Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00050
Matrícula: 2143807552

MODELOS DE ESPACIOS-TIEMPO NO CONMUTATIVOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA

OMAR VERGARA ESPINOSA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:30 horas del día 26 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER
DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: OMAR VERGARA ESPINOSA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

VOCAL

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTARTAMENTO DE FÍSICA

MODELOS DE ESPACIOS-TIEMPO NO CONMUTATIVOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA

Tesis que presenta
Fís. Omar Vergara Espinosa
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

Casa abierta al tiempo

Asesor:
Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Jurado calificador:

Presidente: Dr. José David Vergara Oliver	**UNAM**
Secretario: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría	**UAM-I**
Vocal: Dr. Luis Octavio Pimentel Rico	**UAM-I**

México, Ciudad de México, 26 de Mayo de 2017

Agradecimientos

Al término de esta etapa de mi carrera, quiero expresar un profundo agradecimiento a varias personas. A mis padres que con su ayuda, educación y apoyo me alentaron a lograr esta complaciente realidad, gracias y más gracias Güera y Sebas, por su orientación que siempre me han dado. Gracias a mi tío Felix por el conocimiento que me concedió y me sirvió de impulso. Gracias al Dr. Marco A. Maceda Santamaría por todo lo que me enseño, por su asesoramiento en todas las etapas de este trabajo, por su tiempo y paciencia. También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca de maestría.

A todos ellos muchas gracias!

Resumen.

En la física teórica, debido a las singularidades y divergencias ocurridas en Relatividad General y Teorías de Campos respectivamente, se tiene la convicción de que es posible describir cuánticamente el campo gravitacional. Desafortunadamente la tarea de encontrar dicha teoría ha resultado ser en extremo complicada debido en gran parte a que no se cuenta con una guía experimental, sin embargo, a pesar de esto, desde medio siglo atrás hasta la actualidad, varios físicos han dado origen a distintas teorías que intentan describir cuánticamente el campo gravitacional. Algunas de estas teorías se encuentran dentro del formalismo de Geometría Diferencial No Conmutativa y John Madore es el autor de una de estas.

En esta tesis se retoma dicha teoría propuesta por John Madore y se comienza mostrando y explicando el modelo teórico de ésta. Se muestra la hipótesis, un conjunto de definiciones necesarias (entre estas la definición de espacio-tiempo no conmutativo) así como también las propiedades de los elementos involucrados en la teoría. Entre estos elementos están las constantes $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ que tienen que ver con una deformación que se hace al producto entre tetrádas y, además, estas constantes son en torno a las cuales se hacen los calculos más importantes de esta tesis.

Consecuentemente se muestra un par de espacios-tiempo modelados con la teoría presentada, los cuales cuentan con simetría esférica y, además, se introduce y hace uso de una aproximación llamada "aproximación semiclásica".

Finalmente, constriñendo al modelo teórico a tener simetría esférica y apoyandonos de la aproximación semiclásica, nos dedicamos a encontrar la forma explicita de los elemetos $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ para así determinar las consecuencias de que estos sean constantes tal como lo requiere la teoría.

Índice general

Introducción.

Desde un punto de vista experimental quizá no haya razón para buscar nuevas leyes físicas, sin embargo, desde un punto de vista teórico (matemático y conceptual) las leyes que hay hasta ahora no son completamente satisfactorias.
De acuerdo al conocimiento de hoy en día, los físicos han reducido todas las interacciones de la naturaleza que hay entre partículas a 4 fuerzas fundamentales: la fuerte, la electromagnética, la débil y la gravitacional. Las primeras tres interacciones están descritas por el Modelo Estándar de física de partículas, una teoría cuántica de campo, y excepto por la masa no nula del neutrino, no hay hechos empíricos que difieran claramente con esta teoría. Dejando a un lado las discusiones acerca de la interpretación de las teorías cuánticas, estas son consideradas teórias bien establecidas. Por otro lado, la gravedad está exitosamente modelada por la teoría de la Relatividad General, una teoría de campo clásica, y no ha habído hecho experimental conocido que muestre una clara contradicción con la teoría. En particular, un ejemplo sorprendente que corrobora experimentalmente la validez de esta teoría es el caso del púlsar PSR 1913+16 en un sistema binario: el decremento de su periódo orbital fue completamente explicado por la emisión de ondas gravitacionales predichas por la Relatividad General. No obstante, a pesar de las diferencias entre estas teorías, han habido intentos de crear una teoría híbrida que unifique los conceptos clásicos del campo gravitacional con los conceptos cuánticos de los demás campos pero dichos intentos, hasta ahora, han fallado [13].
En física la idea de unificación ha sido muy exitosa, culminando hasta ahora en el Modelo Estándar. La naturaleza cuántica de las teorías involucradas en el Modelo Estandar proporciona un marco o estructura general para todas las teorías que describen una interacción en particular, entonces, si se busca una teoría que unifique las cuatro interacciones será necesario incluir una descripción cuántica del campo gravitacional. Sin embargo, aún no se cuenta con una teoría así y, más aún, esta teoría lleva eludiendo a los físicos desde medio siglo atrás.
Tanto el electromagnetismo como la teoría de campo de Dirac, QCD o cualquier otra teoría de campo usada en física moderna, son teorías que describen la evolución de campos en un fondo fijo de espacio-tiempo. Una de las diferencias entre Relatividad General y las demás teorías de campos es que en Relatividad General el campo en consideración es el mismo espacio-tiempo de fondo (ahora no fijo sino dinámico).
Además de la busqueda de una teoría que unifique las cuatro interacciones también hay otras motivaciones para creer que existe una descripción cuántica de gravitación, por ejemplo la inevitable presencia de singularidades en Relatividad General, cuyos casos más prominentes son el big-bang y el interior de los agujeros negros. Se esperaría que una teoría más fundamental de gravitación no prediga singularidad alguna.
Uno de los principales problemas de encontrar una teoría cuántica de gravedad es la ca-

rencia de una guía experimental ya que las escalas en las cuales los efectos cuánticos de la gravedad deben ser relevantes están lejos de ser explorables directamente. Este conjunto de escalas se conoce bajo el nombre genérico de escala de Planck: longitud de Planck ($l_P := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-35} m$), tiempo de Planck ($t_P := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.3 \times 10^{-44} s$) y masa de Planck ($m_P := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.1 \times 10^{-5} g$).

En la década de 1930 las teorías de campos aún no podían resolver satisfactoriamente problemas relacionados con interacciones entre materia y campos. El problema estribaba en suponer interacciones puntuales y al hacer los cálculos correspondientes aparecían infinitos que muchas veces, con el fin de remediarlos, hacian necesario el uso de un cut-off, sin embargo, estos se elegían de una forma un tanto arbitraria lo cual incomodaba a muchos físicos y era fuente continua de muchas discrepancias en los cálculos teóricos. Esta aparición de infinitos o divergencias ultravioletas es una característica bien conocida de las teorías de campos así que algunos físicos como W. Heisenberg y otros se vieron atraídos por la idea de discretizar el espacio-tiempo, es decir, modificar la estructura microscópica del espacio-tiempo modelando este como un conjunto de celdas pequeñas (en la escala de Planck) pero de ancho finito. Esta idea era atractiva porque estas pequeñas celdas que constituirían el espacio-tiempo podrían funcionar como un cut-off (que justificaría la finitud a las divergencias ocurridas en los cálculos). Entonces, probablemente este hecho proporciona un indicio de que a escalas de longitud pequeña el espacio-tiempo podría estar discretizado.
El problema de esta idea era que dicha discretización del espacio-tiempo violaba la invarianza de Lorentz, una simetría que constituye uno de los pilares de la Relatividad Especial. En 1947 H. S. Snyder propuso una solución a este problema [28] mostrando que mediante el uso de coordenadas no conmutativas era posible obtener una discretización del espacio-tiempo con algunas de las propiedades deseadas, además de respetar invarianza de Lorentz. Sin embargo su propuesta llegó al mismo tiempo en que la renormalización (un camino para curar las divergencias de las teorías de campos) hizo predicciones satisfactorias y por tanto dicha propuesta pasó desapercibida por la mayoría.
La no conmutatividad no es algo nuevo en la física, es usada en teorías de campo, supersimetría, dimensiones extra, Modelo Estándar, física del estado sólido, etcetera pero uno de los ejemplos más conocidos y con mejores resultados es la Mecánica Cuántica. A finales del siglo XIX y en el siglo XX se hicieron grandes aportaciones a la física que posteriormente dieron lugar al nacimiento de la Mecánica Cuántica. Algunos autores de estas aportaciones son Planck quien estudiando la radiación del cuerpo negro propuso que la energía es radiada y absorbida en forma de cuántos, Bohr por su parte dijo que el momento angular del electrón en un átomo debía ser discreto, y Einsten fue quien explicó el efecto fotoeléctrico modelando la luz como un haz de partículas. Todas estas aportaciones son un resultado particular de lo que W. Heisenberg afirmó [7]: "Las observables físicas están gobernadas por un álgebra no conmutativa", lo cual motivó el formalismo de la mecánica matricial. Heisenberg sabía de las limitaciones de la Mecánica Clásica, en donde el álgebra de funciones sobre el espacio fase, álgebra a la cual pertenecen las observables, es conmutativa y por ende la reemplazó por lo que ahora conocemos como Mecánica Cuántica, en donde los operadores asociados a las observables no conmutan.
La no conmutatividad es el concepto matemático central que expresa la incertidumbre de la Mecánica Cuántica y un aspecto de suma importancia de esta teoría es el principio de

incertidumbre de Heisenberg. Este principio, al no permitir mediciones simultáneas con precisión arbitraria de dos variables canónicas conjugadas, implica una discretización en el espacio fase, es decir, desaparece el concepto de punto en el espacio fase y se habla entonces de celdas. Ahora, razonando de manera análoga, podemos ver que es posible extrapolar esta idea a Relatividad General, es decir, podemos hacer uso de un principio de incertidumbre entre coordenadas espaciotemporales e inducir así una discretización del espacio-tiempo. Gracias a la relación Robertson-Schrodinger [15] sabemos que una manera de hacer surgir dicho principio de incertidumbre es proponer un conjunto de relaciones de (anti) conmutación entre las coordenadas de espacio-tiempo.

La Mecánica Cuántica no relativista ha servido de inspiración para estudiar espacios no conmutativos para los cuales las herramientas clásicas de matemáticas no son adecuadas. Uno de los principales cambios que resulta de pasar del caso conmutativo al no conmutativo es la perdida de la noción de punto, Geometría No Conmutativa es una geometría sin puntos.
En este trabajo, con el fin de estudiar efectos de gravitación a escalas de longitud microscópica, se retomará la idea de discretizar el espacio-tiempo. Guiados por la experiencia de discretizar el espacio fase en la Mecánica Cuántica, vemos que Geometría No Conmutativa nos ofrece así una manera de proponer y modelar la discretización del espacio-tiempo.

Propuestas para definir gravedad no conmutativa hay varias, por ejemplo mediante el uso de un producto estrella. Esta propuesta es la más popular y consiste en reemplazar el producto usual entre elementos de $C(M)$ (funciones acotadas y continuas sobre alguna variedad M) por un producto deformado al que se le llama producto estrella: el producto estrella más simple es el de Groenewold-Moyal (más detalles sobre este producto estrella se encuentran al inicio el capítulo 2). Otro ejemplo de gravedad no conmutativa es gravedad deformada con twist [26]: esta propuesta consiste en deformar la regla de Leibniz introduciendo para ello un operador llamado twist al que se hace actuar sobre un par de tensores antes de que estos sean multiplicados de la forma usual dando origen a un producto estrella. La desventaja de esta propuesta es que las ecuaciones de campo gravitacional deformadas resultan ser ecuaciones diferenciales parciales con derivadas hasta orden arbitrario, lo cual las complica bastante al grado en que, a priori, no se tiene claro que existan soluciones exactas [26]. Otro ejemplo de gravedad no conmutativa es el de estados coherentes [21]: esta propuesta consiste en considerar un álgebra A no conmutativa que contiene operadores $\hat{x}^\mu$ asociados a las coordenadas. Además, dentro de esta álgebra también se definen operadores de escalera $\hat{z}(\hat{x}^\mu)$, $\hat{z}^\dagger(\hat{x}^\mu)$ y los eigenestados de estos, los cuales se llaman estados coherentes, permiten calcular promedios $\langle \hat{F}(\hat{x}^\mu)\rangle$ con $\hat{F}(\hat{x}^\mu)$ el operador asociado a alguna observable. Una novedad de esta propuesta es que la fuente en la ecuación de Green asociada a algunos propagadores deja de ser una delta de Dirac y se vuelve una distribución Gaussiana.

Este trabajo, en el cual seguiremos la propuesta a gravedad no conmutativa presentada por John Madore en algunos de sus artículos [3, 4, 2], está dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 1, con el fin de introducir el concepto de tetrádas que será muy usado en capítulos posteriores, se comienza por hablar de manera muy breve sobre algunos conceptos de Relatividad General tales como espacio tangente y espacio cotangente, consecuentemente, se mostrará la hipótesis sobre la cual está basado este trabajo así como también el marco teórico. Esta parte es autocontenida proporcionando definiciones importantes (entre ellas la definición de espacio-tiempo no conmutativo propuesta por John Madore) y cálculos que muestran las propiedades de los elementos involucrados en la teoría. En el capítulo 2, con el fin de introducir al lector de manera más concreta y directa con la teoría, se muestra con gran detalle en los cálculos un par de ejemplos de espacios-tiempo no conmutativos con simetría esférica [3]. Además, al inicio de este segundo capítulo se muestran las aproximaciones (que llamaremos "aproximación semiclásica") que serán bastantemente usadas en los Capítulos 2 y 3. El Capítulo 3 es el más largo y en él encontraremos los cálculos más importantes de este trabajo que tienen que ver con la deducción de un conjunto de elementos que simbolizaremos como $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$. Estos elementos están relacionados con la no conmutatividad de las tetrádas y también están presentes en la forma explícita de otros elementos también involucrados en la teoría. En este trabajo se manejan unidades $c = \hbar = 1$.

Capítulo 1

Estructura de Espacio-Tiempo No Conmutativo.

1.1. Relatividad General y el concepto de tetrádas.

Relatividad General es una teoría de la física que modela el campo gravitacional como una variedad diferenciable en 4 dimensiones, 3 espaciales y una temporal. Esta variedad debe contar con un tensor simétrico de rango 2 que describe la geometría del espacio-tiempo. Dicho tensor lleva por nombre tensor métrico (o simplemente métrica), y debe ser solución del siguiente conjunto de ecuaciones (escritas en unidades $G = c = 1$)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura, $g_{\mu\nu}$ la métrica y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento. Las ecuaciones (1.1) son las llamadas *ecuaciones de campo de Einstein para la Relatividad General* (con constante cosmológica $\Lambda = 0$). Estas nos dicen que la distribución de masa y energía (lado derecho) en el espacio-tiempo induce una deformación (curvatura) en la geometría (lado izquierdo) de dicho espacio que físicamente se manifiesta como gravedad.

Sobre este espacio-tiempo, es decir, sobre esta variedad diferencial M que manejaremos con algún sistema de coordenadas $\{u^\gamma\}_{\gamma=0}^{3}$, está definida un álgebra conmutativa de funciones $C(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$ que nos interesará saber como cambia conforme nos desplazamos sobre M. Para esto definimos un espacio vectorial $Der(M)$ que lleva por nombre *espacio tangente* (o simplemente espacio de derivaciones) tal que cada elemento $V \in Der(M)$ será un operador derivada direccional que se escribe como

$$V = V^\mu \partial_\mu,$$

donde ∂_μ es un elemento de la base canónica de $Der(M)$ y $V^\mu \in C(M)$. El espacio $Der(M)$ tiene asociado un espacio dual $\Omega^1(M)$ que se le llama *espacio cotangente* (o espacio de 1-formas) y cada elemento $W \in \Omega^1(M)$ se escribe como

$$W = W_\nu du^\nu,$$

donde du^ν es un elemento de la base canónica de $\Omega^1(M)$ y $W_\nu \in C(M)$. El hecho de que $Der(M)$ y $\Omega^1(M)$ sean espacios duales significa que tenemos definida una operación binaria, bilineal dada por

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \Omega^1(M) \times Der(M) \longrightarrow C(M), \tag{1.2}$$

tal que los elementos de las bases $Der(M)$ y $\Omega^1(M)$ satisfacen la *condición de dualidad* escrita como

$$\langle du^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu. \tag{1.3}$$

La operación binaria (1.2) junto con (1.3) nos permite ver a $Der(M)$ y a $\Omega^1(M)$ como espacios vectoriales de funciones lineales dadas respectivamente por

$$f : \Omega^1(M) \longrightarrow C(M) \qquad \text{y} \qquad f^* : Der(M) \longrightarrow C(M).$$

Visto así podemos reescribir (1.3) como

$$du^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(du^\mu) = \delta^\mu_\nu.$$

Estos dos espacios, el tangente y el cotangente, nos permiten construir un cálculo diferencial. Para ello el diferencial de una función $f \in C(M)$ se escribe en términos de las bases de estos dos espacios como:

$$df = \partial_\mu\,(f)\ du^\mu. \tag{1.4}$$

Además, dado un elemento arbitrario $df \in \Omega^1(M)$ y un $V \in Der(M)$, definimos

$$df(V) = V(df) := V(f). \tag{1.5}$$

Previamente se dijo que las bases canónicas de los espacios $Der(M)$ y $\Omega^1(M)$ están dadas respectivamente por

$$\{\partial_\gamma\}^3_{\gamma=0} \qquad \text{y} \qquad \{du^\gamma\}^3_{\gamma=0}\,,$$

sin embargo, tenemos la libertad de utilizar cualquier otra base de estos espacios. En general una base de $\Omega^1(M)$ se escribe como

$$\theta^\mu = G^\mu{}_\nu\, du^\nu, \tag{1.6}$$

donde $G^\mu{}_\nu \in C(M)$. Con el fin de lograr escribir las du^μ en términos de las θ^μ, pedimos que $G^{-1\,\mu}{}_\nu$ exista. A estos elementos linealmente independientes θ^μ que conforman una base de $\Omega^1(M)$ (distinta de la canónica) se les llaman *tetrádas*. Cabe decir que un cambio en la base de $\Omega^1(M)$ implica un correspondiente cambio en la base de $Der(M)$, de lo contrario (1.3) no se cumpliría. Este correspondiente cambio en la base de $Der(M)$, base que denotaremos como $\{e_\nu\}$, está dada por

$$e_\nu = G^{-1\,\mu}{}_\nu\, \partial_\mu, \tag{1.7}$$

donde $\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ se satisface. Por tanto las bases $\{e_\nu\}$ y $\{\theta^\mu\}$ son también bases duales y, a diferencia de (1.4), el diferencial de $f \in C(M)$ escrito en términos de estas bases es

$$df = e_\nu\,(f)\ \theta^\nu. \tag{1.8}$$

Una característica que nos interesará de las tetrádas es que mediante una adecuada elección de los elementos $G^{\mu}{}_{\nu}$ tenemos que la métrica, escrita en términos de éstas, adquiere una forma mucho más sencilla (incluso constante) que usando la base $\{du^{\nu}\}$. Como ejemplo tomaremos el siguiente espacio bidimensional cuya métrica está dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{pmatrix} dx^0, & dx^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^2 - h^2 & fg + hk \\ fg + hk & g^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \end{pmatrix} \\ &= \left(fdx^0 + gdx^1\right)^2 - \left(hdx^0 - kdx^1\right)^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

definiendo la base de tetrádas de este espacio como

$$\begin{aligned} \theta^0 &:= fdx^0 + gdx^1, \\ \theta^1 &:= hdx^0 - kdx^1, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\theta^0\right)^2 - \left(\theta^1\right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} \theta^0, & \theta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde f, h, k y g son funciones de x^0 y x^1. De (1.9) y (1.10) se puede ver como la métrica en términos de $\{du^{\nu}\}$ es un poco complicada pero reescrita en términos de $\{\theta^{\nu}\}$ la métrica se vuelve constante, de esta forma el uso de tetrádas nos permite extraer la complejidad de la métrica y depositarla en la base del espacio Cotangente. El uso de esta base de tetrádas se denomina el *Formalismo de marcos móviles de Cartan*.
Hasta aquí lo que hemos visto ha sido un breve repaso de algunos conceptos de Relatividad General, teoría cuya herramienta matemática es la Geometría Diferencial Clásica (donde por clásica nos referimos a conmutativa).

1.2. Hipótesis y modelo teórico.

El modelo teórico que se mostrará y discutirá posteriormente está basado en la siguiente hipótesis:

A escalas de longitud macroscópica (esto es, equiparables con nuestro sistema solar y mayores) el espacio-tiempo está bien descrito por la teoría de la Relatividad General, es decir, el espacio-tiempo está modelado como una variedad diferencial cuyo tensor métrico satisface las ecuaciones de campo dadas por (1.1) pero, cuando nos acercamos a escalas de longitud muy pequeña (esto es, equiparables con la longitud de Planck: $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.6\,(10^{-35})\,m$***) se comienza a manifestar una ausencia de localización y se pierde la noción de punto, más***

precisamente, el espacio-tiempo se vuelve discreto. (Esta hipótesis se encuentra en la introducción del capítulo 7 del libro [17])

La forma en que modelaremos la discretización del espacio-tiempo mencionada en la hipótesis está, en cierta forma, inspirada en la Mecánica Cuántica no relativista. En Mecánica Cuántica se tienen relaciones de conmutación entre coordenadas y momentos, y estas relaciones, a su vez, conllevan a el principio de incertidumbre de Heisenberg logrando así una discretización del espacio fase. De forma análoga, impondremos relaciones de conmutación entre las coordenadas logrando así una discretización en el espacio-tiempo. Al igual que en la Mecánica Cuántica aquí haremos una especie de cuantización en el sentido de que promoveremos las coordenadas del espacio-tiempo a operadores que no conmutan y los operadores derivada los promoveremos a conmutadores; más adelante mostraremos los detalles.
Antes de dar nuestra definición de espacio-tiempo no conmutativo comenzaremos dando la definición de una $*$-álgebra ([12, 18]).

Definición:
Sea A un álgebra asociativa sobre el campo $\mathbb{C}$, sean $a, b \in A$ y $\gamma \in \mathbb{C}$. Si A está equipado con un mapeo $(\,\cdot\,)^* : A \longrightarrow A$ que llamaremos *involución* tal que

$$\begin{aligned} (a^*)^* &= a \\ (a+b)^* &= a^* + b^* \\ (\gamma a)^* &= \bar{\gamma} a^* \\ (ab)^* &= b^* a^*, \end{aligned}$$

donde $\bar{\gamma}$ significa complejo conjugado de γ, entonces decimos que A es una $*$-álgebra o (álgebra involutiva). Además, si se cumple

$$a^* = a,$$

diremos que a es un elemento hermitiano y, si se cumple

$$a^* = -a,$$

diremos que a es un elemento antihermitiano.

Definimos un espacio-tiempo no conmutativo [17, 3, 4, 2, 16] como una $*$-álgebra $\mathcal{A}$ asociativa (ante el producto y la suma), generada por cuatro operadores hermitianos $\{u^\mu\}_{\mu=0}^{3}$ que juegan el papel de las coordenadas y satisfacen la regla de conmutación dada por

$$[u^\mu, u^\nu] = i\bar{k} J^{\mu\nu}, \tag{1.11}$$

donde $\bar{k}$ es una constante real, con unidades de área. Se asume que esta constante es del orden del cuadrado de la longitud de Planck y es una escala de área fundamental en la cual los efectos no conmutativos se vuelven relevantes. Cabe notar que el límite conmutativo lo alcanzaremos haciendo $\bar{k} \longrightarrow 0$. Por otra parte, los elementos $J^{\mu\nu} \in \mathcal{A}$ en principio están indeterminados, dependen del sistema a analizar y son adimensionales. Además, por las propiedades de los conmutadores satisfacen claramente la relación

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}. \tag{1.12}$$

También, aplicando la involución a (1.11) tenemos que

$$\begin{aligned} -i\hbar J^{\mu\nu *} &= (u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu)^* \\ &= (u^\mu u^\nu)^* - (u^\nu u^\mu)^* \\ &= u^{\nu *} u^{\mu *} - u^{\mu *} u^{\nu *} \\ &= u^\nu u^\mu - u^\mu u^\nu \\ &= i\hbar J^{\nu\mu} \\ &= -i\hbar J^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow J^{\mu\nu *} = J^{\mu\nu}, \tag{1.13}$$

es decir, los elementos $J^{\mu\nu}$ son hermitianos. Dado que $\mathcal{A}$ es asociativa sus generadores satisfacen la identidad de Jacobi, entonces tenemos

$$\left[u^\lambda, [u^\mu, u^\nu]\right] + \left[u^\mu, \left[u^\nu, u^\lambda\right]\right] + \left[u^\nu, \left[u^\lambda, u^\mu\right]\right] = 0. \tag{1.14}$$

Sustituyendo (1.11) en ésta última ecuación obtenemos

$$\left[u^\lambda, J^{\mu\nu}\right] + \left[u^\mu, J^{\nu\lambda}\right] + \left[u^\nu, J^{\lambda\mu}\right] = 0, \tag{1.15}$$

esta última constituye una constricción para los elementos $J^{\mu\nu}$.
Vale la pena mencionar que en realidad $\mathcal{A}$ tiene cinco generadores y estos están dados por el conjunto $\{u^0, u^1, u^2, u^3, \mathbf{1}\}$ con $\mathbf{1}$ la identidad multiplicativa de algún campo (campo que no especificamos en este momento ya que este dependerá de la representación de los elementos u^μ que aún no fijamos). Sin embargo, de aquí en adelante, cuando mencionemos a los generadores de $\mathcal{A}$ nos referiremos únicamente a los elementos u^μ pero tendremos en mente que hay un quinto generador que gracias a él el campo está contenido en $\mathcal{A}$.
En las siguientes subsecciones de este capítulo se hará mención del concepto "modulo izquierdo" (y derecho) así que a continuación lo definimos [19].

Anillo: Si $\boldsymbol{R}$ es un conjunto de elementos equipado con dos operaciones binarias $(+)$ y $(\cdot)$ llamadas adición y multiplicación respectivamente, entonces, llamaremos a $\boldsymbol{R}$ anillo si este satisface las siguientes tres propiedades

i) $(\boldsymbol{R}, +)$ es un grupo abeliano, esto es:

  a) $a + b \in \boldsymbol{R}$, con $a, b \in \boldsymbol{R}$

  b) $(a + b) + c = a + (b + c)$, con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$

  c) $\exists!\ 0_{\boldsymbol{R}} \in \boldsymbol{R}$ tal que $0_{\boldsymbol{R}} + a = a = a + 0_{\boldsymbol{R}}\ \ \forall a \in \boldsymbol{R}$

  d) $\forall a \in \boldsymbol{R}$, $\exists!\ b \in \boldsymbol{R}$ tal que $a + b = 0 = b + a$

  e) $a + b = b + a$, con $a, b \in \boldsymbol{R}$

ii) $(\boldsymbol{R},\cdot)$ es un semigrupo

a) $a \cdot b \in \boldsymbol{R}$, con $a, b \in \boldsymbol{R}$

b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$

iii) Se satisfacen las leyes distrubutivas

a) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}\right\}$, con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

Modulo Izquierdo: Consideremos un anillo $\boldsymbol{R}$ (conmutativo o no y con o sin la identidad multiplicativa 1). Un $\boldsymbol{R}$-modulo izquierdo $\boldsymbol{M}$ es un grupo abeliano $(\boldsymbol{M}, +)$ equipado con un mapeo $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ (al que llaman multiplicación por escalar) tal que

I) $a(x + y) = ax + ay$, $\forall a \in \boldsymbol{R}$ y $x, y \in \boldsymbol{M}$

II) $(a + b)x = ax + bx$, $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$ y $x \in \boldsymbol{M}$

III) $(ab)x = a(bx)$, $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$ y $x \in \boldsymbol{M}$

Si $\boldsymbol{M}$, en lugar de estar equipado con $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ está equipado con $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{M}$ (y además es un grupo abeliano $(\boldsymbol{M}, +)$ que satisface relaciones análogas a I), II) y III)), entonces, $\boldsymbol{M}$ es un $\boldsymbol{R}$-modulo derecho, y si tiene ambas (producto por escalar por la izquierda y por la derecha) entonces es un bimodulo (con respecto a $\boldsymbol{R}$).

1.2.1. Espacio de derivaciones $Der(\mathcal{A})$ en $\mathcal{A}$.

Ahora, con el fin de definir el diferencial de un elemento $f \in \mathcal{A}$ y con ello construir un cálculo diferencial, introducimos un espacio de derivaciones $Der(\mathcal{A})$ que será la contraparte no conmutativa del espacio tangente mencionado en la Sección 1.1. La base asociada a $Der(\mathcal{A})$ está dada por el conjunto de operadores

$$\{e_\mu(\,\cdot\,) := [\lambda_\mu,\,\cdot\,]\}_{\mu=0}^{3}\,, \tag{1.16}$$

tal que los elementos $\{\lambda_\mu\}_{\mu=0}^{3} \subset \mathcal{A}$ son antihermitianos (ver Sección 3.1 de [17] y las referencias [3, 4]), i.e.

$$\lambda_\mu^* = -\lambda_\mu. \tag{1.17}$$

La transición de derivadas parciales usuales $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a las derivadas en términos de conmutadores es análoga a la transición de los paréntesis de Poisson clásicos a los conmutadores [7]. La condición (1.17) tiene como consecuencia la siguiente condición de realidad. Usando la involución sobre (1.16) tenemos

$$\begin{aligned} \left(e_\mu\left(f\right)\right)^* &= [\lambda_\mu, f]^* \\ &= \left(\lambda_\mu f\right)^* - \left(f \lambda_\mu\right)^* \\ &= f^* \lambda_\mu^* - \lambda_\mu^* f^* \\ &= -\left(f^* \lambda_\mu - \lambda_\mu f^*\right) \\ &= -\left[f^*, \lambda_\mu\right] \\ &= \left[\lambda_\mu, f^*\right], \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(e_\mu\left(f\right)\right)^* = e_\mu\left(f^*\right). \tag{1.18}$$

La ecuación (1.18) es la *condición de realidad para las derivaciones* (ver Sección 2.1 de [17]).Vale la pena hacer un par de observaciones sobre el conjunto de derivaciones $\{e_\mu\}_{\mu=0}^3$. Primero notemos que éste satisface la regla de Leibniz de derivada de un producto como a continuación se muestra. Sea $f, g, h \in \mathcal{A}$, aplicamos un operador derivada dado por (1.16) al producto fg

$$\begin{aligned} e_\mu\left(fg\right) &= \left[\lambda_\mu, fg\right] \\ &= f\left[\lambda_\mu, g\right] + \left[\lambda_\mu, f\right] g, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow e_\mu\left(fg\right) = f e_\mu\left(g\right) + e_\mu\left(f\right) g. \tag{1.19}$$

Ahora hagamos una segunda observación. Definamos el operador $X_\mu^D(\ \cdot\ ) := e_\mu(\ \cdot\ )h$ y apliquemoslo al producto fg, entonces

$$\begin{aligned} X_\mu^D(fg) &= e_\mu(fg)h \\ &= \left[\lambda_\mu, fg\right] h \\ &= \underbrace{f\left[\lambda_\mu, g\right] h}_{=fX_\mu^D(g)} + \underbrace{\left[\lambda_\mu, f\right] gh}_{\neq X_\mu^D(f)g}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

De (1.20) podemos ver que, dado que g y h no conmutan en general, el operador X_μ^D no satisface la regla de Leibniz de derivada de un producto y por lo tanto $X_\mu^D \notin Der(\mathcal{A})$, es decir, $Der(\mathcal{A})$ no es un $\mathcal{A}$-modulo derecho. Del mismo modo podría mostrarse que $X_\mu^I(\ \cdot\ ) := he_\mu(\ \cdot\ )$ no satisface la regla de Leibniz de derivada de un producto, entonces $X_\mu^I \notin Der(\mathcal{A})$, es decir $Der(\mathcal{A})$ tampoco es un $\mathcal{A}$-modulo izquierdo. También debemos notar que si $h = cte := h_c$ entonces $e_\mu h_c, h_c e_\mu \in Der(\mathcal{A})$. Con esto podemos ver que X_μ^D y X_μ^I pertenecen a $Der(\mathcal{A})$ únicamente si estos satisfacen la regla de Leibniz de derivada de un producto, es decir, únicamente si h conmuta con todos los elementos en $\mathcal{A}$.

1.2.2. Espacio de 1-formas $\Omega^1(\mathcal{A})$ en $\mathcal{A}$.

Ahora, también con el fin de definir el diferencial de un $f \in \mathcal{A}$, extrapolamos el formalismo de marcos móviles de Cartan visto en la Sección 1.1 al caso no conmutativo, esto es, introducimos un espacio $\Omega^1(\mathcal{A})$ de 1-formas (este espacio será la contraparte no conmutativa del espacio cotangente mencionado en la Sección 1.1) cuya base es un conjunto de tetrádas no conmutativas (posteriormente se hablará con detalle de esta no conmutatividad entre ellas) linealmente independientes dadas por

$$\left\{\theta^\mu = G^\mu{}_\nu\, du^\nu\right\}_{\mu=0}^3, \tag{1.21}$$

con $G^\mu{}_\nu \in \mathcal{A}$ una matriz invertible. Adicionalmente pedimos

$$\theta^{\mu *} = \theta^\mu. \tag{1.22}$$

Esta última propiedad de los θ^μ y muchas otras relaciones dadas en lo que resta de este capítulo pueden consultarse en la sección 3.1 de [17]. A diferencia de $Der(\mathcal{A})$, el espacio

$\Omega^1(\mathcal{A})$ sí es un $\mathcal{A}$-bimodulo, es decir: $f\theta^\mu, \theta^\mu f \in \Omega^1(\mathcal{A})$. Ya que hemos introducido los espacios $\Omega^1(\mathcal{A})$ y $Der(\mathcal{A})$, en analogía al caso conmutativo, definimos el diferencial de un $f \in \mathcal{A}$ como

$$\begin{aligned} df &:= e_\mu(f)\,\theta^\mu \\ &= [\lambda_\mu, f]\,\theta^\mu. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Notemos que para el caso $f = u^\nu$ tenemos

$$\begin{aligned} du^\nu &= [\lambda_\mu, u^\nu]\,\theta^\mu \\ &= G^{-1\nu}{}_\mu\,\theta^\mu, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [\lambda_\mu, u^\nu] = G^{-1\nu}{}_\mu, \tag{1.24}$$

con $G^{-1\nu}{}_\mu$ definida en (1.21). Al igual que en las derivaciones, para las 1-formas tenemos una condición de realidad. Aplicando la involución sobre (1.23) obtenemos

$$\begin{aligned} (df)^* &= (e_\nu(f)\,\theta^\nu)^* \\ &= (\theta^\nu)^*\,(e_\nu(f))^* \\ &= \theta^\nu\, e_\nu(f^*) \\ &= e_\nu(f^*)\,\theta^\nu, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (df)^* = d\,(f^*)\,. \tag{1.25}$$

La ecuación (1.25) es la *condición de realidad para las 1-formas*. En este último procedimiento se ha usado la propiedad $[\theta^\mu, f] = 0\ \forall f \in \mathcal{A}$ que aún no se ha mostrado pero se hará a continuación. Análogamente al caso conmutativo, pediremos que $\Omega^1(\mathcal{A})$ y $Der(\mathcal{A})$ sean espacios duales, es decir, definiremos una operación binaria bilineal $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle := \Omega^1(\mathcal{A}) \times Der(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$\langle \theta^\mu, e_\nu \rangle = \theta^\mu(e_\nu) := \delta^\mu_\nu, \tag{1.26}$$

donde la primera igualdad es sólo notación. Dado que $\Omega^1(\mathcal{A})$ es $\mathcal{A}$-bimodulo debemos definir la acción de $\theta^\mu f$ sobre e_ν y esta queda como

$$(\theta^\mu f)\,(e_\nu) := \theta^\mu\,(e_\nu)\,f, \tag{1.27}$$

y naturalmente: $(f\theta^\mu)\,(e_\nu) := f\theta^\mu\,(e_\nu)$ (el uso de la definición (1.27) se puede ver en [17, 2]). La ecuación (1.26) tiene una importante consecuencia que mostraremos a continuación. Sea $f \in \mathcal{A}$, de (1.26) se tiene que

$$\begin{aligned}(f\theta^\mu)(e_\nu) &= f\delta^\mu_\nu \\ &= \delta^\mu_\nu f \\ &= \theta^\mu(e_\nu)f \\ &= (\theta^\mu f)(e_\nu),\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\Longrightarrow f\theta^\mu = \theta^\mu f. \tag{1.29}$$

También, en analogía a (1.5), definimos

$$df(e_\nu) := e_\nu(f). \tag{1.30}$$

Hay que notar que (1.29) es una propiedad exclusiva de las tetrádas (propiedad que surge como consecuencia de la condición (1.26)) y, por tanto, un elemento arbitrario $df \in \Omega^1(\mathcal{A})$ no la satisface como se muestra a continuación. Sean $f, g \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}[g\, df](e_\nu) &= g\,[df(e_\nu)] \\ &= g e_\nu(f) \\ &= g\,[\lambda_\nu, f],\end{aligned} \tag{1.31}$$

por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}[(df)g](e_\nu) &= [df(e_\nu)]\,g \\ &= e_\nu(f)g \\ &= [\lambda_\nu, f]\,g \neq g\,[\lambda_\nu, f],\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\Longrightarrow (df)g \neq g(df). \tag{1.33}$$

Notemos que en la primera igualdad de (1.32) se usó la definición (1.27). Ahora, definimos $\theta \in \Omega^1(\mathcal{A})$ como

$$\theta := -\lambda_\alpha\theta^\alpha. \tag{1.34}$$

Usando las propiedades (1.22) y (1.29) de las tetrádas, así como la propiedad (1.17) de las λ_α se puede encontrar una propiedad de θ como a continuación se muestra. Aplicando la involución a (1.34)

$$\begin{aligned}\theta^* &= (-\lambda_\alpha\theta^\alpha)^* \\ &= -\theta^{\alpha *}\lambda^*_\alpha \\ &= \theta^\alpha\lambda_\alpha \\ &= \lambda_\alpha\theta^\alpha,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \theta^* = -\theta. \tag{1.35}$$

También, usando θ podemos reescribir (1.23) como

$$\begin{aligned} df &= [\lambda_\mu, f]\,\theta^\mu \\ &= \lambda_\mu f\theta^\mu - f\lambda_\mu\theta^\mu \\ &= \lambda_\mu\theta^\mu f - f\lambda_\mu\theta^\mu \\ &= -\left(\theta f - f\theta\right), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow df = -\left[\theta, f\right]. \tag{1.36}$$

1.2.3. No conmutatividad de las tetrádas.

Definimos el producto entre elementos de $\Omega^1(\mathcal{A})$ como [17]

$$ab := \Pi\left(a \otimes b\right), \quad \text{con } \; a, b \in \Omega^1(\mathcal{A}), \tag{1.37}$$

donde $\Pi : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^2(\mathcal{A})$ es una operación $\mathcal{A}$-lineal e idempotente ($\Pi^2 = \Pi$) dada por

$$\Pi\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) := P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta, \tag{1.38}$$

con $P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$ y $\Omega^2(\mathcal{A})$ el espacio de 2-formas (cuya base por ahora no conocemos). Ahora, obtengamos una consecuencia de la idempotencia y $\mathcal{A}$-linealidad de Π. De (1.38) se puede ver que

$$\begin{aligned} \Pi^2\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) &= \Pi\left(P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta\right), \\ \Pi\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) &= P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\Pi\left(\theta^\alpha \otimes \theta^\beta\right) \\ &= P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,P^{\alpha\beta}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^\epsilon \otimes \theta^\rho \\ &= P^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^\epsilon \otimes \theta^\rho, \end{aligned}$$

dado que en las últimas dos igualdades de este último desarrollo tenemos sumatorias sobre elementos linealmente independientes (elementos $\theta^\epsilon \otimes \theta^\rho$ de la base de $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \Omega^1(\mathcal{A})$) podemos igualar coeficiente a coeficiente y encontramos que

$$P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,P^{\alpha\beta}{}_{\epsilon\rho} = P^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}. \tag{1.39}$$

De (1.37) y (1.38) podemos ver que

$$\theta^\mu\theta^\nu = P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \tag{1.40}$$

Usando (1.39) y (1.40) tenemos

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta &= P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^\epsilon \otimes \theta^\rho \\ &= P^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^\epsilon \otimes \theta^\rho, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \theta^\mu\theta^\nu = P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta. \tag{1.41}$$

Proponemos que los coeficientes $P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ tengan la siguiente forma [4]

$$P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + i\epsilon Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}, \tag{1.42}$$

con $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$ elementos indeterminados y

$$\epsilon := \hbar\mu^2, \tag{1.43}$$

donde ϵ es un parámetro adimensional y μ es constante, una escala de masa macroscópica [4, 1, 2] (podemos relacionar esta, por ejemplo, con la masa de la métrica de Schwarzschild o con la constante cosmológica). Puede ser útil saber: $\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} = \delta^{[\mu}_{\alpha}\delta^{\nu]}_{\beta} = \epsilon^{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta}$ [24]. Cabe notar de (1.42) que (1.40), en el límite conmutativo ($\hbar \longrightarrow 0$), preserva la antisimetría del producto wedge como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\theta^\mu\theta^\nu &= P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right)\theta^\alpha \otimes \theta^\beta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu - \theta^\nu \otimes \theta^\mu\right)
\end{aligned}$$

También, si queremos que (1.42) sea congruente con (1.39), entonces los índices de los elementos $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ deben cumplir ciertas simetrías que a continuación se muestran

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{[\epsilon}\delta^{\nu}_{\rho]} + i\epsilon Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\right)\left(\frac{1}{2}\delta^{\epsilon}_{[\alpha}\delta^{\rho}_{\beta]} + i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\delta^\mu_\epsilon\delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\epsilon\right)\delta^{\epsilon}_{[\alpha}\delta^{\rho}_{\beta]} + \frac{1}{2}i\epsilon\left(\delta^\mu_\epsilon\delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\epsilon\right)Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&\quad + \frac{1}{2}i\epsilon Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\left(\delta^\epsilon_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\epsilon_\beta\delta^\rho_\alpha\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}\left(\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} - \delta^{\nu}_{[\alpha}\delta^{\mu}_{\beta]}\right) + \frac{1}{2}i\epsilon\left(Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - Q^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}i\epsilon\left(Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - Q^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha}\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right) - \left(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}i\epsilon\left(2Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \left(Q^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta} + Q^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha}\right)\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}\left(2\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - 2\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right) + i\epsilon Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}i\epsilon\left(Q^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta} + Q^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha}\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} + i\epsilon Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}i\epsilon\left(Q^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta} + Q^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha}\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} \\
&= P^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}i\epsilon\left(Q^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta} + Q^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha}\right) + (i\epsilon)^2 Q^{\mu\nu}{}_{\epsilon\rho}\,Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{1.44}$$

de (1.44) se puede ver que una condición suficiente para que la forma propuesta de ${P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}$ dada en (1.42) sea congruente con (1.39) es imponer sobre ${Q^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}$ lo siguiente

$$ {Q^{\mu\nu}}_{\beta\alpha} = {Q^{\nu\mu}}_{\beta\alpha}, \tag{1.45} $$

$$ {Q^{\mu\nu}}_{\beta\alpha} = -{Q^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}. \tag{1.46} $$

Estas simetrías en los índices ${Q^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}$ son mencionadas en [4]. De (1.46) y (1.42) podemos ver que

$$ {P^{\mu\nu}}_{\beta\alpha} = -{P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}, \tag{1.47} $$

y en los índices superiores de ${P^{\mu\nu}}_{\beta\alpha}$ tenemos una parte simétrica dada por ${Q^{\mu\nu}}_{\beta\alpha}$ y una parte antisimétrica dada por $\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$. Otra propiedad de los ${P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}$ se encuentra multiplicando (1.38) por $f \in \mathcal{A}$, usando la $\mathcal{A}$-linealidad de Π y la propiedad (1.29) de θ^μ; tenemos que

$$ \begin{aligned} f{P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta &= f\Pi\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) \\ &= \Pi\left(f\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) \\ &= \Pi\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu f\right) \\ &= \Pi\left(\theta^\mu \otimes \theta^\nu\right) f \\ &= {P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha \otimes \theta^\beta f \\ &= {P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}\, f\theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \end{aligned} \tag{1.48} $$

Nuevamente, dado que en (1.48) tenemos una igualdad de sumatorias sobre elementos linealmente independientes concluimos que

$$ f{P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta} = {P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta}\, f, $$

$$ \Longrightarrow {P^{\mu\nu}}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right), \tag{1.49} $$

$$ \Longrightarrow {Q^{\mu\nu}}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right), \tag{1.50} $$

con $\mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right) := \{g \in \mathcal{A} | \left[g, f\right] = 0\ \forall f \in \mathcal{A}\}$ el *centro del álgebra* $\mathcal{A}$. En lo que sigue se mencionaran las 0-formas y, en analogía al caso conmutativo, definimos el espacio el espacio $\Omega^0\left(\mathcal{A}\right)$ de 0-formas como $\Omega^0\left(\mathcal{A}\right) := \mathcal{A}$.

1.2.4. Ecuaciones para los elementos λ_α.

Hasta este punto se ha hablado principalmente del espacio $\Omega^1\left(\mathcal{A}\right)$ y de la no conmutatividad de las tetrádas, ahora nos dedicaremos a encontrar el conjunto de ecuaciones cuya solución determina el espacio $Der\left(\mathcal{A}\right)$. Para esto adoptaremos el concepto de derivada exterior de forma análoga al caso conmutativo.

Definimos el operador derivada exterior $d : \Omega^r\left(\mathcal{A}\right) \longrightarrow \Omega^{r+1}\left(\mathcal{A}\right)$ (lineal con respecto a $\mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right)$) sobre una 0-forma f y sobre una tetráda θ^μ como

$$df := e_\mu\left(f\right)\theta^\mu, \tag{1.51}$$

$$d\theta^\mu := -\frac{1}{2}C^\mu{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta, \tag{1.52}$$

con $C^\mu{}_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$ coeficientes indeterminados. Además, pedimos que d satisfaga

$$dd(\omega^n) = 0, \tag{1.53}$$

$$d\left(\omega^s\omega^n\right) = d\left(\omega^s\right)\omega^n + \left(-1\right)^s\omega^s d\left(\omega^n\right), \tag{1.54}$$

con $\omega^n \in \Omega^n\left(\mathcal{A}\right)$. Vale la pena notar que, a pesar de que en la definición de derivada exterior que dimos se mencionó únicamente la acción de d sobre 0-formas y tetrádas (1-formas) y no sobre r-formas en general, también está definida la acción de d sobre r-formas; a continuación se muestra un ejemplo. Sea $g = g_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \in \Omega^2\left(\mathcal{A}\right)$, entonces dg se expresa como

$$\begin{aligned}
dg &= d\left(g_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu\right) \\
&= d\left(g_{\mu\nu}\right)\theta^\mu\theta^\nu + \left(-1\right)^0 g_{\mu\nu}d\left(\theta^\mu\theta^\nu\right) \\
&= e_\epsilon\left(g_{\mu\nu}\right)\theta^\epsilon\theta^\mu\theta^\nu + g_{\mu\nu}\left(d\left(\theta^\mu\right)\theta^\nu + \left(-1\right)^1\theta^\mu d\left(\theta^\nu\right)\right) \\
&= e_\epsilon\left(g_{\mu\nu}\right)\theta^\epsilon\theta^\mu\theta^\nu + g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}C^\mu{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta\theta^\nu - \theta^\mu\left(-\frac{1}{2}\right)C^\nu{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta\right) \\
&= \left[e_\epsilon\left(g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(-g_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\epsilon\mu} + g_{\epsilon\gamma}C^\gamma{}_{\mu\nu}\right)\right]\theta^\epsilon\theta^\mu\theta^\nu \\
&= \left[e_\epsilon\left(g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{\epsilon\gamma}C^\gamma{}_{\mu\nu} - g_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\epsilon\mu}\right)\right]\theta^\epsilon\theta^\mu\theta^\nu.
\end{aligned}$$

A continuación mostraremos una propiedad de los elementos $C^\gamma{}_{\epsilon\mu}$. Usando (1.41) y (1.42) tenemos

$$\begin{aligned}
C^\mu{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta &= C^\mu{}_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta \\
&= C^\mu{}_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^\epsilon_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\epsilon_\beta\delta^\rho_\alpha\right) + i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right)\theta^\alpha\theta^\beta \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(C^\mu{}_{\alpha\beta} - C^\mu{}_{\beta\alpha}\right) + i\epsilon C^\mu{}_{\epsilon\rho}Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right)\theta^\alpha\theta^\beta.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Una condición suficiente para que (1.55) sea congruente es

$$C^\mu{}_{\alpha\beta} = -C^\mu{}_{\beta\alpha}. \tag{1.56}$$

Entonces, de (1.42) y (1.56) vemos que

$$\begin{aligned} C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} &= C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^{\epsilon}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}-\delta^{\epsilon}_{\beta}\delta^{\rho}_{\alpha}\right)+i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(C^{\mu}{}_{\alpha\beta}-C^{\mu}{}_{\beta\alpha}\right)+i\epsilon C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} = C^{\mu}{}_{\alpha\beta}. \tag{1.57}$$

Donde en este último resultado se ha usado la propiedad (1.45). Ahora introduciremos un par de conjuntos de constantes no triviales que denotamos como $K_{\alpha\beta}$ y $F^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Para esto retomaremos la 1-forma θ definida en (1.34). Definimos el conmutador entre una r-forma ω^r y una s-forma ω^s como se muestra a continuación [7]

$$[w^r, w^s] := w^r w^s - (-1)^{rs} w^s w^r. \tag{1.58}$$

Es útil saber que esta definición implica las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [w^r, w^m w^s] &= [w^r, w^m]\, w^s + (-1)^{rm}\, w^m\, [w^r, w^s], \\ [w^r, w^s] &= -(-1)^{rs}\, [w^s, w^r], \\ \left[w^r, \sum_i w^s_i\right] &= \sum_i [w^r, w^s_i], \\ [w^r, a w^s] &= a\, [w^r, w^s] \quad , \quad a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Usando (1.36) y las propiedades de la derivada exterior dadas en (1.53) y (1.54) tenemos

$$\begin{aligned} -ddf &= d\,[\theta, f] \\ &= d\,(\theta f - f\theta) \\ &= d\,(\theta f) - d\,(f\theta) \\ &= d\theta f + (-1)^1\, \theta df - \left(df\theta + (-1)^0\, f d\theta\right) \\ &= d\theta f - \theta df - df\theta - f d\theta \\ &= [d\theta, f] + \theta\,[\theta, f] + [\theta, f]\,\theta \\ &= [d\theta, f] + \theta\,(\theta f - f\theta) + (\theta f - f\theta)\,\theta \\ &= [d\theta, f] + [\theta\theta, f] \\ &= [d\theta + \theta\theta, f], \end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\Longrightarrow [d\theta + \theta\theta, f] = 0. \tag{1.60}$$

El elemento $d\theta + \theta\theta$ en (1.60) es una 2-forma, entonces, esta se debe poder escribir como

$$d\theta + \theta\theta = -\frac{1}{2} K_{\alpha\beta}\, \theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \tag{1.61}$$

con $K_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$ elementos indeterminados. Usando (1.41) y (1.42) tenemos

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta &= K_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta \\ &= K_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^\epsilon_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\epsilon_\beta\delta^\rho_\alpha\right) + i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right)\theta^\alpha\theta^\beta \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(K_{\alpha\beta} - K_{\beta\alpha}\right) + i\epsilon K_{\epsilon\rho}Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right)\theta^\alpha\theta^\beta. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Una condición suficiente para que (1.62) sea congruente es

$$K_{\alpha\beta} = -K_{\beta\alpha}. \tag{1.63}$$

Entonces, de (1.42) y (1.63) vemos que

$$\begin{aligned} K_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} &= K_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^\epsilon_\alpha\delta^\rho_\beta - \delta^\epsilon_\beta\delta^\rho_\alpha\right) + i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(K_{\alpha\beta} - K_{\beta\alpha}\right) + i\epsilon K_{\epsilon\rho}Q^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta}\right), \\ &\Longrightarrow K_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Donde, nuevamente, en este último resultado se ha usado la propiedad (1.45). Otra propiedad de los elementos $K_{\alpha\beta}$ la obtenemos sustituyendo (1.61) en (1.60) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta, f\right] \\ &= -\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta f + f\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\,\theta^\alpha\theta^\beta \\ &= -\frac{1}{2}\left(K_{\alpha\beta}\,P^{\alpha\beta}{}_{\epsilon\rho}\theta^\epsilon\otimes\theta^\rho f - fK_{\alpha\beta}\,P^{\alpha\beta}{}_{\epsilon\rho}\theta^\epsilon\otimes\theta^\rho\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(K_{\epsilon\rho}f - fK_{\epsilon\rho}\right)\theta^\epsilon\otimes\theta^\rho \\ &= -\frac{1}{2}\left[K_{\epsilon\rho}, f\right]\theta^\epsilon\otimes\theta^\rho, \\ &\Longrightarrow \left[K_{\epsilon\rho}, f\right] = 0, \\ &K_{\epsilon\rho} \in \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right). \end{aligned} \tag{1.65}$$

Ya hemos definido los elementos $K_{\epsilon\rho}$ y hemos encontrado sus propiedades ahora hablaremos de los elementos $F^\mu{}_{\alpha\beta}$ y también encontraremos sus propiedades. Usando (1.29) tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= d\left(f\theta^{\mu} - \theta^{\mu} f\right) \\
&= df\theta^{\mu} + (-1)^{0} f d\theta^{\mu} - d\theta^{\mu} f - (-1)^{1}\theta^{\mu} df \\
&= \left[\lambda_{\nu}, f\right]\theta^{\nu}\theta^{\mu} + f d\theta^{\mu} - d\theta^{\mu} f + \theta^{\mu}\left[\lambda_{\nu}, f\right]\theta^{\nu} \\
&= \left[\lambda_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}, f\right]\theta^{\nu}\theta^{\alpha} + \left[f, d\theta^{\mu}\right] + \left[\lambda_{\alpha}, f\right]\theta^{\mu}\theta^{\alpha} \\
&= \left[\lambda_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}, f\right]\theta^{\nu}\theta^{\alpha} + \left[f, -\frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\theta^{\nu}\theta^{\alpha}\right] + \left[\lambda_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu}, f\right]\theta^{\nu}\theta^{\alpha} \\
&= \left[\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)}, f\right]\theta^{\nu}\theta^{\alpha} + \left[\frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\theta^{\nu}\theta^{\alpha}, f\right] \\
&= \left[\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\, , f\right]\theta^{\nu}\theta^{\alpha} \\
&= \left[\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\, , f\right] P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho}\theta^{\epsilon}\otimes\theta^{\rho},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow 0 &= \left[\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\, , f\right] P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} \\
&= \left(\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\right) f P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} - f\left(\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\nu\alpha}\right) P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} \\
&= \left(\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\right) f - f\left(\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + \frac{1}{2}C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\right) \\
&= \left(2\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\right) f - f\left(2\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\right) \\
&= \left[2\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, , f\right],
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

pero

$$
\begin{aligned}
\lambda_{(\nu}\delta^{\mu}_{\alpha)} P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} &= \lambda_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}\, P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} + \lambda_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu}\, P^{\nu\alpha}{}_{\epsilon\rho} \\
&= \lambda_{\nu}\, P^{\nu\mu}{}_{\epsilon\rho} + \lambda_{\alpha}\, P^{\mu\alpha}{}_{\epsilon\rho} \\
&= \lambda_{\alpha}\, P^{\alpha\mu}{}_{\epsilon\rho} + \lambda_{\alpha}\, P^{\mu\alpha}{}_{\epsilon\rho} \\
&= \lambda_{\alpha}\, P^{(\alpha\mu)}_{\epsilon\rho}.
\end{aligned}
\tag{1.67}
$$

Sustituyendo (1.67) en (1.66)

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[2\lambda_{\alpha}\, P^{(\alpha\mu)}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, , f\right] \\
&= \left[F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, , f\right],
\end{aligned}
\tag{1.68}
$$

$$
\Longrightarrow F^{\mu}{}_{\epsilon\rho} \in \mathcal{Z}\left(\mathcal{A}\right),
\tag{1.69}
$$

con

$$F^{\mu}{}_{\epsilon\rho} := 2\lambda_{\alpha}\ P^{(\alpha\mu)}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}, \tag{1.70}$$

donde por (1.47) y (1.56) tenemos

$$F^{\mu}{}_{\epsilon\rho} = -F^{\mu}{}_{\rho\epsilon}, \tag{1.71}$$

y de (1.70) tenemos

$$\begin{aligned} F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, P^{\epsilon\rho}{}_{\gamma\nu} &= \left(2\lambda_{\alpha}\ P^{(\alpha\mu)}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\right) P^{\epsilon\rho}{}_{\gamma\nu} \\ &= 2\lambda_{\alpha}\left(P^{\alpha\mu}{}_{\epsilon\rho} + P^{\mu\alpha}{}_{\epsilon\rho}\right) P^{\epsilon\rho}{}_{\gamma\nu} + C^{\mu}{}_{\gamma\nu} \\ &= 2\lambda_{\alpha}\left(P^{\alpha\mu}{}_{\gamma\nu} + P^{\mu\alpha}{}_{\gamma\nu}\right) + C^{\mu}{}_{\gamma\nu} \\ &= 2\lambda_{\alpha}\ P^{(\alpha\mu)}{}_{\gamma\nu} + C^{\mu}{}_{\gamma\nu}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\, P^{\epsilon\rho}{}_{\gamma\nu} = F^{\mu}{}_{\gamma\nu}. \tag{1.72}$$

Ahora que ya hemos encontrado los elementos $C^{\mu}{}_{\gamma\nu}$, $K_{\gamma\nu}$ y $F^{\mu}{}_{\gamma\nu}$ y sabemos sus propiedades estamos listos para encontrar las ecuaciones que determinan a los elementos λ_{α}. Primero aplicamos la derivada exterior sobre θ

$$\begin{aligned} d\theta &= -d\left(\lambda_{\alpha}\theta^{\alpha}\right), \\ d\theta &= -d\left(\lambda_{\alpha}\right)\theta^{\alpha} - (-1)^{0}\,\lambda_{\alpha} d\left(\theta^{\alpha}\right), \\ d\theta &= -\left[\lambda_{\beta},\lambda_{\alpha}\right]\theta^{\beta}\theta^{\alpha} - \lambda_{\alpha}\left(-\frac{1}{2}C^{\alpha}{}_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\right), \\ d\theta + \theta\theta &= \left[\lambda_{\alpha},\lambda_{\beta}\right]\theta^{\beta}\theta^{\alpha} + \frac{1}{2}\lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\theta^{\alpha}\theta^{\beta} + \left(-\lambda_{\alpha}\theta^{\alpha}\right)\left(-\lambda_{\beta}\theta^{\beta}\right), \\ d\theta + \theta\theta &= \left(\left[\lambda_{\beta},\lambda_{\alpha}\right] + \frac{1}{2}\lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}\right)\theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \\ -\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\ \theta^{\alpha}\theta^{\beta} &= \left(\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha} + \frac{1}{2}\lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\right)\theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \\ 0 &= \left(\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha} + \frac{1}{2}\lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\right)\theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \\ 0 &= \left(2\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha} + \lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right)\theta^{\alpha}\theta^{\beta}, \\ 0 &= \left(2\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha} + \lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right)P^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\theta^{\mu}\otimes\theta^{\nu}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(2\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha} + \lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right)P^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = 0,$$

$$2\lambda_{\beta}\lambda_{\alpha}P^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \lambda_{\gamma}C^{\gamma}{}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} = 0. \tag{1.73}$$

Ahora sustituimos (1.70) en (1.73)

$$\begin{aligned}
2\lambda_\beta\lambda_\alpha P^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \lambda_\gamma\left(F^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\lambda_\alpha P^{(\alpha\gamma)}{}_{\mu\nu}\right) + K_{\mu\nu} &= 0, \\
2\lambda_\beta\lambda_\alpha P^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\lambda_\gamma\lambda_\alpha\left(P^{\alpha\gamma}{}_{\mu\nu} + P^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu}\right) + K_{\mu\nu} &= 0, \\
\lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\lambda_\gamma\lambda_\alpha P^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} &= 0, \\
2\lambda_\gamma\lambda_\alpha P^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu} - \lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} - K_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Usando (1.42) en (1.74) tenemos

$$\begin{aligned}
2\lambda_\gamma\lambda_\alpha\left(\frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\mu\delta^\alpha_\nu - \delta^\gamma_\nu\delta^\alpha_\mu\right) + i\epsilon Q^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu}\right) - \lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} - K_{\mu\nu} &= 0, \\
(\lambda_\mu\lambda_\nu - \lambda_\nu\lambda_\mu) + i2\epsilon\lambda_\gamma\lambda_\alpha Q^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu} - \lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} - K_{\mu\nu} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [\lambda_\mu, \lambda_\nu] = -i2\epsilon\lambda_\gamma\lambda_\alpha Q^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu} + \lambda_\gamma F^\gamma{}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}. \tag{1.75}$$

De esta última ecuación podemos ver que, a diferencia del álgebra de coordenadas, el álgebra de los elementos λ_γ no es tan arbitraria.

Capítulo 2

Producto Estrella y Espacios-Tiempo No Conmutativos.

2.1. Definición de producto estrella y algunas aproximaciones útiles.

Para el siguiente ejemplo de espacio-tiempo no conmutativo con simetría esférica nos apoyaremos bastante de aproximaciones cuya justificación puede encontrarse en el concepto de producto estrella [10] como a continuación mostraremos.
Definimos primero una variedad de Poisson (M, α) como una variedad diferenciable M equipada con un tensor $\alpha^{\mu\nu}$ que llamaremos *tensor de Poisson* (cuyo tensor inverso no necesariamente existe) y una operación binaria dada por

$$\{f, g\}(x) := \alpha^{\mu\nu}(x)\, \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x), \tag{2.1}$$

tal que

$$i) \quad \{f, g\} = -\{g, f\}, \qquad \text{(antisimetría)}$$

$$ii) \quad \{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\} h, \qquad \text{(regla de Leibniz)}$$

$$iii) \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \qquad \text{(identidad de Jacobi)}$$

donde $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in M$ y $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ pertenecen al álgebra de funciones $C(M)$ de M.
Sea (M, α) una variedad de Poisson y $f, g, h \in C(M)$, entonces, definimos un producto estrella [10] $\star : C(M), C(M) \longrightarrow C(M)$ como una operación binaria dada por

$$f \star g := \sum_{j=0}^{\infty} (i\xi)^j\, C_j(f, g), \tag{2.2}$$

donde a ξ le llamamos *parámetro de deformación* y los elementos C_n son operadores diferenciales actuando sobre elementos de $C(M)$, dichos operadores diferenciales satisfacen las siguientes relaciones

$$\sum_{j+k=n} C_j\left(C_k\left(f,g\right),h\right) = \sum_{j+k=n} C_j\left(f, C_k\left(g,h\right)\right), \tag{2.3}$$

$$C_0\left(f,g\right) = fg, \quad \text{(producto usual)} \tag{2.4}$$

$$C_1\left(f,g\right) - C_1\left(g,f\right) = \left\{f,g\right\}. \tag{2.5}$$

El conmutador asociado a éste producto estrella lo definimos de la forma usual

$$[f,g]_\star := f\star g - g\star f. \tag{2.6}$$

La propiedad (2.3) garantiza que el producto estrella es asociativo, la propiedad (2.4) garantiza que en el límite $\xi \longrightarrow 0$ el producto estrella se reduce a el producto usual y la propiedad (2.5) garantiza

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{i\xi}[f,g]_\star = \left\{f,g\right\}.$$

La nueva álgebra, formada por la unión del álgebra original (conmutativa) y un producto estrella (no conmutativo), se dice que es una deformación del álgebra original. En lo que sigue, y únicamente en esta sección, añadiremos a los generadores de $\mathcal{A}$ (y a cualquier elemento en $\mathcal{A}$) un $(\hat{\ })$ para así diferenciar los $\hat{u}^\mu$, operadores generadores de $\mathcal{A}$, de los u^μ, funciones generadoras de $\mathcal{A}_{cl}$, álgebra que definiremos posteriormente.
A el álgebra $(\mathcal{A},\cdot)$ que, como ya se mencionó en la Sección 1.2, está generada por el conjunto de operadores $\{\hat{u}^\mu\}_{\mu=0}^3$, con producto usual $(\cdot)$ entre estos y que además satisfacen las relaciones de conmutación (1.11), podemos asociarle un producto estrella mediante la transformada de Weyl de la siguiente manera.
Consideremos $(\mathcal{A}_{cl},\star)$, el álgebra (deformada) de funciones de un espacio-tiempo clásico equipado con un producto estrella que a continuación mostramos. Cabe mencionar que con "espacio-tiempo clásico" nos referimos a un espacio-tiempo modelado por la teoría de la Relatividad General y por tanto un álgebra de funciones conmutativas bajo el producto usual que está generada por las cuatro coordenadas espacio-temporales u^μ.
Definimos el operador $\hat{f}(\hat{u}) := \hat{W}(f) \in (\mathcal{A},\cdot)$ (transformada de Weyl) en términos de los operadores $\hat{u}^\mu \in (\mathcal{A},\cdot)$ y asociado a $f(u)\in(\mathcal{A}_{cl},\star)$ como

$$\hat{W}(f) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, e^{ik_\mu\hat{u}^\mu}\widetilde{f}\left(k\right), \tag{2.7}$$

con $\widetilde{f}\left(k\right)$ la transformada de Fourier usual de $f(u)$ dada por

$$\widetilde{f}\left(k\right) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d^4u\, e^{-ik_\mu u^\mu} f(u).$$

Entonces, considerando $f(u), g(u) \in (\mathcal{A}_{cl},\star)$, a el algebra deformada $(\mathcal{A}_{cl},\star)$ le asociamos el producto estrella dado por

$$\hat{W}(f\star g) = \hat{W}(f)\,\hat{W}(g). \tag{2.8}$$

La información de la relación de conmutación de los geneneradores de $(\mathcal{A}, \cdot)$ se encuentra contenida en el elemento $f \star g$ como a continuación se muestra. De (2.7) y (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{W}(f \star g) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \; e^{ik_\mu \hat{u}^\mu} \widetilde{f}(k) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' \; e^{ik'_\nu \hat{u}^\nu} \widetilde{g}(k') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} d^4k \; d^4k' \; e^{ik_\mu \hat{u}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{u}^\nu} \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(k') .
\end{aligned}$$

Ya que los $\hat{u}^\mu$ no conmutan se usará la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [11] en esta última expresión, entonces

$$\hat{W}(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} d^4k \; d^4k' \; e^{i(k_\mu \hat{u}^\mu + k'_\nu \hat{u}^\nu) + \frac{1}{2}[ik_\mu \hat{u}^\mu, ik'_\nu \hat{u}^\nu] + \cdots} \; \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(k') , \tag{2.9}$$

donde los puntos suspensivos de esta ultima expresión tienen que ver con conmutadores anidados. Dado que en el argumento de la exponencial en el lado derecho de (2.9) hay conmutadores tenemos que el producto estrella, introducido como (2.8), sí lleva información de la relación de conmutación entre los generadores $\hat{u}^\mu$.
Sabiendo esto tenemos que para nuestra relación de conmutación (1.11) hay asociado un producto estrella (que por ahora no necesitamos conocer su forma explícita). Con todo esto ahora sí podemos obtener la aproximación que se mencionó al inicio de este capítulo. Regresando a la variedad de Poisson (M, α) mencionada, sin especificar esta y asociándole algún producto estrella, de (2.2) y (2.6) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
[f, g]_\star &= f \star g - g \star f \\
&= C_0(f, g) + i\xi C_1(f, g) + O\left(\xi^2, f, g\right) - C_0(g, f) - i\xi C_1(g, f) - O\left(\xi^2, g, f\right) \\
&= fg - gf + i\xi \{f, g\} + O\left(\xi^2\right) \\
&= i\xi \alpha^{\mu\nu}(x) \; \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O\left(\xi^2\right) ,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

con $f, g \in C(M)$. Considerando que el parámetro de deformación ξ es muy pequeño (del orden de la constante de Planck, por ejemplo) tenemos que

$$\Longrightarrow [f, g]_\star \approx i\xi \alpha^{\mu\nu} \; \partial_\mu f \; \partial_\nu g. \tag{2.11}$$

También, dado que g es arbitraria, podemos reescribir (2.10) usando x^α en lugar de g obteniendo así

$$\begin{aligned}
[f, x^\alpha]_\star &= i\xi \alpha^{\mu\nu}(x) \; \partial_\mu f(x) \partial_\nu x^\alpha + O^\alpha\left(\xi^2\right) \\
&= i\xi \alpha^{\mu\nu}(x) \; \partial_\mu f(x) \delta_\nu^\alpha + O^\alpha\left(\xi^2\right) \\
&= i\xi \alpha^{\mu\alpha}(x) \; \partial_\mu f(x) + O^\alpha\left(\xi^2\right) ,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
[f, x^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g(x) &= \left[i\xi\alpha^{\mu\alpha}(x) \, \partial_\mu f(x) + O^\alpha\left(\xi^2\right)\right] \partial_\alpha g(x), \\
i\xi\alpha^{\mu\alpha}(x) \, \partial_\mu f(x) \partial_\alpha g(x) &= [f, x^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g(x) - O^\alpha\left(\xi^2\right) \partial_\alpha g(x), \\
i\xi\alpha^{\mu\nu}(x) \, \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) &= [f, x^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g(x) - O^\alpha\left(\xi^2\right) \partial_\alpha g(x),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde el índice α en los términos de orden superior (O) se escribió únicamente para hacer notar que existe un índice libre en dichos términos. Sustituyendo (2.12) en (2.10) tenemos

$$[f, g]_\star = [f, x^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g(x) - O^\alpha\left(\xi^2\right) \partial_\alpha g(x) + O\left(\xi^2\right),$$

$$\Longrightarrow [f, g]_\star \approx [f, x^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g. \tag{2.13}$$

Para obtener (2.11) y (2.13) hemos considerado un álgebra deformada $(M, \star)$ (sin especificar esta) cuyos generadores son $\{x^\nu\}_{\nu=1}^{n}$ y $f, g \in C(M)$. Ahora, en particular, trabajaremos con el álgebra deformada $(\mathcal{A}_{cl}, \star)$ mencionada anteriormente, con parámetro de deformación $\hbar$ y, además, añadimos a esta algún tensor de Poisson $J^{\mu\nu}(u)$ así como también un paréntesis de Poisson, teniendo entonces una variedad de Poisson, y los generadores del álgebra son el conjunto $\{u^\nu\}_{\nu=0}^{3}$. Entonces, para $f(u), g(u) \in (\mathcal{A}_{cl}, \star)$ de (2.10) tenemos que

$$[f, g]_\star = i\hbar J^{\mu\nu} \, \partial_\mu f \partial_\nu g + O\left(\hbar^2\right), \tag{2.14}$$

De esta última expresión podemos ver que

$$[f, g]_\star \approx i\hbar J^{\mu\nu} \, \partial_\mu f \, \partial_\nu g. \tag{2.15}$$

Por otro lado, la aproximación (2.13) asociada a $(\mathcal{A}_{cl}, \star)$ queda con la misma forma:

$$[f, g]_\star \approx [f, u^\alpha]_\star \, \partial_\alpha g. \tag{2.16}$$

En (2.15) y (2.16) ya tenemos las aproximaciones que necesitamos pero estas funcionan en $(\mathcal{A}_{cl}, \star)$. Ahora, con el fin de obtener expresiones análogas a (2.15) y (2.16) en $(\mathcal{A}, \cdot)$, apliquemos la transformada de Weyl definida en (2.7) a (2.15)

$$\begin{gathered}
f \star g - g \star f \approx i\hbar J^{\mu\nu} \, \partial_\mu f \, \partial_\nu g, \\
\hat{W}(f \star g) - \hat{W}(g \star f) \approx i\hbar \hat{W}\left(J^{\mu\nu} \, \partial_\mu f \, \partial_\nu g\right),
\end{gathered} \tag{2.17}$$

donde para obtener esta última expresión se ha usado la linealidad de la transformada de Weyl. Por otro lado, considerando $m, n, s \in (\mathcal{A}_{cl}, \star)$, de (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{W}(m \star n \star s) &= \hat{W}([m \star n] \star s) \\
&= \hat{W}(m \star n) \hat{W}(s),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \hat{W}(m \star n \star s) = \hat{W}(m) \hat{W}(n) \hat{W}(s). \tag{2.18}$$

Y de la definición del producto estrella tenemos

$$\begin{aligned}
m\star n\star s &= (m\star n)\star s\\
&= (m\star n)\, s+\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\, C_{j}\left(m\star n,s\right)\\
&= \left[mn+\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\, C_{j}\left(m,n\right)\right] s+\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\, C_{j}\left(m\star n,s\right)\\
&= mns+\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\, C_{j}\left(m,n\right) s+\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\, C_{j}\left(m\star n,s\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow mns=m\star n\star s-\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\,\mathfrak{C}_{j}(m,n,s), \tag{2.19}$$

con $\mathfrak{C}_j(m,n,s) := [C_j\left(m,n\right)s + C_j\left(m\star n,s\right)]$. Usando las relaciones (2.8), (2.18) y (2.19) en (2.17) tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{W}(f)\hat{W}(g)-\hat{W}(g)\hat{W}(f) &\approx i\hbar\hat{W}\left(J^{\mu\nu}\star\partial_{\mu}f\star\partial_{\nu}g-\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\,\mathfrak{C}_{j}(J^{\mu\nu},\partial_{\mu}f,\partial_{\nu}g)\right),\\
\left[\hat{W}(f),\hat{W}(g)\right] &\approx i\hbar\left[\hat{W}\left(J^{\mu\nu}\star\partial_{\mu}f\star\partial_{\nu}g\right)-\sum_{j=1}^{\infty}(i\hbar)^{j}\,\hat{W}\left(\mathfrak{C}_{j}(J^{\mu\nu},\partial_{\mu}f,\partial_{\nu}g)\right)\right],\\
\left[\hat{W}(f),\hat{W}(g)\right] &\approx i\hbar\hat{W}\left(J^{\mu\nu}\star\partial_{\mu}f\star\partial_{\nu}g\right),\\
\left[\hat{W}(f),\hat{W}(g)\right] &\approx i\hbar\hat{W}\left(J^{\mu\nu}\right)\hat{W}\left(\partial_{\mu}f\right)\hat{W}\left(\partial_{\nu}g\right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ahora, de las propiedades de la transformada de Fourier usual tenemos que

$$\widetilde{\partial_{\nu}m}(k)=ik_{\nu}\widetilde{m}(k). \tag{2.21}$$

Usando (2.7) y (2.21) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{W}(\partial_{\nu}m) &= \frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d^{4}k\; e^{ik_{\mu}\hat{u}^{\mu}}\,\widetilde{\partial_{\nu}m}(k)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d^{4}k\; e^{ik_{\mu}\hat{u}^{\mu}}\, ik_{\nu}\widetilde{m}(k)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d^{4}k\;\hat{\partial}_{\nu}\left(e^{ik_{\mu}\hat{u}^{\mu}}\right)\widetilde{m}(k)\\
&= \hat{\partial}_{\nu}\left(\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d^{4}k\; e^{ik_{\mu}\hat{u}^{\mu}}\,\widetilde{m}(k)\right),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \hat{W}(\partial_{\nu}m)=\hat{\partial}_{\nu}\hat{W}(m), \tag{2.22}$$

con $\hat{\partial}_\nu$ una derivada parcial respecto de $\hat{u}^\nu$ (donde a $\hat{\partial}_\nu$ le asociamos las propiedades de una derivada ∂_ν usual). Finalmente, usando (2.22) en (2.20) tenemos que

$$\begin{aligned} \left[\hat{W}(f), \hat{W}(g)\right] &\approx i\hbar \hat{W}\left(J^{\mu\nu}\right) \hat{\partial}_\mu \hat{W}\left(f\right) \hat{\partial}_\nu \hat{W}\left(g\right), \\ \left[\hat{f}, \hat{g}\right] &\approx i\hbar \hat{J}^{\mu\nu}\, \hat{\partial}_\mu \hat{f}\, \hat{\partial}_\nu \hat{g}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De manera análoga es posible mostrar, a partir de (2.16), que se cumple

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right] \approx \left[\hat{f}, \hat{u}^\alpha\right] \hat{\partial}_\alpha \hat{g}. \tag{2.24}$$

Un caso particular de (2.24) se puede encontrar en [3, 4]. Nos referiremos a (2.23) y (2.24), cualquiera de estas dos relaciones, como aproximación semiclásica. Ahora, antes de terminar con esta sección, mencionaremos una consideración: en particular, en los dos ejemplos mostrados en este capítulo, consideraremos que los generadores $\{\hat{u}^\nu\}_{\nu=0}^3$ de $\mathcal{A}$ son los operadores asociados a las coordenadas rectangulares y por tanto, únicamente en este capítulo, se cambiará la notación $\{\hat{u}^\nu\}_{\nu=0}^3$ por $\{\hat{x}^\nu\}_{\nu=0}^3$ para así hacer referencia a esta consideración. Finalmente, usando (2.24) y dicha consideración podemos llegar a otra útil aproximación. Sea $\hat{h} \in \mathcal{A}$ (consideraremos que índices latinos corren solamente sobre el espacio, es decir, $i = 1, 2, 3$ e índices griegos corren sobre espacio y tiempo, es decir, $\alpha = 0, 1, 2, 3$), tenemos

$$\begin{aligned} \left[\hat{f}, \hat{h}\right] &\approx \left[\hat{f}, \hat{x}^\alpha\right] \hat{\partial}_\alpha \hat{h} \\ &= \left[\hat{f}, \hat{x}^0\right] \hat{\partial}_0 \hat{h} + \left[\hat{f}, \hat{x}^i\right] \hat{\partial}_i \hat{h} \\ &= \left[\hat{f}, \hat{x}^0\right] \hat{\partial}_0 \hat{h} + \left[\hat{f}, \hat{x}^i\right] \hat{\partial}_i \hat{r} \hat{\partial}_r \hat{h}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left[\hat{f}, \hat{h}\right] \approx \left[\hat{f}, \hat{x}^0\right] \hat{\partial}_0 \hat{h} + \left[\hat{f}, \hat{r}\right] \hat{\partial}_r \hat{h}. \tag{2.25}$$

con $\hat{r} := \hat{x}^i \hat{x}^i$. De este último desarrollo se puede ver que (2.24) nos permite hacer uso de una regla análoga a la regla de la cadena. Finalmente, solo para recordar lo que se mencionó arriba, en lo que resta del capítulo se omitirá el simbolo (ˆ) de los elementos del álgebra $(\mathcal{A}, \cdot)$ (o lo que es lo mismo: el álgebra $\mathcal{A}$).

2.2. Ejemplo 1.

En esta sección se expone un ejemplo del modelo de espacio-tiempo no conmutativo propuesto en la Sección 1.2 con simetría esférica. Con el fin de simplificar los cálculos, estos se harán a primer orden en $\hbar$, es decir, todos los términos cuadráticos y de orden superior en $\hbar$ serán despreciados (lo cual es válido recordando que $\hbar$ es pequeño). Ahora que ya tenemos las aproximaciones necesarias que vamos a usar comenzamos con el análisis del ejemplo en [3].

2.2.1. Relaciones de conmutación entre coordenadas: Ansatz y ecuaciones que determinan éste.

Para las relaciones de conmutación entre las coordenadas usaremos el siguiente ansatz

$$\begin{aligned}\left[t, x^i\right] &= i\bar{k} J^{0i} = i\bar{k}\gamma(r,t)x^i, & (2.26)\\ \left[x^i, x^j\right] &= i\bar{k} J^{ij} = i\bar{k}\epsilon^{ij}{}_k\alpha(r,t)x^k. & (2.27)\end{aligned}$$

De estas dos relaciones se puede ver que

$$\begin{aligned}J^{0i} &= \gamma(r,t)x^i, & (2.28)\\ J^{ij} &= \epsilon^{ij}{}_k\alpha(r,t)x^k, & (2.29)\end{aligned}$$

con $r := x^i x^i$. Dado que en estas últimas dos relaciones tenemos funciones de r (y posteriormente aparecerán más) será útil conocer los conmutadores entre la coordenada r y las coordenadas x^μ, así que los calcularemos a continuación. De (2.24) tenemos que

$$\begin{aligned}\left[x^i, r\right] &= \left[x^i, x^j\right]\partial_j r = \left[x^i, x^j\right]\partial_j\left(x^k x^k\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left[x^i, x^j\right]\frac{1}{2}\left(x^k x^k\right)^{-\frac{1}{2}}2\delta_j^m x^m\\ &= i\bar{k}\epsilon^{ij}{}_k\alpha x^k\left(r^2\right)^{-\frac{1}{2}}x^j\\ &= i\bar{k}\alpha\epsilon^{ij}{}_k\left(r^{-1}x^k + \left[x^k, r^{-1}\right]\right)x^j\\ &= i\bar{k}\alpha\epsilon^{ij}{}_k r^{-1}x^k x^j + i\bar{k}\alpha\epsilon^{ij}{}_k\left[x^k, r^{-1}\right]x^j\\ &= i\bar{k}\alpha\epsilon^{ij}{}_k r^{-1}x^k x^j + i\bar{k}\alpha\epsilon^{ij}{}_k\left[x^k, x^m\right]\partial_m\left(r^{-1}\right)x^j,\end{aligned}$$

pero de (2.27) se puede ver que el segundo sumando de ésta última ecuación es cuadrático en $\bar{k}$ y por lo tanto lo despreciamos. Obtenemos así

$$\begin{aligned}\left[x^i, r\right] &= i\bar{k}\alpha r^{-1}\epsilon^{ij}{}_k x^k x^j\\ &= i\bar{k}\alpha r^{-1}\left(\epsilon^{i2}{}_1\left(x^1x^2 - x^2x^1\right) + \epsilon^{i3}{}_1\left(x^1x^3 - x^3x^1\right) + \epsilon^{i3}{}_2\left(x^2x^3 - x^3x^2\right)\right)\\ &= i\bar{k}\alpha r^{-1}\left(\epsilon^{i2}{}_1\left[x^1, x^2\right] + \epsilon^{i3}{}_1\left[x^1, x^3\right] + \epsilon^{i3}{}_2\left[x^2, x^3\right]\right),\end{aligned}$$

y de esta última expresión se puede ver que $[x^i, r] = O\left(\bar{k}^2\right)$. Entonces, a primer orden en $\bar{k}$ tenemos que

$$\left[x^i, r\right] = 0. \tag{2.30}$$

Ahora calculemos el conmutador $[t, r]$. De (2.24) tenemos que

$$\begin{aligned}
[t,r] &= \left[t,x^i\right]\partial_i r \\
&= i\bar{k}\gamma x^i\partial_i\left(x^j x^j\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= i\bar{k}\gamma x^i\frac{1}{2}\left(x^j x^j\right)^{-\frac{1}{2}}2\delta_i^m x^m \\
&= i\bar{k}\gamma x^i\left(r^2\right)^{-\frac{1}{2}}x^i \\
&= i\bar{k}\gamma x^i\left(x^i r^{-1}+\left[r^{-1},x^i\right]\right) \\
&= i\bar{k}\gamma r^2 r^{-1}+i\bar{k}\gamma x^i(-1)\left[x^i,x^j\right]\partial_j\left(r^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Despreciando el término cuadrático en $\bar{k}$ de esta última expresión tenemos

$$[t,r]=i\bar{k}\gamma r. \tag{2.31}$$

Ahora que ya tenemos los conmutadores entre r y las coordenadas x^μ comenzaremos por encontrar ecuaciones diferenciales para γ y α. Si sustituimos (2.28) y (2.29) en (1.15) obtenemos

$$\left[x^0,J^{ij}\right]+\left[x^j,J^{0i}\right]+\left[x^i,J^{j0}\right]=0,$$

$$\left[t,\epsilon^{ij}{}_k\alpha x^k\right]+\left[x^j,\gamma x^i\right]-\left[x^i,\gamma x^j\right]=0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_k\alpha\left[t,x^k\right]+\epsilon^{ij}{}_k\left[t,\alpha\right]x^k+\gamma\left[x^j,x^i\right]+\left[x^j,\gamma\right]x^i-\gamma\left[x^i,x^j\right]-\left[x^i,\gamma\right]x^j=0.$$

A partir de aquí aplicaré sobre esta última relación la aproximación semiclásica así como también las relaciones de conmutación $[x^\mu,r]$ despreciando términos cuadráticos y mayores en $\bar{k}$. Entonces

$$\epsilon^{ij}{}_k\alpha i\bar{k}\gamma x^k+\epsilon^{ij}{}_k\left[x^0,r\right]\alpha' x^k-2\gamma\left[x^i,x^j\right]+\left(\left[x^j,x^0\right]\dot{\gamma}+\left[x^j,r\right]\gamma'\right)x^i-\left(\left[x^i,x^0\right]\dot{\gamma}+\left[x^i,r\right]\gamma'\right)x^j=0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_k\left(\alpha i\bar{k}\gamma x^k+i\bar{k}\gamma r\alpha' x^k\right)-2\gamma i\bar{k}\epsilon^{ij}{}_k\alpha x^k-i\bar{k}\gamma x^j\dot{\gamma}x^i+i\bar{k}\gamma x^i\dot{\gamma}x^j=0,$$

con $\dot{\gamma}:=\partial_0\gamma$ y $\gamma':=\partial_r\gamma$; estas definiciones de $\dot{(\ )}$ y $(\ )'$ como operadores diferenciales se seguirán usando en lo que resta del capítulo. En consecuencia

$$\epsilon^{ij}{}_k i\bar{k}\left(\alpha\gamma+\gamma r\alpha'-2\gamma\alpha\right)x^k+i\bar{k}\gamma\left(x^i\dot{\gamma}x^j-x^j\dot{\gamma}x^i\right)=0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_k i\bar{k}\left[\alpha\gamma+\gamma r\alpha'-2\left(\left[\gamma,\alpha\right]+\alpha\gamma\right)\right]x^k+i\bar{k}\gamma\left[\left(\left[x^i,\dot{\gamma}\right]+\dot{\gamma}x^i\right)x^j-\left(\left[x^j,\dot{\gamma}\right]+\dot{\gamma}x^j\right)x^i\right]=0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_k i\bar{k}\left(\gamma r\alpha'-\alpha\gamma\right)x^k+i\bar{k}\gamma\dot{\gamma}\left[x^i,x^j\right]=0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_{k} i\hbar \left[\left(\left[\gamma r, \alpha'\right] + \alpha'\gamma r\right) - \alpha\gamma\right] x^k = 0,$$

$$\epsilon^{ij}{}_{k} i\hbar \left(\alpha'\gamma r - \alpha\gamma\right) x^k = 0,$$

$$\left(\alpha'\gamma r - \alpha\gamma\right) i\hbar\epsilon^{ij}{}_{k} x^k = 0,$$

$$\alpha'\gamma r - \alpha\gamma = 0,$$

$$\alpha'\left(\left[\gamma, r\right] + r\gamma\right) - \alpha\gamma = 0,$$

$$\alpha'\left[\gamma, r\right] + \left(\alpha' r - \alpha\right)\gamma = 0.$$

El primer sumando en esta última ecuación es lineal en $\hbar$ y el segundo es de orden cero en $\hbar$ entonces la única forma de que se cumpla esta igualdad es que se satisfagan las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \alpha'\left[\gamma, r\right] = 0, \\ \left(\alpha' r - \alpha\right)\gamma = 0, \end{cases}$$

lo cual implica respectivamente que

$$\left[\gamma, r\right] = 0 \implies \gamma = \gamma\left(r\right), \tag{2.32}$$

$$\alpha' r - \alpha = 0. \tag{2.33}$$

Otra ecuación para estas funciones la podemos obtener como a continuación se muestra. Dado que $\mathcal{A}$ es asociativa tenemos que

$$\epsilon_{ijk}\left[x^i, \left[x^j, x^k\right]\right] = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\left[x^i, i\hbar\epsilon^{jk}{}_{l}\alpha x^l\right] = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\ i\hbar\epsilon^{jk}{}_{l}\left[x^i, \alpha x^l\right] = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk}{}_{l}\left(\alpha\left[x^i, x^l\right] + \left[x^i, \alpha\right] x^l\right) = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk}{}_{l}\left[\alpha i\hbar\epsilon^{il}{}_{m}\alpha x^m + \left(\left[x^i, r\right]\alpha' + \left[x^i, t\right]\dot{\alpha}\right) x^l\right] = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk}{}_{l}\left(\alpha i\hbar\epsilon^{il}{}_{m}\alpha x^m - i\hbar\gamma x^i\dot{\alpha} x^l\right) = 0,$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk}{}_{l}\left(\alpha^2\epsilon^{il}{}_{m} x^m - \gamma x^i\dot{\alpha} x^l\right) = 0.$$

Usando ahora $\epsilon_{ijk}\epsilon^{jk}{}_{l} = 2\delta_{il}$ en esta última expresión se tiene

$$2\delta_{il}\left(\alpha^2\epsilon^{il}{}_m x^m - \gamma x^i\dot{\alpha}x^l\right) = 0,$$

$$\left(\alpha^2\epsilon^{ii}{}_m x^m - \gamma x^l\dot{\alpha}x^l\right) = 0,$$

$$\gamma x^l\dot{\alpha}x^l = 0,$$

$$\gamma\left(\left[x^l,\dot{\alpha}\right] + \dot{\alpha}x^l\right)x^l = 0,$$

$$\gamma\left[x^l,\dot{\alpha}\right]x^l + \gamma\dot{\alpha}r^2 = 0.$$

Al igual que como previamente se hizo, notemos que el primer sumando en esta última ecuación es lineal en $\bar{k}$ y el segundo es de orden cero en $\bar{k}$, por lo tanto la única forma de que se cumpla esta igualdad es

$$\begin{cases} \gamma\left[x^l,\dot{\alpha}\right]x^l = 0, \\ \\ \quad \gamma\dot{\alpha}r^2 = 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial x^0} = 0. \tag{2.35}$$

Cabe notar que esta última expresión satisface ambas relaciones en (2.34) y para obtener (2.34) hemos usado también la aproximación semiclásica y las relaciones de conmutación $[x^\mu, r]$. Ahora que ya tenemos ecuaciones diferenciales para α dadas por (2.33) y (2.35) procedemos a resolverlas y su solución queda como

$$\alpha = Cr, \tag{2.36}$$

con C una constante. Ahora, solo por simplicidad y con fines ilustrativos, tomemos la solución trivial, i.e.

$$C = 0 \quad \Longrightarrow \alpha = 0. \tag{2.37}$$

Considerando (2.32) y (2.37) tenemos que las relaciones de conmutación coordenada-coordenada y
coordenada-r quedan como

$$\left[x^0, x^i\right] = i\bar{k}\gamma(r)x^i, \tag{2.38}$$
$$\left[x^i, x^j\right] = 0, \tag{2.39}$$
$$\left[x^i, r\right] = 0, \tag{2.40}$$
$$\left[x^0, r\right] = i\bar{k}\gamma(r)r. \tag{2.41}$$

2.2.2. Tetrádas: Ansatz y ecuaciones que determinan éste.

Ahora, con el fin de introducir el cálculo diferencial tomamos el siguiente ansatz para un conjunto de tetrádas

$$dx^0 = H\theta^0, \quad (2.42)$$
$$dx^i = F\theta^i, \quad (2.43)$$

con $H = H(r)$ y $F = F(r)$. Además, consideraremos que la métrica, escrita en términos de estas tetrádas, es una métrica Minkowskiana de signatura +2. Con el fin de encontrar una ecuación que nos proporcione información acerca de H y F cálculamos la derivada exterior de (2.38). Ya que

$$\left[x^0, x^i\right] = i\hbar\gamma x^i,$$

$$x^0 x^i - (-1)^{(0)1} x^i x^0 = i\hbar\gamma x^i,$$

tenemos que

$$dx^0\ x^i + (-1)^0 x^0\ dx^i - \left[dx^i\ x^0 + (-1)^0 x^i\ dx^0\right] = i\hbar\left[d\gamma\ x^i + (-1)^0\gamma\ dx^i\right],$$

$$\left[dx^0, x^i\right] + \left[x^0, dx^i\right] = i\hbar\left(\left[\lambda_\mu, \gamma\right]\theta^\mu x^i + \gamma dx^i\right). \quad (2.44)$$

Pero de (2.42) tengo que

$$\begin{aligned}\left[dx^0, x^i\right] &= \left[H\theta^0, x^i\right], \\ &= H\left[\theta^0, x^i\right] + \left[H, x^i\right]\theta^0, \\ &= \left[H, x^i\right]\theta^0, \\ &= \left[r, x^i\right]H' + \left[t, x^i\right]\dot{H}, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde para la última igualdad se usó (2.40) y el hecho de que H no depende de t. Sustituimos (2.45) en (2.44) para obtener

$$\left[x^0, dx^i\right] = i\hbar\left(\left[\lambda_\mu, \gamma\right]\theta^\mu x^i + \gamma dx^i\right),$$

$$\left[x^0, F\theta^i\right] = i\hbar\left(i\hbar J^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\lambda_\mu\,\partial_\beta\gamma\,\theta^\mu x^i + \gamma F\theta^i\right),$$

$$F\left[x^0, \theta^i\right] + \left[x^0, F\right]\theta^i = i\hbar\gamma F\theta^i,$$

$$\left[x^0, F\right]\theta^i = i\hbar\gamma F\theta^i,$$

$$\Longrightarrow \left[x^0, F\right] = i\hbar\gamma F. \tag{2.46}$$

Tomando en cuenta (2.41), de esta última ecuación se puede ver que $F = \mu r$, con μ una constante arbitraria, es solución ya que

$$[t, \mu r] = i\hbar\gamma\mu r,$$

$$\mu\,[t, r] = \mu i\hbar\gamma r,$$

$$\mu i\hbar\gamma r = \mu i\hbar\gamma r,$$

por lo tanto

$$F = \mu r, \tag{2.47}$$

sí es solución de (2.46). Ahora, con el fin de encontrar una ecuación para H, reescribimos (1.29) (haciendo $\mu = 0$, $f = x^0$) y le aplicamos el operador derivada exterior

$$x^0\theta^0 = \theta^0 x^0,$$

$$d\left(x^0\theta^0 - \theta^0 x^0\right) = 0,$$

$$dx^0\theta^0 + (-1)^0\, x^0 d\theta^0 - \left[d\theta^0 x^0 + (-1)^1\,\theta^0 dx^0\right] = 0,$$

$$dx^0\theta^0 + x^0 d\theta^0 - d\theta^0 x^0 + \theta^0 dx^0 = 0,$$

$$dx^0\theta^0 - (-1)^{1(1)}\,\theta^0 dx^0 + x^0 d\theta^0 - (-1)^{0(2)}\, d\theta^0 x^0 = 0,$$

$$\left[dx^0, \theta^0\right] + \left[x^0, d\theta^0\right] = 0.$$

Usando (2.42) y las propiedades de los conmutadores en esta última expresión tenemos

$$\left[H\theta^0, \theta^0\right] + \left[x^0, d\theta^0\right] = 0, \tag{2.48}$$

y analizando el primer sumando de esta última expresión podemos ver que

$$\begin{aligned}
\left[H\theta^0, \theta^0\right] &= -(-1)^{1(1)}\left[\theta^0, H\theta^0\right] \\
&= \left[\theta^0, H\theta^0\right] \\
&= \left[\theta^0, H\right]\theta^0 + (-1)^{1(0)}\, H\left[\theta^0, \theta^0\right] \\
&= H\left[\theta^0, \theta^0\right].
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Sustituimos ahora (2.49) en (2.48)

$$H\left[\theta^0, \theta^0\right] + \left[x^0, d\theta^0\right] = 0,$$

$$H\left[\theta^0,\theta^0\right]+\left[x^0,d\left(H^{-1}dx^0\right)\right]=0. \tag{2.50}$$

Analizando el segundo sumando de esta última expresión tenemos

$$\begin{aligned}
\left[x^0,d\left(H^{-1}dx^0\right)\right] &= \left[x^0,dH^{-1}dx^0+(-1)^0H^{-1}d^2x^0\right]\\
&= \left[x^0,dH^{-1}H\theta^0\right]\\
&= \left[x^0,\left[\lambda_\mu,H^{-1}\right]\theta^\mu H\theta^0\right]\\
&= \left[x^0,\left\{\left[\lambda_\mu,H^{-1}H\right]-(-1)^{0(0)}H^{-1}\left[\lambda_\mu,H\right]\right\}\theta^\mu\theta^0\right]\\
&= \left[x^0,-H^{-1}\left[\lambda_\mu,H\right]\theta^\mu\theta^0\right]\\
&= -\left[x^0,H^{-1}\left[\lambda_\mu,r\right]H'\theta^\mu\theta^0\right]\\
&= -\left[x^0,H^{-1}\left[\lambda_\mu,r\right]\theta^\mu H'\theta^0\right]\\
&= -\left[x^0,H^{-1}drH'\theta^0\right].
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Ahora calculamos dr, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
dr &= \left[\lambda_\mu,r\right]\theta^\mu\\
&= \left[\lambda_\mu,x^i\right]\partial_i r\ \theta^\mu\\
&= \left[\lambda_\mu,x^i\right]\theta^\mu\ \partial_i r\\
&= dx^i\ \partial_i\sqrt{x^jx^j}\\
&= dx^i\ \frac{1}{2}\left(x^jx^j\right)^{-\frac{1}{2}}2x^k\delta_k^i\\
&= dx^i\ x^ir^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Si sustituimos (2.52) en (2.51) llegamos a

$$\begin{aligned}
\left[x^0,d\left(H^{-1}dx^0\right)\right] &= -\left[x^0,H^{-1}dx^i\ x^ir^{-1}H'\theta^0\right]\\
&= -\left[x^0,H^{-1}F\theta^i\ x^ir^{-1}H'\theta^0\right]\\
&= -\left[x^0,H^{-1}\mu r\theta^i\ x^ir^{-1}H'\theta^0\right]\\
&= -\mu\left[x^0,H^{-1}H'x^i\theta^i\theta^0\right]\\
&= -\mu\left\{\left[x^0,H^{-1}H'x^i\right]\theta^i\theta^0+(-1)^{0(1)}H^{-1}H'x^i\left[x^0,\theta^i\theta^0\right]\right\}\\
&= -\mu\left[x^0,H^{-1}H'x^i\right]\theta^i\theta^0\\
&= -\mu\left\{\left[x^0,H^{-1}H'\right]x^i+(-1)^{0(0)}H^{-1}H'\left[x^0,x^i\right]\right\}\theta^i\theta^0\\
&= -\mu\left\{\left[x^0,r\right]\left(H^{-1}H'\right)'x^i+H^{-1}H'i\hbar\gamma x^i\right\}\theta^i\theta^0\\
&= -\mu\left\{i\hbar\gamma r\left(H^{-1}H'\right)'x^i+i\hbar\gamma\left(H^{-1}H'\right)x^i\right\}\theta^i\theta^0\\
&= -i\hbar\gamma\mu\left\{r\left(H^{-1}H'\right)'+\left(H^{-1}H'\right)\right\}x^i\theta^i\theta^0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Sustituimos (2.53) en (2.50) para obtener

$$H\left[\theta^0,\theta^0\right]-i\hbar\gamma\mu\left\{r\left(H^{-1}H'\right)'+\left(H^{-1}H'\right)\right\}x^i\theta^i\theta^0=0.$$

Ahora, de nuevo, solo por simplicidad y con fines ilustrativos, tomemos

$$\left[\theta^0,\theta^0\right]=0, \tag{2.54}$$

por lo que

$$r\left(H^{-1}H'\right)'+\left(H^{-1}H'\right)=0. \tag{2.55}$$

La ecuación (2.54) implica que los elementos $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$ definidos en (1.42) satisfacen $Q^{00}{}_{\alpha\beta}=0$ (en el Capítulo 3 se obtiene una expresión para $[\theta^\mu,\theta^\nu]$ en términos de $Q^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$) y la expresión (2.55) es una ecuación diferencial cuya solución determina H. Definiendo $R:=H^{-1}H'$ tenemos que (2.55) queda como

$$rR'+R=0,$$

y la solución de esta ecuación queda como

$$R=K\,r^{-1}=H^{-1}H',\quad \text{con } K \text{ constante}$$

y, así mismo, la solución para H queda como

$$H=(M\,r)^K, \tag{2.56}$$

con M una constante. Ahora que ya tenemos la forma explicita de H y F en (2.56) y (2.47) respectivamente, tenemos que las tetrádas dadas en (2.42) y (2.43) quedan como

$$\begin{aligned} dx^0 &= (M\,r)^K\,\theta^0, &(2.57)\\ dx^i &= \mu r\,\theta^i, &(2.58)\end{aligned}$$

con M, K y μ constantes arbitrarias.

2.2.3. Métrica en el límite conmutativo ($\hbar\longrightarrow 0$).

Ahora que ya tenemos la forma explícita de la tetrádas escribimos la métrica en el límite conmutativo

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(\theta^0\right)^2+\theta^i\theta^i\\ &= -\left(H^{-1}\,dt\right)^2+F^{-1}\,dx^iF^{-1}\,dx^i\\ &= -\left(H^{-1}\,dt\right)^2+F^{-2}\,dx^i\,dx^i\\ &= -\left\{\left[(M\,r)^K\right]^{-1}\right\}^2(dt)^2+\left[(\mu r)^{-1}\right]^2dx^i\,dx^i.\end{aligned}$$

Dado que K es arbitrario podemos hacer $K=-n$ con $n>0$, entonces

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2} dx^i\, dx^i \\
&= -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2}\left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Cambiando de coordenadas cartesianas a esféricas se tiene

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta\right)^2 + r^2\sin^2(\theta)\left(d\phi\right)^2\right] \\
&= -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2} dr^2 + \left(\mu r\right)^{-2} r^2\left[\left(d\theta\right)^2 + \sin^2(\theta)\left(d\phi\right)^2\right] \\
&= -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2} dr^2 + \mu^{-2}\left[\left(d\theta\right)^2 + \sin^2(\theta)\left(d\phi\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow ds^2 = -\left(Mr\right)^{2n}\left(dt\right)^2 + \left(\mu r\right)^{-2} dr^2 + \mu^{-2} d\Omega^2, \tag{2.59}
$$

con $d\Omega^2 = \left(d\theta\right)^2 + sen^2(\theta)\left(d\phi\right)^2$ y M, n y μ constantes arbitrarias. Haciendo $M = \mu$ y $n = 1$ podemos ver que este último resultado se asemeja a la métrica de Schwarszchild pero en realidad no lo es. Sin embargo, también usando $M = \mu$ y $n = 1$, tenemos que (2.59), mediante una apropiada elección de γ, es solución de las ecuaciones [3]:

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -16\pi G\left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\right), \tag{2.60}
$$

con $F^{\rho\sigma}$ un tensor electromagnético dado por

$$
F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix}
0 & \left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^1 & \left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^2 & \left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^3 \\
-\left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^1 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^2 & 0 & 0 & 0 \\
-\left(\mu r\right)^{-1}\gamma x^3 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

2.3. Ejemplo 2.

A continuación mostraremos un modelo más general que el presentado previamente para el cual consideraremos el ansatz dado por

$$
\left[x^0, x^i\right] = i\hbar\gamma(r, x^0) x^i, \tag{2.61}
$$

$$
\left[x^i, x^j\right] = i\hbar\epsilon^{ij}{}_{k} r x^k, \tag{2.62}
$$

de donde claramente podemos ver que

$$
J^{0i} = \gamma(r, x^0) x^i, \tag{2.63}
$$

$$
J^{ij} = \epsilon^{ij}{}_{k} r x^k. \tag{2.64}
$$

Para este caso no realizaremos los cálculos explícitamente, sin embargo estos se hacen de forma análoga a el caso anterior (considerando también la aproximación semiclásica, despreciando términos de orden cuadrático y mayor en $\hbar$ y usando las relaciones de conmutación $[x^\mu, x^\nu]$ y $[x^\mu, r]$). En este ejemplo las relaciones de conmutatión $[x^\mu, r]$ también están dadas por (2.30) y (2.31). Primero, sustituyendo (2.61) y (2.62) en (1.15), se puede llegar a

$$[r, \gamma] = 0. \tag{2.65}$$

Dado que r y x^0 no conmutan podemos concluir de esta última expresión que

$$\gamma = \gamma(r). \tag{2.66}$$

Además, usando la aproximación semiclásica sobre (2.65) se obtiene $\dot{\gamma} = 0$. Ahora para las tetrádas consideramos el siguiente ansatz

$$dx^\nu = \alpha^{-1\nu}{}_\mu \theta^\mu, \tag{2.67}$$

donde los elementos $\alpha^{-1\nu}{}_\mu$ están dados por

$$\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & Bx_j \\ Cx^i & F\delta^i_j + Dx^i x_j + T\epsilon^i{}_{jk}x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^j \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

y además definimos

$$\begin{aligned} e^0_{\ 0} &:= H, && (2.69)\\ e^0_{\ i} &:= Bx_i, && (2.70)\\ e^i_{\ 0} &:= Cx^i, && (2.71)\\ e^i_{\ j} &:= F\delta^i_j + Dx^i x_j + T\epsilon^i{}_{jk}x^k, && (2.72) \end{aligned}$$

con H, B, C, F, D y T funciones de r y x^0. Ahora, con el fin de encontrar restricciones que relacionen estas funciones, aplicamos la derivada exterior a (2.61) y sustituimos (2.68). Como coeficiente de θ^0 encontramos

$$\left[e^0_{\ 0}, x^i\right] + \left[x^0, e^i_{\ 0}\right] = i\hbar\left[e^0_{\ 0}\partial_0\left(\gamma x^i\right) + e^k_{\ 0}\partial_k\left(\gamma x^i\right)\right], \tag{2.73}$$

y como coeficiente de θ^j encontraremos

$$\left[e^0_{\ j}, x^i\right] + \left[x^0, e^i_{\ j}\right] = i\hbar\left[e^0_{\ j}\partial_0\left(\gamma x^i\right) + e^k_{\ j}\partial_k\left(\gamma x^i\right)\right]. \tag{2.74}$$

Usando (2.73) tenemos que

$$\dot{H}\gamma = r\left(C\gamma' - C'\gamma\right), \tag{2.75}$$

y usando (2.74) tenemos que

$$\begin{aligned} r^2\left(\dot{B}\gamma + D'\gamma r - D\gamma' r + D\gamma\right) &= 3\left(F\gamma - F'\gamma r\right) + F\gamma' r, && (2.76)\\ T'\gamma - B = 0 \implies T' &= B\gamma^{-1}. && (2.77) \end{aligned}$$

Aplicando la derivada exterior a (2.62) tenemos

$$F = 0, \tag{2.78}$$
$$Dr + \dot{T}\gamma = Fr^{-1} \implies \dot{T} = -Dr\gamma^{-1}. \tag{2.79}$$

Ahora veamos como queda la métrica en el límite conmutativo ($\hbar \longrightarrow 0$). De (2.68) tenemos que

$$\begin{cases} \theta^0 = \frac{D}{\Delta}dt - \frac{B}{r\Delta}dr, \\ \\ \theta^i = -\frac{C}{r^2\Delta}x^i dt + \frac{H}{r^3\Delta}x^i dr - \frac{1}{r^2 T}\epsilon^i{}_{mn}x^m dx^n, \end{cases} \tag{2.80}$$

con $\Delta := HD - BC$ y la métrica queda como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(\theta^0\right)^2 + \theta^i\theta^i \\ &= \left(\frac{\gamma}{r\Delta}\right)^2 \left[-\left(\frac{Dr}{\gamma}dt - \frac{B}{\gamma}dr\right)^2 + \left(\frac{C}{\gamma}dt - \frac{H}{r\gamma}dr\right)^2\right] + \frac{1}{T^2}d\Omega^2. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Una forma de reescribir (2.81) de una forma más compacta es haciendo un cambio de variable. De (1.24) sabemos que

$$[x^\nu, \lambda_\mu] = -\alpha^{-1\nu}{}_\mu. \tag{2.82}$$

Si hacemos $\mu = \nu = 0$ en (2.82) obtenemos

$$\begin{aligned} \left[x^0, \lambda_0\right] &= -\alpha^{-1\,0}{}_0 \\ &= -H. \end{aligned}$$

Aplicamos la aproximación semiclásica a esta última ecuación y tenemos

$$\begin{aligned} \left[x^0, x^0\right]\partial_0\lambda_0 + \left[x^0, r\right]\partial_r\lambda_0 &= -H, \\ i\hbar\gamma r\partial_r\lambda_0 &= -H, \end{aligned}$$
$$\implies \partial_r\left(i\hbar\lambda_0\right) = -r^{-1}\gamma^{-1}H. \tag{2.83}$$

Ahora hacemos $\mu = 0$ y $\nu = i$ en (2.82) para obtener

$$\begin{aligned} \left[x^i, \lambda_0\right] &= -\alpha^{-1i}{}_0 \\ &= -Cx^i. \end{aligned}$$

Aplicamos la aproximación semiclásica a esta última relación y tenemos

$$\begin{aligned}
\left[x^i, x^0\right] \partial_0 \lambda_0 + \left[x^i, r\right] \partial_r \lambda_0 &= -Cx^i, \\
-i\bar{k}\gamma x^i \partial_0 \lambda_0 &= -Cx^i, \\
-i\bar{k}\gamma \left(\partial_0 \lambda_0 x^i + \left[x^i, \partial_0 \lambda_0\right]\right) &= -Cx^i.
\end{aligned}$$

Dado que el segundo sumando del miembro izquierdo de esta última ecuación es cuadrático en $\bar{k}$ lo omitimos y tenemos que

$$-i\bar{k}\gamma \partial_0 \lambda_0 x^i = -Cx^i,$$

$$\Longrightarrow \partial_0 \left(i\bar{k}\lambda_0\right) = \gamma^{-1} C. \tag{2.84}$$

Ahora, retomando el límite conmutativo, de (2.83) y (2.84) tenemos que

$$d\left(i\bar{k}\lambda_0\right) = \frac{C}{\gamma} dt - \frac{H}{r\gamma} dr =: d\mathcal{M}, \tag{2.85}$$

con $\mathcal{M} := i\bar{k}\lambda_0$. Finalmente, sustituyendo (2.77), (2.79) y (2.85) en (2.81) tenemos que

$$ds^2 = \left(\frac{\gamma}{r\Delta}\right)^2 \left[-\left(dT\right)^2 + \left(d\mathcal{M}\right)^2\right] + \frac{1}{T^2} d\Omega^2. \tag{2.86}$$

Finalmente, usando la aproximación semiclásica en (1.24) con $\mu = i$ y $\nu = 0$ se puede encontrar que

$$i\bar{k}\lambda_i = Tr^{-1} x_i. \tag{2.87}$$

En el capítulo 4 se comentará más sobre la métrica (2.86).

Capítulo 3

Elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$.

3.1. Métrica de simetría esférica y tetrádas a considerar.

La métrica más general con simetría esférica [24] está dada por

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \begin{pmatrix} dt, dr, d\psi, d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \sin^2 \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} \\
&= \alpha\,(t,r)\,(dt)^2 + 2\beta\,(t,r)\,dt\,dr + \gamma\,(t,r)\,(dr)^2 + \delta\,(t,r)\,d\Omega^2,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

con $d\Omega^2 := (d\psi)^2 + \sin^2\psi\,(d\phi)^2$. Con el fin usar una métrica diagonal y así simplificar los cálculos aplicamos el siguiente cambio de variable [22]

$$
\begin{cases} r' = r, \\ t' = W(r,t), \end{cases} \tag{3.2}
$$

donde consideramos que (3.2) es tal que existen las ecuaciones de transformación inversa y además satisface

$$
\beta \partial_0 W - \alpha \partial_r W = 0. \tag{3.3}
$$

De (3.2) tenemos

$$
\begin{cases} dr &= dr' \\ dt &= \frac{dt' - \partial_r W\, dr'}{\partial_0 W} \end{cases}. \tag{3.4}
$$

Sustituyendo las ecuaciones desde (3.2) hasta (3.4) en (3.1) tenemos

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\alpha'^2\left(t',r'\right)\left(dt'\right)^2+\gamma'^2\left(t',r'\right)\left(dr'\right)^2+\delta'^2\left(t',r'\right)d\Omega^2\\
&= -\alpha'^2\left(t',r'\right)\left(dt'\right)^2+\gamma'^2\left(t',r'\right)\left(dr'\right)^2+\delta'^2\left(t',r'\right)\left(d\psi\right)^2+\delta'^2\left(t',r'\right)\sin^2\psi\left(d\phi\right)^2\\
&= \left(dt',dr',d\psi,d\phi\right)\begin{pmatrix}-\alpha'^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma'^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta'^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta'^2\sin^2\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt'\\ dr'\\ d\psi\\ d\phi\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

con

$$
-\alpha'^2 := \frac{\alpha}{\left(\partial_0 W\right)^2}, \qquad \gamma'^2 := \frac{\alpha\left(\partial_r W\right)^2-2\beta\partial_r W\partial_0 W+\gamma\left(\partial_0 W\right)^2}{\left(\partial_0 W\right)^2}, \qquad \delta'^2 := \delta.
$$

A partir de ahora, solo por simplicidad de notación, omitiremos las primas en (3.5). Entonces, (3.1) escrita en las nuevas variables (dadas por (3.2)) queda como

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\alpha^2\left(t,r\right)\left(dt\right)^2+\gamma^2\left(t,r\right)\left(dr\right)^2+\delta^2\left(t,r\right)d\Omega^2\\
&= -\alpha^2\left(t,r\right)\left(dt\right)^2+\gamma^2\left(t,r\right)\left(dr\right)^2+\delta^2\left(t,r\right)\left(d\psi\right)^2+\delta^2\left(t,r\right)\sin^2\psi\left(d\phi\right)^2\\
&= -(\theta^0)^2+(\theta^1)^2+(\theta^2)^2+(\theta^3)^2\\
&= \left(\theta^0,\theta^1,\theta^2,\theta^3\right)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^0\\ \theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

donde hemos definido

$$
\left.\begin{aligned}
\theta^0 &:= \alpha(t,r)dt\\
\theta^1 &:= \gamma(t,r)dr\\
\theta^2 &:= \delta(t,r)d\psi\\
\theta^3 &:= \delta\sin\psi d\phi
\end{aligned}\right\},
\tag{3.7}
$$

que escrito en forma matricial queda como

$$
\begin{pmatrix}\theta^0\\ \theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta\sin\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\ dr\\ d\psi\\ d\phi\end{pmatrix},
\tag{3.8}
$$

y en forma índicial como

$$
\theta^\mu = Z^\mu{}_\nu du^\nu,
\tag{3.9}
$$

con

$$\begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} du^0 \\ du^1 \\ du^2 \\ du^3 \end{pmatrix}, \qquad Z^{\mu}{}_{\nu} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\sin\psi \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Invirtiendo (3.8) tenemos

$$\begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\delta\sin\psi)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$du^{\nu} = Z^{-1\nu}{}_{\mu}\theta^{\mu}, \tag{3.12}$$

con

$$Z^{-1\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\delta\sin\psi)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Además, en lo que resta del capítulo, se mencionará el conjunto de elementos $\{a^{\mu}\}_{\mu=0}^{3}$ que definimos como

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \\ \delta\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Vale la pena notar que, al igual que en cada uno de los ejemplos del Capítulo 2, en esta primera sección del Capítulo 3 estamos especificando la métrica que resultará cuando consideremos el límite conmutativo pero en la siguiente sección ya no consideraremos que estamos en este límite.

3.2. Constantes $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ y sus consecuencias sobre a^{μ} y $J^{\mu\nu}$.

En esta sección, con el fin de determinar las consecuencias de que los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sean constantes, nos dedicaremos a encontrar un conjunto de expresiones que muestran a los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ en términos de los elementos a^{β} y $J^{\mu\nu}$. Nos apoyaremos de la aproximación semiclásica mostrada al inicio del Capítulo 2 y despreciaremos contribuciones de orden cuadrático y mayor en $\bar{k}$. Finalmente, pidiendo que $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sea constante, encontraremos algunas condiciones para a^{μ} y la forma explícita de $J^{\mu\nu}$.

3.2.1. Forma de los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ en términos de a^{μ} y $J^{\mu\nu}$.

En la Sección 3.1 ya hemos establecido la métrica y las tetrádas conmutativas, las cuales servirán de base para las tetrádas no conmutativas que usaremos. Ahora, buscaremos la forma explícita de los elementos $Q^{\gamma\alpha}{}_{\mu\nu}$ definidos en (1.42) y, finalmente, mostraremos algunas consecuencias de la antisimetría de $J^{\mu\nu}$. Usando (1.41), (1.42) y (1.58) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left[\theta^{\mu},\theta^{\beta}\right] &= \theta^{\mu}\theta^{\beta}-(-1)^{1(1)}\theta^{\beta}\theta^{\mu} \\
&= P^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\theta^{\epsilon}\theta^{\rho}+P^{\beta\mu}{}_{\epsilon\rho}\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= \left(P^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}+P^{\beta\mu}{}_{\epsilon\rho}\right)\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= \left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\beta}\epsilon_{\epsilon\rho}+i\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}+\frac{1}{2}\epsilon^{\beta\mu}\epsilon_{\epsilon\rho}+i\epsilon Q^{\beta\mu}{}_{\epsilon\rho}\right)\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\epsilon^{\mu\beta}\epsilon_{\epsilon\rho}-\epsilon^{\mu\beta}\epsilon_{\epsilon\rho}\right)+i\epsilon\left(Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}+Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\right)\right)\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^{\epsilon}\theta^{\rho},
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\left[\theta^{\mu},\theta^{\beta}\right]=i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\,\theta^{\nu}\otimes\theta^{\gamma}. \tag{3.14}
$$

Por otro lado, de (1.29) tenemos que

$$
\begin{aligned}
u^{\alpha}\theta^{\beta} &= \theta^{\beta}u^{\alpha} \\
d\left(u^{\alpha}\theta^{\beta}\right) &= d\left(\theta^{\beta}u^{\alpha}\right) \\
d\left(u^{\alpha}\right)\theta^{\beta}+(-1)^{0}u^{\alpha}d\left(\theta^{\beta}\right) &= d\left(\theta^{\beta}\right)u^{\alpha}+(-1)^{1}\theta^{\beta}d\left(u^{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Usando (3.9) en esta última relación tenemos

$$
\begin{aligned}
d\left(u^{\alpha}\right)\theta^{\beta}+u^{\alpha}d\left(Z^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}\right) &= d\left(Z^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}\right)u^{\alpha}-\theta^{\beta}d\left(u^{\alpha}\right) \\
du^{\alpha}\theta^{\beta}+u^{\alpha}\left(dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}+(-1)^{0}Z^{\beta}{}_{\nu}d^{2}u^{\nu}\right) &= \left(dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}+(-1)^{0}Z^{\beta}{}_{\nu}d^{2}u^{\nu}\right)u^{\alpha}-\theta^{\beta}du^{\alpha} \\
du^{\alpha}\theta^{\beta}+u^{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu} &= dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}u^{\alpha}-\theta^{\beta}du^{\alpha} \\
Z^{\mu}{}_{\alpha}\,du^{\alpha}\theta^{\beta}+Z^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu} &= Z^{\mu}{}_{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}u^{\alpha}-Z^{\mu}{}_{\alpha}\theta^{\beta}du^{\alpha} \\
\theta^{\mu}\theta^{\beta}+\theta^{\beta}Z^{\mu}{}_{\alpha}du^{\alpha} &= Z^{\mu}{}_{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}u^{\alpha}-Z^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu} \\
\theta^{\mu}\theta^{\beta}+\theta^{\beta}\theta^{\mu} &= Z^{\mu}{}_{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}u^{\alpha}-Z^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}dZ^{\beta}{}_{\nu}du^{\nu}.
\end{aligned}
$$

Usando ahora (3.12) en esta última tenemos

$$
\begin{aligned}
\theta^{\mu}\theta^{\beta}-(-1)^{1(1)}\theta^{\beta}\theta^{\mu} &= Z^{\mu}{}_{\alpha}e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)\theta^{\epsilon}Z^{-1\nu}{}_{\rho}\theta^{\rho}u^{\alpha}-Z^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)\theta^{\epsilon}Z^{-1\nu}{}_{\rho}\theta^{\rho} \\
\left[\theta^{\mu},\theta^{\beta}\right] &= Z^{\mu}{}_{\alpha}\left[e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}u^{\alpha}-u^{\alpha}e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right]\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= Z^{\mu}{}_{\alpha}\left[e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}\,,u^{\alpha}\right]\theta^{\epsilon}\theta^{\rho} \\
&= N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\,\theta^{\epsilon}\theta^{\rho},
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\left[\theta^{\mu},\theta^{\beta}\right]=N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\,P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\,\theta^{\nu}\otimes\theta^{\gamma}, \tag{3.15}
$$

donde hemos definido

$$N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho} := Z^{\mu}{}_{\alpha}\left[e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}\,,u^{\alpha}\right]. \tag{3.16}$$

Ahora igualamos (3.14) con (3.15) y obtenemos

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\theta^{\nu}\otimes\theta^{\gamma} &= N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\theta^{\nu}\otimes\theta^{\gamma},\\
\Longrightarrow i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma} &= N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}P^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Reescribiremos (3.16) usando la aproximación semiclásica

$$\begin{aligned}
N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho} &= -Z^{\mu}{}_{\alpha}\left[u^{\alpha},e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right]\\
&= -Z^{\mu}{}_{\alpha}\left[u^{\alpha},u^{\delta}\right]\partial_{\delta}\left(e_{\epsilon}\left(Z^{\beta}{}_{\nu}\right)Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right)\\
&= -i\hbar Z^{\mu}{}_{\alpha}J^{\alpha\delta}\partial_{\delta}\left(\left[\lambda_{\epsilon},Z^{\beta}{}_{\nu}\right]Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right)\\
&= -i\hbar Z^{\mu}{}_{\alpha}J^{\alpha\delta}\partial_{\delta}\left(\left[\lambda_{\epsilon},u^{\sigma}\right]\partial_{\sigma}Z^{\beta}{}_{\nu}Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right)\\
&= -i\hbar Z^{\mu}{}_{\alpha}J^{\alpha\delta}\partial_{\delta}\left(Z^{-1\sigma}{}_{\epsilon}\partial_{\sigma}Z^{\beta}{}_{\nu}Z^{-1\nu}{}_{\rho}\right)\\
&= -i\hbar a^{\mu}\delta^{\mu}_{\alpha}J^{\alpha\delta}\partial_{\delta}\left(\frac{1}{a^{\epsilon}}\delta^{\sigma}_{\epsilon}\,\partial_{\sigma}a^{\beta}\delta^{\beta}_{\nu}\,\frac{1}{a^{\rho}}\delta^{\nu}_{\rho}\right),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho} = -i\hbar a^{\mu}J^{\mu\delta}\partial_{\delta}\left(\frac{1}{a^{\epsilon}}\,\partial_{\epsilon}a^{\beta}\,\frac{1}{a^{\rho}}\right)\delta^{\beta}_{\rho}. \tag{3.18}$$

Por otro lado, sustituyendo (1.42) en (3.17) tenemos

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\delta^{\epsilon\rho}_{\nu\gamma}+i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\right) = N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\delta^{\epsilon\rho}_{\nu\gamma}+i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\right),$$

$$i\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\left(\delta^{\epsilon}_{\nu}\delta^{\rho}_{\gamma}-\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\epsilon}_{\gamma}\right) = N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^{\epsilon}_{\nu}\delta^{\rho}_{\gamma}-\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\epsilon}_{\gamma}\right)+i\epsilon Q^{\epsilon\rho}{}_{\nu\gamma}\right),$$

y sabiendo por (3.18) que $N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\rho}$ tiene una delta de Kronecker en β y ρ tenemos que esta última queda como

$$i\epsilon\left(Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}-Q^{\mu\beta}{}_{\gamma\nu}\right) = N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\beta}\left(\frac{1}{2}\left(\delta^{\epsilon}_{\nu}\delta^{\beta}_{\gamma}-\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\epsilon}_{\gamma}\right)+i\epsilon Q^{\epsilon\beta}{}_{\nu\gamma}\right),$$

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}\left(N^{\mu\beta}{}_{\nu\beta}\delta^{\beta}_{\gamma}-N^{\mu\beta}{}_{\gamma\beta}\delta^{\beta}_{\nu}\right)+i\epsilon N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\beta}Q^{\epsilon\beta}{}_{\nu\gamma},$$

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}N^{\mu\beta}{}_{[\nu\beta}\delta^{\beta}_{\gamma]}+i\epsilon N^{\mu\beta}{}_{\epsilon\beta}Q^{\epsilon\beta}{}_{\nu\gamma}.$$

De (1.43) y (3.18) tenemos que el segundo sumando del lado derecho de esta última ecuación es cuadrático en $\hbar$, por lo tanto esta queda como

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}N^{\mu\beta}{}_{[\nu\beta}\delta^{\beta}_{\gamma]}. \tag{3.19}$$

Ahora sustituyo (3.18) en (3.19) para obtener

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\delta} \partial_{\delta} \left(\frac{1}{a^{[\nu}} \partial_{[\nu} a^{\beta} \frac{1}{a^{\beta}} \right) \delta^{\beta}_{\gamma]} \\
&= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\delta} \left[\partial_{\delta} \left(\frac{1}{a^{\nu}} \partial_{\nu} a^{\beta} \frac{1}{a^{\beta}} \right) \delta^{\beta}_{\gamma} - \partial_{\delta} \left(\frac{1}{a^{\gamma}} \partial_{\gamma} a^{\beta} \frac{1}{a^{\beta}} \right) \delta^{\beta}_{\nu} \right],
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{a^{\nu}} \partial_{\nu} \ln a^{\beta} \delta^{\beta}_{\gamma} - \frac{1}{a^{\gamma}} \partial_{\gamma} \ln a^{\beta} \delta^{\beta}_{\nu} \right]. \tag{3.20}
$$

Notemos que en (3.20) solo el índice σ esta contraído y todos los demás son índices libres. Ahora analizaré (3.20) por casos

CASO 1: $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq \nu$, μ arbitrario.
Para este caso tenemos de (3.20) que

$$
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = 0. \tag{3.21}
$$

También, por la simetría en los índices superiores de $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ en (1.45), tenemos que se debe cumplir

$$
i2\epsilon Q^{\beta\mu}{}_{\nu\gamma} = 0.
$$

CASO 2: $\beta = \gamma$, $\beta \neq \nu$, μ arbitrario.
Para este caso tenemos de (3.20) que

$$
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{a^{\nu}} \partial_{\nu} \ln a^{\beta} \right]. \tag{3.22}
$$

Subcaso 2.1: $\beta = \gamma = 0, 1, 2$, $\beta \neq \nu = 3$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.22) que

$$
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = 0. \tag{3.23}
$$

Subcaso 2.2a: $\beta = \gamma = 0, 1$, $\beta \neq \nu = 2$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.22) que

$$
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = 0. \tag{3.24}
$$

Subcaso 2.2b: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 2$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.22) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial\psi} \ln(\delta \sin\psi) \right] \\
&= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta \sin\psi} \delta \cos\psi \right] \\
&= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{1}{\sin\psi} + \left[\frac{1}{\sin\psi}, \delta \right] \right) \cos\psi \right],
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{23} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \cot\psi \right]. \tag{3.25}$$

Pero, por (1.45) tenemos que se debe cumplir

$$i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{23} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \cot\psi \right] = i2\epsilon Q^{3\mu}{}_{23}.$$

Por otro lado, del CASO 1 tenemos

$$i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{23} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta} \cot\psi \right] = i2\epsilon Q^{3\mu}{}_{23} = 0, \qquad \text{con } \mu = 0, 1.$$

Con el fin de que esta última ecuación sea coherente imponemos

$$Q^{03}{}_{23} = Q^{13}{}_{23} = 0. \tag{3.26}$$

De esta forma el CASO 1 y el Subcaso 2.2b son congruentes el uno con el otro.

Subcaso 2.3: $\beta = \gamma = 0, 2, 3$, $\beta \neq \nu = 1$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.22) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \ln a^{\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial r} \right]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pero, por (1.45) tenemos que se debe cumplir

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial r} \right] = i2\epsilon Q^{\beta\mu}{}_{1\beta}.$$

Por otro lado, del CASO 1 tenemos

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial r} \right] = i2\epsilon Q^{\beta\mu}{}_{1\beta} = 0, \qquad \text{con } \mu \neq 1, \beta.$$

De nueva cuenta, con el fin de que esta última ecuación sea coherente imponemos

$$Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} = 0, \qquad \text{con } \mu \neq 1, \beta. \tag{3.28}$$

De esta forma el CASO 1 y el Subcaso 2.3 son congruentes el uno con el otro. Más adelante usaré (3.28) así que escribiré esta en forma explícita para los tres valores de β

$$Q^{20}{}_{10} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 0, \tag{3.29}$$
$$Q^{30}{}_{10} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 0, \tag{3.30}$$
$$Q^{02}{}_{12} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 2, \tag{3.31}$$
$$Q^{32}{}_{12} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 2, \tag{3.32}$$
$$Q^{03}{}_{13} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 3, \tag{3.33}$$
$$Q^{23}{}_{13} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 3. \tag{3.34}$$

Subcaso 2.4: $\beta = \gamma = 1, 2, 3$, $\beta \neq \nu = 0$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.22) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln a^{\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Pero, por (1.45) tenemos que se debe cumplir

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{0\beta} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial t} \right] = Q^{\beta\mu}{}_{0\beta}.$$

Por otro lado, del CASO 1 tenemos

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{0\beta} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^{\beta}} \frac{\partial a^{\beta}}{\partial t} \right] = Q^{\beta\mu}{}_{0\beta} = 0, \qquad \text{con } \mu \neq 0, \beta.$$

Con el fin de que esta última ecuación sea coherente imponemos

$$Q^{\mu\beta}{}_{0\beta} = 0, \qquad \text{con } \mu \neq 0, \beta. \tag{3.36}$$

De esta forma el CASO 1 y el Subcaso 2.4 son congruentes el uno con el otro. Más adelante usaré (3.36) así que escribiré esta en forma explícita para los tres valores de β

$$Q^{21}{}_{01} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 1, \tag{3.37}$$
$$Q^{31}{}_{01} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 1, \tag{3.38}$$
$$Q^{12}{}_{02} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 2, \tag{3.39}$$
$$Q^{32}{}_{02} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 2, \tag{3.40}$$
$$Q^{13}{}_{03} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 3, \tag{3.41}$$
$$Q^{23}{}_{03} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 3. \tag{3.42}$$

CASO 3: $\beta \neq \gamma$, $\beta = \nu$, μ arbitrario.
Por la antisimetría en los índices inferiores de $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ tenemos que el CASO 3 se puede obtener a partir del CASO 2 invirtiendo los signos.

Hasta aquí, desde (3.21) hasta (3.36), ya hemos encontrado la forma explícita de los ele-

mentos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ en términos de los elementos a^{μ} y $J^{\mu\nu}$ (y algunos nulos). Antes de continuar vale la pena mencionar lo siguiente: en el análisis de (3.20) se mencionó que un conjunto de elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ están contenidos simultáneamente en dos casos diferentes e incluso en las expresiones desde (3.29) hasta (3.34) y desde (3.37) hasta (3.42) se muestran estos elementos, sin embargo, estos no son los únicos contenidos simultáneamente en dos casos distintos. En realidad existen algunos otros elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ que también están dentro de dos casos y/o subcasos diferentes y no se mostraron explícitamente cuales son ni en que casos están. A pesar de esto, como se podrá notar más adelante, no habrán incongruencias que conduzcan a tener dos valores distintos para un mismo elemento $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$.
Ahora, para finalizar con esta sección, mostraremos algunas consecuencias de la antisimetría de $J^{\mu\nu}$ que usaremos más adelante. Reescribiendo (3.25) tenemos que

$$i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{23} = -\frac{1}{2} i\hbar a^{\mu} \sum_{\sigma} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right],$$

$$i2\epsilon \frac{1}{a^{\mu}} Q^{\mu 3}{}_{23} = -\frac{1}{2} i\hbar \sum_{\sigma} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right],$$

$$i2\epsilon \sum_{\mu} \frac{1}{a^{\mu}} Q^{\mu 3}{}_{23} \partial_{\mu} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] = -\frac{1}{2} i\hbar \sum_{\sigma,\mu} J^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] \partial_{\mu} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right].$$

Pidiendo que $J^{\mu\nu}$ sea antisimétrico tenemos que esta última se reduce a

$$i2\epsilon \sum_{\mu} \frac{1}{a^{\mu}} Q^{\mu 3}{}_{23} \partial_{\mu} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] = 0,$$

$$i2\epsilon \left(\sum_{\mu=0}^{1} \frac{1}{a^{\mu}} Q^{\mu 3}{}_{23} \partial_{\mu} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] + \frac{1}{a^{2}} Q^{23}{}_{23} \partial_{2} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] \right) = 0.$$

Usando (3.26) en esta última se tiene

$$i2\epsilon \frac{1}{a^{2}} Q^{23}{}_{23} \partial_{2} \left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] = 0,$$

$$-i2\epsilon \frac{1}{\delta} Q^{23}{}_{23} \frac{1}{\delta} \csc^{2}\psi = 0,$$

$$\implies Q^{23}{}_{23} = 0. \tag{3.43}$$

Por otro lado, también reescribiendo (3.25) tenemos

$$Q^{\mu} := \xi^{\mu\sigma} A^{\mu}{}_{\sigma}\,, \qquad \text{(sin suma sobre } \mu\text{)} \tag{3.44}$$

$$\left.\begin{aligned} Q^{\mu} &:= i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{23} \\ \xi^{\mu\sigma} &:= -\tfrac{1}{2} i\hbar J^{\mu\sigma} \\ A^{\mu}{}_{\sigma} &:= a^{\mu} \partial_{\sigma} \left[\tfrac{1}{\delta}\cot\psi\right] \end{aligned}\right\}. \tag{3.45}$$

Desarrollando (3.44) se tiene

$$\left.\begin{array}{lcl} Q^0 &=& \xi^{00}A^0{}_0+\xi^{01}A^0{}_1+\xi^{02}A^0{}_2+\xi^{03}A^0{}_3 \\ Q^1 &=& \xi^{10}A^1{}_0+\xi^{11}A^1{}_1+\xi^{12}A^1{}_2+\xi^{13}A^1{}_3 \\ Q^2 &=& \xi^{20}A^2{}_0+\xi^{21}A^2{}_1+\xi^{22}A^2{}_2+\xi^{23}A^2{}_3 \\ Q^3 &=& \xi^{30}A^3{}_0+\xi^{31}A^3{}_1+\xi^{32}A^3{}_2+\xi^{33}A^3{}_3 \end{array}\right\}, \tag{3.46}$$

y de (3.45) podemos ver que

$$A^\mu{}_3 = 0 \quad \forall\, \mu. \tag{3.47}$$

Por (3.47) y considerando que $J^{\mu\sigma}$ es antisimétrico (es decir, $\xi^{\mu\sigma}$ es antisimétrico), tenemos que (3.46) se reduce a

$$\left.\begin{array}{lcccccc} Q^0 &=& \xi^{01}A^0{}_1 &+& \xi^{02}A^0{}_2 & & \\ Q^1 &=& -\xi^{01}A^1{}_0 &+& \xi^{12}A^1{}_2 & & \\ Q^2 &=& -\xi^{02}A^2{}_0 &-& \xi^{12}A^2{}_1 & & \\ Q^3 &=& \xi^{30}A^3{}_0 &+& \xi^{31}A^3{}_1 & +\xi^{32}A^3{}_2 & \end{array}\right\}. \tag{3.48}$$

Más adelante visualizaremos a estas expresiones como un sistema de ecuaciones cuyas incognitas serán los elementos $\xi^{\mu\nu}$.
Notemos que de todos los casos (y subcasos) en que se analizo (3.20) solo hay tres subcasos para los cuales los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ no necesariamente deben ser nulos, estos subcasos son el 2.2b, 2.3 y 2.4. Del subcaso 2.2b se encontró que, dentro de este, todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ excepto Q^3 son nulos (la nulidad de Q^2 resultó como consecuencia de la antisimetría de $J^{\mu\nu}$). En lo que sigue, usaremos (3.25), (3.27) y (3.35) para encontrar las condiciones que deben satisfacer los a^μ y $J^{\mu\nu}$ para que los $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ puedan ser constantes y, para esto, consideraremos 3 casos: Caso rt, Caso r y Caso t. Estos casos tienen que ver con la dependencia en r y t del elemento δ de la métrica (3.6).

3.2.2. CASO rt: El elemento de la métrica δ depende de r y t simultáneamente.

De (3.25), (3.27) y (3.35) se puede ver que, sin imponer restricciones, los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ no son constantes. Entonces, en lo que sigue nos dedicaremos a analizar dentro del Caso rt los subcasos 2.2b, 2.3 y 2.4 para encontrar condiciones sobre los elementos a^μ y $J^{\mu\nu}$ que permitan que los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sean constantes.

Análisis del Subcaso 2.2b (Caso rt).

Considerando a (3.48) como un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los elementos $\xi^{\mu\nu}$, se puede observar que las tres primeras ecuaciones están desacopladas de la cuarta. Primero resolveré el sistema de ecuaciones constituido por las tres primeras que reescribo como

$$\left.\begin{array}{ccccccc} A^0{}_1\xi^{01} &+& A^0{}_2\xi^{02} &+& 0 &=& Q^0 \\ -A^1{}_0\xi^{01} &+& 0 &+& A^1{}_2\xi^{12} &=& Q^1 \\ 0 &-& A^2{}_0\xi^{02} &-& A^2{}_1\xi^{12} &=& Q^2 \end{array}\right\}. \tag{3.49}$$

En esta última expresión he conmutado los términos gracias a que $\xi^{\mu\nu}$ es proporcional a $\hbar$ (esto se puede ver de (3.45)). El sistema (3.49) es un sistema de ecuaciones lineales de 3×3 que resolviendo por el método de Cramer se tiene

$$\begin{pmatrix}\xi^{01}\\ \xi^{02}\\ \xi^{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q^0A^1{}_2A^2{}_0+Q^1Q^2A^0{}_2\left(A^2{}_1+A^1{}_2\right)}{A^0{}_1A^1{}_2A^2{}_0-A^0{}_2A^1{}_0A^2{}_1} \\ \\ \frac{-Q^2A^0{}_1A^1{}_2-A^2{}_1\left(A^0{}_1Q^1+Q^0A^1{}_0\right)}{A^0{}_1A^1{}_2A^2{}_0-A^0{}_2A^1{}_0A^2{}_1} \\ \\ \frac{-Q^2A^0{}_2A^1{}_0+A^2{}_0\left(A^0{}_1Q^1+Q^0A^1{}_0\right)}{A^0{}_1A^1{}_2A^2{}_0-A^0{}_2A^1{}_0A^2{}_1} \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Aquí reiteraré un punto. De la misma forma en que ya se ha hecho antes, gracias a que $\xi^{\mu\nu}$ es proporcional a $\hbar$ y a que despreciamos términos de orden cuadrático en $\hbar$, podemos conmutar los elementos $\xi^{\mu\nu}$ con los elementos $A^{\alpha}{}_{\beta}$ como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \xi^{\mu\nu}A^{\alpha}{}_{\beta} &= A^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\mu\nu} + \left[\xi^{\mu\nu}, A^{\alpha}{}_{\beta}\right] \\ &= A^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\mu\nu} + \hbar\left[\xi'^{\mu\nu}, A^{\alpha}{}_{\beta}\right], \quad \xi'^{\mu\nu} := -\frac{1}{2}iJ^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

usando (2.23) en esta última expresión tenemos que

$$\begin{gathered} \xi^{\mu\nu}A^{\alpha}{}_{\beta} = A^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\mu\nu} + O\left(\hbar^2\right), \\ \Longrightarrow \xi^{\mu\nu}A^{\alpha}{}_{\beta} \approx A^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\mu\nu}, \end{gathered}$$

de esta forma justifico que puedo usar el metodo de Cramer. Usando (3.26) y (3.43) en (3.50) se tiene

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix}\xi^{01}\\ \xi^{02}\\ \xi^{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \\ \Longrightarrow \begin{pmatrix}J^{01}\\ J^{02}\\ J^{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.51}$$

Ahora que ya analizamos las tres primeras ecuaciones de (3.48) solo nos queda analizar la cuarta y ésta queda como

$$\begin{aligned} Q^3 &= \xi^{30}A^3{}_0 + \xi^{31}A^3{}_1 + \xi^{32}A^3{}_2 \\ &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{30}a^3\partial_0\left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] - \frac{1}{2}i\hbar J^{31}a^3\partial_1\left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] - \frac{1}{2}i\hbar J^{32}a^3\partial_2\left[\frac{1}{\delta}\cot\psi\right] \\ &= \frac{1}{2}i\hbar J^{30}a^3\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi + \frac{1}{2}i\hbar J^{31}a^3\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi + \frac{1}{2}i\hbar J^{32}a^3\delta^{-1}\csc^2\psi \\ &= \frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}\delta\sin\psi\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi + J^{31}\delta\sin\psi\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi + J^{32}\delta\sin\psi\delta^{-1}\csc^2\psi\right) \\ &= \frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}\delta^{-1}\partial_0\delta\cos\psi + J^{31}\delta^{-1}\partial_1\delta\cos\psi + J^{32}\csc\psi\right), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow Q^3 = \frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30}\partial_0 \ln\delta \cos\psi + J^{31}\partial_1 \ln\delta \cos\psi + J^{32}\csc\psi \right). \tag{3.52}$$

Con el fin de que Q^3 sea constante como la teoría lo pide, imponemos

$$i\hbar J^{30} = (\partial_0 \ln\delta)^{-1} \sec\psi \, C^{30}, \tag{3.53}$$
$$i\hbar J^{31} = (\partial_1 \ln\delta)^{-1} \sec\psi \, C^{31}, \tag{3.54}$$
$$i\hbar J^{32} = \sin\psi \, C^{32}, \tag{3.55}$$

con C^{30}, C^{31} y C^{32} constantes indeterminadas.

Análisis del Subcaso 2.3 y 2.4 (Caso rt).

El subcaso 2.3 consiste en hacer $\beta = \gamma = 0, 2, 3$, $\beta \neq \nu = 1$ y μ arbitrario. Ahora dividiremos este subcaso en dos subcasos: Subcaso 2.3a que consiste en hacer $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$ y μ arbitrario, y el Subcaso 2.3b que consiste en hacer $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$ y μ arbitrario. Desarrollando (3.27) se tiene

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{\mu\sigma} a^\mu \partial_\sigma \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{\mu 0} a^\mu \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] + J^{\mu 1} a^\mu \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] \right. \\ &\quad \left. + J^{\mu 2} a^\mu \partial_2 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] \right). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Subcaso 2.3a: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.56) que

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} = -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{\mu 0} a^\mu \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] + J^{\mu 1} a^\mu \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r} \right] \right). \tag{3.57}$$

De (3.51) y (3.57) se puede ver que

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{1\beta} = 0 \quad , \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2. \tag{3.58}$$

Y para $\mu = 3$ en (3.57) tenemos

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]+J^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\Bigg((\partial_0\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]\\
&\quad+(\partial_1\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]\Bigg)\\
&= -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Donde en esta última se hizo uso de (3.53) y (3.54). Notemos que en (3.58) están contenidas las condiciones (3.29) y (3.31) y en (3.59) están contenidas las condiciones (3.30) y (3.32); entonces se debe cumplir

$$i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{1\beta} = -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi = 0,$$

$$\Longrightarrow C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta}=0 \quad , \quad \text{con } \beta=0,2. \qquad (3.60)$$

Ahora analicemos el subcaso 2.3b.

Subcaso 2.3b: $\beta=\gamma=3$, $\beta\neq\nu=1$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.56) que

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{13} &= -\frac{1}{2}i\hbar\Bigg(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial r}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial r}\right]\\
&\quad+J^{\mu 2}a^\mu\partial_2\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial r}\right]\Bigg)\\
&= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]+J^{\mu 2}a^\mu\partial_2\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right). \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

De (3.51) y (3.61) se puede ver que

$$i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{13} = 0 \quad , \quad \text{con } \mu=0,1,2. \qquad (3.62)$$

Y para $\mu=3$ en (3.61) tenemos

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{33}{}_{13} &= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]+J^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left((\partial_0\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right.\\
&\quad \left.+(\partial_1\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\delta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\delta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi. \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

Donde en esta última se hizo uso de (3.53) y (3.54). Notemos que en (3.62) están contenidas las condiciones (3.33) y (3.34); además, usando (3.60) con $\beta=2$ en (3.63), tenemos

$$i2\epsilon Q^{33}{}_{13}=0. \qquad (3.64)$$

Ahora analicemos el subcaso 2.4. El subcaso 2.4 consiste en hacer $\beta=\gamma=1,2,3$, $\beta\neq\nu=0$ y μ arbitrario. Dividiremos este subcaso en dos subcasos: Subcaso 2.4a que consiste en hacer $\beta=\gamma=1,2$, $\beta\neq\nu=0$ y μ arbitrario, y el Subcaso 2.4b que consiste en hacer $\beta=\gamma=3$, $\beta\neq\nu=0$ y μ arbitrario. Desarrollando (3.35) se tiene

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{\mu\sigma}a^{\mu}\partial_\sigma\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\\
&= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu0}a^{\mu}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]+J^{\mu1}a^{\mu}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right.\\
&\quad\left.+J^{\mu2}a^{\mu}\partial_2\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right). \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Subcaso 2.4a: $\beta=\gamma=1,2$, $\beta\neq\nu=0$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.65) que

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{0\beta}=-\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu0}a^{\mu}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]+J^{\mu1}a^{\mu}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right). \qquad (3.66)$$

De (3.51) y (3.66) se puede ver que

$$i2\epsilon Q^{\mu\beta}{}_{0\beta}=0 \quad , \quad \text{con } \mu=0,1,2. \qquad (3.67)$$

Y para $\mu=3$ en (3.66) tenemos

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]+J^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left((\partial_0\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right.\\
&\quad\left.+(\partial_1\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Notemos que en (3.67) están contenidas las condiciones (3.37) y (3.39), y en (3.68) están contenidas las condiciones (3.38) y (3.40); entonces se debe cumplir

$$i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{0\beta} = -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi = 0,$$

$$\Longrightarrow C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]}{\partial_1\ln\delta} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 1,2. \qquad (3.69)$$

Ahora analicemos el subcaso 2.4b

Subcaso 2.4b: $\beta=\gamma=3$, $\beta\neq\nu=0$, μ arbitrario.
Para este subcaso tenemos de (3.65) que

$$\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{03} &= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial t}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial t}\right]\right.\\
&\quad\left.+J^{\mu 2}a^\mu\partial_2\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta\sin\psi}\frac{\partial\delta\sin\psi}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]+J^{\mu 2}a^\mu\partial_2\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{\mu 0}a^\mu\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]+J^{\mu 1}a^\mu\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right). \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

De (3.51) y (3.70) se puede ver que

$$i2\epsilon Q^{\mu 3}{}_{03} = 0 \quad , \quad \text{con } \mu = 0,1,2. \qquad (3.71)$$

Y para $\mu = 3$ en (3.70) tenemos

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{33}{}_{03} &= -\frac{1}{2}i\bar{k}\left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]+J^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left((\partial_0\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right.\\
&\quad\left.+(\partial_1\ln\delta)^{-1}\sec\psi\, C^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]}{\partial_1\ln\delta}\right)\delta\tan\psi. \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

Notemos que en (3.71) están contenidas las condiciones (3.41) y (3.42); además, usando (3.69) con $\beta = 2$ en (3.72) tenemos

$$
i2\epsilon Q^{33}{}_{03} = 0. \qquad (3.73)
$$

En resumen, hemos obtenido que Q^3, el único elemento no nulo dentro del subcaso 2.2b, está en términos de las constantes C^{30}, C^{31} y C^{32} , y los elementos $J^{\mu\nu}$ quedaron como

$$
i\bar{k}J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -C^{30}\frac{\sec\psi}{\partial_0\ln\delta}\\
0 & 0 & 0 & -C^{31}\frac{\sec\psi}{\partial_1\ln\delta}\\
0 & 0 & 0 & -C^{32}\sin\psi\\
C^{30}\frac{\sec\psi}{\partial_0\ln\delta} & C^{31}\frac{\sec\psi}{\partial_1\ln\delta} & C^{32}\sin\psi & 0
\end{pmatrix}, \qquad (3.74)
$$

con C^{30}, C^{31} y C^{32} constantes indeterminadas. De los subcasos 2.3 y 2.4 se encontró que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ son nulos con las condiciones

$$
C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^{\beta}\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^{\beta}\right]}{\partial_1\ln\delta} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 0,2,
$$

$$
C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^{\beta}\right]}{\partial_0\ln\delta}+C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^{\beta}\right]}{\partial_1\ln\delta} = 0 \quad , \quad \text{con } \beta = 1,2.
$$

Es importante notar que δ forzosamente debe ser función de r y t simultaneamente para que J^{30} y J^{31} no diverjan y así puedan estar bien definidos. Por esta razón es que estamos considerando diferentes casos (Caso rt, Caso r y Caso t) que tienen que ver con la dependencia de δ.

3.2.3. CASO r: El elemento de la métrica δ depende únicamente de r.

En lo que sigue nos dedicaremos a analizar dentro del Caso r los subcasos 2.2b, 2.3 y 2.4 para encontrar condiciones sobre los elementos a^{μ} y $J^{\mu\nu}$ asegurando así que $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sea constante.

Análisis del Subcaso 2.2b (Caso r).

Para este caso, de las primeras tres ecuaciones de (3.48) tenemos

$$\begin{aligned} A^0{}_1\xi^{01} + A^0{}_2\xi^{02} &= Q^0, && (3.75)\\ A^1{}_2\xi^{12} &= Q^1, && (3.76)\\ -A^2{}_1\xi^{12} &= Q^2. && (3.77) \end{aligned}$$

Usando (3.43) en (3.77) se tiene

$$\begin{gathered} -A^2{}_1\xi^{12} = 0,\\ \delta\partial_1\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{12} = 0,\\ -\delta\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{12} = 0,\\ \delta^{-1}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{12} = 0,\\ \Longrightarrow \xi^{12} = 0, \end{gathered}$$

$$J^{12} = 0. \tag{3.78}$$

Usando (3.76) para determinar J^{12} se obtiene el mismo resultado que en (3.78). De (3.75) tenemos

$$\begin{aligned} Q^0 &= \alpha\partial_1\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{01} + \alpha\partial_2\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{02}\\ &= -\alpha\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{01} - \alpha\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{02}. \end{aligned}$$

Usando (3.26) en esta última tenemos

$$0 = -\alpha\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{01} - \alpha\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{02},$$

$$0 = \delta^{-1}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{01} + \csc^2\psi\xi^{02},$$

$$0 = \sin^2\psi\delta^{-1}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{01} + \xi^{02},$$

$$0 = \sin^2\psi\cot\psi\partial_1\ln\delta\xi^{01} + \xi^{02},$$

$$0 = \sin\psi\cos\psi\partial_1\ln\delta\xi^{01} + \xi^{02},$$

$$\Longrightarrow \xi^{02} = -\sin\psi\cos\psi\partial_1\ln\delta\xi^{01}. \tag{3.79}$$

De la cuarta ecuación de (3.48) tenemos que

$$\begin{aligned} Q^3 &= A^3{}_1\xi^{31} + A^3{}_2\xi^{32} \\ &= \delta \sin\psi \partial_1 \left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{31} + \delta\sin\psi\partial_2\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{32} \\ &= -\delta\sin\psi\delta^{-2}\partial_1\delta\cot\psi\xi^{31} - \delta\sin\psi\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{32}. \end{aligned}$$

Por (3.78) puedo hacer conmutaciones en esta última, entonces tenemos

$$\begin{aligned} Q^3 &= -\delta^{-1}\partial_1\delta\cos\psi\xi^{31} - \csc\psi\xi^{32} \\ &= -\partial_1 \ln\delta\cos\psi\xi^{31} - \csc\psi\xi^{32}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de imponer que Q^3 sea constante tenemos de esta última que

$$\xi^{31} = \sec\psi\left(\partial_1\ln\delta\right)^{-1}B^{31}, \tag{3.80}$$
$$\xi^{32} = \sin\psi B^{32}, \tag{3.81}$$

con B^{31} y B^{32} constantes indeterminadas.

Análisis del Subcaso 2.3 (Caso r).

Al igual que en el Caso rt, en el Caso r analizaremos el subcaso 2.3 dividiendo éste en 2.3a y 2.3b (con las mismas restricciones en β y γ que se dieron para el Caso rt) pero, además, cada uno de estos subcasos 2.3a y 2.3b los dividiremos en cuatro subcasos que corresponden a los cuatro valores que puede tomar el índice μ.

Subcaso 2.3a.0: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{0\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] \\ &= \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Dandole valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{00}{}_{10} = \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\alpha\right], \tag{3.83}$$

$$i2\epsilon Q^{02}{}_{12} = \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\delta\right] = 0, \tag{3.84}$$

donde en (3.84) se ha usado (3.31).

Subcaso 2.3a.1: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{1\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{10} a^1 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right], \end{aligned} \tag{3.85}$$

donde esta última no se anula ya que no entra en algún caso de (3.28).

Subcaso 2.3a.2: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 2$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{2\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{20} a^2 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{02} \delta \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] \\ &= -\xi^{02}\delta\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] \\ &= \sin\psi\cos\psi\partial_1 \ln\delta\xi^{01}\delta\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Dandole valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{20}{}_{10} = \sin\psi\cos\psi\partial_1 \ln\delta\xi^{01}\delta\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] = 0, \tag{3.87}$$

$$i2\epsilon Q^{22}{}_{12} = \sin\psi\cos\psi\partial_1 \ln\delta\xi^{01}\delta\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right], \tag{3.88}$$

donde en (3.87) se ha usado (3.29).

Subcaso 2.3a.3: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]\right) \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] + J^{31}\delta\sin\psi\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]\right) \\ &= \left(\xi^{30}\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] + \xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]\right)\delta\sin\psi = 0, \end{aligned} \tag{3.89}$$

donde en (3.89) se ha usado (3.30) y (3.32).

Subcaso 2.3b.0: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{03}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] \\ &= \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.90}$$

donde en (3.90) se ha usado (3.33).

Subcaso 2.3b.1: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{13}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{10} a^1 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right], \end{aligned} \tag{3.91}$$

donde esta última no se anula ya que no entra en algún caso de (3.28).

Subcaso 2.3b.2: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 2$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{23}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{20} a^2 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{02}\delta\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{02}\delta\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.92}$$

donde en (3.92) se ha usado (3.34).

Subcaso 2.3b.3: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{33}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right) \\ &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] + J^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right]\right). \end{aligned} \tag{3.93}$$

Ahora veamos las implicaciones del subcaso 2.3. De subcaso 2.3a.0 en (3.84) tenemos

$$\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \delta\right] = 0. \tag{3.94}$$

Del subcaso 2.3a.2 en (3.87) tenemos

$$\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] = 0. \tag{3.95}$$

Del subcaso 2.3b.2 en (3.92) tenemos

$$\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \delta\right] = 0. \tag{3.96}$$

De (3.94) y (3.96) tenemos entonces

$$\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \delta = \text{constante}. \tag{3.97}$$

Del subcaso 2.3a.3 en (3.89) con $\beta = 0$ tenemos

$$\xi^{30}\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] + \xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] = 0.$$

Usando (3.95) en esta última se tiene

$$\xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] = 0,$$

$$\Longrightarrow \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] = 0. \tag{3.98}$$

De (3.95) y (3.98) tenemos

$$\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha = \text{constante}. \tag{3.99}$$

Solo por simplificar la notación reescribimos (3.99) y (3.97) como

$$\frac{1}{a^1}\partial_1 \ln a^{\beta} = R_1^{\beta} \quad , \quad \text{con } \beta = 0, 2, \tag{3.100}$$

con R_1^{β} una constante indeterminada. Por (3.100) tenemos que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ dentro del subcaso 2.3 son nulos.

Análisis del Subcaso 2.4 (Caso r).

Al igual que en el Caso rt, en el Caso r analizaremos el subcaso 2.4 dividiendo este en 2.4a y 2.4b (con las mismas restricciones en β y γ que se dieron para el Caso rt) pero, además, cada uno de estos subcasos 2.4a y 2.4b los dividiremos en cuatro subcasos que corresponden a los cuatro valores que puede tomar el índice μ.

Subcaso 2.4a.0: $\beta = \gamma = 1, 2$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{0\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^\beta} \frac{\partial a^\beta}{\partial t} \right] \\ &= \xi^{01} \alpha \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right]. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Dandole valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{01}{}_{01} = \xi^{01} \alpha \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \gamma \right], \tag{3.102}$$

$$i2\epsilon Q^{02}{}_{02} = \xi^{01} \alpha \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \delta \right] = 0. \tag{3.103}$$

Subcaso 2.4a.1: $\beta = \gamma = 1, 2$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{1\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{10} a^1 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^\beta} \frac{\partial a^\beta}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] \\ &= -\xi^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right]. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Dandole valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{11}{}_{01} = -\xi^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \gamma \right], \tag{3.105}$$

$$i2\epsilon Q^{12}{}_{02} = -\xi^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \delta \right] = 0, \tag{3.106}$$

donde en (3.106) se ha usado (3.39).

Subcaso 2.4a.2: $\beta = \gamma = 1, 2$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 2$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{2\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{20} a^2 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{02} \delta \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right] \\ &= -\xi^{02}\delta\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Dandole valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{21}{}_{01} = -\xi^{02}\delta\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln \gamma\right] = 0, \tag{3.108}$$

$$i2\epsilon Q^{22}{}_{02} = -\xi^{02}\delta\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln \delta\right] = 0, \tag{3.109}$$

donde en (3.108) se ha usado (3.37).

Subcaso 2.4a.3: $\beta = \gamma = 1, 2$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right]\right) \\ &= \xi^{30}\delta \sin\psi \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right] + \xi^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right] \\ &= \left(\xi^{30}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right] + \xi^{31}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]\right)\delta\sin\psi = 0, \end{aligned} \tag{3.110}$$

donde en (3.110) se ha usado (3.38) y (3.40).

Subcaso 2.4b.0: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{03}{}_{03} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial t}\right] \\ &= \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Subcaso 2.4b.1: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{13}{}_{03} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{10} a^1 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{01} \gamma \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.112}$$

donde en (3.112) se ha usado (3.41).

Subcaso 2.4b.2: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 2$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{23}{}_{03} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{20} a^2 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{02} \delta \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{02}\delta\partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.113}$$

donde en (3.113) se ha usado (3.42).

Subcaso 2.4b.3: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{33}{}_{03} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Ahora veamos las implicaciones del subcaso 2.4. De subcaso 2.4a.2 en (3.108) tenemos

$$\partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0. \tag{3.115}$$

Del subcaso 2.4a.3 en (3.110) con $\beta = 1$ tenemos

$$\xi^{30}\partial_0 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] + \xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0.$$

Sustituyendo (3.115) en esta última se tiene

$$\xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0,$$

$$\Longrightarrow \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0. \tag{3.116}$$

De (3.115) y (3.116) se tiene

$$\frac{1}{a^0}\partial_0 \ln\gamma = R, \tag{3.117}$$

con R una constante indeterminada. Por (3.117) tenemos que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ dentro del subcaso 2.4 son nulos.
En resumen, hemos obtenido que Q^3, el único elemento no nulo dentro del subcaso 2.2b, está escrito en términos de las constantes B^{31} y B^{32}, y los elementos $J^{\mu\nu}$ quedaron como

$$i\hbar J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\hbar J^{01} & -\sin\psi\cos\psi\,\partial_1\ln\delta\, i\hbar J^{01} & -i\hbar J^{30} \\ -i\hbar J^{01} & 0 & 0 & 2B^{31}\frac{\sec\psi}{\partial_1\ln\delta} \\ \sin\psi\cos\psi\,\partial_1\ln\delta\, i\hbar J^{01} & 0 & 0 & 2B^{32}\sin\psi \\ i\hbar J^{30} & -2B^{31}\frac{\sec\psi}{\partial_1\ln\delta} & -2B^{32}\sin\psi & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.118}$$

con B^{31}, B^{32} constantes indeterminadas y J^{01}, J^{30} hasta ahora no ha sido necesario especificarlas. De los subcasos 2.3 y 2.4 se encontró que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ son nulos con las condiciónes

$$\frac{1}{a^0}\partial_0\ln\gamma = R \qquad ; \qquad \frac{1}{a^1}\partial_1\ln a^\beta = R_1^\beta \quad , \quad \text{con } \beta = 0, 2,$$

con R y R_1^β constantes indeterminadas.

3.2.4. CASO t: El elemento de la métrica δ depende únicamente de t.

En lo que sigue nos dedicaremos a analizar dentro del Caso t los subcasos 2.2b, 2.3 y 2.4 para encontrar condiciones sobre los elementos a^μ y $J^{\mu\nu}$ asegurando así que $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sea constante.

Análisis del Subcaso 2.2b (Caso t).

Para este caso, de las primeras tres ecuaciones de (3.48) tenemos

$$\begin{aligned} A^0{}_2\xi^{02} &= Q^0, & (3.119)\\ -A^1{}_0\xi^{01} + A^1{}_2\xi^{12} &= Q^1, & (3.120)\\ -A^2{}_0\xi^{02} &= Q^2. & (3.121) \end{aligned}$$

Usando (3.43) en (3.121) se tiene

$$-A^2{}_0\xi^{02} = 0,$$

$$\delta\partial_0\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{02} = 0,$$

$$-\delta\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{02} = 0,$$

$$\delta^{-1}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{02} = 0,$$

$$\Longrightarrow \xi^{02} = 0,$$

$$J^{02} = 0. \tag{3.122}$$

Usando (3.119) para determinar J^{02} se obtiene el mismo resultado que en (3.122). De (3.120) tenemos

$$\begin{aligned} Q^1 &= -\gamma\partial_0\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{01} + \gamma\partial_2\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{12} \\ &= \gamma\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{01} - \gamma\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{12}. \end{aligned}$$

Usando (3.26) en esta última tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{01} - \gamma\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{12} \\ &= \delta^{-1}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{01} - \csc^2\psi\xi^{12} \\ &= \partial_0\ln\delta\ \cot\psi\ \xi^{01} - \csc^2\psi\xi^{12} \\ &= \sin^2\psi\partial_0\ln\delta\ \cot\psi\ \xi^{01} - \xi^{12} \\ &= \sin^2\psi\ \cot\psi\ \partial_0\ln\delta\ \xi^{01} - \xi^{12}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \xi^{12} = \sin\psi\ \cos\psi\ \partial_0\ln\delta\ \xi^{01}. \tag{3.123}$$

De la cuarta ecuación de (3.48) tenemos que

$$\begin{aligned} Q^3 &= A^3{}_0\xi^{30} + A^3{}_2\xi^{32} \\ &= \delta\sin\psi\partial_0\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{30} + \delta\sin\psi\partial_2\left[\delta^{-1}\cot\psi\right]\xi^{32} \\ &= -\delta\sin\psi\delta^{-2}\partial_0\delta\cot\psi\xi^{30} - \delta\sin\psi\delta^{-1}\csc^2\psi\xi^{32}. \end{aligned}$$

Usando (3.122) puedo hacer conmutaciones en esta última

$$Q^3 = -\delta^{-1}\partial_0\delta\cos\psi\xi^{30} - \csc\psi\xi^{32} \tag{3.124}$$

$$= -\partial_0\ln\delta\cos\psi\xi^{30} - \csc\psi\xi^{32}, \tag{3.125}$$

como consecuencia de que Q^3 es constante tenemos de esta última que

$$\xi^{30} = \sec\psi\left(\partial_0\ln\delta\right)^{-1} D^{30}, \tag{3.126}$$

$$\xi^{32} = \sin\psi D^{32}, \tag{3.127}$$

con D^{30} y D^{32} constantes indeterminadas.

Análisis del Subcaso 2.3 (Caso t).

Al igual que en el Caso r, en el Caso t analizaremos el subcaso 2.3 dividiendo este en 2.3a y 2.3b (con las mismas restricciones en β y γ) y cada uno de estos los dividiremos en cuatro subcasos que corresponden a los cuatro valores que puede tomar el índice μ.

Subcaso 2.3a.0: $\beta=\gamma=0,2$, $\beta\neq\nu=1$, $\mu=0$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{0\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{01}a^0\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\ &= \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Dando valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{00}{}_{10}=\xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\alpha\right], \tag{3.129}$$

$$i2\epsilon Q^{02}{}_{12}=\xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\delta\right]=0, \tag{3.130}$$

donde en (3.147) se ha usado (3.31).

Subcaso 2.3a.1: $\beta=\gamma=0,2$, $\beta\neq\nu=1$, $\mu=1$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{1\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{10}a^1\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2}i\hbar J^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Dando valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{10}{}_{10} = -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\alpha\right], \tag{3.132}$$

$$i2\epsilon Q^{12}{}_{12} = -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1\ln\delta\right]=0. \tag{3.133}$$

Subcaso 2.3a.2: $\beta=\gamma=0,2$, $\beta\neq\nu=1$, $\mu=2$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{2\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{21} a^2 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{2} i\hbar J^{12} \delta \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] \\
&= -\xi^{12}\delta\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]. \qquad (3.134)
\end{aligned}
$$

Dando valores a β en esta última se tiene

$$
i2\epsilon Q^{20}{}_{10} = -\xi^{12}\delta\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \alpha\right] = 0, \qquad (3.135)
$$

$$
i2\epsilon Q^{22}{}_{12} = -\xi^{12}\delta\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \delta\right] = 0, \qquad (3.136)
$$

donde en (3.135) se ha usado (3.29).

Subcaso 2.3a.3: $\beta = \gamma = 0, 2$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.57) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{1\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial r}\right]\right) \\
&= \left(\xi^{30}\delta \sin\psi \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] + \xi^{31}\delta \sin\psi \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]\right) \\
&= \left(\xi^{30} \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right] + \xi^{31} \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]\right) \delta \sin\psi = 0, \qquad (3.137)
\end{aligned}
$$

donde en (3.137) se ha usado (3.30) y (3.32).

Subcaso 2.3b.0: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{03}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial r}\right] \\
&= \xi^{01}\alpha\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln \delta\right] = 0, \qquad (3.138)
\end{aligned}
$$

donde en (3.138) se ha usado (3.33).

Subcaso 2.3b.1: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{13}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{10} a^1 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{01}\gamma\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.139}$$

Subcaso 2.3b.2: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 2$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{23}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{21} a^2 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{12}\delta\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] \\ &= -\xi^{12}\delta\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\delta\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.140}$$

donde en (3.140) se ha usado (3.34).

Subcaso 2.3b.3: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 1$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.61) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{33}{}_{13} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial r}\right]\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.141}$$

Ahora veamos las implicaciones del subcaso 2.3. De subcaso 2.3a.2 en (3.135) tenemos

$$\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] = 0. \tag{3.142}$$

Del subcaso 2.3a.3 en (3.137) con $\beta = 0$ tenemos

$$\xi^{30}\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] + \xi^{31}\partial_1 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] = 0.$$

Sustituyendo (3.142) en esta última se tiene

$$\xi^{30}\partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] = 0,$$

$$\Longrightarrow \partial_0 \left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha\right] = 0. \tag{3.143}$$

De (3.142) y (3.143) se tiene

$$\frac{1}{a^1}\partial_1 \ln\alpha = E, \tag{3.144}$$

con E una constante indeterminada. Por (3.144) tenemos que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ dentro del subcaso 2.3 son nulos.

Análisis del Subcaso 2.4 (Caso t).

Al igual que en el Caso r, en el Caso t analizaremos el subcaso 2.4 dividiendo este en 2.4a y 2.4b (con las mismas restricciones en β y γ) y cada uno de estos los dividiremos en cuatro subcasos que corresponden a los cuatro valores que puede tomar el índice μ.

Subcaso 2.4a.0: $\beta=\gamma=1,2$, $\beta\neq\nu=0$, $\mu=0$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{0\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{01}a^0\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right] \\ &= \xi^{01}\alpha\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Subcaso 2.4a.1: $\beta=\gamma=1,2$, $\beta\neq\nu=0$, $\mu=1$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{1\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{10}a^1\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a^\beta}\frac{\partial a^\beta}{\partial t}\right] \\ &= \frac{1}{2}i\hbar J^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right] \\ &= -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln a^\beta\right]. \end{aligned} \tag{3.146}$$

Dando valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{11}{}_{01} = -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\gamma\right], \tag{3.147}$$

$$i2\epsilon Q^{12}{}_{02} = -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right] = 0. \tag{3.148}$$

donde en (3.148) se ha usado (3.39).

Subcaso 2.4a.2: $\beta=\gamma=1,2$, $\beta\neq\nu=0$, $\mu=2$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{2\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{21} a^2 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^\beta} \frac{\partial a^\beta}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} i\hbar J^{12} \delta \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] \\ &= -\xi^{12} \delta \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right]. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Dando valores a β en esta última se tiene

$$i2\epsilon Q^{21}{}_{01} = -\xi^{12} \delta \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \gamma \right] = 0, \tag{3.150}$$

$$i2\epsilon Q^{22}{}_{02} = -\xi^{12} \delta \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \delta \right], \tag{3.151}$$

donde en (3.150) se ha usado (3.37).

Subcaso 2.4a.3: $\beta = \gamma = 1, 2$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 3$.
Para este subcaso tenemos de (3.66) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{3\beta}{}_{0\beta} &= -\frac{1}{2} i\hbar \left(J^{30} a^3 \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^\beta} \frac{\partial a^\beta}{\partial t} \right] + J^{31} a^3 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{a^\beta} \frac{\partial a^\beta}{\partial t} \right] \right) \\ &= \left(\xi^{30} \delta \sin\psi \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] + \xi^{31} \delta \sin\psi \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] \right) \\ &= \left(\xi^{30} \partial_0 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] + \xi^{31} \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln a^\beta \right] \right) \delta \sin\psi = 0, \end{aligned} \tag{3.152}$$

donde en (3.152) se ha usado (3.38) y (3.40).

Subcaso 2.4b.0: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 0$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$\begin{aligned} i2\epsilon Q^{03}{}_{03} &= -\frac{1}{2} i\hbar J^{01} a^0 \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \right] \\ &= \xi^{01} \alpha \partial_1 \left[\frac{1}{\alpha} \partial_0 \ln \delta \right]. \end{aligned} \tag{3.153}$$

Subcaso 2.4b.1: $\beta = \gamma = 3$, $\beta \neq \nu = 0$, $\mu = 1$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{13}{}_{03} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{10}a^{1}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2}i\hbar J^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right] \\
&= -\xi^{01}\gamma\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]=0, \qquad (3.154)
\end{aligned}
$$

donde en (3.154) se ha usado (3.41).

Subcaso 2.4b.2: $\beta=\gamma=3$, $\beta\neq\nu=0$, $\mu=2$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{23}{}_{03} &= -\frac{1}{2}i\hbar J^{21}a^{2}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right] \\
&= \frac{1}{2}i\hbar J^{12}\delta\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right] \\
&= -\xi^{12}\delta\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]=0, \qquad (3.155)
\end{aligned}
$$

donde en (3.155) se ha usado (3.42).

Subcaso 2.4b.3: $\beta=\gamma=3$, $\beta\neq\nu=0$, $\mu=3$.
Para este subcaso tenemos de (3.70) que

$$
\begin{aligned}
i2\epsilon Q^{33}{}_{03} &= -\frac{1}{2}i\hbar\left(J^{30}a^{3}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]+J^{31}a^{3}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right]\right) \\
&= \left(\xi^{30}\delta\sin\psi\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]+\xi^{31}\delta\sin\psi\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]\right) \\
&= \left(\xi^{30}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]+\xi^{31}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]\right)\delta\sin\psi. \qquad (3.156)
\end{aligned}
$$

Ahora veamos las implicaciones del subcaso 2.4. De subcaso 2.4a.1 en (3.148) tenemos

$$
\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]=0. \qquad (3.157)
$$

Del subcaso 2.4a.2 en (3.150) tenemos

$$
\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\gamma\right]=0. \qquad (3.158)
$$

Del subcaso 2.4b.2 en (3.155) tenemos

$$
\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0\ln\delta\right]=0. \qquad (3.159)
$$

De (3.157) y (3.159) tenemos

$$\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\delta = \text{constante}. \tag{3.160}$$

Del subcaso 2.4a.3 en (3.152) con $\beta = 1$ tenemos

$$\xi^{30}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] + \xi^{31}\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0.$$

Usando (3.158) en esta última se tiene

$$\xi^{30}\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0,$$

$$\Longrightarrow \partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma\right] = 0. \tag{3.161}$$

De (3.158) y (3.161) tenemos

$$\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln\gamma = \text{constante}. \tag{3.162}$$

Solo por simplificar la notación reescribimos (3.160) y (3.162) como

$$\frac{1}{a^0}\partial_0 \ln a^\beta = E_0^\beta \quad , \quad \text{con } \beta = 1, 2, \tag{3.163}$$

con E_0^β una constante indeterminada. Por (3.163) tenemos que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ dentro del subcaso 2.4 son nulos.
En resumen, hemos obtenido que Q^3, el único elemento no nulo dentro del subcaso 2.2b, está en términos de las constantes D^{30} y D^{32} , y los elementos $J^{\mu\nu}$ quedaron como

$$i\hbar J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\hbar J^{01} & 0 & 2D^{30}\frac{\sec\psi}{\partial_0 \ln\delta} \\ -i\hbar J^{01} & 0 & \sin\psi\cos\psi\,\partial_0\ln\delta\, i\hbar J^{01} & -i\hbar J^{31} \\ 0 & -\sin\psi\cos\psi\,\partial_0\ln\delta\, i\hbar J^{01} & 0 & 2D^{32}\sin\psi \\ -2D^{30}\frac{\sec\psi}{\partial_0\ln\delta} & i\hbar J^{31} & -2D^{32}\sin\psi & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.164}$$

con D^{30}, D^{32} constantes indeterminadas y J^{01}, J^{31} hasta ahora no ha sido necesario especificarlas. De los subcasos 2.3 y 2.4 se encontró que todos los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ son nulos con las condiciónes

$$\frac{1}{a^0}\partial_0 \ln a^\beta = E_0^\beta \quad , \quad \text{con } \beta = 1, 2 \qquad ; \qquad \frac{1}{a^1}\partial_1 \ln\alpha = E,$$

con E_0^β y E constantes indeterminadas.

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones.

4.1. Resultados.

En el Capítulo 1 se dio una breve reseña acerca de la teoría de la Relatividad General, esto con el fin de introducir el concepto de tetrádas. La sección dos de este capítulo es mucho más extensa, primero se presenta la hipótesis que da origen a la teoría y se da inicio a la presentación y discusión del marco teórico mostrando el álgebra de funciones $\mathcal{A}$ con que se modela el espacio-tiempo no conmutativo y las propiedades de los elementos $J^{\mu\nu}$; después, se continua con una serie de subsecciones donde se tratan distintos aspectos de la teoría.

En la Subsección 1.2.1 se introduce el espacio de derivaciones $Der\,(\mathcal{A})$ como un conjunto de conmutadores dado por (1.16). Este hecho quiza podría parecer extraño, sin embargo no es algo nuevo. En las teorías cuánticas de campo, por ejemplo, tenemos la ecuación de movimiento de Heisenberg [23], en la Mecánica Cuántica no relativista tenemos expresiones como $\left[\hat{p}^i, \hat{f}\right] = -i\hbar\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}$ (con $\hat{p}^i$ y $\hat{f}$ operadores de momento y alguna observable respectivamente) e incluso desde la Mecánica Clásica tenemos expresiones como $\{p^i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$ (con f una observable, q_i una coordenada, p^i el momento canónico conjugado y $\{\ ,\ \}$ el paréntesis de Poisson). En todos estos ejemplos se puede ver una relación entre derivadas parciales y algún conmutador.

En la Subsección 1.2.2 se introdujo el espacio de 1-formas $\Omega^1(\mathcal{A})$. En esta parte expusimos algunas propiedades de las tetrádas y definimos el diferencial de un $f \in \mathcal{A}$. Vale la pena notar que la definición de diferencial dada por (1.23) en esta subsección es muy diferente en comparación con la definición usual dada en un curso de cálculo diferencial, sin embargo, es gratificante notar que si usamos la aproximación semiclásica (2.24) en la definición (1.23) y aplicamos después el límite conmutativo ($\not{k} \longrightarrow 0$) recuperamos la derivada total usual como a continuación se muestra:

$$
\begin{aligned}
df &= [\lambda_\mu, f]\,\theta^\mu \\
&= [\lambda_\mu, u^\nu]\,\partial_\nu f\,\theta^\mu,
\end{aligned}
$$

y usando (1.24) tenemos

$$df = G^{-1\nu}{}_{\mu}\partial_\nu f\, \theta^\mu,$$

con $G^{-1\nu}{}_{\mu}$ definida en (1.21). Aplicamos el límite conmutativo y obtenemos entonces

$$df = \partial_\nu f\, du^\nu. \tag{4.1}$$

Además, si también hicieramos la consideración del Capítulo 2 (es decir, los elementos $\{u^\nu\}_{\nu=0}^{3} = \{x^\nu\}_{\nu=0}^{3}$ corresponden a las coordenadas rectangulares y $r := x^i x^i$) y $f = f(r, x^0)$, aplicando regla de la cadena en (4.1) se tiene

$$df = \partial_0 f\, dx^0 + \partial_r f\, dr.$$

En la Subsección 1.2.3 se habló acerca de la deformación del producto entre tetrádas (deformación con respecto del producto wedge ($\wedge$)) y es aquí donde se introducen los elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ que son extensamente tratados en el Capítulo 3 así como también sus propiedades.

En la Subsección 1.2.4 mostramos un conjunto de constantes no triviales dados por $K_{\mu\nu}$ y $F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}$. A pesar de que el contenido de esta subsección no se trató en los Capítulos 2 y 3, es importante ya que, como a continuación lo muestro, algunas propiedades que se piden en la teoría dependen de estas constantes. Sustituyendo (1.61) en (1.59) tenemos

$$\begin{aligned} -ddf &= \left[-\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\, \theta^\alpha\theta^\beta, f\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[K_{\alpha\beta}, f\right]\theta^\alpha\theta^\beta. \end{aligned}$$

De esta última expresión es fácil ver que la propiedad $d^2 = 0$ depende fuertemente de la naturaleza constante de los elementos $K_{\mu\nu}$. También, de las ecuaciónes desde (1.66) hasta (1.68) se puede mostrar que

$$d\left(f\theta^\mu - \theta^\mu f\right) = \frac{1}{2}\left[F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}\,, f\right]\theta^\epsilon\theta^\rho.$$

De esta última expresión podemos notar que, si $F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}$ no es constante, entonces $d\left(f\theta^\mu - \theta^\mu f\right) \neq 0$ y por lo tanto tendríamos problemas con (1.29). Ahora, con respecto a la ecuación (1.75), dado que esta está en términos de los elementos $F^{\mu}{}_{\epsilon\rho}$, $K_{\epsilon\rho}$ y es obtenida mediante el uso de diversas propiedades del conjunto de tetradas y de derivaciones, tenemos que dicha ecuación es una condición de consistencia en la cual están expresadas las condiciones necesarias para lograr obtener $\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ [17, 16] y, además, esta provee la misma información acerca de la geometría del espacio que da el conjunto de derivaciones e_ν o el conjunto de tetrádas θ^μ [4]. También, podemos ver que el álgebra de los elementos λ_μ es cuadrática. En esta subsección es donde radica el posible trabajo a futuro que de continuidad a esta tesis pues es aquí donde podemos encontrar varios elementos involucrados con el modelo que no han sido estudiados a detalle en esta tesis.

En el Capítulo 2 comencé por dar una reseña acerca de los productos estrella, esto con el fin de justificar un conjunto de relaciones que denominamos "aproximación semiclásica" ya que estas son altamente usadas en los Capítulos 2 y 3; después, con el fin de familiarizar y acercar al lector de manera más clara a la teoría, se muestran un par de ejemplos de espacio-tiempo no conmutativo con simetría esférica tomados del artículo [3]. Esta aproximación semiclásica se puede encontrar en [3, 4].

En el ejemplo 1, más que en el ejemplo 2, traté de mostrar con gran detalle los cálculos para un mejor seguimiento y en el ejemplo 2, aunque hay menos cálculos, sí escribí brevemente como obtener las relaciones presentadas. Estos ejemplos consisten, a grandes rasgos, en dar una ansatz para los elementos $J^{\mu\nu}$ en términos de funciones indeterminadas que después se determinan usando la identidad de Jacobi; posteriormente, se dan ansatz para las tetrádas en términos de funciones también indeterminadas y, apoyándonos de la derivada exterior, encontramos ecuaciones diferenciales cuya solución determina dichas funciones. Finalmente, ya teniendo la forma explicita de las tetrádas, nos vamos al límite conmutativo y encontramos la métrica asociada a la contraparte clásica (conmutativa) del modelo descrito por los ansatz dados. Cabe mencionar que en el transcurso de los cálculos se hicieron elecciones que no se justificaron del todo bien (por ejemplo en (2.37) y (2.54)), esto se debió a que los ejemplos, como lo mencioné antes, se presentaron con el objetivo de familiarizar al lector con la teoría y por tanto, solo buscamos ejemplos con congruencia matemática que de manera sencilla nos conlleven a una métrica sin dar argumentos muy elaborados que desvíen la atención de los objetivos del capítulo.

De la métrica obtenida en el ejemplo 1, es decir (2.59), podemos ver que ésta se parece a la métrica de Schwarszchild (haciendo $M = \mu$ y $n = 1$) pero no lo es ya que el coeficiente de $d\Omega^2$, o sea μ, es constante. Sin embargo, sabemos que al menos sí es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein (2.60). También, hay que notar que la métrica (2.59) no entra en algúno de los 3 casos mostrados en el Capítulo 3 (Caso rt, r y t) ya que el coeficiente de $d\Omega^2$ es constante y para cualquiera de los tres casos es necesaria la dependencia en r y/o t de dicho coeficiente, de lo contrarío algunos de los elementos $J^{\mu\nu}$ divergen. Si se deseara considerar que δ en (3.6) es constante no se podría usar alguno de los casos rt, r o t y sería necesario abrir un nuevo caso y rehacer los cálculos a partir de (3.48) usando los resultados del Caso 1, 2 y 3 en que se analizó (3.20).

Con respecto a la métrica obtenida en el ejemplo 2, es decir (2.86), es curioso notar de (2.85) y (2.87) que hemos simplificado esta métrica (con respecto a (2.81)) usando variables relacionadas con los elementos λ_μ. Por otro lado, aplicando (2.24) a (1.24) tenemos que

$$\begin{aligned} -G^{-1\nu}{}_{\mu} &= [x^\nu, \lambda_\mu] \\ &= [x^\nu, x^\alpha]\,\partial_\alpha \lambda_\mu \\ &= i\bar{k} J^{\nu\alpha}\partial_\alpha\lambda_\mu. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Los elementos $G^{-1\nu}{}_{\mu}$ no son proporcionales a $\bar{k}$. También, si $J^{\nu\alpha} \propto \bar{k}^n$ con $n > 0$, entonces $[x^\nu, x^\alpha] \propto \bar{k}^{n+1}$ y por tanto tendríamos $[x^\nu, x^\alpha] = 0$ (pues consideramos, a lo sumo, términos lineales en $\bar{k}$). Si $J^{\nu\alpha} \propto \bar{k}^{-n}$ entonces no podrémos calcular el límite conmutativo (pues tendríamos $[x^\nu, x^\alpha] \longrightarrow \infty$ cuando $\hbar \longrightarrow 0$). Por tanto ni $J^{\nu\alpha}$ ni ${G^{-1\nu}}_\mu$ tienen que ver con $\hbar$ y, así, de (4.2) tenemos que

$$\lambda_\mu \propto \frac{1}{\hbar}. \tag{4.3}$$

Entonces, regresando a las relaciones (2.85) y (2.87), por (4.3) podemos estar seguros de que en el límite conmutativo T y $\mathcal{M}$ convergen. También, la métrica (2.86), a diferencia de (2.59), tiene como coeficiente de $d\Omega^2$ una función de r y t, y no una constante, lo cual significa que mediante una adecuada elección de $\mathcal{M}$ y T podría ser posible encontrar una métrica que en el límite $r \longrightarrow \infty$ sí converja a la métrica de Minkowski. Ahora, saber si (2.86) está contenida en alguno de los casos rt, r o t es más complicado, primero, necesitamos usar la forma (2.81) (pues esta, a diferencia de (2.86), sí está expresada en coordenadas esféricas); además, debemos recordar que en (2.81) las funciones D, B, C, H, γ y T deben satisfacer las ecuaciones desde (2.75) hasta (2.79) y, una vez que las satisfagan, también deberán satisfacer alguno de los tres conjuntos de condiciones mostrados en la tabla abajo presentada y, según la dependencia que T tenga con r y t, podremos decir en cual de los tres casos está (2.81).

En el Capítulo 3, en la primera sección presenté la metríca (resultante del límite conmutativo) que se consideraría, le apliqué un cambio de variable con el fin de diagonalizar la métrica para así simplificar los cálculos y, finalmente, mostré el conjunto de tetrádas a usar. Vale la pena resaltar que la variable t en la métrica (3.6) no corresponde a la coordenada temporal usual x^0 y, en realidad, es un t' definido por (3.2). En la segunda sección de este capítulo, con el fin de encontrar la forma explícita de ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ en términos de los elementos a^μ, se comenzó por mostrar una ecuación que relaciona los elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ con los elementos ${N^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ (los cuales tienen que ver con la métrica y, gracias a que usamos la aproximación semiclásica, también con los elementos $J^{\mu\nu}$). Aquí vale la pena hacer la siguiente observación: de (1.45) sabemos que ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ es simétrico en sus índices superiores pero observando (3.18) no es trivial notar que ${N^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ también es simétrico en sus índices superiores como lo predice (3.19). Sin embargo, a pesar de eso podemos estar seguros de que sí son simétricos los índices superiores de ${N^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ ya que el conmutador entre tetrádas en el lado izquierdo de (3.15) sí es simétrico. Después, una vez que ya se cuenta con la forma explicita de ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ en (3.20), partimos el análisis de ésta ecuación en 3 casos y encontramos que solo en los subcasos 2.2b, 2.3 y 2.4 habían elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ no necesariamente nulos. Además, justo al final del análisis de (3.20) se mencionó que hay elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ que están contenidos simultáneamente en dos casos y/o subcasos distintos. Ahora, sabiendo que el elemento ${Q^{33}}_{23}$ es el único no nulo, podemos estar seguros de que no hay elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ a los cuales se les hayan dado dos valores diferentes ya que ${Q^{33}}_{23}$ es exclusivo del subcaso 2.2b, es decir, este no está dentro de algúno de los otros casos donde todos los elementos se anularon. Finalmente, usando la antisimetría de los elementos $J^{\mu\nu}$ encontramos ${Q^{23}}_{23} = 0$ y se muestra un sistema de ecuaciones para $J^{\mu\nu}$.
En las siguientes y últimas tres secciones se analizaron los subcasos 2.2b, 2.3 y 2.4 dentro de cada uno de los Casos rt, r y t obteniendo los resultados mostrados en la siguiente tabla

Caso	Elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ no nulos	Consecuencias de $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma} = cte$ en susbcasos 2.3 y 2.4	Elementos $J^{\mu\nu}$ nulos
rt	$Q^3 = Q^3\left(C^{30}, C^{31}, C^{32}\right)$	$C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]}{\partial_0 \ln\delta} + C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln a^\beta\right]}{\partial_1 \ln\delta} = 0, \quad \text{con } \beta = 0,2$ $C^{30}\frac{\partial_0\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right]}{\partial_0 \ln\delta} + C^{31}\frac{\partial_1\left[\frac{1}{\alpha}\partial_0 \ln a^\beta\right]}{\partial_1 \ln\delta} = 0, \quad \text{con } \beta = 1,2$	J^{01} J^{02} J^{12}
r	$Q^3 = Q^3\left(B^{31}, B^{32}\right)$	$\frac{1}{a^1}\partial_1 \ln a^\beta = R_1^\beta \quad , \quad \text{con } \beta = 0,2$ $\frac{1}{a^0}\partial_0 \ln\gamma = R$	J^{12}
t	$Q^3 = Q^3\left(D^{30}, D^{32}\right)$	$\frac{1}{a^1}\partial_1 \ln\alpha = E$ $\frac{1}{a^0}\partial_0 \ln a^\beta = E_0^\beta \quad , \quad \text{con } \beta = 1,2$	J^{02}

Por la definición del Caso r uno podría pensar que la métrica de Schwarzschild está dentro de este, sin embargo, si consideramos dicha métrica, es decir, hacemos

$$-\alpha^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \qquad \gamma^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \qquad \delta = r,$$

y usamos estos valores en la condición $\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha = R_1^0$ se observa que esta condición no se satisface, por tanto, al igual que la métrica de Schwarzschild no está dentro de los ejemplos del Capítulo 2, tampoco lo está dentro de alguno de los casos rt, r y t. Incluso, si consideramos la métrica

$$ds^2 = -B\left(r\right)\left(dt\right)^2 + B^{-1}\left(r\right)\left(dr\right)^2 + r^2 d\Omega^2$$

con $B = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{e^2}{r^2}$ [24], y por tanto: $\alpha = B^{\frac{1}{2}}$, $\gamma = B^{-\frac{1}{2}}$, $\delta = r$. También tenemos que la condición $\frac{1}{\gamma}\partial_1 \ln\alpha = R_1^0$ no se satisface para algún R_1^0 constante. Por lo tanto, tenemos que dentro de este formalismo, al menos a primer orden en $\hbar$, no es posible obtener un modelo de espacio-tiempo no conmutativo que en el límite conmutativo me devuelva la métrica de Schwarzschild ($\Lambda = e = 0$) o la de Reissner-Nordström ($\Lambda = 0$) o la de de Sitter ($m = e = 0$) o la de Kottler ($e = 0$).

También, como consecuencia de pedir que $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sea constante, se encontró la forma de los elementos $J^{\mu\nu}$ para los tres casos como se muestra en (3.74), (3.118) y (3.164).

Usando en (1.41) y (1.42) las constantes $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ encontradas en el Capítulo 3 se puede ver que el producto entre las tetrádas queda como se muestra a continuación

$$\theta^\mu\theta^\beta = \begin{cases} Q^3\theta^2\theta^3 & ,\text{con } (\mu,\beta) = (3,3), \\ -\theta^\beta\theta^\mu & ,\text{con } (\mu,\beta) \neq (3,3). \end{cases} \tag{4.4}$$

Ahora que ya sabemos que elementos $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ son nulos y cuales no, podemos obtener un poco de información acerca de los elementos $C^\mu{}_{\alpha\beta}$. De (1.70) y (1.42) tenemos

$$\begin{aligned} F^{\mu}{}_{\epsilon\rho} &= 2\lambda_{\alpha}\, P^{(\alpha\mu)}{}_{\epsilon\rho} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho} \\ &= i4\epsilon Q^{\alpha\mu}{}_{\epsilon\rho}\lambda_{\alpha} + C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Haciendo $\mu = 3$ en (4.5) tenemos que

$$F^{3}{}_{\epsilon\rho} = i4\epsilon Q^{\alpha 3}{}_{\epsilon\rho}\lambda_{\alpha} + C^{3}{}_{\epsilon\rho},$$

sabiendo que $Q^{33}{}_{23}$ es el único elemento no nulo tenemos que esta última expresión queda como

$$\begin{aligned} F^{3}{}_{\epsilon\rho} &= i4\epsilon Q^{33}{}_{\epsilon\rho}\lambda_{3} + C^{3}{}_{\epsilon\rho} \\ &= \begin{cases} C^{3}{}_{\epsilon\rho} & ; \quad \text{con} \quad (\epsilon,\rho) \neq (2,3)\,,(3,2) \\ i4\epsilon Q^{33}{}_{23}\lambda_{3} + C^{3}{}_{23} & ; \quad \text{con} \quad (\epsilon,\rho) = (2,3) \\ i4\epsilon Q^{33}{}_{32}\lambda_{3} + C^{3}{}_{32} & ; \quad \text{con} \quad (\epsilon,\rho) = (3,2) \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Haciendo $\mu \neq 3$ en (4.5) tenemos que

$$F^{\mu}{}_{\epsilon\rho} = C^{\mu}{}_{\epsilon\rho}, \quad \text{con } \mu \neq 3. \tag{4.7}$$

Ahora, si restringimos (3.6) quitando la dimensión asociada a $u^3 = \phi$ tenemos

$$ds_3^2 = -\alpha^2\,(t,r)\,(dt)^2 + \gamma^2\,(t,r)\,(dr)^2 + \delta^2\,(t,r)\,(d\psi)^2\,,$$

y usando $l := it$ en esta última llegamos a

$$ds_3^2 = \alpha^2\,(l,r)\,(dl)^2 + \gamma^2\,(l,r)\,(dr)^2 + \delta^2\,(l,r)\,(d\psi)^2\,. \tag{4.8}$$

La métrica (4.8) es un subespacio de la métrica (3.6) en el cual se ha excluido la dimensión asociada a u^3 quedando únicamente con las dimensiones asociadas a u^0, u^1 y u^2. Además, por (4.7) y (1.69) podemos ver que todos los elementos $C^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ asociados a (4.8) son constantes. Considerando el límite conmutativo, sabemos que (4.8) tiene un espacio de derivaciones que simbolizaremos como $Der_3(\mathcal{A})$ y este está dado por un conjunto de derivaciones externas (y no internas como el definido en (1.16)). En el libro [25] se muestra una lista de nueve álgebras de Lie en 3 dimensiones, cada una de estas álgebras le llaman “Bianchi tipo N"(con $N = I, II, ..., IX$). Comparando $Der_3(\mathcal{A})$ con alguno de los nueve elementos de la lista mencionada podemos saber si dicho espacio de derivaciones conforma un Bianchi para algún N. Solo por mostrar un ejemplo, comparemos $Der_3(\mathcal{A})$, el espacio de derivaciones de (4.8) (en el límite conmutativo), con un Bianchi tipo III:

$$\begin{aligned} ds_{III}^2 &= \left(w^1\right)^2 + \left(w^2\right)^2 + \left(w^3\right)^2 \\ &= e^{-2x^1}\left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^1\right)^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para saber si $Der_3(\mathcal{A})$ es un Bianchi tipo III debemos encontrar un conjunto de ecuaciones de transformación que vaya de las coordenadas x^1, x^2, x^3 usadas en (4.9) a las coordenadas l, r, ψ que usamos en (4.8). Para esto podemos observar que necesitamos resolver el siguiente conjunto de ecuaciones

$$e^{-x^1}dx^2 = \alpha(l,r)dl, \tag{4.10}$$
$$dx^3 = \gamma(l,r)dr, \tag{4.11}$$
$$dx^1 = \delta(l,r)d\psi, \tag{4.12}$$

vale la pena notar que estas últimas tres relaciones no son las únicas que definen ecuaciones de transformación entre las coordenadas x^1, x^2, x^3 y las coordenadas l, r, ψ. De esta manera, según la forma explicita que α, γ y δ tengan, se puede tratar de resolver las ecuaciones desde (4.10) a (4.12) y ver si es posible que $Der_3(\mathcal{A})$ sea un Bianchi tipo III.

4.2. Conclusiones.

Primero recordemos que el objetivo de este trabajo es el siguiente. Retomando el modelo de espacio-tiempo no conmutativo propuesto por Madore [17, 3, 4, 2, 16] y, considerando:

- Simetría esférica (sin fijar la métrica),
- Expresiones a orden lineal en $\bar{k}$ (es decir, despreciar ordenes superiores),

queremos:

- Encontrar una forma explícita (en términos de los generadores de $\mathcal{A}$) de los elementos involucrados en el modelo: ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$, ${C^\mu}_{\nu\gamma}$, ${F^\mu}_{\nu\gamma}$, $K_{\nu\gamma}$, λ_γ, $J^{\mu\beta}$, de manera que todos estos satisfagan sus correspondientes propiedades (las mostradas en el Capítulo 1),
- Encontrar, si es que las hay, constricciones sobre la métrica necesarias para la consistencia del modelo (en principio no sabemos si el modelo admite cualquier métrica con simetría esférica).

Con estos objetivos en mente, tenemos que la parte del trabajo dedicada a cumplirlos es el Capítulo 3. Por limitaciones como la falta de tiempo, estos objetivos se han cumplido parcialmente y, aunque nos hemos enfocado principalmente en los elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ (involucrados en la deformación del producto wedge), también hemos logrado obtener información acerca de los elementos ${C^\mu}_{\nu\gamma}$ (involucrados en la derivada exterior de tetrádas), los $J^{\mu\beta}$ (responsables de la no conmutatividad de los generadores u^μ) y las constricciones sobre la métrica para la consistencia del modelo. Un logro importante del Capítulo 3 se encuentra en la Subsección 3.2.1 y este es el haber encontrado una expresión explícita (aproximada) para los elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ en términos de los elementos $J^{\mu\beta}$ y las entradas de la métrica. Gracias a que esta expresión para ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ tiene un par de deltas de Kronecker fue fácil analizarla y ver que, después de todo, todos los elementos ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$, excepto ${Q^{33}}_{23}$, son nulos (a orden lineal en $\bar{k}$). Con este resultado para ${Q^{\mu\beta}}_{\nu\gamma}$ podemos concluir que, al igual que el espacio de 2-formas $\Omega^2(\mathcal{A}_{cl})$ de un espacio-tiempo clásico (es decir, modelado por la Relatividad General) tiene dimensión 6, el espacio $\Omega^2(\mathcal{A})$ tiene también dimensión

6. Por tanto la única diferencia entre $\Omega^2(\mathcal{A}_{cl})$ y $\Omega^2(\mathcal{A})$ es que el elemento $\theta^3\theta^3$ cambia de valor. Mientras que en $\Omega^2(\mathcal{A}_{cl})$ el valor de $\theta^3\theta^3$ es nulo en $\Omega^2(\mathcal{A})$ su valor es $i2\epsilon Q^{33}{}_{23}\theta^2\theta^3$. Con esto en mente, podemos darnos cuenta de que los espacios $\Omega^r(\mathcal{A})$ con $r = 3, 4$ quedan, también, casi inalterados y sus únicas diferencias, con respecto a $\Omega^r(\mathcal{A}_{cl})$, son los valores de los elementos $\theta^3\theta^3\theta^\mu$ y $\theta^3\theta^3\theta^\mu\theta^\nu$ que, dentro de este formalismo, dejan de ser nulos.

Por otro lado, también usando el resultado para $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ y la definición de $F^\mu{}_{\nu\gamma}$, logramos encontrar que todos los elementos $C^\mu{}_{\nu\gamma}$, excepto $C^3{}_{23}$, son constantes. Con este resultado para $C^\mu{}_{\nu\gamma}$ concluimos que el subespacio de la métrica considerada (la mostrada en la Sección 3.1), subespacio 3 dimensional resultante de excluir la dimensión asociada a la coordenada $u^3 = \phi$, tiene asociados elementos $C^\mu{}_{\nu\gamma}$ todos constantes y, por tanto, su espacio de derivaciones $Der_3(\mathcal{A})$ (el cual, en el límite conmutativo, está compuesto de derivaciones exteriores), podría ser alguna de las nueve álgebras Bianchi tipo N mencionadas al final de la Sección 4.1, donde el valor de N dependerá de la forma particular que se elija para las entradas de la métrica (α, γ, δ).

También, en el proceso de analizar la expresión para $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ y hallar los valores de estos, nos fue posible encontrar, para tres casos distintos (Caso rt, r y t), los valores de $J^{\mu\beta}$ y un conjunto de constricciones sobre las entradas de la métrica. Estas constricciones son necesarias para que $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ sea constante como lo pide el modelo. Con respecto a los valores encontrados para $J^{\mu\beta}$ tenemos que algunos de estos son nulos, lo cual significa que algunos de los cuatro generadores u^μ de $\mathcal{A}$ sí conmutan con algún otro generador. Con respecto a las constricciones sobre las entradas de la métrica (en particular las del Caso r), podemos concluir que las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y de Sitter, no satisfacen dichas constricciones. Dicho de otra manera, no logramos obtener alguna de las tres métricas mencionadas en el límite conmutativo. También vale la pena mencionar que, durante los cálculos, se trató de anular el menor número posible de elementos $J^{\mu\beta}$. Sin embargo, si anularamos algunos $J^{\mu\beta}$ (a parte de los que ya anulamos), entonces, a cambio lograríamos alterar las constricciones sobre las entradas de la métrica y, de esta manera, posiblemente podríamos hacer que las métricas mencionadas (o alguna otra) sí resulten de un límite conmutativo.

Vale la pena notar que todo el cálculo que se hizo a lo largo del Capítulo 3 sirvió para dos cosas: para determinar que valores de $Q^{\mu\beta}{}_{\nu\gamma}$ son nulos y cuales no (donde el no nulo quedó en términos de constantes no determinadas), y para determinar la forma explícita de los elementos $J^{\mu\nu}$ (que en dos casos tenemos dos elementos sin determinar). Por tanto, aún queda mucho trabajo por hacer en este modelo como determinar la constante Q^3 y los elementos $J^{\mu\nu}$ que quedaron sin especificar en los casos r y t (para esto se podría usar la identidad de Jacobi) y, más aún, determinar los elementos λ_μ, $C^\mu{}_{\alpha\beta}$, $F^\gamma{}_{\mu\nu}$ y $K_{\mu\nu}$ tales que satisfagan las propiedades mostradas en el Capítulo 1; inclusive queda por analizar el encontrar una representación explicita para los generadores del álgebra $\mathcal{A}$.

Bibliografía

[1] M. Buric, T. Grammatikopoulos, J. Madore, and G. Zoupanos. Gravity and the structure of noncommutative algebras. *JHEP*, 04:054, 2006.

[2] M. Buric and J. Madore. A dynamical 2-dimensional fuzzy space. *Phys. Lett.*, B622:183–191, 2005.

[3] Maja Buric and John Madore. Spherically symmetric noncommutative space: d = 4. *Eur. Phys. J.*, C58:347–353, 2008.

[4] Maja Buric and John Madore. On noncommutative spherically symmetric spaces. *Eur. Phys. J.*, C74:2820, 2014.

[5] Maja Buric and John Madore. Noncommutative de sitter and FRW spaces. *Eur. Phys. J.*, C75(10):502, 2015.

[6] S.S. Chern, W. Chen, and K.S. Lam. *Lectures on differential geometry.* Series on university mathematics. World Scientific, 1999.

[7] A. Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press, 1994.

[8] T. Frankel. *The geometry of physics: an introduction.* Cambridge University Press, 1997.

[9] James B Hartle. *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*, volume 1. 2003.

[10] Allen C Hirshfeld and Peter Henselder. Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 70(5):537–547, 2002.

[11] Nadir Jeevanjee. *An introduction to tensors and group theory for physicists*. Springer, 2011.

[12] Masoud Khalkhali. Lectures on noncommutative geometry. In *An invitation to noncommutative geometry. Proceedings, International Workshop, NCG 2005, Tehran, Iran, September 11-22, 2005*, pages 169–273, 2007.

[13] C Kiefer. Quantum gravity , vol. 136 of international series of monographs on physics, 2007.

[14] Claus Kiefer. Conceptual problems in quantum gravity and quantum cosmology. *ISRN Mathematical Physics*, 2013, 2013.

[15] Richard L Liboff. *Introductory quantum mechanics.* Addison-Wesley, 2003.

[16] Marco Maceda and John Madore. On the resolution of space-time singularities II. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 11(sup1):21–36, 2004.

[17] John Madore. *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, volume 257. Cambridge University Press, 1999.

[18] Thierry Masson. An informal introduction to the ideas and concepts of noncommutative geometry. *arXiv preprint math-ph/0612012*, 2006.

[19] C. Musili. *Introduction to rings and modules.* Narosa Publishing House, 1994.

[20] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics.* CRC Press, 2003.

[21] Piero Nicolini. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, 24(07):1229–1308, 2009.

[22] Achilleus Papapetrou. *Lectures on general relativity.* Springer Science & Business Media, 2012.

[23] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. An introduction to quantum field theory, 1996.

[24] Jerzy Plebanski and Andrzej Krasinski. *An introduction to general relativity and cosmology.* Cambridge University Press, 2006.

[25] Michael P Ryan and Lawrence C Shepley. *Homogeneous relativistic cosmologies.* Princeton University Press, 2015.

[26] Peter Schupp and Sergey Solodukhin. Exact black hole solutions in noncommutative gravity. *arXiv preprint arXiv:0906.2724*, 2009.

[27] Bernard Schutz. *A first course in general relativity.* Cambridge university press, 2009.

[28] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, Jan 1947.

[29] David Wallace. The quantization of gravity-an introduction. *arXiv preprint gr-qc/0004005*, 2000.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00050
Matrícula: 2143807552

MODELOS DE ESPACIOS-TIEMPO NO CONMUTATIVOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:30 horas del día 26 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER
DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: OMAR VERGARA ESPINOSA

OMAR VERGARA ESPINOSA
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

VOCAL

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA