakonsen, C., Goh, J., Sung, C., y Whyte, D. (2015). Arc: A compact, high-field, fusion nuclear science facility and demonstration power plant with demountable magnets. *Fusion Engineering and Design*, 100:378 – 405.
- Stacey, W. M. (2010). *Fusion: An Introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., Weinheim.
- Stacey, W. M. (2012). *Fusion Plasma Physics, Second Edition*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.
- Uckan, N. A. (1993). Confinement capability of ITER-EDA design. En *15th IEEE/NPSS Symposium. Fusion Engineering*, volumen 1, pp. 183–186.

# Apéndice A

## Linealización del sistema

### A.1. Desarrollo de la linealización del modelo de quema de fusión

Para la linealización del modelo de quema de fusión que se mostrará a continuación se ha tomado en cuenta únicamente cuando se cuantifica sólo la pérdida de radiación de frenado, sin embargo de manera análoga es posible encontrar la linealización del modelo cuando se adiciona la pérdida por radiación de ciclotrón, para esto donde aparece el término  $P_{rad}$  (ec. 4.6 y ec. 4.7), en lugar de sólo usar la pérdida por radiación de frenado se adiciona también el término de radiación de ciclotrón, así para la densidad de partículas alfa queda la función  $f_{n_\alpha}$  como

$$f_{n_\alpha} = -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} A_{cyc} (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) B^2 T + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right)$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n_\alpha} = & -\frac{\bar{n}_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{\bar{T}_r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4\right) Q_\alpha \right. \\ & - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} A_{cyc} (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) B^2 T + c_{h2} P_{aux} \Big)^{0.47} \\ & \left. + \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp\left(\frac{a_1}{\bar{T}_r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4\right) \right) \quad (A.1) \end{aligned}$$

Luego para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_\alpha} = & \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ & \left. + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp\left(\frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) \right\} \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_\alpha} = & -\frac{1}{k_\alpha k} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) Q_\alpha \right. \\ & + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right)^{0.47} + 0.47 n_\alpha \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \right. \\ & \left. \cdot \exp\left(\frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4\right) Q_\alpha \right. \\ & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right)^{-0.53} \right. \\ & \left. \cdot \left( -c_{h2} A_b (4(n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + 2(n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right) \right] \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} = & -\frac{1}{k_\alpha k} \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}_r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right)^{0.47} + 0.47 \bar{n}_\alpha \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \right. \\
 & \quad \cdot \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}_r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \\
 & \quad \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right]^{-0.53} \\
 & \quad \left. \cdot \left( -c_{h2} A_b (6\bar{n}_{DT} + 16\bar{n}_\alpha + (2z_I + z_I^2) 2\bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \right] \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_{DT}} = & \frac{\partial}{\partial n_{DT}} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_{DT}} = & -\frac{0.47 n_\alpha}{k_\alpha k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot \left( \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \quad \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I + n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right) \\
 & \quad + \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T_r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} &= -\frac{0.47\bar{n}_\alpha}{k_\alpha k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \left. \right)^{-0.53} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad \left. - c_{h2} A_b (2\bar{n}_{DT} + 6\bar{n}_\alpha + (z_I + z_I^2) \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) + \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_I} &= \frac{\partial}{\partial n_I} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right) \right\}^{0.47} \\
 &\quad + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_I} &= -\frac{0.47 n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right) \left. \right)^{-0.53} \\
 &\quad \cdot \left( -c_{h2} A_b (z_I^2 (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + z_I (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_I} \right]_{eq} &= -\frac{0.47\bar{n}_\alpha}{k_\alpha k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \left. \right)^{-0.53} \\
 &\quad \cdot \left( -c_{h2} A_b (z_I^2 (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + z_I (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ \left. + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \right\} \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial T} = -\frac{0.47 n_\alpha}{k_\alpha k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\ \cdot \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \right. \\ \left. - \frac{c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I)}{2\sqrt{T}} \right] \\ + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial T} \right]_{eq} = -\frac{0.47 \bar{n}_\alpha}{k_\alpha k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\ \cdot \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \right. \\ \left. - \frac{c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I)}{2\sqrt{\bar{T}}} \right] \\ + \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) \left( \frac{-r a_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \quad (A.5) \end{aligned}$$

Ahora para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} &= \frac{\partial}{\partial P_{aux}} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ &\quad \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right\}^{0.47} \\ &\quad + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} &= \frac{-0.47 n_\alpha}{k_\alpha k} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ &\quad \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right]^{-0.53} \cdot c_{h2} \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} &= \frac{-0.47 \bar{n}_\alpha}{k_\alpha k} \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ &\quad \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + \bar{P}_{aux} \right) \right]^{-0.53} \cdot c_{h2} \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $S_I$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial S_I} &= \frac{\partial}{\partial S_I} \left\{ -\frac{n_\alpha}{k_\alpha k} \cdot \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ &\quad \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right\}^{0.47} \\ &\quad + \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_\alpha}$  con respecto a  $S_I$  y evalúa en el equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial S_I} \right]_{eq} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Con la información obtenida de la función  $\bar{f}_{n_\alpha}$  de acuerdo a la ec. A.1 y las cuatro parciales de  $f_{n_\alpha}$  respecto a cada una de las variables de interés, ecs. A.2 – A.7, se tiene la aproximación lineal de  $\frac{dn_\alpha}{dt}$  como:

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha}{dt} \cong \bar{f}_{n_\alpha} + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (A.8) \end{aligned}$$

Para la densidad de partículas de combustible, la función  $f_{n_{DT}}$  queda como

$$\begin{aligned} f_{n_{DT}} = -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n_{DT}} = -\frac{\bar{n}_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ - 2c_{\sigma v} \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) + S \quad (A.9) \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\} \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_\alpha} = & -\frac{0.47n_{DT}}{k_{DT}k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ & \cdot \left( -c_{h2} A_b \left( 4(n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + 2(n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right) \right) \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{n}_{DT}}{k_{DT}k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\ & \cdot c_{h2} \left( -A_b (6\bar{n}_{DT} + 16\bar{n}_\alpha + (2z_I + z_I^2) 2\bar{n}_I) \right) \sqrt{\bar{T}} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_{DT}} = & \frac{\partial}{\partial n_{DT}} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ & \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\} \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_{DT}} &= \frac{1}{k_{DT}k} \left[ \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\
 &\quad \left. + 0.47 n_{DT} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I + n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right) \right] - n_{DT} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_{DT}} \right|_{eq} &= -\frac{1}{k_{DT}k} \left[ \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + \bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
 &\quad \left. + 0.47 \bar{n}_{DT} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} \left( A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (2\bar{n}_{DT} + 6\bar{n}_\alpha + (z_I + z_I^2) \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \right] - \bar{n}_{DT} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Para el cambio en  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_I} &= \frac{\partial}{\partial n_I} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\
 &\quad \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\}
 \end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_I} = & -\frac{0.47n_{DT}}{k_{DT}k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ & \cdot c_{h2} \left( A_b (z_I^2 (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + z_I (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right) \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_I} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{n}_{DT}}{k_{DT}k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\ & \cdot c_{h2} \left( -A_b (z_I^2 (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + z_I (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial T} = & \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ & \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\} \end{aligned}$$

Se deriva con respecto a  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial T} = & -\frac{0.47n_{DT}}{k_{DT}k} \left[ \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-ra_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I)}{2\sqrt{T}} \right) \right] \\ & - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \left( \frac{-ra_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial T} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{n}_{DT}}{k_{DT}k} \left[ \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-ra_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I)}{2\sqrt{\bar{T}}} \right) \right] \\ & - 2 \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) \left( \frac{-ra_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

Para el cambio de  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $S_I$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial S} = & \frac{\partial}{\partial S} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ & \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $S_I$  y evalúa en el equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial S_I} \right]_{eq} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Para el cambio de  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} = \frac{\partial}{\partial P_{aux}} \left\{ -\frac{n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \right. \\ \left. - 2c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) + S \right\} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_{DT}}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} = -\frac{0.47 n_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} = -\frac{0.47 \bar{n}_{DT}}{k_{DT}k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} \bar{P}_{aux} \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Con la información obtenida de la función  $\bar{f}_{n_{DT}}$  de acuerdo a la ec. A.9 y las cuatro parciales de  $f_{n_{DT}}$  con respecto a las variables de interés, ecs. A.10 – A.15, tenemos la aproximación lineal de  $\frac{dn_{DT}}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dn_{DT}}{dt} \approx \bar{f}_{n_{DT}} + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\ + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Para la densidad de partículas de impurezas, la función  $f_{n_I}$  queda como:

$$f_{n_I} = -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I$$

Se evalúa  $f_{n_I}$  en el equilibrio

$$\bar{f}_{n_I} = -\frac{\bar{n}_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \quad (\text{A.17})$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $n_\alpha$

$$\frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\}$$

Se deriva con respecto  $n_\alpha$

$$\frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_\alpha} = -\frac{0.47 n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \left( -c_{h2} A_b (4(n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + 2(n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right)$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} = -\frac{0.47 \bar{n}_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (4(\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + 2(\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \cdot c_{h2} \left( -A_b (4(\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + 2(\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \quad (\text{A.18})$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_{DT}} = \frac{\partial}{\partial n_{DT}} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\}$$

Se deriva  $f_{n_I}$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_{DT}} = -\frac{0.47 n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \left( \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha - c_{h2} A_b (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I + n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right)$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} = -\frac{0.47 \bar{n}_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \cdot \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ \left. - c_{h2} A_b (2\bar{n}_{DT} + 6\bar{n}_\alpha + (z_I + z_I^2) \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \quad (A.19)$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $n_I$

$$\frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_I} = \frac{\partial}{\partial n_I} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\}$$

Se deriva con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_I} = & -\frac{1}{k_I k} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right]^{0.47} \\
 & + 0.47 n_I \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \\
 & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right]^{-0.53} \\
 & c_{h2} \left( -A_b (z_I^2 (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I) + z_I (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2)) \sqrt{T} \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_I} \right]_{eq} = & -\frac{1}{k_I k} \cdot \left[ \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right) \right]^{-0.47} \\
 & + 0.47 \bar{n}_I \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} P_{aux} \right) \right]^{-0.53} \\
 & \left. \cdot c_{h2} \left( -A_b (z_I^2 (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + z_I (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \right] \quad (A.20)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $T$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{n_I}}{\partial T} = & \frac{\partial}{\partial T} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_I}$  con respecto a  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_I}}{\partial T} = & -\frac{0.47n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \cdot & \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \right. \\ & \left. - \frac{c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I)}{2\sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial T} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{n}_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{\bar{T}} + (10^{-3}) P_{aux} \right)^{-0.53} \\ \cdot & \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \right. \\ & \left. - \frac{c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I)}{2\sqrt{\bar{T}}} \right) \quad (A.21) \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $S_I$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_I}}{\partial S_I} = & \frac{\partial}{\partial S_I} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_I}$  con respecto a  $S_I$  y evaluando en el equilibrio

$$\left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial S_I} \right]_{eq} = 1 \quad (A.22)$$

Para el cambio en  $f_{n_I}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} = & \frac{\partial}{\partial P_{aux}} \left\{ -\frac{n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} + S_I \right\} \end{aligned}$$

Se deriva  $f_{n_I}$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} = & -\frac{0.47n_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{n}_I}{k_I k} \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + c_{h2} \bar{P}_{aux} \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \quad (A.23) \end{aligned}$$

Con la información obtenida de la función  $\bar{f}_{n_I}$  de acuerdo a la ec. A.17 y las cuatro parciales de  $f_{n_I}$  con respecto a cada una de las variables de interés, ecs. A.18-A.23, tenemos la aproximación línea de  $\frac{dn_I}{dt}$

$$\frac{dn_I}{dt} \cong \left. \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \quad (A.24)$$

Para la temperatura  $T$ , se evalúa primero la función en el equilibrio  $f_T$

$$\begin{aligned} f_T = & \left\{ \frac{2}{3} \left[ \frac{-3}{2} \frac{T}{k} (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I) \right. \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. - c_{h2} A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + c_{h2} P_{aux} \right)^{0.47} \\ & \left. + c_{\sigma v} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\ & \left. + c_T \left( -A_b Z_{eff} n_e^2 \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \\ & \left. - \bar{T} \left( 2 \frac{dn_{DT}}{dt} + 3 \frac{dn_\alpha}{dt} + (z_I + 1) \frac{dn_I}{dt} \right) \right\} \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \end{aligned}$$

Se hace la expansión para los términos de las derivadas que aparecen nuevamente (densidades de combustible, partículas alfa e impurezas, fuente de impurezas y potencia auxiliar)

$$\begin{aligned}
 f_T = & -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \\
 & + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right. \\
 & - T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right\} \\
 & + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right\} \\
 & + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 f_T = & -\frac{\bar{T}}{k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \\
 & + \frac{1}{2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_T \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \bar{T} (2\bar{f}_{n_{DT}} + 3\bar{f}_{n_\alpha} + (z_I + 1)\bar{f}_{n_I}) \right\} \quad (A.25)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} = & \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right) \right)^{0.47} \\
 & + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right\} \\
 -T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right\}_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right\}_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right\}_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right\}_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right\}_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \\
 + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right\}_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right\}_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right\}_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right\}_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right\}_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \\
 + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right\}_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right\}_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right\}_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right\}_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right\}_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $n_\alpha$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} = & -\frac{0.47T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot c_{h2} \left( -A_b (4(n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + 2(n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{3}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I)^2} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I)^2} c_T \left( -A_b (4(n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + 2(n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right. \\
 & \cdot (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I) - 3 \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} \right) + 3P_{aux} \left. \right) \\
 & \left. - \frac{T((2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I) - n_\alpha \cdot 3)}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I)^2} \left( 2 \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} + 3 \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{T}}{k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot c_{h2} \left( -A_b (6\bar{n}_{DT} + 16\bar{n}_\alpha + (2z_I + z_I^2) 2\bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \\
 & + \frac{2}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I)^2} \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I)^2} c_T \left( -A_b (6\bar{n}_{DT} + 16\bar{n}_\alpha + (2z_I + z_I^2) 2\bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right. \\
 & \cdot (2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I) - 3 \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) + 3P_{aux} \left. \right) \\
 & \left. - \frac{T(2\bar{n}_{DT} + (z_I + 1)\bar{n}_I)}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I)^2} \left( 2 \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} + 3 \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} \right) \quad (A.26)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} &= \frac{\partial}{\partial n_{DT}} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right\} \\
&\quad - T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
&\quad \left. + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \\
&\quad + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
&\quad \left. + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \\
&\quad + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
&\quad \left. + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \left. \right\} \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $n_{DT}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} = & -\frac{0.47T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot \left( \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I + n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right) \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} \left[ \frac{n_{DT}}{2} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. \cdot (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I) - \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \cdot 2 \right] \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} c_T \left[ -A_b (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I + n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) \sqrt{T} \right. \\
 & \left. \cdot (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I) - \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} \right) \cdot 2 + 2P_{aux} \right] \\
 & - \frac{T ((2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I) - n_{DT} \cdot 2)}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} \left( 2 \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} + 3 \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \Big]_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \Big]_{eq} \Big)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{T}}{k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (2\bar{n}_{DT} + 6\bar{n}_\alpha + (z_I + z_I^2) \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} \\
 & \cdot \left[ \frac{\bar{n}_{DT}}{2} c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha (2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I) \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4 \right) Q_\alpha \cdot 2 \right] \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} c_T \left[ -A_b (2\bar{n}_{DT} + 6\bar{n}_\alpha + (z_I + z_I^2) \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right. \\
 & \left. \cdot (2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I) - \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \cdot 2 + 2P_{aux} \right] \\
 & - \frac{\bar{T} (3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} \left( 2 \left. \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} + 3 \left. \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} + (z_I + 1) \left. \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} \right) \quad (A.27)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial n_I} = & \frac{\partial}{\partial n_I} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right. \\
 & \left. -T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 & + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 & + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $n_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial n_I} = & -\frac{0.47T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot \left( -A_b (z_I^2 (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + z_I (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{z_I + 1}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} c_T \left( \left( -A_b (z_I^2 (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) + z_I (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I)) \sqrt{T} \right) \right. \\
 & \left. \cdot (2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I) - \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} \right) \cdot (z_I + 1) + (z_I + 1) P_{aux} \right) \\
 & \left. - \frac{T ((2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I) - n_I \cdot (z_I + 1))}{(2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1) n_I)^2} \left( 2 \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} + 3 \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} + (z_I + 1) \left[ \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \right]_{eq} = & -\frac{0.47\bar{T}}{k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 (1.602 \times 10^{-25}) \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot c_{h2} \left( -A_b (z_I^2 (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + z_I (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{z_I + 1}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} c_T \left( \left( -A_b (z_I^2 (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) + z_I (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I)) \sqrt{\bar{T}} \right) \right. \\
 & \left. \cdot (2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I) - \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} \right) \cdot (z_I + 1) + (z_I + 1) P_{aux} \right) \\
 & \left. - \frac{\bar{T} (2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha)}{(2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I)^2} \left( 2 \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} + 3 \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} + (z_I + 1) \left[ \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} \right) \right) \quad (A.28)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $T$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_T}{\partial T} = & \frac{\partial}{\partial T} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right\} \right. \\
& -T \left\{ 2 \left( \left[ \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left[ \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \right. \\
& + 3 \left( \left[ \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \\
& \left. \left. + \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left[ \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \right. \\
& \left. + (z_I + 1) \left( \left[ \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left[ \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left[ \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left[ \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \left[ \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left[ \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \right) \right) \right\} \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $T$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial T} = & -\frac{1}{k} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right]^{0.47} \\
 & + 0.47 T \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 & \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \\
 & \cdot \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) \right. \\
 & \left. + \frac{c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \right)}{2\sqrt{T}} \right) \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) \right. \\
 & \left. \cdot Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{T^{r+1}} + a_3 + 2a_4 T + 3a_5 T^2 + 4a_6 T^3 \right) + \frac{c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \right)}{2\sqrt{T}} \right] \\
 & - \frac{2T}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left( 2 \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \Big|_{eq} + 3 \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \Big|_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial n_I}{\partial T} \Big|_{eq} \right)
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial T} = & -\frac{1}{k} \left[ \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
 & \left. + \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \right. \\
 & \cdot \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \right)}{2\sqrt{\bar{T}}} \right) \right] \\
 & + \frac{2}{3} \frac{1}{2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I} \left[ \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3 \bar{T} + a_4 \bar{T}^2 + a_5 \bar{T}^3 + a_6 \bar{T}^4 \right) \right. \\
 & \cdot \left. Q_\alpha \left( \frac{-r a_1}{\bar{T}^{r+1}} + a_3 + 2a_4 \bar{T} + 3a_5 \bar{T}^2 + 4a_6 \bar{T}^3 \right) + \frac{c_T \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \right)}{2\sqrt{\bar{T}}} \right] \\
 & \left. - \frac{2\bar{T}}{2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1) \bar{n}_I} \left( 2 \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right)_{eq} + 3 \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} \quad (A.29)
 \end{aligned}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $S_I$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial S_I} = & \frac{\partial}{\partial S_I} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} \exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right. \\
 & \left. - T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 & + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 & + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right)_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 & \left. + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $S_I$

$$\frac{\partial f_T}{\partial S_I} = \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left[ -T \left( 2(0) + 3(0) + (z_I + 1)(1) \right) \right]$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\frac{\partial f_T}{\partial S_I} = \frac{-\bar{T}(z_I + 1)}{2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I} \tag{A.30}$$

Para el cambio en  $f_T$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} &= \frac{\partial}{\partial P_{aux}} \left\{ -\frac{T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{0.47} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left\{ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + c_T \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - T \left\{ 2 \left( \bar{f}_{n_{DT}} + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial n_{DT}}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_{DT}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 &\quad + 3 \left( \bar{f}_{n_\alpha} + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 &\quad \left. + \frac{\partial n_\alpha}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \\
 &\quad + (z_I + 1) \left( \bar{f}_{n_I} + \frac{\partial n_I}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \frac{\partial n_I}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \frac{\partial n_I}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 &\quad \left. + \frac{\partial n_I}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \frac{\partial n_I}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \left. \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Se deriva  $f_T$  con respecto a  $P_{aux}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} &= -\frac{0.47T}{k} \left( \left( \frac{n_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} exp \left( \frac{a_1}{T^r} + a_2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 T^3 + a_6 T^4 \right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad \left. + c_{h2} \left( -A_b (n_{DT} + 4n_\alpha + z_I^2 n_I) (n_{DT} + 2n_\alpha + z_I n_I) \sqrt{T} + P_{aux} \right) \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \\
 &\quad + \frac{1}{2n_{DT} + 3n_\alpha + (z_I + 1)n_I} \left[ c_T - T \left( 2 \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} + 3 \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} + (z_I + 1) \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Se evalúa en el equilibrio

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} &= -\frac{0.47\bar{T}}{k} \left( \left( \frac{\bar{n}_{DT}}{2} \right)^2 c_{\sigma v} c_{h1} \exp\left(\frac{a_1}{\bar{T}^r} + a_2 + a_3\bar{T} + a_4\bar{T}^2 + a_5\bar{T}^3 + a_6\bar{T}^4\right) Q_\alpha \right. \\
 &\quad \left. + c_{h2} \left( -A_b (\bar{n}_{DT} + 4\bar{n}_\alpha + z_I^2 \bar{n}_I) (\bar{n}_{DT} + 2\bar{n}_\alpha + z_I \bar{n}_I) \sqrt{\bar{T}} + \bar{P}_{aux} \right) \right)^{-0.53} \cdot c_{h2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\bar{n}_{DT} + 3\bar{n}_\alpha + (z_I + 1)\bar{n}_I} \left[ c_T - \bar{T} \left( 2 \left. \frac{\partial f_{n_{DT}}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} + 3 \left. \frac{\partial f_{n_\alpha}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} + (z_I + 1) \left. \frac{\partial f_{n_I}}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} \right]
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Con toda la información obtenida de la función  $\bar{f}_T$  de acuerdo a (12) y las seis parciales de  $f_T$  con respecto a las variables de interés, ecs. 31 – 35, tenemos la aproximación lineal de  $\frac{dT}{dt}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} \approx \bar{f}_T + \left. \frac{\partial f_T}{\partial n_\alpha} \right]_{eq} (n_\alpha - \bar{n}_\alpha) + \left. \frac{\partial f_T}{\partial n_{DT}} \right]_{eq} (n_{DT} - \bar{n}_{DT}) + \left. \frac{\partial f_T}{\partial n_I} \right]_{eq} (n_I - \bar{n}_I) + \left. \frac{\partial f_T}{\partial T} \right]_{eq} (T - \bar{T}) \\
 + \left. \frac{\partial f_T}{\partial S_I} \right]_{eq} (S_I - \bar{S}_I) + \left. \frac{\partial f_T}{\partial P_{aux}} \right]_{eq} (P_{aux} - \bar{P}_{aux}) \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Códigos de Matlab

### B.1. Simulación de sistema no lineal

A continuación se presenta el código que simula el comportamiento del sistema no lineal presentado en el capítulo 5.

Listing B.1: Quema de fusión

```
1  %*****
2  %Constantes
3  Qa=3.52e3;      %Energia liberada por alfa      [keV]
4  I=22;          %Corriente del plasma          [MA]
5  R=6;           %Radio mayor                  [m]
6  a=2.15;        %Radio menor                  [m]
7  B=4.85;        %Campo magnetico                  [T]
8  Ab=5.5e-37;    %Coeficiente de bremsstrahlung            [Wm^3(kev)^1/2]
9  Ac=6.3e-20;    %Coeficiente de ciclotron                [J(eV)^-1Tesla^-2s^-1]
10 zi=8;
11 Paux=0;        %Potencia auxiliar                        [MWm^-3]
12 S=4.04e18;     %Fuente de combustible                       [m^-3s^-1]
13 Si=0;          %Fuente de impurezas                        [m^-3s^-1]
14 %*****
15 %Tasa de reaccion
16 a1=-21.377692; %Coeficientes de Bucky
```

```

17 a2=-25.204054;
18 a3=-7.1013427e-2;
19 a4=1.9375451e-4;
20 a5=4.9246592e-6;
21 a6=-3.9836572e-8;
22 r=0.2935;
23 %*****
24 %Tiempos de confinamiento
25 ka=7;           %Cte. de confinamiento para alfas           [s]
26 kdt=3;         %Cte. de confinamiento para DT             [s]
27 ki=10;         %Cte. de confinamiento para impurezas       [s]
28 Ai=2.5;        %Número isotopico
29 kx=2.2;        %Elongacion en gi
30 f=0.85;        %Parámetro de escalamiento
31 k=f*0.082*I^1.02*R^1.6*B^0.15*Ai^0.5*kx^-0.19;
32 %*****
33 %Ecuaciones diferenciales del sistema con adición de pérdida por ciclotron
34 %Densidad de partículas alfa
35 fna=@(na,ndt,ni,T)    (-na/(ka*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
36 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
37 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))
38 +(1e-6)*(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4);
39 %Densidad de combustible
40 fndt=@(na,ndt,ni,T)    (-ndt/(kdt*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
41 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
42 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))
43 -2*(1e-6)*(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)+S;
44 %Densidad de impurezas
45 fni=@(na,ndt,ni,T)    (-ni/(ki*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
46 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
47 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+Si;
48 %Temperatura del sistema
49 fT=@(na,ndt,ni,T)    (2/3*((-3/2*T*(2*ndt+3*na+(zi+1)*ni)/(k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
50 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-(1e-3)*Ab*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
51 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))
52 +((1e-6)*(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa)-(6.2415e15)
53 *(Ab*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2))
54 -(6.2415e15)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(6.2415e15)*Paux)
55 -T*(2*((-ndt/(kdt*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa
56 -Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)

```

```

57 *6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))-2*(1e-6)*(ndt/2)^2
58 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)+S)+3*((-na/(ka*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
59 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3))*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
60 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47)))+(1e-6)
61 *(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4))+zi+1)
62 *((-ni/(ki*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)
63 *((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))*((ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20
64 *(ndt+2*na+zi*ni)*B^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+Si))/((2*ndt+3*na+(zi+1)*ni);
65 %*****
66 %Parametros del metodo de Euler
67 ts=200; %Tiempo de simulacion en segundos
68 dt=0.01; %Paso de integraci3n
69 N=ts/dt; %N3mero de 'puntos' de la solucion
70 t=0:dt:ts-dt; %Vector de tiempo
71 %*****
72 %Reserva de memoria
73 na=zeros(1,N);
74 ndt=zeros(1,N);
75 ni=zeros(1,N);
76 T=zeros(1,N);
77 %*****
78 %Condiciones iniciales (punto de equilibrio)
79 na=6.28e18; %Densidad de particulas alfa [m^-3]
80 ndt=8.55e19; %Densidad de particulas de combustible [m^-3]
81 ni=0; %Densidad de particulas impurezas [m^-3]
82 T=8.28; %Temperatura [keV]
83 %*****
84 %Iteraciones para Euler
85 for j = 1:N-1
86 na(j+1)=na(j) + fna(na(j),ndt(j),ni(j),T(j))*dt;
87 ndt(j+1)=ndt(j)+ fndt(na(j),ndt(j),ni(j),T(j))*dt;
88 ni(j+1)=ni(j) + fni(na(j),ndt(j),ni(j),T(j))*dt;
89 T(j+1)=T(j) + fT(na(j),ndt(j),ni(j),T(j))*dt;
90 end
91 %*****
92 %Densidades: alfa, combustible, electrones y total
93 figure(1)
94 hold on
95 plot (t,na,'r','LineWidth',2)
96 plot (t,ndt,'g','LineWidth',2)

```

```

97 plot (t,ndt+2*na+zi*ni,'c','LineWidth',2)
98 hold off
99 xlabel('Tiempo [s]')
100 ylabel('Densidad [m^-^3]')
101 legend ('Densidad alfa','Densidad combustible','Densidad de electrones')
102 %*****
103 %Tasa de reacción del modelo [cm^-3s^-1]
104 figure(3)
105 plot(T,exp(a1*T.^-r+a2+a3*T+a4*T.^2+a5*T.^3+a6*T.^4),'LineWidth',2)
106 xlabel('T [keV]')
107 ylabel('Tasa de reaccion <\sigmav> [cm^3s^-^1]')
108 %*****
109 %Energía por unidad de volumen dentro del plasma [Jm^-^3]
110 figure(4)
111 plot(t,1.602e-16*T.*(2*ndt+3*na+(zi+1)*ni),'LineWidth',2)
112 xlabel('Tiempo [s]')
113 ylabel('Energia [Jm^-^3]')
114 %*****
115 %Temperatura del sistema
116 figure(5)
117 plot(t,T,'b','LineWidth',2)
118 xlabel('Tiempo [s]')
119 ylabel('Temperatura [keV]')

```

## B.2. Código del controlador

A continuación se presenta el código correspondiente al control en lazo cerrado del sistema.

```

1 clc
2 %*****
3 %Procesamiento simbólico de funciones
4 syms na ndt ni T k ka kdt ki a1 a2 a3 a4 a5 a6 r sigmav Qa S Si Paux Ab Zeff zi Ch1 Csv Ch2
5 syms a21 a22 a23 a24 a31 a32 a33 a34 a41 a42 a43 a44 Ct Bm n s
6 syms kpc kic kdc af bf tsim1
7 %Ecuaciones diferenciales del sistema
8 %Densidad de partículas alfa
9 dna= (-na/(ka*k*(ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T.^2+a5*T.^3+a6*T.^4)*Qa
10 -Ab*(1e-3)*(ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))* (ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20

```

```

11 *(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+ (1e-6)*(ndt/2)^2
12 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4);
13 %Densidad de combustible
14 dndt= (-ndt/(kdt*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa
15 -Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni)))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20
16 *(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))-2*(1e-6)*(ndt/2)^2
17 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)+S;
18 %Densidad de impurezas
19 dni= (-ni/(ki*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa
20 -Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni)))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)
21 *6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+Si;
22 %Temperatura del sistema
23 dT= (2/3*((-3/2*T*(2*ndt+3*na+(zi+1)*ni)/(k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
24 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-(1e-3)*Ab*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
25 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))
26 +((1e-6)*(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa)-(6.2415e15)
27 *(Ab*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(6.2415e15)
28 *6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(6.2415e15)*Paux)-T*(2*((-ndt/(kdt*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
29 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))
30 *(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))
31 -2*(1e-6)*(ndt/2)^2*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)+S)
32 +3*((-na/(ka*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)*exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)
33 *((ndt+4*na+zi^2*ni)/(ndt+2*na+zi*ni))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20
34 *(ndt+2*na+zi*ni)*Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+ (1e-6)*(ndt/2)^2
35 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4))+ (zi+1)*((-ni/(ki*k*((ndt/2)^2*(1.602e-25)
36 *exp(a1*T^-r+a2+a3*T+a4*T^2+a5*T^3+a6*T^4)*Qa-Ab*(1e-3)*((ndt+4*na+zi^2*ni)
37 /(ndt+2*na+zi*ni))*(ndt+2*na+zi*ni)^2*T^(1/2)-(1e-3)*6.3e-20*(ndt+2*na+zi*ni)
38 *Bm^2*T+(1e-3)*Paux)^-0.47))+Si)))/(2*ndt+3*na+(zi+1)*ni);
39 %Cálculo simbólico de los coeficientes de la expansión en series de Taylor
40 %Matriz de coeficientes
41 A = jacobian ([dna;dndt;dni;dT],[na ndt ni T Si Paux]);
42 %*****
43 %Constantes
44 Qa=3.52e3; %Energía liberada por alfa [keV]
45 I=22; %Corriente del plasma [MA]
46 R=6; %Radio mayor [m]
47 a=2.15; %Radio menor [m]
48 Bm=4.85; %Campo magnético [T]
49 Ab=1.7e-38; %Coeficiente de bremsstrahlung
50 zi=8;

```

```

51 Paux=0;           %Potencia auxiliar suministrada           [W/m^3]
52 S=4.0e18;        %Fuente de combustible           [m^-3s^-1]
53 Si=0;            %Fuente de impurezas           [m^-3s^-1]
54 %*****
55 %Tasa de reacción de eventos de fusión (coeficientes de Bucky)
56 a1=-21.377692;
57 a2=-25.204054;
58 a3=-7.1013427e-2;
59 a4=1.9375451e-4;
60 a5=4.9246592e-6;
61 a6=-3.9836572e-8;
62 r=0.2935;
63 %*****
64 %Tiempos de confinamiento
65 ka=7;            %Cte. de confinamiento para alfas           [s]
66 kdt=3;           %Cte. de confinamiento para DT           [s]
67 ki=10;           %Cte. de confinamiento para impurezas           [s]
68 Ai=2.5;          %Número isotopico
69 kx=2.2;          %Elongación en gi
70 f=0.85;          %Parámetro de escalamiento
71 k=f*0.082*I^1.02*R^1.6*Bm^0.15*Ai^0.5*kx^-0.19;
72 %*****
73 %Punto de equilibrio
74 na=6.28e18;      %Densidad de partículas alfa           [m^-3]
75 ndt=8.55e19;     %Densidad de partículas de combustible [m^-3]
76 ni=0;            %Densidad de partículas impurezas           [m^-3]
77 T=8.28;          %Temperatura           [keV]
78 %*****
79 %Evaluación de los coeficientes de la linealización
80 A = eval(A);
81 %Coeficientes de linealización de la ecuación para la temperatura
82 %solamente
83 nu1=A(4,1);      %Δ1=dfT/dna
84 nu2=A(4,2);      %Δ2=dfT/dndt
85 nu3=A(4,3);      %Δ3=dfT/dni
86 nu4=A(4,4);      %Δ4=dfT/dT
87 nu5=A(4,5);      %Δ5=dfT/dSi
88 nu6=A(4,6);      %Δ6=dfT/dnPaux
89 %*****
90 %Función de transferencia en lazo cerrado

```

```

91 %Cálculo de las constantes del controlador PID
92 kdc=0;
93 kpci=nu4/nu5;
94 if nu5<0
95     kpc=kpci+1e19;
96 elseif nu5>0
97     kpc=kpci;
98 end
99 kic=(nu5*kpc-nu4)^2/(4*nu5);
100 p=[(1+nu5*kdc) -(kpc*nu5-nu4) (nu5*kic)];           %Polos del sistema
101 rt=roots(p);                                       %Ecuación característica
102 %*****
103 %Simulación de la evolución del sistema
104 tsim=0:0.001:10;                                  %Tiempo de evaluación de la función
105 %Función escalón unitario para densidad de alfas; MG=1.8430e+20
106 %Función de transferencia para alfa y perturbación escalón
107 %Ys=nu1*(1.8430e+20)/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
108 %Y=eval(ilaplace(Ys,tsim));
109 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
110 Y=nu1*(exp(rt(1)*tsim)-exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));
111 figure(1)
112 plot(tsim,Y*1.8430e+20+T,'LineWidth',2)
113 xlabel('Tiempo [s]')
114 ylabel('Temperatura [keV]')
115 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (escalón en n_{\alpha})')
116 %Función impulso unitario para densidad de alfas
117 %Función de transferencia para alfa y perturbación impulso
118 %Ys1=nu1*s*(1.8430e+20)/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
119 %Y1=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
120 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
121 Y1=nu1*(rt(1)*exp(rt(1)*tsim)-rt(2)*exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));
122 figure(2)
123 plot(tsim,Y1*1.8430e+20+T,'LineWidth',2)
124 xlabel('Tiempo [s]')
125 ylabel('Temperatura [keV]')
126 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (impulso en n_{\alpha})')
127 %Respuesta en frecuencia
128 num1=[nu1 0];
129 den1=[1 -(kpc*nu5-nu4)/(1+nu5*kdc) (nu5*kic)/(1+nu5*kdc)];
130 sys1=tf(num1,den1);

```

```

131 figure(3)
132 bode(sys1)
133 grid on
134 %*****
135 %Función escalón unitario para densidad de combustible DT; MG=2.8184e+20
136 %Función de transferencia para combustible DT y perturbación escalón
137 %Ys2=nu1*2.8184e+20/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
138 %Y2=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
139 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
140 Y=nu2*(exp(rt(1)*tsim)-exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));
141 figure(5)
142 plot(tsim,Y*2.8184e+20+T,'LineWidth',2)
143 xlabel('Tiempo [s]')
144 ylabel('Temperatura [keV]')
145 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (escalón en n_{DT})')
146 %Función impulso unitario para densidad de combustible DT
147 %Función de transferencia para combustible DT y perturbación impulso
148 %Ys1=nu1*s*2.8184e+20/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
149 %Y1=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
150 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
151 Y=nu2*(rt(1)*exp(rt(1)*tsim)-rt(2)*exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));
152 figure(6)
153 plot(tsim,Y*2.8184e+20+T,'LineWidth',2)
154 xlabel('Tiempo [s]')
155 ylabel('Temperatura [keV]')
156 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (impulso en n_{DT})')
157 %Respuesta en frecuencia
158 num2=[nu2 0];
159 den2=[1 -(kpc*nu5-nu4)/(1+nu5*kdc) (nu5*kic)/(1+nu5*kdc)];
160 sys2=tf(num2,den2);
161 figure(7)
162 bode(sys2)
163 grid on
164 %*****
165 %Función escalón unitario para densidad de impurezas; MG=5.6234e+19
166 %Función de transferencia para impurezas y perturbación escalón
167 %Ys3=nu1*5.6234e+19/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
168 %Y3=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
169 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
170 Y=nu3*(exp(rt(1)*tsim)-exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));

```

```

171 figure(9)
172 plot(tsim,Y*5.6234e+19+T,'LineWidth',2)
173 xlabel('Tiempo [s]')
174 ylabel('Temperatura [keV]')
175 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (escalón en n_{I})')
176 %Función impulso unitario para densidad de impurezas
177 %Función de transferencia para impurezas y perturbación impulso
178 %Ys3=nu1*s*5.6234e+19/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
179 %Y3=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
180 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
181 Y=nu3*(rt(1)*exp(rt(1)*tsim)-rt(2)*exp(rt(2)*tsim)/(rt(1)-rt(2));
182 figure(10)
183 plot(tsim,Y*5.6234e+19+T,'LineWidth',2)
184 xlabel('Tiempo [s]')
185 ylabel('Temperatura [keV]')
186 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (impulso en n_{I})')
187 %Respuesta en frecuencia
188 num3=[nu3 0];
189 den3=[1 -(kpc*nu5-nu4)/(1+nu5*kdc) (nu5*kic)/(1+nu5*kdc)];
190 sys3=tf(num3,den3);
191 figure(11)
192 bode(sys3)
193 grid on
194 %*****
195 %Función escalón unitario para potencia auxiliar; MG=2.5119e+05
196 %Función de transferencia para impurezas y perturbación escalón
197 %Ys4=nu1*2.5119e+05/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
198 %Y4=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
199 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas
200 Y=nu6*(exp(rt(1)*tsim)-exp(rt(2)*tsim)/(rt(1)-rt(2));
201 figure(13)
202 plot(tsim,Y*2.5119e+05+T,'LineWidth',2)
203 xlabel('Tiempo [s]')
204 ylabel('Temperatura [keV]')
205 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (escalón en P_{aux})')
206 %Función impulso unitario para potencia auxiliar
207 %Función de transferencia para impurezas y perturbación escalón
208 %Ys4=nu1*s*2.5119e+05/(s^2*(1+nu5*kdc)-s*(kpc*nu5-nu4)+nu5*kic);
209 %Y4=eval(ilaplace(Ys1,tsim));
210 %Respuesta de la temperatura a las señales usadas

```

```
211 Y=nu6*(rt(1)*exp(rt(1)*tsim)-rt(2)*exp(rt(2)*tsim))/(rt(1)-rt(2));
212 figure(14)
213 plot(tsim,Y*2.5119e+05+T,'LineWidth',2)
214 xlabel('Tiempo [s]')
215 ylabel('Temperatura [keV]')
216 title('Evolución del sistema en lazo cerrado (impulso en P_{aux})')
217 num4=[nu6 0];
218 den4=[1 -(kpc*nu5-nu4)/(1+nu5*kdc) (nu5*kic)/(1+nu5*kdc)];
219 sys4=tf(num4,den4);
220 figure(15)
221 bode(sys4)
222 grid on
```