



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA**

**POSGRADO EN INGENIERÍA BIOMÉDICA
DIVISION DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**DETERMINACIÓN DEL COCIENTE SEÑAL
A RUIDO DE UNA ANTENA SUPERFICIAL
TIPO MAGNETRÓN**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS
P R E S E N T A :
KARELIA OCEGUEDA HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALFREDO O. RODRÍGUEZ GONZÁLEZ

SNODALES: DR. ALFREDO O. RODRÍGUEZ GONZÁLEZ
DR. JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ POZOS
DR. EUGENIO LEY KOO
DR. GUILLERMO MONSIVÁIS GALINDO
DRA. SILVIA HIDALGO TOBÓN

MÉXICO, D.F.

FEBRERO 2007

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	iii
ÍNDICE DE TABLAS	vii
OBJETIVOS Y RESUMEN	viii
INTRODUCCIÓN	ix
CAPÍTULO 1. PRINCIPIOS BÁSICOS DE IMAGENOLOGÍA POR RESONANCIA MAGNÉTICA	1
1.1. Momento magnético y campo magnético	1
1.2. Momento magnético nuclear y espín nuclear	1
1.3. Magnetización de una población de espines	2
1.4. Resonancia Magnética Nuclear	6
1.5. Relajación y la señal de Resonancia Magnética (<i>RM</i>)	7
1.5.1. Señal por decaimiento libremente inducido (<i>DLI</i>)	12
1.6. Concepto del espacio- <i>k</i>	13
1.6.1. Definición y propiedades del espacio- <i>k</i>	13
1.6.2. Reglas de escaneo del espacio- <i>k</i>	14
1.6.3. Selección de la rebanada	15
1.6.4. Codificación en frecuencia	16
1.6.5. Codificación en fase	18
1.6.6. Transformada de <i>Fourier</i> continua	19
1.6.7. Transformada de <i>Fourier</i> discreta	19
1.7. Contraste y secuencias básicas	19
1.7.1. Fenómeno de eco-espín	20
1.7.2. Imágenes por eco-espín básico	20
1.7.2.1. Secuencia saturación-recuperación (<i>SR</i>)	20
1.7.2.2. Secuencia inversión-recuperación (<i>IR</i>)	21
1.7.3. Imágenes por eco-gradiente básico	22
1.7.3.1. Imágenes por eco-espín rápido	23
1.7.3.2. Imágenes por eco-gradiente rápido	24
1.7.4. Imágenes en tiempo real	24
1.7.4.1. Imágenes <i>EPI</i>	25
1.7.4.2. Imágenes <i>SMASH</i> y <i>SENSE</i>	26

CAPÍTULO 2. ANTENAS DE RF PARA SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNÉTICA	28
2.1 Antenas de superficie y volumen	29
2.1.1 Convencionales	29
2.1.2 En cuadratura (polarización circular)	31
2.1.3 Arreglos en fase	32
2.1.4 Antenas multimodales	34
2.1.5 Antena <i>PERES</i> (<i>Petal Resonator</i>)	35
CAPÍTULO 3. COCIENTE SEÑAL A RUIDO DE UNA ANTENA SUPERFICIAL TIPO MAGNETRÓN	36
3.1. Enfoques considerados en <i>IRM</i> para calcular el <i>Cociente Señal a Ruido</i> de una <i>Antena de RF</i>	36
3.2. Cociente Señal a Ruido de una antena superficial	37
3.2.1. <i>CSR</i> de una antena superficial tipo magnetrón	39
3.2.2. <i>CSR</i> de una espira circular	51
3.2.3. Resultados del cálculo del <i>CSR</i>	52
CAPÍTULO 4. COMPARACIÓN TEÓRICA DEL DESEMPEÑO DE LAS ANTENAS MAGNETRÓN Y CIRCULAR PARA LA SECUENCIA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES <i>SENSE</i>	56
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	59
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62
APÉNDICE A	68
APÉNDICE B	71
APÉNDICE C	72

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Precesión del momento magnético nuclear μ en presencia de un campo magnético intenso B_0 en la dirección z	2
Figura 1.2. Distribución de momentos magnéticos en un sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ colocado en un campo magnético B_0 en la dirección z	4
Figura 1.3. Representación esquemática en el sistema del laboratorio de la aparición de la magnetización en el plano xy por la aplicación del campo magnético B_1 . La magnetización “se inclina” y precede alrededor del campo B_{eff}	9
Figura 1.4. Excitación y relajación de un sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ para <i>IRM</i>	10
Figura 1.5. Principio de reciprocidad	12
Figura 1.6. Señal <i>DLI</i> después de aplicar un pulso de excitación	13
Figura 1.7. Puntos del espacio- k con algunas trayectorias del origen O a un punto arbitrario P	14
Figura 1.8. Diferentes maneras de escanear el espacio- k : a) <i>retroproyección</i> , b) <i>2DTF</i> , c) <i>EPI</i> , d) <i>Blipped-EPI</i> , e) <i>Espiral-EPI</i> , f) <i>Espiral Cuadrada-EPI</i> ...	15
Figura 1.9. Selección de la rebanada en la dirección z	16
Figura 1.10 Señales localizadas de una muestra unidimensional hipotética en la presencia de un gradiente de codificación en frecuencia	17
Figura 1.11. Señales codificadas en fase de una muestra unidimensional hipotética. Note que la codificación en fase es antecedida por las señales de una pre-codificación en frecuencia durante un período de tiempo corto τ_x	18
Figura 1.12. Señal <i>DLI</i> y su eco para la secuencia eco-espín (campo magnético de <i>RF</i> [90°] - τ - campo magnético de <i>RF</i> [180°])	20

Figura 1.13. Secuencia saturación-recuperación	21
Figura 1.14. Secuencia inversión-recuperación	21
Figura 1.15. Secuencia para generar una imagen axial con codificación en fase en la dirección y , y codificación en frecuencia en la dirección x	22
Figura 1.16. Secuencia eco-gradiente genérica	23
Figura 1.17. Secuencia <i>CPMG</i>	23
Figura 1.18. Secuencia <i>FSE</i> que genera 4 ecos de <i>RF</i> después de un campo magnético de <i>RF</i> [90°]. Estos ecos se codifican individualmente para producir 8 líneas de datos en el espacio- k	24
Figura 1.19. Una secuencia <i>EPI</i> con un gradiente de codificación en fase negativo y un gradiente de codificación en frecuencia alternado	26
Figura 2.1. Formas de representar una antena simple mediante un circuito <i>LRC</i>	29
Figura 2.2. Antenas simples con diferentes geometrías: a) antena cuadrada; b) bobina de <i>Helmholtz</i> ; c) solenoide; d) antena en forma de silla de montar; e) antena en forma de mariposa	31
Figura 2.3. Configuración de antenas en cuadratura	32
Figura 2.4. Arreglo en fase de antenas de <i>RF</i> : a) lineal; b) superficial	33
Figura 2.5. Arreglo de N antenas con la señal de salida corrida en fase. Las salidas son sumadas a través de un conjunto de transformadores	33
Figura 2.6. Diferentes configuraciones de antenas para las secuencias <i>SMASH</i> y <i>SENSE</i> : a) arreglo de 5 antenas puestas alrededor de un maniquí cilíndrico; b) arreglo de 2 antenas circulares colocadas lateralmente para imágenes cerebrales; c) imágenes cardíacas con el mismo arreglo de a)	34
Figura 2.7. Antena en forma de jaula de pájaro: a) para altas frecuencias; b) para bajas frecuencias	35

Figura 2.8. Antena <i>PERES</i>	35
Figura 3.1. En lugar de usar integrales de línea sobre la espira conductora, el método de <i>Wang et al.</i> propone usar integrales de superficie sobre espiras infinitesimales con campo magnético y potencial magnético conocidos	37
Figura 3.2. Antena superficial tipo magnetrón con 2-ranuras	39
Figura 3.3. Arreglo geométrico para el cálculo de B_1 y A en un punto de observación r debido a un elemento diferencial de antena dS' en r'	40
Figura 3.4. Distintas regiones en una antena magnetrón: Las zonas en rojo son regiones de la antena sin ranura, las zonas en azul son regiones de la antena con ranura, y las zonas en amarillo son las ranuras	43
Figura 3.5. Espira circular	52
Figura 3.6. <i>CSR</i> de una espira circular de radio $b = 0.06m$ calculado por el método de <i>Wang et al.</i> (línea continua) y por el método que se propone en este trabajo usando series de polinomios de <i>Legendre</i> (línea discontinua)	54
Figura 3.7. <i>CSRcir</i> (línea negra), <i>CSR2</i> (línea rosa), <i>CSR3</i> (línea amarilla), <i>CSR4</i> (línea roja), <i>CSR5</i> (línea azul cielo), <i>CSR6</i> (línea azul rey), <i>CSR7</i> (línea violeta), <i>CSR8</i> (línea verde)	55
Figura 3.8. Mejoramiento del <i>CSR2</i> (línea rosa), <i>CSR3</i> (línea amarilla), <i>CSR4</i> (línea roja), <i>CSR5</i> (línea azul cielo), <i>CSR6</i> (línea azul rey), <i>CSR7</i> (línea violeta), <i>CSR8</i> (línea verde) comparado con el <i>CSRcir</i>	55
Figura 4.1. Arreglo de antenas circulares en paralelo sobre un maniquí de forma esférica. z_1 y z_2 son las distancias de la antena 1 y la antena 2 al centro de la esfera, respectivamente. Con estas distancias es posible definir el radio fraccional como z_1/z_2	56
Figura 4.2. <i>gcir</i> (línea negra), <i>gmag2</i> (línea rosa), <i>gmag3</i> (línea amarilla), <i>gmag4</i> (línea roja), <i>gmag5</i> (línea azul cielo), <i>gmag6</i> (línea azul rey), <i>gmag7</i> (línea violeta), <i>gmag8</i> (línea verde)	57

Figura 4.3. <i>mejmag2</i> (línea rosa), <i>mejmag3</i> (línea amarilla), <i>mejmag4</i> (línea roja), <i>mejmag5</i> (línea azul cielo), <i>mejmag6</i> (línea azul rey), <i>mejmag7</i> (línea violeta), <i>mejmag8</i> (línea verde)	58
Figura A.1. Dimensiones y distribución de capacitancias de la antena circular plana construida en el laboratorio de procesamiento digital de señales e imágenes médicas	68
Figura A.2. Pico de resonancia de la antena	69
Figura A.3. Carta Smith del pico de resonancia	70
Figura B.1. Prototipos de antenas superficiales tipo magnetrón con 2, 3, 7 y 8 ranuras en forma de arcos circulares igualmente espaciados	71
Figura B.2. Simulación del campo eléctrico producido por antenas superficiales tipo magnetrón con 4, 6 y 8 ranuras	71

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Números cuánticos de espín de algunos núcleos	2
Tabla 1.2. Reglas para determinar el número cuántico I de un núcleo	2
Tabla 1.3. Ecuación de <i>Bloch</i> en los sistemas laboratorio y <i>Larmor</i> para diferentes procesos	8
Tabla 2.1. Características físicas de antenas de superficie y volumen simples (So 86)	30
Tabla C1. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una espira circular de radio $b = 0.06 m$	73
Tabla C2. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una antena superficial tipo magnetrón con n (2-5)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 <i>radianes</i> , respectivamente	74
Tabla C3. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una antena superficial tipo magnetrón con n (6-8)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 <i>radianes</i> , respectivamente	75
Tabla C4. Cociente señal a ruido calculado con los valores de las tablas II y III para una antena magnetrón con n (2-5)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 <i>radianes</i> , respectivamente	76
Tabla C5. Cociente señal a ruido calculado con los valores de las tablas II y III para una antena magnetrón con n (6-8)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 <i>radianes</i> , respectivamente	77

OBJETIVOS: Determinar una expresión matemática para calcular el cociente señal a ruido de una antena tipo magnetrón usando la teoría clásica del electromagnetismo; y demostrar que este cociente supera el valor del cociente señal a ruido de una antena circular.

RESUMEN. En este trabajo se propone una antena superficial basada en el diseño del tubo magnetrón para aplicaciones en sistemas de imágenes por resonancia magnética y la antena fue llamada antena superficial con cavidades. La aproximación cuasi-estática se usó para derivar una expresión matemática del cociente señal a ruido para la antena superficial tipo magnetrón. La expresión analítica del cociente señal a ruido (*CSR*) calculada se utilizó para estudiar teóricamente este diseño de antena y compararlo con la antena circular con similares dimensiones. Los resultados de la comparación mostraron un mejoramiento máximo del *CSR* del 251% para una antena con 8 cavidades sobre la antena circular. Para validar experimentalmente este diseño de antena, se construyó un prototipo de antena con 8 cavidades y se probó en un escáner clínico de 1.5 T usando una secuencia de pulsos estándar. La compatibilidad de esta antena con sistemas de imágenes por resonancia magnética (*RM*) clínicos permite que ésta se use con secuencias de pulsos y protocolos de adquisición de imágenes convencionales. Las predicciones teóricas para el *CSR* mostraron un muy buen acuerdo con el *CSR* determinado experimentalmente. La antena superficial con cavidades supera en desempeño a la antena circular.

ABSTRACT. A surface coil based on the magnetron tube is proponed for magnetic resonance imaging applications and called the slotted surface coil. The quasi-static approach was used to derive a signal-to-noise ratio (*SNR*) expression for the slot-and-hole type coil. The analytical-calculated *SNR* expression was used to theoretically study the performance of this coil design and compare it against a circular coil with similar dimensions. Comparison results showed a maximum improvement of 251% for an 8-slot coil over the circular coil. To experimentally validate this coil design, a coil prototype with 8 slots was developed and tested on a clinical 1.5 T scanner using standard pulse sequence. Clinical magnetic resonance imager compatibility allows this coil to be used with conventional pulse sequences and imaging protocols. Theoretical predictions for *SNR* showed a very good agreement with the experimentally-acquired *SNR*. The slotted surface coil outperformed the circular-shaped coil.

INTRODUCCIÓN

Un sistema clínico de resonancia magnética (*RM*) consiste fundamentalmente de un imán que produce un campo magnético estático y homogéneo, un conjunto de antenas que producen campo magnéticos lineales, un conjunto de antenas emisoras y receptoras de señales de radiofrecuencia (*RF*), una camilla con desplazamiento y una consola de control. El problema que se plantea en este trabajo está orientado hacia uno de esos elementos de los sistemas de *RM* como es el diseño de antenas emisoras y receptoras de señales de *RF*.

En imagenología por resonancia magnética (*IRM*), el *CSR* proporcionado por el transductor, en este caso la antena receptora o transmisora, es un parámetro que indica el desempeño de la antena y por lo tanto, la calidad de las imágenes obtenidas con ella. Los sistemas de resonancia magnética más recientes tienen un *CSR* mayor que los prototipos de finales de los años 70's y principios de los 80's, gracias al uso de imanes permanentes que producen campos magnéticos de mayor intensidad, y al avance en el diseño de antenas transmisoras y receptoras de *RF*. Sin embargo, las técnicas de imágenes modernas a menudo demandan muy alta resolución espacial y velocidad en la adquisición de las imágenes, por lo que se requiere que el valor del *CSR* sea el más alto posible con el fin de mejorar la calidad de imagen. Para un sistema de *RM* en particular, el usuario puede optimizar el *CSR* eligiendo apropiadamente la secuencia, la resolución espacial y la antena receptora. Por otro lado, es conocido también que el *CSR* y el cociente contraste a ruido en imágenes de humanos mejora conforme la intensidad del campo magnético estático se incrementa. Sin embargo, las ventajas de trabajar con campos magnéticos estáticos cada vez más intensos están acompañadas por un número de dificultades. Al utilizar campos magnéticos intensos se requieren potencias de la antena transmisora que podrían ocasionar quemaduras en las personas. Otro problema es que al aumentar la intensidad del campo magnético estático también se incrementa la dificultad para conseguir que este campo tenga una buena homogeneidad en una región de interés.

Finalmente, otras complicaciones se derivan de la complejidad en el diseño de las antenas de *RF* y de los requerimientos para el manejo de los gradientes del campo de *RF*.

En lo que se refiere al diseño de antenas como parte fundamental en la optimización del valor del *CSR*, en el Capítulo II se muestra una descripción detallada de las geometrías más utilizadas por los sistemas de *RM*.

Basados en algunos resultados experimentales, nosotros proponemos una *Antena Superficial* tipo *Magnetron* como un diseño que mejora el *CSR* de una antena circular (la geometría más simple y común de encontrar en los sistemas de *RM*).

CAPÍTULO 1. PRINCIPIOS BÁSICOS DE IMAGENOLÓGÍA POR RESONANCIA MAGNÉTICA

1.1. Momento magnético y campo magnético

Para comenzar a plantear los fundamentos de la *IRM*, es preciso mencionar que ésta se puede estudiar desde el punto de vista clásico o cuántico. Aunque en este trabajo hemos utilizado el enfoque clásico, existen magnitudes físicas que necesitan definirse usando la mecánica cuántica. Como punto de partida tomaremos la definición intuitiva del momento magnético de las partículas subatómicas.

El núcleo y los electrones de un átomo poseen momento angular. Desde el punto de vista de la teoría electromagnética clásica, el momento angular es una consecuencia del movimiento de cargas alrededor de un eje. En el átomo de *Bohr* por ejemplo, los electrones giran alrededor del núcleo (momento angular orbital). Estos electrones a su vez pueden verse como una carga distribuida uniformemente sobre una pequeña esfera que rota sobre su propio eje (momento angular intrínseco o espín). En el caso de los protones ocurre algo semejante. La corriente obtenida por el movimiento de las cargas en esas partículas genera pequeños campos magnéticos. En los neutrones, las cargas negativas y positivas se encuentran distribuidas de manera no uniforme. Esta distribución inhomogénea de las cargas es la responsable de que el neutrón también genere un campo magnético. Por otro lado, el movimiento de las cargas en esas partículas se puede representar por una corriente que fluye por una espira cuyo plano es perpendicular al eje de rotación de la partícula. Con esta representación podemos definir el "momento magnético" de la partícula como: el momento de un par de fuerzas (por unidad de campo magnético) ejercido sobre una espira de corriente cuando el eje de simetría axial de la espira es perpendicular a un campo magnético uniforme aplicado.

1.2. Momento magnético nuclear y espín nuclear

De acuerdo con la teoría de la mecánica cuántica, el vector de momento magnético nuclear está dado por

$$\mu = \gamma I \quad (1.1)$$

donde I es el espín nuclear definido por dos contribuciones, el espín de los protones y el espín de los neutrones; y γ (As/Kg) es una constante llamada razón giromagnética, propia de cada núcleo.

Dado el carácter vectorial del momento magnético nuclear, es preciso conocer su magnitud y su dirección. La mecánica cuántica establece que la magnitud de μ es

$$\mu = \gamma \hbar \sqrt{I(I+1)} \quad (Am^2) \quad (1.2)$$

donde \hbar es la constante de *Planck* reducida, h (6.6×10^{-34} $J-s$) dividida por 2π ; e I es el espín nuclear.

El espín nuclear I puede tomar valores enteros y semienteros, según se muestra en la tabla 1.1. El número I para un núcleo en particular se puede predecir a partir del número de protones y neutrones siguiendo las reglas que se muestran en la tabla 1.2. Un sistema de núcleos que cumplan con la condición $I \neq 0$ es llamado activo para *RMN* (resonancia magnética nuclear), pues es posible detectar una señal.

Tabla 1.1. Números cuánticos de espín de algunos núcleos.

Núcleo o partícula	I
$^{12}\text{C}, ^{16}\text{O}$	0
$^1\text{H}, ^{13}\text{C}, ^{15}\text{N}, ^{19}\text{F}, ^{29}\text{Si}, ^{31}\text{P}$	$\frac{1}{2}$
$^2\text{H}, ^{14}\text{N}$	1
$^{11}\text{B}, ^{23}\text{Na}, ^{35}\text{Cl}, ^{37}\text{Cl}$	$\frac{3}{2}$
$^{17}\text{O}, ^{27}\text{Al}$	$\frac{5}{2}$
^{10}B	3
Protones, neutrones y electrones	$\frac{1}{2}$

Tabla 1.2. Reglas para determinar el número cuántico I de un núcleo.

Número de protones	Número de neutrones	I
par	par	0
impar	impar	1, 2, 3, ...
par	impar	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
impar	par	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

1.3. Magnetización de una población de núcleos con momentos magnéticos.

La magnitud del momento magnético de un núcleo con espín diferente de cero en un sistema de ellos no se modifica en presencia de un campo magnético externo, mientras que la dirección es completamente aleatoria en la ausencia del campo debido al movimiento térmico de los núcleos que forman el sistema. Para activar el magnetismo macroscópico de este sistema, es necesario alinear los momentos magnéticos nucleares con un campo magnético intenso. Si aplicamos un campo magnético de magnitud B_0 (T) en la dirección z del sistema de coordenadas del laboratorio, es decir $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$; el vector de momento magnético nuclear $\vec{\mu}$ rotará alrededor de \vec{B}_0 (movimiento de precesión) con la frecuencia de Larmor (De 91) (figura 1.1).

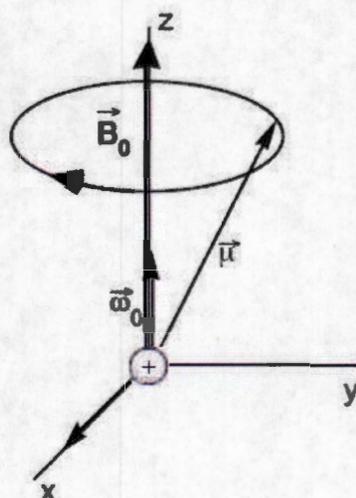


Figura 1.1. Precesión del momento magnético nuclear $\vec{\mu}$ en presencia de un campo magnético intenso \vec{B}_0 en la dirección z .

En el equilibrio termodinámico, sólo la componente longitudinal del vector de momento magnético nuclear μ contribuirá a la magnetización del sistema de núcleos, pues la componente transversal promediada sobre un período de *Larmor* se hace cero.

Recurriendo a la mecánica cuántica, la magnitud de la componente z del momento magnético nuclear es

$$\mu_z = \gamma m_I \hbar \quad (1.3)$$

donde m_I es el número cuántico magnético de espín.

Para núcleos con espín diferente de cero, m_I toma el siguiente conjunto de $(2I+1)$ valores: $m_I = -I, -I+1, \dots, I$, que corresponden a las $(2I+1)$ posibles orientaciones para μ respecto a la dirección del campo magnético externo.

Con el fin de describir el comportamiento colectivo de un sistema de núcleos con espín diferente de cero, consideremos el vector de magnetización macroscópico M que se define como el momento magnético por unidad de volumen del sistema. Sumemos vectorialmente todos los momentos magnéticos microscópicos en el volumen V_s del sistema. Sea μ_n el momento magnético del n -ésimo núcleo, entonces

$$M = \frac{1}{V_s} \sum_{n=1}^{N_s} \mu_n \quad (A/m) \quad (1.4)$$

donde N_s es el número total de núcleos en el sistema.

Cuando un sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ se expone a un campo magnético externo B_0 , μ_n toma una de las dos posibles orientaciones respecto al eje z (figura 1.2). Los núcleos con momentos magnéticos nucleares en distintas orientaciones tienen diferente energía de interacción con el campo magnético externo B_0 . La energía del núcleo está dada por

$$E = -\mu \cdot B_0 = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar m_I B_0 \quad (J \text{ o } eV) \quad (1.5)$$

Para espines paralelos al campo magnético aplicado ($m_I = \frac{1}{2}$) se tiene,

$$E_{\uparrow} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (1.6)$$

y para espines antiparalelos al campo ($m_I = -\frac{1}{2}$),

$$E_{\downarrow} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (1.7)$$

Los valores (1.6) y (1.7) para la energía indican que el estado de espín paralelo al campo magnético externo (espín arriba) es el estado de menor energía, mientras que el estado de espín antiparalelo al campo (espín abajo) es el estado de mayor energía.

La diferencia de energía entre los dos estados está dada por

$$\Delta E = E_{\downarrow} - E_{\uparrow} = \gamma \hbar B_0 \quad (1.8)$$

A esta diferencia no nula entre los niveles de energía de los dos estados de espín se le conoce como efecto *Zeeman* (De 91).

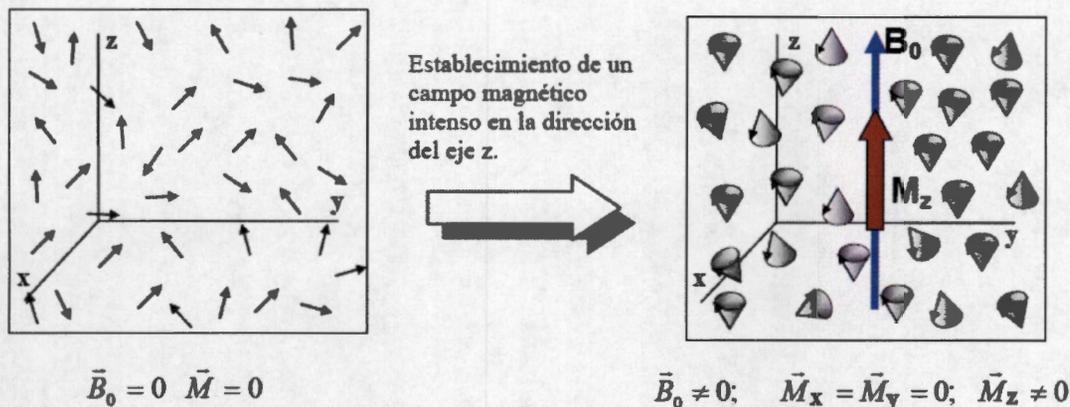


Figura 1.2. Distribución de momentos magnéticos en un sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ colocado en un campo magnético B_0 en la dirección z.

La relación entre la población de núcleos en los dos estados de espín en el sistema está relacionada con su diferencia de energía a través de la distribución de *Boltzmann*:

$$\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = \exp\left(\frac{\Delta E}{KT_s}\right) \tag{1.9}$$

donde,

N_{\uparrow} es el número de núcleos con espín hacia arriba.

N_{\downarrow} es el número de núcleos con espín hacia abajo.

T_s es la temperatura absoluta del sistema de núcleos.

$K = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, es la constante de *Boltzmann*.

Como en la práctica $\Delta E \ll KT_s$, es posible simplificar la ecuación (1.9) para obtener una relación sencilla entre la población de núcleos y el campo magnético aplicado. La simplificación consiste en expandir el lado derecho de (1.9) en serie de *Taylor* hasta el primer orden, es decir que

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\Delta E}{KT_s}\right) &\approx 1 + \frac{\Delta E}{KT_s} = 1 + \frac{\gamma \hbar B_0}{KT_s} \\ \rightarrow \frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} &\approx 1 + \frac{\gamma \hbar B_0}{KT_s} \end{aligned} \tag{1.10}$$

y

$$N_s = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$$

$$\rightarrow N_{\uparrow} - N_{\downarrow} \approx N_s \frac{\gamma \hbar B_0}{2KT_s} \quad (1.11)$$

La ecuación (1.11) indica que hay una fracción muy pequeña $\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2KT_s}\right)$ de núcleos en el estado de menor energía que excede a la población de núcleos en el estado de mayor energía. La distribución desigual de núcleos entre los dos estados ocurre porque un núcleo en particular prefiere tomar el estado con mayor estabilidad (estado de mínima energía). Aunque la diferencia de poblaciones es muy pequeña entre los dos estados de energía, el sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ genera un vector de magnetización M . Tal sistema se dice que está magnetizado.

Utilizando la ecuación (1.4), la magnetización resultante es

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{V_s} (M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z) = \\ &= \frac{1}{V_s} \left[\left(\sum_{n=1}^{N_s} \mu_{x,n} \right) e_x + \left(\sum_{n=1}^{N_s} \mu_{y,n} \right) e_y + \left(\sum_{n=1}^{N_s} \mu_{z,n} \right) e_z \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\mu_{x,n}$, $\mu_{y,n}$ y $\mu_{z,n}$ son las proyecciones de μ_n sobre los ejes x , y y z , respectivamente.

Los primeros dos términos de la ecuación (1.12) son cero debido a que la proyección de μ_n sobre el plano transversal tiene fase aleatoria mientras precede alrededor del eje z .

El valor de $\mu_{z,n}$ está dado por

$$\mu_{z,n} = \begin{cases} +\frac{1}{2} \gamma \hbar & \text{para un estado "espín - arriba"} \\ -\frac{1}{2} \gamma \hbar & \text{para un estado "espín - abajo"} \end{cases} \quad (1.13)$$

Sustituyendo la ecuación (1.13) en (1.12), tenemos

$$M = \frac{1}{V_s} \left(\sum_{n=1}^{N_{\uparrow}} \frac{1}{2} \gamma \hbar - \sum_{n=1}^{N_{\downarrow}} \frac{1}{2} \gamma \hbar \right) e_z = \frac{1}{2V_s} (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \gamma \hbar e_z$$

Por lo tanto en el equilibrio termodinámico, el vector de magnetización apunta hacia la dirección positiva del eje z y su magnitud es

$$M_z^0 = |M| = \frac{\gamma^2 \hbar^2 B_0 N_s}{4KT_s V_s} \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) indica que la magnitud de M es directamente proporcional a la intensidad del campo magnético externo B_0 y al número de espines total N_s . El valor N_s es característico de un sistema de núcleos y en general no se puede cambiar; por lo que, los únicos parámetros controlables son B_0 y T_s . Para un sistema de núcleos con espín diferente de cero dado, la magnitud de M se puede incrementar, aumentando B_0 o disminuyendo T_s .

En el caso de sistemas de núcleos con espín I arbitrario,

$$M_z^0 = |M| = \frac{\gamma^2 \hbar^2 B_0 N_s I(I+1)}{3KT_s V_s} \quad (1.15)$$

1.4. Resonancia Magnética Nuclear (RMN)

La frecuencia de *Larmor* de los momentos magnéticos nucleares μ de un sistema de núcleos sometido a un campo magnético estático B_0 está dada por

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (\text{Hertz}) \quad (1.16)$$

Esta frecuencia es muy importante porque es la frecuencia natural de resonancia de los núcleos en el sistema. De acuerdo con la ecuación (1.16), la frecuencia de resonancia de los núcleos depende linealmente de la intensidad del campo magnético B_0 y del valor de la razón giromagnética γ (Hertz/T). En el laboratorio se ha observado que un sistema de núcleos con espín diferente de cero específico tiene un intervalo de frecuencias de resonancia. Cada grupo de núcleos que comparten la misma frecuencia de resonancia se llama un isocrómato. Hay dos razones por las que un sistema de núcleos magnetizado tiene múltiples isocrómatos: (i) la existencia de inhomogeneidades en el campo magnético B_0 , y (ii) el efecto del corrimiento químico. Es claro de la ecuación (1.16) que cuando B_0 no es homogéneo, los núcleos con el mismo valor de γ tendrán diferentes frecuencias de *Larmor* en diferentes localizaciones espaciales del sistema. Si se conoce la inhomogeneidad de B_0 , es fácil derivar la distribución de frecuencias del sistema de núcleos. Por otro lado, debe tomarse en cuenta que cada núcleo de una molécula está rodeado por electrones orbitales que producen sus propios campos magnéticos débiles. Estos electrones orbitales apantallan al núcleo haciendo variar el campo magnético efectivo (observado por el núcleo) con la posición del núcleo en la molécula (ecuación 1.17).

$$\hat{B}_0 = B_0(1 - \delta) \quad (1.17)$$

donde δ es una constante de apantallamiento que puede tomar valores tanto positivos como negativos.

Basados en la relación de *Larmor* (ecuación (1.16)), la frecuencia de resonancia para un núcleo será ahora

$$\hat{\omega} = \omega_0 - \Delta\omega = \omega_0(1 - \delta) \quad (1.18)$$

donde $\Delta\omega = \omega_0\delta$

En la ecuación (1.18) se observa que aún cuando B_0 sea perfectamente homogéneo, la frecuencia de resonancia de los núcleos en diferentes ambientes químicos tendrá un corrimiento relativo a la frecuencia de resonancia de un núcleo aislado. El corrimiento en la frecuencia $\Delta\omega$ depende de la intensidad del campo magnético B_0 y de la constante de apantallamiento δ . El valor de δ es muy pequeño, usualmente del orden de unas pocas partes por millón (*ppm*) y depende del ambiente químico local que rodea al núcleo.

Ahora bien, cuando un sistema de núcleos magnetizado se perturba con un campo magnético oscilante B_1 (campo magnético de radiofrecuencia (*RF*)) perpendicular al campo magnético B_0 , el sistema entrará en resonancia sólo si B_1 rota en el plano transversal con la misma frecuencia de los espines que preceden. La energía del campo de *RF* está definida por la cuantización de la energía de *Planck* como

$$E_{rf} = \hbar\omega_{rf}$$

Para inducir una transición coherente desde un estado de energía a otro de los núcleos en el sistema, la energía de la radiación incidente debe ser igual a la diferencia de energía ΔE entre los estados de energía adyacentes del núcleo, es decir,

Si $\hbar\omega_{rf} = \Delta E = \hbar\gamma B_0$, entonces

$$\omega_{rf} = \omega_0 \tag{1.19}$$

La ecuación (1.19) se conoce como la condición de resonancia.

1.5. Relajación y la señal de Resonancia Magnética (*RM*)

Si un sistema de núcleos magnetizado con magnetización M se perturba con un campo magnético de *RF*, B_1 , la variación de M con el tiempo es un comportamiento que se desea conocer (figura 1.3). Para obtener $\frac{dM}{dt}$ es suficiente recordar que el valor esperado de cualquier variable en mecánica cuántica satisface las ecuaciones del movimiento clásicas; además que, el momento angular y el momento magnético de cada núcleo son paralelos entre sí.

En mecánica clásica, la variación de M con el tiempo está descrita cuantitativamente por la ecuación de *Bloch* (Bl 46). En el contexto de *RMN*, la ecuación de *Bloch* toma la siguiente forma general en el marco de referencia del laboratorio (sistema inercial):

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_{eff} + \left\{ -\frac{M_x e_x + M_y e_y}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) e_z}{T_1} \right\} \tag{1.20}$$

proceso de relajación

y en el marco de referencia de *Larmor* (sistema no inercial):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_{eff} + \left\{ -\frac{M_x e_x + M_y e_y}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) e_z}{T_1} \right\}$$

proceso de relajación

(1.21)

Las ecuaciones (1.20) y (1.21) toman distintas formas para diferentes procesos según se muestra en la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Ecuación de *Bloch* en los sistemas laboratorio y *Larmor* para diferentes procesos.

Proceso	Sistema del laboratorio	Sistema de Larmor
equilibrio dinámico	$\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B}_0$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_0$	$\mathbf{B}_{eff} = (B_0 - \omega_0 / \gamma) e_z = 0$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0$
excitación	$\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)$	$\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B}_1$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_1$
relajación	$\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B}_0$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}_0 +$ $\left\{ -\frac{M_x e_x + M_y e_y}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) e_z}{T_1} \right\}$	$\mathbf{B}_{eff} = 0$ $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \left\{ -\frac{M_x e_x + M_y e_y}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) e_z}{T_1} \right\}$

Después de que el sistema ha sido perturbado de su estado de equilibrio termodinámico por un campo magnético \mathbf{B}_1 , el sistema retornará a su estado inicial en un tiempo finito. La precesión de \mathbf{M} alrededor de \mathbf{B}_0 en el estado de equilibrio se conoce como precesión libre. Cuando el sistema ha alcanzado este estado, la magnetización longitudinal conocida como relajación longitudinal M_z se recupera y la magnetización transversal llamada relajación transversal $M_{x,y}$ desaparece. Ambos procesos de relajación son causados por la existencia de campos magnéticos microscópicos variables en el tiempo (resultado de los movimientos térmicos presentes en el sistema) que rodean un núcleo. La relajación longitudinal es producto de la interacción de los espines con la red cristalina que los contiene; mientras que, la relajación transversal es causada por las interacciones espín-espín.

En el sistema de *Larmor* tenemos que las componentes de la ecuación de *Bloch* durante el período de relajación quedan definidas por

$$\begin{cases} \frac{dM_{x'y'}}{dt} = -\frac{M_{x'y'}}{T_2} \\ \frac{dM_{z'}}{dt} = -\frac{M_{z'} - M_z^0}{T_1} \end{cases} \quad (1.22)$$

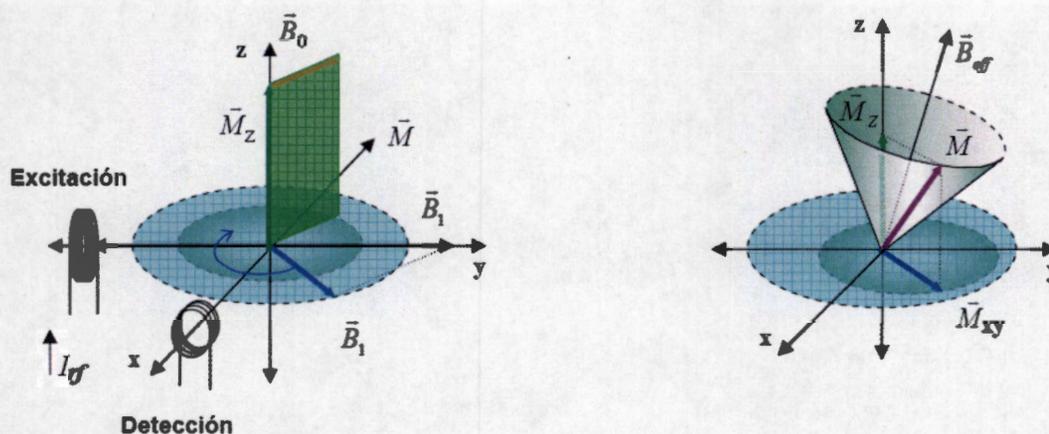


Figura 1.3. Representación esquemática en el sistema del laboratorio de la aparición de la magnetización en el plano xy por la aplicación del campo magnético B_1 . La magnetización “se inclina” y precesita alrededor del campo B_{eff} .

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1.22), obtenemos la evolución temporal de las componentes de la magnetización longitudinal y transversal:

$$\begin{cases} M_{x'y'}(t) = M_{x'y'}(0_+)e^{-t/T_2} \end{cases} \quad (1.23a)$$

$$\begin{cases} M_{z'}(t) = M_z^0(1 - e^{-t/T_1}) + M_{z'}(0_+)e^{-t/T_1} \end{cases} \quad (1.23b)$$

donde $M_{x'y'}(0_+)$ y $M_{z'}(0_+)$ son las magnetizaciones en el plano transversal y el eje z' , respectivamente, después de aplicar el campo magnético B_1 ; M_z^0 es la magnetización longitudinal en el equilibrio termodinámico y; T_1 y T_2 son los tiempos de relajación longitudinal y transversal, respectivamente.

Si sustituimos $t = T_2$ en la ecuación (1.23a) y $t = T_1$ en la ecuación (1.23b) se obtiene que

$$\begin{cases} M_{xy}(T_2) \approx 37\%M_{xy}(0_+) & (1.24a) \\ M_z(T_1) \approx 63\%M_z^0 & (1.24b) \end{cases}$$

Los valores de T_1 y T_2 dependen de la composición del tejido, la estructura y los alrededores. Para un sistema de núcleos magnetizado, se sabe experimentalmente que la relajación debida a las interacciones de los espines con la red cristalina que los contiene ocurre de manera más lenta que la relajación debida a las interacciones espín-espín, es decir que, $T_1 > T_2$.

En la figura 1.4 se ilustran los procesos de excitación y relajación de un sistema de núcleos para IRM.

Supongamos que se aplica un campo magnético estático B_0 al sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ de la figura 1.4 y el sistema alcanza el equilibrio termodinámico, entonces en el sistema de Larmor:

1. El vector de magnetización M apunta en la dirección de B_0 .
2. Luego, si aplicamos un campo magnético de RF, B_1 , durante un tiempo corto, M se encontrará en el plano transversal inmediatamente después de la perturbación.
3. Una vez que el campo magnético B_1 sea interrumpido, los momentos magnéticos nucleares μ_n que componen al vector de magnetización M comenzarán a desfasarse en el plano XY ocasionando que M pierda componente transversal M_{xy} (relajación transversal).

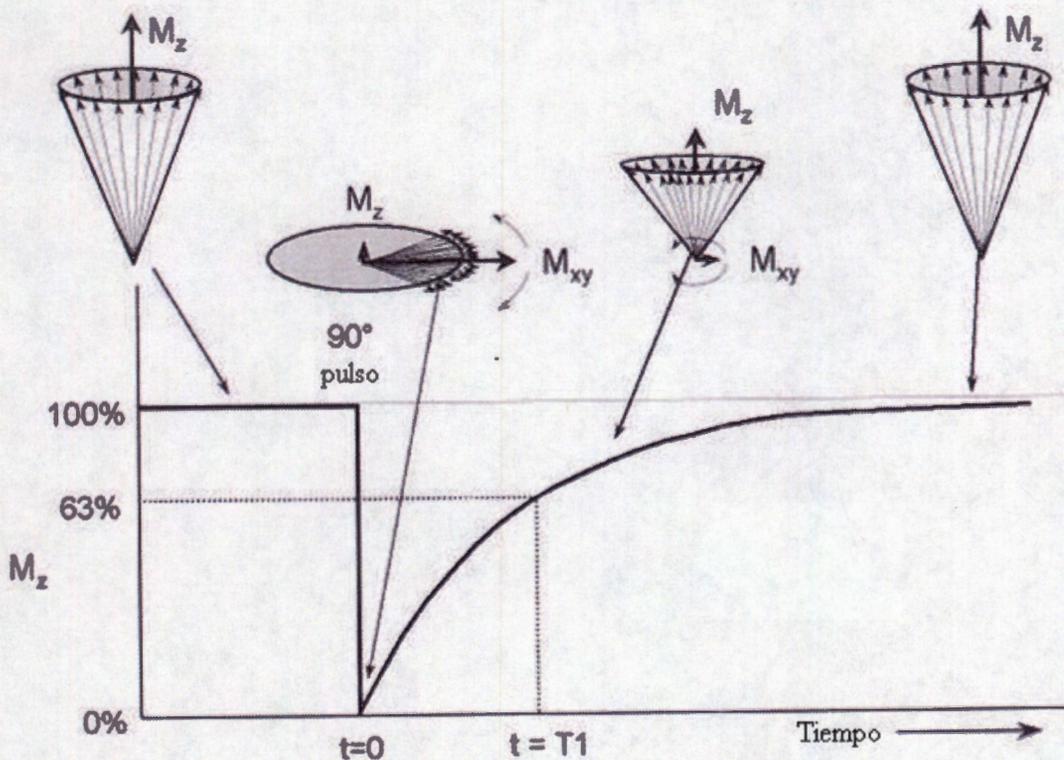


Figura 1.4. Excitación y relajación de un sistema de núcleos con espín igual a $\frac{1}{2}$ para IRM.

4. Los momentos magnéticos nucleares μ_n continuarán desfasándose y la componente transversal M_{xy} del vector de magnetización llegará a tener la magnitud dada en (1.24a). Simultáneamente, el vector de magnetización M ganará componente longitudinal M_z (relajación longitudinal).
5. En este paso, los momentos magnéticos nucleares μ_n se han desfasado completamente.
6. La componente z del vector de magnetización M_z continúa aumentando y llega a tomar el valor dado en (1.24b).
7. El paso 6 continúa hasta que el vector de magnetización M recupera su estado original (paso 1).

El punto importante de este resultado es que ambos, el decaimiento de la magnetización transversal y la recuperación de la magnetización longitudinal inmediatamente después de haber interrumpido el campo magnético B_1 siguen un comportamiento exponencial. La variación en el tiempo de la magnitud de M que precede con la frecuencia de *Larmor* produce la señal de *RM*. Esta señal puede detectarse con una antena de *RF*. El principio de detección de esta señal se basa en la ley de la inducción de *Faraday* y el principio de reciprocidad (Ho 78, Ho 00, In 98). El principio de reciprocidad establece que si una corriente unitaria fluye en una espira de alambre, esta corriente genera un campo magnético B_1 que es mayor en A que en B (cuando el punto A es más cercano a la espira que B). Igualmente, un imán rotando en A induce en la espira un voltaje V que es considerablemente mayor que el inducido por el mismo imán colocado en el punto B . Esta correspondencia entre V y B_1 se conoce como **principio de reciprocidad**. La espira de corriente se puede considerar como una red con muchas espiras pequeñas de área ds cargando corrientes unitarias (pequeños dipolos magnéticos) (figura 1.5). En *IRM*, la señal producida por el sistema de núcleos magnetizado es un voltaje inducido V en la antena de *RF*. Este voltaje es producto de la rapidez de flujo Φ_B (a través de la antena conductora) del campo magnético que se genera por la precesión del vector de magnetización M en el sistema de núcleos. Una expresión para el voltaje inducido en una antena es

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{V}) \quad \text{ley de Faraday-Lenz}$$

Sin embargo, también es posible definir V en términos de la magnetización. Una configuración común es utilizar la misma antena de *RF* para transmitir un campo magnético B_1 al sistema de núcleos y para recibir una señal de la magnetización. Supongamos que B_1 es un campo magnético producido por una corriente I que circula por una antena. La sensibilidad de la antena se puede definir como

$$S = \frac{B_1}{I}.$$

Luego, de acuerdo con el principio de reciprocidad, el diferencial de voltaje producido en la antena por magnetización en un elemento de volumen dV_s del sistema de núcleos se puede escribir como

$$dV = -S \cdot \frac{\partial M(r,t)}{\partial t} dV_s \quad (1.25)$$

Sustituyendo S en la ecuación (1.25), el voltaje V inducido en la antena es entonces

$$V = - \int_{V_s} \frac{B_1}{I} \cdot \frac{\partial M(r,t)}{\partial t} dV_s \quad (1.26)$$

donde V_s es el volumen del sistema de núcleos magnetizado.

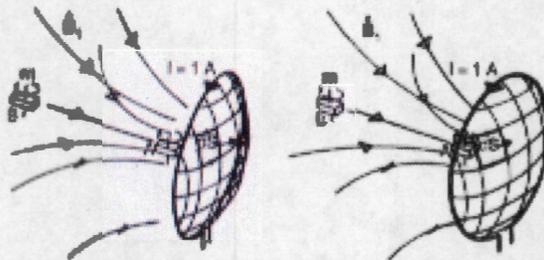


Figura 1.5. Principio de reciprocidad.

1.5.1 Señal por decaimiento libremente inducido (DLI)

Una señal *DLI* (Ho 01) es la respuesta transitoria de un sistema de núcleos magnetizado después de aplicar un campo magnético de *RF* durante un corto tiempo (figura 1.6).

La señal *DLI* que resulta de aplicar un campo magnético de *RF* que haga girar el vector de magnetización α radianes es

$$S(t) = \sin \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{-\frac{t}{T_2(\omega)}} e^{i\omega t} d\omega \quad t \geq 0 \quad (1.27)$$

donde $\rho(\omega)$ es la función de densidad espectral del sistema de núcleos y; $\alpha = \omega_1 \tau_p = \gamma B_1 \tau_p$ (τ_p : duración del campo magnético de *RF*).

La razón de decaimiento de la señal *DLI* está fuertemente ligada a la distribución espectral del sistema de núcleos. En el caso de una componente espectral, esta señal se caracteriza por la constante de decaimiento T_2 , mientras que en presencia de un campo magnético estático inhomogéneo, frecuentemente se usa una nueva constante de tiempo T_2^* .

La amplitud de la señal depende principalmente del ángulo de giro del vector de magnetización, del total de núcleos en la muestra, y de la magnitud del campo magnético estático. La duración de la señal depende del grado de inhomogeneidad del campo magnético estático.

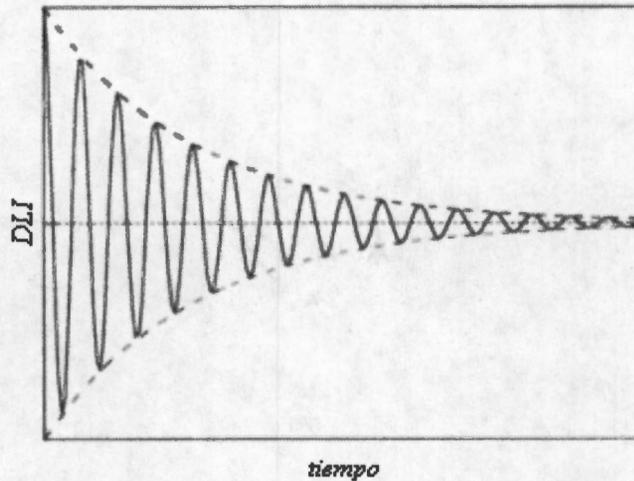


Figura 1.6. Señal *DLI* después de aplicar un pulso de excitación.

1.6 Concepto del espacio-*k*

1.6.1 Definición y propiedades del espacio-*k*

La selección de la letra “*k*” para representar el espacio de codificación de las señales de *RM* debe su nombre a los físicos y matemáticos. Ellos han usado la letra “*k*” para definir la frecuencia espacial en ecuaciones que describen la propagación de la luz, el sonido, o las ondas de radio. La frecuencia espacial *k* es la magnitud del vector de propagación “*k*” que tiene tres componentes, k_x , k_y y k_z , y sus unidades son ciclos/metro. Estas tres componentes son coordenadas que definen un dominio llamado “espacio” al que se conoce como espacio-*k*.

El espacio-*k* en el contexto de *RM* cumple la función de una lente en óptica (Me 95). En óptica, la imagen se forma después de dos pasos. En el primero, la luz compuesta de diferentes frecuencias espaciales ilumina un objeto, y la lente colecta la luz que dispersa el objeto. En el segundo, la lente procesa la luz (refracción de la luz) para generar la imagen. La cantidad de luz que procesa la lente se puede controlar mediante la apertura de un diafragma. La apertura del diafragma en óptica corresponde al tamaño del espacio-*k* en *RM*.

La clave para cubrir un intervalo suficientemente grande de valores de *k* es que *k* sea dependiente del tiempo *t* y de la amplitud de un gradiente de campo magnético aplicado *G* que también puede depender del tiempo (ecuación (1.28)).

$$k(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G(t') dt' \quad (1.28)$$

Cuando la magnitud del gradiente de campo magnético aplicado es constante sobre un intervalo de tiempo (0, *t*), la ecuación (1.28) se reduce a

$$k = \frac{\gamma}{2\pi} Gt \quad (1.29)$$

Por lo tanto, para obtener una distribución uniforme de puntos del espacio-*k*, sólo se necesita

Algunos ejemplos de cómo escanear el espacio- k se ilustran en la siguiente figura:

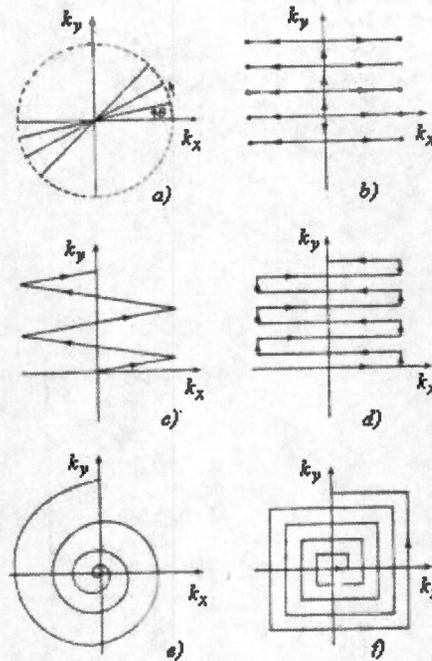


Figura 1.8. Diferentes maneras de escanear el espacio- k : a) *retroproyección*, b) *2DTF*, c) *EPI*, d) *Blipped-EPI*, e) *Espiral-EPI*, f) *Espiral Cuadrada-EPI*.

1.6.3 Selección de la rebanada

En general, las imágenes por *RM* se producen por excitación de rebanadas delgadas de la muestra usando una combinación de campos magnéticos de *RF* y gradientes de campos magnéticos. Las frecuencias de los campos magnéticos de *RF* transmitidos corresponden a las frecuencias de *Larmor* con las que preceden los momentos magnéticos de los núcleos en una rebanada, es decir que, las frecuencias de los campos magnéticos transmitidos forman un ancho de banda finito.

Definamos la dirección de la rebanada como la dirección perpendicular al plano de la rebanada. El gradiente en esta dirección se define como el gradiente de selección de rebanada. Rebanadas en las direcciones x , y y z corresponden a cortes sagital, coronal y axial del cuerpo, respectivamente. La presencia de un gradiente constante en la dirección de la rebanada significa que la frecuencia de *Larmor* de los momentos magnéticos de los núcleos que forman la muestra varía linealmente con la posición en la dirección de la rebanada. La correspondencia uno a uno entre una distancia dada en la dirección del gradiente y una frecuencia de *Larmor* particular permite sintonizar la frecuencia del campo magnético de *RF* transmitido y excitar una rebanada en una localización espacial deseada.

Si escogemos un gradiente en la dirección z ,

$G = G_x e_x + G_y e_y + G_z e_z = G_z e_z$, la frecuencia en la posición z (en *Hertz*) es

$$f(z) = f_0 + \frac{\gamma}{2\pi} G_z z \tag{1.30}$$

donde $f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$ es la frecuencia de precesión de *Larmor* en $z = 0$.

Cuando se excita una rebanada, es deseable que la excitación sea uniforme, tal que todos los momentos magnéticos de los núcleos en la rebanada tengan idéntico ángulo de giro y fase. Para excitar una rebanada infinitesimal en z_0 , el campo magnético de RF debe ser sintonizado a la frecuencia $f(z_0)$ dada por la ecuación (1.30). Los núcleos en la rebanada tendrán sus momentos magnéticos orientados en una dirección distinta a los momentos magnéticos de los núcleos fuera de esta región, los que idealmente deberían permanecer alineados con el campo B_0 .

Para excitar una rebanada de espesor finito digamos $\left[z_0 - \frac{\Delta z}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right]$, el campo magnético de RF debería tener un perfil de frecuencias Δf en el sistema de Larmor de

$$\left[\frac{\gamma}{2\pi} G_z z_0 - \frac{\gamma}{2\pi} G_z \frac{\Delta z}{2}, \frac{\gamma}{2\pi} G_z z_0 + \frac{\gamma}{2\pi} G_z \frac{\Delta z}{2} \right]$$

El ancho de banda de las frecuencias está dado por

$$\Delta f = \frac{\gamma}{2\pi} G_z \Delta z \tag{1.31}$$

En resumen, debido a la presencia del gradiente G_z , los momentos magnéticos de los núcleos en una rebanada con espesor Δz de la muestra se pueden excitar con un conjunto de frecuencias en $\Delta\omega$. Este hecho se ilustra en la figura 1.9.

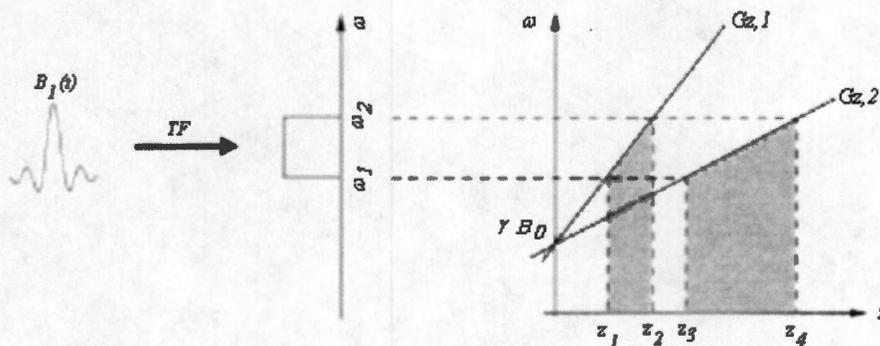


Figura 1.9. Selección de la rebanada en la dirección z .

1.6.4 Codificación en frecuencia

Una vez que el gradiente de la sección 1.6.5 selecciona la rebanada, el siguiente paso es realizar la codificación en fase o en frecuencia a través de otro gradiente en cualquiera de las direcciones x , y o z .

Supongamos que para la codificación en frecuencia, se aplica un gradiente constante en la dirección y , G_y . Asumamos por el momento que ningún otro gradiente se aplica durante este período. La magnetización acumula una fase que depende de y cuando el gradiente está

orientado en esta dirección durante un tiempo τ_y . Para un gradiente constante, la señal de codificación en frecuencia (figura 1.10) está dada por

$$S(t) = \int_{\text{muestra}} \rho(y) e^{-i\gamma G_y y t} dy \quad \tau_0 < t < \tau_0 + \tau_y \quad (1.32)$$

donde τ_0 es el tiempo de inicio de adquisición de la codificación en frecuencia y que corresponde al tiempo donde se aplica el gradiente G_y .

La codificación en frecuencia asociada a la dirección y se puede escribir en el espacio- k como

$$k_y(G_y) = \frac{\gamma}{2\pi} G_y t \quad \tau_0 < t < \tau_0 + \tau_y \quad (1.33)$$

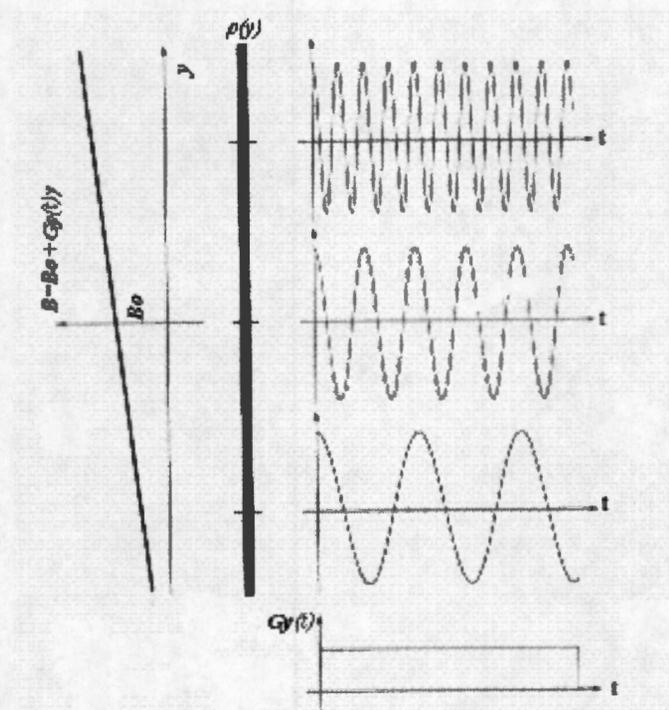


Figura 1.10 Señales localizadas de una muestra unidimensional hipotética en la presencia de un gradiente de codificación en frecuencia.

La frecuencia de *Larmor* de los momentos magnéticos de los núcleos en la dirección y es

$$\omega_{G_y}(y, t) = \gamma G_y(t) y \quad (1.34)$$

El uso de un gradiente para establecer una relación como en la ecuación (1.34), entre la posición de los núcleos en una dirección y las frecuencias de *Larmor* de los momentos magnéticos nucleares es referida a la codificación en frecuencia en esa dirección.

El objetivo de adquirir imágenes por RM de seres humanos es extraer información acerca de la distribución de los núcleos de hidrógeno en la muestra, en este caso adquiriendo la señal debida a la codificación en frecuencia de los momentos magnéticos de los núcleos de hidrógeno.

1.6.5 Codificación en fase

Ahora supongamos que para la codificación en fase se aplica un gradiente constante en la dirección x , G_x con duración τ_x .

La fase inicial de la señal (debida al gradiente aplicado) después del tiempo de adquisición τ_x de una pre-codificación en frecuencia (figura 1.11) está linealmente relacionada con la localización de la señal en la dirección x por la ecuación

$$\phi_G(x) = -\int_0^{\tau_x} dt' \omega_G(x, t') = -\gamma \int_0^{\tau_x} G_x(t') dt' = -\gamma G_x \tau_x \quad (1.35)$$

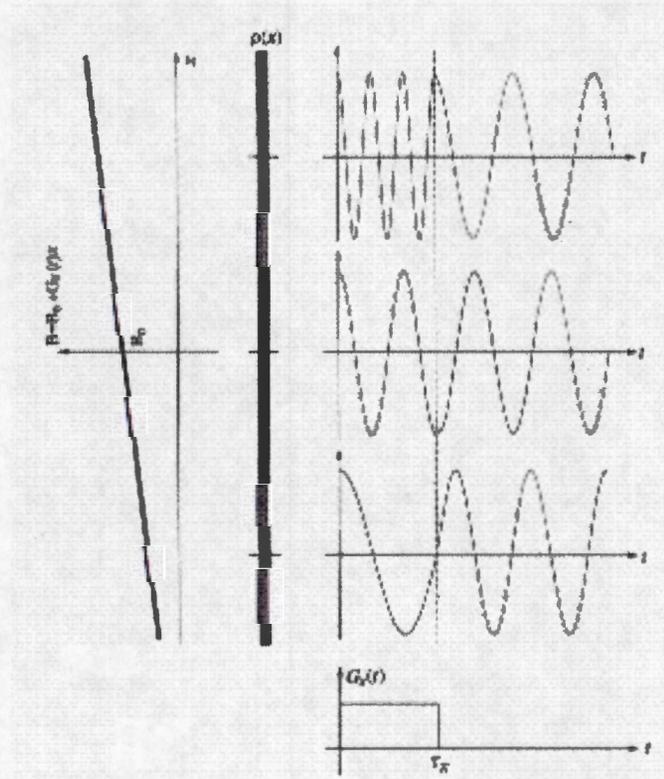


Figura 1.11. Señales codificadas en fase de una muestra unidimensional hipotética. Note que la codificación en fase es antecedida por las señales de una pre-codificación en frecuencia durante un período de tiempo corto τ_x .

En la ecuación (1.35) se asume que el gradiente se aplica después del campo magnético de B_0

en $t=0$. La ecuación (1.35) representa la señal de codificación en fase que en el espacio- k se escribe como

$$k_x(G_x) = \frac{\gamma}{2\pi} G_x \tau_x \quad (1.36)$$

1.6.6 Transformada de Fourier continua

La transformada de Fourier de una función continua consiste en mapear la función de un espacio a otro que se define como "conjugado", y viceversa a través de la transformada inversa. La ventaja de representar una función en dos dominios es importante en muchas aplicaciones. En el caso de IRM, se define una función en el espacio- k como la transformada de Fourier de la densidad de núcleos en el espacio de la posición. Esta función está directamente relacionada con la señal de RM (Ib 05a) a través de la expresión (1.37).

$$s(\mathbf{k}) = \int_{\text{muestra}} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.37)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición de un elemento de volumen en el sistema de núcleos; $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad de núcleos en \mathbf{r} ; \mathbf{k} es el vector de propagación.

En dos dimensiones, la expresión (1.37) se puede reescribir como

$$s(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (1.38)$$

1.6.7 Transformada de Fourier discreta

En IRM, la transformada de Fourier discreta, ecuación (1.39), se utiliza como una aproximación de la transformada de Fourier continua para reconstruir las imágenes. Aunque la señal de RM es continua sobre todo el espacio- k , es posible realizar un muestreo uniforme de la señal en un tiempo finito. La transformada inversa de la señal medida implica que la densidad de núcleos se puede reconstruir a partir de la señal, si la señal de RM se muestrea sobre un conjunto suficientemente grande de valores de k . Supongamos que la señal de RM se muestrea sobre un número N suficientemente grande de puntos del espacio- k , entonces la densidad de núcleos en un punto m de la muestra está dada por

$$\rho[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S[n] e^{i2\pi mn/N} \quad (1.39)$$

1.7 Contraste y secuencias básicas

El ajuste del contraste en las imágenes por RM tiene la finalidad de resaltar las diferencias de las densidades nucleares con los tiempos de relajación T_1 y T_2 de los diferentes tejidos del cuerpo humano. La duración, orden, polaridad y frecuencia de repetición de los campos magnéticos de RF y gradientes aplicados a la muestra pueden mejorar el cociente señal a ruido de las imágenes. Para éste propósito, la tecnología de IRM ha recurrido de manera importante a las secuencias eco: eco-espín y eco-gradiente.

1.7.1 Fenómeno de eco-espín

En 1950, *Hahn* (Ha 50) propuso la primera secuencia para generar una señal eco que daría una información más detallada de la relajación de los momentos magnéticos nucleares en la muestra. La secuencia eco-espín (figura 1.12) consiste en excitar la muestra con dos campos magnéticos de *RF* consecutivos separados por un tiempo τ que hagan girar los momentos magnéticos de los núcleos excitados un ángulo de 90° y 180° , respectivamente (campo magnético de *RF* [90°] y campo magnético de *RF* [180°]).

Como se observa en la figura 1.12, la característica que distingue una señal *DLI* de una señal eco es su “doble cara”, mientras la primera se debe al desfaseamiento de los momentos magnéticos nucleares, la segunda es originada por su refasamiento.

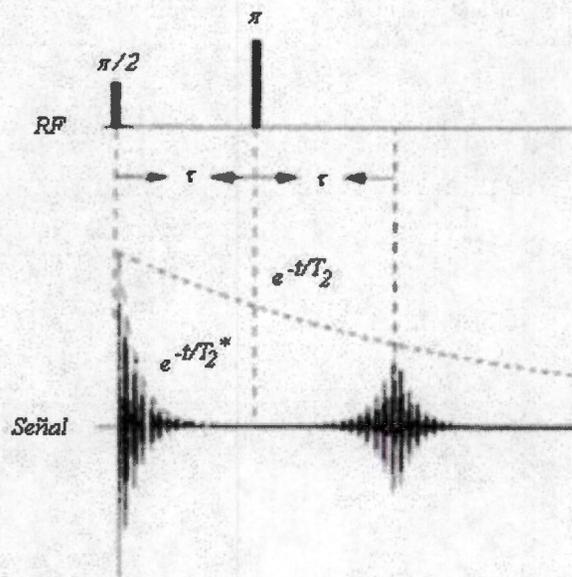


Figura 1.12. Señal *DLI* y su eco para la secuencia eco-espín (campo magnético de *RF* [90°] - τ - campo magnético de *RF* [180°]).

Una señal eco puede generarse con múltiples campos magnéticos de *RF* o con gradientes de campo magnético invertidos. Las señales que se forman son llamadas ecos de *RF*.

1.7.2 Imágenes por eco-espín básico

1.7.2.1 Secuencia saturación-recuperación (*SR*)

La secuencia de saturación-recuperación (figura 1.13) consiste en excitar la muestra con una serie de campos magnéticos de *RF* [90°] igualmente espaciados en el tiempo. El tiempo entre dos campos magnéticos de *RF* [90°] sucesivos se conoce como tiempo de repetición (T_R) y el tiempo entre el campo magnético de *RF* [90°] transmitido y el eco de *RF* se llama tiempo de eco (T_E). La secuencia se puede escribir como

$$(\text{campo magnético de } RF [90^\circ] - T_R)_N \quad (1.40)$$

donde N es el número de veces que se aplica el campo magnético de *RF* [90°].

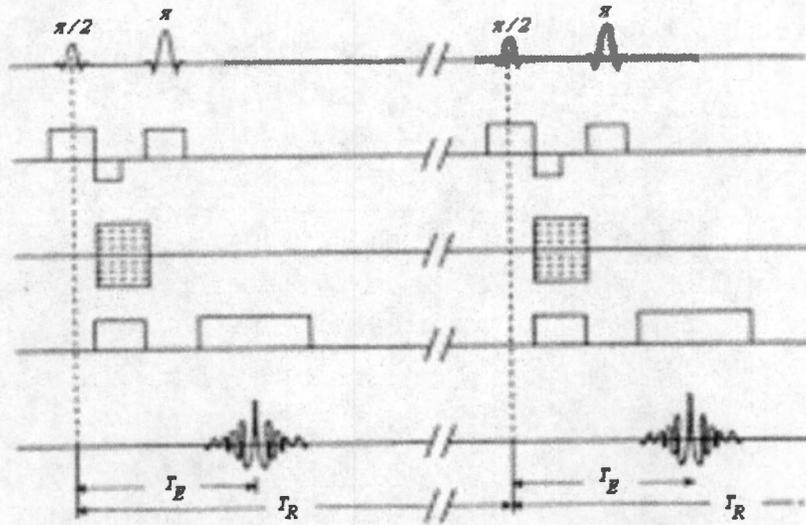


Figura 1.13. Secuencia saturación-recuperación.

1.7.2.2 Secuencia inversión-recuperación (IR)

La secuencia de inversión-recuperación (figura 1.14) es otra popular secuencia para imágenes por RM. Esta secuencia comienza con un campo magnético de RF [180°] (o pulso de inversión) y se puede escribir como

$$(\text{campo magnético de RF } [180^\circ] - T_I - \text{campo magnético de RF } [90^\circ] - T_D)_N \quad (1.41)$$

donde T_I es el tiempo de inversión y T_D el tiempo de recuperación.

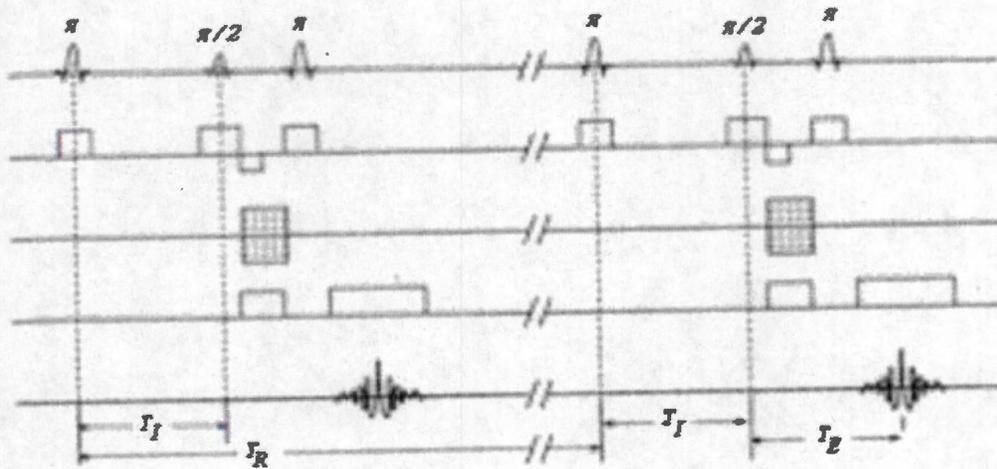


Figura 1.14. Secuencia inversión-recuperación.

Con las secuencias saturación-recuperación e inversión-recuperación se pueden generar señales ecos de RF que cubran el espacio- k simétricamente. La vía de adquisición de los datos que generan la imagen para la secuencia saturación-recuperación se muestra en la figura 1.15.

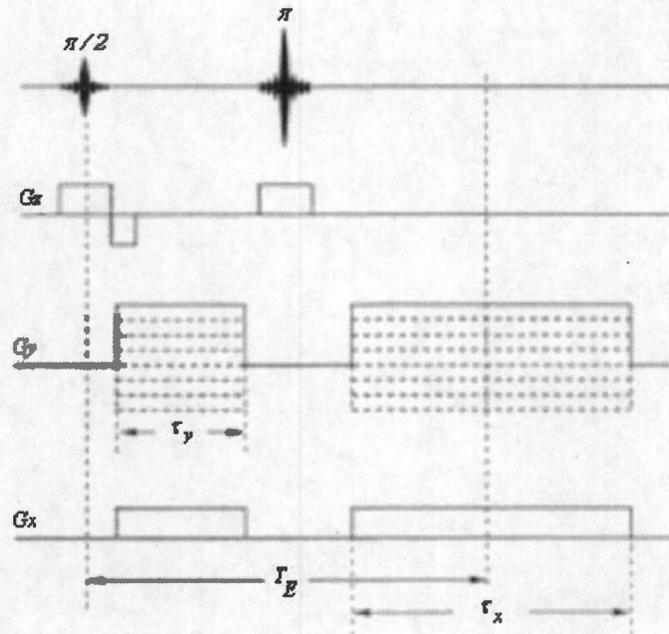


Figura 1.15. Secuencia para generar una imagen axial con codificación en fase en la dirección y , y codificación en frecuencia en la dirección x .

1.7.3 Imágenes por eco-gradiente básico.

La idea básica de adquirir imágenes con secuencias eco-gradiente es reemplazar los campos magnéticos de RF [180°] que producen el refasamiento de los momentos magnéticos nucleares por un gradiente alternado. Debido a esta modificación, la técnica puede llegar a ser muy eficiente en la adquisición de imágenes rápidas con excitaciones cuyo ángulo de giro sea pequeño.

Las secuencias eco-gradiente muestran un amplio intervalo de variaciones comparadas con las secuencias eco-espín, y como consecuencia, el contraste de las imágenes es significativamente más rico. Las secuencias eco-gradiente pueden generar imágenes ponderadas por T_1 , T_1/T_2 , T_2 , T_2^* , y por la densidad de núcleos cuando se seleccionan T_R , T_E y el ángulo de giro α , apropiadamente.

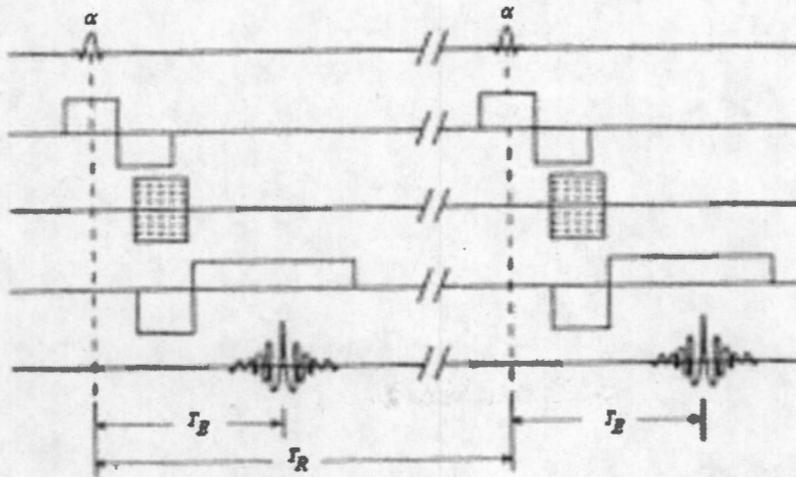


Figura 1.16. Secuencia eco-gradiente genérica.

1.7.3.1 Imágenes por eco-espín rápido.

En la figura 1.17 se muestra una secuencia convencional para adquisición de imágenes rápidas conocida como secuencia CPMG (Carr-Purcell-Meiboom-Gill). Una versión modificada de esta secuencia es la secuencia FSE (Fast Spin Echo) mostrada en la figura 1.18. Cuando un sistema de núcleos se excita con un campo magnético de RF [90°] seguido por una secuencia de campos magnéticos de RF [180°], se genera un tren de ecos de RF. En la secuencia de excitación original propuesta por Carr y Purcell en 1954 (Ca 54), todos los campos magnéticos de RF eran aplicados sobre el mismo eje. Para reducir los errores de fase acumulados por la imperfección en la repetición de los campos magnéticos de RF [180°], Meiboom y Gill (Me 58) propusieron en 1956 una modificación, los campos magnéticos de RF de refasamiento se aplicaban ahora en la dirección ortogonal al campo magnético de RF [90°].

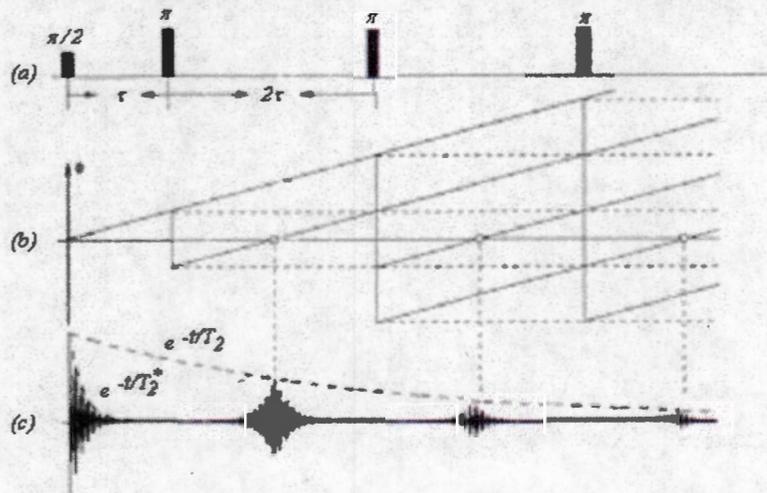


Figura 1.17. Secuencia CPMG.

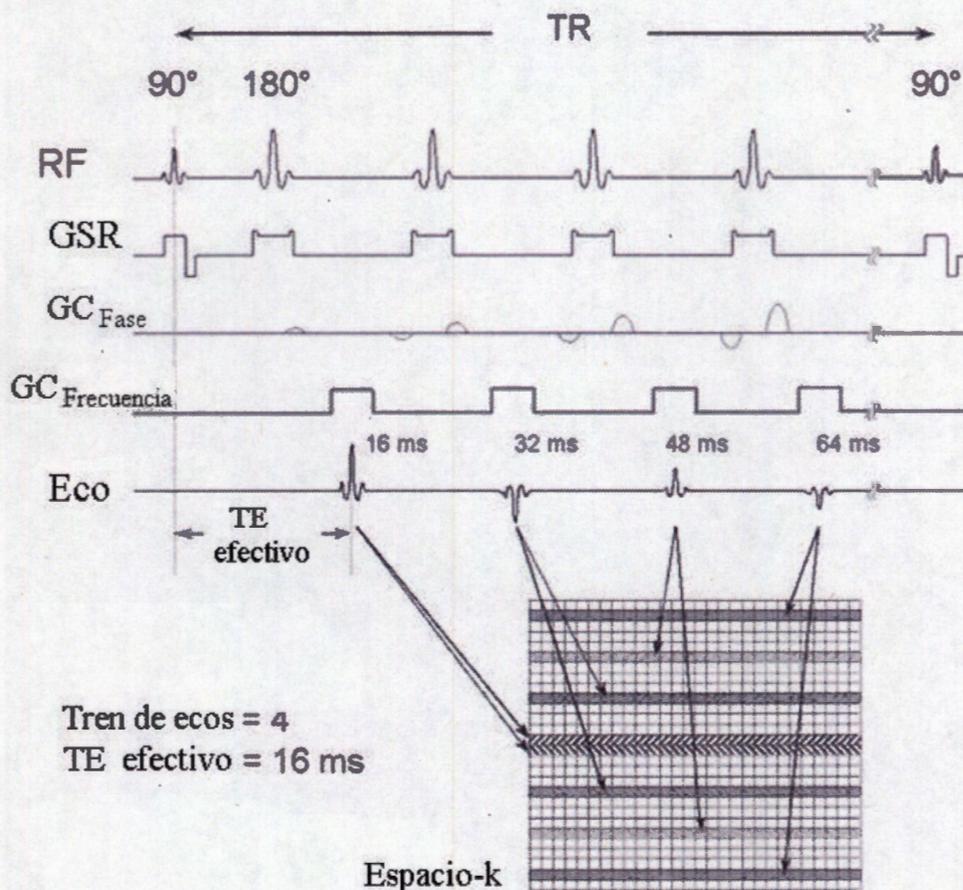


Figura 1.18. Secuencia *FSE* que genera 4 ecos de *RF* después de un campo magnético de *RF* [90°]. Estos ecos se codifican individualmente para producir 8 líneas de datos en el espacio-*k*.

1.7.3.2 Imágenes por eco-gradiente rápido.

Cuando un sistema de núcleos se excita con un tren de campos magnéticos de *RF* periódico con tiempo de repetición $T_R \ll T_2$, el sistema de núcleos alcanzará un equilibrio termodinámico o estado estacionario. Alrededor de este fenómeno se han propuesto secuencias eco-gradiente del estado estacionario. Estas secuencias se agrupan en dos clases: secuencias para el estado estacionario destruido y secuencias para el estado estacionario. Las secuencias de la primera clase consideran la magnetización longitudinal, pero destruyen (en inglés se usa el vocablo *spoil* para indicar destrucción) la magnetización transversal residual antes de que un nuevo campo magnético de *RF* sea aplicado. Las secuencias de la segunda clase permiten que ambas componentes longitudinal y transversal alcancen el estado de equilibrio termodinámico.

1.7.4 Imágenes en tiempo real.

Los sistemas para imágenes en tiempo real están compuestos de tres elementos básicos (Na 00):

- Una secuencia de pulsos que se pueda aplicar repetidamente para permitir una adquisición

continua de la imagen;

- algoritmos para reconstruir la imagen rápidamente;
- y mecanismos que permitan modificar la adquisición de la señal de *RM* después de observar la imagen reconstruida.

Los puntos anteriores se pueden resumir en “adquisición”, “reconstrucción” y “control interactivo”.

Cuanto más rápida sea la secuencia y la reconstrucción de la imagen sin que se sacrifique significativamente la resolución espacial; repetir la adquisición de una imagen, cuando ésta se considere de mala calidad, no representará un problema en cuanto al tiempo de adquisición. Esta ventaja aunque no lo parezca, es una característica deseable en la clínica, pues es muy importante mantener al paciente tranquilo durante la realización del estudio.

Las técnicas ultra rápidas de *IRM* han tenido su principal aplicación en imágenes que requieren minimizar los efectos debidos a movimientos fisiológicos involuntarios. Las imágenes del corazón, pulmones y cerebro; o del flujo vascular por ejemplo, son las regiones del cuerpo donde estas técnicas han demostrado ser de gran utilidad.

1.7.4.1 Imágenes *EPI*.

La secuencia eco-planar (*EPI*) es considerada la primera técnica de adquisición de imágenes por *RM* en tiempo real. Esta técnica fue propuesta por *Mansfield* en 1977 (Ma 88) (figura 1.19). Con esta secuencia se adquiere un conjunto completo de codificaciones bidimensionales durante el período de decaimiento libremente inducido de la señal de *RM* después de aplicar un campo magnético de *RF* al sistema de núcleos. Las secuencias eco-planares como *BEST* (*Blipped Echo-planar Single-pulse Technique*) han llegado a ser sinónimo de imágenes de un sólo disparo, aunque secuencias *EPI* multi-disparos como *FLEET* (*Fast Low-angle Excitation Echo-planar Technique*) para cubrir el espacio-*k* son también de uso común (Ma 88).

Las secuencias eco-planares deben sus bondades al uso de gradientes variables en el tiempo para cubrir el espacio-*k* transversal. Las trayectorias más comunes son: zigzag, rectilínea y espiral.

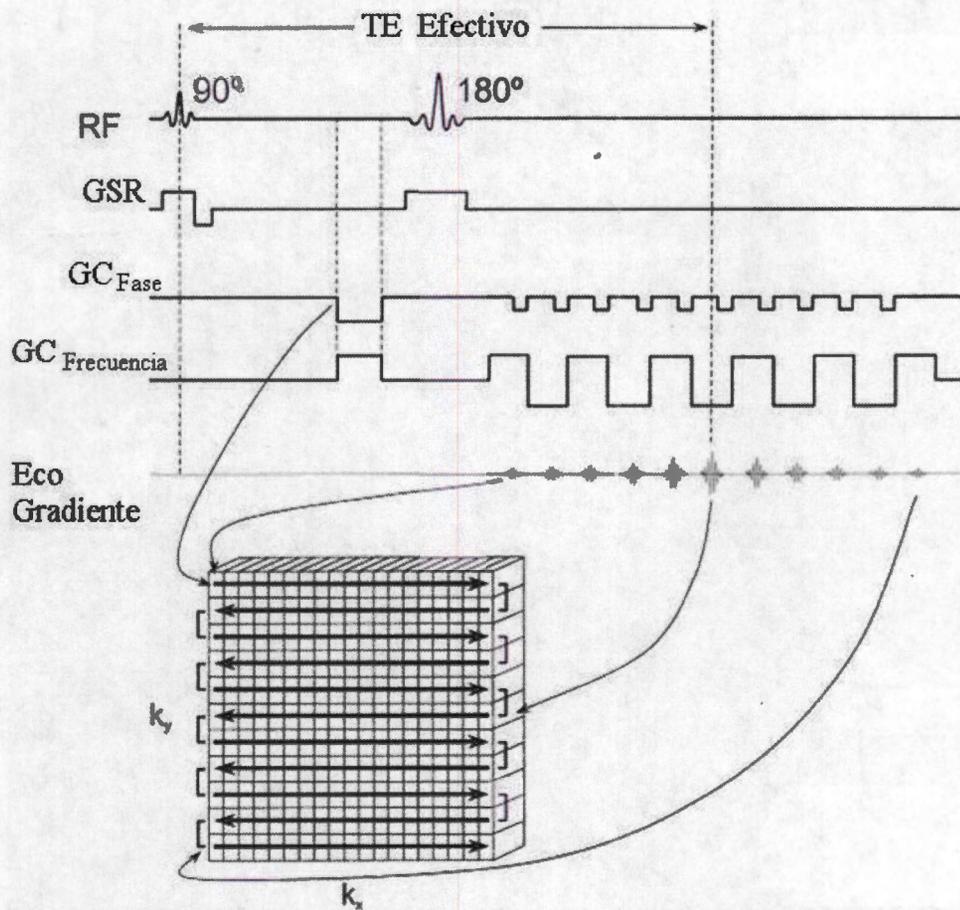


Figura 1.19. Una secuencia *EPI* con un gradiente de codificación en fase negativo y un gradiente de codificación en frecuencia alternado.

1.7.4.2. Imágenes *SMASH* y *SENSE*.

En 1999, *Sodickson et al.* (So 97) propusieron un método basado en la adquisición simultánea de armónicos espaciales conocido como *SMASH* (*Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics*). Este método permite adquirir imágenes a grandes velocidades usando un número reducido de pasos de gradiente para la codificación en fase y extraer información espacial contenida en un arreglo de antenas de *RF* (Ro 90). La técnica genera imágenes con alta resolución espacial mediante la adquisición de líneas paralelas del espacio-*k* en lugar de seguir un orden secuencial. De acuerdo con *Sodickson et al.*, las imágenes que se adquieren utilizando las técnicas convencionales: *Single Shot*, *RARE*, *HF-Burst*, *HASTE* y *EPI* revelan una buena resolución espacial sin que tenga que incrementarse la longitud del tren de ecos o el tiempo de adquisición de las imágenes. La técnica *SMASH* tiene el potencial de mejorar la calidad de las imágenes ultra-rápidas convencionales. Esta técnica permite adquirir una imagen con mayor resolución o reducir el tiempo de adquisición de una imagen para un determinado tamaño de matriz. *Sodickson* y sus colaboradores han demostrado que con *SMASH* se pueden reducir los efectos de relajación y producir imágenes con un sólo disparo. Dos años más tarde, *Pruessmann et al.* (Pr 99) propusieron otra técnica a la que llamaron *SENSE* (*Sensitivity Encoding for Fast MRI*). Esta técnica emplea la codificación de la

sensibilidad de las antenas para reconstruir la imagen. La sensibilidad de las antenas receptoras generalmente tiene un efecto de codificación complementario al método de *Fourier* con gradientes de campo magnéticos lineales. Si se conoce la sensibilidad espacial de la antena receptora, entonces es posible obtener información del origen de la señal de *RM*, lo que se puede utilizar para generar una imagen. A diferencia de la posición en el espacio de *Fourier*, la sensibilidad es una propiedad de la antena de recepción y no depende de la región de interés (*RDI*) a examinar. Para la adquisición de imágenes, *Pruessmann* y sus colaboradores han utilizado arreglos de antenas de recepción múltiple siguiendo la idea del grupo de *Roemer* (Ro 90). La técnica se ha desarrollado en combinación con las secuencias *FFE* (*Fast Field Echo*), *TSE* y *HF-EPI*. Esta técnica reduce considerablemente el tiempo de adquisición respecto a la técnica de *Fourier* estándar cuando se incrementan las distancias entre las líneas del espacio-*k* por un factor de reducción *R*. Sin embargo, las imágenes *SENSE* presentan una limitación fundamental con el *CSR*, y es que este cociente está relacionado con la raíz cuadrada del tiempo de adquisición (We_0). Esta desventaja restringe la aplicación del método a imágenes rápidas donde el *CSR* no sea un factor crítico. Por ejemplo, una aplicación promisoriosa son las imágenes en tiempo real, como en los estudios donde la respiración afecta la calidad de la imagen. Por otro lado, un efecto inherente a la codificación de sensibilidad es que el *CSR* depende de la geometría de las antenas. En términos de este cociente, una configuración de antenas óptima está caracterizada por el compromiso que existe entre la sensibilidad absoluta de cada antena, los niveles de ruido de cada monocanal, el acoplamiento entre las antenas, y las relaciones de sensibilidad geométrica de las antenas.

CAPÍTULO 2. ANTENAS DE RF PARA SISTEMAS DE RESONANCIA MAGNÉTICA

Una antena simple se puede representar a través de un circuito eléctrico constituido por una resistencia (disipador del calor), un condensador (almacén de energía eléctrica), un inductor (almacén de energía magnética) y una fuente de voltaje alterno (figura 2.1 y apéndice A). La corriente que circula por este circuito maximiza su amplitud cuando oscila con una frecuencia (frecuencia de *Larmor*) igual a la frecuencia de resonancia de la antena. Si un circuito eléctrico como éste se diseña para radiar una región lejana con una fracción grande de su potencia, se le conoce como antena en modo de transmisión; mientras que, si el circuito se diseña para almacenar energía magnética temporalmente de una región cercana con mínima radiación y disipación del calor, se le llama antena en modo de recepción. Una antena bien diseñada puede tener una alta eficiencia tanto para modo de transmisión como para recepción. Las antenas que se usan en ambos modos reciben el nombre de transceptoras.

Las antenas utilizadas en un sistema de *RM* operan con frecuencias de *Larmor* en el intervalo de las ondas de radio (antenas de *RF*), y se pueden usar en modo transmisión y/o recepción. Las imágenes y espectros por *RM* del cuerpo humano obtenidas con estas antenas son posibles gracias a nuestra composición biológica, ya que en ella podemos encontrar elementos o sus isótopos cuyo núcleo es magnetizable, condición necesaria para que el fenómeno de resonancia magnética nuclear tenga lugar. Entre esos elementos o sus isótopos podemos encontrar al: ^1H , ^2H , ^{13}C , ^{14}N , ^{17}O , ^{19}F , ^{23}Na , ^{31}P y ^{39}K . De estos, el hidrógeno es el más utilizado debido a su abundancia en el organismo (alrededor del 99.985 %) y a la intensidad de la señal que produce. Con estas bases podemos redefinir una antena de *RF* en modo de transmisión como un generador de señales de *RF* en la frecuencia de *Larmor* que se usa para excitar los núcleos de la región del cuerpo humano que se desea estudiar; o en modo de recepción como un dispositivo capaz de captar señales de *RF* emitidas por los núcleos cuyo vector de magnetización se encuentra oscilando con la frecuencia de *Larmor*. Para obtener una alta calidad en las imágenes, las antenas de *RF* deben satisfacer dos requerimientos básicos: Primero, cuando una antena de *RF* se usa en modo de transmisión en la frecuencia de *Larmor*, ésta debe producir un campo magnético en la región de interés (*RDI*), tal que los núcleos sean excitados uniformemente. Segundo, cuando una antena de *RF* se usa en modo de recepción, ésta debe tener un *CSR* alto y además debe captar una señal de *RF* con la misma ganancia en cualquier punto de la *RDI*. Cuando la antena de *RF* es usada tanto para transmisión como para recepción, la antena debe producir un campo muy homogéneo, además de tener un *CSR* alto. Atendiendo esta necesidad han surgido los más variados diseños de antenas (figura 2.2). De acuerdo con sus formas, las antenas de *RF* se pueden clasificar en dos grandes grupos. El primer grupo está compuesto por las antenas de volumen, las cuales incluyen las bobinas de *Helmholtz*, las antenas en forma de silla de montar y las antenas en forma de jaula de pájaro en las versiones pasa altas y pasa bajas. De estas antenas, las antenas "jaula de pájaro" son las más populares porque producen un campo magnético muy homogéneo sobre un volumen grande dentro de la antena. Estas antenas son a menudo usadas como antenas transceptoras. El segundo grupo está constituido por las antenas de superficie, las cuales incluyen espiras simples y antenas con múltiples espiras de varias formas. Estas antenas son usualmente mucho más pequeñas que las antenas de volumen, pero tienen un *CSR* más alto, dado que el ruido que reciben proviene de una *RDI* más pequeña. Sin embargo, el campo magnético que estas antenas generan es relativamente pobre, por lo que se utilizan principalmente como antenas

receptoras.

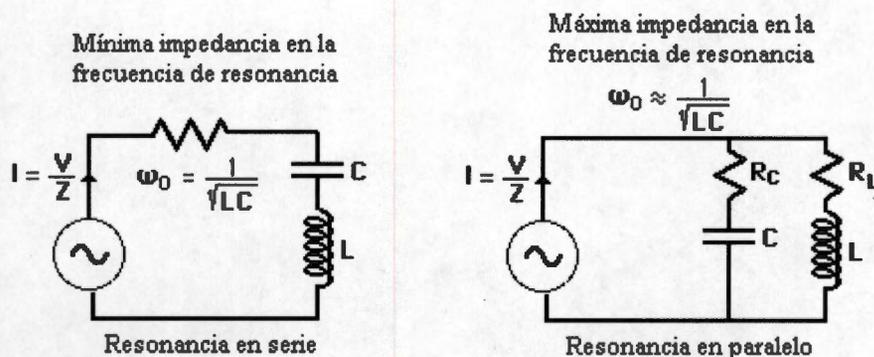


Figura 2.1. Formas de representar una antenna simple mediante un circuito *LRC*.

2.1. Antenas de superficie y volumen

2.1.1 Convencionales

En *IRM*, las antenas de superficie y volumen se diseñan para mejorar el *CSR* y la resolución en la imagen de pequeñas regiones del cuerpo humano (Re 98). En los sistemas de *RM*, como se estudió en la sección anterior, las antenas en modo de transmisión se usan para excitar los núcleos dentro de un pequeño volumen de interés localizado en el sistema vivo, y las antenas en modo de recepción, para detectar la señal de *RM* producto de la desexcitación de los núcleos. El procesamiento de estas señales tiene como finalidad generar una imagen o un espectro por *RM*. La calidad de la imagen es afectada por los siguientes factores:

1. Las dimensiones de la antena a menudo no son despreciablemente pequeñas en comparación con la longitud de onda de la señal de *RF*. Como consecuencia, se tiene una contribución considerable de los llamados "elementos distribuidos" (capacitancias intersticiales, inductancias mutuas de diferentes secciones de la antena, etc.). Estos elementos forman (junto con los elementos principales del circuito, los cables para conexiones y el circuito de entrada al preamplificador) un circuito de *RF* complejo que tiene muchas autoinductancias.
2. Los tejidos medidos usualmente tienen una conductividad eléctrica, tal que ocurren pérdidas dieléctricas y magnéticas en el material de la antena receptora. Estos efectos pueden ser tan fuertes que representen un serio problema, especialmente en frecuencias altas donde el ruido se vuelve un factor muy crítico. En *IRM*, existen dos fuentes de ruido térmico en el circuito receptor: el ruido asociado con la resistencia del alambre de la antena y, el ruido que resulta del acoplamiento entre el tejido conductor de la región del cuerpo a estudiar y la antena.
3. Por otra parte, el acoplamiento mutuo entre las antenas de recepción y de transmisión es otro factor que afecta de manera significativa. Durante el período de irradiación, este acoplamiento puede inducir una señal muy grande a la entrada del preamplificador, lo que en casos extremos puede dañar esta etapa. Un acoplamiento fuerte entre ambas antenas distorsiona la uniformidad del campo de *RF*, además que conlleva a condiciones iniciales de no-uniformidad en el plano de la imagen (determinado por la antena receptora), y como resultado, a la degradación de su

calidad. Este acoplamiento sugiere la implementación de un método para desacoplar las antenas.

Tabla 2.1. Características físicas de antenas de superficie y volumen simples (So 86).

<i>Forma de antena</i>	<i>Región de mejor sensibilidad</i>	<i>Homogeneidad de la sensibilidad espacial</i>	<i>Dirección principal del campo producido</i>	<i>Acceso a la mejor región</i>
Antena plana cuadrada.	Sobre el eje axial de la antena.	Falla.	Perpendicular al plano de la antena.	Buena.
Bobina de Helmholtz	Sobre el eje axial en el interior de la antena.	Buena.	A lo largo del eje de simetría axial.	Pobre.
Solenoides	Dentro del volumen del solenoide.	Muy buena.	A lo largo del eje de simetría axial.	Pobre, algunas veces falla.
Antena Silla de Montar	Sobre el eje axial en el interior de la antena.	Buena.	Perpendicular al eje de simetría axial.	Muy buena.
Antena Mariposa	Sobre el eje axial de la antena.	Falla.	Paralela al plano de la antena.	Buena.

Las antenas de superficie tienen la desventaja de producir campos magnéticos muy inhomogéneos (tabla 2.1). Esta limitación ha dado paso al surgimiento de diseños de antenas concéntricas que mejoren esa inhomogeneidad como alternativa adicional al uso separado de antenas de recepción y transmisión arregladas ortogonalmente (antenas en cuadratura) para minimizar las interacciones electromagnéticas. La antena transmisora se construye más grande que la receptora para asegurar que el volumen completo de la muestra se irradie uniformemente (*Styles et al. (St 85)*). La interacción eléctrica entre las dos antenas se controla usando diodos y líneas de transmisión. Este paso es difícil de realizar con antenas superficiales en el interior de una antena en forma de silla de montar más grande, ya que esta configuración es a menudo incompatible con la forma y el tamaño de la muestra.

Las antenas de superficie también son muy utilizadas en espectroscopía por *RM* [*Ac 80, Eh 06, Pe 95*]. Para pequeñas *RDI* superficiales, las antenas de superficie pequeña pueden dar un *CSR* mucho mejor que una antena de superficie grande. Sin embargo, para *RDI* 's muy profundas, las antenas con superficie mayor o que producen un campo magnético uniforme en una región más grande tienen un mejor valor del *CSR*. De acuerdo con *Lawry et al. (La 90)*, cuando la profundidad de la *RDI* es relativamente superficial, el diámetro de la antena de superficie debería ser aproximadamente igual al diámetro de la *RDI*. Para profundidades más grandes que la *RDI*, el tamaño preciso de la antena de superficie no es crucial, pero una regla razonable es escoger el radio de la antena al menos igual a la profundidad de la *RDI*.

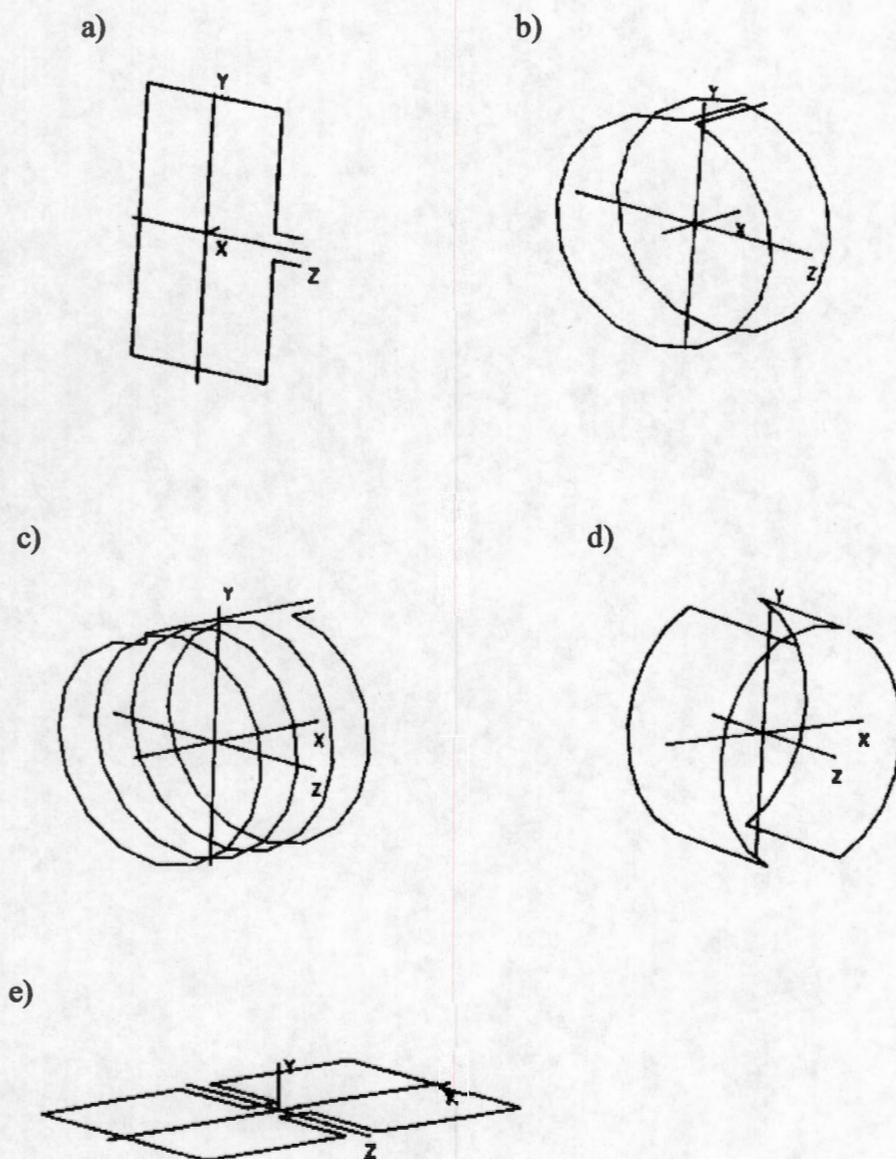


Figura 2.2. Antenas simples con diferentes geometrías: a) antena cuadrada; b) bobina de *Helmholtz*; c) solenoide; d) antena en forma de silla de montar; e) antena en forma de mariposa.

2.1.2 En cuadratura (polarización circular)

En 1985, *Glover* et al. (Gl 85) encontraron que con antenas de excitación y recepción polarizadas linealmente, las reconstrucciones de objetos uniformes tienen regiones de pobre intensidad en la imagen. Este artefacto parece provenir de los efectos de onda estacionaria dieléctrica y de corrientes espurias. Los efectos llegan a ser más severos conforme se incrementan la frecuencia de la onda de radio y el tamaño de la antena. Los resultados del grupo de *Glover* indican que cuando se emplea polarización circular para ambas antenas, de transmisión y recepción, el artefacto de intensidad en las imágenes se reduce

significativamente. Los beneficios esperados de la polarización circular sobre la polarización lineal son la reducción en la potencia de la antenna de excitación del 50%, y una ganancia de $\sqrt{2}$ en el CSR para objetos cilíndricos y humanos (Ch 83).

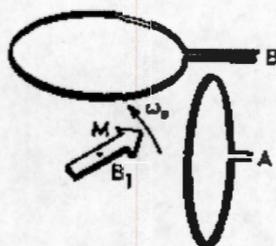


Figura 2.3. Configuración de antenas en cuadratura.

La configuración de antenas de RF en cuadratura (ver figura 2.3) puede proporcionar un mejoramiento en el CSR respecto a las antenas simples, adquiriendo la señal de forma independiente con dos antenas orientadas ortogonalmente, o equivalentemente con dos modos de vibración de la misma antena. Es decir que, cuando y sólo cuando dos antenas son ortogonales, éstas son completamente independientes y el ruido de los dos circuitos no está correlacionado. De donde se sigue que con un corrimiento de fase de 90° , las señales se pueden combinar para producir un mejoramiento en el CSR de $\sqrt{2}$ (Ch 83). Alternativamente, con un corrimiento de fase de 90° pero opuesto, estas señales se pueden cancelar para no producir señal alguna. La señal entonces se puede recuperar invirtiendo la dirección de la precesión del vector de magnetización, al invertir la dirección del campo magnético estático. Se puede demostrar que las antenas ortogonales se pueden usar para generar un campo magnético rotante, un uso altamente eficiente de la potencia de transmisión que permite ahorrar un factor de 2 en la potencia de la antena.

2.1.3 Arreglos en fase

Un método de recepción simultánea de señales de RM con un arreglo de antenas de RF traslapándose (ver figura 2.4 y 2.5) y que pueden cubrir el 100% de la región de interés ha sido descrito por Roemer et al. (Ro 90). Los arreglos pueden ser lineales y bidimensionales, y están formados por pequeñas antenas superficiales en un plano, o en una superficie cercanamente plana. En este modelo, cada antena está asociada con un conjunto de dispositivos receptores y preamplificadores independientes. Las interacciones entre las antenas cuyo campo de visión se traslapa, se pueden reducir:

a) traslapando las antenas adyacentes lo suficiente para generar una inductancia mutua de cero, esto es interacción nula; y **b)** conectando cada antena a un preamplificador con baja impedancia de entrada para eliminar la interferencia de las antenas vecinas más cercanas y las antenas vecinas más distantes.

Las señales de salida de los receptores se digitalizan, almacenan, y después de un corrimiento de fase, se combinan de una manera óptima (que depende del punto del espacio donde fue originada la señal captada por el sistema de antenas). Para producir una imagen con un valor

del *CSR* óptimo, *Roemer* y su grupo crearon un algoritmo para combinar los datos de los elementos del arreglo en fase.

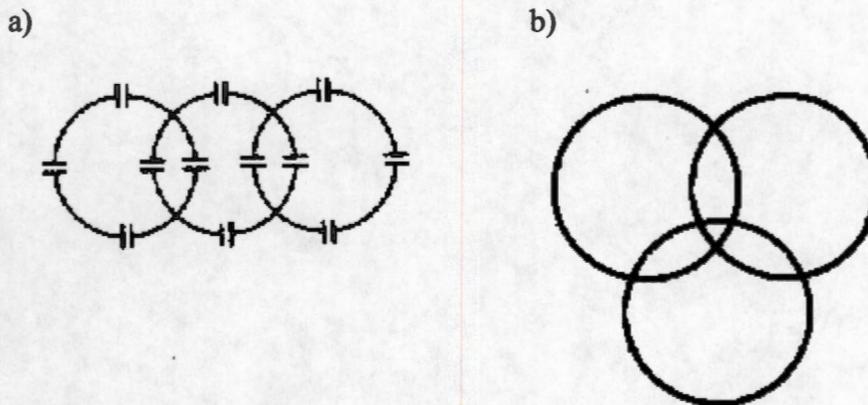


Figura 2.4. Arreglo en fase de antenas de *RF*: a) lineal; b) superficial.

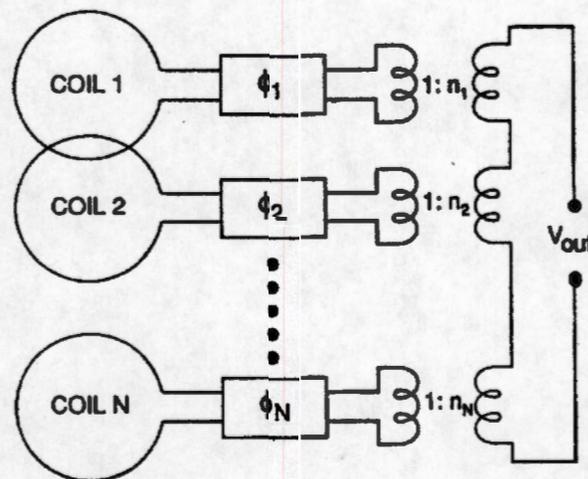


Figura 2.5. Arreglo de N antenas con la señal de salida corrida en fase. Las salidas son sumadas a través de un conjunto de transformadores.

En conclusión, estos arreglos en fase generan un *CSR* grande, similar al de una antena de superficie pequeña, pero con un campo de visión mayor usualmente asociado con las antenas de volumen, sin que se modifique el tiempo de adquisición de la imagen. Los arreglos en fase de antenas de *RF* toman la idea de la cuadratura aplicada a múltiples antenas receptoras de *RF* traslapándose, y arregladas tal que operan independientemente, debido a que sus inductancias mutuas se consideran despreciables. Las señales registradas para cada antena se procesan separadamente antes de mezclarse usando una variedad de posibles algoritmos y generar una imagen compuesto. Esta configuración genera un valor del *CSR* similar al de cada antena por separado, pero sobre un campo de visión mucho más grande. Es decir, que estos arreglos

producen un *CSR* de una antena de superficie, pero cubren una región de una antena en cuadratura convencional. Sin embargo, se sabe que en el centro del cuerpo o la cabeza, una antena de superficie no genera buenos resultados. A esta profundidad, un arreglo de antenas en fase generará mejores resultados que una antena en cuadratura convencional no por su tecnología multi-antenas, sino por su capacidad de ajustarse al cuerpo del paciente, lo que minimiza el volumen del tejido de donde se recibe ruido debido a corrientes espurias.

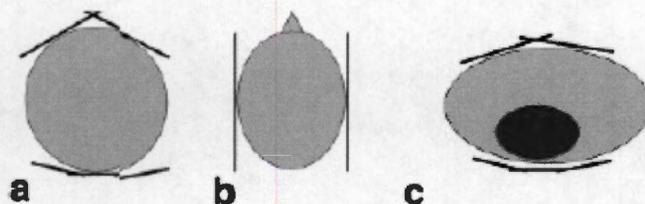


Figura 2.6. Diferentes configuraciones de antenas para las secuencias *SMASH* y *SENSE*: a) arreglo de 5 antenas puestas alrededor de un maniquí cilíndrico; b) arreglo de 2 antenas circulares colocadas lateralmente para imágenes cerebrales; c) imágenes cardíacas con el mismo arreglo de a).

2.1.4 Antenas multimodales

En *IRM*, ocasionalmente es necesario trabajar con antenas que presenten más de una frecuencia de resonancia. Ejemplos de estas antenas son las antenas "jaula de pájaro" para bajas y altas frecuencias (figura 2.7). En estas antenas, existen dos modos de vibración que producen campos magnéticos uniformes y perpendiculares entre sí. Esta característica es lo que hace a estas antenas muy útiles en aplicaciones de *IRM*. En 1986, *Hayes* et al. (Ha 85b, Ha 86) propusieron una antena de *RF* para un campo magnético estático intenso e imágenes de cuerpo total con *CSR* y homogeneidad del campo de *RF* óptimos. El diseño de *Hayes* era un resonador "jaula de pájaro" (ver figura 2.7) para bajas frecuencias. Este consistía de dos anillos al final de un cilindro circular conectados por N segmentos rectos igualmente espaciados, cada uno de los cuales incluye una capacitancia C . Cuando la antena en forma de "jaula de pájaro" se construye con simetría "4-fold" (es decir que, se construye con dos anillos circulares conectados con 8 segmentos espaciados por un ángulo de $2\pi/8$), la resonancia homogénea que se desea será doblemente degenerada. Los dos modos de vibración son ortogonales. La excitación en cuadratura de los dos modos con corrientes de igual magnitud, pero con diferencia de fase de 90° , produce un campo de *RF* circularmente polarizado (Ch 83). La potencia requerida para perturbar un núcleo con un campo de *RF* circularmente polarizado es la mitad de lo que se requiere con un campo linealmente polarizado. Similarmente, cada uno de los modos ortogonales se puede usar para recibir la señal nuclear resultante y el voltaje de ruido. Combinando los dos resultados después de haber efectuado un corrimiento de fase de 90° , la señal de voltaje se duplica. El voltaje de ruido se incrementa sólo por un factor de $\sqrt{2}$ debido a que los dos voltajes de ruido no están correlacionados. De esta manera, la recepción en cuadratura mejora el *CSR* por un factor de $\sqrt{2}$. La uniformidad del campo de *RF* de la antena de *Hayes* et al. era significativamente mejor que una antena en forma de silla de montar o un resonador de tubo con rendijas. Con esta antena, *Hayes* y su grupo obtuvieron un incremento casi lineal en la relación señal a ruido como función de la frecuencia o el campo magnético estático.

Las versiones a escala pequeña de estos diseños de antenas podrían aplicarse a la espectroscopía convencional por *RM* (Ac 80, Eh 06, Pe 95).

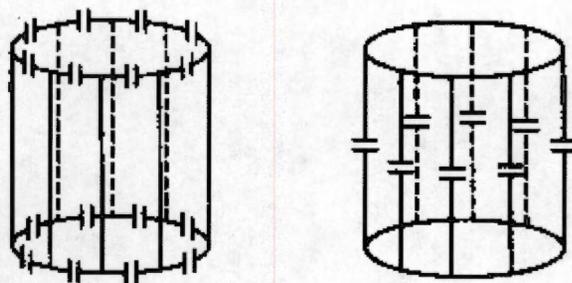


Figura 2.7. Antena en forma de jaula de pájaro: a) para altas frecuencias; b) para bajas frecuencias.

2.1.5 Antena *PERES* (*Petal Resonator*)

Dentro de los proyectos de investigación en Resonancia Magnética del Laboratorio de Procesamiento Digital de Señales e Imágenes Médicas - Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UAM-Iztapalapa, *Hidalgo* et al. (Hi 00) construyeron una antena de *RF* de superficie. La antena consiste de una versión modificada de una espira circular donde a la espira se le han agregado pétalos (ver figura 2.8). La relación entre los radios de los pétalos y el radio de la espira principal es de 5:1. Para decrementar la inductancia mutua entre los pétalos es necesario una separación entre ellos de tres veces su radio. Esta antena ha sido llamada *PERES* y es un diseño que ha logrado mejorar el valor del *CSR* de una espira circular simple con diámetro igual al de la espira principal de la antena *PERES* (Ro 05). Al aplicarla a imágenes cerebrales, la antena *PERES* demostró mayor alcance en profundidad comparado con una antena circular simple. La antena *PERES* también ha sido probada para obtener imágenes del corazón, y podría aplicarse para adquirir imágenes de las extremidades.

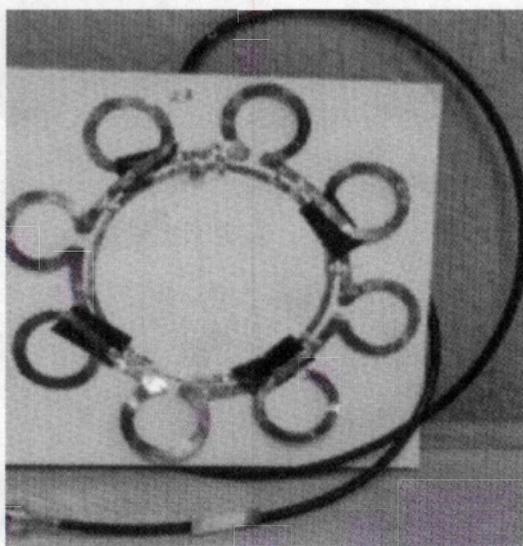


Figura 2.8. Antena *PERES*.

CAPÍTULO 3. COCIENTE SEÑAL A RUIDO DE UNA ANTENA SUPERFICIAL TIPO MAGNETRÓN

3.1. Enfoques considerados en *IRM* para calcular el *Cociente Señal a Ruido* de una Antena de RF

El enfoque *cuasiestático* o *no-cuasiestático* utilizado para determinar teóricamente el *CSR* de una antena depende de las consideraciones hechas cuando se calcula el campo magnético generado por la antena y, las resistencias de la antena y la muestra.

Para calcular el *CSR*, es necesario aproximar la muestra por un volumen simple como un cilindro, una esfera o un volumen rectangular dependiendo de la geometría de la antena. Por ejemplo: para antenas de cuerpo entero, el cuerpo se puede modelar usando cilindros homogéneos; para antenas de cabeza, la cabeza se puede simular con esferas homogéneas, y; para antenas de superficie pequeñas, la muestra se puede considerar como un semi-espacio homogéneo ($Sc\ 00$).

Se sabe que en bajas frecuencias (menores a 10 MHz), el campo electromagnético se puede asumir como cuasiestático y las corrientes generadas dentro de la muestra se pueden calcular parecidas a las corrientes parásitas (Ib 05b, Ve 95a). Este caso es llamado enfoque *cuasiestático*. Aunque los campos eléctrico y magnético tienen una variación temporal periódica de la forma $e^{j\omega t}$ donde ω es la frecuencia de la onda electromagnética y t es el tiempo, estos campos varían lentamente con el tiempo, por lo que se pueden calcular como en el caso estático. *Edelstein et al.* (Ed 86, Ed 95) utilizaron este enfoque para derivar el radio óptimo y el *CSR* máximo de una antena circular (espira) sobre un semi-espacio homogéneo con pérdidas inductivas y dieléctricas; y *Wang et al.* (Wa 95) propusieron un nuevo método para calcular el *CSR* de antenas simples y arreglos en fase. El método utiliza integrales de superficie sobre pequeños dipolos magnéticos cubriendo el área encerrada por la antena para derivar el campo magnético y eléctrico (figura 3.1). Los cálculos mostraron que la diferencia teórica del *CSR* entre las antenas circular y cuadrada es despreciable. Aunque este método resulta ser más sencillo que el convencional para calcular el *CSR* de antenas de alambre (integrales de línea sobre las corrientes en las antenas), no se puede aplicar en antenas o arreglos en fase donde el ancho de las antenas diste de ser el de una espira.

Por otro lado, se han desarrollado trabajos para calcular los campos electromagnéticos de las antenas en más altas frecuencias (mayores a 10 MHz) (Ib 05b, Ke 91, Pr 01). En este caso se dice que el enfoque es *no-cuasiestático*. Entre esos trabajos se encuentran los de *Vesselle et al.* (Ve 95a, Ve 95b) donde el cálculo del *CSR* se ha realizado usando el principio de reciprocidad y el vector de *Poynting* complejo para antenas y geometrías del cuerpo arbitrarias. Sus resultados teóricos los aplicaron al caso del cuerpo humano modelado por un cilindro infinitamente largo, dieléctrico y homogéneo con pérdidas inductivas y dieléctricas. *Vesselle et al.* también estudiaron los efectos de las altas frecuencias y los parámetros físicos que determinan los campos producidos por los dipolos magnéticos inducidos que preceden en un cilindro con pérdidas inductivas y dieléctricas (Ve 95a). Ellos evaluaron la importancia relativa de las diferentes fuentes de ruido al calcular los campos eléctrico y magnético dentro de la muestra (dipolo cuasiestático, corrientes parásitas, corrientes de desplazamiento, etc.) cuando la frecuencia se incrementa. Se encontró que por debajo de los 10 MHz, la fuente dipolar estática es la principal determinante de los campos, lo que justifica la aproximación cuasiestática en tales frecuencias. Entre 10 y 20 MHz, las corrientes parásitas que fluyen en el

medio son las que mayor contribuyen; y arriba de los 20 MHz, las corrientes de desplazamiento comienzan a jugar un papel no despreciable.

Consecuentemente, en las frecuencias más comunes usadas en *IRM* (entre 10 y 130 MHz), todas las fuentes tienen que ser incluidas y las soluciones completas a las ecuaciones de *Maxwell* son necesarias para tomar en cuenta apropiadamente los efectos que toman lugar en el cuerpo humano.

No obstante, nosotros hemos adoptado el enfoque cuasiestático para determinar el *CSR* de la antena superficial tipo magnetrón. Las razones que nos motivaron a tomar esta decisión son entre otras: que la geometría de nuestra antena es mucho más complicada que una circular; y que por los métodos convencionales, resulta muy difícil evaluar la integral de superficie sobre corrientes no-estacionarias para determinar el campo magnético variable en el tiempo de nuestra antena.

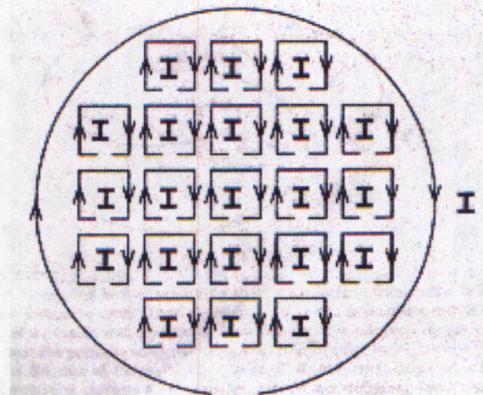


Figura 3.1. En lugar de usar integrales de línea sobre la espira conductora, el método de *Wang et al.* propone usar integrales de superficie sobre espiras infinitesimales con campo magnético y potencial magnético conocidos.

3.2. Cociente Señal a Ruido de una antena superficial

En anteriores intentos por calcular el cociente señal a ruido de los experimentos de *RM* sólo se consideraba el ruido asociado con la resistencia ohmica de la antena y no se tomaba en cuenta el ruido que provenía de la muestra. *Hoult y Lauterbur* (Ho 76, Ho 79) fueron los primeros en considerar las pérdidas inductivas y dieléctricas de la muestra como la fuente más importante de ruido. En el presente trabajo se han considerado tanto a la antena como a la muestra como fuentes de ruido aleatorio en el cálculo del cociente señal a ruido. Para comenzar, supongamos que la muestra y la antena se encuentran a la misma temperatura T , entonces la fórmula para el voltaje *rms* (*root mean square*) o voltaje efectivo producido por el ruido (Ab 76, Ha 85a, Ho 76, Ho 78) está dada por:

$$U_{\text{ruido}} = \sqrt{4kT\Delta f(R_A + R_B)} \quad (3.1)$$

donde k es la constante de *Boltzmann*, Δf es el ancho de banda (frecuencia) de la antena, R_B y R_A son la parte real de las impedancias de entrada de la antena asociadas con la muestra y la

antena misma, respectivamente.

El cálculo del voltaje de la señal inducida por una magnetización nuclear M (Ed 95, Ib 05a, La 90) está basado en el principio de reciprocidad que fue estudiado en el capítulo 1. El campo magnético estático B_0 se asume que es homogéneo sobre un volumen finito V centrado en el punto de interés. Con estas consideraciones el voltaje de la señal de resonancia magnética se calcula como:

$$U_{señal} = -j\omega VM(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) / I \quad (3.2)$$

donde $B_1(\mathbf{r})$ es el campo magnético que una antena con corriente I producirá en el punto de interés \mathbf{r} dentro de la muestra paramagnética.

El principio de reciprocidad representado por la ecuación (3.2) asegura que la antena puede utilizarse en modo de recepción y/o transmisión.

Observemos que los valores del voltaje de la señal $U_{señal}$ son valores pico. Para ser consistentes con la definición de U_{ruido} , debemos tener la raíz cuadrática media de $U_{señal}$, que es $U_{señal} / \sqrt{2}$.

Dividiendo el valor cuadrático medio de (3.2) entre la ecuación (3.1) obtenemos una expresión bien conocida (Oc 98, Sc 00, So 99, Ve 95a, Ve 95b, Wa 95, Wi 04) para el CSR de la señal generada por la magnetización nuclear $M(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} (CSR)(\mathbf{r}) &= \frac{|U_{señal}|}{\sqrt{2}U_{ruido}} = \frac{|-j\omega VM(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) / I|}{\sqrt{8kT\Delta f(R_A + R_B)}} = \\ &= \frac{\omega V |M(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r})|}{\sqrt{8kT\Delta f(R_A |I|^2 + R_B |I|^2)}} \\ \rightarrow (CSR)(\mathbf{r}) &= \frac{\omega V |M(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r})|}{\sqrt{8kT\Delta f(P_A + P_B)}} \quad (3.3) \end{aligned}$$

donde P_A y P_B son igual a la potencia perdida dentro de la antena y la muestra, respectivamente, cuando la antena lleva una distribución de corriente superficial J .

Como se observa en la ecuación (3.3), para calcular el cociente señal a ruido $(CSR)(\mathbf{r})$ es preciso determinar $B_1(\mathbf{z})$, P_A y P_B . En lo que se refiere a las pérdidas de potencia P_A y P_B , la primera se pueden calcular integrando la distribución de corriente J sobre el área de la antena; y la segunda integrando el campo eléctrico resultante E producido por la antena sobre el volumen de la muestra.

3.2.1. CSR de una antena superficial tipo magnetrón.

La antena es un disco de radio b con un hoyo de radio a en el centro y n perforaciones en forma de sectores circulares de radio c que subtenden un ángulo igual a $2\varphi_0 \cong 2 \arctan \frac{d}{c}$, donde d es la mitad de la longitud del arco subtendido por este ángulo (ver Apéndice B).

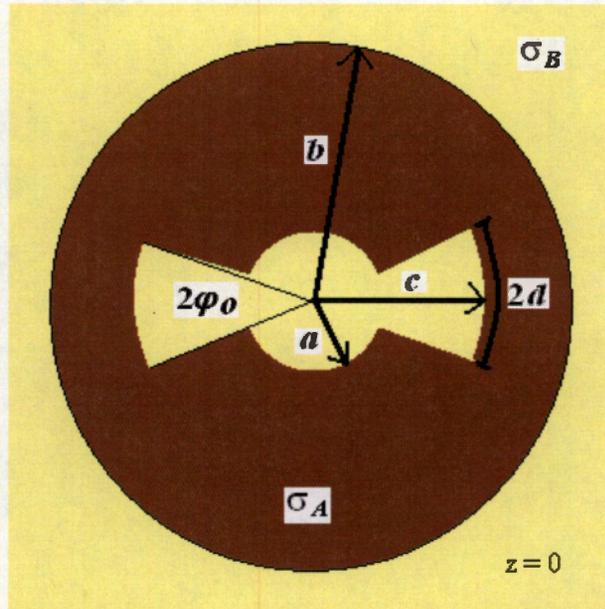


Figura 3.2. Antena superficial tipo magnetrón con 2-ranuras.

Calculemos $B_1(z)$ en el vacío para la antena con n ranuras y conductividad σ_A por la que circula una corriente I .

Aplicando la ley de *Biot-Savart* (Ey 72, Ja 62, Sm 39) definida en magnetostática para una antena superficial con área S' tenemos:

$$B_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es la densidad de corriente, \mathbf{r} es la posición del punto de observación, \mathbf{r}' es la posición de un elemento de área de la antena y μ_0 es la permeabilidad del vacío. Para materiales paramagnéticos (muestra), la permeabilidad magnética μ es aproximadamente igual a la permeabilidad del vacío μ_0 . Esta igualdad implica que el campo magnético dentro de la muestra se calcula como en el vacío.

Como se estudió en la sección 3.1, para calcular el CSR de una antena superficial consideremos que la muestra es el semi-espacio homogéneo $z > 0$. Supongamos que el eje z positivo apunta hacia adentro de la muestra y es normal a su superficie, y que la antena superficial se coloca en $z=0$ (figura 3.3) y evaluemos el campo (3.4) para puntos de observación sobre el eje z dentro de la muestra.

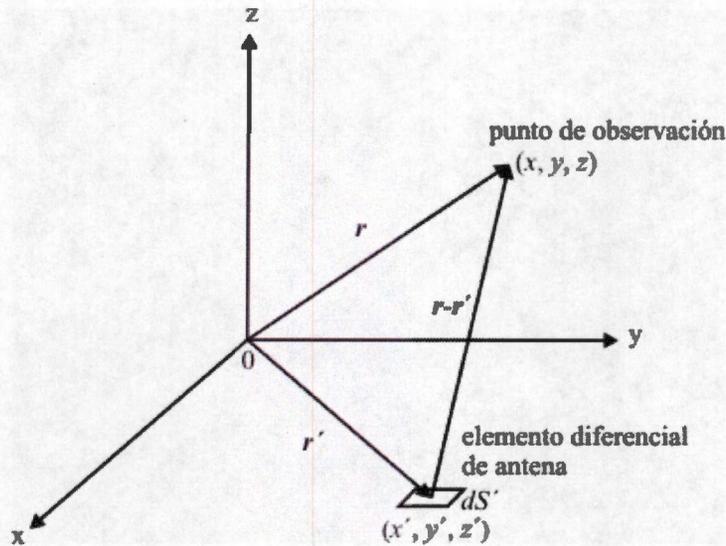


Figura 3.3. Arreglo geométrico para el cálculo de B_I y A en un punto de observación r debido a un elemento diferencial de antena dS' en r' .

Desarrollando la ecuación (3.4) en coordenadas cartesianas:

$$r = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = z\mathbf{e}_z$$

$$r' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$$

$$(r - r') = (-x')\mathbf{e}_x + (-y')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$|r - r'| = |(-x')\mathbf{e}_x + (-y')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

Luego, consideremos que la densidad de corriente en la dirección radial de la antena entre las ranuras es despreciable (ver figura B.2), pues la corriente en uno de los extremos de esas regiones fluye en sentido contrario a la corriente en el otro extremo. Por otra parte, obsérvese cómo en las esquinas de la antena hay una acumulación de electrones que contribuye al aumento de la resistencia de la antena. No obstante, basados en el reporte de *Wang et al.* (Wa 95), donde se concluye que la diferencia teórica del CSR de una antena circular y una cuadrada es despreciable, podemos concluir que el efecto del aumento de la resistencia de una antena magnetrón será menos significativo conforme el número de ranuras en la antena disminuya.

Asumiendo la hipótesis anterior, la densidad de corriente de la antena se puede expresar en coordenadas cilíndricas como:

$$\mathbf{J} = J_\phi \mathbf{e}_\phi$$

y en coordenadas cartesianas se escribe como:

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y$$

donde

$$J_x = -J_\phi \sin \phi'$$

$$J_y = J_\phi \cos \phi'$$

Sustituyendo $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y \mathbf{J} en (3.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{(J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y) \times [(-x') \mathbf{e}_x + (-y') \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z]}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} dS' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{(J_y z) \mathbf{e}_x + (-J_x z) \mathbf{e}_y + (-J_x y' + J_y x') \mathbf{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} dS' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora podemos expresar (3.5) en coordenadas cilíndricas haciendo las siguientes transformaciones:

$$\begin{array}{lll} x = \rho \cos \phi & x' = \rho' \cos \phi' & \mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ y = \rho \sin \phi & y' = \rho' \sin \phi' & \mathbf{e}_y = \sin \phi \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \mathbf{e}_\phi \\ z = z & z' = z' & \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{array} \quad (3.6)$$

donde las coordenadas no-primadas representan las coordenadas de la posición del observador y las coordenadas primadas representan las coordenadas de la posición de un elemento diferencial de la antena.

Sustituyamos (3.6) en (3.5). Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_\phi z (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \mathbf{e}_\rho}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} dS' + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_\phi z (\cos \phi \sin \phi' - \sin \phi \cos \phi') \mathbf{e}_\phi}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} dS' + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{(J_\phi \rho') \mathbf{e}_z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} dS' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} z \cos \phi \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \cos \phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mu_0}{4\pi} z \sin \phi \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \sin \phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' \right) \mathbf{e}_\rho + \\
&+ \left(\frac{\mu_0}{4\pi} z \cos \phi \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \sin \phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mu_0}{4\pi} z \sin \phi \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \cos \phi'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' \right) \mathbf{e}_\phi + \\
&+ \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \rho'^2}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} d\rho' d\phi' \right) \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde \mathcal{R}_m son las regiones en las que se puede dividir la antena para fines de integración (ver figura 3.4).

Si en (3.7) integramos el $\cos \phi'$ y $\sin \phi'$ sobre los arcos que subtienden las n -ranuras de la antena (regiones azules en la figura 3.4) y efectuamos la suma, el resultado es cero. El mismo resultado se tiene cuando sumamos las integrales del $\cos \phi'$ y $\sin \phi'$ sobre los arcos que subtienden las regiones de la antena donde no hay ranura (regiones rojas en la figura 3.4). Por lo tanto, las componentes \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_ϕ de (3.7) son cero y,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_I(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi \rho'^2}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} d\rho' d\phi' \mathbf{e}_z = \\
&= \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(b-a)\delta} \left(\frac{2\pi}{n} - 2\phi_0 \right) n \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{a + \sqrt{a^2 + z^2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(b-c)\delta} (2\phi_0 n) \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 + z^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{c + \sqrt{c^2 + z^2}} \right) \right\} \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde δ es el espesor de la antena, I es la corriente que circula por la antena y n es el número

de ranuras. La densidad de corriente J_s (= corriente / área transversal de la antena) se considera uniforme tanto para las regiones de la antena donde no hay ranura como para las regiones de la antena donde la ranura existe.

En realidad, la expresión (3.8) es una aproximación, ya que una antena superficial real tiene un espesor finito (área transversal finita) y podemos definir la densidad de corriente como se hizo en las líneas anteriores.

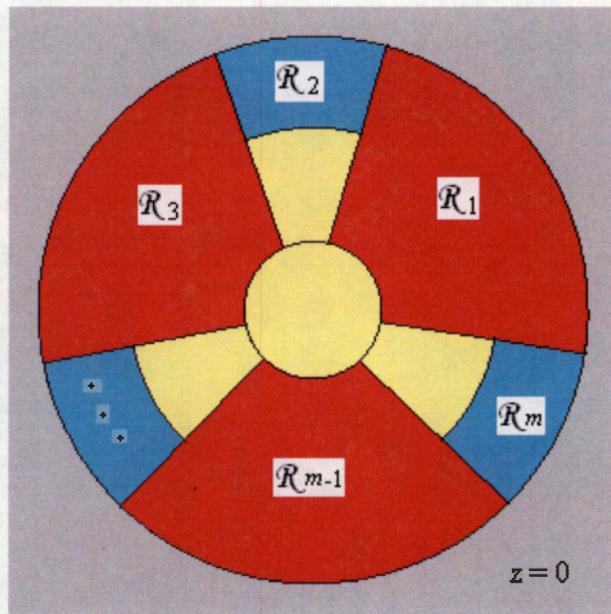


Figura 3.4. Distintas regiones en una antena magnetrón: Las zonas en rojo son regiones de la antena sin ranura, las zonas en azul son regiones de la antena con ranura, y las zonas en amarillo son las ranuras.

Tal como se observa en la ecuación (3.3), para determinar el CSR de una antena, además del campo magnético $B_r(z)$, es preciso calcular también las pérdidas de potencia en la antena P_A y en la muestra P_B .

Consideremos el trabajo por unidad de volumen que un campo eléctrico E periódico en el tiempo hace sobre una corriente J , es decir, $E \cdot J^*$ (este es un resultado deducido de la ley de la conservación de la energía electromagnética en un volumen arbitrario). Usando la ley de Ohm $J = \sigma E$ donde σ es la conductividad, la potencia perdida por unidad de volumen V debida al calentamiento Joule (Ch 86, Ir 93, We 56) se puede escribir como:

$$\frac{dP}{dV} = E \cdot J^* = \frac{1}{\sigma} |J|^2 = \sigma |E|^2. \quad (3.9)$$

Para calcular la potencia P_A de una antena superficial tipo magnetrón con n ranuras, usemos la primera igualdad de (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{dP_A}{dV} &= \frac{dP_A}{\delta dS'} = \frac{1}{\sigma_A} |\mathbf{J}|^2 \\ \rightarrow P_A &= \frac{\delta}{\sigma_A} \int_{S'} |\mathbf{J}(\mathbf{r}')|^2 dS' = \frac{\delta}{\sigma_A} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} J_{\phi'}^2 \rho' d\rho' d\phi' = \\ &= \frac{\delta}{\sigma_A} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} J_{\phi'}^2 \rho' d\rho' d\phi' \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde δ es el espesor de la antena.

Desarrollando P_A , obtenemos:

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{\delta}{\sigma_A} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{\rho' \in \mathcal{R}_m} J_{\phi'}^2 \rho' d\rho' d\phi' = \\ &= \frac{I^2}{2\sigma_A (b-a)^2 \delta} \left(\frac{2\pi}{n} - 2\varphi_0 \right) n (b^2 - a^2) + \\ &+ \frac{I^2}{\sigma_A (b-c)^2 \delta} 2\varphi_0 n (b^2 - c^2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para calcular la potencia P_B de la muestra usemos la segunda igualdad de (3.9):

$$\frac{dP_B}{dV} = \sigma_B |\mathbf{E}|^2 \quad (3.12)$$

$$\rightarrow P_B = \sigma_B \int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV$$

donde V es el semi-espacio homogéneo $z > 0$.

Aún cuando el enfoque cuasi-estático nos permitió utilizar los resultados de la magnetostática para calcular el campo magnético, no hay que perder de vista que los campos magnético y eléctrico varían con el tiempo, aunque lentamente, de la forma $e^{-j\omega t}$. Por lo tanto, si se desea

determinar el campo eléctrico, podemos hacer uso de la Ley de *Faraday-Lenz* (Ey 72, Ja 62, Sm 39).

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \quad (3.13)$$

donde B_1 es el campo magnético calculado en (3.8).

Para campos que varían periódicamente en el tiempo como $e^{-j\omega t}$, la ecuación (3.13) se puede reescribir como:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B_1}{\partial t} = j\omega B_1 \quad (3.14)$$

Luego, B_1 se puede expresar en términos del potencial vectorial magnético como $B_1 = \nabla \times A$ y la ecuación (3.14) se transforma en:

$$\nabla \times E = j\omega B_1 = j\omega(\nabla \times A) \quad (3.15)$$

Reacomodando términos obtenemos:

$$\nabla \times (E - j\omega A) = 0 \rightarrow E - j\omega A = -\nabla\Phi \rightarrow E = -\nabla\Phi + j\omega A$$

donde $\nabla\Phi$ es el gradiente del potencial escalar.

En ausencia de cargas (condición de *Coulomb*) $\nabla\Phi = 0$ y $E = j\omega A$.

Al sustituir $E = j\omega A$ en la ecuación (3.12):

$$\begin{aligned} P_B &= \sigma_B \int_V |E|^2 dV = \sigma_B \int_V |j\omega A|^2 dV = \\ &= \sigma_B \omega^2 \int_V |A|^2 dV \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para determinar P_B , calculemos primero el potencial vectorial A (Ja 62).

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (3.17)$$

A diferencia del campo magnético, el que se calculó sobre el eje z , el potencial vectorial magnético deberá calcularse en cualquier punto del espacio, pues la ecuación (3.16) así lo requiere.

En este caso, el desarrollo de la ecuación (3.17) en coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left| (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \right| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

Sustituyendo $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y J de (3.17) en coordenadas cartesianas, tenemos:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} dS' \quad (3.18)$$

En general, la solución de la ecuación (3.18) es difícil de obtener en cualquier sistema de coordenadas. Sin embargo, cuando (3.18) se expresa en coordenadas esféricas, es posible observar que el integrando se puede reescribir como una serie de polinomios de *Legendre* (Apéndice C, Ar 01, Co 53, Mo 53, Wy 76) para obtener una solución aproximada de A cuando la serie se trunca.

Para expresar (3.18) en coordenadas esféricas hagamos:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & x' &= r' \cos \phi' \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & y' &= r' \sin \phi' \\ z &= r \cos \theta & z' &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r - \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

Dado que en (3.16) necesitamos el cuadrado del módulo de A , el cambio de los vectores unitarios $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ por $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ se puede omitir.

Sustituyamos (3.19) en (3.18). Para facilitar la comprensión de los resultados, consideremos $A = A_{sr} + A_{sr}$, donde A_{sr} corresponde al potencial vectorial debido a las regiones \mathcal{R}_{sr} de la antena sin ranura y A_{sr} corresponde al potencial vectorial debido a las regiones \mathcal{R}_{sr} de la antena con ranura (figura 3.4).

$$\begin{aligned}
A_{sr} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{-J_\phi r' \text{sen} \phi' dr' d\phi' e_x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} + \\
&+ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi r' \cos \phi' dr' d\phi' e_y}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \\
&= \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{-r' \text{sen} \phi' dr' d\phi' e_x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} + \\
&+ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{r' \cos \phi' dr' d\phi' e_y}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{cr} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{-J_\phi r' \text{sen} \phi' dr' d\phi' e_x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} + \\
&+ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{J_\phi r' \cos \phi' dr' d\phi' e_y}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \\
&= \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{-r' \text{sen} \phi' dr' d\phi' e_x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} + \\
&+ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \int_{r' \in \mathcal{R}_m} \frac{r' \cos \phi' dr' d\phi' e_y}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}}
\end{aligned}$$

donde $\cos \gamma = \text{sen} \theta \cos(\phi - \phi')$.

El recíproco del denominador de los integrandos en (3.20) se puede reescribir en términos de los polinomios de *Legendre* para diferentes regiones del espacio (Ar 01, Co 53, Ey 72, Ja 62, Mo 53, Apéndice C).

Para los integrandos en A_{sr} se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r < a$$

$$a < r' < b$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r > b$$

$$a < r' < b \tag{3.21}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) + \quad a < r' < r \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r < r' < b \end{aligned} \right\} a < r < b$$

y para los integrandos en A_{cr} :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r < c$$

$$c < r' < b$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r > b$$

$$c < r' < b \tag{3.22}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) + \quad c < r' < r \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma) \quad r < r' < b \end{aligned} \right\} c < r < b$$

Reemplazando (3.21) en A_{sr} de (3.20) y (3.22) en A_{cr} de (3.20) obtenemos:

$$A_{sr} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_a^b \left(\frac{r'}{r}\right)^l dr' \left[\begin{array}{l} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{array} \right] \quad r < a \\ \\ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_a^r \left(\frac{r'}{r}\right)^{l+1} dr' \left[\begin{array}{l} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{array} \right] + \\ \\ + \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_r^b \left(\frac{r'}{r}\right)^l dr' \left[\begin{array}{l} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{array} \right] \quad a < r < b \\ \\ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_a^b \left(\frac{r'}{r}\right)^{l+1} dr' \left[\begin{array}{l} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{array} \right] \quad r > b \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$A_{cr} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_c^b \left(\frac{r}{r'}\right)^l dr' \begin{bmatrix} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{bmatrix} & r < c \\ \\ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_c^r \left(\frac{r}{r'}\right)^{l+1} dr' \begin{bmatrix} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{bmatrix} + \\ + \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_r^b \left(\frac{r}{r'}\right)^l dr' \begin{bmatrix} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{bmatrix} & c < r < b \\ \\ \frac{\mu_0 J_\phi}{4\pi} \sum_{m=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \int_c^b \left(\frac{r}{r'}\right)^{l+1} dr' \begin{bmatrix} \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} -\text{sen} \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_x + \\ \int_{\phi' \in \mathcal{R}_m} \cos \phi' P_l(\cos \gamma) d\phi' e_y \end{bmatrix} & r > b \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Luego, de acuerdo con la ecuación (3.16), P_B está dado por:

$$\begin{aligned}
P_B &= \sigma_B \omega^2 \int_V |A|^2 dV = \sigma_B \omega^2 \int_{V_1} |A_{sr}|^2 dV_1 + \sigma_B \omega^2 \int_{V_2} |A_{cr}|^2 dV_2 = \\
&= \sigma_B \omega^2 \sum_{m=1}^n \left[\int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_0^a |A_{sr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi + \int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_0^a |A_{sr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_b^\infty |A_{sr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi \right] \\
&+ \sigma_B \omega^2 \sum_{m=1}^n \left[\int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_0^c |A_{cr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi + \int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_0^c |A_{cr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\phi \in \mathcal{R}_m} \int_0^{\pi/2} \int_b^\infty |A_{cr}|^2 r^2 \text{sen} \theta dr d\theta d\phi \right]
\end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $V = V_1 + V_2$ es el semiespacio.

3.2.2. CSR de una espira circular.

Una vez planteado el modelo, tenemos que validar sus resultados aplicándolo a un problema conocido como es el CSR de una antena circular. Comencemos escribiendo el ya bien conocido campo magnético B_I (ley de Biot-Savart unidimensional) de una espira circular con corriente I (figura 3.5) de radio promedio b sobre puntos de observación sobre el eje z :

$$B_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \mathbf{e}_z \quad (3.26)$$

donde $d\mathbf{l}'$ es un elemento diferencial de longitud sobre la espira.

Integrando (3.26) obtenemos:

$$B_I(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (3.27)$$

Ahora para calcular P_A de la espira supongamos que su densidad de corriente J_ϕ (corriente/área transversal) es uniforme, entonces de acuerdo con la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{dP_A}{dV} &= \frac{dP_A}{s dl'} = \frac{1}{\sigma_A} |J|^2 = \\ &= \frac{1}{\sigma_A} \int_{V'} |J(\mathbf{r}')|^2 dV' = \frac{1}{\sigma_A} \int_0^{2\pi} J_\phi^2 b d\phi' = \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\rightarrow P_A = \frac{s}{\sigma_A} \int_0^{2\pi} J_\phi^2 b d\phi' = \frac{I^2 (2\pi b)}{\sigma_A s} = I^2 \frac{1}{\sigma_A} \frac{2\pi b}{\pi(\delta/2)^2} = I^2 \frac{8b}{\sigma_A \delta^2}$$

donde s es el área transversal de la espira, σ_A es la conductividad de la espira, δ es el diámetro del alambre y $d\mathbf{l}'$ es un elemento diferencial de longitud sobre la espira.

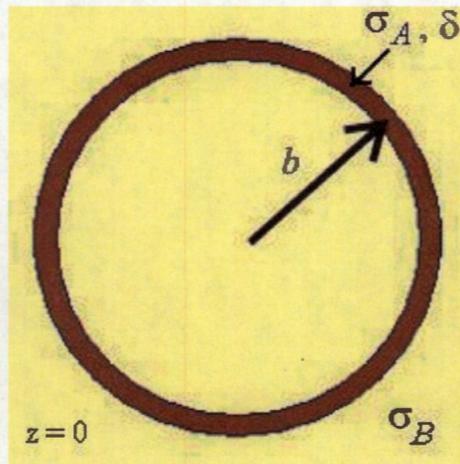


Figura 3.5. Espira circular.

Luego, para calcular P_B de la muestra (semi-espacio $z > 0$) (figura 3.3) determinemos primero A producido por la espira:

$$A = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^l \left[\int_0^{2\pi} -\text{sen}\phi' P_l(\cos\gamma) d\phi' e_x + \int_0^{2\pi} \cos\phi' P_l(\cos\gamma) d\phi' e_y \right] & r < b \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{l+1} \left[\int_0^{2\pi} -\text{sen}\phi' P_l(\cos\gamma) d\phi' e_x + \int_0^{2\pi} \cos\phi' P_l(\cos\gamma) d\phi' e_y \right] & r > b \end{cases} \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.29) en (3.16) se tiene que:

$$P_B = \sigma_B \omega^2 \int_V |A|^2 dV = \sigma_B \omega^2 \int_0^{2\pi/2} \int_0^b \int_0^b |A|^2 r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi + \sigma_B \omega^2 \int_0^{2\pi/2} \int_0^b \int_b^{\infty} |A|^2 r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi \quad (3.30)$$

3.2.3. Resultados del cálculo del CSR.

Los cálculos de B_I , A , P_A y P_B para las antenas se realizaron con el software *Mathematica* 5.0. Para calcular A de las antenas magnetrón y circular se consideraron sólo los primeros 5 y 10 términos de la serie de polinomios de *Legendre* (Apéndice C), respectivamente.

Sustituyendo en (3.3) la magnetización M y el campo magnético B_I producido por la antena

en puntos de interés sobre el eje z dentro de la muestra, y las potencias P_A y P_B disipadas por la antena y la muestra, respectivamente, podemos calcular el CSR .

Considerando la aproximación cuasiestática para E y B_1 , y asumiendo que el campo magnético uniforme y estático B_0 está dirigido en la dirección y , la magnetización $M(r)$, el campo magnético $B_1(r)$ y $|M(r) \cdot B_1(r)|$ están dados por:

$$\begin{aligned} M(r) &= \sqrt{2}M(e_x + je_z) \\ B_1(r) &= B_1(z)e_z \quad \text{y} \\ |M(r) \cdot B_1(r)| &= \sqrt{2}MB_1(z) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nota: El factor $\sqrt{2}$ en $M(r)$ se debe a que en (3.31) M representa el valor cuadrático medio (rms).

Sustituyendo (3.31) en (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned} (CSR)(r) &= \frac{\omega V |M(r) \cdot B_1(r)|}{\sqrt{8kT\Delta f(P_A + P_B)}} \rightarrow \\ (CSR)(r) &= (CSR)(z) = \frac{\sqrt{2}\omega V M B_1(z)}{\sqrt{8kT\Delta f(P_A + P_B)}} = \frac{\omega V M B_1(z)}{\sqrt{4kT\Delta f(P_A + P_B)}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si suponemos que la potencia P_B es mucho mayor que P_A , la ecuación (3.32) la podemos reescribir como:

$$(CSR)(z) = \frac{\omega V M}{\sqrt{4kT\Delta f}} \frac{B_1(z)}{\sqrt{P_B}} \quad (3.33)$$

Luego, de acuerdo con (3.16) $P_B = \sigma_B \omega^2 \int_V |A|^2 dV$

De donde se deduce que:

$$(CSR)(z) = \frac{VM}{\sqrt{kT\sigma_B\Delta f}} \frac{B_1(z)}{\sqrt{4\int_V |A|^2 dV}} = C \frac{B_1(z)}{\sqrt{4\int_V |A|^2 dV}} \quad (3.34)$$

donde $C = \frac{VM}{\sqrt{kT\sigma_B\Delta f}}$ es una constante.

Los cálculos del CSR para las antenas circular y magnetrón se encuentran resumidos en las tablas del Apéndice C. En la figura 3.6 se muestran las gráficas del CSR de una espira circular calculado siguiendo el método de Wang et al. y el método que se propone en este trabajo

usando las series de polinomios de *Legendre*. La gráfica pone en evidencia la buena aproximación de nuestro método.

Los perfiles del *CSR* vs *z* de las antenas magnetrón con *n* ranuras (*CSR_n*) y de una espira circular (*CSR_{cir}*) con radio igual al radio externo de las antenas magnetrón se muestran en la figura 3.7. Tal como se esperaba, el *CSR* es una función que decrece a medida que aumenta la profundidad en la muestra. De la gráfica resulta concluyente que el *CSR_n* es superior en todos los casos al *CSR_{cir}* (calculado con el método de *Wang* et al.). Para describir este comportamiento de manera más objetiva se recurre a la definición del mejoramiento porcentual del *CSR*:

$$\text{mejoramiento porcentual del CSR} = \frac{\text{CSR}_{\text{cir}} - (\text{CSR}_n)}{\text{CSR}_{\text{cir}}} \times 100 \quad (3.35)$$

La gráfica del mejoramiento porcentual del *CSR_n* vs *z* (figura 3.8) muestra que su valor máximo se incrementa de 245 a 346 % al aumentar el número de ranuras de 2 a 5. A partir de este último número de ranuras, el valor máximo del mejoramiento porcentual va decreciendo mientras el número de ranuras se incrementa de 6 a 8 hasta tomar el valor de 251% para 8 ranuras, similar este último, al valor de la antena con 2 ranuras.

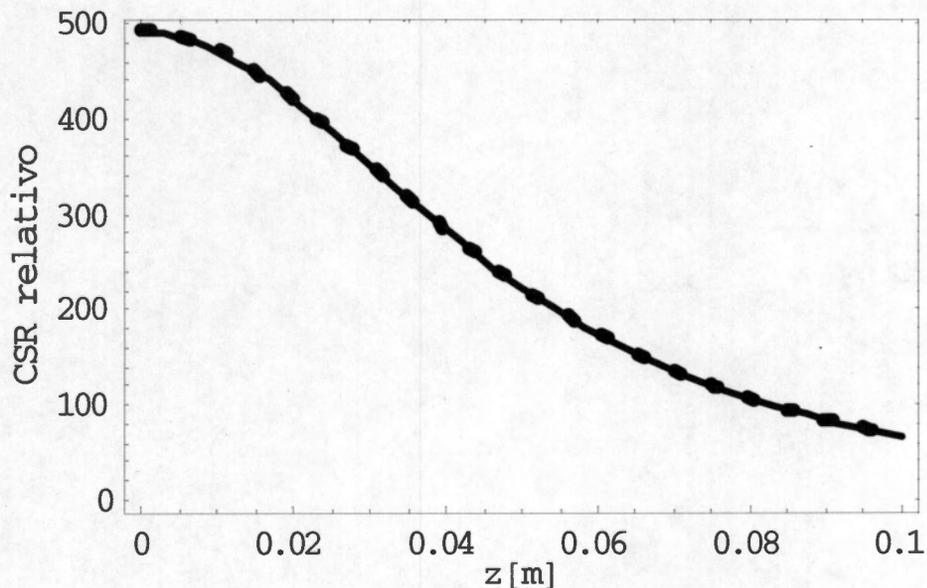


Figura 3.6. *CSR* de una espira circular de radio $b = 0.06m$ calculado por el método de *Wang* et al. (línea continua) y por el método que se propone en este trabajo usando series de polinomios de *Legendre* (línea discontinua).

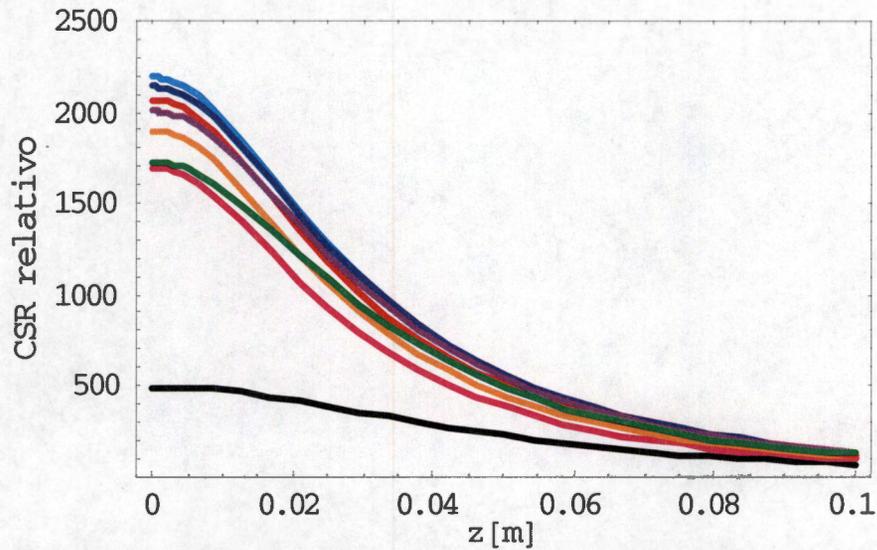


Figura 3.7. *CSRcir* (línea negra), *CSR2* (línea rosa), *CSR3* (línea amarilla), *CSR4* (línea roja), *CSR5* (línea azul cielo), *CSR6* (línea azul rey), *CSR7* (línea violeta), *CSR8* (línea verde).

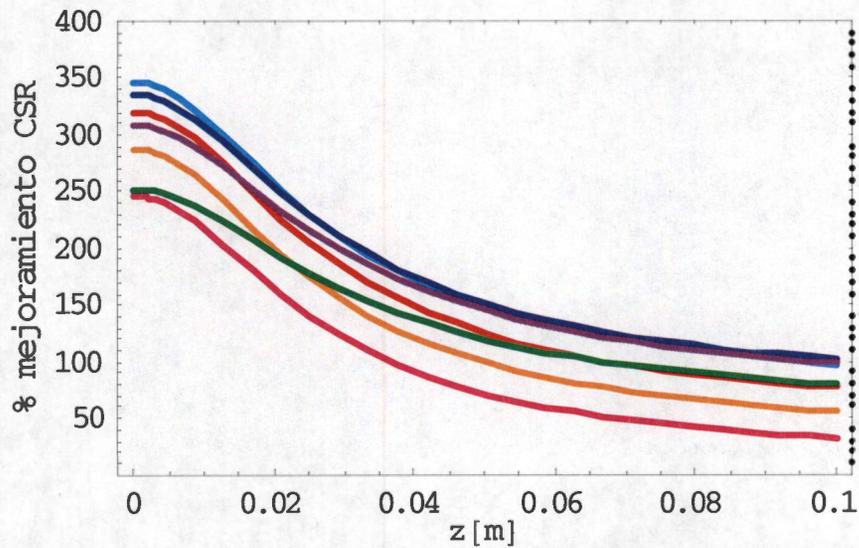


Figura 3.8. Mejoramiento del *CSR2* (línea rosa), *CSR3* (línea amarilla), *CSR4* (línea roja), *CSR5* (línea azul cielo), *CSR6* (línea azul rey), *CSR7* (línea violeta), *CSR8* (línea verde) comparado con el *CSRcir*.

CAPÍTULO 4. COMPARACIÓN TEÓRICA DEL DESEMPEÑO DE LAS ANTENAS MAGNETRÓN Y CIRCULAR PARA LA SECUENCIA DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES SENSE

Como se estudió en el capítulo 1, la secuencia SENSE (Pr 99) es una técnica de adquisición de imágenes ultra-rápida que obtiene información espacial de la muestra a estudiar mediante mapas de sensibilidad generados por arreglos de antenas en modo de recepción. Se ha demostrado que el tiempo de codificación en fase (We 00) es menor cuando se usan arreglos de antenas en lugar de una antena. No obstante, el ruido en la imagen aumenta localmente como resultado de esta reducción cuando las antenas usadas en los arreglos no tienen idealmente diferentes sensibilidades espaciales. Este efecto puede describirse cuantitativamente por el llamado factor de geometría g y usualmente llega a ser relevante para reducciones mayores a un factor de dos. El factor de geometría g es un factor que describe la habilidad que tiene una configuración en particular para separar píxeles superpuestos en la imagen debido a "aliasing", por lo que este factor debería tomarse en cuenta en el diseño de arreglos de antenas convencionales. Aunque g es difícil de estimar intuitivamente, se ha encontrado que para simulaciones básicas relativamente puede dar un buen pronóstico del desempeño de una cierta configuración de antenas. En el caso de arreglos de antenas en paralelo (figura 4.1), Reykowsky [Re 02a, Re 02b] propuso la siguiente ecuación para calcular el factor g para la secuencia SENSE:

$$g^{\text{máximo}} = \frac{CSR^{\text{máximo}}}{CSR^{\text{SENSE}}} = \left(1 - \frac{|S_{12}^2|}{S_{11}^2} \right)^{-1/2} \quad (4.1)$$

donde S_{11} y S_{12} son los CSR de las antenas 1 y 2 en el punto 1, respectivamente.

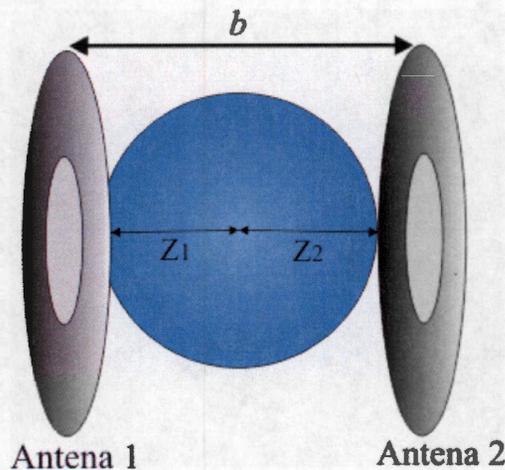


Figura 4.1. Arreglo de antenas circulares en paralelo sobre un maniquí de forma esférica. z_1 y z_2 son las distancias de la antena 1 y la antena 2 al centro de la esfera, respectivamente. Con estas distancias es posible definir el radio fraccional como z_1/z_2 .

La ecuación (4.1) señala claramente que para conseguir un CSR^{SENSE} aceptable, $g^{\text{máximo}}$ debe ser suficientemente pequeño, tomando en consideración que el valor mínimo de g es 1. Como

veremos más adelante, una antena magnetrón como la propuesta en este trabajo será una buena candidata para usarse en arreglos de antenas para la secuencia *SENSE*. Esta geometría está basada en el conocido tubo magnetrón donde sólo se ha utilizado la placa del ánodo que se ha configurado como una estructura de ranuras.

Para calcular el factor $g^{\text{máximo}}$ de un arreglo en paralelo de antenas magnetrón con n -ranuras (g_{mag_n}) utilicemos la ecuación (4.1) y comparemos este resultado con el factor $g^{\text{máximo}}$ de un arreglo de antenas circulares (g_{cir}). Consideremos que la separación entre las antenas es igual a su radio externo $b = 0.06m$ (figura 4.1). Esta configuración se deduce de un resultado estudiado en electromagnetismo acerca de la relación que debe existir entre esas distancias para que se produzca un campo magnético uniforme en la vecindad del eje de las bobinas de *Helmholtz*. Los cálculos se realizaron con el software Matemática 5.0, y las gráficas de los resultados se presentan en las figuras 4.2 y 4.3. La figura 4.2 muestra los perfiles del factor g_{mag_n} y g_{cir} vs *radio fraccional*. De esta gráfica se infiere que el factor g_{cir} y g_{mag_n} comienzan a ser más significativos a medida que nos acercamos al centro de la muestra. Por otra parte, también se observa que para puntos en una vecindad del centro de la muestra, el factor g_{cir} es muy superior al factor g_{mag_n} .

$$\text{mejoramiento porcentual del factor } g_{\text{mag}_n} = \frac{g_{\text{cir}} - g_{\text{mag}_n}}{g_{\text{cir}}} \times 100 \quad (4.2)$$

En la figura 4.3 se muestran los perfiles del mejoramiento del factor g_{mag_n} vs *radio fraccional* (ecuación 4.2). La gráfica muestra que el mejoramiento de g_{mag_n} crece linealmente con la profundidad hasta alcanzar un valor máximo en el centro de la muestra. Cerca de la antena 1, las líneas que representan el mejoramiento de g_{mag_n} tienden a converger, mientras que lejos de ella divergen. Es notable cómo la pendiente de estas líneas crece conforme el número de ranuras disminuye. El mejoramiento máximo de g_{mag_n} (centro de la muestra) se incrementa del 20 al 26 % cuando el número de ranuras disminuye de 8 a 2.

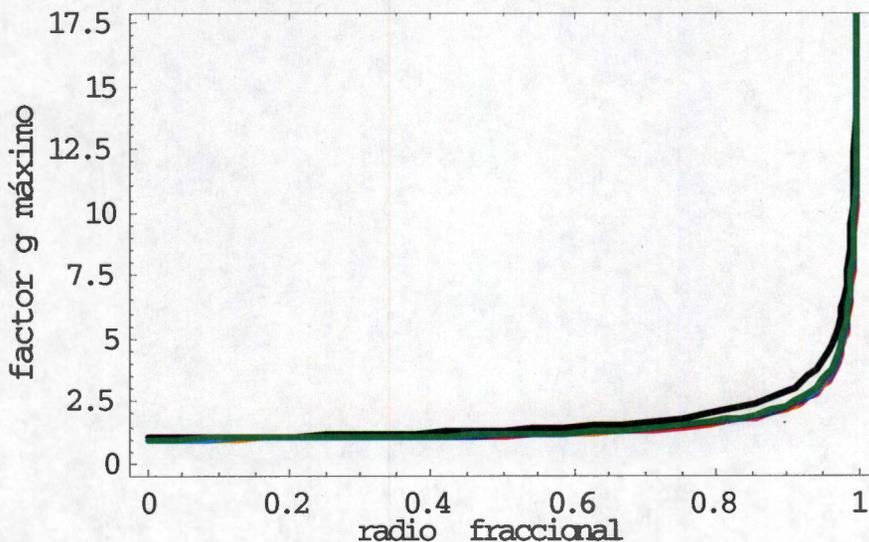


Figura 4.2. g_{cir} (línea negra), $g_{\text{mag}2}$ (línea rosa), $g_{\text{mag}3}$ (línea amarilla), $g_{\text{mag}4}$ (línea roja), $g_{\text{mag}5}$ (línea azul cielo), $g_{\text{mag}6}$ (línea azul rey), $g_{\text{mag}7}$ (línea violeta), $g_{\text{mag}8}$ (línea verde).

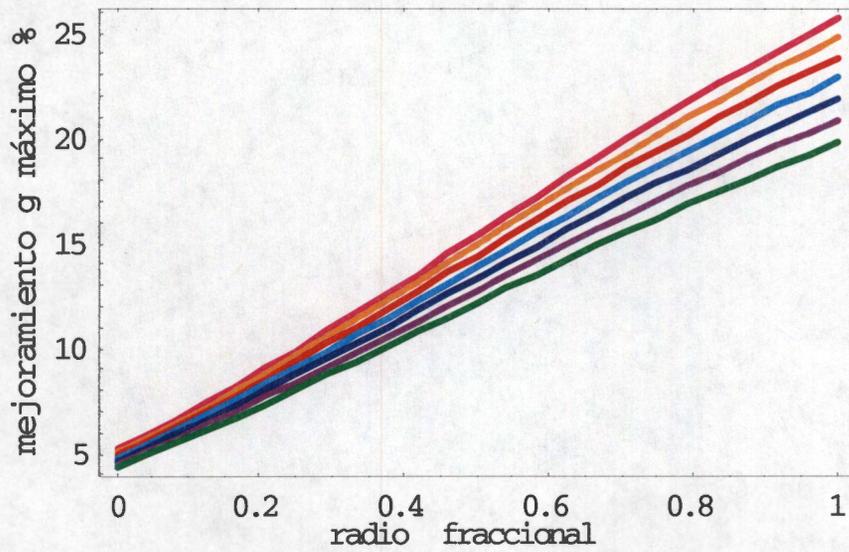
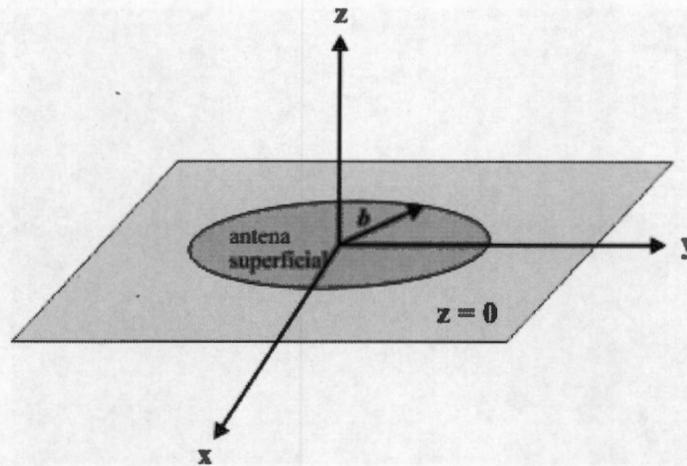


Figura 4.3. *mejmag2* (línea rosa), *mejmag3* (línea amarilla), *mejmag4* (línea roja), *mejmag5* (línea azul cielo), *mejmag6* (línea azul rey), *mejmag7* (línea violeta), *mejmag8* (línea verde).

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

CSR de las antenas circular y magnetrón



El *CSR* de una espira circular calculado con el método propuesto en este trabajo mediante series de polinomios de *Legendre* tiene una muy buena concordancia con el publicado por *Wang et al.* (Wa 95).

El *CSR* de las antenas magnetrón y circular es una función que decrece a medida que nos alejamos de la antena sobre el eje z .

Las antenas superficiales tipo magnetrón con 2 hasta 8 ranuras tienen un $CSR_{máximo}$ que supera significativamente al $CSR_{máximo}$ de una espira circular de radio igual al radio externo de la antena magnetrón.

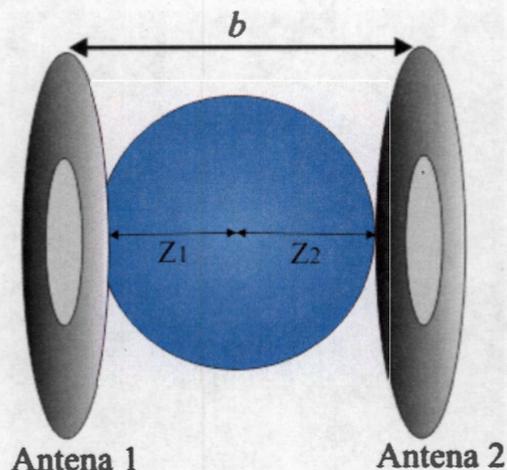
Los prototipos magnetrón con 2 hasta 5 ranuras tienen $CSR_{máximo}$ que es mayor entre mayor es el número de ranuras. A partir de 6 ranuras, el $CSR_{máximo}$ decrece tal que para 8 ranuras su valor es muy similar al de la antena con 2 ranuras.

El valor máximo del mejoramiento porcentual del *CSR* de los prototipos magnetrón se incrementa de 245 a 346 % al aumentar el número de ranuras de 2 a 5. A partir de este último número de ranuras, el mejoramiento de las antenas disminuye hasta tomar el valor de 251% para la antena con 8 ranuras, valor muy similar al de la antena con 2 ranuras. Este comportamiento indica que en el diseño de una antena tipo magnetrón es importante tomar en cuenta el número de ranuras máximo que podemos tener en la antena como función del tamaño de la antena, si deseamos optimizar el *CSR*.

De lo anterior resulta concluyente que las antenas superficiales tipo magnetrón con 2 hasta 8 ranuras pueden generar imágenes con una alta resolución y capacidad de penetración. Su alta

sensibilidad las hace buenas candidatas para utilizarse en secuencias de imágenes multi-antena.

Factor g máximo de las antenas circular y magnetrón



El factor g máximo (calculado según *Reykowsky* (Re 02a, Re 02b)) de arreglos de las antenas magnetrón y circular en paralelo comienza a ser más significativo a medida que nos acercamos al centro de la muestra sobre el eje z .

Las antenas magnetrón con 2 hasta 8 ranuras tienen un factor g máximo que es inferior en todos los casos al factor g máximo de una antena circular de radio igual al radio externo de las antenas magnetrón. Para puntos en una vecindad del centro de la muestra, el factor g máximo de la antena circular es muy superior al factor g máximo de las antenas magnetrón.

El mejoramiento del factor g máximo de las antenas magnetrón crece linealmente con la profundidad hasta alcanzar un valor máximo en el centro de la muestra.

Cerca de la antena 1, las líneas que representan el mejoramiento del factor g máximo de las antenas magnetrón tienden a converger, mientras que divergen al acercarse al centro de la muestra. La pendiente de estas líneas crece conforme el número de ranuras disminuye. El mejoramiento del factor g máximo de las antenas magnetrón en el centro de la muestra se incrementa del 20 al 26 % cuando el número de ranuras disminuye de 8 a 2. Un arreglo de antenas magnetrón entonces tendrá menor grado de "aliasing" que un arreglo de antenas circulares, y más aún, el grado de "aliasing" se reducirá entre menor número de ranuras tengan las antenas magnetrón.

De lo anterior se deduce que un arreglo de antenas magnetrón en paralelo es una configuración que tiene un buen desempeño para aplicaciones con la secuencia *SENSE* (Pr 99).

Perspectivas

- El *CSR* de una antena superficial tipo magnetrón es una función de cuatro parámetros: el radio interno de la antena a , el radio externo de la antena b , el radio de las ranuras c , y el número de ranuras en la antena n . Determinar los valores de los parámetros para optimizar el *CSR*, es una tarea que quedó fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, cabe mencionar que esta tarea es de gran importancia cuando lo que se busca es maximizar el desempeño de una antena en *IRM*.
- Aplicar el método para calcular el *CSR* de diversas geometrías.
- Aplicar el método para calcular el *CSR* de varias configuraciones como: arreglos de antenas en paralelo, antenas arregladas de manera concéntrica.
- Estudiar el *CSR* de antenas para campos que varían en el tiempo con altas frecuencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (Ab 76) Abe Z., Tanaka K., Hotta M., and Imai M., *Method of obtaining internal information of a measuring target from the outside by application of a nuclear magnetic resonance phenomena*, US Patent 3932805, January 13, 1976.
- (Ac 80) Ackerman J. J., Grove T. H., Wong G. G., Gadian D. G., and Radda G. K., *Mapping of metabolites in whole animals by P31 NMR using surface coils*, Nature, Vol. 283, pp. 167-170, 1980.
- (Ar 01) Arfken G. B. and Weber H. J., *Mathematical methods for physicist*, 5th Edition, Harcourt Academic Press, San Diego, USA, chapter 12, 2001.
- (Bl 46) Bloch F., *Nuclear Induction*, Physical Review, Vol. 70, Num. 7 y 8, pp. 460-474, 1946.
- (Bl 48) Bloembergen N., Purcell E. M., and Pound R. V., *Relaxation Effects in Nuclear Magnetic Resonance Absorption*, Physical Review, Vol. 73 Num. 7, pp. 679-712, 1948.
- (Bu 94) Bushberg J. T., Seibert J. A., Leidhold E. M. Jr., and Boone J. M., *The Essential Physics of Medical Imaging*, Williams & Wilkins, Baltimore, USA, 1994.
- (Ca 54) Carr H. Y., and Purcell E. M., Effects of Diffusion on Free Precession in Nuclear Magnetic Resonance Experiments, Physical Review, Vol. 94, pp. 630-638, 1954.
- (Ch 83) Chen C.-N., Hoult D. I., and Sank V. J., *Quadrature Detection Coils-A Further $\sqrt{2}$ Improvement in Sensitivity*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 54, 324-327, 1983.
- (Ch 86) Chen C. N., Sank V. J., Cohen S. M. and Hoult D. I., *The field dependence of NMR imaging. I. Laboratory assessment of signal to noise ratio and power deposition*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 3, pp. 722-729, 1986.
- (Co 53) Courant R., Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience Publishers, pp. 83, 1953.
- (De 91) De la Peña L., *Introducción a la Mecánica Cuántica*, 2a. Edición, Fondo de Cultura Económica, México DF, México, 1991.
- (Ed 86) Edelstein W. A., Glover G. H., Hardy C. J., and Redington R. W., *The intrinsic signal to noise ratio in NMR imaging*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 3, pp. 604-618, 1986.

- (Ed 95) Edelstein W. A., Foster T. H., and Schenck J. F., *The relative sensitivity of surface coils to deep lying tissues*, in Proc. 4th Annu. Meet. Soc. Mag. Res. Med., London, U. K., Aug. 1995, p. 964.
- (Eh 06) Ehrmann K., Gersbach M., Pascoal P., Vincent F., Massin C., Stamou D., Besse P.- A., Vogel H., and Popovic R. S., *Sample patterning on NMR surface microcoils*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 178, pp. 96-105, 2006.
- (Ey 72) Eyges L., *The Classical Electromagnetic Field*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- (Fo 87) Foster M. A. and Hutchison J. M. S., *Practical NMR Imaging*, IRL Press, Oxford England, 1987.
- (Gl 85) Glover G. H., Hayes C. E., Pelc N. J., Edelstein W. A., Mueller O. M., Hart H. R., Hardy C. J., O'Donnell M., and Barber W. D., *Comparison of Linear and Circular Polarization for Magnetic Resonance Imaging*, Vol. 64, pp. 225-270, 1985.
- (Gr 99) Griswold M. A., Jakob P. M., Chen Q., Goldfarb J. W., Manning W. J., and Sodickson D. K., *Resolution Enhancement in Single-Shot Imaging Using Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics (SMASH)*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 41, pp. 1236-1245, 1999.
- (Ha 99) Haacke E. M., Brown R. W., Thompson M. R., and Venkatesan R., *Magnetic Resonance Imaging – Physical Principles and Sequences Design*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1999.
- (Ha 50) Hahn E. L., *Spin Echoes*, Physical Review, Vol. 80 Num. 4, 1950.
- (Ha 85a) Hayes C. E. and Axel L., *Noise performance of surface coils for magnetic resonance imaging at 1.5 T*, Medical Physics, Vol. 12, pp. 604- 607, 1985.
- (Ha 85b) Hayes C. E., Edelstein W. A., Schenck J. F., Mueller O. M., and Eash M., *An Efficient, Highly Homogeneous Radiofrequency Coil for Whole-Body NMR Imaging at 1.5 T*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 63, pp. 622-628, 1985.
- (Ha 86) Hayes C. E., Edelstein W. A. and Schenck J. F., *Radio Frequency Coils*, Int: Medical Physics Monograph No.14 by the American Institute of Physics of the American Association of Physicist in Medicine, NMR IN MEDICINE: The Instrumentation and Clinical Applications, USA, 1986, p.142.
- (Hi 00) Hidalgo Tobón S. S., Tesis de Maestría en Ciencias (Física Médica), *Antena Superficial para Imagenología y Espectroscopía por Resonancia Magnética*,

Posgrado de Ciencias Físicas de la UNAM, México, D.F., 2000.

- (Ho 76) Hoult D. I. and Richards R. E., *The signal to noise ratio of the nuclear magnetic resonance experiment*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 24, pp. 71-85, 1976.
- (Ho 78) Hoult D. I., *The NMR Receiver: A Description and Analysis of Design*, Progress in NMR Spectroscopy, Vol. 12, pp. 41-77, 1978.
- (Ho 79) Hoult D. I. and Lauterbur P. C., *The sensitivity of the zeugmatographic experiment involving human samples*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 34, pp. 425-433, 1979.
- (Ho 89) Hoult D. I. and Chen C.- N., *Biomedical magnetic resonance technology*, Bristol, Adam Hilger, 1989.
- (Ho 97) Hoult D. I. and Bhakar B., *NMR signal: virtual photons and coherent spontaneous emission*, Concepts on Magnetic Resonance, Vol. 9, pp. 277-297, 1997.
- (Ho 00) Hoult D. I., *The principle of reciprocity in signal strength calculations: a mathematical guide*, Concepts on Magnetic Resonance, Vol.12, pp. 173-187, 2000.
- (Ho 01) Hoult D. I. and Ginsberg N.S., *The quantum origins of the free induction decay signal and spin noise*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 148, pp. 182-199, 2001.
- (Ib 05a) Ibrahim T. S., *Analytical approach to the MR signal*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 54, pp. 677-682, 2005.
- (Ib 05b) Ibrahim T. S., Mitchell C., Schmalbrock P., Lee R., and Chakeres D. W., *Electromagnetic perspective on the operation of RF coils at 1.5-11.7 Tesla*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 54, pp. 683-690, 2005.
- (In 98) Insko E. K., Elliot M. A., Schotland J. C., and Leigh J. S., *Generalized Reciprocity*, Journal of Magnetic Resonance, Vol 131, pp. 111-117, 1998.
- (Ir 93) Irigushi N., *The power sensitivity of magnetic resonance experiments*, Journal of Applied Physics, Vol. 73, pp. 15-16, 1993.
- (Ja 62) Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, pp. 62-63, 1962.
- (Ji 99) Jin J., *Electromagnetic Analysis and Design in Magnetic Resonance Imaging*, CRC Press, USA, 1999.

- (Jo 86) Joseph P. M., *Pulse Sequences for Magnetic Resonance Imaging, NMR IN MEDICINE: The Instrumentation and Clinical Applications*, American Association of Physicists in Medicine – Medical Physics Monograph Num.14, Editors: Thomas S. R. and Dixon R. L., New York, USA, 1986.
- (Ke 57) Kellog O. D., *Foundations of potential theory*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, USA, pp. 124-126, 1957.
- (Ke 91) Keltner R. F., Carlston J. W., Roos M. S., Wong S. T. S., Wong T. L., and Budinger T. F., *Electromagnetic fields of surface coil in vivo NMR at High Frequencies*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 22, pp. 467-480, 1991.
- (La 90) Lawry T. J., Weiner M. W., and Matson G. B., *Computer Modeling of Surface Coil Sensitivity*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 16, pp. 294-302, 1990.
- (Li 00) Liang Z. P. and Lauterbur P. C., *Principles of Magnetic Resonance Imaging. A Signal Processing Perspective*, IEEE Press, New Jersey, USA, 2000.
- (Ma 88) Mansfield P., *Principles of NMR Imaging*, Physics on NMR Spectroscopy in Biology and Medicine, pp. 345-369, 1988.
- (Me 58) Meiboom S. and Gill D., *Modified Spin Echo Method for Measuring Nuclear Relaxation Times*, The Review of Scientific Instruments, Vol. 29 Num. 5, 1958.
- (Me 95) Mezrich R., *A Perspective on k-Space*, Radiology, Vol. 195, pp. 297-315, 1995.
- (Mo 53) Morse P. M. and Feshbach H., *Methods of theoretical physics*, Part I, McGraw-Hill, New York, USA, pp. 593-597, 1953.
- (Na 00) Naganawa S., Ishiguchi T., Ishigaki T., Sato K., Katagiri T., Kishimoto H., Mimura T., Takizawa O., and Imura C., *Real-time Interactive MR Imaging System: Sequence Optimization, and Basic and Clinical Evaluations*, Radiation Medicine, Vol. 18 Num. 1, pp. 71-79, 2000.
- (Oc 98) Ocali O. and Atalar E., *Ultimate intrinsic signal to noise ratio in MRI*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 39, pp. 462-473, 1998.
- (Pe 95) Peck T. L., Magin R. L., and Lauterbur P. C., *Design and analysis of microcoils for NMR microscopy*, Journal of Magnetic Resonance, Series B, Vol. 108, pp. 114-124, 1995.
- (Pi 00) Piña Barba M. C., *La Física en la Medicina II: Ojos nuevos para los mismos cuerpos, la ciencia para todos/171*, Fondo de Cultura Económica, 1a. Edición, México, 2000.

- (Pr 01) Prock T., Collins D. J., and Leach M. O., *Numerical evaluation of shaped surface coil sensitivity at 63 MHz*, Physics in Medicine and Biology, Vol. 46, pp. 1753-1765, 2001.
- (Pr 99) Pruessmann K. P., Weiger M., Scheidegger M. B., and Boesiger P., *SENSE: Sensitivity Encoding for Fast MRI*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 42, pp. 952-962, 1999.
- (Pu 65) Purcell E. M., *Electricity and Magnetism Vol. 2*, pp. 352-399, McGraw-Hill, USA, 1965.
- (Re 98) Redpath T. W., *Signal to noise ratio in MRI*, The British Journal of Radiology, Vol. 71, pp. 704-707, 1998.
- (Re 02a) Reykowski A., Proc. Intl. Soc. Mag. Reson. Med., *How To Calculate The SNR Limit of SENSE Related Reconstruction Techniques*, Vol. 10, 2002.
- (Re 02b) Reykowski A., Proc. Intl. Soc. Mag. Reson. Med., *Simulation Of SNR Limit For SENSE Related Reconstruction Techniques*, Vol. 10, 2002.
- (Ro 05) Rodríguez A. O., Hidalgo S.S., Rojas R., and Barrios F.A., *Experimental development of a petal resonator surface coil*, Magnetic Resonance Imaging, Vol. 23, No. 10, pp. 1027-1033, 2005.
- (Ro 90) Roemer P. B., Edelstein W. A., Hayes C. E. Souza S. P., and Mueller O. M., *The NMR Phased Array*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 16, pp. 192-225, 1990.
- (Sc 00) Schnell W., Renz W., Vester M., and Ermert H., *Ultimate Signal to Noise Ratio of Surface and Body Antennas for Magnetic Resonance Imaging*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 48, No. 3, pp. 418-428, 2000.
- (Sm 39) Smythe W. R., *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill, New York, 1939.
- (So 86) Sobol W. T., *Dedicated Coils in Magnetic Resonance Imaging*, Reviews of Magnetic in Medicine, Vol. 1, No. 2, pp. 181-224, 1986.
- (So 97) Sodickson D.K., Manning W.J., *Simultaneous acquisition of spatial harmonics (SMASH): fast imaging with radiofrequency coil arrays*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 38, pp. 591-603, 1997.
- (So 99) Sodickson D. K., Griswold M. A., Jakob P. M., Edelman R. R., and Manning W. J., *Signal to noise ratio and signal to noise efficiency in SMASH imaging*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 41, pp. 1009-1022, 1999.

- (St 85) Styles P., Smith M. B., Briggs R. W., and Radda G. K., *A Concentric Surface-Coil Probe for the Production of Homogeneous B_1 Fields*, Journal of Magnetic Resonance, Vol. 62, pp. 397-405, 1985.
- (Ve 95a) Vesselle H. and Collin R.E., *The Signal to Noise Ration of Nuclear Magnetic Resonance Surface Coils and Application to a Lossy Dielectric Cylinder Model-Part I: Theory*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 42, No. 5, pp. 497-506, 1995.
- (Ve 95b) Vesselle H. and Collin R.E., *The Signal to Noise Ration of Nuclear Magnetic Resonance Surface Coils and Application to a Lossy Dielectric Cylinder Model-Part II: The Case of Cylindrical Window Coils*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 42, No. 5, pp. 507-520, 1995.
- (Wa 95) Wang J., Reykowki A., and Dickas J., *Calculation of the Signal to Noise Ratio for Simple Surface Coils and Arrays of Coils*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 42, No. 9, pp. 908-917, 1995.
- (We 56) Weber J., *Fluctuation-dissipation theorem*, Physical Review, Vol. 101, pp. 1620-1626, 1956.
- (We 00) Weiger M., Pruessmann K. P., and Boesiger P., *2D SENSE for Faster 3D Imaging*, Proc. Intl. Mag. Reson. Med., Vol. 8, 2000.
- (Wi 04) Wiesinger F., Boesiger P., and Pruessmann, *Electrodynamics and ultimate SNR in parallel MR imaging*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 52, pp. 376-390, 2004.
- (Wy 76) Wyld H.W., *Mathematical Methods for Physics*, pp. 86, W. A. Benjamin, USA, 1976.

APÉNDICE A

Construcción de una antena circular plana.

La antena de *RF* circular que se construyó está sintonizada a la frecuencia de 128 MHz correspondiente a la aplicación de un campo estático de 3T. Esta antena tiene 18 cm de diámetro interno, 18.8 cm de diámetro externo (ver figura A.1). La antena fue construida con lámina de cobre. El espectro de frecuencias de resonancia de la antena se obtuvo con un analizador de red en el intervalo de radiofrecuencias de 500 Hz a 5000 MHz.

Los pasos que se siguieron para la construcción de la antena son:

1. Se soldó uno de los extremos de un cable coaxial de 50Ω modelo *RG-58 BELDEN 8240* de 1 m de longitud a la antena en ($\phi = -90^\circ$). El otro extremo lleva un conector *BNC* que permite conectar la antena con el analizador de red.
2. Se colocó un capacitor de $75 pF$ al lado opuesto a la soldadura del cable coaxial ($\phi = 90^\circ$). El cable coaxial representa también una contribución en capacitancia.
3. Otros dos capacitores de $75 pF$ fueron puestos en ($\phi = 0^\circ$ y 180°).
4. Finalmente, para balancear la energía que almacenada por cada capacitor, se colocó un último capacitor de $51 pF$ en paralelo con el capacitor coaxial.

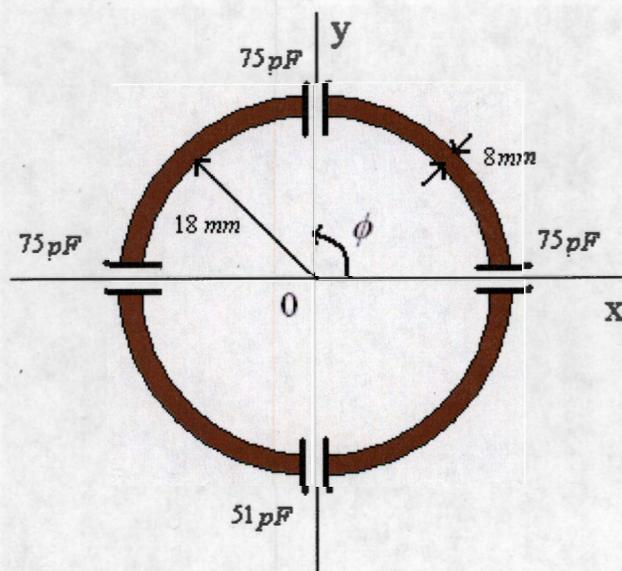


Figura A.1. Dimensiones y distribución de capacitancias de la antena circular plana construida en el laboratorio de procesamiento digital de señales e imágenes médicas.

El pico de resonancia de la antena se leyó en el analizador de red y se muestra en la figura A.2.

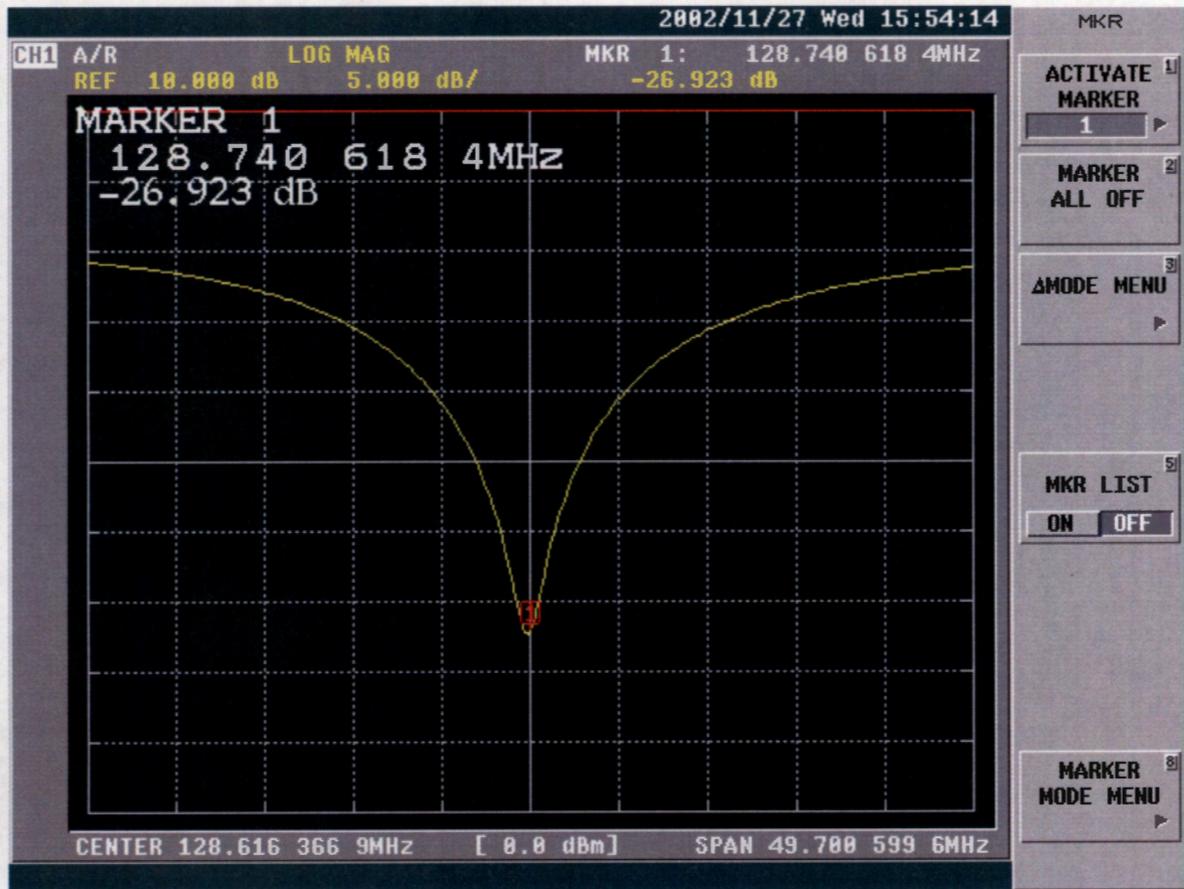


Figura A.2. Pico de resonancia de la antena.

El pico de resonancia se encuentra dentro del 10% de error permitido en el valor de la frecuencia.

La carta *Smith* del pico de resonancia se muestra en la figura A.3.

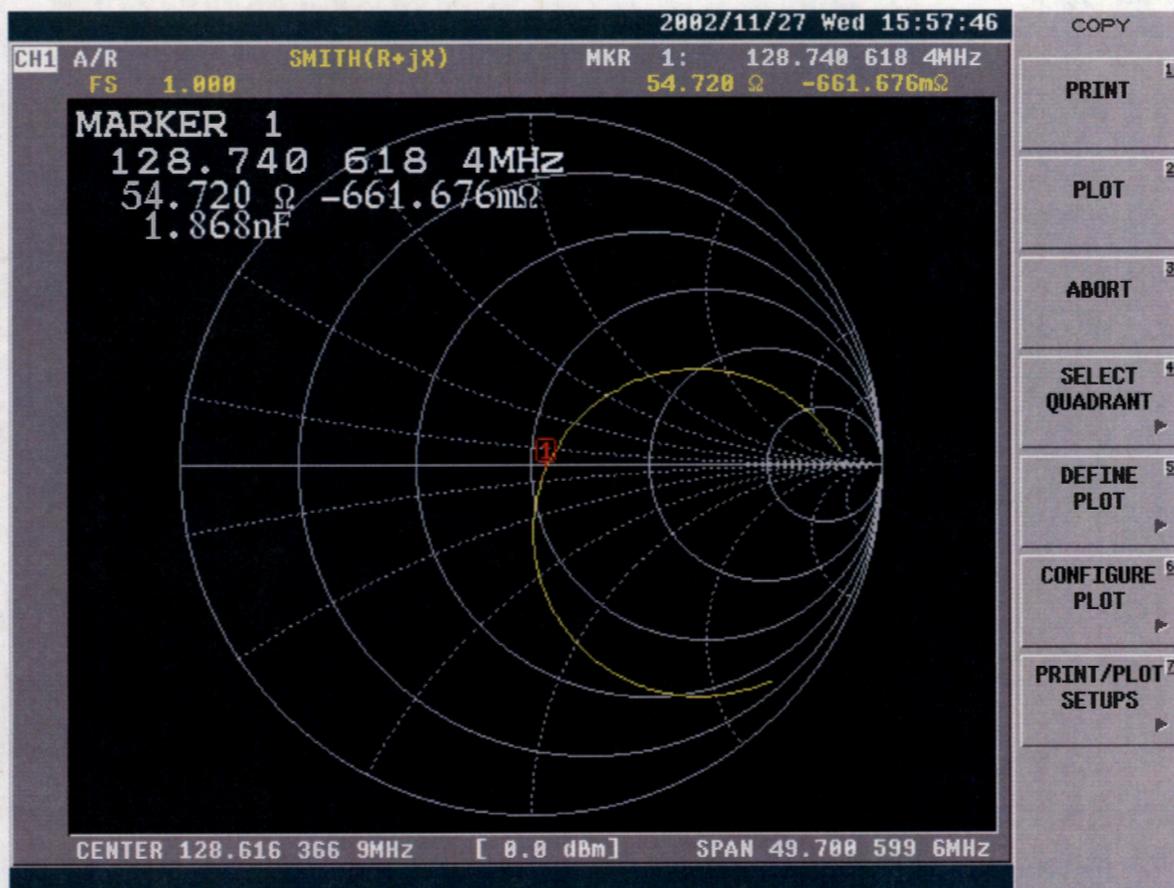


Figura A.3. Carta Smith del pico de resonancia.

La resistencia del cable y la reactancia del circuito se encuentran dentro de los valores permitidos: 55Ω para la resistencia y $\cong 0 \Omega$ para la reactancia.

APÉNDICE B

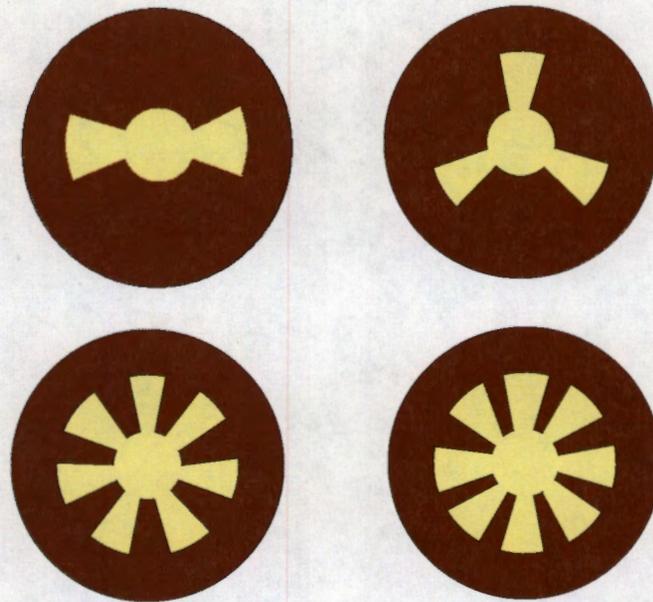


Figura B.1. Prototipos de antenas superficiales tipo magnetrón con 2, 3, 7 y 8 ranuras en forma de arcos circulares igualmente espaciados.

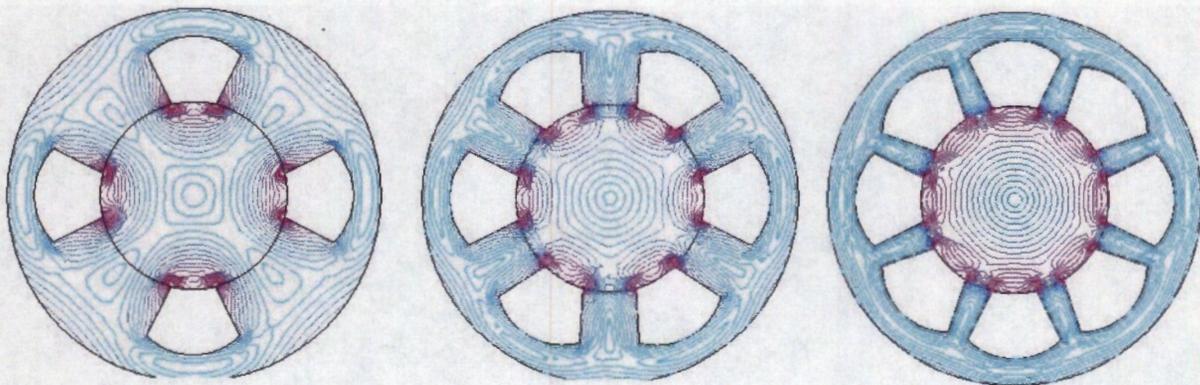


Figura B.2. Simulación del campo eléctrico producido por antenas superficiales tipo magnetrón con 4, 6 y 8 ranuras.

APÉNDICE C

Primeros 10 polinomios de Legendre $P_l(x)$ donde $x = \cos \gamma$ (Co 53):

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(-35x + 315x^3 - 693x^5 + 429x^7)$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(35 - 1260x^2 + 6930x^4 - 12012x^6 + 6435x^8)$$

$$P_9(x) = \frac{1}{128}(315x - 4620x^3 + 18018x^5 - 25740x^7 + 12155x^9)$$

Tabla C1. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una espira circular de radio $b = 0.06\text{ m}$.

$B(z)$	P_A	$*P_B = \sigma_B \omega^2 \int_V A ^2 dV$
$\frac{2.268 \times 10^{-9}}{(0.0036 + z^2)^{3/2}}$	0.00867202	Usando series de polinomios de <i>Legendre</i> $\sigma_B \omega^2 (1.13919 \times 10^{-16})$ <i>Wang et al.</i> $\sigma_B \omega^2 (1.14307 \times 10^{-16})$
Usando series de polinomios de <i>Legendre</i>		
$CSR_{circular}(z)/C = \frac{0.106247}{(0.0036 + z^2)^{3/2}}$		
<i>Wang et al.</i>		
$CSR_{circular}(z)/C = \frac{0.106066}{(0.0036 + z^2)^{3/2}}$		

$* \int_V |A|^2 dV = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{16\pi^2 b^3}{3}$ es un resultado reportado por *Wang et al.* (Wa 95) para una espira circular de radio b . Sin embargo, es posible obtener una aproximación del valor de esta integral con el método propuesto en este trabajo usando los polinomios de *Legendre*. Por ejemplo, considerando los 10 primeros términos de la serie en (3.29) se obtiene un valor de 1.13919×10^{-16} . Si comparamos este resultado aproximado con el valor reportado 1.14307×10^{-16} se tiene un error porcentual del 0.34%.

Tabla C2. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una antena superficial tipo magnetrón con n (2-5)-ranuras y valores de a, b, c, d y ϕ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 radianes, respectivamente.

n	$B(z)$	P_A	$P_B = \sigma_B \omega^2 \int_V A ^2 dV$
2	$\frac{0.000531746}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.000393015}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.00218476}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0265873 \text{Log} [0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.00982537 \text{Log} [0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0364127 \text{Log} [0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000344856	$\sigma_B \omega^2 (3.5415 \times 10^{-11})$
3	$\frac{0.000482619}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.000589522}{\sqrt{0.0016 + z^2}} -$ $\frac{0.00233214}{\sqrt{0.0036 + z^2}} - 0.024131 \text{Log} [0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0147381 \text{Log} [0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.038869 \text{Log} [0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000411098	$\sigma_B \omega^2 (2.80424 \times 10^{-11})$
4	$\frac{0.000433493}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.00078603}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.00247952}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0216746 \text{Log} [0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0196507 \text{Log} [0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0413254 \text{Log} [0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000477341	$\sigma_B \omega^2 (2.26602 \times 10^{-11})$
5	$\frac{0.000384366}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.000982537}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.0026269}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0192183 \text{Log} [0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0245634 \text{Log} [0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0437817 \text{Log} [0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000543583	$\sigma_B \omega^2 (1.76957 \times 10^{-11})$

Tabla C3. El campo magnético, las potencias perdidas por la antena y la muestra, y el cociente señal a ruido para una antena superficial tipo magnetrón con n (6-8)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 *radianes*, respectivamente.

n	$B(z)$	P_A	$P_B = \sigma_B \omega^2 \int_V A ^2 dV$
6	$\frac{0.000335239}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.00117904}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.00277428}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0167619 \text{Log}[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0294761 \text{Log}[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0462381 \text{Log}[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000609825	$\sigma_B \omega^2 (1.63818 \times 10^{-11})$
7	$\frac{0.000286112}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.00137555}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.00292166}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0143056 \text{Log}[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0343888 \text{Log}[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0486944 \text{Log}[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000676067	$\sigma_B \omega^2 (1.50004 \times 10^{-11})$
8	$\frac{0.000236985}{\sqrt{0.0004 + z^2}} + \frac{0.00157206}{\sqrt{0.0016 + z^2}} - \frac{0.00306904}{\sqrt{0.0036 + z^2}} -$ $0.0118493 \text{Log}[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2}] -$ $0.0393015 \text{Log}[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2}] +$ $0.0511507 \text{Log}[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2}]$	0.000742310	$\sigma_B \omega^2 (1.81835 \times 10^{-11})$

Tabla C4. Cociente señal a ruido calculado con los valores de las tablas II y III para una antena magnetrón con n (2-5)-ranuras y valores de a, b, c, d y φ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 *radianes*, respectivamente.

n	$CSR_{magnetrón}(z)/C$
2	$51065.7 \left(\frac{0.000531746}{\sqrt{0.0004 + 1. z^2}} + \frac{0.000393015}{\sqrt{0.0016 + 1. z^2}} - \frac{0.00218476}{\sqrt{0.0036 + 1. z^2}} - 0.0265873 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.00982537 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0364127 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$
3	$58438.3 \left(\frac{0.000482619}{\sqrt{0.0004 + 1. z^2}} + \frac{0.000589522}{\sqrt{0.0016 + 1. z^2}} - \frac{0.00233214}{\sqrt{0.0036 + 1. z^2}} - 0.024131 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0147381 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.038869 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$
4	$64899.4 \left(\frac{0.000433493}{\sqrt{0.0004 + 1. z^2}} + \frac{0.00078603}{\sqrt{0.0016 + 1. z^2}} - \frac{0.00247952}{\sqrt{0.0036 + 1. z^2}} - 0.0216746 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0196507 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0413254 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$
5	$70488.9 \left(\frac{0.000384366}{\sqrt{0.0004 + 1. z^2}} + \frac{0.000982537}{\sqrt{0.0016 + 1. z^2}} - \frac{0.0026269}{\sqrt{0.0036 + 1. z^2}} - 0.0192183 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0245634 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0437817 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$

Tabla C5. Cociente señal a ruido calculado con los valores de las tablas II y III para una antena magnetrón con n (6-8)-ranuras y valores de a , b , c , d y ϕ_0 de 0.02, 0.06, 0.04, 0.01 m y 0.244979 *radianes*, respectivamente.

n	$CSR_{\text{magnetron}}(z)/C$
6	$70363.4 \left(\frac{0.000335239}{\sqrt{0.0004 + 1 \cdot z^2}} + \frac{0.00117904}{\sqrt{0.0016 + 1 \cdot z^2}} - \frac{0.00277428}{\sqrt{0.0036 + 1 \cdot z^2}} - 0.0167619 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0294761 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0462381 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$
7	$67502. \left(\frac{0.000286112}{\sqrt{0.0004 + 1 \cdot z^2}} + \frac{0.00137555}{\sqrt{0.0016 + 1 \cdot z^2}} - \frac{0.00292166}{\sqrt{0.0036 + 1 \cdot z^2}} - 0.0143056 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0343888 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0486944 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$
8	$59628.1 \left(\frac{0.000236985}{\sqrt{0.0004 + 1 \cdot z^2}} + \frac{0.00157206}{\sqrt{0.0016 + 1 \cdot z^2}} - \frac{0.00306904}{\sqrt{0.0036 + 1 \cdot z^2}} - 0.0118493 \text{Log} \left[0.02 + \sqrt{0.0004 + z^2} \right] - 0.0393015 \text{Log} \left[0.04 + \sqrt{0.0016 + z^2} \right] + 0.0511507 \text{Log} \left[0.06 + \sqrt{0.0036 + z^2} \right] \right)$

Nota: Los símbolos *Log* que aparecen en las tablas de este apéndice se refieren al logaritmo natural *ln*. Las expresiones matemáticas para el *CSR* fueron copiadas directamente de la página de trabajo del software *Mathematica*, este software representa el logaritmo natural como *Log*[z].

