

**BALANCES DE POBLACIÓN DE CÚMULOS EN UN
REACTOR DE LECHO FLUIDIZADO PARA FCC CON
TÉCNICAS MULTIESCALA EN PROMEDIOS
VOLUMÉTRICOS.**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA QUÍMICA
CLAUDIA T. GALLARDO RIVERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO SORIA LOPEZ

MÉXICO D.F. ENERO DEL 2003.

AGRADECIMIENTOS

A DIOS POR SU AMOR Y CONFIANZA

A MIS PADRES:

FILEMON GALLARDO GALAN Y TOMASA RIVERA BARRADAS POR SU AMOR Y PRESENCIA EN TODOS EN LOS INSTANTES DE MI VIDA, ASI COMO A MI HERMANA.

AL DR. ALBERTO SORIA LOPEZ:

POR ENSEÑARME UNA NUEVA FORMA DE ENTENDER LOS SISTEMAS, ASI COMO POR EL TIEMPO Y DEDICACIÓN PARA LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS.

AGRADECIMIENTOS ESPECIALES

AL CONACYT:

PORQUE GRACIAS A SU FINANCIAMIENTO ME PERMITIÓ CULMINAR ESTE PROYECTO

A LA DRA. ELIZABETH SALINAS BARRIOS:

POR SU COLABORACION ENTUSIASTA DURANTE LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO.

A LOS DRS. :

JUAN MANUEL ZAMORA MATA

JOSE ANTONIO DEL RIO PORTILLA

POR SUS VALIOSOS COMENTARIOS QUE ENRIQUECIERON EL TRABAJO.

A J. GABRIEL BAEZ GONZALEZ:

POR SU COMPAÑÍA Y AMOR EN TODO MOMENTO.

AL SR. AVELINO BAEZ DUARTE Y LA SRA. DOMINGA GONZALEZ PALMA

POR SU CARÍÑO Y APOYO DE FAMILIA.

RESUMEN

El objetivo de este estudio consiste en describir el comportamiento de un lecho fluidizado heterogéneo en el régimen de fluidización rápida (Capítulo II), con énfasis en el desarrollo de las ecuaciones de balances de población para los cúmulos del lecho fluidizado, a partir de las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía para cada una de las fases, que mediante un procedimiento de promediado en multiescalas, conduce a la obtención de los tradicionales balances de población, así como a nuevos balances de población de momentum y energía, que son la principal contribución de este trabajo.

La evolución de la distribución de tamaños de cúmulos se relaciona con los procesos de agregación y fragmentación que ocurren al interior del reactor FCC (Capítulo I). Para su descripción se desarrolló el análisis basado en estructuras jerárquicas que tienen como fundamento las ecuaciones hidrodinámicas locales para la fase vapor (γ) y sólido (σ), promediadas en el tiempo y en el espacio (Capítulo IV). Este último promedio comprende dos estructuras jerárquicas el promedio de fases que es fundamental para la descripción de los procesos de transporte al interior de los cúmulos de un tamaño característico (modelo pseudohomogéneo) y el promedio de región donde se describe la interacción entre ellos. Los balances de población correspondientes al cambio de masa, momentum y energía en el número de cúmulos de tamaño (j) por los procesos de agregación y fragmentación, se obtienen cuando el modelo de región en términos de la densidad numérica de cúmulos (N_j) se integra en una sección del tubo elevador. La cerradura de este sistema considera relaciones de comportamiento basadas en la ley de viscosidad de Newton y la ley de Fourier (Capítulo VI).

Los métodos clásicos sólo describen el balance de población para los cúmulos de tamaño (j) (Capítulo III) con estos efectos globalizados a través de modelos, donde los procesos de agregación y fragmentación no describen en forma clara y detallada su contribución (Capítulo V). Las metodologías para su obtención han tomado como base un desarrollo basado en analogías con la ecuación de Boltzman y el utilizado para un balance macroscópico en un tanque agitado (de flujo continuo) (*Zamora, 1990*) que es un caso particular del anterior.

BALANCES DE POBLACIÓN DE CÚMULOS EN UN LECHO FLUIDIZADO PARA FCCC CON TÉCNICAS MULTIESCALA EN PROMEDIOS VOLUMÉTRICOS.

INDICE GENERAL

RESUMEN

ANTECEDENTES

ix

CAPITULO I. INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción del proceso

2

1.1.1. Alimentación

3

1.1.2. Características del Reactor

4

1.1.3. Separación del Producto/Catalizador en los ciclones

6

1.1.4. Regeneración

7

1.2. Problemática en los reactores FCC

7

1.3. Conceptos de fluidización

9

1.3.1. Regímenes de fluidización y clasificación de partículas

10

CAPÍTULO II. DETERMINACIÓN DE OBJETIVOS

2.1. Reactores FCC y estructura de fluidización rápida

18

2.2. Revisión bibliográfica sobre la heterogeneidad del lecho

18

2.3. Objetivo general y objetivos particulares

21

CAPÍTULO III. BALANCES DE POBLACIÓN

3.1. Generalidades

23

3.2. Metodologías para obtener el balance de población

24

3.2.1. Ecuación macroscópica basada en analogías con la ecuación de Boltzmann

24

3.2.1.1. La ecuación de Boltzmann

24

3.2.1.2. Balance de población basado en analogías con la ecuación de Boltzmann

26

3.2.2. Balance de población en un tanque agitado de flujo continuo

30

3.2.2.1. Metodología para obtener el balance de población a partir de un balance macroscópico

32

3.2.3. Obtención de balances de población utilizando el promediado multiescala

36

CAPÍTULO IV. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS

4.1. Metodología general para el desarrollo de balances de población para los cúmulos

38

4.2. Fundamentos del promedio temporal

42

4.2.1. Metodología para el promedio temporal

47

4.2.2. Descripción de las ecuaciones de transporte promediadas en el tiempo

49

4.3. Fundamentos del promedio espacial

50

4.3.1. Descripción de las ecuaciones promediadas en el volumen promediante (Modelo de dos fases)

58

4.4. Fundamentos del modelo pseudohomogéneo

63

4.4.1. Metodología y descripción de las ecuaciones del modelo pseudohomogéneo

64

4.5. Fundamentos del promediado de región

72

4.5.1. Descripción de las ecuaciones promediadas en el volumen de región (Modelo de región)

74

4.6. Fundamentos para la integración del modelo de región en el volumen fijo	81
4.6.1. Descripción de los balances de población para los cúmulos de tamaño (j)	84
CAPÍTULO V. COMPARACIÓN DE LOS BALANCES DE POBLACIÓN	
5.1. Generalidades	89
5.2. Comparación del balance de población para los cúmulos de tamaño (j) obtenido por diferentes metodologías	89
CAPÍTULO VI. PROPUESTA DE CERRADURA	
6.1. Fundamentos.	94
6.2. Cerradura para la ecuación de balance de población para los cúmulos de tamaño (j).	94
6.3. Cerradura para la ecuación de balance de población de momentum	95
6.4. Cerradura para la ecuación de balance de población de energía térmica	96
CONCLUSIONES	100
APÉNDICE	102
BIBLIOGRAFÍA	111

ANTECEDENTES

La gasolina es un producto obtenido de diversos procesos dentro de una refinería moderna, que contempla la isomerización, hidrodesulfuración, alquilación, y desintegración catalítica en reactores FCC (craquín catalítico en lecho fluido). Este último surge como una alternativa para la obtención de gasolina durante el desarrollo de la II Guerra Mundial – pues se necesitaba mejorar su calidad mediante un incremento en su octanaje– esto contribuyó a elevar su rendimiento de un 20% a un 60% (desintegración térmica), que no era lo suficiente para reducir el alto contenido de olefinas y diolefinas que reaccionaban lentamente a la adición de compuestos antidetonantes (tetraetilo de plomo). Esto trajo consigo la evolución del proceso (Tabla 1-1) que implicó una diversidad de configuraciones mecánicas, donde el uso de catalizadores sólidos es fundamental para convertir hidrocarburos pesados (gasóleo) a ligeros mediante la reacción con una porción cruda de gasóleo (que hierve a un rango de temperatura de 330°-550°C) que contiene una diversidad de mezcla de parafinas, naftenos, aromáticos y olefinas.

La Standard Oil desarrolló en N.J. el inicio del proceso catalítico conjuntamente con la M.W. Kellogg y la Standard Oil de Indiana, sin embargo otras empresas contribuyeron notablemente en investigación y desarrollo como son las firmas: Anglo Iridian Oil, Shell, Texaco, y Universal Oil (UOCP) quienes establecieron los fundamentos para que en mayo de 1942 se instalara la primera desintegradora de tipo fluido ESSO (Modelo I o flujo ascendente) en la refinería de Baton Rouge, Louisiana (Standard Oil Co. de .J.) donde se usaron partículas muy pequeñas de catalizador de baja alúmina (13% de alúmina) fabricado por la Davison Chemical Co (*Valencia, 2001*).

En la actualidad existen aproximadamente 400 plantas operando en todo el mundo con una capacidad total de procesamiento de 16 millones de barriles/ día (\$10 dólares) (*J.R. Grace, 1997*). En nuestro país, PEMEX es la única industria que produce gasolina, utilizando el proceso FCC y otras vías alternas. Las unidades que usan son del tipo Orthoflow B (*Apéndice A*), cuya configuración consta de un reactor formado por un tubo vertical externo (que contiene un sistema multibocanillas) doblado en la parte superior, un sistema de separación de los sólidos por inercia en la descarga dentro del desenganchador y dos etapas de regeneración. Este proceso es más económico para la producción de gasolinas, pues aporta el 32.64% del total que se destina principalmente para combustible de autos, que lo coloca en la segunda mejor opción después del proceso de reformación. En la Fig. 1 se observa este efecto (*Mendoza, 2001*).

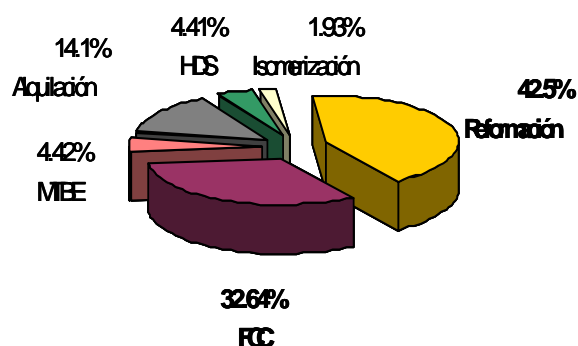


Fig. 1. Contribución de los procesos a la producción de gasolina (Mendoza, 2001).

En el proceso de desintegración catalítica, el reactor de lecho fluido FCC convierte los hidrocarburos pesados en ligeros a través de reacciones en la superficie del catalizador fluidizado con vapor (que proviene del regenerador). Esta mezcla se pone en contacto con el gasóleo líquido, dispersado a través de ocho boquillas de inyección neumática (localizadas entre 3 y 10 m del fondo) provocando, la evaporación de las gotas que genera una aceleración del flujo y un incremento del volumen del gas que se relaciona con el aumento en el diámetro del tubo elevador (riser).

Los problemas más comunes que provocan una operación deficiente en el reactor consideran: (i) la inyección de gasóleo; (ii) Decaimiento en la eficiencia de recuperación debido a la heterogeneidad en la fracción de sólidos en el lecho; (iii) Separación del producto en los ciclones y (iv) Regeneración del catalizador.

Lo anterior sugiere para una mejor comprensión del sistema un análisis parcial que permita conocer el impacto de cada uno de los problemas en el reactor, de tal manera que cuando sean acoplados exista la posibilidad de establecer los fundamentos para proponer mejoras que impacten en la eficiencia de producción. En este sentido el trabajo representa un análisis de una porción del problema que debido a la diversidad de posibilidades que ofrece, en el Capítulo (II) se discuten los fundamentos de su elección.

Tabla 1-1. La evolución del proceso FCC

1915	Mc Afee of Gulf Refinería Co. empleó un catalizador de cloruro de aluminio a presión atmosférica y temperaturas de 260° a 290°C.
1936	Eugene Houdry inventó un proceso que utilizaba arcilla activada (material acidificado de silica –alúmina) en lecho desintegrador fijo; descubrió que el deposito de carbón podía quemarse para regenerar el catalizador y restaurar su actividad.
1938	Standard of New Jersey, Kellogg, I.G. Farben y Standard de Indiana formaron una asociación para desarrollar el cracking catalítico.
1942	Primera unidad FCC comercial (Modelo I) inicia en la refinería de New Jersey's Baton Rouge .
1947	UOP fue el primero en construir una gran cantidad de unidades FCC; Kellogg introdujo el modelo III de presión equilibrada montando lado a lado el reactor y regenerador de la unidad FCC.
1948	División de Davison W.R. Grace & Co. Desarrolló microesferas de catalizador para el FCC.
1950s	Evolución del diseño de proceso de craqueo en el lecho. Surgen los modelos Ortoflow A(flujos ascendente); Otroflow B (intercambio posición reactor/regenerador)
1956	Se inventó la estructura del riser para el craqueo.
1961	Kellogg y Phillips desarrollaron y colocaron la primera unidad de craqueo en Borger, Texas
1964	Mobil Oil desarrolló catalizador USY y ReY cuya actividad es mayor que los catalizadores de silica-alúmina amorfos, utilizando Ortoflow C
1972	Amoco Oil inventó la utilización de altas temperaturas de regeneración
1974	Mobil Oil introdujo como promotor CO
1975	Petroleo Philips desarrolló antimonio para la pasivación del níquel.
1979	Exxon desarrolló la unidad de Flexicracking(configuración lado a lado) así como la Ultra-Ortoflow combinando tecnologías de las compañías Kellogg y Amocco Corp's Ultracat Regeneration
1981	TOTAL inventó las dos etapas de regeneración para el procesamiento de los residuos; kellogg lo hizo en 1973 diseñando el Ortoflow F.
1983	Mobil reportó el primer uso comercial de ZSM-5 octano/olefinas aditivo en FCC
1985	Mobil comenzó la instalación del sistema de ciclones cerrados en estas unidades FCC
1994	Corporación Coastal condujo a una prueba comercial de tiempo de residencia ultracorto, para la selectividad de craqueo.

* Sadeghbeigi, 1995; Valencia, 2001; ver apéndice A.

CAPITULO I. INTRODUCCION

1.1.1. Alimentación

Comúnmente para el proceso de desintegración catalítica las refinerías utilizan gasóleo para producir gasolina, pero cuando no logran cubrir la demanda, elaboran una mezcla con otros residuos que han sido tratados en un tambor donde separan el agua y vapor contenidos y darle cierta estabilidad a la alimentación.

Estas mezclas son caracterizadas por límites o rangos de ebullición, los métodos más eficaces para su obtención utilizan la temperatura media de ebullición y la curva de destilación, pues la temperatura media volumétrica (\bar{T}_v) representa la media aritmética de las temperaturas que corresponden al 10%, 30%, 50%, 70% y 90% en volumen de la curva de destilación obtenida por los métodos de Egler, ASTM y GOST (ec (1-1)).

$$\bar{T}_v = \frac{t_{10\%} + t_{30\%} + t_{50\%} + t_{70\%} + t_{90\%}}{5} \quad (1-1)$$

Del método gráfico la temperatura media volumétrica y Koup son coordenadas que determinan el cálculo del peso molecular del gasóleo, necesario para caracterizarlo y estimar sus propiedades críticas. En la Tabla (1-2) se muestran estas propiedades que pertenecen al gasóleo de la refinería de Salamanca Gto. Mex. (*Valencia, 2001*).

Tabla 1-2. Caracterización y propiedades críticas del flujo de gasóleo. (Nov.2000)

Peso molecular analítico/gráfico g/gmol	377.6547/ 380
Koup	11.8044
Número de átomos de carbono	26.9877
Temperatura media volumétrica °C	422.60
Temperatura de ebullición de la molécula de GOV promedio °C	446.38
<i>A partir del metodo n-d-M @ 20°C</i>	
Fracción de átomos de C aromáticos C_A /% C_A	0.2586/ 25.86
Fracción de átomos de C nafténicos C_N /% C_N	0.0756/ 7.56
Fracción de átomos de C parafínicos C_P /% C_P	0.6658/ 66.58
Números de anillos aromáticos R_A	1.2210
Número de anillos nafténicos R_N	0.4316
<i>Evaluación del DBE-DBO y propiedades críticas</i>	
DBE-DBO	5.0946
Temperatura crítica T_c °C	605.9867
Presión crítica P_c atm.	10.7171
Volumen crítico V_c g/cm ³	1461.4318
Densidad crítica d_c g/cm ³	0.2584
Compresibilidad crítica Z_c	0.2171
Calor de vaporización a la Temp. de ebullic. KJ/mol	71.95

* *Valencia, 2001*

1.1.2. Características del Reactor.

En el conjunto reactor–regenerador se desarrolla el objetivo principal del proceso FCC, cuando el gasóleo es transformado a gasolina y LPG (olefinas, propileno y butileno) mediante reacciones de craquéo en la superficie del catalizador fluidizado. En la mezcla resultante se obtienen subproductos como LCO, HCO y coque debido a la desintegración térmica (al azar, Tabla 1-4) en los productos que han sido previamente transformados por las reacciones de desintegración catalítica (selectivas, Tabla 1-3).

Tabla 1-3. Reacciones efectuadas por desintegración catalítica.

<i>Carga</i>	<i>Tipo de reacción</i>	<i>Producto</i>
n-alcanos	Isomerización	isoalcanos
Alcanos	Fragmentación	Alcanos pequeños+alquenos
Alcanos	Deshidrogenación	Alquenos+hidrogeno
Alcanos	Ciclo de deshidrogenación	Ciclo alcanos+ hidrogeno
Ciclo alcanos	Aromatización	Aromáticos + hidrógeno

**Valencia,2001*

Tabla 1-4. Reacciones efectuadas por desintegración térmica.

<i>Carga</i>	<i>Tipo de Reacción</i>	<i>Producto</i>
Parafinas	Desintegración	Olefinas + parafinas pequeñas
Olefinas	Desintegración	Olefinas mas pequeñas
Alquil aromáticos	Desintegración	Aromáticos + olefinas Aromáticos con olefinas + parafinas
Ciclo parafinas	Desintegración	Olefinas
	<i>Reacciones secundarias</i>	
Naftenos + olefinas	Transferencia de hidrogeno	Aromáticos + parafinas
Naftenos	Deshidrogenación	Arómaticos
Olefinas	Isomerización	Iso- olefinas
Compts. Aromáticos +olefinas	Condensación	Compuesto aromático
Olefinas	Ciclización	Nafteno

**Valencia,2001*

El proceso inicia con la alimentación de la mezcla catalizador-vapor al tubo elevador, cuando se pone en contacto con una distribución de gotas de gasóleo esparcidas mediante las boquillas de inyección. Las gotas se evaporan y reaccionan en forma selectiva en la superficie del catalizador agrupado en cúmulos. El aumento de volumen del gas (vapor-gasóleo evaporado) por la evaporación de las gotas causa una transición gradual de una región densa a una diluida que no solamente propicia la aceleración del flujo sino también una evidente distribución hueca axial en forma de S (Fig. 1-2) típica del régimen de fluidización rápida.

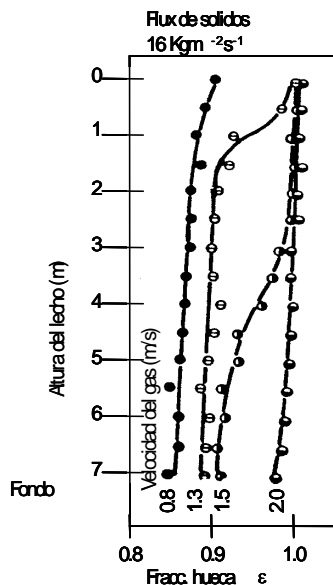


Fig. 1-2. Distribución de fracción hueca ε a lo largo del reactor en una columna de 9 cm de diámetro y 8m de altura (Li y Mooson 1980).

Un ejemplo de una unidad FCC es el Reactor Orthoflow B (Fig. 1-3) que se utilizará para el análisis de este trabajo, que tiene una configuración lado a lado de la posición del tubo elevador (reactor) con el regenerador (del catalizador a flujo a contracorriente); un sistema de separación del catalizador de ciclones cerrado y uno para su enfriamiento. En la Tabla (1-5) se presentan las condiciones típicas de su operación.

Tabla 1-5. Características típicas de operación del reactor FCC.

<i>Dimensiones del Reactor</i>		<i>Propiedades físicas</i>	
Altura (m)	30	Densidad (Kg/m ³)	7.2
Área de la sección transversal (m ²)	1.2	Viscosidad laminar (Pa.s)	2x10 ⁻⁵
Inclinación de las Boquillas	60°	Conductividad térmica (W/m°K)	0.07
		Calor específico (gas) (J/Kg°K)	3,350
		Calor específico (líquido) (J/Kg°K)	2,670
<i>Condiciones de operación</i>		Calor de vaporización (KJ/Kg)	191
<i>Hidrocarburos</i>		Calor endotérmico de reacción (KJ/Kg alimentado)	465
Velocidad de flujo másico (kg/s)	2.67		
Temperatura entrada(°K)	423		
Presión (KPa)	300	<i>Catalizador</i>	
Relación catalizador/gasóleo	4-10	ρ partícula (kg/m ³)	1300
<i>Catalizador</i>		Calor específico (J/Kg°K)	1,110
Flux de sólidos (Kg/m ² s)		Diámetro de la partícula (μ m)	70
Temperatura a la entrada (°K)	500-573	Coefficiente de transferencia de calor de la interfase.	$N_{up}=0.03^*$ $Re_p^{1.3}$
U_{mf} (m/s)	0.001	Velocidad terminal (m/s)	0.1
Velocidad relativa (U_g-U_p) (m/s)	0.3		

*K.N.Theologos, y N.C. Markatos, 1997; Li Y. and K.M. 1980.

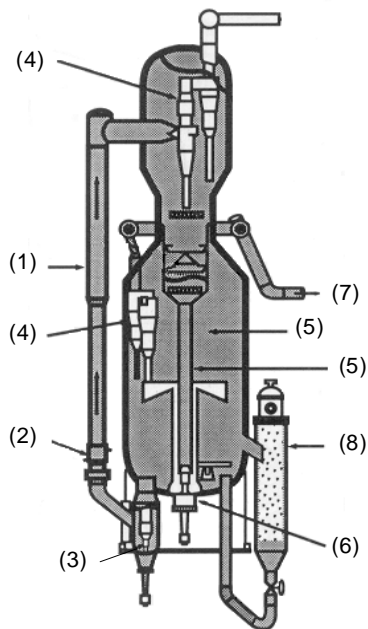


Fig.1-3. Descripción de las partes que forman el reactor Orthoflow B. Tubo elevador (riser) que se expande después las boquillas de inyección (1); Ocho boquillas de inyección (gasóleo) neumática, colocadas a 10 m del fondo con un ángulo de 60° respecto a la horizontal (2); Válvula reguladora del flujo del catalizador regenerado-vapor al reactor (3); Sistema de ciclones cerrado (4); Regenerador del catalizador con flujo a contracorriente (5); Válvula reguladora del catalizador que llega a la zona de regeneración (6); Sistema de eliminación de gases generados en la regeneración (7); Unidad de enfriamiento del catalizador (8) (Kwauk, 1980).

1.1.3. Separación del Producto/ Catalizador en los ciclones.

Para un buen funcionamiento del reactor, la rapidez y la eficiencia de separación del catalizador en los ciclones es muy importante, debido a que en la parte superior del tubo elevador las reacciones de desintegración térmica ocurren con mayor frecuencia que las catalíticas (Tabla 1-4), afectando la eficiencia de producción de la gasolina por la formación de compuestos secundarios.

Para reducir la desintegración térmica, se emplean ciclones de uno o dos etapas, donde la eficiencia del 99.995% hace de este sistema (Fig. 1-4) el más eficiente en reducir el tiempo de residencia del producto (de 30 a 2s). En estos ciclones pueden ser utilizados métodos para cerrar el acoplamiento como el sistema de presión negativa que remueve el gas del regenerador al paso del aire por el ciclón primario (que cambia el balance de presión de positiva a negativa) y el de presión positiva que preserva la característica en el ciclón primario, donde el aire pasa al gas regenerado entre el primero y segundo ciclón.

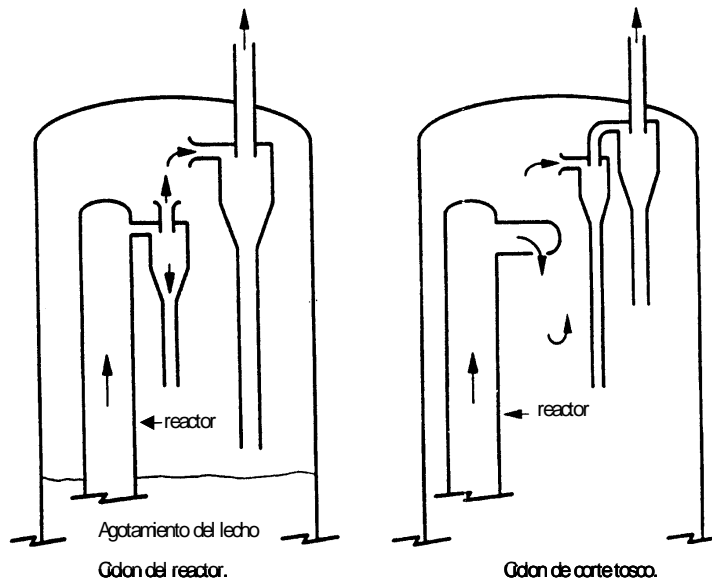


Fig. 1-4. Ejemplos de ciclones de corte tosco en el reactor (*Li y Mooson 1980*).

1.1.4. Regeneración

El regenerador restaura la actividad del catalizador que entra desactivado por el depósito de coque en su superficie (0.8 al 2.5%) debido a componentes como carbón, hidrógeno, trazas de azufre y nitrógeno que lo forman. Las dos regiones del regenerador se ubican según la densidad de la fase, así el lecho denso está encima del distribuidor (velocidad de 0.61-1.22 m/s), mientras que la fase diluida se localiza encima de la región densa con una concentración de catalizador sustancialmente baja.

1.2. Problemática en los reactores FCC.

Los problemas que se generan durante el proceso de desintegración catalítica en el reactor FCC son diversos como diversas son sus causas, que pueden considerar desde la manipulación de las condiciones de operación hasta los procesos promovidos por la naturaleza del sistema. Dentro de los más comunes se encuentran:

- a) Inyección de gasóleo.
- b) Decaimiento en la eficiencia de recuperación debido a heterogeneidad en la fracción de sólidos en el lecho.
- c) Separación del producto en los ciclones.
- d) Regeneración del catalizador.

a) Inyección de gasóleo

La inyección del gasóleo en el reactor se hace a través de unas boquillas de inyección que se localizan a una altura entre 3 y 10 m que varía en función del tamaño del reactor. Dependiendo de la forma y su inclinación se desarrolla una distribución de tamaños de gotas de gasóleo que determina la velocidad de evaporación, y la ocurrencia de las reacciones de desintegración catalítica en el catalizador (poroso), que se encuentra agregado en forma de cúmulos que no promovería formación de productos primarios.

Para mejorar estos efectos y dirigir la selectividad hacia la formación de productos primarios se puede considerar el análisis de los ángulos del cono de la dispersión de los inyectores ó la disminución del diámetro de las gotas (80-40 micras) ya que según Gao y Cols. (2001) se obtiene una mayor selectividad por este medio, así de acuerdo al tipo de distribución que se estudie (monodispersa o polidispersa) será la posibilidad de mejorar el tiempo de residencia de la gota y la selectividad para la formación de productos primarios.

b) Decaimiento en la eficiencia de recuperación debido a heterogeneidad en la fracción de sólidos en el lecho.

En el sistema existe una transición gradual de una región diluida de partículas suspendidas en el gas a una región densa (Fig. 1-2) formada por los cúmulos. Este tipo de estructuras debido a su naturaleza agregativa promueve en el reactor puntos calientes cuando el gasóleo evaporado se pone en contacto con los cúmulos (de diferente tamaño) provocando en los grandes y densos una reacción más rápida que en los menores, de tal manera que la diferencia de temperatura entre ellos trae consigo una desintegración catalítica y térmica que afecta la eficiencia de producción de gasolina por la formación de compuestos indeseados. Las investigaciones al respecto se mencionan en el Capítulo II.

c) Separación del producto en los ciclones.

La función de los ciclones es separar en el menor tiempo el producto para evitar reacciones post-lecho debidas a la desintegración térmica pues el catalizador envenenado con coque impide cualquier reacción, por lo tanto las posibilidades de mejora están alrededor del tiempo y velocidad de separación de los ciclones que se ve afectada por el ángulo de inclinación de una parte del reactor que los une con ellos (ver Fig.1-3) y la configuración mecánica propia del ciclón.

d) Regeneración del catalizador.

En la regeneración del catalizador el coque es eliminado y recupera el calor necesario para el craqueo, para ello se alimenta aire como fuente de oxígeno (para su combustión) a través de un distribuidor localizado cerca del fondo (del regenerador). El diseño del distribuidor es importante para una eficiente recuperación del catalizador así como el ventilador, mediante el cual se logra un control de la temperatura de regeneración para evitar su sinterización. Como el sistema está situado en un régimen de fluidización rápida en la siguiente sección se describen sus fundamentos.

1.3. Conceptos de fluidización.

Cuando un fluido corre hacia arriba por un lecho empacado de partículas a bajas velocidades las partículas permanecen estacionarias. Al aumentar la velocidad del fluido, la caída de presión aumenta de acuerdo a la ec. de Ergun (1-2). Si sigue aumentando la velocidad llegará un momento en que la fuerza de la caída de presión por el área de corte transversal iguale a la fuerza gravitatoria sobre la masa de las partículas. Entonces las partículas empezarán a moverse, lo cual es el principio de la fluidización mínima. La velocidad del fluido a la que empieza la fluidización es la velocidad mínima de fluidización U_{mf} basada en el corte transversal de la torre vacía (velocidad superficial).

$$\Delta p = \frac{150\mu U \Delta L (1-\varepsilon)^2}{\phi_p^2 \varepsilon^3} + \frac{1.75\rho(U)^2 \Delta L (1-\varepsilon)}{\phi_p \varepsilon^3} \quad (1-2)$$

La fracción hueca del lecho cuando ocurre la verdadera fluidización es la fracción hueca mínima la fluidizable (ε_{mf}). El lecho se expande hasta este ahuecamiento antes de que aparezca el movimiento de las partículas y se puede determinar experimentalmente midiendo la altura del lecho.

La caída de presión aumenta cuando se eleva la velocidad del gas hasta el inicio de la fluidización mínima. Después al aumentar más la velocidad del gas la caída de presión decrece poco y luego permanece prácticamente sin cambio mientras el lecho sigue expandiéndose o aumentando su fracción hueca (*Geankoplis, 1999*). El incremento de la velocidad establece los tipos de regímenes de flujo cuyas diferencias están dadas por características como el flux de sólidos, fracción hueca global, y velocidad de desplazamiento gas- sólido. La Tabla (1-6) muestra un ejemplo de ello.

Tabla 1-6. Características de el regímenes fluidización (turbulenta) en fase densa y en fase diluida.

Características	Fluidización turbulenta	Fluidización rápida	Transporte en fase diluida
Rango de veloc. del gas	$U_c < U < U_{se}$	$U_s < U < V_{CA}$	$V_{CA} < U$
Rango de flux de sólidos	$G_s \leq G_{s,CA}$	$G_s > G_{s,CA}$	$G_s < G_{s,CA}$
Fracc. hueca axial	$\varepsilon = 0.6-0.8$	$\varepsilon = 0.8-0.98$	$\varepsilon > 0.98$
Gradiente axial de huecos	Alto	Alto	Bajo
Gradiente radial de huecos	Moderado	Alto	Bajo moderado
Veloc. de deslizamiento gas - sólido	Bajo	Alto	Bajo
Retromezclado de partículas	Alto	Alto	Bajo

U_c velocidad superficial del gas; U_{se} velocidad crítica blow-out; $G_{s,CA}$ flux de sólidos en el transporte neumático; V_{CA} velocidad del gas en el transporte neumático* J.R. Grace, 1997.

Los lechos de acuerdo a la velocidad del gas y las características de las partículas se conocen como lecho fijo (donde el movimiento de las partículas las hace viajar con lentitud hacia abajo al contacto de unas con otras), lecho fluidizado (las partículas son soportadas por el gas ó líquido a través de un distribuidor en el fondo del reactor) ó un sistema de transporte en fase diluida (las partículas son transportadas en un ducto o tubo), por esta razón su clasificación se hace en términos de (i) las propiedades de las partículas fluidizadas y (ii) los regímenes de flujo.

1.3.1. Regímenes de fluidización y clasificación de partículas.

A continuación se presentan las clasificaciones correspondientes.

(i) Clasificación de las partículas fluidizadas.

Esta clasificación se basa en el comportamiento de las partículas en la fluidización (*Geldart, 1973*), que típicamente se representa por los grupos A, B, C, D donde son clasificadas en términos de la diferencia de su densidad y la del gas ($\rho_p - \rho$) en función de su diámetro promedio (d_p) (Fig.1-5).

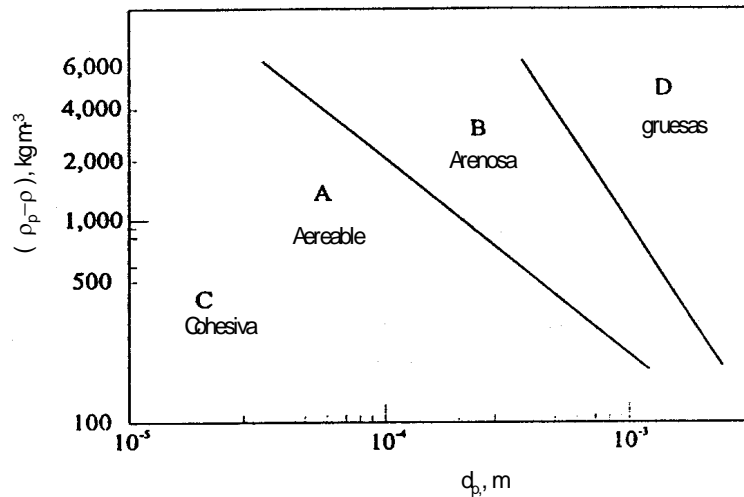


Fig.1-5. Clasificación Geldart de partículas fluidizadas (*Geldart, 1973*).

Esto puede observarse en la Fig. 1-5 que ha sido obtenida en forma empírica y es utilizada en investigaciones fundamentales y de diseño de lechos fluidizados gas-sólido donde el grupo al que pertenecen ciertas partículas se determina por el tipo de gas usado para la fluidización, su velocidad, temperatura y presión.

El Grupo C lo forman pequeñas partículas ($d_p < 20 \mu m$) que tienen características de cohesividad, que cuando logran fluidizarse la expansión del lecho puede ser grande. En la fluidización con estas partículas las fuerzas de contacto interpartícula como las fuerzas de Van der Waals, fuerzas capilares, y fuerzas electrostáticas dominan las fuerzas hidrodinámicas. Las fuerzas de contacto interpartícula son afectadas por sus propiedades de dureza, conductividad eléctrica, susceptibilidad magnética, asperezas de la superficie, contenido de humedad y las propiedades del gas.

Las partículas del Grupo A con un rango de tamaño típico de $30 - 100 \mu m$ son fluidizadas de inmediato. En este tipo de fluidización las fuerzas hidrodinámicas son importantes así como las fuerzas de contacto interpartícula. El lecho formado con estas partículas puede ser operado en un régimen donde hay burbujas (régimen de fluidización burbujeante) y donde no están, de tal manera que para las partículas del Grupo A, la velocidad mínima de fluidización del gas, U_{mf} , sea menor que

la velocidad mínima de burbujeo U_{mb} , condición con la que se obtiene un tamaño máximo estable de burbuja en la fluidización burbujeante.

Para partículas del Grupo B no hay un régimen de fluidización particulada. En este caso, U_{mf} , es igual U_{mb} . El tamaño de la burbuja se incrementa con la altura y una moderada expansión del lecho. Para este grupo no existe un tamaño máximo estable de burbuja.

El Grupo D comprende partículas gruesas ($d_p > 1$ mm) que al fluidizarse expanden muy poco el lecho su mezclado no es tan bueno como las del Grupo A y B.

Para diferenciar entre partículas del Grupo C y A, Molerus (1982) propuso un criterio semiempírico basado en un balance entre las fuerzas de Van der Waals y las fuerzas hidrodinámicas como

$$\left[g (\rho_p - \rho) d_p^3 \right]_{CA} = 0.1KF_H \quad (1-3)$$

donde (F_H) es la fuerza cohesiva entre partículas con un rango de valores de 8.8×10^{-8} N (para un material duro) a 3.37×10^{-7} N (para material suave) y un valor constante para (K) ($K = 0.01$); el subíndice (CA) se refiere a la frontera entre la región C y A .

Para distinguir entre las partículas del Grupo A y B se tiene una ecuación empírica donde el gas usado para la fluidización esta bajo condiciones ambientales (Geldart, 1973).

$$\left[(\rho_p - \rho)^{1.17} d_p \right]_{AB} = 0.906 \quad (1-4)$$

Cuando la ec. (1-4) se modifica para aplicarse a presiones elevadas y temperaturas Grace (1986) obtiene el número de Arquímedes

$$Ar_{AB} = 1.03 \times 10^6 \left(\frac{\rho_p - \rho}{\rho} \right)^{-1.275} \quad (1-5)$$

que representa la flotabilidad de una partícula. El subíndice (AB) representa la frontera entre la región A y B .

Para delimitar el Grupo B y D, Grace (1986) notó la presencia de burbujas rápidas cuando hay partículas del Grupo B donde su velocidad de ascenso es mas grande que la velocidad intersticial del gas. Cuando la burbuja es más lenta en presencia de las partículas del Grupo D, la velocidad de ascenso de la burbuja es menor que la velocidad intersticial del gas. Entonces para obtener la velocidad de ascenso, el criterio de delimitación entre las partículas del grupo B y D es:

$$Ar_{BD} = 1.581 \times 10^7 \frac{\rho / (\rho_p - \rho)}{\left[1 - 219 \rho / (\rho_p - \rho) \right]^2} \text{ para } \frac{\rho_p - \rho}{\rho} > 219 \quad (1-6)$$

El subíndice (BD) representa la frontera $B - D$.

(ii) Regímenes de fluidización

La clasificación de los regímenes de fluidización esta dada por su desarrollo en una fase densa ó una fase diluida. La fluidización en fase densa en general se basa en el comportamiento burbujeante pero en un sentido más amplio abarca desde el flujo tapón hasta la fluidización granulante ó agregativa. La Fig. 1-6 muestra la interrelación de los regímenes de fluidización en fase densa (que incluyen fluidización particulada, fluidización burbujeante y fluidización turbulenta) y en fase diluida, que considera la fluidización rápida y el transporte diluido. Las condiciones de operación se describen en la Tabla (1-7).

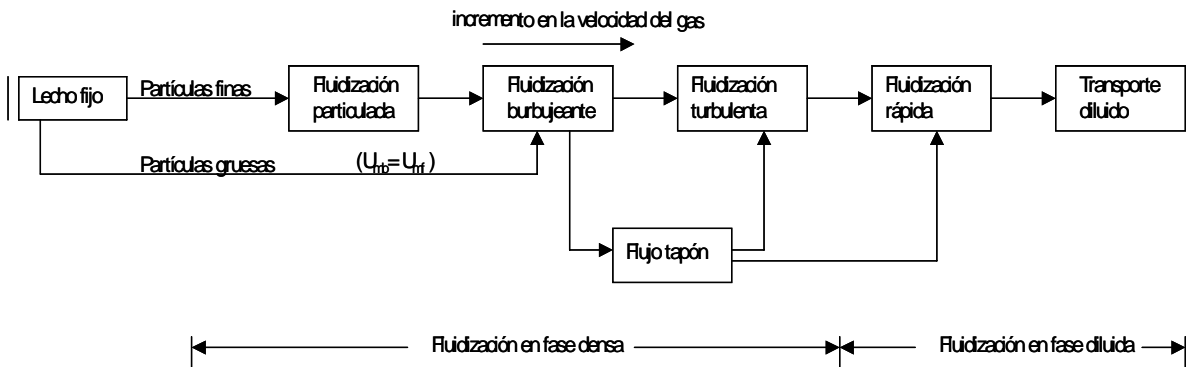


Fig. 1-6. Interrelación de varios regímenes incluyendo lecho fijo, fluidización en fase densa y fluidización en fase diluida (J.R. Grace, 1997).

El régimen de fluidización particulada (Fig. 1-7 (a)), es limitado por la velocidad mínima de fluidización y la velocidad mínima burbujeante. En la fluidización particulada, la fase gas que pasa a través de los intersticios entre las partículas fluidizantes no forma burbujas, el lecho parece homogéneo. Este régimen existe solamente en un lecho con partículas del Grupo A con un reducido rango de operación de velocidades para el gas. A presiones altas o con gases de alta densidad, el rango operante del régimen se expande. En un lecho con partículas gruesas (partículas del Grupo B y D), aparecen burbujas en cuanto la velocidad del gas alcanza la velocidad mínima de fluidización U_{mf} , que las hace menos adecuadas para este régimen.

El régimen de fluidización burbujeante (Fig. 1-7 (b)) se alcanza con un incremento de velocidad mas allá de la mínima burbujeante U_{mb} , lo cual induce un movimiento vigoroso en las partículas formando burbujas donde su coalescencia y ruptura ocurren por el aumento en la velocidad del gas.

El régimen donde se desarrolla un flujo tapón (Fig. 1-7 (c)) posee burbujas que forman un tapón con tamaño comparable al diámetro del lecho cuando el diámetro es pequeño y la altura es grande en relación a el.

El régimen de fluidización turbulenta (Fig. 1-7 (d)), se lleva a cabo cuando la velocidad del gas se incrementa mas allá de la fluidización burbujeante. En la fluidización turbulenta, las fases burbuja y emulsión pueden ser indistinguibles cuando aumenta la uniformidad de la suspensión y la superficie comienza a ser muy difusa. En contraste al régimen burbujeante la presencia de grandes burbujas es reducida.

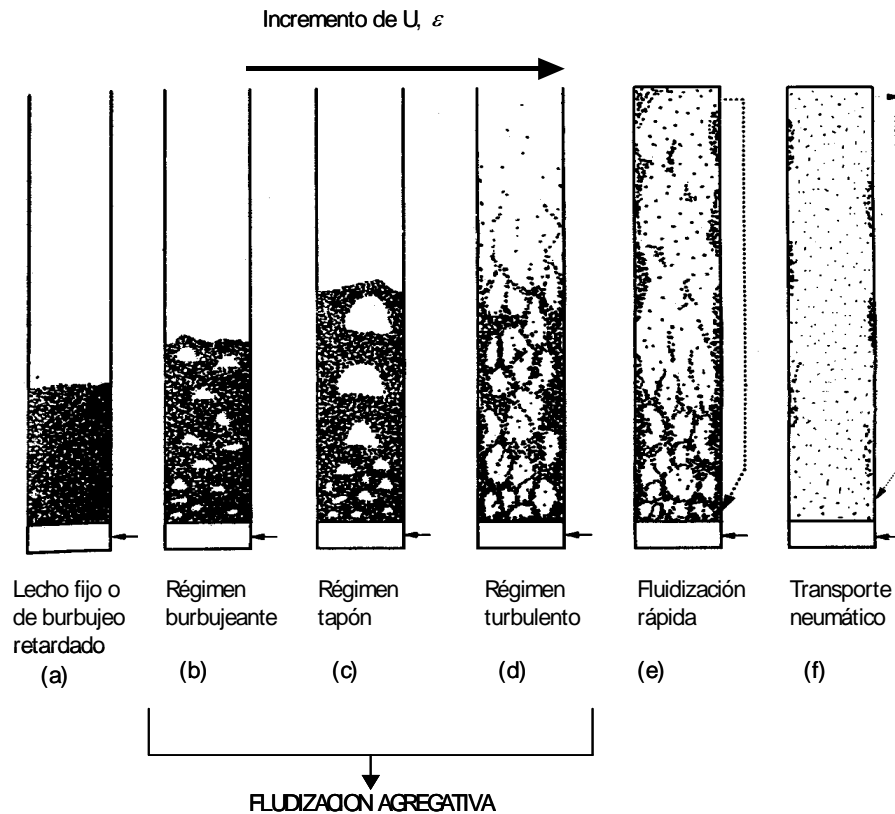


Fig. 1-7. Patrones de flujo en lechos fluidizados gas-sólido (*J.R. Grace, 1997*)

El régimen de fluidización rápida (Fig. 1-7 (e)) es caracterizado por una región densa al fondo del tubo elevador y una región diluida sobre el (*Li y Kwauk, 1980*). La interrelación de este régimen con otros, dentro de la fluidización en fase densa y el régimen de transporte diluido es reflejado en las variaciones de la caída de presión por unidad de longitud del tubo elevador ($\Delta p / \Delta z$); y la velocidad de circulación de sólidos.

En la Fig. 1-8 se muestran las variaciones típicas de caída de presión por unidad de longitud para la velocidad del gas que promueve una velocidad de circulación de sólidos constante j_{p1} que ocurre en la parte más baja del tubo elevador; la caída de presión $(\Delta p / \Delta z)_L$ esta dada por la curva a-b-c-d, y en la parte más alta por $(\Delta p / \Delta z)_U$ (curva a-b-c-d'). En la figura se observa que a velocidades altas del gas el factor de fricción en la pared es componente dominante para $(\Delta p / \Delta z)$; $(\Delta p / \Delta z)$ se incrementa con la velocidad del gas. A velocidades del gas relativamente bajas el sostenimiento de los sólidos es la componente dominante para $(\Delta p / \Delta z)$; $(\Delta p / \Delta z)$ decrece con un incremento en la velocidad del gas. El punto b representa la mínima $\Delta p / \Delta z$ que se marca para el régimen de transporte diluido donde es dominada por la fricción de la pared. En un flujo diluido (curva a-b), no hay una variación axial en $(\Delta p / \Delta z)$; La curva b-c representa la transición desde el régimen de transporte diluido al régimen de fluidización rápida; en la transición, el patrón de flujo

anular-centro prevalece con pequeñas variaciones axiales en $(\Delta p / \Delta z)$. En el régimen de fluidización rápida (curva c-d o c-d') se tiene una variación en $(\Delta p / \Delta z)$ entre la parte superior y más baja del tubo elevador donde $(\Delta p / \Delta z)_L$ y $(\Delta p / \Delta z)_U$ son diferentes. En el punto d, ocurre la transición de la velocidad del flujo a la fluidización en fase densa. Las velocidades del gas corresponden a los puntos c y d o d' denotados como U_{fd} y U_{tr} , respectivamente. Para una velocidad del gas con $\Delta p / \Delta z$ para $j_p = 0$ en el diagrama representa la fricción de la pared debido al flujo de gas.

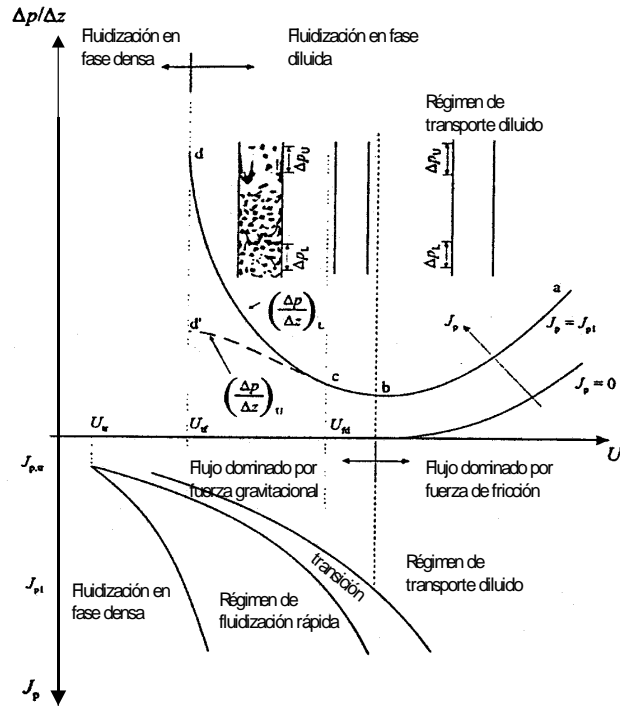


Fig. 1-8. Variación de la caída de presión por unidad de longitud del tubo elevador (riser) con velocidad de circulación de sólidos y velocidad del gas para diferentes regímenes de fluidización (J.R. Grace, 1997).

Este diagrama revela el efecto de la velocidad del gas (U) en la velocidad de circulación de sólidos j_{p1} , en el régimen de flujo dibujado en términos de j_p vs U . Esto puede verse cuando j_p decrece, porque el rango aplicable de la velocidad del gas para el régimen de fluidización rápida decrece; eventualmente este régimen disminuye cuando la velocidad de circulación de sólidos y la velocidad del gas alcanza $j_{p,tr}$ y U_{tr} respectivamente. Por consiguiente para un sistema operado en el régimen de fluidización rápida la velocidad de circulación de sólidos y la velocidad del gas necesita mantenerse mayor que $j_{p,tr}$ y U_{tr} . Con un decremento en la velocidad del gas j_{p1} la transición de la fluidización rápida a la fluidización en fase densa puede ser un proceso que depende de variables como el tamaño de la columna y propiedades de las partículas.

Las fronteras del régimen de fluidización rápida pueden determinarse por tres métodos independientes: fenomenológico, estadístico y estructural. El método fenomenológico utiliza la

relación entre la caída de presión ó la fracción hueca del lecho, velocidad del gas y velocidad de circulación de sólidos, basado en el comportamiento global de la fluidización, expresando la frontera del régimen en términos de la velocidad de transporte, velocidad del gas, y velocidad de circulación de sólidos (Fig. 1-7). En el método estadístico se considera que las fluctuaciones son dictadas por burbujas bajo condiciones de velocidad bajas y sólidos agregados bajo condiciones de velocidad alta. Este método utiliza la amplitud y desviación estándar de la fracción hueca, presión, o fluctuaciones de presión diferencial igual que sus correlaciones, y el poder del espectro como criterio para definir las fronteras del régimen. El método estructural reconoce las diferencias en la estructura de flujo del sistema en la mesoescala (burbujas y cúmulos) definiendo los régimen de flujo en base a estas diferencias (*Liang, 1997*).

El transporte neumático (Fig. 1-6 (e)) ocurre cuando el gas es inyectado a alta velocidad típicamente contiene partículas del Grupo D que las transporta hacia arriba formando un flujo diluido en la región del anulo. Las partículas alcanzan el fondo en la región anular que se hace mas densa y se recirculan a la región del centro mediante un patrón circulatorio. Así su mezclado es inducido por su caída axial sobre las paredes del tubo siendo más regular y cíclico que el lecho fluidizado turbulento o burbujeante. En la Tabla (1-7) se resumen las características más importantes de estos regímenes de flujo.

En el siguiente Capítulo se desarrolla el establecimiento de objetivos que consideran la descripción fenomenológica de la estructura de la fluidización rápida en los reactores FCC, donde se efectúa una revisión bibliográfica sobre la heterogeneidad del lecho para establecer el objetivo general y los objetivos particulares para el trabajo.

Tabla 1-7. Características claves que distinguen reactores de lecho fluidizado circulante. Lechos fluidizados a baja-velocidad y reactores de transporte en fase diluida.

	Reactores de lecho fluidizado de baja velocidad	Reactores de lecho fluidizado circulante	Reactores de transporte en fase diluida
Historia de partícula	Las partículas gastan un tiempo substancial (minutos ó horas) en el reactor y ocasionalmente salen a través de ciclones	Partículas que pasan repetidamente a través del sistema recirculando; el tiempo de residencia mantenido en el reactor para cada circuito es contado en segundos	una vez a través del sistema
Régimen hidrodinámico	Burbujeante, tapón ó fluidización turbulenta con una interfase superior distinta.	Usualmente fluidización rápida, aunque en el fondo del reactor puede corresponder a condiciones de fluidización turbulenta ó incluso burbujeante	Condiciones de transporte diluido
Velocidad superficial del gas	Generalmente debajo de 2 m/s	usualmente 3 a 16 m/s	usualmente 15 a 20 m/s
Diámetro medio de partícula	0.03 a 3 mm	usualmente 0.05 a 0.5 mm	Típicamente 0.02 a 0.08 mm
Flux neto de circulación de sólidos	Bajo de 0.1 a 5 kg/m ² s.	substancialmente ejem: 15 a 1000 kg/m ² s.	~ 20 kg/m ² s.
Fracción hueca	Típicamente 0.6 a 0.8 en lecho.	Típicamente 0.8 a 0.98 promediado sobre el tubo elevador	generalmente > 0.99
Mezclando gas	Dispersión axial substancial; comportamiento de dos-fases complejo.	Algunos gases fluyen hacia abajo cerca de las paredes que resultan típicamente en una mezcla de gas intermedia.	Muy poca dispersión axial.

J.R.Grace, 1997

CAPITULO II. DETERMINACIÓN DE OBJETIVOS

2.1. Reactores FCC y la dinámica de la fluidización rápida.

El proceso de desintegración catalítica en los reactores FCC se lleva a cabo en un régimen de fluidización rápida. Las dimensiones del reactor son: 30 m de altura con un diámetro aproximado de 1m. Las boquillas de inyección tienen 60° de inclinación respecto a la horizontal del tubo elevador. Típicamente las condiciones de operación están dadas para los hidrocarburos y el catalizador en la Tabla (1-5).

La dinámica de la fluidización forma estructuras particulares como es la región anular y una región (aproximadamente) diluida que contiene cúmulos desarrollados debido a los mecanismos de agregación y fragmentación influenciados por la estructura turbulenta, y las fuerzas que afectan la interacción interpartícula. Los cúmulos crecen a expensas de las partículas (en la región diluida) inmersas en los remolinos turbulentos y por su interacción con otros cuando se aumenta la velocidad de deslizamiento, caída de presión y ocurre la transición de una región densa a una diluida que cambia la fracción volumen de los sólidos al aumentar el volumen de la mezcla por la evaporación de gasóleo (Tabla 1-6).

Cuando el gasóleo evaporado se pone en contacto con los cúmulos que difieren, en fracción volumen de sólidos, masa, velocidad y forma, se promueve en los más grandes y densos, una reacción más rápida que en los pequeños, debido a la diferencia de temperatura que existe entre el catalizador y el gas es precursora de una desintegración catalítica y térmica que produce compuestos no deseados así como una distribución de temperatura axial y radial en el reactor y al interior de los cúmulos.

Existen trabajos que describen el proceso de desintegración catalítica en lecho fluido (FCC) que consideran los siguientes aspectos: (i) la inyección del gasóleo; (ii) el decaimiento en la eficiencia de recuperación debido a la heterogeneidad en la fracción de sólidos en el lecho; (iii) separación del producto en los ciclones y (iv) regeneración del catalizador ya que debido a la complejidad de los fenómenos que ocurren en el proceso, no es posible analizarlos de manera conjunta, para determinar sus efectos en la eficiencia del reactor; por esta razón mediante un estudio individual de cada uno podremos conocer su influencia en el sistema, que nos permitirá comprenderlo mejor.

El análisis de este trabajo se dirige hacia el efecto de la heterogeneidad de la fracción de sólidos debido a las estructuras llamadas cúmulos que se desarrollan en el lecho y que afectan la eficiencia de la producción de gasolina por el proceso de desintegración catalítica. En la siguiente sección se presentan las investigaciones realizadas al respecto.

2.2. Revisión bibliográfica sobre la heterogeneidad del lecho.

En realidad las investigaciones que se han estudiado hasta el momento en su mayoría no tienen relación con los cúmulos que se desarrollan en el tubo elevador, sin embargo su aportación es valiosa en la medida que presentan ideas que ayudan a especificar el sistema, el cual, es muy complejo debido a la reacción del gasóleo (evaporado) en la superficie de los cúmulos (formados por catalizador y vapor), que se encuentran en una distribución de tamaños, cuya fracción hueca,

velocidad y masa difieren con cada uno, este hecho hace que en el tubo elevador se generen puntos calientes que afectan la eficiencia de la producción de gasolina por un sobrecaqueo.

La importancia de los cúmulos en el tubo elevador se justifica a través de los artículos siguientes que aunque no son específicos del sistema dan ciertas bases para su estudio.

Smith P.G. y A. W. (1983) Propone un mecanismo para el crecimiento de partículas en lecho fluidizado granulante, mediante el análisis de los efectos en la velocidad de fluidización (0.15- 0.525 m/s), material ligante (Carbowax ó ácido benzoico), estructura de la partícula (polvo de vidrio, alúmina) y su tamaño (272-437 μm) con el objeto de clarificar el mecanismo de crecimiento y determinar las condiciones de decaimiento del lecho.

La experimentación se efectúa en un reactor tubular ($T=40^{\circ}\text{C}$) donde se mantienen fluidizadas las partículas con el gas. Por medio de unas boquillas se inyecta una solución ligante para analizar que tipo de mecanismo promueve la formación de cúmulos. Los mecanismos propuestos consideran un crecimiento en forma de aglomerado ó en capas ordenadas alrededor de una partícula que actúa como centro.

Los resultados obtenidos revelan las siguientes conclusiones: (i) cuando se incrementa la velocidad del gas (0.525 m/s) el tamaño del cúmulo se reduce para experimentos con solución de Carbowax; (ii) la velocidad de fluidización tiene dos efectos, proporciona mayor homogeneidad en el líquido y los puentes entre sólidos se rompen a altas velocidades debido a la colisión entre partículas; (iii) Las partículas de mayor tamaño crecen poco en forma de aglomerado (polvo de vidrio). En los experimentos que utilizan la solución de Carbowax facilita el crecimiento en forma de capas, sin afectar el decaimiento del lecho; (iv) la fuerza de arrastre y inercial determinan el tamaño y la forma del cúmulo.

Ishii y Horio (1989) desarrollan un modelo para los cúmulos en presencia de flujo anular en un lecho fluidizado circulante (CFB). Los parámetros de flujo incluyen la adimensionalización del radio del centro que puede estimarse por valores del diámetro y fracción hueca de la fase cúmulo. El modelo es validado experimentalmente y con los parámetros observados de cúmulos. Con la consideración de que su formación es posible cuando se da una explicación cuantitativa de la estructura de flujo anular y la alta velocidad de deslizamiento gas-sólido que comúnmente se observa en estos lechos. En este sistema los cúmulos son considerados esféricos, las partículas de la región diluida se desprecian en el balance de masa, el gas en los cúmulos se mueve con el y las partículas en su interior están uniformemente suspendidas. Los sólidos ascienden al centro y descienden en el ánulo.

En este modelo se determinó el diámetro promedio de los cúmulos, y se validó experimentalmente que son fluidizados homogéneamente. La dimensión del centro se puede predecir por el diámetro del cúmulo y la fracción hueca entre ellos. Los esfuerzos cortantes entre el centro/anulo no pueden ser despreciables.

Ouyang y Li (1999) proponen un modelo discreto que resuelve el movimiento de la partícula para simular la fluidización gas-sólido, que es usado para tratar la interacción interpartícula y la interacción partícula/fluido mediante la resolución del movimiento global en los procesos de colisión, tomando en cuenta la interacción interpartícula y los procesos de suspensión relacionados con el

fluido. El modelo ha sido utilizado para simular el comportamiento de la fluidización burbujeante, tapón y la rápida pero lo hace con menor exactitud para la fluidización rápida, la simulación hecha desde un reactor CFB muestra la coexistencia de una fase diluida y una fase densa formadas (respectivamente) de partículas aisladas suspendidas y cúmulos con formas irregulares.

En la Tabla (2-1) se presenta una cronología de estas investigaciones de las cuales se desarrollaron las más importantes.

Tabla 2-1. Cronología de los trabajos de investigación sobre la dinámica de cúmulos en el régimen de fluidización rápida .

Fecha	Aportación	Autor(es)
1999	Resuelve el movimiento global de partículas dentro de los procesos de colisión contando con la interacción interpartícula y los procesos de suspensión relacionados con el fluido. Asume que la fase sólida desde el punto de vista macroscópico se comporta como un fluido.	Ouyang, Li.
1992	Basado en un modelo predice la distribución conservada y la evolución de la distribución de tamaño de cúmulos en una curva específica analizada y rastreada en el tiempo.	D. Cohen.
1989	Modelo para los cúmulos en presencia de un flujo anular en un lecho fluidizado circulante (CFB).	Ishii, Nakajima y Horio
1989	Obtiene factores para el control y sistematización de modelos relacionados con la fluidización clase A y en particular polvos clase C.	J.Vissier
1983	Propone mecanismo de crecimiento de partículas en lecho fluidizado granulante analizando los efectos de la velocidad de fluidización del gas, material ligante, estructura y tamaño de la partícula.	P.G.Smith y A.W. Nienow

De las anteriores investigaciones ninguna considera la complejidad de los procesos que ocurren cuando hay reacciones de desintegración catalítica en la superficie de los cúmulos que sufren procesos de agregación y fragmentación influenciados por la turbulencia del sistema. Considerando lo anterior obtener un modelo con estos efectos es ambicioso, si el único que existe representa la evolución de la distribución de tamaños de cúmulos aleatoria (en estado estacionario) debido a los procesos de agregación y fragmentación por una combinación de las ecuaciones que los representan para obtener una curva analizada y rastreada en el tiempo en un tanque agitado vigorosamente (*D. Cohen, 1992*).

Una opción para describir el sistema mencionado con anterioridad se presenta en este trabajo, cuando no se considera la inyección de gasóleo, la presencia del anulo ni las reacciones de desintegración en la superficie de los cúmulos que lo simplifica a una mezcla vapor-catalizador ($\Phi_p = 70 \mu m$), que eventualmente se modificará como resultado de la utilización de estructuras jerárquicas (ó niveles de descripción) que permitirán una mejor comprensión de los procesos de transporte entre cúmulos influenciados por la agregación y fragmentación, que modifican el número de cúmulos de un tamaño característico. Este tamaño puede cambiarse en las ecuaciones

correspondientes para describir el efecto de cada uno y conocer la influencia de una distribución de tamaños determinada en el sistema.

Este tipo de análisis se efectúa utilizando balances de población que se obtienen mediante la aplicación de una metodología que parte de las ecuaciones hidrodinámicas locales para la fase vapor y sólido que representan los procesos de transporte de masa, momentum y energía. La metodología que se propone para obtener este modelo se plantea a través de los objetivos particulares.

2.3. Objetivo general y objetivos particulares.

En base a lo descrito con anterioridad se formula el objetivo general y los objetivos particulares siguientes:

OBJETIVO GENERAL

Describir el comportamiento de un lecho fluidizado heterogéneo en el régimen de fluidización rápida, con énfasis en el desarrollo de las ecuaciones de balances de población para los cúmulos del lecho fluidizado, a partir de las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía para cada una de las fases, que mediante un procedimiento de promediado multiescalas, conduce a la obtención de los tradicionales balances de población, así como a nuevos balances de población de momentum y de energía, que son la principal contribución de este trabajo.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Aplicar el promedio temporal a las ecuaciones hidrodinámicas locales que representan los procesos de transporte de masa momentum y energía al interior de la fase sólido y la fase vapor.
- Promediar en el espacio (al interior de un volumen promediante) las ecuaciones hidrodinámicas promediadas en el tiempo.
- Desarrollar un modelo pseudohomogéneo que represente los procesos de transporte de masa, momentum y energía al interior de un cúmulo de tamaño característico.
- Aplicar el promedio de región (volumen promediante de región) a las ecuaciones del modelo pseudohomogéneo para representar la interacción entre los cúmulos.
- Integrar en el volumen de una sección del tubo elevador a las ecuaciones del modelo de región en términos de la densidad numérica

En el siguiente Capítulo se describen los balances de población así como sus características y las metodologías utilizadas para su obtención.

CAPITULO III. BALANCE DE POBLACIÓN

3.1. Generalidades

Los balances de población describen a sistemas macroscópicos dispersos desde un punto de vista estadístico, donde la evolución en el número de una variable estadística de un sistema se debe a procesos de una naturaleza definida que tienen relación con el cambio en su masa (*Ramkrishna, 1978*).

Un ejemplo de estos sistemas son los procesos de separación donde hay un contacto directo con las fases (extracción líquido-líquido, la destilación, adsorción) y los sistemas formados de partículas (o algo que se les asemeje) como es el caso del crecimiento microbiano, la cristalización y la fluidización.

Las metodologías que existen para su obtención se basan en una función de distribución en el espacio de variables definido como el tamaño, la posición y la velocidad de los cúmulos a un tiempo t , $f(r_j, \vec{x}_j, \vec{v}_j, t)$. El sistema bajo estudio es función de estas variables, pero dependiendo de la metodología utilizada para su obtención el balance representará la evolución en el número de cúmulos (de un tipo) debido a los procesos de agregación y fragmentación que ocurren en el sistema de una forma característica.

El balance de población puede ser obtenido a partir de una ecuación tipo Boltzman, que representa un balance macroscópico estadístico de un sistema disperso diluido, donde las "partículas que en realidad son cúmulos" se consideran como esferas de diferente tamaño, que por aproximación no cambian su forma y se describen en función del radio del cúmulo de tamaño característico (r_j). La velocidad relativa absoluta $|v_c - v_g|$ entre el cúmulo y el vapor es pequeña y el espacio se define a través de la función de distribución $f_j(r_j, \vec{x}_j, \vec{v}_j, t)$.

En este desarrollo el sistema puede ser analizado en cualquier tipo de geometría, de esta manera el balance de población elaborado por la metodología de Zamora, (1990) puede obtenerse de esta. En el sistema descrito en el tanque agitado de flujo continuo la función de distribución se reduce a una función de distribución reducida $A(r_j, t)$ cuando se integra sobre la posición y velocidad ya que el sistema está perfectamente agitado y homogéneamente disperso.

La ecuación de balance de población es un caso particular de la ecuación Maestra (Van Kampen) (*Salinas, 2002*) desarrollada para procesos markovianos con una descripción estocástica donde establece el balance de probabilidad de encontrar un cierto número de cúmulos cuya evolución dependa de los procesos de agregación y fragmentación inherentes al sistema. Esta descripción se diferencia de las anteriores primero porque el nivel de descripción es microscópico y no macroscópico y a partir de la ecuación maestra se pueden representar las fluctuaciones del número de cúmulos de un cierto tamaño alrededor del valor medio, estableciendo así su importancia en los sistemas dispersos.

En las siguientes secciones se describen a detalle estas metodologías (a excepción de la deducción a partir de la ec. Maestra) así como las ventajas del desarrollo propuesto a través de los promedios multiescala en este trabajo.

3.2. Metodologías para obtener el balance de población.

Los dos métodos macroscópicos fundamentales en la obtención del balance de población para los cúmulos de un tamaño característico son:

- Ecuación macroscópica basada en analogías con la ecuación de Boltzmann.
- Balance macroscópico en un tanque agitado de flujo continuo.

3.2.1. Ecuación macroscópica basada en analogías con la ecuación de Boltzmann.

La ecuación tipo Boltzmann utiliza una descripción basada en conceptos de teoría cinética en una descripción macroscópica cuya extensión en este caso, permite estudiar los efectos del cambio de tamaño de los cúmulos a través de un desarrollo de la función de distribución que se representa por el balance de población para los cúmulos.

Para entender esta ecuación primero se desarrolla la ecuación de Boltzmann (que considera moléculas puntuales), como se ha hecho en la teoría cinética, para posteriormente extender éstos conceptos a la consideración de que las partículas tienen un diámetro diferente a cero, y son semejantes a los cúmulos.

3.2.1.1. La ecuación de Boltzmann.

Primero definiremos la función de distribución del número de moléculas en un sistema dado

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v} \quad (3-1)$$

Esta expresión nos da la fracción de partículas puntuales (ó moléculas) en el rango de posición $d\vec{x} = dx dy dz$ alrededor de la posición espacial (\vec{x}) y con un rango de velocidades $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ alrededor de la velocidad (\vec{v}) al tiempo (t); este espacio de seis dimensiones (\vec{x}, \vec{v}) es llamado espacio fase (García Colín, 1990).

Si consideramos a una molécula en la posición (\vec{x}), con velocidad (\vec{v}) al tiempo (t) en un sistema diluido y se desprecian las colisiones intermoleculares esta molécula puede moverse libremente. En consecuencia, en un pequeño intervalo de tiempo ($t + dt$), la posición y velocidad de esta molécula será $\vec{x} + \vec{v} dt$ y $\vec{v} + \vec{f} dt$ respectivamente. Donde $\vec{f}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ es una aceleración ocasionada por ejercer una fuerza externa, $\vec{f} = \vec{F} m$ siendo (m) la masa molecular. Entonces, las únicas moléculas que lleguen al espacio fase ($\vec{x} + \vec{v} dt, \vec{v} + \vec{f} dt$) al tiempo ($t + dt$) serán aquellas que estaban en el espacio (\vec{x}, \vec{v}) al tiempo (t). Por lo tanto todas las moléculas estarían en el nuevo espacio fase (Fig. 3.1)

$$f(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{f}dt, t + dt) d\vec{x}d\vec{v} = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x}d\vec{v} \quad (3-2)$$

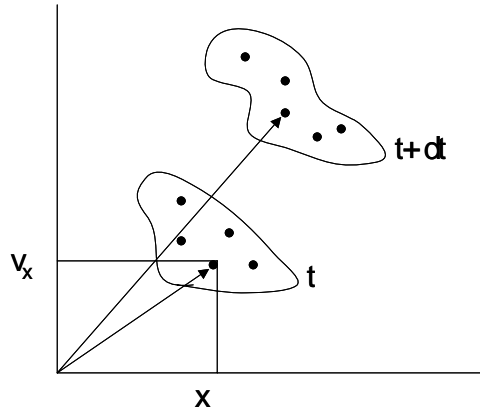


Fig.3.1. Espacio fase en 6 dimensiones

Las colisiones y los eventos similares causan que algunas moléculas del rango espacial $(d\vec{x}, d\vec{v})$ alrededor de (\vec{x}, \vec{v}) al tiempo (t) , no puedan estar en el rango $(d\vec{x}, d\vec{v})$ alrededor de $(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{f}dt)$ al tiempo $(t + dt)$, el número de estas moléculas será $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)^{-} d\vec{x}d\vec{v}dt$.

Estos eventos causan también que algunas moléculas que no están en el rango $(d\vec{x}, d\vec{v})$ alrededor de (\vec{x}, \vec{v}) al tiempo (t) , lleguen al $(d\vec{x}, d\vec{v})$ alrededor de $(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{f}dt)$ al tiempo $(t + dt)$. Este número se representa por $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)^{+} d\vec{x}d\vec{v}dt$.

Agrupando estos eventos, el número de estas moléculas en el espacio fase $(d\vec{x}, d\vec{v})$ será:

$$f(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{f}dt, t + dt) d\vec{x}d\vec{v} = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x}d\vec{v} + \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) d\vec{x}d\vec{v}dt \quad (3-3)$$

si la tasa temporal de cambio de (f) considera colisiones binarias y otros procesos moleculares tenemos la ec. (3-4):

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right) \equiv \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)^{(+)} - \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)^{-} \quad (3-4)$$

Tomando el límite cuando $dt \rightarrow 0$ la ec. (3-3) representa la ecuación de Boltzmann

$$\frac{\delta f}{\delta t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \vec{f} \cdot \nabla_{\vec{v}} \quad (3-5)$$

en ausencia de colisiones y otros procesos moleculares la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\delta f}{\delta t} = 0 \quad (3-6)$$

La ec. (3-6) es una ecuación de conservación para un sistema diluido donde rara vez puede haber colisiones binarias. El sistema está definido en un espacio fase $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ donde las partículas puntuales tienen una velocidad relativa con respecto al gas $|v_p - v_g|$ pequeña.

3.2.1.2. Balance de población basado en analogías con la ecuación de Boltzmann.

Considerando que el análisis es para cúmulos y no moléculas introducimos la variable correspondiente a su tamaño, así la descripción estadística para la dispersión de cúmulos de tamaño (j) puede expresarse como la ec. (3-7)

$$f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j \quad (3-7)$$

donde el número probable de cúmulos en un rango de radio (dr_j) alrededor de (r_j) está localizado en el rango espacial ($d\bar{x}_j$) alrededor de (\bar{x}_j) con velocidades en el rango $d\bar{v}_j$ alrededor de la velocidad (\bar{v}_j) al tiempo (t).

Cuando aplicamos la derivada material a la ec. (3-7) y la integramos en el volumen obtendremos una expresión que contiene los cambios debido a las variables que forman parte de la función de distribución (de tamaños de cúmulos).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\vec{v}} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j &= \iiint_{\vec{v}} \frac{\partial f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)}{\partial t} dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \\ &\iiint_{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \iiint_{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \\ &+ \iiint_{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{\partial r_c}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j \end{aligned} \quad (3-8)$$

o bien el cambio en la fracción de cúmulos de tamaño (j) por procesos de agregación y fragmentación

$$\begin{aligned}
& \iiint_v \frac{\partial f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)}{\partial t} dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \iiint_v \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \\
& + \iiint_v \frac{\partial}{\partial v_i} (\bar{F} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \iiint_v \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{\partial r_j}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j = \\
& = \iiint_v A_j dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j + \iiint_v C_j dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j
\end{aligned} \tag{3-9}$$

Factorizando los términos comunes de la ec. (3-9) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \iiint_v \left[\frac{\partial f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) + \frac{\partial}{\partial v_i} (\bar{F} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) + \frac{\partial}{\partial r_c} \left(\frac{\partial r_j}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) \right] dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j = \\
& = \iiint_v [A_j + C_j] dr_j d\bar{x}_j d\bar{v}_j
\end{aligned} \tag{3-10}$$

como el volumen es arbitrario el integrando debe ser cero, de donde

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) + \frac{\partial}{\partial v_i} (\bar{F} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t)) + \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial r_j}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) \right) = \\
& = A_j + C_j
\end{aligned} \tag{3-11}$$

ó

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \nabla_{\bar{x}} \cdot (\bar{v} f_j) + \nabla_{\bar{v}} \cdot (\bar{F} f_j) + \frac{\partial}{\partial r_j} (R_j f_j) = A_j + C_j \tag{3-12}$$

Esta expresión es el balance de población más general que las de Ramkrishna y Zamora (1990), y complicada por la dependencia de la función de distribución con la posición, velocidad y tamaño a un tiempo dado. Si además se introducen los modelos para la agregación y fragmentación de los cúmulos resulta una ecuación no lineal y multivariada, por esta razón se obtendrá una función de distribución reducida y valores promedios de su dispersión para facilitar su resolución (*Valencia 2001*).

$$G_j \equiv \int f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) d\bar{v}_j \tag{3-13}$$

Los valores promedio están dados por

$$\bar{R}_j \equiv \int R_j f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) d\bar{v}_j / G_j \tag{3-14}$$

$$\bar{V}_j \equiv \int \bar{v}_j f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) d\bar{v}_j / G_j \tag{3-15}$$

donde (\bar{R}_j) y (\bar{V}_j) son los valores promedio para el radio y velocidad de los cúmulos de tamaño (j). Integrando la ec.(3-12) sobre todo el campo de velocidades tenemos

$$\int \frac{\partial f_j}{\partial t} d\bar{v}_j + \int \nabla_{\bar{x}} \cdot (\bar{v}_j f_j) d\bar{v}_j + \int \nabla_{\bar{v}} \cdot (\bar{F} f_j) d\bar{v}_j + \int \frac{\partial}{\partial r_j} (\bar{R}_j f_j) d\bar{v}_j = \int A_j d\bar{v}_j + \int C_j d\bar{v}_j \quad (3-16)$$

utilizando las expresiones (3-14) y (3-15) se obtiene

$$\frac{\partial G_j}{\partial t} + \nabla_{\bar{x}} \cdot (\bar{V}_j G_j) + \frac{\partial}{\partial r_j} (\bar{R}_j G_j) = \int A_j d\bar{v}_j + \int C_j d\bar{v}_j \quad (3-17)$$

Para hacer valida la ec.(3-17) en una sección del reactor integramos sobre las coordenadas normales al eje axial (z) para desaparecer la dependencia en el radio (r) y el ángulo (θ).

$$\frac{\partial G_j}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} (A \bar{V}_{zj} G_j) + \frac{\partial}{\partial r_j} (\bar{R}_j G_j) = A \left[\int A_j d\bar{v}_j + \int C_j d\bar{v}_j \right] \quad (3-18)$$

De esta manera la ec.(3-18) representa la ecuación de balance de población para los cúmulos de tamaño (j) que forman un sistema disperso diluido, donde no cambian de tamaño y se describen en función del radio (r_j). La diferencia de velocidad relativa $|v_c - v_g|$ entre el cúmulo y el vapor es pequeña y las tasas de agregación y fragmentación (derech. de la ec. (3-18)) deben remplazarse por los modelos correspondientes.

Los modelos que pueden proponerse para la agregación y fragmentación de los cúmulos varían en función del detalle y profundidad de la descripción. A continuación se presentan algunas ideas que se desarrollan por separado para cada proceso.

a) Tasa de Fragmentación.

La turbulencia al interior de los cúmulos y los potenciales de interacción entre las partículas podrían ser elementos básicos para este modelo, así como la turbulencia generada por la región diluida donde se encuentran. Cuando estos efectos se acoplan y se considera la distorsión del flujo relacionado con el movimiento de los cúmulos podría conocerse la eficiencia de colisión y su frecuencia.

El modelo de Flory-Stockmayer puede ser un ejemplo elemental para representar este proceso donde los cúmulos son semejantes a esferas a las que se asociada una posición (a su centro de masa), y velocidad característica.

Este modelo especifica primero cada cúmulo como una unidad monomérica en términos del número de grupos reactivos (r_A, r_B, \dots) de tipo (A, B, \dots). De esta manera los pares de cúmulos interactúan formando uniones (AA, BC, \dots). Para un sistema particular debemos especificar el número total de unidades monoméricas (cúmulo) que están presentes antes de su interacción, así como la

fracción de grupos de cada tipo que ha interactuado ($\alpha_A, \alpha_B, \dots$) según procede la cinética. Así se introduce la hipótesis de reactividades iguales de los cúmulos. Este principio establece que si una unión del tipo (AB) es permitida, entonces un cúmulo dado (A) tiene igual probabilidad de interactuar con cualquier cúmulo (B) en el sistema: esto es, todos los cúmulos son igualmente reactivos. Con este principio Flory y Stockmayer desarrollaron métodos elegantes para determinar la distribución de n-meros (Salinas, 1992).

Existe un modelo que consiste de dos cúmulos libres (A) y (B), que interactúan formando uno nuevo a través de enlaces que se representan esquemáticamente como:



En este modelo se tiene un cúmulo reactivo libre (A) y un 1+1 (B) libres los cuales pueden combinarse con un j-mero de un cúmulo reactivo (A) ó (B). La forma estilizada de este modelo fue introducida por Golvin y Scott para estudiar coloides en un flujo cortante y consiste en simplificar la tasa de agregación a $1+j$.

Para este tipo de reacción, Flory y Stockmayer obtuvieron que la tasa de fragmentación esta dada por:

$$F_{i,j} = \beta (i + j) \quad (3-20)$$

b) Tasa de Agregación.

En este proceso las fuerzas de corto y largo alcance del tipo Van der Waals que consideran los potenciales de interacción a nivel de partícula y cúmulos son los más importantes; de suerte que para estos existe una variedad de tasas para su descripción como las que se presentan a continuación:

- Tasa browniana
- Tasa constante
- Tasa Suma
- Tasa de Flory – Stockmayer

De las tasas anteriores la última es la más sencilla ya que puede lograrse en $1+1$ formas, o bien a través de un (A) libre a un j-mero libre (B) en $j+1$ formas, para obtener la tasa de agregación como $1+j+2$, que de acuerdo al modelo utilizado por Golvin y Scott simplifica la tasa de agregación a $1+j$.

Así el modelo para la tasa de agregación queda:

$$K_{i,j} = \alpha (i + j) \quad (3-21)$$

Para las fuerzas asociadas a estos procesos H.C. Hamaker (1937), propone un escalamiento de un nivel molecular a partícula siempre que se guarde una relación de tamaño entre

ellas y una distancia de centro a centro característica, pero a pesar de esto todavía se requiere un análisis a detalle para concluir que este modelo pueda ser extendido a cúmulos.

La generación de turbulencia por el vapor, debe de acoplarse considerando la contribución del movimiento de los cúmulos que imparte el vapor pues hasta el momento los estudios realizados sólo consideran las partículas en un flujo granular donde las componentes mas importantes de los esfuerzos sobre las partículas son la colisional y la turbulenta cuya relación tiene que ver con el tiempo de relajación (de la partícula) y un intervalo de colisión (para flujos con una fracc. vol > 0.1%). El tiempo de relajación es originado por las fuerzas de Bassett cuando el transporte de momentum es proporcional al cuadrado de la dimensión del cuerpo e inversamente proporcional a la viscosidad cinemática (ec. (3-22)).

$$\tau \sim l^2 / \nu \quad (3-22)$$

Por todo lo anterior la propuesta que se haría para los mecanismos de agregación y fragmentación deben considerar:

- (i) efectos de los remolinos turbulentos, como la generación de turbulencia debida al movimiento impartido por el vapor a los cúmulos.
- (ii) distorsión del flujo debida al cúmulo, que afecta la eficiencia y frecuencia de colisión donde generalmente se ha propuesto para el análisis de partículas del tipo flujo potencial ó reptante.
- (iii) fuerzas atractivas de corto y largo alcance del tipo Van der Waals entendiéndose por corto las que hay entre partículas y de largo alcance la que existe entre cúmulos.

3.2.2. Balance de población en un tanque agitado de flujo continuo.

El sistema se describe en un tanque agitado de flujo continuo donde los cúmulos se asemejan a partículas grandes dispersas en un fluido y las propiedades de la dispersión son uniformes. No hay transferencia de materia ni reacciones químicas en la interfase y el sistema se mantiene isotérmico.

La fase dispersa está formada por cúmulos con una variedad de tamaños que pueden representarse a través de una distribución de probabilidad tipo gaussiana. La identidad de cada cúmulo se pierde debido a que se fragmenta generando nuevos o se agrega con otro (agregación binaria) para formar uno de mayor tamaño dejando fuera los procesos de nucleación y extinción.

El balance de población puede describirse en términos de diferentes variables como puede ser el radio del cúmulo, posición, velocidad etc., que se encuentran representadas en un espacio de variables a través de una función de probabilidad $f(r_j, \vec{x}, \vec{v}, t)$. Cuando esta se integra sobre las variables de menor interés se obtiene una distribución de probabilidad reducida $A(r_j, t)$ donde sólo es función del radio del cúmulo de tamaño (j) y del tiempo pues el sistema es un tanque agitado perfectamente mezclado.

Como el número de cúmulos es lo suficientemente grande su número total se relaciona a cada tamaño con una función de probabilidad continua $A(r_j, t)$ (conocida como función de distribución de tamaños de cúmulos de la población) cuyo significado físico para $A(r_j, t) dr_j$ se relaciona con la fracción de cúmulos de tamaño (j) que forma parte del total con tamaños de r_j a $r_j + dr_j$.

Cuando el tamaño de los cúmulos en el sistema no tiene límite, podemos escribir

$$\int_0^{\infty} A(r_j, t) dr_j = 1 \quad (3-23)$$

con $N(t)$ como el número total de cúmulos al tiempo (t). Entonces el número total de cúmulos con tamaños de r_j a $r_j + dr_j$ será:

$$N(t) A(r_j, t) dr_j \quad (3-24)$$

y el número total de cúmulos en el sistema cuyos tamaños son $\in (r_1, r_2)$ es

$$\int_{r_1}^{r_2} N(t) A(r_j, t) dr_j \quad (3-25)$$

Para definir el tamaño medio de los cúmulos $\langle r_j \rangle$ tenemos la ec.(3-26):

$$\langle r_j \rangle = \int_0^{\infty} r_j A(r_j, t) dr_j \quad (3-26)$$

El comportamiento de la función de distribución puede variar debido al rango de tamaños de partículas de $0-39.5 \mu m$ (para las más finas) y $61.5-150 \mu m$ (para las más gruesas), pues su tamaño afecta la probabilidad de los procesos de agregación y fragmentación que forman o destruyen los cúmulos y además afectan la estabilidad del lecho. En este caso el tamaño de la partícula que se utiliza es de $70 \mu m$.

En la próxima sección se describe la metodología para obtener el balance de población a los que se relaciona procesos de entrada y salida por flujo, agregación y fragmentación, contenidos en la ecuación que describe el estado de una población de cúmulos que se clasifica en relación a una sola magnitud distintiva de sus elementos representada por el radio del cúmulo de tamaño (j) que es (r_j).

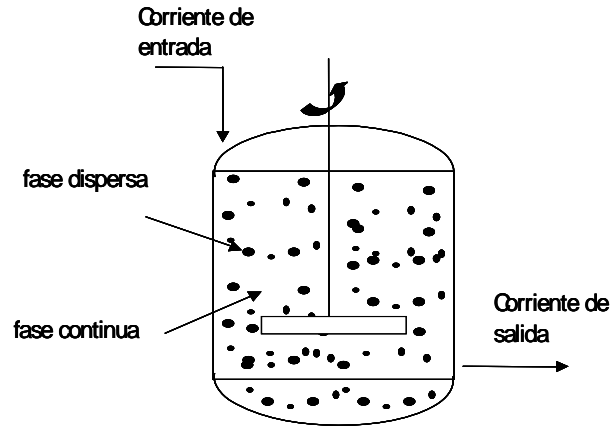


Fig.3-2. Un sistema disperso.

3.2.2.1. Metodología para obtener el balance de población a partir de un balance macroscópico.

La descripción del balance para el número de cúmulos cuyos tamaños se encuentran entre r_1 y r_2 es la siguiente :

Tasa de cambio en el número de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$	=	Tasa de generación de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ debido a la fragmentación de cúmulos de mayor tamaño.	-	Tasa de consumo de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ debido a la fragmentación de cúmulos de tamaños $\in (r_1, r_2)$
+	+	Tasa de generación de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ generado por colisiones de cúmulos de menor tamaño.	-	Tasa de consumo de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ debido a la agregación de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$
+	+	Tasa de entrada de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ en la alimentación.	-	Tasa de salida de cúmulos con tamaños en el efluente $\in (r_1, r_2)$

(3-27)

A continuación se presenta el desarrollo de los términos que forman parte de la ec. (3-27).

a) Término de Acumulación

La velocidad de cambio en el número de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ esta dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} N(t) A(r_j, t) dr_j \quad (3-28)$$

o usando la regla de Leibnitz se modifica en

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial t} [N(t) A(r_j, t)] dr_j \quad (3-29)$$

b) Términos de Fragmentación

Para obtener los términos de fragmentación podemos definir las siguientes funciones (que al igual que se las que se definirán en el resto de esta sección, se supondrán en este momento conocidas):

$\nu(y) \equiv$ número de cúmulos hijos. Numero promedio de cúmulos formados por la fragmentación de un cúmulo cuyo tamaño $\in (y, y + dy)$

$\beta(r_j, y) \equiv$ Tasa de fragmentación. $\beta(r_j, y) dr_j$ es la fracción de cúmulos con tamaños entre (r_j) y $r_j + dr_j$ formados al fragmentarse un cúmulo de tamaño $\in (y, y + dy)$

$g(y) \equiv$ Frecuencia de fragmentación. Es la fracción de cúmulos con tamaños de y a $y + dy$ que desaparecen fragmentándose por unidad de tiempo.

La entrada por fragmentación esta dada por

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_{r_j}^{\infty} \beta(r_j, y) \nu(y) g(y) N(t) A(y, t) dy dr_j \quad (3-30)$$

y la salida por

$$\int_r^{r_2} g(r_j) N(t) A(r_j, t) dr_j \quad (3-31)$$

c) Términos de Agregación.

Para obtener los términos de agregación utilizaremos las siguientes funciones:

$h(r_j, y) \equiv$ Frecuencia de colisión. Se define como la frecuencia de colisión entre cúmulos de tamaño $\in (r_j, r_j + dr_j)$ y partículas de tamaño $\in (y, y + dy)$ / (número total de cúmulos entre r_j y $r_j + dr_j$ por el número total de cúmulos entre y y $y + dy$). Esta función es para procesos binarios de colisión.

$\lambda(r_j, y) \equiv$ Eficiencia de colisión entre cúmulos cuyos tamaños $\in (r_j, r_j + dr_j)$ y cúmulos de tamaños $\in (y, y + dy)$.

La entrada por agregación estará dada por

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{r_j/2} \lambda(r_j - y, y) h(r_j - y, y) N(t) A(r_j - y, t) N(t) A(y, t) dy dr_j \quad (3-32)$$

y la salida será

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\infty} \lambda(r_j, y) h(r_j, y) N(t) A(r_j, t) N(t) A(y, t) dy dr_j \quad (3-33)$$

d) Corrientes de entrada y salida del sistema.

Si (n_A) es la velocidad de entrada de cúmulos al sistema y $a(r_j, t)$ es la distribución de probabilidad de tamaño con que entran estos cúmulos, entonces, la entrada de cúmulos con tamaños $\in (r_1, r_2)$ será

$$\int_{r_1}^{r_2} n_A a(r_j, t) dr_j \quad (3-34)$$

si definimos la función $f(r_j)$ como:

$f(r_j) \equiv$ Frecuencia de escape. Fracción de cúmulos cuyos tamaños están entre r_j y $r_j + dr_j$ que salen del sistema por unidad de tiempo.

la salida en el efluente será

$$\int_{r_1}^{r_2} f(r_j) N(t) A(r_j, t) dr_j \quad (3-35)$$

Sustituyendo las expresiones propuestas para cada uno de los términos del balance para el número de cúmulos cuyos tamaños $\in (r_1, r_2)$ tendremos la expresión para el balance de población (Zamora, 1990).

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial t} [N(t) A(r_j, t)] dr_j = & \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_j}^{\infty} \beta(r_j, y) v(y) g(y) N(t) A(y, t) dy dr_j - \int_{r_1}^{r_2} g(r) N(t) A(r_j, t) dr_j \\
& + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{r_j/2} \lambda(r_j - y, y) h(r_j - y, y) N(t) A(r_j - y, t) N(t) A(y, t) dy dr_j - \\
& - \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\infty} \lambda(r_j, y) h(r_j, y) N(t) A(r_j, t) N(t) A(y, t) dy dr_j + \\
& + \int_{r_1}^{r_2} n_A a(r_j, t) dr_j - \int_{r_1}^{r_2} f(r_j) N(t) A(r_j, t) dr_j
\end{aligned} \tag{3-36}$$

Puesto que (r_1, r_2) es arbitrario, la ecuación de balance anterior puede reducirse a:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [N(t) A(r_j, t)]}_{\text{cambio temporal del número de}} & = \underbrace{+ \int_0^{r_j/2} \lambda(r_j - y, y) h(r_j - y, y) N(t) A(r_j - y, t) N(t) A(y, t) dy}_{\text{generación de cúmulos de tamaño (j) por agregación}} - \\
\underbrace{- \int_0^{\infty} \lambda(r_j, y) h(r_j, y) N(t) A(r_j, t) N(t) A(y, t) dy}_{\text{consumo de cúmulos de tamaño (j) por agregación}} & + \\
\underbrace{\int_{r_j}^{\infty} \beta(r_j, y) v(y) g(y) N(t) A(y, t) dy}_{\text{generación de cúmulos de tamaño (j) por fragmentación}} & - \underbrace{g(r_j) N(t) A(r_j, t)}_{\text{consumo de cúmulos de tamaño (j) por fragmentación}} + \\
+ \underbrace{n_A a(r_j, t)}_{\text{flujo de cúmulos de tamaño (j) a la entrada del tanque}} & - \underbrace{f(r_j) N(t) A(r_j, t)}_{\text{flujo de cúmulos de tamaño (j) a la salida del tanque}}
\end{aligned} \tag{3-37}$$

Esta ecuación nos da una relación para la velocidad de cambio en el número de cúmulos cuyos tamaños están entre r_j y $r_j + dr_j$. La ec. (3-37) es la ecuación de balance de población integro-diferencial, parcial no lineal para la distribución de tamaños de cúmulos $A(r_j, t)$ que describe el sistema disperso con las características mencionadas en esta sección.

En la ec.(3-37) es necesario plantear una expresión para $N(t)$ en función de la distribución de tamaños de cúmulos $A(r_j, t)$. Si (S_D) es la cantidad total de cúmulo disperso en el sistema, y r_j tiene unidades de masa o volumen, entonces $N(t)$ se relaciona con $A(r_j, t)$ de la manera siguiente:

$$N(t) = \frac{S_D}{\langle r_j \rangle} \tag{3-38}$$

esta expresión es equivalente a la ec. (3-39) cuando se sustituye la ec. (3-26) en la ec. (3-38)

$$N(t) = \frac{S_D}{\int_0^{\infty} r_j A(r_j, t) dr_j} \quad (3-39)$$

3.2.3. Obtención de balances de población utilizando promedios multiescala.

Considerando que en las secciones anteriores se describen las características del balance de población y las metodologías para su obtención, es posible visualizar la principal contribución que este trabajo aporta al obtener, además de los tradicionales balances de población, nuevos balances de población de momentum y de energía, que describen en forma explícita y detallada estos efectos ya que en el balance de población tradicional, que es un balance de masa, la contribución de las fuerzas y la energía asociada sólo encuentra su representación en las tasas de agregación y fragmentación donde no es posible describirlos con claridad y detalle.

Este modelo representa el comportamiento de un lecho fluidizado heterogéneo en el régimen de fluidización rápida, mediante el desarrollo de las ecuaciones para los cúmulos del lecho fluidizado, a partir de las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía para cada una de las fases (sólido, vapor) mediante un procedimiento de promediado multiescalas.

Este promediado en multiescalas parte de las ecuaciones hidrodinámicas locales que representan los procesos de transporte de masa, momentum y energía al interior de la fase sólido y vapor que se promedian en el tiempo. Se aplica un promedio espacial a nivel de fases (volumen promediante), y uno de región (volumen de región). El promedio a nivel de fases es fundamental para el desarrollo del modelo pseudohomogéneo que representa los procesos de transporte de masa, momentum y energía al interior de cualquier región homogénea, como sucede en cada uno de los cúmulos de un tamaño característico. El promedio de región extiende la posibilidad de describir los procesos de transporte de estos cúmulos ó regiones homogéneas a un conjunto de regiones homogéneas en un lecho heterogéneo. Para obtener los balances de población correspondientes se integra en el volumen de una sección del tubo elevador a las ecuaciones previamente expresadas en términos de la densidad numérica.

En el siguiente Capítulo esta metodología se describe a detalle.

CAPITULO IV. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS

4.1. Metodología general para el desarrollo de los balances de población para los cúmulos.

La metodología general (Fig. 4-1) toma como fundamento las ecuaciones hidrodinámicas locales (transporte de masa, momentum y energía) de la fase sólido y vapor para aplicar los promedios multiescala enunciados a continuación:

- (ii) Promedio temporal
- (iii) Promedio espacial en un volumen promediante (Modelo de dos fases).
- (iv) Modelo Pseudohomogéneo
- (v) Promedio espacial en un volumen de región (Modelo de región).
- (vi) Promedio en una sección del tubo elevador.

La aplicación de los promedios modifica al sistema por su característica incluyente, que requiere de nuevos elementos para describir a detalle las estructuras jerárquicas (Tabla 4-1) comprendidas unas dentro de otras. Esta metodología concluye cuando se obtienen los balances de población que representan la evolución en el número de cúmulos de un tamaño (característico) influenciada por los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos y en los que es posible describir el transporte de momentum y energía asociados, en términos de un balance de población de momentum y de energía.

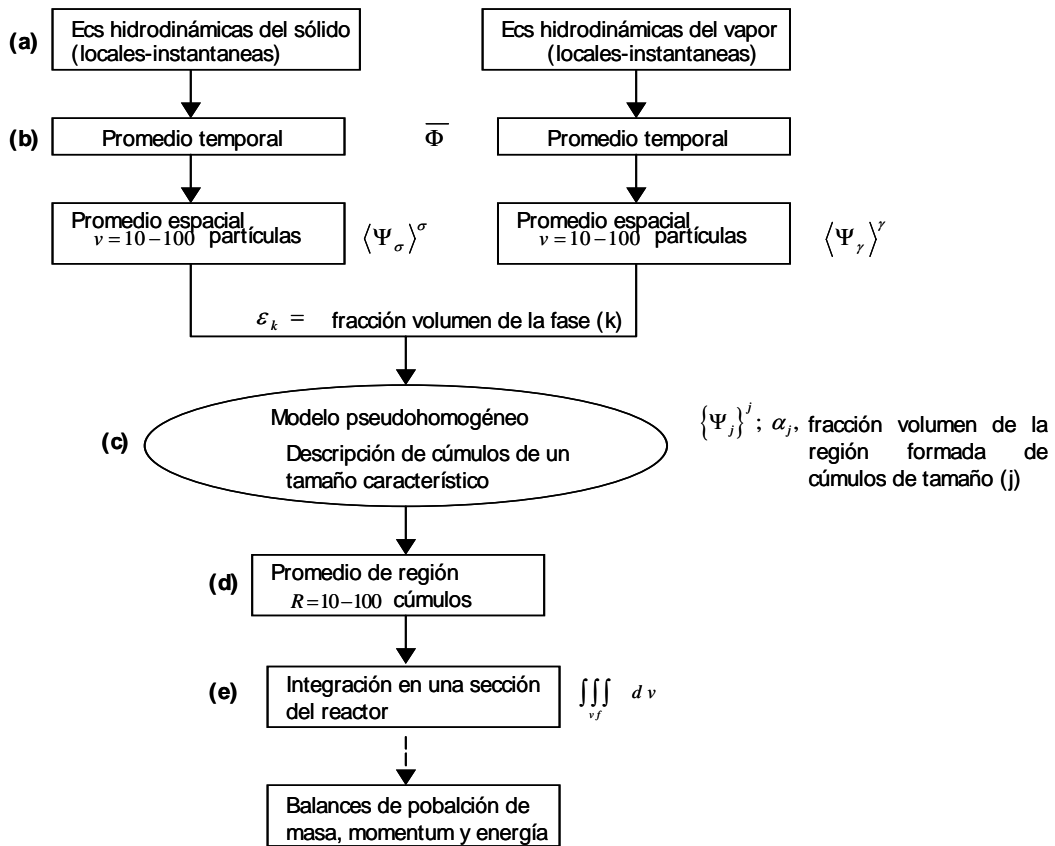


Fig. 4-1. Metodología general para la obtención de balances de población considerando diferentes estructuras jerárquicas basados en promedios multiescala.

Tabla 4-1. Principal simbología de cada estructura jerárquica

Promedio	Símbolo	Propiedades	Teoremas
temporal	$\bar{\Phi}$	$\overline{\bar{\Phi}} = \bar{\Phi}, \overline{\Phi'} = 0$	$\frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \frac{d}{dt} \bar{\Phi}$ $\overline{\nabla \Phi} = \nabla \bar{\Phi}$
espacial	$\langle \bar{\Phi} \rangle$ $\langle \bar{\Phi} \rangle^\beta$ $\beta = \gamma, \sigma$	$\langle \bar{\Phi} \rangle = \varepsilon_\beta \langle \bar{\Phi} \rangle^\beta$ $\langle \langle \bar{\Phi} \rangle \rangle \Big _{\bar{x}+\bar{y}_\beta} = \varepsilon_\beta \langle \bar{\Phi} \rangle^\beta +$ $+\frac{1}{v} \int_{v(\bar{x})} \langle \bar{y}_\beta \rangle \cdot \nabla \langle \bar{\Phi} \rangle \Big _{\bar{x}} +$ $+\frac{1}{v} \int_{v(\bar{x})} \langle \bar{y}_\beta \bar{y}_\beta \rangle \cdot \nabla \nabla \langle \bar{\Phi} \rangle \Big _{\bar{x}} +$	$\langle \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\Phi} \rangle - \frac{1}{v} \int_{A_i} \bar{n}_i \cdot \bar{w} \bar{\Phi} dA$ $\langle \nabla \cdot \bar{\Phi} \rangle = \nabla \cdot \langle \bar{\Phi} \rangle + \frac{1}{v} \int_{A_i} \bar{n}_i \cdot \bar{\Phi} dA$
región	$\{\bullet\}$ $\{\bullet\}^j$	$\{\bullet\} = \alpha_j \{\bullet\}^j$	$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi_j \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \{\Psi_j\} - \sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \bar{w} \Psi_j$ $\{\nabla \cdot \Psi_j\} = \nabla \cdot \{\Psi_j\} + \sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \Psi_j dS$
volumen fijo	$\iiint_{vf} \{\Psi\}^j dv$		$\iiint_{vf} \frac{\partial}{\partial t} \{\Psi_j\} dv = \frac{d}{dt} \iiint_{vf} \{\Psi_j\} dv - \oint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot$ $\iiint_{vf} \nabla \{\Psi\}^j dv = \oint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot \{\Psi\}^j dS_{vf}$

Debido a la fluidización rápida en la que se encuentra el sistema de estudio los cambios de carácter temporal y espacial se consideran en todas las estructuras (jerárquicas) mediante la aplicación de los respectivos promedios contenidos en los promedios multiscala desarrollados en las ecuaciones de transporte. El orden en que son aplicados es indistinto porque según el teorema de Fubini (ec.(4-1)) se puede obtener el mismo resultado, cuando se promedia en el tiempo y luego en el espacio ó viceversa.

$$\int_t \left(\iiint_v f(t, \vec{x}) d\vec{x} \right) dt = \iiint_v \left(\int_t f(t, \vec{x}) dt \right) d\vec{x} \quad (4-1)$$

A continuación cada estructura jerárquica (ó nivel de descripción) se describe brevemente (Fig. 4-3).

(a) Promedio temporal

El promedio temporal (aplicado a las ecuaciones hidrodinámicas) puede definirse según la intensidad de su variación en el tiempo, debido al comportamiento de las fluctuaciones (Fig. 2-1) alrededor del valor promedio, en un intervalo de tiempo $2\Delta t$ ($t + \Delta t \rightarrow t - \Delta t$), como es un proceso estacionario se cumplen las siguientes relaciones: $\overline{\Phi} = \overline{\overline{\Phi}}$ ó $\overline{\Phi'} \approx 0$.

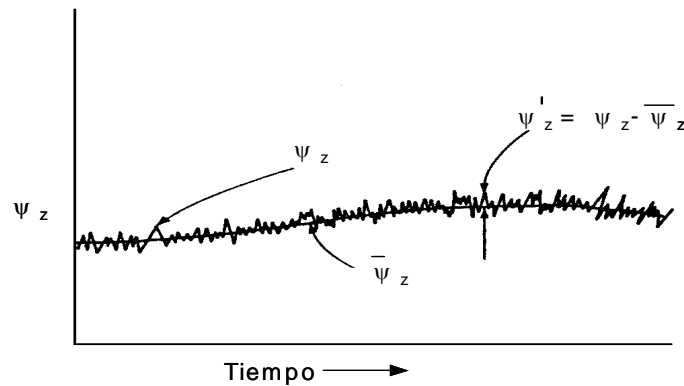


Fig. 4-2. Variable turbulenta

La turbulencia se considera isotrópica, por lo tanto el movimiento del fluido no tiene dirección preferencial. En su estructura los remolinos grandes (que poseen una gran energía cinética), promueven el transporte de las partículas y los pequeños (donde existe la mayor disipación viscosa) su acercamiento.

(b) Promedio espacial en un volumen promediante.

Este promedio es representativo cuando el volumen promediante contiene de 10- 100 partículas distribuidas homogéneamente. El tamaño del volumen promediante (v) coincide curiosamente con el de la microescala de la turbulencia ($\lambda_g = 0.15$ cm). Se calculó considerando una fracción volumen de sólidos de 0.1 y un tamaño de partícula de $70 \mu m$. En esta estructura jerárquica el modelo de dos fases (sólido- vapor) promediado en el tiempo es el que se promedia.

(c) Modelo pseudohomogéneo.

En el modelo pseudohomogéneo es posible considerar un sistema formado de cúmulos y una región diluida (que los contiene). La descripción de los procesos de transporte se centra al interior de los cúmulos de un tamaño característico (j) que forman parte de una distribución de tamaños establecida mediante una partición (ver sección 4.4.) que tiene la característica de representar la región diluida (partículas suspendidas) cuando el valor de $j=1$ donde los cúmulos se identifican por un tamaño característico siempre que contengan partículas que estén en el intervalo definido por $[n_j, n_{j+1})$. Este modelo toma como fundamento el modelo de dos fases donde las ecuaciones

correspondientes al vapor y sólido se caracterizan para las fases que forman los cúmulos de tamaño (j) y se suman.

(d) Promedio espacial en un volumen de región.

Para que el promedio de región sea válido debe contener de 10-100 cúmulos (en (v_R)) homogéneamente distribuidos (diámetro promedio de 10 mm (Hiroyuki, 1990)). Con este nivel de promediado se representan diferentes regiones, definidas por una cierta cantidad de cúmulos con un tamaño característico en cada una. Los procesos de transporte (masa, momentum y energía) que contribuyen al cambio temporal de los cúmulos de un tamaño característico están relacionados a los procesos agregación y fragmentación que ocurren entre ellos y otros de diferente tamaño que cambian su identidad y se describen otros procesos (erosión y engrosamiento) a nivel de partícula que son despreciables (no cambian la identidad del cúmulo), al que contribuyen la región diluida y los cúmulos.

(e) Integración en una sección del reactor.

Las ecuaciones promediadas en el volumen de región se expresan en términos de la densidad numérica de cúmulos definida como N_j , que considera la fracción volumen de cúmulos de tamaño (j), su densidad típica en la región y su masa promedio. Se integra el modelo en una sección del tubo elevador (volumen fijo) para obtener los balances de población que describan el cambio temporal en el número de cúmulos de tamaño (j) (influenciados por los procesos de agregación y fragmentación) asociado a un balance de población de momentum y de energía.

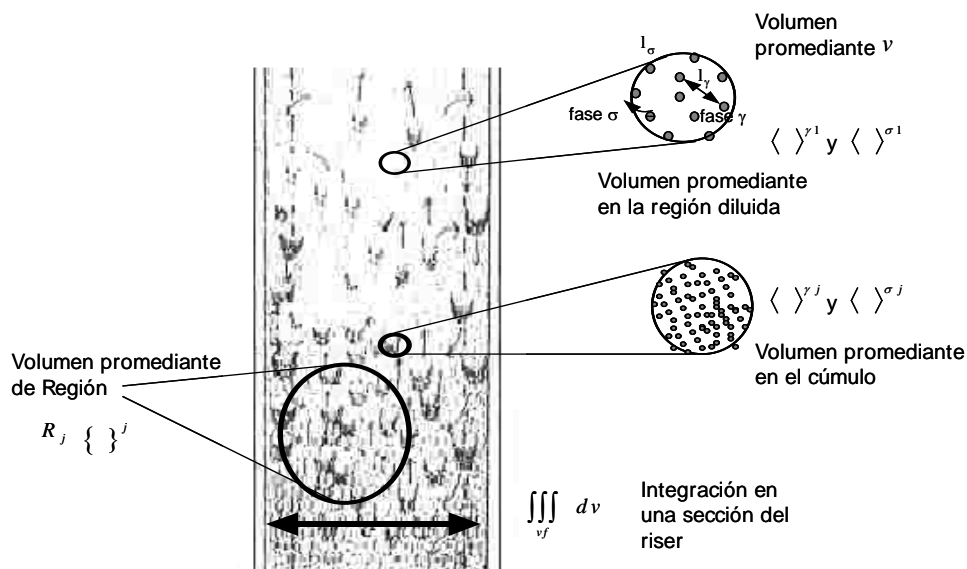


Fig 4-3. Promedios multiescala en el tubo elevador.

Las estructuras jerárquicas anteriores se desarrollan a detalle en las siguientes secciones.

4.2. Fundamentos del promedio temporal.

El promedio temporal contiene las consideraciones más sencillas y fundamentales que se establecen a través de las ecuaciones locales de masa, momentum y energía para la fase vapor (γ) y sólido (σ) una vez que han sido promediadas. Los fundamentos de este promediado se describen enseguida para después analizar las características del sistema local.

El desarrollo de la fluidización rápida debido a la elevada velocidad del vapor y el régimen de flujo en que se encuentran las partículas causan inercia colectiva que generan un incremento en las colisiones entre ellas cuando el inverso de la viscosidad cinemática es grande y las partículas son pequeñas ($St = 99$, Tabla 1-5) que indica la presencia de fluctuaciones turbulentas en la velocidad de las partículas.

$$St = \frac{\rho_p \Phi_p^2 v_t}{18\mu} \quad (4-2)$$

La turbulencia puede ser descrita considerando ciertas características, algunas de las definiciones más importantes se presentan a continuación (*Valencia, 2001*):

(i) Irregularidad. Característica de la irregularidad o aleatoriedad.

(ii) Difusividad. Difusividad de la turbulencia que causa un mezclado rápido e incrementa las tasas de transferencia de masa, momentum y energía.

(iii) Números de Reynolds grandes. Los flujos turbulentos siempre ocurren a números de Reynolds altos. La turbulencia surge como una inestabilidad de flujos laminares si el número de Reynolds es muy grande.

(iv) Fluctuaciones de vorticidad. La turbulencia es rotacional y tridimensional. Está caracterizada por altos niveles de fluctuaciones en la vorticidad, que juega un papel esencial en la descripción de flujos turbulentos.

(vi) Disipación. Los flujos son siempre disipativos, los esfuerzos de corte viscosos desarrollan trabajo de deformación que incrementa la energía interna del fluido a expensas de energía cinética de la turbulencia, que necesita de un continuo suministro de energía para recuperar estas pérdidas viscosas.

En la estructura turbulenta (isotrópica) tenemos remolinos pertenecientes a la microescala y la macroescala que guardan relación a través de la escala integral (Fig. 4-4). La escala integral se define como el primer momento de $g(\vec{r})$

$$L_f = \int_0^{\infty} g(\vec{r}) d\vec{r} \quad (4-3)$$

L_f representa el tamaño del remolino mas grande presente en el flujo. El remolino ó " eddy " se asemeja a una estructura en espiral (cónica) que dependiendo de su tamaño puede contener otras semejantes a el con diferentes niveles de energía; los de estructura mayor (remolinos grandes) pueden promover el transporte de las partículas debido a su gran energía cinética y los menores (generan mayor disipación viscosa) facilitan su acercamiento.

La medida de los remolinos más pequeños es obtenida por la expansión en series de Taylor alrededor de $g(\vec{r})$ (covarianza transversa), lo cual se observa por la intercepción de (r) en la parábola oscilante de $g(\vec{r})$ desde su origen (ver Fig 4-4). Para el subrango inercial el número de Reynolds tiene que ser mucho mayor que uno.

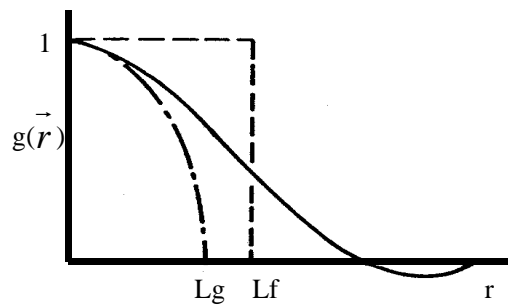


Fig.4-4. Escala integral.

Conocer la función $g(\vec{r})$ no es fácil ya que el principal valor que se requiere es el producto de las fluctuaciones de velocidad promedio (turbulencia isotrópica). Otra opción para determinar el valor de la microescala y la macroescala la propone Landalh (1996) a través de las ecs. (4-4)–(4-8) para un flujo turbulento con características semejantes al vapor (Tabla 4-2) que forma parte del sistema de dos fases (vapor, sólido).

Tabla 4-2. Datos típicos del vapor a 573°K

P = 10 ² KPa	
Viscosidad cinemática (ν)	4.87x10 ⁻² cm ² /s
Densidad del vapor (ρ_v)	3.87x10 ⁻⁶ kg / cm ³
Velocidad típica del vapor (\bar{u}) en el reactor FCC	1000 cm / s

Primero se calcula el valor de la variable (m) con la ec. (4-4).

$$m = \frac{10\nu}{u} \quad (4-4)$$

pero debido a la dependencia que guardan la microescala con la macroescala (ec. 4-5) se propone que es conocida (L_g)

$$L_g = \sqrt{mL_f} \quad (4-5)$$

$$N Re_{\lambda_g} = \frac{\bar{u}L_g}{\nu} \quad (4-6)$$

para determinar su número de Reynolds con un valor de (A)=1.1 de un rango de (0.8–1.4)

$$N Re_{\lambda_f} = \left(\frac{A}{10}\right) \left(N Re_{\lambda_g}\right)^2 \quad (4-7)$$

Finalmente encontramos el tamaño de los remolinos mas grandes mediante la ec. (4-8)

$$L_f = \frac{\nu N Re_{\lambda_f}}{\bar{u}} \quad (4-8)$$

que si coincide con el obtenido por la ec. (4-5) se concluyen los cálculos, de lo contrario, se propone otro valor para la microescala.

Considerando el procedimiento anterior se obtuvo un tamaño para la microescala de 0.15 cm y para la macroescala de 50 cm (equivalente al radio típico del tubo elevador). Con esta información podemos inferir el tamaño del intervalo $2\Delta t$ cuando el tiempo característico de la microescala es de 0.18 s (*Sangay, 1994*) con el que obtengamos un valor para la macroescala (6s) en forma aproximada. Este valor es del mismo orden de magnitud del tiempo requerido para realizar el proceso en el reactor FCC, por consiguiente el valor del intervalo $2\Delta t$ utilizado para promediar las ecuaciones hidrodinámicas locales es al menos el de la macroescala.

Las características del sistema local representado por las ecuaciones de transporte (masa, momentum y energía) se presentan a continuación:

Las fases vapor y sólido a nivel local se caracterizan por la ecuación de conservación de masa (4-9) para las dos fases.

$$\nabla \cdot \underline{\underline{u}}_k = 0 \quad (4-9)$$

La transferencia de masa de vapor en la interfase con el sólido, y el deposito de coque sobre su superficie no tienen lugar porque el sólido es no poroso (rígido y esférico) y el gasóleo evaporado que reacciona en la superficie del catalizador no forma parte del sistema.

Los procesos de transporte entre las fases ocurren a través de la interfase que es una superficie singular carente de movimiento y capacidad de acumular masa, momentum ó energía. Descripción que se representa por las condiciones de salto (Tabla 4-3).

Los esfuerzos debido a la presión y los esfuerzos viscosos caracterizan al vapor como un fluido newtoniano (ec. 4-10).

$$\underline{\underline{T}}_\gamma = -p_\gamma \underline{\underline{I}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_\gamma \quad (4-10)$$

donde los esfuerzos viscosos tienen la relación

$$\underline{\underline{\tau}}_{\gamma} = \mu \left[\nabla \vec{u}_{\gamma} + (\nabla \vec{u}_{\gamma})^T \right] \quad (4-11)$$

A través de la interfase vapor-sólido los esfuerzos ejercidos por el vapor son equivalentes a los que recibe el sólido en su superficie debido a las fuerzas de presión y viscosas.

$$\rho_{\gamma} \vec{u}_{\gamma} (\vec{u}_{\gamma} - \vec{w}) \cdot \underline{\underline{n}}_{\gamma\sigma} + \underline{\underline{n}}_{\gamma\sigma} \cdot \underline{\underline{T}}_{\gamma} = \underline{\underline{n}}_{\sigma\gamma} \cdot \underline{\underline{T}}_{\sigma} + \rho_{\sigma} \vec{u}_{\sigma} (\vec{u}_{\sigma} - \vec{w}) \cdot \underline{\underline{n}}_{\sigma\gamma} \quad (4-12)$$

por la condición de salto de masa (Tabla 4-3) no hay transferencia interfacial, lo que simplifica la condición de salto de momentum en

$$\underline{\underline{n}}_{\gamma\sigma} \cdot \underline{\underline{T}}_{\gamma} = \underline{\underline{n}}_{\sigma\gamma} \cdot \underline{\underline{T}}_{\sigma} \quad (4-13)$$

ó

$$-p_{\gamma} \underline{\underline{n}}_{\gamma\sigma} + \underline{\underline{n}}_{\gamma\sigma} \cdot \underline{\underline{\tau}}_{\gamma} = \underline{\underline{n}}_{\sigma\gamma} \cdot \underline{\underline{T}}_{\sigma} \quad (4-14)$$

Los procesos de transporte de energía térmica para el vapor se representan por la ec. (4-15)

$$\frac{De_{\gamma}}{Dt} \rho_{\gamma} = -\nabla \cdot \vec{q}_{\gamma} + \nabla \vec{u}_{\gamma} : \underline{\underline{T}}_{\gamma} \quad (4-15)$$

ó

$$\frac{De_{\gamma}}{Dt} \rho_{\gamma} = -\nabla \cdot \vec{q}_{\gamma} + \nabla \vec{u}_{\gamma} : \underline{\underline{\tau}}_{\gamma} + p_{\gamma} \nabla \cdot \vec{u}_{\gamma} \quad (4-16)$$

en donde (e_r) es la energía interna en términos de la presión, entalpía y densidad de la fase

$$e_{\gamma} = h_{\gamma} - \frac{p_{\gamma}}{\rho_{\gamma}} \quad (4-17)$$

La ec. (4-16) se reduce en la ec. (4-18) porque el término de velocidad de conversión de energía ($\nabla \vec{u}_{\gamma} : \underline{\underline{\tau}}_{\gamma}$) para un fluido de baja viscosidad (con respecto aquellos que generan una importante energía por disipación) no contribuye en forma apreciable al cambio de energía y la velocidad de trabajo ($p_{\gamma} \nabla \cdot \vec{u}_{\gamma}$) producido por presión es cero cuando se aplica la condición de incompresibilidad.

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\gamma} \rho_{\gamma} + \nabla \cdot (\rho_{\gamma} h_{\gamma} \vec{u}_{\gamma}) = -\nabla \cdot \vec{q}_{\gamma} \quad (4-18)$$

La conducción de calor sigue la ley de Fourier

$$\overline{q_\gamma} = -K \nabla T_\gamma \quad (4-19)$$

Para el sólido la ecuación de balance de energía es idéntica a la del vapor (ec. 4-18) y (ec. 4-19) cuando se cambia el subíndice (γ) por (σ) porque a consecuencia de su rigidez la pérdida de trabajo irreversible de trabajo ($\nabla \overline{u_\sigma} : \underline{\underline{T_\sigma}}$) no tiene lugar. El transporte de calor por conducción en el sólido es finito.

El transporte de energía interfacial generalmente se caracteriza por las contribuciones del flux convectivo de energía, transporte por conducción y el flujo de trabajo irreversible de la fase vapor hacia la fase sólido ec. (4-20) en donde los flux correspondientes son de igual magnitud pero de sentido contrario.

$$\rho_\gamma h_\gamma (\overline{u_\gamma} - \overline{w}) \cdot \overline{n_{\gamma\sigma}} + \overline{n_{\gamma\sigma}} \cdot \overline{q_\gamma} + \overline{n_{\gamma\sigma}} \cdot \underline{\underline{T_\gamma}} \cdot \overline{u_\gamma} = \rho_\sigma h_\sigma (\overline{u_\sigma} - \overline{w}) \cdot \overline{n_{\sigma\gamma}} + \overline{n_{\sigma\gamma}} \cdot \overline{q_\sigma} + \overline{n_{\sigma\gamma}} \cdot \underline{\underline{T_\sigma}} \cdot \overline{u_\sigma} \quad (4-20)$$

Si consideramos que el fluido es de una viscosidad baja y el sólido es rígido los términos de disipación correspondientes pueden eliminarse. El flux convectivo de energía también se elimina por la relación $(\overline{u_k} - \overline{w}) \cdot \overline{n_i} = 0$. La ec. (4-20) se reduce en

$$\overline{n_{\gamma\sigma}} \cdot \overline{q_\gamma} = \overline{n_{\sigma\gamma}} \cdot \overline{q_\sigma} \quad (4-21)$$

La ec. (4-21) representa el flux de energía por conducción en la interfase vapor-sólido donde la energía que sale del sólido es equivalente a la energía que le llega del vapor (condición de salto de energía).

El conjunto de ecuaciones hidrodinámicas (locales) descritas con anterioridad para las fases vapor y sólido se representan mediante la ecuación general (4-22) (Tabla 4-3).

$$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi_{ik} \varphi_k = \Gamma_k \quad (4-22)$$

Tabla 4-3. Ecuaciones locales de balance y conservación para la fase vapor (γ) y sólido (σ).

Ecuaciones Puntuales	i	k	Φ_{ik}	φ_k	Γ_k	$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi_{ik} \varphi_k = \Gamma_k$
Conservación de masa	1	γ, σ	ρ_k	\vec{u}_k	0	$\nabla \cdot (\vec{u}_k) = 0$
Balance de momentum	2	γ, σ	$\rho_k \vec{u}_k$	\vec{u}_k	$\nabla \cdot \underline{T}_k + \rho_k \vec{g}$	$\frac{\partial \rho_k \vec{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \vec{u}_k \vec{u}_k) = \nabla \cdot \underline{T}_k + \rho_k \vec{g}$
Balance de energía	3	γ, σ	$\rho_k h_k$	\vec{u}_k	$-\nabla \cdot \vec{q}_k$	$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k \vec{u}_k) = -\nabla \cdot \vec{q}_k$
Condición de salto de masa		γ, σ				$\rho_\gamma (\vec{u}_\gamma - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\gamma\sigma} = \rho_\sigma (\vec{u}_\sigma - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\sigma\gamma}$
Condición de salto de momentum		γ, σ				$-p_\gamma \vec{n}_{\gamma\sigma} + \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \underline{\tau}_\gamma = \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \underline{T}_\sigma$
Condición de salto de energía		γ, σ				$\vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \vec{q}_\gamma = \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \vec{q}_\sigma$

Cuando (i) toma el valor de 1, 2 ó 3 en la ec. general (4-22) representa las ecs. de balance de masa, momentum y energía correspondientes a cada fase cuando se cambia (k) por (γ) ó (σ).

4.2.1 Metodología para el promediado temporal

Las ecuaciones de la Tabla (4-3) se promedian en un intervalo de tiempo $2\Delta t$ de aproximadamente 6s que es de un orden de magnitud semejante al tiempo en que se efectúa el proceso de producción de gasolina en el reactor FCC.

En general el promedio temporal de alguna función $\bar{\Phi}$ se define como :

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \Phi dt \quad (4-23)$$

donde se sustituye en la variable local la relación

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \quad (4-24)$$

para obtener

$$\bar{\Phi} = \bar{\bar{\Phi}} + \bar{\Phi'} \quad (4-25)$$

cuando el proceso es estacionario trae como consecuencia que el valor medio de la variable Φ sea constante lo que matemáticamente se expresa como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \left[\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{x-\tau}^{x+\tau} \Phi dx d\tau \right] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \Phi dt \quad (4-26)$$

donde se asume que $\overline{\Phi} \approx \overline{\overline{\Phi}}$ o que

$$\overline{\Phi'} \approx 0 \quad (4-27)$$

La metodología general se aplicará a las ecuaciones (locales) de transporte representadas en la ecuación general (ec. 4-22).

$$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi_{ik} \varphi_k = \Gamma_k \quad (4-28)$$

Cuando la relación de la ec. (4-24) se sustituye en la ec. (4-28) toma la forma:

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\Phi'}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\Phi_{ik} \varphi_k} + \nabla \cdot \overline{\Phi'_{ik} \varphi_k} + \nabla \cdot \overline{\Phi_{ik} \varphi'_k} + \nabla \cdot \overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k} = \overline{\Gamma_k} + \overline{\Gamma'_k} \quad (4-29)$$

El promedio temporal (ec. 4-28) es aplicado a la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \overline{\Phi}_{ik}}{\partial t} dt + \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \overline{\Phi'}_{ik}}{\partial t} dt + \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \nabla \cdot (\overline{\Phi_{ik} \varphi_k}) dt + \\ & + \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \nabla \cdot (\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}) dt = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \overline{\Gamma_k} dt \end{aligned} \quad (4-30)$$

considerando la relación de la ec. (4-27) la ecuación anterior se reduce en

$$\frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\overline{\Phi'}}_{ik}}{\partial t} + \overline{\nabla \cdot (\overline{\Phi_{ik} \varphi_k})} + \overline{\nabla \cdot (\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k})} = \overline{\overline{\Gamma_k}} \quad (4-31)$$

donde

$$\frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi_{ik} \varphi_k}}) + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}}) = \overline{\overline{\Gamma_k}} \quad (4-32)$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi_{ik} \varphi_k}}) + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}}) = \overline{\overline{\Gamma_k}} \quad (4-33)$$

Debido a la suposición de la ec. (4-27), la ec. (4-25) simplifica la anterior en

$$\frac{\partial \overline{\overline{\Phi}}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi_{ik} \varphi_k}}) + \nabla \cdot (\overline{\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}}) = \overline{\overline{\Gamma_k}} \quad (4-34)$$

rearrreglando los términos obtenemos la ecuación general promediada en el tiempo que representa las ecuaciones de transporte de la Tabla (4-4).

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\Phi}_{ik} \overline{\varphi}_k) = -\nabla \cdot (\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}) + \overline{\Gamma}_k \quad (4-35)$$

Tabla 4-4. Ecuaciones promediadas en el tiempo de conservación y balance de la fase vapor (γ) y sólido (σ).

Ecuaciones promediadas	i	k	$\overline{\varphi}_k$	$\overline{\Phi}_{ik}$	$-\nabla \cdot (\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k})$	$\overline{\Gamma}_k$	$\frac{\partial \overline{\Phi}_{ik}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\Phi}_{ik} \overline{\varphi}_k) = -\nabla \cdot (\overline{\Phi'_{ik} \varphi'_k}) + \overline{\Gamma}_k$
Conservación de masa	1	γ, σ	ρ_k	\overline{u}_k	0	0	$\nabla \cdot \overline{u}_k = 0$
Balance de momentum	2	γ, σ	\overline{u}_k	$\rho_k \overline{u}_k$	$-\rho_k \nabla \cdot (\overline{u'_k u'_k})$	$\nabla \cdot \overline{T}_k + \rho_k \overline{g}$	$\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \overline{u}_k \overline{u}_k) = \nabla \cdot \overline{T}_k + \rho_k \overline{g} - \rho_k \nabla \cdot (\overline{u'_k u'_k})$
Balance de energía	3	γ, σ	\overline{u}_k	$\rho_k \overline{h}_k$	$-\rho_k \nabla \cdot (\overline{h'_k u'_k})$	$-\nabla \cdot \overline{q}_k$	$\frac{\partial \overline{h}_k}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \overline{h}_k \overline{u}_k) = -\nabla \cdot \overline{q}_k - \rho_k \nabla \cdot (\overline{h'_k u'_k})$
Condición de salto de masa		γ, σ					$\rho_\gamma (\overline{u}_\gamma - \overline{w}) \cdot \overline{n}_{\gamma\sigma} = \rho_\sigma (\overline{u}_\sigma - \overline{w}) \cdot \overline{n}_{\sigma\gamma}$
Condición de salto de momentum		γ, σ					$-\overline{p}_\gamma \overline{n}_{\gamma\sigma} + \overline{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\tau}_\gamma = \overline{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{T}_\sigma$
Condición de salto de energía		γ, σ					$\overline{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{q}_\gamma = \overline{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{q}_\sigma$

Cuando (i) toma el valor de 1, 2 ó 3 la ec. general (4-28) representa las ecs. de balance de masa, momentum y energía promediadas en el tiempo correspondientes a cada fase cuando se cambia (k) por (γ) ó (σ).

4.2.2. Descripción de las ecuaciones de transporte promediadas en el tiempo.

a) Ecuación de conservación de masa para la fase (K)

La ecuación de conservación de masa promediada en el tiempo para la fase sólido y vapor es aún local en el espacio. El flujo turbulento de masa interfacial se relaciona a través de la condición de salto de la Tabla (4-4).

b) Ecuación de balance de momentum para la fase (k)

La estructura del balance de momentum turbulento para la fase vapor y sólida es la misma, pero describe cosas diferentes. En el vapor el cambio de momentum promediado se relaciona con la suma de fuerzas volumétricas, movimiento convectivo turbulento y las fuerzas superficiales, que

hacen que el flujo turbulento sea originado por inestabilidades en el flujo laminar (cuando aumenta el Re), debido a la interacción de los términos viscosos y los inerciales no lineales (esfuerzos de Reynolds) que representan la contribución de la turbulencia ejercida por el vapor al sistema.

$$\underline{\underline{\overline{T}_\gamma}} = -\nabla \overline{p}_\gamma + \mu \nabla^2 \underline{\underline{\overline{u}_\gamma}} \quad (4-36)$$

Los esfuerzos en la interfase corresponden a la ec. (4-14) promediada en el tiempo por la ec. (4-23) donde los esfuerzos ejercidos en el sólido se deben a las fuerzas de presión y viscosas que provienen del vapor (Tabla 4-4).

El cambio de momentum promediado del sólido también contiene un término no inercial además del flujo convectivo y los esfuerzos debido al movimiento que le imparte el vapor al sólido pues a pesar del número de Stokes=99, el número de Reynolds (Nre) de las partículas de 1.5 no deja duda que el flujo alrededor de ella es laminar; las fuerzas volumétricas permanecen constantes en el espacio y en el tiempo.

c) Balance de energía térmica para la fase (k)

La entalpía térmica promedio cambia en el tiempo para la fase vapor (γ) y sólida (σ) debido a términos semejantes para: el flujo de calor por convección, del que se deriva la dispersión de energía en cada fase y el transporte de calor por conducción.

El transporte de calor interfacial que relaciona ambas fases se describe con la ec. (4-21) cuando la condición de salto es promediada en el tiempo (Tabla 4-4).

En resumen las características más importantes del sistema promediando en el tiempo se presentan a continuación: las ecuaciones de la fase sólido y vapor son validas en un intervalo de tiempo $2\Delta t$ (6s) semejante al tiempo característico de operación del proceso (FCC) . Con este promediado las ecuaciones de momentum para ambas fases tienen un nuevo término relacionado con los esfuerzos de Reynolds (locales) que representan la turbulencia del sistema donde el vapor es el único que la genera. El vapor imparte el movimiento al sólido que genera un flujo dispersivo de energía al que también contribuye el vapor. La estructura del balance de masa es la única que no se modifica (excepción del significado de la velocidad que corresponde a una promediada en el tiempo) y mantiene la incompresibilidad en ambas fases.

4.3. Fundamentos del promedio espacial.

El promedio espacial comprende un promedio a nivel de fases (volumen promediante) y uno de región (volumen de región). El promedio a nivel de fases es fundamental para el desarrollo del modelo pseudohomogéneo, que representa los procesos de transporte de masa, momentum y energía al interior de los cúmulos (de un tamaño característico) mientras que el promedio de región

extiende la posibilidad de describir estos procesos considerando la interacción de estos cúmulos con otros de diferente ó incluso con los de igual tamaño.

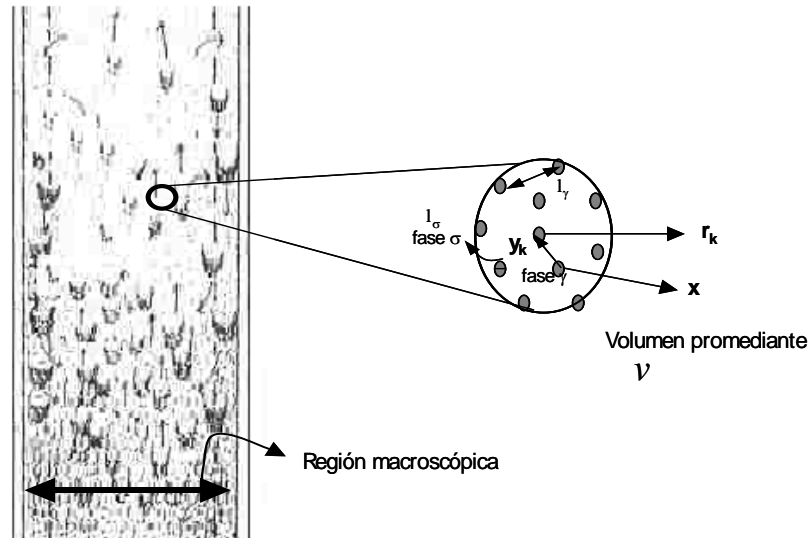


Fig. 4-5. Volumen promediante para el sistema $\gamma - \sigma$

Los fundamentos del promedio espacial comprenden los aspectos siguientes: (i) Definición de volumen promediante, fracción volumen, promedio espacial en el volumen, promedio intrínseco de fase y área interfacial; (ii) Teorema del promediado espacial; (iii) Descomposición espacial; (iv) Contracciones de escala de longitud; (v) Estimación de orden de magnitud y (vi) Cerradura.

(i) Comenzaremos con la definición del volumen promediante

$$V = V_\gamma + V_\sigma \quad (4-37)$$

que también puede expresarse como por la ec. (4-38)

$$V = \frac{1}{V} \int_{V_\gamma(\bar{x})} dV + \frac{1}{V} \int_{V_\sigma(\bar{x})} dV \quad (4-38)$$

y esta formado por el volumen de la fase vapor y sólido que es distinto al volumen geométrico (Fig. 4-5).

La fracción volumen para la fase vapor y sólido en este volumen se representa por la ec.(4-39) cuando se sustituye (K) por (γ) ó (σ).

$$\varepsilon_k = \frac{V_k(x)}{V} \quad (4-39)$$

que guardan la relación siguiente:

$$\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\sigma = 1 \quad (4-40)$$

y se utiliza para obtener el volumen de la fase (k)

$$v_k(x) = \varepsilon_k v \quad (4-41)$$

El operador de promediado que se aplica a las ecuaciones de la Tabla (4-4) se representa con la ec. (4-42):

$$\langle \Psi_k \rangle_{\bar{x}} = \frac{1}{v} \int_{v(\bar{x})} \Psi_k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} dV \quad (4-42)$$

El promedio de la variable $\langle \Psi_k \rangle_{\bar{x}}$ esta asociado al centroide del volumen promediante (Fig.4-5). Los promedios utilizados en esta metodología se representan en las ecs. (4-42)- (4-45).

En general el promedio superficial se escribe como:

$$\langle \Psi_k \rangle = \frac{1}{v} \int_{v_k} \Psi_k dV \quad (4-43)$$

la independencia de la variable promedio de fase $\langle \Psi_k \rangle$ da lugar a una nueva variable promedio (intrínseca) para la fase (k)

$$\langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} = \frac{1}{v_k(\bar{x})} \int_{v_k(\bar{x})} \Psi_k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} dV \quad (4-44)$$

la relación entre los dos promedios asociados al centroide (\bar{x}) puede expresarse con la ec. (4-45).

$$\langle \Psi_k \rangle = \varepsilon_k \langle \Psi_k \rangle^k \quad (4-45)$$

(ii) Teorema del Promediado Espacial.

El teorema del promedio espacial para el sistema ($\gamma - \sigma$) representa una versión tridimensional de la regla de Leibnitz (para intercambiar diferenciación e integración) que puede extenderse a sistemas de muchas fases.

$$\langle \nabla \Psi_k \rangle = \nabla \langle \Psi_k \rangle + \frac{1}{v} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \Psi_k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_i} dA \quad (4-46)$$

En el cual $(A_{i(\bar{x})})$ representa el área de la interfase vapor-sólido (o viceversa) contenida en el volumen promediante (v). Este teorema aplicado para la divergencia de un vector tiene la forma siguiente:

$$\langle \nabla \cdot \bar{\Psi}_k \rangle = \nabla \cdot \langle \bar{\Psi}_k \rangle + \frac{1}{v} \int_{A_i} \vec{n}_i \cdot \bar{\Psi}_k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} dA \quad (4-47)$$

(iii) Descomposición espacial

La descomposición espacial se describe mediante una descomposición de las escalas del valor medio respecto a las desviaciones de $\langle \Psi_k \rangle$ en la que $\tilde{\Psi}_k$ es referida como la desviación espacial.

$$\Psi_k = \langle \Psi_k \rangle^k + \tilde{\Psi}_k \quad (4-48)$$

(iv) Contracciones de Escala de Longitud.

La ecuación de transporte no local depende de la variable $\langle \Psi_k \rangle^k$ evaluada en cada punto a otra que lo hace en un centroide (\bar{x}) . El análisis del fenómeno no local es extremadamente complejo, por lo que la teoría local provee ciertas contracciones de escala de longitud que son satisfechas al representar como series de Taylor el término $\langle \Psi_k \rangle^k$.

Así para eliminar la variable $\langle \Psi_k \rangle^k$ desde la integral de área en la ec. (4-49) se usa una expansión en series de Taylor alrededor del centroide del volumen promediante,

$$\frac{1}{\nu} \int_{A_i} \vec{n}_i \langle \Psi_k \rangle^k dA = \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x} + \vec{y}_k} dA \quad (4-49)$$

$$\langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x} + \vec{y}_k} = \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \vec{y}_k \cdot \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \frac{1}{2} \vec{y}_k \vec{y}_k : \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \dots \quad (4-50)$$

que se sustituye en la ec. (4-49) para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_{A_i} \vec{n}_i \langle \Psi_k \rangle^k dA &= \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \vec{y}_k \cdot \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} dA + \\ &+ \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \frac{1}{2} \vec{y}_k \vec{y}_k : \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} dA + \dots \end{aligned} \quad (4-51)$$

Rearreglando la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_{A_i} \vec{n}_i \langle \Psi_k \rangle^k dA &= \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i dA \right\} \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \vec{y}_k dA \right\} \cdot \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \frac{1}{2} \vec{y}_k \vec{y}_k dA \right\} : \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}} + \dots \end{aligned} \quad (4-52)$$

Los términos que representan una serie de integrales geométricas donde se generan los teoremas geométricos son:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i dA = -\nabla \langle 1 \rangle \quad (4-53)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \vec{y}_k dA = -\nabla \langle y_k \rangle \quad (4-54)$$

$$\frac{1}{V} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i \frac{1}{2} \vec{y}_k \vec{y}_k dA = -\nabla \langle \vec{y}_k \vec{y}_k \rangle \quad (4-55)$$

en los que $\langle 1 \rangle$, $\langle \vec{y}_k \rangle$, $\langle \vec{y}_k \vec{y}_k \rangle$, etc. son los momentos espaciales de orden cero, primero, segundo, para la fase (k) contenidos en el volumen promediante. De esta manera la ec. (4-56)

$$\langle 1 \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_k} 1 dV = \varepsilon_k \quad (4-56)$$

puede aplicarse a la ec. (4-53) para obtener la relación siguiente:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i(\bar{x})} \vec{n}_i dA = -\nabla \varepsilon_k = -\nabla \langle 1 \rangle \quad (4-57)$$

(v) Estimación de orden de magnitud

La estimación del orden de magnitud para las ecuaciones de transporte (de masa, momentum y energía) promedio se hace mediante el análisis y la estimación del orden en los términos correspondientes a la serie de Taylor. En el Apéndice B se ejemplifica para la ecuación de balance de masa de la fase vapor (γ). Otro ejemplo se presenta a través de la estimación de los términos $\nabla \langle \Psi_k \rangle^k$ y $\nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k$.

La estimación del gradiente de la variable es:

$$\nabla \langle \Psi_k \rangle^k = \varrho \left(\Delta \langle \Psi_k \rangle^k / L_c \right) \quad (4-58)$$

donde $\Delta \langle \Psi_k \rangle^k$ se refiere a el cambio de la variable (promedio) que ocurre sobre una longitud característica (L_c). La estimación de la segunda derivada toma la forma

$$\nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k = \varrho \left(\Delta \left(\nabla \langle \Psi_k \rangle^k \right) / L_{c1} L_c \right) \quad (4-59)$$

en el cual $\Delta \left(\nabla \langle \Psi_k \rangle^k \right)$ representa el cambio del gradiente (de la variable promedio) en una distancia producto de $(L_{c1} L_c)$ donde ambas longitudes son función del tiempo para un proceso transitorio y pueden ser (significativamente) diferentes de la escala de longitud (L) dada por el reactor. Si L_2 es la longitud característica de este producto, cuenta con ambos cambios del $\nabla \langle \Psi_k \rangle^k$ y la distancia sobre la cual toman lugar. Cuando este gradiente es una constante L_2 es infinita.

En las ecuaciones siguientes el orden de magnitud se estima con las siguientes relaciones:

$$\langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle = \varrho \left(\varepsilon_k r_o^2 \right) \quad (4-60)$$

$$\nabla \langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle = \varrho \left(\Delta \varepsilon_k r_o^2 / L_\varepsilon \right) \quad (4-61)$$

para obtener junto con la ec. (4-58) el gradiente de la fracción volumen $\nabla \varepsilon_k = \varrho \left(\Delta \varepsilon_k / L_\varepsilon \right)$ de la fase (k) en una longitud L_ε . Si tuviésemos un término en la ecuación de estudio que involucrara

$$\nabla \langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle : \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle^k = \varrho \left[\left(\frac{r_o^2}{L_\varepsilon L_2} \right) \Delta \varepsilon_k \nabla \langle \Psi_k \rangle^k \right] \quad (4-62)$$

puede encontrarse la contracción de escala satisfecha por la desigualdad:

$$r_o^2 \ll L_\varepsilon L_2 \quad (4-63)$$

donde L_ε y L_2 no son necesariamente iguales que la longitud de escala (L) ilustrada en la Fig. (4-5) (Whitaker, 1999).

Un tercer ejemplo es la Variable $\langle \Psi_k \rangle_i$ promediada en el área interfacial, donde el análisis de la descomposición del término $\langle \Psi_k \rangle_i$ es

$$\langle \Psi_k \rangle_i = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \left(\langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} + \tilde{\Psi}_k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} \right) dA \quad (4-64)$$

y transforma la ecuación en

$$\langle \Psi_k \rangle_i = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} dA \quad (4-65)$$

donde se sustituye la expansión en series de Taylor alrededor del centroide del volumen promediante modificando $\langle \Psi_k \rangle^k \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k}$ en :

$$\langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} = \langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}} + \langle \bar{y}_k \rangle_i \cdot \nabla \langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}} + \langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle_i \cdot \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}} + \mathcal{O}(|\bar{y}_k|^3) \quad (4-66)$$

el valor de $\langle \bar{y}_k \rangle_i \ll r_o$ y con base en la ecuación (4-54) corresponde a escribir

$$\langle \bar{y}_k \rangle_i \cdot \nabla \langle \Psi_k \rangle_i \ll \Delta \langle \Psi_k \rangle^k (r_o / L_c) \ll \ll \langle \Psi_k \rangle^k \quad (4-67)$$

cuando $r_o \ll L_c$, permite simplificar la ec. (4-62). De manera similar tenemos el mismo tipo de argumento para el factor

$$\langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle = \mathcal{O}(\varepsilon_k r_o^2) \quad (4-68)$$

en el que se obtiene el orden para

$$\langle \bar{y}_k \bar{y}_k \rangle_i = \mathcal{O}(r_o^2) \quad (4-69)$$

que resulta, de la estimación del término para la ec. (4-59)

$$\langle \bar{y}_k \rangle_i : \nabla \nabla \langle \Psi_k \rangle_i = \mathcal{O} \left[\left(\frac{r_o}{L_{c1} L_c} \right) \Delta \langle \Psi_k \rangle^k \right] \quad (4-70)$$

Con fundamento en esta estimación y la restricción de la ec. (4-67), la ec. (4-66) puede expresarse como

$$\langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}+\bar{y}_k} = \langle \Psi_k \rangle_i \Big|_{\bar{x}} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{r_o^2}{L_{c1} L_c} \right) \Delta \langle \bar{y}_k \rangle_i \right] + \dots \quad (4-71)$$

con las siguientes contracciones de escalas

$$r_o^2 \ll L_c \quad \text{y} \quad r_o^2 \ll L_{c1} L_c \quad (4-72)$$

que bajo estas circunstancias la ecuación de transporte promediada solamente contiene términos relacionados con $\tilde{\Psi}_k$.

(vi) Cerradura

La cerradura tradicional utilizada en el promedio espacial de fase se desarrolla para las ecuaciones de transporte en términos de las desviaciones, la cual se obtiene por la resta de la ecuación local a la ecuación promedio (en términos intrínsecos). Para simplificarla se realiza un análisis de orden de magnitud que para su solución requiere plantear la existencia de una celda que sea capaz de representar una parte de la región promediante, para que la condición de frontera del (A_{ke}) pueda sustituirse por la condición periódica $\vec{n}_i(\vec{r} + \vec{l}_i) = \vec{n}_i(\vec{r})$ $i=1,2,3$. y proponer la solución (para las desviaciones) de los términos fuente de la ecuación.

Cuando de esta propuesta se encuentra la solución para las desviaciones, se sustituye en la ecuación promediada donde se genera los coeficientes de transporte efectivos, que son parámetros del modelo que permiten un análisis complementario de los fenómenos que ocurren en la región macroscópica promediante.

La principal desventaja para la aplicación de la metodología anterior, se debe a la gran cantidad de términos fuente generados no solo por una ecuación sino por el conjunto de ecuaciones de transporte, lo cual hace prácticamente imposible crear cerraduras para encontrar solución a los diversos tipos de desviaciones dentro de la celda unitaria.

Esta es la razón por la que se buscan vías alternas en las que se pueda obtener modelos a partir de las ecuaciones promediadas (de la forma intrínseca) por lo que se proponen modelos de comportamiento con fundamentos distintos que serán discutidos en el Capítulo VI. Bajo este contexto, los procesos de transporte para la fase vapor y sólido se realizan en un volumen promediante (esférico) de un tamaño aproximado de 0.15 cm que contiene alrededor de 10-100 partículas homogéneamente distribuidas cuya fracción volumen (a semejanza del vapor) cambia con el tiempo debido a que están inmersos en remolinos turbulentos que los mantiene en movimiento.

En la siguiente sección se describe el modelo de dos fases para el vapor y el sólido válido al interior del volumen promediante cuando se aplican los fundamentos del promedio espacial donde las ecuaciones ya han sido sometidas al análisis y estimación de orden de magnitud, que por lo extenso de su desarrollo, se ejemplifica mediante la ecuación de movimiento de la fase vapor en el Apéndice B.

4.3.1. Descripción de las ecuaciones promediadas en el volumen promediante (Modelo de dos fases).

(i) Balance de masa promediado en el espacio

La ecuación de conservación para la fase (K) (vapor, ó sólido) promediada en el tiempo

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} = 0 \quad (4-73)$$

se promedia en el espacio con el operador de la ec. (4-41)

$$\left\langle \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle = 0 \quad (4-74)$$

aplicando la ec. (4-46) para la divergencia de un vector tenemos

$$\left\langle \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle = \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \overline{\mathbf{n}_i} \cdot \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} dA \quad (4-75)$$

la relación de la ec. (4-45) modifica la ecuación anterior en

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_k \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle^k \right) = -\frac{1}{V} \int_{A_i} \overline{\mathbf{n}_i} \cdot \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} dA \quad (4-76)$$

Utilizando el teorema

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \frac{1}{V} \int_{A_i} \overline{\mathbf{n}_i} \cdot \overline{\mathbf{w}} dA \quad (4-77)$$

podemos sumarle la ec. (4-76) para obtener

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon_k \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle^k \right) = -\frac{1}{V} \int_{A_i} \overline{\mathbf{n}_i} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{u}_k}} - \overline{\mathbf{w}} \right) dA \quad (4-78)$$

como no hay transporte interfacial de masa la ecuación se reduce a

$$\underbrace{\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t}}_{\text{cambio temporal de la fracc.vol.de la fase (k)}} + \nabla \cdot \underbrace{\left(\varepsilon_k \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_k}} \right\rangle^k \right)}_{\text{flujo convectivo de la fase (k)}} = 0 \quad (4-79)$$

un balance de masa valido para la fase vapor y sólido. En el caso de que existiera el transporte interfacial de masa sería descrito por la condición de salto siguiente:

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \rho_\gamma (\overline{\vec{u}}_\gamma - \vec{w}) dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \rho_\sigma (\overline{\vec{u}}_\sigma - \vec{w}) dA \quad (4-80)$$

Las ecuaciones de balance de momentum y energía para la fase vapor y sólido tienen distinta estructura, por esta razón se desarrollan por separado. La validez de estas ecuaciones se definen a través de las restricciones de escala de longitud obtenidas por un análisis similar a la Sección 4.3 (v).

Ecuaciones promediadas en el espacio para la fase vapor.

ii) Balance de momentum promediado en el espacio.

El cambio de momentum promedio ejercido por la fase vapor en el volumen promediado se debe a fuerzas volumétricas y superficiales relacionadas con: el flujo convectivo, esfuerzos, los esfuerzos espaciales y turbulentos y las fuerzas volumétricas ejercidas por la gravedad.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma \right]}_{\text{cambio temporal de momentum del vapor}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\rho_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma \right)}_{\text{flujo convectivo de vapor}} = \underbrace{-\rho_\gamma \nabla \cdot \varepsilon_\gamma \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales del vapor}} - \underbrace{\frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot (\overline{\vec{u}}_\gamma - \vec{w}) \overline{\vec{u}}_\gamma dA}_{\text{flux de momentum generado por el vapor en la interfase } \gamma\sigma} + \\ & + \underbrace{\nabla \cdot \langle \overline{\vec{T}}_\gamma \rangle}_{\text{velocidad de cantidad de movimiento debido a los esfuerzos ejercidos sobre el solido por el vapor}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\vec{T}}_\gamma dA}_{\text{esfuerzos de Reynolds turbulentos generados por el vapor}} - \underbrace{\rho_\gamma \nabla \cdot \varepsilon_\gamma \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales del vapor}} - \underbrace{\frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\vec{u}}_\gamma \overline{\vec{u}}_\gamma dA}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales del vapor}} + \underbrace{\varepsilon_\gamma \rho_\gamma \vec{g}}_{\text{fuerzas volumetricas en el vapor}} \quad (4-81) \end{aligned}$$

El tensor de esfuerzos de la ec. (4-10) promediado en el espacio equivale a la ecuación:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \overline{\vec{T}}_\gamma \rangle &= -\varepsilon_\gamma \nabla \cdot \langle \overline{\vec{p}}_\gamma \rangle^\gamma + \varepsilon_\gamma \mu \nabla^2 \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma - \mu \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \overline{\vec{u}}_\gamma \rangle^\gamma - \\ & - \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\vec{p}}_\gamma dA + \mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\vec{u}}_\gamma dA \right] + \frac{\mu}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \nabla \left(\overline{\vec{u}}_\gamma \right) dA \quad (4-82) \end{aligned}$$

Las fuerzas superficiales en la interfase debido a el flux de momentum y los esfuerzos entre las fases se representan por la condición de salto de momentum siguiente:

$$-\frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot (\overline{\vec{u}}_\gamma - \vec{w}) \overline{\vec{u}}_\gamma dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\vec{T}}_\gamma dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{\vec{T}}_\sigma dA - \frac{\rho_\sigma}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot (\overline{\vec{u}}_\sigma - \vec{w}) \overline{\vec{u}}_\sigma dA \quad (4-83)$$

que reduce la ec. (4-82) en la ec. (4-83) porque no hay transporte interfacial de masa $\vec{n}_k \cdot (\overline{\vec{u}}_k - \vec{w}) = 0$

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\overline{T_\gamma}} dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{\overline{T_\sigma}} dA \quad (4-84)$$

Un análisis similar al de la Sección 4.3 (v) da como resultado las contracciones de escala siguientes:

$$\frac{r_o}{L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^4}{L_{v2\gamma}^2 L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad (4-85)$$

iii) Balance de energía térmica promediado en el espacio.

El cambio de energía térmica promedio para un sistema abierto se debe los flujos de entrada y salida del vapor en el volumen promediado, a causa de la turbulencia aportada por los remolinos (de pequeña y gran escala) el flujo convectivo y dispersivo.

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \overline{h_\gamma} \rangle^\gamma \right]}_{\text{cambio temporal de energía térmica}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\rho_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \overline{h_\gamma} \rangle^\gamma \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma \right)}_{\text{flujo convectivo de entalpía generada por el vapor}} = & \underbrace{-\nabla \cdot \langle \overline{q_\gamma} \rangle}_{\text{transporte de energía por conducción debido al vapor}} - \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\overline{q_\gamma}} dA}_{\text{transporte dispersivo de entalpía}} - \underbrace{\nabla \cdot \varepsilon_\gamma \langle \overline{h_\gamma} \rangle^\gamma \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma}_{\pm} \\ & \underbrace{-\frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \left(\overline{u_\gamma} - \vec{w} \right) \overline{h_\gamma} dA}_{\text{flux convectivo de entalpía a través de la interfase}} - \underbrace{\rho_\gamma \nabla \cdot \varepsilon_\gamma \langle \overline{h_\gamma} \rangle^\gamma \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma}_{\text{transporte de entalpía debido a las fluctuaciones}} - \underbrace{\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\overline{h_\gamma u_\gamma}} dA}_{\pm} \end{aligned} \quad (4-86)$$

El transporte de energía en la interfase ocurre por su flujo por conducción y el flujo convectivo de entalpía.

$$\frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \left(\overline{u_\gamma} - \vec{w} \right) \overline{h_\gamma} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\overline{q_\gamma}} dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{\overline{q_\sigma}} dA + \frac{\rho_\sigma}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \left(\overline{u_\gamma} - \vec{w} \right) \overline{h_\sigma} dA \quad (4-87)$$

donde también $\vec{n}_k \cdot \left(\overline{u_k} - \vec{w} \right) = 0$ reduce la ecuación anterior

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\overline{q_\gamma}} dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{\overline{q_\sigma}} dA \quad (4-88)$$

en la condición de salto de energía que relaciona el flujo que sale del sólido (ley de Fourier, ec. 4-89) con el que le llega por el vapor por convección.

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \langle \bar{q}_\gamma \rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\gamma\sigma} \cdot \bar{q}_\gamma dA &= K \nabla \cdot \left(\nabla \langle \bar{T}_\gamma \rangle^\gamma \varepsilon_\gamma \right) + K \nabla \cdot \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\gamma\sigma} \cdot \bar{T}_\gamma dA \right] - K \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \bar{T}_\gamma \rangle^\gamma + \\
&+ \frac{K}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\gamma\sigma} \cdot \nabla \bar{T}_\gamma dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\gamma\sigma} h_{\gamma\sigma} (\bar{T}_\gamma - \bar{T}_\sigma) dA
\end{aligned} \tag{4-89}$$

la variable (K) representa la conductividad térmica. Un análisis similar al de la Sección 4.3 (v) da como resultado las contracciones de escala siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{r_o}{L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o}{L_{h1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{h1\gamma} L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{h2\gamma} L_{h1\gamma}} \ll 1 \\
\frac{r_o^3}{L_{h2\gamma} L_{h1\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^4}{L_{h2\gamma} L_{h1\gamma} L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1
\end{aligned} \tag{4-90}$$

Ecuaciones Promediadas en el espacio para la fase sólido.

ii) Balance de momentum promediado en el espacio.

El cambio de momentum promedio de los sólidos se debe al flujo convectivo, fuerza de gravedad términos de desviación y fluctuación. Sus fluctuaciones promedio en el volumen y en la interfase se deben al movimiento que imparte el vapor al sólido así como la dispersión al flujo convectivo. El cambio de momentum en la interfase se describe a través de la condición de salto de momentum de la ec. (4-83).

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\sigma \varepsilon_\sigma \langle \bar{u}_\sigma \rangle^\sigma \right]}_{\text{cambio temporal del momentum promedio}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\rho_\sigma \varepsilon_\sigma \langle \bar{u}_\sigma \rangle^\sigma \langle \bar{u}_\sigma \rangle^\sigma \right)}_{\text{flujo convectivo de momentum}} = \underbrace{-\rho_\sigma \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \langle \bar{u}_\sigma \bar{u}_\sigma \rangle^\sigma}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales del solido}} + \\
\underbrace{-\nabla \cdot \langle \bar{T}_\sigma \rangle}_{\text{velocidad de cantidad de movimiento debida a los esfuerzos totales ejercidos sobre el solido}} + \underbrace{\int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\sigma\gamma} \cdot \bar{T}_\sigma dA}_{\text{flux de momentum a traves de la interfase}} - \underbrace{\frac{\rho_\sigma}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\sigma\gamma} \cdot (\bar{u}_\sigma - \bar{w}) \bar{u}_\sigma dA}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones}} \\
- \underbrace{\rho_\sigma \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \langle \bar{u}_\sigma \bar{u}_\sigma \rangle^\sigma}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones}} - \underbrace{\frac{\rho_\sigma}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \bar{n}_{\sigma\gamma} \cdot (\bar{u}_\sigma \bar{u}_\sigma) dA}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones}} + \underbrace{\varepsilon_\sigma \rho_\sigma \bar{g}}_{\text{fuerzas volumetricas promedio en el solido}}
\end{aligned} \tag{4-91}$$

Un análisis similar al de la Sección 4.3 (v) da como resultado las contracciones de escala siguientes:

$$\frac{r_o^2}{L_{v2\sigma} L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v1\sigma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{v2\sigma} L_{v1\sigma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^4}{L_{v2\sigma}^2 L_{v1\sigma}^2} \ll 1 \tag{4-92}$$

iii) Balance de energía térmica promediado en el espacio.

El cambio de entalpía promedio está influenciado por la conducción energía, el flujo dispersivo que se deriva del convectivo y el transporte de entalpía debido a las fluctuaciones promedio del sólido que se mueve (durante un tiempo) a consecuencia del movimiento impartido por el vapor, que también genera flujo turbulento de entalpía. Se desprecia la contribución del flujo de energía por conducción ($\nabla \cdot \langle \overline{q_\sigma} \rangle$) debido a que la turbulencia del sistema hace más importante el que se efectúa en forma convectiva.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\sigma \varepsilon_\sigma \langle \overline{h_\sigma} \rangle^\sigma \right]}_{\text{cambio temporal de entalpía promedio}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\rho_\sigma \varepsilon_\sigma \langle \overline{h_\sigma} \rangle^\sigma \langle \overline{u_\sigma} \rangle^\sigma \right)}_{\text{flujo convectivo de entalpía generado por el sólido}} = - \underbrace{\nabla \cdot \varepsilon_\sigma \langle \overline{h_\sigma} \overline{u_\sigma} \rangle^\sigma}_{\text{transporte dispersivo de entalpía debido al sólido}} - \underbrace{\frac{\rho_\sigma}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot (\overline{u_\sigma} - \vec{w}) \overline{h_\sigma} dA}_{\text{flux convectivo de entalpía en la interfase}} - \\
 & \underbrace{- \rho_\sigma \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \langle \overline{h_\sigma u_\sigma} \rangle^\sigma}_{\text{transporte de entalpía debido a las fluctuaciones del sólido}} - \underbrace{\frac{\rho_\sigma}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{h_\sigma u_\sigma} dA}_{\text{transporte de energía por conducción generada por el sólido}} - \underbrace{\nabla \cdot \langle \overline{q_\sigma} \rangle}_{\text{transporte de energía por conducción generada por el sólido}} - \underbrace{\frac{1}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{q_\sigma} dA}_{\text{transporte de energía por conducción generada por el sólido}} \quad (4-93)
 \end{aligned}$$

El transporte de energía en la interfase se relaciona a través de la condición de salto de energía (4-94) que hace semejante el flujo (convectivo de energía del vapor) que llega a la interfase de los sólidos con su transporte (al interior) por conducción.

$$\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot h_{\gamma\sigma} (\overline{T_\gamma} - \overline{T_\sigma}) dA = \frac{1}{\nu} \int_{A_{\sigma\gamma}} \vec{n}_{\sigma\gamma} \cdot \overline{q_\sigma} dA \quad (4-94)$$

El sólido mantiene aproximadamente su temperatura por el valor que tiene su conductividad térmica (0.052 W/m·K, *Incropera, 1981*) que no significa que el sistema sea isotérmico. El sólido puede intercambiar calor cuando el Biot < 0.1 ya que la temperatura no depende del tiempo, por lo que siguiendo una partícula, su enfriamiento correspondería al calor emigrado hacia el vapor.

$$Bi = \frac{h_{\gamma\sigma} r_p}{3k_\sigma} \quad (4-95)$$

En la ec. (4-95) (r_p) es el radio de la partícula sólida, (k_σ) la conductividad térmica del sólido, y ($h_{\gamma\sigma}$) el coef. de transferencia de calor entre el vapor y el sólido. Un análisis similar al de la Sección 4.3 (v) da como resultado las contracciones de escala siguientes:

$$\frac{r_o}{L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v2\sigma} L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o}{L_{h1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{h1\sigma} L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{h1\sigma} L_{v2\sigma} L_{v1\sigma}} \ll 1$$

$$\frac{r_o^2}{L_{h2\sigma} L_{h1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{h2\sigma} L_{h1\sigma} L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^4}{L_{h1\sigma} L_{v2\sigma}^2 L_{v1\sigma}} \ll 1 \quad (4-96)$$

Los aspectos que más destacan del Modelo promedio de dos fases se relacionan con: el tamaño del volumen promediado donde se aplica el promedio (0.15 cm) a las fases vapor y sólido homogéneamente distribuidas; los términos de transporte interfacial de masa, momentum y energía que surgen de la metodología y que en el caso de la ecuación de masa (para ambas fases) se elimina porque no existe flujo interfacial entre ellas. También surgen términos de desviación espacial que representan los esfuerzos de Reynolds espaciales y la dispersión de entalpía turbulenta y hay cambios en el sistema por la fracción volumen de las fases respectivas. En la próxima sección este modelo se toma como fundamento para obtener un modelo pseudohomogéneo que nos permitirá conocer los procesos de transporte (promedio) de masa momentum y energía al interior de los cúmulos de un tamaño característico.

4.4. Fundamentos del Modelo Pseudohomogéneo.

En el lecho fluidizado formado de una mezcla de partículas de catalizador y vapor en un régimen de fluidización rápida se desarrollan dos regiones una diluida donde hay partículas sólidas dispersas y otra formada por agregados de partículas. Estos agregados pueden agruparse dentro de intervalos de tamaños $[n_j, n_{j+1})$ si la diferencia de sus partículas no afecta su identidad, es decir cuando su tamaño los incluye como cúmulos de un tamaño característico (j) cuya frecuencia esta dada por la función $(F(n))$. Considerando lo anterior, lo que se obtiene es una partición de la distribución de tamaños de los cúmulos que tiene la particularidad de representar la región diluida cuando (j=1).

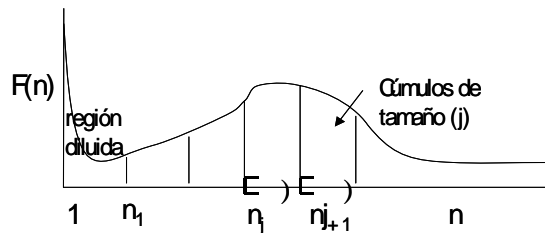


Fig.4-6. Partición de tamaños de cúmulos.

Este modelo (de mezcla) pretende representar los procesos de transporte de masa, momentum y energía al interior de los cúmulos de tamaño característico, para ello se tomará como fundamento las ecuaciones del modelo de dos fases donde el vapor y sólido caracterizan las fases al interior de estos cúmulos. Con la suma de estas ecuaciones (fase vapor, fase sólido) los procesos de transporte describen el cambio temporal de densidad, momentum y entalpía influenciada por la pérdida (fragmentación) ó ganancia (agregación) de cúmulos que pertenecen al intervalo de tamaño (j) (región homogénea) y pasan a otros que pueden ser de diferente tamaño (mayor o menor), así como los relacionados con cúmulos que interactúan con otros que pertenecen a intervalos de tamaño distinto. En estos procesos la masa se conserva de tal manera que la única forma de mantenerla es tener un balance de masa (para los cúmulos de ese tamaño característico) que considere los términos de agregación y fragmentación de tal forma que si hiciésemos la suma de estos para cada tamaño lo que obtendríamos es la ecuación de conservación.

Los cúmulos independientemente de su masa tienen las siguientes características típicas: densidad, velocidad y entalpía a excepción de la región diluida donde estos valores son muy distintos. La forma de los cúmulos es esférica y poseen una fracción volumen de sólidos constante (ec. 4-97), donde la densidad de las fases (vapor y sólido) son constantes (ec. 4-98).

$$\varepsilon_{\sigma j} = \varepsilon_{\sigma} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\gamma j} = \varepsilon_{\gamma} \quad (4-97)$$

$$\rho_{\sigma j} = \rho_{\sigma} \quad \text{y} \quad \rho_{\gamma j} = \rho_{\gamma} \quad (4-98)$$

La metodología que se desarrolla a continuación contiene suposiciones que se explicarán en los balances correspondientes.

4.4.1. Metodología y descripción del modelo pseudohomogéneo.

Para todos los casos los balances de masa, momentum y energía de la fase vapor y sólido promediados en el espacio se suman para obtener una sola ecuación que mediante ciertas simplificaciones pueda representar los procesos de transporte en los cúmulos de tamaño característico (j).

(i) Balance de masa en los cúmulos de tamaño (j).

De la ec. (4-79) se obtiene el balance de masa para la fase vapor y sólido que es equivalente a

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot \left[\varepsilon_k \langle \overline{u_k} \rangle^k \rho_k \right] = 0 \quad (4-99)$$

cuando la (ρ_k) es constante. Esta ecuación es caracteriza para los cúmulos de tamaño (j) cuando se le agrega el subíndice (j)

$$\frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial t} \rho_{kj} + \nabla \cdot \left[\varepsilon_{kj} \langle \overline{u_{kj}} \rangle^{kj} \rho_{kj} \right] = 0 \quad (4-100)$$

La estructura de la ec. (4-100) es conveniente porque la suma de las ecuaciones de cada fase (4-101) nos permite agrupar variables para definir la densidad típica de los cúmulos de tamaño (j)

$$\frac{\partial \varepsilon_{\gamma}}{\partial t} \rho_{\gamma} + \frac{\partial \varepsilon_{\sigma}}{\partial t} \rho_{\sigma} + \nabla \cdot \left[\varepsilon_{\gamma} \langle \overline{u_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \rho_{\gamma} \right] + \nabla \cdot \left[\varepsilon_{\sigma} \langle \overline{u_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} \rho_{\sigma} \right] = 0 \quad (4-101)$$

A continuación se enuncian las consideraciones para simplificar la ecuación anterior.

a) Se propone que los cúmulos (de cualquier tamaño) tienen una densidad típica independiente de su masa. Esta densidad es un valor típico de la mezcla vapor-sólido que lo conforman. Se mantiene el subíndice (j) porque el otro valor que representa corresponde a la región diluida.

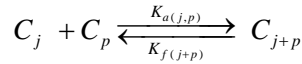
$$\rho_j = \rho_\sigma \varepsilon_\sigma + \rho_\gamma \varepsilon_\gamma \quad (4-102)$$

b) La velocidad típica (v_j) de los cúmulos de tamaño (j) se define por la ec.(4-103) cuando depende de la velocidad del vapor y del sólido.

$$v_j = \frac{\left[\rho_\sigma \varepsilon_\sigma \langle \overline{u_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} + \rho_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \overline{u_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right]}{\rho_j} \quad (4-103)$$

c) Para conservar la masa en el sistema se considera en la ec. (4-107) los procesos de agregación y fragmentación para cada tamaño característico de los cúmulos.

Los procesos de agregación (binaria, ec. 4-105) y fragmentación (binaria, ec. 4-106) desarrollados en los cúmulos de tamaño (j) se asemejan a los procesos de reacción química, de manera que es posible proponer esquemas cinéticos (ec. 4-104) en los que cada tamaño característico de cúmulos se asemeje a un componente químico que participa en el sistema de las reacciones.



$$A_{(j-p,p)} = K_{a(j-p,p)} C_{j-p} C_p \quad A_{(j,p)} = K_{a(j,p)} C_j C_p \quad (4-105)$$

$$F_j = K_{f(j)} C_j \quad F_{j+p} = K_{f(j+p)} C_{j+p} \quad (4-106)$$

Con las consideraciones anteriores la ec. (4-101) corresponde al balance de masa para los cúmulos de tamaño (j), que representa el cambio temporal de su densidad debido al flujo de los cúmulos de tamaño (j) por los procesos de agregación y fragmentación entre ellos forman otros de diferente tamaño y a otros que provienen de otros intervalos que representan diferentes tamaños característicos.

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \rho_j}{\partial t}}_{\text{cambio temporal de los cúmulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho_j v_j]}_{\text{densidad de flujo neto local en los cúmulos de tamaño (j)}} = - \underbrace{F_j}_{\text{tasa de fragmentacion de cúmulos de tamaño (j)}} + \underbrace{F_{j+p}}_{\text{tasa de fragmnetacion de cúmulos de tamaño (j+p) que generan cúmulos de tamaño (j)}} + \underbrace{A_{(j-p,p)}}_{\text{tasa de agregacion binaria de cúmulos que generan cúmulos de tamaño (j)}} - \underbrace{A_{(j,p)}}_{\text{tasa de agregacion binaria de cúmulos de tamaño (j) con otros cúmulos}} \quad \bar{x} \in R_j \end{aligned} \quad (4-107)$$

(ii) Balance de momentum para los cúmulos de tamaño (j).

Las ecs. para la fase vapor (4-81) y la fase sólido (4-91) caracterizadas para los cúmulos de tamaño (j) se suman para obtener

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j} \right] + \\
 & \nabla \cdot \left(\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} \right) + \nabla \cdot \left(\rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j} \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j} \right) = \\
 & -\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \nabla \cdot \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} - \rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \nabla \cdot \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\sigma j} - \\
 & -\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \nabla \cdot \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle - \rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \nabla \cdot \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle - \\
 & -\frac{\rho_{\sigma}}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot (\overline{\overline{u_{\sigma j}}} - \vec{w}) \overline{\overline{u_{\sigma j}}} dA - \frac{\rho_{\gamma}}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot (\overline{\overline{u_{\gamma j}}} - \vec{w}) \overline{\overline{u_{\gamma j}}} dA + \\
 & -\nabla \cdot \langle \overline{\overline{T_{\sigma j}}} \rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot \overline{\overline{T_{\sigma j}}} dA + \nabla \cdot \langle \overline{\overline{T_{\gamma j}}} \rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot \overline{\overline{T_{\gamma j}}} dA + \\
 & + (\varepsilon_{\sigma} \rho_{\sigma} \vec{g} + \varepsilon_{\gamma} \rho_{\gamma} \vec{g}) - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \overline{\overline{u_{\sigma j}}} dA - \frac{\rho_{\gamma}}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \overline{\overline{u_{\gamma j}}} dA
 \end{aligned} \tag{4-108}$$

Para simplificar esta ecuación se describen las siguientes consideraciones:

a) Si suponemos que la velocidad del vapor y del sólido es igual en estos cúmulos la ec. (4-103) se reduce a

$$v_j = \langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} = \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j} \tag{4-109}$$

con esto la velocidad relativa entre las dos fases es cero y el cúmulo se mueve como un sistema homogéneo; la velocidad típica (v_j) es asignada a la velocidad promedio (intrínseco) del vapor

$\langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j}$ porque es la que transmite el movimiento a los sólidos.

b) La simplificación anterior implica proponer que el flujo medio promovido por el vapor es igual al del sólido y además que las desviaciones y fluctuaciones (de ambas fases) tienen igual correlación (ec. 4-110).

$$\langle \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \overline{\overline{u_{\sigma j}}} \rangle^{\sigma j} = \langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \rangle^{\gamma j} \tag{4-110}$$

Con esta suposición la ec. (4-111)

$$-\rho_{\sigma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\right\rangle-\rho_{\gamma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle=-\left[\rho_{\sigma}\varepsilon_{\sigma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\right\rangle^{\sigma j}+\rho_{\gamma}\varepsilon_{\gamma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle^{\gamma j}\right] \quad (4-111)$$

se reduce en

$$-\rho_j\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle^{\gamma j} \quad (4-112)$$

que significa que la desviación generada por la mezcla de vapor-sólido en los cúmulos de tamaño (j) se deben al vapor contenidos en ellos.

c) El vapor es el principal generador de turbulencia dentro de los cúmulos de tamaño (j) debido a que el movimiento de los sólidos es aportado por él, de esta manera la relación del promedio de las fluctuaciones para ambas fases se relaciona por la igualdad siguiente:

$$\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\right\rangle^{\sigma j}=\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle^{\gamma j} \quad (4-113)$$

así la ec. (4-114)

$$-\rho_{\sigma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\right\rangle-\rho_{\gamma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle=-\left[\rho_{\sigma}\varepsilon_{\sigma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\sigma j}}}\right\rangle^{\sigma j}+\rho_{\gamma}\varepsilon_{\gamma}\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle^{\gamma j}\right] \quad (4-114)$$

se reduce en la ec. (4-115)

$$-\rho_j\nabla\cdot\left\langle\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\overline{\overline{\mathbf{u}_{\gamma j}}}\right\rangle^{\gamma j} \quad (4-115)$$

que representa una estructura turbulenta única para la mezcla vapor-sólido en los cúmulos de tamaño (j), pues no hay distinción entre el flujo turbulento del vapor y el impartido por el movimiento transferido del vapor al sólido.

d) La condición de salto de momemntum de la ec. (4-83) caracterizada para los cúmulos de tamaño (j) representa la igualdad de los esfuerzos efectuados por la presión y fuerzas viscosas en la interfase vapor-sólido con los esfuerzos que reciben los sólidos.

$$\frac{1}{\nu}\int_{A_{(\sigma\gamma)j}}\vec{n}_{(\sigma\gamma)j}\cdot\overline{\overline{\mathbf{T}_{\sigma j}}}\overline{\overline{dA}}=\frac{1}{\nu}\int_{A_{(\gamma\sigma)j}}\vec{n}_{(\gamma\sigma)j}\cdot\overline{\overline{\mathbf{T}_{\gamma j}}}\overline{\overline{dA}} \quad (4-116)$$

como las integrales se satisfacen exactamente con la condición de salto entonces se tiene

$$\nabla \cdot \left(\left\langle \overline{\overline{T_{\gamma j}}} \right\rangle - \left\langle \overline{\overline{T_{\sigma j}}} \right\rangle \right) = 0 \quad (4-117)$$

e) La expresión para las fuerzas volumétricas de la mezcla en los cúmulos por la ec. (4-102) se transforma en

$$\varepsilon_{\sigma} \rho_{\sigma} \vec{g} + \varepsilon_{\gamma} \rho_{\gamma} \vec{g} = \rho_j \vec{g} \quad (4-118)$$

f) En la ec. (4-119) se incluyen como términos del momentum ($F_j v_j$, $F_{j+p} v_j$, $A_{j-p,p} v_j$, $A_{j,p} v_j$) y fuerzas asociadas (\mathfrak{F}_j , \mathfrak{F}_{j+p} , $\mathfrak{F}_{j-p,p}$, $\mathfrak{F}_{j,p}$) a los procesos de agregación y fragmentación que aumentan o disminuyen estos cúmulos.

En base a lo anterior, el balance de momentum para los cúmulos de tamaño (j) se representa con la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [\rho_j v_j]}_{\text{cambio temporal de momentum}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_j v_j v_j)}_{\text{flujo convectivo debido}} = \underbrace{-\rho_j \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle}_{\text{esfuerzos de Reynolds en los}} - \underbrace{\rho_j \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right\rangle}_{\text{cumulos de tamaño (j)}} - \\ & \underbrace{-\frac{\rho_{\gamma}}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \vec{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} dA}_{\text{turbulencia aportada por los cúmulos}} - \underbrace{\frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \vec{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \left(\overline{\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right) dA}_{\text{de tamaño (j) debido al transporte}} + \underbrace{\rho_j \vec{g}}_{\text{fuerzas volumetricas}} + \\ & \underbrace{-\frac{F_j v_j}_{\text{perdida de momentum de los cúmulos}}}_{\text{de tamaño (j) debido a la}} + \underbrace{\frac{F_{j+p} v_j}_{\text{momentum aportado por la}}}_{\text{fragmentacion de los}} + \underbrace{\frac{A_{j-p,p} v_j}_{\text{momentum aportado a los}}}_{\text{cumulos (j) por la agregacion}} - \\ & \underbrace{-\frac{A_{j,p} v_j}_{\text{perdida de momentum de los cúmulos}}}_{\text{de tamaño (j) debido a la}} + \underbrace{\mathfrak{F}_j}_{\text{fuerza asociada a la fragmentacion}} + \underbrace{\mathfrak{F}_{j+p}}_{\text{de los cúmulos de tamaño (j)}} \\ & + \underbrace{\mathfrak{F}_{j+p}}_{\text{fuerza asociada a la fragmentacion}} + \underbrace{\mathfrak{F}_{j-p,p}}_{\text{de los cúmulos de tamaño (j+p)}} + \underbrace{\mathfrak{F}_{j,p}}_{\text{de los cúmulos de tamaño (j-p,p)}} \quad \vec{x} \in R_j \quad (4-119) \end{aligned}$$

El cambio temporal de momentum para los cúmulos de tamaño (j) se debe a el flujo convectivo, relacionado con los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos (así como sus respectivas fuerzas), o entre otros que pertenecen a intervalos de tamaño diferente. También influyen los esfuerzos de Reynolds espaciales, la contribución interfacial de la turbulencia y las fuerzas volumétricas.

(iii) Balance de energía en cualquier cúmulo de tamaño (j).

Las ecs. (4-86) y (4-93) caracterizadas para la fase vapor y sólido de los cúmulos de tamaño (j) se suman para obtener

$$\begin{aligned}
& \rho_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_{\sigma j} \langle \overline{h_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} \right] + \rho_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_{\gamma j} \langle \overline{h_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right] + \\
& + \rho_{\sigma} \nabla \cdot \left(\varepsilon_{\sigma j} \langle \overline{h_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} \langle \overline{u_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} \right) + \rho_{\gamma} \nabla \cdot \left(\varepsilon_{\gamma j} \langle \overline{h_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \langle \overline{u_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right) = \\
& - \nabla \cdot \varepsilon_{\sigma} \langle \overline{h_{\sigma j}} \overline{u_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} - \nabla \cdot \varepsilon_{\gamma} \langle \overline{h_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} - \\
& - \rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \nabla \cdot \langle \overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} - \rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \nabla \cdot \langle \overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} - \\
& - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot (\overline{u_{\sigma j}} - \vec{w}) \overline{h_{\sigma j}} dA - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot (\overline{u_{\gamma j}} - \vec{w}) \overline{h_{\gamma j}} dA - \\
& - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot \overline{q_{\sigma j}} dA - \nabla \cdot \langle \overline{q_{\sigma j}} \rangle - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot \overline{q_{\gamma j}} dA \\
& - \frac{\rho_{\sigma}}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \vec{n}_{(\sigma)j} \cdot \overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}} dA - \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \vec{n}_{(\gamma)j} \cdot \overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}} dA
\end{aligned} \tag{4-120}$$

Las suposiciones que simplifican la ecuación anterior son las siguientes:

a) Cuando se considera que la masa del vapor y el sólido (en el interior del cúmulo de tamaño (j)) forman un sistema homogéneo, puede suponerse que sus entalpías promedio son iguales, por lo que la ec.(4-121)

$$h_j = \frac{\left[\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \langle \overline{h_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} + \rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \langle \overline{h_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right]}{\rho_j} \tag{4-121}$$

se modifica en

$$h_j = \langle \overline{h_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} = \langle \overline{h_{\sigma j}} \rangle^{\sigma j} \tag{4-122}$$

La entalpía típica se asigna a la entalpía promedio (intrínseco) del sólido porque se encuentra con una fracción volumen mayor que el vapor. Sin embargo sabemos que la diferencia de entalpía del vapor ($C_p, 1.100 \text{ KJ /Kg}^{\circ}\text{K}$) y el sólido ($C_p, 1.997 \text{ KJ / Kg }^{\circ}\text{K}$) (*Incropera, 1981*) existe, y se debe a los valores de capacidad calorífica principalmente cuando la presión se mantiene constante al interior de los cúmulos ec. (4-123).

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \tag{4-123}$$

b) Además de proponer una igualdad en las entalpías promedio de las fases en el sistema homogéneo (desde el punto de vista de energía) también se propone que el promedio de sus fluctuaciones es el mismo para ambas fases ec. (4-124).

$$\left\langle \overline{h'_{\sigma j} u_{\sigma j}} \right\rangle^{\sigma j} = \left\langle \overline{h'_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \quad (4-124)$$

la igualdad simplifica la ec. (4-125)

$$-\rho_{\sigma} \nabla \cdot \left\langle \overline{h'_{\sigma j} u_{\sigma j}} \right\rangle - \rho_{\gamma} \nabla \cdot \left\langle \overline{h'_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle = - \left[\rho_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \nabla \cdot \left\langle \overline{h'_{\sigma j} u_{\sigma j}} \right\rangle^{\sigma j} + \rho_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} \nabla \cdot \left\langle \overline{h'_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right] \quad (4-125)$$

en

$$-\rho_j \nabla \cdot \left\langle \overline{h'_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \quad (4-126)$$

donde el vapor es responsable del producto de las fluctuaciones de energía (turbulenta), ya que estas se generan de las fluctuaciones turbulentas de momentum por los remolinos al interior de los cúmulos.

b) Por la condición de salto de energía de la ec. (4-88) caracterizada para estos cúmulos, el flujo interfacial de entalpía de la fase vapor (por convección) es semejante al que se transporta al sólido (dentro de los cúmulos) por conducción

$$\frac{1}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \vec{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \overline{q_{\gamma j}} dA = \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \vec{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \overline{q_{\sigma j}} dA \quad (4-126)$$

que se representa por

$$\int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \vec{n}_{(\gamma\sigma)j} h_{(\gamma\sigma)j} (\overline{T}_{\gamma j} - \overline{T}_{\sigma j}) dA = \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \vec{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \overline{q_{\sigma j}} dA \quad (4-127)$$

lo anterior supone que el sólido al interior de los cúmulos mantienen su temperatura por lo que es aproximadamente isotérmico.

d) Se agrega a este balance los términos relacionados con la energía generada y consumida por los procesos de agregación y fragmentación que se representan por: $F_j \Delta H_j$, $F_{j+p} \Delta H_{j+p}$, $A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p}$, $A_{j,p} \Delta H_{j,p}$.

En vista de lo anterior el balance de energía térmica para los cúmulos de tamaño (j) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [\rho_j h_j]}_{\text{cambio temporal de entalpia en los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_j h_j v_j)}_{\text{flujo convectivo de energia en los cumulos de tamaño (j)}} = \underbrace{-\nabla \cdot \varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j}}_{\text{flujo dispersivo de energia en los cumulos de tamaño (j)}} - \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \left\langle \overline{\overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right\rangle^{\sigma j} \\
& - \underbrace{\rho_j \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j}}_{\text{transporte de entalpia debido a las fluctuaciones en los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\frac{\rho_{\sigma j}}{\nu} \int_{A_{(\sigma)j}} \overline{\overline{n_{(\sigma)\gamma} h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} dA}_{\text{energía liberada para la fragmentación de los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\frac{\rho_{\gamma j}}{\nu} \int_{A_{(\gamma)j}} \overline{\overline{n_{(\gamma)\sigma} h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} dA}_{\text{energía liberada en el proceso de fragmentación de los cumulos (j+p)}} - \\
& - \underbrace{\nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{q_{\gamma j}}} \right\rangle}_{\text{flujo de energia por conduccion en los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{F_j \Delta H_j}_{\text{energía liberada para la fragmentación de los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{F_{j+p} \Delta H_{j+p}}_{\text{energía liberada en el proceso de fragmentación de los cumulos (j+p)}} + \underbrace{\overline{\overline{x}}}_{\in R_j} \\
& + \underbrace{A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p}}_{\text{energía requerida para el proceso de agregación de los cumulos (j-p,p)}} + \underbrace{A_{j,p} \Delta H_{j,p}}_{\text{energía requerida para el proceso de agregación de los cumulos (j,p)}} \quad (4-128)
\end{aligned}$$

Este balance representa el cambio de entalpía debido al flujo convectivo, dispersivo, y turbulento (interfacial) en los cúmulos de tamaño (j). La energía asociada a los procesos de agregación y fragmentación y su flujo de energía por conducción.

En resumen este modelo de mezcla representa el transporte de masa, momentum y energía al interior de los cúmulos de tamaño (j), que independientemente de su masa tienen un valor típico de densidad, velocidad y entalpía. La fracción volumen y densidad de las fases son constantes e iguales para cualquier cúmulo. A excepción de la región diluida.

Las consideraciones más importantes del modelo comprenden los siguientes puntos:

(i) El análisis del transporte de masa, momentum y energía de la fase vapor y sólido al interior de una región homogénea que pertenece a los cúmulos de un tamaño característico, se determina a través de una partición función del número de partículas en cuyos intervalos se definen los tamaños característicos de los cúmulos.

(ii) Al interior de los cúmulos de tamaño (j) el vapor es el responsable de la turbulencia, desviaciones espaciales (esfuerzos de Reynolds espaciales) y generación de energía turbulenta, pues los sólidos se mueven sólo por el movimiento que el vapor les imparte.

(iii) La densidad típica tiene dos valores el que le corresponde a los cúmulos de cualquier tamaño característico y el que se refiere a la región diluida. Caso semejante para la velocidad y entalpía típica.

(iv) La velocidad típica de los cúmulos es equivalente a la velocidad promedio (intrínseca) de la fase vapor $\left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j}$ porque es precisamente la que aporta el movimiento al sólido dentro de estos cúmulos que viajan como un sistema homogéneo.

(v) Si el sistema es homogéneo (desde el punto de vista de energético) a presión constante, al interior de los cúmulos la entalpía del vapor y del sólido son iguales. La entalpía típica se asigna al sólido que se encuentra con una mayor fracción volumen dentro de ellos.

Debido a que estas ecuaciones no han sido diseñadas para representar regiones heterogéneas que permitan representar los procesos de transporte entre cúmulos se describen en la siguiente sección los fundamentos que relacionan esto con el promediado de región.

Debido a que estas ecuaciones no han sido diseñadas para representar regiones heterogéneas que permitan representar los procesos de transporte entre cúmulos se describen en la siguiente sección los fundamentos que relacionan esto con el promediado de región.

4.5. Fundamentos del promedio de región.

El lecho fluidizado heterogéneo esta compuesto por diferentes regiones definidas por una cierta cantidad de cúmulos que tienen un tamaño característico para cada una. Los procesos de transporte (masa, momentum y energía) que contribuyen a el cambio temporal de los cúmulos de (tamaño (j) que representan) la región (j) estarán relacionados por interacción con otros cúmulos de diferente tamaño (o del mismo) debido a los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos. Los procesos de erosión y engrosamiento (a nivel de partícula) a los que contribuyen la región diluida y los cúmulos son despreciables porque no afectan la identidad de los cúmulos de la región (j), en contraste con lo que ocurre con los procesos de agregación y fragmentación.

Para que el promedio de región sea válido su volumen de región debe contener de 10-100 cúmulos homogéneamente distribuidos. El volumen de región (R) (Fig. 4-7) esta formado por la suma de regiones diferentes donde con el diámetro promedio de los cúmulos de 10 mm (Hiroyuki, 1990) y una fracción volumen de vapor de 0.9 alcanza un diámetro de 10 cm.

La metodología para obtener el balance de masa, momentum y energía promediados en este volumen de región (R) es muy similar a la utilizada en el modelo de dos fases, por esta razón se presentan las definiciones y teoremas más elementales para su desarrollo.

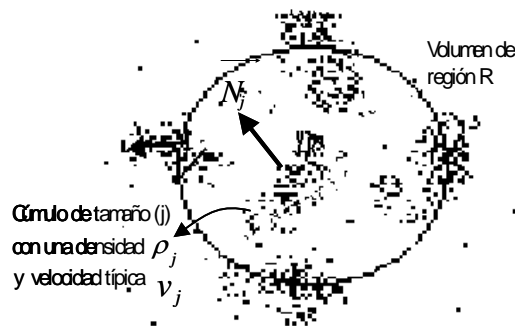


Fig. 4-7. Volumen promediante de región (R).

Comenzaremos con el volumen promediante de región (R)

$$R = \sum_j R_j = v \tag{4-129}$$

que esta formado por regiones de cúmulos de diferente tamaño, donde existe una región diluida que es la única que no los contiene (se representa cuando $j=1$).

La fracción volumen de la región (j) se define por la ec. (4-130)

$$\alpha_j = \frac{R_j}{R} \quad (4-130)$$

El operador de promedio de región aplicado a las ecuaciones del modelo pseudohomogéneo es:

$$\{\bullet\} = \frac{1}{R} \int_{R_j} \bullet \, dv \quad (4-131)$$

El operador promedio intrínseco de región corresponde a la ec. (4-132)

$$\{\bullet\}^j = \frac{1}{R_j} \int_{R_j} \bullet \, dv \quad (4-132)$$

y puede escribirse como:

$$\{\bullet\} = \alpha_j \{\bullet\}^j \quad (4-133)$$

Los teoremas requeridos se presentan a continuación:

Teorema de promedio espacial para la región (R)

$$\{\nabla \langle \Psi_j \rangle\} = \nabla \{\langle \Psi_j \rangle\} + \sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \overline{N_{jk}} \langle \Psi_j \rangle dS \quad (4-134)$$

donde la sumatoria $\frac{1}{R} \sum_{jk/j} \overline{N_{jk}} \Psi_j dS$ representa los procesos de erosión y engrosamiento que ocurren con los cúmulos de tamaño (j) cuando tienen contacto a través de su interfase con otros de diferente tamaño o del mismo.

Este teorema aplicado a un vector se expresa como:

$$\{\nabla \cdot \langle \Psi_j \rangle\} = \nabla \cdot \{\langle \Psi_j \rangle\} + \sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \overline{N_{jk}} \cdot \langle \Psi_j \rangle dS \quad (4-135)$$

El desarrollo del promedio de región para una derivada temporal se presenta en la ec. (4-136)

$$\left\{ \frac{\partial \langle \Psi_j \rangle}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \{\langle \Psi_j \rangle\}}{\partial t} - \sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \overline{N_{jk}} \cdot \overline{w} \langle \Psi_j \rangle dS \quad (4-136)$$

4.5.1. Descripción de las ecuaciones promediadas en el volumen de región (Modelo de región).

En estas ecuaciones se describen los procesos de transporte promedio entre la región formada de cúmulos de tamaño (j) con otras regiones de cúmulos cuando se aplica la metodología de promediado (en forma semejante a la del modelo de dos fases) que inicia con la aplicación del operador promedio de región ec. (4-131) a las ecuaciones del modelo pseudohomogéneo.

(i) Balance de masa promediado en la región.

La ec. (4-107) representa el balance de masa en los cúmulos de tamaño (j) que se promedia por la metodología del promediado de región

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_j \rho_j)}_{\text{acumulacion de masa en los cumulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\nabla \cdot (\alpha_j \{\rho_j v_j\}^j)}_{\text{flujo masico en los cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} = - \underbrace{\alpha_j \{F_j\}^j}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que se pierden por fragmentacion}} + \\
 & + \underbrace{\alpha_j \{F_{j+p}\}^j}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros de tamaño (j+p)}} + \underbrace{\alpha_j \{A_{(j-p,p)}\}^j}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que surgen de la agregacion de otros}} - \underbrace{\alpha_j \{A_{(j,p)}\}^j}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que se pierden por agregacion con otros de tamaño (p)}} - \\
 & - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot (v_j - \bar{w}) \rho_j dS}_{\text{flujo masico debido a los procesos de erosion y engrosamiento de los cumulos de tamaño (j) con otros de diferente o igual tamaño}} \quad (4-137)
 \end{aligned}$$

Las suposiciones que simplifican la ecuación anterior se presentan a continuación:

a) El producto $\{\rho_j v_j\}^j$ puede separarse cuando la velocidad se pondera en la densidad

$$\{\rho_j v_j\}^j = \{\rho_j\}^j \{v_j\}^j \quad \text{ó} \quad \{v_j\}_{\rho_j}^j = \frac{\{\rho_j v_j\}^j}{\{\rho_j\}^j} \quad (4-138)$$

estas relaciones se simplifican aun mas cuando se supone que el promedio intrínseco de región de la variable $\{\Psi_j\}^j$ tiene un valor típico Ψ_j en la región (R), cuyo valor es semejante a los del modelo pseudohomogéneo.

$$\{\rho_j\}^j = \rho_j \quad \{v_j\}^j = v_j \quad \{\Psi_j\}^j = \Psi_j \quad (4-139)$$

b) El transporte de masa promedio (a nivel de partícula) a través del área formada por los cúmulos de la región (j) con otros cúmulos de diferente tamaño (incluso de tamaño (j)) se debe a los procesos de erosión y engrosamiento que como no afectan la identidad de estos cúmulos por lo que se desprecian.

$$\sum_{jk \neq j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot (v_j - \bar{w}) \rho_j dS = 0 \quad (4-140)$$

El balance de masa promediado en la región (R) se reduce a:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_j \rho_j)}_{\text{acumulacion de masa en los cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot (\alpha_j \rho_j v_j)}_{\text{flujo masico en los cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} = - \underbrace{\alpha_j F_j}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que se pierden por fragmentacion}} + \underbrace{\alpha_j F_{j+p}}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros de tamaño (j+p)}} + \underbrace{\alpha_j A_{(j-p,p)}}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que surgen de la agregacion de otros}} - \underbrace{\alpha_j A_{(j,p)}}_{\text{flujo masico de cumulos de tamaño (j) que se pierden por agregacion con otros de tamaño (p)}} \quad \vec{x} \in R \quad (4-141)$$

El cambio promedio de masa en la región (R) debido a los cúmulos de tamaño (j) se debe a su flujo relacionado a los procesos de agregación y fragmentación entre los cúmulos de la región (j) con otros cúmulos de diferente tamaño.

(ii) Balance de momentum promediado en la región.

El balance de momentum (ec. 4-119) del modelo pseudohomogéneo se promedia utilizando la metodología del promedio de región para obtener el balance de momentum promediado en la región (R).

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_j \left\{ \rho_j v_j \right\}^j \right)}_{\text{cambio temporal de momentum en los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \rho_j v_j v_j \right\}^j \right)}_{\text{flujo convectivo de momentum debido a los cumulos de tamaño (j)}} = \underbrace{-\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right)}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales y turbulentos en los cumulos de tamaño (j) promediados en la region (R)}} - \underbrace{\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right)}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales y turbulentos en los cumulos de tamaño (j) promediados en la region (R)}} - \\
& \underbrace{-\alpha_j \left\{ \frac{\rho_j}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \left(\overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right) dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \left(\overline{\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right) dA \right\}^j}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a los esfuerzos de Reynolds en la interfase generados por los cumulos de tamaño (j) en la-region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ \rho_j \bar{g} \right\}^j}_{\text{fuerzas volumetricas aplicadas a los cumulos de tamaño (j) promediadas en la region (R)}} - \\
& - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \rho_j dS}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales en la interfase con los cumulos de tamaño (j) asociados al vapor que proviene de los procesos de erosion y engrosamiento que se dan a nivel de partícula}} - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \rho_j dS}_{\text{turbulencia generada por las partículas que participan en los procesos de erosion y engrosamiento de los cumulos de tamaño (j)}} - \\
& - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot v_j (v_j - \bar{w}) \rho_j dS}_{\text{condicion de salto de momentum generado por los procesos de erosion y engrosamiento que se dan a nivel de partícula}} - \underbrace{\alpha_j \left\{ F_j v_j \right\}^j}_{\text{perdida de momentum de los cumulos de tamaño (j) debido a su fragmentacion}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ F_{j+p} v_j \right\}^j}_{\text{momentum aportado a los cumulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros.}} \\
& + \underbrace{\alpha_j \left\{ A_{j-p,p} v_j \right\}^j}_{\text{momentum aportado a los cumulos de tamaño (j) por la agregacion binaria de otros}} - \underbrace{\alpha_j \left\{ A_{j,p} v_j \right\}^j}_{\text{perdida de momentum de los cumulos de tamaño (j) debido a su agregacion con otros}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ \mathfrak{T}_j \right\}^j}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentacion de los cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \\
& + \underbrace{\alpha_j \left\{ \mathfrak{T}_{j+p} \right\}^j}_{\text{fuerza promedio asociada a los cumulos de tamaño (j) por fragmentacion de los cumulos de tamaño (j+p) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ \mathfrak{T}_{j-p,p} \right\}^j}_{\text{fuerza promedio asociada a la agregacion de los cumulos de tamaño (j-p,p) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ \mathfrak{T}_{j,p} \right\}^j}_{\text{fuerza promedio asociada a la formacion de cumulos de tamaño (j) por la agregacion de otros de tamaño (p) en la region (R)}} \tag{4-142}
\end{aligned}$$

Las suposiciones que reducen y simplifican esta ecuación son las siguientes:

a) La simplificación del término $\left\{ \rho_j v_j \right\}^j$ está desarrollada en el inciso a) del balance de masa. Para el término $\left\{ \rho_j v_j v_j \right\}$ se propone la siguiente relación:

$$\left\{ \rho_j v_j v_j \right\} = \left\{ \rho_j \right\}^j \left\{ v_j v_j \right\}^j \tag{4-143}$$

que se reduce a

$$\left\{ \rho_j v_j v_j \right\} = \rho_j \left\{ v_j v_j \right\}^j \tag{4-144}$$

En esta ecuación el producto de las velocidades no puede ser relacionado a un valor típico promediado en la región (R) pues esto implicará que el promedio de región para este producto fuese semejante al interior de los cúmulos de tamaño (j).

b) El flux de momentum promedio (ec.4-145) en la región (R), desviaciones espaciales (ec. 4-147) y turbulentas (ec. 4-148) que ocurren en el área formada por los cúmulos de tamaño (j) en contacto con otros de diferente tamaño (ó incluso de tamaño (j)) se desprecian porque los procesos de erosión y engrosamiento que los generan no contribuyen a cambiar la identidad de estos cúmulos.

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot v_j (v_j - \bar{w}) \rho_j dS = 0 \quad (4-145)$$

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{u_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \rho_j dS = 0 \quad (4-146)$$

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{u_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \rho_j dS = 0 \quad (4-147)$$

Considerando lo anterior el balance de momentum promediado en la región se simplifica en la ec. (4-148):

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_j \rho_j v_j)}_{\text{cambio temporal de momentum en los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot (\alpha_j \rho_j \{v_j v_j\}^j)}_{\text{flujo convectivo de momentum debido a los cúmulos de tamaño (j)}} = \underbrace{-\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\langle \overline{u_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right)}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales y turbulentos en los cúmulos de tamaño (j) promediados en la region (R)}} - \underbrace{\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\langle \overline{u_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right)}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales y turbulentos en los cúmulos de tamaño (j) promediados en la region (R)}} \\ & - \underbrace{\alpha_j \left\{ \frac{\rho_j}{V} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \left(\overline{u_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right) dA + \frac{1}{V} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \left(\overline{u_{\sigma j}} \overline{u_{\sigma j}} \right) dA \right\}^j}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a los esfuerzos de Reynolds en la interfase generados por los cúmulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \rho_j \bar{g}}_{\text{fuerzas volumetricas aplicadas a los cúmulos de tamaño (j) promediadas en la region (R)}} - \\ & - \underbrace{\alpha_j F_j v_j}_{\text{perdida de momentum de los cúmulos de tamaño (j) debido a su fragmentacion}} + \underbrace{\alpha_j F_{j+p} v_j}_{\text{momentum aportado a los cúmulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros.}} \\ & + \underbrace{\alpha_j A_{j-p,p} v_j}_{\text{momentum aportado a los cúmulos (j) por la agregacion binaria de otros}} - \underbrace{\alpha_j A_{j,p} v_j}_{\text{perdida de momentum de los cúmulos de tamaño (j) debido a su agregacion con otros}} + \underbrace{\alpha_j \tilde{\mathcal{S}}_j}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentacion de los cúmulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \tilde{\mathcal{S}}_j}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentacion de los cúmulos de tamaño (j) en la region (R)}} \\ & + \underbrace{\alpha_j \tilde{\mathcal{S}}_{j+p}}_{\text{fuerza promedio asociada a los cúmulos de tamaño (j) por fragmentacion de los cúmulos de tamaño (j+p) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \tilde{\mathcal{S}}_{j-p,p}}_{\text{fuerza promedio asociada a la agregacion de los cúmulos de tamaño (j) por agrgacion de otros de tamaño (j-p,p) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \tilde{\mathcal{S}}_{j,p}}_{\text{fuerza promedio asociada a la formacion de cúmulos de tamaño (j) por la agregacion de otros de tamaño (p) en la region (R)}} \quad \bar{x} \in R \quad (4-148) \end{aligned}$$

Este balance representa el cambio temporal (promedio) de los cúmulos de tamaño (j) por su interacción con cúmulos de diferente tamaño (incluso de tamaño (j)) de donde se genera flujo convectivo, desviaciones espaciales y fluctuaciones turbulentas, influenciados por los procesos de agregación y fragmentación donde también se consideran las fuerzas asociadas a estos.

(iii) Balance de energía térmica promediado en la región.

La ec. (4-108) que representa el balance de energía térmica para los cúmulos de tamaño (j) se promedia en el volumen de región para obtener la ec. (4-149)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_j \left\{ \rho_j h_j \right\}^j \right)}_{\text{cambio temporal de entalpia por los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \rho_j h_j v_j \right\}^j \right)}_{\text{flujo convectivo de entalpia en los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} = \underbrace{-\alpha_j \left\{ \nabla \cdot \varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} - \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \left\langle \overline{\overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right\rangle^{\sigma j} \right\}^j}_{\text{transporte dispersivo de entalpia de los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} \\
 & - \underbrace{\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right)}_{\text{transporte de entalpia debido a las fluctuaciones en los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} - \underbrace{\alpha_j \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}} dA + \frac{\rho_\sigma}{V} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}} dA \right\}^j}_{\text{flujo de entalpia por las fluctuaciones generadas por el transporte de sólidos}} - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot (v_j - \bar{w}) h_j \rho_j dS}_{\text{flux convectivo de entalpia debido a los procesos de erosión y engrosamiento (a nivel de partícula)}} - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \rho_j dS}_{\text{flux de entalpia por las fluctuaciones generadas por el transporte de sólidos}} - \underbrace{\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{\overline{q_{\gamma j}}} \right\rangle dS}_{\text{flux de energia transmitido por conduccion a los cúmulos de tamaño (j)}} \\
 & - \underbrace{\nabla \cdot \left(\alpha_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{q_{\gamma j}}} \right\rangle^j \right\}^j \right)}_{\text{flujo de energia por conduccion de los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ F_j \Delta H_j \right\}^j}_{\text{energia liberada por la fragmentacion de los cúmulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ F_{j+p} \Delta H_{j+p} \right\}^j}_{\text{energia promedio liberada en el proceso de fragmentacion de los cúmulos (j+p) para obtener cúmulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \\
 & + \underbrace{\alpha_j \left\{ A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p} \right\}^j}_{\text{energia promedio requerida para el proceso de agregacion de los cúmulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j \left\{ A_{j,p} \Delta H_{j,p} \right\}^j}_{\text{energia promedio para la agregacion de los cúmulos (j) con otros cúmulos en la region (R)}}
 \end{aligned} \tag{4-149}$$

que se simplifica con las siguientes suposiciones:

a) El término $\left\{ \rho_j h_j \right\}^j$ es tratado en forma semejante a $\left\{ \rho_j v_j \right\}^j$ en el balance de masa (promediado en la región) de esta manera obtenemos un valor típico para la entalpía que es semejante al valor característico del modelo pseudohomogéneo (ec. 4-150).

$$\{\rho_j h_j\}^j = \rho_j h_j \quad (4-150)$$

Para el término $\{\rho_j h_j v_j\}$ se supone la siguiente relación:

$$\{\rho_j h_j v_j\} = \{\rho_j\}^j \{h_j v_j\}^j \quad \text{ó} \quad \{\rho_j h_j v_j\} = \rho_j \{h_j v_j\}^j \quad \{\Psi_j\}^j = \Psi_j \quad (4-151)$$

donde el producto $\{h_j v_j\}^j$ no puede expresarse como un valor típico ya que sería semejante al valor de los cúmulos de tamaño (j) en el modelo pseudohomogéneo.

b) El flux de entalpía, energía turbulenta y por conducción que ocurren en el área formada por los cúmulos de tamaño (j) y otros de diferente tamaño (incluso de tamaño (j)) se desprecia debido a que los procesos de erosión y engrosamiento no contribuyen a cambiar la identidad de los cúmulos de ese tamaño.

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot (v_j - \bar{w}) h_j \rho_j dS = 0 \quad (4-152)$$

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{h'_{\sigma j} u'_{\sigma j}} \right\rangle^{\sigma j} \rho_j dS = 0 \quad (4-153)$$

$$-\sum_{jk/j} \frac{1}{R} \int_{S_{jk}} \bar{N}_{jk} \cdot \left\langle \overline{q'_{\gamma j}} \right\rangle dS = 0 \quad (4-154)$$

El balance de energía térmica promediado en la región (R) considerando las suposiciones anteriores se reduce en la ec. (4-155). Representa el cambio de entalpía promedio debido a los cúmulos de tamaño (j) que interactúan con otros de diferente tamaño generando un flujo convectivo de entalpía, flujo dispersivo y turbulento. Además del flujo por conducción se considera la energía aportado por los procesos de agregación y fragmentación.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_j \rho_j h_j)}_{\text{cambio temporal de entalpia por los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot (\alpha_j \rho_j \{h_j v_j\}^j)}_{\text{flujo convectivo de entalpia en los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} = \underbrace{-\alpha_j \left\{ \nabla \cdot \mathcal{E}_\gamma \left\langle \widetilde{h}_{\gamma j} \widetilde{u}_{\gamma j} \right\rangle^{\gamma j} - \nabla \cdot \mathcal{E}_\sigma \left\langle \widetilde{h}_{\sigma j} \widetilde{u}_{\sigma j} \right\rangle^{\sigma j} \right\}^j}_{\text{transporte dispersivo de entalpia de los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} \\
& \underbrace{-\rho_j \nabla \cdot \left(\alpha_j \left\langle \widetilde{h}_{\gamma j} \widetilde{u}_{\gamma j} \right\rangle^{\gamma j} \right)^j - \alpha_j \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{(\gamma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \overline{h'_{\gamma j} u'_{\gamma j}} dA + \frac{\rho_\sigma}{V} \int_{A_{(\sigma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \overline{h'_{\sigma j} u'_{\sigma j}} dA \right\}^j}_{\text{transporte de entalpia debido a las fluctuaciones en los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} - \\
& \underbrace{\nabla \cdot \left(\alpha_j \left\langle \widetilde{q}_{\gamma j} \right\rangle^j \right)}_{\text{flujo de energia por conduccion de los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j F_j \Delta H_j}_{\text{energia liberada por la fragmentacion de los cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j F_{j+p} \Delta H_{j+p}}_{\text{energia promedio liberada en el proceso de fragmentacion de los cumulos (j+p) para obtener cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \\
& \underbrace{\alpha_j A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p}}_{\text{energia promedio requerida para el proceso de agregacion de los cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\alpha_j A_{j,p} \Delta H_{j,p}}_{\text{energia promedio para la agregacion de los cumulos (j) con otros cumulos en la region (R)}} \quad \bar{x} \in R \quad (4-155)
\end{aligned}$$

El promediado de las ecuaciones del modelo pseudohomogéneo en el volumen de región permite representar los procesos de transporte de masa, momentum y energía que ocurren en promedio en la región (R) debido a la interacción de los cúmulos de tamaño (j) con otros de diferente tamaño (ó incluso de tamaño (j)) debido a los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos.

Las características mas relevantes del modelo se describen a continuación:

(i) El volumen promediado de región (R) esta formado de regiones heterogéneas identificadas para cada tamaño característico de cúmulo, que tiene un diámetro de 10 mm (*Hiroyuki, 1990*) que con una fracción volumen de vapor entre ellos de 0.9 se determina que el diámetro del volumen de región es de 10 cm.

(ii) Los cúmulos de tamaño (j) que forman la región (j) sólo interactúan con otros cúmulos de diferente tamaño (ó incluso de tamaño (j)) a través de los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos mediante el transporte de masa, momentum y energía representados en los balances correspondientes.

(iii) Los procesos de erosión y engrosamiento a nivel de partícula a los que contribuye la región diluida y los cúmulos se desprecian debido a que el flujo de masa, momentum y energía relacionado a estos, no afectan en promedio la identidad de los cúmulos que pertenecen a la región (j).

(iv) Los valores típicos de los cúmulos de tamaño (j) (promediados en el volumen de región (R)) relacionados con la densidad, velocidad, entalpia y con los términos de los procesos de agregación y fragmentación son semejantes a los valores típicos del modelo pseudohomogéneo.

(v) La turbulencia generada debido a los procesos de agregación y fragmentación de los cúmulos de tamaño (j) con otros esta soportada por el vapor contenido en los cúmulos, de manera semejante para la energía turbulenta, y desviaciones espaciales, excepto para la dispersión.

En la siguiente sección describiremos la última estructura jerárquica para obtener los respectivos balances de población de masa momentum y energía mediante la integración de estas ecuaciones en una sección del tubo elevador.

4.6. Fundamentos para la integración del volumen de región en el volumen fijo.

Para obtener el balance de población para los cúmulos de tamaño (j) con los balances de población de momentum y energía asociados es necesario expresar las ecuaciones del modelo de región en términos de la densidad numérica de los cúmulos de tamaño (j) e integrar en el volumen de una sección del tubo elevador que tiene un diámetro característico de 1m.

Los balances de población que se obtienen representan la evolución temporal del número de cúmulos de tamaño (j) (densidad numérica) debido a los procesos de agregación y fragmentación que ocurren con otros cúmulos de diferente tamaño (incluso del mismo), que viajan en un régimen de fluidización turbulenta localizados en una sección del tubo elevador (riser). Estos procesos tienen asociados un cambio de masa momentum y energía que modifica el número de cúmulos (de tamaño (j)) que se describen a través de los balances de población de masa, momentum y energía.

A continuación comenzaremos este desarrollo dividiendo las ecuaciones del modelo de región entre la masa promedio del cúmulo de tamaño (j)

$$\bar{C}_j = \bar{n}_j \left(\frac{4}{3} \Pi a^3 \right) \rho_\sigma \quad (4-156)$$

donde (ρ_σ) es la densidad del sólido, (a) el radio de la partícula sólida y (\bar{n}_j) es el número medio de partículas en el cúmulo de tamaño (j) (ec. 4-157).

$$\bar{n}_j = \frac{1}{2} (n_j + n_{j+1} - 1) \quad (4-157)$$

De esta manera podemos agrupar las variables (α_j), (ρ_j) y (\bar{C}_j) que representan la fracción volumen de la región (R_j), densidad típica en la región (R) y la masa promedio del cúmulo de tamaño (j) en términos de la densidad numérica (N_j) de los cúmulos de este tamaño en las ecuaciones correspondientes (ecs. 4-159, 4-161).

$$N_j = \frac{\alpha_j \rho_j}{\bar{C}_j} \quad (4-158)$$

(i) Balance de masa en función de la densidad numérica de cúmulos de tamaño (j).

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(N_j)}_{\text{cambio temporal de la densidad numérica de los cúmulos de tamaño (j)}} + \underbrace{\nabla \cdot (N_j v_j)}_{\text{flujo del número de cúmulos de tamaño (j)}} = - \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_j}_{\text{tasa de cambio del número de cúmulos de tamaño (j) que se pierden por fragmentación}} + \\
 & + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p}}_{\text{tasa de cambio de los cúmulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentación de otros de tamaño (j+p)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j-p,p)}}_{\text{tasa de cambio de los cúmulos de tamaño (j) que surgen de la agregación de otros}} - \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j,p)}}_{\text{tasa de cambio de los cúmulos de tamaño (j) que se pierden por agregación con otros de tamaño (p)}} \quad (4-159)
 \end{aligned}$$

(ii) Balance de momentum en función de la densidad numérica de cúmulos de tamaño (j).

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(N_j v_j)}_{\text{cambio temporal de momentum en el número de cúmulos de tamaño (j) promediado en la región (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot (N_j \{v_j v_j\}^j)}_{\text{flujo convectivo debido al No de cúmulos de tamaño (j) promediado en la región (R)}} = - \underbrace{\nabla \cdot \left(N_j \left\{ \left\langle \overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right)}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales debido al No de cúmulos de tamaño (j) promediado en la región (R)}} + \\
 & - \underbrace{\left\{ \nabla \cdot \left(N_j \left\{ \left\langle \overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right) - \frac{\alpha_j}{C_j} \left\{ \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \left(\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}} \right) dA \right\}}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones provocadas por el No de cúmulos de tamaño (j) promediado en la región (R)}} \\
 & + \underbrace{N_j \bar{g}}_{\text{fuerzas volumétricas aplicadas al No de cúmulos de tamaño (j) promediadas en la región (R)}} - \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_j v_j}_{\text{pérdida de momentum del No de cúmulos de tamaño (j) debido a su fragmentación en la región (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} v_j}_{\text{momentum aportado por el No de cúmulos que surgen de la fragmentación de otros en la región (R)}} + \\
 & + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} v_j}_{\text{momentum aportado al No de cúmulos de tamaño (j) por la agregación binaria de otros.}} - \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} v_j}_{\text{pérdida de momentum del No de cúmulos de tamaño (j) debido a su agregación con otros en la región (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{F}_j}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentación del No de cúmulos de tamaño (j) en la región (R)}} + \\
 & + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{F}_{j+p}}_{\text{fuerza promedio asociada al No de cúmulos de tamaño (j) por fragmentación de los cúmulos de tamaño (j+p) en la región (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{F}_{j-p,p}}_{\text{fuerza promedio asociada a la agregación del No de cúmulos de tamaño (j) por agregación de otros de tamaño (j-p,p) en la región (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{F}_{j,p}}_{\text{fuerza promedio asociada a la formación del No de cúmulos de tamaño (j) por la agregación de otros de tamaño (p) en la región (R)}} \quad (4-160)
 \end{aligned}$$

(iii) Balance de energía en función de la densidad numérica de cúmulos de tamaño (j).

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (N_j h_j)}_{\text{cambio temporal de entalpia por el numero de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\nabla \cdot (N_j \{h_j v_j\}^j)}_{\text{flujo convectivo de entalpia del numero de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} = - \frac{\alpha_j}{C_j} \underbrace{\left\{ \nabla \cdot \mathcal{E}_\gamma \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} - \nabla \cdot \mathcal{E}_\sigma \left\langle \overline{\overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right\rangle^{\sigma j} \right\}^j}_{\text{flujo dispersivo de entalpia del numero de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} \\
 & - \underbrace{\left\{ \nabla \cdot \left(N_j \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right)^j \right\}}_{\text{transporte de entalpia debido a las fluctuaciones del numero de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} - \frac{\alpha_j}{C_j} \left\{ \frac{1}{v} \int_{A_{(\gamma)\sigma j}} \vec{n}_{(\gamma)\sigma j} \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} dA + \frac{\rho_\sigma}{v} \int_{A_{(\sigma)\sigma j}} \vec{n}_{(\sigma)\sigma j} \overline{\overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} dA \right\}^j \\
 & - \underbrace{\nabla \cdot \left(N_j \left\langle \overline{\overline{q_{\gamma j}}} \right\rangle^j \right)}_{\text{flujo de energia por conduccion del numero de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_j \Delta H_j}_{\text{energia liberada por la fragmentacion del No de cumulos de tamaño (j) promediado en la region (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} \Delta H_{j+p}}_{\text{energia promedio liberada en el proceso de fragmentacion de los cumulos (j+p) para aumentar el No de cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \\
 & + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p}}_{\text{energia promedio requerida para el proceso de agregacion del No de cumulos de tamaño (j) en la region (R)}} + \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} \Delta H_{j,p}}_{\text{energia promedio para la agregacion del No de cumulos de tamaño (j) con otros en la region (R)}} \tag{4-161}
 \end{aligned}$$

Para integrar las ecs. (4-159)-(4-161) en una sección del tubo elevador (volumen fijo, v_f) se utiliza la ec. (4-162).

$$\iiint_{v_f} \{\Psi\}^j dv \tag{4-162}$$

Los teoremas utilizados se presentan a continuación:

Teorema de la divergencia de Gauss en un volumen fijo (v_f)

$$\iiint_{v_f} \nabla \cdot \{\Psi\}^j dv = \oiint_{S_{v_f}} \vec{N}_{j_s} \cdot \{\Psi\}^j dS_{v_f} \tag{4-163}$$

Teorema de transporte

$$\iiint_{v_f} \frac{\partial}{\partial t} \{\Psi\}^j dv = \frac{d}{dt} \iiint_{v_f} \{\Psi\}^j dv - \oiint_{S_{v_f}} \vec{N}_{j_s} \cdot \vec{W} \{\Psi\}^j dS_{v_f} \tag{4-164}$$

La integral de área que surge de estos teoremas se descompone solamente en la superficie de entrada y salida de la sección del tubo elevador pues su superficie no es permeable. La siguiente ecuación lo ejemplifica:

$$\oint_{S_{vf}} \overline{N}_{js} \cdot \{\Psi\}^j dS_{vf} = \oint_{S_{vf\text{entrada}}} \overline{N}_{js} \cdot \{\Psi\}^j dS_{vf} + \oint_{S_{vf\text{salida}}} \overline{N}_{js} \cdot \{\Psi\}^j dS_{vf} \quad (4-165)$$

Considerando el desarrollo anterior, se presentan las ecuaciones correspondientes a los balances de población para los cúmulos de tamaño (j) que tienen asociado un balance de población de momentum y un balance de población de energía.

4.6.1. Descripción de los balances de población para los cúmulos de tamaño (j).

(i) Balance de población para los cúmulos de tamaño (j).

Este balance representa el cambio temporal del número de cúmulos de tamaño (j) debido al flujo de masa a la entrada y salida de una sección del tubo elevador y los procesos de agregación y fragmentación que ocurren con los cúmulos de tamaño (j) y otros de diferente tamaño.

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{vf} (N_j) dv}_{\text{cambio temporal en el No. de cúmulos de tamaño (j)}} = & - \underbrace{\oint_{S_{vf}} \overline{N}_{js} \cdot N_j (v_j - \overline{W}) dS_{vf}}_{\text{flux de masa de entrada y salida de la superficie que corresponde al volumen fijo debido al No de cúmulos de tamaño (j)}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No de cúmulos de tamaño (j) que se pierden por fragmentacion en el volumen fijo}} + \\ & + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No de cúmulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros de tamaño (j+p) en el volumen fijo}} + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j-p,p)} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No.de cúmulos de tamaño (j) que surgen de la agregacion de otros en el volumen fijo}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j,p)} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No. de cúmulos de tamaño (j) que se pierden por agregacion en otros de tamaño (p) en el volumen fijo}} \end{aligned} \quad (4-166)$$

(ii) Balance de población para el momentum de los cúmulos de tamaño (j).

El balance de población de momentum describe en forma explícita los efectos que provoca el cambio en el número de cúmulos de tamaño (j) a causa de los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos y otros cúmulos de diferente tamaño en una sección del tubo elevador.

El cambio de momentum esta relacionado con los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre los cúmulos de tamaño (j) en un sistema altamente turbulento. Las contribuciones para este cambio se deben al flujo de naturaleza convectiva a la entrada y salida de una sección del tubo elevador, esfuerzos de Reynolds espaciales y el flujo turbulento que además se debe a los procesos internos desarrollados al interior de los cúmulos en el sistema y los relacionados con dos

tipos de fuerzas, las asociadas a los procesos de agregación y fragmentación y las volumétricas ejercidas por la fuerza de gravedad sobre el número de cúmulos de ese tamaño.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_f} (N_j v_j) dv}_{\text{velocidad de cambio de momentum en el No de cúmulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} &= \underbrace{\oint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot \{v_j v_j\}^j N_j dS_{vf} - \oint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot v_j \bar{W} N_j dS_{vf}}_{\text{flujo convectivo de momentum a la entrada y salida de la superficie del volumen fijo debido al No de cúmulos de tamaño (j)}} - \\
 &- \underbrace{\oint_{S_{vf}} \bar{N}_{svf} \cdot \left\{ \left\langle \overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j N_j dS_{vf}}_{\text{flujo de momentum debido a las desviaciones espaciales a la entrada y salida de la superficie del volumen fijo debido al No de cúmulos de tamaño (j)}} - \underbrace{\oint_{S_{vf}} \bar{N}_{svf} \cdot \left\{ \left\langle \overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j N_j dS_{vf}}_{\text{flujo de momentum debido a la turbulencia la entrada y salida de la superficie del volumen fijo debido al No de cúmulos de tamaño (j)}} \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha_j}{C_j} \left\{ \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \left(\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}} \right) dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \left(\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}} \right) dA \right\}^j}_{\text{transporte de cantidad de movimiento debido a las fluctuaciones provocadas por el No de cúmulos de tamaño (j) promediado en el volumen fijo}} \\
 &+ \underbrace{\int_{V_f} N_j \bar{g} dv}_{\text{fuerzas volumetricas aplicadas al No. de cúmulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} - \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j v_j \right) dv}_{\text{perdida de momentum del No. de cúmulos de tamaño (j) debido a su fragmentacion en el vol. fijo}} + \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} v_j \right) dv}_{\text{momentum aportado por la fragmentacion del No de cúmulos que surgen de la fragmentacion de otros en el vol. fijo}} + \\
 &+ \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} v_j \right) dv}_{\text{momentum aportado al No. de cúmulos de tamaño (j) por la agregacion binaria de otros en el vol. fijo}} - \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} v_j \right) dv}_{\text{perdida de momentum del No. de cúmulos de tamaño (j) debido a su agregacion con otros en el vol. fijo}} + \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{I}_j \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentacion del No. de cúmulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} \\
 &+ \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{I}_{j+p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada al No de cúmulos de tamaño (j) por fragmentacion de los cúmulos (j+p) en el vol. fijo}} + \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{I}_{j-p,p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la agregacion del No de cúmulos de tamaño (j) por agregacion de otros de tamaño (j-p,p) en el vol. fijo}} + \underbrace{\int_{V_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{I}_{j,p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la formacion del No de cumulos de tamaño (j) por la agregacion de otros de tamaño (p) en el vol. fijo}}
 \end{aligned} \tag{4-167}$$

(iii) Balance de población para la energía térmica de los cúmulos de tamaño (j).

El cambio temporal de entalpía generado por los cúmulos de tamaño (j) se debe al flujo convectivo, flujo dispersivo y turbulento, al que se suman los procesos internos que ocurren al interior de los cúmulos de tamaño (j) y los relacionados con la energía utilizada en los procesos de agregación y fragmentación.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{v_f} (N_j h_j) dv}_{\text{cambio temporal de entalpia debido al No de cumulos de tamaño (j)}} &= \underbrace{\iint_{v_f} \overline{N_{js}} \cdot \{h_j v_j\}^j N_j dS_{vf} - \iint_{v_f} \overline{N_{js}} \cdot \overline{W h_j} N_j dS_{vf}}_{\text{flujo convectivo de entalpia que entra y sale de la superficie del volumen fijo producido por el No de cumulos de tamaño (j)}} - \theta \\
-\frac{\alpha_j}{C_j} \int_{v_f} \left\{ \nabla \cdot \mathcal{E}_\gamma \left\langle \overline{h_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} - \nabla \cdot \mathcal{E}_\sigma \left\langle \overline{h_{\sigma j}} \overline{u_{\sigma j}} \right\rangle^{\sigma j} \right\} dv &+ \\
\underbrace{\iint_{S_{vf}} \overline{N_{svf}} \cdot \left\langle \overline{h_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} \right\rangle^{\gamma j} N_j dS_{vf} - \frac{\alpha_j}{C_j} \int_{v_f} \left\{ \frac{1}{v} \int_{A_{(\gamma)\sigma j}} \overline{n_{(\gamma)\sigma j}} \overline{h_{\gamma j}} \overline{u_{\gamma j}} dA + \frac{\rho_\sigma}{v} \int_{A_{(\sigma)\sigma j}} \overline{n_{(\sigma)\sigma j}} \overline{h_{\sigma j}} \overline{u_{\sigma j}} dA \right\}^j dv}_{\text{flujo de entalpia debido a las fluctuaciones del No de cumulos de tamaño(j) en el volumen fijo}} & \\
+ \int_{v_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j \Delta H_j \right) dv + \int_{v_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} \Delta H_{j+p} \right) dv + \int_{v_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p} \right) dv &+ \\
\underbrace{\int_{v_f} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} \Delta H_{j,p} \right) dv}_{\text{energia requerida para el proceso de agregacion del No.de cumulos de tamaño (j) con otros en el volumen fijo}} & \tag{4-168}
\end{aligned}$$

(iv) El resumen de las características más relevantes del sistema se presenta a continuación:

(I) El promedio de las ecuaciones del modelo de región es aplicado a una sección del reactor cuyo diámetro es típicamente de (1 m). La masa en el sistema se conserva y la forman el número de cúmulos de tamaño (j) que interactúa con otros de diferente tamaño (o del mismo) a través de los procesos de agregación y fragmentación que ocurren entre ellos.

(II) la evolución en el número de cúmulos de tamaño (j) se debe a:

- a) Los flujos de entrada y salida a través de la sección transversal del tubo elevador debido a la masa contenida, que genera flujo de momentum y energía.
- b) La turbulencia del sistema (así como su dispersión) es aportada por el flujo de vapor de los cúmulos que entran y salen del tubo elevador y los debido a procesos internos provenientes del interior de los cúmulos que además producen energía.
- c) Los procesos de agregación y fragmentación debido a la interacción entre los cúmulos de tamaño (j) y de otro tamaño en el volumen fijo (v_f) se representan mediante un esquema cinético. Este cambio de masa que afecta el número de cúmulos de tamaño (j) es posible

relacionarlo con el cambio de momentum y energía asociados a ellos mediante los balances de población correspondientes.

En el Capítulo siguiente se realiza un análisis comparativo de las metodologías para obtener balances de población, específicamente para el balance de masa que corresponde al balance de población de los cúmulos de tamaño (j).

*CAPITULO V. COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS
PARA OBTENER EL BALANCE DE POBLACIÓN*

5.1. Generalidades

Las metodologías para obtener el balance de población para los cúmulos de un tamaño característico se describen en el Capítulo III y Capítulo IV, por esta razón sólo se mencionan algunos aspectos importantes que permitan su comparación. Este balance es descrito en forma general como un balance de masa en términos estadísticos, para conocer el cambio temporal del número de una variable en función de los procesos que se desarrollen en el sistema.

El transporte de masa que se efectúa en un sistema generalmente tiene asociado un transporte de momentum y de energía, cuando así ocurre es importante describirlos claramente para una mejor comprensión del proceso. En este sentido el balance de población que comúnmente se utiliza está limitado, porque los efectos del transporte de momentum y energía son globalizados a través de modelos relacionados a la variable de estudio.

Las metodologías comúnmente utilizadas para su obtención tienen fundamento en analogías con la ecuación de Boltzmann, y el desarrollo clásico de balances macroscópicos. Para el primer caso puede obtenerse el balance de población en un tubo elevador y en un tanque agitado. Este último es equivalente al elaborado por Zamora (1990).

Una nueva forma que se desarrolla para obtener este balance es mediante la aplicación de promedios multiescala a las ecuaciones hidrodinámicas (locales). Este balance es macroscópico pero no estadístico porque no contiene una función de distribución. Describe con mayor detalle los procesos relacionados con la variable de estudio ya que tiene asociado un balance de población para el momentum y otro para la energía relacionados a estos.

En la siguiente sección se compara el balance de población para los cúmulos de tamaño (j) obtenido por las metodologías descritas en el Capítulo III y Capítulo IV.

5.2. Comparación del balance de población para los cúmulos de tamaño (j) obtenido por diferentes metodologías.

El análisis comparativo se desarrollará con las ecuaciones de la Tabla (5-1). La comparación de estos balances se hará considerando las características del sistema, geometría del equipo donde se realizan los procesos y la estructura de las tasas de agregación.

Comenzaremos con el balance de población obtenido por analogías con la ecuación de Boltzmann (ec. (3-12)) que es un balance estadístico general (Tabla 5-1, (1)) porque representa el sistema en un espacio de variables mediante una función de distribución (ec. 3-7) compleja y un lugar geométrico por definir. De este balance se puede generar el balance de población en un tanque agitado (de flujo continuo) semejante al elaborado por Zamora (1990) y en el tubo elevador. En esta descripción los cúmulos forman un sistema disperso diluido, donde se comportan como moléculas de forma esférica (de diferente tamaño), que no se deforman y se describen en función de su radio (r). El valor absoluto de la velocidad relativa entre el cúmulo y el gas es pequeño y los procesos de agregación y fragmentación se describen a través de modelos que representan la interacción entre estos cúmulos y otros de diferente tamaño (secc. 3.2.1.2. (a), (b) y secc. 3.2.2.1.).

Para el balance de población en el tubo elevador (1a) la función de distribución se integra sobre el espacio de velocidades de la que se obtiene una nueva función de distribución reducida ($G_j(r, \bar{x}, t)$) y valores promedios para la velocidad (ec. 3-14) y el radio del cúmulo de tamaño (j) (ec. 3-15), en un nuevo espacio de variables mediante el desarrollo de la Sección 3.2.1.2.

En el caso del balance de población en un tanque agitado (de flujo continuo) la función de distribución (ec. 3-7) es integrada sobre el campo de velocidad y posición para obtener una función de distribución reducida (A_j), que es fundamental tanto para el desarrollo de la ec. (3-37) obtenida por un procedimiento clásico de balances macroscópicos como para su equivalente fundamentada en la ecuación análoga a la de Boltzmann. En el balance desarrollado por Zamora (1990) los procesos de agregación y fragmentación son descritos por funciones que representan: las tasas de agregación y fragmentación, frecuencia y eficiencia de colisión.

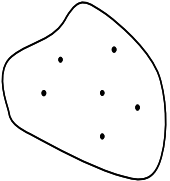
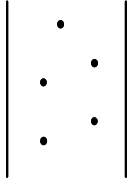
El balance de población desarrollado a través de los promedios multiescala no es un balance estadístico como es el caso de los anteriores pero tiene la ventaja de representar el cambio temporal del número de cúmulos de tamaño (j) en el sistema requerido y de una forma menos restrictiva en términos de la estructura y comportamiento de los cúmulos.

El sistema está localizado en una sección del tubo elevador donde el cambio temporal en el número de cúmulos de tamaño (j) se debe al flujo de entrada y salida del tubo elevador, y los procesos de agregación y fragmentación por los que interactúan. Los cúmulos son esféricos y están formados de partículas sólidas no porosas (rígidas). Su tamaño característico depende del intervalo determinado por el número de partículas (Secc. 4.4.). Tienen una fracción volumen de sólidos constante. Poseen una densidad, velocidad y entalpía típica independiente de su masa. Los procesos de agregación y fragmentación entre ellos se representan mediante un esquema cinético donde es posible asociar el momentum y energía generado a través de un balance de población para el momentum y otro para la energía.

La ventaja principal de este balance en comparación con el de Zamora (1990) y el fundamentado con la ecuación de Boltzmann es la posibilidad que tiene de describir el balance de población de momentum y energía que por su forma explícita describe mejor el proceso. Tiene fundamentos menos restrictivos para los cúmulos que en lugar de asemejarlos a moléculas se describen considerando una estructura más real en la que influyen los efectos internos y externos a ellos (forman un sistema disperso diluido).

Los procesos de agregación y fragmentación se representan por un esquema cinético que no será tan complejo como los modelos requeridos por las ecuaciones (1a) y (1b) de la Tabla (1-5) pues en este caso los efectos del transporte de momentum y de energía se globalizan.

Tabla 5-1. Balance de población para los cúmulos de tamaño (j) obtenido por diferentes metodologías.

Metodología Aplicada	Cambio temporal en el número de cúmulos de tamaño (j) (a)	Flujos de entrada (b) y salida (c) de los cúmulos de tamaño (j).	Procesos de agregación (d) y fragmentación (e) entre los cúmulos de tamaño (j) y otros de diferente tamaño.
<p>(1) Basada en analogías con la ecuación de Boltzmann</p> 	$\underbrace{\iint \frac{\partial}{\partial t} f_j(r_j, \bar{x}_j, \bar{v}_j, t) d\bar{v} d\bar{x}}_{(a)} =$	$\underbrace{-\iint \nabla_{\bar{x}} \cdot (\bar{v} f_j) d\bar{v} d\bar{x}}_{(b)} -$ $\underbrace{-\iint \frac{\partial}{\partial r_j} (R_j f_j) d\bar{v} d\bar{x}}_{(c)} -$ $\underbrace{-\iint \nabla_{\bar{v}} \cdot (\bar{F} f_j) d\bar{v} d\bar{x}}_{(c)}$	$\underbrace{\iint A_j d\bar{v}_j d\bar{x}}_{(d)} + \underbrace{\iint C_j d\bar{v}_j d\bar{x}}_{(e)}$
<p>(1a) Balance macroscópico en el tubo elevador</p> 	$\underbrace{\frac{\partial G_j}{\partial t}}_{(a)} =$	$\underbrace{-\nabla_{\bar{x}} \cdot (\bar{V}_j G_j)}_{(b)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_j} (R_j G_j)}_{(c)}$	$\underbrace{\int A_j d\bar{v}_j}_{(d)} + \underbrace{\int C_j d\bar{v}_j}_{(e)}$

CAPITULO VI. PROPUESTA DE CERRADURA

6.1. Fundamentos.

Matemáticamente un sistema de ecuaciones puede ser resuelto cuando el número de variables es igual al número de incógnitas para un sistema lineal. Para sistemas complejos descritos a través de ecuaciones ordinarias con términos no lineales el número de grados de libertad puede ser tan grande que se necesite incluir modelos externos, relaciones independientes ó valores experimentales.

Para el caso del modelo desarrollado en este trabajo se tiene un número de grados de libertad de 14 cuando se resta a las 32 variables 7 modelos de comportamiento y dos relaciones independientes (ec. 4-102, 4-158). Sin embargo aún faltan muchas por definir por lo tanto, la propuesta deberá considerar la posibilidad de obtenerlas en forma experimental, por investigaciones teóricas para sistemas semejantes ó reducirlas mediante una adimensionalización del modelo, aunque en realidad pudiera ocurrir una combinación de todas.

En esta sección sólo serán descritos los 7 modelos de comportamiento que representan los esfuerzos turbulentos, energía disipativa, y turbulenta, y los procesos de agregación-fragmentación generados por la interacción de los cúmulos, dejando para un análisis futuro el resto de las variables.

6.2. Cerradura para la ecuación de balance de población para los cúmulos de tamaño (j).

El esquema cinético propuesto para las tasas de agregación y fragmentación en el balance de población de la ec. (4-167) es el siguiente:

para los procesos de agregación

$$A_{(j-p,p)} = K_{(j-p,p)} C_{j-p} C_p \quad A_{(j,p)} = K_{a(j,p)} C_j C_p \quad (6-1)$$

y fragmentación binaria

$$F_j = K_f C_j \quad F_{j+p} = K_{f(j+p)} C_{j+p} \quad (6-2)$$

Cuando se sustituyen en la ec. (4-167) obtenemos la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{vf} (N_j) dv}_{\text{cambio temporal en el No. de cumulos de tamaño (j)}} = & \underbrace{- \oint_{Svf} \bar{N}_{js} \cdot N_j (v_j - \bar{W}) dS}_{\text{flux de masa de entrada y salida de la superficie que corresponde al volumen fijo debido al No de cumulos de tamaño (j)}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No de cumulos de tamaño (j) que se pierden por fragmentacion en el volumen fijo}} + \\
+ & \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No de cumulos de tamaño (j) que surgen de la fragmentacion de otros de tamaño (j+p) en el volumen fijo}} + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j-p,p)} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No.de cumulos de tamaño (j) que surgen de la agregacion de otros en el volumen fijo}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{(j,p)} \right) dv}_{\text{tasa de cambio del No. de cumulos de tamaño (j) que se pierden por agregacion en otros de tamaño (p) en el volumen fijo}} \quad (6-3)
\end{aligned}$$

que corresponde al balance de población de masa con un modelo de comportamiento que representa los procesos de agregación y fragmentación entre los cúmulos con un esquema cinético característico.

6.3. Cerradura para la ecuación de balance de población de momentum.

El modelo de comportamiento que contribuirá a reducir las variables de este balance representa los esfuerzos turbulentos generados principalmente por procesos internos al interior de los cúmulos de tamaño (j) y los que resultan de la interacción entre ellos y con otros cúmulos debido al flujo del vapor que contienen.

Los términos de las integrales de área para la fluctuación y desviación son transformados por el teorema de la divergencia de Gauss a integrales de volumen.

$$\begin{aligned}
\tau_{(t)} = & - \int_{vf} \nabla \cdot \left(N_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right) dv - \int_{vf} \nabla \cdot \left(N_j \left\{ \left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right\}^j \right) dv + \\
+ & \frac{\alpha_j}{C_j} \int_{vf} \left\{ \frac{\rho_{\gamma}}{\nu} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \vec{n}_{(\gamma\sigma)j} \cdot \overline{\overline{u_{\gamma j} u_{\gamma j}}} dA + \frac{1}{\nu} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \vec{n}_{(\sigma\gamma)j} \cdot \left(\overline{\overline{u_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right) dA \right\}^j dv \quad (6-4)
\end{aligned}$$

El modelo propuesto para el tensor de esfuerzos turbulentos es

$$\tau_{(t)} = - \int_{vf} \left\{ \mu_{(t)} \nabla v_j \right\}^j dv \quad (6-5)$$

donde la velocidad típica (v_j) equivale a la velocidad promedio intrínseca $\left\langle \overline{\overline{u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j}$ del vapor contenido en el cúmulo de tamaño (j), y la viscosidad turbulenta tiene una relación $\mu_{(t)} = 1000 \mu_{(l)}$ (Markatos, 1997).

Cuando este modelo se sustituye en la ec. (4-167) se reduce en

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{vf} (N_j v_j) dv}_{\text{velocidad de cambio de momentum en el No de cumulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} &= \underbrace{\iint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot \left\{ v_j v_j \right\}^j N_j dS_{vf} - \iint_{S_{vf}} \bar{N}_{js} \cdot v_j \bar{W} N_j dS_{vf}}_{\text{flujo convectivo de momentum a la entrada y salida de la superficie del volumen fijo debido al No de cumulos de tamaño (j)}} + \\
- \underbrace{\int_{vf} \left\{ \mu_{(t)} \nabla v_j \right\}^j dv}_{\text{esfuerzos turbulentos generados por el No. de cumulos de tamaño (j)}} &+ \underbrace{\int_{vf} N_j \bar{g} dv}_{\text{fuerzas volumetricas aplicadas al No. de cumulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j v_j \right) dv}_{\text{perdida de momentum del No. de cumulos de tamaño (j) debido a su fragmentacion en el vol. fijo}} + \\
+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} v_j \right) dv}_{\text{momentum aportado por la fragmentacion del No de cumulos que surgen de la fragmentacion de otros en el vol. fijo}} &+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} v_j \right) dv}_{\text{momentum aportado al No. de cumulos de tamaño (j) por la agregacion binaria de otros en el vol. fijo}} - \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} v_j \right) dv}_{\text{perdida de momentum del No. de cumulos de tamaño (j) debido a su agregacion con otros en el vol. fijo}} + \\
+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{S}_j \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la fragmentacion del No. de cumulos de tamaño (j) en el vol. fijo}} &+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{S}_{j+p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada al No de cumulos de tamaño (j) por fragmentacion de los cumulos (j+p) en el vol. fijo}} + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{S}_{j-p,p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la agregacion del No de cumulos de tamaño (j) por agregacion de otros de tamaño (j-p,p) en el vol. fijo}} + \\
+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} \mathfrak{S}_{j,p} \right) dv}_{\text{fuerza promedio asociada a la formacion del No de cumulos de tamaño (j) por la agregacion de otros de tamaño (p) en el vol. fijo}} &
\end{aligned} \tag{6-6}$$

6.4. Cerradura para la ecuación de balance de población de energía térmica.

Para el balance de población de energía térmica los modelos de comportamiento que se proponen representan los términos de energía turbulenta ($E_{(t)}$) y energía disipativa ($E_{(d)}$) generada, por flujo de vapor de los cúmulos de tamaño (j) que entra y sale de la sección del tubo elevador así como el flujo de energía por conducción y los procesos internos (turbulentos) al interior de los cúmulos.

$$\begin{aligned}
E_{(t)} &= -\frac{\alpha_j}{C_j} \int_{vf} \left\{ \nabla \cdot \varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} - \nabla \cdot \varepsilon_\sigma \left\langle \overline{\overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}}} \right\rangle^{\sigma j} \right\}^j dv - \int_{vf} \left(N_j \left\langle \overline{\overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}}} \right\rangle^{\gamma j} \right)^j dv \\
- \frac{\alpha_j}{C_j} \int_{vf} \left\{ \frac{1}{v} \int_{A_{(\gamma\sigma)j}} \bar{n}_{(\gamma\sigma)j} \overline{h_{\gamma j} u_{\gamma j}} dA + \frac{\rho_\sigma}{v} \int_{A_{(\sigma\gamma)j}} \bar{n}_{(\sigma\gamma)j} \overline{h_{\sigma j} u_{\sigma j}} dA \right\}^j dv &
\end{aligned} \tag{6-7}$$

$$E_{(d)} = - \int_{vf} \nabla \cdot \left(N_j \left\{ \overline{q_{\gamma j}} \right\}^j \right) dv \quad (6-8)$$

Los términos de las integrales de área para la fluctuación de energía y la energía disipativa de la ec. (4-168) son transformados por el teorema de la divergencia de Gauss a integrales de volumen.

La cerradura propuesta es la siguiente:

para la energía disipativa

$$E_{(D)} = - \int_{vf} \left\{ \frac{\mu_{(t)}}{P_r^n} \nabla \langle \overline{T_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right\}^j dv \quad (6-9)$$

y la energía turbulenta

$$E_{(t)} = - \frac{\alpha_j}{C_j} \int_{vf} \left\{ \frac{\mu_{(t)}}{P_r^n} \nabla \langle \overline{T_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j} \right\}^j dv \quad (6-10)$$

La temperatura característica $\langle \overline{T_{\gamma j}} \rangle^{\gamma j}$ pertenece al vapor contenido en el cúmulo.

La constante de conductividad térmica en un flujo laminar y turbulento se relaciona con el Número de Prandtl de la forma de la ec. (6-11).

$$P_r^n = \frac{\mu_{(t)}}{K_{(t)}} \quad P_r^n = \frac{\mu_{(l)}}{K_{(l)}} \quad (6-11)$$

La viscosidad turbulenta y laminar pueden expresarse como $\mu_{(t)} = 1000\mu_{(l)}$ que es una relación utilizada por Markatos (1997) para un sistema fluidizado semejante.

Considerando lo anterior el balance de energía térmica para los cúmulos de tamaño (j) (ec. 4-167) se reduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{vf} (N_j h_j) dv}_{\text{cambio temporal de entalpia debido al No de cumulos de tamaño (j)}} &= \underbrace{\oint_{vf} \overline{N_{js}} \cdot \{h_j v_j\}^j N_j dS_{vf} - \oint_{vf} \overline{N_{js}} \cdot \overline{W} h_j N_j dS_{vf}}_{\text{flujo convectivo de entalpia que entra y sale de la superficie del volumen fijo producido por el No de cumulos de tamaño (j)}} - \\
\underbrace{- \int_{vf} \left\{ \frac{\mu_{(t)}}{P_r^n} \nabla \langle T_{\sigma j} \rangle^{\sigma j} \right\}^j dv - \frac{\alpha_j}{C_j} \int_{vf} \left\{ \frac{\mu_{(t)}}{P_r^n} \nabla \langle T_{\sigma j} \rangle^{\sigma j} \right\}^j dv +}_{\text{energia turbulenta y disipativa generada por el No.de cumulos de tamaño(j) en el volumen fijo}} & \\
+ \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_j \Delta H_j \right) dv}_{\text{energia liberada por la fragmentacion del No. de cumulos de tamaño (j) en el volumen fijo}} + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} F_{j+p} \Delta H_{j+p} \right) dv}_{\text{energia liberada en el proceso de fragmentacion de los cumulos (j+p) para aumentar el No de cumulos de tamaño (j) en el volumen fijo}} + \underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j-p,p} \Delta H_{j-p,p} \right) dv}_{\text{energia requerida para el proceso de agregacion del No de cumulos de tamaño (j) con otros en el volumen fijo}} + \\
\underbrace{\int_{vf} \left(\frac{\alpha_j}{C_j} A_{j,p} \Delta H_{j,p} \right) dv}_{\text{energia requerida para el proceso de agregacion del No.de cumulos de tamaño (j) con otros en el volumen fijo}} &
\end{aligned}
\tag{6-12}$$

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El modelo constituido por los balances de población obtenidos al aplicar promedios multiescala es novedoso desde varios puntos de vista, si consideramos que la técnica de promedio volumétrico es más aplicada a sistemas porosos o con movimiento limitado, el desarrollo de la metodología propuesta y los balances de población para el momentum y energía que se asocian a los procesos de agregación y fragmentación que provocan el cambio en el número de los cúmulos de un tamaño característico.

La contribución más importante del trabajo es sin duda haber obtenido los balances de población para el momentum y energía que mejoran la descripción comúnmente utilizada para el balance de población clásico, donde a través de modelos que incluyen estos efectos no es posible tener una visión detallada y clara de cómo se llevan a cabo.

Estos balances no se han desarrollado en el contexto de la teoría de balances de población y aparecen aquí siguiendo un procedimiento de promediados multiescalas que parte de las ecuaciones locales para las fases, incorporando términos de momentum y energía asociados a los procesos de agregación y fragmentación de cúmulos que no han sido previamente tratados en la literatura correspondiente. De esta manera, el procedimiento desarrollado aquí permite enriquecer la posibilidad de los balances de población, incorporándolos en un marco de referencia más amplio, de fenómenos de transporte.

Las perspectivas a futuro para esta investigación deberán de considerar primero la obtención de las constantes incluidas en los modelos de agregación y fragmentación para los cúmulos, el análisis para resolver el sistema numéricamente que puede ir desde una adimensionalización de sus ecuaciones hasta una propuesta de desarrollo experimental para obtenerlos o la consideración de investigaciones realizadas para sistemas semejantes que puedan aportar información de las variables por definir.

APÉNDICE

APENDICE A

La evolución de las configuraciones mecánicas más importantes del Reactor de Desintegración Catalítica se presentan a través de los modelos siguientes (Valencia, 2001):

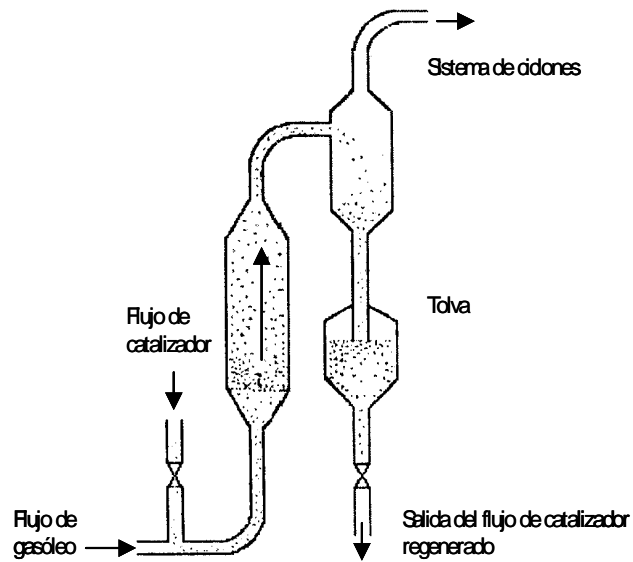


Fig. 1-A. Modelo I de Flujo ascendente

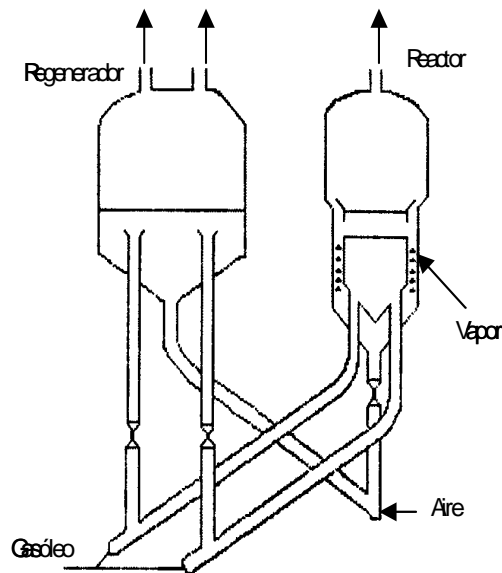


Fig. 2-A. Modelo III de presiones equilibradas (1947).

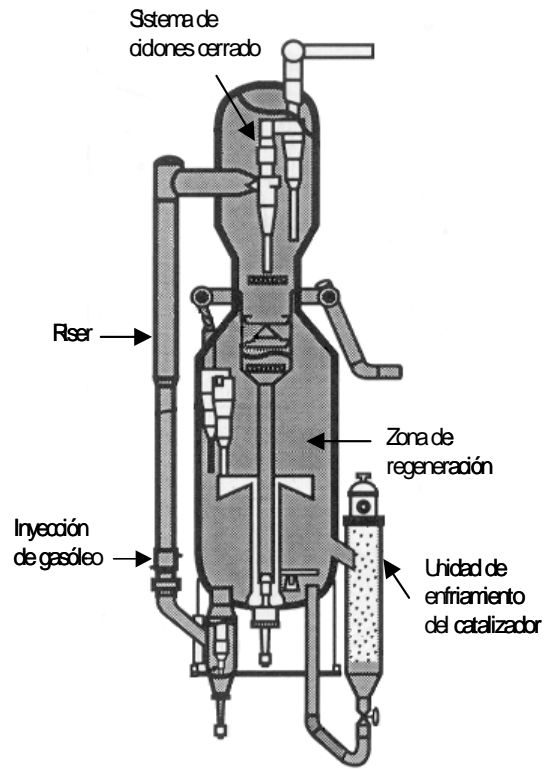


Fig.3-A. Modelo Ortoflow B (1950).

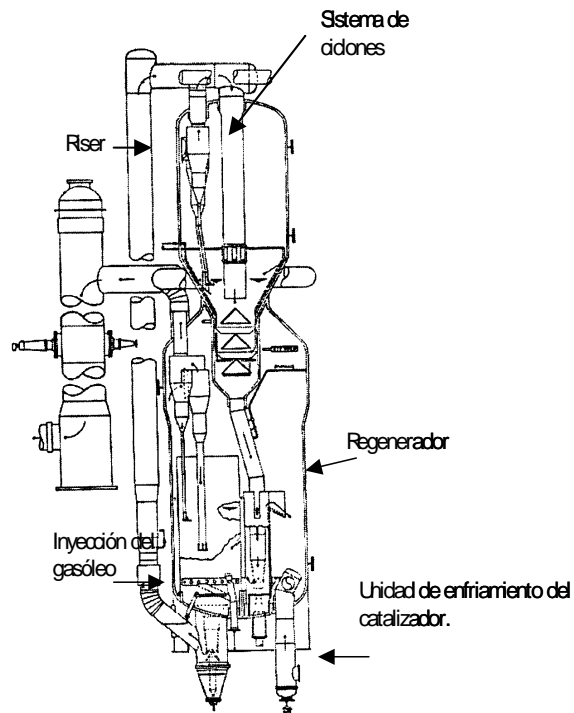


Fig.4-A. Modelo Orthoflow (1973).

APÉNDICE B

A continuación se presenta la metodología de promediado espacial para la obtención del balance de momentum de la fase (γ) con el objeto de facilitar el entendimiento de los términos a los que se efectúa el análisis de orden de magnitud para su simplificación.

Comenzamos con la ecuación puntual de balance de momentum turbulento para la fase (γ).

$$\rho_\gamma \frac{\partial \overline{\overline{u_\gamma}}}{\partial t} + \rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma u_\gamma}}) = \nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma}} + \rho_\gamma \overline{\overline{g}} - \rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma' u_\gamma'}}) + \nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma'}} \quad (1-b)$$

donde

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} = -\nabla p_\gamma + \underbrace{\mu \nabla^2 \overline{\overline{u_\gamma}} + \mu \nabla \cdot (\nabla \overline{\overline{u_\gamma}})^T}_{\nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(l)}}}} - \underbrace{\rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma' u_\gamma'}})}_{\nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(t)}}}} \quad (2-b)$$

divergencia de los esfuerzos laminares promediados en el tiempo. *divergencia de los esfuerzos turbulentos.*

sustituimos la ecuación anterior en la ec.(1-b) para tener la expresión

$$\rho_\gamma \frac{\partial \overline{\overline{u_\gamma}}}{\partial t} + \rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma u_\gamma}}) = \nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} + \rho_\gamma \overline{\overline{g}} \quad (3-b)$$

Se aplica el operador de promediado espacial ec. (3-40) a la ecuación anterior para obtener

$$\frac{1}{V} \int_{V(\bar{x})} \rho_\gamma \frac{\partial \overline{\overline{u_\gamma}}}{\partial t} dV + \frac{1}{V} \int_{V(\bar{x})} \rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma u_\gamma}}) dV = \frac{1}{V} \int_{V(\bar{x})} \nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} dV + \frac{1}{V} \int_{V(\bar{x})} \rho_\gamma \overline{\overline{g}} dV \quad (4-b)$$

o bien

$$\left\langle \rho_\gamma \frac{\partial \overline{\overline{u_\gamma}}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho_\gamma \nabla \cdot (\overline{\overline{u_\gamma u_\gamma}}) \right\rangle = + \left\langle \nabla \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} \right\rangle + \left\langle \rho_\gamma \overline{\overline{g}} \right\rangle \quad (5-b)$$

Utilizando el teorema del promediado de la ec. (3-41) y ec. (3-43) los términos desarrollados quedan de la siguiente manera:

$$\left\langle \rho_\gamma \frac{\partial \overline{\overline{u_\gamma}}}{\partial t} \right\rangle = \rho_\gamma \frac{\partial \langle \overline{\overline{u_\gamma}} \rangle}{\partial t} - \frac{\rho_\gamma}{V} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma} \cdot u_\gamma}} dA \quad (6-b)$$

$$\left\langle \rho_\gamma \nabla \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} \right) \right\rangle = \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle + \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma} \mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} dA \quad (7-b)$$

$$\left\langle \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} \right\rangle = \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} \right\rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma} \mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} dA \quad (8-b)$$

$$\left\langle \rho_\gamma \overline{\overline{\mathbf{g}}} \right\rangle = \varepsilon_\gamma \left\langle \rho_\gamma \right\rangle \overline{\overline{\mathbf{g}}} = \varepsilon_\gamma \rho_\gamma \overline{\overline{\mathbf{g}}} \quad (9-b)$$

los términos anteriores se sustituyen en la ec. (5-b) para obtener la ec. (10-b).

$$\rho_\gamma \frac{\partial \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle}{\partial t} + \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle = -\frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma} \mathbf{u}_\gamma (\mathbf{u}_\gamma - \overline{\overline{\mathbf{w}}})}} dA + \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} \right\rangle - \frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma} \mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} dA + \varepsilon_\gamma \rho_\gamma \overline{\overline{\mathbf{g}}} \quad (10-b)$$

Donde la relación de comportamiento para el fluido newtoniano e incompresible es sustituida en el tensor de esfuerzos totales promedio

$$\left\langle \overline{\overline{\mathbf{T}_\gamma^{(r)}}} \right\rangle = \left\langle \nabla p_\gamma \right\rangle + \left\langle \mu \left(\nabla \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} + \left(\nabla \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right)^T \right) \right\rangle - \rho_\gamma \left\langle \nabla \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} \right) \right\rangle \quad (11-b)$$

Con la metodología del promedio espacial como fundamento y las relaciones de las ecs. (3-40) y (3-43) se determina la relación intrínseca y la descomposición de los términos puntuales de las variables $(\overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}}, \overline{\overline{p_\gamma}}, \overline{\overline{\mathbf{T}_\gamma^{(r)}}})$ para la ec. (11-b) y los demás términos que forman parte de la ec. (10-b).

Este desarrollo se presenta a continuación:

$${}^1 \rho_\gamma \frac{\partial \varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle}{\partial t} = \rho_\gamma \left[\left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \frac{\partial \varepsilon_\gamma}{\partial t} + \varepsilon_\gamma \frac{\partial \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle}{\partial t} \right] \quad (12-b)$$

$$\begin{aligned} & {}^2 \rho_\gamma \nabla \cdot \left(\left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}} + \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}}} \right) \left(\left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}} + \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}}} \right) = \\ & = \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}}} \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}}} + \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}}} \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} + \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \left\langle \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma}} \right\rangle \Big|_{\overline{\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\gamma}}} + \overline{\overline{\mathbf{u}_\gamma \mathbf{u}_\gamma}} \end{aligned} \quad (13-b)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} \right\rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} dA &= \underbrace{-\varepsilon_\gamma \nabla \langle \overline{p_\gamma} \rangle + \varepsilon_\gamma \mu \nabla^2 \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma - \mu \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma - \rho_\gamma \nabla \cdot \langle \overline{u_\gamma} \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma}_{\varepsilon_\gamma \nabla \cdot \langle \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} \rangle^\gamma} \\
-\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{p_\gamma}} dA + \mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} dA \right] + \mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} dA \right] &+ \\
\frac{\mu}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \nabla \left(\overline{\overline{u_\gamma}} \right) dA + \frac{\mu}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \nabla \left(\overline{\overline{u_\gamma}} \right) \cdot \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} dA - \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} dA & \\
\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} dA &
\end{aligned} \tag{14-b}$$

los términos anteriores se sustituyen en la ec. (10-b) para obtener la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma \left[\left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \frac{\partial \varepsilon_\gamma}{\partial t} + \varepsilon_\gamma \frac{\partial \langle \overline{u_\gamma} \rangle}{\partial t} \right] + \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \Big|_{x+\overline{y_\gamma}} \left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \Big|_{x+\overline{y_\gamma}} + \left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \Big|_{x+\overline{y_\gamma}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} + \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \Big|_{x+\overline{y_\gamma}} + \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} &= \\
= \underbrace{-\varepsilon_\gamma \nabla \langle \overline{p_\gamma} \rangle + \varepsilon_\gamma \mu \nabla^2 \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma - \mu \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma - \rho_\gamma \nabla \cdot \langle \overline{u_\gamma} \overline{u_\gamma} \rangle^\gamma}_{\varepsilon_\gamma \nabla \cdot \langle \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} \rangle^\gamma} \\
-\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{p_\gamma}} dA + \mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} dA \right] + \mu \nabla \cdot \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} dA \right] + & \\
\frac{\mu}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \nabla \left(\overline{\overline{u_\gamma}} \right) dA + \frac{\mu}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \nabla \left(\overline{\overline{u_\gamma}} \right) \cdot \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} dA - \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} dA & \\
\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{T_\gamma^{(T)}}} dA & \\
-\frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \overline{\overline{n_{\gamma\sigma}}} \cdot \overline{\overline{u_\gamma}} \left(\overline{\overline{u_\gamma}} - \overline{w} \right) + \varepsilon_\gamma \rho_\gamma \overline{g} &
\end{aligned} \tag{15-b}$$

A esta ecuación se sustituye la serie de Taylor para el término $\left\langle \overline{u_\gamma} \right\rangle \Big|_{x+\overline{y_\gamma}}$ que tiene la forma de la ec. (3-47), de la que surgen las siguientes expresiones para aquellos con el superíndice 2 de la ec. (15-b).

$$\rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \right\rangle = \rho_\gamma \nabla \cdot \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \dots \right] \right\}^* \quad (16-b)$$

$$* \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \dots \right] d\nu \right.$$

$$\rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle = \rho_\gamma \nabla \cdot \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \dots \right] d\nu \quad (17-b)$$

$$\rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \right\rangle = \rho_\gamma \nabla \cdot \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\overline{\overline{u}}_\gamma \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \dots \right] d\nu \quad (18-b)$$

$${}^d \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \quad (19-b)$$

que cuando se agregan a la ecuación (15-b) queda:

$$\begin{aligned} & \rho_\gamma \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \frac{\partial \varepsilon_\gamma}{\partial \alpha} + \varepsilon_\gamma \frac{\partial \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle}{\partial \alpha} \right] + \rho_\gamma \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \dots \right] \right\} \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \dots \right] d\nu \right\} + \\ & + \rho_\gamma \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \dots \right] d\nu \right\} + \\ & + \rho_\gamma \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\overline{x})} \left[\overline{\overline{u}}_\gamma \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} + \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \frac{1}{2} \overline{\overline{y}}_\gamma \cdot \nabla \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle \left|_{\overline{x+\overline{y}_\gamma}^-} \overline{\overline{u}}_\gamma + \dots \right] d\nu \right\} + {}^d \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle = \\ & \underbrace{-\varepsilon_\gamma \nabla \left\langle \overline{\overline{p}}_\gamma \right\rangle + \varepsilon_\gamma \mu N^2 \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle - \mu N \varepsilon_\gamma \nabla \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle - \rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{u}}_\gamma \overline{\overline{u}}_\gamma \right\rangle}_{\varepsilon_\gamma \nabla \left\langle \overline{\overline{T}}_\gamma \right\rangle} \\ & \underbrace{- \frac{1}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{p}}_\sigma dA + \mu N \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{u}}_\sigma dA \right] + \mu N \left[\frac{1}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{u}}_\sigma \overline{\overline{n}}_\sigma dA \right]}_{\frac{1}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{T}}_\sigma dA} + \\ & \underbrace{\frac{\mu}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \nabla \left(\overline{\overline{u}}_\gamma \right) dA + \frac{\mu}{\nu} \int_{A_\sigma} \nabla \left(\overline{\overline{u}}_\gamma \right) \overline{\overline{n}}_\sigma dA - \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{u}}_\gamma \overline{\overline{u}}_\gamma dA}_{\frac{1}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{T}}_\sigma dA} \\ & - \frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_\sigma} \overline{\overline{n}}_\sigma \overline{\overline{u}}_\gamma \left(\overline{\overline{u}}_\gamma - \overline{\overline{w}} \right) + \varepsilon_\gamma \rho_\gamma \overline{\overline{g}} \end{aligned} \quad (20-b)$$

De este desarrollo pueden obtenerse las relaciones que definen el orden de magnitud de cada uno de ellos como se ejemplifica a continuación:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_\gamma \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right) \\
& \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle \cdot \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \varepsilon_\gamma r_o \frac{\Delta \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}}}{L_{v1}} \right) \\
& \frac{1}{2} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{2} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \varepsilon_\gamma r_o^2 \frac{\Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)}{L_{v2} L_{v1}} \right) \\
& \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle \cdot \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o \frac{\Delta \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}}}{L_{v1}} \right) \\
& \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)^T \cdot \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle \cdot \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^2 \frac{\Delta \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \Delta \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}}}{L_{v1} L_{v1}} \right) \\
& \frac{1}{2} \left(\langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)^T \cdot \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^3 \frac{\langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)}{2 L_{v2} L_{v1}} \right) \\
& \frac{1}{2} \langle \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma \rangle : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^2 \frac{1}{2} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \frac{\Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)}{L_{v2} L_{v1}} \right) \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\bar{x})} \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \overline{\mathbf{y}}_\gamma \cdot \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} d\nu = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^3 \frac{1}{2} \frac{\Delta \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)}{L_{v1} L_{v2} L_{v1}} \right) \\
& \frac{1}{4} \frac{1}{\nu} \int_{\nu(\bar{x})} \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \overline{\mathbf{y}}_\gamma \overline{\mathbf{y}}_\gamma : \nabla \nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} d\nu = \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^4 \frac{1}{4} \frac{\Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right) \Delta \left(\nabla \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)}{L_{v2} L_{v1} L_{v2} L_{v1}} \right) \\
& \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} = \mathcal{O} \left(\langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \langle \overline{\mathbf{u}}_\gamma \rangle^\gamma |_{\bar{x}} \right)
\end{aligned} \tag{21-b}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\overline{y_\gamma \underline{u}_\gamma}} \right\rangle \cdot \nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} &= \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o \underline{u}_\gamma \frac{\Delta \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}}}{L_{v1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left\langle \overline{\overline{y_\gamma y_\gamma \underline{u}_\gamma}} \right\rangle : \nabla \nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} &= \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^2 \frac{1}{2} \underline{u}_\gamma \frac{\Delta \left(\nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} \right)}{L_{v2} L_{v1}} \right) \\ \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} &= \mathcal{O} \left(\left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} \right) \\ \left\langle \overline{\overline{\underline{u}_\gamma y_\gamma}} \right\rangle \cdot \nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} &= \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o \underline{u}_\gamma \frac{\Delta \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}}}{L_{v1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left\langle \overline{\overline{\underline{u}_\gamma y_\gamma y_\gamma}} \right\rangle : \nabla \nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} &= \mathcal{O} \left(\varepsilon_\gamma r_o^2 \frac{1}{2} \underline{u}_\gamma \frac{\Delta \left(\nabla \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \Big|_{\vec{x}} \right)}{L_{v2} L_{v1}} \right) \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se obtienen las restricciones de escala de longitud siguientes:

$$\frac{r_o}{L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}} \ll 1 \quad \frac{r_o^2}{L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^3}{L_{v2\gamma} L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad \frac{r_o^4}{L_{v2\gamma}^2 L_{v1\gamma}^2} \ll 1 \quad (22-b)$$

Por lo anterior la ec. (20-b) puede escribirse como el balance de momentum simplificado promediado espacialmente.

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \right]}_{\text{Cambio temporal de momentum del vapor}} + \underbrace{\rho_\gamma \nabla \cdot \left(\varepsilon_\gamma \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \left\langle \overline{\underline{u}_\gamma} \right\rangle \right)}_{\text{flujo de transporte convectivo}} &= - \underbrace{\rho_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\overline{\underline{u}_\gamma \underline{u}_\gamma}} \right\rangle}_{\text{esfuerzos de Reynolds espaciales del vapor.}} - \underbrace{\frac{\rho_\gamma}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\underline{u}_\gamma} \left(\overline{\underline{u}_\gamma} - \vec{w} \right) dA}_{\text{Flux de momentum generado por el vapor en la interfase}} \\ + \underbrace{\varepsilon_\gamma \nabla \cdot \left\langle \overline{\underline{T}_\gamma^{(T)}} \right\rangle}_{\text{velocidad de cantidad de movimiento debido al transporte viscoso, turbulento, y fuerzas de presion sobre el solido}} + \underbrace{\frac{1}{\nu} \int_{A_{\gamma\sigma}} \vec{n}_{\gamma\sigma} \cdot \overline{\underline{T}_\gamma^{(T)}} dA}_{\text{fuerzas volumetricas en el vapor}} + \underbrace{\varepsilon_\gamma \rho_\gamma \vec{g}}_{\text{fuerzas volumetricas en el vapor}} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

2001

(2001) Mendoza. Información personal, Mex. D. F.

(2001) Rodríguez R. Notas del curso de Mecánica de fluidos, UAMI.

(2001) Ryoichi Kurose S.K. Turbulence structure over a particle roughness. Int. J. Multiphase Flow. Vol.27, 673-683.

(2001) Valencia O. Modelo hidrodinámico para el tubo elevador de una unidad de FCC con evaporación de gasóleo. Tesis de Maestría, UAMI, México.

(2001) G.Ooms G.H. Jansen. Particles-Turbulence interaction in stationary, homogeneous, isotropic turbulence. Int. J. of Multiphase Flow .Vol.26, 1831-1850.

1999

(1999) Colella Domenico, D. Vinci R. B. M.M, E. Abu Baki. A study on coalescence and breakage mechanisms in three different bubble columns. Chemical Engineering Science 54,4767-4777.

(1999) Geankoplis C.J. Procesos de transporte y operaciones unitarias. México. CECSA, 1a reimpresión.

(1999) Jie Ouyang, J Lie. Particle-motion resolved discrete model for simulating gas-solid fluidization. Chemical Engineering Science, 54, 2077-2083.

(1999) Jinzhong Liu, J, R, G, H, B. H.M. J.Z. Gas dispersion in fast fluidization and dense suspension upflow. Chemical Engineering Science, 54, 5441-5449

(1999) Lars H. H.A., H.F.S. Theoretical analysis of fluid particle collisions in turbulent flow. Chemical Engineering Science, 54, 4749-4755.

(1999) Mastellone Ma L. U. A. The effect of particle size and density on solids distribution along the riser of a circulating fluidized bed. Chemical Engineering Science 54, 5383-5391.

(1999) Shiping Liu, D.Li. Drop coalescence in turbulent dispersion. Chemical Engineering Science, 54, 5667-5675.

(1999) Whitaker S. Theory and Applications of Transport in Porous Media. California (USA). Kluwer Academic Publishers.

1998

(1998) R.B. Bird y W.E. Stewart. Fenómenos de transporte. México D.F. Reverté, 5a reimpresión.

1997

(1997) J.R. Grace A.A. Andan T.M. Knowlton. Circulating Fluidized Beds. Great Britain. Blackie Academic & Professional.

(1997) Hiemenz R. Principles of Colloid and Surface Chemistry. USA, Marcel Dekker, Inc. 3a. Edic.

(1997) K.N. Theologos, I.D. Nikou, A.I. Lygeros and N.C. Markatos. Simulation and Design of Fluid Catalytic-Cracking Riser-Type Reactors. AIChE Journal., Vol.43, No.2, 486-494.

1996

(1996) C.T. Crowe, T.R. Trott and J.N. Chung. Numerical Models for Two-Phase Turbulent Flow. Annu. Rev. Fluid Mech. Vol.28, 11-43.

(1996) D. Bai, E.S.Y., N.N. and K. Kato. Flow structure in a fast fluidized bed. Chemical Engineering Science, 51, 957-966.

(1996) Landahl M.T. and E.M.C. Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics. E.U., Cambridge.

(1996) M. Foka. J.C., C.G., and D.K. Gas phase hydrodynamics of a gas-solid turbulent fluidized bed reactor. Chemical Engineering Science, 51, 713-723.

(1996) Olus B. Al.E. and A. Er. Turbulence Modeling and Vortex Dynamics. Germany, Springer.

(1996) Smith y Van ness. Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química. México, McGraw Hill, 5ª edic.

1995

(1995) E. Salinas y R.F. Rodríguez. Descripción estocástica de sistemas dispersos. Revista mexicana de física 41, No. 3, 431-450.

(1995) Tanaka, T. Y.S. & T.Y. Effects of particle properties on the structure of cluster. ASME (FED) Gas-Particle Flows, 228, 297-302.

(1995) Sadeghbeigi Reza. Fluid Catalytic Cracking Handbook. Houston Texas. Gulf Publishing Company.

1994

(1994) Sanday D, Roy J. and S.S. Turbulent Gas-Particle Flow in Vertical Risers. Vol.40, No. 2, 215-227.

(1994) Blackman J.A. A. Marshall Coagulation and fragmentation in cluster-monomer reaction models. Phys.A. Math Gen. Vol. 27,725-740.

1993

(1993) George R. Shell F.R. Turbulence in Fluid Flows (A dynamical Systems Approach). E.U., Springer Verlag.

1992

(1992) Bai, D, Jin Y., Yu, Z., and Zhu, J-X., The cross sectionally average voidage profiles in fast fluidized beds. Powder Technol.,71, 51-58.

(1992) Goldstein. Mecanica clásica. México D.F., Reverté 2a. Edic.

(1992) Rubén D.Cohen. The Self Similar Cluster Size Distribution in Random Coagulation and Breakup. Journal of Colloid and Interface Science., Vol. 149. No. 1, 261-270.

(1992) Salinas B. E. Tesis Dinámica Estocástica de Fenómenos de Agregación. México D.F., UAMI.

1991

(1991) J.Gibb.Pressure and viscous forces in an equilibrium fluidized suspension. Chemical Engineering Science,46, 377-379.

(1991) Sangtae Kim and Seppo j.K Mycrodinamics (Principle and Selected Applications). USA., Butterworth-Heinemann.

(1991) Zou, B.,Li H., Xia Y., and Ma. X., Cluster structure in a circulating fluidized bed. Powder Technol.,78,173-178.

1990

(1990) Chen Wen R.R Fisher J.C. Berg. Simulation of particle size distribution in a aggregation-breakup process. Chemical Engineering Science 45, 3003-3006.

(1990) García Colín L. Teoría cinética de los gases. México D.F. UAM-I

(1990) Zamora Mata. J.M. Tesis Solución Numérica del Balance de Población para Sistemas de Partículas con el Método de Elemento Finito con Colocación Nodal y Malla Adaptable. México D.F. UAM-I.

1989

(1989) Hirooyuki Ishii, T.N. and M. H. The clustering annular flow model of circulating fluidized beds. Journal of Chemical Engineering of Japan, 22, 484-489.

(1989) J.Vissier. An Invited Review Van der Waals and other Cohesive Forces Affecting Powder Fluidization. Powder Technology. Vol. 58, 1-10.

(1989) The Clustering Annular Flow Model of Circulating Fluidized Beds. Journal of Chemical Engineering of Japan.Vol.23,No.5, 484-490.

1988

(1988) Bolton L.W and D.,J.F. Recirculation of particles in fast fluidized risers, in circulating-fluidized bed. Technology II(edited by P.Basu and J.F, Large), 139-146.

(1988) D. C. Besnard and F.H. Harlow. Turbulence in Multiphase Flow. Int. J. Multiphase Flow. Vol.4,No.6, 679-699.

(1988) Forman A. Williams. Combustion Theory. Park California. Addison-wesley Publishing company.Inc.,2a edic.

(1988) Ito M., I.,M.S.,&Horio M. Prediction of cluster size and slip velocity in circulating fluidized bed by a DSMC Model. Proceeding of the 9th eng. foundation Conf. Of fluidization, 525-532., New York Engineering Foundation,Inc.

1987

(1987) Bosch P. y Schifter I. La Zeolita una piedra que hierva. México, Sep/CONACYT/cfe.

(1987) Lobo R. Principios de transferencia de masa. México D.F., UAM-I.

(1987) Parichay K. Das and R. Kumar. Coalescence of drops in stirred dispersion, a white noise model for coalescence. Chemical Engineering Science,42, 213-220.

1986

(1986) N.C. Markatos. The mathematical modeling of turbulent flows. Appl. Math ;Modelling.Vol.10,190-220.

1984

(1984) P.U. Foscolo. and L.G.G. Fully predictive criterion for the transition between particulate and aggregate fluidization. Chemical Engineering Science,39,1667-1675.

1983

(1983) E Salinas. Tesis Fluctuaciones fuera del equilibrio en un flujo cortante. México D.F. UAM-I.

(1983) M. Cristina Marchetti and James W. Dufty. Tagged Particle Fluctuations in Uniform Shear Flow. *Journal of Statistical Physics*, Vol.32, No.2, 255-277.

(1983) P.G. Smith and A.W. Nienow. Particle growth mechanisms in fluidized bed granulation-I. *Chemical Engineering Science*, 38,1223-1231.

(1983) P.G. Smith and A.W. Nienow. Particle growth mechanisms in fluidized bed granulation-II. *Chemical Engineering Science*, 38,1233-1240.

(1983) Rosalío F. R., E. Salinas , and James W.Dufty. Fokker-Plank and Langeving Descriptions of Fluctuations in Uniform Shear Flow. *Journal of Statistical Physisc*. Vol. 32, No 2, 279-298.

1980

(1980) H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. Cambridge, Massachussetts, and London, England, Sixth printing.

(1980) A. Schumpe and W.D. Deckwer. *Chemical Engineering Science*. Vol.35, 2221.

(1980) Li Y. and K.M.The dynamics of fast fluidization. Edited by J.R.Grace and J.M.537-554.

1979

(1979) D.Ramkrishna, B.H. Shah and J.D. Borwander. *Chemical Engineering Science*. Vol.29, 987.

1977

(1977) E. George y Ph.D. *Teoría y problemas de Mecánica del Medio Continuo*. México D.F.,Mc Graw- Hill.

(1977) E.V. Schlunder.*Chemical Engineering Science*. Vol.32, 845.

1976

(1976) D. Ramkrisha. *The Prospects of Population Balances*. University west Lafayette., *Chemical Engineering Education*.

(1976) D.Ramkrishna B.H. Shah and J.D. Barwanker. *Analysis of population balance*. *Chemical Engineering Science*,Vol, 31, 435-442.

1975

(1975) J.O.Hinze. Turbulence. E.U. Mc Graw-Hill, 2a. edic.

1974

(1974) Eisberg R. and Resnick R. Quantum Physics. USA., Jonh Wiley & sons,Inc.

1969

(1969) C.A. Bayens and R.L. Laurence, Ind. Engineering Chemical Fundamental. Vol.71.

1968

(1968) Whitaker S. Introduction to Fluid Mechanics. United states of America. Prentice- Hall.Inc.

1967

(1967) Bicknell J.A. and W.R.L. Particle forces in fluidized beds. In prodeeding of the international symposium on fluidization .Eindhoven(Edited by A.A.H. Drinkerburg), 31-37.

(1967) T.B. Anderson and R.J. A fluid mechanical description of fluidized beds. I&Ec. Fundamentals, Vol.6, No.4.

1966

(1966) Kenneth J V. and Neal R. Amundson Rupture and coalescence in dispersed phase systems. I&Ec. Fundamentals Vol.5 No.4.

1965

(1965) Berkeley. Physics course-Electricity and magnetism. Mc-Graw-Hill book company.

1955

(1955) P.G. Saffman and Turner J.S., On the collision of drops in turbulent clouds. J. of Fluids Mech. Vol. 1, 16-30.

1937

(1937) C.H.Edwards, Jr Advanced calculus of several variables. New York Dover, Publications, INC.

(1937) H.C. Hamaker. The London-Van der Waals attraction between spherical particles. Physica IV. No 10, 1058-1072.

(1937) J.E.Lennard –Jonnes. The equation of state of gases and critical phenomena. Physica IV.No. 10. 941-956.