Casa abierta al tiempo

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

# Construcción de Hartman-Mycielski

T E S I S

Que para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias (Matemáticas)**

Presenta:

**Marcela López Gaytán**

Asesores:

Dr. Iván Sánchez Romero
Dr. Mikhail Tkatchenko Gelievich

Jurado calificador:

| | |
|---|---|
| Presidente: | Dr. Sergey Antonyan |
| Secretario: | Dr. Richard Gordon Wilson Roberts |
| Vocal: | Dr. Mikhail Tkatchenko Gelievich |

Cd. de México a 25 de febrero de 2020

# Índice general

# Resumen

Dado un grupo topológico $G$, se le puede asociar un grupo topológico $G^\bullet$ conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y tal que $G$ está encajado como subgrupo cerrado de $G^\bullet$. La construcción del grupo con las características que se acaban de mencionar, recibe el nombre de *Construcción de Hartman–Mycielski*.

En este trabajo nos dedicamos a estudiar propiedades topológicas–algebraicas entre $G$ y $G^\bullet$. Se sabe que $G^\bullet$ comparte propiedades algebraicas con $G$ de manera muy sencilla, por ejemplo, si $G$ es un grupo abeliano, divisible, de torsión o libre de torsión, entonces $G^\bullet$ también lo será. Veremos que algunas propiedades topológicas–algebraicas tienen un comportamiento parecido a lo que sucede con las propiedades algebraicas mencionadas anteriormente, es decir, se muestra que $G^\bullet$ es metrizable, segundo numerable, $\omega$-estrecho o separable, si y sólo si $G$ tiene la misma propiedad. Un resultado más reciente es que $G^\bullet$ es $\sigma$-compacto si y sólo si $G$ es $\sigma$-compacto.

La finalidad de la tesis, además de mostrar con detalle la construcción de Hartman–Mycielski, junto con las propiedades más importantes que comparten los grupos $G$ y $G^\bullet$, es presentar dos hechos nuevos que surgieron durante el estudio y escritura de la misma. Los resultados que aporta la tesis son, la caracterización de cuándo $G^\bullet$ es Lindelöf: *$G^\bullet$ es Lindelöf si y sólo si $G^n$ es Lindelöf para cada número natural $n$*, y también la caracterización de cuándo $G^\bullet$ es Čech-completo: *el grupo $G^\bullet$ es Čech-completo si y sólo si* $\mid G \mid = 1$. Proporcionar dichas caracterizaciones son algunos problemas que permanecían abiertos en [2] y aquí damos respuesta a ello. Los resultados anteriores aparecen en el artículo [11], el cual ha sido enviado a la revista Topology and its Applications.

# Introducción

El primer capítulo de esta tesis incluye preliminares tanto de espacios topológicos, como de grupos topológicos, aquí se encuentran resultados auxiliares que usaremos a lo largo del texto. Algunos resultados incluyen demostración, mientras que en otros nos limitamos a indicar las referencias. En este apartado se incluyen uniformidades en grupos topológicos. Aunque el tema es muy extenso, decidimos no profundizar, pues no es el objetivo de estudio en este trabajo. Sin embargo, ya que tampoco es un tema muy estudiado y podría resultar nuevo para algunos lectores, empezamos desde hechos básicos y de manera gradual llegamos a la parte que nos interesa. En este mismo capítulo, haremos uso de la teoría de uniformidades para introducir la compleción de Raikov y más adelante, en el capítulo 3, se usarán estos resultados para dar una caracterización de Čech-completitud para el grupo $G^\bullet$.

En el capítulo 2, desarrollamos uno de los objetivos principales de esta tesis: mostrar que cada grupo topológico $G$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un grupo topológico $G^\bullet$ que es conexo por trayectorias.

Sea $X$ un espacio topológico. El cono topológico de $X$ es el espacio cociente

$$CX = X \times [0,1]/(X \times \{1\}).$$

El cono $CX$ es conexo por trayectorias y $X$ es homeomorfo al subespacio cerrado $X \times \{0\}$. Además, el espacio $X$ y su respectivo cono topológico $CX$ comparten algunas propiedades, como las que se muestran a continuación.

- $CX$ es compacto si y sólo si $X$ es compacto.
- Si $CX$ es metrizable, entonces $X$ es metrizable.
- El espacio $C\mathbb{Z}$ no es metrizable, porque no tiene una base local numerable en el vértice.
- $CX$ es compacto metrizable si y sólo si $X$ es compacto metrizable.

Se podría pensar que el cono topológico de un grupo topológico puede ser un buen candidato para lo que necesitamos, pues cumple con las características topológicas mencionadas anteriormente. Sin embargo, no preserva la estructura algebraica: si $G$ es un grupo topológico, entonces su cono topológico no necesariamente es un grupo topológico. Un ejemplo que ilustra esta situación es el cono topológico $C\mathbb{Z}$ de los números enteros, que no es un espacio homogéneo y, por lo tanto, $C\mathbb{Z}$ no es un grupo topológico. Para nuestros fines, necesitamos que los grupos $G$ y $G^{\bullet}$, además de preservar la estructura topológica, también conserven la estructura algebraica.

En la teoría de grupos topológicos podemos encontrar un perfecto sustituto del cono topológico. En 1958, S. Hartman y J. Mycielski construyeron un grupo topológico que es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. En [8] aparece dicho resultado, el cual es conocido como la *Construcción de Hartman-Mycielski.* Dado un grupo topológico Hausdorff $G$ con operación $\cdot$ y elemento identidad $e$, se considera el conjunto de todas las funciones escalonadas, cuyo dominio es el intervalo $[0, 1)$ y que toman valores en $G$. Una función $f$ es escalonada si existe una partición finita $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ del intervalo $[0, 1)$, en donde $f$ toma un valor constante en cada subintervalo $[a_k, a_{k+1})$ para cada $k = 0, \cdots, n-1$. A dicho conjunto lo denotaremos por $G^{\bullet}$. Enseguida se muestra un elemento de $G^{\bullet}$:

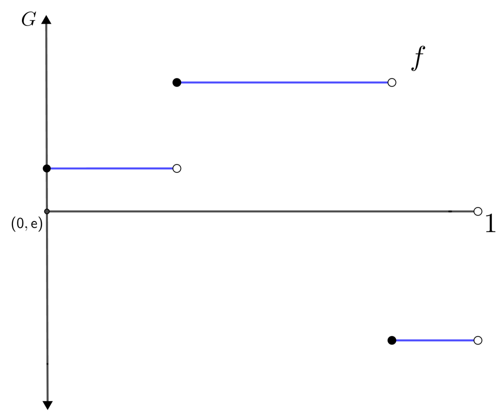


Figura 1: Elemento de $G^{\bullet}$.

En $G^{\bullet}$ se define una operación binaria $*$, la cual está dada por: $(f * g)(r) = f(r) \cdot g(r)$ para cada $r \in J = [0, 1)$, donde $f$ y $g$ son elementos de $G^{\bullet}$. Dicha operación hace que $G$ sea un grupo, luego dotamos a $G^{\bullet}$ con una topología de grupo topológico. De esta manera obtenemos el grupo topológico que buscamos. Entre los hechos más importantes de la construcción de Hartman-Mycielski se encuentra que $G^{\bullet}$ es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, como se demuestra en la proposición 2.1.2. También, en el teorema 2.1.3 se prueba que $G$ está encajado como subgrupo cerrado de $G^{\bullet}$.

En [8] también se muestra que si $\mid G \mid > 1$, entonces $\mid G^{\bullet} \mid = 2^{\omega} + \mid G \mid$ y que si $G$ es un grupo topológico metrizable con métrica $d$, entonces $G^{\bullet}$ es metrizable, con la métrica $d^{\bullet}$ descrita a continuación:

$$d^{\bullet}(f, g) = \int_0^1 d(f(x), g(x))dx,$$

y el encaje de $G$ en $G^\bullet$ es una isometría.

Una vez que la construcción de Hartman-Mycielski está dada de forma explícita, en el capítulo 3 nos dedicamos a estudiar algunas propiedades que comparten $G$ y $G^\bullet$. Sea $\mathcal{P}$ alguna de las siguientes propiedades topológicas-algebraicas:

- metrizable;
- separable;
- segundo numerable;
- $\omega$-estrecho;
- $\sigma$-compacto.

Se demuestra que $G$ tiene $\mathcal{P}$ si y sólo si $G^\bullet$ tiene $\mathcal{P}$. Como se puede ver, estos grupos comparten ciertas propiedades de manera natural. Una pregunta que surge es, ¿qué pasa con la propiedad de Lindelöf, es suficiente que $G$ sea Lindelöf para que $G^\bullet$ también lo sea? Caracterizar cuándo $G^\bullet$ es Lindelöf es una pregunta que plantearon A. V. Arhangel'skii y M. Tkachenko en 2008, la pregunta aparece en [2] y en este trabajo damos respuesta a ella. Para poder responder hacemos uso de algunos hechos auxiliares, el primero está dado en el teorema 3.2.13, en donde se establece que $(G^\bullet)^n$ es topológicamente isomorfo a $G^\bullet$, para cada número natural $n$. Como corolario se tiene que $G^n$ es un subgrupo cerrado de $G^\bullet$, para cada $n$ natural. Es bien conocido que en espacios topológicos la propiedad de ser Lindelöf no se preserva bajo productos. Ejemplo de ello es la recta de Sorgenfrey, que es Lindelöf, pero su cuadrado no lo es. En [1] aparecía como problema abierto si en grupos topológicos ser Lindelöf se preserva bajo productos finitos. Hasta hace poco, en [13] se presentó un ejemplo de un grupo topológico Lindelöf $G$ tal que $G^2$ no es normal, por lo tanto $G^2$ tampoco es Lindelöf. En este trabajo se da una condición necesaria y suficiente para que $G^\bullet$ sea Lindelöf: *El grupo $G^\bullet$ es Lindelöf si y sólo si $G^n$ es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$* (ver teorema 3.2.16). Dicha caracterización responde a un problema que permanecía abierto en [2].

Por otro lado, para responder ¿cuándo $G^\bullet$ es Čech-completo? necesitamos recordar algunos resultados sobre compleción de Raikov. De este modo, en el corolario 3.2.18 demostramos que $G^\bullet$ es Raikov completo si y sólo si $G$ es el grupo trivial. Luego, en en el teorema 3.2.19 se menciona que todo grupo Čech-completo es Raikov completo. Estos resultados dan lugar al corolario 3.2.20: *$G^\bullet$ es Čech-completo si y sólo si $\mid G \mid= 1$*, lo cual responde a la pregunta que se mencionó antes y que también aparece en [2] como problema abierto. En [4] los autores mencionan el resultado 3.2.18, pero no lo demuestran, sin embargo construyen la compleción de Raikov de $G^\bullet$ cuando $G$ es un grupo topológico metrizable.

Los resultados nuevos, aquí obtenidos dieron lugar el artículo [11], el cual ha sido enviado a la revista Topology and its Applications.

# Capítulo 1

# Preliminares

En esta sección damos algunas herramientas necesarias para la demostración de los resultados principales de esta tesis.

## 1.1. Espacios topológicos

A continuación se presentan, sin entrar en mucho detalle, una serie de definiciones y resultados que son necesarios para demostrar que los irracionales no son $\sigma$-compactos. La importancia de este hecho se verá clara en el capítulo 2, especificamente en el ejemplo 3.2.17.

Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Decimos que $A$ es *denso en ninguna parte* si $int(\bar{A}) = \emptyset$.

Sea $X$ es un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$, decimos que $A$ es de *la primera categoría* si $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, en donde $A_n \subset X$ es un subconjunto denso en ninguna parte en $X$, para cada $n \in \omega$. Si $X$ no es de la primera categoría, entonces se dice que $X$ es de *la segunda categoría.*

Un espacio topoógico $X$ es un *espacio de Baire* si toda intersección numerable de abiertos y densos en $X$ es densa. Como observación, notemos que todo espacio de Baire es de la segunda categoría.

**Proposición 1.1.1.** [9, Sección 5.6] *Todo espacio métrico completo es de Baire.*

Decimos que un espacio $X$ es *completamente metrizable* si admite una métrica completa compatible con la topología de $X$.

**Corolario 1.1.2.** *Todo espacio completamente metrizable es de Baire*

**Proposición 1.1.3.** *En $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ todo compacto es denso en ninguna parte.*

Una vez recordado lo anterior podemos continuar con la demostración del resultado que nos interesa.

**Proposición 1.1.4.** *El conjunto de números irracionales no es $\sigma$-compacto.*

*Demostración.* Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fuera $\sigma$-compacto se tendría que es unión numerable de compactos. Por la proposición anterior se tendría que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, y por lo tanto, el conjunto de números irracionales sería de la primera categoría, con lo cual se llega a una contradicción, pues por el corolario 1.1.2 se tiene que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de la segunda categoría. Concluimos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es $\sigma$-compacto. $\square$

En la siguiente sección mencionaremos algunos hechos importantes acerca de pseudocompacidad, pero para esto es necesario recordar algunos resultados que serán de utilidad.

Un espacio Tychonoff $X$ es *pseudocompacto* si para cada función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ se tiene que $f(X) \subset \mathbb{R}$ es acotada.

Sea $X$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de $X$ se llama *localmente finita* si para cada elemento $x$ de $X$ existe una vecindad $V$ de $x$, tal que $V$ intersecta a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Si $V$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{F}$ se dice que $\mathcal{F}$ es *discreta*.

A continuación damos una caracterización de los espacios pseudocompactos en términos de familias localmente finitas.

**Proposición 1.1.5.** *Sea $X$ un espacio Tychonoff. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *El espacio $X$ es pseudocompacto.*

ii) *Cada familia localmente finita de subconjuntos no vacíos de $X$ es finita.*

iii) *Cada cubierta abierta y localmente finita de $X$ es finita.*

iv) *Cada cubierta abierta y localmente finita de $X$ tiene una subcubierta finita.*

La condición ii) se debe a Glicksberg, del año 1952 y se puede consultar en [7], mientras que en 1957, Kerstan da iii). La equivalencia en iv) corresponde a Smirnov en el año 1954.

Las siguientes proposiciones resultan ser pieza clave para demostrar los teoremas 3.2.12 y 3.2.16, porque además de simplificar de manera considerable el trabajo, permiten apreciar mejor lo que se hace. Las demostraciones se omiten, pero se recomienda consultar [6] para más detalle.

**Proposición 1.1.6.** *El producto cartesiano $X \times Y$ de un espacio Lindelöf $X$ y un espacio compacto $Y$ es un espacio Lindelöf.*

**Proposición 1.1.7.** *El producto finito de espacios $\sigma$-compactos es $\sigma$-compacto.*

**Proposición 1.1.8.** *La unión numerable de subespacios Lindelöf es Lindelöf.*

## 1.2. Grupos topológicos

Un conjunto $G$ con una operación binaria $\cdot$ y una familia $\tau$ de subconjuntos de $G$ se llama *grupo topológico* si satisface las siguientes condiciones:

1) $(G, \cdot)$ es un grupo;

2) $(G, \tau)$ es un espacio topológico;

3) Las funciones $g_1\colon (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ y $g_2\colon (G,\tau) \to (G,\tau)$ dadas por $g_1(x,y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, en donde $x^{-1}$ es el inverso de $x$.

Con frecuencia nos referiremos al grupo topológico $G$ con operación $\cdot$ y topología $\tau$ como la terna $(G, \cdot, \tau)$. Si no hay ambiguedad, usaremos sólo $G$.

**Teorema 1.2.1.** *Considere un grupo topológico $G$. Si $g$ es un elemento de $G$, entonces las funciones $\rho_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, para cada $x \in G$, son homeomorfismos de $G$ en sí mismo. La inversión $f\colon G \to G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismo. Las funciones $\rho_g$ y $\sigma_g$ se llaman traslaciones derechas e izquierdas de $g$, respectivamente.*

**Corolario 1.2.2.** *Todo grupo topológico $G$ es un espacio homogéneo.*

El siguiente teorema muestra como generar una topología de grupo topológico y será muy útil cuando hagamos la construcción del grupo que nos interesa.

**Teorema 1.2.3.** *Sean $G$ un grupo topológico Hausdorff y $\mathscr{U}$ una base local de $G$ en su identidad $e$. Entonces $\mathscr{U}$ tiene las siguientes propiedades:*

i) *Para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V^2 \subset U$;*

ii) *Para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;*

iii) *Para cada $U \in \mathscr{U}$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $Vx \subset U$;*

iv) *Para cada $U \in \mathscr{U}$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$;*

v) *Para cada $U, V \in \mathscr{U}$, existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $W \subset U \cap V$;*

vi) $\bigcap \mathscr{U} = \{e\}$.

*Por otra parte, sea $G$ un grupo sin topología y $\mathscr{U}$ una familia de subconjuntos de $G$ que satisface las propiedades* i) – vi). *Entonces $\mathscr{B}_{\mathscr{U}} = \{Ua\colon a \in G, U \in \mathscr{U}\}$ es una base para una topología $\tau_{\mathscr{U}}$ en $G$ que es Hausdorff. Con esta topología, $G$ es un grupo topológico y la familia $\{aU\colon a \in G, U \in \mathscr{U}\}$ es una base para la misma topología en $G$.*

*Demostración.* Si $G$ es un grupo topológico, entonces i) y ii) se siguen de la continuidad de los mapeos inversión y multipliación en la identidad $e$. La propiedad iii) se sigue de la continuidad de las traslaciones izquierdas en $G$. Similarmente, iv) se sigue del hecho que $x \longrightarrow ax$ y $xa \longrightarrow axa^{-1}$ son homeomorfismos de $G$. La propiedad v) es clara, ya que $\mathscr{U}$ es una base local en la identidad $e$, mientras que vi) se cumple ya que $G$ es un espacio Hausdorff y $\mathscr{U}$ es una base abierta en $e$.

Para probar la segunda parte del teorema, sean $\mathscr{U}$ una familia de subconjuntos de $G$ tal que las condiciones i) – vi) se cumplen y $\tau$ la familia de todos los subconjuntos $W$ de $G$ que satisfacen la siguiente condición:

Para cada $x \in W$, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $Ux \subset W$.

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1.** La familia $\tau$ es una topología en $G$.

Efectivamente, el vacío y $G$ están en $\tau$. Ahora, supongamos que $W_1, W_2 \in \tau$ y pongamos $W = W_1 \cap W_2$. Para probar que $W$ es elemento de $\tau$, consideremos $x \in W$. Existen $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ tales que $U_1x \subset W_1$ y $U_2x \subset W_2$. Por la propiedad v) se tiene que existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$. Entonces, $Ux \subset W_1 \cap W_2 = W$. De aquí, $W \in \tau$. Por otro lado, es inmediato que la unión arbitraria de elementos de $\tau$ sigue estando en $\tau$. Con esto concluimos que $\tau$ es una topología en $G$.

**Afirmación 2.** Para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathscr{U}$ se cumple que $Ux \in \tau$.

Sea $y \in Ux$. Entonces $yx^{-1} \in U$. Por la propiedad (iii), existe un elemento $V \in \mathscr{U}$ tal que $Vyx^{-1} \subset U$. Se sigue que $Vy \subset Ux$. De aquí, $Ux \in \tau$.

**Afirmación 3.** La familia $\mathscr{B}_{\mathscr{U}} = \{Ua \colon a \in G, U \in \mathscr{U}\}$ es una base para la topología $\tau$. En consecuencia $\tau = \tau_{\mathscr{U}}$.

Se sigue de la afirmación anterior.

**Afirmación 4.** La multiplicación en $G$ es conjuntamente continua con respecto a la topología $\tau$.

Sean $a, b$ elementos arbitrarios de $G$ y $O$ un elemento de $\tau$ tal que $ab \in O$. Entonces existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $Wab \subset O$. Ahora, encontremos $U, V \in \mathscr{U}$ tales que $UaVb \subset Wab$ o, equivalentemente, $UaV \subset Wa$, Lo cual equivale a $U(aVa^{-1}) \subset W$. Ahora podemos ver cómo escoger $U, V \in \mathscr{U}$.

Primero, aplicar i) para escoger $U \in \mathscr{U}$ tal que $U^2 \subset W$. Después, usar iv) y escoger $V \in \mathscr{U}$ tal que $aVa^{-1} \subset U$. Por la elección de $U$ y $V$, tenemos $U(aVa^{-1}) \subset U^2 \subset W$, lo cual implica que $UaVb \subset Wab$. Así, la multiplicación en $G$ es continua con respecto a la topología $\tau$. En particular, todas las traslaciones de $G$ son continuas y el espacio $(G, \tau)$ es homogéneo.

**Afirmación 5.** Para cada $b \in G$ y cada $V \in \mathscr{U}$, se cumple que $bV \in \tau$.

Sea $y \in bV$. Se tiene que $b^{-1}y \in V$. Por iii), existe un elemento $W \in \mathscr{U}$ tal que, $Wb^{-1}y \subset V$. Se sigue de iv) que existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $b^{-1}Ub \subset W$. Por lo tanto, $b^{-1}Ubb^{-1}y \subset V$, esto es, $b^{-1}Uy \subset V$. De aquí, $Uy \subset bV$. Se sigue que $bV \in \tau$.

**Afirmación 6.** El mapeo $In$ de $G$ sobre $G$, dado por $In(x) = x^{-1}$ es continuo con respecto a la topología $\tau$.

La afirmación 3 nos garantiza que basta mostrar que el conjunto $a^{-1}U^{-1} \in \tau$ para cada $a \in G$ y cada $U \in \mathscr{U}$, ya que $In^{-1}(Ua) = a^{-1}U^{-1}$. Por la afirmación 5 es suficiente verificar que $U^{-1} \in \tau$. Sea $x \in U^{-1}$ arbitrario, entonces $x^{-1} \in U$, así iii) implica que $Vx^{-1} \subset U$ para algún $V \in \mathscr{U}$. Aplicar ii) para escoger $W \in \mathscr{U}$ tal que $W^{-1} \subset V$. Entonces $W^{-1}x^{-1} \subset Vx^{-1} \subset U$, luego $xW = (W^{-1}x^{-1})^{-1} \subset U^{-1}$. Otra vez, por la afirmación 5, $xW$ es una vecindad abierta de $x$ en $(G, \tau)$. Así concluimos que $U^{-1}$ es un elemento de $\tau$.

Finalmente, la homogeneidad de $G$ y vi) implican que la topología $\tau$ es Hausdorff. Esto finaliza la demostración del teorema. $\square$

Para probar que un homomorfismo es continuo es suficiente hacerlo para la identidad.

**Proposición 1.2.4.** *Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Entonces $f$ es continuo si y sólo si $f$ es continuo en la identidad.*

*Demostración.* La condición necesaria se cumple de manera trivial. Ahora, sea $x \in G$ arbitrario y supongamos que $O$ es una vecindad abierta de $y = f(x)$ en $H$. Ya que la traslación izquierda, $\lambda_y$, es un homeomorfismo de $H$, existe una vecindad abierta $V$ de la identidad $e_H$ de $H$ tal que $yV \subset O$. Se sigue de la continuidad de $f$ en $e_G$, que $f(U) \subset V$, para alguna vecindad abierta $U$ de $e_G$ en $G$. Otra vez, ya que $\lambda_x$ es un homeomorfismo de $G$, el conjunto $xU$ es una vecindad abierta de $x$ en $G$ y tenemos que,

$$f(xU) = yf(U) \subset yV \subset O.$$

Por lo tanto, $f$ es continua en $x$. $\square$

**Proposición 1.2.5.** *Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Entonces $f$ es abierta si para cada vecindad $U$ de $e_G$, existe una vecindad $V$ de $e_H$ tal que $V \subseteq f(U)$.*

*Demostración.* Sean $A \subset G$ un abierto en $G$ y $y = f(a) \in f(A)$, en donde $a \in A$. Como la traslación izquierda, $\lambda_{a^{-1}}$, es un homomorfismo se tiene que $a^{-1}A$ es una vecindad de $e_G$ en $G$. Por hipótesis, existe una vecindad $V$ de $e_H$ tal que $V \subset f(a^{-1}A)$. Por ser $f$ un homomorfismo se tiene que $f(a^{-1}A) = y^{-1}f(A)$ y se sigue que $V \subset y^{-1}f(A)$, entonces $yV \subset f(A)$, en donde $yV$ es una vecindad de $y$. Se concluye que $f(A)$ es abierto en $H$. $\square$

Se dice que un grupo topológico $G$ es *precompacto* si para cada vecindad abierta $V$ de la identidad $e$ en $G$, existe un subconjunto finito $A \subset G$ tal que $AV = G = VA$.

Algunos ejemplos de grupo topológicos precompactos los da la siguiente proposición. La demostración que presentamos es similar a la que aparece en [5], sin embargo, dicha demostración se puede simplificar al hacer uso de la caracterización de pseudocompacidad que aparece en 1.1.5 y se obtiene lo siguiente.

**Proposición 1.2.6.** *Cada grupo topológico pseudocompacto es precompacto.*

*Demostración.* Supongamos que $G$ es un grupo topológico pseudocompacto que no es precompacto. Entonces, existe una vecindad $U$ de la identidad $e$ en $G$ y una sucesión $\{x_k\}$ de puntos de $G$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$x_k \notin \bigcup_{n<k} x_n U. \tag{1.1}$$

Escojamos una vecindad simétrica $V$ de la identidad $e$ tal que $V^4 \subset U$ y veamos que la familia $\mathcal{F} = \{x_k V : k \in \mathbb{N}\}$ es discreta en $G$. Supongamos lo contrario, es decir, para algún $x \in G$ se tiene que $xV$ intersecta a más de un elemento de la familia $\mathcal{F}$. Existen $i, j \in \mathbb{N}$, con $i < j$, tales que $xV \cap x_i V \neq \emptyset$ y $xV \cap x_j V \neq \emptyset$. Se pueden encontrar $a, b, c, d \in V$ tales que $x = x_i ab^{-1}$ y $x = x_j cd^{-1}$. Se sigue que $x_i ab^{-1} = x_j cd^{-1}$ y por lo tanto $x_i V^2 \cap x_j V^2 \neq \emptyset$. Usando el mismo razonamiento anterior, existen $r, s \in V^2$ tales que, $x_j = x_i sr^{-1} \in x_i V^4 \subset x_i U$, lo cual contradice 1.1. De este modo, $\mathcal{F}$ es discreta y, por lo tanto, localmente finita. Usando la proposición 1.1.5, concluimos que $G$ es pseudocompacto. $\square$

## 1.3. Uniformidades en grupos topológicos

Comenzamos la sección con uniformidades en un conjunto para después definirlas en grupos topológicos.

Sean $X$ un conjunto y $U, V$ subconjuntos de $X \times X$. Denotemos por $U \circ V$ al siguiente conjunto,

$$U \circ V = \{(x, z) : (x, y) \in U \ \text{ y } \ (y, z) \in V \text{ para algún } y \in X\}.$$

En adelante, sea $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ la diagonal en $X$, y si no existe confusión con los conjuntos con los que estamos trabajando, denotaremos a $U \circ V$ como $UV$ y para el caso $U = V$, escribiremos $V^2 = VV$. En general, para un conjunto $U \subset X \times X$ y un entero $n \geq 2$, definimos inductivamente el conjunto $U^n \subset X \times X$ como sigue, $U^2 = U \circ U$, $U^3 = U \circ U \circ U$ y así sucesivamente. También, para cada $V \subset X \times X$, sea $V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\}$.

**Definición 1.3.1.** Una *uniformidad* en un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subset U$, para cada $U \in \mathcal{U}$.

ii) Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$, tal que $W \subset U \cap V$.

iii) Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$, tal que $V^2 \subset U$.

iv) Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

v) Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

A la pareja $(X,\mathcal{U})$ se le llama *espacio uniforme* y a los elementos de $\mathcal{U}$ les llamamos *entornos*. Un ejemplo de uniformidad es el siguiente.

Sean X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : \Delta_X \subset X\}$. La familia $\mathcal{U}$ es una uniformidad en X. Efectivamente, las condiciones i), v) y iv) de la definición anterior se satisfacen de inmediato. Para ii), veamos que si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $W = U \cap V \in \mathcal{U}$. Finalmente, para iii) basta mostrar que $\Delta_X^2 = \Delta_X$. Sea $V = \Delta_X$. Para ver que $V^2 \subset V$, consideremos $(x,y) \in V^2$, entonces existe $z \in X$, tal que $(x,z) \in V$ y $(z,y) \in V$. Se sigue que $x = z = y$, así que $(x,y) \in V$. Es inmediato que $V \subset V^2$. Ahora consideremos $U \in \mathcal{U}$, por lo que acabamos de mostrar se tiene que $U^2 \subset U$, y de este modo iii) se cumple.

Una familia $\beta \subset \mathcal{U}$ es llamada *base para la uniformidad* $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \beta$ tal que $W \subset V$.

Es sencillo darse cuenta de que, si $X$ es un conjunto y $\beta$ es una familia de subconjuntos de $X \times X$ que satisface todas las condiciones de la definición 1.3.1 de uniformidad, excepto la iv), entonces $\beta$ es base para la siguiente uniformidad

$$\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : \text{ existe } V \in \beta \text{ tal que } V \subset U\}.$$

A continuación se muestra cómo los espacios uniformes resultan ser generalizaciones de espacios métricos.

**Ejemplo 1.3.2.** *Sea $d$ una métrica en $X$, entonces $d$ induce una uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$.*

*Demostración.* Sea $U_n = \{(x,y) : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbf{N}\}$. Mostraremos que $\mathcal{U}$ es base para la uniformidad $\mathcal{U}_d$ en $X$. Para esto, veamos que $\mathcal{U}$ satisface las condiciones i) – iii) y v) de la definición 1.3.1. Entonces

i) Se cumple de manera trivial.

ii) Sean $U_n, U_m \in \mathcal{U}$, para $n, m \in \mathbb{N}$ y $r = \text{máx}\{m,n\}$, entonces $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{m}$. Así que $U_r \subset U_n \cap U_m$.

iii) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $n < \frac{m}{2}$. Consideremos $U_n \in \mathcal{U}$. Afirmamos que $U_m \in \mathcal{U}$ es tal que $U_m^2 \subset U_n$. En efecto, sea $(x,z) \in U_m^2$, entonces existe $y \in X$ tal que $(x,y), (y,z) \in U_m$, esto es, $d(x,y) < \frac{1}{m}$ y $d(y,z) < \frac{1}{m}$. Ahora,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{2}{m} < \frac{1}{n}.$$

Se sigue que $(x, z) \in U_n$.

v)Sea $U \in \mathcal{U}$ y consideremos $V = U$. Al ser $d$ una métrica, se tiene que $U^{-1} = U$ y por lo tanto $V^{-1} \subset U$. $\square$

Sea $\mathcal{U}$ una uniformidad en un conjunto $X$. Para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathcal{U}$ se define la *$U$-bola centrada en $x$* como sigue

$$B(x, U) = \{y \in X : (x, y) \in U\}.$$

Si $A \subset X$ y $U \in \mathcal{U}$, se denota como $B(x, U)$ al conjunto $\bigcup_{x \in A} B(x, U)$. Si $U, V \in \mathcal{U}$ son tales que $U \subset V$, entonces $B(x, U) \subset B(x, V)$, para cada $x \in X$.

El siguiente resultado muestra como una uniformidad $\mathcal{U}$ en un conjunto $X$ induce una topología $\tau_{\mathcal{U}}$.

**Proposición 1.3.3.** *Sean $\mathcal{U}$ una uniformidad en un conjunto $X$ y $\tau_{\mathcal{U}}$ una familia de subconjuntos $W \subset X$ tales que, para cada $x \in W$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $B(x, U) \subset W$, entonces $\tau_{\mathcal{U}}$ es una topología en $X$.*

Sean $X$ un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una uniformidad en $X$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una *uniformidad compatible* en $X$ si la topología inducida por $\mathcal{U}$ en $X$ coincide con la topología original de $X$.

Una vez recordado lo anterior, es momento de introducir uniformidades en grupos topológicos, que es la parte que nos va a servir más adelante, para demostrar resultados importantes de esta tesis.

Sean $G$ un grupo topológico y $\mathcal{N}(e)$ que denota a la familia de todas las vecindades de la identidad $e$ en $G$. Para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, definimos los subconjuntos $L_V, R_V$ y $B_V$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} L_V &= \{(x, y) \in G \times G : y \in xV\}, \\ R_V &= \{(x, y) \in G \times G : x \in Vy\}, \\ B_V &= L_V \cap R_V. \end{aligned}$$

También consideremos las siguientes familias:

$$\begin{aligned} \lambda &= \{L_V : V \in \mathcal{N}(e)\}, \\ \rho &= \{R_V : V \in \mathcal{N}(e)\}, \\ \beta &= \{B_V : V \in \mathcal{N}(e)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{D \subset G \times G : \quad \text{existe } V \in \mathcal{N}(e) \text{ y } L_V \subset D\}, \\ \mathcal{R} &= \{D \subset G \times G : \quad \text{existe } V \in \mathcal{N}(e) \text{ y } R_V \subset D\}, \\ \mathcal{B} &= \{D \subset G \times G : \quad \text{existe } V \in \mathcal{N}(e) \text{ y } B_V \subset D\}. \end{aligned}$$

**Lema 1.3.4.** *Sean $G$ un grupo topológico, $U, V$ elementos de $\mathcal{N}(e)$ en $G$, tales que $V^n \subset U$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $L_V^n \subset L_U$, $R_V^n \subset R_U$ y $B_V^n \subset B_U$.*

*Demostración.* Los tres casos se demuestran de manera similar, así que sólo se va a mostrar que $L_V^n \subset L_U$. Para $n = 1$ es trivial, así que supongamos $n \geq 2$.
Consideremos $(x, z) \in L_V^n$, entonces existen $y_1, ..., y_{n-1}$, tales que $(y_i, y_{i+1}) \in L_V$ para cada $i = 0, ..., n-1$, en donde $y_0 = x$ y $y_n = z$. Se sigue que $y_{i+1} \in y_i V$, o lo que es lo mismo $y_i^{-1} y_{i+1} \in V$ con $i = 0, ..., n-1$. Entonces

$$x^{-1}z = \prod_{i=0}^{n-1} y_i^{-1}\, y_{i+1} \in V^n \subset U.$$

Por lo tanto $x^{-1}z \in L_U$ y concluimos que $L_V^n \subset L_U$. □

El siguiente resultado nos muestra la relación que hay entre las familias que acabamos de definir.

**Teorema 1.3.5.** *Sea $G$ un grupo topológico arbitrario. Las familias $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{B}$ son uniformidades en $G$ y $\lambda, \rho$ y $\beta$ son las respectivas bases de $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$.*

*Demostración.* Se demostrará el teorema sólo para la familia $\mathcal{B}$. Para esto, se tiene que verificar que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones de la definición 1.3.1.

i) Dado $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ que cumple $B_V \subset U$. Notemos que $\Delta_G \subset B_V$, pues si $(x, x) \in \Delta_G$, entonces $x \in xV$ y $x \in xV$, así que $(x, x) \in L_V \cap R_V$. De este modo $(x, x) \in B_V$ y $\Delta_G \subset U$.

ii) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e)$ tales que $B_{V_1} \subset U_1$ y $B_{V_2} \subset U_2$. Pongamos $V = V_1 \cap V_2$, entonces $V$ también es vecindad de la identidad $e$, es decir $V \in \mathcal{N}(e)$. Recordemos que $L_V = \{(x, y) \in G \times G \colon y \in x(V_1 \cap V_2)\}$. Entonces, si $(x, y) \in L_V$, también se tiene que $(x, y) \in L_{V_i}$, con $i = 1, 2$. Así que $L_V \subset L_{V_1} \cap L_{V_2}$. De manera similar se tiene $R_V \subset R_{V_1} \cap R_{V_2}$. Se sigue que

$$L_V \cap R_V \subset L_{V_1} \cap L_{V_2} \cap R_{V_1} \cap R_{V_2}.$$

Por lo tanto,

$$B_V \subset B_{V_1} \cap B_{V_2} \subset U_1 \cap U_2.$$

De esta manera, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.

iii) Dado un elemento $U$ en $\mathcal{B}$, podemos encontrar una vecindad $V$ de la identidad $e$, tal que $B_V \subset U$. Escojamos $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $W^2 \subset V$. El lema 1.3.4 nos garantiza que $B_W^2 \subset B_V$.

iv) Si $U \in \mathcal{B}$ y $U \subset V$, entonces por la definición de $\mathcal{B}$ se tiene que $V \in \mathcal{B}$.

v) Sea $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $B_V \subset U$. Escojamos $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $W^{-1} \subset V$, entonces $B_W^{-1} = B_{W^{-1}} \subset B_V$. □

**Teorema 1.3.6.** *Cada uniformidad $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{B}$ es compatible con $G$.*

*Demostración.* Para ver que $\mathcal{L}$ es compatible con $G$, escojamos $U \in \mathcal{L}$, y $x \in G$ arbitrario, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $L_V \subset U$. Se sigue que $B(x, L_V) \subset B(x, U)$. También $B(x, L_V) = xV$ y ya que este último conjunto es abierto en $G$ y se cumple que $x \in xV \subset B(x, U)$, se tiene que $B(x, U)$ es una vecindad de $x$ en $G$ y la familia $\{B(x, U) \colon U \in \mathcal{L}\}$ es una base de $x$ en $G$. De este modo la uniformidad $\mathcal{L}$ es compatible con $G$. Un argumento similar muestra que $\mathcal{R}$ es compatible con $G$.

Para $\mathcal{B}$, se tiene que $B(x, B_V) = xV \cap Vx$, para cada $V \in \mathcal{N}(e)$ y $x \in G$. Como los conjuntos $xV$ y $Vx$ son abiertos en $G$ se tiene que $\mathcal{B}$ es compatible con $G$. □

De ahora en adelante llamaremos a $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$, *uniformidad izquierda*, *uniformidad derecha* y *uniformidad bilateral* en $G$, respectivamente.

## 1.4. Raikov completitud en grupos topológicos

Para poder definir Raikov completitud se requieren de varios resultados previos. Comenzamos con las nociones básicas de filtros.

Sea $G$ un grupo topológico y $e$ la identidad en $G$. Un *filtro* en $G$ es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de $G$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$.

2. Si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subset W$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos no vacíos de $G$ se llama *filtro base* si para cualesquiera $U, V \in \mathcal{F}$, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \subset U \cap V$.

Un punto $x$ en $G$ se llama *límite de un filtro* $\mathcal{F}$ si cada vecindad de $x$ pertenece a $\mathcal{F}$. Se dice que el filtro $\mathcal{F}$ converge a $x$ y escribimos $x \in \operatorname{lím} \mathcal{F}$.

A continuación vamos a definir una clase importante de filtros, tanto en espacios uniformes, como en grupos topológicos. En ambos casos nos vamos a referir a estos filtros como filtros de Cauchy. Aunque en grupos topológicos los filtros de Cauchy también se conocen como filtros de Raikov, en este texto no vamos a usar este nombre. Dicha situación no debería causar ningún problema, ya que siempre se va a especificar en dónde se está trabajando y con ello se evita cualquier confusión.

Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un filtro $\xi$ de subconjuntos de $X$ se llama *filtro de Cauchy* en $(X, \mathcal{U})$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $F \in \xi$ tal que $F \times F \subset U$.

El espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es completo si cada filtro de Cauchy converge a algún punto de $X$.

Sean $G$ un grupo topológico y $\mathcal{F}$ un filtro de subconjuntos de $G$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro de Cauchy* en $G$ si para cada vecindad $V$ de la identidad $e$, en $G$ existen $a, b \in G$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $F \subset aV \cap Vb$.

Los grupos topológicos en los cuales, cada filtro de Cauchy converge, respecto a la topología generada por la uniformidad bilateral reciben un nombre especial y está dado en la siguiente definición.

**Definición 1.4.1.** Un grupo topológico $G$ en el cual cada filtro de Cauchy converge es llamado *Raikov completo.*

El siguiente teorema establece una relación natural entre los grupos Raikov completos y los espacios uniformes completos.

**Teorema 1.4.2.** *Un grupo topológico $G$ es Raikov completo si y sólo si el espacio uniforme $(G, \mathcal{B})$ es completo, en donde $\mathcal{B}$ es la uniformidad bilateral del grupo $G$.*

*Demostración.* Supongamos que el grupo $G$ es Raikov completo. Vamos a verificar que cada filtro $\xi$ de Cauchy en $(G, \mathcal{B})$ converge. Sea $V$ una vecindad abierta de la identidad $e$ en $G$. Entonces

$$B_V = \{(x, y) \in G \times G \colon y \in xV,\ y \in Vx\}$$

es un elemento de la uniformidad $\mathcal{B}$. Ya que $\xi$ es de Cauchy en $(G, \mathcal{B})$, existe $F \in \xi$ tal que $F \times F \subset B_V$. Para cada $x \in F$ se cumple que $F \subset xV \cap Vx$, pues si $y \in F$, entonces $(x, y) \in F \times F \subset B_V$, así que $y \in xV \cap Vx$. De este modo $\xi$ es un filtro de Cauchy en el grupo $G$. Al ser $G$ Raikov completo, $\xi$ debe converger a algún punto de $G$. De este modo el espacio uniforme $(G, \mathcal{B})$ es completo.

Inversamente, supongamos que el espacio uniforme $(G, \mathcal{B})$ es completo. Para mostrar que $G$ es Raikov completo, tomemos un filtro de Cauchy arbitrario $\xi$ en $G$. Veamos que $\xi$ también es de Cauchy en $(G, \mathcal{B})$. Sea $U \in \mathcal{B}$, entonces existen vecindades de la identidad $e$ en $G$, digamos $V$ y $W = W^{-1}$ tales que $B_V \subset U$ y $W^2 \subset V$. Al ser $\xi$ filtro de Cauchy en $G$, se tiene que $F \subset aW \cap Wb$, para algún $F \in \xi$ y $a, b \in G$. Ahora, consideremos $x, y \in F$ arbitrarios. Ya que $W$ es simétrica se tiene que $a^{-1}x \in W$, $x^{-1}a \in W$ y $a^{-1}y \in W$. De aquí, $x^{-1}y = (x^{-1}a)(a^{-1}y) \in W^2$. Similarmente, de $xb^{-1} \in W$, $yb^{-1} \in W$ y $by^{-1} \in W$ se sigue que $xy^{-1} = (xb^{-1})(by^{-1}) \in W^2$. Ya que $W^2 \subset V$, concluimos que $(x, y) \in B_V$.

Esto prueba que $F \times F \subset B_V$ y se tiene que $\xi$ es un filtro de Cauchy en $(G, \mathcal{B})$. Como $(G, \mathcal{B})$ es completo, $\xi$ converge a algún punto de $G$. Concluimos que $G$ es Raikov completo. $\square$

# Capítulo 2

# Construcción de Hartman–Mycielski

Mostraremos que cada grupo topológico $G$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un grupo topológico $G^\bullet$ que es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Los grupos $G$ y $G^\bullet$ comparten muchas propiedades, como metrizabilidad, separabilidad, $\omega$-estrechez, entre otras.

## 2.1. Encajes en grupos conexos

Sea $G$ un grupo topológico Hausdorff con identidad $e$ y multiplicación $\cdot$. Consideramos el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es el intervalo $[0, 1)$ y toman valores en el grupo $G$, tales que existe alguna sucesión $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, en donde la función $f$ es constante en $[a_k, a_{k+1})$ para cada $k = 0, 1, ..., n-1$. A dicho conjunto lo llamamos $G^\bullet$.

**Nota.** Las funciones en $G^\bullet$, son funciones escalonadas y en lo sucesivo denotaremos por $J$ al conjunto $[0, 1)$. A continuación se muestra un ejemplo de un elemento en $G^\bullet$:

Definimos una operación binaria $*$ en $G^\bullet$ de la siguiente manera, para cualesquiera dos funciones $f$ y $g$ en $G^\bullet$ y cada $r \in J$,

$$(f * g)(r) = f(r) \cdot g(r).$$

Veamos que $(G^\bullet, *)$ tiene estructura de grupo.

i) La operación $*$ es asociativa, es decir, para cada $r \in J$ se tiene que

$$[(f * g) * h](r) = [f * (g * h)](r).$$

ii) El conjunto $G^\bullet$ tiene un único elemento identidad $e^\bullet$, en donde, para cada $r \in J$ se cumple que

$$e^\bullet(r) = e.$$

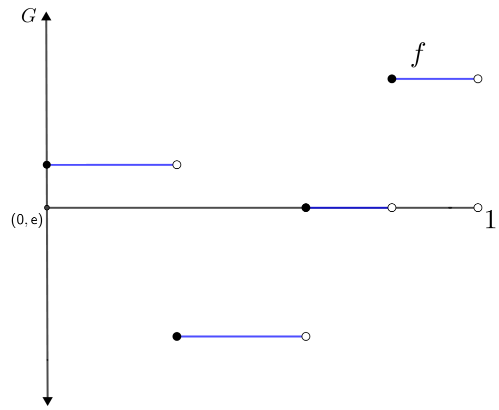


Figura 2.1: Elemento de $G^{\bullet}$.

iii) Para cada elemento $f$ en $G^{\bullet}$ definimos su inverso $f^{-1}$ de la siguiente manera. Para cada $r \in J$ se satisface:

$$f^{-1}(r) = (f(r))^{-1}$$

en donde $(f(r))^{-1}$ es el inverso de $f(r)$ en $G$. De esta manera, el elemento $f^{-1}$ es único y $f^{-1} \in G^{\bullet}$. La siguiente figura muestra las funciones $f$ y $f^{-1}$.

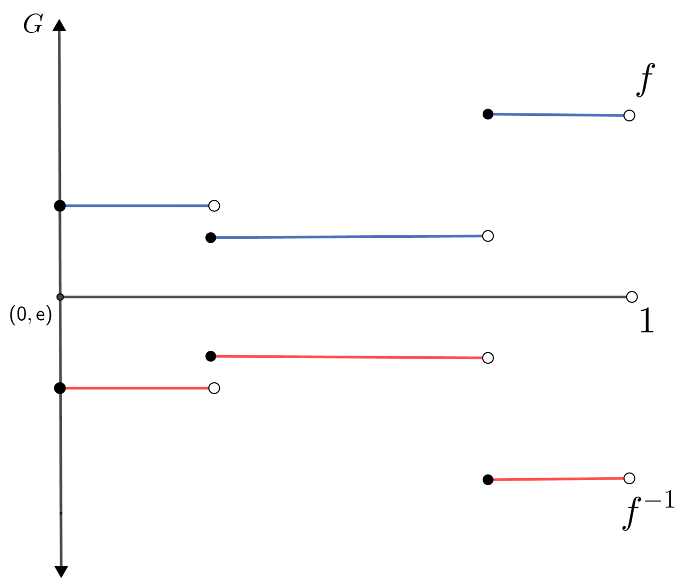


Figura 2.2: Inverso de una función $f$.

Para introducir una topología en $G^{\bullet}$ consideramos una vecindad $V$ de la identidad

$e$ en $G$ y un número real $\varepsilon > 0$. Definimos un subconjunto $O(V, \varepsilon)$ de $G^\bullet$ como sigue

$$O(V, \varepsilon) = \{f \in G^\bullet \mid \mu(\{r \in J \mid f(r) \notin V\}) < \varepsilon\}$$

en donde $\mu$ es la medida de Lebesgue en $J$. Vamos a verificar que los conjuntos $O(V, \varepsilon)$ forman una base local en la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$ de una topología Hausdorff que hace a $G^\bullet$ un grupo topológico. Para esto, es suficiente verificar que la familia

$$N(e^\bullet) = \{O(V, \varepsilon) : V \in N(e), \varepsilon > 0\}$$

satisface las condiciones de i) – vi) del teorema 1.2.3, en donde $N(e)$ es una base local de la identidad $e$ en el grupo $G$.

i) Sea $O(V, \varepsilon) \in N(e^\bullet)$. Al ser $V$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$, existe una vecindad $U$ de la identidad $e$, tal que $U^2 \subset V$. Basta demostrar que

$$O(U, \varepsilon/2)^2 \subset O(V, \varepsilon).$$

Consideremos funciones $f, g \in O(U, \varepsilon/2)$, entonces $\mu(\{r \in J : f(r) \notin U\}) < \varepsilon/2$ y $\mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) < \varepsilon/2$. Ahora veamos que

$$\{r \in J : (f * g)(r) \notin V\} \subset \{r \in J : f(r) \notin U\} \cup \{r \in J : g(r) \notin U\}.$$

Sea $s \in J$ tal que $s \notin (\{r \in J : f(r) \notin U\} \cup \{r \in J : g(r) \notin U\})$, entonces $f(s) \in U$ y $g(s) \in U$ y de aquí que $(f * g)(s) = f(s) \cdot g(s) \in U^2 \subset V$, por lo tanto, $s \notin \{r \in J : (f * g)(r) \notin V\}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\mu(\{r \in J : (f * g)(r) \notin V\}) &\leq \mu(\{r \in J : f(r) \notin U\}) + \mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Se concluye que $f * g \in O(V, \varepsilon)$.

ii) Sea $O(V, \varepsilon) \in N(e^\bullet)$. Ya que para cada vecindad $V$ de la identidad $e$ en $G$, existe una vecindad simétrica $U$ de $e$, tal que $U \subset V$, se puede considerar el correspondiente $O(U, \varepsilon)$ determinado por $U$, que también resulta ser simétrico y además $O(U, \varepsilon) \subset O(V, \varepsilon)$.

iii) Consideramos $O(V, \varepsilon) \in N(e^\bullet)$ y una función $f$ en $O(V, \varepsilon)$. Existen números reales $a_0, a_1, ..., a_n$ con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, en donde la función $f$ es constante en $J_k = [a_k, a_{k+1})$, para cada $k = 0, ..., n-1$. Denotemos por $x_k$ al valor en $G$ que toma la función $f$ en cada $J_k$. Pongamos $\delta = \varepsilon - \mu(\{r \in J : f(r) \notin V\}$, como $f \in O(V, \varepsilon)$ se tiene que $\delta > 0$. Para cada vecindad $V$ de la identidad $e$ en $G$ y cada $x_k \in V$, con $0 \leq k < n$, existe $U_k$, vecindad de $e$, tal que $U_k x_k \subset V$. Queda por demostrar lo siguiente: $O(U, \delta)f \subset O(V, \varepsilon)$, en donde $U = \bigcap\{U_k : 0 \leq k < n\}$.

Consideremos $g \in O(U,\delta)$, entonces $\mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) < \delta$. Para demostrar la siguiente contención,

$$\{r \in J : (g * f)(r) \notin V\} \subset \{r \in J : g(r) \notin U\} \cup \{r \in J : f(r) \notin V\},$$

veamos que si $s \in J$ es tal que $s \notin (\{r \in J : g(r) \notin U\} \cup \{r \in J : f(r) \notin V\})$, entonces $s \notin \{r \in J : g(r) \notin U\}$ y $s \notin \{r \in J : f(r) \notin V\}$, es decir $g(s) \in U$ y $f(s) \in V$ y de aquí que

$$\begin{aligned} (g * f)(s) = g(s) \cdot f(s) &= g(s) \cdot x_j \\ &\in Ux_j \\ &\subset U_j x_j \\ &\subset V. \end{aligned}$$

en donde $x_j \in J$ es el valor de $f(s)$ para algún $j = 0, ..., n-1$. De este modo se tiene que $s \notin \{r \in J : (g * f)(r) \notin V\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu(\{r \in J : (g * f)(r) \notin V\}) &\leq \mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) + \mu(\{r \in J : f(r) \notin V\}) \\ &< \delta + \mu(\{r \in J : f(r) \notin V\}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $O(U,\delta)f \subset O(V,\varepsilon)$.

iv) Sean $O(V,\varepsilon) \in N(e^\bullet)$ y $f$ una función en $G^\bullet$. La función $f$ toma una cantidad finita de valores, digamos $x_1, ..., x_n$. Para cada $i = 1, ..., n$, sea $U_i$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$ tal que $x_i U_i x_i^{-1} \subset V$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Queda demostrar la siguiente contención:

$$fO(U,\varepsilon)f^{-1} \subset O(V,\varepsilon).$$

Para esto, sea $g \in O(U,\varepsilon)$, entonces $\mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) < \varepsilon$. Veamos que

$$\{r \in J : (f * g * f^{-1})(r) \notin V\} \subset \{r \in J : g(r) \notin U\}.$$

Supongamos que $s \notin \{r \in J : g(r) \notin U\}$, entonces $g(s) \in U$ y sea $x_i = f(s)$ para algún $i = 1, ..., n$. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} (f * g * f^{-1})(s) = f(s)g(s)f^{-1}(s) &= x_i g(s) x_i^{-1} \\ &\in x_i U x_i^{-1} \\ &\subset x_i U_i x_i^{-1} \\ &\subset V. \end{aligned}$$

De este modo $s \notin \{r \in J : (f * g * f^{-1})(r) \notin V\}$. Se sigue que

$$\mu(\{r \in J : (f * g * f^{-1})(r) \notin V\}) \leq \mu(\{r \in J : g(r) \notin U\}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f * g * f^{-1} \in O(V, \varepsilon)$.

v) Dados $O(V_1, \varepsilon_1), O(V_2, \varepsilon_2) \in N(e^\bullet)$, sean $U = V_1 \cap V_2$ y $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Es inmediato que $O(U, \varepsilon) \subset O(V_1, \varepsilon_1) \cap O(V_2, \varepsilon_2)$.

vi) Consideremos una función $f$ en $G^\bullet$ que sea distinta de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$. Pongamos $\varepsilon = \mu(\{r \in J : f(r) \neq e\}) > 0$. Sea $V$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$ que no contiene valores de $f$ distintos de la identidad $e$. Se tiene que $f \notin O(V, \varepsilon)$ y por lo tanto $\bigcap \mathcal{N}\ (e^\bullet) = \{e^\bullet\}$.

Así hemos probado que $G^\bullet$ admite una topología de grupo topológico Hausdorff, siendo $\mathcal{N}\ (e^\bullet)$ una base local en la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$.

**Lema 2.1.1.** *Sean $f, g \in G^\bullet$ y $O(V, \varepsilon)$ una vecindad de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$. Entonces, $g \in fO(V, \varepsilon)$ si y sólo si $\mu(\{r \in J \colon g(r) \notin f(r)V\}) < \varepsilon$.*

*Demostración.* Se tiene que $g \in fO(V, \varepsilon)$ es equivalente a $f^{-1} * g \in O(V, \varepsilon)$. Además

$$\{r \in J \colon (f^{-1} * g)(r) \notin V\} = \{r \in J \colon f^{-1}(r)g(r) \notin V\} = \{r \in J \colon g(r) \notin f(r)V\}.$$

Por lo tanto, $\mu(\{r \in J \colon (f^{-1} * g)(r) \notin V\}) = \mu(\{r \in J \colon g(r) \notin f(r)V\}) < \varepsilon$. □

Una propiedad importante que vamos a considerar es conexidad por trayectorias.

Un espacio $X$ es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera $a, b \in X$, existe una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Un espacio es *localmente conexo por trayectorias* si cada punto tiene una base de vecindades conexas por trayectorias.

El grupo topológico $G^\bullet$ que acabamos de definir, tiene por sí mismo estas propiedades. Más adelante vamos a analizar propiedades que comparten los grupos $G$ y $G^\bullet$, pero conexidad por trayectorias la estudiamos de forma separada, pues se verá que no depende de cómo es el grupo inicial $G$, para que $G^\bullet$ sea conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Otro aspecto importante a considerar es el hecho de que en grupos topológicos conexidad por trayectorias no implica conexidad local por trayectorias, ni al revés, pero en este caso $G^\bullet$ tendrá ambas propiedades.

**Proposición 2.1.2.** *El grupo topológico $G^\bullet$ es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias.*

*Demostración.* Sea $f$ una función en $G^\bullet$. Se probará que existe un mapeo continuo

$$\varphi : [0, 1] \to G^\bullet$$

$$\text{tal que, } \ \varphi(0) = e^\bullet \ \text{ y } \ \varphi(1) = f.$$

Para dicha $f$ existe una sucesión $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, tal que $f$ es constante en $J_k = [a_k, a_{k+1})$, para cada $k = 0, 1, ..., n-1$. Para cada $t \in [0,1]$ y cada $k < n$ no negativo, definimos el número $b_{k,t} = a_k + t(a_{k+1} - a_k)$. Notemos que

$$b_{k,t} = \begin{cases} a_k & \text{si } t = 0 \\ a_{k+1} & \text{si } \ t = 1 \end{cases}$$

y si $0 < t < 1$, entonces $a_k < b_{k,t} < a_{k+1}$.

Definimos el mapeo $\varphi : [0,1] \to G^\bullet$ como sigue

$$\varphi(0) = e^\bullet \quad \text{ y } \quad \varphi(1) = f$$

y para $0 < t < 1$ y $r \in J$, de la siguiente manera

$$\varphi(t)(r) = \begin{cases} e^\bullet & \text{si } a_k \leq r < b_{k,t} \\ f(r) & \text{si } \ b_{k,t} \leq r < a_{k+1} \end{cases}$$

Para simplificar la notación pongamos $f_t = \varphi(t)$. Afirmamos que para cualesquiera $s, t \in [0,1]$, se tiene que

$$\mu(\{r \in J \mid f_t(r) \neq f_s(r)\}) \leq \mid t - s \mid .$$

Consideremos $s, t \in [0,1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t < s$, entonces las funciones $f_t$ y $f_s$ sólo pueden ser distintas en cada intervalo de la forma $(b_{k,t}, b_{k,s})$, para $0 \leq k < n$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu((b_{k,t}, b_{k,s})) &= \mid b_{k,s} - b_{k,t} \mid \\ &= \mid t - s \mid (a_{k+1} - a_k). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(\{r \in J \mid f_t(r) \neq f_s(r)\}) &\leq \mid t - s \mid \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= \mid t - s \mid (a_1 - a_0) \\ &= \mid t - s \mid . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta.

Ahora probaremos que el mapeo $\varphi$ es continuo en cada $t \in [0,1]$, para esto, consideremos $f_t O(V, \varepsilon)$, una vecindad de $\varphi(t) = f_t$ y veamos que $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ es una vecindad de $t$, tal que

$$\varphi[(t - \varepsilon, t + \varepsilon)] \subset f_t O(V, \varepsilon).$$

Consideramos $f_s \in \varphi[(t - \varepsilon, t + \varepsilon)]$ y probaremos que $f_s \in f_t O(V, \varepsilon)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \{r \in J \colon f_s(r) \notin f_t(r)V\} &= \{r \in J \colon (f_t^{-1} * f_s)(r) \notin V\} \\ &\subset \{r \in J : (f_t^{-1} * f_s)(r) \neq e\} \\ &= \{r \in J : f_s(s) \neq f_t(r)\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mu(\{r \in J\colon f_s(r) \notin f_t(r)V\}) &\leq \mu(\{r \in J : f_s(s) \neq f_t(r)\}) \\ &\leq \mid s - t \mid .\end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple por la afirmación que probamos antes y como $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, entonces $\mid s - t \mid < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\mu(\{r \in J\colon f_s(r) \notin f_t(r)V\}) < \varepsilon.$$

Se sigue del lema 2.1.1 que $f_s \in f_t O(V, \varepsilon)$. De este modo $\varphi$ es un mapeo continuo.

Acabamos de probar que cada función $f$ en $G^\bullet$ puede ser conectada con la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$ a través de una trayectoria continua, por lo tanto, cualesquiera dos funciones en $G^\bullet$ también se pueden conectar con una trayectoria continua. Con esto concluimos que $G^\bullet$ es conexo por trayectorias.

Ya que cada grupo topológico es un espacio homogéneo, la conexidad local por trayectorias de $G^\bullet$ se sigue al mostrar que cada $O(V, \varepsilon)$ es conexo por trayectorias. La demostración para esto es la misma que acabamos de hacer, pero ahora consideramos una función $f$ en $O(V, \varepsilon)$ y vamos a ver que $f_t \in O(V, \varepsilon)$, para cada $t$ en $[0, 1]$ y esto es porque se cumple lo siguiente

$$\{r \in J \mid f_t(r) \notin V\} \subset \{r \in J \mid f(r) \notin V\},$$

entonces

$$\mu(\{r \in J \mid f_t(r) \notin V\}) \leq \mu(\{r \in J \mid f(r) \notin V\}) < \varepsilon.$$

De esta manera la demostración queda completa. □

Ahora veamos de qué manera se relacionan ambos grupos.

**Teorema 2.1.3.** *Para cada grupo topológico $G$ existe un isomorfismo topológico de $G$ sobre un subgrupo cerrado del grupo topológico $G^\bullet$.*

*Demostración.* Asignamos a cada $x \in G$ el elemento $x^\bullet \in G^\bullet$ de la siguiente manera

$$x^\bullet(r) = x \quad \text{para cada} \;\; r \in J.$$

La función $i_G : G \to G^\bullet$ dada por $i_G(x) = x^\bullet$, para cada $x \in G$ es un monomorfismo topológico. En primer lugar tenemos que $i_G$ es un homomorfismo inyectivo, pues si $x_1$ y $x_2$, son puntos distintos de $G$, entonces sus respectivas funciones constantes son distintas, es decir, para cada $r \in J$ se satisface:

$$i_G(x_1) = x_1^\bullet(r) = x_1 \neq x_2 = x_2^\bullet(r) = i_G(x_2).$$

Ahora veamos que $i_G$ es un mapeo continuo y abierto en $i_G[G]$. Sean $V$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$ y $\varepsilon < 1$. Para probar que $i_G$ es abierto en su imagen, veamos que se cumple

$$i_G[V] = O(V, \varepsilon) \cap i_G[G].$$

Por un lado tenemos que $i_G[V] \subset O(V,\varepsilon) \cap i_G[G]$. Es claro que $i_G[V] \subset i_G[G]$ y además, si $x^\bullet \in i_G[V]$, entonces $x \in V$ es tal que $x^\bullet(r) = x$ para cada $r \in J$, de aquí que $\mu(\{r \in J : x^\bullet(r) = x \notin V\}) = 0 < \varepsilon$, entonces $x^\bullet \in O(V,\varepsilon)$ y, por lo tanto, se tiene $i_G[V] \subset O(V,\varepsilon)$. Para la otra contención, sea $x^\bullet \in O(V,\varepsilon) \cap i_G[G]$, entonces existe $x \in G$, tal que $x^\bullet(r) = x$, para cada $r \in J$, y $\mu(\{r \in J : x^\bullet(r) \notin V\}) < \varepsilon$. Si tuvieramos que $x \notin V$, entonces $\mu(\{r \in J : x^\bullet(r) = x \notin V\}) = 1 > \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $x \in V$ y de aquí que $x^\bullet \in i_G[V]$.

Lo que sigue es mostrar que $i_G[G]$ es un subgrupo cerrado de $G^\bullet$. Sea $f \in G^\bullet \setminus i_G[G]$, entonces la función $f : J \to G$ no es constante. Podemos encontrar números reales $a_1, a_2, a_3, a_4$ tales que $0 \leq a_1 < a_2 \leq a_3 < a_4 \leq 1$ y puntos distintos $x_1, x_2$ en $G$, tales que $f$ toma el valor $x_1$ en $[a_1, a_2)$ y $x_2$ en $[a_3, a_4)$. Sean $V$ una vecindad abierta de la identidad $e$ en $G$, tal que $x_1V \cap x_2V = \emptyset$ y $\varepsilon = \text{mín}\{a_2 - a_1, a_4 - a_3\}$.

Queda por demostrar que $i_G[G] \cap O(V,\varepsilon)f = \emptyset$. Supongamos lo contrario, entonces existe una función $g^\bullet$ en la intersección $i_G[G] \cap O(V,\varepsilon)f$. Por un lado tenemos que la función $g^\bullet$ es constante, y por el otro se tiene que

$$g^\bullet(r) = \begin{cases} h(r)x_1 & \text{si } r \in [a_1, a_2) \\ h(r)x_2 & \text{si } r \in [a_3, a_4) \end{cases}$$

en donde $h \in O(V,\varepsilon)$.

Veamos que si $h(r) \notin V$ para cada $r \in [a_1, a_2)$, se tendría

$$\mu(\{r \in J \colon h(r) \notin V\}) \geq a_2 - a_1 \geq \varepsilon.$$

Lo mismo pasa si $h(r) \notin V$, para cada $r \in [a_3, a_4)$,

$$\mu(\{r \in J \colon h(r) \notin V\}) \geq a_4 - a_3 \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto, $h(r) \in V$, para cada $r \in [a_1, a_2) \cup [a_3, a_4)$.

Se sigue que $h(r)x_1 \in Vx_1$ y $h(r)x_2 \in Vx_2$. Como la función $g^\bullet$ es constante, se tiene que $h(r)x_1 = h(r)x_2$, pero esto contradice la hipótesis de que $Vx_1 \cap Vx_2 = \emptyset$. Por lo tanto, $i_G[G] \cap O(V,\varepsilon)f = \emptyset$. Concluimos que $O(V,\varepsilon)f \subset G^\bullet \setminus i_G[G]$, entonces $i_G[G]$ es cerrado en $G^\bullet$. $\square$

# Capítulo 3

# Relación de propiedades entre los grupos topológicos $G$ y $G^\bullet$

## 3.1. Propiedades locales

Comenzamos con algunas propiedades locales, como metrizabilidad, submetrizabilidad, tener pseudocarácter numerable y ser $\omega$-balanceado. Para el caso de metrizabilidad utilizamos el hecho de que en grupos topológicos ser metrizable y ser primero numerable son condiciones equivalentes. De esta manera abarcamos el caso general, cuando el grupo $G$ es arbitrario. En [8] aparece el caso cuando $G$ es un espacio métrico y se describe de manera explícita la métrica en $G^\bullet$.

**Proposición 3.1.1.** *El grupo $G^\bullet$ es primero numerable si y sólo si $G$ es primero numerable.*

*Demostración.* La condición necesaria se sigue de que el grupo $G$ está encajado en $G^\bullet$ como subgrupo y de que ser primero numerable se hereda a subespacios.

Por otro lado, supongamos que $G$ es primero numerable y sea $\mathcal{B}$ una base local numerable de la identidad $e$ en $G$. Definamos la siguiente familia

$$\mathcal{C} = \left\{ O(V, \frac{1}{m}) : V \in \mathcal{B}, \;\; m \in \omega \right\}.$$

Se tiene que la familia $\mathcal{C}$ es numerable y queda demostrar que $\mathcal{C}$ es una base local de la identidad $e^\bullet$ en el grupo $G^\bullet$. Escojamos una vecindad $O(U, \varepsilon)$ de la identidad $e^\bullet$. Al ser $\mathcal{B}$ base local de $e$ en $G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$, de aquí que $O(V, \varepsilon) \subset O(U, \varepsilon)$. Ahora escojamos un número natural $m$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Se sigue que

$$O(V, \frac{1}{m}) \subset O(V, \varepsilon) \subset O(U, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $O(V, \frac{1}{m}) \subset O(U, \varepsilon)$. Concluimos que $G^\bullet$ es primero numerable. $\square$

Ya que en grupos topológicos ser metrizable es equivalente a ser primero numerable, se obtiene un resultado inmediato.

**Corolario 3.1.2.** *El grupo $G^\bullet$ es metrizable si y sólo si $G$ es metrizable.*

Sean $X$ un espacio, $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en $X$ y $p$ un punto en $X$. Si $\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$, entonces $\mathcal{V}$ es una pseudobase para $p$. De este modo se define la siguiente función cardinal:

$$\psi(p, X) = min\{\mid \mathcal{V} \mid : \mathcal{V} \text{ es una pseudobase para } p\}.$$

El pseudocarácter se define como sigue:

$$\psi(X) = sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

Se dice que $X$ tiene *pseudocarácter numerable* si $\psi(X) = \omega$.

**Proposición 3.1.3.** *El grupo $G^\bullet$ tiene pseudocarácter numerable si y sólo si $G$ tiene pseudocarácter numerable.*

*Demostración.* Supongamos que $G$ tiene pseudocarácter numerable y $\mathcal{V}$ es una pseudobase para la identidad $e$ en $G$, es decir $\bigcap \mathcal{V} = \{e\}$. La familia

$$\mathcal{F} = \{O(V, \varepsilon) : V \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N}\}$$

es tal que $\bigcap \mathcal{F} = \{e^\bullet\}$. La demostración es similar a la presentada en 3.1.1.

La implicación contraria se cumple porque tener pseudocarácter numerable se hereda a subespacios. □

Se dice que un espacio $X$ es *submetrizable* si la topología del espacio contiene una topología metrizable.

En general se cumple que ser submetrizable implica tener pseudocarácter numerable, pero al revés no necesariamente. Ejemplo de ello es el espacio de las dos flechas. Sin embargo, en grupos topológicos estas dos propiedades son equivalentes, por lo tanto se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.4.** *El grupo $G^\bullet$ es submetrizable si y sólo si $G$ es submetrizable.*

Sea $G$ un grupo y $\tau$ un cardinal infinito. Decimos que la invarianza de $G$ es menor o igual que $\tau$, y se denota por $Inv(G) \leq \tau$, si para cada vecindad $U$ de la identidad $e$ en $G$ existe una familia $\gamma$ de vecindades abiertas de la identidad $e$, con $\mid \gamma \mid \leq \tau$ tal que para cada $x \in G$ existe $V \in \gamma$ tal que $xVx^{-1} \subset U$. Se dice que la familia $\gamma$ está subordinada a $U$.

El grupo topológico $G$ es *$\omega$-balanceado* si $Inv(G) \leq \omega$.

**Proposición 3.1.5.** *Si $G$ es un grupo topológico $\omega$-balanceado, entonces cada subgrupo $H$ de $G$ también es $\omega$-balanceado.*

*Demostración.* Sea $W$ una vecindad de la identidad $e$ en $H$. Escribimos a $W$ como, $W = U \cap H$, en donde $U$ es una vecindad de la identidad $e$ en $G$. Por ser $G$ un grupo $\omega$-balanceado, existe una familia $\gamma_U$ numerable y subordinada a $U$. Consideramos la siguiente familia,

$$\gamma_W = \{V \cap H \mid V \in \gamma_U\}.$$

Al ser $\gamma_U$ numerable, se tiene que $\gamma_W$ también lo es. Veamos que $\gamma_W$ está subordinada a $W$, sea $x \in H \subset G$, como $\gamma_U$ está subordinada a $U$, existe $V \in \gamma_U$ tal que $xVx^{-1} \subset U$. Ahora,

$$\begin{aligned} x(V \cap H) &= xV \cap xH \\ &= xV \cap H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(V \cap H)x^{-1} &= (xV \cap H)x^{-1} \\ &= xVx^{-1} \cap Hx^{-1} \\ &= xVx^{-1} \cap H \\ &\subset U \cap H \end{aligned}$$

De aquí que $x(V \cap H)x^{-1} \subset (U \cap H) = W$, es decir $\gamma_W$ está subordinada a $W$ y, por lo tanto, $H$ es un subgrupo $\omega$-balanceado de $G$. $\square$

**Proposición 3.1.6.** *El grupo $G^\bullet$ es $\omega$-balanceado si y sólo si $G$ es $\omega$-balanceado.*

*Demostración.* Supongamos que $G^\bullet$ es $\omega$-balanceado. El resultado se sigue de la proposición anterior y de que el grupo $G$ está encajado en $G^\bullet$ como subgrupo.

Ahora supongamos que $G$ es $\omega$-balanceado. Para cada vecindad $U$ de la identidad $e$ en $G$, existe una familia $\gamma_U$ de vecindades de la identidad $e$, numerable y subordinada a $U$. Se puede suponer que la familia $\gamma_U$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Veamos que para cada vecindad $O(U, \varepsilon)$ de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$, la familia

$$\eta = \{O(V, \varepsilon) : V \in \gamma_U\}$$

está subordinada a $O(U, \varepsilon)$. Sea $f \in G^\bullet$, entonces la función $f$ toma una cantidad finita de valores, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$. Como la familia $\gamma_U$ está subordinada a $U$ se tiene que para cada $x_i$, con $i = 1, 2, ..., n$, existe un elemento $V_i \in \gamma_U$ tal que $x_i V_i x_i^{-1} \subset U$.

Ya que $\gamma_U$ es cerrada bajo intersecciones finitas, hagamos $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Veamos que $fO(V, \varepsilon)f^{-1} \subset O(U, \varepsilon)$. Para esto, sea $g \in O(V, \varepsilon)$, como

$$\{r \in J : (f * g * f^{-1})(r) \notin U\} \subset \{r \in J : g(r) \notin V\},$$

entonces

$$\mu(\{r \in J : (f * g * f^{-1})(r) \notin U\}) \leq \mu(\{r \in J : g(r) \notin V\}) < \varepsilon.$$

De aquí se tiene que para cada $O(U, \varepsilon)$, existe $O(V, \varepsilon) \in \eta$, tal que para cada $f \in G^\bullet$ $fO(V, \varepsilon)f^{-1} \subset O(U, \varepsilon)$. De este modo se probó que $G^\bullet$ es $\omega$-balanceado. $\square$

## 3.2. Propiedades globales

Muchas de las propiedades que veremos se comportan de forma similar y hay otras como precompacidad y pseudocompacidad que no lo hacen. Aunque esta sección será más extensa que la anterior, nuestra atención estará enfocada principalmente en dos propiedades, las cuales son Lindelöf y Čech completez. Será nuestro objetivo caracterizar a $G^\bullet$ cuando se habla de estas propiedades.

**Proposición 3.2.1.** *El grupo $G^\bullet$ tiene red numerable si y sólo si $G$ tiene red numerable.*

*Demostración.* Sea $\mathscr{P}$ una red para $G$, con $|\mathscr{P}| \leq \omega$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $J(m)$ el conjunto de todas las $m-$tuplas $(b_1, \ldots, b_m)$ de números racionales tales que, $0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, un elemento $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in J(m)$ y $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_m) \in \mathscr{P}^m$, definimos un subconjunto $Q(m, n, \vec{b}, \vec{P})$ en $G^\bullet$ como el conjunto de todas las funciones $g \in G^\bullet$, tales que

$$\mu(\{r \in J\colon g(r) \notin P_{k+1} \ \text{ con } \ b_k \leq r < b_{k+1} \text{ para algún } k = 0, \ldots m-1\}) < \frac{1}{n}.$$

en donde $b_0 = 0$. La familia $\mathscr{D}$ de todos los conjuntos $Q(m, n, \vec{b}, \vec{P})$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in J(m)$ y $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_m) \in \mathscr{P}^m$ es numerable y afirmamos que $\mathscr{D}$ es una red para $G^\bullet$.

Sean $f$ una función en $G^\bullet$ y $O(V, \varepsilon)$ una vecindad de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$. Existen números reales $a_0, \ldots, a_m$, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$, tales que $f$ es constante en cada $[a_k, a_{k+1})$. Para cada $k = 0, \ldots, m-1$, sea $x_k = f(a_k)$ y escojamos un elemento $P_{k+1} \in \mathscr{P}$, tal que $x_k \in P_{k+1} \subset x_k V$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \varepsilon$ y escojamos $(b_1, \ldots, b_m) \in J(m)$ tal que $a_k \leq b_k < a_{k+1}$, para cada $k = 1, \ldots, m-1$, y $\sum_{k=1}^{m-1}(b_k - a_k) < 1/(2n)$. Basta mostrar que $f \in Q(m, n, \vec{b}, \vec{P}) \subset fO(V, \varepsilon)$, en donde $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_m) \in \mathscr{P}^m$. Sean $b_0 = 0$ y $b_m = 1$.

Se sigue de la elección de $\vec{b}$ y $\vec{P}$ que $f(r) = x_k \in P_{k+1}$ para cada $r \in [b_k, a_{k+1})$, con $k = 0 \ldots m-1$. Por lo tanto, si $b_k \leq r < b_{k+1}$ y $f(r) \notin P_{k+1}$ para algún $k < m$, entonces $r \in [a_{k+1}, b_{k+1})$ y $k+1 \neq m$. Ya que $\sum_{k=1}^{m-1}(b_k - a_k) < 1/(2n)$ concluimos que $f \in Q(m, 2n, \vec{b}, \vec{P})$. Para mostrar que $Q(m, 2n, \vec{b}, \vec{P}) \subset fO(V, \varepsilon)$ es suficiente verificar que $g \in fO(V, \varepsilon)$ para cada $g \in Q(m, 2n, \vec{b}, \vec{P})$. Sea $g \in Q(m, 2n, \vec{b}, \vec{P})$. Se sigue de la definición de $Q(m, 2n, \vec{b}, \vec{P})$ que

$$\mu(\{r \in J\colon g(r) \notin P_{k+1} \ \text{ con } \ b_k \leq r < b_{k+1} \text{ para algún } k < m\}) < 1/(2n).$$

Pongamos $L = \{r \in J\colon g(r) \notin P_{k+1} \ \text{ con } \ b_k \leq r < b_{k+1} \text{ para algún } k < m\}$. Si $r \in J \setminus L$ y $b_k \leq r < a_{k+1}$ para algún $k < m$, entonces $g(r) \in P_{k+1}$ y $f(r) = x_k$. Se sigue que $(f^{-1} * g)(r) = x_k^{-1} g(r) \in x_k^{-1} P_{k+1} \subset V$. Esto implica

$$M = \{r \in J\colon (f^{-1} * g)(r) \notin V\} \subset L \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} [a_k, b_k),$$

así que $\mu(M) < 1/(2n) + 1/(2n) = 1/n$. De aquí que $f^{-1}g \in O(V, \varepsilon)$ y $g \in fO(V, \varepsilon)$. Esto prueba que $\mathscr{D}$ es una red para el grupo $G^\bullet$.

La implicación contraria se cumple porque tener red numerable se hereda a subespacios. $\square$

**Proposición 3.2.2.** *El grupo $G^\bullet$ es separable si y sólo si $G$ es separable.*

*Demostración.* Supongamos que $G^\bullet$ es separable. Sea $S$ un subconjunto denso y numerable de $G^\bullet$. Hagamos

$$D = \bigcup \{f[G] : f \in S\}.$$

Para ver que el subconjunto $D$ es denso en $G$ veamos que para cada vecindad $U$ de la identidad $e$ en $G$ y cada punto $x \in G$ se tiene que $D \cap xU \neq \emptyset$. Por el encaje que existe entre los grupos $G$ y $G^\bullet$ podemos asociar a cada punto $x$ en $G$ su correspondiente función constante $x^\bullet$ en $G^\bullet$, que está dada por $x^\bullet(r) = x$, para cada $r \in J$. Sea $\varepsilon = 1$ y consideremos $O(U, 1)$. Como $S$ es denso en $G^\bullet$ se tiene que $S \cap x^\bullet O(U, 1) \neq \emptyset$.

Escojamos una función $f$ en la intersección $S \cap x^\bullet O(U, 1)$. Podemos escribir a la función $f \in S$ como $f = x^\bullet * h$, en donde $h \in O(U, 1)$. Tenemos que

$$\mu(\{r \in J : h(r) \notin U\}) < 1.$$

Entonces existe $s \in J$, tal que $h(s) \in U$ y $f(s) = x^\bullet(s)h(s) = xh(s) \in xU$. De este modo $f(s) \in xU$ y además $f(s) \in D$. Se sigue que, $D \cap xU \neq \emptyset$, por lo tanto $D$ es denso en $G$. Como además $D$ es numerable, concluimos que $G$ es separable.

Inversamente, sea $D$ un subconjunto denso y numerable en $G$. Consideremos a $S$ como el conjunto de todas las funciones $f$ en $G^\bullet$ tales que, existen números racionales $b_0, b_1, ..., b_n$, con $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$, en donde la función $f$ toma el valor constante $x_k \in D$ en cada $J_k = [b_k, b_{k+1})$ para $k = 0, ..., n-1$. Se tiene que $S$ es numerable. Para ver que el conjunto $S$ es denso en $G^\bullet$, consideremos una función $f$ en $G^\bullet$ y una vecindad $O(V, \varepsilon)$ de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$. Basta mostrar que

$$S \cap fO(V, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Para la función $f$ existen números reales $a_0, ..., a_n$, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, tal que $f$ es constante en cada $J_k = [a_k, a_{k+1})$, para $k = 0, 1, ..., n-1$. Ahora, para cada $k = 1, ..., n-1$ escojamos un número racional $b_k$, tal que

$$a_k < b_k < a_{k+1} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) < \varepsilon$$

y sean $b_0 = 0$ y $b_n = 1$.

Para cada $k = 0, ..., n-1$, escojamos un número $y_k \in D \cap x_k V$, en donde $x_k = f(a_k)$. Definamos una función $g \in S$ de la siguiente manera, $g(r) = y_k$, para cada $r \in [b_k, b_{k+1})$. Veamos que

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [b_k, a_{k+1}) \subset \{r \in J : g(r) \in f(r)V\}.$$

Sea $s \in \bigcup_{k=0}^{n-1}[b_k, a_{k+1})$, entonces $f(s) = f(a_k)$ y $g(s) = y_k$, esto último se cumple porque $[b_k, a_{k+1}) \subset [b_k, b_{k+1})$, para cada $k = 0, ..., n-1$. Se sigue que $g(s) \in D \cap f(a_k)V$, entonces $g(s) \in f(s)V$, de aquí que $s \in \{r \in J : g(r) \in f(r)V\}$. Por lo tanto,

$$\{r \in J : g(r) \notin f(r)V\} \subset \bigcup_{k=1}^{n-1}[a_k, b_k)$$

y

$$\mu(\{r \in J : g(r) \notin f(r)V\}) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}[a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Por el lema 2.1.1, se tiene que $g \in fO(V, \varepsilon)$. La demostración concluye, ya que $g \in fO(V, \varepsilon) \cap S$ y de este modo, $S$ es denso en $G^\bullet$. $\square$

**Definición 3.2.3.** Se dice que un grupo topológico $G$ es $\omega$-estrecho si para cada vecindad abierta $V$ de la identidad $e$ en $G$, existe un subconjunto numerable $A \subset G$ tal que $AV = G = VA$.

Este concepto fue introducido por I.I Guran, quien llamó a tales grupos $\omega$-acotados. En topología general, el concepto $\omega$-acotado tiene diferentes significados. Por lo cual, en esta tesis trabajaremos con la definición 3.2.3.

Si el conjunto $A$ en la definición de arriba es finito, se dice que el grupo topológico $G$ es *precompacto.*

**Proposición 3.2.4.** *Si $G$ es un grupo topológico $\omega$-estrecho, entonces cada subgrupo $H$ de $G$ también es $\omega$-estrecho.*

*Demostración.* Sea $W$ una vecindad abierta de la identidad $e$ en $H$. Escojamos una vecindad simétrica $V$ de la identidad $e$ en $G$, tal que $V^2 \cap H \subset W$.

Ya que $G$ es $\omega$-estrecho, existe un subconjunto numerable $B$ de $G$ tal que $G = BV$. Sea $C$ el conjunto de todos los $c \in B$ tales que $cV \cap H \neq \emptyset$. Se tiene que $|C| \leq |B| \leq \omega$ y $H \subset CV$. Para cada $c \in C$, fijemos un punto $a_c \in cV \cap H$ y sea $A = \{a_c : c \in C\}$. Como $C$ es numerable, $A$ también lo es.

Afirmamos que $H = AW$. Como $H$ es un subgrupo de $G$ y $V^2 \cap H \subset W \subset H$, se tiene que $AV^2 \cap H \subset AW$. Queda mostrar que $H \subset AV^2$, y esto se cumple por que $A \subset H \subset CV$, $V$ es simétrica y por la construcción de $C$ se sigue que $C \subset AV$, lo cual implica que $H \subset CV \subset AV^2$. $\square$

**Proposición 3.2.5.** *Cada grupo topológico $\omega$-estrecho y primero numerable es segundo numerable.*

*Demostración.* Sea $G$ un grupo topológico primero numerable y $\omega$-estrecho. Para ver que $G$ tiene una base numerable consideremos $\{U_n : n \in \omega\}$, una base local numerable en su identidad $e$. Al ser $G$ $\omega$-estrecho se puede escoger, para cada $n \in \omega$, un subconjunto numerable $C_n \subset G$ tal que $C_n \cdot U_n = G$. La familia

$$\mathscr{B} = \{xU_n : x \in C_n, n \in \omega\}$$

es numerable y es la base que buscamos. Efectivamente, sea $O$ una vecindad de un punto $a \in G$. Podemos encontrar $k, l \in \omega$ tal que $aU_k \subset O$ y $U_l^{-1}U_l \subset U_k$. Existe $x \in C_l$ tal que $a \in xU_l$, de aquí $x \in aU_l^{-1}$. Entonces,

$$xU_l \subset (aU_l^{-1})U_l = a(U_l^{-1}U_l) \subset aU_k \subset O.$$

Esto es, $xU_l$ es una vecindad abierta de $a$ y $xU_l \subset O$. □

**Proposición 3.2.6.** *El grupo topológico $G^\bullet$ es $\omega$-estrecho si y sólo si $G$ es $\omega$-estrecho.*

*Demostración.* Supongamos que $G^\bullet$ es $\omega$-estrecho. Por la proposición 3.2.4 y dado que $G$ está encajado como subgrupo en $G^\bullet$, se concluye que $G$ es $\omega$-estrecho.

Ahora supongamos que $G$ es $\omega$-estrecho. Sean $V$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$ y $\varepsilon$ un número positvo. Existe un subconjunto $D \subset G$ tal que $G = DV$ y $\mid D \mid \leq \omega$.

Consideremos a $S$ como el conjunto de todas las funciones $g$ en $G^\bullet$ tales que existen números racionales $b_0, b_1, ..., b_n$, con $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$, en donde $g$ es constante en cada $J_k = [b_k, b_{k+1})$ para $k = 0, ..., n-1$ y $g[J_k] \subset D$. Notemos que $\mid S \mid \leq \omega$.

Para demostrar que $G^\bullet$ es $\omega$-estrecho, consideremos a $O(V, \varepsilon)$, una vecindad de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$ y veamos que

$$G^\bullet = SO(V, \varepsilon).$$

Sea $f \in G^\bullet$. Existen números reales $a_0, a_1, ..., a_n$, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ tales qu, la función $f$ es constante en cada $[a_k, a_{k+1})$, para $k = 0, 1, ..., n-1$. Ahora escojamos números racionales $b_0, b_1, ..., b_n$, tales que $b_0 = 0$ y $b_n = 1$ y para $k = 1, ..., n-1$, se tiene que

$$b_k \in [a_k, a_{k+1}) \ \text{ y } \ \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Para cada $k = 0, 1, ..., n-1$, elegimos un punto $x_k$ en $D$, tal que $f(a_k) \in x_kV$ y sea $g \in G^\bullet$ la función que toma el valor constante $x_k$ en $[b_k, b_{k+1})$.

Para ver que $f \in SO(V, \varepsilon)$, bastará demostrar que $f \in gO(V, \varepsilon)$, en donde claramente $g \in S$. Primero verifiquemos que

$$\bigcup_{k=0}^{n-1}[b_k, a_{k+1}) \subset \{r \in J : f(r) \in g(r)V\}.$$

Sea $s \in \bigcup_{k=0}^{n-1}[b_k, a_{k+1})$, se tiene que $f(s) = f(a_k)$ y $g(s) = x_k$. Por la elección de $x_k$ tenemos que $f(s) \in g(s)V$, entonces $s \in \{r \in J : f(r) \in g(r)V\}$. Se sigue que

$$\{r \in J : f(r) \notin g(r)V\} \subset \bigcup_{k=1}^{n-1}[a_k, b_k).$$

Por lo tanto,

$$\mu\left(\{r \in J : f(r) \notin g(r)V\}\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}[a_k, b_k))\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Usando el lema 2.1.1, se tiene que $f \in gO(V, \varepsilon)$. De este modo $G^\bullet$ es $\omega$-estrecho. □

**Proposición 3.2.7.** *El grupo $G^\bullet$ es segundo numerable si y sólo si $G$ es segundo numerable.*

*Demostración.* De la proposición 3.2.5 se tiene que ser segundo numerable es equivalente a ser primero numerable y $\omega$-estrecho. Aplicando los resultados de 3.1.1 y 3.2.6 se termina la demostración. □

El resultado que viene a continuación es un ejemplo de una propiedad que tiene el grupo $G$ y que no la va a heredar a su correspondiente $G^\bullet$. Vamos a demostrar que si $G$ tiene más de dos elementos, entonces no se puede cubrir a $G^\bullet$ con una cantidad finita de traslaciones de vecindades de la identidad, es decir, $G^\bullet$ no puede ser precompacto.

**Proposición 3.2.8.** *El grupo $G^\bullet$ nunca es precompacto, a menos que $\mid G \mid= 1$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mid G \mid\geq 2$. Sean $\varepsilon = 1/2$ y $V$ una vecindad simétrica de la identidad $e$ en $G$ tal que, $V \cap xV = \emptyset$, en donde $x \in G$ es fijo y distinto de la identidad $e$. Se tiene que $O(V, \varepsilon)$ es una vecindad de la identidad $e^\bullet$ en $G^\bullet$ y se va a demostrar que no se puede cubrir a $G^\bullet$ con una cantidad finita de traslaciones de $O(V, \varepsilon)$, es decir, para cada $m \in \omega$ se tiene

$$\bigcup_{j=1}^{m} f_j O(V, 1/2) \nsubseteq G^\bullet.$$

Para cada $j = 1, 2, ..., m$ se tiene que $f_j \in G^\bullet$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que la partición de $f_j$ es la misma, para cada $j = 1, ..., m$. Digamos, existen números reales $a_0, ..., a_n$, con $0 = a_0 < \cdots < a_n = 1$ tales que para cada $j = 1, ..., m$ la función $f_j$ toma el valor constante $x_{j,k}$ en $J_k = [a_k, a_{k+1})$, para cada $k = 0, ..., n-1$. Ahora, escojamos un número $b_k$ en $[a_k, a_{k+1})$ de la siguiente manera, $b_k = \frac{a_{k+1}+a_k}{2}$.

Definamos una función $g : J \to G$ como sigue

$$g(r) = \begin{cases} e & \text{si } r \in [a_k, b_k) \\ x & \text{si } r \in [b_k, a_{k+1}) \end{cases}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Afirmamos lo siguiente,

$$g \notin \bigcup_{j=1}^{m} f_j O(V, 1/2). \tag{3.1}$$

Supongamos lo contrario, es decir, existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $g \in f_i O(V, 1/2)$. Por la simetría de V, para $k = 0, ..., n-1$, tenemos lo siguiente,

$$g(r) = e, \text{ si } r \in [a_k, b_k) \quad \text{y} \quad e \in f_i(r)V \text{ si y sólo si } f_i(r) \in V.$$
$$g(r) = x, \text{ si } r \in [b_k, a_{k+1}), \quad \text{y} \quad x \in f_i(r)V \text{ si y sólo si } f_i(r) \in xV.$$

Sin embargo, $f_i(r) = x_{i,k}$ para cada $r \in [a_k, a_{k+1})$ y $xV \cap V = \emptyset$. De este modo, $f_i(r) \notin xV$ o $f_i(r) \notin V$, para cada $r \in [a_k, a_{k+1})$. Se sigue que $g(r)$ y $f_i(r)$ difieren en $[a_k, b_k)$ o en $[b_k, a_{k+1})$. Entonces, en ambos casos se tiene que

$$\mu(\{r \in J_k : g(r) \notin f_i V\}) \geq \frac{\mu(J_k)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\mu(\{r \in J : g(r) \notin f_i V\}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(J_k) = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) = \frac{1}{2}.$$

Lo cual contradice el hecho de que $g \in f_i O(V, 1/2)$.

De esta manera queda demostrada la afirmación en 3.1. Concluimos que $G^\bullet$ no es precompacto. □

**Corolario 3.2.9.** *El grupo $G^\bullet$ es pseudocompacto si y solo si $\mid G \mid = 1$.*

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 1.2.6 y 3.2.8. □

Acabamos de demostrar que ser precompacto y pseudocompacto son propiedades que $G^\bullet$ tiene sólo en el caso de que $G$ sea el grupo trivial.

Lo que sigue es analizar otra propiedad que comparten $G$ y $G^\bullet$. Para esto vamos a introducir primero la notación y herramientas que nos serán útiles para enunciar y demostrar el teorema 3.2.12.

Consideremos el intervalo unitario $I$ con su topología usual. Para cualesquiera números $n, m \in \mathbb{N}$, definimos los siguientes conjuntos:

$$A_n = \{(a_1, ..., a_n) \in I^n : 0 < a_1 < \cdots < a_n < 1\}$$

y

$$A_{n,m} = \{(a_1, ..., a_n) \in A_n : a_{k+1} - a_k \geq 1/m \ \text{ para cada } k \leq n\}$$

en donde, como es usual, $a_0 = 0$ y $a_n = 1$.

La relación entre los conjuntos que acabamos de definir lo da el siguiente lema.

**Lema 3.2.10.** *Para los conjuntos $A_n$ y $A_{n,m}$ definidos arriba se tiene que*

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

*Además, cada $A_{n,m}$ es compacto en $I^n$.*

*Demostración.* Para demostrar la igualdad, veamos que por definición se tiene que $A_{n,m} \subset A_n$. Por otro lado, sean $(b_1, ..., b_n) \in A_n$ y $p = \text{mín}\{b_{k+1} - b_k : k = 0, ..., n-1\}$. Por la propiedad Arquimediana, existe un número natural $m$ tal que $\frac{1}{m} < p$. De este modo, $(b_1, ..., b_n) \in A_{n,m}$.

Ahora veamos que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_{n,m}$ es cerrado en $I^n$. Para esto, sea $y = (c_1, \cdots, c_n) \in I^n \setminus A_{n,m}$. Entonces, existe $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $c_{l+1} - c_l < \frac{1}{m}$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$U = \{(b_1, \cdots, b_n) \in I^n : b_{k+1} - b_k < 1/m \text{ para cada } k \leq n\}$$

y veamos que es abierto en $I^n$. Sean

$$\begin{aligned} \pi : I^n &\to I_{l+1} \times I_l \\ \pi(a_1, \cdots, a_n) &= (a_{l+1}, a_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : I_{l+1} \times I_l &\to \mathbb{R} \\ p(a_{l+1}, a_l) &= a_{l+1} - a_l \end{aligned}$$

$$f = p \circ \pi : I^n \to \mathbb{R}$$

Es fácil ver que $U = f^{-1}(-\infty, 1/m)$ y al ser $f$ composición de funciones continuas, $f$ también es continua. Se sigue que $U$ es vecindad de $y$ en $I^n$. Por lo tanto $I^n \setminus A_{n,m}$ es abierto y $A_{n,m}$ cerrado. En particular, $A_{n,m}$ es compacto, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Usando los conjuntos $A_n$ y $A_m$ del enunciado anterior vamos a definir un mapeo continuo y además veremos que el grupo $G^\bullet$ resultará ser unión numerable de imágenes continuas. Este hecho será de mucha importancia, no sólo para probar $\sigma$-compacidad, sino también para estudiar la propiedad de Lindelöf en $G^\bullet$.

**Lema 3.2.11.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el mapeo $\varphi_n : G^{n+1} \times A_n \to G^\bullet$ como sigue*

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n, a_1, ...a_n) = f$$

*en donde la función $f : J \to G^\bullet$ toma el valor constante $x_k$ en $[a_k, a_{k+1})$ para cada $k \leq n$. Entonces la restricción de $\varphi_n$ a $G^{n+1} \times A_{n,m}$ es continua para cada $m \in \mathbb{N}$. Además*

$$G^\bullet = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \varphi_n(G^{n+1} \times A_{n,m}). \tag{3.2}$$

*Demostración.* Consideremos un punto $p = (x_0, ..., x_n, a_1, ...a_n)$ en $G^{n+1} \times A_{n,m}$ y sea $f$ la imagen de $p$ bajo $\varphi_n$, sea también $fO(V, \varepsilon)$ una vecindad de $f$ en $G^\bullet$. Escojamos un número positivo $\delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2n}, \frac{1}{2m}\}$ y definamos una vecindad $W$ del punto $p$ en $G^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$W = x_0V \times \cdots \times x_nV \times (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Para demostrar que $\varphi_n$ restringida a $G^{n+1} \times A_{n,m}$ es continua, basta probar que para cada $q \in W \cap (G^{n+1} \times A_{n,m})$ se cumple

$$\varphi_n(q) \in fO(V, \varepsilon). \tag{3.3}$$

Podemos escribir al punto $q$ de la siguiente manera, $q = (y_0, ..., y_n, b_1, ...b_n)$, en donde $(y_0, ..., y_n) \in G^{n+1}$ y $(b_1, ...b_n) \in A_{n,m}$ y pongamos $g = \varphi_n(q)$. Veamos que

$$\{r \in J : g(r) \notin f(r)V\} \subset \bigcup_{k=1}^{n}(a_k - \delta, a_k + \delta). \tag{3.4}$$

Para esto, sea $s \in J \setminus \bigcup_{k=1}^{n}(a_k - \delta, a_k + \delta)$, entonces $s \in [a_k, a_{k+1})$ para algún $k \leq n$. Se sigue que $s \in [b_k, b_{k+1})$ y $g(s) = y_k$. Ya que $q \in W$, se tiene que $x_k^{-1}y_k \in V$ para cada $k \leq n$, entonces $f(s)^{-1}g(s) = x_k^{-1}y_k \in V$. Esto implica que, $s \in \{r \in J : g(r) \in f(r)V\}$. De este modo, se cumple la contención en 3.4. Luego,

$$\mu(\{r \in J : g(r) \notin f(r)V\}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mu(a_k - \delta, a_{k+1} + \delta) = 2n\delta < \varepsilon.$$

El lema 2.1.1 nos garantiza que $g \in fO(V, \varepsilon)$, es decir, se cumple la expresión en 3.3. Así, $\varphi_n$ es continua en $G^{n+1} \times A_{n,m}$.

Para mostrar la igualdad 3.2 veamos que si $f \in G^{\bullet}$, entonces existen números reales $b_0, b_1, \cdots, b_{p+1}$, con $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_p < b_{p+1} = 1$, tales que $f$ toma algún valor constante $z_k$ en $[b_k, b_{k+1})$, para cada $k = 0, 1, ..., p$. Entonces $f = \varphi_p(z_0, ..., z_p, b_1, \cdots, b_p)$. Esto es, $f \in \varphi_p(G^{p+1} \times A_{p,m})$, para algún $p \in \mathbb{N}$. La otra contención es inmediata de la definición de $\varphi_n$. $\square$

Se dice que un espacio topológico $X$ es *$\sigma$-compacto* si $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, en donde cada $K_i$ es compacto en $X$. A continuación se presenta el resultado que nos interesa.

**Teorema 3.2.12.** *El grupo $G^{\bullet}$ es $\sigma$-compacto si y sólo si $G$ es $\sigma$-compacto.*

*Demostración.* La condición necesaria se sigue de que $G$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $G^{\bullet}$.

Recíprocamente, supongamos que $G$ es $\sigma$-compacto. Al ser $G^{n+1}$ producto finito de $\sigma$-compactos, se tiene, por la proposición 1.1.7 que $G^{n+1}$ es $\sigma$-compacto. Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, sea $A_{n,m}$ definido como en el lema 3.2.10. Como $A_{n,m}$ es compacto para cada $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $G^{n+1} \times A_{n,m}$ también es $\sigma$-compacto. Usando el mapeo continuo definido en el lema 3.2.11 se tiene que $\varphi_n(G^{n+1} \times A_{n,m})$ es $\sigma$-compacto. Por el mismo lema 3.2.11 se tiene que

$$G^\bullet = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \varphi_n(G^{n+1} \times A_{n,m}).$$

De esta manera se tiene que $G^\bullet$ es $\sigma$-compacto. □

Ahora veamos cómo se relaciona el grupo $G^\bullet$ con sus potencias finitas.

**Teorema 3.2.13.** *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $(G^\bullet)^n$ es topológicamente isomorfo a $G^\bullet$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Es suficiente probar que $G^\bullet \times G^\bullet$ es topológicamente isomorfo a $G^\bullet$. Definamos $\psi\colon G^\bullet \times G^\bullet \to G^\bullet$ de la siguiente manera:

$$\psi(f,g)(r) = \begin{cases} f(2r) & \text{si } 0 \le r < 1/2 \\ g(2r-1) & \text{si } 1/2 \le r < 1 \end{cases}$$

para cualesquiera $f, g \in G^\bullet$ y cada $r \in J$.

Veamos con un ejemplo sencillo que el isomorfismo que acabamos de definir está dado de una manera muy natural.

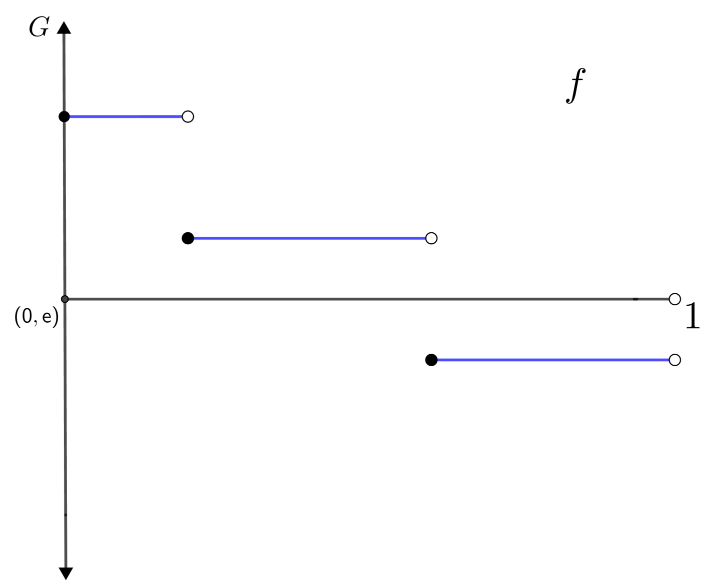


Figura 3.1: Función $f$.

Para probar que $\psi$ es un isomorfismo topológico veamos que se cumple lo siguiente:

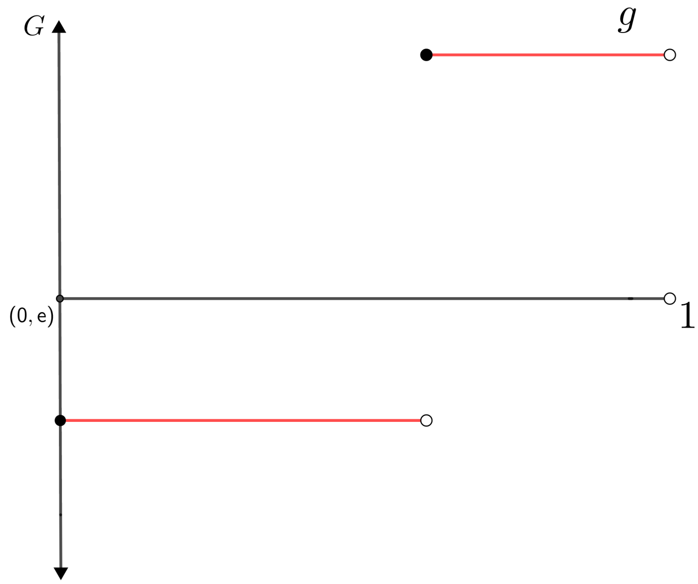


Figura 3.2: Función $g$.

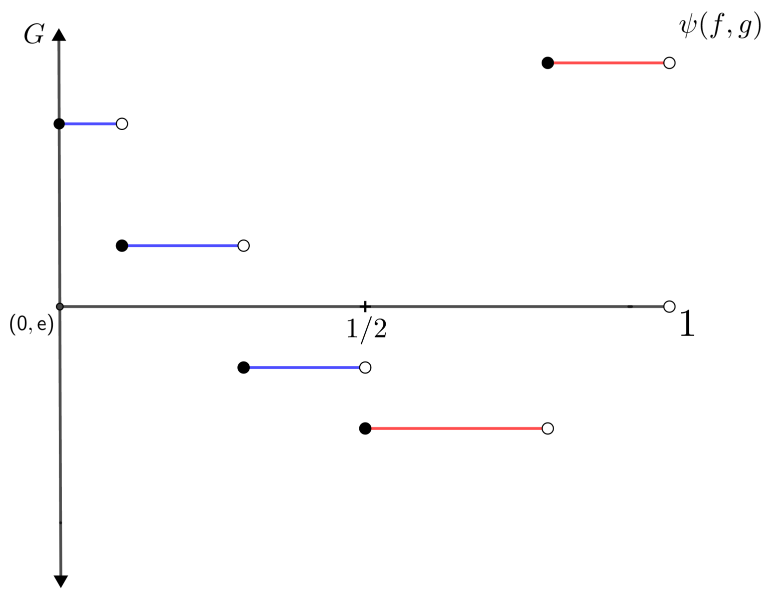


Figura 3.3: Gráfica de $\psi(f,g)$.

i) $\psi$ es homomorfismo. Sean $(f_1,g_1),(f_2,g_2)\in G^\bullet\times G^\bullet$. Tenemos que

$$\psi(f_1,g_1)(r)=\begin{cases} f_1(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g_1(2r-1) & \text{si } 1/2\le r<1\end{cases}$$

$$\psi(f_2,g_2)(r)=\begin{cases} f_2(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g_2(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}$$

Entonces,

$$\psi(f_1,g_1)(r)*\psi(f_2,g_2)(r)=\begin{cases} f_1(2r)\cdot f_2(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g_1(2r-1)\cdot g_2(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}$$

y

$$\begin{aligned}\psi((f_1,g_1)(f_2,g_2))(r) &= \psi(f_1*f_2,g_1*g_2)(r)\\ &= \begin{cases} (f_1*f_2)(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ (g_1*g_2)(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}\\ &= \begin{cases} f_1(2r)\cdot f_2(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g_1(2r-1)\cdot g_2(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\psi((f_1,g_1)(f_2,g_2))=\psi(f_1,g_1)*\psi(f_2,g_2).$$

ii) Sea $(f,g)\in\ker\psi$. Para cada $r\in J$ se tiene que

$$e^\bullet(r)=\psi(f,g)(r)=\begin{cases} f(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}$$

En consecuencia, $f=g=e^\bullet$. Por lo tanto, $\psi$ es inyectiva.

iii) Sea $h\in G^\bullet$. Para las funciones $f,g:J\to G$, definidas como $f(r)=h(\frac{r}{2})$ y $g(r)=h(\frac{r}{2}+\frac{1}{2})$ para cada $r\in J$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi(f,g)(r) &= \begin{cases} f(2r) & \text{si } 0\le r<1/2\\ g(2r-1) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}\\ &= \begin{cases} h(2\frac{r}{2}) & \text{si } 0\le r<1/2\\ h(\frac{2r-1}{2}+\frac{1}{2}) & \text{si } \ 1/2\le r<1\end{cases}\\ &= h(r).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi$ es sobreyectiva.

iv) Para la continuidad de $\psi$, es suficiente fijarnos en la identidad $(e^\bullet,e^\bullet)$ de $G^\bullet\times G^\bullet$. Para esto, sea $O(V,\varepsilon)\in N(e^\bullet)$ una vecindad de $e^\bullet=\psi(e^\bullet,e^\bullet)$ en $G^\bullet$. Basta mostrar que $O(V,\varepsilon)\times O(V,\varepsilon)$ es una vecindad de $(e^\bullet,e^\bullet)$ en $G^\bullet\times G^\bullet$ tal que

$$\psi[O(V,\varepsilon)\times O(V,\varepsilon)]\subset O(V,\varepsilon).$$

Consideremos $h\in\psi[O(V,\varepsilon)\times O(V,\varepsilon)]$. Entonces, podemos escribir $h=\psi(f,g)$, en donde $(f,g)\in O(V,\varepsilon)\times O(V,\varepsilon)$. Podemos asumir que las funciones $f$ y $g$ tienen la misma partición. Digamos, $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ y tales que $f$ y $g$ toman, respectivamente el valor constante $x_k$ y $y_k$ en $J_k = [a_k, a_{k+1})$, para cada $k = 0, ..., n-1$. Para demostrar que $h \in O(V, \varepsilon)$, consideremos para cada $i = 0, 1, ..., n$, los números

$$b_i = \frac{a_i}{2} \quad \text{y} \quad c_i = \frac{a_i}{2} + \frac{1}{2}.$$

Tenemos que $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = 1$ y además $f$ toma el valor constante $x_k$ en $F_k = [b_k, b_{k+1})$, mientras que $g$ toma el valor constante $y_k$ en $G_k = [c_k, c_{k+1})$, para $k = 0, ..., n-1$. Notemos que para cada $k = 0, ..., n-1$ se tiene

$$\mu(F_k) = \mu(G_k) = \frac{1}{2}\mu(J_k).$$

Para la función $f$ consideremos los subintervalos $J_{k_1}, ..., J_{k_m}$, tales que $x_{k_j} \notin V$, en donde $\{x_{k_j}\} = f[J_{k_j}]$, para $j = 1, ..., m$. Como $f \in O(V, \varepsilon)$, se tiene que

$$\mu(\{r \in J : f(r) \notin V\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} J_{k_j}\right) < \varepsilon.$$

De la misma manera, para $g$ existen subintervalos $J_{l_1}, ..., J_{l_p}$, tales que $y_{l_j} \notin V$, en donde $\{y_{l_j}\} = g[J_{l_j}]$, para $j = 1, ..., p$. Como $g \in O(V, \varepsilon)$, se tiene que

$$\mu(\{r \in J : g(r) \notin V\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{p} J_{l_j}\right) < \varepsilon.$$

De aquí tenemos que,

$$\begin{aligned}
\mu(\{r \in [0, 1/2) : f(2r) \notin V\}) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} F_{k_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu(F_{k_j}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mu(J_{k_j}) < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned}
\mu(\{r \in [1/2, 1) : g(2r-1) \notin V\}) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{p} G_{l_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mu(G_{l_j}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mu(J_{l_j}) < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De este modo

$$\mu(\{r \in J \colon h = \psi(f,g)(r) \notin V\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se concluye que $h \in O(V,\varepsilon)$ y, por lo tanto, $\psi$ es continua.

v) Veamos que $\psi \colon G^{\bullet} \times G^{\bullet} \to G^{\bullet}$ es abierta. Sean $\varepsilon > 0$ y $V$ una vecindad de la identidad $e$ en $G$. Por la proposición 1.2.5, bastará mostrar que

$$O(V,\varepsilon/2) \subseteq \psi(O(V,\varepsilon) \times O(V,\varepsilon)).$$

Sea $h \in O(V, \frac{\varepsilon}{2})$ y consideremos las funciones $f, g : J \to G$ definidas como $f(r) = h(\frac{r}{2})$ y $g(r) = h(\frac{r}{2} + \frac{1}{2})$ para cada $r \in J$. Para $h$, sean $a_0, a_1, ..., a_m, ..., a_n$ números reales tales que,

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = \frac{1}{2} < \cdots < a_n = 1$$

y además la función $h$ toma el valor constante $x_k$ en $J_k = [a_k, a_{k+1})$ para cada $k = 0, ..., n-1$. Una partición para $f$ la obtenemos al considerar los números $b_i = 2a_i$, para cada $i = 0, ..., m$. Se tiene que $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$ y la función $f$ toma el valor constante $x_k$ en $F_k = [b_k, b_{k+1})$, para cada $k = 0, ..., m-1$. Para $g$ obtenemos una partición al considerar los números $c_i = 2a_i - 1$, para cada $i = m, m+1, ..., n$. Se tiene que $0 = c_m < c_{m+1} < \cdots < c_n = 1$ y la función $g$ toma el valor constante $x_k$ en $G_k = [c_k, c_{k+1})$, para cada $k = m, m+1, ..., n-1$. Notemos que para cada $k = 0, ..., n-1$ se tiene que

$$\mu(F_k) = \mu(G_k) = 2\mu(J_k).$$

Sean $J_{k_1}, ..., J_{k_s}$ los subintervalos para los cuales existe un valor $x_{k_j}$ tal que $\{x_{k_j}\} = h[J_{k_j}] \nsubseteq V$, para cada $j = 1, ..., s$. Ya que $h \in O(V, \frac{\varepsilon}{2})$, se tiene que,

$$\mu(\{r \in J : h(r) \notin V\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{s} J_{k_j}\right) = \sum_{j=1}^{s} \mu(J_{k_j}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $f$ y $g$, sean $\{F_{k_j}\}_{j=1}^{p}$ y $\{G_{k_j}\}_{j=1}^{q}$ los respectivos subintervalos para los cuales existe un $x_{k_j}$ tal que $\{x_{k_j}\} = f[F_{k_j}] \nsubseteq V$ para $j = 1, 2, ..., p$ y $\{x_{k_j}\} = g[G_{k_j}] \nsubseteq V$ para $j = 1, ..., q$. Ahora, veamos que

$$\mu(\{r \in J : f(r) \notin V\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{p} F_{k_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} \mu(F_{k_j}) = 2\sum_{j=1}^{p} \mu(J_{k_j}) < \varepsilon. \tag{3.5}$$

$$\mu(\{r \in J : g(r) \notin V\}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{q} G_{k_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} \mu(G_{k_j}) = 2\sum_{j=1}^{q} \mu(J_{k_j}) < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Se sigue de (3.5) y (3.6) que $(f,g) \in O(V,\varepsilon) \times O(V,\varepsilon)$. Además, se tiene que $\psi(f,g) = h$. Lo anterior muestra que $O(V, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \psi(O(V,\varepsilon) \times O(V,\varepsilon))$. Concluimos que $\psi$ es un isomorfismo topológico. $\square$

Del teorema que acabamos de demostrar y de la proposición 2.1.3 obtenemos un resultado inmediato.

**Corolario 3.2.14.** *El grupo $G^n$ está encajado como subgrupo cerrado en $G^\bullet$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Hasta ahora, la mayoría de propiedades se han compartido entre los grupos $G$ y $G^\bullet$. Estudiar la propiedad de Lindelöf en $G^\bullet$ es uno de los objetivos principales de esta tesis, ya que se responde a un problema abierto planteado en [2]: Caracterizar cuándo $G^\bullet$ es Lindelöf. Para esto, es natural preguntarse si es suficiente que $G$ sea Lindelöf, para que $G^\bullet$ también lo sea. Para responder a este problema necesitamos saber si en grupos topológicos la propiedad de ser Lindelöf se preserva bajo productos finitos, este hecho también aparecía como pregunta abierta desde 1981 y fue planteada en [1]. La respuesta a dicha pregunta se enuncia a continuación.

**Teorema 3.2.15.** [13] *Hay un grupo topológico $G$ que es Lindelöf, cuyo cuadrado no es normal.*

El teorema anterior resulta muy importante para nuestros fines, dado que, proporciona la condición necesaria y, resulta ser suficiente para caracterizar cuándo el grupo $G^\bullet$ es Lindelöf. En seguida se enuncia el resultado, que también aparece en [11].

**Teorema 3.2.16.** [11] *El grupo topológico $G^\bullet$ es Lindelöf si y solo si $G^n$ es Lindelöf, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Supongamos que $G^\bullet$ es Lindelöf. Por el corolario 3.2.14 se tiene que $G^n$ también es Lindelöf.

Por otro lado, se tiene por hipótesis que $G^{n+1}$ es Lindelöf. Usando los $A_{n,m}$ definidos en en lema 3.2.10 y la proposición 1.1.6 se tiene que $G^{n+1} \times A_{n,m}$ es Lindelöf. Por el lema 3.2.11, la función $\varphi_n$ restringida a $G^{n+1} \times A_{n,m}$ es continua. En consecuencia, $\varphi_n(G^{n+1} \times A_{n,m})$ es Lindelöf y, además, podemos escribir a $G^\bullet$ como

$$G^\bullet = \bigcup_{i,n,m=1}^{\infty} \varphi_n(G^{n+1} \times A_{n,m}).$$

Por lo tanto, $G^\bullet$ es Lindelöf. □

Una vez presentado este resultado, una pregunta inmediata es ¿qué pasa con las potencias numerables de $G$, será que se sigue cumpliendo lo mismo que en el caso finito? El siguiente ejemplo nos brinda la respuesta.

**Ejemplo 3.2.17.** Sea $G = \mathbb{Z}$ con la topología discreta. Se tiene que $(G^\bullet)^\omega$ no es topológicamente isomorfo a $G^\bullet$.

*Demostración.* Por un lado tenemos que $\mathbb{Z}$ es $\sigma$-compacto, así que por 3.2.12, $(\mathbb{Z})^\bullet$ también es $\sigma$-compacto.

Ahora, supongamos que $(\mathbb{Z}^\bullet)^\omega$ es $\sigma$-compacto. Ya que $(\mathbb{Z})^\omega$ está encajado como subgrupo cerrado en $(\mathbb{Z}^\bullet)^\omega$, se tiene que $(\mathbb{Z})^\omega$ también es $\sigma$-compacto. Como $(\mathbb{Z})^\omega$ es homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, se tedría que los irracionales son $\sigma$-compactos, pero esto contradice el resultado en 1.1.4. De esta manera se tiene que $(G^\bullet)^\omega$ y $G^\bullet$ no son topológicamente isomorfos. $\square$

Otra pregunta abierta que aparece en [2], y de la cual se da respuesta en este trabajo, es ¿cuándo el grupo $G^\bullet$ es Čech-completo? Para poder responder dicho problema, primero necesitamos enfocar nuestra atención y esfuerzos en la propiedad de Raikov completez.

En la sección de preliminares ya hemos recordado algunos hechos importantes sobre compleción de Raikov, los cuales nos serán útiles en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 3.2.18.** *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $G^\bullet$ es Raikov completo si y sólo si $\mid G \mid= 1$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mid G \mid> 1$ y veamos que $G^\bullet$ no es Raikov completo. Para esto fijemos un punto $x \in G$ que sea distinto de la identidad $e$ en $G$ y definamos para cada $n \in \omega$ la siguiente función

$$f_n(r) = \begin{cases} x & \text{si } r \in A_n \\ e & \text{si } r \in J \setminus A_n \end{cases}$$

en donde, $A_n = \bigcup_{i=0}^{n}[1-\frac{1}{2^{2i}}, 1-\frac{1}{2^{2i+1}})$, para cada $n \in \omega$.

Es claro que $f_n \in G^\bullet$, para cada $n \in \omega$. Hagamos $F_n = \{f_k \colon k \geq n\}$ para cada $n \in \omega$. Se demostrará que la familia $\{F_n \colon n \in \omega\}$ es una base de filtro para un filtro de Cauchy $\xi$ en el espacio uniforme $(G^\bullet, \mathcal{B})$. Que la familia $\{F_n\}_{n\in\omega}$ es una base de filtro, es inmediato. Ahora, escojamos una vecindad $V$ de la identidad $e$ y $\varepsilon > 0$. Pongamos $O = O(V, \varepsilon)$ y consideremos $B_O = \{(f, g) \in G^\bullet \times G^\bullet) \colon f \in O(V, \varepsilon)g \text{ y } g \in fO(V, \varepsilon)\} \in \mathcal{B}$. Ya que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Para probar que $F_N \times F_N \subset B_O$, sea $(f_m, f_n) \in F_N \times F_N$. Por el lema 2.1.1, para que $f_m \in f_nO(V, \varepsilon)$, es suficiente probar que $\mu(\{r \in J \colon f_m(r) \notin f_nV\}) < \varepsilon$. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mu(\{r \in J \colon f_m(r) \notin f_nV\}) &\leq \mu(A_m \setminus A_n) + \mu(A_n \setminus A_m) \\ &\leq \sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así que $f_m \in f_nO(V, \varepsilon)$. Del mismo se puede probar que $f_n \in f_mO(V, \varepsilon)$. Por lo tanto, $(f_n, f_m) \in B_O$ y $F_N \times F_N \subset B_O$. Esto muestra que $\xi$ es un filtro de Cauchy en $(G^\bullet, \mathcal{B})$.

Con los conjuntos $A_n$ que definimos arriba, sea $f\colon J \to G$ la siguiente función:

$$f(r) = \begin{cases} x & \text{si } r \in \bigcup_{n\in\omega} A_n \\ e & \text{si } r \in J \setminus (\bigcup_{n\in\omega} A_n) \end{cases}$$

En primer lugar notemos que $f \notin G^{\bullet}$, pues la partición que tiene asociada no es finita. La función $f$ tiene asociada la partición:

$$0 < 1 - \frac{1}{2^1} < 1 - \frac{1}{2^2} < \cdots < 1 - \frac{1}{2^p} < \cdots < 1,$$

con $p \in \omega$, en donde $f$ es constante en cada $J_q = [1-\frac{1}{2^q}, 1-\frac{1}{2^{q+1}})$, para cada $q \in \omega$. Ahora consideremos una función $g$ en $G^{\bullet}$, entonces existen números reales $a_0, a_1, \ldots, a_s$, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$, tales que $g$ es constante en cada subintervalo $J_r = [a_r, a_{r+1})$, con $r = 0, 1, \ldots, s-1$. Vamos a probar que el filtro $\xi$ no converge a $g$.

Dado que $f$ y $g$ son funciones distintas, existe un punto $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Además, para $f$ y $g$ existen, respectivamente, $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, para los cuales $x_0 \in J_q \subset J$ y $x_0 \in J_r \subset J$. Sean $\varepsilon = \mu(J_q \cap J_r) > 0$, $V$ una vecindad simétrica de la identidad $e$ en $G$, tal que $f(x_0) \notin g(x_0)V$ y $N$ un número natural que cumple que $x_0 < \max A_N$. Se demostrará que $f_m \notin gO(V, \varepsilon)$, para cada $m \geq N$. Efectivamente, ya que $f[J_q] \neq g[J_r]$ y $f_m(x_0) = f(x_0) \neq g(x_0)$, para cada $m \geq N$, entonces

$$J_q \cap J_r \subset \{r \in J\colon f_m(r) \notin gV\}$$

y

$$\mu(\{r \in J\colon f_m(r) \notin gV\}) \geq \mu(J_q \cap J_r).$$

Así que $\mu(\{r \in J\colon f_m(r) \notin gV\}) \geq \varepsilon$. Se sigue que $F_n$ no está contenido en $gO(V, \varepsilon)$ para cada $n \in \omega$. Con esto demostramos que $\xi$ no converge a ninguna función $g$ en $G^{\bullet}$ y, por el teorema 1.4.2, concluimos que $G^{\bullet}$ no es Raikov completo. □

Una vez demostrado el teorema 3.2.18, y junto con el siguiente resultado, estamos listos para caracterizar cuándo $G^{\bullet}$ es Čech completo.

**Teorema 3.2.19.** *Cada grupo topológico Čech-completo es Raikov completo.*

La demostración del teorema 3.2.19 se puede consultar en [2].

A continuación se caracteriza cuándo $G^{\bullet}$ es Čech-completo. Respondiendo de esta manera a una pregunta abierta planteada en [2].

**Corolario 3.2.20.** [11] *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $G^{\bullet}$ es Čech-completo si y sólo si $\mid G \mid = 1$.*

De este resultado se desprenden dos corolarios inmediatos.

**Corolario 3.2.21.** *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $G^\bullet$ es localmente compacto si y sólo si $\mid G \mid = 1$.*

**Corolario 3.2.22.** *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $G^\bullet$ es completamente metrizable si y sólo si $\mid G \mid = 1$.*

**Teorema 3.2.23.** [Nagata-Smirnov] *Un espacio regular es metrizable si y sólo si tiene una base $\sigma$-localmente finita.*

Se dice que una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ es *estrella-finita* si cada elemento $U$ de $\mathcal{U}$ intersecta sólo una cantidad finita de elementos de la misma familia $\mathcal{U}$. Se dice que una cubierta $\mathcal{U}$ de $X$ es *$\sigma$-estrella-finitas*, si $\mathcal{U}$ se puede descomponer en una unión numerable de cubiertas estrella-finita de $X$.

Un espacio regular $X$ es *fuertemente metrizable* si tiene una base que es $\sigma$-estrella-finita. Por el teorema 3.2.23 y ya que toda cubierta estrella-finita es localmente finita se sigue que cada espacio fuertemente metrizable es metrizable. Se puede probar que todo espacio regular segundo numerable es fuertemente metrizable. La clase de espacios fuertemente metrizable es cerrada al tomar subespacios y bajo productos numerables.

Para finalizar nuestro estudio de propiedades que comparten los grupos $G$ y $G^\bullet$, vamos a recurrir, primero a algunos resultados que se presentan en [3], para luego dar una caracterización de los grupos $G^\bullet$ que son fuertemente metrizables.

En [3] se demuestra que la clase de espacios metrizables $X$ que admiten una métrica $d$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, la colección $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B(x, \varepsilon) \colon x \in X\}$ de todas las $\varepsilon$-bolas es localmente finita, es precisamente la clase de los espacios fuertemente metrizables. También se muestra que $X$ es fuertemente metrizable si y sólo si se puede encajar en $\kappa^\omega \times [0,1]^\omega$ para algún cardinal $\kappa$, en donde $\kappa$ tiene la topología discreta.

En [12], Nagata pregunta si cada espacio metrizable admite una métrica tal que $\mathcal{B}(\varepsilon)$ es localmente finita para cada $\varepsilon > 0$. El siguiente teorema da respuesta negativa a dicha pregunta.

**Teorema 3.2.24.** [3] *Para cada espacio metrizable $X$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *$X$ es fuertemente metrizable;*

ii) *$X$ admite una métrica tal que para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ es estrella-finita;*

iii) *$X$ admite una métrica tal que para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ es estrella-numerable;*

iv) *$X$ es homeomorfo a un subespacio de $\kappa^\omega \times [0,1]^\omega$, para algún cardinal $\kappa$.*

El siguiente resultado se puede consultar en [14].

**Proposición 3.2.25.** *Sea $X$ un espacio conexo y fuertemente metrizable. Entonces $X$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Por el teorema anterior $X$ se puede considerar como un subespacio de $\kappa^\omega \times I^\omega$, para algún cardinal $\kappa$, en donde $I = [0,1]$ y $\kappa$ tiene la topología discreta. Sea $p_\kappa(X)$ la proyección de $\kappa^\omega \times I^\omega$ sobre $\kappa^\omega$. Ya que $X$ es conexo, su imagen $p_\kappa(X) \subset \kappa^\omega$ es conexo. De aquí que $p_\kappa(X)$ es un conjunto unipuntual. Por lo tanto, $X$ es homeomorfo a un subespacio de $I^\omega$. Se sigue que $X$ es segundo numerable. □

**Teorema 3.2.26.** *Sea $G$ un grupo topológico. Entonces $G^\bullet$ es fuertemente metrizable si y sólo si $G$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Si $G$ es segundo numerable, entonces por la proposición 3.2.7, $G^\bullet$ también es segundo numerable. Todo espacio segundo numerable se puede encajar en $I^\omega$. Por el teorema 3.2.24 se sigue que $G^\bullet$ es fuertemente metrizable. Ahora supongamos que $G^\bullet$ es fuertemente metrizable. Dado que $G^\bullet$ es conexo, usamos la proposición 3.2.25 y llegamos a que $G^\bullet$ es segundo numerable. Otra vez, por 3.2.7, se tiene que $G$ es segundo numerable. □

# Conclusiones

Al finalizar la tesis, podemos decir que trabajar con el grupo $G^\bullet$ trae consigo ciertas ventajas. Entre las que podemos destacar está que, en general, el grupo $G^\bullet$ mejora las propiedades topológicas-algebraicas de $G$ y la existencia de este nuevo grupo facilita el estudio de dichas propiedades y preserva propiedades algebraicas. La interacción de propiedades topológicas-algebraicas entre los grupos $G$ y $G^\bullet$ resultaron, en su mayoria, buenas, pues la mayoría se preservan. Las propiedades que en general no se comportan bien en $G^\bullet$ son las de tipo compacidad.

Durante el desarrollo de esta tesis han surgido preguntas interesantes, una de ellas está relacionada, otra vez, con la propiedad de ser Lindelöf: sean $G$ y $H$ grupos topológicos tales que $G^\bullet$ y $H^\bullet$ son topológicamente isomorfos. Si $G$ es Lindelöf, entonces ¿$H$ es Lindelöf?.

A pesar de lo que se ha hecho hasta el momento aún queda mucho por hacer. A continuación se deja una serie de problemas que aún siguen sin respuesta.

**Problema.** Caracterizar cuando $G^\bullet$ es hemicompacto.

[Se dice que un espacio topológico $X$ es *hemicompacto* si existe una sucesión $\{K_i\}_{i\in\omega}$ de subconjuntos compactos de $X$, tal que para cada subconjunto compacto $K$ de $X$, existe $i \in \omega$ para el cual $K \subset K_i$. Claramente, cada espacio hemicompacto es $\sigma$-compacto.]

En [2] se encuentran los siguientes problemas abiertos.

**Problema.** Caracterizar los grupos topológicos $G$ tales que el grupo $G^\bullet$ es realcompacto o Dieudonneé completo.

**Problema.** Caracterizar cuando $G^\bullet$ es emplumado.

[Un grupo topológico $G$ es *emplumado* si existe un subgrupo compacto $K$ tal que el espacio cociente $G/K$ es primero numerable.]

**Problema.** ¿Cuándo el grupo $G^\bullet$ tiene una de las siguientes propiedades?

(a) Paracompacto

(b) Normal

# Bibliografía


[1] A. V. Arkhangel'skii, Classes of topological groups, Uspekhi Mat. Nauk 36(3(219)) (1981) 127–146, 255.

[2] A. V. Arhangel'skii, M. Tkachenko. Topological Groups and Related Structures. Atlantis Press and World Sci., Hackensack, Nj, 2008.

[3] Z. Balogh, G. Gruenhage, When the collection of $\varepsilon$-balls is locally finite, Topol. Appl. 124(2002) 445–450.

[4] M. Bruguera, C. Hernández, M. Tkachenko, Raikov completion and the Hartman-Mycielski construction, restricted to metrizable topological groups, Houston Journal of Mathematics, Vol. 36, No 1 (2010) 157–165.

[5] W. W. Comfort, K. A. Ross, Pseudocompactness and Uniform Continuity in Topological Groups, Pacific J. Math, Vol. 16, No.3 (1996) 483–496.

[6] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[7] I. Glicksberg, The representation of functionals by integrals, Duke Math. J. 19 (1952) 253–261.

[8] S. Hartman, J. Mycielski, On embeddings of topological groups into connected topological groups, Colloq. Math. 5 (1958) 167–169.

[9] I. L. Iribarren, Topología de Espacios Métricos, Limusa, Caracas, 2008.

[10] J. Kerstan, Zur Charakterisierung der pseudokompakten Räume, Math. Nachr. 16 (1957) 289–293.

[11] M. López, I. Sánchez, Lindelöfness and Čech-completeness on the hypergroup of Hartman-Mycielski, Enviado a Topol. Appl.

[12] J. Nagata, Remarks on metrizability and generalized metric spaces, Topology Appl. 91 (1999) 71–77.

[13] Y. Peng, L. Wu, A Lindelöf group with non-Lindelöf square, Advances in Mathematics 325 (2018) 215–242.

[14] I. Sánchez, A note on strictly $\omega$-balanced topological groups, Topol. Appl. 263 (2019) 321–324.

[15] J. M. Smirnov, On the completeness of proximity spaces, Trudy Moskov, Mat. Obsc. 3 (1954) 271–306. (Russian; English translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 38 (1964) 37–73).

[16] L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr, Counterexamples in Topology, New York, 59.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00199
**Matrícula: 2173802154**

Construcción de
Hartman-Mycielski

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 25 del mes de febrero del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ANTONYAN SERGEY
DR. MIKHAIL TKATCHENKO
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: MARCELA LOPEZ GAYTAN

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

MARCELA LOPEZ GAYTAN
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. ANTONYAN SERGEY

VOCAL

DR. MIKHAIL TKATCHENKO

SECRETARIO

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS