

---

---

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**

**UNIDAD IZTAPALAPA**

**División de Ciencias Básicas e Ingeniería**

**Departamento de Matemáticas**

**Posgrado en Matemáticas**

**La bifurcación pseudo-Hopf en una clase de sistemas  
Filippov en  $\mathbb{R}^3$  y aplicaciones en sistemas de control**

**T E S I S**

Que para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

**José Manuel Islas Hernández**

Directores de Tesis:

Dr. Fernando Verduzco González

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Iztapalapa, Ciudad de México, México, 23 de julio del 2021



## SINODALES

Dr. Joaquín Delgado Fernández  
Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México.

Dr. Fernando Verduzco González  
Universidad de Sonora, Sonora.

Dr. Raúl Villafuerte Segura  
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo.

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez  
Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, San Luis Potosí.

Dr. Mario Gerardo Medina Valdez  
Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México.



## Dedicatoria

*A Imelda y Genaro.  
Espero se sientan orgullosos, pero, sobre  
todo, espero sepan cuánta falta me hacen.*



## Agradecimientos

Estando en este punto y mirando en retrospectiva, es impresionante darse cuenta a cuantas personas les tengo que agradecer, pero, sin duda alguna, siempre agradeceré en primer lugar a mi mamá, Aurelia, el pilar de mi vida, la persona que me ha querido, me ha cuidado y se ha preocupado por mí toda mi existencia. Gracias, mamá. Espero estés orgullosa porque éste, como cada éxito que consiga en la vida, es tan tuyo como mío. En segundo lugar, agradecerle a mis hermanos: Alfredo, el hombre más fuerte del mundo, gracias por siempre estar al pendiente de mí, por nunca haber olvidado esa faceta de hermano mayor a pesar de todo el tiempo, pero sobre todo gracias por luchar y seguir aquí, además de darme el honor de ser tío de Kelly, Miri y Alfredito. Diana y Flor, gracias por el amor que siempre me muestran y por toda la alegría que han traído a mi vida desde que llegaron a este mundo, las amo. Margarita, mi prometida, gracias por toda la paciencia, confianza y amor que me has tenido, el deseo de estar a tu lado fue parte fundamental para terminar este proyecto. Al resto de mi familia, porque siempre se mantienen cerca.

Es momento de agradecer a los verdaderos artífices de este trabajo. Quiero comenzar agradeciendo al Dr. Fernando, todo su tiempo, confianza y, sobre todo, el conocimiento que me regaló; no me alcanzan las palabras para agradecerle el haberme llevado de la mano en este mundo de la investigación en matemáticas, por esas palabras de aliento y también aquellas donde pedía, de manera más que justificada, más esfuerzo de mi parte. Permítame decirle que lo admiro como matemático, pero, en especial, como ser humano. Gracias al Dr. Baltazar, a quien más que mi maestro, asesor o jefe, lo considero mi amigo y gran influencia en mi vida, no sólo en la parte de las matemáticas sino en la parte personal. Gracias por el tiempo, la confianza y el apoyo incondicional que siempre me ha brindado. Mención especial al Dr. Juan Castillo, quien me ofreció su apoyo siempre que lo necesité. A los doctores Raúl Villafuerte, Juan Gonzalo Barajas, Joaquín Delgado y Mario Medina, gracias por sus valiosos y precisos comentarios que hicieron que este trabajo tuviera la calidad obtenida.

Ahora quiero agradecer a aquellos que estuvieron conmigo en este largo camino. A mis amigos Adrián, Jesús, Isaac, Mayra, Panta y a todos aquellos a quienes no puedo terminar de enlistar. Gracias por la ayuda, las platicas, las retas, incluso las chelas y todos esos momentos que hicieron sentirme en casa y en confianza aun estando tan lejos.

Finalmente, agradecer a las instituciones. A la Universidad Autónoma Metropolitana, por darme la oportunidad de obtener este logro y a la Universidad de Sonora, a la cual oficialmente no pertenezco, pero siempre llevaré en mi corazón por haberme abierto las puertas en todo momento.





## Resumen

En el estudio de los sistemas lineales Filippov en tres dimensiones, se tienen muchos trabajos en el escenario genérico donde la variedad de conmutación contiene dos líneas de tangencia, las cuales se cruzan transversalmente en un punto llamado singularidad de doble tangencia. En este trabajo de tesis, estamos interesados en estudiar el caso no genérico en el cual las líneas de tangencia son paralelas, tales que la región limitada por ellas es la región de deslizamiento.

En primer lugar, encontramos, para este escenario, una forma normal dependiente de un parámetro que nos permite manipular la posición de dichas rectas para lograr que colapsen en una línea de singularidades de doble tangencia, en la cual exista un segmento de Teixeira.

Con base en la forma normal, estableceremos las condiciones necesarias para que después de la colisión de las líneas de tangencia nazca un ciclo límite de cruce asociado a un pseudo-equilibrio que se encuentra sobre la región de deslizamiento. Este fenómeno es conocido como la bifurcación pseudo-Hopf. Más aún, nuestros resultados nos muestran que para algunas configuraciones es posible encontrar hasta dos de estos ciclos.

Finalmente, presentamos algunos ejemplos en los que se lleva a cabo la bifurcación pseudo-Hopf, principalmente dentro de la teoría de control, donde, a pesar de que existen algunos trabajos que se enfocan en el escenario descrito anteriormente, ninguno ha propuesto una herramienta para encontrar órbitas periódicas como se hace en esta tesis.



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Objetivos</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1. Sistemas Lineales Filippov</b>                                  | <b>7</b>  |
| 1.1. Sistemas Lineales por Pedazos . . . . .                          | 7         |
| 1.2. Puntos de equilibrio y singularidades . . . . .                  | 10        |
| 1.3. Existencia de singularidades de doble tangencia . . . . .        | 12        |
| 1.4. Bifurcación pseudo-Hopf . . . . .                                | 13        |
| <b>2. Forma normal para SLF en <math>\mathbb{R}^3</math></b>          | <b>15</b> |
| 2.1. SLF sin singularidades de doble tangencia . . . . .              | 15        |
| 2.2. Forma Normal . . . . .   | 20        |
| 2.3. Características de la Forma Normal . . . . .                     | 24        |
| <b>3. La bifurcación pseudo-Hopf</b>                                  | <b>29</b> |
| 3.1. Teorema de la bifurcación pseudo-Hopf . . . . .                  | 29        |
| 3.2. Demostración del teorema . . . . .                               | 33        |
| <b>4. Aplicaciones de la bifurcación pseudo-Hopf</b>                  | <b>41</b> |
| 4.1. Ejemplo introductorio . . . . .                                  | 41        |
| 4.2. Aplicación a Sistemas de Control con Retroalimentación . . . . . | 43        |
| 4.3. Aplicación a convertidor de potencia DC-DC . . . . .             | 49        |
| 4.4. Aplicación a Sistemas de Control con Modos Deslizantes . . . . . | 51        |
| 4.5. Ejemplo con dos CLC . . . . .                                    | 58        |
| <b>5. Conclusiones</b>  | <b>61</b> |
| <b>A. Resultados Básicos</b>  | <b>63</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>67</b> |



# Introducción

Históricamente una gran motivación y objetivo del estudio de las ecuaciones diferenciales está en el modelado matemático, ya que muchos de los fenómenos que surgen en las distintas áreas de la ciencia, como la Física, la Química, la Biología, la Economía, entre otras, pueden ser vistos o planteados como un conjunto de estas ecuaciones [31, 34]. Esto ha hecho que la teoría cualitativa y numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales tengan ya un fuerte desarrollo con bases muy sólidas.

Sin embargo, existen algunos de estos fenómenos, principalmente en la Física y la Biología, que no pueden ser explicados o planteados por medio de una sistema clásico de la forma  $\dot{x} = F(x)$ , tal que  $F$  es un campo vectorial suave, sino que en tales fenómenos los espacios donde se defina la variable  $x$  necesitan sufrir una partición en la que cada zona resultante de ésta sea gobernada por un campo vectorial distinto, lo cual se puede representar por medio de ecuaciones definidas por pedazos, cuya dinámica puede sufrir cambios abruptos y pueden ser no suaves [1, 3]. Dichas ecuaciones dan lugar a lo que se conoce como *sistemas dinámicos suaves por pedazos*.

Aunque el trabajo de dichos sistemas se remonta a principios del siglo pasado, no fue sino hasta 1988 cuando Aleksei Filippov en [21] presentó una formalización de la dinámica de éstos, resolviendo el problema de que los campos vectoriales no están completamente definidos debido a la discontinuidad. A partir de entonces el desarrollo del tema ha sido abundante alrededor de todo el mundo con un inmenso número de artículos publicados e incluso algunos libros especializados sobre el tema como [2, 29, 40, 58], por mencionar algunos.

Los sistemas dinámicos suaves por pedazos han probado ser una fuente importante de dinámicas muy novedosas, en especial alrededor de puntos donde las soluciones son tangentes a las variedades de conmutación, llamados *singularidades de tangencia (fold points)* [38].

Otro de los pioneros importantes del tema es Marco Antonio Teixeira quien propuso que si las fronteras de las regiones de deslizamiento se cruzan transversalmente en un punto conocido como *singularidad de doble tangencia (two-fold points)*, se pueden llevar a cabo fenómenos que impacten de manera importante la dinámica del sistema [62, 63]. Específicamente en [62], se muestra que para ciertas configuraciones del campo vectorial, la dinámica en una vecindad de dicho punto puede presentar un caso especial de inestabilidad estructural definida para los sistemas suaves por pedazos y exhibir un comportamiento sumamente intrínseco.

Más aún, cuando dicho punto se presenta de una forma muy particular, conocida como *singularidad de Teixeira*, las soluciones del sistema se mantienen cruzando repetidamente la variedad de conmutación alrededor de éste, provocando la posibilidad de que

se lleven a cabo distintos escenarios de bifurcación tanto en el sistema general, con la aparición de ciclos límite [12, 38] e, incluso, caos [13], como en la región de deslizamiento con las bifurcaciones estacionarias [17], de Hopf y Homoclínicas [16].

Por otra parte, el estudio de los ciclos límite dentro de los sistemas de ecuaciones diferenciales ha sido de gran relevancia, ya que esta singular solución se puede encontrar en muchos de los fenómenos modelados mediante dichos sistemas [34] y aunque la demostración de éstos es muy complicada, se tienen mecanismos para lograrlo, tal es el caso de la bifurcación de Hopf en sistemas clásicos [48].

Dentro de los sistemas dinámicos suaves por pedazos discontinuos pueden aparecer dos tipos de ciclos límite que no se ven en los sistemas suaves: los *ciclos límite deslizantes* y los *ciclos límite de cruce* [42]; en los primeros, parte del ciclo límite está sobre la variedad de conmutación, en específico sobre la región deslizante, y en la segunda sólo cruza transversalmente dicha variedad y el ciclo pertenece a dos (o más) de las regiones en las que está dividido el sistema. En años recientes, la búsqueda de mecanismos para probar la existencia de ciclos límite en sistemas suaves por pedazos ha sido pingüe. Un gran número de artículos relacionados con el tema han sido publicados principalmente en dos dimensiones aunque la mayoría son resultados para casos no lineales; [22, 43, 56, 57] para el caso continuo y [24–26, 30, 32] para los discontinuos.

Es en [42] donde Kuznetsov *et al.* describen sin demostración un nuevo mecanismo para la creación de un ciclo límite en dos dimensiones al que nombraron *la bifurcación pseudo-Hopf*. Este fenómeno, a diferencia de la bifurcación de Hopf usual (la cual ocurre cuando los eigenvalores del sistema cruzan transversalmente el eje imaginario), se presenta a partir de la colisión de dos puntos de tangencia invisibles, lo cual, además de presentar un cambio en la estabilidad del segmento deslizante y de un *pseudo-equilibrio* que se encuentra sobre ésta, también provoca la creación o destrucción de un ciclo límite de cruce. En [10] se demuestran las condiciones suficientes para que se lleve a cabo esta bifurcación en dos dimensiones para el caso lineal y en [60] para el caso no lineal.

Sin embargo, en la búsqueda de ciclos límite para el caso en tres dimensiones los trabajos son más escasos y los escenarios se vuelven más complejos, debido al gran número de parámetros que aparecen y los métodos utilizados para ubicar el ciclo límite. Se pueden mencionar, principalmente, [4, 5, 23, 54]. Además, en [13, 17], se presentan resultados formales acerca de la aparición de ciclos límites, sin embargo, ninguno de dichos resultados se relaciona con la bifurcación pseudo-Hopf. Particularmente en [13], el ciclo límite se genera cuando un pseudo-equilibrio sale de la región de deslizamiento.

En el caso de la bifurcación pseudo-Hopf en tres dimensiones, existen dos escenarios en los que puede ocurrir: cuando el sistema tiene un único punto de doble tangencia o cuando tiene dos líneas de tangencia paralelas. Este trabajo está enfocado al segundo escenario. Consideramos un sistema lineal por pedazos discontinuo, también llamado sistema Filippov (SLF), en tres dimensiones el cual tiene dos rectas de tangencia paralelas delimitando una franja de deslizamiento (atractora o repulsora), generalizando el trabajo hecho en [10], de dos a tres dimensiones. Este escenario se puede encontrar en ciertos sistemas de control como se puede ver en [12, 19], aunque en ninguno de estos dos trabajos la intención es la de buscar la bifurcación pseudo-Hopf; específicamente en [12],

---

los autores no concluyen nada acerca de un ciclo límite, ya que no es el escenario que están trabajando y sólo presentan resultados para el escenario con un punto de doble tangencia. En [19] encuentran un ciclo límite deslizante cuando un pseudo-equilibrio sale de la región de deslizamiento, pero están más enfocados en estudiar bifurcaciones de equilibrios frontera.

Nuestro trabajo está enfocado en trabajar el escenario no genérico con dos líneas de tangencia paralelas delimitando una franja de deslizamiento. La meta es manipular la posición de las líneas de tangencia paralelas para lograr que colapsen en una línea de doble tangencia, la cual contenga un segmento de singularidades de doble tangencia invisibles. Después de colapsar, la franja de deslizamiento habrá cambiado de estabilidad. La existencia del segmento de singularidades de doble tangencia será muy importante, ya que a partir de esta configuración las soluciones del sistema, alrededor de este segmento, estarán cruzando repetidamente la variedad de conmutación. Es esta dinámica la que nos permitirá encontrar ciclos límite de cruce y veremos que éstos estarán asociados a pseudo-equilibrios sobre la región de deslizamiento.

Finalmente este escrito está distribuido de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presentan las definiciones y propiedades básicas de los sistemas lineales Filippov las cuales serán la base para el desarrollo del trabajo de los siguientes capítulos. También presentamos el resultado de la bifurcación pseudo-Hopf en dos dimensiones. En el Capítulo 2 se describe de manera detallada nuestro escenario de interés y se encuentra una forma normal con base en cambios de variable del sistema, la cual nos permita cambiar la posición de las líneas de tangencia sobre  $\Sigma$ . En el Capítulo 3 desarrollamos el desdoblamiento de la bifurcación pseudo-Hopf para la forma normal presentada. Establecemos las hipótesis necesarias, específicamente para que exista un segmento de Teixeira en la línea de doble tangencia y un pseudo-equilibrio en la región de deslizamiento. En el Capítulo 4 aplicamos nuestros resultados teóricos en algunos ejemplos de aplicación que se encuentran en la literatura y algunos contruidos por nuestra cuenta. Por último, en el Capítulo 5 presentamos un resumen de las conclusiones a las que llegamos en nuestro trabajo, finalizando con las ideas y recomendaciones de trabajo así como la productividad que dejó nuestra investigación.





# Objetivos

## Objetivo General

Establecer las condiciones necesarias para que en un sistema líneal Filippov, definido en  $\mathbb{R}^3$ , con un plano de conmutación que tiene dos líneas de tangencia paralelas, las cuales delimitan la región de deslizamiento, nazca un ciclo límite de cruce, a partir del estudio de la dinámica que se lleva a cabo después de que dichas rectas colapsen en una línea de doble tangencia que contenga un segmento de Teixeira. Este fenómeno es conocido como la bifurcación pseudo-Hopf y representará una herramienta de estabilización para la familia de sistemas descrito.

## Objetivos Específicos

- Estudiar las propiedades fundamentales de los sistemas lineales Filippov.
- Encontrar una forma normal en  $\mathbb{R}^3$  que nos permita colapsar las líneas de tangencia formando una línea de doble tangencia, en el cual exista un segmento donde las singularidades de doble tangencia sean invisibles.
- Construir un mapeo de Poincaré, aprovechando la dinámica resultante de las singularidades de doble tangencia invisibles, con el cual podamos probar la existencia de ciclos límite de cruce.
- Desarrollar algunos sistemas de control lineales por pedazos encontrados en la literatura, en los cuales se lleve a cabo la bifurcación pseudo-Hopf.



# Capítulo 1

## Sistemas Lineales Filippov

Este capítulo está dedicado a establecer las principales definiciones y características de los sistemas suaves por pedazos así como otros conceptos que nos ayudarán a construir el escenario de estudio de nuestro interés. Además, al final se presentará el resultado de la bifurcación pseudo-Hopf para el caso lineal en dos dimensiones, el cual, buscamos generalizar a tres dimensiones.

### 1.1. Sistemas Lineales por Pedazos

**Definición 1.1.** (*Sistema Suave por Pedazos, [2]*)

*Un sistema suave por pedazos está descrito por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{x} = f_i(x), \quad x \in S_i \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

donde  $\cup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$  y cada  $S_i$  tiene un interior no vacío. La intersección  $\Sigma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ , es una variedad suave de dimensión  $\mathbb{R}^{n-1}$  incluida en las fronteras  $\partial S_i$  y  $\partial S_j$ , o es el conjunto vacío. Cada campo  $f_i$  es suave en la región  $S_i$  donde está definido.

A los conjuntos no vacíos  $\Sigma_{ij}$  entre dos regiones  $S_i$  y  $S_j$  se le llama variedad de conmutación. Como un ejemplo en  $\mathbb{R}^2$ , definimos el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } \sigma_1(x) < 0, \\ f_2(x) & \text{si } \sigma_2(x) < 0 < \sigma_1(x), \\ f_3(x) & \text{si } \sigma_2(x) > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

donde  $\sigma_1(x) = c^T x - c_1$  y  $\sigma_2(x) = c^T x - c_2$ , con  $c \in \mathbb{R}^2$  y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Así, en primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_1(x) < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_2(x) < 0 < \sigma_1(x)\}, \\ S_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_2(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos ver que las variedades de conmutación están dadas por

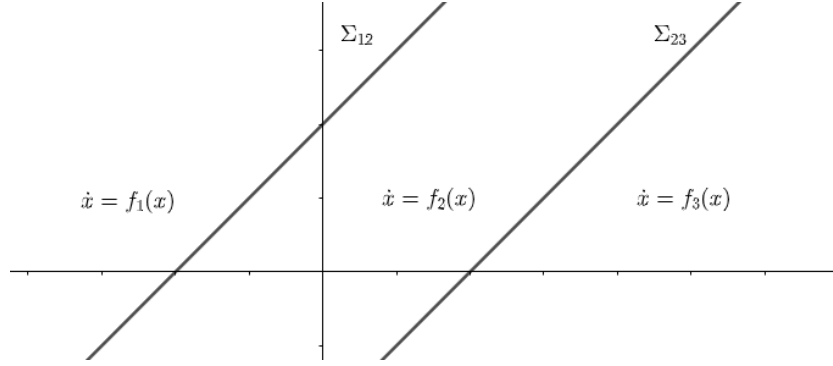


Figura 1.1: Sistema suave por pedazos en  $\mathbb{R}^2$  con dos variedades de conmutación.

$$\begin{aligned}\Sigma_{12} &= \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_1(x) = 0\}, \\ \Sigma_{23} &= \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_2(x) = 0\}.\end{aligned}$$

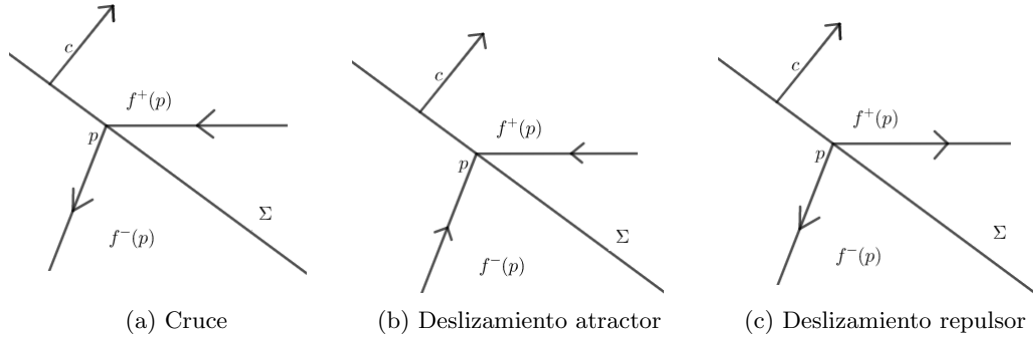
La Figura 1.1 muestra el sistema (1.2). Por otra parte, existe una clasificación para los sistemas suaves por pedazos con respecto a su comportamiento sobre la variedad de conmutación.

**Definición 1.2.** (*Sistemas Filippov, [2]*)

Se dice que el sistema suave por pedazos (1.1) es continuo si  $f_i(x) = f_j(x)$  en cualquier punto sobre la variedad de conmutación  $\Sigma_{ij}$  que separa dos regiones adyacentes  $S_i$  y  $S_j$ . En contraste, un sistema suave por pedazos es discontinuo, o también llamado Filippov, si dos diferentes vectores  $\dot{x}$ , llamémosles  $f_i(x)$  y  $f_j(x)$  pueden estar asociados a un mismo punto  $x \in \Sigma_{ij}$ .

En los sistemas continuos el vector  $\dot{x}$  está definido de manera única en cualquier parte del espacio de estado y las órbitas de la región  $S_i$  se aproximan de manera transversal a la frontera  $\Sigma_{ij}$  de tal forma que al coincidir con ésta, dado que  $f_i(x) = f_j(x)$ , la cruzan de manera diferenciable entrando así a la región adyacente  $S_j$ . En los sistemas Filippov, como  $f_i(x) \neq f_j(x)$ , lo que podemos analizar es el sentido de las componentes vectoriales de tales vectores; recordemos que si  $x \in \Sigma_{ij}$ , entonces  $f(x) = v^\top + v^\perp$ , donde a  $v^\top \in T_x \Sigma_{ij}$  (espacio tangente) y  $v^\perp \in (T_x \Sigma_{ij})^\perp$  (componente ortogonal de  $T_x \Sigma_{ij}$ ) se les conoce como componente tangencial y componente transversal de  $f(x)$ , respectivamente. De esta manera, si las componentes transversales de  $f_i(x)$  y  $f_j(x)$  tienen el mismo sentido, la órbita cruza la frontera pero de manera no diferenciable y tiene, en ese punto, una discontinuidad en su vector tangente. De lo contrario, si dichas componentes son de sentidos opuestos, es decir, que los campos vectoriales están en dirección contraria, las órbitas del sistema en ambas regiones se acercan a la frontera pero al no poder cruzarla, el sistema es forzado a permanecer sobre la frontera y deslizarse sobre ella.

Nuestro interés está en trabajar sistemas discontinuos ya que su dinámica presenta mayor riqueza en comparación con los sistemas continuos aún trabajando con sistemas lineales, como se hará en este trabajo.

Figura 1.2: Conjuntos de deslizamiento escape y cruce en  $\mathbb{R}^2$ 

Con lo anterior, consideremos el sistema lineal por pedazos discontinuo, o SLF, en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ )

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

con  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}^n$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Si consideramos que  $\sigma(x) = c^T x - c_0$  podemos notar que es un sistema dividido en dos zonas

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) > 0\}, \end{aligned}$$

separadas por el hiperplano de conmutación

$$\Sigma = \Sigma_{12} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}.$$

En [21], Filippov mostró que el hiperplano de conmutación del sistema (1.3) se divide en tres regiones que se clasifican de la siguiente manera:

- región de cruce  
 $\Sigma_c = \{x \in \Sigma : (c^T f^-(x))(c^T f^+(x)) > 0\},$
- región de deslizamiento atractor  
 $\Sigma_{as} = \{x \in \Sigma : c^T f^-(x) > 0 \text{ y } c^T f^+(x) < 0\},$
- región de deslizamiento repulsor  
 $\Sigma_{rs} = \{x \in \Sigma : c^T f^-(x) < 0 \text{ ,y } c^T f^+(x) > 0\}.$

Es decir, la región de cruce ocurre cuando las componentes del vector normal a las variedades de conmutación tienen la misma dirección en ambos lados, así las soluciones del sistema cruzan dicha variedad (ver Figura 1.2 (a)). En los otros dos casos, se puede ver que las componentes tienen direcciones distintas. En el caso de la región de deslizamiento atractor, las soluciones llegan a la variedad de conmutación y continúan su dinámica

sobre ésta (ver Figura 1.2 (b)), mientras que en la región de deslizamiento repulsor, las soluciones salen o escapan de la variedad de conmutación (ver Figura 1.2 (c)).

Además de lo anterior, Filippov fue capaz de construir las soluciones sobre la región de deslizamiento  $\Sigma_s = \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$  mediante el método convexo de Filippov. Este método toma la combinación convexa  $f_s(x)$  de los campos  $f^\mp(x)$  para cada punto deslizante  $x \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$ , es decir,

$$f_s(x) = \frac{f_r(x)}{\Delta(x)} = \frac{(c^T f^-(x))f^+(x) - (c^T f^+(x))f^-(x)}{c^T(f^-(x) - f^+(x))}, \quad (1.4)$$

con  $\Delta(x) \neq 0$ .  $f_s$  es llamado el campo vectorial deslizante, mientras que  $f_r$  es llamado el campo vectorial regularizado.

## 1.2. Puntos de equilibrio y singularidades

Como es bien sabido los puntos de equilibrio son de suma importancia para llegar a entender la dinámica de los sistemas dinámicos y para los SLF no será la excepción, además de que en estos sistemas se presentan otro tipo de singularidades son de suma importancia, ya que organizan las regiones en las que se divide la variedad de conmutación, al actuar como fronteras entre éstas. Comenzaremos identificando los puntos de equilibrio que se presentan de dos maneras.

**Definición 1.3.** (*Puntos de Equilibrio, [2]*) Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio admisible de (1.3) si

$$(i) \quad f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0 \text{ ó}$$

$$(ii) \quad f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0.$$

Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio virtual de (1.3) si

$$(i) \quad f^-(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) > 0 \text{ ó}$$

$$(ii) \quad f^+(p) = 0 \text{ y } \sigma(p) < 0.$$

Ahora, como se mencionó en la sección anterior,  $f_s$  representa el campo vectorial sobre la región de deslizamiento, por lo que tendrá sus propios equilibrios, llamados pseudo-equilibrios.

**Definición 1.4.** (*Pseudo-equilibrios, [27]*)

Decimos que un punto  $\tilde{x} \in \Sigma$  es un pseudo-equilibrio de (1.3) si  $f_s(x) = 0$ . El pseudo-equilibrio es admisible si  $\tilde{x} \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$  o virtual si  $\tilde{x} \in \Sigma_c$ .

Por otra parte, las fronteras de los tres tipos de regiones en  $\Sigma$ , denotadas por  $\partial\Sigma_s$ ,  $\partial\Sigma_e$ ,  $\partial\Sigma_c$ , son conjuntos de puntos conocidos como *puntos de tangencia*, es decir, puntos  $q \in \Sigma$  tales que  $c^T f^-(q) = 0$  o  $c^T f^+(q) = 0$ , esto es, puntos donde uno de los campos

es tangente a  $\Sigma$ . En el caso lineal, estos puntos de tangencia dan lugar a líneas rectas conocidas como *líneas de tangencia*. La tangencia más simple es la tangencia cuadrática, definida como sigue:

**Definición 1.5.** (*Singularidades de Tangencia*, [62])

Un punto de tangencia  $p \in \Sigma$  es una singularidad de tangencia o tangencia cuadrática de (1.3) si

$$(i) \quad c^T f^-(p) = 0 \text{ y } c^T A_1 f^-(p) \neq 0 \text{ ó,}$$

$$(ii) \quad c^T f^+(p) = 0 \text{ y } c^T A_2 f^+(p) \neq 0.$$

Un punto  $p \in \Sigma$  es un punto cuspide de (1.3) si

$$(i) \quad c^T f^-(p) = 0, \quad c^T A_1 f^-(p) = 0, \quad c^T A_1^2 f^-(p) \neq 0 \text{ y } \{\nabla\sigma(x), \nabla c^T f^-(p), \nabla c^T A_1 f^-(p)\} \\ \text{son linealmente independientes ó,}$$

$$(ii) \quad c^T f^+(p) = 0, \quad c^T A_2 f^+(p) = 0, \quad c^T A_2^2 f^+(p) \neq 0 \text{ y } \{\nabla\sigma(x), \nabla c^T f^+(p), \nabla c^T A_2 f^+(p)\} \\ \text{son linealmente independientes.}$$

Además, las singularidades de tangencia se clasifican de la siguiente manera:

**Definición 1.6.** (*Tangencia Invisible (Visible)*, [38])

$p \in \Sigma$  es una singularidad de tangencia invisible (*visible*)

$$(i) \quad \text{para } f^- \text{ si } c^T f^-(q) = 0 \text{ y } c^T A_1 f^-(q) > 0 (< 0) \text{ y}$$

$$(ii) \quad \text{para } f^+ \text{ si } c^T f^+(q) = 0 \text{ y } c^T A_2 f^+(q) < 0 (> 0).$$

Que una singularidad de tangencia sea visible significa que las soluciones del sistema, localmente, se curvan alejándose de la variedad de conmutación, mientras que si es invisible las soluciones se acercan a ésta (ver Figura 1.3). Finalmente, un punto de doble tangencia  $p \in \Sigma$  es un punto con tangencia sobre ambos lados de  $\Sigma$ . Si dicho punto es una singularidad de tangencia tanto para  $f^-$  como para  $f^+$ , es llamado *singularidad de doble tangencia*. La existencia de este punto dependerá de que la intersección entre los conjuntos de tangencia sea no vacía, esto es, en el caso lineal, cuando exista intersección entre las líneas de tangencia. Las singularidades de doble tangencia se clasifican de la siguiente manera:

- Visible: si la tangencia es visible en ambos lados.
- Invisible: si la tangencia es invisible en ambos lados.
- Visible-Invisible: si la tangencia es visible en uno de los lados del campo e invisible del otro.

En particular, el caso cuando la singularidad de doble tangencia es invisible, se conoce como *singularidad de Teixeira*.



Figura 1.3: Singularidad de doble tangencia.

### 1.3. Existencia de singularidades de doble tangencia

Como se mencionó en párrafos anteriores, la existencia de las singularidades de doble tangencia está fuertemente ligada con la aparición de posibles escenarios de bifurcación. Por tal motivo, esta sección está dedicada al análisis de la existencia de singularidades de . Consideremos el SLF (1.3). Definamos los hiperplanos

$$\pi_1 = \{x \in S_1 : c^T f^-(x) = 0\}, \quad \pi_2 = \{x \in S_2 : c^T f^+(x) = 0\}. \quad (1.5)$$

La característica de estos hiperplanos es que están conformados por puntos en los cuales las órbitas de los campos  $f^-(x)$  y  $f^+(x)$  son paralelas al hiperplano  $\Sigma$ . En particular, los conjuntos de intersección de cada uno de los hiperplanos con  $\Sigma$  son los conjuntos de tangencia, esto es  $L_1 = \pi_1 \cap \Sigma$  y  $L_2 = \pi_2 \cap \Sigma$ . Así, para que existan singularidades de doble tangencia, los conjuntos de tangencia se deben intersectar. Para ello, consideremos el sistema lineal de ecuaciones algebraicas,

$$Tx = b \quad (1.6)$$

donde  $T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ c^T A_2 \end{pmatrix}$ , llamada *matriz de Teixeira*, y  $b = \begin{pmatrix} c_0 \\ -c^T b_1 \\ -c^T b_2 \end{pmatrix}$ . Por el Teorema de Rouché-Frobenius (Teorema A.1), el sistema (1.6) tiene

- solución única si  $\text{Ran}(T) = \text{Ran}(T|b) = n$ ,
- infinidad de solución si  $\text{Ran}(T) = \text{Ran}(T|b) < n$ ,
- sin solución  $\text{Ran}(T) \neq \text{Ran}(T|b)$ .

Ver Figura 1.4. De esta forma, la existencia de singularidades de doble tangencia depende de la existencia de las soluciones de (1.6). Note que dado que el sistema (1.6) está formado por tres ecuaciones lineales con  $n$ -incógnitas, la solución única sólo podrá presentarse en las dimensiones  $n = 2$  y  $n = 3$ .



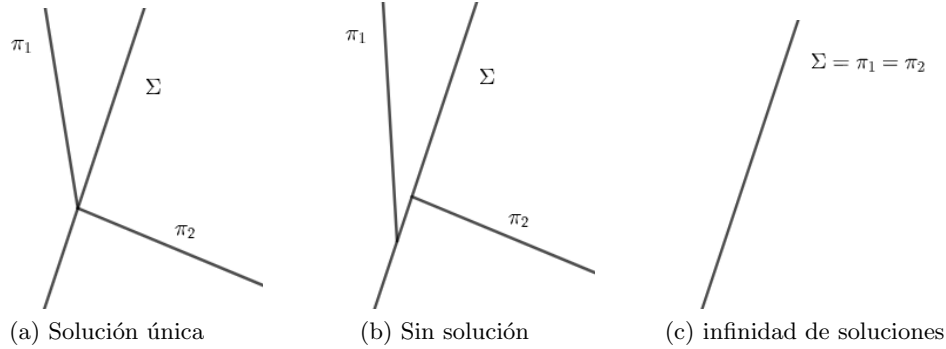


Figura 1.4: Existencia de singularidades de doble tangencia.

## 1.4. Bifurcación pseudo-Hopf

Como se ha dicho, en [42] se presentó un panorama general de todas las bifurcaciones de codimensión uno que se pueden llevar a cabo en un sistema suave por pedazos discontinuo en dos dimensiones. La mayoría involucran cambios en la topología del segmento deslizante o de cruce, o cambios en la estabilidad del segmento deslizante. Haciendo un breve análisis, considere un SLF en el plano que depende de un parámetro de la forma,

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \begin{cases} f^-(x, \mu) = A_1(\mu)x + b_1(\mu), & \text{si } \sigma(x, \mu) < 0, \\ f^+(x, \mu) = A_2(\mu)x + b_2(\mu), & \text{si } \sigma(x, \mu) > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma(x, \mu) = c^T(\mu)x - c_0$ . Consideremos que cambios en el parámetro  $\mu$  del sistema (1.7) provocan movimiento de las singularidades de tangencia a lo largo de la recta de conmutación y por tanto dos de éstas pueden colisionar. El tipo de bifurcación que ocurra cuando un punto de tangencia de  $f^-$  y un punto de tangencia de  $f^+$  colisionan en un punto  $q_0 \in \Sigma$  depende de la visibilidad de cada uno de estos puntos. Uno de los casos relevantes que presentan los autores, sin demostración, es el de la bifurcación pseudo-Hopf, la cual se produce cuando dos singularidades de tangencia invisibles colisionan cuando el parámetro  $\mu = \mu_0$ , provocando un cambio de estabilidad en la región de deslizamiento, así como la creación o destrucción de un ciclo límite (ver Figura 1.8).

En [10], los autores establecen bajo qué condiciones una familia de SLF con una recta de conmutación, la cual satisface la condición genérica de tener un punto de tangencia en cada zona, presenta la bifurcación pseudo-Hopf. Dicho resultado se enuncia a continuación

**Teorema 1.1.** (La bifurcación pseudo-Hopf, [10]). Considere el SLF en  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = A_1x + b_1 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2x + b_2 & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

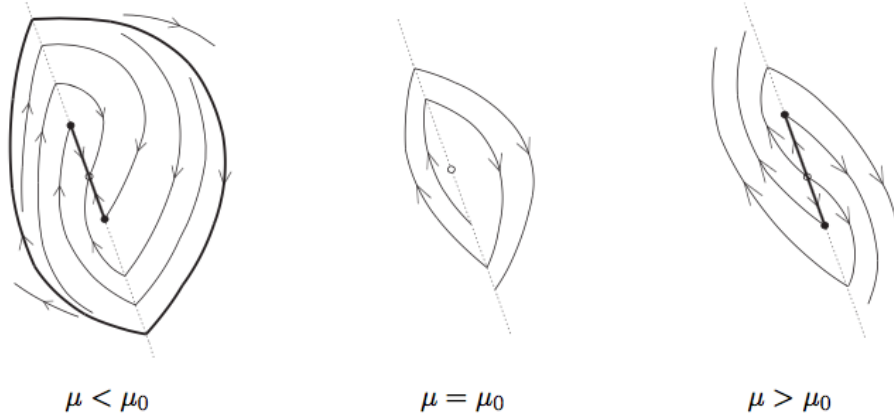


Figura 1.5: Bifurcación pseudo-Hopf en  $\mathbb{R}^2$ .

Si los vectores  $\{c, A_i^T c\}$  son linealmente independientes, para  $i \in \{1, 2\}$ , con  $\gamma_2 > 0$ , entonces existe un homeomorfismo que transforma el sistema (1.8) en

$$\dot{y} = \begin{cases} F^-(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ F^+(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b \\ r_2 + d_2 b \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases}$$

Además, si  $r_1 \geq 0$  y  $r_2 \leq 0$ , entonces para cada  $b$  suficientemente pequeña, con  $b\Lambda_0 < 0$ , el sistema (1.8) tiene un único ciclo límite de cruce. Si  $\Lambda_0 < 0$ , el ciclo límite es estable, mientras que si  $\Lambda_0 > 0$ , el ciclo límite es inestable, donde

$$\Lambda_0 = \begin{cases} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2} & \text{si } r_1 > 0, \quad r_2 < 0, \\ \alpha_2 & \text{si } r_1 > 0, \quad r_2 = 0, \\ \alpha_1 & \text{si } r_1 = 0, \quad r_2 < 0, \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} & \text{si } r_1 = 0, \quad r_2 = 0. \end{cases}$$

y  $\alpha_i, \beta_i$  son respectivamente la parte real e imaginaria de los eigenvalores correspondientes a las matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$ .

En este capítulo presentamos las propiedades principales de los sistemas Filippov así como aquellos conjuntos de puntos que nos ayudan a describir la dinámica de estos sistemas, especialmente alrededor y sobre la variedad de conmutación. Particularmente, mencionamos que las singularidades de tangencia, conforman las fronteras entre las tres regiones que hay sobre  $\Sigma$  así como una característica de éstas, la invisibilidad, la cual será de suma importancia en la búsqueda de soluciones periódicas como lo muestra el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf en dos dimensiones mostrado al final.

## Capítulo 2

### Forma normal para SLF en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo describiremos el escenario de estudio en el que está basado este trabajo, junto con sus propiedades fundamentales, así como las hipótesis necesarias para generarlo. En seguida, se presentará el primer resultado de relevancia que es el de una forma normal para dicho escenario, la cual simplificará los cálculos en la futura búsqueda de ciclos límite. Terminaremos con una sección dedicada a analizar las propiedades de dicha forma normal.

#### 2.1. SLF sin singularidades de doble tangencia

Consideremos el SLF en  $\mathbb{R}^3$  separado por el plano  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0\}$  dado por

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

con  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_{3 \times 3}$ ,  $b_1, b_2, c \in \mathbb{R}^3$  y  $c_0 \in \mathbb{R}$ . En primer lugar, asumiremos que cumple la hipótesis genérica:

**(H<sub>1</sub>)** Los pares de vectores  $\{c, A_1^T c\}$  y  $\{c, A_2^T c\}$  son linealmente independientes.

Bajo esta hipótesis, el plano  $\Sigma$  tiene intersecciones con los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , ambos definidos en (1.5). Cada una de estas intersecciones entre planos representan líneas rectas, a las que denotaremos, respectivamente, como

$$L_1 = \Sigma \cap \pi_1, \quad L_2 = \Sigma \cap \pi_2. \quad (2.2)$$

De manera genérica, las líneas  $L_1$  y  $L_2$  contienen, cada una, un punto cúspide el cual las divide en dos segmentos de recta, uno constituido de singularidades de tangencia invisibles y otro de singularidades de tangencia visibles [19]. En casos no genéricos, las líneas pueden estar constituidas completamente por puntos cúspides, singularidades de tangencia invisibles o singularidades de tangencia visibles.

Estamos interesados en el caso donde no existan singularidades de doble tangencia, es decir, que no exista intersección entre  $L_1$  y  $L_2$ . Por el método de Rouché-Frobenius, el sistema (2.1) no tendrá singularidades de doble tangencia en dos casos: si  $Ran(T) = 1$  y  $Ran(T|b) = 2$  o si  $Ran(T) = 2$  y  $Ran(T|b) = 3$ . En el primer caso, tenemos que

$$T = \begin{pmatrix} c^T \\ \gamma_1 c^T \\ \gamma_2 c^T \end{pmatrix} \text{ y } T|b = \begin{pmatrix} c^T & c_0 \\ \gamma_1 c^T & -c^T b_1 \\ \gamma_2 c^T & -c^T b_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, consideremos el producto  $(c^T f^-(x)) (c^T f^+(x))$ , con  $x \in \Sigma$ , entonces

$$\begin{aligned} (c^T(A_1x + b_2)) (c^T(A_2x + b_2)) &= (\gamma_1 c^T x + c^T b_1)(\gamma_2 c^T x + c^T b_2) \\ &= (\gamma_1 c_0 + c^T b_1)(\gamma_2 c_0 + c^T b_2). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_{as} \quad \text{si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) > 0 \quad \text{y } (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) < 0, \\ \Sigma &= \Sigma_{rs} \quad \text{si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1) < 0 \quad \text{y } (\gamma_2 c_0 + c^T b_2) > 0, \\ \Sigma &= \Sigma_c \quad \text{si } (\gamma_1 c_0 + c^T b_1)(\gamma_2 c_0 + c^T b_2) > 0. \end{aligned}$$

Claramente  $\partial\Sigma_s \cup \partial\Sigma_e \cup \partial\Sigma_c = \emptyset$ , por lo tanto el sistema no presenta puntos de tangencia por lo que sobre el plano de conmutación, solamente hay una de las tres regiones posibles (cruce, deslizamiento atractor o deslizamiento repulsor). Como se ha mencionado, buscamos que existan regiones de deslizamiento y cruce sobre  $\Sigma$ , por lo que descartamos el primer caso. Así, nuestro escenario deseado será el segundo caso y asumiremos una segunda hipótesis:

$$(\mathbf{H}_2) \text{ (2.1) satisface que } Ran(T) = 2 \text{ y } Ran(T|b) = 3.$$

De esta condición podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c, \quad (2.3)$$

con  $\gamma_2 \neq 0$  (debido a la hipótesis  $(\mathbf{H}_1)$ ). Además, es posible simplificar la matriz aumentada  $(T|b)$ , obteniendo

$$\begin{pmatrix} c^T & c_0 \\ c^T A_1 & -c^T b_1 \\ c^T A_2 & -c^T b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \gamma_1 R_1 - \gamma_2 R_2} \begin{pmatrix} c^T & c_0 \\ c^T A_1 & -c^T b_1 \\ 0 & -c^T b_2 - \gamma_1 c_0 + \gamma_2 c^T b_1 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, introduciremos el parámetro

$$\mu = c^T b_2 + \gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1. \quad (2.4)$$

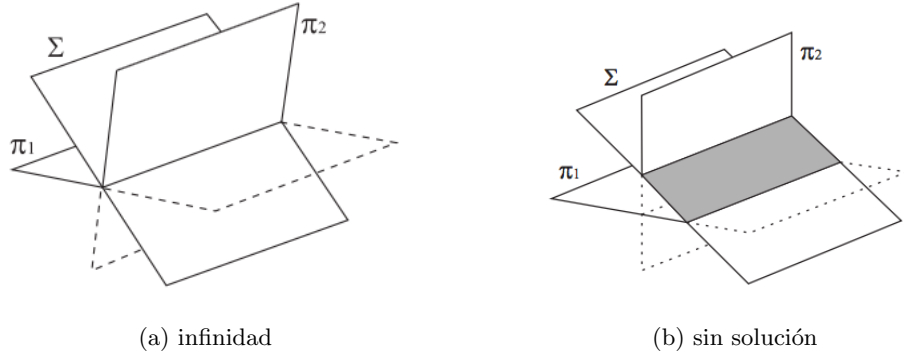


Figura 2.1: Existencia de singularidades de doble tangencia.

Con dicho parámetro será posible notar la colisión entre las líneas de tangencia  $L_1$  y  $L_2$ , ya que si  $\mu \neq 0$ , entonces  $\text{Ran}(T|b) = 3$ , por lo que no existe solución, es decir  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas y si  $\mu = 0$ , entonces  $\text{Ran}(T|b) = 2$ , por lo que existen una infinitad de soluciones. En consecuencia,  $L_1 = L_2$  (ver Figura 2.1). Más aún, estas líneas representan las fronteras entre las tres regiones sobre  $\Sigma$ . Para hacer un análisis acerca de la configuración sobre el plano de conmutación, definimos los conjuntos abiertos  $D$ , como la región delimitada por  $L_1$  y  $L_2$ , y  $D^* = \Sigma - (L_1 \cup D \cup L_2)$  que es el resto del plano. También, observemos que

$$d = c \times A_1^T c \quad (2.5)$$

representa el vector dirección de dichas líneas. Así, tenemos que para  $p_0^- \in L_1$  y  $p_0^+ \in L_2$ ,

$$L_1 = \{p_0^- + sd \mid s \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{p_0^+ + sd \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora, podemos definir todas las rectas paralelas a  $L_1$  y  $L_2$  en  $\Sigma$ : para  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}_u = \{p_0^- + u(p_0^+ - p_0^-) + sd \mid s \in \mathbb{R}\}. \quad (2.6)$$

Observe que  $\mathcal{L}_0 = L_1$ ,  $\mathcal{L}_1 = L_2$ ,  $\mathcal{L}_u \in D$  si  $u \in (0, 1)$  y  $\mathcal{L}_u \in D^*$  para cualquier otro valor de  $u$ . Con ayuda de las rectas  $\mathcal{L}_u$  podemos clasificar las regiones en las que se divide el plano de conmutación  $\Sigma$  a partir del siguiente lema.

**Lema 2.1.** *Las regiones sobre el plano de conmutación se clasifican de la siguiente manera:*

1. Si  $\gamma_2 > 0$ ,  $D = \Sigma_s$  y  $D^* = \Sigma_c$ .
2. Si  $\gamma_2 < 0$ ,  $D = \Sigma_c$  y  $D^* = \Sigma_s$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \Sigma$ . Primero, notemos que

$$\begin{aligned} c^T f^+(x) &= c^T A_2 x + c^T b_2 \\ &= (\gamma_1 c^T + \gamma_2 c^T A_1) x + c^T b_2 \\ &= \gamma_2 c^T A_1 x + \gamma_2 c^T b_1 - \gamma_2 c^T b_1 + \gamma_1 c_0 + c^T b_2 \\ &= \gamma_2 c^T f^-(x) + \mu. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el producto

$$(c^T f^-(x))(c^T f^+(x)) = \gamma_2 (c^T f^-(x))^2 + \mu (c^T f^-(x)). \quad (2.7)$$

Como se mencionó en el capítulo anterior, si el producto anterior es positivo, la región correspondiente es región de cruce, y, por el contrario, si es negativo, corresponde a una región de deslizamiento. Después, definimos la función  $h^- : \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$h^-(x) = c^T f^-(x).$$

Si, además, llamamos  $z = h^-(x) \in \mathbb{R}$ , podemos definir el producto (2.7) a través de la función cuadrática  $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Z(z) = \gamma_2 z^2 + \mu z, \quad (2.8)$$

cuyas raíces son  $z = 0$  y  $z = -\frac{\mu}{\gamma_2}$ . En la Figura 2.2 se pueden ver los distintos escenarios para (2.8), dependiendo de los signos de  $\mu$  y  $\gamma_2$ . En seguida, podemos ver que para  $x \in \mathcal{L}_u$ , tenemos que

$$\begin{aligned} z = h^-(x) &= c^T f^-(x) \\ &= c^T A_1 (p_0^- + u(p_0^+ - p_0^-) + sd) + c^T b_1 \\ &= c^T A_1 (p_0^- + sd) + c^T b_1 + u c^T A_1 (p_0^+ - p_0^-) \\ &= u c^T A_1 (p_0^+ - p_0^-) \\ &= \frac{u}{\gamma_2} (c^T A_2 (p_0^+ - p_0^-) - \gamma_1 c^T (p_0^+ - p_0^-)) \\ &= \frac{u}{\gamma_2} (c^T A_2 p_0^+ - c^T A_2 p_0^-) \\ &= \frac{u}{\gamma_2} (-c^T b_2 - c^T A_2 p_0^-) \\ &= -\frac{u}{\gamma_2} (c^T b_2 + \gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1) \\ &= -\frac{\mu}{\gamma_2} u. \end{aligned}$$

Y, así, sustituyendo en (2.8), tenemos que

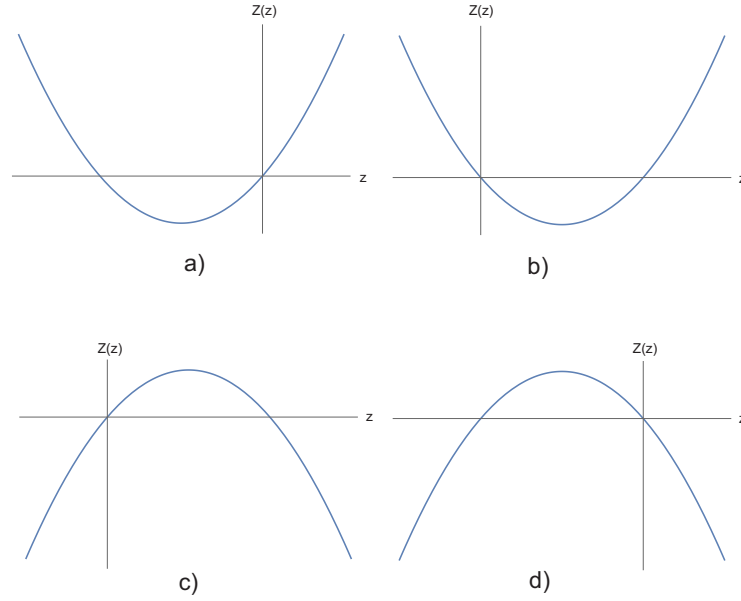


Figura 2.2: Escenarios de  $Z(z)$ : a)  $\gamma_2 > 0$  y  $\mu > 0$ , b)  $\gamma_2 > 0$  y  $\mu < 0$ , c)  $\gamma_2 < 0$  y  $\mu > 0$  y d)  $\gamma_2 < 0$  y  $\mu < 0$

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= Z\left(-\frac{\mu}{\gamma_2}u\right) \\
 &= \gamma_2 \left(-\frac{\mu}{\gamma_2}u\right)^2 + \mu \left(-\frac{\mu}{\gamma_2}u\right) \\
 &= \frac{\mu^2 u}{\gamma_2}(u-1).
 \end{aligned}$$

Con lo anterior, supongamos que  $\gamma_2 > 0$ . Si  $u \in (0, 1)$ ,  $x \in D$  y  $Z(z) < 0$ , entonces,  $D$  es región de deslizamiento, y si  $u \in \mathbb{R} - [0, 1]$ ,  $x \in D^*$  y  $Z(z) > 0$ , entonces  $D^*$  es región de cruce.

Por el contrario, si  $\gamma_2 < 0$  Si  $u \in (0, 1)$ ,  $x \in D$  y  $Z(z) > 0$ , entonces,  $D$  es región de cruce, y si  $u \in \mathbb{R} - [0, 1]$ ,  $x \in D^*$  y  $Z(z) < 0$ , entonces  $D^*$  es región de deslizamiento. ■

La Figura 2.3 muestra los distintos escenarios para las regiones  $D$  y  $D^*$  sobre  $\Sigma$ . Notemos que cuando  $\gamma_2 < 0$ , el plano de conmutación está dividido por una franja de cruce, delimitada por las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , que está entre dos regiones de deslizamiento, a diferencia de cuando  $\gamma_2 > 0$ , ya que dicha franja ahora es la región de deslizamiento y separa dos regiones de cruce. En este trabajo estamos interesados en esta última configuración, ya que buscaremos ciclos límite de cruce que vayan de una de las zonas de cruce hacia la otra rodeando la franja de deslizamiento. Así, como consecuencia del lema anterior, es posible caracterizar la franja de deslizamiento que ocurre cuando  $\gamma_2 > 0$ .

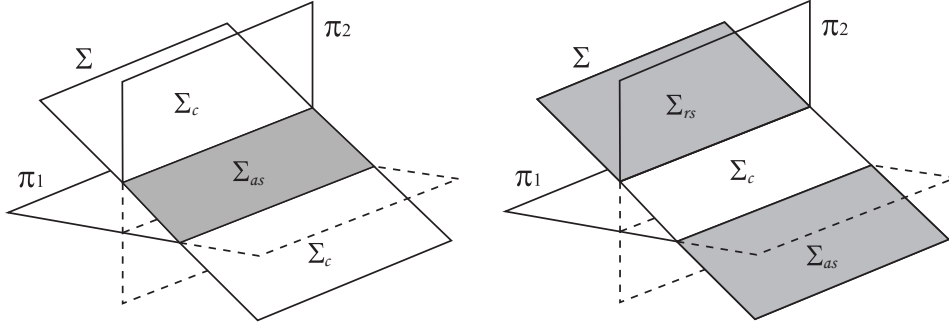


Figura 2.3: Regiones sobre el plano de conmutación. A la izquierda:  $\gamma_2 > 0$  y  $\mu < 0$ . A la derecha  $\gamma_2 < 0$

**Corolario 2.1.** *Supongamos que  $\gamma_2 > 0$ . Entonces, si  $\mu < 0$ ,  $D = \Sigma_{as}$  y si  $\mu > 0$ ,  $D = \Sigma_{rs}$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in D$ . Comenzamos suponiendo que  $\mu < 0$ , entonces

$$c^T f^-(x) = -\frac{\mu}{\gamma_2} u > 0 \quad \text{y} \quad c^T f^+(x) = -\gamma_2 c^T f^-(x) + \mu = \mu(1 - u) < 0,$$

con lo que podemos ver que  $D$  es una región de deslizamiento atractor. Por otra parte, si  $\mu > 0$ , entonces

$$c^T f^-(x) = -\frac{\mu}{\gamma_2} u < 0 \quad \text{y} \quad c^T f^+(x) = -\gamma_2 c^T f^-(x) + \mu = \mu(1 - u) > 0,$$

por lo que  $D$  es una región de deslizamiento repulsor. ■

El objetivo de este trabajo es mostrar el desdoblamiento de una línea de doble tangencia  $L_0$  de tal forma que las líneas paralelas de tangencia  $L_1$  y  $L_2$  delimiten una franja de deslizamiento de tal forma que cuando dichas líneas cambian de posición sobre  $\Sigma$  después de colapsar en  $L_0$ , la franja de deslizamiento cambie su estabilidad. Se mostrará que para algunas configuraciones de los puntos de tangencia, este cambio de estabilidad de la región de deslizamiento estará acompañado del nacimiento o destrucción de uno o más ciclos límite de cruce (CLC).

## 2.2. Forma Normal

Con el siguiente teorema se establece una forma normal para el escenario con el cual trabajaremos en el resto de esta tesis. Consideremos un SLF que satisface las hipótesis



$(\mathbf{H}_1)$  y  $(\mathbf{H}_2)$ , con  $\gamma_2 > 0$ ; es decir, un sistema que tiene sobre su plano de conmutación dos rectas paralelas, constituidas por puntos de tangencia, las cuales delimitan una franja de deslizamiento. Para la construcción de dicha forma normal, utilizaremos como base un punto de tangencia arbitrario  $p_1 \in L_1$  y el punto  $p_2 \in L_2$  más cercano a  $p_1$ . Además, definimos los valores

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 f^-(p_1) = c^T A_1 (A_1 p_1 + b_1) \text{ y} \\ r_2 &= c^T A_2 f^+(p_2) = c^T A_2 (A_2 p_2 + b_2), \end{aligned}$$

los cuales, como se mencionó en el Capítulo 1, nos mostrarán qué tipo de tangencia tienen los puntos  $p_1$  y  $p_2$ . Comenzaremos estableciendo una igualdad que nos será de utilidad en la demostración de otros resultados.

**Lema 2.2.**  $c^T (A_2 p_1 + b_2) = \gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1 + c^T b_2 = \mu$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p_1 \in \Sigma$ . Entonces, por (2.3) y  $\pi_1$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} c^T (A_2 p_1 + b_2) &= c^T A_2 p_1 + c^T b_2 \\ &= (\gamma_1 c^T + \gamma_2 c^T A_1) p_1 + c^T b_2 \\ &= \gamma_1 c^T p_1 + \gamma_2 c^T A_1 p_1 + c^T b_2 \\ &= \gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1 + c^T b_2 \\ &= \mu. \end{aligned}$$

■

A continuación, enunciamos el teorema de la forma normal para el SLF descrito anteriormente.

**Teorema 2.1.** *Supongamos que el sistema (2.1) satisface  $(\mathbf{H}_1)$  y  $(\mathbf{H}_2)$ , con  $\gamma_2 > 0$ . Entonces, el cambio de coordenadas lineal por pedazos*

$$y = h(x) = \begin{cases} \gamma_2 Q_1 (x - p_1), & \text{si } \sigma(x) \leq 0, \\ Q_2 (x - p_1), & \text{si } \sigma(x) \geq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde

$$Q_1 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ d^T \end{pmatrix} \text{ y } Q_2 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \\ \gamma_2 d^T \end{pmatrix}$$

son matrices invertibles, transforma el sistema (2.1) en

$$\dot{y} = \tilde{f}(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

con

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \\ \gamma_2 s_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \mu d_2 \\ s_2 + \mu d_5 \end{pmatrix},$$

$$s_1 = d^T(A_1 p_1 + b_1) \text{ y } s_2 = \gamma_2 d^T(A_2 p_2 + b_2).$$

*Demostración.* En primer lugar, aplicamos el cambio de coordenadas al plano  $\Sigma$ . Esto es, para  $x \in \Sigma$ ,

$$h(x) = \begin{cases} \gamma_2 Q_1(x - p_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T(x - p_1) \\ \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ Q_2(x - p_1) = \begin{pmatrix} c^T(x - p_1) \\ c^T A_2(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) < 0. \end{cases}$$

Esto muestra que  $h$  transforma  $\Sigma$  en el plano  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0\}$ . Después, por  $(H_1)$  y (2.5), es fácil ver que  $Q_1$  es invertible ya que  $c^T$ ,  $c^T A_1$  y  $d^T$  son linealmente independientes. Para  $Q_2$ , notemos que

$$\begin{aligned} c \times A_2^T c &= c \times (\gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c) \\ &= \gamma_1(c \times c) + \gamma_2(c \times A_1^T c) \\ &= \gamma_2 d, \end{aligned}$$

por lo que  $c^T$ ,  $c^T A_2$  y  $\gamma_2 d^T$  son linealmente independientes y  $Q_2$  es invertible y además tenemos que

$$I = Q_1 Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} c^T Q_1^{-1} \\ c^T A_1 Q_1^{-1} \\ d^T Q_1^{-1} \end{pmatrix} = Q_2 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T Q_2^{-1} \\ c^T A_2 Q_2^{-1} \\ \gamma_2 d^T Q_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}.$$

Ahora, aplicamos el cambio sobre los campos. Para  $\sigma(x) \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \gamma_2 Q_1 \dot{x} \\ &= \gamma_2 Q_1(A_1 x + b_1) \\ &= \gamma_2 Q_1(A_1 [\frac{1}{\gamma_2} Q_1^{-1} y + p_1] + b_1) \\ &= Q_1 A_1 Q_1^{-1} y + \gamma_2 Q_1(A_1 p_1 + b_1) \\ &= \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A}_1 = Q_1 A_1 Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_1 Q_1^{-1} \\ c^T A_1^2 Q_1^{-1} \\ v_1^T A_1 Q_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

y

$$\tilde{b}_1 = \gamma_2 Q_1 (A_1 p_1 + b_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T (A_1 p_1 + b_1) \\ \gamma_2 c^T A_1 (A_1 p_1 + b_1) \\ \gamma_2 d^T (A_1 p_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \\ \gamma_2 s_1 \end{pmatrix}.$$

De manera similar, para  $\sigma(x) \geq 0$ ,

$$\dot{y} = Q_2 \dot{x} = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2,$$

donde

$$\tilde{A}_2 = Q_2 A_2 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T A_2 Q_2^{-1} \\ c^T A_2^2 Q_2^{-1} \\ \gamma_2 d^T A_2 Q_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix},$$

y

$$\tilde{b}_2 = Q_2 (A_2 p_1 + b_2). \quad (2.12)$$

Para simplificar (2.12), definimos el vector

$$v = p_2 - p_1. \quad (2.13)$$

Como podemos observar,  $v \in \Sigma$  y es perpendicular a las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , ya que, como se mencionó anteriormente,  $p_2 \in L_2$  es el punto más cercano a  $p_1 \in L_1$ . Además, notemos que

$$\begin{aligned} c^T A_2 v &= c^T A_2 (p_2 - p_1) \\ &= c^T A_2 p_2 - c^T A_2 p_1 + c^T b_2 - c^T b_2 \\ &= c^T (A_2 p_2 + b_2) - c^T (A_2 p_1 + b_2) \\ &= c^T f^+(p_2) - \mu \\ &= -\mu, \end{aligned}$$

con lo que tenemos que

$$c^T v = 0, \quad c^T A_2 v = -\mu \quad \text{y} \quad d^T v = 0 \quad (2.14)$$

Por otra parte, supongamos que  $Q_2^{-1} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ . Entonces, existen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$v = \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 + \delta_3 w_3 \quad (2.15)$$

y, además

$$Q_2 Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \\ \gamma_2 d \end{pmatrix} (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} c^T w_1 & c^T w_2 & c^T w_3 \\ c^T A_2 w_1 & c^T A_2 w_2 & c^T A_2 w_3 \\ \gamma_2 d^T w_1 & \gamma_2 d^T w_2 & \gamma_2 d^T w_3 \end{pmatrix} = I. \quad (2.16)$$

Con lo anterior, podemos ver que  $c^T v = \delta_1$ ,  $c^T A_2 v = \delta_2$ , y  $\gamma_2 d^T v = \delta_3$ . Así, por (2.14) y (2.16), tenemos que

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = -\mu, \quad \text{y} \quad \delta_3 = 0,$$

y, por ende, llegamos a que

$$v = -\mu w_2.$$

Finalmente, notemos que  $p_1 = p_2 + \mu w_2$ , por lo que cuando  $\mu = 0$  (es decir, cuando colapsan  $L_1$  y  $L_2$ ), entonces  $p_1 = p_2$ . Además, sustituyendo la expresión para  $p_1$  en (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2 &= Q_2(A_2 p_1 + b_2) \\ &= Q_2(A_2(p_2 + \mu w_2) + b_2) \\ &= Q_2(f^+(p_2) + \mu A_2 w_2) \\ &= \begin{pmatrix} c^T(f^+(p_2) + \mu A_2 w_2) \\ c^T A_2(f^+(p_2) + \mu A_2 w_2) \\ \gamma_2 d^T(f^+(p_2) + \mu A_2 w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \mu d_2 \\ s_2 + \mu d_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obteniendo así (2.10). ■

### 2.3. Características de la Forma Normal

En seguida, hacemos un breve análisis acerca de las características que genera el cambio de coordenadas (2.10).

Como ya se dijo,  $\tilde{\Sigma} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0\}$  es el nuevo plano de conmutación y, además, vemos que  $\tilde{c} = e_1$ . El siguiente corolario establece la  $\Sigma$ -equivalencia del cambio de coordenadas, es decir que las regiones de deslizamiento y de cruce sobre  $\Sigma$  se mantienen sobre  $\tilde{\Sigma}$ .

**Corolario 2.2.** *Si  $\gamma_2 > 0$ , entonces  $h(\Sigma_a) = (\tilde{\Sigma}_a)$ , con  $a \in \{as, rs, c\}$*

*Demostración.* Sabemos que para  $x \in \Sigma$ ,

$$h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^T A_2(x - p_1) \\ \gamma_2 d^T(x - p_1) \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 e_1^T \tilde{f}^-(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) \\ (\cdot) \\ (\cdot) \end{pmatrix} \\
 &= \gamma_2 c^T A_1(x - p_1) + \gamma_2 c^T b_1 - \gamma_2 c^T b_1 \\
 &= \gamma_2 c^T (A_1 x + b_1) - \gamma_2 c^T (A_1 p_1 + b_1) \\
 &= \gamma_2 c^T f^-(x),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 e_1^T \tilde{f}^+(h(x)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} c^T A_2(x - p_1) + \mu \\ (\cdot) \\ (\cdot) \end{pmatrix} \\
 &= c^T A_2(x - p_1) + c^T (A_2 p_1 + b_2) \\
 &= c^T (A_2 x + b_2) - c^T A_2 p_1 + c^T A_2 p_1 \\
 &= c^T f^+(x).
 \end{aligned}$$

■

Después, para localizar las rectas de tangencia, comencemos aplicando el cambio de coordenadas a los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Para  $y_1 \leq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 c^T f^-(x) &= c^T (A_1 (\frac{1}{\gamma_2} Q_1^{-1} y + p_1) + b_1) \\
 &= \frac{1}{\gamma_2} c^T A_1 Q_1^{-1} y + c^T (A_1 p_1 + b_1) \\
 &= \frac{1}{\gamma_2} e_2^T y \\
 &= \frac{1}{\gamma_2} y_2.
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $\tilde{\pi}_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \leq 0, y_2 = 0\}$ . Para  $y_1 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 c^T f^+(x) &= c^T (A_2 (Q_1^{-1} y + p_1) + b_2) \\
 &= c^T A_1 Q_1^{-1} y + c^T (A_1 p_1 + b_1) \\
 &= e_2^T y + \mu \\
 &= y_2 + \mu.
 \end{aligned}$$

Por lo que  $\tilde{\pi}_2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \geq 0, y_2 = -\mu\}$  y las rectas de tangencia están dadas por

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_1 &= \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0, y_2 = 0\} \ y \\
 \tilde{L}_2 &= \tilde{\Sigma} \cap \tilde{\pi}_2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 0, y_2 = -\mu\},
 \end{aligned}$$

y así, también podemos ubicar las regiones de deslizamiento y cruce sobre el plano de conmutación  $\tilde{\Sigma}$  de la siguiente forma:

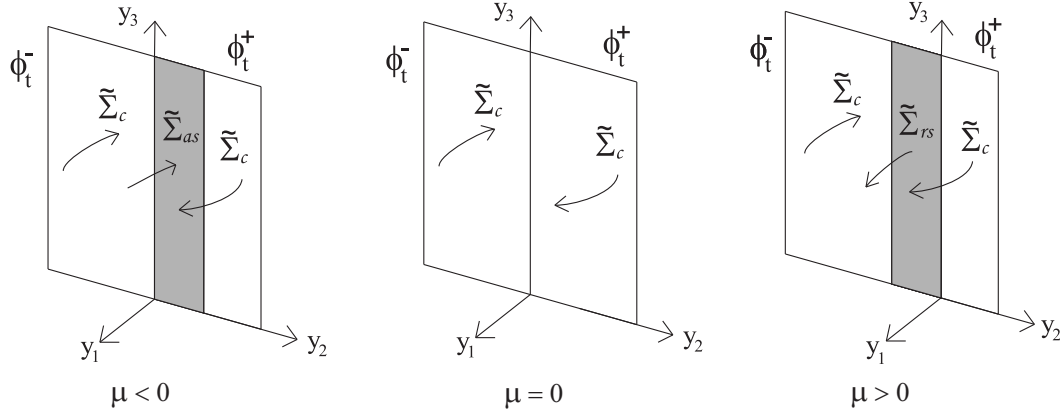


Figura 2.4: Regiones de deslizamiento y escape.

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{as} &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0, y_2 + \mu < 0\}, \\ \tilde{\Sigma}_{rs} &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 < 0, y_2 + \mu > 0\}, \\ \tilde{\Sigma}_c &= \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2(y_2 + \mu) > 0\}.\end{aligned}$$

Con lo anterior, se puede ver que la región de deslizamiento sobre  $\tilde{\Sigma}$  es una franja horizontal delimitada por las rectas verticales  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$ . Finalmente, por el Corolario 2.1, si  $\mu < 0$  dicha franja será región de deslizamiento atractor y si  $\mu > 0$  será región de deslizamiento repulsor (ver Figura 2.4).

Por último, de acuerdo a las definiciones del Capítulo 1, podemos clasificar los puntos de tangencia de (2.10) de la siguiente manera. Primero, los puntos de tangencia para  $\tilde{f}^-$  son de la forma

$$y = (0, 0, y_3) \in \tilde{L}_1. \quad (2.17)$$

El punto (2.17) será una singularidad de tangencia de (2.10) si

$$\tilde{r}_1(y) = e_1^T \tilde{A}_1 \tilde{f}^-(y) = \gamma_2 r_1 + c_3 y_3 \neq 0,$$

la cual será de tipo invisible  $\tilde{r}_1(y) > 0$  o de tipo visible si  $\tilde{r}_1(y) < 0$ . Por otro lado, el punto (2.17) será un punto cúspide si

$$\tilde{r}_1(y) = 0, \quad e_1^T \tilde{A}_1^2 \tilde{f}^-(y) = \gamma_2 (c_3 s_1 - c_6 r_1) \neq 0$$

y los vectores

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, c_3)\}$$

son linealmente independientes, es decir, si  $c_3 \neq 0$ . De manera semejante, los puntos de tangencia para  $\tilde{f}^+$  están dados por

$$y = (0, -\mu, y_3) \in \tilde{L}_2. \quad (2.18)$$

Y el punto (2.18) será una singularidad de tangencia de (2.10) si

$$\tilde{r}_2(y) = e_1^T \tilde{A}_2 \tilde{f}^+(y) = r_2 + d_3 y_3 \neq 0,$$

la cual será de tipo invisible  $\tilde{r}_2(y) < 0$  o de tipo visible si  $\tilde{r}_2(y) > 0$ . Finalmente, el punto (2.18) será un punto cúspide si

$$\tilde{r}_2(y) = 0 \text{ y } e_1^T \tilde{A}_2^2 \tilde{f}^+(y) = d_3 s_2 - d_6 r_2 \neq 0.$$

y los vectores

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, d_3)\}$$

son linealmente independientes, es decir, si  $d_3 \neq 0$ .

En este capítulo presentamos la forma normal para las familias de SLF que tienen dos líneas de tangencia paralelas que delimitan la región de deslizamiento sobre la variedad de conmutación. Encontramos que esta forma normal depende de un parámetro  $\mu$  el cual nos permitirá saber si la región de deslizamiento es atractora o repulsora, así como manipular la posición de las líneas de tangencia y lograr que colapsen en una línea de singularidades de doble tangencia, lo cual es un elemento importante en la bifurcación pseudo-Hopf como se verá en el siguiente capítulo.





## Capítulo 3

### La bifurcación pseudo-Hopf

En este capítulo se presenta el resultado más importante de esta tesis, el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf en el escenario ya descrito y para el cual se ha encontrado una forma normal. Primero se presentarán las propiedades necesarias para poder enunciar el teorema y después se desarrollará su demostración.

#### 3.1. Teorema de la bifurcación pseudo-Hopf

Consideremos la forma normal (2.10),

$$\dot{y} = \tilde{f}(y) = \begin{cases} \tilde{f}^-(y) = \tilde{A}_1 y + \tilde{b}_1, & \text{si } y_1 < 0, \\ \tilde{f}^+(y) = \tilde{A}_2 y + \tilde{b}_2, & \text{si } y_1 > 0, \end{cases}$$

con

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \\ \gamma_2 s_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ r_2 + \mu d_2 \\ s_2 + \mu d_5 \end{pmatrix},$$

$s_1 = d^T(A_1 p_1 + b_1)$  y  $s_2 = \gamma_2 d^T(A_2 p_2 + b_2)$ . Estamos interesados en el caso donde existe un intervalo para  $y_3$ , el cual satisfaga

$$\tilde{r}_1(0, 0, y_3) > 0 \quad \text{y} \quad \tilde{r}_2(0, -\mu, y_3) < 0,$$

es decir, un intervalo donde  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  tienen singularidades de tangencia invisibles. Con esta configuración, los flujos de  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$  mapean órbitas del plano de conmutación a sí mismo, dando la posibilidad de encontrar, como se mostrará más adelante, órbitas periódicas. Para este fin, podemos ver que

$$h(p_1) = (0, 0, 0)^T \quad \text{y} \quad h(p_2) = (0, -\mu, 0)^T.$$

Más aún, notemos que las visibilidades de estas singularidades de tangencia están dadas por

$$\tilde{r}_1(0, 0, 0) = \gamma_2 r_1 \quad \text{y} \quad \tilde{r}_2(0, -\mu, 0) = r_2. \quad (3.1)$$

Entonces, asumiremos que se cumple la siguiente hipótesis:

**(H<sub>3</sub>)** Existen  $p_1 \in \tilde{L}_1$  y  $p_2 \in \tilde{L}_2$ , donde  $p_2$  es el punto más cercano a  $p_1$ , tal que  $r_1 = c^T A_1(A_1 p_1 + b_1) > 0$  y  $r_2 = c^T A_2(A_2 p_2 + b_2) < 0$ .

Por (3.1), esta hipótesis nos asegura que los puntos  $(0, 0, 0) \in \tilde{L}_1$  y  $(0, -\mu, 0) \in \tilde{L}_2$  son singularidades de tangencia invisibles para  $\tilde{f}^-$  y  $\tilde{f}^+$ , respectivamente. Más aún, como las funciones

$$\tilde{r}_1(y) = \gamma_2 r_1 + c_3 y_3 \quad \text{para } y \in \tilde{L}_1$$

y

$$\tilde{r}_2(y) = r_2 + d_3 y_3 \quad \text{para } y \in \tilde{L}_2$$

son continuas, entonces existe un intervalo de valores para  $y_3$ ,

$$I_T = \{y_3 \in \mathbb{R} : \gamma_2 r_1 + c_3 y_3 > 0 \quad \text{y} \quad r_2 + d_3 y_3 < 0\} \quad (3.2)$$

que contiene a  $y_3 = 0$ , es decir, existe un segmento de la recta  $\tilde{L}_1$ , el cual contiene al punto  $(0, 0, 0)^T$  y otro segmento de  $\tilde{L}_2$  el cual contiene a  $(0, -\mu, 0)^T$ , los cuales están compuestos únicamente por singularidades de tangencia invisibles. Además, recordando que cuando  $\mu = 0$  las líneas de tangencia colapsan en una línea de doble tangencia  $\tilde{L}_0$ , el intervalo  $I_T$  se convierte en un intervalo de singularidades de doble tangencia de tipo invisibles, el cual llamaremos *segmento de Teixeira*. En el caso particular donde  $c_3 = d_3 = 0$ , se tiene que  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  son líneas compuestas totalmente de singularidades de tangencia invisibles, la cuales, al colapsar, crearán una línea de singularidades de doble tangencia invisibles,  $I_T = \mathbb{R}$ , llamada *línea de Teixeira*.

Por último, para probar la existencia de un CLC, será necesario establecer una última, hipótesis:

**(H<sub>4</sub>)** Existe una raíz  $v_0 \in I_T$  de la función

$$V(v) = \gamma_2(r_1 s_2 - r_2 s_1) + (\gamma_2(d_6 r_1 - d_3 s_1) + c_3 s_2 - c_6 r_2)v + (c_3 d_6 - c_6 d_3)v^2,$$

tal que  $V'(v_0) \neq 0$ .

Esta hipótesis asegura la existencia de un punto fijo para el mapeo de Poincaré que se definirá más adelante, este punto fijo significará un ciclo límite de cruce para el sistema. Más aún, la hipótesis **(H<sub>4</sub>)** implica la existencia de un pseudo-equilibrio, en la forma normal (2.10) alrededor del cual el ciclo límite de cruce estará oscilando, como se ve en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *Considere la forma normal (2.10) y suponga que se satisfacen **(H<sub>3</sub>)** y **(H<sub>4</sub>)**. Entonces, para cada  $\mu$  suficientemente pequeño, existe un pseudo-equilibrio, el cual tiene una variedad invariante la cual cambia su estabilidad cuando  $\mu$  pasa por 0.*

*Demostración.* Por (1.4), sabemos que el campo vectorial deslizante de la forma normal (2.10) está dado por  $\tilde{f}_s(y) = \frac{\tilde{f}_r(y)}{\Delta_y}$ , donde  $\Delta_y = -\mu$  y el campo vectorial regularizado,  $\tilde{f}_r(y)$ , definido sobre  $\tilde{\Sigma}$  para  $\mu \approx 0$ , está dado por

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= -(c_2 - d_2)y_2^2 - (c_3 - d_3)y_2y_3 - y_2(-r_2 + r_1\gamma_2 + (c_2 - d_2)\mu) - c_3y_3\mu - r_1\gamma_2\mu, \\ \dot{y}_3 &= -(c_5 - d_5)y_2^2 - (c_6 - d_6)y_2y_3 - y_2(-s_2 + s_1\gamma_2 + (c_5 - d_5)\mu) - c_6y_3\mu - s_1\gamma_2\mu.\end{aligned}$$

En búsqueda de los pseudo-equilibrios del sistema, observe que  $\dot{y}_2 = 0$  si y sólo si

$$y_3 = \tilde{h}_1(y_2) = \frac{(c_2 - d_2)y_2^2 + y_2(-r_2 + r_1\gamma_2 + (c_2 - d_2)\mu) + r_1\gamma_2\mu}{(d_3 - c_3)y_2 - c_3\mu}$$

y  $\dot{y}_3 = 0$  si y sólo si

$$y_3 = \tilde{h}_2(y_2) = \frac{(c_5 - d_5)y_2^2 + y_2(-s_2 + s_1\gamma_2 + (c_5 - d_5)\mu) + s_1\gamma_2\mu}{(d_6 - c_6)y_2 - c_6\mu}.$$

Así, tendremos que  $\tilde{h}_1(y_2) = \tilde{h}_2(y_2)$  si y sólo si  $J(y_2, \mu) = 0$ , donde

$$\begin{aligned}J(y_2, \mu) &= (l_1y_2 + l_0)y_2^2 + (m_1y_2^2 + m_0y_2)\mu + (n_1y_2 + n_0)\mu^2 \\ &= l_1y_2^3 + (l_0 + m_1\mu)y_2^2 + (m_0\mu + n_1\mu^2)y_2 + n_0\mu^2,\end{aligned}\tag{3.3}$$

con

$$\begin{aligned}l_0 &= -c_6r_2 + d_6r_2 + c_3s_2 - d_3s_2 + c_6r_1\gamma_2 - d_6r_1\gamma_2 - c_3s_1\gamma_2 + d_3s_1\gamma_2, \\ l_1 &= -c_3c_5 + c_2c_6 - c_6d_2 + c_5d_3 + c_3d_5 - d_3d_5 - c_2d_6 + d_2d_6, \\ m_0 &= -c_6r_2 + c_3s_2 + 2c_6r_1\gamma_2 - d_6r_1\gamma_2 - 2c_3s_1\gamma_2 + d_3s_1\gamma_2, \\ m_1 &= -2c_3c_5 + 2c_2c_6 - 2c_6d_2 + c_5d_3 + 2c_3d_5 - d_3d_5 - c_2d_6 + d_2d_6, \\ n_0 &= (c_6r_1 - c_3s_1)\gamma_2, \\ n_1 &= -c_3c_5 + c_2c_6 - c_6d_2 + c_3d_5.\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para  $\mu = 0$ ,  $J$  tiene una raíz doble  $y_2 = 0$  y una raíz simple  $y_2 = -\frac{l_0}{l_1}$ , para  $l_1 \neq 0$ . Entonces, para  $\mu \approx 0$ ,  $J$  tiene las raíces

$$y_{21}(\mu) = J_1\mu + \mathcal{O}(\mu^2), \quad y_{22}(\mu) = J_2\mu + \mathcal{O}(\mu^2) \quad \text{y} \quad y_{23}(\mu) = -\frac{l_0}{l_1} + \mathcal{O}(\mu),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}J(y_2, \mu) &= l_1 (y_2 - J_1\mu + \mathcal{O}(\mu^2)) (y_2 - J_2\mu + \mathcal{O}(\mu^2)) \left( y_2 + \frac{l_0}{l_1} + \mathcal{O}(\mu) \right), \\ &= l_1y_2^3 + (l_0 - l_1(J_1 + J_2 + J_3)\mu + \mathcal{O}(\mu^2))y_2^2 + (-l_0(J_1 + J_2)\mu + \mathcal{O}(\mu^2))y_2 \\ &\quad + (l_0J_1J_2\mu^2 + \mathcal{O}(\mu^3)).\end{aligned}\tag{3.4}$$

El objetivo es probar que  $-1 < J_1 < 0$ , esto es, probaremos que el punto

$$q(\mu) = (y_{21}(\mu), \tilde{h}_1(y_{21}(\mu))) \in \tilde{\Sigma}_s,$$

y así  $q(\mu)$  será un pseudo-equilibrio de (2.10). Para mostrar lo anterior, de (3.3) y (3.4) vemos que

$$\begin{aligned} -l_0(J_1 + J_2) &= m_0 \\ l_0 J_1 J_2 &= n_0 \end{aligned}$$

de las cuales obtenemos

$$J_1 = \frac{-m_0 + \sqrt{m_0^2 - 4l_0 n_0}}{2l_0} \quad \text{y} \quad J_2 = \frac{-m_0 - \sqrt{m_0^2 - 4l_0 n_0}}{2l_0}.$$

Ahora, de la hipótesis ( $\mathbf{H}_4$ ) se sigue que la función cuadrática  $V(v)$  tiene discriminante positivo, el cual está dado por  $d_0 = m_0^2 - 4l_0 n_0$ , entonces  $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$ . Además,  $v_0 \in I_T$  implica que  $\tilde{r}_1 = \gamma_2 r_1 + c_3 v_0 > 0$  y  $\tilde{r}_2 = r_2 + d_3 v_0 < 0$ . Si reescribimos lo anterior como

$$r_1 = \frac{\tilde{r}_1 - c_3 v_0}{\gamma_2} \quad \text{y} \quad r_2 = \tilde{r}_2 - d_3 v_0, \quad (3.5)$$

vemos  $V(v_0) = 0$  implica que

$$v_0 = \frac{\tilde{r}_1 s_2 - \tilde{r}_2 s_1 \gamma_2}{c_6 \tilde{r}_2 - d_6 \tilde{r}_1}, \quad (3.6)$$

y sustituyendo (3.5) y (3.6) en  $J_1$  obtenemos que

$$J_1 = -\frac{\tilde{r}_1}{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2},$$

es decir  $-1 < J_1 < 0$ . De igual manera, sustituyendo (3.5), (3.6) y  $y_{21}$  en  $\tilde{h}_1(y_2)$  obtenemos que

$$\tilde{h}_1(J_1 \mu + \mathcal{O}(\mu^2)) = \tilde{h}_2(J_1 \mu + \mathcal{O}(\mu^2)) = v_0 + \mathcal{O}(\mu).$$

Finalmente, definimos  $A_0(\mu) = D\tilde{f}_s(q(\mu)) = D\tilde{f}_s(J_1 \mu + \mathcal{O}(\mu^2), v_0 + \mathcal{O}(\mu))$  y obtenemos que

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \frac{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2}{\mu} + \mathcal{O}(\mu) & \alpha_{12} + \mathcal{O}(\mu) \\ \alpha_{22} + \frac{K_0}{\mu} + \mathcal{O}(\mu) & \alpha_{22} + \mathcal{O}(\mu) \end{pmatrix},$$

cuyos eigenvalores están dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mu) &= \frac{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2}{\mu} + K_1 + \mathcal{O}(\mu), \\ \lambda_2(\mu) &= K_2 + \mathcal{O}(\mu),\end{aligned}$$

para algunas constantes  $K_1, K_2$ , donde podemos ver que  $\lambda_1(\mu)$  cambia de signo cuando  $\mu$  pasa por 0.

■

**Observación 3.1.** *Si la función cuadrática  $V(v)$  tiene dos raíces en  $I_T$ , entonces la forma normal (2.10) tiene dos pseudo-equilibrios.*

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos enunciar el teorema más importante de este trabajo, el cual establece que bajo las hipótesis  $(\mathbf{H}_3)$  and  $(\mathbf{H}_4)$ , la forma normal (2.10) da lugar a la bifurcación pseudo-Hopf.

**Teorema 3.1.** *(Teorema de la bifurcación pseudo-Hopf). Suponga que el SLF en  $\mathbb{R}^3$  (2.1) satisface  $(\mathbf{H}_1)$ ,  $(\mathbf{H}_2)$ ,  $(\mathbf{H}_3)$  y  $(\mathbf{H}_4)$ , con  $\gamma_2 > 0$ . Entonces, para cada  $\mu$ , con  $\mu\Lambda(v_0) > 0$ , el sistema (2.1) tiene un único CLC asociado con  $v_0$ . Además,*

- i) si  $\Lambda(v_0) > 0$  y  $\Upsilon(v_0) > 0$  el CLC es un sumidero,
- ii) si  $\Lambda(v_0) < 0$  y  $\Upsilon(v_0) < 0$  el CLC es una fuente y
- iii) si  $\Lambda(v_0)\Upsilon(v_0) < 0$  el CLC es un ciclo tipo silla,

donde

$$\begin{aligned}\Lambda(v_0) &= \frac{1}{3} \left( \frac{d_2(r_2 + d_3v_0) + d_3(s_2 + d_6v_0)}{(r_2 + d_3v_0)^2} - \frac{c_2(\gamma_2r_1 + c_3v_0) + c_3(\gamma_2s_1 + c_6v_0)}{(\gamma_2r_1 + c_3v_0)^2} \right) \quad y \\ \Upsilon(v_0) &= \frac{d_6r_2 - d_3s_2}{(r_2 + d_3v_0)^2} - \frac{\gamma_2(c_6r_1 - c_3s_1)}{(\gamma_2r_1 + c_3v_0)^2}.\end{aligned}$$

**Observación 3.2.** *Observemos que si  $c_3d_6 - c_6d_3 \neq 0$ ,  $V(v)$  es un polinomio de segundo grado, por lo que es posible que existan dos raíces de dicho polinomio en  $I_T$ . En este caso, existen dos CLC's, cada uno ellos asociados a cada una de las raíces.*

## 3.2. Demostración del teorema

Consideremos la forma normal (2.10). Denotemos por  $\phi_t^-$  y  $\phi_t^+$  a los flujos para  $y_1 < 0$  y  $y_1 > 0$ , respectivamente. Primero, definimos las regiones

$$D_1 = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 < 0, y_3 \in I_T\} \quad \text{y} \quad D_2 = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > -\mu, y_3 \in I_T\},$$

si  $\mu < 0$ , y

$$D_1 = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 < -\mu, y_3 \in I_T\} \quad \text{y} \quad D_2 = \{y \in \tilde{\Sigma} \mid y_2 > 0, y_3 \in I_T\},$$

si  $\mu > 0$ . Debido a la invisibilidad de las singularidades del intervalo  $I_T$ , en cada una de las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , podemos ver que el flujo  $\phi^-$  mapea puntos de  $D_1$  en puntos de  $D_2$  y el flujo  $\phi^+$  mapea puntos de  $D_2$  en  $D_1$ .

Para probar la existencia de un CLC, encontraremos puntos  $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in D_1$ ,  $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in D_2$  y tiempos  $t_1, t_2$ , tales que el sistema

$$\begin{aligned} \phi_{t_1}^-(q_1) &= q_2, \\ \phi_{t_2}^+(q_2) &= q_1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

tenga solución. Con este fin, tenemos que la solución del sistema (2.10) para  $y_1 < 0$  está dada por

$$\phi_{t_1}^-(y) = e^{t_1 \tilde{A}_1} \left( y + \int_0^{t_1} e^{-s \tilde{A}_1} \tilde{b}_1 ds \right) \tag{3.8}$$

(Teorema A.1), además, por propiedades de la matriz exponencial (Definición A.1), tenemos que

$$e^{-s \tilde{A}_1} = I - s \tilde{A}_1 + \frac{s^2}{2!} \tilde{A}_1^2 - \frac{s^3}{3!} \tilde{A}_1^3 + \dots$$

Sustituyendo esta expresión en la integral de (3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 \int_0^t e^{-s \tilde{A}_1} ds &= \tilde{b}_1 \left( sI - \frac{s^2}{2!} \tilde{A}_1 + \frac{s^3}{3!} \tilde{A}_1^2 - \frac{s^4}{4!} \tilde{A}_1^3 + \dots \Big|_0^t \right) \\ &= t \tilde{b}_1 - \frac{t^2}{2!} \tilde{A}_1 \tilde{b}_1 + \frac{t^3}{3!} \tilde{A}_1^2 \tilde{b}_1 - \frac{t^4}{4!} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 + \dots, \end{aligned} \tag{3.9}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\phi_{t_1}^-(q_1) &= e^{t_1 \tilde{A}_1} \left( q_1 + \int_0^{t_1} e^{-s \tilde{A}_1} \tilde{b}_1 ds \right) \\
&= \left( I + t_1 \tilde{A}_1 + \frac{t_1^2}{2!} \tilde{A}_1^2 + \frac{t_1^3}{3!} \tilde{A}_1^3 + \frac{t_1^4}{4!} \tilde{A}_1^4 + \dots \right) \\
&\quad \left( q_1 + t_1 \tilde{b}_1 - \frac{t_1^2}{2!} \tilde{A}_1 \tilde{b}_1 + \frac{t_1^3}{3!} \tilde{A}_1^2 \tilde{b}_1 - \frac{t_1^4}{4!} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 + \dots \right) \\
&= q_1 + t_1 (\tilde{A}_1 q_1 + \tilde{b}_1) + t_1^2 \left( -\frac{1}{2!} \tilde{A}_1 \tilde{b}_1 + \tilde{A}_1 \tilde{b}_1 + \frac{1}{2!} \tilde{A}_1^2 q_1 \right) \\
&\quad + t_1^3 \left( \frac{1}{6} \tilde{A}_1^2 \tilde{b}_1 - \frac{1}{2} \tilde{A}_1^2 \tilde{b}_1 + \frac{1}{2} \tilde{A}_1^2 \tilde{b}_1 + \frac{1}{6} \tilde{A}_1^3 q_1 \right) \\
&\quad + t_1^4 \left( -\frac{1}{24} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 + \frac{1}{6} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 - \frac{1}{4} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 + \frac{1}{6} \tilde{A}_1^3 \tilde{b}_1 + \frac{1}{24} \tilde{A}_1^4 q_1 \right) + \dots \\
&= q_1 + t_1 (\tilde{A}_1 q_1 + \tilde{b}_1) + t_1^2 \left( \frac{1}{2} \tilde{A}_1 (\tilde{A}_1 q_1 + \tilde{b}_1) \right) + t_1^3 \left( \frac{1}{6} \tilde{A}_1^2 (\tilde{A}_1 q_1 + \tilde{b}_1) \right) \\
&\quad + t_1^4 \left( \frac{1}{24} \tilde{A}_1^3 (\tilde{A}_1 q_1 + \tilde{b}_1) \right) + \dots \\
&= q_1 + t_1 \tilde{f}^-(q_1) + \frac{t_1^2}{2!} \tilde{A}_1 \tilde{f}^-(q_1) + \frac{t_1^3}{3!} \tilde{A}_1^2 \tilde{f}^-(q_1) + \frac{t_1^4}{4!} \tilde{A}_1^3 \tilde{f}^-(q_1) + \dots \\
&= q_1 + t_1 \left( I + \frac{t_1}{2!} \tilde{A}_1 + \frac{t_1^2}{3!} \tilde{A}_1^2 + \frac{t_1^3}{4!} \tilde{A}_1^3 + \dots \right) \tilde{f}^-(q_1).
\end{aligned}$$

Y, llamando  $M(t_1) = I + \frac{t_1}{2!} \tilde{A}_1 + \frac{t_1^2}{3!} \tilde{A}_1^2 + \frac{t_1^3}{4!} \tilde{A}_1^3 + \dots$ , hemos encontrado que, hallar la solución  $q_2 = \phi_{t_1}^-(q_1)$ , es equivalente a resolver el sistema  $q_2 = q_1 + t_1 M(t_1) \tilde{f}^-(q_1)$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 e_1^T M(t_1) \tilde{f}^-(q_1) \\ t_1 e_2^T M(t_1) \tilde{f}^-(q_1) \\ t_1 e_3^T M(t_1) \tilde{f}^-(q_1) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

De manera análoga, la solución del sistema (2.10) para  $y_1 > 0$  está dada por

$$\phi_{t_2}^+(y) = e^{t_2 \tilde{A}_2} \left( y + \int_0^{t_2} e^{-s \tilde{A}_2} \tilde{b}_2 ds \right),$$

y se podrá observar que hallar la solución de  $q_1 = \phi_{t_2}^+(q_2)$ , es equivalente a resolver el sistema  $q_1 = q_2 + t_2 N(t_2) \tilde{f}^+(q_2)$ , donde  $N(t_2) = I + \frac{t_2}{2!} \tilde{A}_2 + \frac{t_2^2}{3!} \tilde{A}_2^2 + \frac{t_2^3}{4!} \tilde{A}_2^3 + \dots$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 e_1^T N(t_2) \tilde{f}^+(q_2) \\ t_2 e_2^T N(t_2) \tilde{f}^+(q_2) \\ t_2 e_3^T N(t_2) \tilde{f}^+(q_2) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Finamente, el sistema (3.7) es equivalente al sistema compuesto por (3.10) y (3.11). Para resolver este nuevo sistema, consideremos la primera ecuación de (3.10) y definamos la función

$$\begin{aligned} F_1(t_1, u_1, v_1) &= e_1^T M(t_1) \tilde{f}^-(q_1) \\ &= u_1 + \frac{t_1}{2}(\gamma_2 r_1 + c_2 u_1 + c_3 v_1) \\ &\quad + \frac{t_1^2}{6}(c_1 u_1 + c_2(\gamma_2 r_1 + c_2 u_1 + c_3 v_1) \\ &\quad\quad\quad + c_3(\gamma_2 s_1 + c_5 u_1 + c_6 v_1) + \dots, \end{aligned}$$

la cual satisface que

$$F_1(0, 0, v_1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t_1}(0, 0, v_1) = \frac{1}{2}(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1) \neq 0.$$

Entonces, por el TFI existe una función  $t_1(u_1, v_1)$  tal que  $F_1(t_1(u_1, v_1), u_1, v_1) = 0$  en una vecindad de  $(0, 0, v_1)$ . Tal función la propondremos de la forma

$$t_1(u_1, v_1) = a_1(v_1)u_1 + a_2(v_1)u_1^2 + \mathcal{O}(|u_1|^3). \quad (3.12)$$

Hallaremos los coeficientes  $a_1(v_1)$  y  $a_2(v_1)$  de (3.12) haciendo la composición  $F_1(t_1(u_1, v_1), u_1, v_1)$  recordando que en  $(u_1, v_1) = (0, v_1)$  tiene que ser cero y así cada coeficiente de  $F_1(t_1(0, v_1), 0, v_1)$ , se iguala a cero, se plantea un sistema de ecuaciones y se encuentran los valores de  $a_1(v)$  y  $a_2(v)$ , obteniendo

$$t_1(u_1, v_1) = -\frac{2}{\gamma_2 r_1 + c_3 v_1} u_1 + \frac{2(c_2(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1) - 2c_3(\gamma_2 s_1 + c_6 v_1))}{3(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1)^3} u_1^2 + \mathcal{O}(|u_1|^3).$$

Ahora, sustituimos ésta en la segunda y tercera ecuación de (3.10), obteniendo

$$\begin{aligned} u_2 &= -u_1 + \frac{2(c_2(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1) + c_3(\gamma_2 s_1 + c_6 v_1))}{3(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1)^2} u_1^2 + \mathcal{O}(|u_1|^3), \\ v_2 &= -\frac{2(\gamma_2 s_1 + c_6 v_1)}{\gamma_2 r_1 + c_3 v_1} u_1 + v_1 \\ &\quad + \frac{2(\gamma_2 s_1 + c_6 v_1)(\gamma_2(c_2 r_1 + 3c_6 r_1 - 2c_3 s_1) + c_2 c_3 v_1 + c_3 c_6 v_1)}{3(\gamma_2 r_1 + c_3 v_1)^3} u_1^2 + \mathcal{O}(|u_1|^3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con lo anterior, definimos la función  $h_1 : D_1 \rightarrow D_2$  como

$$h_1(u_1, v_1) = \begin{pmatrix} h_{11}(u_1, v_1) \\ h_{12}(u_1, v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

donde  $u_2$  and  $v_2$  son las ecuaciones (3.13). De manera similar, consideramos la primera ecuación de (3.11) y definimos la función



$$\begin{aligned}
F_2(t_2, u_2, v_2) &= e_1^T N(t_2) \tilde{f}^+(q_2) \\
&= u_2 + \mu + \frac{t_2}{2} (d_2(u_2 + \mu)r_2 + d_3v_2) \\
&\quad + \frac{t_2^2}{6} (d_1(u_2 + \mu) + d_2(d_2(u_2 + \mu)r_2 + d_3v_2) \\
&\quad\quad\quad + d_3(d_5(u_2 + \mu)s_2 + d_6v_2)) + \dots,
\end{aligned}$$

la cual satisface que

$$F_2(0, -\mu, v_2) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial t_2}(0, -\mu, v_2) = \frac{1}{2}(r_2 + d_3v_2) \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función  $t_2(u_2, v_2)$  tal que  $F_2(t_2(-\mu, v_2), -\mu, v_2) = 0$  en una vecindad de  $(0, -\mu, v_2)$ , la cual, haciendo un desarrollo similar al de  $t_1(u_1, v_1)$ , hallamos que está dada por

$$\begin{aligned}
t_2(u_2, v_2) &= -\frac{2}{r_2 + d_3v_2}(u_2 + \mu) \\
&\quad + \frac{2(d_2(r_2 + d_3v_2) - 2d_3(s_2 + d_6v_2))}{3(r_2 + d_3v_2)^3}(u_2 + \mu)^2 + \mathcal{O}(|u_2|^3).
\end{aligned}$$

Sustituimos  $t_2(u_2, v_2)$  en la segunda y tercera ecuación de (3.11), obteniendo

$$\begin{aligned}
u_1 &= -2\mu - u_2 + \frac{2(d_2(r_2 + d_3v_2) + d_3(s_2 + d_6v_2))}{3(r_2 + d_3v_2)^2}(2u_2\mu + u_2^2) + \mathcal{O}(|u_2|^3), \\
v_1 &= -\frac{2(s_2 + d_6v_2)}{r_2 + d_3v_2}(\mu + u_2) + v_2 \\
&\quad + \frac{2(s_2 + d_6v_2)(d_2r_2 + 3d_6r_2 - 2d_3s_2 + d_2d_3v_2 + d_3d_6v_2)}{3(r_2 + d_3v_2)^3}(2u_2\mu + u_2^2) \\
&\quad\quad\quad + \mathcal{O}(|u_2|^3).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Y así, definimos la ecuación  $h_2 : D_2 \rightarrow D_1$  como

$$h_2(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} h_{21}(u_2, v_2) \\ h_{22}(u_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

donde  $u_1$  y  $v_1$  son las ecuaciones (3.14).

Finalmente, para terminar de resolver el sistema (3.10)-(3.11), definimos el mapeo de Poincaré  $P : D_1 \rightarrow D_1$  como

$$P(u, v, \mu) = h_2(h_1(u, v)) = \begin{pmatrix} P_1(u, v, \mu) \\ P_2(u, v, \mu) \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  están dados en series de Taylor alrededor de  $u = \mu = 0$  por

$$\begin{aligned}
P_1(u, v, \mu) &= -2\mu + u + 2\Lambda(v) - \frac{4d_2(r_2 + d_3v) + d_3(s_2 + d_6v)}{3(r_2 + d_3v)^2}u\mu + \mathcal{O}(|u|^3), \\
P_2(u, v, \mu) &= v + 2\left(\frac{s_2 + d_6v}{r_2 + d_3v} - \frac{\gamma_2s_1 + c_6v}{\gamma_2r_1 + c_3v}\right)u - \frac{2(\gamma_2s_1 + c_6v)}{\gamma_2r_1 + c_3v}\mu + K_1(v)u\mu \\
&\quad + K_2(v)u_2^2 + \mathcal{O}(|u|^3),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde,

$$\Lambda(v) = \frac{1}{3} \left( \frac{d_2(r_2 + d_3v) + d_3(s_2 + d_6v)}{(r_2 + d_3v)^2} - \frac{c_2(\gamma_2r_1 + c_3v) + c_3(\gamma_2s_1 + c_6v)}{(\gamma_2r_1 + c_3v)^2} \right).$$

Finalmente, para hallar el ciclo límite tenemos que determinar los puntos fijos del mapeo, es decir los puntos  $(u, v)$  tales que

$$P(u, v, \mu) = (u, v)^T \quad \text{ó} \quad \begin{cases} P_1(u, v, \mu) = u \\ P_2(u, v, \mu) = v \end{cases}. \tag{3.17}$$

Para resolver este sistema, definimos las funciones

$$H_1(u, v, \mu) = P_1(u, v, \mu) - u \quad \text{y} \quad H_2(u, v, \mu) = P_2(u, v, \mu) - v.$$

Así, resolver (3.17) es equivalente a resolver  $H_1(u, v, \mu) = 0$  y  $H_2(u, v, \mu) = 0$ . Primero, observemos que

$$H_1(0, v, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H_1}{\partial \mu}(0, v, 0) = -2,$$

entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función  $G(u, v)$  tal que  $H_1(u, v, G(u, v)) = 0$  en una vecindad de  $(0, v, 0)$ , la cual propondremos de la forma

$$G(u, v) = n_1(v)u + n_2(v)u^2 + \mathcal{O}(|u|^3)$$

y haciendo la composición e igualando a cero, obtenemos que

$$\mu = G(u, v) = \Lambda(v)u^2 + \mathcal{O}(|u|^3). \tag{3.18}$$

Ahora, sustituimos la función anterior en  $H_2(u, v, \mu)$  y obtenemos

$$H_2(u, v, G(u, v)) = \frac{u}{3(\gamma_2r_1 + c_3v)^2(r_2 + d_3v)^3}H_0(u, v),$$

donde

$$H_0(u, v) = R_0(v) + R_1(v)u + R_2(v)u^2 + R_3(v)u^3 + \dots,$$

con

$$R_0(v) = 6(\gamma_2 r_1 + c_3 v)(r_2 + d_3 v)^2 V(v).$$

Entonces, por  $(\mathbf{H}_4)$ , existe un  $v_0 \in I_T$ , tal que  $V(v_0) = 0$ . Así,  $R(v_0) = 0$  y  $H_0(0, v_0) = 0$ . Más aún, por  $(\mathbf{H}_3)$  y  $(\mathbf{H}_4)$ , tenemos que

$$\frac{\partial H_0}{\partial v}(0, v_0) = 6(\gamma_2 r_1 + c_3 v_0)(r_2 + d_3 v_0)^2 V'(v_0) \neq 0,$$

y, por el teorema de la función implícita, existe una función, la cual propondremos de forma polinomial, de la forma

$$v = f(u) = v_0 + \mathcal{O}(|u|) \quad (3.19)$$

tal que  $H_0(u, f(u)) = 0$  en una vecindad de  $(0, v_0)$ , y así,

$$H_2(u, f(u), G(u, f(u))) = 0,$$

en una vecindad de  $(0, v_0, 0)$ . Por último, sustituyendo (3.19) en (3.18), obtenemos

$$\mu = g(u) = G(u, f(u)) = \Lambda(v_0)u^2 + \mathcal{O}(|u|^3). \quad (3.20)$$

Así, para cada  $\mu$  suficientemente pequeña con  $\mu\Lambda(v_0) > 0$ , existe una  $u < 0$ , tal que

$$P(u, f(u), g(u)) = (u, f(u))^T,$$

es decir, se ha resuelto (3.7) y encontramos un CLC asociado a  $v_0$ . Finalmente, para determinar la estabilidad de tal CLC, calculamos la matriz Jacobiana del mapeo (3.17) evaluada en el punto fijo, obteniendo

$$\begin{aligned} DP(u, f(u), g(u)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial u}(u, f(u), g(u)) & \frac{\partial P_1}{\partial v}(u, f(u), g(u)) \\ \frac{\partial P_2}{\partial u}(u, f(u), g(u)) & \frac{\partial P_2}{\partial v}(u, f(u), g(u)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 4\Lambda(v_0)u & 0 \\ 2u(K_2(v) + k\Upsilon(v_0)) & 1 + 2\Upsilon(v_0)u \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|u|^2), \end{aligned}$$

cuyos eigenvalores están dados por

$$\lambda = \begin{cases} 1 + 2\Upsilon(v_0)u + \mathcal{O}(|u|^2) \\ 1 + 4\Lambda(v_0)u + \mathcal{O}(|u|^2), \end{cases} \quad (3.21)$$

donde

$$\Upsilon(v) = \frac{d_6 r_2 - d_3 s_2}{(r_2 + d_3 v)^2} - \frac{\gamma_2 (c_6 r_1 - c_3 s_1)}{(\gamma_2 r_1 + c_3 v)^2}.$$

Así, por (3.21) y dado que  $u < 0$ , encontramos que

- i) si  $\Lambda(v_0) > 0$  y  $\Upsilon(v_0) > 0$  el CLC es un sumidero,
- ii) si  $\Lambda(v_0) < 0$  y  $\Upsilon(v_0) < 0$  el CLC es una fuente,
- iii) si  $\Lambda(v_0)\Upsilon(v_0) < 0$  el CLC es un ciclo tipo silla.

■

En este capítulo se estableció el teorema de la bifurcación pseudo-Hopf a partir de la colisión de las líneas de tangencia, formando un segmento de Teixeira. Los resultados nos permiten ver que es posible la aparición de hasta dos CLC y cada uno de éstos asociado a un pseudo-equilibrio sobre la región de deslizamiento. En el siguiente capítulo se muestran algunos escenarios en los que se presenta dicha bifurcación.

## Capítulo 4

### Aplicaciones de la bifurcación pseudo-Hopf

El objetivo de este capítulo es el de ejemplificar diversos escenarios, los cuales se fueron encontrando en distintas etapas de nuestra investigación, que ayuden a ilustrar el uso de los Teoremas (2.1) y (3.1), así como exhibir la relación que existe con investigaciones ya existentes, sobre todo con algunas aplicaciones dentro de la Teoría de Control.

#### 4.1. Ejemplo introductorio

La intención en este primer ejemplo es mostrar el desarrollo, paso a paso, de los cálculos necesario para probar las hipótesis de los Teoremas (2.1) y (3.1) en un escenario sencillo y ver la existencia de un CLC. Para esto, considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -\kappa \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

separado por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = x_2 - x_3 = 0\}$ . Comenzamos observando que  $c = (0, 1, -1)$  y se puede verificar que  $\{c, A_1^T c\}$  y  $\{c, A_2^T c\}$  son linealmente independientes, así que se cumple la hipótesis ( $H_1$ ). Después, al calcular la matriz de Teixeira y la matriz aumentada obtenemos

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & 6 \\ -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$T|b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -6 & 6 & -1 \\ -2 & 5 & -5 & -\kappa \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \kappa \end{pmatrix},$$

con lo que notamos que si  $\mu = \kappa - 2 \neq 0$ ,  $\text{Ran}(T) = 2$  y  $\text{Ran}(T|b) = 3$ , por lo que se satisface **(H<sub>2</sub>)**. Además, vemos que  $A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$  con  $\gamma_1 = 17$  y  $\gamma_2 = 2$ . En seguida, hallamos las rectas de tangencia, dadas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma \cap \pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 1\} \\ &= (1, s, s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \\ L_2 &= \Sigma \cap \pi_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = \mu + 2\} \\ &= (1 + \frac{\mu}{2}, s, s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

en su forma paramétrica y notamos que si  $\mu = 0$ , entonces,  $L_1 = L_2$ .

Ahora escogeremos los puntos de tangencia de estas rectas para posteriormente hallar el tipo de visibilidad que tendrán. Comenzamos generalizando el punto  $p_1$  de la forma  $(1, s, s)^T$  y encontraremos el punto más cercano a él, sobre  $L_2$ , haciendo  $p_2 = p_1 - \mu w_2$ . Recordemos que  $Q_2^{-1} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ , así, para obtener  $w_2$ , calculamos  $d = c \times A_1^T c = (0, 1, 1)^T$  y  $Q_2 = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \\ \gamma_2 d \end{pmatrix}$ , además de su inversa, obteniendo que  $w_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ , finalmente,  $p_2 = (1 + \frac{\mu}{2}, s, s)$ . Note que en este caso el punto  $p_2$  coincide con la forma paramétrica de  $L_2$ , sin embargo, esto no pasará siempre, como se verá en ejemplos posteriores. En seguida, tenemos que las visibilidades están dadas por

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1(1, s, s) + b_1) = 3 + s, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2(1 + \frac{\mu}{2}, s, s) + b_2) = 2(-5 + s), \end{aligned}$$

con lo que podemos ver que, si  $-3 < s < 5$ ,  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , tendremos singularidades de tangencia de tipo invisible. Específicamente, si  $s = 0$ , tenemos que  $r_1 = 3$  y  $r_2 = -10$ , cumpliendo así la hipótesis **(H<sub>3</sub>)**. Finalmente, aplicando el cambio de coordenadas (2.9), vemos que el intervalo  $I_T$  está dado por

$$I_T = \{y_3 \in \mathbb{R} : 6 + \frac{1}{2}y_3 > 0 \text{ y } -10 + \frac{1}{2}y_3 < 0\} = (-24, 20)$$

y  $V(v) = -22v$  tiene raíz  $v_0 = 0 \in I_T$ , con lo que se cumple **(H<sub>4</sub>)**. Así, dado que

$$\Lambda(v_0) = \frac{1}{6} \text{ y } \Upsilon(v_0) = \frac{4}{5},$$

para  $\mu = \kappa - 2 > 0$ , suficientemente pequeño, el sistema (4.1) tiene un CLC tipo sumidero alrededor de

$$\begin{aligned} x &= Q_2^{-1}(0, J_1, v_0)^T + p_1 = Q_2^{-1}(0, -\frac{3}{13}, 0)^T + (1, 0, 0)^T \\ &= (1 + \frac{3}{26}\mu, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

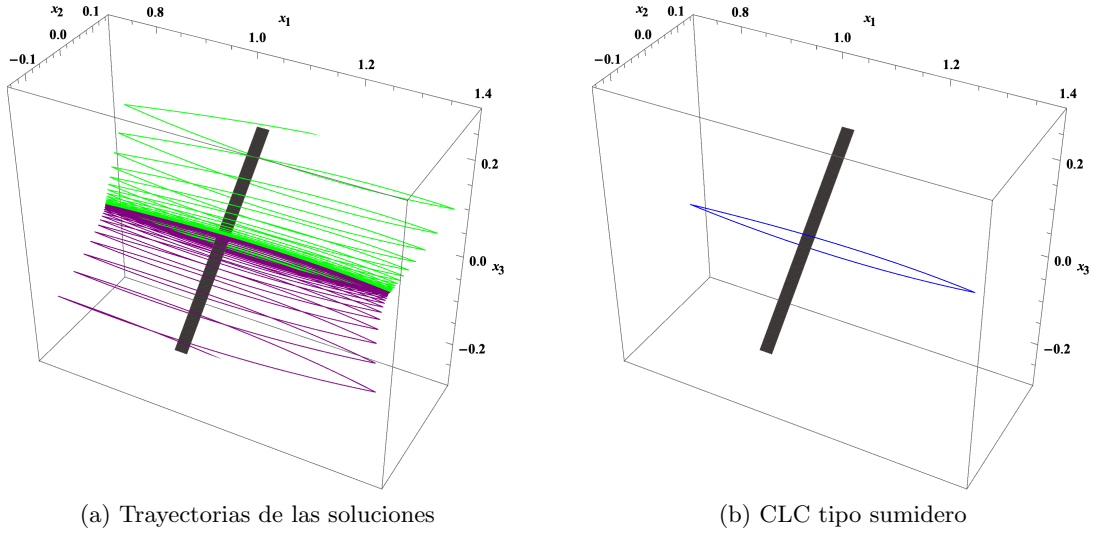


Figura 4.1: Simulaciones del sistema (4.1) para  $\mu = 0.05$ .

La Figura 4.1, muestra dicho CLC.

## 4.2. Aplicación a Sistemas de Control con Retroalimentación

En esta sección presentamos una aplicación de la bifurcación pseudo-Hopf a los Sistemas de Control con Retroalimentación; esto está basado en [12], donde, para dichos sistemas en tres dimensiones, de igual manera buscan la aparición de CLC pero guiándose en la existencia de una única singularidad de doble tangencia, es decir, buscan que la matriz de Teixeira sea de rango completo. Como ya sabemos, nuestro interés está en buscar CLC para Sistemas donde  $Ran(T) = 2$ .

Consideremos el sistema de control con retroalimentación de tres dimensiones con  $m$  entradas y  $p$  salidas ( $m, p \leq 3$ ), donde la parte lineal se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (4.2)$$

con  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times 3}$  y la acción de retroalimentación está dada por  $u = -\psi(z)$ , donde  $\psi : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$  se presenta como una función por pedazos de la forma

$$\psi = \begin{cases} H^-z + E^- & \text{si } \sigma(z) < 0, \\ H^+z + E^+ & \text{si } \sigma(z) > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

con  $H^\pm \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $E^\pm \in \mathbb{R}^m$  y  $\sigma : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$  es una función lineal definida por  $\sigma(z) = Sz + s_0$ ,

donde  $S \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  y  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad, asumiremos que  $S \neq 0$  y  $s_0 = 0$ . Así, el sistema resultante de (4.2) y (4.3) es

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + b_1 = (A - BH^-C)x - BE^-, & \text{si } SCx < 0, \\ A_2x + b_2 = (A - BH^+C)x - BE^+, & \text{si } SCx > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

y el plano de conmutación es  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : SCx = 0\}$ .

En [12], se analizaron tres casos principales: el caso con una entrada y una salida (SISO, por sus siglas en inglés), el caso con una entrada y múltiples salidas (SIMO) y el caso de múltiples entradas y salidas (MIMO). A continuación presentamos ejemplos en dos de los casos antes mencionados.

#### 4.2.1. Caso MIMO

Consideremos, como un primer ejemplo, un sistema MIMO descrito por las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, H^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} \kappa \\ -2 \end{pmatrix}, S = (0 \ 1),$$

con las cuales obtenemos el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ A_2x + b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 + \kappa \\ \kappa \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

separado por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = x_3 = 0\}$  y la acción de retroalimentación está dada por

$$u = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 1 \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ \begin{pmatrix} -\kappa \\ 2 \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Como podemos observar,  $c = SC = (0, 0, 1)$ , con lo cual se verifica que  $\{c, A_1^T c\}$  y  $\{c, A_2^T c\}$  son linealmente independientes y cumple con  $(H_1)$ . Después, al calcular la matriz de Teixeira y la matriz aumentada obtenemos



$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T|b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\kappa \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix},$$

con lo que notamos que, si  $\mu = \kappa \neq 0$ , se cumple **(H<sub>2</sub>)**. Además, vemos que  $A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$ , con  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_2 = 1$ . En seguida, hallamos las rectas de tangencia dadas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma \cap \pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= (s, -s, 0)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \\ L_2 &= \Sigma \cap \pi_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = -\mu\} \\ &= (s, -s - \mu, 0)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

en su forma paramétrica y notamos que si  $\mu = 0$  entonces  $L_1 = L_2$ . Para la visibilidad de los puntos sobre las rectas de tangencia, generalizamos el punto  $p_1 = (s, -s, 0)^T$  y buscamos el punto  $p_2 = p_1 - \mu u_2$ , obteniendo que  $p_2 = (s - \frac{\mu}{2}, -s - \frac{\mu}{2}, 0)^T$ . Notemos que aquí  $p_2$  no coincidió con la ecuación paramétrica de  $L_2$ , como se mencionó en el ejemplo anterior. Con lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1(s, -s, 0)^T + b_1) = 2, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2(s - \frac{\mu}{2}, -s - \frac{\mu}{2}, 0)^T + b_2) = -4 - s + \frac{1}{2}\mu, \end{aligned}$$

y así, para  $s < 4 - \frac{1}{2}\mu$ ,  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$  ya que  $\mu \approx 0$ . Específicamente, si hacemos  $s = 1$ , entonces,  $r_1 = 2$  y  $r_2 = -5 + \frac{1}{2}\mu$ , cumpliendo así **(H<sub>3</sub>)**. Finalmente, aplicando el cambio de coordenadas (2.9), vemos que el intervalo de  $I_T$  está dado por

$$I_T = \{y_3 \in \mathbb{R} : 2 > 0 \text{ y } -5 + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}y_3 < 0\} = (-\infty, 10 - \mu).$$

Además,  $V(v) = \frac{v^2}{4} + (-4 + \frac{\mu}{4})v + (7 + \frac{5}{2})$  es de segundo grado y tiene raíces  $v_{01} = 2 + \mu$  y  $v_{02} = 14 - 2\mu$ , pero notemos que sólo  $v_{01} \in I_T$  y con este valor se cumple **(H<sub>4</sub>)**. Así, dado que

$$\Lambda(v_{01}) \approx -\frac{11}{24} - \frac{\mu}{48} \quad \text{y} \quad \Upsilon(v_{01}) \approx \frac{3}{8},$$

para  $\mu = \kappa < 0$ , suficientemente pequeño, el sistema (4.5) tiene un CLC tipo silla alrededor de

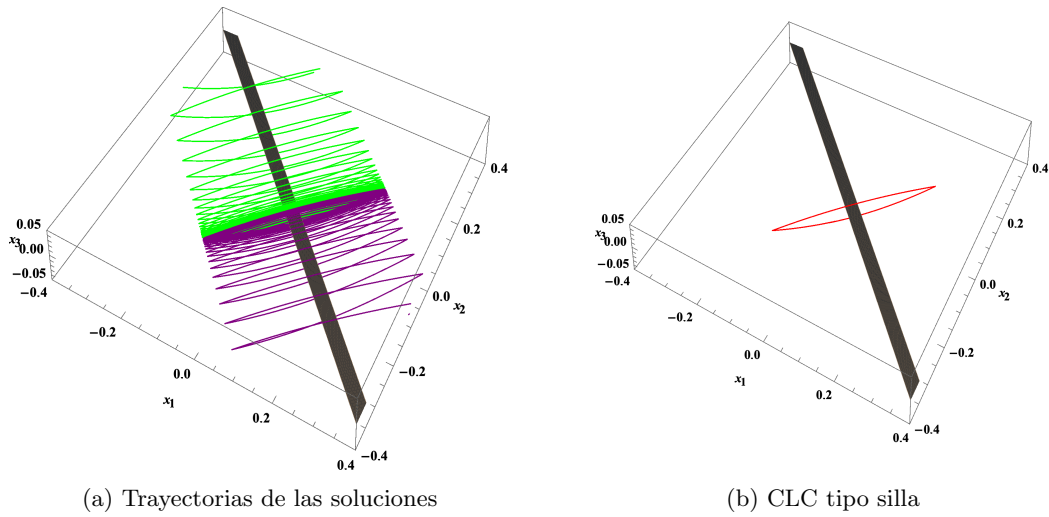


Figura 4.2: Simulaciones del sistema (4.5) para  $\mu = -0.05$

$$\begin{aligned}
 x &= Q_2^{-1}(0, J_1, v_0)^T + p_1 = Q_2^{-1}\left(0, -\frac{\mu}{4}, 2 + \mu\right)^T + (1, -1, 0) \\
 &= \left(-\frac{5}{8}\mu, \frac{3}{8}\mu, 0\right)^T.
 \end{aligned}$$

La Figura 4.2, muestra dicho CLC y la Figura 4.3 la acción de retroalimentación (4.6). Este ejemplo nos muestra que, aunque  $V(v)$  sea una ecuación de segundo grado, no necesariamente existirán dos CLC.

#### 4.2.2. Caso SISO

En segundo lugar, consideremos un sistema SISO. Este es el caso de mayor importancia para nosotros, ya que de manera natural se presentará nuestro escenario de trabajo.

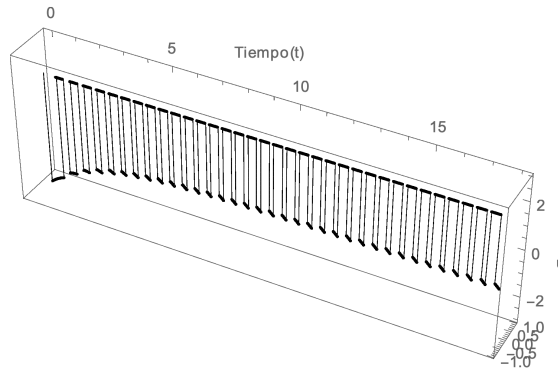


Figura 4.3: Acción de retroalimentación (4.6).

Considere el sistema (4.4). Si calculamos el determinante de la matriz de Teixeira asociado al sistema, obtenemos que

$$\begin{aligned} \det(T) &= SC \cdot (SC(A - BH^-C) \times SC(A - BH^+C)) \\ &= SC \cdot SCA \times (SCBH^-C - SCBH^+C). \end{aligned}$$

Ahora, dado que estamos en un caso SISO, tenemos que  $S$ ,  $H^\pm$  y  $CB$  son escalares, por lo tanto

$$\begin{aligned} \det(T) &= S^3CB(H^- - H^+)C \cdot (CA \times C) \\ &= S^3CB(H^- - H^+)CA \cdot (C \times C) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto nos muestra que en el escenario SISO será imposible encontrar una única singularidad de doble tangencia y lo más natural será que encontremos el escenario trabajado en esta tesis. Como se mencionó anteriormente, en [12], están interesados en buscar un CLC para el escenario con una única singularidad de doble tangencia, es por esto que no llegan a ningún resultado concluyente sobre los sistemas SISO, pero nuestro resultado sí podrá probar la existencia de CLC en este escenario, como se mostrará a continuación. Considere el sistema descrito por las matrices

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0 \quad 1) \\ H^- &= -1, \quad H^+ = 1, \quad E_1 = 1, \quad E_2 = -2, \quad S = 1, \end{aligned}$$

con las cuales obtenemos el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + b_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 + \kappa & -1 & -1 + \kappa \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ A_2x + b_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 - \kappa & -1 & 1 - \kappa \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2\kappa \end{pmatrix} & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

separado por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = x_1 + x_3 = 0\}$  y la acción de retroalimentación está dada por

$$u = \begin{cases} x_1 + x_3 - 1 & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ -x_1 - x_3 + 2 & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Como podemos observar,  $c = (1, 0, 1)$ , con lo cual se verifica que  $\{c, A_i^T c\}$  son linealmente independientes y así se cumple  $(H_1)$ . Después, al calcular la matriz de Teixeira y la matriz aumentada obtenemos que éstas corresponden a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 + \kappa & -1 & -1 + \kappa \\ -4 - \kappa & -1 & 1 - \kappa \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$T|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 + \kappa & -1 & -1 + \kappa & -1 + \kappa \\ -4 - \kappa & -1 & -1 + \kappa & -2 + 2\kappa \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 + \kappa \\ 0 & 0 & 0 & -3 + 3\kappa \end{pmatrix},$$

respectivamente. Con lo que notamos que si  $\mu = 3(1 - \kappa) \neq 0$  se cumple  $(\mathbf{H}_2)$ . Además, tenemos que  $A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$ , con  $\gamma_1 = 2(1 - \kappa)$  y  $\gamma_2 = 1$ . En seguida, hallamos las rectas de tangencia dadas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma \cap \pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (-5 - \frac{\mu}{3})x - y - \frac{\mu}{3}z = \frac{\mu}{3}\} \\ &= (s, -5s - \frac{\mu}{3}, -s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \Sigma \cap \pi_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (-5 + \frac{\mu}{3})x - y + \frac{\mu}{3}z = -\frac{2}{3}\mu\} \\ &= (s, -5s + \frac{2}{3}\mu, -s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

en su forma paramétrica y notamos que si  $\mu = 0$  entonces  $L_1 = L_2$ . Para la visibilidad de los puntos sobre las rectas de tangencia, generalizamos el punto  $p_1 = (s, -5s + \frac{\mu}{3}, -s)^T$  y buscamos el punto  $p_2 = p_1 - \mu u_2$ , obteniendo que  $p_2 = (s + \frac{5}{27}\mu, -5s - \frac{7}{27}\mu, -s - \frac{5}{27}\mu)^T$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A_1 (A_1 (ss, -5s - \frac{\mu}{3}, -s)^T + b_1) = 5 - \frac{\mu}{3}, \\ r_2 &= c^T A_2 (A_2 (s + \frac{5}{27}\mu, -5s - \frac{7}{27}\mu, -s - \frac{5}{27}\mu)^T + b_2) = -10 + \frac{2}{3}\mu, \end{aligned}$$

cumpliendo  $(\mathbf{H}_3)$  independientemente del valor de  $s$ , ya que  $\mu \approx 0$ . Escogiendo  $s = 0$  y aplicando el cambio de variables (2.9), podemos ver que en este caso  $c_3 = d_3 = 0$  y, como se mencionó en el Capítulo 2, cuando  $\mu = 0$ ,  $L_1$  y  $L_2$  colapsan en una línea de Teixeira, y así

$$I_T = \{y_3 \in \mathbb{R} : 5 - \frac{\mu}{3} > 0 \text{ y } -10 + \frac{2}{3}\mu < 0\} = \mathbb{R},$$

además  $V(v) = (5 + \frac{\mu}{3})(3v + 5\mu)$  tiene raíz  $v_0 = -\frac{5}{3}\mu \in I_T$ , con lo que se cumple  $(\mathbf{H}_4)$ . Así, dado que

$$\Lambda(v_0) = \frac{1}{10} + \frac{4}{225}\mu \text{ y } \Upsilon(v_0) = \frac{3}{10} + \frac{\mu}{50},$$

para  $\mu = 3(1 - \kappa) < 0$ , suficientemente pequeño, el sistema (4.7) tiene un CLC tipo sumidero alrededor de

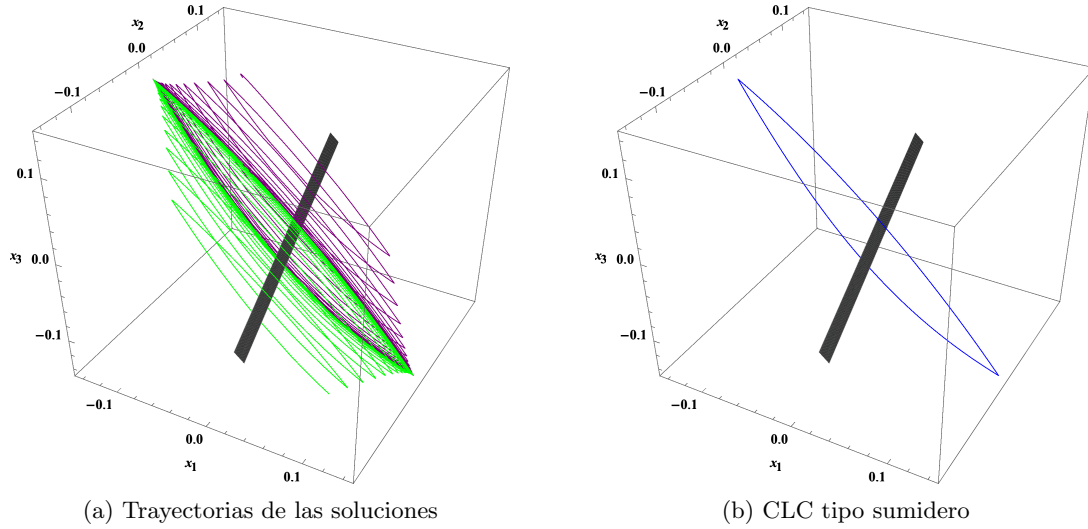


Figura 4.4: Simulaciones del sistema (4.7) para  $\mu = 0.05$

$$\begin{aligned}
 x &= Q_2^{-1}(0, J_1, v_0)^T + p_1 = Q_2^{-1}\left(0, -\frac{\mu}{3}, -\frac{5}{3}\mu\right)^T + \left(0, \frac{\mu}{3}, 0\right) \\
 &= \left(-\frac{2}{111}\mu, \frac{10}{111}\mu, \frac{2}{111}\mu\right)^T.
 \end{aligned}$$

La Figura 4.4 muestra dicho CLC y la Figura 4.5 muestra la acción de retroalimentación (4.8) . Con este ejemplo vemos la relevancia de nuestro teorema en los sistemas con retroalimentación, ya que, aunque en la literatura existente el escenario no genérico ya había aparecido, nadie había propuesto un resultado concluyente sobre éste.

### 4.3. Aplicación a convertidor de potencia DC-DC

En está sección se analiza un un SLF en 3 dimensiones que describe la dinámica de un convertidor de potencia DC-DC bajo un estrategia de control, el cual es presentado

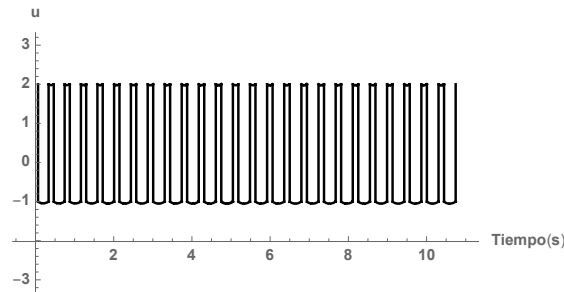


Figura 4.5: Acción de retroalimentación (4.8).

en [18]. Dicho sistema es de nuestro interés ya que exhibe una configuración con dos líneas de tangencia paralelas, similar a la mostrada en este trabajo, sin embargo, en dicho artículo no están interesados en la búsqueda de un CLC, sino que su objetivo es estudiar y clasificar las bifurcaciones de equilibrios fronteras (BEBs en inglés), y sus respectivos desdoblamientos, sobre la región de deslizamiento. El sistema es el siguiente:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + b_1, & \text{si } x_3 < 0, \\ Ax + b_2, & \text{si } x_3 > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -b & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 - b\kappa & w - a - \kappa & -w \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \kappa - wy_r \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -wy_r \end{pmatrix},$$

y  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 | \sigma(x) = x_3 = 0\}$ . De manera general,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  son, respectivamente, el inductor de corriente, el condensador de voltage y un nuevo estado que resulta de la aplicación del control. Los parámetros  $w, a, b, y_r$  son la frecuencia, la inversa de la resistencia, resistencia del inductor y el voltaje, respectivamente. Finalmente  $\kappa$  es el parámetro, que en el artículo antes mencionado usan para asegurar que la región de deslizamiento es siempre atractora ( $k > 0$ ); pero nosotros lo usaremos, además, para mover las líneas de tangencia y provocar un cambio de dicha estabilidad. Tomando los valores  $w = 1, a = \frac{1}{3}, b = 0.3, y_r = 0.81$ , obtenemos el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -0.3 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k - 0.81 \end{pmatrix}, & \text{si } x_3 < 0 \\ \begin{pmatrix} -0.3 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.81 \end{pmatrix}, & \text{si } x_3 > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

Se puede verificar que  $\{c, A^T c\}$  son linealmente independientes, cumpliendo la hipótesis ( $\mathbf{H}_1$ ). Además

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T|b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 & 0.81 - k \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 & 0.81 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 - 0.3k & \frac{2}{3} - k & -1 & 0.81 - k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

donde observamos que si  $\mu = -k \neq 0$ , entonces  $Ran(T) = 2$  y  $Ran(T|b) = 3$ , por lo que se cumple ( $\mathbf{H}_2$ ) y  $A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c$ , con  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_2 = 1$ . Las rectas de tangencia estarán dadas en su forma normal por

$$\begin{aligned}
L_1 &= \Sigma \cap \pi_1 \\
&= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (1 + 0.3\mu)x + (\frac{2}{3} + \mu)y - z = 0.81 + \mu\} \\
&= (s, 1.21 - 0.32\mu + s(-1.5 + 1.8\mu), 0)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \\
L_2 &= \Sigma \cap \pi_2 \\
&= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (1 + 0.3\mu)x + (\frac{2}{3} + \mu)y - z = 0.81\} \\
&= (s, 1.21 - 1.82\mu + s(-1.5 + 1.8\mu), 0)^T \text{ para } s \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

notando que si  $\mu = 0$  entonces  $L_1 = L_2$ . Para la visibilidad de los puntos sobre las rectas de tangencia hacemos  $p_1 = (s, 1.21 - 0.32\mu + s(-1.5 + 1.8\mu), 0)^T$  y hallamos el punto  $p_2 = p_1 - \mu u_2 = (s - 0.69\mu, 1.21 - 0.78\mu + s(-1.5 + 1.8\mu), 0)^T$ . Así tenemos que

$$\begin{aligned}
r_1 &= c^T A(A(p_1) + b_1) = -0.48 - 0.07\mu + (2.2 - 0.34\mu)s, \\
r_2 &= c^T A(A(p_2) + b_2) = -1.48 - 0.06\mu + (2.2 - 0.34\mu)s,
\end{aligned}$$

con lo que tenemos que  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$  si  $0.22 + 0.68\mu < s < 0.67 + 0.13\mu$ , ya que  $\mu \approx 0$ . Tomando  $s = 0.5$ ,  $r_1 = 0.61 - 0.24\mu$  y  $r_2 = -0.38 - 0.23\mu$ , se cumple  $(\mathbf{H}_3)$ . Finalmente, aplicando el cambio de coordenadas (2.9), vemos que el intervalo  $I_T$  está dado por

$$\begin{aligned}
I_T &= \{y_3 \in \mathbb{R} : 0.61 - 0.24\mu - 1.01y_3 > 0 \text{ y } -0.38 - 0.23\mu + (-0.32 + 0.01\mu)y_3 < 0\} \\
&= (-0.37 - 0.22\mu, 0.6 - 0.24\mu).
\end{aligned}$$

Además,  $V(v) = 0.49 - 0.24\mu - v$  tiene raíz  $v_0 = 0.49 - 0.24\mu \in I_T$ , con lo que se cumple  $(\mathbf{H}_4)$ . Así, dado que

$$\Lambda(v_0) = 2.17 - 0.01\mu \quad \text{y} \quad \Upsilon(v_0) = 10.29 + 0.21\mu,$$

para  $\mu > 0$ , suficientemente pequeño, el sistema (4.10) tiene un CLC tipo sumidero alrededor de

$$\begin{aligned}
x &= Q_2^{-1}(0, J_1\mu, v_0)^T + p_1 = Q_2^{-1}(0, -0.61\mu, 0.49 - 0.24\mu)^T + (0.5, 0.46 - 0.92\mu, 0) \\
&= (0.27 - 0.35\mu, 0.79 - 1.72\mu, 0)^T.
\end{aligned}$$

La Figura 4.6, muestra dicho CLC.

#### 4.4. Aplicación a Sistemas de Control con Modos Deslizantes

La idea básica del control por modos deslizantes consiste en llevar trayectorias del sistema sobre una variedad de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ellas. Así,

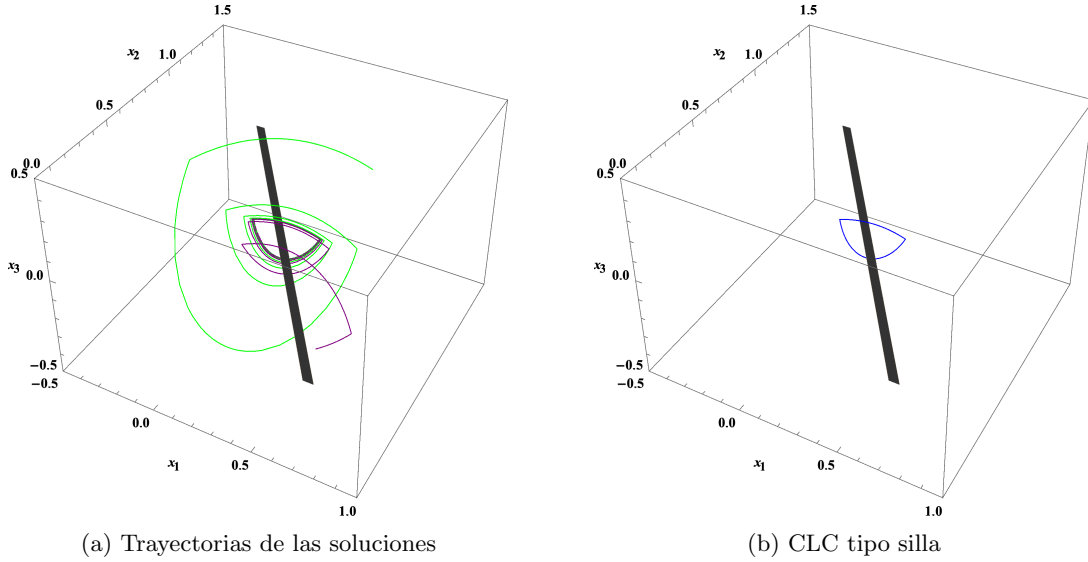


Figura 4.6: Simulaciones del sistema (4.10) para  $\mu = 0.05$

la dinámica del sistema quedará determinado por las ecuaciones que se definan sobre dicha variedad. De este modo, plasmando los objetivos de control en tales ecuaciones mediante un diseño adecuado de las mismas, es posible estabilizar el sistema. En este ejemplo queremos usar nuestros resultados como otra herramienta de estabilización de sistemas, la cual propone una mejora al control por modos deslizantes, en el escenario que hemos estudiado en esta tesis. Para mostrar lo anterior, consideremos el sistema de control lineal

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}(x), \quad (4.11)$$

el cual se asumirá controlable, donde  $x \in \mathbb{R}^3$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

recordando que cualquier sistema controlable puede tener esa representación (Teorema A.7). La ley de control por modos deslizantes más sencilla que puede plantearse, con la idea de que las trayectorias se deslicen sobre una variedad de conmutación  $\sigma(x)$ , consiste en alternar los valores de  $\bar{u}$  entre dos valores posibles, según el signo de  $\sigma(x)$ :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \bar{u}^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ \bar{u}^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases}$$

donde  $\bar{u}^-(x)$  y  $\bar{u}^+(x)$  son funciones suaves de  $x$ . Este tipo de control se le conoce como modo deslizante de primer orden. En particular, consideraremos un control  $\bar{u}$  de la forma



$$\bar{u} = \begin{cases} \bar{u}_1 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ \bar{u}_2 & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

con  $\sigma(x) = c^T x - c_0$  y  $c = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ . Así, nuestra meta es de diseñar una entrada de control y encontrar un modo deslizante  $\sigma(x) = 0$ , además de los puntos  $x_0$  tales que  $\sigma(x_0) = 0$ , donde el sistema pueda estabilizarse. Para dicho propósito, veamos que la ley de control (4.12), transforma el sistema (4.11) en el sistema Filippov

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = Ax + b\bar{u}_1 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ f^-(x) = Ax + b\bar{u}_2 & \text{si } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Al calcular la matriz de Teixeira y la matriz aumentada obtenemos que

$$T = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T|b = \begin{pmatrix} c^T & c_0 \\ c^T A & -c^T b_1 \\ c^T A & -c^T b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & c_0 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 & -\bar{c}_3 \bar{u}_1 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 & -\bar{c}_3 \bar{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & c_0 \\ \bar{c}_3 a_1 & \bar{c}_1 + \bar{c}_3 a_2 & \bar{c}_2 + \bar{c}_3 a_3 & -\bar{c}_3 \bar{u}_1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_3(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \end{pmatrix},$$

donde observamos que si  $\{c, A^T c\}$  son linealmente independientes y  $\mu = \bar{c}_3(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \neq 0$ ,  $Ran(T) = 2$  y  $Ran(T|b) = 3$ , por lo que se cumplirían las hipótesis  $(H_1)$  y  $(H_2)$ , además de que  $A^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A^T c$ , con  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_2 = 1$ . Así, por el Lema 2.1, existen dos rectas paralelas,  $L_1 = \Sigma_1 \cap \pi_1$  y  $L_2 = \Sigma \cap \pi_2$ , las cuales delimitan la región de deslizamiento sobre  $\Sigma$ . Más aún, notemos que la dinámica sobre dicha región de deslizamiento está dada por

$$\dot{x} = f_s(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\frac{\bar{c}_1 x_2 + \bar{c}_2 x_3}{\bar{c}_3} \end{pmatrix},$$

la cual, por el Corolario 2.1, será deslizamiento atractor si  $\mu < 0$ , y deslizamiento repulsor si  $\mu > 0$ . Además, vemos que existirá un pseudo-equilibrio dado por  $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{\bar{c}_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Después, suponiendo que  $\mu < 0$ , podemos ver que  $x_0 \in \Sigma_{as}$  si y sólo si se satisfacen las igualdades

$$c^T f^-(x_0) = (\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3) \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c_0}{\bar{c}_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix} \right] = \bar{c}_3 \left( \frac{a_1 c_0}{\bar{c}_1} + \bar{u}_1 \right) > 0$$

y

$$e^T f^-(x_0) = (\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3) \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c_0}{\bar{c}_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} \right] = \bar{c}_3 \left( \frac{a_1 c_0}{\bar{c}_1} + \bar{u}_2 \right) < 0;$$

es decir,  $x_0 \in \Sigma_{as}$  si y sólo si

$$\text{para } \bar{c}_3 > 0: \quad \bar{u}_2 < -\frac{a_1 c_0}{\bar{c}_1} < \bar{u}_1, \quad (4.14)$$

$$\text{para } \bar{c}_3 < 0: \quad \bar{u}_1 < -\frac{a_1 c_0}{\bar{c}_1} < \bar{u}_2. \quad (4.15)$$

Ahora, si definimos  $\bar{z} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , entonces tenemos que la dinámica deslizante está dada por

$$\dot{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_3} & -\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_3} \end{pmatrix} \bar{z},$$

y su polinomio característico es  $j(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_3} \lambda + \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_3}$ . Con todo lo anterior, se puede afirmar que para cada

$$x_0 \in L = \{ (s, 0, 0) \mid s \in \mathbb{R} \},$$

es posible diseñar un control de la forma (4.12) y un modo deslizante  $\sigma(x) = 0$ , tal que  $\sigma(x_0) = 0$ , de tal forma que  $x_0$  sea un pseudo-equilibrio localmente estable. Para verificar esto, consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el control dado por

$$\bar{u} = \begin{cases} 2 & \text{si } \sigma(x) < 0, \\ -1 & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

con los cuales obtenemos el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{si } \sigma(x) > 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

separado por el plano de conmutación  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sigma(x) = c^T x - 1 = 0\}$ , con  $c = (1, 1, \bar{c}_3)$ . En seguida, hallamos las rectas de tangencia dadas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma \cap \pi_1 \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \bar{c}_3 x_3 = 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (-\bar{c}_3 x + (1 + \frac{7}{2}\bar{c}_3)y + (1 - \frac{7}{2}\bar{c}_3)z = -2\bar{c}_3 \\ &= (-\frac{2 + 3\bar{c}_3}{2 + 9\bar{c}_3} - \frac{-2 + 9\bar{c}_3 + 7\bar{c}_3^2}{2 + 9\bar{c}_3}s, -\frac{6\bar{c}_3}{2 + 9\bar{c}_3} - \frac{-2 - 7\bar{c}_3 + 2\bar{c}_3^2}{2 + 9\bar{c}_3}s, s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \Sigma \cap \pi_2 \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \bar{c}_3 x_3 = 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : (-\bar{c}_3 x + (1 + \frac{7}{2}\bar{c}_3)y + (1 - \frac{7}{2}\bar{c}_3)z = \bar{c}_3 \\ &= (-1 - \frac{-2 + 9\bar{c}_3 + 7\bar{c}_3^2}{2 + 9\bar{c}_3}s, -\frac{6\bar{c}_3}{2 + 9\bar{c}_3} - \frac{-2 + 7\bar{c}_3 - 2\bar{c}_3^2}{2 + 9\bar{c}_3}s, s)^T \text{ para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

en su forma paramétrica y notamos que si  $\bar{c}_3 > 0$ , entonces  $\mu < 0$  y, por lo tanto, la región de deslizamiento es atractora, Además de que, al ser  $-\frac{a_1 c_0}{c_1} = 1$ , se cumple (4.14) y así  $x_0 = \frac{c_0}{c_1} = 1 \in \Sigma_{as}$ . Finalmente, notemos que el polinomio característico de la dinámica deslizante es  $j(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{\bar{c}_3}\lambda + \frac{1}{\bar{c}_3}$ , cuyos valores propios están dados por

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{c}_3}}{2\bar{c}_3}, \quad (4.18)$$

donde notamos que para cualquier  $\bar{c}_3 > 0$  los valores propios tendrán parte real negativa y, por lo tanto,  $x_0$  en un pseudo-equilibrio localmente estable. La Figura 4.7, muestra que  $x_0$  es un foco localmente estable para  $\bar{c}_3 = 2$ .

Por otro lado, sabemos, teóricamente, que para una frecuencia alta sobre la conmutación, idealmente infinita, las soluciones se deslizarán sobre la región deslizante, pero que en la práctica no se puede llegar a estas frecuencias y se producirá el fenómeno conocido como cascabeleo. Una forma simple para reducir dicho fenómeno sería hacer  $\bar{c}_3 \approx 0$ . Esto provocaría, dado que  $\mu = \bar{c}_3(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$ , que la franja de deslizamiento se haga cada vez más angosta, reduciendo el tiempo de cascabeleo sobre la variedad de conmutación, pero no eliminándolo del todo.

Entre varios métodos que existen con la idea de eliminar o reducir el cascabeleo, se pueden mencionar los modos deslizantes de orden superior. La idea de estos métodos consiste en restringir el movimiento a la superficie de conmutación manteniendo alguna cantidad de sus primeras derivadas nulas. El orden del modo deslizante define el grado de suavidad de la dinámica del sistema en las proximidades de la región de deslizamiento. Más concretamente, un control por modos deslizantes es de orden  $r$  si

- (i)  $\sigma, \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  son continuas,
- (ii)  $\sigma^{(r)}$  es discontinua,
- (iii) se verifica que  $\sigma = \sigma^{(1)} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ .

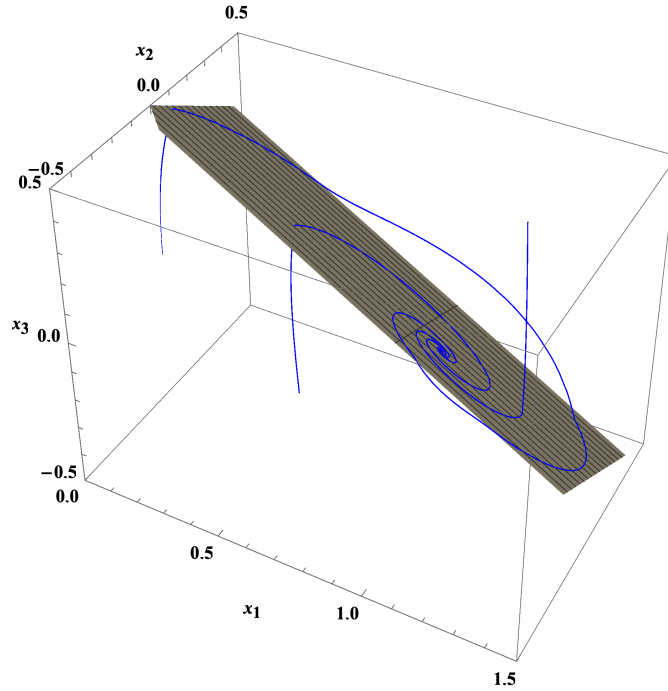


Figura 4.7: Simulación del sistema (4.17) para  $\bar{c}_3 = 2$ .

Con esto podemos ver que el control (4.12) es de primer orden, ya que su primera derivada es discontinua. Particularmente, en el caso de modos deslizantes de orden dos ( $\sigma = \sigma^{(1)} = 0$ ) se tienen varios algoritmos muy conocidos en la practica, como son

- Controlador twisting,
- Controlador súper-twisting,
- Diferenciador de primer orden,

por mencionar algunas. Como ya se mencionó, nuestra intención es la de proponer otro método de estabilización con base en el Teorema (3.1), evitando que las soluciones vayan a la región de deslizamiento y así eliminar por completo el cascabeleo. La idea ahora será diseñar un modo deslizante de tal manera que las hipótesis  $(H_3)$  y  $(H_4)$  se satisfagan después de que las líneas de tangencia colapsen en  $L_1 = L_2 = L_0$  cuando  $\bar{c}_3 = 0$  ( $\mu = -3\bar{c}_3 = 0$ ), y, por lo tanto, el sistema de control oscile, localmente, alrededor del pseudo-equilibrio  $x_0$ , el cual ahora será inestable y pertenecerá a la region de deslizamiento repulsor, es decir  $x_0 \in \Sigma_{rs}$ . Para tal motivo, primero notemos que las matrices  $Q_1 = Q_2 = Q = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ d^T \end{pmatrix}$ , y  $Q^{-1} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ . A continuación, escogeremos como  $p_1$  y  $p_2$  a los puntos sobre  $L_1$  y  $L_2$  más cercanos a  $x_0$ , respectivamente. Dichos puntos están dados por

$$p_1 = x_0 - c^T f^-(x_0)w_2 \quad y \quad p_2 = x_0 - c^T f^+(x_0)w_2 \quad (4.19)$$

y para que satisfagan ( $\mathbf{H}_3$ ) deberán satisfacer la hipótesis

$$\begin{aligned} r_1 &= k^T A f^-(p_1) = k^T A f^-(x_0) - k^T f^-(x_0)k^T A^2 w_2 > 0, \\ r_2 &= k^T A f^+(p_2) = k^T A f^+(x_0) - k^T f^+(x_0)k^T A^2 w_2 < 0. \end{aligned}$$

Para ejemplificar lo anterior, retomemos el sistema (4.17). Como se mencionó, habrá que calcular  $Q$ ,  $Q^{-1}$  y  $w_2$ , con los cuales, por (4.19), se obtienen

$$p_1 = \left(1 - \frac{\mu}{9}, \frac{\mu}{9}, \frac{2}{9}\right)^T \quad y \quad p_2 = \left(1 + \frac{2}{9}\mu, -\frac{2}{9}\mu, -\frac{4}{9}\mu\right)^T,$$

cuyas visibilidades están dadas por

$$\begin{aligned} r_1 &= c^T A \left(A \left(1 - \frac{\mu}{9}, \frac{\mu}{9}, \frac{2}{9}\right) + b_1\right) = 1 + \frac{7}{6}\mu, \\ r_2 &= c^T A \left(A \left(1 + \frac{2}{9}\mu, -\frac{2}{9}\mu, -\frac{4}{9}\mu\right) + b_2\right) = -2 - \frac{7}{3}\mu, \end{aligned}$$

. De esta forma se satisface la hipótesis ( $\mathbf{H}_3$ ). Posteriormente, aplicamos el cambio de coordenadas (2.9) obteniendo que el intervalo  $I_T$  está dado por

$$\begin{aligned} I_T &= \{y_3 \in \mathbb{R} : 1 + \frac{7}{6}\mu + \left(-\frac{7}{3} - \frac{65}{27}\mu\right)y_3 > 0 \quad y \quad -2 - \frac{7}{3}\mu + \left(-\frac{7}{3} - \frac{65}{27}\mu\right)y_3 < 0\} \\ &= \left(-\frac{6}{7} - \frac{10}{147}\mu, \frac{3}{7} + \frac{5}{147}\mu\right). \end{aligned}$$

Además,  $V(v) = -3v$  tiene raíz  $v_0 = 0 \in I_T$ , con lo que se cumple ( $\mathbf{H}_4$ ). Así, dado que

$$\Lambda(v_0) = \frac{5}{4} - \frac{5}{6}\mu \quad y \quad \Upsilon(v_0) = \frac{3}{2} - \frac{10}{3}\mu,$$

para  $\mu > 0$ , suficientemente pequeño, obtenemos que el sistema (4.10) posee un CLC tipo fuente alrededor del punto

$$x = Q_2^{-1}(0, J_1, v_0)^T + p_1 = Q_2^{-1}(0, -\frac{\mu}{3}, 0)^T + p_1 = (1, 0, 0)^T$$

La Figura 4.8, muestra dicho CLC y el pseudo-equilibrio  $x_0$ , el cual, al ser  $\mu > 0$  ( $\bar{c}_3 < 0$ ), resulta inestable de tipo fuente por (4.18). La Figura 4.9 muestra la señal de control (4.16).

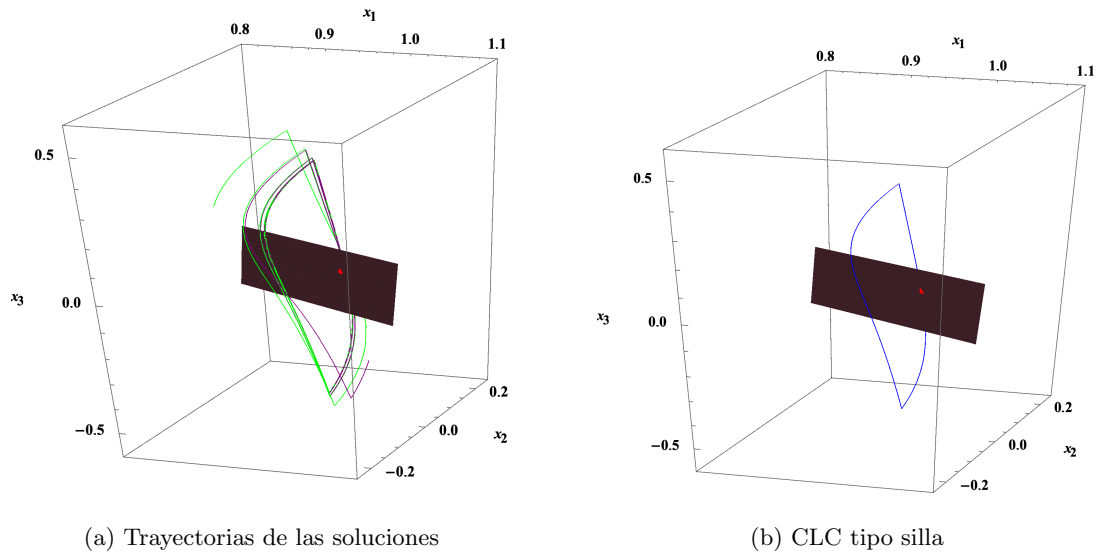


Figura 4.8: Simulaciones del sistema (4.17) para  $\mu = 0.1$

## 4.5. Ejemplo con dos CLC

Consideremos el sistema

$$\dot{y} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mu \\ -1 + \delta\mu \\ -2 \end{pmatrix} & \text{si } y_1 > 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

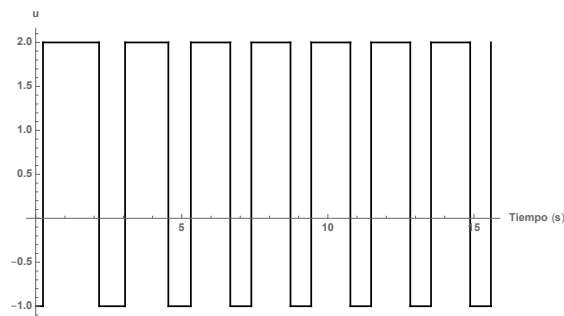


Figura 4.9: Señal de control (4.16).

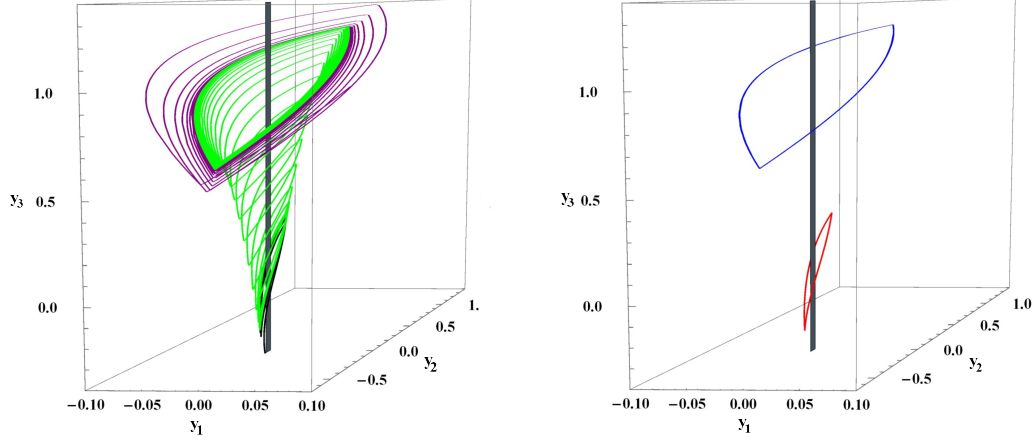


Figura 4.10: Simulación de (4.20), para  $\mu = -0.05$  y  $\delta = 5$ . Izquierda: la evolución de las soluciones. Derecha: dos CLCs, uno tipo sumidero (en la parte superior) y uno tipo silla (en la parte inferior).

Como podemos notar, (4.20) está dado en la forma normal (2.10). Observemos que  $r_1 = 2 > 0$  y  $r_2 = -1 < 0$ , por lo tanto se cumple la hipótesis ( $\mathbf{H}_3$ ). También, vemos que el intervalo  $I_T$  está dado por

$$I_T = \{y_3 \in \mathbb{R}^3 : 2 + 3y_3 > 0, \quad y_3 - 1 - 4y_3 < 0\} = \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$$

y  $V(v) = 8v(1 - v)$  tiene raíces  $v_{01} = 0$  y  $v_{02} = 1$ , ambas contenidas en  $I_T$ , y son tales que  $V'(v_{01})$  y  $V'(v_{02})$  no se anulan, pues  $V'(v) = 8 - 16v$ ; y por lo tanto se cumple la hipótesis ( $\mathbf{H}_4$ ). Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda(v_{01}) &= 1 - \frac{\delta}{2} & \text{y} & & \Lambda(v_{02}) &= -\frac{1}{75}(18 + 5\delta) \\ \Upsilon(v_{01}) &= -4 & & & \Upsilon(v_{02}) &= \frac{8}{25}. \end{aligned}$$

Así, si  $\delta < -\frac{18}{5}$  y  $\mu > 0$ , existe un CLC tipo silla asociado a  $v_{01} = 0$  y un CLC tipo sumidero asociado a  $v_{02} = 1$ . En cambio, si  $\delta > 2$  y  $\mu < 0$ , existe un CLC tipo fuente asociado a  $v_{01} = 0$  y un CLC tipo silla asociado a  $v_{02} = 1$ . En la Figura (4.10) podemos ver un ejemplo del primer escenario, con  $\delta = -5$  y  $\mu = 0.05$ . Podemos ver que existe un CLC tipo silla alrededor de  $y_3 = 0$  y un CLC tipo sumidero alrededor de  $y_3 = 1$ .

Por otro lado, en la Figura (4.11) se muestra un ejemplo del segundo escenario, para los valores  $\delta = 5$  y  $\mu = -0.05$ , el cual tiene un CLC tipo fuente alrededor de  $y_3 = 0$  y un CLC tipo silla alrededor de  $y_3 = 1$ .

La existencia de dos ciclos límite de cruce lleva a cuestionarse si es posible que los dos

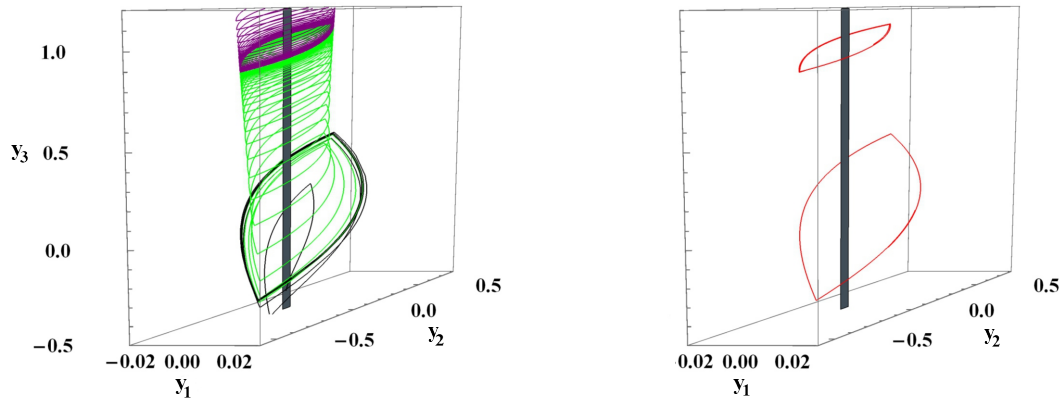


Figura 4.11: Simulación de (4.20), para  $\mu = 0.05$  y  $\delta = -5$ . Izquierda: la evolución de la soluciones. Derecha: dos CLCs, uno tipo silla (en la parte superior) y uno tipo fuente (en la parte inferior).

ciclos puedan llegar a colapsar en uno sólo y así dar lugar a una bifurcación silla-nodo para CLC, aunque lo anterior es problema que no abordaremos en esta tesis.

En este capítulo se ejemplificó el resultado de la bifurcación pseudo-Hopf en tres dimensiones. También se trató de mostrar la relación que tiene con los sistemas de control a partir del trabajo existente en la literatura, completando los análisis hechos en [12, 19]. Además, se ejemplificó un resultado particular, y muy interesante, que es el del nacimiento de dos CLC, el cual nos marca la pauta para futuros trabajos de investigación.



## Capítulo 5

### Conclusiones

Esta tesis estuvo enfocada en el surgimiento de la bifurcación pseudo-Hopf en tres dimensiones, en el escenario donde existen dos líneas de tangencia paralelas sobre un plano de conmutación, las cuales delimitan una región de deslizamiento. En primer lugar establecimos las condiciones para que se llevará a cabo este caso no genérico, el cual fue que la matriz de Teixeira sea de rango dos y la matriz aumentada de rango completo. Además, dado que la matriz de Teixeira es de rango dos, se puede establecer una dependencia lineal, en la que estará involucrada la constante  $\gamma_2$ , la cual juega un papel importante, ya que para asegurar que la región entre las líneas de tangencia sea de deslizamiento, tendrá que ser mayor que cero ( $\gamma_2 > 0$ ).

Con lo anterior se logró construir una forma normal adecuada, para la familia descrita, la cual depende de un parámetro  $\mu$  que nos proporcionará dos propiedades importantes: en primer lugar, caracterizará la estabilidad de la región de deslizamiento, si  $\mu < 0$  será deslizamiento atractor y si  $\mu > 0$  será deslizamiento repulsor; en segundo lugar, nos permite manipular la posición de las líneas de tangencia, de tal manera de que cuando  $\mu = 0$ , éstas colapsan en una línea de doble tangencia.

A partir de esta forma normal, se establecieron condiciones para que cuando las líneas colapsan en una línea de doble tangencia, ésta contenga un segmento de singularidades de doble tangencia invisible (segmento de Teixeira). Al existir dicho segmento, aseguramos que las soluciones, localmente, crucen el plano de conmutación de manera repetida, lo cual nos permitió definir el mapeo de Poincaré a partir de la composición de dichas soluciones. Así, pudimos encontrar órbitas periódicas en el sistema con los puntos fijos del mapeo de Poincaré, siempre y cuando dichos puntos pertenezcan al intervalo de Teixeira. Esto último, también nos muestra que cada órbita periódica que encontremos estará asociado a un pseudo-equilibrio sobre la región de deslizamiento. Más aún, un resultado de relevancia de nuestro trabajo, es que es posible encontrar el nacimiento de hasta dos CLC, a partir de la bifurcación pseudo-Hopf.

Por último, verificamos la relevancia de nuestro resultado con base en los trabajos de *Colombo et. al.* y *Cristiano et. al.* ([12] y [19], respectivamente). En el primero completamos el análisis hecho por los autores, ya que no presentaron resultados concluyentes en el escenario que se trabajó en esta tesis, mientras que para el segundo trabajo propusimos un nuevo fenómeno de bifurcación distinto a los que ellos trabajan.

## Trabajo a futuro

- Establecer condiciones para que se lleve a cabo la bifurcación silla-nodo en el escenario con dos Ciclos Límite de Cruce.
- Analizar si existe equivalencia topológica entre las regiones deslizantes de los sistemas originales y la forma normal (2.10) para el estudio de las BEB's.
- Estudiar la posible existencia de órbitas homoclínicas y heteroclínicas así como la generación de atractores extraños en nuestro escenario.
- Generalizar la bifurcación pseudo-Hopf a  $n$  dimensiones.
- Demostrar la aparición de Ciclos Límite Deslizantes en 2, 3 y  $n$  dimensiones.

## Eventos

- Conferencia “La bifurcación pseudo-Hopf y bifurcaciones asociadas en sistemas Filippov lineales en 3D. El caso degenerado.”, 11º Taller de Sistemas Dinámicos y Control, de la 30ª Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Universidad de Sonora (marzo 2020).
- Poster “Bifurcación pseudo-Hopf en una clase de Sistemas Filippov de dimensión tres.”, 52º Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, Universidad Autónoma de Nuevo León (octubre 2019).
- Conferencia “La bifurcación pseudo-Hopf para sistemas lineales por pedazos en tres dimensiones.”, 10º Taller de Sistemas Dinámicos y Control, de la 29ª Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Universidad de Sonora (marzo 2019) .
- Poster “The pseudo-Hopf Bifurcation in a class of 3D Filippov Systems.”, International Conference on Advances in Nonsmooth Dynamical Systems, Bristol, Reino Unido (junio 2018).
- Conferencia “Ciclos límite de cruce en sistemas lineales tridimensionales por pedazos. Un caso de estudio.”, 9º Taller de Sistemas Dinámicos y Control, de la 28ª Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Universidad de Sonora (marzo 2018).

## Artículo de investigación

- Islas, J.M., Castillo, J., Aguirre-Hernández, B. & Verduzco, F. [2021] “Pseudo-Hopf bifurcation for a class of 3D Filippov linear systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, pp 2150025. DOI: 10.1142/S0218127421500255.

# Apéndice A

## Resultados Básicos

En este apéndice queremos presentar algunos teoremas básicos que son de suma importancia para el desarrollo de esta investigación. Comenzamos con un resultado básico de Álgebra Lineal que describe las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y nos ayudó a definir cuando existe una singularidad de doble tangencia.

**Teorema A.1.** (Teorema de Rouché-Frobenius, [55].)

Sea el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Entonces, tenemos que el sistema es

- Compatible determinado si  $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A|b) = n$ ,
- Compatible indeterminado si  $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A|b) < n$ ,
- Incompatible si  $\text{Ran}(A) \neq \text{Ran}(A|b)$ ,

donde  $A|b$  representa la matriz aumentada del sistema.

En seguida, mencionamos dos teoremas fundamentales tanto para este trabajo, en la demostración del Teorema 3.1, como para el Cálculo en general.

**Teorema A.2.** (Teorema de Taylor, [33].)

Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que pertenece a la clase  $C^{n+1}$  sobre un conjunto abierto  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in M$ , entonces para cualquier  $\mathbf{x} = (x, y) \in M$ , distinto de  $\mathbf{x}_0$  y tal que el segmento que une  $\mathbf{x}$  con  $x_0$  está contenido en  $M$ ,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(\mathbf{x}_0) + R_n,$$

donde  $R_n$  es llamado el residuo y está dado por

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(\mathbf{c}).$$

para algún  $\mathbf{c}$  que esté contenido en el segmento que une  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema A.3.** (Teorema de la función Implícita, [49].)

Supongamos que  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $(\mathbf{x}, z)$ , donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $z \in \mathbb{R}$ , y suponemos que existe  $(\mathbf{x}_0, z_0)$  tal que

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces existe una vecindad de  $\mathbf{x}_0, z_0$ ,  $V(\mathbf{x}_0, z_0)$ , en  $\mathbb{R}^n$  donde hay una única función  $z = g(\mathbf{x})$  que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Más aún,  $z = g(\mathbf{x})$  es continuamente diferenciable con

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ahora, presentamos un resultado importante en la teoría de ecuaciones diferenciales y que de igual manera resultó crucial en la demostración del Teorema 3.1. Todo lo siguiente está basado en [52] y se pueden buscar ahí las demostraciones.

**Definición A.1.** (Matriz Exponencial)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ . Entonces decimos que  $e^{At}$  es la matriz exponencial de  $A$ , definida como

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema A.4.** (Teorema Fundamental para Sistemas Lineales)

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ . Entonces, para  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

tiene una única solución dada por

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

**Definición A.2.** (Solución Fundamental)

Una solución fundamental de

$$\dot{x} = Ax, \tag{A.1}$$

es cualquier función  $\Phi(t)$  que satisface

$$\Phi'(t) = A\Phi(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema A.5.** (Solución de Sistemas no Homogéneos)

Si  $\Phi(t)$  es una solución fundamental de (A.1), entonces la solución del sistema lineal no homogéneo

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad (\text{A.2})$$

con condición inicial  $x(0) = x_0$  está dada por

$$x(t) = \Phi(t) \left( \Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \right).$$

**Corolario A.1.** Por el Teorema A.4,  $e^{At}$  es solución fundamental de (A.1). Así, haciendo,  $\Phi(t) = e^{At}$ , la solución del sistema lineal no homogéneo (A.2), tiene la forma

$$x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_0^t e^{-As}b(s)ds \right).$$

Finalmente, hacemos hincapié en algunos resultados dentro de la Teoría de Control que se utilizaron en el Capítulo 4, específicamente en el ejemplo 4.4.

**Definición A.3.** (Sistema Controlable, [11])

Consideremos el sistema de control, de entrada escalar,

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que el sistema (A.3) es controlable si para cada estado inicial  $x(0) = x_0$  y cada estado final  $x_1$ , existe una entrada que transfiere  $x_0$  a  $x_1$  en un tiempo finito. De cualquier otra manera decimos que el sistema (A.3) no es controlable.

**Teorema A.6.** (Sistema Completamente Controlable, [11])

El sistema (A.3) es completamente controlable si y sólo si la Matriz de Controlabilidad

$$C = (b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b)$$

es de rango completo.

**Teorema A.7.** (Forma Canónica Controlable, [8])

Consideremos el sistema (A.3) y supongamos que el polinomio característico de  $A$  está dado por

$$j_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Con lo anterior, definimos el conjunto de vectores

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= A^{n-1}b + a_1A^{n-2}b + \cdots + a_{n-1}b \\ &\vdots \\ \bar{e}_{n-1} &= Ab + a_1b \\ \bar{e}_n &= b.\end{aligned}$$

Entonces, los vectores  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^n$  (Teorema A.6) y así, las matrices  $A$  y  $b$ , tienen la representación

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en dicha base.

## Bibliografía

- [1] Andronov, A.A., Vitt, A.A. & Khaikin, S.E. [1959] *Theory of oscillations*. Fizmatgiz, Moscow.
- [2] di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. & Kowalczyk, P. [2008] *Piecewise-smooth dynamical Systems, Theory and Applications*. Springer-Verlag, Londres.
- [3] Biák, M., Hanus, T. & Janovská, D. [2013] “Some applications of Filippov’s dynamical systems”, *International Journal of Computational and Applied Mathematics* **254** pp. 132–143
- [4] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. and Torres, F. [2005] “Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogeneous system”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15** , pp. 2469-2484.
- [5] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros J. and Torres, F. [2005] “Limit cycle bifurcation in 3D continuous piecewise linear systems with two zones. Application to Chua’s circuit”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**, pp. 3153-3164.
- [6] Carmona, V., Fernández-Sánchez, F. and Teruel, A.E. [2008] “Existence of a Reversible T-Point Heteroclinic Cycle in a Piecewise Linear Version of the Michelson System”. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **7** , pp. 1032-1048.
- [7] Carmona, V., Fernández-Sánchez, F., García-Medina, E. and Teruel, A.E. [2010] “Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems”. *Chaos*, **20**, 013124 .
- [8] Casti, J.L. [1987] *Linear dynamical systems*. Academic Press, Florida
- [9] Castillo, J. [2017] *Formas Normales y Bifurcaciones de Ciclos Límite en Sistemas Lineales por Pedazos Discontinuos*. Universidad de Sonora. División de Ciencias Exactas y Naturales. Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Sonora.
- [10] Castillo, J. A., Llibre, J. & Verduzco, F. [2017] “The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems”, *Nonlinear Dynamics* **90**, pp. 1829–1840.
- [11] Chen, C-T. [1999] *Linear systems theory and design*. Oxford University Press, Nueva York.
- [12] Colombo, A., di Bernardo, M., Fossas, E. & Jeffrey, M.R. [2010] “Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems”, *Systems & Control Letters*, **59**, pp. 615–622.

- [13] Colombo, A. & Jeffrey, M.R. [2011] “Nondeterministic chaos, and the two-fold singularity in piecewise smooth flows”, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **10**, pp. 423–451.
- [14] Colombo, A., di Bernardo, M., Hogan, S.J. & Jeffrey, M.R. [2012] “Bifurcation of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems”, *Physica D*, **241**, pp. 1845–1860.
- [15] Colombo A. & Jeffrey M.R. [2013] “The two-fold singularity of nonsmooth flows: Leading order dynamics in n-dimensions”. *Physica D*, **263**, pp. 1-10.
- [16] Cristiano, R., Carvalho, T., Tonon D.J. & Pagano, D.J. [2017] “Hopf and Homoclinic bifurcations on the sliding vector field of switching vector fields in  $\mathbb{R}^3$ : A case study in power electronics”, *Physica D*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2017.02.005>.
- [17] Cristiano, R., Pagano, D.J., Freire, E. & Ponce E. [2018] “Revisiting the Teixeira Singularity Bifurcation Analysis: Application to the Control of Power Converters”, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **28-9**.
- [18] Cristiano, R., Ponce, E., Pagano, D.J. & Granzotto, M. [2019] “On the Teixeira singularity bifurcation in a DC-DC power electronic converter”, *Nonlinear Dynamics*, **96**, pp. 1243–1266.
- [19] Cristiano, R. & Pagano, D.J. [2019] “Two-Parameter Boundary Equilibrium Bifurcations in 3D-Filippov Systems”, *Journal of Nonlinear Science*, **29-6**, pp. 2845-2875.
- [20] Dieci L. & López L. [2009] “Sliding motion in Filippov differential systems: Theoretical results and a computational approach”. *SIAM J. Numer. Anal.*, **47** , pp. 2023-2051.
- [21] Filippov, A.F. [1988] *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [22] Freire E., Ponce & E. Torres F. [1997] “Hopf-like bifurcations in planar piecewise linear systems”. *Publicacions Matemàtiques*, **41** , pp. 135-148.
- [23] Freire E., Ponce E., & Ros J. [2005] “The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3D piecewise linear systems”. *SIAM J. Appl. Math.*, **65**, pp. 1933-1951.
- [24] Freire E., Ponce E. & Torres F. [2012] “Canonical Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems”, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **11**, pp. 181–211.
- [25] Freire E., Ponce E. & Torres F. [2014] “A general mechanism to generate three limit cycles in planar Filippov systems with two zones”. *Nonlin. Dyn.*, **78**, pp. 251-263.
- [26] Freire E., Ponce E. & Torres F. [2015] “On the critical crossing cycle bifurcation in planar Filippov systems”. *Journal of Differential Equations*, **259**, pp. 7086-7107.
- [27] Gatto M., Mandrioli D. & Rinaldi S. [1973] ‘Pseudoequilibrium in dynamical systems’. *Int. J. Systems Sci.*, **4**, pp. 809-824.



- [28] Glendinning, P. [2019] “Shilnikov chaos, Filippov sliding and boundary equilibrium bifurcations”. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **29**, pp. 757–777.
- [29] Glendinning, P. & Jeffrey, M. R. [2019] *An Introduction to Piecewise Smooth Dynamics*. Birkhäuser, Suiza.
- [30] Guardia M., Seara T.M. & Teixeira M.A. [2011] “Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems”, *J. Differential Equations*, **250** pp. 1967–2023.
- [31] Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [32] Han M. & Zhang W. [2010] “On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems”, *Journal of Differential Equations*, **248** pp. 2399–2416.
- [33] Hassler, N., LaSalle, J. & Sullivan, J. [1980] *Análisis Matemático Volumen 2. Curso Intermedio..* Trillas, México.
- [34] Hirsch, M.W., Smale, S. & Devaney, R.L. [2004] *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* . Elsevier, USA.
- [35] Islas, J.M. [2016] *Bifurcación tipo Hopf en Sistemas Suaves por Pedazos Continuos en el plano*. Universidad Autónoma Metropolitana. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales, Ciudad de México.
- [36] Islas, J.M., Castillo, J., Aguirre-Hernández, B. & Verduzco, F. [2020] “Pseudo-Hopf bifurcation for a class of 3D Filippov linear systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*. DOI: 10.1142/S0218127421500255. Aceptado para publicación.
- [37] Jacquemard, A., Teixeira, M.A. & Tonon, D.J. [2016] “Stability conditions in piecewise smooth dynamical systems at a two-fold singularity”. *J. Dyn. Control Syst.*, **19**, pp. 47– 67.
- [38] Jeffrey, M.R. & Colombo, A. [2009] “The two-fold singularity of discontinuous vector fields”, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **8**, pp. 624–640.
- [39] Jeffrey M.R. [2014] “Hidden dynamics in models of discontinuity and switching”. *Physica D*, **273-274**, pp. 34-45.
- [40] Kunze, M. [2000] *Non-Smooth Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- [41] Kuznetsov, Y.A. [1998] *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, Nueva York.
- [42] Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S. & Gragnani, A. [2003] “One parameter bifurcations in planar Filippov systems”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **13**, pp. 2157–2188.

- [43] Leine, R.I. [2016] “Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems”. *Physica D*, **223**, pp. 121-137.
- [44] Llibre J., Ponce E. & Teruel A.E. [2007] “Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in  $\mathbb{R}^3$ ”. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **17**, pp. 1171-1184.
- [45] Llibre, J. & Ponce, E. [2012] “Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems”, *Dyn. Contin. Discr. Impul. Syst. Ser. B*, **19**, pp. 325–335.
- [46] Llibre, J., Novaes, D.D. & Teixeira, M.A. [2015] “Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**, 1550144,11.
- [47] Llibre, J. and Teixeira, M.A. [2017] “Piecewise linear differential systems without equilibria produce limit cycles?”, *Nonlinear Dyn*, **88**, pp. 157-164.
- [48] Marsden, J.E. & McCracken, M. [1976] *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [49] Marsden, J.E. & Tromba, A.J. [2004] *Cálculo Vectorial*. Pearson Educación, Madrid.
- [50] Pagano, D.J. & Ponce, E. [2010] “Sliding mode controllers design through bifurcation analysis”. *Preprints of the 8th IFAC on Nonlinear Control Systems, Bologna, Italy*, pp. 1284-1289.
- [51] Pessoa C. & Tonon D.J. [2015] “Piecewise smooth vector fields in  $\mathbb{R}^3$  at infinity”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **427**, pp. 841-855.
- [52] Perko, L. [1991] *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Nueva York.
- [53] Ponce, E., Ros, J. & Vela, E. [2013] “The Focus-Center-Limit Cycle Bifurcation in Discontinuous Planar Piecewise Linear Systems Without Sliding”. *Progress and Challenges in Dynamical Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 335-349.
- [54] Ponce, E., Ros, J. & Vela, E. [2013] “Unfolding the fold-Hopf bifurcation in piecewise linear continuous differential systems with symmetry”. *Physica D*, **250**, pp. 34-46.
- [55] Shafarevich, I.R. & Remizov, A.O. [2013] *Linear Algebra and Geometry*. Springer, Nueva York.
- [56] Simpson, D.J.W. & Meiss, J.D. [2007] “Andronov-Hopf bifurcations in planar, Piecewise-smooth, Continuous flows”. *Physics Letters A*, **371**, pp. 213-220.
- [57] Simpson, D.J.W. & Meiss, J.D. [2008] “Unfolding a codimension two, Discontinuous, Andronov- Hopf bifurcation”. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **18**, 033125.

- 
- [58] Simpson, D.J.W. [2010] *Bifurcations in Piecewise-smooth Continuous Systems*. World Scientific, Columbia.
- [59] Simpson, D.J.W. [2018] “A general framework for boundary equilibrium bifurcations of Filippov systems”. *Chaos*, **28**, 103114.
- [60] Simpson, D.J.W. [2019] “Twenty Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems”, arXiv 2019.
- [61] Teixeira M.A. [1982] “On topological stability of divergent diagrams of folds”. *Math. Z.*, **180**, pp. 361-371.
- [62] Teixeira M.A. [1990] “Stability conditions for discontinuous vector fields”, *J. of Differential Equations*, **88**, pp. 15–29.
- [63] Teixeira M.A. [1993] “Generic bifurcation of sliding vector fields”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **176**, pp. 436–457.
- [64] Teixeira M.A. & Gomide, O.M.L. [2018] “Generic singularities of 3D piecewise Smooth Dynamical Systems”, *Advances in Mathematics and Applications*, Eds. Lavor, C. & Gomes, F., pp. 373–404, Springer, Campinas.
- [65] Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. [2009] *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, Estados Unidos.



Casa abierta al tiempo  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

## ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00076  
Matrícula: 2171801346

La bifurcación pseudo-Hopf  
en una clase de sistemas  
Filippov en R<sup>3</sup> y  
aplicaciones en sistemas de  
control.



Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 12:00 horas del día 23 del mes de julio del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ  
DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ  
DR. RAUL VILLAFUERTE SEGURA  
DR. JUAN GONZALO BARAJAS RAMIREZ  
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)  
DE: JOSE MANUEL ISLAS HERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

JOSE MANUEL ISLAS HERNANDEZ  
ALUMNO

*Aprobar*

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI  
  
DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE  
  
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL  
  
DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ

VOCAL  
  
DR. RAUL VILLAFUERTE SEGURA

VOCAL  
  
DR. JUAN GONZALO BARAJAS RAMIREZ

SECRETARIO  
  
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

El presente documento cuenta con la firma -autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta - Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella