



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

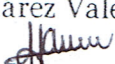
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**ENFOQUE POLINOMIAL DE LA
ESTABILIDAD DE ECUACIONES EN
DIFERENCIAS FINITAS**

Tesis que presenta
Blanca Leticia Hernández Galván
Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias Matemáticas

Asesor: Baltazar Aguirre Hernández

Jurado calificador:
Presidente:  Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Secretario:  Baltazar Aguirre Hernández

Vocal: Moisés Bonilla Estrada 

México, D.F. Junio 2015

*A la vida
y a los que forman parte de ella.*

Agradecimientos

Agradezco al Profesor Baltazar Aguirre Hernández por haber aceptado la dirección de esta tesis de maestría. Su apoyo y confianza en mí han sido un aporte invaluable para el desarrollo de este trabajo.

Gracias a los profesores: Hector Juárez Valencia y Moisés Bonilla por todo el tiempo invertido en la revisión de esta tesis y por los valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar el presente trabajo.

A mis padres Leticia y Alberto que siempre han creído en mí. A mis hermanos Pedro, Fanny, Thalia y a mi sobrina Samantha, por ser parte fundamental en mi vida.

Gracias a mis compañeros y amigos por formar parte de esta aventura.

Gracias Juan, por simplemente estar ahí.

Agracezco al CONACYT por la beca otorgada a lo largo del programa de maestría.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Índice general	v
Introducción	7
1. Estabilidad de esquemas en diferencias finitas	9
1.1. Solución numérica de problemas con valores iniciales por diferencias finitas . . .	9
1.2. Consistencia, convergencia y estabilidad	10
1.3. Análisis de von Neumann	14
1.4. Condiciones de estabilidad	17
1.5. Estabilidad para esquemas generales multipaso	20
1.5.1. Estabilidad del esquema Leapfrog	21
2. Polinomios	25
2.1. Polinomios con raíces en el círculo unitario	25
2.2. Polinomio reducido	33
2.3. La teoría de los polinomios de Schur y de von Neumann	39
3. Ejemplos de la aplicación de la teoría de los polinomios de Schur y de von Neumann	47
3.1. Esquema leapfrog	48
3.2. Esquema implícito para la ecuación de calor	48
3.3. Esquema Richardson	50
3.4. Esquema Dufort-Frankel	50
3.5. Esquema de Hadjidimos	51
3.6. Otros esquemas para la ecuación de calor	53
3.7. Esquemas para ondas de sonido	57
4. Estabilidad de ecuaciones en diferencias finitas para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales	59
4.1. Estabilidad para aproximaciones en diferencias de un sistema hiperbólico . . .	61

5. Conclusiones y perspectivas	71
6. Apéndice	73
6.1. Análisis de Fourier y relaciones de Parseval	73
6.2. Teorema de Kreiss	75
6.3. Criterios para la estabilidad de polinomios	77
Bibliografía	81

Introducción

Un polinomio es *polinomio de Schur* si sus raíces tienen módulo menor que 1. Estos polinomios son importantes en el estudio de la estabilidad de los métodos de diferencias finitas: si el polinomio característico de la correspondiente matriz resulta ser un polinomio de Schur entonces se tendrá estabilidad. Dada la existencia de bastantes resultados acerca de polinomios de Schur, consideramos importante realizar un trabajo que trate los dos temas: polinomios de Schur y métodos de diferencias finitas, con la finalidad de que en un futuro sea mejor aprovechada la teoría de polinomios de Schur.

Otros polinomios con propiedades interesantes son los polinomios de von Neumann, los cuales son importantes para el desarrollo de la teoría del mismo nombre que estudia la estabilidad de los sistemas. Estudiaremos algunas propiedades de estos tipos de polinomios para posteriormente aplicarla en el estudio aproximado de ecuaciones diferenciales parciales. Sobre todo, en el capítulo 3 haremos notar lo valioso que resulta tener un conocimiento amplio de las propiedades de polinomios de Schur y de von Neumann cuando se aplica el método de diferencias finitas.

Los métodos de diferencias finitas son de los más importantes métodos numéricos para resolver problemas aplicados de ecuaciones diferenciales parciales. Los datos de entrada deben ser dados con la finalidad de obtener soluciones, por ejemplo, para ecuaciones diferenciales parciales, los datos de entrada son los valores iniciales o condiciones de frontera. Estas ecuaciones y sus respectivas condiciones son utilizadas para obtener datos de un proceso físico en diferentes momentos del tiempo. Solo en un número muy pequeño de casos es posible obtener una fórmula explícita para la solución del problema. Es aquí donde radica la importancia de los métodos numéricos.

Un método numérico, en teoría, podría dar una buena aproximación a la solución del problema, pero en la práctica algunas veces se irá alejando de la solución deseada ya que los errores se podrían acumular de manera inestable. Es aquí donde entra el concepto de estabilidad de una solución de una ecuación diferencial parcial: un dato de entrada con un error pequeño conducirá únicamente a errores menores en la solución. Los datos de entrada casi siempre contienen errores, por ejemplo, los errores de las mediciones físicas. Por lo tanto, en el caso de una solución numérica inestable de una ecuación diferencial parcial se obtendrán soluciones con un gran error. Así la estabilidad de una solución numérica es una condición necesaria para que la solución sea una buena aproximación de la solución real.

Uno de los primeros trabajos donde se introdujo la idea de estabilidad de una aproximación en diferencias finitas fue en el trabajo de Courant (1928). En este trabajo se mostraba que no cualquier esquema de aproximación converge, por lo que se requería de una relación entre el tamaño del paso en el tiempo y el tamaño del paso en el espacio. Fue así que la noción de estabilidad se introdujo sin usar el término estabilidad.

La presente tesis establece la relación que hay entre la teoría de polinomios de Schur y de von Neumann y la noción de estabilidad en el método de diferencias finitas. Es decir el análisis de la estabilidad en el método de diferencias finitas puede verse, en parte, como una fuerte aplicación de la teoría de polinomios de Schur y de von Neumann: si al emplear el método de diferencias finitas el correspondiente polinomio resulta ser un polinomio de Schur entonces podemos asegurar estabilidad. La misma conclusión se tiene si el polinomio es de von Neumann y sus raíces con módulo igual a 1 son simples.

La distribución del trabajo, se da de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presentan los elementos para iniciar el estudio de aproximaciones en diferencias finitas, así como los conceptos de convergencia, consistencia y estabilidad. Para este último se dan las primeras condiciones para garantizar la estabilidad de un sistema en diferencias finitas.

En el capítulo 2, se presentan propiedades de polinomios con raíces en la frontera de estabilidad. En este trabajo hemos dedicado un buen espacio a exponer propiedades de polinomios de Schur y de von Neumann, pues pensamos que estas propiedades tienen todavía potencial para obtener nuevo conocimiento en la aplicación de Métodos de Aproximación en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

En el capítulo 3 se analiza la estabilidad de algunos sistemas de diferencias finitas utilizando la teoría de los polinomios de Schur y de von Neumann.

En el capítulo 4, se hace un estudio de la estabilidad de sistemas en diferencias finitas provenientes de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

En buena parte del trabajo, no se encontraron las demostraciones en la literatura por lo que dichas demostraciones fueron realizadas durante el desarrollo de la tesis. Otras demostraciones estaban incompletas y se procedió a hacerlas más detalladas.

Estabilidad de esquemas en diferencias finitas

1.1. Solución numérica de problemas con valores iniciales por diferencias finitas

Comenzaremos nuestra discusión de esquemas en diferencias finitas definiendo una malla de puntos en el plano (t, x) . Cuando aproximamos soluciones mediante métodos en diferencias finitas, la variable de tiempo t asume valores discretos $t = t_0, t_1, \dots, t_n$, con $t_n = nk$ para k un número positivo. De la misma manera ocurre para la variable x , donde $x_m = mh$, con h un número positivo, por lo que la malla consistirá de los puntos (t_n, x_m) para enteros arbitrarios n y m .

Para una función v definida en la malla, escribiremos como v_m^n el valor de la función v en el punto (t_n, x_m) . Con esta notación, llamaremos al conjunto de puntos (t_n, x_m) de un valor fijo de n como el nivel n del esquema en diferencias.

La idea básica de los esquemas en diferencias finitas es reemplazar derivadas por diferencias finitas. Esto puede llevarse a cabo de distintas formas, como ejemplo tenemos las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_m) &\simeq \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n, x_m)}{k}, \\ &\simeq \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n - k, x_m)}{2k}. \end{aligned}$$

La validez de estas aproximaciones se ve de las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t - \varepsilon, x)}{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

que relacionan las derivadas con los valores de u . Fórmulas similares aproximan derivadas con respecto a x .

Algunos ejemplos de esquemas en diferencias son dados a continuación:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.3)$$

las cuales corresponden a diferentes discretizaciones de la ecuación $u_t + au_x = 0$.

1.2. Consistencia, convergencia y estabilidad

En esta sección se definen los conceptos de convergencia, consistencia y estabilidad de un método en diferencias finitas.

Se dice que un método es convergente si, al aplicarlo a cualquier problema de valor inicial la solución aproximada con el método converge, cuando h (el tamaño del paso) tiende a cero, a la solución exacta del problema, en todos los puntos t_n de la variable en el tiempo.

Definición 1.1 *Un esquema en diferencias es convergente si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |u_m^n - u| = 0,$$

cualquiera que sea la condición inicial $u(0) = \alpha$. Notemos que t_n depende de k .

Sin embargo la prueba de que una solución aproximada converge a la solución exacta de una ecuación diferencial parcial es generalmente muy difícil, aún en los casos más simples. Por esta razón, se relaciona la convergencia de un método de diferencias finitas con la consistencia y estabilidad de la ecuación de diferencias finitas, puesto que demostrar la consistencia y estabilidad es relativamente fácil.

En la figura (1.1) se muestra el análisis de convergencia para el problema $P : -u_{xx} + xu(x) = (1 + 2x - x^2) \exp(x)$.

Un método es consistente con la ecuación diferencial parcial si la ecuación discreta usada por el método se aproxima a la ecuación diferencial cuando el tamaño del paso tiende a cero.

Definición 1.2 *Un esquema en diferencias B es consistente con la ecuación diferencial P si*

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} |B - P| = 0.$$

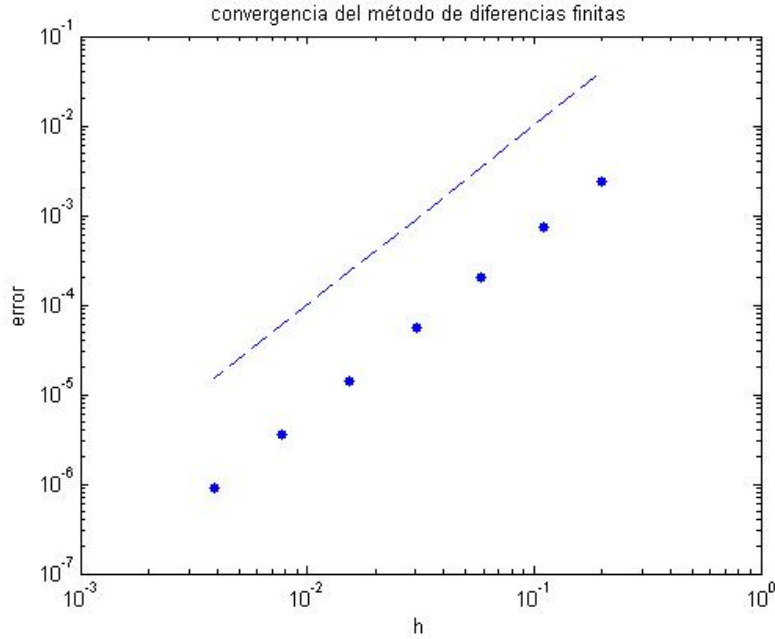


Figura 1.1: Convergencia de un sistema en diferencias finitas

La consistencia es una condición necesaria para que la solución numérica converja a la solución analítica cuando se afina la malla del cálculo.

Ejemplo 1.1

Se mostrará el análisis de consistencia de la aproximación de diferencias finitas para la ecuación de Laplace homogénea: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Usando diferencias centrales de segundo orden se obtiene la ecuación de diferencias

$$u_{m+1}^n + u_m^{n+1} + u_{m-1}^n + u_m^{n-1} - 4u_m^n = 0.$$

Reordenando tenemos

$$(u_{m+1}^n + u_m^{n+1}) + (u_{m-1}^n + u_m^{n-1}) - 4u_m^n = 0. \quad (1.4)$$

Escribiendo la serie de Taylor alrededor del punto (x_m, y_n) para todos los valores de $u(x, y)$ que aparecen en la ecuación (1.4), se tiene

$$\begin{aligned} u_{m\pm 1}^n &= u_m^n \pm u_x k + \frac{1}{2} u_{xx} k^2 \pm \frac{1}{6} u_{xxx} k^3 + \frac{1}{24} u_{xxxx} k^4 + \dots \\ u_m^{n\pm 1} &= u_m^n \pm u_y h + \frac{1}{2} u_{yy} h^2 \pm \frac{1}{6} u_{yyy} h^3 + \frac{1}{24} u_{yyyy} h^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

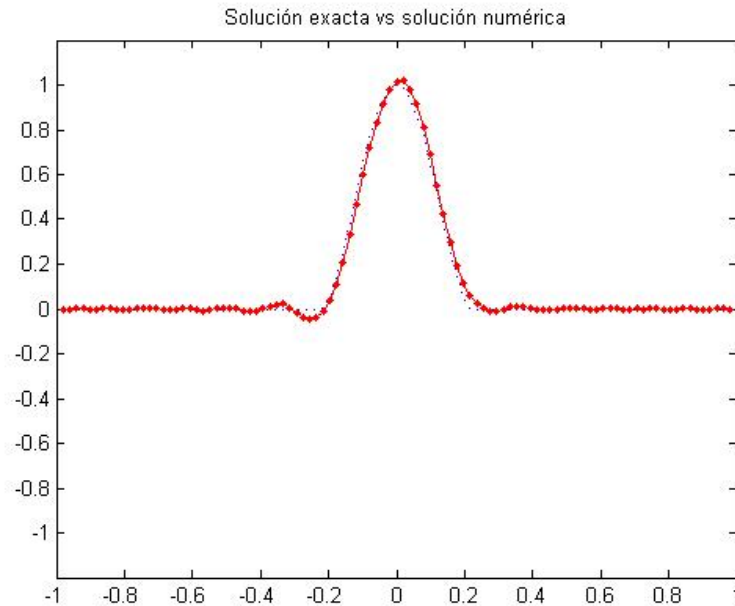


Figura 1.2: Estabilidad numérica

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (1.4), se tiene

$$(2u + u_{xx}k^2 + \frac{1}{12}u_{xxxx}k^4 + \dots) + (2u + u_{yy}h^2 + \frac{1}{12}u_{yyyy}h^4 + \dots) - 4u = 0$$

$$u_{xx}k^2 + \frac{1}{12}u_{xxxx}k^4 + \dots = -u_{yy}h^2 - \frac{1}{12}u_{yyyy}h^4 - \dots$$

Cancelando los términos de orden cero, dividiendo por k^2 el primer miembro y por h^2 el segundo y suponiendo que los tamaños de paso son iguales, se obtiene:

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{12}u_{xxxx}k^2 - \frac{1}{12}u_{yyyy}h^2 - \dots$$

Cuando h y k se aproximan a cero, la ecuación anterior se aproxima a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

que es la ecuación de Laplace. Por lo tanto la aproximación de diferencias finitas es consistente con la ecuación de Laplace.

Finalmente introduciremos el concepto de estabilidad.

Primero definiremos una región de estabilidad como se hace en [29].

Definición 1.3 Una región de estabilidad es cualquier región acotada no vacía de el primer cuadrante del plano donde el origen es un punto de acumulación.

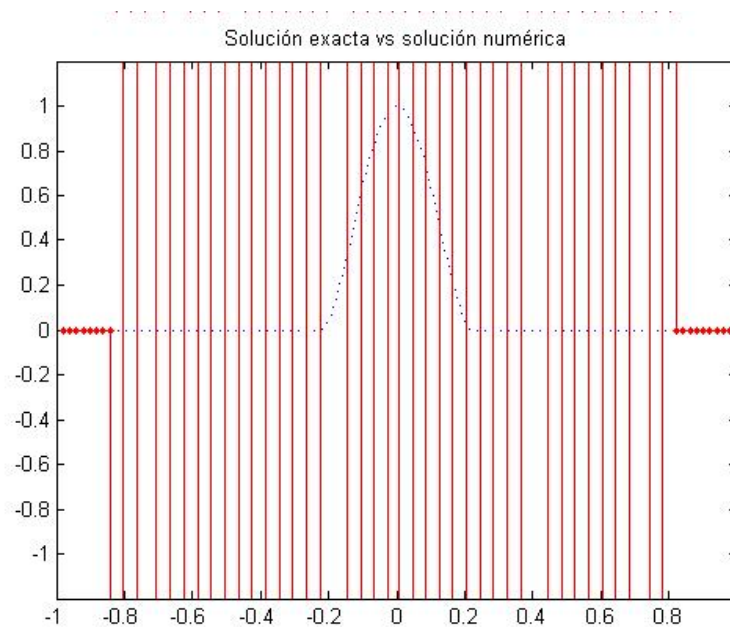


Figura 1.3: Manifestación de la no estabilidad numérica

Esto es, una región de estabilidad debe contener una secuencia (k_v, h_v) que converja al origen si v tiende a infinito.

Definición 1.4 *Un sistema en diferencias finitas asociado a una ecuación de primer orden es estable en una región de estabilidad si existe un entero J tal que para cualquier tiempo T , existe una constante C_T tal que*

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2$$

para $0 \leq nk \leq T$, con (k, h) en la región de estabilidad.

Para mayores detalles se recomienda consultar [29], donde se presentan ejemplos de la aplicación de esta definición.

En las figuras (1.2) y (1.3) se muestra la estabilidad y no estabilidad de la ecuación $u_{tt} = u_{xx}$ mediante el método Leapfrog, del cual se hablará más adelante.

La importancia de los conceptos de consistencia y estabilidad se muestran en el siguiente teorema de equivalencia, conocido como el Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, la demostración puede consultarse en [28].

Teorema 1.5 *Un esquema de diferencias finitas consistente para una ecuación diferencial parcial lineal es convergente si y solo si es estable*

1.3. Análisis de von Neumann

Con el uso de análisis de Fourier podemos dar condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de esquemas en diferencias finitas.

Ilustraremos el método con un ejemplo particular.

Consideremos el esquema

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (1.6)$$

el cual puede ser reescrito como

$$v_m^{n+1} = (1 - a\lambda)v_m^n + a\lambda v_{m-1}^n, \quad (1.7)$$

donde $\lambda = k/h$.

Usando la fórmula de inversión de la transformada de Fourier para la función discreta v^n (vea Apéndice), tenemos

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}^n(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

donde \hat{v}^n es la transformada de Fourier de v_m^n .

Sustituyendo en (1.7) para v_m^n y v_{m-1}^n , obtenemos

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Comparando esta fórmula con la fórmula de inversión de Fourier para v^{n+1} ,

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}^{n+1}(\xi) d\xi,$$

y usando el hecho de que la transformada de Fourier es única deducimos que el integrando de (1.9) es el mismo que en la fórmula de inversión. Por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1}(\xi) &= [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) \\ &= f(h\xi) \hat{v}^n(\xi), \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde a $f(h\xi)$ lo llamamos el *factor de amplificación*.

Aplicando n veces (1.10) obtenemos

$$\hat{v}^n(\xi) = f(h\xi)^n \hat{v}^0(\xi). \quad (1.11)$$

Usaremos (1.11) para estudiar la estabilidad de (1.6).

Usando relaciones de Parseval (ver Apéndice), $\|\hat{v}\|_h^2$ y (1.11) tenemos

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &= \\ &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}^n(\xi)|^2 d\xi \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |f(h\xi)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.13)$$

Ahora evaluaremos $|f(h\xi)|$. Definamos $z = h\xi$, así

$$f(z) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-iz} = (1 - a\lambda) + a\lambda \cos z - ia\lambda \sin z.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= (1 - a\lambda + a\lambda \cos z)^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 z = \\ &= (1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{1}{2}z)^2 + 4a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{1}{2}z \cos^2 \frac{1}{2}z \\ &= 1 - 4a\lambda \sin^2 \frac{1}{2}z + 4a^2 \lambda^2 \sin^4 \frac{1}{2}z + 4a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{1}{2}z \cos^2 \frac{1}{2}z \\ &= 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2 \frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

De esta última expresión vemos que $|f(z)|$ está acotada por 1 si $0 \leq a\lambda \leq 1$. Así por (1.13)

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &\leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &= h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2, \end{aligned}$$

y por la definición de estabilidad el esquema es estable.

Es interesante estudiar un problema algo más general que el anterior.

Consideremos el problema

$$v_t + Uv_x = \gamma v_{xx}$$

con $t \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ y donde U es una constante positiva que representa una velocidad de convección.

El esquema explícito con el que se discretizará el problema es

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + U \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \gamma \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Aplicando un método igual al del ejemplo anterior, obtenemos que el factor de amplificación es:

$$f(z) = 1 - 2r(1 - \cos z) - i\lambda \sin z.$$

En este caso el polinomio de amplificación $f(z)$ resulta complejo. Entonces

$$|f(z)|^2 = 1 - 4r(1 - \cos z)[1 - r(1 - \cos z)] + \lambda^2 \sin^2 z$$

Para que se cumpla la condición de estabilidad se debe cumplir

$$\lambda^2 \sin^2 z \leq 4r(1 - \cos z)[1 - r(1 - \cos z)]. \quad (1.14)$$

La primera restricción surge a partir de la expresión anterior, (1.14), de donde debemos notar que el miembro de la derecha no puede ser negativo. Por lo que se debe cumplir que el factor entre corchetes del miembro de la derecha no pueda ser negativo, de donde tenemos que

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

Ahora retomando la ecuación (1.14), y definiendo la variable

$$\chi = 1 - \cos z.$$

esta puede reescribirse como

$$\lambda^2 \leq 4rf(\chi), \quad (1.15)$$

donde

$$f(\chi) = \frac{1 - r\chi}{2 - \chi}.$$

Como

$$f'(\chi) = \frac{1 - 2r}{(2 - \chi)^2},$$

la función f es monótonamente creciente. Entonces su valor mínimo lo toma en $\chi = 0$, y la ecuación (1.15) implica que

$$\lambda^2 \leq 2r$$

o

$$k \leq \frac{2\gamma}{U^2}$$

la cual es la restricción para que el esquema permanezca estable.

1.4. Condiciones de estabilidad

En el siguiente teorema daremos condiciones exactas para garantizar la estabilidad en esquemas de un paso.

Teorema 1.6 *Un esquema de un paso de diferencias finitas con coeficientes constantes es estable en una región de estabilidad Ω si y solo si existe una constante K , independiente de z , k y h , tal que*

$$|f(z, h, k)| \leq 1 + Kk, \quad (1.16)$$

con $(k, h) \in \Omega$. Si $f(z)$ es independiente de h y k , la condición (1.16) puede ser reemplazada por $|f(z)| \leq 1$.

Demostración:

Utilizando relaciones de Parseval y la definición de f obtenemos

$$\|v^n\|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |f(z, h, k)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi.$$

Si $|f(z, h, k)| \leq 1 + Kk$ para $(k, h) \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \|v^n\|_h^2 &\leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (1 + Kk)^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &= (1 + Kk)^{2n} \|v^0\|_h^2. \end{aligned}$$

Ahora $n \leq T/k$, así

$$(1 + Kk)^n \leq (1 + Kk)^{T/k} \leq e^{KT}.$$

Por lo tanto, $\|v^n\|_h \leq e^{KT} \|v^0\|_h$ y así el esquema es estable en Ω , por definición (1.4).

Probaremos ahora que si la desigualdad (1.16) no puede satisfacerse para $(k, h) \in \Omega$ para cualquier valor de K , entonces el esquema no es estable en Ω .

Si para algún C positivo existe un intervalo de z es decir, $z \in [z_1, z_2]$, y $(k, h) \in \Omega$ con $|f(z)| > 1 + Ck$, entonces construiremos una función v_m^0

$$\hat{v}^0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } h\xi \notin [z_1 - z_2], \\ \sqrt{h(z_2 - z_1)^{-1}} & \text{si } h\xi \in [z_1, z_2]. \end{cases}$$

Notemos que $\|v^0\|_h$ es igual a 1. Entonces

$$\|v^n\|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |f(h\xi, k, h)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \quad (1.17)$$

$$= \int_{z_1/h}^{z_2/h} |f(h\xi, k, h)|^{2n} \frac{h}{z_2 - z_1} d\xi \quad (1.18)$$

$$\geq (1 + Ck)^{2n} \quad (1.19)$$

$$\geq \frac{1}{2} e^{2TC} \|v^0\|_h^2, \quad (1.20)$$

para n cercano a T/k .

Esto muestra que el esquema es inestable si se permite que C puede ser arbitrariamente grande. Así el esquema es inestable si no hay una región en la cual $f(z)$ pueda ser acotada como en (1.16). ■

Teorema 1.7 *Un esquema consistente para la ecuación*

$$u_t + au_x + bu = 0,$$

es estable si y solo si es estable para esta ecuación cuando $b = 0$. Más aún, cuando $k = \lambda h$ y λ es una constante, la condición de estabilidad en $f(z, 0, 0)$ es $|f(z, 0, 0)| \leq 1$

Demostración:

Por consistencia es fácil ver que el término de menor orden bu contribuye a la expresión f solo con un término proporcional a k , por lo que remover este término no afecta la estabilidad de el esquema.

Usando series de Taylor en k y h , tenemos

$$f(z, k, h) = f(z) + O(h) + O(k),$$

y si $h = \lambda^{-1}k$, entonces los términos que son $O(h)$ son también $O(k)$. Más aún, como z está restringido al conjunto compacto $[-\pi, \pi]$, los términos $O(k)$ están uniformemente acotados. Así la condición de estabilidad es

$$|f(z, 0, 0)| \leq 1 + Kk,$$

para alguna constante K . Pero, el término izquierdo de esta relación es independiente de k , y la desigualdad se debe cumplir para todos los valores positivos pequeños de k . Entonces tenemos que la estimación anterior se debe cumplir si y solo si

$$|f(z, 0, 0)| \leq 1.$$



Ilustraremos los resultados anteriores con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.2

Consideremos el esquema

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0,$$

para el cual

$$f(z) = 1 + a\lambda - a\lambda e^{iz},$$

donde a es positivo y λ es constante.

Tenemos que

$$|f|^2 = 1 + 4a\lambda(1 + a\lambda) \sin^2 \frac{1}{2}z.$$

Si λ es constante, entonces debemos usar la condición de estabilidad $|f(z)| \leq 1$, y vemos que $|f(z)|$ es mayor que 1 para z diferente de 0 y por lo tanto el esquema es inestable.

Si a es negativo, el esquema es estable para $-1 \leq a\lambda \leq 0$.

Ejemplo 1.3

Consideremos el siguiente esquema

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

Reemplazando v_m^n por $g^n e^{imz}$, la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{g^{n+1} e^{imz} - g^n e^{imz}}{k} + a \frac{g^n e^{i(m+1)z} - g^n e^{i(m-1)z}}{2h} \\ &= g^n e^{imz} \left(\frac{g-1}{k} + a \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2h} \right) = 0. \end{aligned}$$

Lo que nos da que el factor de amplificación es

$$g = 1 - ia\lambda \sin z,$$

con $\lambda = k/h$.

Si λ es constante, entonces g es independiente de h y k , y

$$|g(z)|^2 = 1 + a^2 \lambda^2 \sin^2 z.$$

Como $|g(z)|$ es mayor que 1 para z diferente de 0 o π , entonces por el teorema 1.6 este esquema es inestable.

Ejemplo 1.4

Consideremos el esquema para

$$u_t + au_x - u = 0, \quad (1.21)$$

dado por

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - v_m^n = 0.$$

Este esquema tiene como factor de amplificación

$$g(z) = \cos z - ia\lambda \sin z + k$$

y

$$\begin{aligned} |g^2| &= (\cos z + k)^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 z \\ &\leq (1 + k)^2, \end{aligned}$$

si $|a\lambda| \leq 1$.

Así el esquema con λ constante es estable si y solo si $|a\lambda| \leq 1$. Otra manera de obtener la estabilidad es aplicando el Teorema 1.7.

1.5. Estabilidad para esquemas generales multipaso

Un método multipaso consiste en encontrar un valor v_m^{n+k} como una función de k valores precedentes. Los métodos multipaso, normalmente, requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos de un paso para un mismo nivel de precisión, sin embargo requieren de un método de un paso que le permita determinar los k puntos iniciales.

Los siguientes teoremas dan las condiciones necesarias para que un esquema general en diferencias sea estable, las demostraciones se pueden consultar en [29].

Teorema 1.8 *Si el polinomio de amplificación $f(z, \theta)$ es explícitamente independientemente de h y k , entonces la condición necesaria y suficiente para que el esquema en diferencias finitas sea estable es que todas las raíces, z_v , satisfagan las siguientes condiciones*

a) $|z_v| \leq 1$ y

b) si $|z_v| = 1$ entonces z_v debe ser una raíz simple.

Nótese que si el polinomio tiene raíces con módulo < 1 , es decir, si es un polinomio de Schur (ver capítulo 2) entonces el esquema en diferencias finitas es estable. Si el polinomio es de von Neumann (sus raíces con módulo ≤ 1) y sus raíces con módulo 1 son simples también se tiene la estabilidad del esquema en diferencias finitas.

Teorema 1.9 *Un esquema en diferencias finitas para una ecuación escalar es estable si y solo si todas las raíces, z_v del polinomio de amplificación $f(z, \theta, h, k)$ satisface las siguientes condiciones.*

- a) *Existe una constante K tal que $|z_v| \leq 1 + Kk$.*
- b) *Existen constantes positivas c_0 y c_1 tales que si $c_0 \leq |z_v| \leq 1 + Kk$ entonces z_v es una raíz simple, y para cualquier otra raíz z_μ la relación $|z_v - z_\mu| > c_1$ se cumple para h y k suficientemente pequeños.*

1.5.1. Estabilidad del esquema Leapfrog

El esquema Leapfrog para la ecuación $u_t + au_x = 0$ es un ejemplo de un esquema multipaso, es decir, para este esquema se necesitan especificar los valores de v_m^0 y v_m^1 para todo m .

Analizaremos la estabilidad del esquema leapfrog. El esquema es:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.22)$$

es decir

$$v_m^{n+1} = v_m^{n-1} - a\lambda(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n), \quad (1.23)$$

donde $\lambda = \frac{k}{h}$.

Escribimos

$$\delta_0 v_m = \frac{v_{m+1} - v_{m-1}}{2h}. \quad (1.24)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} v_m^{n+1} \\ v_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ka\delta_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_m^n \\ v_m^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Aplicando transformada de Fourier en cada componente

$$\begin{bmatrix} v_m^{n+1} \\ v_m^n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} d\xi,$$

$$\begin{bmatrix} v_m^{n+1} \\ v_m^n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-imh\xi} \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} h.$$

Aplicando identidades de Parseval para vectores

$$\left\| \begin{bmatrix} v^{n+1} \\ v^n \end{bmatrix} \right\|^2 = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} v_m^{n+1} \\ v_m^n \end{bmatrix} \right\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \left\| \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} \right\|^2 d\xi = \left\| \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} \right\|^2.$$

Ahora aplicando transformada de Fourier a Leapfrog

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \begin{bmatrix} -2ka\delta_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^n(\xi) \\ \hat{v}^{n-1}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \begin{bmatrix} -2ka\delta_0 e^{imh\xi} \hat{v}^n(\xi) + e^{imh\xi} \hat{v}^{n-1}(\xi) \\ e^{imh\xi} \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \begin{bmatrix} -2ka \frac{e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}}{2h} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^n(\xi) \\ \hat{v}^{n-1}(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \begin{bmatrix} -2ia\lambda \sin(h\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^n(\xi) \\ \hat{v}^{n-1}(\xi) \end{bmatrix} d\xi
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2ia\lambda \sin(h\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} \hat{v}^n(\xi) \\ \hat{v}^{n-1}(\xi) \end{bmatrix} \\
&= G \begin{bmatrix} \hat{v}^n(\xi) \\ \hat{v}^{n-1}(\xi) \end{bmatrix} \\
&= \vdots \\
&= G^n \begin{bmatrix} \hat{v}^1(\xi) \\ \hat{v}^0(\xi) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Las identidades de Parseval nos dan

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} v^{n+1} \\ v^n \end{bmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1}(\xi) \\ \hat{v}^n(\xi) \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \left| (G(h\xi))^n \begin{bmatrix} \hat{v}^1(\xi) \\ \hat{v}^0(\xi) \end{bmatrix} \right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |(G(h\xi))|^{2n} \left| \begin{bmatrix} \hat{v}^1(\xi) \\ \hat{v}^0(\xi) \end{bmatrix} \right|^2 d\xi \\
&\leq \max_{|h\xi| \leq \pi} |(G(h\xi))|^{2n} \left| \begin{bmatrix} \hat{v}^1(\xi) \\ \hat{v}^0(\xi) \end{bmatrix} \right|^2 \\
&= \max_{|h\xi| \leq \pi} |(G(h\xi))|^{2n} \left| \begin{bmatrix} \hat{v}^1 \\ \hat{v}^0 \end{bmatrix} \right|^2.
\end{aligned}$$

(1.25)

Por lo tanto el polinomio de amplificación es

$$z^2 + 2ia\lambda \text{sen}(h\xi)z - 1 = 0. \quad (1.26)$$

Esta ecuación tiene 2 raíces, dadas por

$$z_{\pm} = -ia\lambda \text{sen}(h\xi) \pm \sqrt{1 - (a\lambda)^2 \text{sen}^2(h\xi)}. \quad (1.27)$$

Cuando z_+ y z_- no son iguales, la solución para \hat{v} en (1.26) está dada por

$$\hat{v}(\xi) = A_+(\xi)z_+(h\xi)^n + A_-(\xi)z_-(h\xi)^n,$$

donde las funciones $A_+(\xi)$ y $A_-(\xi)$ son determinadas por las condiciones iniciales. El término z_+ contiene una mayor porción de la solución exacta de la solución, por lo que es conveniente reescribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\hat{v}^n(\xi) = A(\xi)z_+(h\xi)^n + B(\xi) \left[\frac{z_-(h\xi)^n - z_+(h\xi)^n}{z_-(h\xi) - z_+(h\xi)} \right], \quad (1.28)$$

para funciones $A(\xi)$ y $B(\xi)$ que son determinadas por las condiciones iniciales. Cuando z_+ y z_- son iguales, la solución puede ser escrita en la forma

$$\hat{v}^n(\xi) = A(\xi)z(h\xi)^n + B(\xi)nz(h\xi)^{n-1}, \quad (1.29)$$

donde $z_+ = z_- = z$.

Las funciones $A(\xi)$ y $B(\xi)$ están relacionadas a $\hat{v}^0(\xi)$ y $\hat{v}^1(\xi)$ por

$$A(\xi) = \hat{v}^0(\xi)$$

y

$$B(\xi) = \hat{v}^1(\xi) - \hat{v}^0(\xi)z_+(h\xi).$$

Para continuar con el estudio de la estabilidad de este esquema consideremos dos casos. Primero tomemos el caso donde z_+ y z_- no son iguales, y elegiremos los valores iniciales v^0 y v^1 de manera que $B(\xi)$ sea idénticamente cero.

Entonces de la ecuación (1.28) tenemos

$$|\hat{v}^n(\xi)| = |A(\xi)||z_+(h\xi)|^n.$$

Sabemos que para garantizar estabilidad es necesario que $z_+(h\xi)$ satisfaga la desigualdad

$$|z_+(h\xi)| \leq 1 + Kk.$$

Asimismo, $z_-(h\xi)$ debe satisfacer esa misma estimación. Si tomamos λ constante, podemos utilizar la restricción

$$|z_{\pm}(h\xi)| \leq 1,$$

para determinar la estabilidad.

De (1.27) con $|a\lambda| \leq 1$ tenemos que

$$|z_+|^2 = |z_-|^2 = 1 - (a\lambda)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (a\lambda \operatorname{sen} \theta)^2 = 1.$$

en donde $\theta = h\xi$.

Si $|a\lambda|$ es mayor que 1, entonces para θ igual a $\pi/2$ tenemos de (1.27)

$$|z_-(\pi/2)| = |a\lambda| + \sqrt{(a\lambda)^2 - 1} > 1,$$

lo que muestra que el esquema es inestable para este caso.

Considerando el caso en el que z_+ y z_- sean iguales, de la ecuación (1.27) vemos que esto solo ocurre cuando $|a\lambda \operatorname{sen} \theta| = 1$. Como sabemos que $|a\lambda|$ debe ser a lo mas 1, nosotros solo necesitamos considerar $|a\lambda| \leq 1$. Entonces la igualdad $z_+ = z_-$ se cumplirá solo cuando $|a\lambda| = 1$ y $\theta = \pm\pi/2$, y tendremos entonces que $z_+ = z_- = \pm i$.

Por lo que la solución para \hat{v}^n es

$$\hat{v}^n \left(\pm \frac{\pi}{2h} \right) = A \left(\pm \frac{\pi}{2h} \right) (\mp i)^n + B \left(\pm \frac{\pi}{2h} \right) n(\mp i)^{n-1},$$

y cuando B es diferente de cero, \hat{v}^n crece linealmente con n . De lo anterior se tiene que el esquema es inestable si $|a\lambda| = 1$. Por lo que el esquema Leapfrog es estable solo si $|a\lambda| < 1$.

2.1. Polinomios con raíces en el círculo unitario

Comenzaremos describiendo varias clases de polinomios, los cuales nos serán de gran utilidad en la teoría subsecuente. La distinción de estas clases se tendrá en base a la localización de sus ceros respecto a la circunferencia unitaria $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

El primer tipo, es el conjunto de los llamados *polinomios de Schur*. Estos son los polinomios cuyos ceros se encuentran en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

El segundo tipo de polinomios son los *polinomios de von Neumann*, los cuales son todos los polinomios que tienen todos sus ceros ya sea en D o en la circunferencia unitaria S .

Las últimas dos clases de polinomios que incluiremos en este apartado, son subclases de las anteriores. Los polinomios de von Neumann simples son aquellos polinomios de von Neumann que tienen ceros en D y ceros simples en S , y los polinomios conservativos son los polinomios que tienen todos sus ceros en S .

Ejemplo 2.1

$q(z) = (z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{3})z$ es polinomio de Schur.

Ejemplo 2.2

$g(z) = (z + 1)(z - 1)(z + i)(z - i)$ es polinomio conservativo.

En lo que sigue asumiremos que el polinomio con coeficientes complejos

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \tag{2.1}$$

es de grado n ($a_n \neq 0$) y que no tiene ceros en el origen ($a_0 \neq 0$).

Denotemos por $\bar{f}(z)$ al polinomio $\bar{f}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \dots + \bar{a}_nz^n$.

Definamos f^* de la siguiente manera

$$f^*(z) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_{n-j}z^j = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \dots + \bar{a}_0z^n. \tag{2.2}$$

Nótese que $f^*(z)$ también satisface que el coeficiente principal y el término constante son diferentes de cero.

Además este polinomio satisface las siguientes condiciones

- i) $f^*(z) = z^n \overline{f(\frac{1}{z})}$, con $z \neq 0$
- ii) $f^{**} = f$.
- iii) $(fg)^* = f^*g^*$.

Las condiciones $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$ son equivalentes a $f(0) \neq 0$ y $f^*(0) \neq 0$.

Supongamos que $z = e^{i\theta}$, entonces $f^*(e^{i\theta}) = e^{in\theta} \overline{f(e^{-i\theta})} = e^{in\theta} \overline{f(e^{i\theta})}$, de lo que se sigue

$$|f^*(z)| = |f(z)|, \quad \forall z \in S. \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.3

$$h(z) = z^4 + iz^3 + (3+i)z + 5.$$

$$h^*(z) = 1 - iz + (3-i)z^3 + 5z^4.$$

entonces se cumplirá que $|h^*(z)| = |h(z)|, \forall z \in S$

Definición 2.1 Si un polinomio f de grado n tiene (contando multiplicidades) p_1 ceros en D , p_2 sobre S y p_3 ceros fuera de $D \cup S$, donde $p_1 + p_2 + p_3 = n$, diremos que el polinomio es de tipo (p_1, p_2, p_3) .

Ejemplo 2.4

$p(z) = (z-3)(z+1)(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})$ es de tipo $(2, 1, 1)$.

Como hemos asumido que $f(0) \neq 0$, es claro que z es un cero de f si y solo si $z^* = \frac{1}{z}$ es un cero de f^* .

Definición 2.2 f es autoinvertible si f y f^* tienen el mismo conjunto de ceros. Es decir, si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n}\}$.

Ejemplo 2.5

$f(z) = (z-3)(z-\frac{1}{3})(z-i)(z+i)$ es autoinvertible pues las raíces de f y f^* son $\{3, \frac{1}{3}, i, -i\}$.

Observación 2.3 Un polinomio auto invertible de grado n es de tipo $(p, n-2p, p)$ para algún $p \geq 0$.

Algunas propiedades de los polinomios autoinvertibles serán demostradas en los siguientes resultados, y pueden consultarse en [25] y [27].

Lema 2.4 Si $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $a_n \neq 0$, entonces los siguientes incisos son equivalentes:

i) f es auto invertible.

ii) $\bar{a}_n f(z) = a_0 z^n \bar{f}(1/z) = a_0 f^*(z)$ para cada número complejo z , distinto de cero.

iii) $a_0 \bar{a}_j = \bar{a}_n a_{n-j}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Demostración:

(i implica ii) Supongamos f es auto invertible entonces f y f^* tienen el mismo conjunto de ceros, es decir $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ y $\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n$ tienen el mismo conjunto de ceros.

Entonces $\bar{a}_0(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)$ y $(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n)a_n$ tienen el mismo conjunto de ceros y coeficiente principal, por lo tanto son iguales. Entonces $\bar{a}_0 a_0 + \bar{a}_0 a_1 z + \dots + \bar{a}_0 a_n z^n = \bar{a}_n a_n + \bar{a}_{n-1} a_n z + \dots + \bar{a}_0 a_n z^n$.

Entonces $\bar{a}_0 a_0 = \bar{a}_n a_n$, $\bar{a}_0 a_1 = \bar{a}_{n-1} a_n$, \dots , $\bar{a}_0 a_n = \bar{a}_0 a_n$.

Tomando conjugados $a_0 \bar{a}_0 = \bar{a}_n a_n$, $a_0 \bar{a}_1 = a_{n-1} \bar{a}_n$, \dots , $a_0 \bar{a}_n = a_0 \bar{a}_n$, por lo que también se tiene la siguiente igualdad de polinomios

$$a_0 \bar{a}_0 z^n + a_0 \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + a_0 \bar{a}_n = a_n \bar{a}_n z^n + a_{n-1} \bar{a}_n z^{n-1} + \dots + a_0 \bar{a}_n.$$

Con lo que queda demostrada esta primera parte.

(ii implica iii) Supongamos que $a_0 z^n \bar{f}(1/z) = \bar{a}_n f(z)$, entonces

$$a_0 \bar{a}_0 z^n + a_0 \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + a_0 \bar{a}_{n-1} z + a_0 \bar{a}_n = a_n \bar{a}_n z^n + a_{n-1} \bar{a}_n z^{n-1} + \dots + a_1 \bar{a}_n z + a_0 \bar{a}_n.$$

Entonces $a_0 \bar{a}_0 = \bar{a}_n a_n$, $a_0 \bar{a}_1 = a_{n-1} \bar{a}_n$, \dots , $a_0 \bar{a}_n = a_0 \bar{a}_n$, es decir, $a_0 \bar{a}_j = \bar{a}_n a_{n-j}$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

(iii implica i) Supongamos que $a_0 \bar{a}_j = \bar{a}_n a_{n-j}$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$, es decir $a_0 \bar{a}_0 = \bar{a}_n a_n$, $a_0 \bar{a}_1 = \bar{a}_n a_{n-1}$, \dots , $a_0 \bar{a}_{n-1} = \bar{a}_n a_1$, $a_0 \bar{a}_n = \bar{a}_n a_0$.

Tomando conjugados tenemos: $\bar{a}_0 a_0 = a_n \bar{a}_n$, $\bar{a}_0 a_1 = a_n \bar{a}_{n-1}$, \dots , $\bar{a}_0 a_{n-1} = a_n \bar{a}_1$, $\bar{a}_0 a_n = a_n \bar{a}_0$.

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad de polinomios

$$\bar{a}_0 a_0 + \bar{a}_0 a_1 z + \dots + \bar{a}_0 a_n z^n = \bar{a}_n a_n + \bar{a}_{n-1} a_n z + \dots + \bar{a}_0 a_n z^n.$$

Factorizando en ambos lados

$$\bar{a}_0(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) = a_n(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n).$$

Es decir

$$\bar{a}_0 f(z) = a_n f^*(z).$$

Por lo tanto f y f^* tienen el mismo conjunto de ceros, por lo que f es autoinvertible. ■

Teorema 2.5 Si f es auto invertible y $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ con $a_n \neq 0$, entonces

i) $\bar{a}_n [nf(z) - zf'(z)] = a_0 z^{n-1} \bar{f}'(1/z)$ para cada $z \neq 0$.

ii) $|nf(z)/zf'(z) - 1| = 1$ para cada z en S .

Demostración:

i) Como f es autoinvertible $\bar{a}_n f(z) = a_0 z^n [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_n z^{-n}]$, entonces

$$\bar{a}_n f'(z) = n a_0 z^{n-1} [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_n z^{-n}] - a_0 z^n [\bar{a}_1 z^{-2} + \dots + n \bar{a}_n z^{-n-1}]$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{a}_n z f'(z) &= n a_0 z^n [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_n z^{-n}] - a_0 z^{n+1} [\bar{a}_1 z^{-2} + \dots + n \bar{a}_n z^{-n-1}] \\ &= n a_0 z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right) - a_0 z^{n-1} [\bar{a}_1 + \dots + n \bar{a}_n z^{-(n+1)}] \end{aligned}$$

Por lema 2.4 ii) tenemos que

$$\bar{a}_n z f'(z) = n \bar{a}_n f(z) - a_0 z^{n-1} \bar{f}'\left(\frac{1}{z}\right)$$

De donde se obtiene lo deseado.

ii) Sea $z \in S$, del inciso i) tenemos que $\left[\frac{nf(z)}{zf'(z)} - 1 \right] = \frac{a_0 z^{n-2} \bar{f}'(\frac{1}{z})}{\bar{a}_n f'(z)}$.

Tomando normas y utilizando que $|a_0| = |a_n|$ (por lema 2.4, iii) con $j = 0$) y que $\frac{1}{z} = \bar{z}$ cuando $|z| = 1$ se tiene que $\left| \frac{nf(z)}{zf'(z)} - 1 \right| = 1$. ■

Ejemplo 2.6

Sea $f(z) = (z - 3)(z - \frac{1}{3})(z - i)(z + i)$.

Desarrollando tenemos $f(z) = z^4 - \frac{8}{3}z^3 + 2z^2 - \frac{8}{3}z + 1$.

De donde podemos notar que $a_0 = 1 = \bar{a}_0$, $a_1 = \frac{-8}{3} = \bar{a}_1$, $a_2 = 2 = \bar{a}_2$, $a_3 = \frac{8}{3} = \bar{a}_3$ y $a_4 = 1 = \bar{a}_4$. Del teorema anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{a}_n[nf(z) - zf'(z)] &= [4(z^4 - \frac{8}{3}z^3 + 2z^2 - \frac{8}{3}z + 1) - z(4z^3 - 8z^2 + 4z - \frac{8}{3})] \\ &= 4 - 8z + 4z^2 - \frac{8}{3}z^3 \\ &= a_0z^{n-1}\bar{f}'(1/z). \end{aligned}$$

Observación 2.6 Por este último teorema, si f es auto invertible y z_0 es raíz de f' y $z_0 \in S$ entonces z_0 es raíz de f con multiplicidad ≥ 2 .

Teorema 2.7

- a) Si f es auto invertible entonces $|f^*(z)| = |f(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- b) f es auto invertible si y solo si $f^*(0)f(z) = f(0)f^*(z)$.

Demostración:

- a) Supongamos que f es auto invertible entonces, como f y f^* tienen el mismo conjunto de ceros, para alguna constante c

$$f^*(z) = cf(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Al evaluar en $z = e^{i\theta}$ y tomando la norma vemos que $|f^*(e^{i\theta})| = |cf(e^{i\theta})|$. Por (2.3) $|f^*(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$. Así que $|f(e^{i\theta})| = |c||f(e^{i\theta})|$. De donde concluimos que $|c| = 1$. Así de (2.4) tenemos

$$|f^*(z)| = |f(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

- b) Recordemos que $f(0) \neq 0$, tomando $z = 0$ en (2.4) tenemos

$$c = \frac{f^*(0)}{f(0)}. \quad (2.6)$$

Ahora, sustituyendo (2.6) en (2.4)

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \frac{f^*(0)}{f(0)}f(z), \\ f(0)f^*(z) &= f^*(0)f(z). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Con lo que queda demostrada la necesidad de este inciso.

La suficiencia se sigue automáticamente de suponer que $f(0)f^*(z) = f^*(0)f(z)$ y la definición de auto invertible. ■

Ejemplo 2.7

Sea $f(z) = (z - 3)(z + \frac{1}{3})(z - i)(z + i) = z^4 - \frac{8}{3}z^3 - \frac{8}{3}z + 1$.

$f^*(z) = f(z)$. Por lo que las afirmaciones del teorema se siguen inmediatamente.

Para el siguiente resultado usaremos la notación $\|f\|$, para denotar el módulo máximo de f sobre la circunferencia unitaria, donde f es un polinomio complejo, es decir

$$\|f\| = \max\{|f(z)| : z \in S\}$$

Teorema 2.8 Si f es un polinomio auto invertible de grado n entonces $\|f'\| = \frac{1}{2}n \|f\|$.

Demostración:

Sea ε un punto sobre S tal que $\|f'\| = |f'(\varepsilon)|$. Elijamos u sobre S de tal forma que $nf(\varepsilon) - \varepsilon f'(\varepsilon)$ y $uf'(\varepsilon)$ tengan el mismo argumento.

Por el Teorema de DeBrujin (ver Apéndice) tenemos

$$|nf(\varepsilon) - \varepsilon f'(\varepsilon) + uf'(\varepsilon)| \leq n\|f\|,$$

y así

$$|nf(\varepsilon) - \varepsilon f'(\varepsilon)| + |f'(\varepsilon)| \leq n\|f\|.$$

Por el Teorema 2.5 $|nf(\varepsilon) - \varepsilon f'(\varepsilon)| = |f'(\varepsilon)|$ y así $2|f'| \leq n\|f\|$.

Para la otra desigualdad usaremos nuevamente el Teorema 2.5 para obtener que si $|z| = 1$ entonces $n|f(z)| \leq 2|f'(z)|$ y así $n\|f\| \leq 2\|f'\|$. ■

Teorema 2.9 Si f es auto invertible y de grado n y $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j z^j$ es la serie de Laurent alrededor de 0 de $nf(z)/zf'(z)$ en algun anillo que contiene a la circunferencia unitaria, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = 2\text{Re}(c_0).$$

En particular, si todos los ceros de f caen en $|z| = 1$ entonces $c_0 = 1$ y $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = 2$

Demostración:

Del Teorema 2.5 tenemos lo siguiente:

$$1 = \left| \frac{nf(z)}{zf'(z)} - 1 \right|^2 = \left(\frac{nf(z)}{zf'(z)} - 1 \right) \left(\frac{\overline{nf(z)}}{\overline{zf'(z)}} - 1 \right) = \left| \frac{nf(z)}{zf'(z)} \right|^2 - 2\operatorname{Re} \left[\frac{nf(z)}{zf'(z)} \right] + 1.$$

por lo tanto

$$2\operatorname{Re} \left[\frac{nf(z)}{zf'(z)} \right] = \left| \frac{nf(z)}{zf'(z)} \right|^2, |z| = 1. \quad (2.8)$$

evaluando en $z = e^{i\theta}$ se tiene

$$\left| \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right|^2 = 2\operatorname{Re} \left[\frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right]$$

integrando

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} \left(\frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right) d\theta$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right) d\theta \\ &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} d\theta \right] \\ &= 2\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{iz\theta} f'(e^{i\theta})} i e^{i\theta} d\theta \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

pero $c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{iz\theta} f'(e^{i\theta})} i e^{i\theta} d\theta$ (ver apéndice).

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta = 2\operatorname{Re}(c_0).$$

Cuando f tiene todos sus ceros en la circunferencia unitaria el teorema de Gauss-Lucas (ver apéndice) implica que f' tiene todos sus ceros en $|z| \leq 1$. Por lo tanto la función definida por $nf(z)/[zf'(z)]$ es analítica en $|z| \geq 1$ y en $z = \infty$, y así $c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} nf(z)/[zf'(z)] = 1$.

■

Teorema 2.10 Si f es auto invertible y $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, con $a_n \neq 0$, entonces

$$2 \sum_{j=0}^n |a_j|^2 \leq \|f\|^2 \operatorname{Re}(c_0).$$

En particular si f tiene todos sus ceros en S entonces $2 \sum_{j=0}^n |a_j|^2 \leq \|f\|^2$. Más aún, se cumple la igualdad en las expresiones anteriores si y solo si los ceros de f son rotaciones de las raíces n -ésimas de la unidad.

Demostración:

Aplicando la identidad de Parseval (véase Apéndice) y el teorema 2.8, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n |a_j|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^2 \left| \frac{f(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \\ &\leq \left[\frac{\|f'\|}{n} \right]^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{nf(e^{i\theta})}{f'(e^{i\theta})} \right|^2 d\theta \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2} \|f\|^2 \operatorname{Re}(c_0). \quad (2.11)$$

Claramente en la desigualdad anterior se cumple la igualdad si y solo si $|f'(z)|$ es constante sobre S , en otras palabras, si y solo si $f(z) = a_0 + a_n z^n$ donde $|a_0| = |a_n|$.

■

Teorema 2.11 Si f es autoinvertible y tiene todos sus ceros sobre S y $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $a_n \neq 0$, entonces $2|a_j| \leq \|f\|$ para cada $j \neq n/2$ y $2^{1/2}|a_{n/2}| \leq \|f\|$ para n par.

Demostración:

Del inciso *iii*) del lema 2.4 y del Teorema 2.7 a) tenemos que $|a_j| = |a_{n-j}|$, $j = 0, 1, \dots, n$. Mas aún si $j \neq n/2$ entonces $4|a_j|^2 = 2[|a_j|^2 + |a_{n-j}|^2] \leq 2 \sum_{j=0}^n |a_j|^2 \leq \|f\|^2$.

Para n par, la estimación $2^{1/2}|a_{n/2}| \leq \|f\|$ se sigue del teorema 2.10.

■

2.2. Polinomio reducido

Definición 2.12 Si f es un polinomio de grado n , definimos su polinomio reducido f_1 por

$$f_1(z) = \frac{f^*(0)f(z) - f(0)f^*(z)}{z}, \quad (2.12)$$

es decir

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\bar{a}_n(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n) - a_0(\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \cdots + \bar{a}_0z^n)}{z} \\ &= \frac{(\bar{a}_na_0 - a_0\bar{a}_n) + (\bar{a}_na_1 - a_0\bar{a}_{n-1})z + \cdots + (\bar{a}_na_n - a_0\bar{a}_0)z^n}{z} \\ &= (\bar{a}_na_1 - a_0\bar{a}_{n-1}) + (\bar{a}_na_2 - a_0\bar{a}_{n-2})z + \cdots + (\bar{a}_na_n - a_0\bar{a}_0)z^{n-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8

Sea $f(z) = (z - 4)(z + 2)(z - 1)$, de acuerdo a la definición anterior su polinomio reducido se calcula de la siguiente forma

$$f_1(z) = \frac{(z^3 - 3z^2 - 6z + 8) - 8(8z^3 - 6z^2 - 3z + 1)}{z},$$

de lo que resulta

$$f_1(z) = -63z^2 - 45z + 18.$$

Observación 2.13 f_1 es un polinomio de grado a lo más $n - 1$ y su grado es $n - 1$, $\bar{a}_na_n - a_0\bar{a}_0 = |a_n| - |a_0|$ es no cero. Es decir, si y solo si $|f^*(0)| - |f(0)| \neq 0$.

Teorema 2.14 f es auto invertible si y solo si $f_1(z) = 0$.

Demostración:

La demostración se sigue del inciso b) del teorema 2.7. ■

Cualquier polinomio f no auto invertible puede escribirse de la siguiente manera

$$f = \Psi g,$$

donde Ψ es el factor maximal auto invertible y g es el factor complemento no auto invertible.

Teorema 2.15 Supongamos que f tiene a Ψ como factor maximal auto invertible y su complemento es g , entonces

$$f_1(z) = \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde Ψ es auto invertible, g_1 es el polinomio reducido de g , no es auto invertible si $|f^*(0)| \neq |f(0)|$ y tiene un grado menos que g si y solo si $|f^*(0)| \neq |f(0)|$.

Demostración:

Del teorema 2.7 tenemos

$$\begin{aligned}\Psi^*(0)\Psi(z) &\equiv \Psi(0)\Psi^*(z) \\ |\Psi^*(z)| &\equiv |\Psi(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Multiplicando en ambos lados de $\Psi(0)\Psi^*(z) = \Psi^*(0)\Psi(z)$ por $g_1(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Psi(0)\Psi^*(z)g_1(z) &= \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z), \\ \Psi(0)\Psi^*(z) \left(\frac{g^*(0)g(z) - g(0)g^*(z)}{z} \right) &= \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z) \\ \frac{\Psi(0)\Psi^*(z)g^*(0)g(z) - \Psi(0)\Psi^*(z)g(0)g^*(z)}{z} &= \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z)\end{aligned}\tag{2.13}$$

En el primer sumando de la izquierda utilizamos que $\Psi(0)\Psi^*(z) = \Psi^*(0)\Psi(z)$ y obtenemos

$$\frac{\Psi(0)^*\Psi(z)g^*(0)g(z) - \Psi(0)\Psi^*(z)g(0)g^*(z)}{z} = \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z)$$

Reescribiendo

$$\frac{\Psi(0)^*g^*(0)\Psi(z)g(z) - \Psi(0)g(0)\Psi^*(z)g^*(z)}{z} = \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z)$$

Por definición de $[\Psi g]_1$ y usando que $(\Psi g)^* = \Psi^* g^*$

$$[\Psi g]_1(z) = \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z)$$

es decir

$$f_1(z) = \Psi^*(0)\Psi(z)g_1(z).$$

Ahora

$$\begin{aligned}|f^*(z)| &= |f(z)|, \\ f(z) &= \Psi(z)g(z), \\ f^*(z) &= \Psi^*(z)g^*(z).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Usando las expresiones anteriores, obtenemos

$$|f^*(z)| - |f(z)| = |\Psi(z)| (|g^*(z)| - |g(z)|).\tag{2.15}$$

De las desigualdades $f(0) \neq 0$ y $f^*(0) \neq 0$ se sigue que Ψ y g satisfacen las mismas restricciones que f . Ahora, poniendo $z = 0$ en (2.15) concluimos que

$$|f^*(0)| = |f(0)| \iff |g^*(0)| = |g(0)|.$$

■

Proposición 2.16 $z^{n+1} \frac{d}{dz} \left(\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) \right) = -f'^*(z)$

Demostración:

Si $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ entonces $\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{1}{z} + \dots + \bar{a}_n \frac{1}{z^n}$, de aquí que $\frac{d}{dz} \left(\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) \right) = -\bar{a}_1 z^{-2} - \dots - n\bar{a}_n z^{-n-1}$, de donde $z^{n+1} \frac{d}{dz} \left(\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) \right) = -\bar{a}_1 z^{n-1} - \dots - n\bar{a}_n z$.

Por otra parte

$$f'(z)^* = z^{n-1} \bar{f}' \left(\frac{1}{z} \right) = z^{n-1} \left[\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 \frac{1}{z} + \dots + n\bar{a}_n \frac{1}{z^{n-1}} \right] = \bar{a}_1 z^{n-1} + 2\bar{a}_2 z^{n-2} + \dots + n\bar{a}_n z.$$

Por lo tanto

$$z^{n+1} \frac{d}{dz} \left(\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) \right) = -f'^*(z).$$

■

Lema 2.17 *Sea f un polinomio auto invertible de grado n , entonces*

$$(f'(z))^* \equiv \frac{f^*(0)}{f(0)} (nf(z) - zf'(z)).$$

Demostración:

Como f es auto invertible, por el Teorema 2.7 b) se cumple que :

$$f^*(0)f(z) \equiv f(0)f^*(z), \tag{2.16}$$

de lo que podemos concluir

$$f^*(0)f'(z) = f(0)(f^*(z))'.$$

Ahora, utilizando que $f^*(z) = z^n \bar{f} \left(\frac{1}{z} \right)$ vemos que

$$\begin{aligned} z(f^*(z))' &= z(z^n \bar{f}(1/z))' \\ &= z(nz^{n-1} \bar{f}(1/z) + z^n \frac{d}{dz} \left(\bar{f} \left(\frac{1}{z} \right) \right)) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por proposición anterior se tiene

$$\begin{aligned} z(f^*(z))' &= nz^n \bar{f}(1/z) - (f'(z))^* \\ z(f^*(z))' &= nf^*(z) - (f'(z))^*. \end{aligned}$$

Despejando a $(f'(z))^*$

$$\begin{aligned} (f'(z))^* &= \overline{nf^*(z) - z(f^*(z))'} \\ &= \overline{nf^*(z) - z\left(\frac{f^*(0)}{f(0)}\right) f'(z)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} (f'(z))^* &= \overline{n\frac{f^*(0)}{f(0)}f(z) - z\left(\frac{f^*(0)}{f(0)}\right) f'(z)} \\ &= \frac{f^*(0)}{f(0)} \left(\overline{nf(z) - zf'(z)} \right). \end{aligned}$$

■

Construiremos ahora un polinomio que será de gran utilidad en la demostración de un importante teorema.

Para cada ξ , $0 < \xi < 1$, definamos el polinomio

$$F(z) = f(z) + \xi z f'(z). \tag{2.19}$$

Algunas propiedades de F se demuestran en el siguiente teorema.

Teorema 2.18 *Supongamos que f es auto invertible de grado n , y sea F un polinomio definido por (2.19). Entonces*

- a) $F^*(z) = (f^*(0)/f(0))[f(z) + \xi(nf(z) - zf'(z))]$.
- b) $|F^*(0)| - |F(0)| > 0$.
- c) F es no auto invertible.
- d) f' y F_1 tienen el mismo conjunto de ceros, donde F_1 es el polinomio reducido de F .

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} F^*(z) &= [f(z) + \xi z f'(z)]^* \\ &= \overline{f^*(z) + \xi z (f'(z))^*}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Recordemos que $f^*(z) = \frac{f^*(0)}{f(0)}f(z)$ y que $(f'(z))^* = \frac{f^*(0)}{f(0)}(nf(z) - zf'(z))$.

Sustituyendo en (2.20) se obtiene el resultado deseado.

b) De la definición de F y el inciso anterior tenemos

$$F(0) = f(0),$$

y

$$\begin{aligned} F^*(0) &= (f^*(0)/f(0))[f(0) + \xi(nf(0))] \\ &= f^*(0)[1 + \xi n]. \end{aligned}$$

Ahora, como f es auto invertible, $|f^*(0)| = |f(0)|$, así

$$|F^*(0)| - |F(0)| = |f^*(0)[1 + \xi n]| - |f^*(0)| \quad (2.21)$$

$$= |f^*(0)| \xi n > 0. \quad (2.22)$$

c) Como $|F^*(0)| - |F(0)| > 0$, se sigue inmediatamente que $F^*(z)$ no es auto invertible.

d) Usando la definición de polinomio reducido tenemos que

$$F_1(z) = \frac{F^*(0)F(z) - F(0)F^*(z)}{z}.$$

Ahora usando a) y b) tenemos

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{(1 + \xi n)f^*(0)F(z) - f(0)(f^*(0)/f(0))[f(z) + \xi(nf(z) - zf'(z))]}{z} \\ &= \frac{(1 + \xi n)[f^*(0)f(z) + \xi zf^*(0)f'(z)] - [f^*(0)f(z) + \xi nf(z)f^*(0) - \xi zf'(z)f^*(0)]}{z} \\ &= \frac{2\xi zf^*(0)f'(z) + \xi^2 n zf^*(0)f'(z)}{z} \\ &= 2\xi f^*(0)f'(z) + \xi^2 n f^*(0)f'(z) \\ &= f^*(0)f'(z)[2\xi + \xi^2 n] \\ &= \xi(2 + \xi n)f^*(0)f'(z). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.19 *Supongamos f es auto invertible y que tiene k ceros distintos sobre el círculo unidad S , entonces f es de tipo $(p, n - 2p, p)$ si y solo si F es de tipo $(p + k, n - 2p - k, p)$ para todo ε suficientemente pequeño, donde F es el polinomio definido en la ecuación (2.19).*

Demostración:

Como los ceros de un polinomio son funciones continuas de sus coeficientes y F es una perturbación de f , esta claro que para todo ε pequeño f y F en D tienen un número igual de ceros en D . De igual modo para el exterior de S .

El único problema es determinar que sucede con los ceros de f en S .

Supongamos α es un cero de f en S con multiplicidad μ . Entonces

$$f(z) = (z - \alpha)^\mu h(z), h(\alpha) \neq 0, \mu \geq 1, |\alpha| = 1.$$

F tiene precisamente μ ceros en una vecindad de α para un ε suficientemente pequeño. Ahora, tenemos que localizar los μ ceros.

De las expresiones $F(z) = f(z) + \varepsilon z f'(z)$ y $f(z) = (z - \alpha)^\mu h(z)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(z) &= (z - \alpha)^\mu h(z) + \varepsilon z [(z - \alpha)^\mu h(z)]', \\ F(z) &= (z - \alpha)^{\mu-1} [h_1(z) + h_2(z)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$h_1(z) = [(1 + \varepsilon\mu)z - \alpha]h(z), h_2(z) = \varepsilon z(z - \alpha)h'(z).$$

Así $\mu - 1$ de los ceros son iguales a α , y resta simplemente determinar el cero de $h_1 + h_2$ que converge a α si $\xi \rightarrow 0$. Notemos primero que h_1 tiene un cero en

$$z_0 = \frac{\alpha}{1 + \xi\mu}$$

el cual converge a α si $\xi \rightarrow 0$ y está en D para todo $\xi > 0$. Como $h(\alpha) \neq 0$ existe una vecindad abierta N de α tal que para todo z en la cerradura de N , $h(z) \neq 0$ y $h'(z)/h(z)$ es uniformemente acotada.

De aquí en adelante asumiremos que ξ es lo suficientemente pequeña para asegurar que $z_0 \in N$, y construiremos una circunferencia S_0 con centro z_0 , interior D_0 y radio $\varepsilon\xi$, donde ε es tan pequeño que S_0 está tanto en N y D .

De lo anterior tenemos que $|h_2(z)/h_1(z)| \leq K\xi$, $\forall z \in D_0$ donde K es alguna constante positiva independiente de ξ .

Aplicando el teorema de Rouché (veáse Apéndice) concluimos que h_1 y $h_1 + h_2$ tienen el mismo número de ceros en el interior de S_0 . Por lo tanto hemos localizado el cero de $h_1 + h_2$ que converge a α si $\xi \rightarrow 0$ y que está en D . Como el mismo argumento aplica para cada cero de f en la circunferencia unidad S , el teorema queda demostrado. ■

Teorema 2.20 *Supongamos que f es un polinomio de grado n tal que $|f^*(0)| \neq |f(0)|$ entonces f es de tipo (p_1, p_2, p_3) si y solo si f_1 es de tipo $(p_1 - 1, p_2, p_3)$ si $|f^*(0)| > |f(0)|$ y de tipo $(p_3 - 1, p_2, p_1)$ si $|f^*(0)| < |f(0)|$.*

Demostración:

Como $|f^*(0)| \neq |f(0)|$, f no es auto invertible. Sea $f = \Psi g$, con Ψ el factor maximal auto invertible. Sabemos que

$$|f^*(0)| \geq |f(0)| \Leftrightarrow |g^*(0)| \geq |g(0)|.$$

Supongamos ahora que $|f^*(0)| > |f(0)|$ entonces por $|f^*(z)| = |f(z)| \forall z \in S$ tenemos

$$|g^*(0)g(z)| > |g(0)g^*(z)| \forall z \in S, \quad (2.24)$$

de esta manera se tiene $g_1(z) \neq 0 \forall z \in S$.

Esto significa que g y g_1 no tienen ceros sobre S .

Por (2.24) una aplicación de teorema de Rouché nos dice que $g^*(0)g(z)$ y $g^*(0)g(z) - g(0)g^*(z)$ tienen el mismo número de ceros en D . Así g tiene un cero mas en D

$$g_1(z) = \frac{g^*(0)g(z) - g(0)g^*(z)}{z}.$$

Por el teorema 2.15 sabemos que g_1 es de un grado menor que g , así que g_1 y g deben tener el mismo número de ceros fuera de S . Por el mismo teorema Ψ es un factor de f y f_1 , y podemos así concluir que f es de tipo (p_1, p_2, p_3) si y solo si f_1 es de tipo $(p_1 - 1, p_2, p_3)$. Por otro lado si $|f^*(0)| < |f(0)|$ un argumento similar prueba que f_1 tiene un cero menos en D que f^* . Recordando que f es de tipo (p_1, p_2, p_3) si y solo si f^* es de tipo (p_3, p_2, p_1) la demostración queda terminada. ■

Teorema 2.21 *Supongamos que f es auto invertible de grado n con k ceros distintos en S . Entonces f es de tipo $(p, n - 2p, p)$ si y solo si f' es de tipo $(p + k - 1, n - 2p - k, p)$.*

Demostración:

Sabemos que un polinomio autoinvertible de grado n es de tipo $(p, n - 2p, p)$ para algún $p \geq 0$ y que los polinomios conservativos son un subconjunto propio de los polinomios autoinvertibles. Esto es equivalente a que F sea del tipo $(p, n - 2p, p)$ esto por el teorema 2.19, y que $|F^*(0)| > |F(0)|$ por el teorema 2.18. Entonces aplicando el teorema 2.20 y teorema 2.18 el resultado se sigue inmediatamente. ■

2.3. La teoría de los polinomios de Schur y de von Neumann

Teorema 2.22 *f es un polinomio de von Neumann si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

i) $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 es un polinomio de von Neumann, ó

ii) $f_1 \equiv 0$ y f' es un polinomio de von Neumann.

Demostración:

Supongamos que f es de von Neumann. Entonces f es de tipo $(p, n-p, 0)$ y el valor absoluto de el producto de sus ceros es ≤ 1 . Así

$$\left| \frac{f(0)}{f^*(0)} \right| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \leq 1,$$

así tenemos $|f^*(0)| > |f(0)|$ ó $|f^*(0)| = |f(0)|$.

Si $|f^*(0)| > |f(0)|$ tenemos por el teorema 2.20 que f_1 es de tipo $(p-1, n-p, 0)$ y así es de von Neumann. De otra manera, si $|f^*(0)| = |f(0)|$ entonces el valor absoluto de el producto de sus ceros es 1. Pero f no tiene ceros fuera de S , así no puede tener ceros en D . Por lo tanto f es de tipo $(0, n, 0)$, esto significa que es auto invertible e implica, por el teorema 2.14, que $f_1 \equiv 0$.

Además, por el teorema 2.21 sabemos que f' es de tipo $(k-1, n-k, 0)$ donde k es el número de ceros distintos de f en S y así f' es de von Neumann.

Ahora supongamos que $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 es de von Neumann. Entonces f_1 es de tipo $(p-1, n-p, 0)$. Por el teorema 2.20 f es entonces de tipo $(p, n-p, 0)$ y así es de von Neumann. Por otra parte, si $f_1 \equiv 0$ y f' es de von Neumann, entonces f es auto invertible y por lo tanto de tipo $(p, n-2p, p)$ y por el teorema 2.21 f' es de tipo $(p+k-1, n-2p-k, p)$. Pero f' es de von Neumann por lo que $p = 0$ y así f es de tipo $(0, n, 0)$. ■

Teorema 2.23 $f(z)$ es un polinomio de Schur de grado n si y solo si $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 es un polinomio de Schur.

Demostración:

Asumamos que $|f(0)| < |f^*(0)|$ y que f_1 es un polinomio de Schur de grado $n-1$.

Consideremos $g(z) = zf_1(z)/f^*(0)$, entonces utilizando la definición de f_1 obtenemos

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= \left| f(z) - \frac{zf_1(z)}{f^*(0)} \right| \\ &= \left| f(z) - \frac{f^*(0)f(z) - f(0)f^*(z)}{f^*(0)} \right| \\ &= \left| \frac{f(0)}{f^*(0)} f^*(z) \right| < |f^*(z)|. \end{aligned}$$

Sobre la circunferencia unidad tenemos que

$$|f^*(z)| = |f(\bar{z}^{-1})| = |f(z)|,$$

ya que $\bar{z}^{-1} = z$ sobre S . Así por el teorema de Rouché, $f(z)$ tiene tantos ceros dentro de S como zf_1 . Así f es un polinomio de Schur.

Ahora asumamos que f es un polinomio de Schur de grado n . Entonces el producto de las raíces de f es a_0/a_n y esta cantidad debe tener magnitud menor o igual que 1. Esto es equivalente a tener $|f(0)| < |f^*(0)|$. El teorema de Rouché nos muestra que zf_1 es también un polinomio de Schur si f_1 es un polinomio de Schur. ■

Teorema 2.24 *f es un polinomio simple de von Neumann si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

i) $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 es un polinomio simple de von Neumann.

ii) $f_1 \equiv 0$ y f' es un polinomio de Schur.

Demostración:

Si f es un polinomio simple de von Neumann entonces es de tipo $(n - k, k, 0)$ donde los k ceros en S son distintos. Ya sea que $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 sean del tipo $(n - k - 1, k, 0)$ donde por el teorema 2.15 los ceros de f_1 en S son los mismos que los de f , o que $|f^*(0)| = |f(0)|$, $f_1 \equiv 0$ y f' sean de tipo $(n - 1, 0, 0)$.

Ahora si $|f^*(0)| > |f(0)|$ y f_1 es del tipo $(n - k - 1, k, 0)$ entonces f es del tipo $(n - k, k, 0)$ con los mismos ceros que f_1 en S , y si $f_1 \equiv 0$ y f' es de Schur entonces f y f' son del tipo $(n - 1, 0, 0)$ y $(0, n, 0)$ respectivamente. ■

Teorema 2.25 *f es un polinomio conservativo si y solo si $f_1 \equiv 0$ y f' es un polinomio de von Neumann.*

Demostración:

Tenemos que f es de tipo $(0, n, 0)$ si y solo si $f_1 \equiv 0$ y f' es de tipo $(k - 1, n - k, 0)$ por el teorema 2.21. ■

Corolario 2.26 *f es un polinomio conservativo simple (i.e. todos sus ceros distintos) si y solo si $f \equiv 0$ y f' es un polinomio de Schur.*

Los siguientes lemas nos permitirán dar una demostración diferente al teorema 2.24, de donde obtendremos un algoritmo que se usará en capítulos posteriores.

Notemos que un polinomio de von Neumann puede escribirse de la forma

$$f(z) = \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l(z), \quad (2.25)$$

donde $|\alpha_v| = 1$ para $1 \leq v \leq l$ y $f_l(z)$ es un polinomio de Schur de grado $n - l$ (n es el grado del polinomio $f(z)$) o una constante. En el caso que $l = 0$, el teorema se sigue de (2.23).

Lema 2.27 *Si $f(z)$ es de la forma (2.25) entonces el polinomio reducido de $f(z)$ es de la forma*

$$f_1(z) = \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_{l-1}(z) \quad (2.26)$$

Demostración:

Tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \overline{f(\bar{z}^{-1})} z^d \\ &= z^d \prod_{v=1}^l \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}_v \right) \overline{f_l \left(\frac{1}{z} \right)} \\ &= \prod_{v=1}^l (1 - z \bar{\alpha}_v) f_l^*(z) \\ &= \prod_{v=1}^l (-\bar{\alpha}_v) \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l^*(z). \end{aligned}$$

Notemos que

$$f(z) = \prod_{v=1}^l (-\alpha_v) f_l(0)$$

y

$$f^*(0) = \prod_{v=1}^l (-\bar{\alpha}_v) \prod_{v=1}^l (-\alpha_v) f_l^*(0) = f_l^*(0).$$

Notemos también que

$$\begin{aligned} f(0) f^*(z) &= \prod_{v=1}^l (-\alpha_v) f_l(0) \prod_{v=1}^l (-\bar{\alpha}_v) \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l^*(z) \\ &= f_l(0) \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l^*(z). \end{aligned}$$

Con las expresiones anteriores podemos calcular el numerador del polinomio reducido de $f(z)$,

$$\begin{aligned} f^*(0)f(z) - f(0)f^*(z) &= \\ &= f_l^*(0) \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l(z) - f_l(0) \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) f_l^*(z) \\ &= \prod_{v=1}^l (z - \alpha_v) [f_l^*(0) f_l(z) - f_l(0) f_l^*(z)] \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

Cuando $f(z)$ es un polinomio conservativo de grado n consideraremos polinomios

$$f^\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon z f'(z), \quad (2.27)$$

para valores pequeños positivos de ε .

Lema 2.28 *Si r es una raíz de $f(z)$ en S de multiplicidad m , entonces el polinomio $f^\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon z f'(z)$ tiene una raíz que satisface*

$$r^\varepsilon = r(1 + \varepsilon)^{-m} + O(\varepsilon^2).$$

Demostración:

Resolveremos la ecuación

$$f^\varepsilon(r(1 + \delta)) = 0,$$

para δ una función de ε .

Usando series de Taylor sobre f y f' , tenemos

$$\begin{aligned} f(r(1 + \delta)) + \varepsilon r(1 + \delta) f'(r(1 + \delta)) &= \\ &= \frac{1}{m!} f^m(r) (r\delta)^m + \varepsilon r(1 + \delta) \frac{1}{(m-1)!} f^m(r) (r\delta)^{(m-1)} + O(\delta)^{m+1} \\ &= \frac{1}{m!} f^m(r) r^m \delta^{m-1} (\delta + m\varepsilon + O(\varepsilon^2)). \end{aligned}$$

Si en el lado derecho sustituimos $\delta = -m\varepsilon - O(\varepsilon^2)$ vemos que se hace cero, entonces $r(1 + \delta) = r(1 - m\varepsilon - O(\varepsilon^2))$ es una raíz de f^ε es decir $r(1 - m\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ es raíz de f^ε pero $r(1 - m\varepsilon) + O(\varepsilon^2) = r(1 + \varepsilon) - m + O(\varepsilon^2)$. ■

Lema 2.29 Si $f(z)$ es un polinomio conservativo de grado n y $f^\varepsilon(z)$ está definido por $f(z) + \varepsilon z f'(z)$ entonces

$$f_1^\varepsilon(z) = \varepsilon(2 + n\varepsilon)f^*(0)f'(z).$$

Demostración:

Como $f_1(z)$ es idénticamente cero, tenemos

$$f^*(0)f(z) = f(0)f^*(z),$$

y derivando esta relación, obtenemos

$$f^*(0)f'(z) = f(0)f'^*(z).$$

Calculando $(zf')^*(z)$. Tenemos

$$\begin{aligned} (zf')^*(z) &= \sum_{l=0}^n (n-l)\bar{a}_{n-l}z^l \\ &= nf^* - \sum_{l=0}^n l\bar{a}_{n-l}z^l \\ &= nf^*(z) - zf'^*(z). \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon*}(z) &= f^*(z) + \varepsilon(nf^*(z) - zf'^*(z)), \\ f^{\varepsilon*}(0) &= f^*(0)(1 + \varepsilon n), \\ f^\varepsilon(0) &= f(0). \end{aligned}$$

(2.28)

Por lo que podemos desarrollar la siguiente expresión

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon*}(0)f^\varepsilon(z) - f^\varepsilon(0)f^{\varepsilon*}(z) &= \\ &= f^*(0)(1 + \varepsilon n)(f(z) + \varepsilon z f'(z)) - f(0)(f^*(z) + \varepsilon(nf^*(z) - zf'^*(z))) \\ &= \varepsilon z [f^*(0)(1 + \varepsilon n)f'(z) + f(0)f'^*(z)] \\ &= \varepsilon z(2 + \varepsilon n)f^*(0)f'(z). \end{aligned}$$

De donde se obtiene lo deseado. ■

Demostración alternativa del teorema 2.24.

Demostración:

El lema 2.28 prueba el teorema en el caso que $f_1(z)$ no es idénticamente cero. Nosotros

hemos visto que $f_1(z)$ es idénticamente cero si todas las raíces de $f(z)$ están sobre S , es decir si $f(z)$ es un polinomio conservativo.

Para $m = 1$, tenemos que las raíces simples r^ε de $f^\varepsilon(z)$ están dadas por

$$r^\varepsilon = r(1 + \varepsilon)^{-1} + O(\varepsilon^2).$$

Así, si f es un polinomio conservativo y de von Neumann simple, entonces para un valor positivo pequeño de ε , f^ε es un polinomio de Schur. Entonces el teorema 2.24 implica que f_1^ε es un polinomio de Schur.

Se puede probar el teorema en el caso que $f_1(z)$ es cero.

Si $f_1(z)$ es cero, entonces $f(z)$ es un polinomio conservativo y $f^\varepsilon(z)$ es un polinomio de Schur para un ε positivo. Así por el teorema 2.24, $|f^\varepsilon(0)| < |f^{\varepsilon*}(0)|$ y f_1^ε es un polinomio de Schur. Más aún las raíces de f_1^ε son las mismas que las de f_1' . Así f_1' es un polinomio de Schur de grado n .

El argumento en la dirección opuesta se sigue inmediatamente. ■

Otras propiedades e ideas acerca de polinomios Schur y otras clases de polinomios pueden ser encontradas en los trabajos [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [11].

Ejemplos de la aplicación de la teoría de los polinomios de Schur y de von Neumann

En este capítulo mostraremos varios ejemplos que ilustrarán el uso de la teoría previa.

El primer paso en el análisis de la estabilidad de una ecuación de diferencias finitas que aproxima a una ecuación diferencial parcial, es determinar el comportamiento de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial. Si la solución de la ecuación de diferencias finitas es acotada para cualquier valor de tamaño de paso que se utilice, se dice que la ecuación de diferencias finitas es incondicionalmente estable. En cambio, si la ecuación de diferencias finitas es acotada solamente para determinados tamaños de paso, la ecuación de diferencias finitas es condicionalmente estable y si la solución de la ecuación de diferencias finitas es no acotada para todos los valores de tamaño de paso, entonces la ecuación de diferencias finitas es incondicionalmente inestable. En el caso de que la solución exacta de una ecuación diferencial parcial es no acotada, la ecuación de diferencias finitas también deber ser no acotada. En este caso, el concepto de estabilidad no se aplica, porque las solución numérica se comporta de la misma manera que la solución exacta.

A continuación introducimos el concepto de matriz de amplificación, que al igual que el factor de amplificación estudiado en el capítulo 1, nos proporciona condiciones para garantizar la estabilidad de un sistema:

La matriz de amplificación de un esquema se obtiene realizando la sustitución $G^n e^{im\theta}$ en v_m^n en el sistema en diferencias. A partir de esta matriz podremos obtener el polinomio de amplificación, el cual es el polinomio característico y analizando las raíces de este polinomio, empleando la teoría previa de polinomios, obtendremos conclusiones sobre la estabilidad o no estabilidad del sistema original.

3.1. Esquema leapfrog

Consideremos nuevamente el esquema estudiado en el Capítulo 1. Este esquema tiene como polinomio característico

$$f(z) = z^2 + i\alpha z - 1, \quad (3.1)$$

donde $\alpha = 2a\lambda \operatorname{sen}\xi$ y recordemos que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{h}{k}$ y $|\xi| \leq \pi$.

Debemos clasificar f para cada valor del parámetro α entre $-2a\lambda$ y $2a\lambda$.

Comencemos calculando $f^*(z)$ usando la expresión (1.2), tenemos

$$f^*(z) = 1 - i\alpha z - z^2.$$

Usando la definición (2.12) calculemos $f_1(z)$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{(z^2 + i\alpha z - 1) - (-1)(1 - i\alpha z - z^2)}{z} \\ &= \frac{z^2 + i\alpha z - 1 + 1 - i\alpha z - z^2}{z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora calculando $f'(z) = 2z - i\alpha$, tenemos que f' es de von Neumann si y solo si $|\alpha|/2 \leq 1$, lo cual ocurre si y solo si $|a\lambda| \leq 1$.

Por el teorema 2.23, f es de von Neumann si y solo si $|a\lambda| \leq 1$, la cual es la condición necesaria y suficiente para garantizar estabilidad.

Es importante notar que f' es de Schur si y solo si $|a\lambda| < 1$, por lo que del corolario (2.24) concluimos que f es conservativo simple si y solo si $|a\lambda| < 1$.

Por otro lado si $|a\lambda| = 1$ entonces para $\xi = \pm\pi/2$, f' es conservativo y así por el corolario (2.24) f también lo es, pero no es simple. Por lo que el esquema es estable si y solo si $|a\lambda| < 1$.

3.2. Esquema implícito para la ecuación de calor

Consideremos la ecuación de calor

$$u_t = au_{xx}.$$

Analizaremos el esquema de 5 pasos para la ecuación del calor en una dimensión

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{k^2}. \quad (3.2)$$

Esta fórmula de 3 niveles puede ser reducida a un sistema de 3 niveles haciendo $u_j^{n-1} = v_j^n$. El sistema resultante es

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - v_j^n}{h} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{k^2}, \quad (3.3)$$

con $v_j^{n+1} = u_j^n$.

La matriz de amplificación del sistema es

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3+8\alpha \text{sen}^2 \beta} & \frac{-1}{3+8\alpha \text{sen}^2 \beta} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

donde $\alpha = \frac{\sigma h}{k^2}$ y $\beta = 1/2k$.

Este esquema tiene como polinomio característico

$$f(z) = 1 - 4z + \alpha z^2, \quad (3.5)$$

con $\alpha = 3 + 8a\lambda \text{sen}^2 \xi / 2$, $a > 0$ y λ es k/h^2 .

Clasificando f para cada valor del parámetro α , $3 \leq \alpha \leq 3 + 8a\lambda$.

Calculemos f^* usando (1.2)

$$f^* = z^2 - 4z + \alpha.$$

De donde obtenemos que

$$|f^*(0)| = \alpha.$$

Como $|f(0)| = 1$, entonces $|f^*(0)| > |f(0)|$.

Ahora calculemos f_1 usando la definición (2.12),

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha(1 - 4z + \alpha z^2) - (z^2 - 4z + \alpha)}{z} \\ &= \frac{\alpha - 4\alpha z + \alpha^2 z^2 - z^2 + 4z - \alpha}{z} \\ &= \frac{4(1 - \alpha)z + (\alpha^2 - 1)z^2}{z} \\ &= 4(1 - \alpha) + (\alpha^2 - 1)z \\ &= (1 - \alpha)[4 + (\alpha + 1)z]. \end{aligned}$$

f_1 no es idénticamente cero y es polinomio de von Neumann para todos los valores permitidos del parámetro α si y solo si $4 \leq 1 + \alpha$.

Como la condición siempre se cumple, entonces por el teorema 2.24 este esquema es débilmente incondicionalmente estable.

3.3. Esquema Richardson

Richardson propuso una fórmula de diferencias finitas centrada en el espacio y centrada en el tiempo.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2h} - \alpha \frac{(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)}{k} = 0.$$

Este esquema tiene como polinomio característico

$$f(z) = z^2 + \alpha z - 1,$$

donde $\alpha = 8a\lambda \text{sen}^2 \xi / 2$.

Calculando $f^*(z)$, obtenemos

$$f^* = 1 + \alpha z - z^2.$$

Usando la definición para $f_1(z)$,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{(z^2 + \alpha z - 1) - (-1)(1 + \alpha z - z^2)}{z} \\ &= \frac{z^2 + \alpha z - 1 + 1 + \alpha z - z^2}{z} \\ &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Como $f_1(z) \equiv 2\alpha \neq 0$ para $\alpha \neq 0$ y $|f^*(0)| = 1 = |f(0)|$, por el teorema 2.24 f no es un polinomio de von Neumann y por lo tanto el esquema es inestable.

3.4. Esquema Dufort-Frankel

El esquema Dufort-Frankel, publicado por primera vez en 1953 [13], mejora el esquema Richardson. Dufort y Frankel realizaron ajustes al término de difusión que resultó en un esquema explícito y estable.

El esquema propuesto es

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2h} = \frac{\sigma u_{m-1}^n - u_m^{n+1} - u_m^{n-1} + u_{m-1}^n}{k^2}.$$

Este esquema tiene como polinomio característico

$$f(z) = (\alpha - 1) - 2\alpha \cos \xi z + (\alpha + 1)z^2,$$

donde $\alpha = 2a\lambda > 0$.

Podemos calcular fácilmente que $f(0) = \alpha - 1$, $f^*(0) = \alpha + 1$ de donde se obtiene que

$$|f^*(0)| > |f(0)|.$$

Calculando $f_1(z)$ tenemos

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \\ &= \frac{(\alpha + 1)[(\alpha - 1) - 2\alpha \cos \xi z + (\alpha + 1)z^2] - (\alpha - 1)[(\alpha - 1)z^2 - 2\alpha \cos \xi z + (\alpha + 1)]}{z} \\ &= 4\alpha(-\cos \xi + z). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema 2.24 f es un polinomio de von Neumann, así que el esquema es incondicionalmente estable.

3.5. Esquema de Hadjidimos

Consideremos la ecuación de calor

$$u_t = au_{xx},$$

sobre la región $R = \{(x, t) | 0 < x < \pi, t > 0\}$, con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0. \end{aligned}$$

La forma general del esquema propuesto en [14] es:

$$\frac{\eta_0 u_m^n + \eta_1 u_{m-1}^{n-1} + \eta_2 u_m^{n-1} + \eta_3 u_{m+1}^{n-1}}{h^2} = \sigma \frac{\theta_1 \delta^2 u_m^n + \theta_2 \delta^2 u_m^{n-1}}{k^2},$$

donde $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \theta_1$ y θ_2 son coeficientes que determinan el esquema y que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{1}{2} - \theta \\ \eta_1 &= \eta_3 = \eta \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} + \theta - 2\eta \\ \theta_1 &= 1 - \theta \\ \theta_2 &= \theta \neq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El polinomio característico de la matriz de amplificación para este esquema es

$$f(z) = \left(-\frac{1}{2} - \theta + \eta s + a\lambda\theta s\right) + (2\theta - \eta s + a\lambda(1 - \theta)s)z + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)z^2, \quad (3.6)$$

donde $s = 4\text{sen}^2\xi/2$, $\frac{1}{2} \neq \theta \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $\lambda = k/h^2$.

El problema es determinar que condiciones sobre los parámetros θ y η garantizan que el esquema es debilmente estable, es decir que f sea un polinomio de von Neumann $\forall s$, $0 \leq s \leq 4$.

El polinomio f es de la forma

$$f(z) = A + Bz + Cz^2,$$

donde A , B y C son reales.

Así tendríamos

$$\begin{aligned} f(0) &= A, \\ f^*(0) &= C, \\ f_1(z) &= (C - A)[(C + A)z + B], \\ f'(z) &= 2Cz + B. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.23 f es un polinomio de von Neumann si y solo si alguna de las siguientes condiciones se cumple

- i) $(C - A)(C + A) > 0$ y $(B - A - C)(B + A + C) \leq 0$,
- ii) $C - A = 0$ y $(B - 2A)(B + 2A) \leq 0$,
- iii) $C + A = 0$ y $B = 0$.

Sumando y restando las ecuaciones en *iii*) vemos que son equivalentes a que se cumpla $B - A - C = 0$ y $B + A + C = 0$.

Por lo que el esquema es débilmente estable si y solo si para todo $0 \leq s \leq 4$ al menos una de las siguientes condiciones se cumple

$$(1 - \eta s - a\lambda\theta s)(-2\theta + \eta s + a\lambda\theta s) > 0, a\lambda s(4\theta - 2\eta s + a\lambda(1 - 2\theta)s) \leq 0 \quad (3.7)$$

$$1 - \eta s - a\lambda\theta s = 0, a\lambda s(4\theta - 2\eta s + a\lambda(1 - 2\theta)s) \leq 0, \quad (3.8)$$

$$a\lambda s = 0, 4\theta - 2\eta s + a\lambda(1 - 2\theta)s = 0 \quad (3.9)$$

Notemos que

- Para $s = 0$ las condiciones (3.7) o (3.9) se cumplen si y solo si

$$\theta \leq 0. \quad (3.10)$$

- Para $s = 4$ la condición (3.9) no se puede cumplir y para la segunda desigualdad de las condiciones (3.7) y (3.8) se debe tener que

$$0 \geq \frac{1}{2}\theta + a\lambda\left(\frac{1}{2} - \theta\right). \quad (3.11)$$

Lo anterior implica que el segundo paréntesis de la primera desigualdad en (3.7) es positivo y por lo tanto (3.7) o (3.8) se cumple si y solo si (3.11) se cumple y el primer paréntesis de (3.7) es no negativo, lo cual ocurre si y solo si

$$\eta \leq \frac{1}{4} - a\lambda\theta. \quad (3.12)$$

La consistencia de las ecuaciones (3.11) y (3.12) requiere que

$$\theta \leq \frac{1}{2} - a\lambda. \quad (3.13)$$

Combinando (3.10) con (3.13) y (3.11) con (3.13), obtenemos las siguientes condiciones necesarias para garantizar la estabilidad débil. Primero elegimos θ que satisfaga

$$0 \leq \min\left\{0, \frac{1}{2} - a\lambda\right\}, \quad (3.14)$$

y η tal que

$$\frac{1}{2}\theta + a\lambda\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \leq \eta \leq \frac{1}{2} - a\lambda. \quad (3.15)$$

Como (3.14) y (3.15) son condiciones suficientes en los puntos $s = 0$ y $s = 4$ y estamos interesados solo con los signos de expresiones que son lineales en s , se puede ver que son condiciones suficientes para los valores en $0 < s < 4$.

3.6. Otros esquemas para la ecuación de calor

- (a) Un esquema de segundo orden para la ecuación de calor $u_t + au_x = 0$ es

$$\frac{7v_m^{n+1} - 8v_m^n + v_m^{n-1}}{6k} + a\delta_0 \left(\frac{2v_m^{n-1} + v_m^n}{3} \right) = f_m^{n+2/3}. \quad (3.16)$$

Este esquema tiene como polinomio de amplificación

$$f(z) = (7 + 4i\beta)z^2 - (8 - 2i\beta)z + 1, \quad (3.17)$$

donde $\beta = a\lambda \sin\theta$.

El esquema será estable cuando $f(z)$ sea un polinomio simple de von Neumann, usaremos el teorema 1.25 para demostrar este caso.

Comenzaremos verificando que $|f^*(0)| = |7 - 4i\beta| > 1 = |f(0)|$, usando la definición de polinomio reducido obtenemos

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{(7 - 4i\beta)[(7 + 4i\beta)z^2 - (8 - 2i\beta)z + 1] - [(7 - 4i\beta) - (8 + 2i\beta)z + z^2]}{z} \\
&= \frac{(49 + 16\beta^2)z^2 - (56 - 46i\beta - 8\beta^2)z + (7 - 4i\beta) - [(7 - 4i\beta) - (8 - 2i\beta)z + z^2]}{z} \\
&= \frac{(48 + 16\beta^2)z^2 - (48 + 48i\beta - 8\beta^2)z}{z} \\
&= 4(12 + 4\beta^2)z - 4(12 + 12i\beta - 2\beta^2). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

El polinomio $f_1(z)$ es un polinomio simple de von Neumann si y solo si

$$(12 + 4\beta^2)^2 \geq (12 - 2\beta^2)^2 + 12^2\beta^2,$$

y esta desigualdad siempre se cumple, con igualdad solo cuando $\beta = 0$. Así el esquema es incondicionalmente estable.

(b) El segundo esquema que consideraremos para la ecuación es un esquema exacto.

$$\begin{aligned}
&\frac{23v_m^{n+1} - 21v_m^n - 3v_m^{n-1} + v_m^{n-2}}{24k} \\
&+ \left(1 + \frac{h^2}{6}\delta^2\right)^{-1} \left[a\delta_0 \left(\frac{v_m^{n+1} + v_m^n}{2}\right) + \frac{k^2 a^2}{8}\delta^2 \left(\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k}\right) \right] = f_m^{n+1/2}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

El polinomio de amplificación de este esquema es

$$g(z) = (23 - 12\alpha + 12i\beta)z^3 - (21 - 12\alpha - 12i\beta)z^2 - 3z + 1, \tag{3.20}$$

donde

$$\alpha = \frac{a^2 \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}$$

y

$$\beta = \frac{a\lambda \operatorname{sen}\theta}{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta} \tag{3.21}$$

Para este esquema tenemos que

$$|g^*(0)|^2 - |g(0)|^2 = 24(2 - \alpha)(11 - 6\alpha) + 12^2\beta^2$$

y esta expresión es no negativa para $0 \leq \alpha \leq 11/6$.

Calculando el polinomio reducido obtenemos

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= \frac{(23 - 12\alpha - 12i\beta)[(23 - 12\alpha + 12i\beta)z^3 - (21 - 12\alpha - 12i\beta)z^2 - 3z + 1] -}{z} \\
&\quad \frac{-(23 - 12\alpha - 12i\beta) - (21 - 12\alpha + 12i\beta)z - 3z^2 + z^3}{z}.
\end{aligned}$$

Desarrollando y dividiendo por 24 obtenemos

$$g_1(z) = [(11 - 6\alpha)(2 - \alpha) + 6\beta^2] z^2 \\ - 2 [(2 - \alpha)(5 - 3\alpha) - 3\beta^2 - (11 - 6\alpha)i\beta] z \\ - (2 - \alpha - 2i\beta).$$

Tenemos

$$|g_1^*(0)|^2 - |g_1(0)|^2 = 4(5 - 3\alpha)[3(2 - \alpha)^3 + \beta^2(13 - 6\alpha)] + 36\beta^4.$$

Por lo tanto para la estabilidad debemos tener

$$0 \leq \alpha \leq \frac{5}{3} < \frac{11}{6}.$$

Lo que pone mayores restricciones para el valor que puede tomar α . Finalmente calculando el polinomio reducido $g_{1_1}(z)$ de $g_1(z)$ obtenemos

$$g_{1_1}(z) = [120 + 252\alpha + 198\alpha^2 - 69\alpha^3 + 9\alpha^4 + (18\alpha^2 - 69\alpha + 65)\beta^2 + 9\beta^4]z \\ + 9\beta^4 + 6(5 - 3\alpha)i\beta^3 + (3\alpha - 5)\beta^2 \\ - (18\alpha^3 + 102\alpha^2 + 192\alpha - 120)i\beta \\ - 9\alpha^4 + 69\alpha^3 - 198\alpha^2 + 252\alpha - 120.$$

Tenemos que una de las raíces de $g_{1_1}(z)$ está en el interior o sobre S cuando

$$|g_{1_1}^*(0)|^2 - |g_{1_1}(0)|^2,$$

es no negativa. Esta cantidad es

$$12\beta^4(5 - 3\alpha)[6\beta^2 + (11 - 6\alpha)(2 - \alpha)],$$

la cual es no negativa cuando α es a lo mas $5/3$. Así la condición de estabilidad para el esquema es

$$\alpha = |a\lambda|^2 \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{1 - \frac{2}{3}\text{sen}^2 \frac{1}{2}\theta} \leq \frac{5}{3}.$$

El valor máximo de la parte izquierda es obtenido cuando $\theta = \pi$. Así el esquema es estable si y solo si

$$|a\lambda| \leq \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Notemos que aunque este esquema es implícito este no es incondicionalmente estable.

(c) El tercer ejemplo es el esquema

$$\begin{aligned} \frac{v_m^{n+2} - v_m^{n-2}}{4k} + a \left(1 + \frac{h^2}{6} \delta\right)^{-1} \delta \left(\frac{2v_m^{n+1} - v_m^n + 2v_m^{n-1}}{3}\right) \\ = \frac{3f_m^{n+1} - f_m^n + 2f_m^{n-1}}{3}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Este esquema tiene como polinomio de amplificación

$$h(z) = z^4 + \frac{4}{3}i\beta(2z^3 - z^2 + 2z) - 1, \quad (3.23)$$

donde $\beta = \frac{a\lambda \operatorname{sen}\theta}{1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}$.

Usando la definición de polinomio reducido, vemos que h_1 es idénticamente cero, así por el teorema 2.26, $h(z)$ es un polinomio simple de von Neumann si y solo si

$$g_1(z) = 3/4f'(z) = 3z^3 + i\beta(6z^2 - 2z + 2),$$

es un polinomio de Schur, donde g_1z es como el definido en el teorema 1.24. Analizando la desigualdad $|g_1(0)| < |g_1^*(0)|$, es decir, $|2\beta| < 3$, vemos que $g_1(z)$ es un polinomio de Schur solo si $|\beta| < 3/2$.

Utilizando el teorema 2.26, con el algoritmo obtenido en la segunda demostración y la definición de polinomio reducido, obtenemos

$$g_{1_1} = (9 - 4\beta^2)z^2 + (4\beta^2 + 18i\beta)z - 12\beta^2 - 6i\beta,$$

el cual es un polinomio de Schur solo si

$$(9 - 4\beta^2)^2 > (12\beta^2)^2 + (6\beta)^2,$$

lo cual es equivalente a

$$\beta^2 < \frac{9(\sqrt{41} - 3)}{64},$$

la cual es una restricción más fuerte para β . Obtengamos ahora el polinomio reducido de $g_{1_1}(z)$ y lo denotamos por $g_2(z)$.

$$g_2(z) = (81 - 108\beta^2 - 128\beta^4)z + 32\beta^4 - 264i\beta^3 + 144\beta^2 + 162i\beta.$$

Una raíz de $g_2(z)$ está dentro de S solo si

$$(81 - 108\beta^2 - 128\beta^4)^2 - (32\beta^4 + 144\beta^2)^2 - (264\beta^3 - 162\beta)^2,$$

es no negativa. Esta expresión se factoriza como

$$3(9 - 4\beta^2)(3 - 16\beta^2)(80\beta^4 - 72\beta^2 + 81).$$

El último factor es siempre positivo, y podemos decir que $g_2(z)$ es un polinomio de Schur para

$$\beta^2 < \frac{3}{16} < \frac{9(\sqrt{41} - 3)}{64}.$$

De lo anterior obtenemos que la condición de estabilidad para el esquema es

$$|\beta| = \frac{|a\lambda \operatorname{sen}\theta|}{1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta} < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

El máximo de β es una función de θ y ocurre cuando $\cos\theta$ es $-1/2$. Así el esquema es estable cuando

$$|a\lambda| < 1/4.$$

Notemos que cuando $|a\lambda|$ es $1/4$, el polinomio $f(z)$ tiene una raíz doble en S . Por lo anterior el sistema es incondicionalmente estable.

3.7. Esquemas para ondas de sonido

Consideremos problemas que estudien las vibraciones de los fluidos.

Sean p_0, ρ_0 la presión estática y la densidad respectivamente y sea $p = f(\rho)$ la ecuación de estado.

Asumiremos que $f'(\rho) > 0$ y $f'(\rho_0) = c^2$; es importante mencionar que p_0, ρ_0 y c^2 pueden depender de x, y y z pero no de t . Si $g = g(x, y, z)$ es la fuerza por la unidad de volumen, asumiremos que $g + \nabla p_0 = 0$.

Si la presión y la densidad son $p_0 + p$ y $\rho_0 + \rho$ donde $p \ll p_0$ y $\rho \ll \rho_0$, entonces

$$p = c^2 \rho.$$

Denotemos por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ la velocidad del fluido, por lo que la ecuación de movimiento es

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p.$$

y la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Ahora

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.24)$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 c^2 \nabla \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla p. \quad (3.25)$$

Para esta ecuación, la ecuación en diferencias correspondiente es

$$v_m^{n+1} - 2v_m^n + v_m^{n-1} = \left(\frac{ck}{h}\right)^2 (v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n). \quad (3.26)$$

Consideremos esquemas como el mostrado anteriormente, donde su matriz de amplificación es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 - |\alpha|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

donde α es alguna función compleja valuada de ξ .

El polinomio característico para tales esquemas es

$$f(z) = 1 + (|\alpha|^2 - 2)z + z^2. \quad (3.28)$$

Calculando $f^*(z)$ notamos que

$$f^*(z) = f(z).$$

Por lo que $f_1 \equiv 0$.

Ahora, $f' = (|\alpha|^2 - 2) + 2z$, el cual es un polinomio de von Neumann si y solo si $|\alpha|^2 \leq 4$.

Entonces del teorema 2.23 se concluye que tales esquemas son débilmente estables si y solo si $|\alpha| \leq 2$.

Estabilidad de ecuaciones en diferencias finitas para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales

Consideremos sistemas de la forma

$$u_t + Au_x = 0 \tag{4.1}$$

y

$$u_t = Bu_{xx}, \tag{4.2}$$

donde u es un vector de funciones de dimensión n y A y B son matrices de tamaño $n \times n$.

Se dice que (4.1) es un sistema hiperbólico, si la matriz A es diagonalizable y (4.2) es parabólico si la matriz B tiene todos sus eigenvalores con parte real positiva.

La teoría de estabilidad de aproximaciones de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales lineales está profundamente basada en el caso especial donde los coeficientes de las ecuaciones son constantes y las condiciones de frontera son periódicas. En tal caso podemos usar análisis de Fourier para reducir el problema a estudiar familias de matrices G , conocidas como matrices de amplificación. Esta matriz es obtenida por medio de la sustitución de $G^n e^{im\theta}$ para v_m^n .

Si u_v es la transformada de Fourier del vector solución en el v -ésimo paso de tiempo, entonces $u_v = G^v v_0$ y la estabilidad del esquema en diferencias es equivalente a la uniformidad acotada de G^v para $vt \leq 1$ donde t es el paso en el tiempo. Una forma equivalente de esta condición y que resulta más conveniente es que debe existir una constante $\alpha > 0$ tal que las matrices $A = e^{-\alpha t} G$ satisfacen

$$|A^v| \leq \text{constante para todos los enteros positivos } v$$

donde $|A^v|$ es la norma de A^v inducida por la norma euclídeana vectorial.

Definición 4.1 *Un esquema en diferencias para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es estable si para cada $T > 0$ existe una constante C_T tal que para $0 \leq nk \leq T$ se tiene*

$$\|G^n\| \leq C_T. \quad (4.3)$$

Ejemplo 4.1

Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

donde $h(x, t)$ y $u(x, t)$ son las funciones incógnitas y g y H son constantes positivas. El esquema en diferencias que lo aproxima es

$$\frac{u_m^{n+1} - h_m^n}{k} + H \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} + g \frac{u_{m+1}^n - h_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (4.5)$$

Aplicando el método de von Neumann para estudiar la estabilidad del sistema, obtenemos

$$\begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}_m^n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^n e^{im\theta}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.4) y (4.5) se obtiene

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -i\lambda H \sin \theta \\ -i\lambda g \sin \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^n. \quad (4.7)$$

Calculando el polinomio característico de la matriz 2×2 de la expresión anterior para obtener las raíces tenemos que son

$$z_{1,2} = 1 \pm i\lambda(gH)^{1/2} \sin \theta,$$

de donde se tiene $|z_1| = |z_2| \geq 1$, de modo que el sistema es inestable.

Sin embargo para esquemas en general, una condición necesaria para la estabilidad es (como en en el caso de esquemas de un paso)

$$|g_v| \leq 1 + Kk, \quad (4.8)$$

para cada eigenvalor g_v de G .

4.1. Estabilidad para aproximaciones en diferencias de un sistema hiperbólico

En esta sección consideraremos un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.9)$$

con coeficientes constantes, de manera que $x \geq 0$ y $t \geq 0$, A es una matriz diagonal no singular y $u(x, t) = (u^{(1)}(x, t), \dots, u^{(n)}(x, t))$.

Ahora, los $u^{(n)}(x, t)$ desconocidos estarán ordenados de manera que la matriz A tenga la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A^I & 0 \\ 0 & A^{II} \end{pmatrix},$$

donde

$$A^I = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}.$$

y

$$A^{II} = \begin{pmatrix} a_{l+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{l+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

con $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_l < 0 < a_{l+1} \leq \dots \leq a_n$.

Asumiremos que están dados tanto los valores iniciales $u(x, 0) = f(x)$ como las condiciones de frontera

$$u^I(0, t) = S u^{II}(0, t),$$

donde u^I y u^{II} serán definidas de acuerdo a las partición de A y S es una matriz constante.

Deseamos resolver el problema de valores iniciales usando aproximación en diferencias finitas.

Como en capítulos anteriores, tomaremos una partición, $k > 0$ será el paso en el tiempo y $h > 0$ el paso en el espacio, λ será una constante $k/h = \lambda$.

Usaremos la misma notación que en el capítulo 3 con $x_n = t_n$ y $v_m^n = v(t_n, x_m)$. Para aproximar la ecuación en diferencias para $x > 0$ usaremos el siguiente esquema en diferencias

$$\begin{aligned} v_m^{n+1} &= Qv_m^n, \\ v_m^n(0) &= f, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$Q = \sum_{j=-r}^p A_j E^j, \tag{4.11}$$

$$E v_m^n = v_m^{n+1},$$

y las A_j son matrices constantes de orden n .

Tomaremos las siguientes consideraciones

- 1.- $p \geq 1$ y A_p, A_r son matrices no singulares y la matriz de amplificación del sistema estará dada por

$$\widehat{Q}(\xi) = \sum_{j=-r}^p A_j e^{ij\xi}.$$

Ahora, $\widehat{Q}(\xi)$ deberá satisfacer las siguientes condiciones

- a.- Existe una constante $\delta > 0$ y un número natural $2s > 0$ tal que $\forall \xi$ con $0 \leq |\xi| \leq \pi$ los eigenvalores $\mu(\xi)$ de $\widehat{Q}(\xi)$ satisfacen

$$|\mu(\xi)| \leq 1 - \delta|\xi|^{2a},$$

es decir, la aproximación es disipativa.

- b.- $|\widehat{Q}(\xi)| \leq 1$, esta condición garantiza la estabilidad del esquema.

Por la manera en que está definida la matriz Q , la solución de (4.10) puede ser desarrollada solo si especificamos condiciones de frontera para eliminar los valores de v_m^n para $n = 0, -1, \dots, -r + 1$. Estos valores son de la forma

$$v_\mu(t) = \sum_{j=1}^s C_{j\mu} v_j(t), \tag{4.12}$$

con $\mu = 0, -1, \dots, r + 1$ y $C_{j\mu}$ matrices cuadradas constantes de tamaño $n \times n$.

Queremos derivar condiciones algebraicas de estabilidad para el problema planteado.

Denotemos por H el espacio de todas las funciones de malla w_m^n definidas para $n > -r$, con condiciones de frontera (4.12) y para las cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_m^n|^2 h < \infty.$$

H es un espacio de Hilbert si la norma y el producto por escalar son definidos por

$$(u, v)_h = \sum_{n=1}^{\infty} (u_m^n)^* v_m^n h,$$

$$\|u\|_h^2 = (u, u)_h.$$

La estabilidad para este problema estará definida de manera usual

Definición 4.2 *Una aproximación en diferencias es estable si existe una constante K , independiente de k , tal que*

$$\|v(t)\|_h \leq K \|v(0)\|_h,$$

para todo $t = mk$ y todos los valores iniciales $v(x, 0)$ en H .

Escribiremos la aproximación en diferencias finitas mediante un operador

$$v_m^{n+1} = V v_m^n, \tag{4.13}$$

con $v_m^n, v_m^{n+1} \in H$ y donde V es un operador acotado en H definido por (4.10) y (4.11).

Continuaremos con la demostración del siguiente lema, el cual nos da una primera condición de estabilidad

Lema 4.3 *Una condición necesaria para la estabilidad del sistema es que el polinomio característico de V sea un polinomio de von Neumann, es decir, que no tenga raíces z_0 con $|z_0| > 1$.*

Demostración:

Procederemos por contradicción.

Supongamos que el polinomio característico de V tiene una raíz z_0 con $|z_0| > 1$, es decir, existe $h \in H$ con

$$z_0 h = V h. \tag{4.14}$$

Entonces $z_0^{t/k} h$ será una solución de (4.13) con los valores iniciales en H , la cual crecerá exponencialmente con el número de pasos.

■

En base a que las siguientes condiciones de estabilidad estarán dadas en términos de las raíces del polinomio característico de V (eigenvalores) y eigenvectores del mismo, es importante mencionar el resultado que nos explicará como obtener los eigenvalores y eigenvectores del operador V .

Lema 4.4 *Consideremos el siguiente problema de eigenvalores*

$$\sum_{j=-r}^p A_j k^j \phi = z \phi,$$

y supongamos que la condición 1 se cumple. Entonces para cada z con $|z| \geq 1$, $z \neq 1$ existen rn eigenvalores k_j con $|k_j| < 1$ y np eigenvalores con $|k_j| > 1$, es decir, no existen eigenvalores con $|k_j| = 1$.

Demostración:

Es bien sabido que los eigenvalores son las raíces del polinomio característico

$$\text{Det} \left| \sum_{j=-r}^p A_j k^j - zI \right| = 0. \tag{4.15}$$

Si $k = e^{i\varepsilon} \neq 1$ entonces $\sum_{j=-r}^p A_j k^j = \widehat{Q}(\varepsilon)$ y por la condición a) para la matriz \widehat{Q} las raíces $z(\varepsilon)$ del polinomio característico de $\widehat{Q}(\varepsilon)$ no pueden ser iguales a z , con $|z| \geq 1$.

Para la consistencia del problema pondremos $\sum_{j=-r}^p A_j = I$, y así $k = 1$ será descartado para $z \neq 1$.

Como los eigenvalores son funciones continuas de z es posible determinar el número de eigenvalores k_j con $|k_j| < 1$ si consideramos valores grandes de $|z|$.

Tomemos $|z| \rightarrow \infty$, para este caso estos eigenvalores convergen a cero y así el término principal de $\sum_{j=-r}^p A_j k^j$ será $A_{-r} k^{-r}$. Como asumimos que A_{-r} es no singular el lema se sigue inmediatamente. ■

Sea z_0 con $|z_0| \geq 1$, $z_0 \neq 1$ un valor fijo. Queremos determinar cuando (4.14) tiene su correspondiente eigensolución $h \in H$.

La ecuación (4.14) es equivalente a

$$(Q - z_0)h_m^n = 0, \tag{4.16}$$

$$g_v = \sum_{j=1}^r C_{jv} h_j, \quad (4.17)$$

con $v = 0, -1, \dots, -r + 1$.

La ecuación (4.16) es una ecuación en diferencias ordinaria con coeficientes constantes y su solución más general en H puede ser escrita de la forma: (ver [17])

$$g_m^n = g_m^n(z_0) = \sum_{|k_j| < 1} P_j k_j = \sum P_j(z_0) (k_j(z_0))^m. \quad (4.18)$$

En la ecuación anterior k_j son las soluciones de la ecuación (4.15) con $|k_j| < 1$ y P_j son polinomios con coeficientes vectoriales y su grado es uno menor que la multiplicidad de la correspondiente k_j .

Existen nr soluciones linealmente independientes, de esta manera (4.18) depende de nr parámetros, llamemosles σ_{nr} .

Ahora, si insertamos (4.18) dentro de las condiciones (4.17) tendremos un sistema de nr ecuaciones lineales homogéneas en los parámetros σ_{nr} , las cuales podemos escribir de la siguiente manera

$$E(z_0)\sigma = 0, \quad (4.19)$$

con $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{nr})$ y $E(z_0)$ es una matriz de orden nr .

Todo lo demostrado anteriormente, nos da como resultado el siguiente lema,

Lema 4.5 *El polinomio característico de V es un polinomio de Schur si y solo si $\text{Det}E(z_0) = 0$.*

■

Consideremos, en la ecuación (4.18) que $z_0 \rightarrow 1$, de donde tendremos que esta solución convergerá a

$$g_m^n(1) = \sum P_j(1) (k_j(1))^m, \quad (4.20)$$

la cual también dependerá de los nr parámetros σ

Definición 4.6 $z_0 = 1$ es una raíz generalizada del polinomio característico de V si $E(1)\sigma = 0$ no tiene una solución trivial, es decir si $\text{Det}E(1) = 0$. La solución correspondiente a (4.20) es llamada una eigenfunción generalizada.

En base a todo lo formulado anteriormente, nos interesa el siguiente teorema, el cual nos da condiciones necesarias para garantizar la estabilidad de la aproximación en diferencias (4.9).

Teorema 4.7 *La aproximación en diferencias para el problema de valores iniciales es estable si*

- i.- Las condiciones 1, a y b se cumplen.*
- ii.- $z_0 = 1$ no es un eigenvalor generalizado.*
- iii.- El polinomio característico de V es un polinomio de Schur, es decir, si z_0 es eigenvalor entonces $|z_0| < 1$.*

Lo que deseamos demostrar en el inciso *iii*) es que si $z_0 = 1$ no es un eigenvalor generalizado de V , entonces existe una constante $\rho > 0$ tal que V no tenga eigenvalores z_0 con $|z_0 - 1| \geq \rho$ y $|z_0| \geq 1$.

Debido a que demostrar el teorema por métodos analíticos resulta muy complicado reduciremos el problema y obtendremos algunos resultados que nos ayudarán a entender este resultado.

Consideremos el problema (4.13), para el cual podemos escribir su solución de la forma (vea [15])

$$v(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^n (V - zI)^{-1} dz v(0),$$

donde Γ es cualquier contorno que incluye el espectro de V en su interior.

Estudiaremos $(V - zI)^{-1}$, la resolvente de V .

Calculemos explícitamente

$$f = (V - zI)^{-1}v,$$

el cual es equivalente a encontrar la solución de

$$\begin{aligned} (Q - zI)f_m^n &= v_m^n, \\ f &\in H. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Usando la condición a) podemos escribir (4.21) como

$$f_m + p = -A_r^{-1} \sum_{j=-r}^{p-1} (A_j f_{m+j}^n - z f_m^n - v_m^n). \tag{4.22}$$

Introduciendo el vector

$$y_m^n = (f_{m+p-1}, f_{m+p-2}, \dots, f_{m+r})',$$

obtenemos la fórmula de un paso

$$y_{m+1}^n = M y_m^n + g_m^n, \tag{4.23}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A_p^{-1} & A_{p-1} & \cdots & A_p^{-1} & (A_0 - zI) & \cdots & A_p^{-1} & A_r \\ -I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & -I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I & 0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

$$g_m^n = \begin{pmatrix} v_m^n \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, las condiciones (4.21) pueden escribirse como nr relaciones lineales entre los componentes de y_1, \dots, y_{s+1} , por lo que podemos escribirlo de la siguiente manera

$$L_j = 0,$$

$j = 1, 2, \dots, nr$.

Analizando el polinomio característico de M (ver [15], Capítulo 2) obtenemos que las raíces del polinomio (4.15) son las raíces del polinomio característico de M .

Ahora las raíces k_j del polinomio de M son funciones de z . Para $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, por el lema 4.10, consideraremos 2 conjuntos separados; S_1 que contendrá los k_j con $|k_j| < 1$ y S_2 con los k_j tales que $|k_j| > 1$.

Usaremos el siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [15],

Lema 4.8 *Existe una matriz no singular $T = T(z)$, analítica en z para $|z| \geq 1$, $z \neq 1$ tal que*

$$T(z)MT^{-1}(z) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

donde M_{11} es de tamaño nr y su polinomio característico es de Schur, es decir, los eigenvalores k_j satisfacen $|k_j| < 1$ y M_{22} de orden np tiene eigenvalores tales que $|k_j| > 1$.

Introduciendo en la ecuación (4.23) la siguiente variable

$$w_m^n = T(z)y_m^n \quad (4.25)$$

obtendremos

$$w_{m+n}^n = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} w_m^n + T(z)g_m^n. \quad (4.26)$$

La ecuación anterior tiene como solución general w_m^n con $\|w\| \leq \infty$

$$w_j^I = \sum_{m=1}^{j-1} M_{11}^{j-m-1} (T(z)g_m^n)^I + M_{11}^{j-1} w_1^I$$

$$w_j^{II} = - \sum_{m=j}^{\infty} M_{22}^{j-n-1} (T(z)g_m^n)^{II},$$

donde w^I y w^{II} están definidas como en el lema anterior.

Los siguientes dos lemas, nos darán propiedades del resolvente acerca de su inversa y le manera en que está acotado.

Lema 4.9 *Sea C el conjunto de números complejos z con $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Si $z_0 \in R$ y z_0 no es un eigenvalor de v , entonces $(V - z_0 I)^{-1}$ existe y está acotado.*

Lema 4.10 *Asumamos que V no tiene eigenvalores z en C , entonces para alguna constante $\rho > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|(V - zI)^{-1}|$ está uniformemente acotado por $|z| \geq 1 - \varepsilon$, $|z - 1| \geq \rho$.*

Como segundo punto para la demostración del teorema principal deseamos saber cuando un valor de z es un eigenvalor de V o no. Para realizar esto consideremos el siguiente problema

$$v_m^{n+1} = Qv_m^n, \tag{4.27}$$

para $n = 1, 2, \dots, N - 1$ con condiciones de frontera

$$v_m^n = \sum C_j u_j, \tag{4.28}$$

para $j = 0, -1, \dots, -r + 1$ y tales que $u_m^N = u_m^{N+1} = \dots = u_m^{N+p-1} = 0$, para N un entero suficientemente grande.

Reescribiendo este esquema como una ecuación de operador

$$v_m^{n+1} = V_N v_m^n, \tag{4.29}$$

donde V_N es una matriz de tamaño $n(N - 1)$.

Lema 4.11 *Consideremos la aproximación en diferencias (4.12) con condiciones de frontera $v_m^n = 0$, $n = 0, -1, \dots, -r + 1$ y asumamos que se cumplen las condiciones 1, a y b se cumplen. Entonces para cada $\rho > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que su correspondiente operador V_1 no tiene ningún eigenvalor z con $|z| \geq 1 - \varepsilon$, $|z| > \rho$.*

Con el siguiente teorema podemos obtener eigenvalores de V con ayuda de los eigenvalores de V_N mediante una secuencia de valores de N . Si algún eigenvalor λ_N de V_N converge a algún valor z_0 con $|z_0| \geq 1$, $z_0 \neq 1$ entonces z_0 será un eigenvalor de V .

Teorema 4.12 *Para cada $\rho > 0$ existen constantes $\varepsilon > 0$, $K_j > 0$, $j = 1, 2$ y r con $0 < r < 1$ tales que*

- 1.- *Si V no tiene eigenvalores tales que $|z| \geq 1$, $|z - 1| \geq \rho$ entonces V_N no tiene eigenvalores que cumplan $|z| \geq 1 - \varepsilon$, $|z - 1| \geq \rho$ tales que $N \geq K - 1|\log(i - r)|$.*
- 2.- *Si V tiene un eigenvalor z_0 de multiplicidad p con $|z_0| \geq 1 - \varepsilon$, $|z_0 - 1| \geq \rho$ entonces V_N tiene un eigenvalor λ_N con $|\lambda_N - z_0| \leq K_2 r^{N/p}$.*

Conclusiones y perspectivas

Finalizamos el trabajo exponiendo las conclusiones de lo estudiado y presentando algunos de los posibles trabajos a futuro basándonos en el trabajo realizado en esta tesis.

- Se estudiaron propiedades de diferentes tipos de polinomios, lo que nos ayudó a tener una visión más amplia de como se desarrollan la teoría de von Neumann para el análisis de estabilidad.
- Se estudiaron condiciones de estabilidad para esquemas que resuelven una ecuación diferencial parcial y se desarrollaron ejemplos que nos permitieron ver la conexión que existe entre este tipo de análisis y los polinomios de Schur y de von Neumann.
- Se estudiaron condiciones matriciales para garantizar la estabilidad de ecuaciones en diferencias para sistemas hiperbólicos y parabólicos de la forma

$$u_t + Au_x = 0 \tag{5.1}$$

y

$$u_t = Bu_{xx} \tag{5.2}$$

todo esto relacionado con el análisis del polinomio característico de la matriz de amplificación.

Tomando en cuenta que los resultados estudiados en este trabajo estuvieron enfocados a ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas y parabólicas y que muchas de las condiciones estudiadas se reducían a ser solo condiciones necesarias o suficientes, podemos enunciar algunas de las opciones para el trabajo a futuro.

- Investigar cual es el alcance de los métodos expuestos, es decir, encontrar que tipos de ecuaciones pueden ser estudiadas con cierta eficacia utilizando el enfoque presentado en este trabajo.
- Investigar si existe alguna condición algebraica necesaria y suficiente que mejore las condiciones antes expuestas.

- Estudiar el problema de analizar la estabilidad de las ecuaciones en diferencias para ecuaciones diferenciales parciales más generales y también sistemas de ecuaciones diferenciales parciales diferentes a los expuestos en esta tesis y que pudieran ser estudiados con las técnicas presentadas o modificaciones de estas técnicas.

Capítulo 6

Apéndice

Teorema 6.1 Gauss-Lucas

Si un polígono convexo del plano complejo contiene todas las raíces de un polinomio $p(z)$ entonces contiene también todos los ceros de la derivada $p'(z)$.

Teorema 6.2 DeBrujin

Sea K una región circular y sea P cualquier polinomio de grado n . Si $u \in K$, el polinomio $Q(z) = n^{-1}[nP(z) + (u - z)P'(z)]$ es tal que $Q(K) \subseteq P(K)$.

Teorema 6.3 Rouché

Supongamos que

- $f(z)$ y $g(z)$ son analíticos dentro y sobre una región cerrada C ,
- $|f(z)| > |g(z)|$ en cada punto de C .

Entonces $f(z)$ y $(f + g)(z)$ tienen el mismo número de ceros en C .

Teorema 6.4 Si $g(z)$ es analítica en una región anular $r < |z - a| < R$ entonces $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$, donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$, siendo γ cualquier círculo $|z - a| = \rho$, $r < \rho < R$.

Para una demostración ver Eves, H.W. (1976).

6.1. Análisis de Fourier y relaciones de Parseval

Para una función $u(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, su transformada de Fourier estará dada por

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x) dx.$$

Esta transformación de u es una función de variable real w y es única.

Esta función \hat{u} es una representación alternativa de la función u .

Ahora, la fórmula de inversión de Fourier, dada por

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{u}(w) dw,$$

muestra como u se puede obtener a partir de \hat{u} .

Para nuestros fines, consideremos v_m una función sobre una malla definida para todos los enteros m , entonces su transformada de Fourier estará dada por

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} v_m,$$

para $\xi \in [-\pi, \pi]$, y $\hat{v}(-\pi) = \hat{v}(\pi)$. En este caso, la fórmula de inversión de Fourier está dada por

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\xi} \hat{v}(\xi) d\xi.$$

Ahora la transformada de Fourier para dimensiones mayores está definida por

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot x} u(x) dx, \quad (6.1)$$

donde x y w son variables en \mathbb{R}^n .

El producto interno $w \cdot x$ es el usual en \mathbb{R}^n . Así que la fórmula de inversión está dada por

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iw \cdot x} \hat{u}(w) dx.$$

Fórmulas similares aparecen para transformaciones discretas,

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{-imh \cdot \xi} v_m h^n,$$

esto para $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]^n$, la respectiva fórmula de inversión es

$$v_m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{[-\pi/h, \pi/h]^n} e^{ihm \cdot \xi} \hat{v}(\xi) d\xi.$$

Un resultado importante de las definiciones dadas sobre análisis de Fourier es que la norma L^2 de u

$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

es igual a la norma L^2 de $\hat{u}(w)$, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(w)|^2 dw. \quad (6.2)$$

Para el caso discreto, la norma L^2 de una función de malla v esta definida por

$$\|v\|_h = \left(h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \right)^{1/2}.$$

En este caso se tiene la siguiente relación

$$\|\hat{v}_h\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 h = \|v\|_h^2. \quad (6.3)$$

Las relaciones (6.2) y (6.3) son llamadas las relaciones de Parseval. Usando estas relaciones se puede mostrar que la transformada de Fourier está definida para todas las funciones en $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(hZ)$.

Para mayor información sobre relaciones de Parseval se pueden consultar los libros de Titchmarsh [32] y Golberg [13].

6.2. Teorema de Kreiss

Teorema 6.5 *Para una familia F de matrices $M \times M$, los siguientes incisos son equivalentes*

A: Existe una constante positiva C_a tal que para toda $A \in F$ y cada entero no negativo n

$$\|A^n\| \leq C_a.$$

R: Existe una constante positiva C_r tal que para toda $A \in F$ y todos los números complejos z con $|z| > 1$,

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq C_r(|z| - 1)^{-1}. \quad (6.4)$$

S: Existen constantes positivas C_s y C_b tales que para cada $A \in F$ existe una matriz hermitiana no singular S tal que $B = SAS^{-1}$ es triangular superior y

$$\|S\|, \|S^{-1}\| \leq C_s, \quad (6.5)$$

$$|B_{ii}| \leq 1, \quad (6.6)$$

$$|B_{ij}| \leq C_b \min[1 - |B_{ii}|, 1 - |B_{jj}|], \quad (6.7)$$

para $i < j$.

H: Existe una constante positiva C_h tal que para cada $A \in F$ existe una matriz hermitiana H tal que

$$C_h^{-1}I \leq H \leq C_h I, \quad (6.8)$$

$$A^* H A \leq H. \quad (6.9)$$

N: Existen constantes C_n y c_n tales que para cada $A \in F$ existe una matriz hermitiana N tal que

$$C_n^{-1}I \leq N \leq C_n I,$$

$$\operatorname{Re}(N(I - zA)) \geq c_n(1 - |z|)I,$$

para todos los números complejos z con $|z| \leq 1$.

Ω : Existe una constante positiva C_ω tal que para cada $A \in F$ existe una matriz hermitiana Ω tal que

$$C_\omega^{-1}I \leq \Omega \leq C_\omega I,$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|(\Omega A^n x, x)|}{(\Omega x, x)} \leq 1.$$

El teorema original de Kreiss contiene únicamente las 4 primeras condiciones y puede ser consultado en [28]. La condición Ω fue demostrada por Tadmor en [31] y la condición N fue añadida por Strikwerda y Wade en [30].

En 1984 LeVeque y Trefethen probaron que la condición R implica la condición A con $C_a \leq eMC_r$ y que esta es la mejor cota para C_a en términos de C_r [20].

La importancia del teorema de Kreiss, radica en la relación que establece con la definición habitual de estabilidad con condiciones equivalentes que pueden ser utilizadas en diferentes contextos. En la práctica, su uso es limitado para determinar la estabilidad ya que la verificación de algunas de las condiciones es complicada si la comparamos con la condición primera.

6.3. Criterios para la estabilidad de polinomios

Como hemos visto la prueba de estabilidad puede ser obtenida estudiando las raíces del polinomio característico de la matriz de amplificación, finalizaremos esta tesis enunciando dos criterios mas para la estabilidad de dichos polinomios.

Supondremos que el polinomio de amplificación tendrá la siguiente forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (6.10)$$

Criterio de Schur-Cohn

Consideremos los siguientes determinantes asociados al polinomio (6.10)

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \bar{a}_{n-k+3} & \cdots & \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

donde $k = 1, 2, \dots, n$ y \bar{a}_k es el conjugado de a_k .

Si todos estos determinantes son distintos de cero, el polinomio $f(z)$ no tendrá ceros sobre S y la cantidad de ceros que se encuentren dentro de S será igual al número de variaciones en signo en la sucesión de determinantes $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Del teorema (1.8), sabemos que para que un sistema en diferencias finitas sea estable es necesario que las raíces del polinomio característico $f(z)$ estén dentro de S (la circunferencia unitario), por lo que la sucesión de los determinantes debe tener n variaciones de signo.

Por lo que podemos poner el criterio de estabilidad de la siguiente forma: si k es impar $\Delta_k < 0$ y si k es par $\Delta_k > 0$.

En el caso de polinomios de grado dos las condiciones son: $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$. Esto es,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_2^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2$$

Tomando las condiciones de estabilidad se tiene

$$a_0^2 - a_2^2 < 0$$

$$(a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2 > 0$$

las cuales son equivalentes a

$$|a_2| > |a_0|$$

$$|a_1| < |a_2 + a_0|$$

Ahora, para un polinomio de tercer grado $f(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, los determinantes quedan expresados como:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_3^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 - a_3^2)^2 - a_1^2(a_3 - a_0a_2)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = (a_0^2 - a_3^2)^3 + (a_0a_2 - a_1a_3)^2(2a_3^2 - 2a_0^2 + a_2^2 - a_1^2) + (a_0a_1 - a_2a_3)^2(a_3^2 - a_0^2 + 2a_0a_2 - 2a_1a_3).$$

Las condiciones de estabilidad son: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$, las cuales son equivalentes a

$$|a_3| > |a_0|,$$

$$|a_0a_2| < |a_3^2 - a_0^2|,$$

$$|a_0 + a_2| < |a_3|.$$

Ejemplo 6.1

Para ilustrar este método, consideremos el polinomio característico del esquema en diferencias finitas Dufort Frankel, el cual recordemos es:

$$f(z) = (\alpha - 1) - 2\alpha \cos \xi z + (\alpha + 1)z^2,$$

donde $\alpha = 2a\lambda$.

Entonces, los valores de los determinantes para este caso son:

$$\Delta_1 = (\alpha - 1)^2 - (\alpha + 1)^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= ((\alpha - 1)^2 - (\alpha + 1)^2)^2 - (2\alpha \cos \xi)^2((\alpha - 1) - (\alpha + 1))^2 \\ &= (-2\alpha)^2 - 4\alpha^2 \cos^2 \xi (-2)^2 \\ &= 4\alpha^2(1 - 4\cos^2 \xi) > 0. \end{aligned}$$

Al cumplirse las condiciones del criterio, el esquema correspondiente a este polinomio es estable.

Criterio de Jury

Para realizar esta prueba de estabilidad se contruye una tabla como se muestra a continuación.

Definamos $\beta_n = \frac{a_0}{a_n}$ y $\beta_{n-1} = \frac{a_1}{a_n^{n-1}}$

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\ \\ a_n^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} & \cdots & a_1^{n-1} & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_n^0 & & & & & \end{array} \quad \text{donde } a_i^{k-1} = a_i^k - \alpha_k a_{k-i}^k \text{ y } \alpha_k = \frac{a_k^k}{a_n^k}.$$

En la tabla, La primera y segunda fila son los coeficientes del polinomio de izquierda a derecha y viceversa respectivamente. La tercera fila se obtiene de multiplicar la segunda por $\alpha_n = \frac{a_0}{a_n}$ y restando el resultado a la primera fila. El último elemento en la tercera fila es cero. La cuarta fila es la tercera fila en orden inverso. El esquema se repite hasta que aparezcan $2n + 1$ filas. La última fila consiste de solo un elemento.

Teorema 6.6 Si $a_n > 0$, entonces el polinomio (6.10) tiene todas su raíces dentro del círculo unitario si y solo si todas las a_n^k son positivas. Si ningún a_n^k es cero, entonces, el número de a_n^k negativos es igual al número de raíces fuera del círculo unitario.

Notemos que la condición $a_n^0 > 0$ es equivalente a las siguientes condiciones, las cuales deben ser verificadas antes de construir la tabla:

$$f(1) > 0$$

$$(-1)^n f(-1) > 0$$

Bibliografía

- [1] Aguirre-Hernández, B., Frías-Armenta, M.E. and Verduzco, F. *Smooth trivial vector bundle structure of the space of Hurwitz polynomials*. Automatica 45, 2864-2868, 2009.
- [2] Aguirre-Hernández, B., Cisneros-Molina, J.L. and Frías-Armenta, M.E. *Polynomials in control Theory parametrized by their roots* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Vol. 2012, Article ID595076, 19 pages, doi:10.1007/s11518-012-5197-y, 2012.
- [3] Aguirre-Hernández, B., Frías-Armenta, M.E. and Verduzco, F. *On differential structures of polynomial spaces in Control Theory* Journal os Systems Science and Systems Engineering, Vol. 21, Issue 3, September 2012, pages 372-382, doi:10.1007/s11518-012-5197-y, 2012.
- [4] Aguirre, B., Ibarra, C. and Suárez, R. *Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials*. Systems and Control Letters 46, 255-263, 2002.
- [5] Aguirre, B. and Suárez, R. *Algebraic test for the Hurwitz stability of a given segment of polynomials*. Bol. Soc. Mat. Mexicana 3, 12(2), 261-275, 2006.
- [6] Bhattacharyya S. P., Chapellat H. and Keel L.H. *Robust Control: The parametric approach*, Prentice Hall (1995).
- [7] Buchanan, M.L. *A necessary and sufficient condition for stability of difference schemes for initial value problems* J. Soc. Indust. Appl. Math., (1963).
- [8] Du Fort, E. C. and Frankel, S. P. *Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations*. Mathematical tables and otheraids to computation, 7(43), 135-152. 1953.
- [9] Gantmacher F.R., *Matrix Theory Vol. 2* AMS Chelsea Publishing (1959).
- [10] Ganzha, Victor G. and Vorozhtsov, E.V. *Computer-aided analysis of difference schemes for partial differential equations* A Wiley Interscience Publication (1996).
- [11] García Sosa, F.R. *Estabilización de Sistemas de datos muestreados lineales por un control con retardo* Tesis Doctoral, UAM-I, 2010.

-
- [12] García, F.R.; Aguirre, B and Suárez, R.. *Stabilization of linear sampled-data systems by a time-delay feedback control* Mathematical Problems in Engineering, vol. 2008, Article ID 270518, doi:10.1155/2008/270518, 15 pages, 2008.
- [13] Goldberg, R.R., *Fourier Transforms*, Cambridge University Press, New York, 1965.
- [14] Hadjidimos, Apostolos. *A new explicit three level difference scheme for the solution of the heat equation* BIT 9 (1969), 315-323.
- [15] T. Kato, *Perturbacion theory for linear operators* Die Grundlehren der math. Wiss., Band 132, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [16] Kreiss, Heinz-Otto, *Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems I* Math. Comp., v.22 (1968)
- [17] Kreiss, Heinz-Otto, *Difference approximations for the initial-boundary value problem for hyperbolic differential equations* Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations, Proc. Adv. Sympos., Madison, Wis., 1966
- [18] Lancaster P. and Tismenestsky M., *The Theory of Matrices with applications*,Academin Press (1985).
- [19] Lax and R.D. Richtmyer, *Survey of the stability of linear finite difference equations* Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956).
- [20] LeVeque, R.J. and L.N. Trefethe, *On the resolvent condition in the Kreiss matrix theorem* Nord. Tidskr. Inf. Beh. (BIT), 24 (1984), pp. 584-591.
- [21] Loredo-Villalobos, C.A. *Factorización de Hadamard para polinomios Hurwitz*. Tesis Doctoral, UAM-I, 2012.
- [22] Loredo-Villalobos, C.A. and Aguirre-Hernández, B. *Necessary conditions for Hadamard factorizations of Hurwitz polynomials* AUTOMATICA, Vol. 47, no. 7, 1409-1413, 2011.
- [23] Loredo-Villalobos, C.A. and Aguirre-Hernández, B. *Hadamard factorization of stable polynomials* Advances in mathematical and computational methods I. Kotsireas, R., Melnik and B. West, Eds. AIP Proceedings 1368, pp. 251-254. ISBN:978-0-7354-0928-6, 2012.
- [24] Marden M. *Geometry of polynomials* American Mathematical Society (1966).
- [25] Miller J. H., John *On the location of zeros of certain classes of polynomials with applications to numerical analysis*, School of Mathematics, Trinity college, J. Inst. Maths Applies (1971), 8, 392-406.
- [26] Morton, K.W. and Schechter S. *On the stability of finite difference matrices* J. SIAM Numer. Anal. Ser. B, Vol. 2, No. 1 (1965).
-

-
- [27] O'hara, P. J. and Rodriguez R. S. *Some properties of self-inversive polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 44, Number 2, June 1974.
- [28] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W. *Difference methods for initial-value problems*, Krieger Publishing company, (1957).
- [29] Strikwerda, John C. *Finite difference schemes and partial differential equations* SIAM (2004).
- [30] Strikwerda, John C. and B. A. Wade *An extension of the Kreiss matrix theorem* SIAM J. Number. Anal., 25(1988), pp. 1272-1278.
- [31] Tadmor, E. *The equivalence of L-stability, the resolvent condition and strict H-stability* Linear Algebra Appl., 41 (1981), pp. 151-159.
- [32] Titchmarsh, E.C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1962.
-