

# La Dinámica Atmosférica y el Cálculo de Campos de Velocidad de Mesoescala Consistente con el Balance de Masa a través de la Formulación Variacional

Tesis por  
Ángel Martín Ramírez Rabelo

En el cumplimiento de los requisitos  
para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias: Física



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
Iztapalapa, CDMX

Asesor  
Dr. Marco Antonio Núñez Peralta

Sinodales  
Dr. Víctor Alejandro Salcido González  
Dr. David Parra Guevara

2022  
Defendida el día:[09.12.22]

© 2022

Ángel Martín Ramírez Rabelo

## AGRADECIMIENTOS

El conocimiento aquí presentado forma parte de un legado y una herencia que crece y evoluciona cada día gracias a la gran convicción y perseverancia del espíritu del entendimiento y el progreso. El conocimiento científico es el resultado de un esfuerzo en conjunto que se ha ido gestando, trascendiendo épocas, fronteras y cualquier tipo de diferencias. Agradezco a todas las personas que han dedicado sus vidas a aportar nuevos descubrimientos en la ciencia.

Agradezco al Departamento de Física en todo su conjunto de la Universidad Autónoma Metropolitana por ser un gran recinto de aprendizaje del cual he tenido la valiosa oportunidad de formar parte.

Agradezco especialmente a mi asesor el Dr. Marco Antonio Núñez Peralta por guiarme a través del desarrollo de este trabajo; por todo su tiempo, disposición y todas sus enseñanzas que me han nutrido a nivel personal y profesional. Este trabajo fue desarrollado en gran medida a partir de sus notas personales, libros aún no publicados y artículos.

A mis sinodales, el Dr. Victor Salcido y el Dr. David Parra, agradezco el tiempo que han dispuesto en revisar y evaluar mi trabajo además de sus valiosos comentarios que me han proporcionado mayor claridad y un enfoque más amplio de las ideas aquí presentadas.

A mi familia que han sido una fuente importante de motivación y un gran ejemplo. Su apoyo ha sido crucial durante todos mis estudios.

A mi querida compañera de aventuras, Pam, por su maravillosa compañía con la cual se ha enriquecido mucho más esta etapa de mi vida.

Finalmente agradezco a todos los colegas y amigos con quienes he compartido y nutrido mi experiencia personal y académica. En especial quiero agradecer a Pablo por la fraternidad que hemos cultivado por varios años y cuya valiosa retroalimentación de este trabajo me ayudó a centrar ideas clave.

*Si he podido ver más lejos, es porque estoy parado sobre hombros de gigantes. -Isaac Newton*

## RESUMEN

La dinámica atmosférica es un sistema complejo ya que está compuesto por una gran diversidad de factores y variables que interactúan entre sí exhibiendo no linealidad en sus relaciones. La sensibilidad en sus condiciones iniciales hacen de este, además, un sistema caótico que resulta imprevisible a largo plazo. Es esta la razón de la importancia que tiene el contar con métodos que determinen de manera precisa las variables en juego de un modelo que pretenda simular el comportamiento atmosférico y/o de los fenómenos que ahí tienen lugar.

En este trabajo comenzamos por una revisión general del rol que tiene la física matemática en el estudio de la atmósfera; cómo se ha clasificado de acuerdo a escalas espaciales y temporales de manera que sea posible localizar su análisis; el problema con la obtención e integración de datos atmosféricos y la asimilación de estos datos a manera de introducción.

La primera parte del trabajo se centra en establecer algunos de los principios físicos y matemáticos fundamentales y necesarios para elaborar modelos primitivos de la dinámica atmosférica. En el segundo capítulo estudiamos los sistemas de referencia y las transformaciones entre sistemas de coordenadas. Hacemos una revisión de las coordenadas eulerianas y lagrangianas; se introduce la esencia del teorema de transporte de Reynolds y formulación covariante-contravariante de los mapeos entre estos sistemas de coordenadas lo cual da lugar a una aplicación para el cálculo de los símbolos de Cristoffel.

El capítulo 3 se centra en la derivación a partir de primeros principios de las ecuaciones hidrodinámicas en un sistema de referencia inercial. Establecemos un par de hipótesis necesarias para estudiar los medios continuos que nos son de utilidad para deducir la ecuación de transporte o balance de materia desde la perspectiva lagrangiana y euleriana. Encontramos también la ecuación de movimiento y de energía mecánica a partir de la segunda ley de Newton. La ecuación de energía se estudia para una partícula, para un sistema de partículas y finalmente para un medio continuo. En este último encontramos que parte del trabajo hecho por las fuerzas superficiales resulta en un *trabajo interno* que genera deformaciones en el interior del volumen lo cual sugiere una relación con el trabajo termodinámico de la primera ley de la termodinámica. Pasamos entonces a estudiar la termodinámica de medios continuos para fluidos en movimiento con ayuda de la hipótesis de equilibrio local. Encontramos que la ecuación de energía es en realidad la síntesis de dos principios físicos independientes; la segunda ley de Newton y la primera ley de la termodinámica.

En el capítulo 4 estudiamos las ecuaciones hidrodinámicas en un sistema de referencia fijo a la Tierra en donde introducimos una matriz de rotación que relaciona las bases del sistema de referencia inercial con el sistema no inercial que rota junto con la Tierra.

En la literatura de meso-escala, el término gravitacional de la ecuación de movimiento se aproxima por

$g = gk$ . Hacemos una revisión de (Nuñez, 2003) en donde se determina cual es la región de validez con esta aproximación en contraste con un modelo de Tierra esférica. Encontramos que para longitudes superiores a los 100km existe un error porcentual, entre las isoclinas de presión de ambos casos, mayor al 10 % que aumenta de manera que con longitudes mayores a los 350km el error es superior al 200 %. Esto es relevante debido a que en estudios de meso-escala suelen considerarse longitudes de 800km además de que el término gravitacional de la ecuación de movimiento es el término dominante para diferentes escalas espaciales.

En la segunda parte del trabajo nos enfocamos en como generar campos de velocidad físicamente consistentes a partir de datos operacionales. En el capítulo 5 hacemos una breve revisión de métodos que suelen ser usados en la literatura para la interpolación y extrapolación de datos de viento.

El capítulo 6 trata con la importancia del balance de masa y la ecuación de continuidad destacando la condición de conservación usada en meteorología. A partir importancia del balance de masa en modelos de transporte atmosférico surgen planteamientos como el de (Kitada, 1987) que propone ignorar el término divergente de la ecuación de transporte. En esta sección hacemos una revisión de (Rocío Mendoza, 2015; MA Núñez y Mendoza, 2015) en donde se estudia esta propuesta analizando la estructura del campo localmente y se concluye que ignorar este término provoca una estructura del campo sustancialmente distinta. La solución, de acuerdo con (MA Núñez y Mendoza, 2017) está en trabajar con campos de velocidad que sean *per se* no divergentes de manera que se anule naturalmente el término divergente de la ecuación de transporte sin necesidad de ignorar ningún término.

El capítulo 7 está dedicada entonces al problema de generar campos de velocidad conservativos comenzando con el caso más simple en donde  $U^0$  es el campo que resulta de la suma de el campo inicial interpolado  $v^0$  medido sobre un plano horizontal y la imposición de la conservación de masa para obtener la componente vertical que es exactamente la integral sobre el eje vertical de la divergencia de del campo inicial. Este campo es evitado en la literatura debido a que se piensa que es más sensible a errores en los datos, sin embargo, mostramos con un ejemplo analítico la verdadera razón de porqué no es un buen candidato para campo de velocidad, i.e., reproduce las variaciones del terreno en vertical.

En el capítulo 8 nos centramos en el concepto de campo de velocidad ajustado y los problemas de frontera. Contamos con dos formas posibles y equivalentes para resolver este problema; la descomposición de Helmholtz y la formulación variacional. Ambas aproximaciones resultan en una ecuación elíptica. La descomposición de Helmholtz tiene la desventaja de que no cuenta con una solución única en general, además de que no se ha llegado a un acuerdo de cuales son las mejores condiciones de frontera para este problema. Por su lado, la formulación variacional resulta en un problema bien definido con soluciones únicas, sin embargo, diferenciamos entre la formulación estándar y una propuesta hecha por (MA Núñez, 2012) cuya diferencia radica principalmente en las condiciones de frontera usadas para resolver la ecuación elíptica que determina el campo de velocidad ajustado. La formulación estándar de este problema consiste

en imponer condiciones tipo Neumann  $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0$  sobre el terreno que se entiende como una frontera cerrada y condiciones Dirichlet  $\lambda = 0$  sobre el resto de la frontera o las fronteras *abiertas*. El problema con esta formulación, como es demostrado numéricamente en este trabajo, es que imponer condiciones tipo Dirichlet sobre alguna parte de la frontera genera una discontinuidad que altera el balance de masa mismo. Analizamos entonces la propuesta que impone condiciones Neumann sobre toda la frontera y verificamos como mejora por mucho el balance de masa del campo ajustado generado. Para esto calculamos el flujo y el porcentaje de masa que fluye en distintas regiones para un intervalo de tiempo de 3 horas y comparamos los resultados de los problemas de frontera estudiados para tres distintos campos iniciales y un caso equivalente al reportado por (Sanín y Gustavo Montero, 2007) para estudiar la dispersión de contaminantes atmosféricos.

Finalmente, hacemos una revisión del problema de transporte y el cálculo de trayectorias para un campo ajustado en terreno complejo. Con valores pequeños de la componente  $S_3$  de la matriz  $\mathbb{S}$  recuperamos el caso del campo  $U^0$  en donde las trayectorias del campo reproducen las variaciones del terreno en vertical pero con una matriz  $\mathbb{S}$  adecuada es posible generar campos de velocidad realistas.

En los apéndices se integra gran parte de la herramienta matemática usada para desarrollar este trabajo con ejemplos ilustrativos en cada sección.

# ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos . . . . .	III
Resumen . . . . .	IV
Índice general . . . . .	VII
Índice de figuras . . . . .	IX
Índice de tablas . . . . .	XI
Capítulo I: Introducción . . . . .	1
1.1. Modelos matemáticos . . . . .	2
1.2. El problema inverso . . . . .	3
1.3. La física de la atmósfera y los sistemas dinámicos . . . . .	4
1.4. Los sistemas complejos y la teoría del caos . . . . .	7
1.5. La capa de frontera y las escalas atmosféricas . . . . .	10
1.6. La interpolación y asimilación de datos atmosféricos . . . . .	15
1.7. Estimación de velocidad: formulación variacional e importancia de condiciones a la frontera	16
<b>I Principios físicos y matemáticos de la dinámica atmosférica</b>	<b>19</b>
Capítulo II: Sistemas de referencia y transformación de coordenadas . . . . .	21
2.1. Sistemas de coordenadas y bases vectoriales . . . . .	21
2.2. Coordenadas eulerianas y lagrangianas . . . . .	22
2.3. Transformación entre sistemas de coordenadas . . . . .	25
2.4. Bases covariante y contravariante asociadas a los mapeos lagrangiano y euleriano . . . . .	26
2.5. Sistemas de referencia inercial y no inercial . . . . .	32
Capítulo III: Ecuaciones hidrodinámicas en un sistema de referencia inercial . . . . .	34
3.1. Los medios continuos como una teoría de campos . . . . .	35
3.2. Transporte lagrangiano de una propiedad física o de un volumen material . . . . .	36
3.3. Transporte de una propiedad física a través de un volumen de control . . . . .	39
3.4. Ecuación de movimiento . . . . .	42
3.5. Ecuación de energía mecánica . . . . .	43
3.6. Ecuación de energía mecánica para un sistema de partículas . . . . .	44
3.7. Ecuación de energía mecánica para un volumen material . . . . .	45
3.8. Termodinámica de fluidos en movimiento e hipótesis de equilibrio local . . . . .	48
Capítulo IV: Ecuaciones hidrodinámicas en un sistema cartesiano fijo a la tierra . . . . .	53
4.1. Ecuación de continuidad . . . . .	58
4.2. Ecuación de movimiento . . . . .	58
4.3. Región de validez de la ecuación de movimiento con $\mathbf{g}=\mathbf{gk}$ . . . . .	60

<b>II Estimación del campo de velocidad a partir de datos operacionales: El campo de velocidad ajustado</b>	<b>65</b>
Capítulo V: Interpolación y extrapolación de datos para generar un campo inicial . . . . .	67
Capítulo VI: Ecuación de Continuidad Profunda e Importancia del Balance de Masa en Modelos de Transporte Atmosférico . . . . .	69
6.1. Inestabilidad estructural de un campo de velocidad lineal bajo perturbaciones del balance de masa y su efecto en los cálculos de transporte . . . . .	71
6.2. Tipos de estructuras en campos de velocidad divergentes y no divergentes . . . . .	74
Capítulo VII: Estimación de campos de velocidad que conservan masa . . . . .	76
7.1. Resultado: $U^0$ reproduce la variación del terreno en vertical . . . . .	77
Capítulo VIII: El cálculo de un campo de velocidad ajustado y los problemas de frontera . . . . .	82
8.1. Descomposición de Helmholtz . . . . .	82
8.2. La formulación variacional estándar . . . . .	84
8.3. Problema de Frontera 1 (BVP1) . . . . .	89
8.4. Problema de Frontera 1 considerando una matriz diagonal . . . . .	93
8.5. Problema de frontera 2 (BVP2) y su solución espectral. . . . .	96
8.6. El problema de frontera 3 (BVP3): Condiciones de frontera puramente Neumann . . . . .	97
8.7. Cálculo de resultados en 3D con series de Fourier . . . . .	101
8.8. Comparación de flujos: El efecto de las condiciones a la frontera en el balance de masa . . . . .	103
Capítulo IX: Representación de campos de velocidad realistas sobre terreno complejo con una matriz S adecuada. . . . .	107
Capítulo X: Conclusiones . . . . .	110
Bibliografía . . . . .	115
Apéndice A: Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. . . . .	118
A.1. Solución particular del problema $Lu=f$ y la función de Green. . . . .	119
A.2. Solución lagrangiana de la ecuación de transporte. . . . .	123
Apéndice B: Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones en la frontera. . . . .	126
B.1. El problema de valores propios, la solución espectral para problemas con condiciones en la frontera y los fenómenos de Gibbs . . . . .	129
B.2. Solución espectral de la ecuación de Poisson . . . . .	145
Apéndice C: Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	148
C.1. Solución de la ecuación de calor homogénea . . . . .	152
C.2. Solución de la ecuación de calor no homogénea . . . . .	154
Apéndice D: Cálculo de $U^0$ en su forma contravariante . . . . .	156
Apéndice E: Normas Vectoriales . . . . .	158
E.1. Normas de Campos Vectoriales . . . . .	159
Apéndice F: Teorema de la divergencia y flujo hidrodinámico. . . . .	161

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Número</i>	<i>Página</i>
1.1. El medio ambiente de la Tierra. . . . .	1
1.2. Patrones generales de circulación atmosférica . . . . .	4
1.3. Esquema en un plano meridional . . . . .	5
1.4. Cuando la atmósfera se vuelve lo suficientemente inestable . . . . .	5
1.5. Para comprender y explicar el comportamiento complejo del clima . . . . .	6
1.6. El atractor extraño de Lorenz . . . . .	10
1.7. El extremo superior de la PBL . . . . .	11
1.8. Tres escalas para distinguir los procesos atmosféricos . . . . .	12
1.9. Propuestas para la estandarización de las escalas atmosféricas . . . . .	14
1.10. Ejemplo de interpolación de datos . . . . .	16
2.1. Sistema de referencia inercial . . . . .	23
3.1. Transporte de tipo lagrangiano . . . . .	36
3.2. De lado izquierdo tenemos un esquema del transporte de tipo euleriano . . . . .	39
3.3. De lado izquierdo tenemos el paralelogramo lateral de la porción volumétrica . . . . .	39
4.1. Sistema $y^j$ fijo a la tierra . . . . .	53
4.2. Partícula con posición $\mathbf{R}$ del sistema inercial $X^i$ y el sistema $y^j$ fijo a la tierra . . . . .	55
4.3. Crecimiento del error porcentual . . . . .	63
4.4. Representación de las iso-superficies de presión a escala. . . . .	64
6.1. Considerando los parámetros hidrodinámicos . . . . .	75
6.2. Con los mismos valores . . . . .	75
7.1. El plano $xy$ es tangente a la esfera . . . . .	76
7.2. Líneas de corriente del ejemplo 1 . . . . .	79
7.3. Líneas de corriente del ejemplo 2 . . . . .	80
7.4. Líneas de corriente del ejemplo 3 . . . . .	81
8.1. Esquema de condiciones de frontera para el BVP1 . . . . .	92
8.2. Esquema de condiciones de frontera para el BVP2 . . . . .	95
8.3. Esquema de condiciones de frontera para el BVP3 . . . . .	100
8.4. Esquema de la región considerada . . . . .	103
9.1. Líneas de corriente del ejemplo de un campo ajustado $\mathbf{v}_{m=n=200}$ con $S_3 = 10^{-2}$ . . . . .	109
9.2. Líneas de corriente del campo ajustado $\mathbf{v}_{m=n=200}$ considerando esta vez $S_3 = 1$ . . . . .	109

B.1.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 30$ . Se puede ver que la serie se aproxima a la función constante $f(x) = 1$ . . . . .	135
B.2.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 30$ . Se puede ver que la serie se aproxima a la función cuadrática $f(x) = x^2$ . . . . .	137
B.3.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 30$ . De la misma forma que en el caso con condiciones de frontera Dirichlet... . . . . .	139
B.4.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 30$ . Podemos ver que la serie se aproxima a la función constante $f(x) = x^2$ . . . . .	140
B.5.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 30$ . La serie converge a la función constante $f(x) = 1$ exactamente... . . . . .	143
B.6.	Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de $f_n$ con $n = 20$ y $b = 2$ . . . . .	144

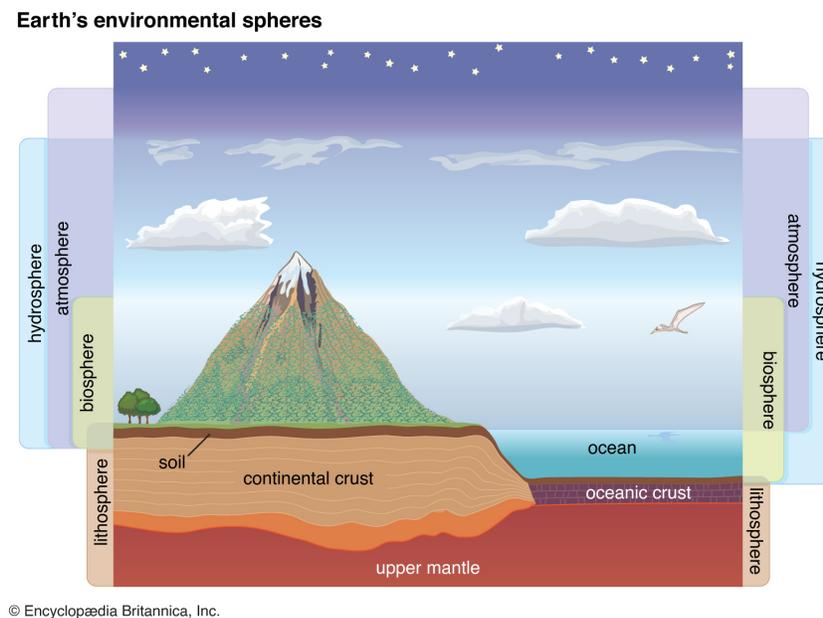
## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Número</i>	<i>Página</i>
4.1. Tabla de magnitudes . . . . .	61
8.1. Valores para un campo inicial $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$ . . . . .	101
8.2. Con $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$ . . . . .	102
8.3. La convergencia en este caso para $\mathbf{v}^0 = x\mathbf{i}$ . . . . .	102
8.4. Se observa que el flujo $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$ para $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$ con $\beta = 3.6 \times 10^{-4}$ aumenta conforme nos acercamos a la región completa. . . . .	104
8.5. $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$ para $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z \cos(\omega x)$ con $\beta = 2.5 \times 10^{-3}$ . . . . .	104
8.6. $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$ con $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z e^{-z/H} \cos(\omega x)$ con $\beta = 5 \times 10^{-3}$ . . . . .	104
8.7. $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=80, l=20})$ con $\mathbf{v}^0$ (8.8.2). . . . .	105
8.8. El porcentaje de masa $\%M$ que fluye fuera de las fronteras durante 3 horas . . . . .	105
8.9. Valores del $\%M$ para $t = 3$ horas y un campo inicial, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z \cos(\omega x)$ . . . . .	106
8.10. Valores del $\%M$ para $t = 3$ horas y un campo inicial, $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z e^{z/H} \cos(\omega x)$ con $H = 10km$ y $\beta = 5 \times 10^{-3}$ . . . . .	106
8.11. Valores del $\%M$ para $t = 3$ horas y el campo inicial (8.8.2) con $H = 10km$ y $\beta = 4,9 \times 10^{-2}$ . . . . .	106
B.1. Notemos que la convergencia es lenta debido a los fenómenos de Gibbs . . . . .	136
B.2. De la misma forma que el caso anterior con la función constante . . . . .	137
B.3. La convergencia es ligeramente más rápida que el caso con condiciones Dirichlet . . . . .	139
B.4. Vemos que, comparado con el caso con condiciones Dirichlet . . . . .	140
B.5. Notemos lo rápido que converge la norma de la serie $f_n$ . . . . .	144

## Capítulo 1

### INTRODUCCIÓN

El siglo veinte se ha destacado por haber tenido una actividad importante con grandes avances en muchas áreas del conocimiento científico-tecnológico (Nebeker, 1995). Los desarrollos en la tecnología han hecho posible nuevas formas de realizar observaciones y mediciones del planeta que nos brinda una perspectiva a diferentes escalas espaciales y temporales que nos permite apreciar mejor los patrones naturales. Un entendimiento profundo de las leyes naturales es necesario para interpretar correctamente las observaciones y poder visualizar los patrones e interrelaciones de los fenómenos complejos involucrados en el estudio de los aspectos físicos de la tierra (Bates, 1961). El sistema climático terrestre, por ejemplo, está determinado por las relaciones intrínsecas entre la atmósfera<sup>1</sup>, la hidrosfera<sup>2</sup>, la litosfera<sup>3</sup>, la biosfera<sup>4</sup> [ver Figura 1.1] y los factores externos como el Sol (Trenberth, 1992).



**Figura 1.1:** El medio ambiente de la Tierra así como su sistema climático incluyen la atmósfera, la hidrosfera, la litosfera y la biosfera.

<sup>1</sup>La atmósfera terrestre es la capa más externa y menos densa del planeta. Se constituye por varios gases que varían en cantidad según la presión a diversas alturas. Los principales gases que la componen son: oxígeno (21 %) y el nitrógeno (78 %), seguidos del argón, el dióxido de carbono y el vapor de agua.

<sup>2</sup>Se compone de todas las aguas superficiales líquidas y congeladas, las aguas subterráneas contenidas en suelos y rocas, y el vapor de agua en la atmósfera. Los componentes de la hidrosfera están en circulación constante sujetos a cambios de lugar y fase, de esta forma la cantidad total de agua permanece en equilibrio.

<sup>3</sup>Capa exterior de la Tierra, rígida y rocosa, constituida por la corteza y la parte superficial del manto. Se extiende hasta una profundidad de aproximada de 100 km y se divide en una docena de bloques rígidos separados llamados placas tectónicas.

<sup>4</sup>La biosfera se compone del conjunto de ecosistemas de la Tierra, formado por los seres vivos y el medio en el que viven.

La atmósfera sirve como una interfaz entre el espacio exterior y la superficie terrestre es la región en donde se presentan los cambios climáticos que afectan íntimamente nuestra vida diaria y el abastecimiento de nuestros alimentos<sup>5</sup> (Stone y Meinke, 2006; White, Brooke y Pfister, 2018). Esta interfaz recibe una gran cantidad de radiación solar lo que provoca cambios importantes de temperatura; una de las variables fundamentales dentro del sistema climático que experimenta los cambios mas radicales y perceptibles. Estos cambios de temperatura provoca corrientes de viento; otra variable determinante que lleva consigo calor y humedad a través de la atmósfera así como el transporte de la gran variedad de los elementos que componen el aire.

A pesar del gran esfuerzo y los grandes avances realizados a través de varios años de estudio y análisis del sistema climático terrestre y sus mecanismos, aún existen muchas preguntas abiertas. El lenguaje matemático ha resultado ser muy útil para interpretar los patrones y ciclos en la naturaleza a través de una estructura lógica que nos permite entender causas y consecuencias desde una perspectiva reduccionista, que involucre sólo algunas variables relevantes, hasta una perspectiva tan sofisticada como sea posible. A partir de primeros principios físicos, como lo son la conservación de masa, momento y energía; o las leyes termodinámicas, es posible esquematizar un fenómeno a través de una diversidad de métodos y plantear un modelo matemático, que caracteriza las causas o factores que determinan una dinámica, con el objetivo de encontrar una solución que nos permita entender los mecanismos intrínsecos del fenómeno para hacer predicciones de su dinámica y sus consecuencias.

### **1.1. Modelos matemáticos**

Un modelo físico-matemático es una idealización o representación abstracta de fenómenos, sistemas o procesos que tienen como fin analizarlos, describirlos, explicarlos, simularlos y predecir su comportamiento a diferentes escalas. No representan la realidad en toda su complejidad; la mera percepción humana es un modelo creado por el cerebro a través de los datos recibidos de los sentidos. Se procesan y filtran estos datos y sólo cierta información que nos es relevante del entorno es considerada para formar nuestro modelo de la realidad.

De la misma manera, un modelo físico-matemático considera las variables más influyentes que caracterizan un fenómeno observado y estudia las relaciones existentes entre estas variables y los cambios respecto a sus parámetros.

La comparación del modelo con la realidad determina que tan buena aproximación es nuestro modelo; que tan buena descripción es del fenómeno observado de acuerdo con las variables y relaciones de correspondencia establecidas.

---

<sup>5</sup>En particular, es en la troposfera(0-10km) y la estratosfera baja donde se manifiestan la mayor cantidad de fenómenos.

## 1.2. El problema inverso

Un *problema inverso*, en contraposición del *problema directo*, se define como la clase de problema donde se infiere información a partir de observaciones. Los problemas directos también se plantean a través de la observación de un fenómeno pero no se infiere información. Con los datos disponibles se crea un modelo que permite hacer predicciones de algunas mediciones dada la descripción de un sistema generando la información a partir del modelo.

De acuerdo con J.S. Hadamard (Hadamard, 1902), un problema bien planteado debe satisfacer tres criterios:

- (I) Existencia; existe la solución al problema.
- (II) Unicidad; si existe, la solución será única.
- (III) Estabilidad; la solución es estable. El comportamiento de la solución cambia de forma continua respecto el cambio en las condiciones iniciales. En los problemas inversos, la condición de estabilidad suele ser quebrantada.

La formulación matemática de un problema directo se sigue como: Parámetros (o variables) del modelo  $\rightarrow$  Datos. Un problema inverso, en cambio va de: Datos  $\rightarrow$  Parámetros del modelo<sup>6</sup>.

---

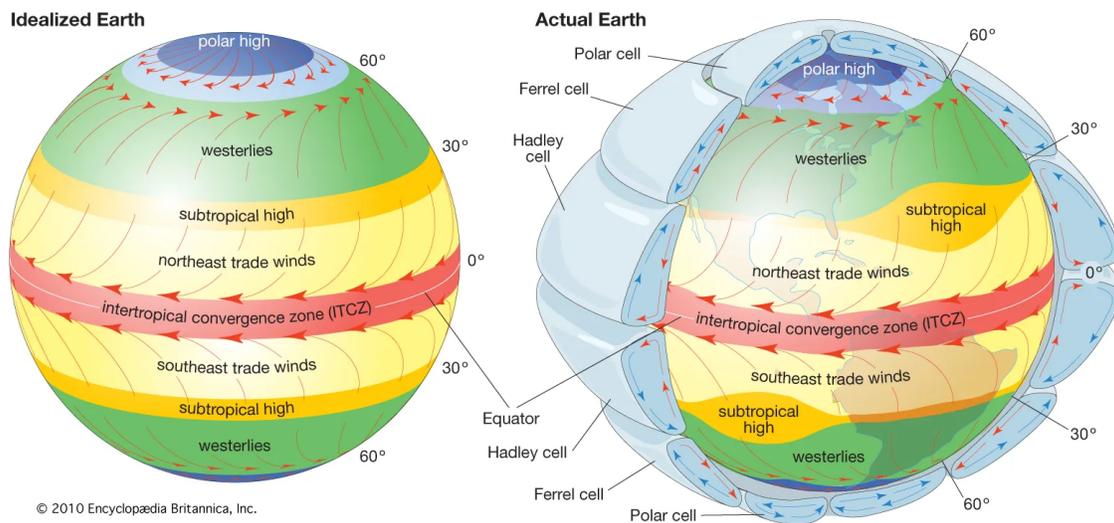
<sup>6</sup>El descubrimiento de Neptuno, en 1846, se logró al analizar una perturbación en la trayectoria de Urano, el matemático francés Urbain Le Verrier predijo la posición del planeta aún no visto a partir de estos datos. Un ejemplo de problema inverso.

### 1.3. La física de la atmósfera y los sistemas dinámicos

*¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas ?*

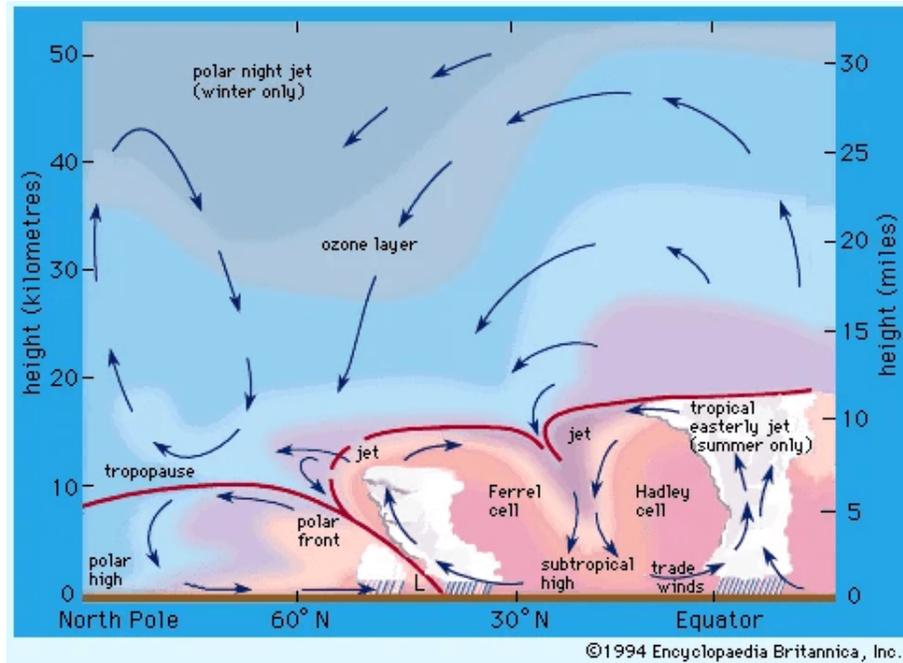
*E. Lorenz (1972)*

Las variables que integran un modelo meteorológico son en realidad propiedades físicas que están definidas en cada punto del espacio llamados *campos meteorológicos*, i.e., temperatura, presión gravedad, viento, etc. La atmósfera es un sistema dinámico cuyas variables se relacionan de manera no-lineal. Los cambios de temperatura y el movimiento terrestre provocan el desplazamiento vertical y horizontal del aire que circula entre los polos y el ecuador en bandas horizontales a través de las diferentes latitudes [Figura 1.2, 1.3 y 1.4]. Además, las características de las superficie terrestre perturban el paso del aire en movimiento causando zonas con distintas densidades de aire.

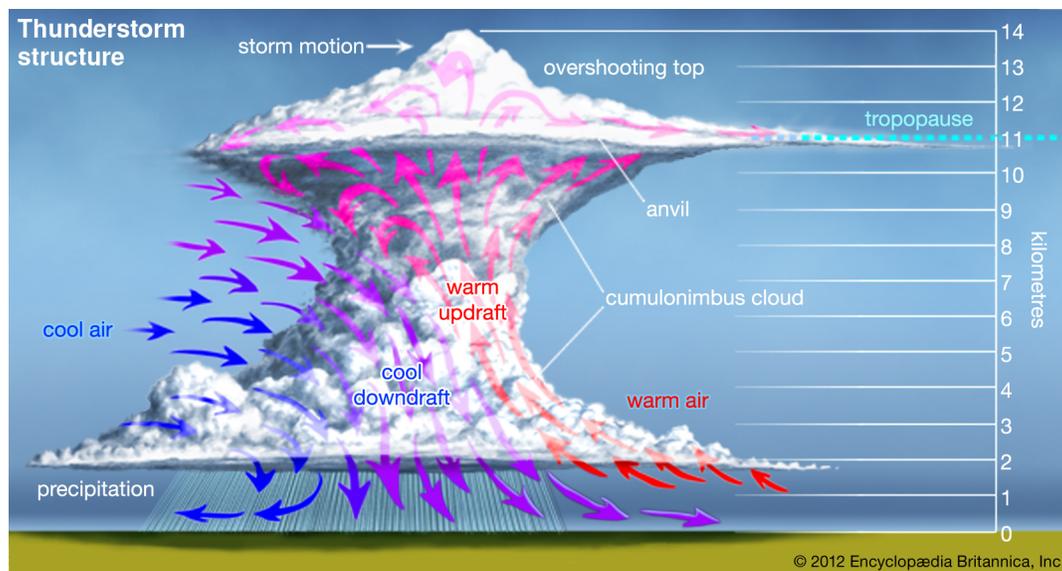


**Figura 1.2:** Patrones generales de circulación atmosférica sobre una Tierra idealizada con una superficie uniforme (izquierda) y la Tierra real (derecha) donde se representan los patrones horizontales y verticales de la circulación atmosférica.

Una propuesta para estimar campos de viento es encontrar soluciones numéricas de las llamadas **ecuaciones primitivas**. Las ecuaciones primitivas determinan la dinámica atmosférica; físicamente equivalen a las ecuaciones hidrodinámicas de un fluido en un sistema de referencia en rotación y plantean los principios de conservación (masa, momento, energía, etc...) que permiten darle un sentido inequívoco a un fenómeno que se desee estudiar en cualquier escala espacial o temporal. Sin embargo, en la práctica, el estudio numérico de las soluciones de estas ecuaciones puede resultar muy costoso a nivel computacional.

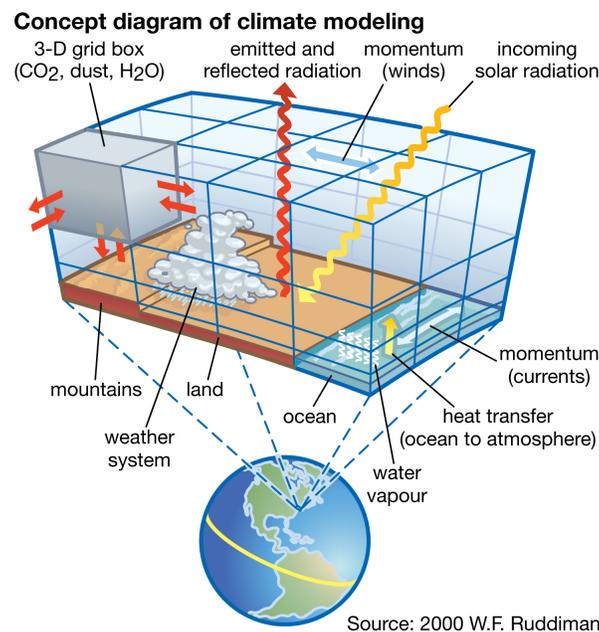


**Figura 1.3:** Esquema en un plano meridional de las direcciones de los movimientos promedio de los llamados jet streams en la atmósfera.



**Figura 1.4:** Cuando la atmósfera se vuelve lo suficientemente inestable como para formar grandes y potentes corrientes ascendentes y descendentes (como lo indican las flechas rojas y azules), se forma una enorme nube tormentosa. A veces, las corrientes ascendentes son lo suficientemente fuertes como para extender la parte superior de la nube hacia la tropopausa, el límite entre la troposfera (o la capa más baja de la atmósfera) y la estratosfera.

A principios del siglo XX, se planteó que las leyes de la física podrían usarse para pronosticar el tiempo; predecir el estado de la atmósfera podría tratarse como un problema matemático de valores iniciales en el que el clima futuro se determina integrando las ecuaciones en derivadas parciales partiendo de una observación inicial del estado del tiempo. Actualmente sabemos que este problema se traduce en resolver diariamente un sistema de ecuaciones diferenciales en aproximadamente medio billón de puntos por paso de tiempo entre el tiempo inicial y semanas o meses por delante teniendo en cuenta la dinámica, los procesos termodinámicos, radiativos y químicos (Fig. 1.5) trabajando en escalas de cientos de metros a miles de kilómetros y de segundos a semanas por lo que resulta un problema computacional prácticamente imposible para la tecnología actual. «Como problema computacional, la predicción del clima global es comparable a la simulación del cerebro humano y de la evolución del Universo primitivo» (Bauer, Thorpe y Brunet, 2015).



**Figura 1.5:** Para comprender y explicar el comportamiento complejo del clima de la Tierra, los modelos climáticos modernos incorporan varias variables que representan los materiales que pasan a través de la atmósfera y los océanos de la Tierra y las fuerzas que los afectan.

Una vía alternativa considerada ampliamente para reducir en gran medida el coste computacional son los métodos de *interpolación* para generar campos de viento a partir de datos operacionales obtenidos de diferentes sensores y radares. El problema es que estos métodos nos proporcionan campos de viento que **no** satisfacen el balance de masa **ni** la tangencialidad al terreno por lo que no son físicamente consistentes. No obstante, como veremos más adelante, es posible construir un campo de viento a partir del campo interpolado que si cumpla las restricciones físicas de conservación y tangencialidad a través de los métodos de asimilación de datos, como el método variacional estudiado en este trabajo. Si bien

un campo viento ajustado por asimilación de datos no deja de ser una aproximación del campo de viento real, si nos garantiza que es el campo de viento físicamente consistente mejor aproximado al viento real a partir de los datos operacionales. A pesar de esto, hay autores que consideran innecesaria la asimilación de datos y piensan en la sola interpolación como suficiente (Stohl, 1998). En su libro, *ciencia y método* (Poincaré, 1908), Poincaré reflexiona sobre aquello que guía la selección de los hechos en la ciencia; a lo que precisamente él llama *método*, y en consecuencia, sugiere que nuestro primer cuidado debe ser idear un método. Un método bien establecido a partir de la observación de hechos regulares que determinen una regla. Para representar esta selección de hechos, él da el siguiente ejemplo:

Supongamos que estamos tratando de determinar una curva observando algunos de los puntos en ella. El hombre práctico que busca solo la utilidad inmediata simplemente observará los puntos que requiera para algún objeto especial; estos puntos estarían mal repartidos en la curva, estarían acumulados en ciertas partes y escasos en otras, de modo que sería imposible unirlos por una línea continua, y serían inútiles para cualquier otra aplicación. El científico procedería de una manera diferente. Ya que desea estudiar la curva por sí misma, distribuirá los puntos a ser observados regularmente, y tan pronto como él conozca algunos de ellos, los unirá mediante un línea y tendrá entonces la curva completa.

En este caso podríamos entender como analogía de un hecho regular convertido en regla la conservación de la masa o cualquier restricción física. En este sentido el mejor método para calcular un campo de velocidad de viento es por tanto aquel que está determinado por dicha regla, es decir, los campos de velocidad que sean físicamente consistentes con el balance de masa. La mera interpolación de los datos es por tanto insuficiente dado que no satisface esta regla simple y cualquier selección de datos restringida a la sola interpolación carecería de lo que por definición establece un método.

#### **1.4. Los sistemas complejos y la teoría del caos**

¿Qué tan bien podemos predecir el futuro ? Al remontarnos a finales del siglo 17, las leyes de movimiento y gravitación universal de Isaac Newton parecían ser la clave para predecir cualquier dinámica. Con estas leyes es posible explicar los movimientos de los planetas en el sistema solar, predecir los eclipses y hasta el paso de cometas con alta precisión y siglos de antelación. Newton sentó las bases del determinismo y las posibilidades de la predictibilidad con el desarrollo del cálculo infinitesimal y la teoría de las ecuaciones diferenciales. Dado un sistema mecánico, como el sistema solar o una colección de moléculas en el aire, uno puede escribir las ecuaciones diferenciales que gobiernan su movimiento. Si conocemos la posición y velocidad inicial del sistema, debería ser posible, en teoría, resolver la ecuación diferencial y determinar el futuro. Laplace (1814) resumió este hecho en su *Ensayo Filosófico de la Probabilidad* (De Laplace, 1995):

Deberíamos entonces considerar el estado presente del universo como el efecto del estado previo y como una causa del estado venidero. Una inteligencia que en algún instante pudiera comprender todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación de los seres que la componen; si además fuera lo suficientemente vasta como para someter estos datos a análisis, englobaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los de los átomos más ligeros. Para tal inteligencia nada sería incierto, y el futuro, como el pasado, estaría abierto a sus ojos.

Laplace sabía bien que carecemos de una inteligencia así de vasta por lo que debemos recurrir a la probabilidad para poder entender los sistemas dinámicos. Maxwell (1876) en su libro *Materia y Movimiento* (Maxwell, 1991) ya reconocía la sensibilidad a las condiciones iniciales:

Hay una máxima comúnmente citada: *Las mismas causas producirán siempre los mismos efectos*. Para entender esto debemos definir a que nos referimos con las *mismas causas* y con los *mismos efectos* dado que está de manifiesto que ningún evento sucede más de una vez jamás por lo que los efectos y las causas nunca son iguales en todos sus aspectos. Otra máxima que suele acompañar a la primera establece: *Causas similares producen efectos similares* lo cual sólo es verdad cuando pequeñas variaciones en el estado inicial de un sistema producen pequeñas variaciones en el estado final de este. Este comportamiento lo satisfacen varios fenómenos físicos, sin embargo existen los casos donde las pequeñas diferencias en el estado inicial del sistema produce grandes cambios en su estado final.

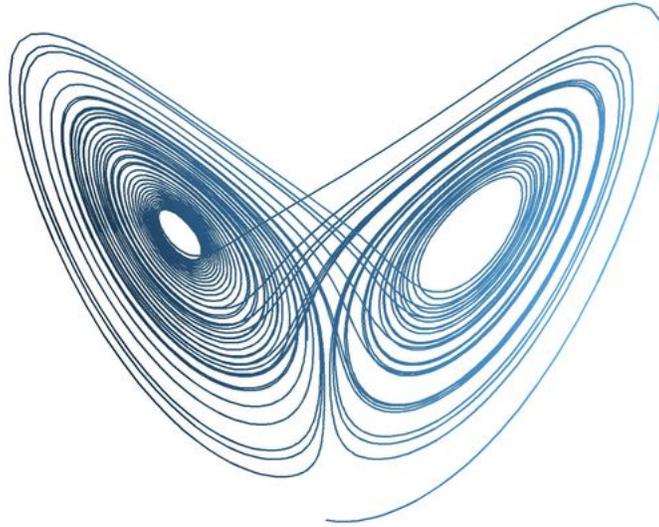
Se ha afirmado que el descubridor de los sistemas caóticos fue Poincaré (1890) en su famoso tratado del problema de los tres cuerpos. Diez años antes, Poincaré fundó las bases de la teoría cualitativa de lo que ahora conocemos como sistemas dinámicos en su tratado de 1881 *Sur les courbes définies par des équations différentielles* (Sobre las curvas definidas por ecuaciones diferenciales) en donde analiza el comportamiento de trayectorias sobre campos vectoriales en un plano, i.e., soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en dos dimensiones. Uno de sus resultados más importantes, *el teorema de Poincaré-Bendixon*, implica que estas trayectorias se comportan muy bien y convergen a un punto de equilibrio o a una trayectoria periódica. Sin comportamiento caótico en dimensión 2. En su trabajo de 1890 trató de extender el análisis con ecuaciones diferenciales en 3 dimensiones y debió sorprenderse al notar la intrincada complejidad del problema. En 1908, en su libro *ciencia y método* (Poincaré, 1908) Poincaré advierte también sobre la sensibilidad de las condiciones iniciales:

¿ Por qué es que los meteorólogos tienen tantas dificultades para predecir el tiempo con alguna certidumbre? ¿ Por qué es que las lluvias o incluso las tormentas parecen

generarse por casualidad al grado que las personas consideren natural rezar por la lluvia o por un buen clima aunque les parezca ridículo rezar por la aparición de un eclipse? Podemos notar que los cambios más radicales se observan en regiones en donde la atmósfera se encuentra en un equilibrio inestable. Un meteorólogo es capaz de darse cuenta en donde existe este equilibrio inestable en la atmósfera y la inevitable formación de un ciclón en algún lugar, pero exactamente en donde, sería prácticamente imposible para él afirmarlo. Una décima de grado de variación de un punto dado y el ciclón se formará aquí y no allá. Sin embargo las observaciones no son lo suficiente comprensibles o precisas, lo cual es la razón para que parezca un evento de la casualidad.

El profesor Lorenz (Meteorólogo en MIT) inició su carrera como matemático al graduarse de la universidad Dartmouth College en Nuevo Hampshire. Posteriormente, con la llegada de la segunda guerra mundial, fue asignado al equipo de pronóstico climático en el ejército estadounidense (Martin, 1963). El estudio del clima lo llevó eventualmente a ser el primero en reconocer oficialmente lo que se denomina *comportamiento caótico* en el modelado matemático de los sistemas meteorológicos. A principios de la década de 1960 (Lorenz, 1960; Lorenz, 1962; Lorenz, 1963), Lorenz buscaba una simplificación de las ecuaciones de la atmósfera que permitiera un análisis computacional. Se dio cuenta de que pequeñas variaciones de las condiciones iniciales en ciertos sistemas dinámicos, como la atmósfera, podría resultar en enormes diferencias conforme estos sistemas evolucionan. Estas observaciones lo llevaron a formular lo que ahora se conoce como el *efecto mariposa*, nombre que se volvió popular a partir de una presentación para la *American Association for the Advancement of Science* el 29 de diciembre de 1972, titulada: “*Previsibilidad: Puede el aleteo de una mariposa en Brasil originar un tornado en Texas?*”; publicada posteriormente en el apéndice de su libro *The Essence of Chaos* (Lorenz, 1993). En esta charla, Lorenz hace notar que tanto un aleteo de mariposa puede ocasionar un tornado como el aleteo de millones de ellas sin mencionar la actividad de todas las demás especies incluyendo la nuestra. Además este aleteo puede ser tanto instrumento de generar tornados como de prevenirlos. Por otro lado de forma más general establece que no es posible contestar esta pregunta de manera afirmativa ni negativa. El hacerlo sería suponer que podemos replicar ciertas condiciones atmosféricas de manera que podamos perturbar un cierto estado y después mirar, bajo las mismas condiciones, la evolución de dicho estado sin perturbarlo. O que es posible comprender, las circunstancias iniciales de cada posible perturbación en la atmósfera que pudiera desencadenar tal efecto. Sin embargo podemos imaginar dos situaciones similares, dos mundos, con la única diferencia de que en uno hay una mariposa aleteando y en el otro no. Es posible que con el tiempo, la evolución de ambos sistemas sean tan distintos que en uno haya un tornado mientras que en el otro no. Como vemos la presencia de la mariposa no alteraría la frecuencia que dichos fenómenos, mas bien alteraría su orden de sucesos.

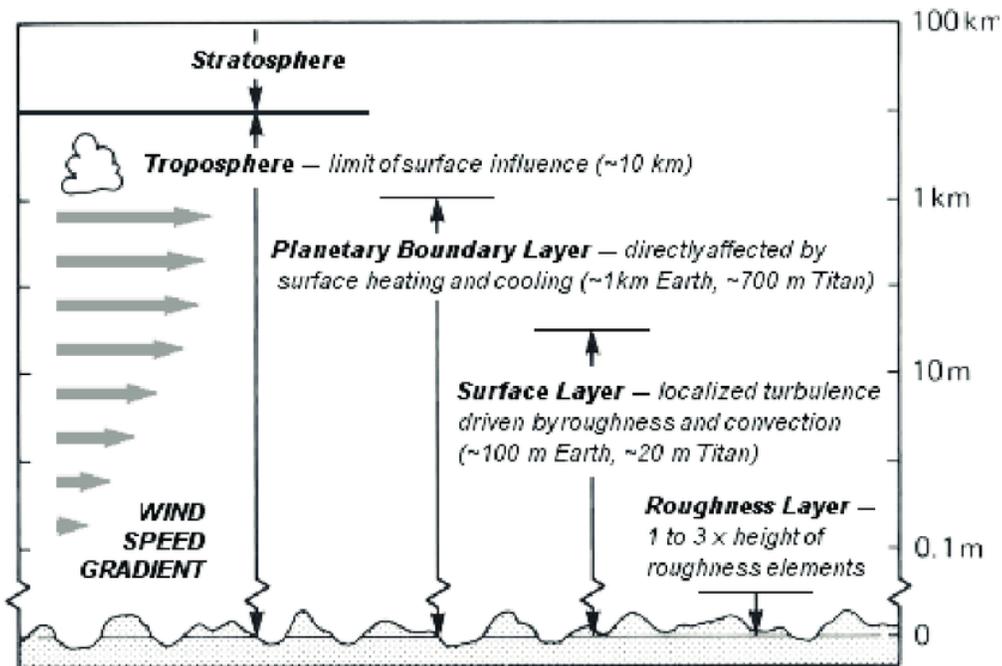
Con los años la conferencia de Lorenz, y en especial su título, tuvo mucha repercusión. De hecho, es a partir de ese evento que comienza a llamarse *efecto mariposa* a lo que él denominaba *dependencia sensible a las condiciones iniciales*, que tienen la mayoría de los sistemas dinámicos no lineales ó *sistemas complejos*. Las ideas de Lorenz dieron lugar al comienzo de un nuevo campo de estudio que afectó no solo a las matemáticas, sino prácticamente a cada rama de la ciencias - biológicas, físicas y sociales. En meteorología, Lorenz llegó a la conclusión de que puede ser fundamentalmente imposible hacer predicciones más allá de dos semanas con un grado razonable de exactitud.



**Figura 1.6:** El atractor extraño de Lorenz parece las alas de una mariposa. Corresponde a la solución de un modelo simple de convección de viento cuyas ecuaciones están dadas por:  $\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ ,  $\dot{y} = -xz + rx - y$ ,  $\dot{z} = xy - bz$ . Las tres constantes  $b$ ,  $\sigma$  y  $r$  determinan el comportamiento del sistema. Para obtener la forma de mariposa escojemos  $b = \frac{8}{3}$ ,  $\sigma = 10$  y  $r = 28$  (Lorenz, 1963).

### 1.5. La capa de frontera y las escalas atmosféricas

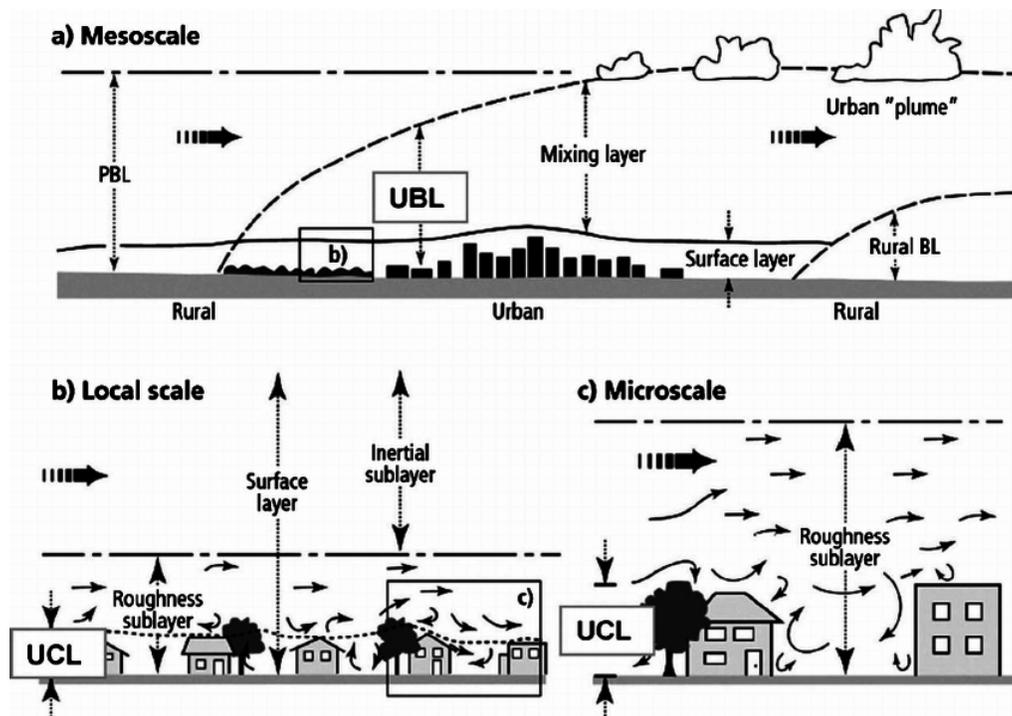
La capa de frontera planetaria (PBL - Planetary boundary layer) es la porción de la atmósfera en la que el campo de velocidad está directamente influenciado por la interacción con la superficie del tierra. Es la capa inferior de la troposfera, es decir, la parte en contacto con la superficie terrestre u oceánica que rige el intercambio de energía, momento y humedad entre la tierra sólida y la atmósfera libre; la parte de la troposfera situada inmediatamente por encima de la PBL. En el extremo superior, la velocidad la fijan el viento y la temperatura en la atmósfera libre, lo que induce gradientes tanto de velocidad como de temperatura a lo largo de la PBL. Debido a la enorme extensión vertical de la capa límite y a la baja viscosidad del aire, incluso pequeñas variaciones verticales de la velocidad hacen que el flujo de aire en la PBL sea turbulento, lo que intensifica el intercambio vertical de momento, masa y energía en órdenes de magnitud (Ansorge, 2016). Sin embargo, es a sólo unos pocos milímetros de la superficie en donde es más intenso este efecto y la difusión molecular es comparable a los otros términos de la ecuación del



**Figura 1.7:** El extremo superior de la PBL puede definirse de numerosas maneras (en la Tierra, entre algunas decenas de metros hasta algunos kilómetros), su límite inferior es la propia superficie. Allí, la velocidad y la temperatura del aire deben coincidir con las del medio subyacente, ya sea un muro, agua o hielo flotante. (Imagen por (Woolsey, Hagerman y Morrow, 2005)).

momento (Holton, 2004). Esta es la razón por la que el término viscoso se omite de las ecuaciones de movimiento atmosférico; el hecho de que los términos en la ecuación de momento son varios órdenes mayores a el término viscoso en general.

El deterioro medioambiental, la necesidad de generación de energía y el desarrollo sostenible sitúan a la meteorología de capa de frontera (BLM - Boundary Layer Meteorology) como un tema de vanguardia de los desarrollos modernos en el campo de las ciencias atmosféricas. Los avances teóricos, las herramientas de modelación computacional y los datos experimentales relacionados con la capa límite atmosférica son necesarios en una amplia gama de modelos ambientales incluidos los de clima, predicción meteorológica, contaminación atmosférica o evaluación de impacto ambiental. Los modelos de los complejos sistemas atmósfera-hidrosfera-biosfera deben proporcionar una descripción precisa, de alta resolución, de los procesos físicos en la PBL turbulenta (Djorlov, 2007).



**Figura 1.8:** Tres escalas utilizadas para distinguir los procesos atmosféricos en el área urbana y las capas atmosféricas que son típicamente identificadas en cada escala. PBL: capa límite planetaria. UBL: Capa de límite urbano. UCL: Capa de dosel urbano. Fuente (Grimmond, 2006).

Clasificar adecuadamente las escalas atmosféricas puede ser muy útil para estudiar y entender ciertos fenómenos de forma relativamente aislada ya que estos acontecen en la atmósfera con dimensiones espaciales y temporales muy dispares además de que suelen superponerse unos con otros. Existen diferentes esquemas para esta clasificación de escalas, sin embargo de forma general es posible identificar a la micro-meso- y macro-escala de acuerdo con sus límites espacio-temporales y las fuerzas efectivas en cada caso. Charney (1948) propone la siguiente clasificación:

- **Macro-escala** a la de aquellos fenómenos en los que las aceleraciones propias del sistema son de una magnitud despreciable frente a la aceleración de Coriolis.
- **Micro-escala** es aquella donde las aceleraciones del sistema son tan grandes que su magnitud es comparable a la de la aceleración de la gravedad y por tanto responderán a leyes no-hidrostáticas, lejos del quasi-equilibrio de la macro-escala.
- **Meso-escala** es aquella en donde las leyes de la hidrostática todavía son válidas y a la vez ha dejado de ser válido el quasi-geostrofismo<sup>7</sup>. Las aceleraciones propias del sistema no son despreciables

<sup>7</sup>El viento geostrofico es no-divergente en un plano por lo que sólo las desviaciones con respecto al geostrofismo contribuyen a la divergencia horizontal y, por conservación de masa, a movimientos verticales.

frente a la de Coriolis e incluso pueden tener un orden de magnitud semejante, pero son muy inferiores a la aceleración de la gravedad.

Estas definiciones siguen siendo válidas en la actualidad, sin embargo, los detalles y subdivisiones en cada una es un tema aún controversial entre algunos autores. En (Thunis y Bornstein, 1996) se presenta una propuesta de estandarización (ver figura 1.9) que integra los conceptos de escalas espacio-temporales y las ecuaciones que gobiernan así como la dinámica resultante en cada escala considerada como *una jerarquía útil para la clasificación de modelos meso-escalares*.

Notemos que la estandarización de escalas de Orlansky (Orlanski, 1975) contiene subdivisiones por la amplia gama de fenómenos que abarcan las categorías básicas, micro-, meso- y macro-escala, sin embargo, las escalas horizontales parecen estar establecidas de alguna forma arbitraria; desde los 2km hasta los 2000km. Menciona que en general no es posible identificar una relación entre los parámetros geofísicos y las escalas espaciales.

Otra propuesta como la de Pielke (Pielke, 1984) define los fenómenos de meso-escala con una longitud horizontal lo suficientemente larga para que estos fenómenos se puedan considerar hidrostáticos pero a su vez lo suficiente pequeña para que la fuerza de Coriolis sea relativamente pequeña comparada con las fuerzas de los gradientes de presión y advección. Para Pielke, las fronteras verticales de la meso-escala dependen de la estabilidad de la PBL en su borde inferior que puede ir desde unas decenas de metros hasta un límite superior que depende de la latitud que puede extenderse hasta las profundidades de la troposfera.

En el libro de Stull (Stull, 1988), el límite horizontal inferior de la meso-escala es situado en 3 km. Reproduce en parte las subdivisiones de Orlansky agregando la capa micro- $\gamma$  que va de los 2 milímetros hasta los 2 metros. Además, hay un traslape de la meso-escala con la micro-escala que se extiende hacia abajo desde la mitad de la meso- $\gamma$  hasta el límite inferior de la micro- $\alpha$ .

Por su parte, la propuesta Thunis y Bornstein (Thunis y Bornstein, 1996) actualiza las subdivisiones de Orlansky y establece la frontera superior igual que Pielke en las cuales la dinámica atmosférica tienen una extensión horizontal lo suficientemente pequeña para que la fuerza de Coriolis no sea dependiente de la latitud y la parte inferior de la frontera incluye todos los fenómenos en los cuales los efectos de la fuerza de Coriolis es lo suficientemente fuerte como para determinar una dirección rotacional. Notemos que estos límites de frontera son dependientes de la estabilidad. Si la estabilidad aumenta, el movimiento se vuelve más horizontal y por tanto con mayor influencia de la fuerza de Coriolis.

$L_H$	Lifetime	Stull (1988)	Pielke (1984)	Orlanski (1975)	Present	Atmospheric phenomena
10 000 km	1 month	Macro	Synoptic Regional	Macro- $\alpha$	Macro- $\alpha$	General circulation, long waves
2000 km	1 week			Macro- $\beta$	Macro- $\beta$	Synoptic cyclones
200 km	1 day			Meso- $\alpha$	Macro- $\gamma$	Fronts, hurricanes
20 km	1 h	Meso	Meso	Meso- $\beta$	Meso- $\beta$	Low-level jets, thunderstorm groups, mountain winds and waves, sea breeze, urban circulations
2 km	30 min			Meso- $\gamma$	Meso- $\gamma$	Thunderstorm, clear-air turbulence
200 m	1 min			Micro- $\alpha$	Meso- $\delta$	Cumulus, tornadoes, katabatic jumps
20 m	1 s	Micro	Micro	Micro- $\beta$	Micro- $\beta$	Plumes, wakes, waterspouts, dust devils
2 m	1 s			Micro- $\gamma$	Micro- $\delta$	Turbulence, sound waves

**Figura 1.9:** Propuestas para la estandarización de las escalas atmosféricas, espaciales y temporales, por Orlansky(1975), Pielke(1984), Stull(1988) y Bornstein&Thunis(1995) donde  $L_H$  es la escala de longitud horizontal. Notamos 7 escalas temporales, 8 escalas espaciales de longitud horizontal y los distintos fenómenos atmosféricos según la escala correspondiente y su clasificación. Fuente (Thunis y Bornstein, 1996).

## 1.6. La interpolación y asimilación de datos atmosféricos

El problema de generar campos continuos a partir de un conjunto de datos discretos es un problema común para muchas disciplinas. En meteorología, por ejemplo, los campos de viento se generan por lo regular usando un procedimiento de dos pasos. El primer paso nos da la primera aproximación del campo de viento en donde datos discretos obtenidos a partir de estaciones de medición se convierten en una malla fina usando distintas técnicas de interpolación de datos (Goodin, McRa y Seinfeld, 1979).

Un campo de viento interpolado se construye en una región acotada del espacio  $\Omega$  donde asumimos que conocemos el vector de viento (intensidad y dirección) en  $N$  puntos del dominio  $\Omega : \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N$ . El objetivo es generar un campo de velocidad de viento en el dominio entero respecto los valores conocidos en los  $N$  puntos considerados. Por tanto podemos decir que en este paso de inicialización transformamos, a través de la interpolación/extrapolación, los  $N$  vectores de viento en un campo de viento en todo el dominio  $\Omega$  de acuerdo con el siguiente esquema

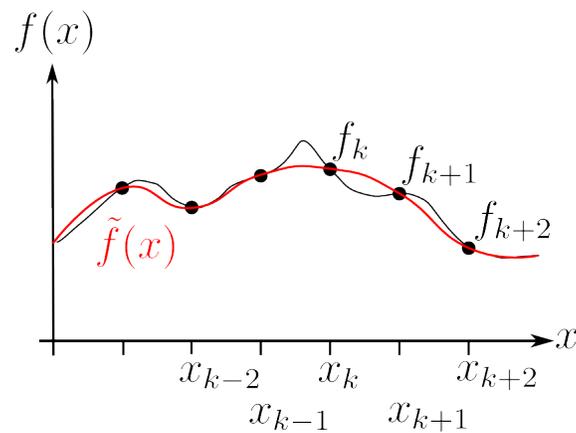
$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) \rightarrow \mathbf{v}^0(x, y, z).$$

El campo  $\mathbf{v}^0$  se llama campo inicial o primera aproximación del campo de viento y por lo regular no satisface la conservación de masa.

Posteriormente se emplea un análisis objetivo o asimilación de estos datos, como el método variacional propuesto por (Sasaki, 1958) y estudiado en este trabajo, para ajustar los vectores de viento en cada punto de la malla de manera que satisfagan las constricciones físicas como la conservación de masa y la tangencialidad al terreno de acuerdo con el siguiente esquema

$$\mathbf{v}^0(x, y, z) \rightarrow \mathbf{v}(x, y, z).$$

Es importante señalar que el producto final de campo de velocidad depende de las transformaciones de ambos pasos considerados (Ratto y col., 1994). El análisis objetivo es similar en casi todos los modelos aunque pueden diferir en sus soluciones numéricas. Por su lado, el proceso de interpolación puede ser muy diferente entre un modelo y otro. En general no existe solución única para para el problema de interpolación de datos. Depende de la técnica utilizada se generará un campo de viento distinto por lo que es importante identificar y probar métodos computacionalmente eficientes para interpolar las mediciones de datos dispersos en un malla regular.



**Figura 1.10:** Ejemplo de interpolación de datos con la generación de una curva  $\tilde{f}(x)$ .

### 1.7. Estimación de velocidad: formulación variacional e importancia de condiciones a la frontera

Como se ha mencionado, los campos de velocidad de viento obtenidos por interpolación de datos no satisfacen en general la condición de conservación de masa ni la restricción de tangencialidad al terreno por lo que no son campos de velocidad físicamente consistentes. Por esta razón es necesario aplicar algún método de asimilación de datos, o análisis objetivo, que nos permita obtener campos consistentes con las restricciones físicas. En este trabajo se desarrolla un esquema variacional que nos permite encontrar los campos de velocidad más cercanos a los interpolados que si satisfacen las condiciones físicas impuestas. Se estudian diferentes condiciones de frontera y se comprueban algunos de los resultados obtenidos en (MA Núñez y Sánchez, 2012; MA Núñez, 2012).

Los *modelos variacionales consistentes con el balance de masa* (VMCM) pueden considerarse intermedios entre los modelos elaborados a partir de las ecuaciones primitivas y los modelos con datos interpolados. La simplicidad de estos modelos ha motivado su uso en distintas aplicaciones (Ratto y col., 1994). Son relevantes en prácticamente cualquier modelo en donde se consideren campos de velocidad de algún fluido como el análisis climático (Eichelberger y col., 2008), la dispersión de contaminantes (Sanín y Gustavo Montero, 2007), modelos de calidad del aire (Monks y col., 2009), estudios de potencial eólico (Chi y col., 2020), la predicción del clima (Bauer, Thorpe y Brunet, 2015) o incluso en la ciencias biomédicas (Falahatpisheh, Pedrizzetti y Kheradvar, 2014), entre otras. Por tanto, tener un campo de viento físicamente consistente es clave para llevar a cabo cualquier tipo de análisis atmosférico por lo que es indispensable que satisfaga el principio de conservación de masa (Trenberth, 1991; Trenberth, Hurrell y Solomon, 1995; Trenberth y Smith, 2005).

El problema variacional consiste en encontrar el campo de velocidad más cercano al campo interpolado que satisfaga las restricciones físicas fundamentales. Dicho de otra manera, el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  es aquel que minimiza la norma entre el campo vectorial interpolado  $\mathbf{v}^0$  y el conjunto de campos que

satisfacen las restricciones físicas  $\mathbf{w}$ , lo cual determina un funcional definido como

$$J(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^0\|_{S\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^T \mathbb{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) d\Omega, \quad (1.7.1)$$

La minimización del funcional sujeto a las restricciones físicas nos conduce a un campo de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda, \quad (1.7.2)$$

donde  $\lambda$  es la solución del problema elíptico

$$-\nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda = \nabla \cdot \mathbf{v}^0. \quad (1.7.3)$$

Para encontrar una solución única a este problema se usan por lo general dos tipos de condiciones en la frontera; las condiciones de frontera Dirichlet<sup>8</sup>,  $\lambda = 0$  para las fronteras *abiertas* (en donde no se impone alguna restricción) y las condiciones de frontera tipo Neumann<sup>9</sup>,  $\partial\lambda/\partial n = 0$  para las fronteras en donde se usa la restricción de tangencialidad al terreno (Ratto y col., 1994; Sanín y Gustavo Montero, 2007).

La mejor condición de frontera (BC) para calcular el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  de acuerdo con la formulación variacional en modelos consistentes con el balance de masa (VMCM) está dado por el campo verdadero  $\mathbf{v}_T$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}, \quad (1.7.4)$$

lo que significa que el campo ajustado tiene que ser tangente al campo de viento real o verdadero. El problema radica en que  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  es desconocido sobre las fronteras abiertas. Sólo es posible asegurar que la condición de frontera (1.7.4) es conocida para la superficie terrestre en donde  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} = 0$ , por lo que debemos reemplazar la parte conocida de la frontera de  $\Gamma$  por  $\Gamma_N$ ,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma_N. \quad (1.7.5)$$

De esta forma  $\lambda$  y  $\mathbf{v}$  en la ecuación (1.7.2) deberán satisfacer DBC en la frontera complementaria  $\Gamma_D \equiv \Gamma/\Gamma_N$ . Sin embargo, el uso de DBC genera discontinuidades en el cálculo de  $\lambda$  y, por tanto, de  $\mathbf{v}$  cuando algún elemento de la matriz constante y diagonal  $\mathbb{S}$  toma valores grandes o pequeños (MA Núñez y Sánchez, 2012).

Se estudia entonces, en la sub-sección 8.6, la propuesta de aproximación del campo de velocidad ajustado  $\mathbf{v}$  dada en (MA Núñez, 2012) que minimiza el funcional definido por la ecuación (1.7.1) sujeto a la restricción de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y la condición de frontera

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{n}, \quad (1.7.6)$$

---

<sup>8</sup>Dirichlet Boundary Conditions (DBC)

<sup>9</sup>Neumann Boundary Conditions(NBC)

sobre toda la frontera  $\Gamma$  y donde  $\mathbf{U}^0$  es el modelo más simple de un campo de velocidad que conserva masa obtenido al considerar la conservación de masa e integrar la divergencia del campo interpolado  $\mathbf{v}^0$ . En la sección 7.1 se estudia porque este campo no es válido como campo principal en toda la región  $\Omega$ , sin embargo resulta ser buen candidato para aproximar el campo verdadero  $\mathbf{v}_T$  en las fronteras abiertas. Al igual que en el caso anterior, el campo está dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda, \quad (1.7.7)$$

donde  $\lambda$  es la solución de la ecuación elíptica que en su forma matricial está dada por

$$\nabla^T \mathbf{v}^0 = - \left( \nabla^T \mathbb{S}^{-1} \nabla \right) \lambda, \quad (1.7.8)$$

sujeta a condiciones **puramente Neumann** de la forma

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda = \mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{U}^0 - \mathbf{v}^0 \right). \quad (1.7.9)$$

sobre toda la frontera  $\Gamma$ . La estimación de  $\mathbf{U}^0$  es simple, sin embargo, en la literatura se suele evitar el uso del campo  $\mathbf{U}^0$  como campo principal porque se considera que tiene mayor susceptibilidad a errores que el campo  $\mathbf{v}$  (1.7.7); además de que con una matriz  $\mathbb{S}$  adecuada, el campo  $\mathbf{v}$  puede representar propiedades físicas reales. En la sección 7.1.2 se analizan las verdaderas razones de por qué no debe usarse el campo  $\mathbf{U}^0$ . Por otro lado, si  $\mathbf{v}^0$  es el campo horizontal verdadero, entonces  $\mathbf{U}^0$  podría ser el campo total verdadero. De esta forma un campo  $\mathbf{v}$  (8.2.23) consistente con el balance de masa es físicamente consistente cuando  $\mathbf{U}^0$  se puede obtener a partir de  $\mathbf{v}$ . En las sub-secciones 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6 analizamos los resultados de (MA Núñez, 2012) donde se muestra para varias condiciones en la frontera como el campo ajustado  $\mathbf{v}$  (8.2.23) satisface la relación

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} \mathbf{v} = \mathbf{U}^0 \quad (1.7.10)$$

incluso con una matriz  $\mathbb{S} = \{S_{ij}\}$  más general que la considerada para usos meteorológicos, de la forma

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S_1(x, y) & S_{12}(x, y) & 0 \\ S_{12}(x, y) & S_2(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \text{constante} \quad (1.7.11)$$

En la sección 8.8 comprobamos como el uso de condiciones de frontera Dirichlet en el problema (1.7.3) en cualquiera de las fronteras abiertas provoca que la ecuación (1.7.2) satisfaga pobremente la restricción de conservación de masa en la región cerrada  $\Omega$  estimando los flujos y porcentajes de masa que fluyen en distintas sub-regiones de  $\Omega$  con un ejemplo en tres dimensiones usando una fuente de datos sintéticos. Realizamos una comparación con distintas condiciones de frontera y comparamos que tan bien satisfacen la conservación de masa los diferentes flujos. En general encontramos que las condiciones (1.7.9) propuestas en (MA Núñez, 2012) son muy superiores en cuanto a la conservación de masa que es el objetivo principal en esta clase de modelos.

# **Parte I**

## **Principios físicos y matemáticos de la dinámica atmosférica**

Los modelos dinámicos que simulan los flujos de viento<sup>10</sup> se basan en la solución de ecuaciones hidrodinámicas y termodinámicas dependientes del tiempo (llamadas ecuaciones primitivas, ya que se derivan directamente de los principios de conservación originales), modificados apropiadamente para aplicarlos en la atmósfera. Estos modelos también se denominan dinámicos para indicar la inclusión explícita de la evolución temporal de los fenómenos modelados. Los modelos de esta naturaleza generalmente incluyen el efectos de advección, estratificación, fuerza de Coriolis, radiación y flujos turbulentos de cantidad de movimiento, calor y humedad. Sin embargo, la solución del conjunto completo de ecuaciones sigue siendo una tarea laboriosa y costosa. Además, debido a su complejidad y costo, estos modelos generalmente se ejecutan durante unos pocos casos únicamente, normalmente correspondientes a los eventos meteorológicos más significativos que afectan el área (Ratto y col., 1994).

En esta parte de trabajo se empieza por introducir algunos de los conceptos fundamentales necesarios para modelar matemáticamente la dinámica atmosférica. Posteriormente se introducen los principios mecánicos de los fluidos en un sistema de referencia inercial. Deducimos a partir de primeros principios, las ecuaciones de conservación, movimiento y energía. Adicionalmente se establece una relación entre dos principios independientes de la ecuación de energía; el principio mecánico y el termodinámico. Una vez planteados estos principios, se generalizan las nociones de sistema de referencia inercial a un sistema de referencia fijo a la tierra en donde se replantean las ecuaciones de conservación y movimiento. Finalmente realizamos una revisión de la región de validez de la ecuación de movimiento para un modelo de tierra esférico.

---

<sup>10</sup>También llamados de pronóstico, predictivos o de ecuaciones primitivas

## Capítulo 2

### SISTEMAS DE REFERENCIA Y TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Como ya se ha mencionado los modelos describen las relaciones entre sus variables y los cambios de éstas de acuerdo a ciertos parámetros. Los cambios representan la variabilidad de un sistema y una diferencia entre un estado y otro. Esta diferencia debida a un cambio sólo tiene sentido cuando existe una referencia ¿Respecto a qué se produce el cambio?

Por tanto, para poder describir el movimiento de cualquier objeto en el espacio es necesario tener un sistema de referencia respecto al cual dicho objeto se mueve. Esto permite describir la trayectoria del objeto a través de ciertas expresiones matemáticas. Sin embargo, esta descripción no es única. Es posible describirlo usando diferentes *sistemas de coordenadas*.

#### 2.1. Sistemas de coordenadas y bases vectoriales

Al tener un sistema de referencia con un sistema de coordenadas, se define una base vectorial específica. Una base vectorial se puede considerar como un conjunto de vectores linealmente independientes a partir de los cuales podemos definir otro vector con propiedades de magnitud, dirección y sentido. A esta base vectorial se le conoce comúnmente como *vectores unitarios*. Dicho de otra forma, son los vectores que definen la unidad en ese sistema de referencia. Por tanto, un cambio en la escala u orientación de los vectores unitarios implica un cambio en las unidades del problema y las componentes de un vector respecto su base vectorial.

Para distinguir la posición de cada punto en el espacio de manera única, los etiquetamos con una coordenada específica y lo señalamos con un *vector*,  $\mathbf{r}$ , que va del origen del sistema de referencia hasta el punto en cuestión. Es particularmente útil el sistema de coordenadas cartesiano  $X^1X^2X^3$  como un sistema de partida que establece de manera directa la noción tridimensional del espacio; arriba-abajo, izquierda-derecha, adelante-atrás.

Sea  $\{\hat{\mathbf{x}}_i\}$  la base de un sistema de coordenadas cartesiano. Dado que esta base es *linealmente independiente*, de acuerdo a las reglas del álgebra lineal y el análisis vectorial, se dice que es una base ortogonal. Es decir, cada componente de la base genera, *per se*, una dimensión espacial o grado de libertad de movimiento<sup>1</sup>. Si además agregamos que es un sistema de coordenadas ortogonal derecho, satisface las siguiente relaciones

---

<sup>1</sup>Una componente de la base linealmente dependiente implica que puede representarse como combinación lineal de las demás componentes o que es proporcional a ellas.

en sus productos vectorial y escalar respectivamente

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j &= \hat{\mathbf{x}}_k ; \hat{\mathbf{x}}_j \times \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_i ; \hat{\mathbf{x}}_k \times \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_j \\ \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j &= \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = 0.\end{aligned}$$

Si tomamos  $a_i \hat{\mathbf{x}}_i \times b_j \hat{\mathbf{x}}_j = c_k \hat{\mathbf{x}}_k$  y multiplicamos por  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , obtenemos

$$a_i b_j (\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k = c_k \quad (2.1.1)$$

y aparece  $(\hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k \equiv \epsilon_{ijk}$ . De esta forma, es también posible escribir,

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k,$$

donde se usará a partir de aquí y el resto del trabajo la **convención de suma para índices repetidos**. El *símbolo de Levi Civita*,  $\epsilon_{ijk}$ , se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es permutación par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es permutación impar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{otro caso. } i = j; j = k; k = i. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

En general, la base vectorial no tiene que ser ortogonal. Para poder realizar transformaciones entre bases y saber como transforman los componentes vectoriales respecto estos cambios será necesario definir una regla de transformación que dependa de como esté definida la base. Este concepto es innecesario para transformaciones ortogonales debido a que las bases vectoriales ortogonales sólo pueden definirse de una sola manera.

## 2.2. Coordenadas eulerianas y lagrangianas

Es posible describir un fluido matemáticamente como un conjunto de puntos con ciertas propiedades<sup>2</sup> que se mueven en el espacio. Para poder distinguir los puntos matemáticos del espacio (coordenadas) de los puntos matemáticos asociados a objetos en el espacio llamaremos a estos últimos **partículas** y los demás harán referencia a posiciones.

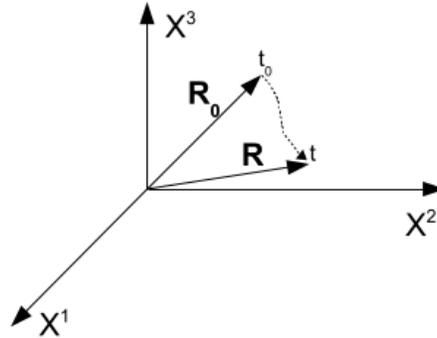
Consideremos una descripción relativa a un sistema de referencia inercial cartesiano  $x^1 x^2 x^3$  con vectores unitarios  $\hat{\mathbf{x}}_i$ . Si  $x^i$  son las coordenadas de una partícula de fluido en un instante  $t$ , su vector de posición está dado por

$$\mathbf{R}(t) = x^i \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (2.2.1)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}_i$  es la base canónica del sistema cartesiano  $X^1 X^2 X^3$ . Las coordenadas instantáneas  $x^i$  reciben el nombre de **coordenadas eulerianas**. Se usará de ahora en adelante la notación  $x \equiv (x^1, x^2, x^3)$  para

<sup>2</sup>Propiedades físicas como presión, velocidad, aceleración, densidad o temperatura.

referirse a este tipo de coordenadas. Por el contrario, las coordenadas que caracterizan una partícula en un *instante inicial*  $t_0$  se conocen como **coordenadas lagrangianas** y nos referiremos a ellas como  $x_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ .



**Figura 2.1:** Sistema de referencia inercial con vector de posición en coordenadas lagrangianas y eulerinas. Fuente (Nuñez, 2008).

Es posible establecer una relación entre estos sistemas de coordenadas si consideremos que en un tiempo determinado la posición de una partícula, visto desde ambos sistemas coincide, de manera que:

$$x = x(t, x_0) = T[x_0], \quad (2.2.2)$$

Es claro que partículas diferentes ocupan lugares diferentes en cualquier instante  $t$  por lo que la ecuación (2.2.2) forma una relación biyectiva, i.e., define una relación uno a uno entre las coordenadas eulerinas  $x$  y las coordenadas lagrangianas  $x_0$  de una misma partícula. Esto implica que la relación inversa existe, es decir,

$$x_0 = x_0(t, x) = T^{-1}[x] \quad (2.2.3)$$

donde  $T^{-1}$  denota la transformación inversa de  $T$ . Estas relaciones no son lineales en general por lo cual  $T$  no debe ser considerado como matriz. Veamos como formalizar matemáticamente la transformación entre ambos sistemas de coordenadas.

Considerando que los vectores base de un sistema de referencia inercial  $\hat{x}_i$  no rotan ni cambian su magnitud con el tiempo, el vector velocidad de una partícula de fluido se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \hat{x}_i = V_L^i \hat{x}_i \quad (2.2.4)$$

donde

$$V_L^i \equiv V_L^i(t_0, X_0) = \frac{dX^i(t_0, X_0)}{dt}. \quad (2.2.5)$$

Dado que las componentes de velocidad  $V_L^i$  sólo dependen de las coordenadas lagrangianas, nos referimos a la ecuación (2.2.4) como *la forma lagrangiana* de  $\mathbf{V}$ . Si usamos la ecuación (2.2.3) y sustituimos las coordenadas eulerianas obtenemos las componentes de  $\mathbf{V}$  en términos de éstas

$$V_E^i(t, x) \equiv V_L^i(t, x_0(t, x)). \quad (2.2.6)$$

con lo cual obtenemos *la forma euleriana* de la velocidad,

$$\mathbf{V} = V_E^i \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (2.2.7)$$

Al derivar la velocidad en su forma lagrangiana (2.2.4) obtenemos la aceleración en su forma lagrangiana,

$$\mathbf{A}(t, X) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV_L^i}{dt} \hat{\mathbf{x}}_i = A_L^i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (2.2.8)$$

donde sus componentes están dadas por

$$A_L^i = A_L^i(t, x_0) \equiv \frac{dV_L^i}{dt}. \quad (2.2.9)$$

Para calcular la forma euleriana de la aceleración podemos sustituir las coordenadas lagrangianas por las eulerianas de acuerdo con (2.2.3),

$$A^i(t, x) \equiv A_L^i(t, x_0(t, x)). \quad (2.2.10)$$

Otra forma de obtener la aceleración euleriana es derivando respecto del tiempo la velocidad euleriana (2.2.7),

$$\mathbf{A} = \frac{dV^i}{dt} \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (2.2.11)$$

Sin embargo, notemos que las coordenadas eulerianas dependen explícitamente e implícitamente de  $t$  a través de las coordenadas eulerianas  $x^i(t, x_0)$  por lo que es necesario usar la *regla de la cadena* para calcular la derivada total,

$$A^i = \frac{dV^i}{dt}(t, x) = \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{x=cte} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial V^i}{\partial x^i} \quad (2.2.12)$$

la forma euleriana de  $\mathbf{A}$  está dada por las componentes eulerianas de la velocidad  $V^i$ . De esta forma llegamos a

$$A^i = \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{x=cte} + V^i \frac{\partial V^i}{\partial x^i} \quad (2.2.13)$$

que puede simplificarse si introducimos el **operador gradiente**

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y así las componentes eulerianas de la aceleración quedan en la forma siguiente

$$A^i = \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} \right)_{x=cte} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V^i. \quad (2.2.14)$$

### 2.3. Transformación entre sistemas de coordenadas

De acuerdo con las relaciones (2.2.2) y (2.2.3), existe una relación uno a uno entre las coordenadas eulerianas y lagrangianas, i.e., para cada coordenada  $x^k$  existe una coordenada  $x_0^j$  de manera que

$$x^m = x^m(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3) = x^m(t, x_0^n). \quad (2.3.1)$$

La relación entre diferenciales es

$$dx^m = \left( \frac{\partial x^m}{\partial x_0^n} \right)_t dx_0^n \quad (2.3.2)$$

en donde aparece la *matriz Jacobiana*,  $\mathbb{J}$ ,

$$\mathbb{J} = \left\{ J_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial x_0^n} \right\}. \quad (2.3.3)$$

El determinante de la matriz (2.3.3), se conoce como el jacobiano  $J$  que se define como

$$J = \det[\mathbb{J}] = \det \left[ \frac{\partial x^m}{\partial x_0^n} \right] = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} \right]. \quad (2.3.4)$$

Podemos calcular la derivada total en el tiempo del determinante Jacobiano de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} + \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} + \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x_0^k} \right] \end{aligned}$$

Dado que  $\dot{x}^l = \dot{x}^l(x^1, x^2, x^3) = \dot{x}^l(x^m)$ , usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x_0^n} = \frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x_0^n},$$

lo que nos conduce a

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} + \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^3}{\partial x_0^k} + \frac{\partial x^1}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^2}{\partial x_0^j} \frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x_0^k} \right] \quad (2.3.5)$$

$$= \delta_{1m} J \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^m} + \delta_{2m} J \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x^m} + \delta_{3m} J \frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x^m} = J \frac{\partial \dot{x}^l}{\partial x^l} = J \partial_l \dot{x}^l. \quad (2.3.6)$$

Los cambios respecto el tiempo de las coordenadas  $x^i$  son la velocidad  $\{\dot{x}^l\} = \mathbf{v}$  y aparece el operador de *divergencia* dado por  $\partial_l \dot{x}^l \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}$ . De esta manera, podemos escribir lo anterior de la siguiente forma

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.3.7)$$

Esta demostración es en esencia el **teorema de transporte Reynolds** que suele representarse como

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_V \left( \frac{d\phi}{dt} + \phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV. \quad (2.3.8)$$

## 2.4. Bases covariante y contravariante asociadas a los mapeos lagrangiano y euleriano

Consideremos el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = v(x, t) \quad \text{con } x = x_0 \text{ en } t = 0. \quad (2.4.1)$$

Una solución única para cada  $x_0$  garantiza que el mapeo Lagrangiano - Euleriano (L-E),

$$x^i = x^i(t, x_0^i) \quad \text{ó} \quad x = x(t, x_0) \quad (2.4.2)$$

es una relación uno a uno del tipo (2.2.2). La condición matemática que garantiza una relación uno a uno, en la posición inicial  $x_0$  de una partícula y su posición instantánea  $x(t)$ , es que el Jacobiano (2.3.4) de la transformación sea diferente de cero en cada punto de la región física de interés. En lo que sigue consideraremos que tal condición se satisface <sup>3</sup>,

$$J = \det(\mathbb{J}) \neq 0. \quad (2.4.3)$$

Como ya vimos, la relación entre diferenciales (2.3.2) está dada por la matriz jacobiana (2.3.3) del mapeo L-E,

$$\mathbb{J} = \left\{ J_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \right\}.$$

La base **covariante** asociada al mapeo L-E se define entonces como

$$\tau_j \equiv \frac{\partial \mathbf{r}(t, x_0)}{\partial x_0^j} = \frac{\partial}{\partial x_0^j} [\mathbf{r}(t, x_0) = x^i \hat{\mathbf{x}}_i] = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \hat{\mathbf{x}}_i = J_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (2.4.4)$$

Usando vectores columna,

$$[\tau] \equiv [\tau_j] = \mathbb{J}^T [\hat{\mathbf{x}}_i] \quad \text{ó} \quad \tau = \mathbb{J}^T \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.4.5)$$

La base covariante  $\tau_j$  satisface la relación

$$\tau_i \cdot (\tau_j \times \tau_k) = J_{ij} \epsilon_{ijk}. \quad (2.4.6)$$

De acuerdo con la relación (2.2.2) en  $t = 0$  tenemos  $dx = dx_0$  y por tanto,  $\mathbb{J} = \mathbb{I} = \{\delta_{ij}\}$ .

Con  $J \neq 0$  podemos definir también la relación inversa entre diferenciales como la inversa de la matriz Jacobiana

$$\mathbb{J}^{-1} = \left\{ J_{ji} = \frac{\partial x_0^j}{\partial x^i} \right\}. \quad (2.4.7)$$

Consideremos que tenemos ahora las ecuaciones de transformación siguientes,

$$x_0^j = x_0^j(t, x^i) \quad \text{ó} \quad x_0 = x_0(t, x), \quad (2.4.8)$$

---

<sup>3</sup>El Jacobiano representa el cambio de un tipo de coordenadas  $A$  respecto de otras  $B$ , si es distinto de cero entonces existe su inverso. El jacobiano inverso es el cambio de coordenadas contrario de tipo  $B$  hacia  $A$ . Por lo tanto, si tenemos una relación inyectiva (uno a uno) entre ambos sistemas de coordenadas se garantiza la existencia de un jacobiano inverso; i.e. si  $A = JB$  entonces  $B = J^{-1}A$  si y sólo si  $J \neq 0$ .

o mapeo Euleriano - Lagrangiano (E-L). La relación entre diferenciales a un tiempo fijo está dada por

$$dx_0^j = \frac{\partial x_0^j}{\partial x^i} dx^i \quad \text{ó} \quad dx_0 = \tilde{\mathbb{J}} dx \quad (2.4.9)$$

y notamos que la matriz asociada a esta transformación es la matriz inversa, (2.4.7), por tanto,

$$\tilde{\mathbb{J}} = \mathbb{J}^{-1} \quad \text{ó} \quad \tilde{\mathbb{J}}\mathbb{J}^{-1} = \mathbb{I}. \quad (2.4.10)$$

Consideremos entonces una propiedad física en sus formas Euleriana y Lagrangiana

$$Q_L(t, x_0) = Q_E(t, x). \quad (2.4.11)$$

En la posición  $x_0$ , la derivada direccional a un tiempo fijo es

$$\frac{dQ_L}{ds} = \hat{s} \cdot \nabla Q_L = \hat{s}_j \frac{\partial Q_L}{\partial x_0^j}. \quad (2.4.12)$$

Con lo cual queda definido el *gradiente lagrangiano*, cómo

$$\nabla_L \equiv \hat{x}^j \frac{\partial}{\partial x_0^j}. \quad (2.4.13)$$

Por otro lado en el espacio de  $x(t)$  la derivada direccional en un instante,  $t$ ,

$$\frac{dQ_E}{ds} = \hat{s} \cdot \nabla Q_E = \hat{s}_i \frac{\partial Q_E}{\partial x^i}. \quad (2.4.14)$$

De esta forma queda definido el *gradiente euleriano* como

$$\nabla_E = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.4.15)$$

Usando la regla de la cadena determinamos la relación entre ambos gradientes

$$\nabla_L Q_L = \hat{x}^j \frac{\partial Q_L}{\partial x_0^j} = \hat{x}^j \frac{\partial}{\partial x_0^j} Q_E = \hat{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \frac{\partial Q_E}{\partial x^i}, \quad (2.4.16)$$

donde identificamos a la matriz Jacobiana (2.3.3). Por lo tanto,

$$\frac{\partial Q_L}{\partial x_0^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \frac{\partial Q_E}{\partial x^i} \quad \text{ó} \quad \nabla_L = \mathbb{J}^t \nabla_E. \quad (2.4.17)$$

Análogamente, la transformación inversa

$$\frac{\partial Q_E}{\partial x^i} = \frac{\partial x_0^j}{\partial x^i} \frac{\partial Q_L}{\partial x_0^j} \quad \text{ó} \quad \nabla_E = \left(\mathbb{J}^t\right)^{-1} \nabla_L. \quad (2.4.18)$$

El gradiente euleriano (2.4.15) del mapeo E-L (2.4.8), da lugar a lo que llamaremos la **base contravariante**

$$\eta^j \equiv \nabla_E x_0^j = \frac{\partial x_0^j}{\partial x^i} \hat{x}^i. \quad (2.4.19)$$

En términos de vectores columna tenemos,

$$\eta = [\eta^j] \equiv \mathbb{J}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{ó} \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbb{J} \eta. \quad (2.4.20)$$

La base contravariante, de manera análoga con (2.4.6), satisface,

$$\eta^i \cdot (\eta^j \times \eta^k) = J^{-1} \epsilon_{ijk}. \quad (2.4.21)$$

Las bases  $\tau_i$  y  $\eta^j$  de (2.4.5) y (2.4.20), satisfacen la relación de reciprocidad

$$\tau_i \cdot \eta^j = \delta_i^j, \quad (2.4.22)$$

la cual se demuestra usando directamente la regla de la cadena. Es posible obtener una relación entre las bases covariante contravariante si consideramos (2.4.5) y luego sustituimos (2.4.20),

$$\tau = \mathbb{J}^T \hat{\mathbf{x}} \quad \therefore \quad \tau = \mathbb{J}^T \mathbb{J} \eta, \quad (2.4.23)$$

donde aparece el llamado *tensor métrico* asociado al mapeo L-E

$$\mathbb{G} \equiv \mathbb{J}^T \mathbb{J} \quad (2.4.24)$$

ó

$$\mathbb{G} \equiv \left\{ g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j} = \tau_i \cdot \tau_j \right\}. \quad (2.4.25)$$

El tensor métrico inverso es la matriz inversa,

$$\mathbb{G}^{-1} \equiv \left\{ g^{ij} = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j} = \eta^i \cdot \eta^j \right\}. \quad (2.4.26)$$

En términos de vectores columna e índices tenemos,

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbb{G} \eta \quad \text{ó} \quad \tau_i = g_{ij} \eta^j \\ \eta &= \mathbb{G}^{-1} \tau \quad \text{ó} \quad \eta^j = g^{ji} \tau_i \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Una relación útil entre las bases covariante-contravariante es la siguiente

$$\tau_i \times \tau_j = J \epsilon_{ijl} \eta^l \quad (2.4.28)$$

Análogamente,

$$\eta^i \times \eta^j = J^{-1} \epsilon^{ijl} \tau_l \quad (2.4.29)$$

donde

$$\epsilon_{ijl} = \epsilon^{ijl}. \quad (2.4.30)$$

### Derivada temporal de $\mathbb{J}$ , $\mathbb{G}$ y $\mathbb{J}^{-1}$

Consideremos la definición de la matriz Jacobiana (2.3.3) del mapeo Lagrangiano Euleriano

$$\mathbb{J} = \left\{ J_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \right\}$$

al derivar respecto el tiempo

$$\frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x_0^j} \right\}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{\partial u_L^i}{\partial x_0^j} \quad (2.4.31)$$

donde usamos que  $\dot{x}^i = u_L^i$ . La ecuación anterior es una expresión lagrangiana, podemos obtener la expresión euleriana derivando la identidad

$$u_L^i(t, x_0) = u_E^i(t, x)$$

y usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial u_L^i}{\partial x_0^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j} \frac{\partial u_E^i}{\partial x^k} = J_{kj} \frac{\partial u_E^i}{\partial x^k}.$$

Resumiendo

$$\frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{\partial u_E^i}{\partial x^k} J_{kj} \quad (2.4.32)$$

aparece los que podemos llamar el **gradiente Euleriano de la velocidad**

$$\left\{ \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right\} = \nabla \mathbf{u} \quad (2.4.33)$$

donde por simplicidad se omitió el subíndice,  $\nabla \mathbf{u} = \nabla_E \mathbf{u}_E$ . De esta forma es posible escribir la relación (2.4.32) en su forma matricial

$$\frac{d}{dt} \mathbb{J} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{J} \quad (2.4.34)$$

Una aplicación directa de esta relación es el cálculo de la derivada temporal del tensor métrico  $\mathbb{G}$  (2.4.24),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{G} &= \left( \frac{d\mathbb{J}}{dt} \right)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}^T \frac{d\mathbb{J}}{dt} \\ &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{J})^T \mathbb{J} + \mathbb{J}^T \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{J} \\ &= \mathbb{J}^T [\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}] \mathbb{J} \end{aligned}$$

y aparece lo que se llama matriz o **tensor de velocidad de deformación**,

$$\mathbb{S} \equiv \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}] \quad (2.4.35)$$

con lo cual llegamos a

$$\frac{d}{dt}\mathbb{G} = 2\mathbb{J}^T\mathbb{S}\mathbb{J}. \quad (2.4.36)$$

En efecto, derivando la relación (2.4.10) podemos llegar a la derivada temporal de la Jacobiana inversa,

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{J}\tilde{\mathbb{J}}) = \frac{d\mathbb{J}}{dt}\tilde{\mathbb{J}} + \mathbb{J}\frac{d\tilde{\mathbb{J}}}{dt} = 0.$$

Despejando

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbb{J}} = \frac{d}{dt}\mathbb{J}^{-1} = -\mathbb{J}^{-1}\nabla\mathbf{u}. \quad (2.4.37)$$

En términos de componentes

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial x_0^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}. \quad (2.4.38)$$

### Derivada temporal y espacial de la base covariante $\tau_j$ y la aplicación al cálculo de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{km}^m$

Dado que  $\tau_j$  es una base, sus derivadas eulerianas son combinaciones de la misma base. De acuerdo con (2.4.4) tenemos la definición

$$\tau_j = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j}\hat{\mathbf{x}}_i = J_{ij}\hat{\mathbf{x}}_i.$$

Derivando respecto del tiempo y recordando el resultado (2.4.32) nos queda

$$\dot{\tau}_j = \frac{d\tau_j}{dt} = \frac{dJ_{ij}}{dt}\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}J_{kj}\hat{\mathbf{x}}_i \quad (2.4.39)$$

donde estamos considerando un sistema inercial de manera que  $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$ . Es conveniente calcular  $\dot{\tau}_j$  en términos de la misma base usando

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial x_{0m}}{\partial x^i}\tau_m.$$

Por tanto,

$$\dot{\tau}_j = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}J_{kj}\frac{\partial x_{0m}}{\partial x^i}\tau_m, \quad (2.4.40)$$

o bien

$$\dot{\tau}_j = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x_0^j}\frac{\partial x_{0m}}{\partial x^i}\tau_m. \quad (2.4.41)$$

Por otro lado, los llamados **símbolos de Christoffel** son los coeficientes que nos dan la derivada espacial de la base covariante  $\tau_j$  como combinación lineal de la misma base,

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial x^k} = \Gamma_{kj}^l\tau_l. \quad (2.4.42)$$

Por lo tanto, si derivamos la relación entre el jacobiano y el triple producto escalar de la base covariante (2.4.6) y recordando la ciclicidad del triple producto escalar

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \times \tau_3 = \tau_2 \cdot \tau_3 \times \tau_1 = \tau_3 \cdot \tau_1 \times \tau_2$$

de la relación (2.4.28) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial x^k} &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x^k} \cdot \tau_2 \times \tau_3 + \tau_1 \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial x^k} \cdot \times \tau_3 + \tau_1 \cdot \tau_2 \times \frac{\partial \tau_3}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x^k} \cdot J\eta^1 + \frac{\partial \tau_2}{\partial x^k} \cdot J\eta^2 + \frac{\partial \tau_3}{\partial x^k} \cdot J\eta^3 \\ &= J \frac{\partial \tau_m}{\partial x^k} \cdot \eta^m\end{aligned}$$

e introduciendo (2.4.42) tenemos por tanto

$$\frac{\partial J}{\partial x^k} = J \Gamma_{km}^l \overbrace{\tau_l \cdot \eta^m}^{\delta_{lm}} = J \Gamma_{km}^m = J \Gamma_{km}^m \quad (2.4.43)$$

lo cual nos da la relación deseada

$$\Gamma_{km}^m = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial x^m} \quad (2.4.44)$$

Una expresión más conocida se obtiene si usamos

$$\begin{aligned}g = \det(\mathbb{G}) &= \det(\mathbb{J}^T \mathbb{J}) = J^2 \\ \therefore J &= \pm \sqrt{g}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Gamma_{km}^m &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^m} \text{Ln}(\sqrt{g}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \text{Ln}(g) \\ &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m}\end{aligned} \quad (2.4.45)$$

## 2.5. Sistemas de referencia inercial y no inercial

Antes de establecer cuales son las ecuaciones que determinan el transporte de propiedades físicas en el espacio comencemos por definir el marco de referencia a partir del cual sea posible establecer la validez de dichas ecuaciones. Los sistemas de referencia en general pueden estar sujetos a cualquier clase de movimiento o dinámica. Un **sistema de referencia inercial** está sujeto a las leyes de la dinámica inercial o Leyes de Newton. Por tanto, la variación de la cantidad de movimiento del sistema es igual a todas las fuerzas reales sobre el sistema. Así, de acuerdo a la segunda ley de Newton,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{reales} \quad (2.5.1)$$

Esto nos conduce a las siguientes propiedades que satisfacen los sistemas inerciales:

- (i) Dado un sistema de referencia inercial, cualquier otro sistema desplazado respecto al primero a una distancia fija también es inercial.
- (ii) La orientación de los ejes del sistema es arbitraria, de esta manera, un sistema de referencia inercial respecto a cualquier otro sistema de referencia con una orientación distinta del primero, sigue siendo inercial.
- (iii) Cualquier objeto que se desplace con velocidad lineal y constante respecto a un sistema inercial, también será inercial.
- (iv) De acuerdo con lo anterior si el sistema es inercial, cualquier otro sistema que tenga las características mencionadas tendrá una base invariante ante cambios en el tiempo

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}^i = \mathbf{0}.$$

Los **sistemas de referencia no inerciales** son una generalización de los anteriores en donde ya se consideran las llamadas *fuerzas ficticias o inerciales*. Las fuerzas ficticias<sup>4</sup> no son ejercidas por ningún cuerpo y en consecuencia la tercera ley de Newton no aplica en las fuerzas ficticias introducidas por un observador no inercial.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{reales} + \mathbf{F}_{ficticias}. \quad (2.5.2)$$

Esta generalización se puede sintetizar de la siguiente manera:

- (i) Dado un sistema de referencia inercial, cualquier otro que se mueva con aceleración lineal respecto al primero es no inercial.

---

<sup>4</sup>Algunas fuerzas ficticias, o de inercia, son la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga.

- (II) Dado un sistema de referencia inercial, cualquier otro cuyos ejes roten, con velocidad de rotación constante o variable, respecto a los del primero, es no inercial.
- (III) De acuerdo con el punto anterior, al considerar un sistema fijo a la tierra; teniendo esta velocidad de rotación constante, veremos que en este caso la base vectorial de este sistema satisface

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}^i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{x}}^i$$

## *Capítulo 3*

### ECUACIONES HIDRODINÁMICAS EN UN SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

En esta sección damos una revisión breve de las ecuaciones hidrodinámicas también conocidas como las ecuaciones de Euler que establecen las condiciones físicas y matemáticas suficientes y necesarias para poder plantear de manera *completa* el problema del transporte de propiedades físicas en un fluido no viscoso, en particular, la atmósfera<sup>1</sup>.

La ecuación de conservación de materia puede analizarse desde dos perspectivas distintas. Por un lado consideramos el transporte lagrangiano como el transporte un volumen material a partir de un instante inicial que contiene siempre las mismas partículas. Por el otro lado suponemos un volumen fijo en donde el cambio de una cantidad en el tiempo dentro del volumen determinado es igual al flujo que atraviesa la superficie que confina dicho volumen. Veremos como estas dos perspectivas resultan en la misma ecuación de continuidad.

Para obtener la ecuación de movimiento de un fluido a partir de la segunda ley de Newton, establecemos las fuerzas externas actuando sobre el sistema que conducen su movimiento en el espacio. Por un lado están las fuerzas que actúan sobre la superficie del volumen material y por otro lado, aquellas que se ejercen en todo el volumen. Estas fuerzas son iguales al cambio en el tiempo del momento lineal del mismo.

La ecuación de energía mecánica se obtiene a partir del producto escalar entre la segunda ley de Newton y el vector velocidad del fluido, i.e., la potencia, que se divide de igual forma en potencia volumétrica y superficial. Primero para una partícula libre, luego para un sistema de partículas y generalizamos para un medio continuo que se mueve como un volumen material. En este último caso, como parte de la potencia superficial, aparece el *tensor de esfuerzos*; resultado de considerar la tensión que existe normal a la superficie del volumen material al interactuar con el medio. Veremos como una parte del trabajo hecho por las fuerzas superficiales se va en trabajo que modifica la energía cinética mientras que la otra parte genera modificaciones en la estructura interna del medio material a través de sus propias deformaciones superficiales.

Por su parte, la energía termodinámica se obtiene a partir de principios heurísticos que se fundamentan en la experiencia. Se hace una revisión breve de los sistemas termodinámicos y sus características para introducir la ley cero de la termodinámica y la conocida ecuación de estado para un gas ideal en un

---

<sup>1</sup>La viscosidad en flujos de viento suele considerarse en problemas de micro-escala y a distancias muy pequeñas del terreno. En general, los flujos de viento pueden considerarse como no viscosos.

recipiente finito a partir de la cual se obtiene la ecuación de estado usada comúnmente en meteorología. Con la primera ley de la termodinámica se introduce la existencia de la función de energía interna que depende del calor intercambiado y del trabajo que la modifica.

De esta manera será posible apreciar la relación que existe entre el trabajo mecánico y el trabajo termodinámico y encontrar que la ecuación de energía es en realidad una síntesis de dos principios independientes; la primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton.

### 3.1. Los medios continuos como una teoría de campos

Se puede entender un medio continuo como aquella abstracción de los objetos físicos cuyos elementos que lo componen son indistinguibles entre si y pueden modelarse a través de funciones continuas<sup>2</sup>. Es necesario establecer una serie de suposiciones o hipótesis del continuo para tener un modelo matemático consistente con las leyes físicas.

**Primera hipótesis** - RELACIÓN UNO A UNO; NO SE ENTRECROZAN TRAYECTORIAS (MAPEO EULERIANO LAGRANGIANO). Como se muestra en la Fig. 3.1 en un medio continuo, cada punto o partícula que lo conforma, al sufrir alguna deformación o traslación como cuerpo rígido, tiene trayectorias únicas cuyos caminos no pueden entrecruzarse en ningún momento. De ser así, existiría la posibilidad en el modelo de que existieran, en el momento en que se diera una intersección de trayectorias, dos partículas distintas en una misma posición de manera simultánea. Los mapeos L-E y E-L dependen de esta hipótesis como se mostró en la relación establecida por la relación, (2.2.2). Esta relación uno a uno también garantiza que la matriz jacobiana sea invertible por lo que el determinante jacobiano de cualquier transformación del medio continuo en el espacio siempre es distinto de cero.

**Segunda hipótesis** - EXISTE EL LÍMITE PARA REDUCIR CADA PROPIEDAD EXTENSIVA A UN PUNTO. Es posible asignar una propiedad extensiva<sup>3</sup>,  $C(t, \mathbf{r})$ , a cada partícula del volumen material como la masa, la fuerza, el volumen, energía potencial, energía cinética, etc. Definamos además la concentración promedio,  $c(t, \mathbf{r})$ , de una propiedad  $C$  de dicho volumen en un punto  $\mathbf{r}$  como

$$c(t, \mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta V}, \quad (3.1.1)$$

donde el volumen  $\Delta V(t)$  se va reduciendo hasta llegar al punto material o partícula con posición  $\mathbf{r}$ . Con este límite podemos establecer la relación integral,

$$C(t, \mathbf{r}) = \int_{V(t)} c(t, \mathbf{r}) dV \quad (3.1.2)$$

<sup>2</sup>matemáticamente descritas como funciones continuamente diferenciables o de clase  $C^1$

<sup>3</sup>Cuyo valor es proporcional al tamaño del sistema.

### Ecuación de transporte; la conservación o balance de materia

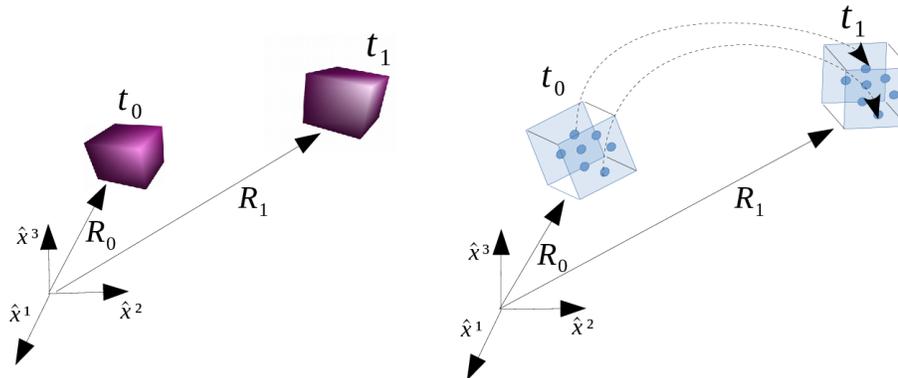
Consideremos un flujo continuo de partículas moviéndose en la atmósfera terrestre y supongamos que es una región cerrada. Esto implica que el número total de partículas en la atmósfera no cambia al no tener flujos de entrada ó salida. Para estudiar un medio continuo se considera un elemento de volumen  $dV$  que se puede identificar alrededor de un punto  $\mathbf{r}$ . De esta forma es posible medir un conjunto de variables que lo caractericen a un tiempo  $t$ . Sea la masa  $M$  una propiedad física extensiva, o campo escalar, que asignamos a las partículas en cada punto del volumen material. Por lo tanto, de acuerdo con la segunda hipótesis del continuo (3.1.1), la *concentración volumétrica* de partículas con dicha propiedad en el volumen material la definimos como la densidad  $\rho \equiv \rho(t, \mathbf{r})$ . En ausencia de fuentes o sumideros esta propiedad debe conservarse, por lo tanto

$$M \equiv \int \rho(\mathbf{r}, t) dV = cte. \quad (3.1.3)$$

Con el fin de obtener una ecuación de evolución para la densidad se pueden considerar dos caminos equivalentes, por lo que ambos caminos convergen en el mismo resultado. Desde un punto de vista obtenemos la conservación de la masa y bajo el otro esquema será el balance de materia. Veamos como sucede.

### 3.2. Transporte lagrangiano de una propiedad física o de un volumen material

Al considerar la descripción del transporte tipo lagrangiano establecemos un volumen denominado *volumen material* que contiene siempre las mismas partículas para cualquier intervalo de tiempo. A



**Figura 3.1:** Transporte de tipo lagrangiano, en un sistema de coordenadas cartesiano, en donde un *volumen material*, siempre constituido por las mismas partículas, se mueve de un punto  $\mathbf{R}_0$  a otro punto  $\mathbf{R}_1$ .

partir de esta noción debe ser posible llegar a una ecuación que nos permita determinar una relación de continuidad de las variables; que pueden ser propiedades físicas matemáticamente denominadas como

*campos*. Precisemos los conceptos matemáticos para llegar a ésta. Consideremos un volumen en un cierto instante de tiempo,  $V(t)$ , como la suma (o integral) de todas sus partes diferenciales

$$V(t) = \int_{V(t)} dV. \quad (3.2.1)$$

Notemos que el límite de integración depende del tiempo,  $t$ , dado que para cada  $t$  distinto puede, o no, tener el mismo valor, este volumen es de tipo *euleriano* debido a su cualidad instantánea.

Ahora considerar un volumen fijo, digamos en  $t = 0$ , tenemos entonces un volumen de la forma

$$V(t=0) = \int_{V_0} dV_0, \quad (3.2.2)$$

Por lo tanto el volumen ya no depende del parámetro temporal por lo que es el mismo volumen de  $t = 0$  para cualquier tiempo. De acuerdo con el teorema de cambio de variables es posible relacionar ambas integrales a través del determinante Jacobiano,

$$V(t) = \int_{V(t)} dV = \int_{V_0} J dV_0. \quad (3.2.3)$$

El cambio total del volumen  $V(t)$  respecto del tiempo se puede obtener al considerar la relación euleriana-lagrangiana de las integrales volumétricas junto con la relación (2.3.7) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} J dV_0 = \int_{V_0} \frac{dJ}{dt} dV_0 \\ &= \int_{V_0} J \nabla \cdot \mathbf{v} dV_0 = \int_{V_t} \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Consideremos ahora el cambio de la masa  $M$  respecto del tiempo en términos de su densidad asociada;  $\rho \equiv \rho(t, \mathbf{r}(t))$  en su forma *euleriana* y  $\rho_L \equiv \rho(t, \mathbf{r}_0)$  para referirnos a su forma lagrangiana. Para saber como cambia en el tiempo esta propiedad, consideremos la derivada total de la ecuación (3.1.3),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (3.2.5)$$

Para calcular el cambio total en el tiempo transformamos la integral a su forma lagrangiana como se hizo en la ec. (3.2.3)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_L J dV_0.$$

Esto hace posible permutar la derivada temporal con la integral de volumen material y de acuerdo con la relación (2.3.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \frac{d}{dt} (\rho_L J) dV_0 &= \int_{V_0} \left( \frac{d\rho_L}{dt} J + \rho_L \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left( \frac{d\rho_L}{dt} + \rho_L \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J dV_0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Ahora podemos regresar a la descripción euleriana de la integral,

$$\int_{V_0} \left( \frac{d\rho_L}{dt} + \rho_L \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J dV_0 = \int_{V(t)} \left( \frac{d\rho_L}{dt} + \rho_L \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV. \quad (3.2.7)$$

De acuerdo con la ecuación (3.1.3) la masa,  $M$ , permanece constante al moverse el volumen material que contiene siempre las mismas partículas. Por tanto, su cambio en el tiempo es nulo

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0. \quad (3.2.8)$$

Usamos el teorema del valor medio<sup>4</sup> para integrar este resultado,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = V(t) \langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_v,$$

y si hacemos que  $V(t)$  colapse en un punto material arbitrario,  $\mathbf{r}$ , obtenemos,

$$\lim_{V(t) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  mide el cambio relativo del volumen  $V(t)$  en cada punto del espacio. Por tanto, la descripción lagrangiana de la conservación de la masa queda de la forma

$$\frac{d\rho_L}{dt} + \rho_L \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.2.9)$$

Al considerar la densidad lagrangiana en su forma euleriana tenemos

$$\rho(t, \mathbf{r}_0) = \rho(t, \mathbf{r}(t)) \quad \text{ó} \quad \rho_L = \rho,$$

es posible desarrollar ahora la derivada temporal de la ec. (3.2.9) como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

Por lo tanto, se puede reescribir la ecuación (3.2.9) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

que es equivalente a escribir

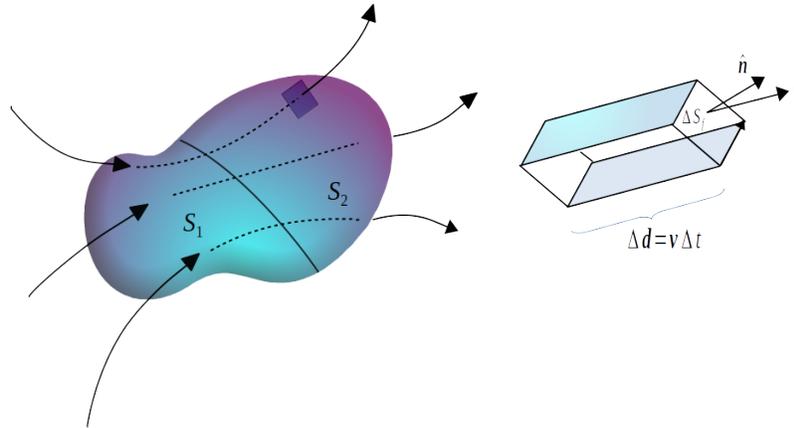
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.2.10)$$

Es decir, la ecuación de conservación lagrangiana en su forma euleriana nos da la ecuación de balance. Veamos como obtenerla directamente a través del camino euleriano considerando un volumen de control.

<sup>4</sup>El teorema del valor medio establece que si una función es continua en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y diferenciable en el intervalo abierto  $(a,b)$ , entonces existe un punto  $c$  contenido en el intervalo  $(a,b)$  tal que  $f'(c)$  es igual a la razón de cambio promedio de la función en  $[a,b]$ .

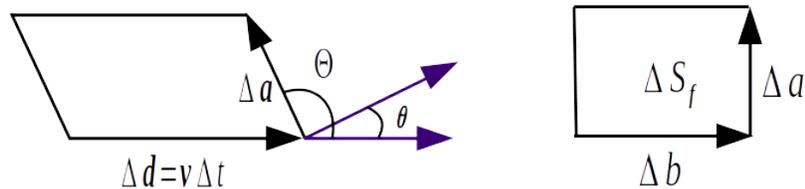
### 3.3. Transporte de una propiedad física a través de un volumen de control

Si tomamos el camino euleriano consideramos un volumen de control arbitrario donde se observa un flujo que entra y sale por las superficies  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente.



**Figura 3.2:** De lado izquierdo tenemos un esquema del transporte de tipo euleriano en donde se mantiene fijo un volumen de control arbitrario y calculamos el flujo que lo atraviesa. La masa entra por la superficie  $S_1$  y sale por la superficie  $S_2$ . De lado derecho tenemos una porción de este volumen arbitrario  $\Delta V$ .

Una forma para obtener una expresión de la porción de volumen fijo  $\Delta V_f$  es calculando el área del paralelogramo lateral y multiplicando por su anchura.



**Figura 3.3:** De lado izquierdo tenemos el paralelogramo lateral de la porción volumétrica considerada en la Fig. 3.2. De lado derecho tenemos la cara frontal de dicha porción volumétrica que corresponde a la superficie por la cual atraviesa una línea de corriente de flujo.

El área de la superficie frontal está dada por

$$\Delta S_f = \Delta a \Delta b,$$

mientras que el área del paralelogramo lateral, según la Fig. 3.3, se puede calcular con la norma del

producto vectorial

$$\begin{aligned}\|\Delta \mathbf{d} \times \Delta \mathbf{a}\| &= \|\Delta \mathbf{d}\| \cdot \|\Delta \mathbf{a}\| \operatorname{sen} \Theta \\ &= v \Delta t \cdot \Delta a \cos \theta \\ &= (v \cos \theta) \Delta t \cdot \Delta a,\end{aligned}$$

dado vector normal a la superficie es ortogonal a ésta por lo cual sabemos que la relación entre los ángulos es  $\Theta - \theta = 90^\circ$ . Además  $v \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , por lo tanto, nos queda

$$\|\Delta \mathbf{d} \times \Delta \mathbf{a}\| = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \cdot \Delta a$$

Finalmente, el volumen  $\Delta V_f$  toma la forma,

$$\begin{aligned}\Delta V_f &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \cdot \Delta a \Delta b \\ &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta S_f.\end{aligned}$$

De esta forma, es posible calcular el cambio de cierta porción de materia  $\Delta M$  a través de una porción de volumen arbitrario fijo  $V_f$  de la siguiente manera,

$$\Delta M = \rho \Delta V_f = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S_f.$$

Así, el cambio de la masa por unidad de tiempo es el flujo o transporte de masa del fluido que atraviesa la superficie  $S_f$  que delimita el *volumen de control*,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta M}{\Delta t} &= \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S_f, \\ \frac{dM}{dt} &= \oint_{S_f} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_f.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Podemos referirnos al vector  $\rho \mathbf{v}$  como el *vector de densidad superficial de flujo* en un punto  $\mathbf{r}_f$ . Este vector da una medida del transporte de la cantidad  $\rho$ . Otra forma de calcular el cambio de la masa a través de un volumen de control lo determinan el flujo de entrada  $Q_E$  y de salida  $Q_S$  que atraviesan las superficies  $S_1$  y  $S_2$ ,

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{V_f} = Q_E(S_1, t) + Q_S(S_2, t).\tag{3.3.2}$$

Como hemos visto, el flujo está determinado por el vector de densidad superficial; integrando sobre la superficie tenemos la cantidad del fluido que atraviesa la superficie con velocidad  $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}Q_E(S_1, t) &= - \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_1 < 0 \\ Q_S(S_2, t) &= - \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_2 > 0\end{aligned}$$

Entonces el flujo sobre toda la superficie del volumen de control arbitrario es

$$Q(S_f, t) = \oint_{S_f} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.3.3)$$

Por otro lado, en ausencia de fuentes o sumideros de masa en el volumen de control, el cambio en el tiempo de la masa del fluido de acuerdo con la ecuación (3.1.3) a través del *volumen de control* delimitado por las superficies  $[S_1, S_2]$  fijas, se representa como

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{V_{control}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(r, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} dV \quad (3.3.4)$$

es decir, el cambio de la masa  $M$  respecto del cambio de tiempo es el flujo de la masa que atraviesa la superficie  $S_f$  a través del volumen de control. Entonces podemos usar el teorema de la divergencia para reescribir todo en términos del volumen de control,

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV, \quad (3.3.5)$$

para cualquier  $t > 0$ . De esta manera es posible escribir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.3.6)$$

Que es idéntica a la ec. (3.2.10) y representa el balance de materia o conservación de la masa al no existir fuentes o sumideros en el volumen de control establecido. Más adelante se discute la versión de la ecuación de continuidad que conviene usar en meteorología para imponer la restricción de balance de masa sobre los campos de viento.

### 3.4. Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento (o ecuación de Euler para flujos ideales) en fluidos de la mecánica clásica, se determina al aplicar la segunda ley de Newton a un volumen material. Supongamos un volumen material como en la figura (3.1). El momento lineal total queda definido por

$$\mathbf{p}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV. \quad (3.4.1)$$

Las fuerzas externas actuando sobre el volumen se pueden distinguir entre las **fuerzas volumétricas**, como la gravedad, y las **fuerzas superficiales**, de las cuales consideremos a la presión,  $p$ , como la única de esta categoría actuando sobre la superficie,  $S(t)$ , que delimita el volumen material  $V(t)$ . La fuerza gravitacional actuando sobre un elemento  $\Delta m$ , puede escribirse como

$$\Delta \mathbf{F}_g = \mathbf{g} \Delta m = \rho \mathbf{g} \Delta V \quad (3.4.2)$$

donde,  $\frac{d\mathbf{F}_g}{dV} = \rho \mathbf{g}$ , es el peso por unidad de volumen. De esta manera,

$$\mathbf{F}_g = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (3.4.3)$$

La presión como una fuerza ejercida por unidad de superficie puede escribirse como

$$\mathbf{F}_p(t) = - \oint_{S(t)} p \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (3.4.4)$$

con  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal unitario exterior a la superficie  $S(t)$ . La presión ejercida superficialmente es un gradiente de presión sobre el volumen de esa superficie,

$$\mathbf{F}_p(t) = - \int_{V(t)} \nabla p dV. \quad (3.4.5)$$

De acuerdo a la 2da ley de Newton (2.5.1), el cambio en el tiempo del momento total es la fuerza total,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g = \int_{V(t)} (-\nabla p + \rho \mathbf{g}) dV. \quad (3.4.6)$$

Para calcular la derivada temporal de la ecuación (3.4.1) podemos considerar la integral en su forma lagrangiana a un volumen fijo introduciendo la función jacobiana de la transformación euleriano-lagrangiano para poder permutar la derivada temporal con la integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} (\rho u^i J) \hat{\mathbf{x}}_i dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\rho u^i J) \hat{\mathbf{x}}_i dV_0 \\ &= \int_{V_0} \hat{\mathbf{x}}_i \left( \rho \frac{du^i}{dt} + u^i \frac{d\rho}{dt} + \rho u^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right) J dV_0, \end{aligned}$$

de acuerdo con (2.3.7) y usando la notación:  $\mathbf{v} = u^i \hat{\mathbf{x}}_i$ . Ahora podemos regresar la integral de volumen a su forma euleriana y quitar así el jacobiano al mismo tiempo que introducimos el vector unitario de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \int_V \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \\ &= \int_V \left[ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] dV, \end{aligned}$$

donde se ha considerado:  $\hat{\mathbf{x}}^j \partial_j u^i \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}$ . Reconocemos la ecuación de continuidad (3.2.9) entre paréntesis que tienen que satisfacer las variables  $\rho$  y  $\mathbf{v}$ . De esta manera, al igualar con la ecuación que corresponde a las fuerzas superficiales y volumétricas (3.4.6) y dividir sobre la densidad, nos queda que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (3.4.7)$$

Esta es la ecuación de momento en su forma lagrangiana. Con las variables en su forma euleriana  $u^i = u^i(t, x^i(t))$  y  $\rho = \rho(t, x^i(t))$ ; es posible usar la regla de la cadena y la forma escalar de las variables tal que la derivada total en el tiempo resulta

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i}, \quad (3.4.8)$$

De esta manera podemos reescribir la ecuación de momento (3.4.7) en su forma euleriana como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (3.4.9)$$

Las ecuaciones (3.4.7) y (3.4.9) son también conocidas como ecuaciones de Euler para el momento lineal de un fluido.

### 3.5. Ecuación de energía mecánica

Comencemos con la ecuación de la energía mecánica para una partícula. A partir de la 2da ley de Newton (2.5.1),

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.5.1)$$

La noción física de energía o trabajo mecánico viene de conocer la fuerza necesaria para mover un objeto cierta distancia; si además medimos el intervalo tiempo en el que se aplicó dicha energía o se realizó dicho trabajo conoceremos la potencia. Por tanto, calcular el producto interior vectorial de la velocidad con la fuerza resultará en las expresiones de trabajo y energía buscadas. De esta forma, multiplicando por  $\cdot \mathbf{v}$  ambos lados de la 2da ley de Newton

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.5.2)$$

Usando la regla de la cadena

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 \right) \quad (3.5.3)$$

aparece la **energía cinética**,

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.5.4)$$

La **potencia de la fuerza**,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.5.5)$$

Se define el trabajo  $W$  por unidad de tiempo que hace la fuerza  $\mathbf{F}$  como

$$\frac{dW}{dt} = P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.5.6)$$

al integrar obtenemos la definición más común del **trabajo**

$$W_F(t_0, t) = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.5.7)$$

### 3.6. Ecuación de energía mecánica para un sistema de partículas

Para un *sistema de partículas* con masa  $m_i$  y aceleración  $\mathbf{a}_i$  podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}, \quad (3.6.1)$$

donde tenemos las fuerzas externas  $\mathbf{F}_i^e$  actuando sobre la  $i$ -ésima partícula del sistema de partículas y las fuerzas internas  $\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$  debidas a la interacción de la  $j$ -ésima partícula con la  $i$ -ésima dentro del sistema de partículas. De la misma manera que en el caso de una partícula, multiplicamos por la velocidad de la  $i$ -ésima partícula  $\mathbf{v}_i$  y se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i^e + \sum_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{int} \quad (3.6.2)$$

en donde identificamos la energía cinética para cada partícula,

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2; \quad (3.6.3)$$

así como la potencia y el trabajo de las fuerzas externas e internas,

$$P_i^e = \frac{dW^e}{dt} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i^e \quad \& \quad P_i^{int} = \frac{dW^{int}}{dt} = \sum_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{j \rightarrow i}^{int}. \quad (3.6.4)$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{d}{dt} \sum_i K_i = \sum_i P_i^e + \sum_i P_i^{int}, \quad (3.6.5)$$

aparece la energía cinética total del sistema

$$K = \sum_i K_i, \quad (3.6.6)$$

las potencias totales, así como el trabajo total de las fuerzas externas e internas

$$P^e = \sum_i P_i^e = \frac{d}{dt} \sum_i W_i^e = \frac{d}{dt} W^e \quad (3.6.7)$$

$$P^{int} = \sum_i P_i^{int} = \frac{d}{dt} \sum_i W_i^{int} = \frac{d}{dt} W^{int}. \quad (3.6.8)$$

Por tanto, para un sistema de partículas, la ecuación de energía mecánica es

$$\frac{dK}{dt} = P^e + P^{int}. \quad (3.6.9)$$

### 3.7. Ecuación de energía mecánica para un volumen material

Para un volumen material, como el de la figura 3.1, la energía cinética se calcula considerando ahora elementos de volumen  $\Delta V_i$  y con masa  $\Delta m_i$  de manera que sea congruente con lo que se estableció como la segunda hipótesis del continuo, (3.1.1); de esta forma, la densidad está definida por

$$\rho(t, \mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}. \quad (3.7.1)$$

Considerando este límite, es posible escribir esta expresión en su forma integral y la masa del continuo toma la forma conocida

$$M(t, \mathbf{r}) = \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{r}) dV. \quad (3.7.2)$$

Así, la energía cinética total para un sistema de partículas (3.6.3) se puede reescribir como

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \rho \Delta V_i v_i^2, \quad (3.7.3)$$

que puede formularse como la energía cinética para un medio continuo

$$K = \frac{1}{2} \int_{v(t)} \rho v^2 dV. \quad (3.7.4)$$

Como se menciona en la sección 3.4 (ecuación de movimiento) las fuerzas que actúan sobre el volumen material se pueden dividir en fuerzas superficiales y volumétricas. En tanto a las superficiales consideremos una fuerza superficial externa  $\mathbf{F}_S$  que actúa sobre la superficie material  $S(t)$ ,

$$\Delta \mathbf{F}_S = \mathbf{T}^{\hat{n}} \Delta S, \quad (3.7.5)$$

donde  $\mathbf{T}^{\hat{n}} = T_j \hat{\mathbf{x}}_j$  representa la presión ejercida sobre la superficie  $\Delta S$  ó *tensión superficial*, que debe satisfacer también la segunda hipótesis del continuo, (3.1.1),

$$\mathbf{T}^{\hat{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_S}{\Delta S}, \quad (3.7.6)$$

Esta tensión superficial es en realidad la proyección, ó contracción, del *tensor de esfuerzos*  $\sigma_{ij}$  con el vector normal  $\hat{\mathbf{n}}_i$  a la superficie  $\Delta S^5$

$$T_i = \sigma_{ji} \hat{\mathbf{n}}_j \quad \text{ó} \quad \mathbf{T}^{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma^T \mathbf{n}. \quad (3.7.7)$$

Por lo tanto, la potencia queda definida en este caso como

$$\Delta P_S = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^{\hat{\mathbf{n}}} \Delta S, \quad (3.7.8)$$

con  $\mathbf{v}$  la velocidad media del elemento  $\Delta S$ . En el límite del continuo obtenemos la fuerza y potencia superficial total

$$\mathbf{F}_s = \oint_{S(t)} \mathbf{T}^{\hat{\mathbf{n}}} dS \quad \text{y} \quad P_S = \oint_{S(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^{\hat{\mathbf{n}}} dS. \quad (3.7.9)$$

Es conveniente en este caso considerar la notación de índices para convertir nuestra integral de superficie en una integral de volumen usando el teorema de la divergencia (F). Por tanto, si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^{\hat{\mathbf{n}}} = v^i T_i = v^i \sigma_{ji} n_j$ , es posible reescribir la integral como

$$P_S = \oint_{S(t)} (v^i \sigma_{ji}) \hat{n}_j dS = \int_{V(t)} \nabla_j \cdot (v^i \sigma_{ji}) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} (v^i \sigma_{ji}) dV. \quad (3.7.10)$$

La última parte se desarrolla como sigue de acuerdo a la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} (v^i \sigma_{ji}) dV &= \int_{V(t)} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \sigma_{ji} + v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma_{ji} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} [\nabla \mathbf{v} : \sigma + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma)] dV \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

donde se usó la notación de la doble contracción que es también la traza del producto matricial entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de la velocidad. Para fines prácticos, podemos descomponer el gradiente de la velocidad  $\nabla \mathbf{v}$  en su parte simétrica y antisimétrica. Por lo que la doble contracción se distribuye de la siguiente forma

$$\nabla \mathbf{v} : \sigma = \mathbb{D} : \sigma + \mathbb{A} : \sigma \quad (3.7.12)$$

donde  $\mathbb{D}$  representa la parte simétrica del gradiente de la velocidad y  $\mathbb{A}$  la antisimétrica. Sin embargo, el producto interno entre una matriz simétrica y una antisimétrica es cero. Dado que el tensor de esfuerzos es simétrico, tenemos que

$$\nabla \mathbf{v} : \sigma = \mathbb{D} : \sigma, \quad (3.7.13)$$

y por lo tanto, la potencia superficial adquiere finalmente la forma

$$P_S = \int_{V(t)} [\mathbb{D} : \sigma + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma)] dV, \quad (3.7.14)$$

---

<sup>5</sup>Es interesante notar de,  $T_j \hat{\mathbf{x}}_j$ , que por la 1ra hipótesis del continuo, forma una base linealmente independiente, por lo que el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ji}$  funciona en este caso como la matriz de transformación entre la base de la tensión superficial  $\hat{\mathbf{x}}_j$  y la base canónica normal a la superficie  $\hat{\mathbf{n}}_i$ .

donde, una notación equivalente es,  $\mathbb{D} : \sigma = tr(\mathbb{D}\sigma) = [D_{ij}\sigma_{jk}]_{k=i} = D_{ij}\sigma_{ji}$ . De ahora en adelante usaremos la notación de la traza del producto matricial  $tr(\mathbb{D}\sigma)$  para referirnos a la doble contracción entre la parte simétrica del gradiente del vector velocidad y el tensor de esfuerzos.

Por otro lado, consideramos una fuerza y una potencia volumétrica actuando sobre el elemento de volumen material de la forma

$$\mathbf{F}_b = \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad y \quad P_b = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} dV \quad (3.7.15)$$

donde  $\mathbf{b}$  representa una fuerza cualquiera por unidad de volumen; de acuerdo con (3.1.1), debe satisfacer de igual forma la hipótesis del continuo

$$\rho \mathbf{b} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V}{\Delta V}. \quad (3.7.16)$$

En este caso la fuerza volumétrica a consideración, actuando sobre el volumen material, es la gravedad, por lo que,  $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ . De esta manera la potencia volumétrica es

$$P_b = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV. \quad (3.7.17)$$

Sumando las potencias volumétrica y superficial, (3.7.14) y (3.7.17), obtenemos

$$\begin{aligned} P_S + P_b &= \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV + \int_V \mathbf{v} \cdot \overbrace{[\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g}]}^{=\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}} dV \\ &= \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV + \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \\ &= \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV + \int_V \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} dV, \end{aligned} \quad (3.7.18)$$

donde usamos la ecuación de movimiento (3.4.7) para identificar la energía cinética (3.7.4) y así obtener la forma integral de la **ecuación de la energía mecánica para un volumen material**

$$\frac{dK}{dt} + \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV = P_S + P_b. \quad (3.7.19)$$

### Interpretación de la ecuación de energía mecánica para un volumen material

Hemos visto como una parte del trabajo hecho por las fuerzas superficiales, ecuación (3.7.14), se va en el trabajo que modifica la energía cinética

$$\int_{V(t)} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma) dV. \quad (3.7.20)$$

La otra parte se va en un *trabajo interno* que genera deformaciones en el interior del volumen material que identificamos como

$$\frac{dW_T}{dt} = \int_{V(t)} tr(\mathbb{D}\sigma) dV \quad (3.7.21)$$

Esto nos muestra que  $tr(\mathbb{D}\sigma)$  es el trabajo por unidad de tiempo y volumen que modifica el estado interno de un volumen material a través de su propia deformación. Podemos concluir entonces que  $tr(\mathbb{D}\sigma)$  ES LA GENERALIZACIÓN DEL TRABAJO TERMODINÁMICO QUE APARECE EN LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

$$dW = -pdV. \quad (3.7.22)$$

Veamos de que manera se relacionan exactamente.

### 3.8. Termodinámica de fluidos en movimiento e hipótesis de equilibrio local

Un *sistema termodinámico*, tal como es introducido en la literatura clásica, es un sistema constituido por las mismas moléculas (ó átomos). Un medio continuo, por su lado, generaliza la noción de los mismos átomos, o moléculas, al considerar un fluido con las mismas partículas puntuales. Este fluido que tiene siempre las mismas partículas puede ser una curva, una superficie o un volumen material como el de la figura (3.1). Toda variable que cuantifique el estado termodinámico del sistema, medio continuo o volumen material se llama *variable de estado*. Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son variables de estado independientes, entonces definen un espacio termodinámico, donde cada punto  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  en este espacio representa un *estado termodinámico*. Una sucesión de estados termodinámicos que evolucionan de manera continua da lugar a un *proceso termodinámico* siendo este a su vez una curva en el espacio de estados termodinámicos en un intervalo de tiempo  $t_1$  a  $t_2$ . De esta forma, los *procesos cíclicos* o curvas cerradas son aquellos procesos termodinámicos donde,

$$\xi_k(t_1) = \xi_k(t_2).$$

Toda función (escalar, vectorial o tensorial) que se pueda escribir de forma unívoca como función de la relación de estas variables termodinámicas que determinan el estado termodinámico de un sistema termodinámico es una *función de estado*,

$$\phi = \phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$\phi$  puede depender de un proceso (ó curva) termodinámico,

$$\oint_C d\phi \neq 0.$$

O puede ser independiente

$$\oint_C d\phi = 0.$$

En este último caso la función de estado  $\phi$  es también un *potencial termodinámico* y es por tanto una función diferenciable clase  $C^2$  por lo que da lugar a una diferencial exacta,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_j \partial \xi_i}.$$

Un proceso termodinámico que parte de un estado  $\phi_A(\xi_1, \dots, \xi_n)$  a otro estado  $\phi_B(\xi_1, \dots, \xi_n)$  y puede regresar por el mismo camino (o curva del proceso termodinámico) se conoce como un *proceso reversible* mientras que para un *proceso irreversible* no es posible regresar por el mismo camino tomado de  $A$  hacia  $B$ .

**LEY CERO** Parte de la noción del equilibrio térmico para establecer que existe una función que es igual numéricamente para dos sistemas termodinámicos en contacto y en equilibrio. Esta función determina una relación entre las variables macroscópicas que definen el estado de equilibrio,

$$\Theta(\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n) = \Theta(\xi_1 \dots \xi_n), \quad (3.8.1)$$

relación que recibe el nombre de **ecuación de estado**. La ecuación de estado de un gas ideal en un recipiente finito se representa como

$$pV = NkT, \quad (3.8.2)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $N$  el número de partículas en un volumen  $V$  con temperatura  $T$ . Por otro lado, la presión ejercida como consecuencia de la energía cinética del gas promedio tiene la siguiente relación

$$p = \frac{2N}{3V} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (3.8.3)$$

Igualando con la ecuación de estado del gas ideal (3.8.2), tenemos ahora la siguiente relación,

$$kT = \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle, \quad (3.8.4)$$

lo cual puede considerarse como la **escala absoluta de la temperatura**. Si multiplicamos y dividimos entre la masa  $m$  de cada partícula en el gas, tenemos

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{k}{m} T = \frac{M}{V} \frac{k}{m} T \quad (3.8.5)$$

donde aparece la masa promedio de todas las partículas que contiene el gas  $Nm = M$ , la densidad  $\frac{M}{V} = \rho$  y la constante  $\mathcal{R} = \frac{k}{m}$  que depende claramente de la masa de las partículas del gas. Así obtenemos la **ecuación de estado usada en meteorología**,

$$p = \rho \mathcal{R} T. \quad (3.8.6)$$

Si multiplicamos y dividimos la constante  $\mathcal{R}$  entre el número de Avogadro  $N_0$ , obtenemos

$$R = \frac{N_0 k}{N_0 m} = \frac{R_0}{M} \quad (3.8.7)$$

con  $R_0 = N_0 k = 8,314 \text{ J/mol}^\circ\text{K}$  conocida como la *constante universal de los gases*. La atmósfera es una mezcla de gases por lo que el valor de  $M$  es un promedio de las masas de tales gases y, aproximadamente, tenemos

$$R = 287 \text{ J/kg}^\circ\text{K}.$$

La PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA establece, por su lado, la existencia de una función de estado  $U(\xi_1, \dots, \xi_n)$  llamada *energía interna*, la cual es independiente de cualquier proceso termodinámico y que satisface

$$dU = \bar{d}Q + \bar{d}W. \quad (3.8.8)$$

Donde  $\bar{d}Q$ <sup>6</sup> es el calor intercambiado entre el sistema y su entorno y  $\bar{d}W$  es justo la parte del trabajo mecánico<sup>7</sup> (3.7.21) que modifica la energía interna  $U$ .

### Primera ley para un gas ideal en un recipiente con un émbolo que se mueve cuasistáticamente

El trabajo para este caso se representa como la presión ejercida en el interior del volumen que contiene al gas. De acuerdo a la (3.8.8) tenemos,

$$dU = \bar{d}Q - p dV, \quad (3.8.9)$$

que al dividir entre la masa del gas y usando la definición de densidad, de acuerdo con la hipótesis del continuo (3.1.1), la ec. anterior toma la forma

$$du_m = \bar{d}Q_m + p \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (3.8.10)$$

donde,  $u_m \equiv \frac{U}{m}$  es la energía interna por unidad de masa y  $Q_m \equiv \frac{Q}{m}$  es el calor intercambiado por unidad de masa.

**HIPÓTESIS DEL EQUILIBRIO LOCAL.** La termodinámica de equilibrio es válida para los medios continuos *localmente*, es decir, en la vecindad de cada punto  $\mathbf{r}$  del espacio. De esta manera las variables y funciones de estado así como las primera y segunda leyes de la termodinámica son válidas para cada partícula (o punto matemático) del fluido y son funciones de la posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo

$$\begin{aligned} \xi = \xi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + \nabla_{\mathbf{r}} \xi \cdot d\mathbf{r} \\ \phi = \phi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \nabla_{\mathbf{r}} \phi \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Si consideramos al gas como un medio continuo podemos representar las funciones termodinámicas que lo describen en sus formas euleriana y lagrangiana, respectivamente,

$$\phi_E(\mathbf{r}, t) = \phi_L(\mathbf{r}_0, t)$$

Considerando las funciones  $u_m$ ,  $Q_m$  y  $\rho$  en su forma lagrangiana pasamos de la primera ley (3.8.8) a

$$\frac{\Delta u_m}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_m}{\Delta t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}, \quad (3.8.11)$$

<sup>6</sup>La barra en la diferencial representa que esta función no es independiente del proceso o curva termodinámica y por lo tanto no es un función diferenciable o diferencial exacta.

<sup>7</sup>Puede ser del entorno al sistema o del sistema al entorno.

lo cual, considerando la hipótesis del equilibrio local tenemos

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dQ_m}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.8.12)$$

Para un gas ideal (ó fluido ideal), el tensor de esfuerzos es exactamente la presión, lo cual es claro si se contrasta con la potencia superficial  $P_S$  en (3.7.8), de la ecuación de energía mecánica para un medio continuo o volumen material, en donde aparece el producto escalar entre la velocidad y la tensión ó presión superficial (3.7.7)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = v^i \sigma_{ji} \hat{\mathbf{n}}_j$ . De esta forma se puede ver que el escalar resultante puede expresarse como

$$\sigma = -p\mathbb{I} \quad \text{ó} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.8.13)$$

Por lo tanto, tenemos también al resultado siguiente

$$tr(\mathbb{D}\sigma) = -p\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.8.14)$$

Combinando este resultado con la ecuación de continuidad (3.2.9) obtenemos la siguiente identidad

$$\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{tr(\mathbb{D}\sigma)}{\rho}, \quad (3.8.15)$$

con lo cual podemos escribir la primera ley en la forma lagrangiana como

$$\rho \frac{du_m}{dt} = \rho \frac{dQ_m}{dt} + tr(\mathbb{D}\sigma). \quad (3.8.16)$$

Esta es la **ecuación de energía termodinámica para una partícula de fluido**. Por lo tanto, para un gas ideal tenemos que

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{tr(\mathbb{D}\sigma)}{\rho}. \quad (3.8.17)$$

Esto permite proponer que para un medio continuo, el trabajo mecánico por unidad de masa que puede modificar la energía interna  $U = U(t, \mathbf{r})$  de dicho medio está dado por la relación anterior.

### Síntesis de las ecuaciones de energía mecánica y energía termodinámica

Tenemos por tanto dos principios independientes que establecen la ecuación de energía para un medio material, por un lado tenemos la ecuación de la energía mecánica para un volumen material proveniente de la segunda Ley de Newton, ecuación (3.7.19)

$$\frac{dK}{dt} + \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV = P_s + P_b. \quad (3.8.18)$$

Por otro lado tenemos la ecuación (3.8.16) proveniente de la primera ley de la termodinámica y la hipótesis del equilibrio local para una partícula de fluido; al integrar, obtenemos la ecuación de energía termodinámica para un volumen material

$$\int_V \rho \frac{du_m}{dt} dV = \int_V \rho \frac{dQ_m}{dt} dV + \int_V tr(\mathbb{D}\sigma) dV, \quad (3.8.19)$$

y usando la identidad  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV = \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_m dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho Q_m dV + \int_V \text{tr}(\mathbb{D}\sigma) dV. \quad (3.8.20)$$

Notamos que aparece la densidad volumétrica de energía interna,  $\frac{dU}{dV} = \rho u_m$ , por lo que

$$U = \int_V \rho u_m dV, \quad (3.8.21)$$

y la densidad volumétrica de calor que fluye a un volumen material,  $\frac{dQ}{dV} = \rho Q_m$

$$Q = \int_V \rho Q_m dV \quad (3.8.22)$$

Así, la primera ley de la termodinámica toma la forma siguiente

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \int_V \text{tr}(\mathbb{D}\sigma) dV \quad (3.8.23)$$

Encontramos que

$$\frac{d^2W}{dt dV} = \text{tr}(\mathbb{D}\sigma), \quad (3.8.24)$$

es el trabajo (mecánico) por unidad de tiempo y de volumen. Sumando las ecs. (3.8.18) y (3.8.23), válidas para un volumen material  $V$  encontramos la síntesis de la llamada *Ecuación de Energía*,

$$\frac{d}{dt} E \equiv \frac{d}{dt} (K + U) = \frac{dQ}{dt} + P_s + P_b. \quad (3.8.25)$$

*Esta ecuación es en realidad la síntesis de dos principios independientes; la 2da Ley de Newton y la primera ley de la termodinámica.* La energía  $E$  es una función de estado desde el punto de vista termodinámico si consideramos la hipótesis del equilibrio local.

$$E = K + U = \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV + \int_V \rho u_m dV = \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u_m \right) dV \quad (3.8.26)$$

Así, aparece la energía por unidad de volumen,

$$\rho \left( \frac{v^2}{2} + u_m \right) = \frac{dE}{dV}, \quad (3.8.27)$$

y la función de estado,

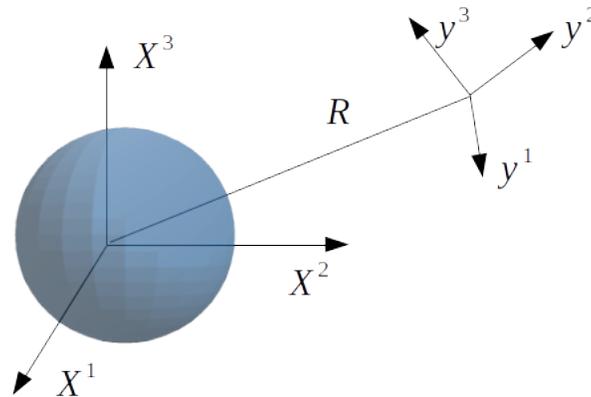
$$e_m = \frac{v^2}{2} + u_m \quad (3.8.28)$$

que bien puede llamarse *la energía por unidad de masa de una partícula de fluido*.

## Capítulo 4

### ECUACIONES HIDRODINÁMICAS EN UN SISTEMA CARTESIANO FIJO A LA TIERRA

Consideremos el sistema cartesiano derecho  $X^1X^2X^3$  y un sistema cartesiano  $y^1y^2y^3$  fijo a la tierra con orientación arbitraria como se ilustra en la figura (4.1). Suponer que el sistema ortogonal  $y^i$  es un sistema



**Figura 4.1:** Sistema  $y^j$  fijo a la tierra

derecho que se obtiene por medio de rotaciones del sistema inercial  $X^j$ . Esto significa que los vectores base  $\hat{y}^1\hat{y}^2\hat{y}^3$  asociados obedecen la regla de la mano derecha, es decir satisfacen

$$\hat{y}^i \times \hat{y}^j = \epsilon_{ijk} \hat{y}^k \quad (4.0.1)$$

Lo cual implica que existe una relación entre las bases  $\hat{X}^i$  y  $\hat{y}^j$ , de la forma

$$\hat{y}^j = \mathbb{R}_{ij} \hat{X}^i \quad (4.0.2)$$

donde  $\mathbb{R}_{ij}$  es una *matriz de rotación* por lo que:  $\det(\mathbb{R}) = 1$  y  $\mathbb{R}^T = \mathbb{R}^{-1}$ , con  $\mathbb{R}^T$  la matriz transpuesta. Gracias a esta propiedad es posible escribir que

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I},$$

siendo  $\mathbb{I}$  la matriz identidad. De esta manera la relación inversa de (4.0.2) está dada por

$$\hat{X}^i = \mathbb{R}^T \hat{y}^j \quad (4.0.3)$$

Considerar el cambio en el tiempo de la matriz de rotación. Para esto, calculemos la derivada temporal de la relación (4.0.2),  $\frac{d\hat{\mathbf{y}}^j}{dt} = \dot{\hat{\mathbf{y}}}^j$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}^j = \dot{\mathbb{R}}\hat{\mathbf{X}}^i \quad (4.0.4)$$

y usando (4.0.3),

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T\hat{\mathbf{y}} \quad \text{ó bien} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}}^j = \dot{R}_{ij}R_{ji}\hat{\mathbf{y}}^j \quad (4.0.5)$$

$\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T$  es una *matriz antisimétrica* que tiene la forma

$$\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^3 & -\Omega^2 \\ -\Omega^3 & 0 & \Omega^1 \\ \Omega^2 & -\Omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.0.6)$$

de esta manera la ecuación (4.0.5) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}^1 \\ \hat{\mathbf{y}}^2 \\ \hat{\mathbf{y}}^3 \end{pmatrix} = \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}^1 \\ \hat{\mathbf{y}}^2 \\ \hat{\mathbf{y}}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^3\mathbf{y}^2 - \Omega^2\mathbf{y}^3 \\ -\Omega^3\mathbf{y}^1 + \Omega^1\mathbf{y}^3 \\ \Omega^2\mathbf{y}^1 - \Omega^1\mathbf{y}^2 \end{pmatrix} \quad (4.0.7)$$

usando (4.0.1) se puede ver que es posible reescribir esta relación en términos del vector de *velocidad angular*

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega^1\hat{\mathbf{y}}^1 + \Omega^2\hat{\mathbf{y}}^2 + \Omega^3\hat{\mathbf{y}}^3 \quad (4.0.8)$$

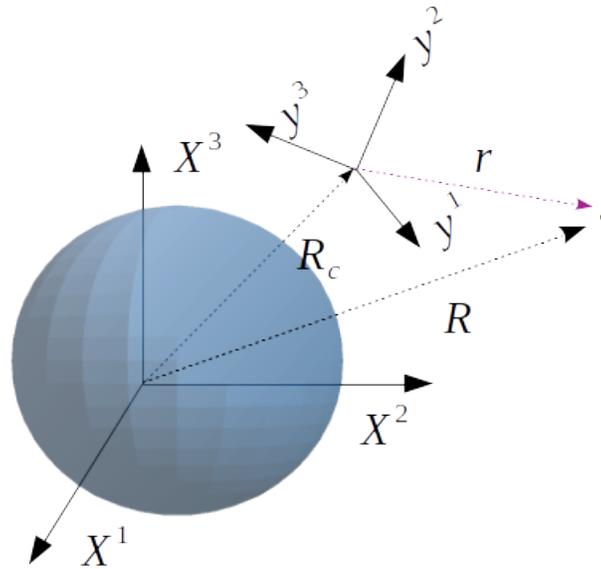
donde

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}^i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}^i \quad \vee \quad \frac{d\hat{\mathbf{y}}^i}{dt} = \epsilon_{ijk}\Omega^j\hat{\mathbf{y}}^k. \quad (4.0.9)$$

Notamos entonces que tenemos la identidad  $\boldsymbol{\Omega} \times \equiv \dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T$  que es la representación matricial de  $\boldsymbol{\Omega} \times$  en la base  $\hat{\mathbf{y}}^i$ . El operador de velocidad angular,  $\boldsymbol{\Omega} \times$ , define un operador lineal ya que satisface las reglas de transformación lineal. La representación matricial se puede construir al identificar

$$(\boldsymbol{\Omega} \times)_{kj} = \epsilon_{kij}\Omega^i \quad (4.0.10)$$

Veamos ahora cómo transforma un vector de posición  $\mathbf{R}$ , velocidad  $\mathbf{V}$  y aceleración  $\mathbf{A}$  en un sistema de referencia inercial cartesiano  $X^1X^2X^3$  a un sistema cartesiano fijo a la tierra  $y^1y^2y^3$  con orientación arbitraria. Consideremos la ilustración (4.2).



**Figura 4.2:** Partícula con posición  $\mathbf{R}$  del sistema inercial  $X^i$  y el sistema  $y^j$  fijo a la tierra

La relación entre los vectores de posición de una partícula entre el sistema inercial  $X^1 X^2 X^3$  y el sistema fijo a la tierra  $y^1 y^2 y^3$ , es

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \mathbf{r}. \quad (4.0.11)$$

donde,  $\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i$ ,  $\mathbf{R}_c = y_c^i \hat{\mathbf{y}}_i$  y  $\mathbf{r} = y^j \hat{\mathbf{y}}_j$ . Entonces,

$$\mathbf{R} = (y^i + y_c^i) \hat{\mathbf{y}}_i \quad (4.0.12)$$

Notemos que los componentes  $y_c^i$  son constantes dado que  $\mathbf{R}_c$  rota junto con el sistema  $y^1 y^2 y^3$ . Derivando la posición obtenemos la velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \dot{y}^i \hat{\mathbf{y}}_i + (y^i + y_c^i) \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i \quad (4.0.13)$$

Recordando la relación obtenida para la derivada temporal de la base  $y^i$ , ec (4.0.9); lo anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{v} + (y^i + y_c^i) \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}_i \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (y^i + y_c^i) \hat{\mathbf{y}}_i \end{aligned} \quad (4.0.14)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (4.0.15)$$

donde  $\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{y}}_i$  con  $v^i \equiv \dot{y}^i$  es la *velocidad relativa a la tierra*.

Para obtener la aceleración,  $\mathbf{A}$ , derivamos la ecuación (4.0.15). Mediante un procedimiento análogo al usado para obtener la velocidad  $\mathbf{V}$  y usando el hecho de que  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$ , obtenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}), \quad (4.0.16)$$

donde  $\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{y}}_i$  es la *aceleración relativa a la tierra* y aparecen los términos siguientes

(I)  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ : Aceleración de Coriolis.

(II)  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$ : Aceleración centrípeta.

### Transformación de los operadores $\nabla$ , $\nabla \cdot$ , $\nabla \times$ de un sistema inercial a uno fijo a la tierra

Para saber como se transforman los operadores  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  analicemos un mismo punto en el espacio representado por un vector en cada una de las bases,  $\hat{\mathbf{y}}^i$  y  $\hat{\mathbf{X}}^i$ ; consideremos el vector siguiente escrito en diferentes bases

$$\mathbf{B} = B_i(X) \hat{\mathbf{X}}^i = B_j(y) \hat{\mathbf{y}}^j \quad (4.0.17)$$

que al igual que la relación entre bases, (4.0.2), las componentes también se relacionan con la matriz de rotación

$$B_i(X) = \mathbb{R}_{ij} B_j(y). \quad (4.0.18)$$

En particular para el vector posición tenemos que

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}_i = (y^j + y_c^j) \hat{\mathbf{y}}_j \quad (4.0.19)$$

por lo tanto las componentes satisfacen las ecuaciones de transformación siguientes

$$X^i = \mathbb{R}_{ij} (y^j + y_c^j). \quad (4.0.20)$$

La matriz jacobiana de la transformación es la matriz  $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial y^j}{\partial X^i} = \mathbb{R}. \quad (4.0.21)$$

Si consideramos la composición de  $f(X^i)$  como  $f(X^i = \mathbb{R}_{ij}(y^j + y_c^j))$ , de manera que

$$f(X^i) = \tilde{f}(y^j), \quad (4.0.22)$$

al derivar y usar la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial X^i} f(X^i) = \frac{\partial y^j}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \tilde{f}(y^j) \quad (4.0.23)$$

y encontramos que aparece la matriz de transformación jacobiana (4.0.21) que en este caso es la matriz de rotación. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial X^i} = \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (4.0.24)$$

De esta manera, al considerar el operador gradiente definido como

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial}{\partial X^i},$$

de la relación anterior y de la relación entre bases (4.0.2), es claro que

$$\hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial}{\partial X^i} = \hat{\mathbf{X}}^i \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial y^j} = \hat{\mathbf{y}}^j \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (4.0.25)$$

por lo tanto

$$\nabla = \hat{\mathbf{y}}^j \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (4.0.26)$$

El cálculo de la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv \frac{\partial}{\partial X^i} B^i (X),$$

en la base  $\hat{\mathbf{y}}^j$ , se puede obtener usando las relaciones (4.0.18) y (4.0.24), como sigue

$$\frac{\partial}{\partial X^i} B^i (X) = \mathbb{R}_{ij} \frac{\partial}{\partial X^i} B^j (y) = \mathbb{R}_{ij} \mathbb{R}_{kj} \frac{\partial B^j (y)}{\partial y^k}, \quad (4.0.27)$$

donde  $\mathbb{R}_{ij} \mathbb{R}_{kj} = \delta_{ik}$ , por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial y^i} B^i (y). \quad (4.0.28)$$

Para saber como transforma el operador rotacional

$$\nabla \times \mathbf{B} \equiv \hat{\mathbf{X}}^i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X^j} B_k (X),$$

usamos las relaciones (4.0.2), (4.0.18), (4.0.24) y encontramos que

$$\hat{\mathbf{X}}^i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X^j} B_k (X) = \epsilon_{ijk} \mathbb{R}_{li} \mathbb{R}_{jm} \mathbb{R}_{kn} \hat{\mathbf{y}}^l \frac{\partial}{\partial y^m} B_n (y) \quad (4.0.29)$$

usamos la identidad  $\epsilon_{lmn} = \epsilon_{ijk} \mathbb{R}_{li} \mathbb{R}_{jm} \mathbb{R}_{kn}$ , para simplificar la expresión anterior y llegar finalmente a que el rotacional queda definido bajo la transformación al sistema  $y^i$ , como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}^l \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial y^m} B_n (y) \quad (4.0.30)$$

#### 4.1. Ecuación de continuidad

Consideremos la ecuación (3.2.9). Para obtener su transformación al sistema de coordenadas fijo a la tierra usamos regla de la cadena para analizar cada término en su transformación correspondiente, por un lado se tiene

$$\frac{d}{dt}\rho(X, t) = \frac{d}{dt}\rho_y(y, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \rho_y(y, t) \quad (4.1.1)$$

obtenemos para el operador de derivada total en el tiempo

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_y} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (4.1.2)$$

Por otro lado, para el término de la divergencia del campo de velocidad tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial y^i} [v^i + \epsilon_{ijk} \Omega^j (y^k + y_c^k)] = \nabla \cdot \mathbf{v} + \epsilon_{ijk} \Omega^j \delta_i^k \quad (4.1.3)$$

pero  $\epsilon_{ijk} \Omega^j \delta_i^k = \epsilon_{iji} \Omega^j = 0$ , por lo tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.1.4)$$

De esta forma la ecuación de continuidad toma la forma siguiente

$$\frac{d}{dt}\rho_y + \rho_y \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.1.5)$$

#### 4.2. Ecuación de movimiento

De acuerdo con la relación encontrada para la aceleración en un sistema fijo a la tierra, la ecuación de movimiento en su forma lagrangiana (3.4.7) toma la forma siguiente

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{f}. \quad (4.2.1)$$

Si la función  $\Phi_g(y) = \Phi_g(X^j = \mathbb{R}_{ij}(y^i + y_c^i))$  representa el potencial gravitacional en el sistema  $y^i$ , entonces

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi_g(y). \quad (4.2.2)$$

El término correspondiente a la aceleración centrípeta también puede escribirse como el gradiente de una función potencial. Al considerar este término en el sistema de referencia inercial y tomando en cuenta que el vector de velocidad angular apunta siempre sobre el eje de rotación,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{X}}^3$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) &= \Omega \hat{\mathbf{X}}^3 \times (\Omega \hat{\mathbf{X}}^3 \times \mathbf{R}) \\ &= -\Omega^2 (X^1 \hat{\mathbf{X}}^1 + X^2 \hat{\mathbf{X}}^2) \\ &= \nabla \left( -\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}\|^2 \right) = \nabla \Phi_c. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

La ecuación de movimiento se puede escribir entonces como

$$\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi + \mathbf{f} \quad (4.2.4)$$

donde

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_g$$

es el llamado **geopotencial**.

### 4.3. Región de validez de la ecuación de movimiento con $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$

En esta sección se hace una revisión de la jerarquía dominante de los términos en la ecuación de movimiento de los cuales, se encuentra que el término gravitacional es el más dominante para regiones horizontales  $L \geq 100$  km. En la literatura (Pielke, 1984; Yamada, Kao y Bunker, 1989; Walko, Tremback y Hertenstein, 2006) suele aproximarse dicho término gravitacional por  $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$ . Como veremos, esta aproximación limita drásticamente la región de validez de la ecuación de momento. Analizamos una propuesta para la corrección del término gravitacional (Nuñez, 2003; M.A. Núñez, 2005) en la ecuación de movimiento estándar usada en la literatura y se muestra como el error porcentual entre el modelo con el término gravitacional correcto vs. el aproximado aumenta drásticamente con una distancia horizontal de  $L \geq 100$  km.

Por lo general, en la literatura de modelos de mesoescala, el sistema de coordenadas predeterminado es un sistema cartesiano  $xyz$  con origen en algún punto fijo de la superficie terrestre considerando un modelo esférico terrestre donde el eje  $z$  es normal y exterior a la tierra. La forma más común de la ecuación de momento para análisis teóricos y análisis computacionales es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{f}_r, \quad (4.3.1)$$

donde  $\mathbf{g}$  es aproximada por  $-g\hat{\mathbf{z}}$  con  $g \approx 9,8\text{m/s}^2$ . Por lo general, el valor de  $z$  se reemplaza por coordenadas de tipo  $\sigma$  que siguen al terreno y se usan dominios horizontales  $\Omega = 2L \times 2L$  con  $L \geq 650\text{km}$ . Se ha mostrado que la ecuación en esta forma es válida únicamente para valores de  $L \leq 100\text{km}$  (Nuñez, 2003) considerando un máximo error porcentual del 10 % de la gravedad esférica respecto la gravedad de tierra plana. Sin embargo, el no considerar un región o dominio  $\Omega(L)$  lo suficientemente grande trae consigo consecuencias determinantes en tanto a la validez de un modelo que describa la realidad física de la forma más aproximada posible. Dos problemas motivan el uso de dominios  $\Omega(L)$  grandes:

- (i) La necesidad de incluir los efectos de la propagación de perturbaciones sinópticas<sup>1</sup> en zonas regionales.
- (ii) Reducir la contaminación de errores que surgen al establecer fronteras laterales artificiales las cuales son inevitables para modelos numéricos de áreas limitadas.

Es posible considerar dominios o regiones  $\Omega(L)$  grandes ( $L \geq 100$  km) si usamos la *aceleración gravitacional para una tierra esférica con masa uniformemente distribuida*,  $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{x}}^i g^i$ , donde

$$g^i = -g \frac{a^2}{r^3} (x^i + \delta_{i3}a), \quad (4.3.2)$$

<sup>1</sup>Los datos relativos a temperaturas, precipitación, presión, viento y cualquiera otros elementos de la atmósfera se agrupan sin tener en cuenta su causa ni relacionarlos unos con otros. La climatología **sinóptica** estudia la correlación entre los diferentes elementos climáticos a gran escala y las condiciones meteorológicas que los produjeron.

o bien,

$$\mathbf{g} = -g \frac{a^2}{r^3} \mathbf{R}, \quad (4.3.3)$$

donde  $g \equiv GMa^{-2}$ ;  $M$  y  $a$  son la masa y el radio de la tierra respectivamente,  $\mathbf{R}$  es el vector que va desde el centro de la tierra hasta una partícula de aire y  $r = \|\mathbf{R}\|$ . Con esta aceleración gravitacional la ecuación de momento es válida para cualquier dominio  $\Omega(L)$  de una esfera con distribución uniforme de masa. La tabla (4.1), nos muestra que las componentes horizontales de  $\mathbf{g}$  son dominantes para  $L \geq 100\text{km}$  y no despreciables. Esto nos muestra que no considerar la forma correcta de la fuerza gravitacional para los modelos atmosféricos de meso-escala es un grave error debido a que, como hemos visto, las regiones de la meso-escala son regularmente de  $L \geq 100$ .

	$\frac{du}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+fv$	$-fw$	$+\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}$	$+\frac{\partial}{\partial x} K_H \frac{\partial u}{\partial x}$	$-\frac{ga^2 x}{r^3}$
$L$	$U^2/L$	$\Delta P/\rho L$	$fU$	$fHU/L$	$KU/H^2$	$KU/L^2$	
$10^6$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$	$10^0$
$10^5$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-1}$
$10^4$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$

**Tabla 4.1:** Tabla de magnitudes en  $m/s^2$  en términos de la ecuación (4.3.1) para flujo con escala horizontal  $L$  m,  $U = 10$  m/s,  $H = 10^4$  m,  $f = 2\Omega \sin(\phi)$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $g = 10\text{m/s}^2$ ,  $x = L/2$ ,  $y = z = 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$  y  $a = 6378\text{km}$  donde podemos ver que el término gravitacional es el término dominante en la ecuación por ordenes de magnitud. Fuente: (Nuñez, 2003).

Es posible mostrar que la ecuación con la forma correcta de  $\mathbf{g}$  nos lleva a la forma correcta del campo de presión sobre una superficie terrestre esférica (Nuñez, 2003). Veamos como sucede.

Si la zona de estudio se encuentra en el punto  $(x, y, z)$  en el tiempo  $t$ , de acuerdo con la figura 4.2 tenemos que  $\mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z + a)\hat{\mathbf{z}}$ , por lo que, la ecuación de momento toma la forma siguiente

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g \frac{a^2}{r^3} [\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z + a)\hat{\mathbf{z}}] - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{f}_r. \quad (4.3.4)$$

La forma escalar de la ecuación (4.3.4) es

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - g \frac{a^2}{r^3} (x^i + \delta_{i3}) - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u^k + F^i. \quad (4.3.5)$$

Estas ecuaciones junto con las ecuaciones de conservación de masa, energía, humedad, y la ecuación de estado proveen los campos meteorológicos correctos cuando se usan las condiciones iniciales y de frontera adecuados. Nos referiremos a las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) como las **ecuaciones de movimiento exactas** dado que tienen las componentes correctas (4.3.2) de  $\mathbf{g}$ , para un modelo de tierra esférica con

masa distribuida uniformemente, mientras que la literatura estándar de modelos de meso-escala usan la aproximación  $\mathbf{g} \sim -g\hat{\mathbf{x}}^3$  y las ecuaciones de movimiento

$$\frac{du^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} - g\delta_{i3} - 2\epsilon_{ijk}\Omega_j u^k + F^i. \quad (4.3.6)$$

Una forma de conocer la región de validez de la ecuación de movimiento (4.3.6) que usa la aproximación para la gravedad,  $\mathbf{g} \sim g\hat{\mathbf{x}}^3$ , es compararla con la ecuación (4.3.5) que usa la gravedad correcta para una tierra esférica con distribución uniforme de masa.

Recordando al potencial gravitacional (4.2.2) y la expresión de la gravedad para una tierra esférica (4.3.3) tenemos que,

$$\mathbf{g} = -g\frac{a^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \nabla\frac{ga^2}{r} \quad \therefore \quad \Phi_g = -\frac{ga^2}{r}$$

Consideremos el caso hidrostático; la ecuación (4.3.5) se reduce entonces a,

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\Phi_g \quad (4.3.7)$$

Si aplicamos el rotacional de ambos lados de la ecuación anterior sabiendo que el rotacional del gradiente siempre es cero y considerando la identidad  $\nabla \times (a\mathbf{u}) = a(\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \nabla a$ , obtenemos

$$\nabla p \times \nabla \rho^{-1} = 0,$$

lo cual significa que vectores normales a las superficies isocóricas e isobáricas en un punto son paralelas por lo que dichas superficies coinciden, de esta forma,  $p = p(\rho)$  o  $\rho = \rho(p)$ . La ecuación (4.3.7) en coordenadas esféricas se reduce a su componente radial,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g \frac{a^2}{r^2}. \quad (4.3.8)$$

Para dar una solución de esta ecuación con dos incógnitas ( $\rho$  y  $p$ ) usamos la ecuación de estado (3.8.2)

$$p = \mathcal{R}T\rho,$$

donde  $T$  es la temperatura,  $\mathcal{R}$  es la constante de los gases y consideramos una atmósfera isotérmica con la presión de referencia en la superficie terrestre dada por  $p(x^i = 0) \equiv p_0$ . Con esto, la solución de la ecuación (4.3.8) es

$$p(r) = p_0 e^{-ba(1-a/r)}, \quad (4.3.9)$$

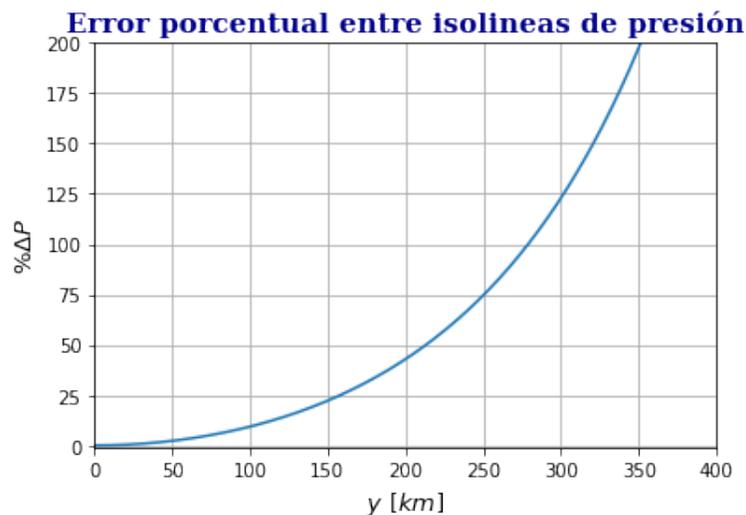
donde  $b \equiv g/\mathcal{R}T$  y  $r = [\sum_{i=1}^3 (x^i + \delta_{i3}a)^2]^{1/2}$ . Este es el campo de presión esperado con superficies esféricas isobáricas. Si consideramos el caso hidrostático de las ecuaciones aproximadas (4.3.6); resultan en un campo de presión de la forma

$$p(z) = p_0 e^{-bz}. \quad (4.3.10)$$

De acuerdo con esta ecuación, el plano tangente  $xy$  es una superficie con presión constante o isobárica  $p = p_0$ . Una forma simple de estimar la región de validez de (4.3.6) consiste en encontrar el error relativo de  $p(z)$  con respecto a la presión correcta  $p(r)$  de un modelo esférico terrestre.

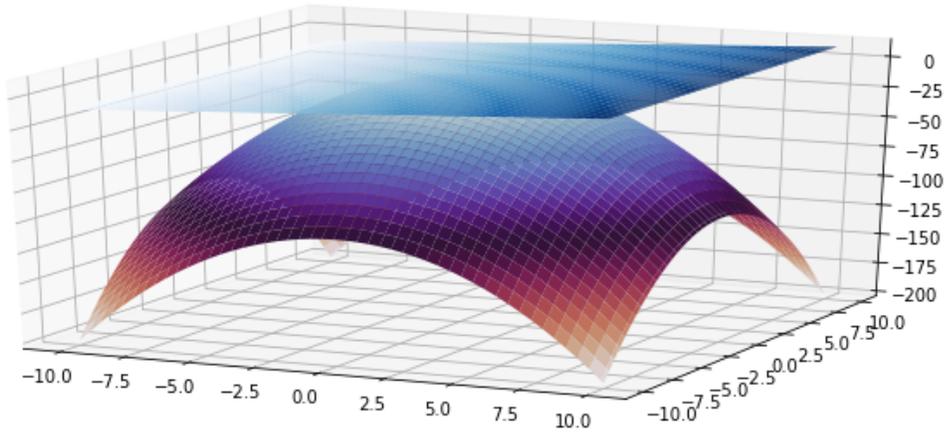
$$\% \Delta p(z) = \left| \frac{p(z)}{p(r)} - 1 \right| \times 100. \quad (4.3.11)$$

Con  $T = 300 \text{ K}$ ,  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $a = 6378000 \text{ m}$ ,  $r = \sqrt{(y^2) + (a + z_0)^2}$ ,  $R = 287 \text{ J/kgK}$ ,  $p_0 = 1013 \text{ mb}$ ,  $b = g / (R * T) \text{ m}^{-1}$  a una altura sobre la superficie terrestre de  $z_0 = 100 \text{ m}$ , obtenemos el siguiente resultado:



**Figura 4.3:** Crecimiento del error porcentual entre isolíneas de presión conforme avanzamos sobre una iso-línea en el eje  $y$  y a partir de un punto de referencia común considerando una altura de 100 metros sobre la superficie terrestre.

Notemos que alejarnos 350 km equivale aproximadamente a tener un error del 200 % en nuestro modelo aproximado. Si consideramos como máxima tolerancia un error del 10 % para una presión con un modelo aproximado de la gravedad encontramos efectivamente que la región de validez para la ecuación de momento sería para valores de  $L \leq 100 \text{ km}$ . Sin embargo, al usar una versión de la gravedad que considera un modelo esférico terrestre el dominio o validez de la ecuación de movimiento (4.3.1) es toda la esfera



**Figura 4.4:** Representación de las iso-superficies de presión a escala.

## **Parte II**

# **Estimación del campo de velocidad a partir de datos operacionales: El campo de velocidad ajustado**

El cálculo de campos de velocidad de viento atmosférico estimados a partir de datos operacionales son una componente fundamental en diversas aplicaciones de la meteorología. Como hemos mencionado, la sola interpolación para calcular campos de velocidad de viento sin una asimilación de datos adecuada no es suficiente para tener un modelo físicamente consistente dado que no satisfacen en general la ecuación de continuidad. En cálculos de transporte y difusión es posible usar los campos de velocidad estimados a partir de datos operacionales de viento como una variable de entrada. Una propuesta para evitar los errores inducidos al usar campos de viento inconsistentes físicamente es ignorar el término divergente de la ecuación de transporte (Kitada, 1987). Sin embargo, esto puede alterar sustancialmente la estructura del flujo (Rocío Mendoza, 2015; MA Núñez y Mendoza, 2015; MA Núñez y Mendoza, 2017). En esta sección hacemos un análisis local lineal del campo de viento usado para mostrar analíticamente que la perturbación de un flujo no divergente a gran escala puede producir un flujo divergente con una estructura radicalmente diferente a la estructura de un campo que conserva la masa.

Por otro lado, se analiza y revisa un método variacional para generar campos de velocidad ajustados que sean físicamente consistentes. Esto se logra minimizando la distancia entre los campos vectoriales consistentes con el balance de masa y el campo interpolado de velocidad de viento, lo cual, es posible al encontrar la solución de la ecuación elíptica, sujeta a condiciones sobre la frontera, que determina el multiplicador de Lagrange. Veremos como las condiciones de frontera que suelen usarse en la literatura (Sanín y Gustavo Montero, 2007) inducen errores significativos en el balance de masa. Se revisa entonces una propuesta (MA Núñez, 2012) que elimina, prácticamente, estos errores escogiendo de forma adecuada las condiciones en la frontera. Se muestra como mejora ampliamente el balance de masa para flujos de viento a través de regiones y subregiones de interés para modelos de meso-escala para distintos campos iniciales y distintas condiciones de frontera. Por último calculamos el porcentaje de masa que fluye sobre la frontera de la región considerada comparando los campos obtenidos a partir de diferentes condiciones de frontera.

## Capítulo 5

### INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN DE DATOS PARA GENERAR UN CAMPO INICIAL

Una técnica común de interpolación en algún punto dado situado a una altura  $z_m$  sobre el terreno, está dado como una función del inverso del cuadrado de la distancia entre el punto y la estación de medición y la inversa de la diferencia entre sus alturas (Montero, Montenegro y Escobar, 1998)

$$\mathbf{v}^0(z_m) = \xi \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{v}_n}{d_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{d_n^2}} + (1 - \xi) \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{v}_n}{|\Delta h_n|}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{|\Delta h_n|}} \quad (5.0.1)$$

donde el valor de  $\mathbf{v}_n$  es la velocidad medida en la estación  $n$  y  $N$  es el número de estaciones consideradas en la interpolación;  $d_n$  es la distancia horizontal desde la estación  $n$  hasta el punto de observación donde se desea calcular la velocidad del viento;  $|\Delta h_n|$  es la diferencia de altura entre la estación  $n$  y el punto de estudio y  $\xi$  es un parámetro de peso ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) que nos permite establecer la importancia que le damos a estos criterios de interpolación.

Una técnica de interpolación más simple está dada por promedios ponderados,

$$\mathbf{v}^\delta = \frac{\sum_{k=1}^n W_k \mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^n W_k} \quad (5.0.2)$$

con  $W_k = W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)$ , donde  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|$  es la distancia entre el punto de observación  $\mathbf{r}$  y la  $k$ -ésima estación  $\mathbf{r}_k$ .

#### Extrapolación vertical

Un modelo simple y común para obtener un perfil de velocidad vertical es el perfil logarítmico sobre la capa superficial que considera la interpolación horizontal y el efecto de la rugosidad en la intensidad y dirección del viento. Estos valores también dependen de la estabilidad del aire de acuerdo a las clases de estabilidad de Pasquill. Por encima de la capa superficial, se realiza interpolación lineal usando viento geostrófico. El perfil logarítmico está dado por,

$$\mathbf{v}_0(z_e) = \frac{\mathbf{v}^*}{k} \left( \log \frac{z}{z_0} - \Phi_m(z) \right) \quad \text{para } z_0 \leq z \leq z_{sl} \quad (5.0.3)$$

donde  $\mathbf{v}^*$  es la velocidad de fricción,  $k$  es la constante de Von Karman,  $z_0$  es la *longitud de rugosidad*, y  $z_{sl}$  es la altura de la capa superficial. Los valores de  $\Phi_m$  dependen de la clase de estabilidad de Pasquill (Zannetti, 1990). La velocidad de fricción se obtiene a partir de la ecuación (5.0.3) en cualquier punto  $(x, y)$  usando la velocidad horizontal interpolada  $\mathbf{v}^0(z_m)$

$$\mathbf{v}^* = k \frac{1}{\left( \log \frac{z_m}{z_0} - \Phi_m(z_m) \right)} \cdot \mathbf{v}_0(z_m) \quad (5.0.4)$$

La interpolación lineal está dada entonces por

$$\mathbf{v}^0(z) = \rho(z) \mathbf{v}^0(z_{sl}) + [1 - \rho(z)] \mathbf{v}_g \quad \text{para } z_{sl} < z \leq z_{pbl} \quad (5.0.5)$$

donde  $\mathbf{v}_g$  es el viento geostrófico,  $z_{pbl}$  es la altura de la capa planetaria de frontera y  $\rho(z)$  se define como

$$\rho(z) = 1 - \left( \frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right) \quad (5.0.6)$$

donde se asume que  $\mathbf{v}^0(z) = \mathbf{v}_g$  si  $z > z_{pbl}$  y  $\mathbf{v}^0 = 0$  si  $z \leq z_0$ .

En este trabajo, sin embargo, se utiliza una fuente de datos sintéticos, por simplicidad, que son suficientes para mostrar los resultados.

## Capítulo 6

### ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PROFUNDA E IMPORTANCIA DEL BALANCE DE MASA EN MODELOS DE TRANSPORTE ATMOSFÉRICO

En este capítulo analizamos la ecuación de continuidad y las formas que puede tomar de acuerdo con las propiedades del fluido y la escala que se estudie. También hacemos una revisión de la inestabilidad estructural de un flujo lineal bajo perturbaciones del balance de masa y observamos su efecto en los cálculos de transporte hidrodinámico para mostrar la importancia de generar campos que satisfagan la conservación de la masa de acuerdo con (Rocío Mendoza, 2015; MA Núñez y Mendoza, 2015).

Los modelos para estimar trayectorias de partículas de fluido atmosférico son usados para estudiar su transporte y difusión. A través de la interpolación e integración de datos discretos de velocidad de viento es posible estimar estos modelos. Desafortunadamente, la mera interpolación no garantiza el balance de masa por lo que es necesaria una aproximación del viento real que sea adecuada, de acuerdo a la región y escala de estudio, para que satisfaga la ecuación de continuidad que en ausencia de fuentes o sumideros, está dada por (3.3.6)

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\rho} \mathbf{v} = 0. \quad (6.0.1)$$

Esta ecuación en su forma completa se conoce como la versión *compresible* de la ecuación de continuidad. Otras formas que adopta van de acuerdo con las escalas y propiedades del fluido cuyo comportamiento quiera modelarse. De acuerdo con Thunis y Bornstein (Thunis y Bornstein, 1996) tenemos la siguiente clasificación:

- *Completamente anelástica*; variaciones temporales de la densidad se omiten.
- *Anelástica de Boussinesq*; variaciones temporales y espaciales de la densidad se omiten con excepción de las variaciones verticales en la densidad en el caso hidrostático.
- *Incompresible*; variaciones espaciales y temporales de la densidad se omiten por completo; el flujo es no-divergente.

Las dos formas anelásticas también se conocen por **ecuación continuidad profunda**. El considerar a la densidad como una constante puede simplificar la ecuación de continuidad así como la ecuación de movimiento. Sin embargo, es necesario saber bajo qué circunstancias esto es una buena aproximación. Cuando la densidad constante no sea buena aproximación, necesitamos la ecuación de estado (3.8.6)

$$p = \rho \mathcal{R} T$$

que representa a la densidad como función de la temperatura y la presión. Por lo tanto, el considerar a la densidad constante implica que las variaciones producidas por los cambios de presión y temperaturas son lo suficientemente pequeñas para ser despreciables. Se sabe que para los líquidos las variaciones de densidad suelen ser pequeñas incluso con cambios grandes en la presión por lo que uno esperaría poder tratarlos como incompresibles. Para el caso de los gases es menos evidente bajo que circunstancias se pueden tratar de esta forma. Sin embargo, basta recordar que el cambio fraccionario en la presión atmosférica (y por lo tanto el cambio fraccional en la densidad del aire) es pequeño incluso cuando soplan fuertes vientos en la atmósfera (Tritton, 2012).

El análisis de escalas es una técnica conveniente para estimar las magnitudes de los términos en las ecuaciones que gobiernan diferentes tipos de movimientos. Esta técnica provee la información de cantidades como la magnitud de las variables, su amplitud y fluctuaciones, así como las escalas de longitud característica, profundidad y duración en las que éstas fluctuaciones ocurren. Consideremos el ejemplo propuesto por Holton (Holton, 2004) de un ciclón sinóptico en una latitud media típica en donde la presión superficial puede fluctuar en 10 hPa sobre una superficie horizontal de 1000 km. Si llamamos  $\delta p$  a la amplitud de las fluctuaciones de presión,  $x, y$  las coordenadas horizontales y  $L$  la escala horizontal; la magnitud del gradiente de presión se puede estimar dividiendo  $\delta p$  por la longitud horizontal considerada  $L$

$$\|\nabla_{xy} p\| \approx \frac{\delta p}{L} = 10 \text{ hPa}/10^3 \text{ km} \left(10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}\right).$$

Notamos que la variación de presión por metro no es tan significativa, por lo tanto, tampoco lo es la variación de densidad.

Es posible descomponer la densidad  $\tilde{\rho}$  de la siguiente forma

$$\tilde{\rho} = \rho(z) + \rho_1(\mathbf{r}, t)$$

donde  $\rho_0$  es una densidad de referencia, por ejemplo, la densidad en algún punto elegido arbitrariamente, y  $\rho_1$  es la desviación local de esta referencia con una proporcionalidad de

$$|\rho_1| \lesssim 10^{-3} \rho_0$$

En términos generales, podemos considerar que la atmósfera mantiene una densidad constante en el tiempo por lo que el primer término de la ecuación anterior es cero:  $\partial \tilde{\rho} / \partial t = 0$ . Además al considerar escalas grandes la variación espacial de la densidad sobre plano horizontal es prácticamente nula por lo que la ecuación de continuidad se reduce a la llamada ecuación de continuidad profunda, o anelástica de Boussinesq, dada por

$$\nabla \cdot \rho(z) \mathbf{v} = 0. \quad (6.0.2)$$

Como hemos mencionado, el movimiento de los campos de viento en grandes escalas es mayormente horizontal por lo que  $\rho(z)$  es constante en el plano  $(x, y)$ , entonces

$$\nabla \cdot \rho(z) \mathbf{v} = \rho(z) \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \rho(z) \cdot \mathbf{v} = \rho(z) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.0.3)$$

y así, la ecuación de continuidad profunda se aproxima a la forma incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.0.4)$$

La estimación de campos de velocidad para cálculos de trayectorias en estudios de transporte atmosférico a partir de un campo interpolado tienen tres fuentes de error

- (i) El error en los datos (medidos o de modelos globales).
- (ii) El error debido a la resolución espacial y temporal de datos.
- (iii) El error de truncamiento al integrar numéricamente el campo de velocidad.

Desafortunadamente, en muchos trabajos no se considera que el balance de masa sea relevante para estimar trayectorias de viento (Stohl, 1998)(Bowman y Carrie, 2002)(Hoffmann y col., 2022), lo cual es otra posible fuente de error. Sin embargo, hay trabajos que sí consideran fundamental el balance de masa en cálculos de transporte atmosférico (Ratto y col., 1994; Trenberth, Hurrell y Solomon, 1995; Trenberth y Smith, 2005; Flores y col., 2010). En el trabajo de Kitada (Kitada, 1987), se señala que el uso de un campo de viento que no satisface el balance de masa puede introducir errores significativos en los cálculos de transporte y propone ignorar el término divergente del campo de velocidad, e.i.  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . El problema es que considerar un campo no divergente pueden tener una estructura sustancialmente distinta a uno divergente (Rocío Mendoza, 2015). Veamos el planteamiento a grandes rasgos.

### 6.1. Inestabilidad estructural de un campo de velocidad lineal bajo perturbaciones del balance de masa y su efecto en los cálculos de transporte

La ecuación que determina el modelo para estudiar el transporte, difusión y transformación atmosférico está dada por

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \cdot \nabla c) + R_i(t, c_1, \dots, c_n). \quad (6.1.1)$$

Operacionalmente en un instante  $t$  se dispone de un número finito de datos del viento

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_1), \mathbf{v}(\mathbf{r}_2), \mathbf{v}(\mathbf{r}_3), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{r}_n)$$

donde cada punto  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  yace sobre un malla irregular. Al estimar el campo de velocidad a partir de estos datos se genera un campo inicial  $\mathbf{v}^\delta$  con divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta$  del orden de  $\pm 10^{-5} s^{-1}$  de acuerdo con Kitada<sup>1</sup> (Kitada, 1987);  $\delta$  establece la divergencia como sigue

$$\delta = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}^\delta \quad (6.1.2)$$

<sup>1</sup>Este término es tan sólo un orden de magnitud mayor que el del decaimiento natural de sustancias radiactivas (de  $10^{-6} s^{-1}$ ).

Sin embargo, usando métodos variacionales para estimar campos no divergentes, los campos  $\mathbf{v}^\delta$  pueden tener divergencias del orden de  $\pm 10^{-3} s^{-1}$  o mayores. Esto hace que las diferencias estructurales entre los campos divergentes y no divergentes sean aún mayores lo cual puede explicar en parte el por qué de las diferencias en los modelos de trayectorias reportados en la literatura.

Consideremos la ecuación (6.1.1) con el campo de velocidad  $\mathbf{v}^\delta$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i \mathbf{v}^\delta) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \cdot \nabla c) + R_i \quad (6.1.3)$$

Podemos reescribir desarrollando el término de la divergencia de un escalar por un vector de manera que nos queda

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla c_i \cdot \mathbf{v}^\delta = -(\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i + \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \cdot \nabla c) + R_i. \quad (6.1.4)$$

Notemos que el término  $-(\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i$  genera una reacción ficticia. La solución propuesta por Kitada (Kitada, 1987) y otros autores es ignorar este término, con lo cual, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla c_i \cdot \mathbf{v}^\delta = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \cdot \nabla c) + R_i. \quad (6.1.5)$$

Sin embargo, es aquí donde la estructura de  $\mathbf{v}^\delta$  puede diferir sustancialmente de la de un campo no divergente  $\mathbf{v}^{\delta=0}$ . La solución está en trabajar con un campo  $\mathbf{v}^\delta$  cuya divergencia sea tan pequeña que la estructura de este sea lo más parecido a la de uno no divergente.

Dado que a gran escala el movimiento vertical es despreciable respecto el movimiento horizontal consideremos el campo de velocidad

$$\mathbf{v}^\delta = u^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{i} + v^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{j}. \quad (6.1.6)$$

Para analizar como es la estructura de  $\mathbf{v}^\delta$  en la vecindad de un punto  $\mathbf{r}_{00}$  (que por simplicidad consideramos a  $\mathbf{r}_{00} = 0$ ), realizamos un desarrollo en series de Taylor alrededor de  $\mathbf{r}_{00}$  considerando sólo los términos lineales. En términos de los componentes tenemos

$$\begin{aligned} u^\delta(x, y) &= u(x_0, y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \\ v^\delta(x, y) &= v(x_0, y_0) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0). \end{aligned}$$

De esta forma, la descomposición local de  $\mathbf{v}^\delta$  es

$$\mathbf{v}^\delta(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (6.1.7)$$

donde  $\nabla \mathbf{v}$  es la matriz del gradiente del campo de velocidad en  $\mathbf{r}_0$ . Es posible descomponer cualquier matriz cuadrada como la suma de una matriz simétrica con una anti-simétrica

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2} (\mathbb{M} - \mathbb{M}^T) + \frac{1}{2} (\mathbb{M} + \mathbb{M}^T) \quad (6.1.8)$$

donde la parte anti-simétrica está dada por

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} (\mathbb{M} - \mathbb{M}^T)$$

y la parte simétrica se puede descomponer a su vez como

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2} (\mathbb{M} + \mathbb{M}^T) = \mathbb{S}_0 + \delta \mathbb{I}$$

donde  $\mathbb{S}_0$  es una matriz simétrica con traza cero e  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad. Considerando esta descomposición, es posible escribir el gradiente de la velocidad de la siguiente forma

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_y - v_x \\ v_x - u_y & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x - v_y & u_y + v_x \\ u_y + v_x & v_y - u_x \end{pmatrix} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.1.9)$$

Si introducimos los siguientes parámetros hidrodinámicos

$$\omega = \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^\delta}{2}, \quad a = \frac{u_x - v_y}{2}, \quad b = \frac{u_y + v_x}{2},$$

nos queda

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \delta & b - \omega \\ b + \omega & -a + \delta \end{pmatrix} \quad (6.1.10)$$

donde  $a$  y  $b$  dan la deformación del flujo,  $\delta$  mide la divergencia y  $\omega$  es la vorticidad. De esta forma, el campo lineal  $\mathbf{v}$  (6.1.7) se puede representar como

$$\mathbf{v}^\delta = \begin{pmatrix} u^\delta \\ v^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - \omega \\ b + \omega & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_{00} \end{pmatrix} \quad (6.1.11)$$

o bien,

$$\mathbf{v}^\delta = \mathbf{v}^{\delta=0} + \mathbf{u}^\delta + \mathbf{v}_{00} \quad (6.1.12)$$

donde  $\mathbf{v}^{\delta=0}$  es la parte no divergente y  $\mathbf{u}^\delta = \delta \mathbf{r}$  es una perturbación divergente de  $\mathbf{v}^{\delta=0}$ .

Para determinar la estructura local del campo  $\mathbf{v}$  calculamos la líneas de corriente de las partículas de fluido<sup>2</sup>. El sistema de ecuaciones del campo  $\mathbf{v}^\delta$  está dado por

$$\mathbf{v}^\delta = \frac{d\mathbf{r}^\delta}{dt} = \begin{pmatrix} a + \delta & b - \omega \\ b + \omega & -a + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_{00} \end{pmatrix}$$

con  $u_{00} = v_{00} = cte$  y la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{en } t = 0,$$

<sup>2</sup>Como se consideran flujos estacionarios, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias.

tiene una solución de la forma

$$\mathbf{r}^\delta = \mathbf{r}_0 e^{\mathbb{M}t} + \int_0^t e^{\mathbb{M}(t-\tau)} \mathbf{v}_{00} d\tau. \quad (6.1.13)$$

Una forma general de obtener  $e^{\mathbb{M}t}$  es calculando los eigen-valores de la matriz  $\mathbb{M}$  resolviendo la ecuación

$$|\mathbb{M} - \lambda \mathbb{I}| = 0. \quad (6.1.14)$$

Dado que  $\mathbb{M}$  es una matriz cuadrada  $2 \times 2$  se obtiene dos raíces;  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . La estructura del campo  $\mathbf{v}^\delta$  está determinada por el discriminante  $D = a^2 + b^2 - \omega^2$  de la ecuación de eigen-valores de  $\mathbb{M}$ .

## 6.2. Tipos de estructuras en campos de velocidad divergentes y no divergentes

De la ecuación (6.1.14) obtenemos los eigen-valores siguientes,

$$\lambda_1^\delta = \delta + \sqrt{D} \quad \text{y} \quad \lambda_2^\delta = \delta - \sqrt{D}, \quad (6.2.1)$$

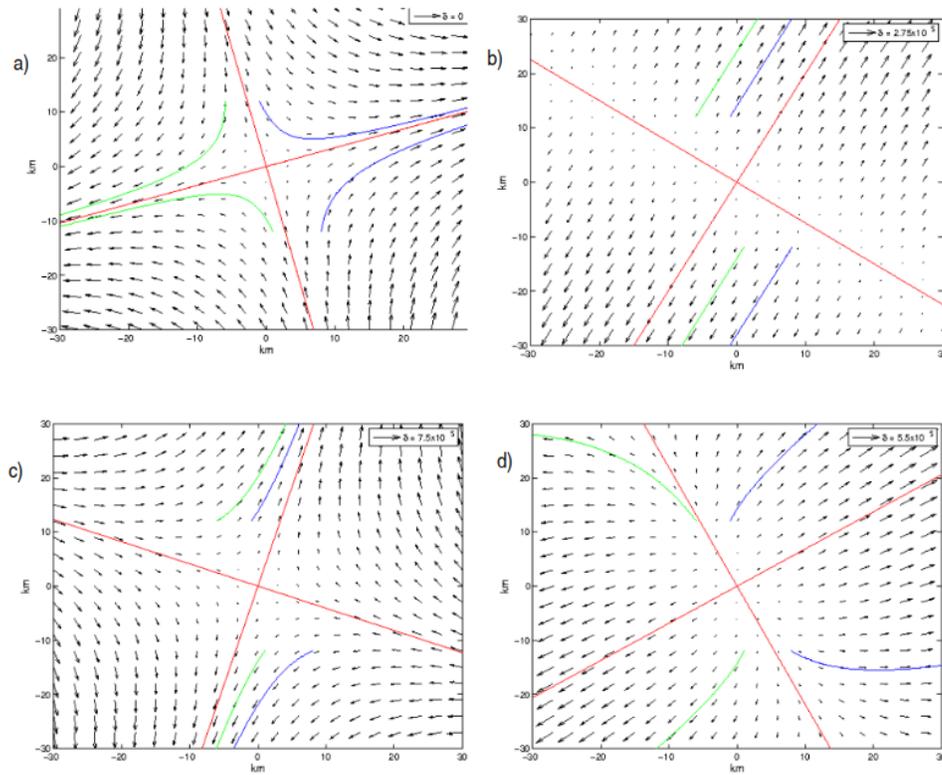
lo cual implica que un campo **NO** divergente  $\mathbf{v}^{\delta=0}$  sólo puede tener una de dos estructuras posibles:

- (i) Para un discriminante  $D > 0$  los eigen-valores son reales y tienen signos diferentes. El campo  $\mathbf{v}^{\delta=0}$  tiene estructura hiperbólica cuyas direcciones principales son determinadas por los eigen-vectores de  $\mathbb{M}$  (Fig. 6.1 a).
- (ii) Cuando  $D < 0$  los eigen-vectores son imaginarios y  $\mathbf{v}^{\delta=0}$  tiene una estructura elíptica (Fig. 6.2 izq.).

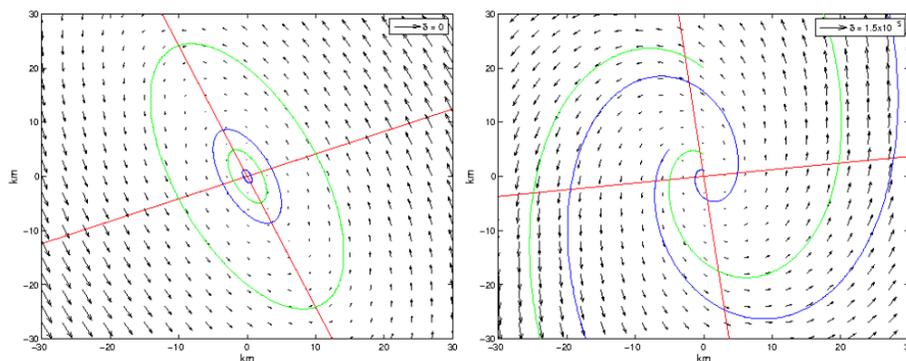
Sin embargo, considerar la perturbación de  $\mathbf{v}^{\delta=0}$  con  $\mathbf{u}^\delta \neq \mathbf{0}$  implica que el campo  $\mathbf{v}^\delta$  tendrá otro tipo de estructuras de acuerdo con los eigen-valores (6.2.1). En el caso de  $\delta \neq 0$  y  $D > 0$  hay tres tipos de estructura de campo.

- (i) Para  $|\delta| < \sqrt{D}$  el campo mantiene su estructura hiperbólica, sin embargo cambia la dirección del flujo y las líneas de corriente (Fig. 6.1 b).
- (ii) Con  $\delta = \sqrt{D}$  un eigen-valor se anula y el otro tiene el signo de  $\delta$ . Uno de los ejes principales asociados a  $\lambda = 0$  consiste de puntos de equilibrio. (Fig. 6.1 c)
- (iii) Para  $|\delta| > \sqrt{D}$  los eigenvalores tienen el signo de  $\delta$  las trayectorias se comportan como parábolas que convergen hacia el origen para  $\delta > 0$  y divergen para  $\delta < 0$  (Fig. 6.1 d)

Para el caso  $\delta \neq 0$  y  $D < 0$  el campo divergente  $\mathbf{v}^\delta$  es similar al campo no divergente con estructura elíptica. Con  $\delta > 0$  las trayectorias son espirales que convergen en el origen y con  $\delta < 0$  divergen (Fig. 6.2).



**Figura 6.1:** Considerando los parámetros hidrodinámicos con valores de  $\omega = 4$ ,  $a = -2$  y  $b = 2$ , podemos apreciar el contraste estructural de los campos de velocidad. En el inciso (a) tenemos el campo NO divergente  $v^{\delta=0}$  con un discriminante  $D > 0$  por lo que observamos una estructura hiperbólica. En los siguientes escenarios (incisos b, c y d) tenemos los casos del campo perturbado del inciso (a) para  $\delta = \sqrt{D}$ ,  $|\delta| < \sqrt{D}$  y  $|\delta| > \sqrt{D}$  respectivamente. Fuente (Rocío Mendoza, 2015).



**Figura 6.2:** Con los mismos valores  $\omega = 4$ ,  $a = -2$  y  $b = 2$  se consideró el caso con discriminante  $D < 0$  para un campo NO divergente de lado izquierdo en donde se puede observar una estructura elíptica. De lado derecho tenemos el caso perturbado  $\delta \neq 0$  en donde la estructura se transforma en espirales que convergen al origen. Fuente (Rocío Mendoza, 2015).

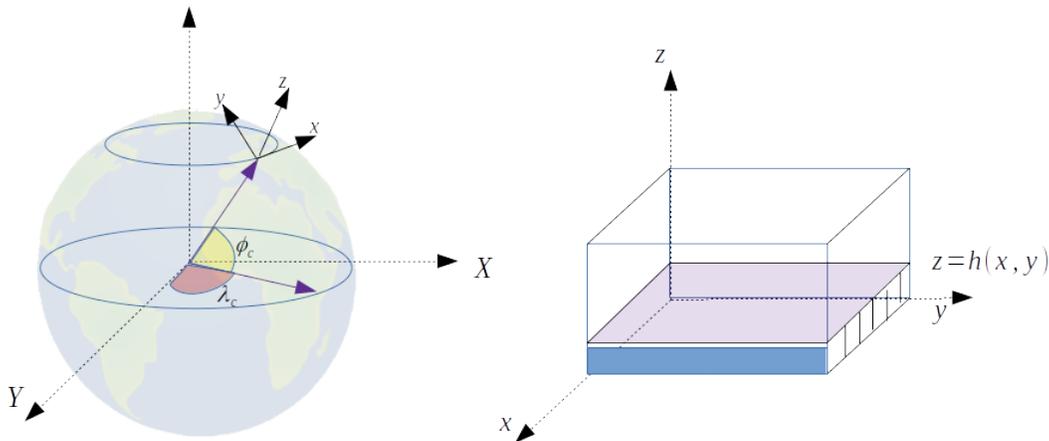
## Capítulo 7

### ESTIMACIÓN DE CAMPOS DE VELOCIDAD QUE CONSERVAN MASA

Consideremos un sistema cartesiano  $xyz$  con su origen en un punto con coordenadas geográficas  $(\lambda, \phi_c)$  sobre un modelo esférico terrestre. En este sistema definimos una región acotada  $\Omega$ .

$$\Omega = \{x_{min} \leq x \leq x_{max}, \quad y_{min} \leq y \leq y_{max}, \quad h(x, y) \leq z \leq z_{max}\},$$

donde  $h(x, y)$  es la elevación del terreno sobre el punto  $(x, y)$  en el plano tangente  $xy$ :



**Figura 7.1:** El plano  $xy$  es tangente a la esfera y el eje  $z$  es exterior. De lado derecho tenemos la región acotada  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$ .

La velocidad del viento real  $\mathbf{v}_T$  relativa al sistema  $xyz$  es

$$\mathbf{v}_T = \sum_i v_T^i \hat{\mathbf{x}}_i.$$

El objetivo es encontrar la mejor estimación del campo de velocidad real  $\mathbf{v}_T$  a partir de un campo inicial de la forma

$$\mathbf{v}^0 = \sum_i v^{i0} \hat{\mathbf{x}}_i$$

generado por *interpolación* de datos obtenidos a través de una red de monitoreo meteorológica. Debido a que en general el campo  $\mathbf{v}^0$  no satisface la ecuación de continuidad (6.0.4), es necesario estimar un campo de velocidad que si lo haga. Además, sabemos que el viento real no atraviesa el terreno por lo que el campo ajustado de viento debe estar sujeto también a esta condición

$$\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para } z = h(x, y) \quad (7.0.1)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la superficie terrestre. Una expresión para  $\mathbf{n}$  a partir de la ecuación de la superficie terrestre  $z = h(x, y)$ , es

$$\mathbf{n} = \nabla(h - z) = \hat{x}\partial_x h + \hat{y}\partial_y h - \hat{z}.$$

### 7.1. Resultado: $\mathbf{U}^0$ reproduce la variación del terreno en vertical

El campo inicial  $\mathbf{v}^0$  suele ser medido por redes meteorológicas sólo en el plano horizontal por lo que

$$\mathbf{v}^0 = u^0(x, y)\mathbf{i} + v^0(x, y)\mathbf{j}, \quad (7.1.1)$$

y la componente vertical tiene que ser inferida. El modelo más simple para un campo de velocidad de viento consistente con el balance de masa está dado por

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{v}^0 + w^0\mathbf{k}, \quad (7.1.2)$$

donde  $w^0$  se obtiene a partir de la conservación de masa y la tangencialidad del campo  $\mathbf{U}^0$  con el terreno,

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^0 = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad z = h(x, y). \quad (7.1.3)$$

La estimación de  $\mathbf{U}^0$  es simple, sin embargo, algunos autores evitan el uso de este campo de velocidad debido a que se considera sensible a los errores de datos. En esta sección demostramos que  $\mathbf{U}^0$  reproduce la variación del terreno indefinidamente hacia arriba para valores constantes de la divergencia ( $\nabla \cdot \mathbf{v}^0 = \delta = cte$ ) la cual es la verdadera razón por la que  $\mathbf{U}^0$  no debe de usarse en cálculos de transporte atmosférico.

Para calcular  $\mathbf{U}^0$  consideremos las coordenadas siguientes

$$\sigma^1 = y^1 = x \quad \sigma^2 = y^2 = y, \quad \sigma^3 = \sigma = z - h(x, y). \quad (7.1.4)$$

Supongamos que  $\tilde{x}(t, x_0, y_0)$  y  $\tilde{y}(t, x_0, y_0)$  son soluciones del problema con condiciones iniciales siguiente

$$\dot{x} = u^0(x, y), \quad \dot{y} = v^0(x, y) \quad \text{con} \quad x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{en} \quad t = 0. \quad (7.1.5)$$

Usando las soluciones  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  obtenemos para  $z$  que (ver apéndice D)

$$\dot{z} = w^0[x, y, \sigma(x, y, z)] = \frac{dh(x, y)}{dt} - \int_0^\sigma \nabla \cdot \mathbf{v}^0 ds = \frac{dh(x, y)}{dt} - \delta\sigma \quad (7.1.6)$$

donde se usó que  $\nabla \cdot \mathbf{v}^0 = \delta = cte$ . Al pasar la derivada de  $h(x, y)$  respecto el tiempo de lado izquierdo nos queda

$$\frac{d}{dt}[z - h(x, y)] = -\delta[z - h(x, y)], \quad (7.1.7)$$

lo cual nos sugiere buscar una solución en términos de  $\sigma$  de la forma

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\delta t}.$$

Tenemos entonces una expresión explícita para  $z$  dada por

$$z = h(x, y) + [z_0 - h_0]e^{-\delta t} \quad (7.1.8)$$

De esta forma las líneas de corriente de  $\mathbf{U}^0$  tienen la forma vectorial

$$\mathbf{r}(t, x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}_{xy}(t, x_0, y_0) + z(t, x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}, \quad \text{con } \mathbf{r}_{xy} = \tilde{x}\mathbf{i} + \tilde{y}\mathbf{j} \quad (7.1.9)$$

que es un caso particular de

$$\mathbf{R}(t, z, x_0, y_0) = \mathbf{r}_{xy}(t, x_0, y_0) + z\mathbf{k}. \quad (7.1.10)$$

Esta es la ecuación vectorial de una superficie que se define a través del desplazamiento vertical de la curva horizontal  $\mathbf{r}_{xy}$  definida por la intersección del plano  $\mathbf{R}$  con la topografía, es decir, las líneas de corriente de  $\mathbf{U}^0$  reproduce los efectos del terreno sobre la vertical indefinidamente.

### Ejemplo 1. Caso $\delta = 0$ .

Suponer que tenemos un campo de velocidad constante

$$\mathbf{v}^0 = u^0\mathbf{i} + v^0\mathbf{j},$$

la ecuación (7.1.5) resulta ser la ecuación del plano

$$\mathbf{R} = t\mathbf{v}^0 + z\mathbf{k} + \mathbf{r}_0,$$

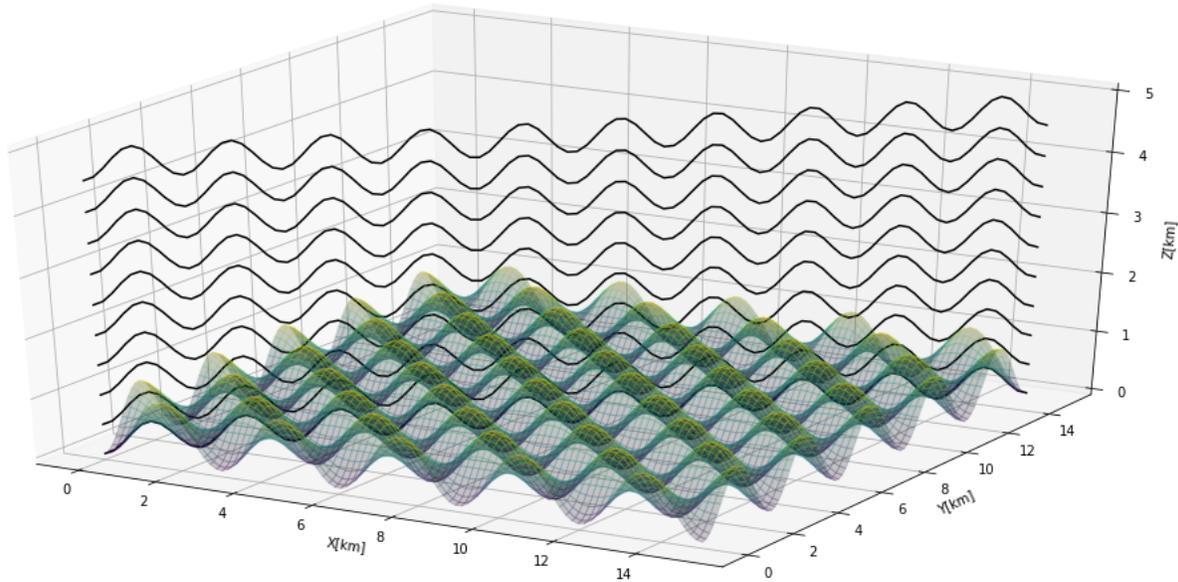
que contiene las líneas de corriente de  $\mathbf{U}_0$  con la misma condición inicial  $(x_0, y_0)$  y donde  $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ . Dado que en este caso la divergencia es cero,  $\delta = 0$ , la solución de la ecuación (7.1.6) de acuerdo con (7.1.8) es

$$z = h(x, y) + z_0 - h(x_0, y_0). \quad (7.1.11)$$

Por lo tanto, las líneas de  $\mathbf{U}^0$  se obtienen moviendo verticalmente la curva definida por la intersección del plano  $\mathbf{R}$  con la topografía. En (MA Núñez y Sánchez, 2012) se calcula el campo  $\mathbf{U}^0$  en un dominio  $\Omega_\sigma$  con  $x_M = y_M = 15\text{km}$ ,  $\sigma_M = 4\text{km}$ ,  $u^0 = v^0 = 0,5\text{ms}^{-1}$  y una superficie topográfica de la forma

$$h = [1 + \cos(w_h x) \cos(w_h y)]/2 \quad \text{con } w_h = 10\pi/x_M. \quad (7.1.12)$$

Podemos graficar las trayectorias del campo  $\mathbf{U}^0$  usando estos parámetros y la misma topografía para visualizar estos resultados en la figura 7.2.



**Figura 7.2:** Líneas de corriente del ejemplo 1 para un campo inicial  $\mathbf{v}^0 = u^0\mathbf{i} + v^0\mathbf{j}$  cuya divergencia es nula  $\delta = 0$ . Vemos como para este caso las trayectorias de  $\mathbf{U}^0$  reproducen las variaciones de la superficie topográfica en vertical de acuerdo con (7.1.11).

### Ejemplo 2. Caso $\delta > 0$ .

Suponer que tenemos ahora un campo de velocidad de la forma

$$\mathbf{v}^0 = x\beta\mathbf{i} + y\beta\mathbf{j} \quad \text{con } \beta > 0,$$

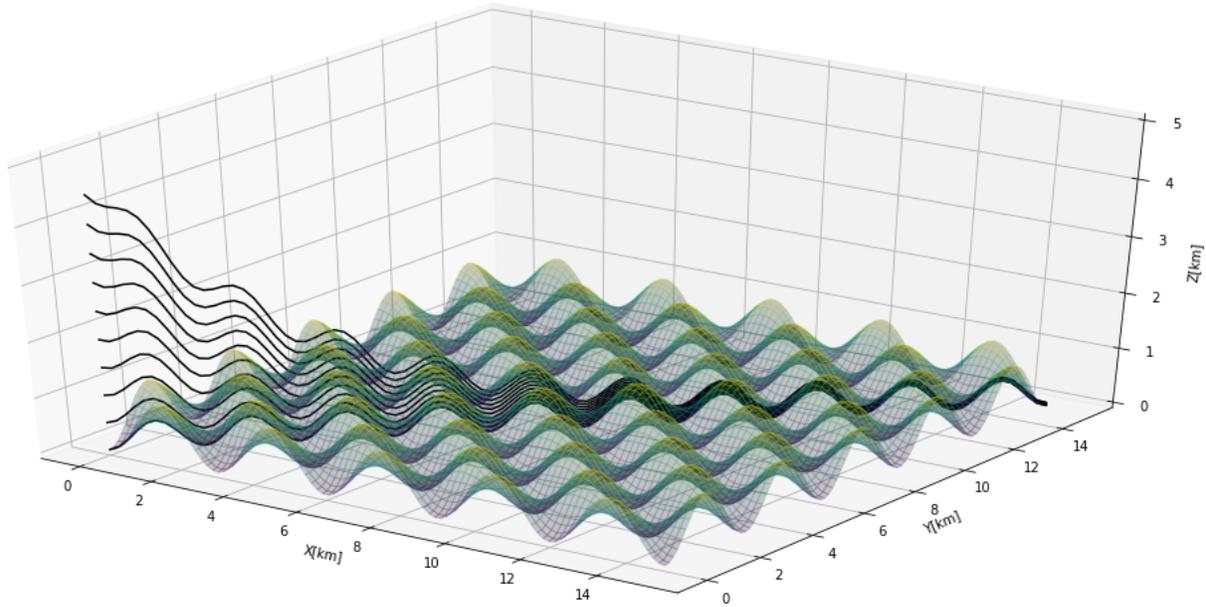
Considerando el problema con condiciones iniciales (7.1.5), las soluciones de las coordenadas horizontales en este caso son

$$x = x_0 e^{\beta t} \quad \text{y} \quad y = y_0 e^{\beta t}.$$

Mientras que la componente vertical está dada por la ecuación (7.1.8) con divergencia  $\delta = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 2\beta$ , por lo tanto queda como

$$z = h(x, y) + [z_0 - h_0] e^{-2\beta t}.$$

Con este resultado para cualquier  $\beta > 0$  encontramos que las líneas de corriente convergen al terreno de forma exponencial como lo muestra la figura 7.3 a continuación.



**Figura 7.3:** Líneas de corriente del ejemplo 2. Notamos como las líneas de corriente convergen al terreno con una divergencia positiva del campo inicial  $\mathbf{v}^0$  con  $\beta = 0,2 \text{ m/s}^2$ .

### Ejemplo 3. Caso $\delta < 0$ .

Por último consideremos un campo de velocidad inicial con divergencia negativa,

$$\mathbf{v}^0 = -x\beta\mathbf{i} - y\beta\mathbf{j}.$$

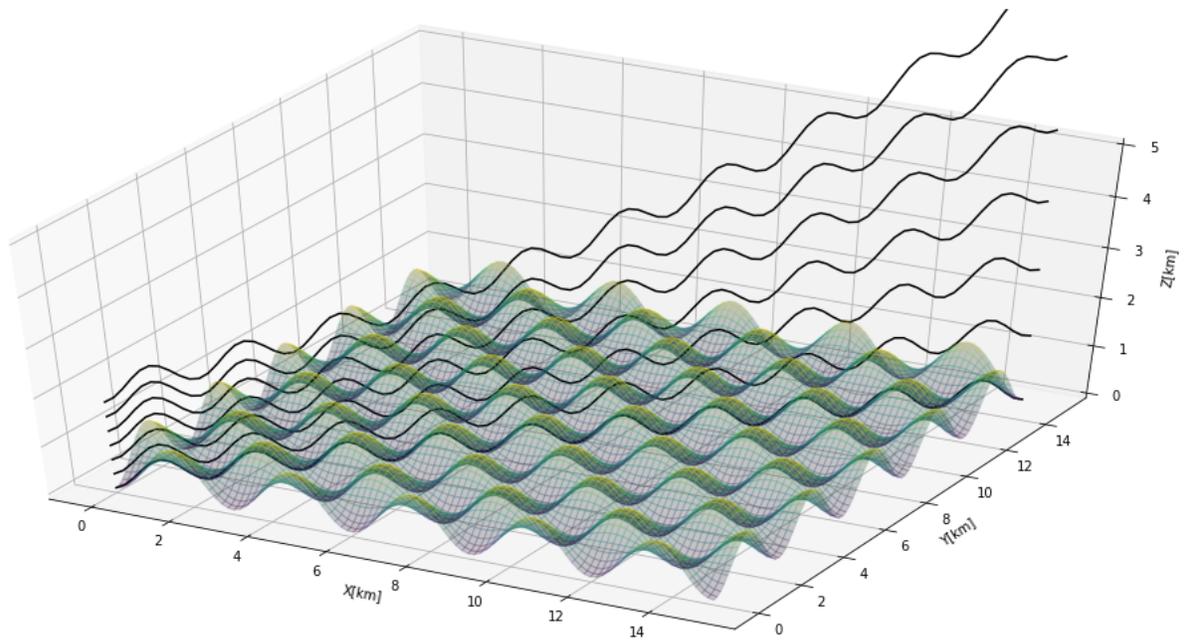
Al resolver el problema de condiciones iniciales (7.1.5), las componentes horizontales de las trayectorias resultan ser

$$x = x_0 e^{-\beta t} \quad y = y_0 e^{-\beta t}.$$

La componente vertical está dada por la ecuación (7.1.8) con divergencia  $\delta = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 2\beta$ , por tanto,

$$z = h(x, y) + [z_0 - h_0] e^{2\beta t}.$$

Para cualquier  $\beta > 0$ , observamos que las líneas de corriente divergen exponencialmente del terreno como lo muestra la figura 7.3 a continuación.



**Figura 7.4:** Líneas de corriente del ejemplo 3. Como era de esperarse, las líneas de corriente divergen del terreno para el caso con  $\delta < 0$  y  $\beta > 0$  constante.

## Capítulo 8

### EL CÁLCULO DE UN CAMPO DE VELOCIDAD AJUSTADO Y LOS PROBLEMAS DE FRONTERA

Existen dos formas equivalentes para calcular un campo de velocidad ajustado  $\mathbf{v}$  que satisfaga el balance de masa:

1. Descomposición de Helmholtz.
2. Formulación variacional.

Estos dos métodos nos llevan a un campo ajustado que se obtiene resolviendo un problema elíptico. Una forma eficiente de resolverlo es aproximar su solución por series de Fourier. La solución del problema elíptico nos permite calcular el campo de velocidad.

El método variacional consiste básicamente en encontrar un campo de velocidad  $\mathbf{v}$  lo más cercano a  $\mathbf{v}^0$  que satisfaga la ecuación de conservación de masa (6.0.4) y la condición que nos genera un campo vectorial tangente al terreno (7.0.1). Considerando el apéndice (E), tenemos que  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  representa una medida, o *métrica*

$$[d(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}\|_{S\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^T \mathbb{S} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\Omega, \quad (8.0.1)$$

que proporciona la distancia entre dos campos vectoriales,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$ . De esta forma, el problema de aproximar un campo  $\mathbf{v}_T$  por medio de un campo  $\mathbf{v}$  se puede plantear como sigue

Hallar el campo  $\mathbf{v}$  más cercano a  $\mathbf{v}^0$  con respecto a la **métrica**  $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}^0)$  que satisfaga (6.0.4) y (7.0.1).

En general, el campo estimado  $\mathbf{v}$  no coincidirá exactamente con el campo verdadero  $\mathbf{v}_T$  debido a que el campo  $\mathbf{v}$  se obtiene ajustando el campo inicial  $\mathbf{v}^0$ . Por tal razón nos referiremos a  $\mathbf{v}$  como el campo ajustado (M.A. Núñez, Ramírez y Hernández, 2004).

#### 8.1. Descomposición de Helmholtz

Consideremos una región  $\Omega \subseteq R^3$ ; es posible descomponer un campo vectorial  $\mathbf{A}$  en dos campos  $\nabla\phi$  y  $\mathbf{B}$  de manera que

$$\mathbf{A} = \nabla\phi + \mathbf{B} \quad \text{en } \Omega, \quad (8.1.1)$$

donde  $\mathbf{B}$  debe satisfacer la condición siguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8.1.2)$$

Para hallar una solución aplicamos el operador divergencia  $\nabla \cdot$ , a la relación (8.1.1)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 \phi + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

imponiendo la condición (8.1.2), concluimos que  $\phi$  debe satisfacer la **ecuación de Poisson** (ver apéndice (B.2))

$$\nabla^2 \phi = F \quad (8.1.3)$$

donde  $F = \nabla \cdot \mathbf{A}$ . Debemos considerar ciertas restricciones sobre la solución de la ecuación (8.1.3):

- (i) Para una región acotada o semi acotada  $\Omega \subset R^3$  la solución de esta última ecuación NO ES UNICA ya que depende de las condiciones a la frontera que se impongan a  $\phi(t, \mathbf{r})$  y a la fecha no hay consenso de cuáles son las condiciones de frontera óptimas que deben imponerse a  $\phi$ .
- (ii) El único caso en el cual la ecuación (8.1.3) tiene solución única es cuando  $\Omega = R^3$ , ya que en este caso la única condición de frontera con sentido físico

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \phi(t, \mathbf{r}) = 0,$$

es suficiente para garantizar la unicidad de  $\phi$ .

Habiendo calculado una solución  $\phi$  de (8.1.3) el cálculo de  $\mathbf{B}$  es inmediato

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \nabla \phi. \quad (8.1.4)$$

Supongamos que  $\mathbf{A}$  es el campo de velocidad obtenido por interpolación  $\mathbf{v}^0$  que tiene la siguiente descomposición

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v} + \nabla \phi, \quad (8.1.5)$$

donde  $\mathbf{v}$  es el campo ajustado que satisface la condición de balance de masa,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y  $\phi$  es la solución del problema elíptico,

$$-\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{v}^0. \quad (8.1.6)$$

Al calcular la función  $\phi$ , el campo  $\mathbf{v}$  está dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 - \nabla \phi. \quad (8.1.7)$$

## 8.2. La formulación variacional estándar

La formulación variacional para encontrar un campo de velocidad, propuesta por (Sasaki, 1958), consiste en encontrar el campo  $\mathbf{v}$  que minimiza al funcional definido por la norma vectorial (ver apéndice E),

$$J(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^0\|_{S\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^T \mathbb{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) d\Omega, \quad (8.2.1)$$

que satisfaga las restricciones de conservación de masa y la condición de que el campo de velocidad sea tangente al terreno, *e.i.* (6.0.4) y (7.0.1) respectivamente. Estas condiciones sugieren buscar al campo  $\mathbf{v}$  en el conjunto

$$\mathbb{V}^* = \{\mathbf{w}(x) \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma\}, \quad (8.2.2)$$

constituido por los campos vectoriales en  $\mathbf{w}$  con divergencia nula<sup>1</sup> en la región  $\Omega$  y tangente al viento real sobre la frontera  $\Gamma$  de la región.  $L^2(\Omega)$  es el espacio de funciones cuadrado integrables en  $\Omega$ ; definimos también el espacio de funciones cuadrado integrables y diferenciales como

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \partial_{x^i} f \in L^2(\Omega)\}.$$

En el desarrollo de la **formulación variacional estándar** se usa la siguiente descomposición de la frontera

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

donde  $\Gamma_N$  representa la parte de la frontera en donde la ecuación (1.7.3) está sujeta a condiciones de frontera Neumann, o de no-flujo de la forma

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_S} = 0. \quad (8.2.3)$$

Esta condición es falsa en general pero se usa para la frontera cerrada como lo es el terreno de la región considerada. Como veremos, esta condición sobre el terreno obliga a que la frontera complementaria quede sujeta a condiciones tipo Dirichlet

$$\lambda = 0 \quad (8.2.4)$$

también llamadas *condiciones de frontera naturales* o frontera de flujo abierto. Esta condición implica que la derivada normal de  $\lambda$  es en general distinta de cero por lo que puede haber cambios en la cantidad de masa de la región  $\Omega$  al haber flujos entrando o saliendo (Ratto y col., 1994).

### La ecuación elíptica

La distancia entre los campos vectoriales  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{v}^0$  en  $\mathbb{V}^*$  definen el funcional

$$J(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}^0\|_{S\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{w} - \mathbf{v}^0)^T \mathbb{S} (\mathbf{w} - \mathbf{v}^0) d\Omega. \quad (8.2.5)$$

---

<sup>1</sup>Un campo vectorial  $\mathbf{w}(x)$  con divergencia igual a cero en una región  $\Omega$  recibe el nombre de campo solenoidal

De esta manera, encontrar el campo  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{V}^*$  supone que

$$J(\mathbf{v}) = \min J(\mathbf{w}) \text{ donde } \mathbf{w} \in \mathbb{V}. \quad (8.2.6)$$

Por tanto, asumamos que existe tal campo  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{V}$  que minimiza el funcional  $J(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}^0\|_{\Omega S}^2$ , por lo que

$$J(\mathbf{v}) \leq J(\mathbf{w}) \text{ para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{V}$$

De existir  $\mathbf{v}$ , debe satisfacerse para cada número real  $\epsilon$  que

$$\frac{d}{d\epsilon} J(\mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w}) \Big|_{\epsilon=0} = 0 \text{ para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{V}. \quad (8.2.7)$$

El funcional puede escribirse como

$$J(\mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w} - \mathbf{v}^0\|_{\Omega S}^2 = \|\Delta \mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w}\|_{\Omega S}^2,$$

donde  $\mathbf{v} - \mathbf{v}^0 \equiv \Delta \mathbf{v}$ . Las propiedades del producto interior  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Omega S}$  nos permiten escribir la norma anterior como

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w}\|_{\Omega S}^2 &= \langle \Delta \mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w} | \Delta \mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w} \rangle_{\Omega S} \\ &= \langle \Delta \mathbf{v} | \Delta \mathbf{v} \rangle_{\Omega S}^2 + 2\epsilon \langle \Delta \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle_{\Omega S} + \langle \epsilon \mathbf{w} | \epsilon \mathbf{w} \rangle_{\Omega S}^2 \\ &= \|\Delta \mathbf{v}\|_{\Omega S}^2 + 2\epsilon \langle \Delta \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle_{\Omega S} + \epsilon^2 \|\mathbf{w}\|_{\Omega S}^2. \end{aligned}$$

Esta última expresión representa la ecuación de una parábola para cualquier  $\mathbf{w}$  y número real  $\epsilon$  en el plano  $\epsilon$  vs  $J$ . Por tanto, tiene un mínimo y gracias a esto es posible asegurar que si el campo ajustado  $\mathbf{v}$  existe, minimiza a  $J(\mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w})$ . Al derivar

$$\frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 2\langle \Delta \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle_{\Omega S},$$

obtenemos la condición que tiene que cumplir el campo  $\mathbf{v}$  para que minimice a  $J(\mathbf{w})$ . Reescribiendo en términos de la integral definida por el producto interior nos queda

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{v}^T \mathbb{S} \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}. \quad (8.2.8)$$

Las componentes  $w^k$  de  $\mathbf{w}$  no son independientes ya que deben satisfacer las restricciones físicas, i.e., la conservación de masa (6.0.4),

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \sum_k \frac{\partial w^k}{\partial x^k} = 0 \text{ en } \Omega, \quad (8.2.9)$$

así como la condición de frontera (7.0.1),

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \sum_k w^k n_k = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma. \quad (8.2.10)$$

A partir de la condición (8.2.9) es posible despejar una componente  $w^{k'}$  en términos de las otras  $w^k$  para calcular el campo  $\mathbf{v}$  que satisface la ecuación (8.2.8).

Otra opción es usar la función  $\lambda(x)$  conocida como **multiplicador de Lagrange** sobre las restricciones para eliminar la variable dependiente  $w^{k'}$ . Por tanto, al integrar la condición de continuidad sobre todo el dominio  $\Omega$  tenemos

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (8.2.11)$$

Integrando por partes podemos descomponer la expresión anterior de la manera siguiente

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \mathbf{w} d\Omega.$$

El teorema de la divergencia hace posible reescribir la integral de volumen como integral de superficie,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda \mathbf{w}) d\Omega = \oint_{\Omega} \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma.$$

De esta forma, la ecuación (8.2.11) queda de la siguiente forma

$$\oint_{\Omega} \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (8.2.12)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal y exterior a la superficie  $\Gamma$ . Sumando miembro a miembro la ecuación anterior con la condición obtenida para que  $\mathbf{v}$  minimice a  $J(\mathbf{w})$  (8.2.8), obtenemos la ecuación siguiente

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1,2,3} \left[ \sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \right] w^k d\Omega + \oint_{\Gamma} \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0, \quad (8.2.13)$$

que tiene que satisfacer el campo ajustado  $\mathbf{v}$  para cada  $\mathbf{w}$  que satisface las restricciones físicas en  $\mathbb{V}^*$ . Supongamos por ahora que  $\mathbf{w}$  pertenece a un subconjunto de campos vectoriales en  $\mathbb{V}^*$  que se anulan en  $\Gamma$ ; la ecuación anterior se reduce a

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1,2,3} \left[ \sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \right] w^k d\Omega = 0, \quad (8.2.14)$$

para todo  $\mathbf{w} = 0$  sobre  $\Gamma$ . Imponemos entonces a  $\lambda$  la condición para que se anule el coeficiente de la componente dependiente  $w^{k'}$ ,

$$\sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = 0 \quad \text{para } k = k'. \quad (8.2.15)$$

De esta forma la ecuación (8.2.14) queda como

$$\int_{\Omega} \sum_{k \neq k'} \left[ \sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \right] w^k d\Omega = 0. \quad (8.2.16)$$

Ahora las componentes restantes  $w^k$  ( $k \neq k'$ ) son independientes y no nulas por lo que concluimos que la ecuación anterior sólo se cumple si los coeficientes de dichas componentes también se anulan, es decir cuando  $\Delta v^l$  y  $\lambda$  satisfacen

$$\sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = 0 \text{ con } k \neq k'. \quad (8.2.17)$$

De esta forma, al considerar la ecuación (8.2.17) y (8.2.15), concluimos que la **condición necesaria** para que el campo ajustado  $\mathbf{v}$  minimice el funcional  $J(\mathbf{w})$  es que satisfaga el conjunto de ecuaciones

$$\sum_l \Delta v^l S_{kl} - \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = 0 \text{ para } k = 1, 2, 3 \quad (8.2.18)$$

Como estas ecuaciones no dependen de un campo  $\mathbf{w}$ , deben ser válidas para cada  $\mathbf{w}$  en todo el espacio  $\mathbb{V}^*$ . Por tanto, de la ecuación (8.2.13) nos queda

$$\oint_{\Gamma} \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \text{ para cada } \mathbf{w} \text{ en } \mathbb{V}. \quad (8.2.19)$$

Además sabemos que cada  $\mathbf{w}$  en  $\mathbb{V}^*$  satisface  $\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  donde  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_N$  con lo cuál la ecuación anterior queda como

$$\oint_{\Gamma_D} \lambda \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma_D = 0. \quad (8.2.20)$$

Esta ecuación debe cumplirse para cada  $\mathbf{w}$  en  $\mathbb{V}^*$ , lo cual **sólo es posible si  $\lambda(x)$  satisface la condición de frontera Dirichlet**

$$\lambda(x) = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \quad (8.2.21)$$

Notemos que esta condición de frontera se vuelve necesaria al imponer la condición Neumann sobre la frontera  $\Gamma_N$ . En este caso se usó esta condición sobre la superficie terrestre como restricción para que el campo de velocidad sea tangencial al terreno. Sin embargo, en general, al aplicar esta condición sobre una parte de frontera, el resto de la frontera tendrá que satisfacer necesariamente la condición Dirichlet (8.2.21) <sup>2</sup>.

Por tanto, para que  $\mathbf{v}$  minimice el funcional  $J(\mathbf{w})$  en el conjunto  $\mathbb{V}$ ,  $\lambda$  y  $\mathbf{v}$  tienen que satisfacer las condiciones (8.2.18) y (8.2.21). Estas condiciones junto con las que tiene que cumplir el campo  $\mathbf{v}$  adicionalmente ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  y  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  sobre  $\Gamma_N$ ) determinan de forma única a  $\lambda$  y  $\mathbf{v}$ ; veamos como sucede. La simetría de  $\mathbb{S}$  nos permite escribir la ecuación (8.2.18) en su forma matricial de la manera siguiente

$$\mathbb{S} \Delta \mathbf{v} = \nabla \lambda \quad (8.2.22)$$

<sup>2</sup>Esta es la razón del por qué de los subíndices en las dos partes de la frontera  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_D$ . En la propuesta hecha por Sanin y Montero (Sanín y Gustavo Montero, 2007) la condición Neumann, impuesta sobre  $\Gamma_N$ , se considera en la parte inferior y superior de la frontera donde consideran que no habrá flujo libre de viento. El no imponer una condición sobre las fronteras laterales, el planteamiento del problema obliga a usar condiciones Dirichlet sobre estas.

despejando el campo de velocidad se obtiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda. \quad (8.2.23)$$

Aplicamos el operador de divergencia a la ecuación anterior para introducir la condición de continuidad sobre  $\mathbf{v}$ ; en términos de los componentes tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left( v^{0k} + \sum_l S_{kl}^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^l} \right), \quad (8.2.24)$$

o en su forma matricial

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 + \nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda, \quad (8.2.25)$$

Obtenemos entonces la siguiente **ecuación elíptica** para  $\lambda$

$$- \left( \nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \right) \lambda = \nabla \cdot \mathbf{v}^0. \quad (8.2.26)$$

Por el otro lado, al reemplazar la condición de campo tangente a la superficie terrestre tenemos

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n} + \sum_{kl} n_k S_{kl}^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^l} \quad (8.2.27)$$

Esto define la **condición de frontera tipo Neumann** no homogénea sobre  $\lambda$ ,

$$\sum_{kl} \hat{n}_k S_{kl}^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x^l} \quad \text{sobre } \Gamma_N = \left( \mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (8.2.28)$$

o bien,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_S} = \left( \mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (8.2.29)$$

en contraste con la condición (8.2.3) usada comunmente en la literatura. Es posible probar que la ecuación (8.2.26), sujeta a las condiciones de frontera Dirichlet (8.2.21) y Neumann (8.2.29), tiene solución única para  $\lambda$ .

**RESUMIENDO:** Para que el campo ajustado  $\mathbf{v}$  minimice al funcional  $J(\mathbf{w})$  en el conjunto  $\mathbb{V}$ , es *necesario* que sus componentes estén relacionadas por medio de  $\lambda$  a través de la ecuaciones (8.2.18) y que  $\lambda$  satisfaga las condiciones de frontera Dirichlet (8.2.21). El multiplicador de Lagrange queda determinado de forma unívoca como solución de la ecuación elíptica,

$$L\lambda = F \quad \text{con} \quad F \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}^0 \quad (8.2.30)$$

sujeta a las condiciones de frontera mixtas

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 && \text{para } x \in \Gamma_D \\ \mathcal{L}\lambda &= \left( \mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0 \right) \cdot \mathbf{n} && \text{para } x \in \Gamma_N. \end{aligned}$$

donde,

$$L = -\nabla^T \mathbb{S}^{-1} \nabla \quad \text{y} \quad \mathcal{L} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla$$

Estudiemos ahora este problema con diferentes tipos de condiciones de frontera y veamos los efectos que provoca el uso de condiciones de frontera Dirichlet en el balance de masa.

### 8.3. Problema de Frontera 1 (BVP1)

Al resolver el problema elíptico (8.2.30) obtenemos el campo ajustado  $\mathbf{v}$  por medio de (8.2.23). El dominio usual para este problema está dado por  $\Omega$  donde el plano  $x, y$  suele representarse como

$$\Omega_{xy} \equiv (0, x_M) \times (0, y_M).$$

Las fronteras *abiertas*<sup>3</sup> son los planos

$$\Gamma_x = \{x = 0, x_M\} ; \Gamma_y = \{y = 0, y_M\} ; \Gamma_{z_M} = \{z = z_M\},$$

y la frontera que caracteriza al terreno  $\Gamma_{z=h} = \{z = h(x, y)\}$  de acuerdo con la figura 8.3. Para simplificar el análisis de los efectos de las condiciones de frontera Dirichlet  $\lambda = 0$  consideramos una **topografía plana**  $h(x, y) = 0$ . Esto nos lleva al **problema de frontera 1 (BVP1)**, en donde tenemos

$$\begin{aligned} L\lambda^{(1)} &= F \quad \text{en } \Omega \\ \partial_z \lambda^{(1)} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{z=0}, \\ \lambda^{(1)} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_x \cup \Gamma_y \cup \Gamma_{z_M} \end{aligned}$$

Considerando la matriz general (1.7.11), podemos descomponer el operador por separación de variables en su parte horizontal y vertical de la siguiente forma

$$L \equiv L_{xy} + S_3^{-1}(-\partial_z^2) \quad (8.3.1)$$

donde,

$$L_{xy} = -\nabla_{xy} \cdot \mathbb{S}_r^{-1} \nabla_{xy}, \quad \mathbb{S}_r = \begin{pmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{12} & S_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{xy} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}.$$

Comenzamos con el cálculo de las eigenfunciones de  $L$ . Para ello se resuelve el problema de eigenvalores sujetos a las condiciones de frontera de BVP1,

$$L\varphi_{ijk} = E_{ijk}^{(1)}\varphi_{ijk} \quad \text{con } \varphi_{ijk}|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial_z \varphi_{ijk}|_{z=0} = 0$$

La solución puede dividirse en la parte vertical y el plano horizontal como

$$\varphi_{ijk} = \varphi_{ij}\tilde{\varphi}_k, \quad E_{ijk}^{(1)} = E_{ij}^{(1)} + S_3^{-1}\tilde{E}_k,$$

donde  $E_{ij}^{(1)}$  y  $\varphi_{ij}$  están determinados por el problema con condiciones de frontera Dirichlet.

$$L_{xy}\varphi_{xy} = E_{ij}^{(1)}\varphi_{xy} \quad \text{en } \Omega_{xy}, \quad \text{con } \varphi_{ij} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_{xy}. \quad (8.3.2)$$

<sup>3</sup>Al no saber el comportamiento del campo de velocidad sobre las fronteras que no son sólidas, en el desarrollo del problema para ajustar el campo  $\mathbf{v}$ , sólo se puede asegurar que sobre las fronteras sólidas (e.g. el terreno) el campo real, y por lo tanto el campo ajustado, satisfacen:  $(\mathbf{v}_T - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$ . El dejar las demás fronteras **abiertas** determina que éstas tendrán que satisfacer condiciones Dirichlet como se muestra la ecuación (8.2.21).

y  $\partial\Omega_{xy}$  es la frontera de la región  $\Omega_{xy}$ . Por su lado, la componente vertical está sujeta al problema con condiciones de frontera mixtas siguiente

$$-\partial_z^2 \tilde{\varphi}_k = \tilde{E}_k \tilde{\varphi}_k, \quad \partial_z \tilde{\varphi}_k(0) = \tilde{\varphi}_k(z_M) = 0, \quad (8.3.3)$$

que tiene los valores propios y las funciones propias siguientes

$$\tilde{E}_k = \tilde{w}_k^2, \quad \tilde{w}_k = (2k-1)\pi/2z_M, \quad \tilde{\varphi} = \sqrt{2/z_M} \cos(\tilde{w}_k z), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

Con los eigen-valores y eigen-funciones de  $L$  es posible sustituir el problema BVP1 por el problema aproximado

$$L\lambda_{mnl}^{(1)} = F_{mnl}^{(1)}, \quad (8.3.4)$$

donde,

$$\lambda_{mnl}^{(1)} = \sum_{ijk}^{mnl} \lambda_{ijk}^{(1)} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k, \quad F_{mnl}^{(1)} = \sum_{ijk}^{mnl} F_{ijk}^{(1)} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k, \quad F_{ijk}^{(1)} = \langle F | \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k \rangle_{xyz}.$$

Para calcular el coeficiente  $\lambda_{ijk}$  usamos la descomposición (8.3.1) y escribimos la ecuación (8.3.4) como

$$\begin{aligned} (S_3 L_{xy} - \partial_z^2) \lambda_{mnl}^{(1)} &= S_3 F_{mnl}^{(1)} \\ (S_3 L_{xy} - \partial_z^2) \sum_{ijk}^{mnl} \lambda_{ijk} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k &= \sum_{ijk}^{mnl} S_3 F_{ijk} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k \\ \sum_{ijk}^{mnl} \lambda_{ijk} [S_3 \tilde{\varphi}_k E_{ij} \varphi_{ij} + \varphi_{ij} \tilde{E}_k \tilde{\varphi}_k] &= \sum_{ijk}^{mnl} S_3 F_{ijk} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k \\ \lambda_{ijk} [S_3 E_{ij} + \tilde{E}_k] &= S_3 F_{ijk}. \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos

$$\lambda_{ijk} = \frac{S_3 F_{ijk}}{S_3 E_{ij} + \tilde{E}_k}. \quad (8.3.5)$$

Así, el campo (8.2.23) se puede escribir como

$$\mathbf{v}_{mnl}^1 = \mathbf{v}^0 + \sum_{ijk}^{mnl} \begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{S_3 F_{ijk}}{S_3 E_{ij} + \tilde{E}_k} \varphi_{ij} \tilde{\varphi}_k.$$

Notemos que las componentes horizontales

$$\begin{pmatrix} u_{mnl}^{(1)} \\ v_{mnl}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} + S_3 S_r^{-1} \sum_{ijk}^{mnl} \left( \frac{F_{ijk}}{S_3 E_{ij} + \tilde{E}_k} \right) \tilde{\varphi}_k \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_{ij} \\ \partial_y \varphi_{ij} \end{pmatrix}, \quad (8.3.6)$$

satisfacen

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} |u_{mnl}^{(1)} - u^0| = \lim_{S_3 \rightarrow 0} |v_{mnl}^{(1)} - v^0| = 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad (8.3.7)$$

Sin embargo, la componente vertical no muestra de forma clara cual es el límite (1.7.10) cuando  $S_3 \rightarrow 0$ .

$$w_{mnl}^1 = w^0 + \left( \frac{F_{ijk}}{S_3 E_{ij} + \tilde{E}_k} \right) \varphi_{ij} \partial_z \tilde{\varphi}_k$$

### Límite cuando $S_3 \rightarrow 0$ en el BVP1

Para verificar el límite (1.7.10) con la componente vertical sustituimos el problema BVP1 por

$$L\lambda_{mn}^{(1)} = F_{mn}^{(1)}, \quad (8.3.8)$$

donde,

$$\lambda_{mn}^{(1)} = \sum_{ij}^{mn} \lambda_{ij}^{(1)} \varphi_{ij}, \quad F_{mn}^{(1)} = \sum_{ij}^{mn} F_{ij}^{(1)} \varphi_{ij}, \quad F_{ij}^{(1)} = \langle F | \varphi_{ij} \rangle_{xy}.$$

De esta forma obtenemos

$$\partial_z^2 \lambda_{ij}^\varphi - S_3 E_{ij}^{(1)} \lambda_{ij}^\varphi = -S_3 F_{ij}^\varphi \quad \text{con} \quad \partial_z \lambda_{ij}^\varphi(0) = \lambda_{ij}^\varphi(z_M) = 0, \quad (8.3.9)$$

cuya solución está dada por

$$\lambda_{ij}^\varphi = -W^{-1} S_3 \left[ p_0 \int_z^{z_M} F_{ij}^\varphi(s) p_1(s) ds + p_1 \int_0^z F_{ij}^\varphi(s) p_0(s) ds \right], \quad (8.3.10)$$

donde  $p_0 = \cosh(rz)$ ,  $p_1 = \sinh(rz - rz_M)$ ,  $r = \sqrt{S_3 E_{ij}}$ ,  $W = r \cosh(rz_M)$  (ver apéndice B). De esta forma el campo de velocidad tiene la forma siguiente

$$\mathbf{v}_{mn}^1 = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{mn}^{(1)}. \quad (8.3.11)$$

Para valores pequeños de  $S_3$  la solución de (8.3.9) tiene la forma

$$\lambda_{ij}^\varphi = S_3 \tilde{\lambda}_{ij}(z) + O(S_3),$$

lo cual implica que las componentes horizontales de  $\mathbf{v}_{mn}^1$  satisfacen una relación tipo (8.3.7). La componente vertical es

$$w_{mn}^{(1)} = S_3^{-1} \partial_z \lambda_{mn}^{(1)} = \sum_{ij}^{mn} S_3^{-1} \partial_z \lambda_{ij}^\varphi \varphi_{ij}, \quad (8.3.12)$$

donde

$$S_3^{-1} \partial_z \lambda_{ij}^\varphi = -W^{-1} \left[ \partial_z p_0 \int_z^{z_M} F_{ij}^\varphi(s) p_1(s) ds + \partial_z p_1 \int_0^z F_{ij}^\varphi(s) p_0(s) ds \right]. \quad (8.3.13)$$

En términos de  $w_{mn}^{(1)}$  y las series  $w_{mn}^{0,\varphi} = \sum_{ij}^{mn} w_{ij}^{0,\varphi} \varphi_{ij}$  de  $w^0$ , obtenemos la relación siguiente

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} w_{mn}^{(1)} = w_{mn}^{0,\varphi}. \quad (8.3.14)$$

Esto nos conduce al **Resultado 1**:

Para una matriz  $\mathbb{S}$  (1.7.11), el campo  $\mathbf{v}_{mn}^1$  es igual que el campo  $\mathbf{U}_{mn}^{0,\varphi}$  en  $\bar{\Omega}$  en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$  donde  $\mathbf{U}_{mn}^{0,\varphi}$  se representa con la serie:

$$\mathbf{U}_{mn}^{0,\varphi} = \sum_{ij}^{mn} \langle \mathbf{U}^0 | \varphi_{ij} \rangle_{xy} \varphi_{xy}.$$

### Ejemplo

Para verificar el límite (8.3.14) consideremos la versión en el plano  $xz$  del BVP1. Supongamos un campo interpolado  $\mathbf{v}^0 = x\mathbf{i}$  en la región  $\Omega = (0, x_M) \times (0, z_M)$  por lo que  $F = 1$  y en consecuencia  $w^0 = -z$ . Considerar entonces la versión,

$$L\lambda_m = F_m, \quad (8.3.15)$$

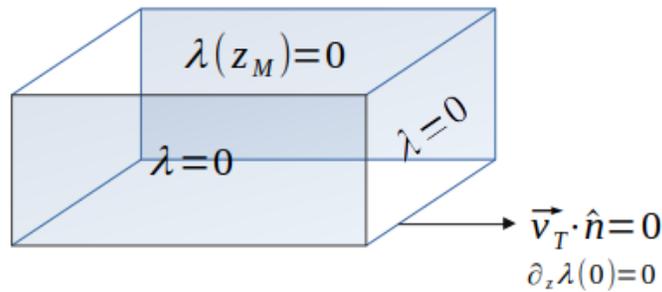
del problema (8.3.8) donde  $\lambda_m$  y  $F_m$  son las series con la base  $\varphi_i$ . La ecuación (8.3.13) resulta en

$$S_3^{-1}\partial_z\lambda_i = -F_i \left( \frac{z \sinh(rz)}{rz} \right) \left[ \frac{1 - \cosh(rz - rz_M)}{\cosh(rz_M)} + \frac{\cosh(rz - rz_M)}{\cosh(rz_M)} \right]$$

Recordando  $r = \sqrt{S_3 E_i}$  notamos que en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$  entonces  $r \rightarrow 0$ , por lo tanto,

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} S_3^{-1}\partial_z\lambda_i = -zF_i \quad \therefore \quad \lim_{S_3 \rightarrow 0} w_m^{(1)} = -zF_m$$

donde  $-zF_m = w_m^0$  es la serie de  $w^0 = -z$  con la base  $\varphi_i$ ; esta es justamente la relación (8.3.14). De esta manera verificamos que en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$ , la componente vertical del campo ajustado tiende a la componente vertical  $w_m^0$ .



**Figura 8.1:** Esquema de condiciones de frontera para el BVP1 en una región considerada.

#### 8.4. Problema de Frontera 1 considerando una matriz diagonal

Consideremos ahora una matriz  $\mathbb{S} = \{S_j\}$  diagonal y constante como es usada comúnmente en meteorología

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}, \quad S_j = \text{constante}; \quad j = 1, 2, 3. \quad (8.4.1)$$

Procedemos de manera similar al caso con la matriz general  $\mathbb{S} = \{S_{ij}\}$ . En este caso, los eigenvalores y eigenfunciones de la parte horizontal del problema correspondiente al operador  $L$ , sujeto a las condiciones de frontera Dirichlet (8.3.2), están dados por

$$E_{ij}^{(1)} = S_1^{-1}E_i^{(1)} + S_2^{-1}E_j^{(1)}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_i(x)\varphi_j(y), \quad (8.4.2)$$

donde  $E_i^{(1)} = \omega_i^2$  y  $E_j^{(1)} = \omega_j^2$  con  $\omega = i\pi/x_M$  y las eigen-funciones normalizadas

$$\varphi_i(x) = \sqrt{2/x_M} \sin(\omega_i x); \quad \varphi_j(y) = \sqrt{2/y_M} \sin(\omega_j y); \quad i, j = 1, 2, 3... \quad (8.4.3)$$

La función  $F$  se aproxima por la serie

$$F_{mnl}^{(1)} = \sum_{ijk}^{mnl} F_{ijk}^{(1)} \varphi_i \varphi_j \tilde{\varphi}_k, \quad F_{ijk}^{(1)} = \langle F | \varphi_i \varphi_j \tilde{\varphi}_k \rangle_{xyz} \quad (8.4.4)$$

Por otro lado, es importante notar que la divergencia de la ecuación del campo ajustado aproximado  $\mathbf{v}_{mnl}$ , de acuerdo con las ecuaciones (8.2.30) y (8.3.4), está dada en realidad por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 + \nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{mnl}^{(1)} = F - F_{mnl}^{(1)}. \quad (8.4.5)$$

Este es un resultado destacable; nos muestra que *la exactitud con la que  $\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$  satisface el límite (1.7.10) es independiente de la matriz  $\mathbb{S}$  y depende únicamente de la convergencia punto por punto de  $F_{mnl}^{(1)}$  con  $F$ .*

#### Límite cuando $S_3 \rightarrow 0$ en el BVP1 con una matriz $\mathbb{S}$ diagonal

Para analizar el comportamiento límite  $S_3 \rightarrow 0$  reemplazamos ahora el BVP1 por el problema

$$L\lambda_{nl}^{(1)} = F_{nl}^{(1)}, \quad \lambda_{nl}^{(1)} = \sum_{jk}^{nl} \lambda_{jk}^{(1)} \varphi_j \tilde{\varphi}_k, \quad F_{nl}^{(1)} = \sum_{jk}^{nl} F_{jk}^{(1)} \varphi_j \tilde{\varphi}_k, \\ F_{jk}^{(1)} = \langle F | \varphi_j \tilde{\varphi}_k \rangle_{yz}. \quad (8.4.6)$$

La componente horizontal del campo  $\mathbf{v}_{nl} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{nl}^{(1)}$  satisface una relación del tipo (8.3.7). La componente vertical se puede analizar al resolver

$$-S_1^{-1} \partial_x^2 \lambda_{jk} + S_3^{-1} E_{jk} \lambda_{jk} = F_{jk}, \quad \text{con } \lambda_{jk} = 0 \text{ en } x = 0, x_M$$

donde  $E_{jk} = \tilde{E}_k + S_3 S_2^{-1} E_j^{(1)}$ . La solución está dada por

$$\lambda_{jk} = -W^{-1} S_1 \left[ \tilde{p}_0 \int_x^{x_M} F_{jk}(s) \tilde{p}_1(s) ds + \tilde{p}_1 \int_0^x F_{jk}(s) \tilde{p}_0(s) ds \right]. \quad (8.4.7)$$

donde  $\tilde{p}_0 = \sinh(rx)$ ,  $\tilde{p}_1 = \sinh(rx - rx_M)$  con  $r^2 = S_1 \tilde{E}_{jk} / S_3$  y  $W = r \sinh(rx_M)$ . El teorema del valor medio ponderado para integrales afirma que existe  $s_1 \in [x, x_M]$  y  $s_0 \in [0, x]$  tal que,

$$\begin{aligned} \int_x^{x_M} F_{jk}(s) \tilde{p}_1(s) ds &= F_{jk}^1 \int_x^{x_M} \tilde{p}_1(s) ds \\ \int_0^x F_{jk}(s) \tilde{p}_0(s) ds &= F_{jk}^0 \int_0^x \tilde{p}_0(s) ds \end{aligned}$$

donde usamos  $F_{jk}^1 \equiv F_{jk}(s_1)$  y  $F_{jk}^0 \equiv F_{jk}(s_0)$ . Esto nos conduce a lo siguiente

$$S_3^{-1} \lambda_{jk}(x) = -E_{jk}^{-1} [\xi_0 F_{jk}^1 + \xi_1 F_{jk}^0], \quad (8.4.8)$$

donde,

$$\xi_0 = W^{-1} r \tilde{p}_0(x) [1 - \cosh(rx - rx_M)], \quad \xi_1 = W^{-1} r \tilde{p}_1(x) [\cosh(rx) - 1],$$

por lo que  $S_3^{-1} \lambda_{jk} = 0$  para  $x = 0, x_M$  con  $S_3 \geq 0$ . Para  $0 \leq x \leq x_M$  con  $S_3 \rightarrow 0$ , obtenemos  $r \rightarrow \infty$ ,  $\xi_0 = \xi_1 \approx -1/2$  por lo que,

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} S_3^{-1} \lambda_{jk} = E_{jk}^{-1} [F_{jk}^0 + F_{jk}^1] / 2.$$

Lo cual nos lleva al **Resultado 2**:

El campo  $\mathbf{v}_{nl}^1$  dado por el problema (8.4.6) tiene una velocidad vertical limitada por  $\lim_{S_3 \rightarrow 0} w_{nl}^{(1)}$  que es discontinua en  $\Gamma_x$  siempre que  $F_{jk}^0 + F_{jk}^1 \neq 0$ .

De la misma forma, la serie  $\lambda_{ml}^{(1)} = \sum_{ik}^{ml} \lambda_{ik} \varphi_i \tilde{\varphi}_k$ . nos conduce a un campo  $\mathbf{v}_{ml}^1 = \mathbf{v}_0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{ml}^{(1)}$  cuya componente vertical se vuelve discontinua en  $\Gamma_y$  cuando  $S_3 \rightarrow 0$ . Estos resultados son independientes de  $S_1$  y  $S_2$ .

### Ejemplo

La serie  $F_m$  del problema (8.3.15) no converge punto por punto a  $F = 1$  dado que, de acuerdo con las condiciones de frontera Dirichlet en  $\Gamma_x$ , tenemos  $F_m = 0$  en  $x = 0, x_M$  para toda  $m$ . Lo mismo ocurre con la convergencia de  $w_m^0 = \lim_{S_3 \rightarrow 0} w_m$  con  $w^0$ . Las series  $F_m$  y  $w_m^0$  tienen **fenómenos de Gibbs** como se muestran gráficamente en el apéndice B cuando existen discontinuidades en la frontera como es el caso con las condiciones tipo Dirichlet. Para verificar estas discontinuidades consideremos la versión simplificada en una dimensión del problema (8.4.6)

$$L\lambda_l = F_l, \quad (8.4.9)$$

donde  $F_l$  y  $\lambda_l$  son las series con base  $\tilde{\varphi}_k$ . De acuerdo con (8.4.7) el coeficiente de  $\lambda_l$  se puede escribir como,

$$\lambda_k = -S_3 F_k E_k^{-1} \psi_k,$$

donde

$$\psi_k = \sinh(rx) \frac{1 - \cosh(rx - rx_m)}{\sinh(rx_m)} + \sinh(rx - rx_m) \frac{\cosh(rx) - 1}{\sinh(rx_m)},$$

donde  $r = \sqrt{S_1 E_k / S_3}$ . Notamos que en la frontera

$$\psi|_{x=0, x_m} = 0 \quad \forall \quad S_3 \geq 0,$$

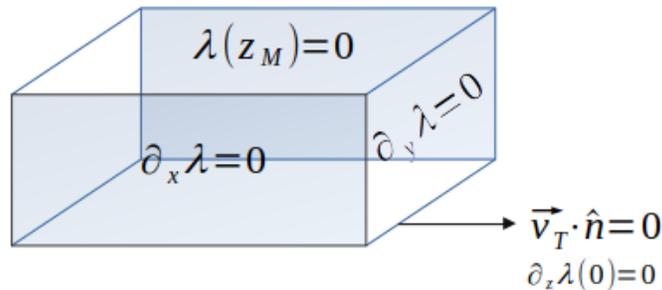
además de que

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} \psi_k = -1 \quad \text{con} \quad x \in (0, x_M).$$

De esta forma la velocidad vertical,

$$w_l = \sum_{k=1}^l S_3^{-1} \lambda_k \partial_z \tilde{\varphi}_k,$$

se vuelve discontinua en  $\Gamma_x$  cuando  $S_3 \rightarrow 0$ . De acuerdo con la ecuación (8.4.5), hemos visto que la exactitud con la es aproximado el campo  $\mathbf{v}$  depende de como converge la función aproximada  $F_{nml}$  hacia  $F$ . En la tabla 8.1 podemos apreciar lo lento que es esta convergencia considerando las condiciones de frontera del BVP1.



**Figura 8.2:** Esquema de condiciones de frontera para el BVP2 en una región considerada.

### 8.5. Problema de frontera 2 (BVP2) y su solución espectral.

Consideremos ahora la condición de frontera  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  en el terreno  $\Gamma_{z=0}$  y las fronteras laterales  $\Gamma_x, \Gamma_y$  de acuerdo con la figura 8.5.1. Esto implica el reemplazo en BVP1 de la condición Dirichlet sobre las fronteras laterales,  $\lambda = 0$ , por las condiciones tipo Neumann de la forma  $\mathcal{L}\lambda = (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbf{n}$ . En una topografía plana, el problema se puede plantear de la siguiente forma

$$\begin{aligned} L\lambda &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathcal{L}\lambda &= (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_x \cup \Gamma_y \cup \Gamma_{z=0}, \quad \lambda = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{z_M} \end{aligned}$$

Sabemos que la condición de frontera  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  es desconocida sobre las fronteras laterales,  $\Gamma_x, \Gamma_y$ . Sin embargo  $\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n}$  puede ser una aproximación razonable. Esto nos conduce al **problema de frontera 2**.

$$\begin{aligned} L\lambda^{(2)} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathcal{L}\lambda^{(2)} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_x \cup \Gamma_y \cup \Gamma_{z=0}, \quad \lambda^{(2)} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{z_M} \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

Por lo tanto, para el campo (8.2.23) con una matriz (1.7.11), los eigenvalores y eigenfunciones de  $L = L_{xy} + S_3^{-1}(-\partial_z^2)$  sujeto a las condiciones de frontera (8.5.1), son de la forma

$$\begin{aligned} E_{ijk}^{(2)} &= E_{ij} + S_3^{-1} \tilde{E}_k \\ \phi_{ijk}^{(2)} &= \phi_{ij} \tilde{\varphi}_k, \end{aligned}$$

donde  $E_{ij}$  y  $\phi_{ij}$  están determinados por

$$L_{xy}\phi_{ij} = E_{ij}\phi_{ij} \quad \text{con} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbb{S}_r^{-1} \nabla_{xy} \phi_{ij} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_x \cup \Gamma_y \quad (8.5.2)$$

El valor propio más bajo es  $E_{ij=0} = 0$  cuya función propia es la función constante  $\phi_{ij} = 1/\sqrt{x_M y_M}$ . Para saber si satisface la relación (1.7.10) en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$  consideremos el problema aproximado

$$\begin{aligned} L_{xy}\lambda_{mn}^{(2)} &= F_{mn}, \\ \lambda_{mn}^{(2)} &= \sum_{ij}^{mn} \lambda_{ij}^{(2)} \phi_{ij}, \quad F_{mn}^{(2)} = \sum_{ij}^{mn} F_{ij}^{(2)} \phi_{ij}, \quad F_{ij} = \langle F | \phi_{ij} \rangle_{xy}, \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

#### Límite cuando $S_3 \rightarrow 0$ en el BVP2

Siguiendo el razonamiento del *Resultado 1* podemos deducir el **Resultado 3**:

El campo  $\mathbf{v}_{mn}^{(2)} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{mn}^{(2)}$  satisface el límite  $\lim_{S_3 \rightarrow 0} \mathbf{v}_{mn}^{(2)} = \mathbf{U}_{mn}^0$  en  $\hat{\Omega}$  donde:

$$\mathbf{U}_{mn}^0 = \sum_{ij}^{mn} \langle \mathbf{U}^0 | \phi_{ij} \rangle_{xy} \phi_{ij}$$

### 8.6. El problema de frontera 3 (BVP3): Condiciones de frontera puramente Neumann

La mejor condición de frontera posible para un campo consistente con el balance de masa  $\mathbf{v}$  (8.2.23) es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \text{ en la frontera completa } \Gamma \quad (8.6.1)$$

El uso de esta condición requiere buscar un campo  $\hat{\mathbf{v}}$  único en el espacio

$$\mathbb{V}_N^* = \{\mathbf{w}(x) \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \forall \Gamma\}, \quad (8.6.2)$$

que minimice el funcional (8.2.5). Este campo también está dado por la ecuación (8.2.23) con  $\hat{\lambda}$  en  $H^1(\Omega)$ ;

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \hat{\lambda}, \quad (8.6.3)$$

y que satisfaga la condición de continuidad,  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0$ . De acuerdo con esto,  $\hat{\lambda}$  está dada por el problema

$$L\hat{\lambda} = F \text{ en } \Omega \quad (8.6.4)$$

$$\mathcal{L}\hat{\lambda} = f \forall \Gamma, \quad (8.6.5)$$

donde  $F = \nabla \cdot \mathbf{v}^0$  y  $f = (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbf{n}$ .

#### Condición de compatibilidad y estimación de una condición sobre las fronteras abiertas.

Como se muestra en el apéndice (B.1), imponer condiciones únicamente Neumann sobre toda la frontera  $\Gamma$  a la ecuación elíptica (8.6.4), nos obliga a considerar una *condición de compatibilidad* que tienen que satisfacer las funciones  $f$  y  $F$ .

Consideremos una función arbitraria  $\phi \in L^2(\Omega)$  que multiplica a la ecuación (8.6.4) e integramos sobre todo el dominio  $\Omega$ . Podemos escribirlo como el producto interior siguiente

$$\langle \phi | L\lambda \rangle_\Omega = \langle \phi | F \rangle_\Omega.$$

Integrar por partes el lado izquierdo de la ecuación anterior nos conduce al forma débil del problema,

$$\begin{aligned} - \int_\Omega \phi \nabla_S^2 \lambda d\Omega &= \int_\Omega \nabla \phi \nabla_S \lambda d\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot (\phi \nabla_S \lambda) d\Omega \\ &= \int_\Omega \nabla \phi \nabla_S \lambda d\Omega - \oint_\Gamma \phi \nabla_S \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \end{aligned}$$

donde se usó  $\nabla_S = \mathbb{S}^{-1} \nabla$  y  $\nabla_S^2 = \nabla \cdot \nabla_S$  por lo que  $L = -\nabla_S^2$ . Regresando a notación de bras y kets, nos queda

$$\langle \phi | L\lambda \rangle_\Omega = \langle \nabla \phi | \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda \rangle_\Omega - \langle \phi | \mathbf{n} \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda \rangle_\Gamma \quad (8.6.6)$$

En el caso particular donde la función  $\phi = 1$  se obtiene la llamada condición de compatibilidad

$$\langle 1 | L\lambda \rangle_\Omega = -\langle 1 | \mathcal{L}\lambda \rangle_\Gamma \quad (8.6.7)$$

o bien, escrito en forma integral tenemos

$$\int_{\Omega} F d\Omega + \oint_{\Gamma} f d\Gamma = 0. \quad (8.6.8)$$

Recordando que  $F = \nabla \cdot \mathbf{v}$  y  $f = (\mathbf{v}_T^0 - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbf{n}$ , podemos usar el teorema de la divergencia de lado izquierdo de manera que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \oint_{\Gamma} (\mathbf{v}_T^0 - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (8.6.9)$$

lo cual nos lleva a

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (8.6.10)$$

Esta es la condición suficiente y necesaria que nos garantiza que la solución  $\hat{\lambda} \in H^1(\Omega)$  exista y sea única (más una constante aditiva). Dado que en general el campo de viento real  $\mathbf{v}_T$  se desconoce sobre las fronteras *abiertas*  $\Gamma_x \cup \Gamma_y \cup \Gamma_{z_M}$ , la condición de frontera (8.6.5) necesita un campo  $\mathbf{v}^*$  para aproximar  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  en  $\Gamma$ , que satisfaga la relación (8.6.10)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (8.6.11)$$

Una opción sencilla para reemplazar la condición Dirichlet del BVP2 en  $\Gamma_{z_M}$  es  $\partial_z \lambda = 0$ . Esta opción equivale a estimar  $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$  con  $\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n}$  pero en general  $\mathbf{v}^0$  no satisface la condición (8.6.10). Otra opción está dada por  $\mathbf{U}^0$  (7.1.2) ya que este si satisface  $\nabla \cdot \mathbf{U}^0 = 0$  en  $\bar{\Omega}$  y por lo tanto la condición (8.6.10). De esta forma, recordando la condición (8.6.1), tenemos,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (8.6.12)$$

Lo cual nos lleva al **problema de frontera 3**

$$L\lambda = F \quad \text{en } \Omega \quad \text{con la condición } \mathcal{L}\lambda = w^0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (8.6.13)$$

La condición de frontera (8.6.12) no significa que el campo  $\mathbf{v}$  (8.2.23) sea equivalente a  $\mathbf{U}^0$  en la región  $\Omega$ , pero nos garantiza que  $\mathbf{U}^0$  sea el caso límite de  $\mathbf{v}$ .

### Límite cuando $S_3 \rightarrow 0$ para BVP3.

Consideremos el campo inicial  $\mathbf{v}_0$  (7.1.1) en una región  $\Omega$  con topografía plana; las condiciones de frontera del problema (8.6.13), de acuerdo con la figura 8.6.13, se puede escribir como

$$\partial_x \lambda|_{\Gamma_x} = \partial_y \lambda|_{\Gamma_y} = \partial_z \lambda|_{\Gamma_{z=0}} = 0; \quad \partial_z \lambda|_{z_M} = S_3 w_M^0(x, y).$$

donde  $w_M^0(x, y) \equiv w^0(x, y, z_M)$ . Para corroborar que realmente el campo  $\mathbf{v}$  es  $\mathbf{U}^0$  en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$ , consideramos el problema siguiente

$$L\lambda_{mn} = F_{mn}, \quad \partial_z \lambda_{mn}|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \lambda|_{z_M} = S_3 w_M^0(x, y), \quad (8.6.14)$$

donde,

$$\lambda_{mn} = \sum_{ij}^{mn} \lambda_{ij} \phi_{ij}, \quad F_{mn} = \sum_{ij}^{mn} F_{ij} \phi_{ij}, \quad F_{ij} = \langle F | \phi_{ij} \rangle_{xy},$$

y  $\phi_{ij}$  son las eigenfunciones del problema de frontera 2 (8.5.1). Además tenemos

$$w_{Mmn}^0 = \sum_{ij=0}^{mn} w_{Mij}^0 \phi_{ij}, \quad w_{Mij}^0 = \langle w_M^0 | \phi_{ij} \rangle_{xy}. \quad (8.6.15)$$

En términos de los coeficientes, la ecuación (8.6.14) se puede reescribir como

$$A_{ij} \lambda_{ij} = -S_3 F_{ij} \quad \text{con} \quad \partial_z \lambda_{ij}(0) = 0, \quad \partial_z \lambda_{ij}(z_M) = S_3 w_{Mij}^0, \quad (8.6.16)$$

donde  $A_{ij} = \partial_z^2 - S_3 E_{ij}$ . Para valores pequeños de  $S_3$  tenemos,

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^0 + S_3 \lambda_{ij}^1 + O(S_3^2). \quad (8.6.17)$$

Al reemplazar esto en (8.6.16) tenemos que  $\lambda_{ij}^0 = 0$  y nos queda

$$\partial_z^2 \lambda_{ij}^1 = -F_{ij} \quad \text{con} \quad \partial_z \lambda(0) = 0, \quad \partial_z \lambda(z_M) = S_3 w_{Mij}^0.$$

La solución se puede integrar de manera que,

$$\begin{aligned} \partial_z \lambda_{ij}^1 &= - \int_0^z F_{ij} ds = - \int_0^z \langle F | \phi_{ij} \rangle_{xy} = \langle w^0 | \phi_{ij} \rangle_{xy} \equiv w_{ij}^0(z), \\ \lambda_{ij}^1 &= \int_0^z w_{ij}^0(s) ds + \lambda_{ij}^c, \end{aligned} \quad (8.6.18)$$

donde  $\lambda_{ij}^c$  es una constante arbitraria de integración. Reemplazando esto en el desarrollo de Taylor (8.6.17) obtenemos el **Resultado 4**:

Con  $\mathbf{U}_{mn}^0$  el campo del *resultado 3* y una matriz general  $\mathbb{S} = \{S_{ij}\}$ ; el campo  $\mathbf{v}_{mn} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_{mn}$  satisface

$$\lim_{S_3 \rightarrow 0} \mathbf{v}_{mn} = \mathbf{U}_{mn}^0 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}.$$

### Solución espectral de BVP3 con series triples de Fourier y las condiciones de frontera homogéneas

Para tener condiciones de frontera homogéneas en  $z = z_M$ , reemplazamos  $\lambda_{ij}$  por

$$\lambda_{ij} = S_3 (\psi_{ij} + q_{ij}) \quad \text{con} \quad q_{ij} = cz^2/2, \quad c = w_{Mij}^0/z_M \quad (8.6.19)$$

Reescribimos por tanto el problema (8.6.14) como:

$$A_{ij} \psi_{ij} = -F_{ij} - A_{ij} q_{ij} \quad \text{con} \quad \partial_z \psi_{ij} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, z_M, \quad (8.6.20)$$

Para estudiar numéricamente los efectos de las condiciones de frontera del problema (8.6.14) en  $z_M$  consideremos una matriz diagonal  $\mathbb{S} = \{S_j\}$ . El problema (8.6.20) se puede aproximar por

$$A_{ij}\psi_{ijl} = -F_{ijl} - [A_{ij}q_{ij}]_l, \quad (8.6.21)$$

donde  $F_{ijl}$  y  $[A_{ij}q_{ij}]_l$  son las series de  $F_{ij}$  y  $A_{ij}q_{ij}$  respectivamente con el conjunto  $\{\phi_k\}_{k=0}^l$ . Con la serie  $\psi_{ijl} = \sum_k^l \psi_{ijk}\phi_k$  tenemos

$$\lambda_{mnl} = \sum_{ij=0}^{mn} \lambda_{ijl}\phi_{ij}, \quad \lambda_{ijl} = S_3(\psi_{ijl} + q_{ij}),$$

y el campo está dado por  $\mathbf{v}_{mnl} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1}\nabla\lambda_{mnl}$ . Al sacar su divergencia obtenemos

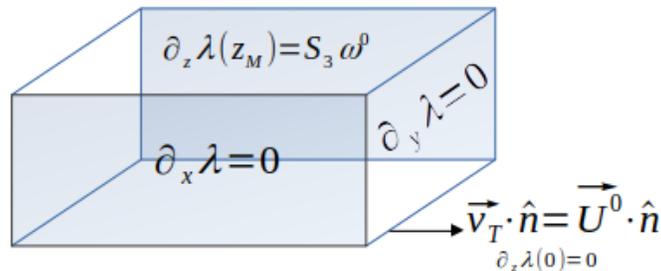
$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl} = F - F_{mnl} - \frac{S_3}{2z_M}(z^2 - z_l^2)L_{xy}w_{Mmn}^0, \quad (8.6.22)$$

donde,

$$F_{mnl} = \sum_{ij=0}^{mn} \sum_{k=0}^l F_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k, \quad F_{ijk} = \langle F | \phi_i\phi_j\phi_k \rangle_{xyz}$$

$$z_l^2 = \sum_{k=0}^l \langle z^2 | \phi_k \rangle_z \phi_k, \quad L_{xy}w_{Mmn}^0 = \sum_{ij=0}^{mn} w_{Mij}^0 E_{ij}\phi_{ij}.$$

La serie  $w_{Mmn}^0$  converge a  $w_M^0$  en la norma  $L^2(\Omega_{xy})$  pero la convergencia de  $L_{xy}w_{Mmn}^0$  a  $L_{xy}w_M^0$  puede ser menos precisa. La serie  $z_l^2$  converge uniformemente hacia  $z^2$  en  $[0, z_M)$  excepto en la vecindad de  $z_M$  donde tenemos que  $\partial_z z^2 \neq 0$  mientras que  $\partial_z z_l^2 = 0$  en  $z = z_M$ . La convergencia deficiente de  $z^2 - z_l^2$  y de  $L_{xy}w_{Mmn}^0$  se puede compensar con valores pequeños para  $S_3$ . De esta forma, valores pequeños de  $S_3$  deben mejorar la precisión del campo  $\mathbf{v}_{mnl}$  y el balance de masa dependerá sólo de la convergencia de  $F_{mnl}$  con  $F$ .



**Figura 8.3:** Esquema de condiciones de frontera para el BVP3 en una región considerada.

### 8.7. Cálculo de resultados en 3D con series de Fourier

Examinemos ahora un ejemplo en 3 dimensiones considerando el BVP1 aproximado (8.3.4) en un paralelepípedo  $\Omega$  con laterales  $x_m = y_m = 20\text{km}$  y  $z_m = 5\text{km}$ . Comencemos considerando un campo inicial de velocidad de la forma

$$\mathbf{v}^0 = u^0 \mathbf{i} \text{ donde } u^0 = \beta e(y) f(z) g(x), \quad (8.7.1)$$

donde  $\beta$  es una constante que se obtiene a partir de la velocidad promedio,

$$\langle u^0 \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u^0 d\Omega = 10 \text{ ms}^{-1} \text{ donde } |\Omega| = x_M y_M z_M.$$

Tenemos entonces,  $F = \beta e(y) f(z) \partial_x g(x)$  y  $F_{mnl}^1 = \beta e_n(y) f_l(z) \partial_x g_m(x)$  donde

$$e_n = \sum_{j=1}^n e_j \varphi_j; \quad f_l = \sum_{k=1}^l f_k \tilde{\varphi}_k; \quad \dot{g}_m = \sum_{i=1}^n \dot{g}_i \varphi_i.$$

Las funciones  $\dot{g}(x)$  y  $e(y)$  satisfacen condiciones Dirichlet mientras que  $f(z)$  satisface condiciones mixtas por lo tanto, la funciones base de su operador corresponden a

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{i\pi}{b} x\right); \quad \varphi_j = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{j\pi}{b} y\right); \quad \tilde{\varphi}_k = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b} z\right)$$

Recordemos que la precisión con la que es aproximada la divergencia del campo  $\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$  es independiente de la matriz  $\mathbb{S} = \{S_j\}$  y de acuerdo con la ecuación (8.4.5) está dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} = F - F_{mnl}^{(1)} = \beta(e f \dot{g} - e_n f_l \dot{g}_m).$$

Notamos que si alguna de las series  $e_n$ ,  $f_l$  ó  $\dot{g}_m$  no converge punto por punto a su función límite correcta en la frontera *abierta* tendremos una divergencia no nula

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_D = \Gamma_x \cup \Gamma_y \cup \Gamma_{z_m} \quad \forall m, n, l.$$

Consideremos el caso con  $e = f = 1$  donde  $u^0 = x$  y por tanto  $\partial_x g = 1$ . De esta manera nos queda que  $F = 1$  por lo cual la convergencia de las series  $e_n$ ,  $f_l$ ,  $\dot{g}_m$  deberá ser hacia la constante 1. En la tabla 8.1 podemos ver que tan rápida es esta convergencia.

$n, m, l$	$\ F(x, y, z)\ $	$\ F_{mnl}^{(1)}(x, y, z)\ $	$\ F\  - \ F_{mnl}^{(1)}\ $
5	44.72136	39.45563	0.05266
10	44.72136	42.47815	0.02243
15	44.72136	43.13467	0.01587
20	44.72136	43.59338	0.01128
25	44.72136	43.78806	0.00933

**Tabla 8.1:** Valores para un campo inicial  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$ . Notemos que la convergencia es lenta debido a los fenómenos de Gibbs provocados por las discontinuidades al imponer condiciones Dirichlet sobre las fronteras laterales.

Ahora veamos que tan preciso es el campo  $v_{mn}^{(2)}$  del BVP2 considerando el mismo ejemplo (8.7). Recordemos que tenemos condiciones de frontera tipo Neumann sobre las fronteras laterales y sobre la superficie y condiciones Dirichlet sólo en la frontera superior. En la tabla 8.2 obtenemos el resultado de la convergencia.

$n, m, l$	$\ F(x, y, z)\ $	$\ F_{mnl}^{(2)}(x, y, z)\ $	$\ F\  - \ F_{mnl}^{(2)}\ $
5	44.72136	43.80878	0.00091
10	44.72136	44.26630	0.00046
15	44.72136	44.41836	0.00030
20	44.72136	44.49427	0.00023
25	44.72136	44.53977	0.00018

**Tabla 8.2:** Con  $v^0 = i\beta x$ ; en este caso observamos que la rapidez de convergencia mejora considerablemente, sin embargo, los fenómenos de Gibbs siguen apareciendo debido a la discontinuidad sobre la frontera superior de la frontera.

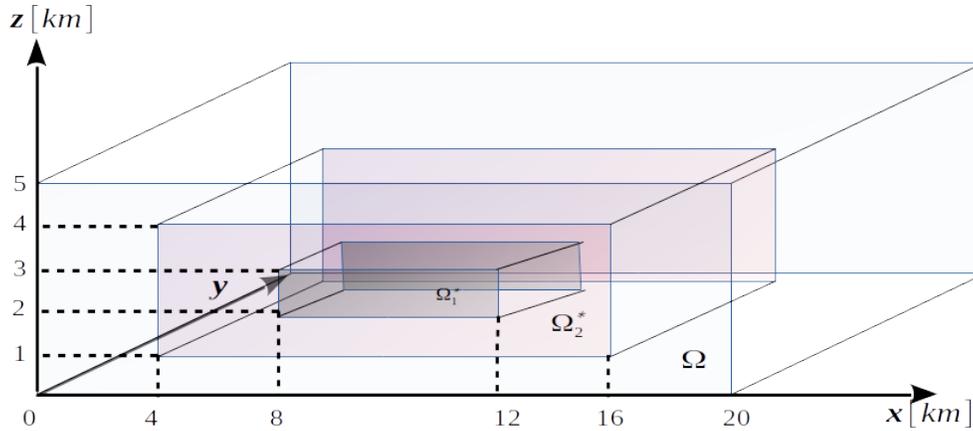
Por último, veamos en la tabla 8.3 que sucede con la convergencia del BVP3 con el mismo ejemplo en donde se imponen condiciones Neumann sobre toda la frontera evitando de esta forma las discontinuidades.

$n, m, l$	$\ F(x, y, z)\ $	$\ F_{mnl}^{(3)}(x, y, z)\ $	$\ F\  - \ F_{mnl}^{(3)}\ $
1	44.72136	44.72136	0.0000

**Tabla 8.3:** La convergencia en este caso para  $v^0 = xi$  es inmediata.

### 8.8. Comparación de flujos: El efecto de las condiciones a la frontera en el balance de masa

Debido a que las series  $F_{nml}^{(1)}$  y  $F_{nml}^{(2)}$  no convergen a la constante 1 en  $y = 0, y_M, z = z_M, x = 0, x_M$ , las divergencias  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)}(x, y, z)$  y  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(2)}(x, y, z)$  se vuelven menos precisas conforme  $(x, y, z)$  se acercan a estas fronteras *abiertas*, i.e., donde la condición de tipo Dirichlet  $\lambda_{mnl}^{(1)} = 0$  fue usada (ver apéndice B). Esta expectativa se puede verificar si medimos que tan rápido aumenta el flujo  $\mathcal{F}(\Gamma^*)$  conforme  $\Gamma^*$  tiene a  $\Gamma$ . Consideremos una región hipotética de estudio  $\Omega = (0, 20)^2 \times (0, 5)$  con frontera  $\Gamma$  y diferentes sub-regiones concéntricas como se muestra en la figura 8.4,



**Figura 8.4:** Esquema de la región considerada  $\Omega$  y dos subregiones  $\Omega^*$  para medir el flujo del campo de velocidad  $\mathbf{v}$ .

El flujo se determina con

$$\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}) = \oint_{\Gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma^* = \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} d\Omega, \quad (8.8.1)$$

Para calcular esta divergencia recordamos que  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} = \beta(e f \dot{g} - e_n f_l \dot{g}_m)$  y nos queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \mathbf{v}_{mnl}^{(1)} d\Omega &= \beta \int_0^{x_M} \dot{g} dx \int_0^{y_M} e dy \int_0^{z_M} f dz \\ &\quad - \beta \left( \sum_i^m \dot{g}_i \int_0^{x_M} \varphi_i \right) \left( \sum_j^n e_j \int_0^{y_M} \varphi_j \right) \left( \sum_k^l f_k \int_0^{z_M} \tilde{\varphi}_k dz \right) \end{aligned}$$

Por lo que es posible calcular cada integral independientemente y luego multiplicar todo para obtener la diferencia.

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$4.46 \times 10^{-7}$	$2.71 \times 10^{-5}$	$4.02 \times 10^{-2}$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	$9.32 \times 10^{-8}$	$5.54 \times 10^{-6}$	$8.10 \times 10^{-3}$
$\mathbf{v}_{mnl}$	<i>cero</i>	<i>cero</i>	<i>cero</i>

**Tabla 8.4:** Se observa que el flujo  $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$  para  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$  con  $\beta = 3.6 \times 10^{-4}$  aumenta conforme nos acercamos a la región completa.

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$-3.22 \times 10^{-7}$	$-1.85 \times 10^{-5}$	$-9.28 \times 10^{-3}$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	$-4.72 \times 10^{-8}$	$-2.29 \times 10^{-6}$	$-2.02 \times 10^{-3}$
$\mathbf{v}_{mnl}$	$-4.11 \times 10^{-9}$	$-1.55 \times 10^{-7}$	$1.13 \times 10^{-16}$

**Tabla 8.5:**  $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$  para  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z \cos(\omega x)$  con  $\beta = 2.5 \times 10^{-3}$ .

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$-4.2 \times 10^{-3}$	$-10.6 \times 10^{-2}$	$-44.4 \times 10^{-2}$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	$-4.2 \times 10^{-3}$	$-10.6 \times 10^{-2}$	$-43.9 \times 10^{-2}$
$\mathbf{v}_{mnl}$	$-6.5 \times 10^{-4}$	$-1.1 \times 10^{-2}$	$9 \times 10^{-16}$

**Tabla 8.6:**  $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=l=30})$  con  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z e^{-z/H} \cos(\omega x)$  con  $\beta = 5 \times 10^{-3}$ .

Consideremos un caso especial en una región  $\Omega = (0, 31, 2)^2 \times (0, 5)$  km<sup>3</sup> y  $\mathbf{v}^0 = u^0 \mathbf{i} + v^0 \mathbf{j}$  con componentes

$$u^0 = v^0 = \beta g(x)g(y)f(z), \quad (8.8.2)$$

con  $\beta = 4.9 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 1 - \cos(wx)$ ,  $w = \pi/2x_M$  y  $f(z) = ze^{-z/H}$  con  $H = 10$  km. Este caso es usado en Sanín y Gustavo Montero, 2007 para estudiar el transporte de contaminación atmosférica con un campo de velocidad que se obtuvo usando condiciones de frontera de tipo Dirichlet en las laterales y  $\mathbf{v}^0$  obtenido por interpolación de datos de un viento geostrófico  $\mathbf{v}_g = -38\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ ms}^{-1}$ .

$\Omega^*$	$(8,23.2)^2 \times (2, 3)$	$(4,27.2)^2 \times (1, 4)$	$(0,31.2)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$1.3 \times 10^{-2}$	$8.2 \times 10^{-2}$	$21.7 \times 10^{-2}$
$\mathbf{v}_{mnl}$	$2 \times 10^{-3}$	$8.7 \times 10^{-3}$	$5.38 \times 10^{-18}$

**Tabla 8.7:**  $\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_{m=n=80, l=20})$  con  $\mathbf{v}^0$  (8.8.2).

### Porcentaje de masa que fluye en la región

Un mejor criterio es comparar la masa que fluye sobre la frontera  $\Gamma^*$  de  $\Omega^*$  con la masa en  $M^*$  que hay en  $\Omega^*$ . De acuerdo con la condición de conservación(6.0.4), la masa es constante en la subregión  $\Omega^*$  y está dada por  $M_t^* = \rho V^*$ . La masa transportada por el campo de velocidad  $\mathbf{v}$  sobre la frontera  $\Gamma^*$  a un tiempo  $t$  es

$$M_t = t\rho\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}). \quad (8.8.3)$$

El porcentaje de masa que fluye sobre la frontera  $\Gamma^*$  sobre lo que idealmente sería una masa constante es

$$\%M^* = 100 \frac{M_t^*}{M^*} = 100 \frac{t}{V^*} \mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}) \quad (8.8.4)$$

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$3 \times 10^{-2}$	$6.78 \times 10^{-2}$	21.74
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	$6.29 \times 10^{-3}$	$1.38 \times 10^{-2}$	4.37
$\mathbf{v}_{mnl}$	<i>cero</i>	<i>cero</i>	<i>cero</i>

**Tabla 8.8:** El porcentaje de masa  $\%M$  que fluye fuera de las fronteras durante 3 horas aumenta conforme nos acercamos a la región completa en los casos  $\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$  y  $\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$  mientras que el flujo de masa es nulo para para el campo  $\mathbf{v}_{mnl}$  con un campo inicial  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta x$ .

A pesar de la simplicidad del ejemplo, nos muestra que el uso de condiciones de frontera Dirichlet nos arroja malos resultados en la vecindad de las fronteras *abiertas* y que el uso de condiciones Neumann resulta ser el más conveniente para tener campos de velocidad ajustados precisos. Al considerar otro tipo de campos iniciales tenemos

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	$2.1 \times 10^{-2}$	$4.63 \times 10^{-2}$	5.01
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	$3.19 \times 10^{-3}$	$5.73 \times 10^{-3}$	1.09
$\mathbf{v}_{mnl}$	$2.7^{-4}$	$3.8^{-4}$	$6.13 \times 10^{-14}$

**Tabla 8.9:** Valores del %Masa para  $t = 3$  horas y un campo inicial,  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z \cos(\omega x)$ .

$\Omega^*$	$(8, 12)^2 \times (2, 3)$	$(4, 16)^2 \times (1, 4)$	$(0, 20)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	284.5	265.4	239.8
$\mathbf{v}_{mnl}^{(2)}$	284.5	265.4	237.5
$\mathbf{v}_{mnl}$	44	28.2	$4.9 \times 10^{-13}$

**Tabla 8.10:** Valores del %M para  $t = 3$  horas y un campo inicial,  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}\beta z e^{z/H} \cos(\omega x)$  con  $H = 10km$  y  $\beta = 5 \times 10^{-3}$ .

Veamos lo que sucede con el porcentaje de masa que fluye en la región del caso reportado por (Sanín y Gustavo Montero, 2007) para estudiar el transporte de contaminantes atmosféricos comparando el caso con condiciones de frontera Dirichlet en las laterales con el caso para condiciones puramente Neumann.

$\Omega^*$	$(8,23.2)^2 \times (2, 3)$	$(4,27.2)^2 \times (1, 4)$	$(0,31.2)^2 \times (0, 5)$
$\mathbf{v}_{mnl}^{(1)}$	60.85	54.92	48.26
$\mathbf{v}_{mnl}$	9.43	5.84	$2.17 \times 10^{-13}$

**Tabla 8.11:** Valores del %M para  $t = 3$  horas y el campo inicial (8.8.2) con  $H = 10km$  y  $\beta = 4,9 \times 10^{-2}$ .

Los resultados son determinantes. En el caso donde se usan condiciones Dirichlet tenemos un 48.26 % de pérdida de masa en sólo 3 horas mientras que usando condiciones puramente Neumann la pérdida de masa es ínfima; de tan solo  $2.17 \times 10^{-13}$  %. Estos resultados son equivalentes a los reportados por (MA Núñez, 2012).

## Capítulo 9

### REPRESENTACIÓN DE CAMPOS DE VELOCIDAD REALISTAS SOBRE TERRENO COMPLEJO CON UNA MATRIZ S ADECUADA.

Retomemos el problema de cálculo de trayectorias sobre terreno complejo de la sección 7.1 ahora usando un campo ajustado obtenido a través de la formulación variacional considerando la coordenada vertical sigma,

$$\sigma = z - h(x, y).$$

En (MA Núñez y Sánchez, 2012) se muestra que la forma contravariante del campo ajustado  $\mathbf{v}$  que minimiza el funcional

$$J(\mathbf{v}^\eta) = \int_{\Omega_\sigma} (\mathbf{v}^\eta - \mathbf{v}^{0\eta}) \cdot \mathbb{S}(\mathbf{v}^\eta - \mathbf{v}^{0\eta}) d\Omega_\sigma \quad (9.0.1)$$

es de la forma

$$\mathbf{v}^\eta = \mathbf{v}^{0\eta} + \sqrt{g}\mathbb{S}^{-1}\nabla_\sigma\lambda. \quad (9.0.2)$$

De acuerdo a las constricciones físicas del sistema, este campo está determinado por la ecuación elíptica siguiente,

$$L\lambda = \sqrt{g}\nabla \cdot \mathbf{v}^0 \text{ en } \Omega_\sigma \text{ y } \mathcal{L}\lambda = \mathbf{n}_\sigma \cdot (\mathbf{v}_T^\eta + \mathbf{v}^{0\eta}) \text{ en } \Gamma_\sigma \quad (9.0.3)$$

donde

$$L = -\nabla_\sigma \cdot \sqrt{g}\mathbb{S}^{-1}\nabla_\sigma, \quad \mathcal{L} = \mathbf{n}_\sigma \cdot \sqrt{g}\mathbb{S}^{-1}\nabla_\sigma$$

Se obtiene también una solución semi-espectral de la ecuación elíptica anterior. De acuerdo con la ecuación (9.0.2), la solución  $\lambda_{mn}$  nos lleva a un campo de forma

$$\mathbf{v}_{mn}^\eta = \mathbf{v}^{0\eta} + \sqrt{g}\mathbb{S}^{-1}\nabla_\sigma\lambda_{mn}. \quad (9.0.4)$$

El campo correspondiente en un espacio físico  $xyz$  está dado por

$$\mathbf{v}_{mn} = \mathbf{v}^0 + \sqrt{g}\mathbb{J}\mathbb{S}^{-1}\nabla_\sigma\lambda_{mn}. \quad (9.0.5)$$

y sus componentes

$$\begin{pmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \sqrt{g}\mathbb{S}_r^{-1}\nabla_{xy}\lambda_{mn} \quad (9.0.6)$$

$$w_{mn} = \sqrt{g}[(z_x a + z_y c)\partial_x\lambda_{mn} + (z_x c + z_y b)\partial_y\lambda_{mn} + \sqrt{g}S_3^{-1}\partial_\sigma\lambda_{mn}] \quad (9.0.7)$$

Si  $\mathbf{v}^0$  coincide con la parte horizontal del campo verdadero  $\mathbf{v}_T$ , podríamos tener que  $\mathbf{v}_T = \mathbf{U}^0$ . De esta manera podemos decir que cualquier esquema o formulación para computar campos consistentes con el

balance de masa , son físicamente consistentes si nos permiten recuperar el campo  $\mathbf{U}^0$ . Este es el caso para el campo  $\mathbf{v}_{mn}$  de la ecuación (9.0.5).

Con una matriz diagonal  $\mathbb{S} = \{S_j\}$  y el jacobiano  $\sqrt{g} = 1$  tenemos un problema separable de la forma

$$L\lambda = F \quad \text{en } \Omega_\sigma, \quad (9.0.8)$$

con  $F \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}^0$ ,  $L = L_{xy} - S_3^{-1}\partial_\sigma^2$ , donde  $L_{xy} = -S_1^{-1}\partial_x^2 - S_2^{-1}\partial_y^2$  y las condiciones de frontera siguientes,

$$\partial_x \lambda|_{x=0, x_M} = \partial_y \lambda|_{y=0, y_M} = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\sigma \lambda|_{\sigma=0} = S_3 w_0^0, \quad \partial_\sigma \lambda|_{\sigma=\sigma_M} = S_3 w_M^0.$$

Supongamos que tenemos un campo inicial de la forma

$$\mathbf{v}^0 = u^0(x, y)\mathbf{i} + v^0(x, y)\mathbf{j}.$$

En la sección 7.1 encontramos que el problema con condiciones iniciales,

$$\dot{x} = u^0(x, y), \quad \dot{y} = v^0(x, y) \quad \text{con} \quad x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{en} \quad t = 0, \quad (9.0.9)$$

tiene soluciones de la forma  $\tilde{x}(t, x_0, y_0)$  y  $\tilde{y}(t, x_0, y_0)$  y una expresión explícita para la componente vertical  $z$  de la forma

$$z = h(x, y) + [z_0 - h_0]e^{-\delta t} \quad (9.0.10)$$

donde  $\delta = \nabla \cdot \mathbf{v}^0$ . Llegamos entonces a que las líneas de corriente del campo  $\mathbf{U}^0$  tienen la forma vectorial

$$\mathbf{r}(t, x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}_{xy}(t, x_0, y_0) + z(t, x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}, \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_{xy} = \tilde{x}\mathbf{i} + \tilde{y}\mathbf{j} \quad (9.0.11)$$

como caso particular de

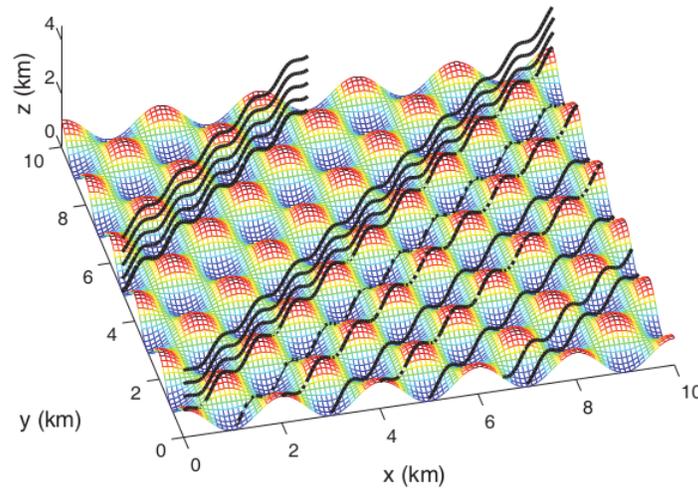
$$\mathbf{R}(t, z, x_0, y_0) = \mathbf{r}_{xy}(t, x_0, y_0) + z\mathbf{k}. \quad (9.0.12)$$

Que es la ecuación vectorial de una superficie que se define a través del desplazamiento vertical de la curva horizontal  $\mathbf{r}_{xy}$  definida por la intersección del plano  $\mathbf{R}$  con la topografía, es decir, la líneas de corriente de  $\mathbf{U}^0$  reproduce los efectos del terreno sobre la vertical indefinidamente. Para valores pequeños de  $S_3$ , la superficie  $\mathbf{R}(t, z, x_0, y_0)$  contiene las líneas de corriente de  $\mathbf{U}^0$  y del campo aproximado  $\mathbf{v}_{mn}$  con la misma condición  $(x_0, y_0)$  como podemos observar en la figura 9.1. Sin embargo, al considerar  $\mathbf{v}_{mn}$  con  $S_3 \geq 1$  tenemos un caso diferente. Las ecuaciones horizontales de las líneas de corriente de  $\mathbf{v}_{mn}$  son de la forma

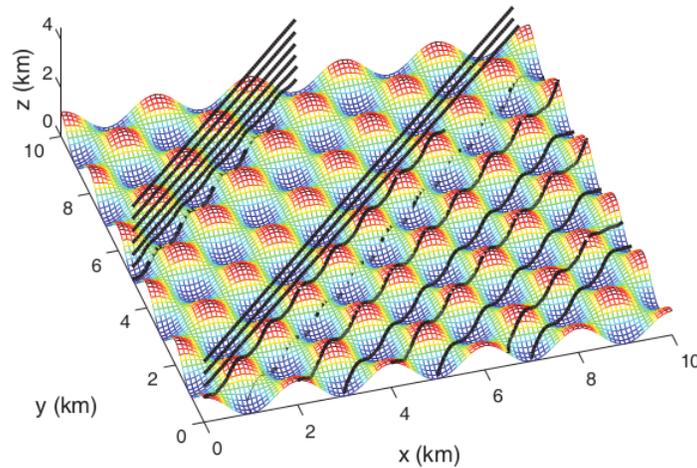
$$\dot{x} = u^0(x, y) + S_3 O(S_3; x, y, \sigma), \quad \dot{y} = v^0(x, y) + S_3 O(S_3; x, y, \sigma). \quad (9.0.13)$$

Estas ecuaciones están acopladas con la coordenada vertical debido al término  $S_3$  así que en general las líneas de corriente con la misma condición  $(x_0, y_0)$  no pertenecen a la superficie  $R(t, z, x_0, y_0)$ . Este acoplamiento puede generar flujos de viento más realistas. En la figura 9.2 podemos observar que para

una matriz  $\mathbb{S}_3 \geq 10^1$  se pierde la propiedad de reproducir sobre todo el eje vertical las variaciones del terreno. Nos muestra como el efecto del terreno decrece rápidamente conforme  $z_0$  aumenta como era de esperarse de acuerdo con (9.0.13) y las líneas de corriente con  $x_{0 \geq 2}, y_0 = 0$  ya no pertenecen al plano  $\mathbf{R}$ .



**Figura 9.1:** Líneas de corriente del ejemplo de un campo ajustado  $\mathbf{v}_{m=n=200}$  con  $S_3 = 10^{-2}$ . Fuente (MA Núñez y Sánchez, 2012).



**Figura 9.2:** Líneas de corriente del campo ajustado  $\mathbf{v}_{m=n=200}$  considerando esta vez  $S_3 = 1$ . Fuente (MA Núñez y Sánchez, 2012)

## *Capítulo 10*

### CONCLUSIONES

En la primera parte de este trabajo establecimos algunos de los principios físicos y matemáticos fundamentales y necesarios para elaborar modelos dinámicos atmosféricos. Desde los sistemas de referencia y las transformaciones entre sistemas de coordenadas hasta una revisión general de las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan la meteorología de meso-escala partiendo de primeros principios. Las hipótesis del continuo nos permitieron sentar la base para definir correctamente las propiedades físicas en el espacio así como su transporte visto desde la perspectiva lagrangiana y eulerina. Partiendo de estos principios y con la intervención de la segunda ley de Newton fue posible determinar la ecuación de movimiento. Estas ecuaciones se encontraron para una partícula que se mueve respecto a un sistema de referencia inercial y para una partícula en un sistema cartesiano fijo a la tierra. En la ecuación de movimiento con un sistema de referencia fijo a la tierra aparecen la aceleración de Coriolis y la aceleración centrípeta como resultado de la rotación terrestre en donde definimos además el llamado geopotencial siendo este la suma del potencial gravitatorio y el potencial de la fuerza centrípeta.

Por otro lado, encontramos la ecuación de energía para una partícula; para un sistema de partículas y para un volumen material. En este último caso, una parte del trabajo hecho por las fuerzas superficiales actuando sobre el volumen material exhibe una relación directa con el trabajo termodinámico al ser la parte del trabajo mecánico que modifica la energía interna. Por tanto, concluimos que el término  $tr(\mathbb{D}\sigma)$  es la generalización del trabajo termodinámico. De esta forma, la ecuación de energía es en realidad la síntesis de dos principios físicos fundamentales independientes; la segunda ley de Newton y la primera ley de la termodinámica.

Verificamos además la región de validez de la ecuación de movimiento con un término gravitacional aproximado por  $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$ , i.e., una aproximación considerando un modelo de tierra plana en contraste con un modelo de tierra esférica con masa uniformemente distribuida. Encontramos que el error porcentual supera el 10 % para regiones que consideran longitudes mayores a 100km y sigue incrementando al punto que para una región mayor de 350km el error porcentual es de 200 %. Esto es relevante dado que en modelos de mesoescala suelen usarse regiones con longitudes mayores a los 800km.

La segunda parte de la tesis se centró en la estimación de campos de velocidad a partir de datos operacionales haciendo énfasis en la importancia del balance de materia. Por un lado se hizo una revisión general de los modelos de transporte y la inestabilidad estructural estudiados en (MA Núñez y Mendoza, 2015; Rocío Mendoza, 2015), que se genera al considerar la propuesta de Kitada (Kitada, 1987) de ignorar el término divergente. Mostramos cómo pequeñas perturbaciones divergentes del campo de velocidad

generan cambios sustanciales en su estructura. La solución a este problema está dado por (MA Núñez y Mendoza, 2017) que consiste en usar un campo de velocidad que sea *per se* no divergente.

Estudiamos entonces el problema de cómo generar campos de velocidad conservativos comenzando por el caso más simple; un campo de velocidad  $U^0$  que es la suma de las componentes horizontales obtenidas por interpolación de datos y una componente vertical que se infiere a partir de imponer la conservación de masa y la restricción de tangencialidad al terreno. Observamos con un ejemplo analítico de cálculo de trayectorias que el problema con este campo, en contraste con lo que suele presentarse en la literatura, es que reproduce las variaciones del terreno en vertical indefinidamente, lo cual hace de este campo una propuesta deficiente.

Presentamos entonces otras dos propuestas, equivalentes entre sí, para generar campos de velocidad conservativos que llamamos campos ajustados; la descomposición de Helmholtz y la formulación variacional que se reducen a resolver una ecuación elíptica. La descomposición de Helmholtz presenta el inconveniente de que para una región acotada  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  la solución no es única dado que depende de las condiciones de frontera y a la fecha no se tiene una propuesta de cuáles deben de ser. La formulación variacional por su parte resulta en un problema bien definido con soluciones únicas. Sin embargo diferenciamos entre la propuesta estándar de esta formulación y una propuesta presentada en (MA Núñez, 2012). La diferencia radica en cómo se definen las condiciones de frontera. Como hemos visto, en el caso estándar suelen definirse condiciones de tipo Neumann para las fronteras *cerradas* como el terreno y condiciones tipo Dirichlet para las fronteras *abiertas*. El problema con esto, como es demostrado en los resultados posteriores, es que las condiciones de tipo Dirichlet generan discontinuidades que inducen errores en el balance de materia mismo. Es por esta razón que surge la necesidad de una propuesta que no tenga estas discontinuidades. La propuesta de (MA Núñez, 2012) consiste en usar el campo de velocidad  $U^0$  pero sólo como una aproximación decente del campo verdadero  $v_T$  en las fronteras. Con esto es posible definir condiciones tipo Neumann en toda la frontera y de esta manera evitar por completo las discontinuidades lo cual mejora en gran medida el balance de masa.

Analizamos entonces algunos de los diferentes problemas de frontera posibles de la formulación variacional en donde se resuelve la ecuación elíptica usando el método espectral que consiste en aproximar la solución a través de series de Fourier lo cual representa algunas ventajas:

- (i) Por un lado nos permite verificar que se recupera el campo  $U^0$  a partir del campo ajustado en el caso límite cuando la componente  $S_3$  de la matriz  $S$  tiende a cero para cada uno de los problemas estudiados.
- (ii) Por otro lado, el método espectral hace claro el hecho de cómo las discontinuidades de las condiciones de tipo Dirichlet afectan el balance de masa debido a los fenómenos de Gibbs como es mostrado en el apéndice B.1.

- (III) Además de que resulta ser mucho más eficiente introducir en la computadora la solución en serie de la ecuación elíptica para calcular campos de velocidad ajustados, que introducir la ecuación elíptica usando métodos como diferencias finitas o volumen finito para que la computadora encuentre la solución y sea posible calcular de esta manera los campos de velocidad ajustados.

El BVP1 consistió en imponer condiciones Neumann sólo en el terreno y Dirichlet en el resto de la frontera. Fue posible probar directamente cómo se recuperan las componentes del campo inicial  $\mathbf{v}^0$  a partir de las componentes horizontales del campo de velocidad ajustado  $\mathbf{v}^{(1)}$  en el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$ . Para probar este límite en la componente vertical fue necesario cambiar el BVP1 por un problema semi-espectral en donde se aproxima en series la parte horizontal del campo mientras que la parte vertical se resuelve mediante variación de parámetros. Por lo tanto con el resultado 1 concluimos que el BVP1 satisface el límite (1.7.10).

Verificamos de la misma forma el resultado 2 obtenido en (MA Núñez, 2012), en donde resolvimos el BVP1 con una matriz diagonal. Para este caso destacamos además el hecho de que la precisión con la que es aproximado el campo de velocidad depende de la convergencia punto por punto de la función  $F_{mnl}$  con  $F$ . Para verificar el límite cuando  $S_3 \rightarrow 0$  modificamos el BVP1 usando nuevamente un método semi-espectral aproximando parte de su solución en series de Fourier, pero en este caso la solución de la componente vertical y una componente horizontal, estimando por variación de parámetros la restante. Hacer esto nos permitió notar la discontinuidad en la frontera debido al uso de condiciones de tipo Dirichlet que es justamente el resultado 2.

En el BVP2 se impusieron condiciones Neumann en el terreno y las fronteras laterales; sólo en la frontera superior se usaron condiciones Dirichlet. Con el mismo planteamiento usado en BVP1 se obtienen los mismos resultados. El tercer resultado es la prueba del límite (1.7.10) con el campo  $\mathbf{v}^{(2)}$ . El objetivo principal de introducir este problema es la comparación de los resultados con los problemas BVP1 y BVP3.

Con problema BVP3 se usaron **puramente** condiciones tipo Neumann sobre toda la frontera. En este caso fue necesario introducir la llamada condición de compatibilidad en donde usamos la propuesta de (MA Núñez, 2012) de aproximar el campo verdadero  $\mathbf{v}_T$  con el campo conservativo más simple  $\mathbf{U}^0$  **únicamente** sobre las fronteras laterales y superior. De esta forma fue posible definir correctamente el BVP3 y obtener a su vez el cuarto resultado que nos dice que este problema satisface el límite (1.7.10). Mediante un cambio de variable encontramos además condiciones de frontera homogéneas para este caso.

Con los tres problemas de frontera establecidos, estudiamos ahora un ejemplo en 3 dimensiones con series triples de Fourier propuesto en (MA Núñez, 2012) usando un campo inicial constante de la forma  $\mathbf{v}^0 = u^0 \mathbf{i}$ . Con este ejemplo sencillo de campo inicial verificamos la precisión de los campos ajustados  $\mathbf{v}_{nml}^{(1)}$ ,  $\mathbf{v}^{(2)}$  y  $\mathbf{v}$  calculando la rapidez de la convergencia de  $F_{mnl}^{(1)}$ ,  $F_{mnl}^{(2)}$  y  $F_{mnl}^{(3)}$  con  $F$  respectivamente.

Notamos que, de acuerdo con lo esperado, el BVP1 tiene una convergencia lenta, el BVP2 mejora un poco y el BVP3 tiene una convergencia inmediata.

Con estos resultados preliminares evaluamos posteriormente la consistencia del balance de masa para cada problema de frontera haciendo una comparación de sus flujos en la región de estudio midiendo que tan rápido aumenta el flujo en diferentes subregiones mientras la frontera  $\Gamma^*$  tiende a  $\Gamma$  para tres casos distintos de campos iniciales y para un caso especial equivalente al reportado por (Sanín y Gustavo Montero, 2007) usado para estudiar la dispersión de contaminantes en la atmósfera. De acuerdo con esto, fue posible obtener el porcentaje de masa que fluye en las regiones de estudio en un intervalo de tiempo de 3 horas. Se verificaron los resultados de (MA Núñez, 2012) que muestran sin lugar a dudas que el uso de condiciones de Frontera Dirchlet alteran sustancialmente el balance de masa mientras que la propuesta para usar puramente condiciones de frontera Neumann resulta ser muy superior en tanto a la consistencia física para calcular campos de velocidad conservativos.

Por último, revisamos algunos resultados de (MA Núñez y Sánchez, 2012). Mostramos la forma contra-variante del campo de velocidad ajustado que minimiza el funcional en un dominio  $\Omega_\sigma$  con coordenadas  $\sigma$  y la ecuación elíptica que lo determina. Replanteamos el problema del cálculo de trayectorias y verificamos que escoger adecuadamente la componente  $S_3$  de la matriz  $\mathbb{S}$  resulta en campos de velocidad de viento realistas. Cabe mencionar que estos campos ajustados resultan ser también adecuados para corregir la inestabilidad estructural de trayectorias para modelos de transporte atmosférico dependientes del tiempo bajo perturbaciones de masa (MA Núñez y Mendoza, 2017).

Los modelos variacionales consistentes con el balance de masa se han usado principalmente como modelos de diagnóstico de viento a un tiempo dado o para estudios climatológicos, sin embargo, hemos visto que estos modelos tienen la capacidad de ser usados para asimilar de datos de flujos dependientes del tiempo o para estimar trayectorias de viento.

La estimación de campos de velocidad que sean físicamente consistentes es un problema fundamental en muchas áreas que no se limitan a las ciencias atmosféricas sino que pueden ser de gran utilidad para cualquier clase de modelo que trate de estimar campos de velocidad a partir de datos operacionales y que requiera una asimilación de datos cuidadosa.

La atmósfera es un sistema complejo cuyas ecuaciones que relacionan sus variables suelen ser no lineales. Hemos visto como la teoría del caos surge a partir de que Lorenz estudiaba una forma de simplificar las ecuaciones que gobiernan los procesos atmosféricos con el fin de hacer predicciones climáticas de forma numérica con ayuda de los ordenadores. Se percató de que pequeñas variaciones decimales en las condiciones iniciales del modelo generan simulaciones numéricas del clima completamente diferentes. Por esta razón, para tener modelos que sean lo más realistas posibles a la verdadera dinámica atmosférica, es fundamental que las variables que gobiernan estos modelos sean, al menos, físicamente consistentes.

De esta forma garantizamos que los posibles errores se reduzcan a errores técnicos como la precisión de aparatos de medición y la forma de obtener los datos de dichas variables. La alta sensibilidad a las condiciones de los sistemas complejos requieren una alta precisión en el cálculo de sus variables.

En este trabajo se presentó una revisión de propuestas para estimar campos de velocidad y campos de fuerza gravitacional que pueden mejorar notablemente los modelos de transporte de propiedades físicas y de trayectorias de partículas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ansorge, Cedrick (2016). *Analyses of turbulence in the neutrally and stably stratified planetary boundary layer*. Springer.
- Bates, D. R. (1961). “The Earth and Its Atmosphere”. En: *Science* 127.3308, pág. 324.
- Bauer, Peter, Alan Thorpe y Gilbert Brunet (2015). “The quiet revolution of numerical weather prediction”. En: *Nature* 525.7567, págs. 47-55.
- Bowman, Kenneth P y Gordon D Carrie (2002). “The mean-meridional transport circulation of the troposphere in an idealized GCM”. En: *Journal of the atmospheric sciences* 59.9, págs. 1502-1514.
- Chi, José Daniel Cámara y col. (2020). “Evaluación del Potencial Eólico en la Bahía de Chetumal”. En: *Pistas Educativas* 42.136.
- De Laplace, Marquis (1995). *A philosophical essay on probabilities*. Courier Corporation.
- Djolov, GD (2007). “Some modern features of boundary-layer meteorology: a birthday tribute for Sergej Zilitinkevich”. En: *Atmospheric Boundary Layers*. Springer, págs. 5-9.
- Eichelberger, Scott y col. (2008). “Climate change effects on wind speed”. En: *North American Windpower* 7, págs. 68-72.
- Falahatpisheh, Ahmad, Gianni Pedrizzetti y Arash Kheradvar (2014). “Three-dimensional reconstruction of cardiac flows based on multi-planar velocity fields”. En: *Experiments in fluids* 55.11, págs. 1-15.
- Flores, Ciro y col. (2010). “Algorithms for vector field generation in mass consistent models”. En: *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 26.4, págs. 826-842.
- Goodin, William R, Gregory J McRa y John H Seinfeld (1979). “A comparison of interpolation methods for sparse data: Application to wind and concentration fields”. En: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 18.6, págs. 761-771.
- Grimmond, CSB (2006). “Progress in measuring and observing the urban atmosphere”. En: *Theoretical and Applied Climatology* 84.1, págs. 3-22.
- Hadamard, Jacques (1902). “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”. En: *Princeton university bulletin*, págs. 49-52.
- Hoffmann, L. y col. (2022). “Massive-Parallel Trajectory Calculations version 2.2 (MPTRAC-2.2): Lagrangian transport simulations on graphics processing units (GPUs)”. En: *Geoscientific Model Development* 15.7, págs. 2731-2762. DOI: [10.5194/gmd-15-2731-2022](https://doi.org/10.5194/gmd-15-2731-2022). URL: <https://gmd.copernicus.org/articles/15/2731/2022/>.
- Holton, James R (2004). “An introduction to dynamic meteorology”. En: *International Geophysics Series* 88.4, pág. 535.
- Kitada, Toshihiro (1987). “Effect of non-zero divergence wind fields on atmospheric transport calculations”. En: *Atmospheric Environment (1967)* 21.4, págs. 785-788.
- Lorenz, Edward N (1960). “Maximum simplification of the dynamic equations”. En: *Tellus* 12.3.

- Lorenz, Edward N (1962). “The statistical prediction of solutions of dynamical equations”. En: *Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction, 1962*. Meteor. Soc. Japan.
- (1963). “Deterministic nonperiodic flow”. En: *Journal of atmospheric sciences* 20.2, págs. 130-141.
- (1993). *The Essence of Chaos*. University of Washinton Press, pág. 238.
- Martin, Paul (1963). “The Essence of Chaos (review)”. En: *Physics Today* 48.2, págs. 54-56.
- Maxwell, James Clerk (1991). *Matter and motion*. Courier Corporation.
- Mendoza, Rocío (2015). “Importancia de la conservación de la masa en modelos de transporte de sustancias en la atmósfera y su ajuste con un método variacional”. Tesis de mtría. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Monks, Paul S y col. (2009). “Atmospheric composition change—global and regional air quality”. En: *Atmospheric environment* 43.33, págs. 5268-5350.
- Montero, G, R Montenegro y JM Escobar (1998). “A 3-D diagnostic model for wind field adjustment”. En: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 74, págs. 249-261.
- Nebeker, Frederik (1995). *Calculating the weather: Meteorology in the 20th century*. Elsevier.
- Núñez, M.A. (2003). “Domain of validity of some atmospheric mesoscale models”. En: *INuovo Cimento C Geophysics Space Physics C* 26.5, págs. 469-491.
- (2008). *Apuntes de Meteorología Dinámica*. Vol. 1. s/p.
- Núñez, M.A. (2005). “Analysis of some atmospheric mesoscale models”. En: *Revista mexicana de física* 51.3, págs. 217-229.
- Núñez, M.A., G Ramírez y H Hernández (2004). “Análisis de métodos de interpolación de datos de viento basados en la ecuación de conservación de la masa”. En: *Reporte de investigación, Universidad Autónoma Metropolitana, División de Ciencias Básicas e Ingeniería*, págs. 1-65.
- Núñez, MA (2012). “Improving variational mass-consistent models of hydrodynamic flows via boundary conditions”. En: *The European Physical Journal Plus* 127.4, págs. 1-17.
- Núñez, MA y R Mendoza (2015). “Structural instability of atmospheric flows under perturbations of the mass balance and effect in transport calculations”. En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 582. 1. IOP Publishing, pág. 012015.
- (2017). “A method for correcting the structural instability of time-dependent atmospheric trajectory models under perturbations of the mass balance”. En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 792. 1. IOP Publishing, pág. 012034.
- Núñez, MA y JE Sánchez (2012). “A formulation to compute mass-consistent models of hydrodynamic flows”. En: *The European Physical Journal Plus* 127.4, págs. 1-20.
- Orlanski, Isidoro (1975). “A rational subdivision of scales for atmospheric processes”. En: *Bulletin of the American Meteorological Society*, págs. 527-530.
- Pielke, RA (1984). *a., 1984: Mesoscale meteorological modeling*.
- Poincare, Henri (1908). *Science and method*. Courier Corporation.

- Ratto, CF y col. (1994). “Mass-consistent models for wind fields over complex terrain: the state of the art”. En: *Environmental Software* 9.4, págs. 247-268.
- Sanín, N y Gustavo Montero (2007). “A finite difference model for air pollution simulation”. En: *Advances in Engineering Software* 38.6, págs. 358-365.
- Sasaki, Yoshikazu (1958). “An objective analysis based on the variational method”. En: *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* 36.3, págs. 77-88.
- Stohl, Andreas (1998). “Computation, accuracy and applications of trajectories—A review and bibliography”. En: *Atmospheric Environment* 32.6, págs. 947-966.
- Stone, Roger C y Holger Meinke (2006). “Weather, climate, and farmers: an overview”. En: *Meteorological Applications* 13.S1, págs. 7-20.
- Stull, Roland B (1988). *An introduction to boundary layer meteorology*. Vol. 13. Springer Science & Business Media.
- Thunis, P y R Bornstein (1996). “Hierarchy of mesoscale flow assumptions and equations”. En: *Journal of atmospheric sciences* 53.3, págs. 380-397.
- Trenberth, Kevin E (1991). “Climate diagnostics from global analyses: Conservation of mass in ECMWF analyses”. En: *Journal of Climate* 4.7, págs. 707-722.
- (1992). *Climate system modeling*. Cambridge University Press.
- Trenberth, Kevin E, James W Hurrell y Amy Solomon (1995). “Conservation of mass in three dimensions in global analyses”. En: *Journal of climate* 8.4, págs. 692-708.
- Trenberth, Kevin E y Lesley Smith (2005). “The mass of the atmosphere: A constraint on global analyses”. En: *Journal of Climate* 18.6, págs. 864-875.
- Tritton, David J (2012). *Physical fluid dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Walko, Robert L, Craig J Tremback y Rolf FA Hertenstein (2006). “RAMS The Regional Atmospheric Modeling System Technical Description”. En: *ATEMT Company, Boulder, Colorado, USA*.
- White, Sam, John Brooke y Christian Pfister (2018). “Climate, weather, agriculture, and food”. En: *The Palgrave handbook of climate history*, págs. 331-353.
- Woolsey, Craig, George Hagerman y M Morrow (abr. de 2005). “A self-sustaining, boundary-layer-adapted system for terrain exploration and environmental sampling”. En.
- Yamada, Tetsuji, Chih-Yue Jim Kao y Susan Bunker (1989). “Airflow and air quality simulations over the western mountainous region with a four-dimensional data assimilation technique”. En: *Atmospheric Environment (1967)* 23.3, págs. 539-554.
- Zannetti, P (1990). *Air Pollution Modeling, Computational Mechanics Publications*.

*A p é n d i c e A*

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON CONDICIONES INICIALES.**

Un operador  $L : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$  sobre el espacio vectorial  $\mathbb{S}^1$  es lineal si es distributivo bajo la suma

$$L(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha L\mathbf{x} + \beta L\mathbf{y}.$$

Considerar el operador diferencial  $L$  de orden  $n$ .

$$L = a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} + a_0(t), \quad (\text{A.0.1})$$

que actúa sobre el espacio de funciones cuadrado integrables,  $L^2(\Omega)$ , con derivada continua de orden  $n$  en un intervalo  $[t_0, t_1]$ . La linealidad del operador nos permite descomponer la solución general de la ecuación

$$Lu = f, \quad (\text{A.0.2})$$

en la suma de su solución homogénea,

$$Lu_h = 0, \quad (\text{A.0.3})$$

mas la solución particular de la ecuación inhomogénea

$$Lu_p = f. \quad (\text{A.0.4})$$

Así, la solución general es la superposición de ambos resultados:  $u = u_h + u_p$ . Usando la linealidad de  $L$  sobre esta suma de soluciones, homogénea y particular, tenemos

$$Lu = Lu_h + Lu_p = 0 + f = f. \quad (\text{A.0.5})$$

De acuerdo al teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias con *condiciones iniciales*, si los coeficientes del operador  $L$  son continuos en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , entonces la ec. homogénea tiene  $n$  soluciones linealmente independientes. Es decir, el kernel de  $L$  ( $\ker(L)^2$ ), tiene dimensión  $n$ . Sean entonces,  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , el conjunto de soluciones linealmente independientes; la solución de la ecuación homogénea (A.0.3) está dada por

$$u_h = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, \quad (\text{A.0.6})$$

---

<sup>1</sup>La dimensión de un espacio vectorial se define como la *cardinalidad* del mayor conjunto linealmente independiente que tiene dicho espacio.

<sup>2</sup>El kernel de un operador lineal  $A$  es el conjunto de todos los vectores cuya imagen bajo  $A$  sea el vector nulo:  $\ker(A) = \{\mathbf{v} \in V : A\mathbf{v} = 0\}$

por lo que,

$$L\varphi_k = 0.$$

El único conjunto de coeficientes  $c_j$  para los cuales (A.0.6) satisface (A.0.3)

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

es cuando los coeficientes,  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . De lo contrario el conjunto de soluciones  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  no sería linealmente independiente.

Para encontrar los coeficientes  $c_j$ , generamos un conjunto cerrado de ecuaciones derivando la ec. (A.0.7)  $n - 1$  veces. Esto nos resulta en un sistema de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas.

$$c_1\varphi_1^{(j)} + c_2\varphi_2^{(j)} + \dots + c_n\varphi_n^{(j)} = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq n - 1, \quad (\text{A.0.8})$$

donde se usó la notación:  $\frac{d^j}{dt^j}\varphi_k = \varphi_k^{(j)}$ . Este sistema de ecuaciones puede representarse en su forma matricial como

$$\mathbb{W}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.0.9})$$

con  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{0}$  dados explícitamente por

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_k \\ \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \dots & \varphi_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_k^{(n-1)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.10})$$

donde  $\mathbb{W}$  es conocida como la *matriz wronskiana* y su determinante  $W = \det(\mathbb{W})$  se conoce como *wronskiano*. Si  $W(t) \neq 0$  para  $t$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$  entonces existe la matriz inversa  $\mathbb{W}^{-1}$  y la única solución es a trivial  $\mathbf{c} = c_j = 0$ .

### A.1. Solución particular del problema $\mathbf{Lu}=\mathbf{f}$ y la función de Green.

El problema de encontrar la solución de la ec. homogénea (A.0.3) se reduce a hallar un conjunto de soluciones linealmente independiente  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ . Una forma de encontrar la solución particular (A.0.4) es usando el método de *variación de parámetros* que consiste en usar el mismo conjunto de soluciones para la ec. homogénea  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  buscando una solución de la forma

$$u_p = \sum_k^n \phi_k(t)\varphi_k(t), \quad (\text{A.1.1})$$

donde notamos que en este caso, en contraste con (A.0.6), los coeficientes ahora tienen una dependencia en  $t$ ,  $\phi_k = \phi_k(t)$ . Calculamos entonces las  $n$  derivadas de  $u$  para introducir esta solución en (A.0.2) imponiendo la condición,

$$\sum_k^n \dot{\phi}_k(t)\varphi_k^{(j)}(t) = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq n - 2, \quad (\text{A.1.2})$$

estas condiciones impuestas definen un conjunto de  $(n - 1)$  ecuaciones para calcular los  $n$  coeficientes  $c_k$ . Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k(t) \\
 u^1 &= \overbrace{\sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k(t)}^{=0} + \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(1)}(t) \\
 u^2 &= \overbrace{\sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k^{(1)}(t)}^{=0} + \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(2)}(t) \\
 &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 u^{n-1} &= \overbrace{\sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k^{(n-2)}(t)}^{=0} + \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) \\
 u^n &= \sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) + \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(n)}(t).
 \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

Reemplazando en (A.0.2) tenemos,

$$\begin{aligned}
 a_0 u &= a_0 \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k(t) \\
 a_1 u^1 &= a_1 \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(1)}(t) \\
 a_2 u^2 &= a_2 \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(2)}(t) \\
 &\vdots = \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 a_{n-1} u^{n-1} &= a_{n-1} \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) \\
 \underbrace{a_n u^n}_{Lu} &= a_n \sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) + \underbrace{a_n \sum_k^n \phi_k(t) \varphi_k^{(n)}(t)}_{\sum_k \phi_k L \varphi_k}.
 \end{aligned} \tag{A.1.4}$$

recordando que si los coeficientes  $a_j$  del operador  $L$  son continuos en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , entonces la ec. homogénea tiene  $n$  soluciones linealmente independientes, por lo que,

$$L\varphi_k = 0.$$

Finalmente se obtiene

$$a_n \sum_k^n \dot{\phi}_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) = f. \tag{A.1.5}$$

Con esto obtenemos un sistema cerrado de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

$$\begin{aligned} \sum_k^n \dot{\phi}_k \varphi_k &= 0 \\ \sum_k^n \dot{\phi}_k \varphi_k^{(1)} &= 0 \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_k^n \dot{\phi}_k \varphi_k^{(n-1)} &= \frac{f}{a_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

La forma matricial se puede representar como

$$\mathbb{W} \dot{\phi} = \mathbf{f}_a, \quad (\text{A.1.7})$$

donde  $\mathbb{W}$  es la matriz wronskiana y  $\dot{\phi}$  y  $\mathbf{f}_a$  están dados por

$$\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

La independencia lineal de  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  garantiza la existencia de  $\mathbb{W}^{-1}$  con lo cual obtenemos los coeficientes.

$$\dot{\phi} = \mathbb{W}^{-1} \mathbf{f}_a = \begin{pmatrix} (\mathbb{W}^{-1})_{11} & \dots & \psi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{W}^{-1})_{n1} & \dots & \psi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_n} \end{pmatrix} = \frac{f}{a_n} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.9})$$

donde denotamos a los elementos de la última y única columna que opera de la matriz inversa wronskiana como  $\psi_j$ . Integrando obtenemos

$$\phi = \int^t \psi_k(\tau) \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau + c_{k_0} \quad (\text{A.1.10})$$

donde  $c_k$  es una constante de integración. Reemplazando, la solución particular (A.1.1) nos queda finalmente que,

$$u_p = \sum_k \left( \int^t \psi_k(\tau) \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau \right) \varphi_k(t) + \sum_k c_{k_0} \varphi_k(t). \quad (\text{A.1.11})$$

Dado que  $\sum_k c_{k_0} \varphi_k(t)$  es una combinación lineal de la base  $\varphi_k$ , satisface la ec. homogénea, por lo que

$$L \sum_k c_{k_0} \varphi_k(t) = 0.$$

Así, metiendo la suma en la integral, la solución particular se puede escribir como

$$u_p = \int^t \sum_k [\psi_k(\tau) \varphi_k(t)] \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau \quad (\text{A.1.12})$$

donde aparece lo que llamaremos *función de Green genérica*,

$$G(t, \tau) = \sum_k \psi_k(\tau) \varphi_k(t), \quad (\text{A.1.13})$$

y la solución particular toma la forma siguiente,

$$u_p = \int^t G(t, \tau) \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau \quad (\text{A.1.14})$$

Dado que  $\tau$  es sólo parámetro de integración, notamos que la función de Green  $G(t, \tau)$  es una combinación lineal de las funciones base  $\varphi_k(t)$  por lo que satisface la ecuación homogénea

$$LG(t, \tau) = 0. \quad (\text{A.1.15})$$

El operador  $L$  actúa sobre el parámetro  $t$  y  $\tau$  se opera como constante.

## A.2. Solución lagrangiana de la ecuación de transporte.

Consideremos la ecuación de transporte como una ecuación diferencial parcial en su forma *euleriana*.

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i \mathbf{v}) = F \quad (\text{A.2.1})$$

donde  $c_i$  es la concentración de alguna propiedad física que se transporta a una velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  y  $F = F(t, \mathbf{r}, c_i)$  representa las fuentes que producen el transporte y el cambio en el balance de la propiedad  $c_k$ . Si consideramos ahora la forma *lagrangiana* de la ecuación (A.2.1) en donde  $c(t, \mathbf{r}) = c_L(t, \mathbf{r}_0)$  y  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_L(t, \mathbf{r}_0)$ , para todo tiempo  $t \geq 0$ ,

$$\frac{dc_L}{dt} + c_L \nabla \cdot \mathbf{v}_L = F_L, \quad (\text{A.2.2})$$

obtenemos una ecuación diferencial ordinaria que depende de su condición inicial,

$$c_L(t, \mathbf{r}_0) = c_0 \quad \text{en } t = 0,$$

donde  $c_0$  es la concentración inicial. Considerando,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = P(t, \mathbf{r})$  obtenemos la forma estándar de una ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{dc_L}{dt} + c_L P_L(t, \mathbf{r}_0) = F_L, \quad (\text{A.2.3})$$

que podemos resolver usando el método de factor integrante multiplicando la ecuación por el factor

$$\mu = e^{\int_0^t P_L(s, \mathbf{r}_0) ds}.$$

Definimos  $\alpha(t) = \int_0^t P_L(s, \mathbf{r}_0) ds$  para reescribir la ecuación (A.2.3) como

$$e^{\alpha(t)} \frac{dc_L}{dt} + P_L(t, \mathbf{r}_0) e^{\alpha(t)} c_L = e^{\alpha(t)} F_L \quad (\text{A.2.4})$$

de esta forma, la regla de derivación del producto de dos funciones nos permite factorizar la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha(t)} c_L) = e^{\alpha(t)} F(t, \mathbf{r}_0) \quad ; \quad c_L = c_0 \quad \text{en } t = 0. \quad (\text{A.2.5})$$

Esto permite integrar la ecuación de manera que se cumpla su condición inicial,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{\alpha(\tau)} c_L) d\tau &= \int_0^t e^{\alpha(\tau)} F(\tau, \mathbf{r}_0) d\tau \\ e^{\alpha(t)} c_L(t, \mathbf{r}_0) - e^{\alpha(0)} c_0(\mathbf{r}_0) &= \int_0^t e^{\alpha(\tau)} F(\tau, \mathbf{r}_0) d\tau. \end{aligned}$$

Dado que  $\alpha(0) = 0$  se obtiene el resultado siguiente

$$c_L = c_0 e^{-\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} \int_0^t e^{\alpha(\tau)} F(\tau, \mathbf{r}_0) d\tau. \quad (\text{A.2.6})$$

Como ejercicio usemos el método equivalente de variación de parámetros y veamos si obtenemos el mismo resultado. La linealidad del operador,

$$L = \left[ \frac{d}{dt} + P \right],$$

permite descomponer la solución en  $c_L = c_{Lh} + c_{Lp}$ . Si los coeficientes de  $L$  y la función  $F_L(t, \mathbf{r})$  son continuos en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ , entonces existe una única solución de la ecuación (A.2.2). Además, la solución de la ecuación homogénea,

$$L\varphi = 0$$

tiene exactamente  $n$  soluciones linealmente independientes determinadas por las condiciones iniciales (en este caso  $n = 1$ ). La base  $\varphi$  nos permite encontrar las soluciones  $c_{Lh}$  y  $c_{Lp}$ . Para encontrar la base  $\varphi$  del operador  $L$  resolvemos primero la ecuación homogénea,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v}_L = 0,$$

que se puede integrar directamente para obtener lo siguiente,

$$\varphi(t) = e^{-\alpha(t)}, \quad (\text{A.2.7})$$

Esta es la base del operador  $L$  para  $t \geq 0$ . La solución de la ecuación homogénea se puede escribir como

$$c_{Lh} = c_0 \varphi(t), \quad (\text{A.2.8})$$

donde  $c_0$  es la concentración inicial que se obtiene al imponer las condiciones iniciales.

La solución particular la buscamos usando esta base pero proponiendo ahora una solución del tipo,

$$c_{Lp} = \phi(t) \varphi(t), \quad (\text{A.2.9})$$

donde el coeficiente ya no es constante. Introduciendo esta solución en la ecuación (A.2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{d}{dt}(\phi\varphi) + (\phi\varphi) \nabla \cdot \mathbf{v}_L \\ &= \left( \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v}_L \right) \phi + \varphi \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned}$$

Entre paréntesis tenemos la ecuación homogénea que es igual a cero quedando únicamente,

$$F_L = \varphi \frac{d\phi}{dt},$$

que se puede integrar para obtener el coeficiente,

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{F_L}{\varphi} d\tau. \quad (\text{A.2.10})$$

Al sustituir en la solución particular propuesta (A.2.9), tenemos entonces que

$$c_{Lp} = \left( \int_0^t \frac{F_L(\tau, r_0)}{\varphi(\tau)} d\tau \right) \varphi(t), \quad (\text{A.2.11})$$

que podemos reescribir de manera que tengamos la forma siguiente,

$$\begin{aligned} c_{Lp} &= \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)} F_L(\tau, r_0) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-[\alpha(t)-\alpha(\tau)]} F_L(\tau, r_0) d\tau, \end{aligned}$$

donde reconocemos a la función de Green como:

$$G(\tau, t, \mathbf{r}_0) = e^{\alpha(\tau)-\alpha(t)}.$$

Por lo tanto, la solución completa  $c_L = c_{Lh} + c_{Lp}$  está dada por

$$c_L = c_0 e^{-\alpha(t)} + \int_0^t G(\tau, t, \mathbf{r}_0) F_L(\tau, \mathbf{r}_0) d\tau, \quad (\text{A.2.12})$$

sustituyendo  $G(\tau, t, \mathbf{r}_0)$ , obtenemos

$$c_L = c_0 e^{-\alpha(t)} + e^{-\alpha(t)} \int_0^t e^{\alpha(\tau)} F(\tau, \mathbf{r}_0) d\tau, \quad (\text{A.2.13})$$

la cual es idéntica a la solución obtenida por el método de factor integrante (A.2.6).

*A p é n d i c e B*

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON CONDICIONES EN LA FRONTERA.

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden,

$$Au(x) = \left[ \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \right] u(x) = f \quad \text{con } a \leq x \leq b, \quad (\text{B.0.1})$$

donde  $A$  es un operador lineal. La variable independiente  $x$  (o coordenada) pertenece a la región del intervalo  $[a, b]$ , con  $a, b$  finitos. De esta forma  $a$  y  $b$  definen la frontera de la región. El comportamiento de la función  $u(x)$  en la frontera (i.e. cuando  $x = a, b$ ) va a determinar las *condiciones de frontera*. Supongamos que la función  $u(x)$  se anula en las fronteras de manera que satisface *condiciones de frontera Dirichlet*,

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (\text{B.0.2})$$

Esto define un dominio del operador  $A$  como un espacio para el conjunto de funciones que se anulan en los extremos  $a, b$  y que tienen segundas derivadas continuas,

$$\mathcal{D}(A) = \{v \in C^2(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

El conjunto  $\mathcal{D}(A)$  es un espacio vectorial pero el teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales no es válido en este caso dado que la condición en la primera derivada  $u^{(1)}(a) = u_0^{(1)}$  se reemplaza por las condiciones de frontera (B.0.2). Sin embargo, es posible aprovechar la linealidad de  $A$  para caracterizar el problema de existencia y unicidad.

Consideremos la ecuación homogénea sujeta a las condiciones de frontera (B.0.2),

$$Au = 0 \quad \text{con } u(a) = u(b) = 0. \quad (\text{B.0.3})$$

Tenemos dos posibilidades;  $u(x) = 0$  es la única solución o no lo es. En términos del kernel del operador  $A$

$$\ker(A) = \{v \in \mathcal{D}(A) : Av = 0\},$$

tenemos lo siguiente:

- (i) Si  $u(x) = 0$  es la **única** solución entonces el operador  $A$  es inyectivo y existe su inverso  $A^{-1}$ . El kernel de  $A$  no es vacío ya que contiene al elemento cero.

- (ii) Si el operador inverso existe entonces  $\ker(A) = \{0\}$  y la solución del problema (B.0.1) es  $u = A^{-1}f$  para  $f$  en  $D(A)$ .
- (iii) Si  $\ker(A)$  tiene un elemento aparte del cero entonces el problema (B.0.1) no tiene solución para  $f \neq 0$  o tiene múltiples soluciones.

Para encontrar una expresión explícita de la solución  $u(x)$  del problema (B.0.1) y del operador  $A^{-1}$  consideremos el método de variación de parámetros. Supongamos que conocemos un par de soluciones linealmente independientes:  $\varphi_a$  y  $\varphi_b$  de la ecuación homogénea  $A\varphi = 0$ , esto es

$$A\varphi_a = 0, \quad A\varphi_b = 0$$

Cada función satisface las condiciones de frontera cuando  $x = a, b$ ,

$$\varphi_a(a) = 0, \quad \varphi_b(b) = 0.$$

pero ninguna de las funciones puede satisfacer *simultáneamente* ambas condiciones de frontera por lo que,

$$\varphi_b(a) \neq 0, \quad \varphi_a(b) \neq 0,$$

El método de variación de parámetros consiste en proponer un solución particular de la forma,

$$u(x) = c_a(x)\varphi_a(x) + c_b(x)\varphi_b(x), \quad (\text{B.0.4})$$

donde los coeficientes quedan determinados al resolver el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_b \\ \dot{\varphi}_a & \dot{\varphi}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_a \\ \dot{c}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (\text{B.0.5})$$

La solución del sistema está dado por,

$$\frac{dc_a}{dx} = -\frac{\varphi_b(x)f(x)}{W(x)}, \quad \frac{dc_b}{dx} = \frac{\varphi_a(x)f(x)}{W(x)}, \quad (\text{B.0.6})$$

donde  $W$  es el wronskiano del conjunto  $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ ,

$$W = \varphi_a \dot{\varphi}_b - \varphi_b \dot{\varphi}_a.$$

Al integrar obtenemos,

$$c_a(x) = -\int_{\alpha}^x \frac{\varphi_b(s)f(s)}{W(s)} ds, \quad c_b(x) = \int_{\beta}^x \frac{\varphi_a(s)f(s)}{W(s)} ds, \quad (\text{B.0.7})$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes arbitrarias que definen constantes de integración. La solución particular de  $u(x)$  toma la forma siguiente

$$u(x) = -\varphi_a(x) \int_{\alpha}^x \frac{\varphi_b(s)f(s)}{W(s)} ds + \varphi_b(x) \int_{\beta}^x \frac{\varphi_a(s)f(s)}{W(s)} ds. \quad (\text{B.0.8})$$

Para encontrar  $\alpha$  y  $\beta$  imponemos las condiciones de frontera  $u(a) = u(b) = 0$ . Sabemos que en  $x = a$  tenemos  $\varphi_a(a) = 0$  por lo que,

$$u(a) = \varphi_b(a) \int_{\alpha}^{x=a} \frac{\varphi_a(s)f(s)}{W(s)} ds. \quad (\text{B.0.9})$$

Como  $\varphi_b(a) \neq 0$ , la condición  $u(a) = 0$  sólo se satisface si  $\alpha = a$ . De la misma forma, en  $x = b$  tenemos que  $\varphi_b(b) = 0$  por lo tanto

$$u(b) = -\varphi_a(b) \int_{\beta}^{x=b} \frac{\varphi_b(s)f(s)}{W(s)} ds = 0. \quad (\text{B.0.10})$$

Y la condición  $u(b) = 0$  sólo se cumple con  $\beta = b$ . Así llegamos a la solución deseada

$$u(x) = \int_a^x \frac{\varphi_b(s)\varphi_a(x)}{W(s)} f(s) ds + \int_x^b \frac{\varphi_a(s)\varphi_b(x)}{W(s)} f(s) ds. \quad (\text{B.0.11})$$

En términos de la función de Green,

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\varphi_a(s)\varphi_b(x)}{W(s)} & a \leq s \leq x \\ \frac{\varphi_b(s)\varphi_a(x)}{W(s)} & x \leq s \leq b \end{cases} \quad (\text{B.0.12})$$

es posible escribir la solución como

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)f(s) ds, \quad (\text{B.0.13})$$

lo cual permite identificar al operador inverso como un operador integral

$$A^{-1}f(x) = \int_a^b G(x, s)f(s) ds. \quad (\text{B.0.14})$$

### B.1. El problema de valores propios, la solución espectral para problemas con condiciones en la frontera y los fenómenos de Gibbs

El problema de valores propios o de eigen-valores,

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad (\text{B.1.1})$$

nos permite obtener la base de un operador sujeto a un problema con condiciones en la frontera. Esta base nos permite aproximar la solución general del problema  $Lu = f$  a través de series de Fourier. Para esto consideremos el problema aproximado

$$Au_n = f_n. \quad (\text{B.1.2})$$

Cualquier función  $g(x)$  cuya norma es finita sobre una región  $\Omega$  se denota como una función cuadrado integrable ó que  $g(x) \in L^2(\Omega)$

$$\|g(x)\|^2 = \int_0^b |g|^2 dx < \infty, \quad (\text{B.1.3})$$

y admite un desarrollo de series de Fourier de la forma

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi_j \quad (\text{B.1.4})$$

Por lo tanto, si la norma de las funciones  $f_n$  y  $u_n$  es finita, éstas pueden representarse por medio de series de Fourier como una combinación lineal de la base  $\{\varphi_k\}$ ,

$$u_n = \sum_k^n u_k \varphi_k \quad (\text{B.1.5})$$

$$f_n = \sum_k^n f_k \varphi_k \quad (\text{B.1.6})$$

Los coeficientes  $f(k)$  se pueden determinar multiplicando por el complejo conjugado  $\varphi_j^*$  ambos lados de la ecuación anterior, de manera que

$$\varphi_j^* f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k \varphi_j^* \varphi_k. \quad (\text{B.1.7})$$

Al integrar obtenemos

$$\int_0^b \varphi_j^* f_n dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k \int_0^b \varphi_j^* \varphi_k dx. \quad (\text{B.1.8})$$

En notación de *bras* y *kets* el producto interior hermitiano entre dos funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  en el intervalo  $0 \leq x \leq b$ , está definido por la integral,

$$\langle f|g \rangle = \int_0^b f^*(x)g(x)dx, \quad (\text{B.1.9})$$

donde  $f^*(x)$  indica el complejo conjugado de  $f(x)$ . Por tanto, considerando que el conjunto de soluciones  $\varphi_k$  forman una base ortogonal linealmente independiente, el producto interior hermitiano entre elementos de esta base es

$$\langle \varphi_j | \varphi_k \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq j \\ \|\varphi_k\|^2, & \text{para } k = j \end{cases} \quad (\text{B.1.10})$$

De esta manera, se puede escribir lo siguiente,

$$\langle \varphi_k | f_n(x) \rangle = f_k \|\varphi_k\|^2 \quad (\text{B.1.11})$$

Así, los coeficientes quedan determinados por,

$$f_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \langle \varphi_k | f \rangle. \quad (\text{B.1.12})$$

El coeficiente  $u_k$  se puede calcular simplemente sustituyendo

$$u_k = \frac{f_k}{\lambda_k}. \quad (\text{B.1.13})$$

y de esta manera obtenemos una aproximación a la solución particular para la función  $u(x)$  en su forma integral al sustituir el valor del coeficiente y permutar la suma con los *Bra Kets*.

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \frac{\langle \varphi_k | f \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k(x) \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(\tilde{x}) \varphi_k(x)}{\lambda_k \|\varphi_k\|^2} \middle| f(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \int_0^b \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(\tilde{x}) \varphi_k(x)}{\lambda_k \|\varphi_k\|^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.14})$$

donde identificamos la función de Green,

$$G(x; \tilde{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(\tilde{x}) \varphi_k(x)}{\lambda_k \|\varphi_k\|^2} \quad (\text{B.1.15})$$

por lo tanto, la solución particular aproximada queda de la forma

$$u_n(x) = \int_0^b G(x; \tilde{x}) f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (\text{B.1.16})$$

Consideremos como ejemplo que  $f(x) = 1$  y  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  para observar las diferencias que existen en tanto a la convergencia de la solución espectral de acuerdo a las diferentes condiciones de frontera.

La ecuación a resolver es entonces

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 1$$

La solución del problema con condiciones en la frontera se obtiene resolviendo el problema de eigenvalores siguiente

$$-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \lambda \varphi \quad (\text{B.1.17})$$

### Condiciones de frontera Dirichlet

Reescribiendo la ecuación (B.1.17) obtenemos

$$\ddot{\varphi} + \lambda\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \varphi(0) = \varphi(b) = 0 \quad (\text{B.1.18})$$

Consideremos  $\lambda = 0$ . Esto da

$$\varphi(x) = c_0 * 1 + c_1 * x \quad (\text{B.1.19})$$

e imponiendo

$$\varphi(0) = \varphi(b) = 0$$

queda

$$c_0 = c_1 = 0$$

por lo que  $\lambda = 0$  no es eigenvalor. Para  $\lambda \neq 0$ , la solución general es,

$$\varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (\text{B.1.20})$$

Al evaluar las condiciones de frontera obtenemos un sistema de ecuaciones cuya forma matricial se puede representar como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.21})$$

Los valores de  $\lambda$  que dan soluciones no triviales  $\varphi(x) \neq 0$  se obtienen al igualar el determinante de la matriz anterior a cero.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{bmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}b} - e^{\sqrt{-\lambda}b} = 0 \quad (\text{B.1.22})$$

Esto nos da la condición que deben satisfacer los valores propios de las eigenfunciones de la solución:

$$e^{2\sqrt{-\lambda}b} = 1 \quad (\text{B.1.23})$$

Las soluciones son infinitas en el plano complejo:

$$2\sqrt{-\lambda}b = 2\pi ik, \quad \text{con} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.1.24})$$

Despejando  $\lambda$

$$\lambda = \left( \frac{\pi k}{b} \right)^2 \quad (\text{B.1.25})$$

Definimos la frecuencia fundamental como

$$\omega = \pi/b,$$

que podemos reescribir considerando

$$\omega_k = k\omega \quad (\text{B.1.26})$$

por lo que

$$\lambda = \omega_k^2 \quad \text{donde} \quad \sqrt{-\lambda} = i\omega_k \quad (\text{B.1.27})$$

Usando la condición,

$$\varphi(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

queda  $c_2 = -c_1$ , por lo tanto

$$\varphi(x) = c_1[e^{i\omega_k x} - e^{-i\omega_k x}] = 2ic_1 \sin(\omega_k x) \quad (\text{B.1.28})$$

o simplemente

$$\varphi_k(x) = C_k \sin(\omega_k x) \quad (\text{B.1.29})$$

Para encontrar la serie de fourier asociada al problema con condiciones de frontera Dirichlet hacemos lo siguiente:

**1er paso:** Normalizamos la eigenfunción  $\varphi_k = C_k \sin(\omega_k x)$  en el intervalo  $[0, a]$  para encontrar el coeficiente  $c_k$  imponiendo la condición de normalización siguiente:

$$\|\varphi_k\|^2 = C_k^2 \int_0^b \sin^2(\omega_k x) dx = 1. \quad (\text{B.1.30})$$

La norma está dada por

$$\langle \sin(\omega_k x) | \sin(\omega_k x) \rangle = \int_0^b \sin^2(\omega_k x) dx \quad (\text{B.1.31})$$

Conviene usar la forma exponencial y el producto interior Hermitiano como sigue,

$$\begin{aligned} \sin(\omega x) &= \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \middle| \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right\rangle &= \int_0^b \left( \frac{e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}}{-2i} \right) \left( \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^b [1 - e^{-2i\omega x} - e^{2i\omega x} + 1] \\ &= \frac{1}{4} \int_0^b [2 - 2 \cos(2\omega x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin(2\omega x)}{2\omega} \right]_0^b \end{aligned} \quad (\text{B.1.32})$$

De esta manera obtenemos la norma,

$$\|\varphi_k\|^2 = \frac{C_k^2}{2} \left( b - \frac{\sin(2\omega b)}{2\omega} \right) = \frac{C_k^2}{2} \left( b - b \frac{\sin(2\omega b)}{2\omega b} \right) \quad (\text{B.1.33})$$

ó

$$\|\varphi_k\| = C_k \sqrt{\frac{b}{2} \left(1 - \frac{\sin(2\omega b)}{2\omega b}\right)}. \quad (\text{B.1.34})$$

Recordando que  $\omega = \frac{k\pi}{b}$ , la función seno se anula para toda  $k$  por lo que nos queda:

$$\|\varphi\| = C_k \sqrt{\frac{b}{2}} = 1 \quad \text{por lo tanto} \quad C_k = \sqrt{\frac{2}{b}} \quad (\text{B.1.35})$$

y así, tenemos finalmente la función propia normalizada:

$$\hat{\varphi}_k = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin(\omega_k x) \quad (\text{B.1.36})$$

**2do paso:** Encontramos los coeficientes  $f_k$  dados por:

$$f_k = \langle \hat{\varphi}_k | f \rangle = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^b (1) \sin\left(\frac{k\pi}{b}x\right) dx$$

para obtener así la serie de Fourier asociada.

$$f_n = \sum_k^n f_k \hat{\varphi}_k \quad (\text{B.1.37})$$

**Jupyter Notebook** es una herramienta de software libre en python que es muy útil para vizualizar estos resultados. Con librerías como *sympy* (symbolic phyton) podemos obtener de manera simbólica el coeficiente  $f_k$ , visualizar la serie de fourier en función de sus variables simbólicas e incluso cuenta con un graficador integrado que permite visualizar la gráfica de la serie. Sin embargo, una mejor opción para visualizar la gráfica de la serie es con la librería *matplotlib* y su módulo *pyplot*. Para crear una gráfica en pyplot debemos crear una malla de puntos en un intervalo cuya imagen será la gráfica. En este caso la resolución depende de la densidad de puntos en la malla. El paquete *numpy* nos permite generar el arreglo numérico de esta malla de puntos y trabajar numéricamente la serie de Fourier para el calculo de la convergencia.

## Module in JupyterNotebook

```

# Importamos todo el modulo sympy; nos permite trabajar
# de manera simbolica (y no numericamente)
# las ecuaciones.
from sympy import *
# Ademas importamos las variables simbolicas 'n' y 'x'
from sympy.abc import x, n
import math

# Definimos la funcion matematica como una
# funcion ejecutable
def f(x):
    f = 1
    return f

#Considerando el periodo a=1, encontramos los
#coeficientes fk:
fk=integrate ( sqrt(2)*f(x)*sin(n*math.pi*x) ,(x,0,1))

print( "\n"+"fk□=□" )
pprint(fk)

enesima = 30
seriefn = 1
for i in range(1, enesima+1):
    seriefn = seriefn + (fk*sin(pi*n*x)).subs(n, i)

#Podemos imprimir la serie obtenida si deseamos con:
#pprint( "\n"+"fn = ")
#pprint( seriefn )

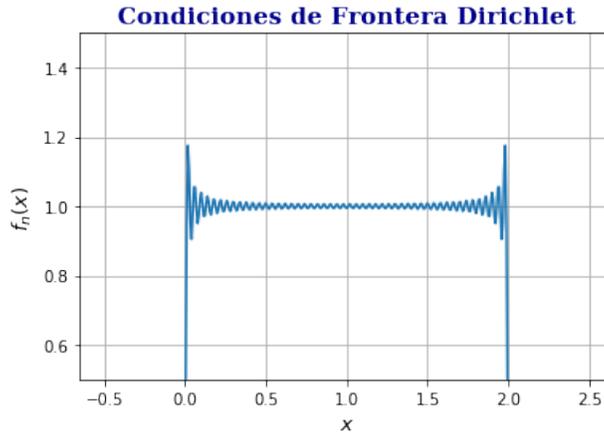
#Usando el modulo para graficas de sympy...
plot(seriefn , ylim=(-2.5, 2.5), xlim=(-3.5,3.5))

```

Con lo cual obtenemos el siguiente *output*: El coeficiente  $f_k$  dado por:

$$f_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} (1 - \cos(\pi k)) \quad \text{para } k \neq 0 \quad (\text{B.1.38})$$

y la gráfica de la serie:



**Figura B.1:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 30$ . Se puede ver que la serie se aproxima a la función constante  $f(x) = 1$  en el intervalo  $[0, 2]$ , sin embargo, notemos que justo en donde se imponen las condiciones de frontera de este tipo tenemos el llamado **fenómeno de Gibbs**

**3er paso:** Para poder observar la convergencia de la serie a la función, calculamos la norma la serie de Fourier obtenida anteriormente. Usando el producto interior hermitiano para los coeficientes y la ortogonalidad de las funciones propias,  $\langle \varphi_k | \varphi_j \rangle = \delta_{kj}$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \|f_n(x)\|^2 &= \left\| \sum_k f_k \hat{\varphi}_k \right\|^2 = \left\langle \sum_k f_k \hat{\varphi}_k \left| \sum_j f_j \hat{\varphi}_j \right. \right\rangle \\ &= \sum_{kj} f_k^* f_j \langle \hat{\varphi}_k | \hat{\varphi}_j \rangle = \sum_{kj} f_k^* f_j \delta_{kj} \\ &= \sum_k |f_k|^2 \end{aligned}$$

Realizamos una tabla para poder observar la convergencia entre la función aproximada por series y la función misma. Para esto usamos dos ciclos For. Uno que va escalando de 100 en 100 pasos y el otro para que sume cada termino de la serie normada hasta el número de pasos que toque.

Module in JupiterNotebook

```

print( ':' ^ 10 { ':' ^ 10 } { ':' ^ 10 } '
.format( 'Pasos ', '|fn| ', '|f| - |fn| '))
Pasos=0
for j in range(10):
    Pasos=Pasos+100
    normafk=0
    for i in range(1, Pasos):
        normafk = normafk + ((fk)**2).subs(n, i)

print( ':' ^ 10 { ':' ^ 10.5 f } { ':' ^ 10.5 f } '
.format( Pasos , sqrt ( normafk ), 1 - sqrt ( normafk ))

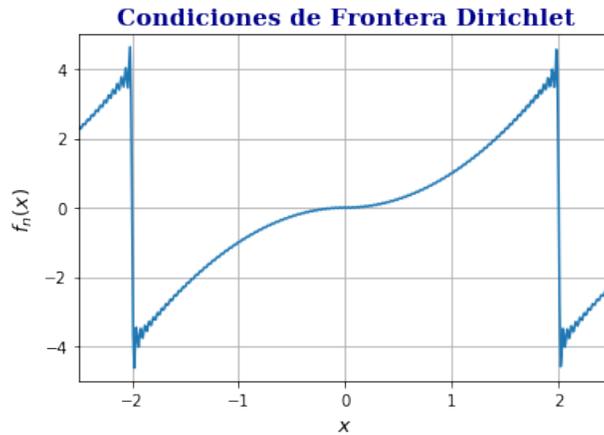
```

Esto nos arroja el siguiente resultado:

<b>Pasos<sub>n</sub></b>	$\ f(x)\ $	$\ f_n(x)\ $	$\ f(x)\  - \ f_n(x)\ $
100	1.41421	1.41134	0.00287
200	1.41421	1.41278	0.00143
300	1.41421	1.41326	0.00096
400	1.41421	1.41350	0.00072
500	1.41421	1.41364	0.00057

**Tabla B.1:** Notemos que la convergencia es lenta debido a los fenómenos de Gibbs provocados por las discontinuidades en ambos lados de la frontera.

Veamos que pasa con la gráfica y la convergencia en el caso con  $f(x) = x^2$ .



**Figura B.2:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 30$ . Se puede ver que la serie se aproxima a la función cuadrática  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . Notemos que en este caso también hay fenómenos de Gibbs en donde existe una discontinuidad debido a que se anula la solución en la frontera.

Pasos <sub>n</sub>	$\ f(x)\ $	$\ f_n(x)\ $	$\ f(x)\  - \ f_n(x)\ $
100	2.52982	2.51691	0.01291
200	2.52982	2.52339	0.00643
300	2.52982	2.52554	0.00428
400	2.52982	2.52661	0.00321
500	2.52982	2.52726	0.00257

**Tabla B.2:** De la misma forma que el caso anterior con la función constante, tenemos convergencia lenta debido a los fenómenos de Gibbs provocados por la discontinuidad en un lado de la frontera para este caso.

### Condiciones de frontera mixtas

Para encontrar la solución se resuelve el problema de valores propios en donde se tiene que hallar  $\lambda$  de manera que la ecuación,

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi = \lambda\varphi \quad (\text{B.1.39})$$

con

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(b) = 0 \quad \vee \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi(b) = 0$$

tenga una solución no trivial  $\varphi \neq 0$ . Reescribiendo:

$$\ddot{\varphi} + \lambda\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi(b) = 0 \quad (\text{B.1.40})$$

observamos que  $\lambda = 0$  no es eigenvalor ya que al imponer condiciones de frontera obtenemos  $c_1 = c_2 = 0$ , que nos da la solución trivial. Para  $\lambda \neq 0$  tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ \dot{\varphi}(x) &= \sqrt{-\lambda} [c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}]\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.41})$$

con lo cual obtenemos:

$$c_1 = c_2 \quad \wedge \quad e^{2\sqrt{-\lambda}b} = -1,$$

que es la condición sobre  $\lambda$  para obtener una solución no trivial. De la misma manera que se puede determinar igualando el determinante a cero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{bmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}b} + e^{\sqrt{-\lambda}b} = 0 \quad (\text{B.1.42})$$

lo cual nos da la condición que debe cumplir  $\lambda$ ,

$$e^{2\sqrt{-\lambda}b} = -1 \quad (\text{B.1.43})$$

Usando la ecuación de Euler,  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , encontramos que,

$$\lambda_k = (k + \frac{1}{2})^2 \omega^2, \quad \omega = \frac{\pi}{b} \quad (\text{B.1.44})$$

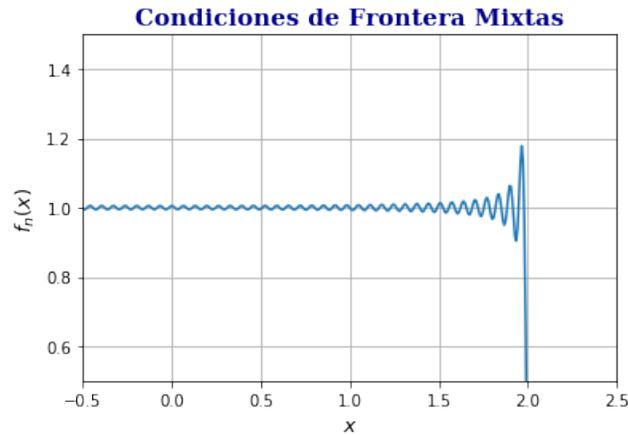
Las eigenfunciones  $\varphi_k$  asociado a  $\lambda_k \neq 0$  para condiciones mixtas son por tanto,

$$\varphi_k(x) = c_1 [e^{i\omega_k x} + e^{-i\omega_k x}] = 2c_1 \cos((k + \frac{1}{2})\omega x)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de condiciones tipo Dirichlet, encontramos que el coeficiente  $f_k$  de la serie de fourier asociada a la solución está dado por:

$$f_k = \frac{\sqrt{2} \sin(\pi(k + \frac{1}{2}))}{\pi(k + \frac{1}{2})} \quad \text{con} \quad k \neq -\frac{1}{2}, \quad (\text{B.1.45})$$

y la gráfica que representa la serie obtenida,



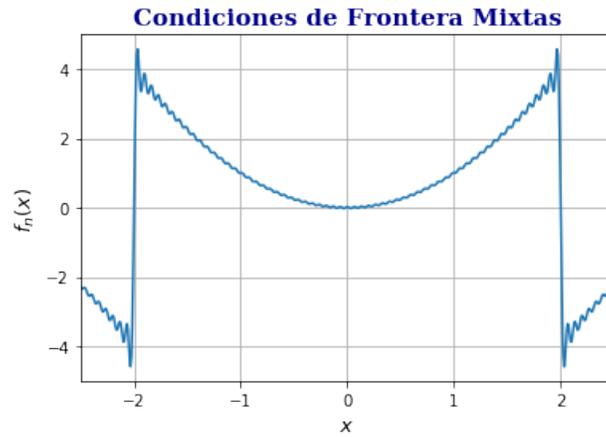
**Figura B.3:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 30$ . De la misma forma que en el caso con condiciones de frontera Dirichlet, la serie se aproxima a la función  $f(x) = 1$  en el intervalo  $[0, 2]$  pero notemos ahora que el fenómeno de Gibbs se observa sólo donde se aplicó la condición en la frontera sobre la función (tipo Dirichlet) y no en su derivada (tipo Neumann).

Ahora observemos la convergencia de la serie a la función límite con condiciones de frontera mixtas.

<b>Pasos<sub>n</sub></b>	$\ f(x)\ $	$\ f_n(x)\ $	$\ f(x)\  - \ f_n(x)\ $
100	1.41421	1.41279	0.00142
200	1.41421	1.41350	0.00071
300	1.41421	1.41374	0.00048
400	1.41421	1.41386	0.00036
500	1.41421	1.41393	0.00029

**Tabla B.3:** La convergencia es ligeramente más rápida que el caso con condiciones Dirichlet, sin embargo, debido a los fenómenos de Gibbs provocados por las discontinuidad en un lado de la frontera sigue siendo lenta en general.

Con la función  $f(x) = x^2$  tenemos lo siguiente en este caso:



**Figura B.4:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 30$ . Podemos ver que la serie se aproxima a la función constante  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . En este caso también hay fenómenos de Gibbs en la discontinuidad que genera el que la solución se anule de un lado de la frontera con condiciones mixtas.

Pasos <sub>n</sub>	$\ f(x)\ $	$\ f_n(x)\ $	$\ f(x)\  - \ f_n(x)\ $
100	2.52982	2.51710	0.012721
200	2.52982	2.52344	0.006384
300	2.52982	2.52556	0.004261
400	2.52982	2.52662	0.003198
500	2.52982	2.52726	0.002559

**Tabla B.4:** Vemos que, comparado con el caso con condiciones Dirichlet y función cuadrática  $f$ , la convergencia es muy similar e incluso coincide con el caso Dirichlet para un determinado número de coeficientes con condiciones de frontera Mixtas.

### Condiciones de frontera puramente tipo Neumann

Igual que en los caso anteriores, resolvemos el problema de valores propios en donde se tiene que hallar  $\lambda$  tal que la ecuación:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi = \lambda\varphi \quad \text{con} \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(b) = 0 \quad (\text{B.1.46})$$

tenga una solución no trivial  $\varphi \neq 0$ . Imponer condiciones únicamente Neumann tiene una diferencia importante respecto a las condiciones mixtas o Dirichlet debido a que en este caso existen más posibilidades en su solución. El problema con condiciones Neumann (B.1.46) implica que:

- (i) La solución  $\varphi$  no es única ya que la función  $\varphi + c$  también es solución del problema para cada constante  $c$ .
- (ii) El problema sólo tiene solución con funciones  $f$  que satisfagan una condición llamada **condición de compatibilidad** que se mostrará a continuación:

Al multiplicar la ecuación (B.1.46) por una función arbitraria  $\phi$  e integrar por partes entre  $a$  y  $b$  obtenemos:

$$\langle \phi | \ddot{\varphi} \rangle = [\phi \dot{\varphi}]_{x=a}^{x=b} - \langle \dot{\phi} | \dot{\varphi} \rangle$$

Usando las condiciones de frontera,  $\dot{\varphi} = 0$ , concluimos que la función  $\varphi$  tiene que satisfacer la siguiente condición:

$$-\langle \dot{\phi} | \dot{\varphi} \rangle = \langle \phi | \ddot{\varphi} \rangle \quad \forall \phi \text{ diferenciable.}$$

En particular, para la función  $\phi = 1$  tenemos que:

$$\langle 1 | \varphi \rangle = \int_a^b f(x) dx = 0$$

Esta es la condición suficiente y necesaria para que el problema tenga solución  $\varphi$ .

Por tanto, regresando al problema y reescribiendo (B.1.46):

$$\ddot{\varphi} + \lambda\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(b) = 0 \quad (\text{B.1.47})$$

Para  $\lambda = 0$  tenemos  $\ddot{\varphi} = 0$ ; integrando,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= c_\alpha \\ \varphi &= c_\alpha x + c_\beta \end{aligned}$$

al introducir condiciones en la frontera  $\dot{\varphi}(\{a, b\}) = 0$  nos queda  $c_\alpha = 0$  por lo que resulta la eigenfunción constante:

$$\varphi_0 = c_\beta.$$

Así que  $\lambda = 0$  si es eigenvalor ya que la función constante  $\varphi_0(x) = c_\beta$  es no trivial.

Ahora consideremos  $\lambda \neq 0$ . En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ \dot{\varphi}(x) &= \sqrt{-\lambda} [c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}]\end{aligned}$$

Aplicando condiciones de frontera  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(b) = 0$ , obtenemos en este caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & -e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.48})$$

para que haya una solución no trivial debemos tener

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}b} & -e^{-\sqrt{-\lambda}b} \end{bmatrix} = -e^{-\sqrt{-\lambda}b} + e^{\sqrt{-\lambda}b} = 0 \quad (\text{B.1.49})$$

o

$$e^{2\sqrt{-\lambda}b} = 1 \quad (\text{B.1.50})$$

Recordando la relación  $e^{i2k\pi} = 1$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , encontramos que, como en el caso con condiciones de Dirichlet, los eigenvalores son:

$$\lambda_k = k^2 \omega^2, \quad \omega = \frac{\pi}{b} \Rightarrow \text{Frecuencia fundamental} \quad (\text{B.1.51})$$

Además

$$\sqrt{-\lambda_k} = ik\omega = i\omega_k.$$

Las eigenfunciones  $\varphi_k$  asociado a  $\lambda_k \neq 0$  son

$$\varphi_k(x) = c_1 [e^{i\omega_k x} + e^{-i\omega_k x}] = 2c_1 \cos(\omega_k x)$$

donde se uso

$$\dot{\varphi}(0) = \sqrt{-\lambda}[c_1 - c_2] = 0,$$

con

$$c_2 = c_1$$

Normalizando esta eigenfunción nos queda:

$$\hat{\varphi}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos(\omega_k x) \quad \text{con} \quad \omega_k = \frac{k\pi}{b} \quad (\text{B.1.52})$$

Resumiendo; se encontró que

$$\hat{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{1}{b}} c_\beta \quad \text{para } \lambda = 0$$

$$\hat{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos(\omega_k x) \quad \text{para } \lambda \neq 0$$

donde  $c_\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es una constante arbitraria excepto el cero. Para este caso, la serie de la función  $f(x)$  está dada por,

$$f(x) = f_0 \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k \quad (\text{B.1.53})$$

Para obtener el coeficiente  $f_0$  integramos en el intervalo  $[0, b]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x) dx &= \int_0^b f_0 \varphi_0 dx + \int_0^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k dx \\ &= f_0 b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k\pi} \sin(k\pi) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

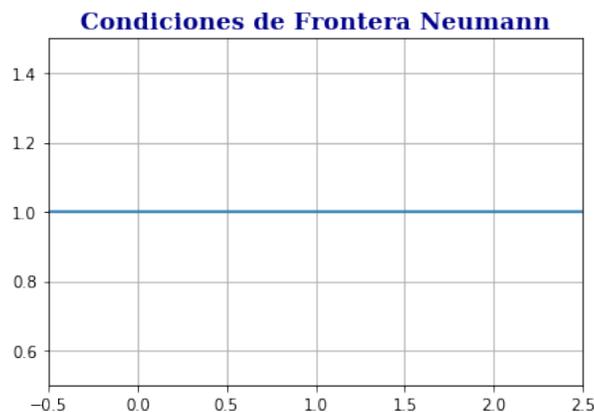
lo cual nos lleva a

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^b f(x) dx, \quad (\text{B.1.54})$$

y usando  $f_k = \langle f | \hat{\varphi}_k \rangle$  tenemos

$$f_k = \frac{\sqrt{2} \sin(\pi k)}{\pi k} \quad \text{con } k \neq 0, \quad (\text{B.1.55})$$

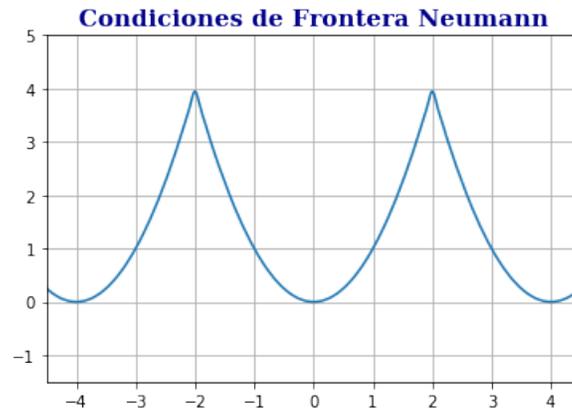
y la gráfica de la serie es en este caso:



**Figura B.5:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 30$ . La serie converge a la función constante  $f(x) = 1$  exactamente desde el primer elemento de la serie en el intervalo  $[0, 2]$ .

En este caso la serie converge desde primer orden a la función deseada por lo que hacer una tabla para observar la convergencia es innecesario. Se puede concluir que imponer las condiciones de frontera sobre

la derivada de la solución y no sobre la solución misma nos permite obtener una aproximación más exacta de ésta. Por esta razón, con condiciones de frontera tipo Neumann tenemos una convergencia mucho más rápida. Para apreciar mejor estas conclusiones veamos que sucede con la función de prueba  $f(x) = x^2$  y su convergencia punto por punto.



**Figura B.6:** Gráfica del desarrollo en serie de Fourier de  $f_n$  con  $n = 20$  y  $b = 2$ . Notemos que la serie se aproxima muy bien a la función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . En este caso no hay fenómenos de Gibbs debido a que la solución en la frontera se anula en la derivada de la solución. De esta forma no se generan discontinuidades sobre la solución.

$n$	$\ f(x)\ $	$\ f_n(x)\ $	$\ f(x)\  - \ f_n(x)\ $
4	2.52982	2.52594	0.00389
8	2.52982	2.52942	0.00041
12	2.52982	2.52971	0.00011
16	2.52982	2.52978	0.00005
20	2.52982	2.52980	0.00002

**Tabla B.5:** Notemos lo rápido que converge la norma de la serie  $f_n$  a la norma de  $f$  con sólo  $n = 20$  valores con condiciones de frontera Neumann. Las condiciones de frontera Neumann no inducen discontinuidades en la solución debido a que la condición se aplica sobre su derivada.

## B.2. Solución espectral de la ecuación de Poisson

Consideremos la ecuación de Poisson (8.1.3) en una región rectangular  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  de la forma siguiente,

$$A\phi = F \quad (\text{B.2.1})$$

donde el operador  $A = -\nabla^2$  y la función  $F$  puede ser  $F = \nabla \cdot \mathbf{v}^0$ , por lo que en particular tenemos,

$$-\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \mathbf{v}^0.$$

Para calcular la solución, consideremos el espacio de funciones cuadrado integrables  $L^2(\Omega)$  con producto interior euclideo o hermitiano,

$$\langle f | g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\Omega \quad \text{ó} \quad \langle f | g \rangle = \int_{\Omega} f^* g \, d\Omega .$$

Si denotamos con  $\Gamma$  a la frontera de  $\Omega$  el producto interior se puede escribir como:

$$\langle f | g \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} f g \, d\Gamma \quad \text{ó} \quad \int_{\Gamma} f^* g \, d\Gamma .$$

Integrando por partes obtenemos la segunda identidad de Green

$$\langle u | \nabla^2 v \rangle - \langle \nabla^2 u | v \rangle = \left\langle 1 \left| u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right. \right\rangle_{\Gamma} .$$

De acuerdo con esta relación si  $u$  y  $v$ , satisfacen,

$$u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (\text{B.2.2})$$

entonces  $A = -\nabla^2$  es simétrico en  $L^2(\Omega)$

$$\langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle .$$

Una forma simple de garantizarlo es imponiendo

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{en un subconjunto } \Gamma_D \text{ de } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{en un subconjunto } \Gamma_N \text{ de } \Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

donde la unión de  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  da la frontera completa  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad \text{y} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset .$$

a) En el caso  $\Gamma = \Gamma_D$  ( $\Gamma_N = \emptyset$ ) tenemos condiciones de frontera Dirichlet.

b) En el caso  $\Gamma = \Gamma_N$  ( $\Gamma_D = \emptyset$ ) tenemos condiciones de frontera Neumann.

c) En el caso  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  con  $\Gamma_D, \Gamma_N \neq \emptyset$  y  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ , tenemos condiciones de frontera mixtas.

Consideremos entonces al operador  $A = -\nabla^2$  actuando sobre funciones  $\varphi$  en  $L^2(\Omega)$  que satisfacen las condiciones de frontera. El operador  $A$  es simétrico con el producto interior de  $L^2(\Omega)$ . Además, el problema de eigenvalores,

$$A\varphi_{ij} = \lambda_{ij}\varphi_{ij},$$

tiene un conjunto creciente de eigenvalores  $\lambda_{ij}$  y las eigenfunciones correspondientes al operador  $A$  forman una base ortogonal completa de eigenfunciones  $\varphi_{ij}$ ;

$$\langle \varphi_{jk} | \varphi_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'} \|\varphi_{jk}\|^2.$$

Para obtener la **solución espectral** con distintas condiciones de frontera consideremos la región rectangular  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ , y reemplacemos la ecuación,  $A\phi = F$  por su aproximación espectral,

$$A\phi_{mn} = F_{mn}$$

Las eigenfunciones  $\varphi$  del operador simétrico  $A$ , nos permiten estimar la función  $F$  a través de los coeficientes de la serie de Fourier respectiva,

$$F_{mn} = \sum_{ij}^{mn} F_{ij} \varphi_{ij} \quad \text{donde} \quad F_{ij} = \frac{\langle \varphi_{ij} | F \rangle}{\|\varphi_{ij}\|^2}.$$

y

$$\phi_{mn} = \sum_{ij}^{mn} \phi_{ij} \varphi_{ij}.$$

Dado que las eigenfunciones  $\varphi_{ij}$  satisfacen las condiciones de frontera,  $\phi_{mn}$  también lo hace por lo que sólo queda por calcular los coeficientes  $\phi_{ij}$  dados por:

$$\phi_{ij} = \frac{F_{ij}}{\lambda_{ij}}.$$

Por lo tanto, para hallar la solución de la ecuación de Poisson,

$$-\nabla^2\phi = F(x, y) \quad \text{con} \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \quad (\text{B.2.4})$$

primero encontramos la solución del problema de valores propios

$$-\nabla^2\varphi_{ij} = \lambda_{ij}\varphi_{ij} \quad \text{con} \quad \varphi_{ij} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \quad (\text{B.2.5})$$

Las eigenfunciones de la base del operador laplaciano,  $\varphi_{ij}$ , nos permiten estimar la solución de la ecuación (B.2.4) por series de Fourier,

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \phi_{ij}\varphi_{ij}, \\ F &= \sum_{i,j=1}^{\infty} F_{ij}\varphi_{ij}, \quad F_{ij} = \frac{\langle \varphi_{ij} | F \rangle}{\|\varphi_{ij}\|^2}. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (B.2.4),

$$\phi_{ij} \lambda_{ij} = F_{ij},$$

obtenemos la solución deseada

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{F_{ij}}{\lambda_{ij}} \varphi_{ij}.$$

*Apéndice C*

## ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Consideremos la ecuación con derivadas parciales

$$\mathbb{L}u(x, t) = F(x, t), \quad (\text{C.0.1})$$

donde el operador  $\mathbb{L}$  está dado por  $\mathbb{L} = L + A$  y los operadores  $L$  y  $A$  son de la forma:

$$L = a_N \frac{\partial^N}{\partial t^N} + a_{N-1} \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}} + \dots + a_0$$

$$A = \frac{1}{\rho(x)} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} + q(x) \right].$$

La variable independiente  $x$  representa una coordenada espacial dentro del intervalo finito  $a \leq x \leq b$  y el parámetro  $t$  denota el tiempo dentro del intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . La propiedad fundamental de  $\mathbb{L}$  es su linealidad,

$$\mathbb{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathbb{L}u + \beta \mathbb{L}v.$$

La linealidad implica que que la solución general de la ecuación (C.0.1) tiene la forma:

$$u = u_h + u_p,$$

donde  $u_h$  es la solución de la ecuación homogénea,  $\mathbb{L}u_h = 0$  y  $u_p$  es la solución particular de la ecuación inhomogénea  $\mathbb{L}u_p = F$ .

Para resolver este problema es necesario definir correctamente las condiciones iniciales y de frontera para que garanticen la existencia y unicidad de su solución.

Las condiciones iniciales son de la forma:

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, t_0) = f_j(x) \quad \text{con } 0 \leq j \leq N-1 \quad \text{y } 0 \leq x \leq b, \quad (\text{C.0.2})$$

Las condiciones de frontera pueden ser Dirichlet, Mixtas o Neumann. En cualquiera que sea el caso, el problema deberá plantearse de manera que el operador  $A$  sea **simétrico** en el espacio de Hilbert  $L_2(a, b, \rho)$  con el producto interior,

$$\langle f | g \rangle_\rho = \int_a^b f g \rho dx.$$

Si  $A$  es simétrico, resolver el problema de valores propios,

$$A\varphi_k = \lambda\varphi_k,$$

nos garantiza la existencia de un **conjunto completo de eigenfunciones**<sup>1</sup> **ortogonales**  $\varphi_k$ ; con **valores propios reales**  $\lambda_k$ . Esto nos permite reducir el problema de resolver la ecuación diferencial parcial (C.0.1), a encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias que sólo dependan del parámetro  $t$ .

Para plantear estas ideas considerar la ecuación general (C.0.1) que a primera vista parece no ser separable,

$$\mathbb{L}u = [L(t) + A(x)]u = F(x, t). \quad (\text{C.0.3})$$

Si las condiciones de frontera aplicadas en el problema de eigenvalores del operador  $A$  dan como resultado un conjunto de eigenfunciones  $\{\varphi_k\}$  que forman una base completa en algún espacio de Hilbert, entonces (C.0.3) es separable. Para mostrarlo basta con desarrollar  $u$  y  $F$  en términos de las eigenfunciones  $\varphi_k$ ,

$$u = \sum c_k(t)\varphi_k, \quad F = \sum f_k(t)\varphi_k$$

De manera que al sustituir en (C.0.3) obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas siguientes que sólo dependen de  $t$ :

$$[L(t) + \lambda_k]c_k(t) = f_k(t) \quad (\text{C.0.4})$$

### **Separación de Variables (formulación tradicional)**

En esencia el método de separación de variables consiste en lo siguiente:

- (i) Proponer una solución  $u$  como el producto de dos funciones de una sola variable, i.e.,  $u(x, t) = v(x)w(t)$ .
- (ii) Si la factorización de  $u$  conduce a una ecuación diferencial ordinaria para  $v(x)$  y otra para  $w(t)$  se entiende que:
  - 1 La ecuación original es separable
  - 2 El operador es separable
  - 3 El método de separación de variables es aplicable.
- (iii) Si la factorización **no** conduce a una EDO para cada función entonces ni el operador ni la ecuación original son separables.

Para saber identificar ecuaciones separables y no separables podemos considerar lo siguiente:

- (i) Si el operador  $\mathbb{L}$  es una suma de operadores lineales que sólo dependen de una variable independiente, la ecuación y el operador son separables.

---

<sup>1</sup>Las eigenfunciones de un operador simétrico  $A$  permiten estimar la solución de ecuaciones en derivadas parciales no separables y no lineales. Estos métodos son conocidos por **métodos espectrales**.

- (ii) Si el operador tiene términos con derivadas cruzadas de las variables independientes pero tales términos son la composición de operadores con eigenfunciones conocidas, entonces *es probable* que la ecuación y el operador  $\mathbb{L}$  sean separables.

Para ilustrar el método consideremos la ecuación homogénea en derivadas parciales siguiente:

$$\mathbb{L}u = [L(t) + A(x)]u = 0, \quad (\text{C.0.5})$$

donde  $\mathbb{L}$  es un operador lineal. proponer una solución como el producto de dos funciones que dependan sólo de una de las variables,

$$u(x, t) = v(x)w(t)$$

Al sustituir esta solución propuesta en (C.0.5) tenemos:

$$[L(t) + A(x)]vw = w \cdot Lv + v \cdot Aw = 0$$

Y dividiendo entre el producto  $vw$ , obtenemos,

$$-\frac{1}{w(t)}L(t)w(t) = \frac{1}{v(x)}A(x)v(x).$$

Podemos notar que esta ecuación ahora tiene la forma siguiente,

$$f(t) = g(x).$$

Esta condición debe cumplirse para  $x$  y  $t$  arbitrarios en los intervalos  $[0, b], [t_0, t_1]$ . Claramente esto sólo es posible si las funciones  $f(t)$  y  $g(x)$  son iguales, independientemente, a una constante  $\lambda$  conocida como **constante de separación**,

$$f(t) = g(x) = \lambda.$$

De esta manera obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$Av = \lambda v \quad (\text{C.0.6a})$$

$$Lw = -\lambda w \quad (\text{C.0.6b})$$

Notemos que la ecuación (C.0.6a) es el problema de eigenvalores asociado al operador  $A$  que consiste en hallar los valores de  $\lambda$  para los cuales dicha ecuación tiene soluciones no triviales  $v \neq 0$ . En el apéndice (B) hemos visto como las condiciones de frontera determinan los valores que toma la constante de separación  $\lambda$  que son los valores propios, o eigenvalores  $\lambda_k$  de las eigenfunciones  $v_k$  de  $A$ .

$$Av_k = \lambda_k v_k.$$

Si tales eigenfunciones forman una base completa en el espacio  $L^2$  y suponemos que la función deseada  $u$  también pertenece al espacio  $L^2$  entonces la solución de (C.0.5) puede representarse como el desarrollo en serie:

$$u = \sum_k c_k(t)v_k(x), \quad \text{con } c_k = \frac{\langle v_k | u(x, t) \rangle}{\|v_k\|^2} \quad (\text{C.0.7})$$

sustituyendo en la en la ecuación (C.0.5) obtenemos entonces un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}u &= [L(t) + A(x)]u \\ &= L \sum c_k v_k + \sum c_k A v_k \\ &= \sum v_k [L c_k + c_k \lambda_k] = 0 \end{aligned}$$

Dado que el conjunto  $\{v_k\}$  es linealmente independiente, la ecuación anterior sólo se cumple si el coeficiente de cada eigenfunción es cero, por lo tanto:

$$[L(t) + \lambda_k]c_k = 0. \quad (\text{C.0.8})$$

Esta ecuación define una ecuación diferencial ordinaria homogénea de orden  $N$  para cada coeficiente  $c_k(t)$ . Cada uno de estos coeficientes está unívocamente definido como la solución de la ecuación anterior sujeto a  $N$  condiciones iniciales.

Notamos entonces que la solución de la ecuación diferencial parcial  $\mathbb{L}u = F$  se reduce a una ecuación diferencial ordinaria para los coeficientes; (C.0.4) y (C.0.8). Para obtener esta ecuación debemos garantizar que:

- (i) La ecuación diferencial parcial sea separable.
- (ii) El operador  $A$  sea lineal y simétrico.

Esto garantiza un conjunto completo de eigenfunciones ortogonales con valores propios reales que pueden usarse como base para desarrollar cualquier función en  $L^2(\Omega)$  dentro del intervalo correspondiente.

### C.1. Solución de la ecuación de calor homogénea

Consideremos como ejemplo la ecuación de calor sin fuentes o sumideros:

$$\mathbb{L}T = (\partial_t - \partial_x^2)T = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq b \quad ; \quad t \geq 0, \quad (\text{C.1.1})$$

que tiene la distribución inicial de temperatura  $T(x, t)$ ,

$$T(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq b,$$

y las condiciones de frontera Dirichlet,

$$T(0, t) = T(b, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0.$$

Notamos que el operador  $\mathbb{L} = (L + A)$  es separable y además sabemos que  $A$  es lineal y simétrico lo cual nos garantiza la completez de un conjunto de eigenfunciones al resolver el problema de Sturm-Liouville de eigenvalores para el operador  $A$ ;

$$Av_k = \lambda v_k \quad \text{con } v_k(0) = v_k(b) = 0. \quad (\text{C.1.2})$$

Las eigenfunciones  $v_k$  forman una base completa del espacio  $L^2(0, b)$ . Si suponemos que tanto la función deseada  $T(x, t)$ , como la condición inicial  $f(x)$  pertenecen al espacio  $L^2(0, b)$ , entonces tienen desarrollos en serie:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x) \quad \text{con } f_k = \frac{\langle v_k | f \rangle}{\|v_k\|^2} \quad (\text{C.1.3a})$$

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)v_k(x) \quad \text{con } T_k = \frac{\langle v_k | T \rangle}{\|v_k\|^2}. \quad (\text{C.1.3b})$$

Como hemos visto, al sustituir (C.1.2) y (C.1.3b) en la ecuación (C.1.1) obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para los coeficientes de la forma:

$$\partial_t T_k + \lambda_k T_k = 0, \quad (\text{C.1.4})$$

la cual tiene como solución,

$$T_k = c_k e^{-\lambda_k t}.$$

Para determinar las constantes de integración  $c_k$  usamos la condición inicial que relaciona las series (C.1.3a) y (C.1.3b):

$$T(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x) \quad (\text{C.1.5})$$

Lo que resulta en la condición inicial para el coeficiente

$$T_k(0) = \left[ c_k e^{-\lambda_k t} \right]_{t=0} = c_k = f_k.$$

De esta forma, la serie de Fourier de la solución  $T(x, t)$  de la ecuación de calor (C.1.1) con condiciones iniciales y de frontera es:

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\lambda_k t} v_k(x), \quad (\text{C.1.6})$$

Introduciendo el valor de los coeficientes  $f_k$  en (C.1.3a), y permutando la integral con la suma, tenemos la forma integral:

$$T(x, t) = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(s)v_k(x)}{\|v_k\|^2} e^{-\lambda_k t} \middle| f(s) \right\rangle, \quad (\text{C.1.7})$$

donde identificamos a la función de Green como:

$$G(x, s; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(s)v_k(x)}{\|v_k\|^2} e^{-\lambda_k t}. \quad (\text{C.1.8})$$

De esta forma, la solución de la ecuación de calor homogénea se puede expresar como:

$$T(x, t) = \int_0^b G(x, s; t) f(s) ds. \quad (\text{C.1.9})$$

El lado derecho de la ecuación anterior define un operador integral  $U(t, t_0)$  conocido como **propagador** y cuya acción sobre  $f(x)$  se representa por,

$$U(t, t_0) f(x) = \int_0^b G(x, s; t) f(s) ds, \quad (\text{C.1.10})$$

y así la solución finalmente puede escribirse como:

$$T(x, t) = U(t, t_0) f(x). \quad (\text{C.1.11})$$

Se llama propagador debido a que el operador  $U(t, t_0)$  determina la forma en como la distribución inicial de temperatura  $f(x)$  se *propaga* en el medio conforme transcurre el tiempo.

## C.2. Solución de la ecuación de calor no homogénea

Consideremos nuevamente la ecuación de calor; ahora con fuentes.

$$(\partial_t - \partial_x^2)u(x, t) = F(x, t) \quad ; \quad 0 \leq x \leq b \quad \text{con} \quad t \geq 0 \quad (\text{C.2.1})$$

con condiciones de frontera Dirichlet,

$$u(0, t) = u(b, t) = 0,$$

y una distribución inicial

$$u(x, 0) = 0$$

Primero encontramos la solución del problema de eigenvalores asociado al operador  $A$

$$A\varphi_k = \lambda\varphi_k, \quad \varphi_k(0, t) = \varphi_k(b, t) = 0$$

Con la eigenfunción generada a partir de este problema podemos desarrollar en serie las funciones  $F(x, t)$  y  $u(x, t)$  si consideramos que pertenecen al espacio de funciones cuadrado integrables,  $L^2(0, b)$ .

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\varphi_k(x) \quad (\text{C.2.2a})$$

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\varphi_k(x) \quad (\text{C.2.2b})$$

donde:

$$F_k = \frac{\langle \varphi_k | F \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_0^b \varphi_k(s)F_k(s, t)ds.$$

Al sustituir estas series en la ecuación original obtenemos:

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_k \right) c_k(t) = F_k(t). \quad (\text{C.2.3})$$

Que debe resolverse junto con la condición inicial  $c_k(0) = 0$ . Este problema es similar al de la ecuación de transporte en la sección (A.2), la solución, de acuerdo con esto, tiene la forma:

$$c_k = \int_{t_0}^t g_k(t, \tau)F_k(\tau)d\tau \quad (\text{C.2.4})$$

donde  $g_k(t, \tau)$  es la función de Green asociada al problema inhomogéneo de la ecuación ordinaria con condiciones iniciales de los coeficientes (C.2.3). La función de Green se puede obtener resolviendo el problema homogéneo:

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_k \right) g_k(t, \tau) = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

con la condición inicial  $g_k(t = \tau, \tau) = 1$ . La solución está dada por:

$$g(t, \tau) = e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

De esta forma es posible escribir la solución completa como,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{t_0}^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} \left( \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_0^b \varphi_k(s) F(s, \tau) ds \right) d\tau \right] \varphi_k(x) \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^b \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s) \varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|^2} e^{-\lambda_k(t-\tau)} \right] F(s, \tau) ds d\tau \end{aligned}$$

donde identificamos a la función de Green para el problema general con,

$$G(x, s, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s) \varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|^2} e^{-\lambda_k(t-\tau)}. \quad (\text{C.2.6})$$

Con lo cual tenemos finalmente,

$$u(x, t) = \int_{t_0}^t \int_0^b G(x, s, t, \tau) F(s, \tau) ds d\tau. \quad (\text{C.2.7})$$

*A p é n d i c e D*

## CÁLCULO DE $U^0$ EN SU FORMA CONTRAVARIANTE

El campo  $U^0$  se obtiene a partir del campo inicial  $v^0$ , la imposición de la conservación de masa y la restricción de tangencialidad al terreno,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^0 &= \mathbf{v}^0 + w^0 \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{U}^0 &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}^0 &= 0 \quad \text{en } z = h(x, y). \end{aligned} \tag{D.0.1}$$

Para calcular el campo  $U^0$  y las trayectorias correspondientes usaremos las coordenadas sigma que constituyen un sistema de coordenadas no-ortogonal,

$$\sigma^1 = y^1 = x \quad \sigma^2 = y^2 = y, \quad \sigma^3 = \sigma = z - h(x, y). \tag{D.0.2}$$

Para manejar la no-ortogonalidad usaremos la base contra-variante asociada dada por

$$\eta^i = \nabla \sigma^i \tag{D.0.3}$$

donde  $\eta^1 = \mathbf{i}$ ,  $\eta^2 = \mathbf{j}$  y  $\eta^3 = \nabla \sigma$ . Tenemos que  $\eta^3 = \nabla \sigma = \mathbf{n}$  en el terreno ( $z = h$ ) con por lo cual la condición de tangencialidad toma la forma siguiente

$$\eta^3 \cdot \mathbf{U}^0 = 0 \quad \text{en } \sigma = 0.$$

La expresión de  $U^0$  reportada en la sección 7.1 se obtiene imponiendo la condición de conservación de la masa usando la forma contravariante del campo  $U^0$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^i} \sqrt{g} U^{0i} = 0 \tag{D.0.4}$$

Para este caso podemos ver que tenemos  $\sqrt{g} = 1$ . En términos de componentes podemos escribir la ecuación (D.0.4) como

$$U_{\sigma}^{0i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} U_x^{0j} \tag{D.0.5}$$

o bien en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} U^{01} \\ U^{02} \\ U^{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 - h_x u^0 - h_y v^0 \end{pmatrix} \tag{D.0.6}$$

así la ecuación (D.0.4) se puede escribir como

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial U^{03}}{\partial \sigma} = 0.$$

Despejando e integrando sobre  $\sigma$  nos queda

$$U^{03} = - \int_0^\sigma (u_x^0 + v_y^0) d\tilde{\sigma}$$

o bien,

$$w^0(x, y, \sigma) = h_x u^0 + h_y v^0 - \int_0^\sigma (\nabla \cdot \mathbf{v}^0) d\tilde{\sigma} \quad (\text{D.0.7})$$

*Apéndice E*

## NORMAS VECTORIALES

La noción matemática de distancia viene con el concepto de **norma vectorial**.

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

la cual asocia a cada vector  $\mathbf{V}$  un número real no negativo  $\|\mathbf{V}\|$  con las propiedades siguientes:

- (i)  $\|\mathbf{V}\| > 0$  y  $\|\mathbf{W}\| = 0 \iff \mathbf{V} = \mathbf{0}$
- (ii)  $\|\mathbf{V} + \mathbf{U}\| \leq \|\mathbf{V}\| + \|\mathbf{U}\|$
- (iii)  $\|\alpha\mathbf{V}\| = |\alpha|\|\mathbf{V}\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

Que son en realidad una extensión de las propiedades que definen el valor absoluto en un número real. Así, de la misma manera que la distancia entre dos números reales  $x$  y  $y$  está dada por  $|x - y|$ , para dos vectores  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{U}$  su distancia se define como,

$$d(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \equiv \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|, \tag{E.0.1}$$

qué es la norma vectorial. Usando las propiedades anteriores de  $\| \cdot \|$  se pueden probar las siguientes:

- (i)  $d(\mathbf{U}, \mathbf{V}) > 0$  y  $d(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0 \iff \mathbf{V} = \mathbf{U}$ .
- (ii)  $d(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = d(\mathbf{V}, \mathbf{U})$  Propiedad de simetría.
- (iii)  $d(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \leq d(\mathbf{U}, \mathbf{W}) + d(\mathbf{V}, \mathbf{W})$  La desigualdad triangular.

La identificación de  $\mathbf{V}$  como un vector columna

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \sum_i V^i \hat{x}_i,$$

permite expresar al producto interior euclidiano como un producto matricial de manera que,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{U} = (V^1 \ V^2 \ V^3) \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} = \sum_i V^i U^i.$$

Por lo que es equivalente escribir,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}.$$

En general para una matriz  $\mathbb{S}_{3 \times 3}$  tenemos la siguiente identidad

$$\sum S_{ij} W^i U^j = \mathbf{W}^t \mathbb{S} \mathbf{U}$$

Consideraremos una norma más general definida a partir de una matriz simétrica  $\mathbb{S}$  positiva definida para calcular el campo ajustado  $\mathbf{V}$ . Decimos que  $\mathbb{S}$  es **simétrica** si es igual a su transpuesta

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^T$$

y es **positiva definida** si,

$$\mathbf{V}^T \mathbb{S} \mathbf{V} > 0 \quad \forall \quad \mathbf{V} \neq 0,$$

para todo vector  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ . Con estas propiedades es posible definir un producto interior de la forma

$$\langle \mathbf{U} | \mathbf{V} \rangle_S = \sum S_{ij} V^i U^j = \mathbf{V}^t \mathbb{S} \mathbf{U} \quad (\text{E.0.2})$$

que es simétrico, lineal y positivo definido.

### E.1. Normas de Campos Vectoriales

Así como las normas vectoriales son la generalización del valor absoluto en los números reales, la norma de un campo vectorial  $\mathbf{V}(x)$  se puede considerar como una extensión de la norma de una función  $f(x)$ .

Recordemos que el producto interior en funciones,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

establece la norma para funciones

$$\langle f, f \rangle = \|f(x)\|^2$$

Las funciones cuya norma es finita sobre una región  $\Omega$  se denotan como funciones cuadrado integrales  $L^2(\Omega)$ ,

$$L^2(\Omega) = \left\{ f(x) : \|f\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

En nuestro caso, las componentes  $V^i$  de los campos vectoriales de velocidad  $\mathbf{V}$  deben ser continuos en la región  $\Omega$  y están acotados por la misma, de manera que dichas componentes son cuadrado integrales.

Así, el producto interior entre dos campos vectoriales se define por medio de la integral del producto interior euclidiano  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{V} | \mathbf{U} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{U} dx, \quad (\text{E.1.1})$$

que satisface las propiedades de producto interior: Positivo, lineal y simétrico.

La norma asociada a  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Omega}$  es la integración de la norma vectorial  $\| \cdot \|$ . Con esto obtenemos una medida de distancia entre dos campos vectoriales,

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{U}\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} \|\mathbf{V} - \mathbf{U}\|^2 dx. \quad (\text{E.1.2})$$

Si extendemos esto al caso del producto interior vectorial definido a partir de la matriz simétrica  $\mathbb{S}$  (E.0.2),

$$\langle \mathbf{V} | \mathbf{U} \rangle_{S\Omega} \equiv \int_{\Omega} \langle \mathbf{V} | \mathbf{U} \rangle_S dx = \int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbb{S} \mathbf{U} dx. \quad (\text{E.1.3})$$

La norma asociada está dada por,

$$\|\mathbf{V}\|_{S\Omega}^2 = \langle \mathbf{V} | \mathbf{V} \rangle_{S\Omega} = \int_{\Omega} \|\mathbf{V}\|_S^2 dx,$$

así como la métrica,

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{U}\|_{S\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{V} - \mathbf{U})^T \mathbb{S} (\mathbf{V} - \mathbf{U}) dx. \quad (\text{E.1.4})$$

Cabe destacar que este producto cumple con las propiedades de producto interior; positivo, lineal y simétrico.

*Apéndice F*

## TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y FLUJO HIDRODINÁMICO.

In the case of fluxes, we have to take the integral, over a surface, of the flux through every element of the surface. The result of this operation is called the surface integral of the flux. It represents the quantity which passes through the surface.

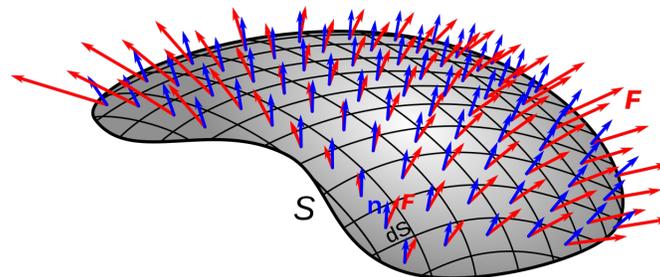
En el caso de los flujos tenemos que tomar la integral, sobre una superficie, del flujo a través de cada elemento de la superficie. El resultado de esta operación se denomina integral de superficie del flujo. Representa la cantidad que atraviesa la superficie.

-James Clerk Maxwell

El teorema de la divergencia, o de Gauss-Ostrogradsky, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la divergencia del campo en el volumen delimitado por dicha superficie, i.e., la integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo dentro de la superficie.

**Teorema 1.** *Sea  $V$  un volumen acotado por una superficie  $S$  con la orientación de un vector unitario  $n$  que apunta hacia el exterior de  $V$ . Si  $F$  es un campo vectorial continuamente diferenciable que atraviesa  $S$  moviéndose a través de  $V$ , entonces:*

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (\text{F.0.1})$$





Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

## ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00122

Matrícula: 2192802478

La dinámica atmosférica y la estimación de campos de velocidad de mesoescala consistentes con el balance de masa a través de la formulación variacional.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 9 del mes de diciembre del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. VICTOR ALEJANDRO SALCIDO GONZALEZ  
DR. DAVID PARRA GUEVARA  
DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: ANGEL MARTIN RAMIREZ RABELO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ANGEL MARTIN RAMIREZ RABELO  
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. VICTOR ALEJANDRO SALCIDO GONZALEZ

VICAL

DR. DAVID PARRA GUEVARA

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA