



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Órbitas Periódicas en el Problema de Tres
Cuerpos**

Tesis que presenta
Ingmar Augusto Prada Rojas
Para obtener el grado de
Doctor en Física

Asesora: Dra. Lidia Jiménez Lara
México D. F. julio de 2014.

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Joaquín Delgado Fernández

Secretario: Dra. Lidia Georgina Jiménez Lara

Vocal: Dr. José Antonio García Rodríguez

Vocal: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Dedicatoria

A Renato

A Teresita

*A Eldita, a Fabrizioo, a Ixchelcita y Salvatore con
cariño.*

Agradecimientos

Agradezco:

A mi asesora Dra. Lidia Jiménez Lara, por el tiempo, ayuda, explicaciones, consejos, amabilidad y conocimientos brindados para la realización de esta tesis.

Al Dr. Joaquín Delgado por su lectura, comentarios y correcciones, así como su ayuda y consejos desde el predoctoral hasta el momento en este trabajo.

A los Doctores Manuel Falconi, José Antonio García y Pedro Miramontes por la lectura, comentarios y aportaciones a este trabajo.

A Renato, a Elda y a Teresa por su cariño y confianza en mí.

A la UACM, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, por otorgarme el goce del año sabático para concluir esta tesis y a todo su personal por su amabilidad.

A CONACYT por la beca, con el número de becario 189342, para realizar los estudios de Doctorado.

A la UAM, Universidad Autónoma Metropolitana, por sus instalaciones, recursos y autorización para realizar mis estudios doctorales y a todo su personal por su amabilidad.

Índice general

Contenido	I
Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Antecedentes de la Mecánica Celeste	1
1.1.1. Problema equivalente de una partícula de masa reducida.	8
1.2. Planteamiento histórico del Problema de Tres Cuerpos	11
1.3. Planteamiento general del Problema de Tres Cuerpos Espacial	12
1.4. El problema plano de Tres Cuerpos	16
1.5. Algunas soluciones al Problema de Tres Cuerpos	18
1.6. Esfera de formas	24
2. Problema General de Tres Cuerpos	29
2.1. Nuevas coordenadas para el Problema general de Tres Cuerpos	29
2.2. Eliminación de Nodos en el Problema de Tres Cuerpos espacial	31
2.3. Energía cinética en las nuevas coordenadas	32
2.4. El caso de Lagrange	38
2.5. El caso de Euler	41
3. Problema Plano de Tres Cuerpos	45
3.1. La cinemática del movimiento en el problema Plano de Tres Cuerpos	45
3.2. Casos colineales	55
3.2.1. Las tres partículas están en el eje y	55
3.2.2. Las tres partículas están sobre el eje x	57
3.3. Hamiltoniano en coordenadas de Piña	66

4. Simetrías y Órbitas Periódicas	71
4.1. Método General	71
4.2. El caso de tres grados de libertad	77
4.3. Aplicación al Problema Plano de Tres Cuerpos	78
5. Obtención numérica de órbitas	83
5.1. Resultados numéricos	83
5.2. Cálculo de las regiones de simetría Γ_0	84
5.3. Familias de órbitas periódicas	97
5.4. Explicación final de los resultados numéricos	102
Conclusiones	103
Bibliografía	105

Introducción

En esta tesis estudiamos al problema plano de tres cuerpos, tres masas puntuales que se mueven en el plano, xy en nuestro caso, que interactúan bajo sus fuerzas gravitacionales mutuas en un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas. También tratamos un método que nos permita encontrar órbitas periódicas, no sólo para este problema, sino para sistemas hamiltonianos reversibles en general. El método del que haremos uso ya fue utilizado para estudiar sistemas con dos grados de libertad, como puede verse en [12],[33] y [50].

Nuestra aportación es generalizar el método para n grados de libertad, pero nuestro interés principal es trabajar con tres grados de libertad para aplicarlo al problema plano de tres cuerpos.

Los cuatro grados de libertad que usamos han sido utilizados por Piña et. al. en un sistema de coordenadas apropiado [31, 51, 53, 54, 55]. Estos consisten en un ángulo de Euler ψ que rota del sistema inercial al sistema de ejes principales de las partículas, siendo el tercer eje el que es perpendicular al plano, dos distancias R_1 y R_2 relacionadas a los momentos de inercia principales mediante $I_j = \mu R_j^2$, $j = 1, 2$, con μ una masa constante, así como un ángulo σ , que lleva del sistema de ejes principales a uno fijo apropiado.

Con las variables (R_1, R_2, σ) calculamos la función hamiltoniana y sus ecuaciones de movimiento para estudiar las simetrías de involución del problema plano de tres cuerpos en el sistema rotatorio de ejes principales.

Haciendo uso de una sección de Poincaré adecuadamente elegida reducimos la dimensión del sistema, después encontramos una *región de simetría* de dimensión 2, misma que denominamos Γ_0 . Esta región es un conjunto que contiene puntos que son posibles condiciones iniciales de órbitas periódicas simétricas. Calculamos el mapeo de Poincaré de la región Γ_0 , llamada Γ_2 y los puntos de intersección de Γ_0 con Γ_2 mostramos que son condiciones iniciales que darán lugar a órbitas periódicas para este sistema de tres grados

de libertad.

Algunas regiones de simetría con ciertos puntos de intersección y las órbitas periódicas generadas por éstos se muestran en el quinto capítulo de este trabajo. Hay que tomar en cuenta que las órbitas periódicas en el sistema de ejes principales pueden ser periódicas o cuasiperiódicas en el marco inercial, esto depende de la razón de las frecuencias del movimiento entre estos dos sistemas de referencia.

También encontramos familias de órbitas periódicas cuando variamos un parámetro. El método que utilizamos, que tuvo su inicio para dos grados de libertad, surge de los trabajos de Birkhoff [7] y, posteriormente, René de Vogelaere trabaja en él en: *On the Structure of Symmetric Periodic Solutions of Conservative Systems, with Applications* [12], donde se establece directamente el método que provee una base sólida para una cantidad extensa de investigación, debido a que la utilización de órbitas periódicas como herramienta para comprender sistemas dinámicos es un tema predominante en el campo de la teoría de los sistemas dinámicos. Esto se puede corroborar en una gran lista de publicaciones sobre el tema en el trabajo de Lamb y Roberts [35].

Piña y Jiménez-Lara han usado el método de líneas de simetría para estudiar el mapeo estándar [50], el problema de Störmer [32], así como el problema de tres cuerpos con una ley del potencial inversa al cuadrado [31].

Con el mismo método, Jiménez-Lara y Escalona-Buendía abordaron el problema de Sitnikov [33].

La estructura general de esta tesis es la siguiente:

En el capítulo uno hacemos un breve recuento histórico-conceptual de los modelos que al tratar de explicar los movimientos celestes condujeron al problema de Tres Cuerpos. Comentamos las soluciones de Euler, Lagrange y el “ocho”, y revisaremos en el trabajo de Moeckel et al.[38, 39] la esfera de formas.

En el capítulo dos hacemos algunas definiciones con el fin de introducir las coordenadas simétricas para el problema general de los tres cuerpos, y dar un sentido geométrico a la coordenada σ , así como encontrar el hamiltoniano general en dichas coordenadas y algunas aplicaciones.

En el capítulo tres para las mismas coordenadas simétricas, estudiamos el problema plano de los tres cuerpos y desarrollamos el hamiltoniano que utilizaremos en el estudio de nuestro problema.

En el capítulo cuatro se desarrolla la extensión del método de líneas de simetría planteado por de Vogelaere, a regiones de simetría. Se presentan

las ecuaciones de movimiento de Hamilton en las coordenadas de simétricas o de Piña (R_1, R_2, σ) , con el fin de estudiar las simetrías de involución del problema plano de Tres Cuerpos, en el marco de ejes principales de inercia. El método de líneas simetría [12, 33, 49] de dos grados de libertad se amplía a este problema con tres grados de libertad, de los Tres Cuerpos en el sistema de ejes principales. En primer lugar debemos definir una sección de Poincaré 4-dimensional inmerso en un nivel de energía constante, e introducir una región de simetría 2-dimensional. En esta región, construimos conjuntos invariantes de simetría 1-dimensional cuyas intersecciones son puntos de órbitas periódicas. Los conjuntos invariantes de simetría nos dan información no local, esto es, la forma en que las órbitas periódicas simétricas se distribuyen en la región de simetría. Como ejemplo, suponemos el caso de dos y tres masas iguales con momento angular diferente de cero.

En el quinto capítulo presentamos algunos resultados numéricos producidos con las herramientas matemáticas antes explicadas en los capítulos 3 y 4. Así se integra para encontrar la intersecciones y con este fin, hicimos un programa computacional en Fortran, que barriese toda la región de simetría para encontrar ciertas líneas de simetría, así como los puntos de intersección. Después también con Fortran a partir de los puntos se encontraron las órbitas periódicas correspondientes.

Así, buscamos encontrar los conjuntos invariantes de simetría y también algunas órbitas periódicas. Por supuesto, las órbitas periódicas en el sistema de ejes principales pueden ser periódicas o cuasiperiódicas en el sistema inercial, dependiendo del cociente de las frecuencias de movimiento de los dos sistemas.

Capítulo 1

Preliminares

Historia del Problema de Tres Cuerpos

1.1. Antecedentes de la Mecánica Celeste

Podemos ubicar al origen del Problema de Tres Cuerpos en la observación y modelado matemático del movimiento de los cuerpos celestes, por lo que nos parece pertinente hacer una breve reseña de esta historia.

El sistema de Aristóteles para entender los movimientos de los cuerpos celestes tiene como hipótesis considerar a nuestra Tierra como el centro del Universo y construir un sistema geocéntrico, contenido en una esfera celeste, en el que se encuentran las estrellas fijas. La esfera celeste gira uniformemente sobre un eje de dirección Norte-Sur, dando una vuelta por día. Los movimientos aparentes del Sol, la Luna y de los cinco planetas visibles: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, pueden explicarse si suponemos que cada uno se mueve en su propia esfera transparente, unas dentro de las otras, y las siete dentro de la esfera celeste de las estrellas fijas, y que la Tierra ocupa el centro del sistema. El problema con este sistema es que los siete cuerpos no salen y no se ponen siempre en el mismo punto del horizonte ni al mismo tiempo. Por si esto fuera poco, durante el año, los planetas muestran recorridos complicados respecto a las estrellas fijas, cambiando algunas veces temporalmente su dirección de movimiento.

Como el modelo Aristotélico, esto es, el sistema geocéntrico de esferas concéntricas, no correspondía con las observaciones astronómicas, tuvo que sufrir algunas modificaciones, pero que no dejaba de considerar a la Tierra

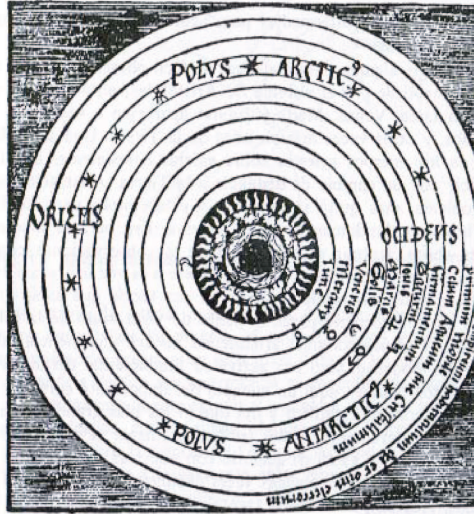


Figura 1.1: Una antigua concepción medieval, proveniente de las ideas de Aristóteles a través de Santo Tomás de Aquino, del mundo. La esfera de la Luna separa la región terrestre de la región celestial. Más allá de la Luna están las esferas concéntricas portadoras de Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno y las estrellas fijas [28].

inmóvil. Entre los astrónomos que trabajaron en las mejoras del modelo están Apolonio (siglo III a.C.) que sugirió el epiciclo, Hiparco (siglo II a.C.) y Claudio Ptolomeo (siglo II a. C.). Las modificaciones son las siguientes:

i) Movimiento excéntrico. Si la Tierra en reposo no estuviera en el centro exacto de rotación de un cuerpo celeste de movimiento uniforme, éste se movería según una trayectoria excéntrica respecto a la Tierra y su distancia a la misma variaría en el transcurso del tiempo. Esto da una explicación al movimiento aparente anual del Sol, ya que parece estar más cercano a mediodía en invierno que en verano.

ii) Movimiento en epiciclos. La figura (1.3) representa un objeto sometido a dos movimientos simultáneos uniformes de rotación: un movimiento circular de este cuerpo alrededor de un punto ubicado en el centro de este primer círculo, cuyo radio va de este punto hacia el objeto (Planeta o Sol), y un movimiento de rotación de la línea que va del centro de la Tierra hasta el centro del primer círculo, alrededor de la posición de la Tierra. El círculo

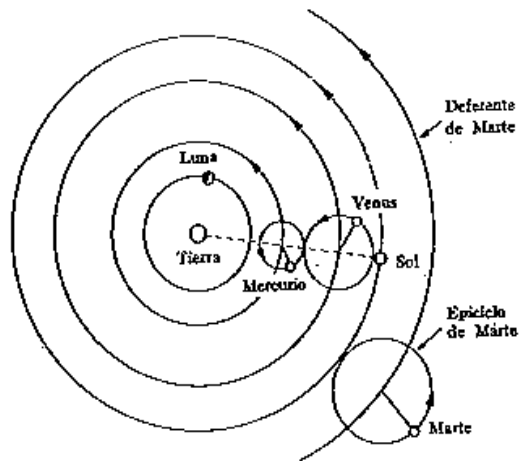


Figura 1.2: Modelo Tolemaico de los cuerpos celestes, geocéntrico [28].

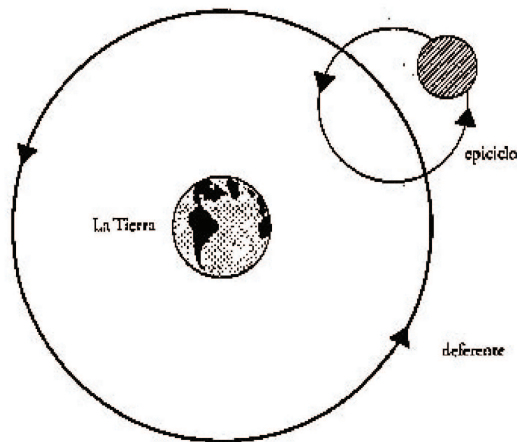


Figura 1.3: Epíclito y deferente de un planeta que orbita a la Tierra en el sistema geocéntrico de Ptolomeo [63].

pequeño es un epíclito, el círculo grande se llama deferente.

iii) El ecuante. El Sol se mueve a la mitad de su trayectoria a través de las estrellas entre el equinoccio de primavera (21 de marzo) y el equinoccio de

otoño (23 de septiembre). La otra mitad de su trayectoria se completa entre el 23 de septiembre y el 21 de marzo. Por lo que el Sol parece moverse con más lentitud durante el verano y mayor rapidez durante el invierno; en verano tarda seis días más en cubrir la misma distancia angular que en invierno.

El ecuante de Ptolomeo era un punto cerca del centro de la órbita del Sol o planeta en el cual si uno se paraba allí y miraba, el centro del epiciclo del astro parecería que se moviera a la misma velocidad. Por lo tanto, el cuerpo celeste realmente se movía a diferentes velocidades cuando el epiciclo estaba en diferentes posiciones de su deferente. Según Ptolomeo, usando un ecuante se mantenía un movimiento circular uniforme.

El sistema de Ptolomeo, que reúne los tres tipos de movimiento antes mencionados, nos llega a través de traducciones árabes, éste se conoció con el nombre de Almagesto, donde encontramos las siguientes hipótesis:

- Que el cielo es de forma esférica y tiene un movimiento de giro.
- Que la Tierra es también de forma esférica.
- Que está situada en medio del cielo como su centro.
- Que por razón de sus dimensiones y distancia a las estrellas fijas, la Tierra se comporta frente a esta esfera como si fuese un punto.
- Que la Tierra no participa de ningún movimiento.

Tuvieron que pasar catorce siglos desde los tiempos de Ptolomeo para que Nicolás Copérnico (1473-1543) propusiera su modelo.

El sistema de Copérnico reemplaza a la Tierra por el Sol, es decir es un sistema Heliocéntrico, mas no resuelve las complicaciones del sistema de Ptolomeo. De hecho, su deseo de representar los movimientos planetarios con una precisión de un sexto de grado no fue realizado. Su sistema no mostró una diferencia física significativa con el sistema Geocéntrico, pero logró poner en conflicto a las grandes mentes del momento, un ejemplo es que su sistema fue adoptado por Galileo, aún en contra de lo que dictara la jerarquía católica. Mientras otros trataron de destruir este modelo, ver figura(1.4) [28, 29, 61, 63]. A nivel observacional las mediciones más precisas de las posiciones del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas fueron hechas por el aristócrata danés Tycho Brahe (1564-1601) en su observatorio " *Uraniborg*" (Castillo del Cielo) en la isla Hven, cerca de Copenague. Estas observaciones sistemáticas le tomaron más de veinte años de su vida, ver figura (1.5). Tycho realizó sus

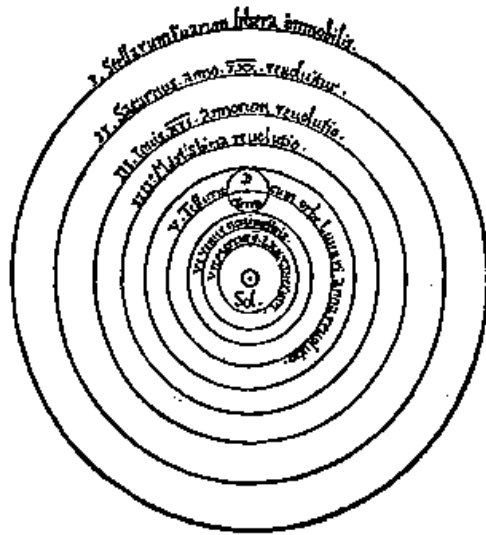


Figura 1.4: Modelo de Copérnico de los cuerpos celestes, heliocéntrico [28].

observaciones con el mejor equipamiento de su época. El sistema planetario de Tycho Brahe se conoce como "semi heliocéntico", la Tierra es el centro del sistema, pero el Sol, girando en torno a ésta, es a su vez el centro alrededor del cual giran Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno[28, 29, 61, 63].

Al no poder explicar las observaciones de Tycho Brahe del movimiento de Marte orbitando al Sol formando un círculo uniforme, Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus leyes cuantitativas del movimiento planetario, ver figura(1.6), mismas que pueden enunciarse de la siguiente manera:

1ª Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol localizado en uno de los focos de la elipse.

2ª Mientras el planeta se mueve en su órbita alrededor del Sol, áreas iguales medidas desde el foco son barridas en tiempos iguales. Ver figura(1.7).

3ª El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La segunda ley de Kepler es una consecuencia de la conservación del momento angular del sistema y es válida para todo campo central. Quizá sea más fácil observar este resultado si tenemos en cuenta que el momento angular

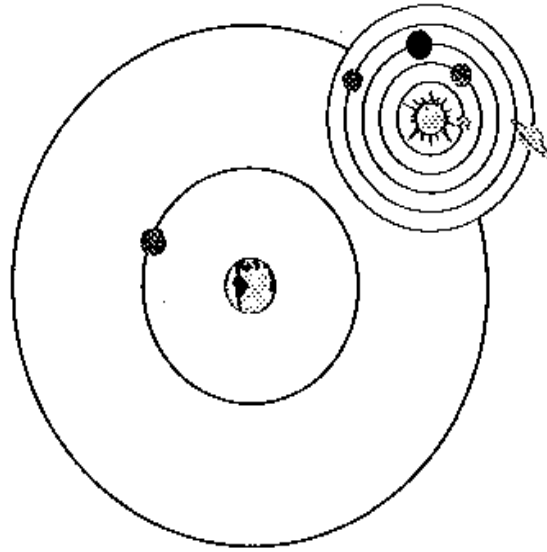


Figura 1.5: Sistema planetario semi heliocéntrico de Tycho Brahe [63].

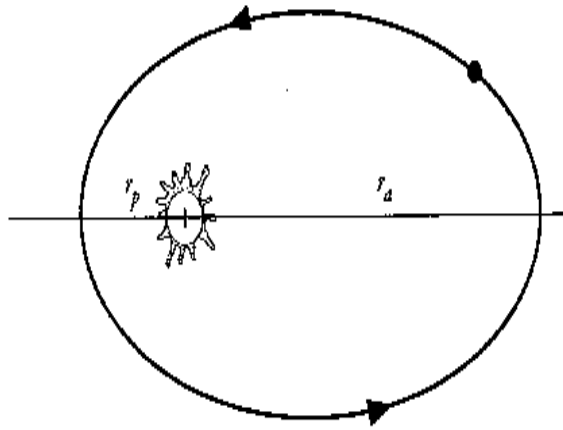


Figura 1.6: Modelo de Kepler: la primera ley de Kepler [63].

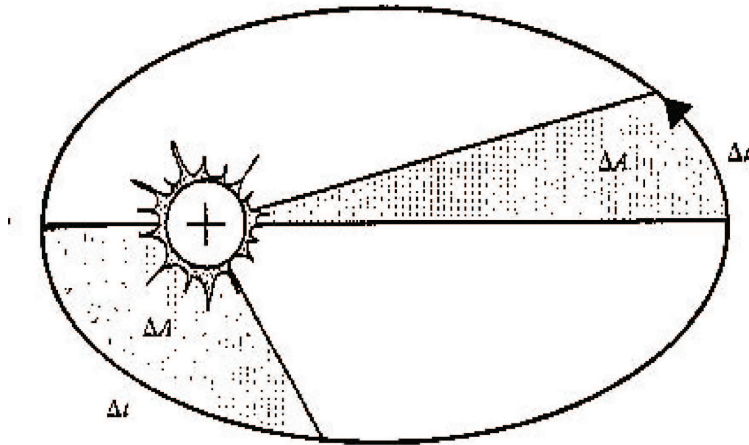


Figura 1.7: Figura que muestra la segunda ley de Kepler [63].

L , en coordenadas polares r y θ , es

$$L = mr^2\dot{\theta},$$

donde m es la masa del planeta que orbita al Sol, y la razón de cambio

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{const},$$

donde A es el área barrida en un intervalo infinitesimal de tiempo.

En 1687, en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton (1642-1727), presenta sus tres leyes de movimiento, que en lenguaje moderno son enunciadas de la siguiente manera:

1^a.- Todo cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sea incitado a cambiar ese estado mediante fuerzas ejercidas sobre él.

2^a.- El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motiva ejercida y está en la dirección de la línea en la cual la fuerza es ejercida.

3^a.- A cada acción siempre se le opone una reacción igual, o las acciones mutuas de dos cuerpos, sobre cada uno, siempre son iguales y dirigidas en sentidos opuestos.

Estas tres leyes fundamentales del movimiento, han cambiado para siempre la percepción que tenemos del mundo.

Así como también presenta su Ley de la Gravitación Universal:

”La fuerza gravitacional que actúa entre dos cuerpos de masas m y M es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.”

Lo que en forma vectorial es

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

donde $G = 6,67384 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ es la constante gravitacional, y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en dirección que va a lo largo de las masas.

1.1.1. Problema equivalente de una partícula de masa reducida.

Otra forma de abordar este problema consiste en que dadas m_1 y m_2 las masas de dos partículas, entonces tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la 1, y $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es la separación entre las partículas. Multiplicando la primera ecuación (1.1) por m_2 obtenemos:

$$m_2 m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = m_2 \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.3)$$

y la segunda ecuación (1.2) por m_1 tenemos

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -m_1 \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

ahora se resta (1.4) de (1.3) quedando como

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.5)$$

y obtenemos

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

que se puede reescribir de la siguiente forma

$$\mu\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.7)$$

en donde $\mu = (m_1 m_2/M)$ es la masa reducida con $M = m_1 + m_2$ es la masa total.

El número de grados de libertad del sistema se reduce de seis a tres componentes de la posición relativa \mathbf{x} . Cuando la fuerza externa es cero, la solución del problema equivalente de masa reducida se puede combinar con el del movimiento uniforme del centro de masa y así obtener una solución completa del problema. Así, cuando se transforma al problema equivalente de masa reducida se remueve la consideración del movimiento del centro de masa.

Ahora, asumimos que \mathbf{F} se deriva de un potencial V . Como \mathbf{F} está dirigido a lo largo de \mathbf{x} , el potencial V depende sólo de la magnitud r de \mathbf{x} . En cualquier lugar, la fuerza será perpendicular a las superficies equipotenciales. Debido a que la fuerza es radial, las superficies equipotenciales son esferas que envuelven el centro de fuerza, así $V = V(r)$. Por facilidad, escribimos las ecuaciones de movimiento, así como el lagrangiano, en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Aunque V sólo depende de r , los ángulos aparecen en la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2}\mu \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + (r^2\text{sen}^2\phi)\dot{\theta}^2 \right], \quad (1.8)$$

donde ϕ es el ángulo polar (colatitud) y θ es el azimutal. Ahora, podemos encontrar el lagrangiano que es:

$$L = \frac{1}{2}\mu \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + (r^2\text{sen}^2\phi)\dot{\theta}^2 \right] - V(r). \quad (1.9)$$

Podemos bajar los grados de libertad mediante la reducción de su número en el término de la energía cinética. Ya que la fuerza es central el vector momento angular $\mathbf{l} = \mu\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ es constante. Además \mathbf{l} es perpendicular tanto a \mathbf{x} como a $\dot{\mathbf{x}}$; sólo la dirección fija de \mathbf{l} implica que \mathbf{x} siempre está en el plano fijo perpendicular a esa dirección. Las condiciones iniciales determinan la dirección inicial de \mathbf{l} , fijando así el plano en que evoluciona el movimiento. Se escoge al eje Z perpendicular a este plano, esto es, paralelo al vector momento angular. Entonces $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$, tal que

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (1.10)$$

En estas coordenadas, escogidas después de haber fijado la dirección del momento angular, el lagrangiano es simplemente

$$L = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r). \quad (1.11)$$

El sistema dinámico descrito por este lagrangiano tiene dos grados de libertad, representados aquí por las variables r y θ .

Tenemos dos ecuaciones de Lagrange, una para θ y otra para r . Estas son:

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) = 0, \quad (1.12)$$

y

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0. \quad (1.13)$$

Al resolver la primera de éstas obtenemos

$$\mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \equiv l. \quad (1.14)$$

La constante l es la magnitud del momento angular.

Despejando $\dot{\theta}$ tenemos

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad (1.15)$$

con lo que la ecuación de movimiento (1.13) se puede escribir de la siguiente forma

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{dV}{dr} = 0. \quad (1.16)$$

Esta ecuación se puede ver como la del movimiento unidimensional de una partícula de masa μ , bajo la influencia de la fuerza

$$\frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dV}{dr} = 0, \quad (1.17)$$

esta fuerza puede obtenerse del potencial efectivo

$$V'(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (1.18)$$

donde el primer término es el potencial centrífugo y el segundo el potencial real. Esto es, la ecuación de movimiento para r puede obtenerse del lagrangiano L' que puede llamarse del problema equivalente unidimensional

$$L' = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - V'(r). \quad (1.19)$$

Debido a que L' tiene la forma $L' = T - V'(r)$, donde T es la energía cinética del problema equivalente unidimensional la energía total del sistema equivalente unidimensional

$$E = T + V'(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r); \quad (1.20)$$

se conserva.

1.2. Planteamiento histórico del Problema de Tres Cuerpos

También es en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, donde viene tratado por vez primera el Problema de Tres cuerpos. En la Proposición LXVI, Teorema XXI.

A éste le siguen 22 corolarios y dos proposiciones (Teoremas), LXVII y LXVIII. (p 219-236), que actualmente se expresa con las siguientes ecuaciones [26] (p.400):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -G \left(m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + m_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + m_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -G \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \right), \end{aligned} \quad (1.21)$$

dando lugar al planteamiento del Problema de Tres Cuerpos [61]: para un conjunto dado de condiciones iniciales, tres masas puntuales, que se atraen gravitacionalmente entre sí encuentran el movimiento resultante.

El movimiento tiene lugar en el espacio tridimensional, no hay restricciones en lo que concierne a las masas ni a las posiciones y velocidades iniciales. Las ecuaciones (1.21) son tres ecuaciones diferenciales de segundo orden para los tres vectores de posición de los tres cuerpos, lo que nos da un sistema de orden 18. Sin embargo, el orden puede reducirse y la energía se conserva ya que las fuerzas son conservativas; también se conserva el momento angular debido a que no hay torcas internas ni externas actuando y el centro de masas de los tres cuerpos se mueve con velocidad constante, misma que se escoge como cero, debido a la conservación del momento lineal del sistema.

Para Newton [61], según recordaría él mismo, nunca padeció tanto de dolor de cabeza como cuando realizó sus estudios sobre la Luna, sólo pensar en el problema le causaba insomnio. Aun así, en el Tercer libro de los Principia, haciendo uso de la teoría gravitacional, estudió el movimiento de los nodos de la Luna, calculando el movimiento del perigeo de la órbita lunar dentro del 8% de los valores observados.

Matemáticos posteriores a Isaac Newton atacaron el problema para encontrar algunas soluciones aproximadas.

Al observar los cuerpos celestes notamos que podemos aproximar sus formas a esferas, al menos en la mayoría de los casos, y si consideramos las distancias que los separan, estas pueden ser consideradas, sin mayor problema, como masas puntuales.

1.3. Planteamiento general del Problema de Tres Cuerpos Espacial

Como se enunció en la sección anterior:

Tres partículas se atraen de acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, tal que entre cada par de partículas hay una fuerza de atracción proporcional al producto de las masas de las partículas y al inverso del cuadrado de la distancia que las separa. Son libres de moverse en el espacio, y suponemos que inicialmente se mueven en cualquier manera dada, determinando sus movimientos subsecuentes.

Llamemos C_1, C_2 y C_3 a las tres partículas (cuerpos), m_1, m_2 y m_3 a sus masas y, r_{23}, r_{13} y r_{12} las distancias que hay entre las partículas señaladas por los subíndices. Tomamos cualquier sistema de ejes rectangulares inercial $Oxyz$, y sean, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$

Las distancias entre los cuerpos son

$$r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j.$$

La segunda ley de Newton para la i -ésima partícula puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \text{donde } i = 1, 2, 3$$

y la fuerza de atracción gravitacional sobre ella es

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{i \neq j}^3 \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}$$

donde $G = 6,67384 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ es la constante de la gravitación universal.

También podemos escribir la fuerza neta de la partícula de la manera siguiente

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$$

donde

$$V = - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

es la energía potencial del sistema y

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right).$$

Por consiguiente, podemos expresar las ecuaciones del movimiento de Newton como

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad i = 1, 2, 3 \quad i \neq j$$

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2.$$

La lagrangiana es

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 + \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

de donde podemos obtener los momentos conjugados mediante

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$$

o sea

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

La energía cinética en términos de los momentos es

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i}.$$

Al ser las fuerzas conservativas, el hamiltoniano en el sistema inercial no es más que la suma de la energía cinética con la energía potencial. Esto es,

$$H = T + V$$

donde H es el hamiltoniano del sistema

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

Las coordenadas de posición de los cuerpos son las coordenadas generalizadas

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

que es un conjunto de 18 ecuaciones diferenciales, cada una de primer orden, para determinar las variables $\mathbf{r}_i(t)$ y $\mathbf{p}_i(t)$.

Lagrange demostró que bajo ciertas consideraciones, este sistema puede reducirse a uno de sexto orden. Debido a que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, podemos considerar el centro de masas en el origen

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0,$$

lo que nos reduce seis órdenes dejándonos 12 ecuaciones de movimiento.

El momento angular de los tres cuerpos alrededor de cada eje de coordenadas es constante durante el movimiento, pues las fuerzas internas son centrales.

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \text{const.}$$

dejándonos tres órdenes menos, por lo que baja a orden nueve.

Pero cuando una de las coordenadas que definen la posición del sistema puede ser tomada como el ángulo ψ de uno de los cuerpos con respecto a uno de los ejes fijos, digamos el z , y las otras coordenadas definen la posición relativa del sistema al plano que tiene este eje azimutal, la coordenada ψ es una coordenada ignorable, en consecuencia la integral correspondiente se utiliza para bajar el orden del sistema dos unidades, pero una ecuación ya está presente en la conservación del momento angular, lo que nos deja un sistema de orden ocho.

Finalmente, para bajar al sistema al orden 6 utilizamos la integral de la energía y la eliminación del tiempo. El espacio fase está foliado para los niveles de energía definidos por $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = h$, donde h es una constante.

El momento de inercia total del sistema se define como la suma de los momentos principales de inercia, esto es

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i^2$$

es una medida del tamaño del sistema. Si $I = 0$, entonces las partículas se encuentran en colisión total. Al separarse las partículas I crece, si $I \rightarrow \infty$, el sistema escapa a infinito; como el origen está en el centro de masa, los escapes a infinito involucran al menos a dos partículas.

Teorema de Euler de las funciones homogéneas.

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función homogénea de grado n , esto es

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

diferenciable, entonces

$$\mathbf{x} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = k f(\mathbf{x}).$$

Consideramos ahora al momento de inercia total

$$I = \sum_i^3 m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i,$$

y lo derivamos dos veces con respecto al tiempo t :

$$\ddot{I} = 2 \sum_i^3 m_i (\mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i).$$

Como

$$\sum_i^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = 2T$$

entonces tenemos

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_i^3 m_i \mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$$

y de la 2ª ley de Newton, y que las fuerzas son conservativas

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$$

dejándonos

$$\ddot{I} = 4T - 2 \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Al ser V una función homogénea de grado -1 , por el teorema de Euler de las funciones homogéneas tenemos

$$\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = -V$$

por lo que

$$\ddot{I} = 4T - 2(-V)$$

y

$$\ddot{I} = 4T + 2V = 2T + 2H + 2V - 2V = 2(2H - V).$$

Esta última expresión es la Identidad de Lagrange-Jacobi.

1.4. El problema plano de Tres Cuerpos

Este problema concierne al movimiento de tres masas puntuales bajo la influencia de sus atracciones gravitacionales mutuas, cuando las velocidades iniciales de las tres masas se encuentran en el plano de sus interacciones gravitacionales mutuas. El movimiento permanece en ese plano.

Sean $\mathbf{r}_j \in \mathbb{R}^2$ la posición del j -ésimo punto, $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^2$ su momento y $m_j \in \mathbb{R}^+$ su masa.

El sistema está descrito por el hamiltoniano:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \in \mathbb{R}^6$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \in \mathbb{R}^6$,

$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$ y

$$V(\mathbf{r}) = -G \left(\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right).$$

$V(\mathbf{r})$ es la energía potencial gravitacional de Newton.

Las ecuaciones diferenciales de Hamilton son:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = M^{-1} \mathbf{p}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla V(\mathbf{r}).$$

Estas ecuaciones definen un sistema dinámico de orden 12. No obstante, es posible reducir el problema a un sistema en \mathbb{R}^5 utilizando las integrales de movimiento conocidas.

La primera integral de movimiento es el momento total. Se asume, sin pérdida de generalidad, que:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0,$$

lo que implica que el vector del centro de masas \mathbf{R} es constante

$$\mathbf{p} = \frac{dM\mathbf{R}}{dt} = 0 \Rightarrow M\mathbf{R} = \text{cte.}$$

y podemos situar este centro de masas en el origen

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0.$$

Estas ecuaciones restringen al vector momento \mathbf{p} , y al vector posición \mathbf{r} , a subespacios tetradimensionales de \mathbb{R}^6 , así que se reduce el orden del sistema a 8.

La siguiente integral de movimiento a considerar es el momento angular \mathbf{L} dado que las fuerzas de interacción son centrales. Las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo rotaciones simultáneas para todas las posiciones y momentos en \mathbb{R}^2 . Como resultado, el momento angular total es constante; y

puesto que las velocidades iniciales se encuentran en un plano, el momento angular total

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_3,$$

está en dirección perpendicular al plano. La magnitud del momento angular reduce un orden más, lo que reduce una dimensión al sistema, esto es, estamos en \mathbb{R}^7 .

Debido a que el sistema es simétrico bajo rotaciones podemos pasar a un espacio cociente en el cual todos los vectores (\mathbf{r}, \mathbf{p}) que difieren sólo por rotaciones simultáneas de todas las \mathbf{r}_j y \mathbf{p}_j están identificadas. Esto elimina otra dimensión, por lo que quedamos en \mathbb{R}^6 .

Por último, el hamiltoniano mismo es la energía total del sistema, misma que se conserva:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{r}) = h.$$

Esto elimina una dimensión más. Todas estas ecuaciones juntas definen una variedad de dimensión cinco, $M(h, L)$, (siempre que (h, L) sea una función regular) la variedad cociente de la energía y momento angular. La topología de estas variedades dependen de la energía h , el momento angular L , y las masas m_j [37].

1.5. Algunas soluciones al Problema de Tres Cuerpos

Leonhard Euler (1707-1783) en 1760 desarrolló soluciones para un caso especial del problema de tres cuerpos, en el cual, dos cuerpos están fijos en el espacio y el tercero, una partícula de prueba [66], se mueve en sus campos gravitacionales. Éste se conoce como el problema de los dos centros fijos, la solución de este problema se da en términos de funciones elípticas.

Una aplicación importante es en el estudio clásico de una molécula: los dos centros son núcleos atómicos y la partícula de prueba es un electrón, es el modelo más simple de una molécula diatómica; de hecho, Pauli aplicó el modelo al ión de la molécula H_2^+ en su tesis doctoral [47]. Gutzwiller menciona que el problema del electrón de la molécula H_2^+ sigue siendo un problema abierto, ya que se tiene que conciliar la mecánica clásica con un fenómeno cuántico; cuando el electrón está entre los dos centros requeriría del efecto tunel [24] página 36.

En 1772, Euler propuso el uso de un sistema de coordenadas rotatorio sinódico para aproximar el movimiento cuasi-circular de la Luna alrededor de la Tierra. Esto permite aproximaciones más precisas en el estudio del movimiento de cuerpos, como satélites artificiales, en presencia del campo gravitacional de la Tierra y de la Luna. Estas ideas dan lugar al Problema Restringido de los Tres Cuerpos: dos de los cuerpos tienen una masa mucho mayor que la del tercero, lo que permite que el movimiento de las dos masas mayores no sienta influencia por la presencia del cuerpo mucho menor. Este problema está estudiado con detalle en Szebehely, Marchal, Boccaletti, Abraham, Montgomery,[60, 43, 9, 1, 44, 6] entre otros y someramente en Fowles [22] pp 288-305.

La idea primordial del problema restringido es que puedan separarse los movimientos de los cuerpos grandes, llamados primarios, y resolver este problema de dos cuerpos sin considerar al tercer cuerpo por ser mucho más pequeño. Una vez resuelto el problema de dos cuerpos se investiga el movimiento del cuerpo pequeño en el campo gravitacional de los dos cuerpos primarios dependiente explícitamente del tiempo, siendo éste el problema restringido de tres cuerpos. Si los primarios se mueven en órbitas circulares, y la partícula de prueba en el plano de las primarias esto nos lleva a la forma más sencilla del problema, éste se llama el problema restringido circular plano de los tres cuerpos.

Al final de la década de 1770, el matemático y astrónomo italo-francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) le dió un nuevo tratamiento al problema restringido de los tres cuerpos. Descubrió que, cuando los primarios se mueven en círculos, existen cinco puntos en el plano del movimiento donde las fuerzas que actúan sobre la masa menor están balanceadas. Estas fuerzas son las atracciones gravitacionales de las grandes masas sobre la masa pequeña y la fuerza centrífuga actuando sobre la masa menor rotando con las primarias. En las soluciones de Lagrange cada masa se mueve conforme a una cuadrática de manera tal que el triángulo formado por las tres masas evolucione mediante una composición de dilaciones y rotaciones instantáneas por lo que es equilátero en todo tiempo. En la figura (1.10) podemos observar las soluciones de Lagrange al problema restringido de Tres Cuerpos. Hay que aclarar que las soluciones equiláteras de Lagrange pueden ser cuadráticas y trascienden el problema restringido de tres cuerpos, esto es, son válidas para tres masas arbitrarias.

El sistema que rota se conoce como el sistema sinódico, en el cual los primarios están fijos. En el sistema inercial fijo, llamado el sistema

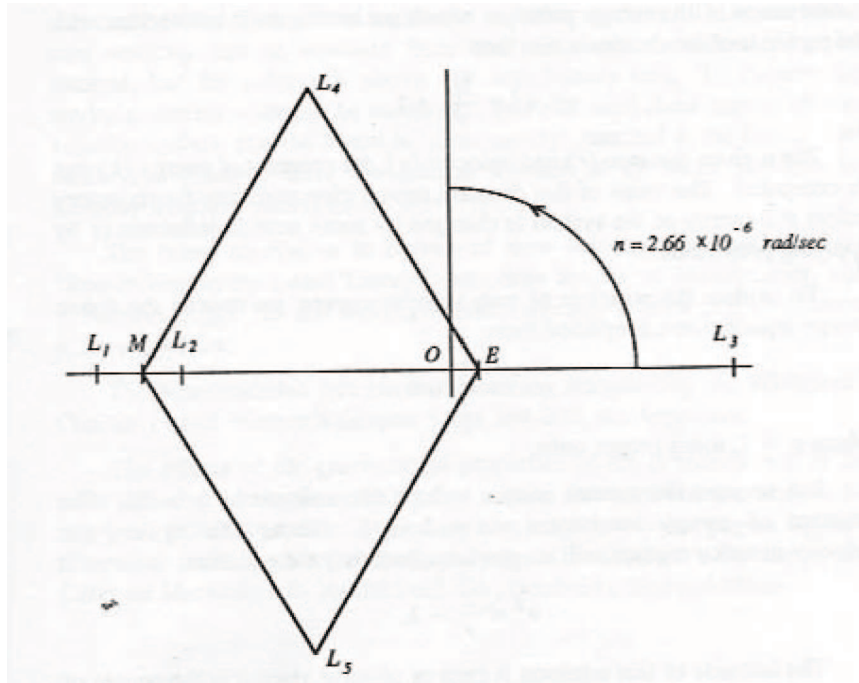


Figura 1.8: Localización de los puntos de equilibrio encontrados por Lagrange para el problema restringido de los tres cuerpos donde la Tierra está en E y la Luna en M [60] p.266

sideral, los primarios se están moviendo en círculos, si el problema es circular. Hay cinco puntos de equilibrio, tres que están localizados en una línea que conecta a los primarios, y dos puntos que forman triángulos equiláteros con los primarios, como puede observarse en la figura (1.8). Los tres puntos colineales son inestables, y los dos puntos de los triángulos son estables para masas mucho menores en razón con la otra; estos puntos se llaman puntos de libración. En honor a Lagrange se conoce a los cinco puntos de equilibrio como los puntos de Lagrange.

En las soluciones de Euler, de equilibrio en el sistema sinódico, las masas son colineales en cada instante, además, las razones de sus distancias permanecen constantes. En la figura (1.9) podemos observar las soluciones de Euler para el problema restringido de Tres cuerpos.

Un grupo especial de asteroides son los llamados Troyanos. Estos están ubicados en los puntos L_4 y L_5 en el sistema donde los primarios son el Sol y Júpiter, lo que se puede observar en la figura(1.11).

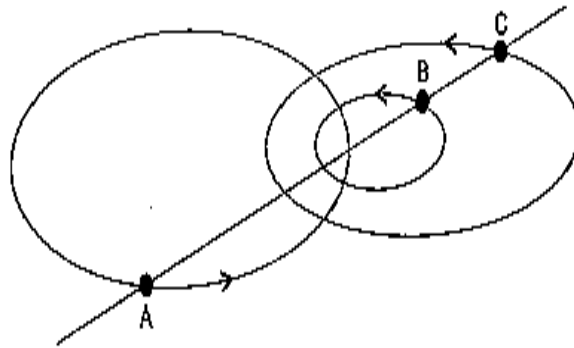


Figura 1.9: Las soluciones de Euler para el problema restringido de los Tres Cuerpos [13] p.160.

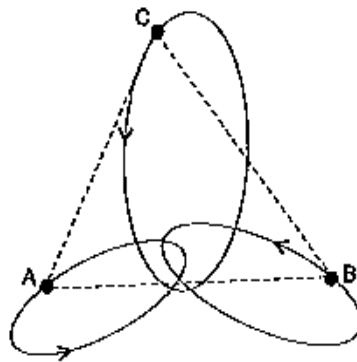


Figura 1.10: Las soluciones de Lagrange para el problema restringido de los Tres Cuerpos [13] p.160.

En 1890 Henri Poincaré publicó “Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps” (Sobre las ecuaciones de la dinámica y el problema de tres cuerpos) en el volumen 13 de Acta Math, de hecho son las primeras 270 páginas de dicho volumen; este trabajo le hizo ganar el premio que ofreció el rey Oscar II de Suecia y Noruega el 21 de enero de 1889; promovido por el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Su enfoque estuvo

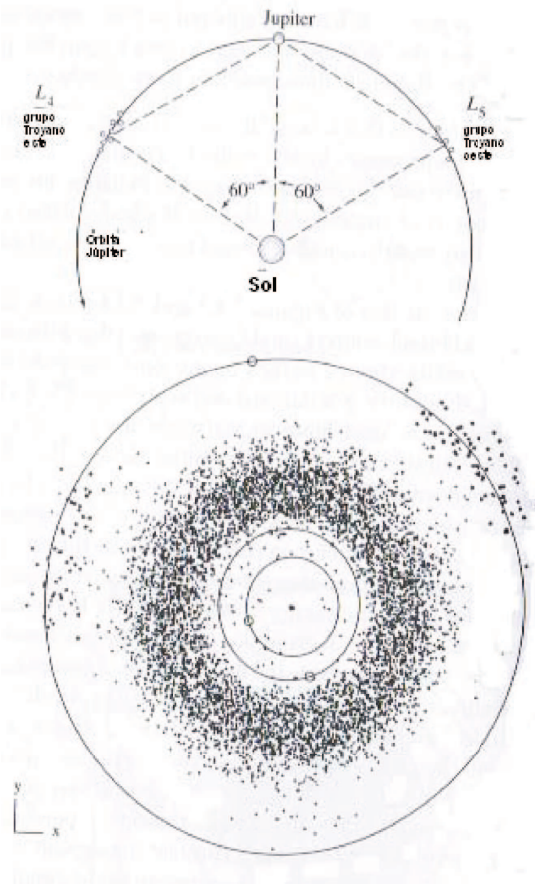


Figura 1.11: a) Ubicación de los asteroides Troyanos. b) Los asteroides Troyanos y el cinturón de asteroides mostrados junto a las órbitas de Júpiter, Marte y la Tierra. Tomado de Fowles [22]p. 296.

dirigido hacia la estabilidad del sistema solar, para ello utilizó el modelo simplificado del problema restringido de los tres cuerpos. Dicha obra pasó a ser el primer libro de texto acerca de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos.

La publicación citada se complementa con algunos trabajos previos y su tratado en tres volúmenes que vieron luz en 1899: “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste” (Los Nuevos Métodos de la Mecánica Celeste).

Jules Henri Poincaré condujo a la prueba de la inexistencia de primeras integrales uniformes en el Problema de los Tres Cuerpos más allá de las cono-

cidas. Esto significa que el Problema de Tres Cuerpos no podía ser resuelto por métodos cuantitativos. El problema no puede reducirse a cuadraturas ni expresarse como una serie convergente, aún el restringido, para describirlo en su totalidad. El teorema de Poincaré mejoró un resultado similar publicado por Ernst Heinrich Bruns en 1887. Poincaré creyó encontrar una prueba de un tipo de estabilidad para el problema restringido de Tres Cuerpos. Al darse cuenta de que la prueba era incorrecta y tratar de corregirla se dio cuenta de que el problema era mucho más complicado de lo esperado. Descubrió que los métodos cuantitativos y analíticos sólo eran buenos hasta cierto punto, hay que pensar los problemas de manera cualitativa y geoméricamente también.

En particular, Poincaré describe el papel que juegan los puntos homoclínicos transversales al obstruir la existencia de “segundas” integrales de movimiento y oponiéndose a la convergencia de métodos asintóticos formales, como los de Lindsted.

Un punto \mathbf{y} en el espacio fase de un sistema dinámico se llama homoclínico a un punto fijo \mathbf{z} si la órbita es asintótica a \mathbf{z} cuando $t \rightarrow +\infty$ y cuando $t \rightarrow -\infty$. Es llamado heteroclínico si la órbita es asintótica a puntos distintos $\mathbf{z}_+ \neq \mathbf{z}_-$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y $t \rightarrow -\infty$, respectivamente. El punto es transversal si las variedades de condiciones iniciales asintóticas a \mathbf{z} cuando $t \rightarrow +\infty$ y cuando $t \rightarrow -\infty$, que necesariamente se intersecan en \mathbf{y} , lo hacen transversalmente.

Los puntos homoclínicos transversales implican que en su cercanía existe movimiento caótico [13, 4, 27].

Otra solución que se conoce explícitamente del problema de Tres Cuerpos es la figura del Ocho. Fue descubierta numéricamente por Chris Moore y redescubierta por Alain Chenciner y Richard Montgomery que, además, probaron su existencia. Ésta es una solución periódica para el problema de tres cuerpos con masas iguales. Carles Simó mostró numéricamente su estabilidad, que resultó linealmente estable. Esta órbita puede verse en la figura (1.12).

Veamos ahora algunas de las familias de órbitas periódicas. Tres familias de soluciones periódicas emergen de la bifurcación de la solución del Ocho: la familia plana de Hénon, la familia espacial de Marchal P_{12} [43] y una nueva familia espacial presentada por Chenciner et al. en [11].

Muñoz-Almaraz et al. en la referencia [45] muestra el método de continuación numérica de órbitas periódicas en sistemas hamiltonianos con simetrías que ayudan a entender al sistema completo. Para esto se requiere una órbita periódica inicial y así arrancar el método.

Con más énfasis en el problema de N cuerpos de la mecánica celeste, en

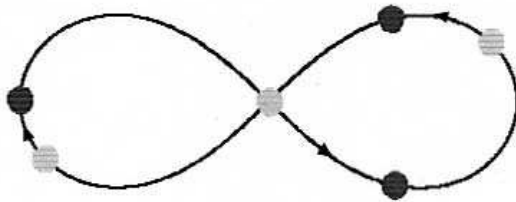


Figura 1.12: Órbita formada por la figura del Ocho. En la doceava primera parte del período, los cambios en la configuración van de colineal (puntos en gris claro) a una configuración tipo isósceles (puntos en gris oscuro)[39].

la referencia [16] Doedel et al. calculan familias de soluciones del problema de tres cuerpos circular y de la órbita de la figura Ocho de Chenciner y Montgomery.

1.6. Esfera de formas

A continuación nos basaremos en el artículo [38] de Moekel donde presenta la esfera de formas para poder comprender su relación con las coordenadas que presentamos en el siguiente capítulo.

Como hemos dicho, al estar en un plano el sistema dinámico esta definido en \mathbb{R}^{12} . Recordando lo visto en la sección 1.4, la reducción de este problema a un sistema de dimensión 5 se hace mediante las integrales de movimiento. Como vimos en la misma sección, por la conservación del momento lineal, la elección del centro de masa en el origen, y la conservación del momento angular, se puede reducir el problema a dimensión 7. Debido a que el sistema es simétrico bajo rotaciones, podemos pasar a un espacio cociente en el cual todos los vectores de posición y momento que difieren solamente por una rotación simultanea de todas las posiciones y momentos están identificados. Esto elimina una dimensión con lo cual quedamos en \mathbb{R}^6 .

Finalmente, el mismo hamiltoniano

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} - V(r) = h$$

es la energía total del sistema, misma que se conserva y donde $M =$

$diag(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$. Lo que elimina otra dimensión, quedando ahora en \mathbb{R}^5 .

Como el centro de masas se encuentra en el origen, el momento de inercia juega un papel principal para realizar un cambio de coordenadas propuesto por McGehee para el estudio de la variedad de colisión

$$I = \mathbf{r}^T M \mathbf{r},$$

que es invariante ante una rotación al sistema de ejes principales, como veremos en detalle en el capítulo 2, tenemos que

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}_\psi \mathbf{s},$$

donde

$$\mathbf{G}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así, podemos escribir

$$I = \mathbf{r}^T M \mathbf{r} = \mathbf{s}^T \mathbf{G}_\psi^T M \mathbf{G}_\psi \mathbf{s},$$

por lo que en el marco de ejes principales también se tiene

$$I = \mathbf{s}^T M \mathbf{s}.$$

La variable

$$R = \sqrt{I}$$

será la variable radial de un tipo de sistema de coordenadas polares en \mathbb{R}^6 . Es una medida del tamaño del triángulo formado por las tres masas puntuales; en particular, cuando $R = 0$ representa una colisión triple en el origen. Salvo por el factor μ , este es un resultado similar a las que se expresan en las ecuaciones (3.15) y (3.22).

El vector de posición normalizado,

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{R}$$

mide la forma del triángulo de las partículas. Hay que ver que, por definición, $\bar{\mathbf{s}}$ satisface lo siguiente:

$$\bar{\mathbf{s}}^T M \bar{\mathbf{s}} = 1.$$

En la variedad cociente de rotaciones perdemos información acerca del ángulo ψ y vemos a $\bar{\mathbf{s}}$ como una representación sólo de la forma.

El momento normalizado está definido por

$$\mathbf{z} = \sqrt{R} \mathbf{p}.$$

Las variables $(R, \mathbf{s}, \mathbf{z})$ son superiores a (\mathbf{r}, \mathbf{p}) debido a su comportamiento cerca de la singularidad de triple colisión.

Las ecuaciones de la energía y magnitud de momento angular en estas coordenadas son:

$$H(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M^{-1} \mathbf{z} + V(\bar{\mathbf{s}}) = hR$$

$$\left| \sqrt{R} \mathbf{p}_1 \times \frac{\mathbf{s}_1}{R} + \sqrt{R} \mathbf{p}_2 \times \frac{\mathbf{s}_2}{R} + \sqrt{R} \mathbf{p}_3 \times \frac{\mathbf{s}_3}{R} \right| = \frac{\sqrt{R}}{R} |\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3| = \frac{L}{\sqrt{R}}. \quad (1.22)$$

es decir

$$|\mathbf{z}_1 \times \bar{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{z}_2 \times \bar{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{z}_3 \times \bar{\mathbf{s}}_3| = \frac{L}{\sqrt{R}}.$$

Debido a que el comportamiento del tamaño y la forma del triángulo formado por los tres cuerpos tiene un significado intuitivo más directo que el comportamiento de los momentos, enfocaremos la atención al espacio de configuraciones. Se define:

$$C = \{(R, \mathbf{s}) \mid R \geq 0, \mathbf{s}^T M \mathbf{s} = 1, m_1 \mathbf{s}_1 + m_2 \mathbf{s}_2 + m_3 \mathbf{s}_3 = 0\} / \mathbb{S}$$

como el espacio de todas las configuraciones que son admisibles, en las cuales se deja fuera la simetría debida a la rotación. Es posible observar que este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$; las dos ecuaciones en \mathbf{s} definen un elipsoide de dim 3 en \mathbb{R}^6 y el espacio cociente de este elipsoide bajo la acción del círculo es homeomorfo a una esfera de dimensión dos, como puede verse en la figura (1.14).

Podemos observar que R representa el tamaño del triángulo formado por los tres cuerpos, mientras que $\bar{\mathbf{s}}$ representa su forma.

La esfera de dimensión dos de formas se muestra con mayor detalle en la figura (1.14).

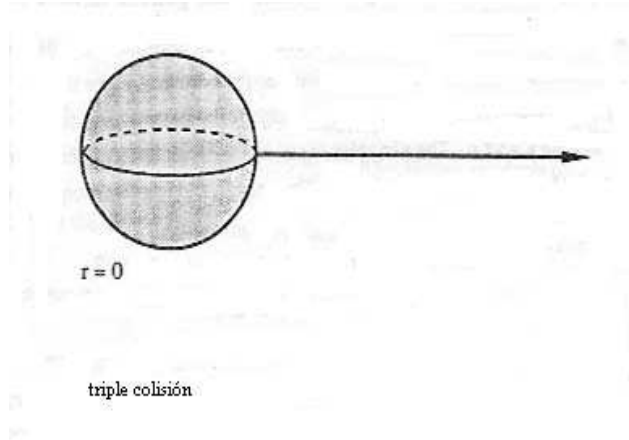


Figura 1.13: Espacio de Configuración C , homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$.

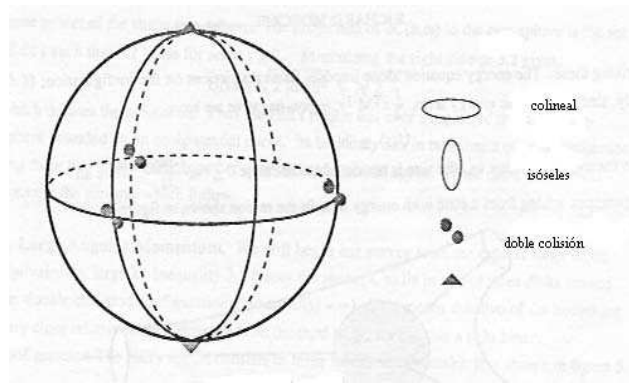


Figura 1.14: Esfera de formas S , tomada de [38]

Los triángulos colineales forman un círculo, mostrado en la figura (1.14) como el ecuador. Los triángulos isósceles forman tres círculos distinguiéndose por la masa que esté ubicada en el eje de simetría. Estos tres círculos se intersectan en las configuraciones de triángulos equiláteros, visto en la figura como los polos.

Se debe observar que hay dos triángulos equiláteros inequivalentes rotacionalmente, con las masas 1,2,3 apareciendo en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Cada círculo del triángulo isósceles se intersecta con el círculo colineal en dos puntos, uno representa una configuración colineal con una masa en

el punto medio de las otras dos, y el otro representa una configuración de colisión doble [38].

En el capítulo siguiente presentamos y hacemos uso de las coordenadas de Piña para el estudio del problema de tres cuerpos y vemos que tienen una gran similitud con las utilizadas por Moekel y presentadas aquí.

Es pertinente notar que las coordenadas de Piña se dedujeron independientemente de las aquí descritas, siguiendo un planteamiento diferente basado en la teoría de la dinámica rotacional de los tres cuerpos, utilizando los momentos de inercia en el sistema de ejes principales.

Capítulo 2

Problema General de Tres Cuerpos

2.1. Nuevas coordenadas para el Problema general de Tres Cuerpos

Nos es conveniente utilizar las coordenadas introducidas por E. Piña y L. Jiménez-Lara [52, 53] que usan los tres ángulos de Euler como coordenadas dinámicas que determinan la posición del plano de las partículas y la orientación de las direcciones principales de inercia. Los cálculos realizados en este sistema se hacen con el centro de masas en reposo. Requerimos tres coordenadas más, las que escogeremos como dos distancias equivalentes a los dos momentos de inercia independientes, así como un ángulo auxiliar.

Encontramos ventajoso el uso de las coordenadas de Piña para el problema de tres cuerpos, debido a que éstas utilizan cantidades físicas como los momentos principales de inercia, que como veremos más adelante están relacionados con dos de estas coordenadas, R_1 y R_2 . Esto nos posibilita relacionar a los momentos principales de inercia con el tamaño del sistema estudiado. Así mismo, estas coordenadas nos muestran explícitamente la ubicación de las colisiones dobles; la colisión triple se presenta cuando el tamaño del sistema es nulo. Otra ventaja, es la simetría respecto a los tres cuerpos, esto es, ninguna de ellas es preferente, a diferencia, por ejemplo, de las coordenadas de Jacobi, donde se debe elegir uno preferente.

Como hemos dicho las nuevas coordenadas son simétricas en las tres partículas, y se considera al vector unitario \mathbf{u} en la dirección perpendicu-

lar al plano de las partículas en el marco inercial, parametrizado por ángulos de Euler actuando como coordenadas esféricas

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta\text{sen}\phi \\ -\text{sen}\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

\mathbf{G} es la matriz de rotación que transforma del marco de los ejes principales de inercia de las partículas al sistema inercial. La dirección de \mathbf{u} se transforma en una dirección constante mediante la rotación inversa

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Una de las direcciones principales de inercia es \mathbf{u} , pero es necesario incorporar otro ángulo de Euler ψ para rotar en el plano de las partículas con el fin de obtener una matriz de inercia diagonal. A partir de ahora, \mathbf{G} estará parametrizada en los ángulos de Euler en una forma utilizada por muchos autores [23, 49].

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Tomando como origen el centro de masas, \mathbf{r}_j ($j = 1, 2, 3$) denota las coordenadas de las partículas en el marco inercial y \mathbf{s}_j en el nuevo marco de referencia, de los ejes principales de inercia

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{G}\mathbf{s}_j. \quad (2.4)$$

La tercera coordenada de los vectores \mathbf{s}_j en el nuevo marco de referencia es 0:

$$\mathbf{s}_j = \begin{pmatrix} s_{jx} \\ s_{jy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.5)$$

La velocidad angular en ángulos de Euler en el sistema rotado es

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta\text{sen}\psi \\ \text{sen}\theta\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\text{sen}\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2.2. Eliminación de Nodos en el Problema de Tres Cuerpos espacial

Las ecuaciones de movimiento del sistema están dadas por las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

donde L es la función lagrangiana

$$L = T - V. \quad (2.8)$$

Aunque todavía nos falta encontrar las distancias entre las partículas para poder escribir la energía potencial, las tres coordenadas relacionadas a la rotación generan ecuaciones de Lagrange que implican, cuando la energía potencial sólo está en función de las distancias, la conservación del vector momento angular en el sistema inercial. Puesto que las interacciones son centrales, el vector se conserva

$$\mathbf{GL}, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{L} es el vector momento angular en el marco de los momentos principales de inercia y esta dado por

$$\mathbf{L} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}},$$

es decir

$$\mathbf{L} = \mu \begin{pmatrix} R_1^2 \omega_1 \\ R_2^2 \omega_2 \\ (R_1^2 + R_2^2) \omega_3 \end{pmatrix} - 2\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_1 R_2 \dot{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Donde μ es un factor de norma que tiene dimensiones de masa y se definirá en la ecuación (2.25). La eliminación de los nodos en el problema de tres cuerpos resulta de igualar al vector momento angular en el marco de ejes principales de inercia a la rotación de un vector constante que se escoge en la dirección del eje z inercial

$$\mu \begin{pmatrix} R_1^2 \omega_1 \\ R_2^2 \omega_2 \\ (R_1^2 + R_2^2) \omega_3 \end{pmatrix} - 2\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_1 R_2 \dot{\sigma} \end{pmatrix} = l \mathbf{G}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde l es la magnitud del momento angular conservado.

Más adelante veremos que para el problema plano, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ y $\omega_3 = \dot{\psi}$, que se simplifica en

$$\mu (R_1^2 + R_2^2) \dot{\psi} - 2\mu R_1 R_2 \dot{\sigma} = l$$

donde, no será necesario hacer la eliminación de nodos pues directamente se escoge \mathbf{L} en la dirección perpendicular a las partículas.

2.3. Energía cinética en las nuevas coordenadas

La energía cinética T está dada por la siguiente expresión

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2.$$

Utilizando la ecuación (2.6) para escribir la velocidad de la j -ésima partícula

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{G} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_j + \dot{\mathbf{s}}_j), \quad (2.12)$$

donde \mathbf{G} está dada por la ecuación (2.3) y la expresión de la energía cinética T resulta

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{s}}_j^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_j m_j \mathbf{s}_j \times \dot{\mathbf{s}}_j + \\ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{I} \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

la matriz de inercia \mathbb{I} se expresa de la siguiente forma

$$\mathbb{I} = \mathbf{1} \sum_j m_j \mathbf{s}_j^2 - \sum_j m_j \mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unidad.

Debido a que las tres partículas definen un plano, el momento de inercia alrededor del eje 3 es la suma de los otros dos momentos

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (2.14)$$

El origen de coordenadas está en el centro de masa, y las coordenadas de las partículas obedecerán las ecuaciones

$$\sum_j m_j \mathbf{s}_j = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

que en términos de las componentes de la ecuación (2.5) diferentes de cero son

$$\begin{aligned} m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x} + m_3 s_{3x} &= 0, \\ m_1 s_{1y} + m_2 s_{2y} + m_3 s_{3y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones sugieren considerar a los vectores en el espacio de masas

$$\mathbf{s}_x = (s_{1x}, s_{2x}, s_{3x}), \quad (2.17)$$

y

$$\mathbf{s}_y = (s_{1y}, s_{2y}, s_{3y}). \quad (2.18)$$

Tomamos una base vectorial con los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} ,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} = 0$$

donde \mathbf{c} está en la dirección $(1, 1, 1)$. Los vectores (2.17) y (2.18) son combinaciones lineales de \mathbf{a} y \mathbf{b}

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \\ \mathbf{s}_y &= \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se escogió el marco rotado en las direcciones principales de inercia, lo que expresado en términos de componentes queda

$$m_1 s_{1x} s_{1y} + m_2 s_{2x} s_{2y} + m_3 s_{3x} s_{3y} = 0, \quad (2.20)$$

a continuación se exponen los siguientes productos internos

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{c} \rangle = 0, \quad (2.21)$$

$$\langle \mathbf{s}_y, \mathbf{c} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y \rangle = 0 \quad (2.22)$$

donde \langle, \rangle es un producto interior con la métrica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$\mathbf{c} = \varepsilon_c (1, 1, 1),$$

donde la constante ε_c será escogida más adelante.

Ahora, en forma vectorial se escribe

$$(s_{1x}, s_{2x}, s_{3x}) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1y} \\ s_{2y} \\ s_{3y} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

o

$$\mathbf{s}_x^T \mathbf{M} \mathbf{s}_y = 0.$$

Para completar la definición de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} asumimos que

$$\mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{a}^T = 0, \quad (2.24)$$

y asumimos una normalización tal que

$$\mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T = \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T = \mu, \quad (2.25)$$

donde μ tiene dimensiones de masa, lo que define a los vectores sin dimensiones.

Calculando los dos momentos de inercia obtenemos

$$I_2 = \sum_j m_j \mathbf{s}_{jx}^2 = \mu(\alpha^2 + \beta^2) \quad (2.26)$$

e

$$I_1 = \sum_j m_j \mathbf{s}_{jy}^2 = \mu(\gamma^2 + \delta^2). \quad (2.27)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.19) en la ecuación (2.20) y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.24) y (2.25), obtenemos

$$\mathbf{s}_x \mathbf{M} \mathbf{s}_y^T = \alpha \gamma \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + (\alpha \delta + \gamma \beta) \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{b}^T + \beta \delta \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T = 0. \quad (2.28)$$

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.26-2.29) sugieren definir a los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mediante

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma & \text{sen } \sigma \\ -\text{sen } \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde σ es un ángulo, esto es

$$\begin{aligned} \alpha &= R_2 \cos \sigma, \\ \beta &= R_2 \text{sen } \sigma, \\ \gamma &= -R_1 \text{sen } \sigma, \\ \delta &= R_1 \cos \sigma. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sustituyendo en las ecs. (2.26) y (2.27) resulta

$$I_1 = \mu R_1^2, \quad (2.32)$$

y

$$I_2 = \mu R_2^2. \quad (2.33)$$

El factor de masa μ hace que las variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R_1$ y R_2 tengan dimensiones de distancias. En el sistema de ejes principales, sólo tenemos 3 coordenadas independientes: R_1, R_2 y σ .

En adelante, R_1, R_2 y σ son utilizadas como coordenadas generalizadas. Para encontrar la energía cinética (2.13) en las nuevas coordenadas, derivamos \mathbf{s}_x , y \mathbf{s}_y , respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_x &= \dot{\alpha} \mathbf{a} + \dot{\beta} \mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{s}}_y &= \dot{\gamma} \mathbf{a} + \dot{\delta} \mathbf{b}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{R}_2 \cos \sigma - R_2 \text{sen } \sigma \dot{\sigma}, \\ \dot{\beta} &= \dot{R}_2 \text{sen } \sigma + R_2 \cos \sigma \dot{\sigma}, \\ \dot{\gamma} &= -\dot{R}_1 \text{sen } \sigma - R_1 \cos \sigma \dot{\sigma}, \\ \dot{\delta} &= \dot{R}_1 \cos \sigma - R_1 \text{sen } \sigma \dot{\sigma}. \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{s}}_j^2 &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{s}}_x \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_x^T + \dot{\mathbf{s}}_y \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_y^T) \\
&= \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{b}^T + \dot{\beta} \dot{\alpha} \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\beta}^2 \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T + \\
&\quad + \dot{\gamma}^2 \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\gamma} \dot{\delta} \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{b}^T + \dot{\delta} \dot{\gamma} \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\delta}^2 \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T). \\
&= \frac{1}{2} \mu (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2). \\
&= \frac{1}{2} \mu (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2).
\end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ y $\dot{\delta}$ y sustituimos en la última ecuación

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}^2 &= \dot{R}_2^2 \cos^2 \sigma - 2\dot{R}_2 R_2 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin \sigma + R_2^2 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma, \\
\dot{\beta}^2 &= \dot{R}_2^2 \sin^2 \sigma + 2\dot{R}_2 R_2 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin \sigma + R_2^2 \dot{\sigma}^2 \cos^2 \sigma, \\
\dot{\gamma}^2 &= \dot{R}_1^2 \sin^2 \sigma + 2\dot{R}_1 R_1 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin \sigma + R_1^2 \dot{\sigma}^2 \cos^2 \sigma, \\
\dot{\delta}^2 &= \dot{R}_1^2 \cos^2 \sigma - 2\dot{R}_1 R_1 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin \sigma + R_1^2 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2 &= \dot{R}_2^2 + R_2^2 \dot{\sigma}^2 + \dot{R}_1^2 + R_1^2 \dot{\sigma}^2 \\
&= \dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2.
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{s}}_j^2 = \mu \left[\frac{1}{2} \dot{R}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2 \right]. \quad (2.34)$$

Procedemos a desarrollar el primer término del lado derecho de la ecuación (2.13), iniciando con

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{s}}_x \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_x^T &= (\dot{\alpha} \mathbf{a} + \dot{\beta} \mathbf{b}) \mathbf{M} (\dot{\alpha} \mathbf{a}^T + \dot{\beta} \mathbf{b}^T) \\
&= \dot{\alpha}^2 \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{b}^T + \dot{\beta} \dot{\alpha} \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{a}^T + \dot{\beta}^2 \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T \\
&= \dot{\alpha}^2 \mu + \dot{\beta}^2 \mu
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{s}}_x \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_x^T = \mu (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$$

De manera análoga, encontramos

$$\dot{\mathbf{s}}_y \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_y^T = \mu (\dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2)$$

obteniendo

$$\mu (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2) = \mu [\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2]$$

y así queda

$$\dot{\mathbf{s}}_y \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}}_y^T = \mu (\dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2) = \frac{\mu}{2} [\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2].$$

Para el segundo término desarrollamos

$$\begin{aligned} \sum_j m_j \mathbf{s}_j \times \dot{\mathbf{s}}_j &= \mu (s_x \dot{s}_y - s_y \dot{s}_x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mu [-R_2 \dot{R}_1 \cos \sigma \sin \sigma + R_2 \dot{R}_1 \cos \sigma \sin \sigma - (R_1 R_2 \cos^2 \sigma \dot{\sigma} + \\ &\quad + R_1 R_2 \sin^2 \sigma \dot{\sigma}) + R_1 \dot{R}_2 \cos \sigma \sin \sigma - R_1 \dot{R}_2 \cos \sigma \sin \sigma + \\ &\quad - (R_1 R_2 \sin^2 \sigma \dot{\sigma} + R_1 R_2 \sin^2 \sigma \dot{\sigma})] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -2\mu R_1 R_2 \dot{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

resultando que

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_j m_j \mathbf{s}_j \times \dot{\mathbf{s}}_j = -2\mu R_1 R_2 \dot{\sigma} \omega_3,$$

donde finalmente la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \mu \left[\frac{1}{2} \dot{R}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} (R_1 + R_2) \dot{\sigma}^2 - 2R_1 R_2 \dot{\sigma} \omega_3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1}{2} \omega_1^2 + \frac{R_2}{2} \omega_2^2 + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \omega_3^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La energía potencial está en función del inverso de las distancias entre las partículas, en el capítulo 3 se calculan explícitamente estas distancias y sus cuadrados resultan:

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} R_1^2 \sin^2 \sigma + R_2^2 \cos^2 \sigma \\ R_1^2 \cos^2 \sigma + R_2^2 \sin^2 \sigma \\ (R_2^2 - R_1^2) 2 \sin \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

donde, llamemos r_{23} la distancia que existe entre las partículas 2 y 3, r_{13} la distancia que existe entre las partículas 1 y 3 y r_{12} entre las partículas 1 y 2 y la matriz \mathbf{B} está dada como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} m_1^2 b_1^2 & m_1^2 a_1^2 & -m_1 a_1 b_1 \\ m_2^2 b_2^2 & m_2^2 a_2^2 & -m_2 a_2 b_2 \\ m_3^2 b_3^2 & m_3^2 a_3^2 & -m_3 a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

2.4. El caso de Lagrange

Un ejemplo de aplicación de estas coordenadas lo encontramos en el interesante artículo sobre el caso de Lagrange de E. Piña [51].

El problema de tres cuerpos puede resolverse de manera cerrada y elemental si se asume que el triángulo formado por las tres partículas siempre permanece similar a sí mismo.

En las nuevas coordenadas tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= 0, \\ R_1 &= \lambda \tilde{R}_1, \\ R_2 &= \lambda \tilde{R}_2, \\ r_{23} &= \lambda \tilde{r}_{23}, \quad r_{13} = \lambda \tilde{r}_{13}, \quad r_{12} = \lambda \tilde{r}_{12}, \end{aligned}$$

donde λ es un factor de escala asociado a la similaridad, y donde \tilde{R}_1 , \tilde{R}_2 , \tilde{r}_{23} , \tilde{r}_{13} y \tilde{r}_{12} , son constantes que corresponden a $\lambda = 1$.

Las ecuaciones de movimiento que expresan la conservación del vector momento angular se convierten en:

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2 \omega_1) = -\lambda^2 \omega_2 \omega_3, \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2 \omega_2) = \lambda^2 \omega_1 \omega_3, \quad (2.39)$$

y

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2 \omega_3) = -\frac{\tilde{R}_2^2 - \tilde{R}_1^2}{\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2} \lambda^2 \omega_1 \omega_2, \quad (2.40)$$

hemos dicho ya que las distancias al cuadrado entre las partículas, se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} R_1^2 \sin^2 \sigma + R_2^2 \cos^2 \sigma \\ R_1^2 \cos^2 \sigma + R_2^2 \sin^2 \sigma \\ (R_2^2 - R_1^2) 2 \sin \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

donde la matriz \mathbf{B} general esta dada mediante:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} m_1^2 b_1^2 & m_1^2 a_1^2 & -m_1 a_1 b_1 \\ m_2^2 b_2^2 & m_2^2 a_2^2 & -m_2 a_2 b_2 \\ m_3^2 b_3^2 & m_3^2 a_3^2 & -m_3 a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

tendremos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda^2 \omega_3) = & - \left(\frac{\tilde{R}_2^2 - \tilde{R}_1^2}{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2} \right) \frac{1}{\lambda} \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{4} \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \times \\ & \times \mathbf{B} \begin{pmatrix} 2 \sin \sigma \cos \sigma \\ -2 \sin \sigma \cos \sigma \\ -\cos^2 \sigma + \sin^2 \sigma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \lambda(\omega_3^2 + \omega_1^2) - \\ & - \frac{1}{\lambda^2} G(m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \sin^2 \sigma \\ \cos^2 \sigma \\ -\sin \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \lambda(\omega_3^2 + \omega_2^2) - \\ & - \frac{1}{\lambda^2} G(m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma \\ \sin^2 \sigma \\ \sin \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

De la integración de las dos primeras ecuaciones de movimiento se obtiene

$$\lambda^4(\omega_1^2 + \omega_2^2) = C^2 \quad (\text{constante}). \quad (2.46)$$

Se observa que aparece la misma cantidad en el lado izquierdo de las ecuaciones (2.40) y (2.43) lo que resulta en la condición de compatibilidad

$$2\lambda^4\omega_1\omega_2 = \lambda G(m_1 + m_2 + m_3) \frac{\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2}{2\tilde{R}_1\tilde{R}_2} \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \times \\ \times \mathbf{B} \begin{pmatrix} 2\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ -2\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ -\cos^2 \sigma + \text{sen}^2 \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

se observa que también las ecuaciones (2.44) y (2.45) tienen condición de compatibilidad lo que resulta como

$$\lambda^4(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \lambda G(m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \times \\ \times \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma - \text{sen}^2 \sigma \\ -\cos^2 \sigma + \text{sen}^2 \sigma \\ 2\text{sen}\sigma \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Se introduce la variable auxiliar ξ que cumple con

$$\lambda^2\omega_1 = C \text{sen } \xi, \quad \lambda^2\omega_2 = C \cos \xi, \quad (2.49)$$

la ecuación (2.46) está idénticamente satisfecha y los lados izquierdos de las expresiones (2.47) y (2.48) se igualan respectivamente a $C^2\text{sen}2\xi$ y $C^2\cos2\xi$ siendo ambos proporcionales a λ .

Sumando el cuadrado de ambas ecuaciones resulta en una $\lambda = \text{const.}$ indeseada.

Para evitar este caso y con la finalidad de que λ sea variable, se requiere

$$C = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0. \quad (2.50)$$

Las ecuaciones (2.44) y (2.45) se convierten en:

$$\ddot{\lambda} = \lambda\omega_3^2 - \frac{1}{2\lambda^2}G(m_1 + m_2 + m_3) \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

y las ecuaciones (2.47) y (2.48) imponen las condiciones

$$0 = \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} 2\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ -2\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ -\cos^2 \sigma + \text{sen}^2 \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

y

$$0 = \left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma - \operatorname{sen}^2 \sigma \\ -\cos^2 \sigma + \operatorname{sen}^2 \sigma \\ 2\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Para esto se requiere que el vector $\left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right) \mathbf{B}$ sea ortogonal a los otros 2 vectores en (2.52) y (2.53); esto es posible, para σ general, sólo cuando $\left(\frac{1}{\tilde{r}_{23}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}^3}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}^3} \right)$ es paralelo al vector $(1, 1, 1)$, lo que significa

$$\tilde{r}_{23} = \tilde{r}_{13} = \tilde{r}_{12}, \quad (2.54)$$

y las partículas se mueven equidistantemente.

El movimiento de cada partícula sigue el comportamiento newtoniano de dos cuerpos. La coordenada λ es proporcional a la distancia radial al centro de masas y, la ecuación (2.51) da la correspondiente evolución temporal. Debido a que la dirección de la velocidad angular es constante se tiene

$$\omega_3 = \dot{\psi}, \quad (2.55)$$

y la ecuación (2.40) se convierte en la segunda ley de Kepler:

$$\lambda^2 \dot{\psi} = \text{const.} \quad (2.56)$$

2.5. El caso de Euler

Otro ejemplo de como se pueden aplicar estas coordenadas se encuentra en el artículo sobre el caso de Euler de E. Piña y L. Jiménez-Lara [53].

El problema de Tres Cuerpos puede solucionarse a través del movimiento colineal de Euler, donde las tres masas se mueven en tres órbitas cónicas de Kepler con un foco común en el centro de gravedad.

En el próximo capítulo, en la ecuación (3.36) mostraremos que el área del triángulo formado por las tres partículas es

$$A = \frac{R_1 R_2}{2}. \quad (2.57)$$

Las partículas permanecen en una línea cuando el área del triángulo formado por las tres partículas, es igual a 0. Esto también ocurrirá cuando

alguno de los momentos de inercia es cero, consideramos en este caso sin pérdida de generalidad que:

$$R_1 = 0, \quad R_2 \neq 0. \quad (2.58)$$

La solución está en un plano y sólo se usa un ángulo de Euler ψ para rotar al marco principal de inercia.

Encontramos una rotación con la matriz \mathbf{G} siguiente:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

La velocidad angular de esta rotación tiene la forma simple

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \dot{\psi}. \quad (2.60)$$

De esta forma, se encuentra que la conservación del momento angular se escribe como:

$$R_2^2 \dot{\psi} = \text{const.} \quad (2.61)$$

Ahora, los ángulos de Euler surgen en la lagrangiana en términos del vector de velocidad angular, y las ecuaciones de Lagrange se expresan en términos de las derivadas de la energía cinética con respecto a $\boldsymbol{\omega}$.

$$\mathbf{j} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}},$$

donde \mathbf{j} es el momento angular en el sistema rotatorio de ejes principales. Ahora, la ecuación de Euler queda expresada como:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega},$$

que en la forma de las nuevas coordenadas se escribe como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R_1^2 \omega_1 \\ R_2^2 \omega_2 \\ (R_1^2 + R_2^2) \omega_3 - 2R_1 R_2 \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1^2 \omega_2 \omega_3 + 2\omega_2 R_1 R_2 \dot{\sigma} \\ R_2^2 \omega_1 \omega_3 - 2\omega_1 R_1 R_2 \dot{\sigma} \\ -\omega_1 \omega_2 (R_1^2 + R_2^2) \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

se satisface trivialmente. Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt}(R_2^2 \dot{\sigma}) = -R_2^2 \frac{Gm_1 m_2 m_3}{\mu} \left(\frac{1}{m_1 r_{23}^3}, \frac{1}{m_2 r_{13}^3}, \frac{1}{m_3 r_{12}^3} \right)$$

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} -\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ \text{sen}\sigma \cos \sigma \\ \cos^2 \sigma - \text{sen}^2 \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$0 = -2R_2 \dot{\sigma} \dot{\psi} \quad (2.64)$$

y

$$\ddot{R}_2 = R_2 \dot{\sigma}^2 + R_2 \dot{\psi}^2 - R_2 \frac{Gm_1 m_2 m_3}{\mu} \left(\frac{1}{m_1 r_{23}^3}, \frac{1}{m_2 r_{13}^3}, \frac{1}{m_3 r_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma \\ \text{sen}^2 \sigma \\ 2\text{sen}\sigma \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

entonces de la ecuación (2.41) toma en este caso la forma

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = R_2^2 \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma \\ \text{sen}^2 \sigma \\ 2\text{sen}\sigma \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

La ecuación (2.64) implica

$$\sigma = \text{const.} \quad (2.67)$$

las últimas dos ecuaciones muestran que las razones de las distancias son constantes, y el sistema de ecuaciones se simplifica a

$$\left(\frac{1}{m_1 r_{23}^3}, \frac{1}{m_2 r_{13}^3}, \frac{1}{m_3 r_{12}^3} \right) \mathbf{B} \begin{pmatrix} -\text{sen}\sigma \cos \sigma \\ \text{sen}\sigma \cos \sigma \\ \cos^2 \sigma - \text{sen}^2 \sigma \end{pmatrix} = 0, \quad (2.68)$$

$$\ddot{R}_2 = R_2 \dot{\psi}^2 - \frac{1}{R_2} \frac{Gm_1 m_2 m_3}{\mu} \left(\frac{1}{m_1 r_{23}}, \frac{1}{m_2 r_{13}}, \frac{1}{m_3 r_{12}} \right), \quad (2.69)$$

donde hemos utilizado la ecuación (2.66). Cancelando σ de las ecuaciones anteriores y utilizando las propiedades de la matriz \mathbf{B} se obtiene la condición de soluciones colineales.

$$\left(\frac{1}{r_{23}^3}, \frac{1}{r_{13}^3}, \frac{1}{r_{12}^3} \right) \begin{pmatrix} m_2 - m_3 & -(m_2 + m_3) & m_2 + m_3 \\ m_3 + m_1 & m_3 - m_1 & -(m_3 + m_1) \\ -(m_1 + m_2) & m_1 + m_2 & m_1 - m_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.70)$$

Para resolver esta ecuación, se deben asumir las posiciones relativas de las tres masas, y después la ecuación resuelta para la razón de dos distancias, se convierte en una ecuación de quinto grado con una solución positiva.

Capítulo 3

Problema Plano de Tres Cuerpos

3.1. La cinemática del movimiento en el problema Plano de Tres Cuerpos

Estudiamos el problema de tres cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 en las coordenadas introducidas en el capítulo anterior, pero ahora suponiendo que sus velocidades iniciales están en el plano de las tres partículas.

Tenemos que, el movimiento permanece en el plano, mismo que escogemos perpendicular al eje z , que es la dirección de uno de los ejes principales.

Puesto que $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ tomamos $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^2$, donde $i = 1, 2, 3$, como los vectores de posición de las partículas en los sistemas inercial y de ejes principales, respectivamente. Podemos mandar el marco de ejes principales al inercial mediante una rotación G_ψ por el ángulo ψ alrededor del eje z

$$\mathbf{r}_i = G_\psi \mathbf{s}_i. \quad (3.1)$$

Este es el problema plano de tres cuerpos mencionado en el capítulo anterior.

Definimos dos vectores \mathbf{s}_x y $\mathbf{s}_y \in \mathbb{R}^3$, con las tres posiciones x y y de los tres cuerpos en el sistema rotatorio de los ejes principales respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= (s_{1x}, s_{2x}, s_{3x}), \\ \mathbf{s}_y &= (s_{1y}, s_{2y}, s_{3y}), \end{aligned}$$

y denotamos mediante $\mathbf{P} = \text{Span}\{\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y\} \subset \mathbb{R}^3$, esto es, $\mathbf{P} \approx \mathbb{R}^2$.

El hecho de tener el centro de masas en el origen nos da

$$m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x} + m_3 s_{3x} = 0, \quad (3.2)$$

$$m_1 s_{1y} + m_2 s_{2y} + m_3 s_{3y} = 0, \quad (3.3)$$

y por definición, en el marco de ejes principales, los productos de inercia deben anularse

$$m_1 s_{1x} s_{1y} + m_2 s_{2x} s_{2y} + m_3 s_{3x} s_{3y} = 0, \quad (3.4)$$

por lo que podemos escribir las ecuaciones (3.2)-(3.4) como los productos internos

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{c} \rangle = 0, \quad (3.5)$$

$$\langle \mathbf{s}_y, \mathbf{c} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y \rangle = 0 \quad (3.6)$$

donde \langle, \rangle es un producto interior con la métrica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$\mathbf{c} = \varepsilon_c (1, 1, 1),$$

donde la constante ε_c será escogida más adelante.

La ortogonalidad de \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y con \mathbf{c} significa que el sistema coordenado está en el centro de masas

$$\langle \mathbf{s}_\alpha, \mathbf{c} \rangle = m_1 s_{1\alpha} + m_2 s_{2\alpha} + m_3 s_{3\alpha} = 0, \quad \alpha = x, y$$

y la ortogonalidad de \mathbf{s}_x con \mathbf{s}_y significa que el marco es el de ejes principales

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y \rangle = m_1 s_{1x} s_{1y} + m_2 s_{2x} s_{2y} + m_3 s_{3x} s_{3y} = 0. \quad (3.7)$$

La medida del tamaño del sistema está dada por el momento de inercia total, esto es

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{s}_i^2 = m_1 \mathbf{s}_1^2 + m_2 \mathbf{s}_2^2 + m_3 \mathbf{s}_3^2 \\ &= \langle \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_x \rangle + \langle \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_y \rangle = \|\mathbf{s}_x\|^2 + \|\mathbf{s}_y\|^2, \end{aligned}$$

y podemos escribir los momentos principales en el plano como

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 m_i s_{iy}^2 = \|\mathbf{s}_y\|^2, \quad (3.8)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^3 m_i s_{ix}^2 = \|\mathbf{s}_x\|^2, \quad (3.9)$$

lo que nos conduce a

$$I_3 = \sum_{i=1}^3 m_i (s_{ix}^2 + s_{iy}^2) = I_1 + I_2 = I.$$

Ahora, requerimos dos vectores constantes, \mathbf{a} y \mathbf{b} , para que junto con \mathbf{c} formen una base ortogonal $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ de \mathbb{R}^3

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0, \quad (3.10)$$

con la normalización

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mu, \quad \|\mathbf{b}\|^2 = \mu, \quad \|\mathbf{c}\|^2 = \mu, \quad (3.11)$$

donde μ tiene dimensiones de masa, de manera que la base es adimensional. Luego $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ es una base de \mathbf{P} , donde $\mathbf{P} = \text{Span}\{s_x, s_y\} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{P} \approx \mathbb{R}^2$, que sólo depende de las masas. Tenemos, de la condición de norma (3.11).

$$\varepsilon_c = \sqrt{\mu/m}, \quad (3.12)$$

donde $m = m_1 + m_2 + m_3$ es la masa total de los tres cuerpos. Recordemos que la norma se calcula con métrica \mathbf{M} .

Las condiciones de ortogonalidad no fijan completamente las direcciones de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . Tienen una especie de simetría cilíndrica, alrededor de \mathbf{c} . Se debe dar una condición adicional para determinar completamente \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Sean $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ coordenadas de \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y , respectivamente, en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ de \mathbb{P}

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_x &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \\ \mathbf{s}_y &= \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Los momentos principales de inercia (3.8) y (3.9) están dados por

$$\begin{aligned}I_1 &= \|\mathbf{s}_y\|^2 = \mu(\gamma^2 + \delta^2), \\ I_2 &= \|\mathbf{s}_x\|^2 = \mu(\alpha^2 + \beta^2),\end{aligned}$$

y la ecuación (3.6)

$$\langle \mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y \rangle = \mu(\alpha\gamma + \beta\delta) = 0,$$

lo que sugiere que las coordenadas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se escriban de la manera (2.31)

$$\alpha = R_2 \cos \sigma, \quad \beta = R_2 \sin \sigma,$$

$$\gamma = -R_1 \sin \sigma, \quad \delta = R_1 \cos \sigma,\tag{3.14}$$

con $\sigma \in \mathbb{S}^1$, $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$, y cuando $t = 0$, seleccionamos $R_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $R_2 \in \mathbb{R}$. El cambio a estas coordenadas es un difeomorfismo, excepto cuando $R_1 = R_2$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}I_1 &= \mu R_1^2, \\ I_2 &= \mu R_2^2, \\ I_3 &= I = \mu(R_1^2 + R_2^2)\end{aligned}\tag{3.15}$$

en donde I es el momento total de inercia y las coordenadas de los vectores \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y están dadas por

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma & \text{sen } \sigma \\ -\text{sen } \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

esto es, \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y son una rotación en el plano P por el ángulo σ de los vectores $(R_2, 0)$ y $(0, R_1)$, respectivamente.

Cuando tratamos el problema plano y si se rota alrededor del eje perpendicular al plano en el que están las partículas entonces

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen} \psi & 0 \\ \text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

y tomando

$$\mathbf{s}_j = \left[a_j \begin{pmatrix} R_2 \cos \sigma \\ -R_1 \text{sen} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} + b_j \begin{pmatrix} R_2 \text{sen} \sigma \\ R_1 \text{sen} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.18)$$

tenemos

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{G} \mathbf{s}_j = \left[a_j \mathbf{G} \begin{pmatrix} R_2 \cos \sigma \\ -R_1 \text{sen} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} + b_j \mathbf{G} \begin{pmatrix} R_2 \text{sen} \sigma \\ R_1 \text{sen} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.19)$$

$$= a_j \begin{pmatrix} R_2 \cos \sigma \cos \psi + R_1 \text{sen} \sigma \text{sen} \psi \\ R_2 \cos \sigma \text{sen} \psi - R_1 \text{sen} \sigma \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \quad (3.20)$$

$$b_j \begin{pmatrix} R_2 \text{sen} \sigma \cos \psi - R_1 \cos \sigma \text{sen} \psi \\ R_2 \text{sen} \sigma \text{sen} \psi + R_1 \cos \sigma \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Si, además, escribimos

$$R_1 = R \cos \theta \quad y \quad R_2 = R \text{sen } \theta, \quad (3.22)$$

denotando la rotación como $\mathbf{R}(\sigma)$, entonces (3.16) se convierte en

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\sigma) \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} = R \mathbf{R}(\sigma) \begin{pmatrix} \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Entonces, salvo por la rotación por el ángulo ψ al sistema de ejes principales, y la homotecia R , podemos localizar los tres cuerpos con los dos ángulos

$$(\theta, \sigma) \in \mathbf{X} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus E, \quad (3.24)$$

donde

$$E = \{(\theta, \sigma) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mid \theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\} \quad (3.25)$$

es el conjunto donde los dos momentos de inercia son iguales.

Mientras que en el instante inicial, cuando $t = 0$, podemos escoger $\theta \in [0, \pi)$, o $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$, una vez que inicia el movimiento, θ está en general en $[0, 2\pi)$. Hay que notar que el siguiente par de puntos en \mathbf{X} resulta con la misma configuración de triángulos ((a) y (b)), o una es el reflejo por el origen del otro ((c) y (d)):

$$\begin{aligned} (a) \quad (\sigma, \theta) \quad & \text{y} \quad (\sigma + \pi, \theta + \pi), \\ & \text{donde} \quad \theta, \sigma \in [0, \pi), \\ (b) \quad (\sigma, \theta) \quad & \text{y} \quad (\sigma - \pi, \theta + \pi), \\ & \text{donde} \quad \theta \in [0, \pi), \sigma \in [\pi, 2\pi], \\ (c) \quad (\sigma, \theta) \quad & \text{y} \quad (\sigma + \pi, \theta), \\ & \text{donde} \quad \theta, \sigma \in [0, \pi), \\ (d) \quad (\sigma, \theta) \quad & \text{y} \quad (\sigma, \theta + \pi), \\ & \text{donde} \quad \theta \in [0, \pi), \sigma \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Llamamos \mathbf{X} al espacio de formas, de modo similar a la esfera de formas \mathbf{S} utilizada por Moeckel, Montgomery, Hsiang y otros autores [38, 44, 30], aunque no son el mismo espacio, ya que \mathbf{X} no es una esfera, como se puede observar en la figura (3.1) y la figura (3.2),

La mayor diferencia entre nuestras coordenadas y las de la esfera de formas \mathbf{S} es que nuestras coordenadas son singulares cuando

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4},$$

es decir $R_1 = R_2$, mientras que los polos en \mathbf{S} son las soluciones equiláteras.

Ahora encontraremos el área del triángulo formado por los tres cuerpos, tanto en el marco inercial como en el de ejes principales.

Obtendremos algunos resultados que requeriremos en los cálculos siguientes. Las propiedades duales de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ y $\{\mathbf{Ma}, \mathbf{Mb}, \mathbf{Mc}\}$ pueden expresarse mediante la ecuación matricial [53]

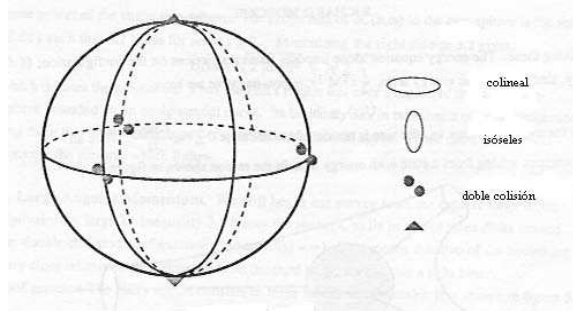


Figura 3.1: Esfera de formas S, tomada de [38]

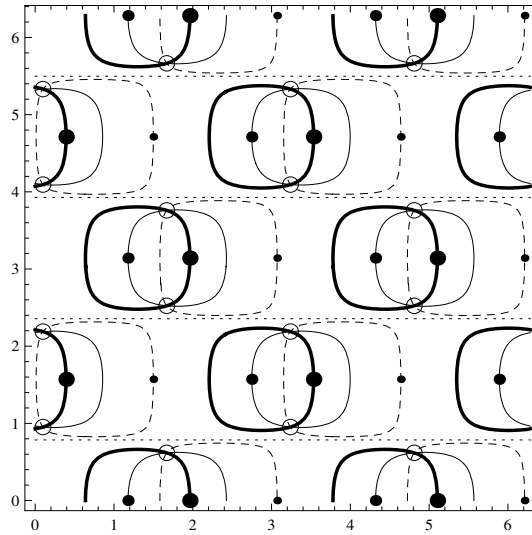


Figura 3.2: Espacio X donde el eje horizontal es σ y el vertical es θ . Las curvas cerradas muestran las configuraciones de triángulo isóseles: en la línea interrumpida, la configuración es tal que la partícula 3 es equidistante con la partícula 1 y 2; en la línea delgada la configuración es tal que la partícula 2 que es equidistante con la partícula 1 y 3; en la línea gruesa la configuración es tal que la partícula 1 es equidistante con la partícula 2 y la 3. La intersección de estas curvas, que se muestra con pequeños círculos, son triángulos equiláteros. Las colisiones dobles se muestran con puntos: Los puntos pequeños se usan cuando la colisión es entre las partículas 1 y 2, los puntos medianos para las partículas 1 con 3, los puntos grandes para las partículas 3 con 1.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Ya que una matriz es inversa en ambos lados, obtenemos

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \mu \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 & a_3a_2 + b_3b_2 + c_3c_2 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix} = \\ & = \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

de donde obtenemos seis ecuaciones

$$a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (3.29)$$

donde $\mathbf{c} = \epsilon_c(1, 1, 1)$, con la ecuación (3.12), tomando en cuenta esto, podemos escribir las ecuaciones (3.28) y (3.29) como sigue:

$$a_k^2 + b_k^2 + \frac{\mu}{m} = \frac{\mu}{m_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.30)$$

$$a_i a_j + b_i b_j + \frac{\mu}{m} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (3.31)$$

tomando el determinante en la ecuación (3.27) obtenemos

$$|\mathbf{abc}|^2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\mu}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{m_3} \end{pmatrix} = \mu^3 / (m_1 m_2 m_3)$$

esto es

$$\Delta = |\mathbf{abc}| = \sqrt{\mu^3 / \bar{m}},$$

donde $\bar{m} = m_1 m_2 m_3$.

Para encontrar el área de los triángulos formado por los tres cuerpos, realizaremos el producto vectorial de \mathbf{s}_x y \mathbf{s}_y , para obtener, con su módulo el área del paralelogramo formado por dichos vectores.

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y &= (s_{1x}, s_{2x}, s_{3x}) \times (s_{1y}, s_{2y}, s_{3y}) \\ &= (s_{2x}s_{3y} - s_{3x}s_{2y}, s_{1x}s_{3y} - s_{3x}s_{1y}, s_{1x}s_{2y} - s_{2x}s_{1y}) .\end{aligned}$$

Como podemos observar, $s_{ix}s_{jy} - s_{jx}s_{iy}$ es el área A_k^p del k -paralelogramo formado por \mathbf{s}_i , y \mathbf{s}_j , $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ (en permutaciones cíclicas), las posiciones de las tres masas en el marco de ejes principales. De ahí que

$$\mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y = (A_1^p, A_2^p, A_3^p) .$$

Tomando la ecuación (3.13),

$$\mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y = \alpha\delta\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \beta\gamma\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

y dado que $\mathbf{c} = \epsilon_c(1, 1, 1)$, obtenemos lo siguiente

$$\mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y = (\alpha\delta - \beta\gamma)\mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{3.32}$$

$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{|\mathbf{abc}|}{\mu}\mathbf{Mc} \tag{3.33}$$

$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{|\mathbf{abc}|}{\mu}\epsilon_c(m_1, m_2, m_3) . \tag{3.34}$$

El determinante Δ puede sustituirse en la ecuacion (3.34)

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_x \times \mathbf{s}_y &= (\alpha\delta - \beta\gamma)\sqrt{\frac{\mu^3\mu}{\mu^2\bar{m}m}}(m_1, m_2, m_3) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)\sqrt{\frac{\mu^2}{\bar{m}m}}(m_1, m_2, m_3) .\end{aligned}$$

De aquí que el área signada del triángulo es

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}(A_1^p + A_2^p + A_3^p) = \frac{1}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma)\mu\sqrt{m/\bar{m}} \\ &= \frac{1}{2}\mu\sqrt{m/\bar{m}}R_1R_2 \\ &= \frac{f}{4}R^2\sin(2\theta) ,\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $f = \mu\sqrt{\frac{m}{m}}$. En la referencia [53], $f = 1$ ya que $\mu = \sqrt{\frac{m}{m}}$ para ese caso, entonces se obtendría

$$A = \frac{1}{2}R_1R_2 = \frac{1}{4}R^2\text{sen}(2\theta). \quad (3.36)$$

Regresando a la ecuación (3.35), dividiendo por R^2 tenemos al área signada independiente del tamaño

$$\bar{A} = \frac{A}{R^2} = \frac{f}{4}\text{sen}(2\theta). \quad (3.37)$$

Entonces, salvo por la homotecia R , $\frac{f}{4}\text{sen}(2\theta)$ es la medida del área signada del triángulo formado por las tres masas. El área mayor se presenta para los valores $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ esto es, cuando los dos momentos de inercia principales son iguales, que no es la configuración equilátera, a menos que las tres masas tengan el mismo valor.

Denotamos mediante una barra aquellas cantidades que son independientes del tamaño como el área \bar{A} de la ecuación (3.37). Las posiciones x y y sin el factor de tamaño R en la base a, b son, de (3.23)

$$\frac{1}{R}(\alpha \ \beta) = \mathbf{R}(\sigma) (\text{sen}\theta, 0)^T$$

y

$$\frac{1}{R}(\gamma \ \delta) = \mathbf{R}(\sigma) (0, \text{cos}\theta)^T.$$

Las configuraciones de área máxima están parametrizadas mediante

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}_x &= \sqrt{2}/2(\text{cos } \sigma \mathbf{a} + \text{sen} \sigma \mathbf{b}) \\ \bar{\mathbf{s}}_y &= \sqrt{2}/2(-\text{sen} \sigma \mathbf{a} + \text{cos } \sigma \mathbf{b}) \end{aligned}$$

donde $\sigma \in \mathbb{S}^1$.

Si las partículas son colineales, entonces el área es cero, lo que se presenta para $\theta = 0, \pi$ si están a lo largo del eje y ($R_2 = 0$), o $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, si están a lo largo del eje x ($R_1 = 0$).

Más aún, el área signada es positiva para $\theta \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$. Cuando el triángulo pasa a través de una configuración colineal con área cero, el área signada cambia de signo y también cambia la orientación de los tres cuerpos.

Por otro lado, para un ángulo θ dado, de la ecuación (3.23) podemos ver que σ rota la configuración del triángulo con área fija cambiando las distancias relativas y posiciones. Tenemos que

$$\bar{s}_x = \text{sen}\theta(\cos\sigma \mathbf{a} + \text{sen}\sigma \mathbf{b}), \quad (3.38)$$

$$\bar{s}_y = \cos\theta(-\text{sen}\sigma \mathbf{a} + \cos\sigma \mathbf{b}), \quad (3.39)$$

entonces, cuando $\sigma = 0$ ($\sigma = \pi$), \bar{s}_x está en la dirección de \mathbf{a} ($-\mathbf{a}$) y, \bar{s}_y en la dirección de \mathbf{b} ($-\mathbf{b}$). Mientras σ crece, las tres partículas rotan manteniendo un área constante.

Los triángulos definidos por (θ, σ) y $(\theta + \pi, \sigma)$ en nuestro espacio de formas \mathbf{X} están en el mismo punto que en la esfera de formas \mathbf{S} debido a que se hace un cociente por rotaciones para construir la esfera de formas. No obstante, utilizaremos el espacio \mathbf{X} con esas configuraciones dadas por dos puntos diferentes porque hemos introducido explícitamente el cambio de coordenadas que es un difeomorfismo, excepto cuando $|R_1| = |R_2|$.

3.2. Casos colineales

3.2.1. Las tres partículas están en el eje y

Consideremos el caso colineal $\theta = 0$ (o $\theta = \pi$) en (3.38) y (3.39). Entonces $\bar{s}_x = 0$ y las tres partículas están en el eje y . Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos posiciones colineales independientes de las tres masas: $\bar{s}_y(\sigma = 0) = \mathbf{b}$ y, $\bar{s}_y(\sigma = \pi/2) = -\mathbf{a}$. Al incrementar σ , las posiciones y las distancias de las partículas cambian, hasta que dos de ellas pasan por colisión doble. Si denotamos mediante C_k a la colisión doble entre las partículas i y j , $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, que significa que $\{i, j, k\}$ son permutaciones cíclicas de $\{1, 2, 3\}$, habrá colisión doble C_k cuando $\bar{s}_{y_i} = \bar{s}_{y_j}$, esto es, cuando σ valga σ_k dada por

$$-\text{sen}\sigma_k a_i + \cos\sigma_k b_i = -\text{sen}\sigma_k a_j + \cos\sigma_k b_j$$

o

$$\tan\sigma_k = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}, \quad \theta = 0, \pi. \quad (3.40)$$

Con el fin de encontrar los ángulos de colisión doble y sus propiedades de una manera simple, usamos la base dual [53].

Retomando las propiedades de dualidad de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ y $\{\mathbf{Ma}, \mathbf{Mb}, \mathbf{Mc}\}$ pueden expresarse por la ecuación matricial

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = \frac{\mu}{m_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.42)$$

$$a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (3.43)$$

Más aún, si tomamos el determinante de (3.41), tenemos que

$$\Delta = |\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}| = \sqrt{\mu^3 / \bar{m}},$$

siendo $\bar{m} = m_1 m_2 m_3$. Los vectores duales satisfacen

$$\begin{aligned} \mathbf{Ma} &= \mu \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\Delta} = \frac{\mu \epsilon_c}{\Delta} (b_2 - b_3, b_3 - b_1, b_1 - b_2)^T \\ &= \sqrt{\bar{m}/m} (b_2 - b_3, b_3 - b_1, b_1 - b_2)^T, \\ -\mathbf{Mb} &= \mu \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{\Delta} = \frac{\mu \epsilon_c}{\Delta} (a_2 - a_3, a_3 - a_1, a_1 - a_2)^T \\ &= \sqrt{\bar{m}/m} (a_2 - a_3, a_3 - a_1, a_1 - a_2)^T, \end{aligned} \quad (3.44)$$

entonces podemos calcular las diferencias $b_i - b_j$ y $a_i - a_j$ de (3.40) con

$$\sqrt{\frac{\bar{m}}{m}} (b_i - b_j) = m_k a_k, \quad (3.45)$$

$$\sqrt{\frac{\bar{m}}{m}} (a_i - a_j) = -m_k b_k, \quad (3.46)$$

donde $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Los ángulos de colisión doble σ_k de (3.40) están dados por

$$\tan \sigma_k = -\frac{a_k}{b_k}, \quad \theta = 0, \pi. \quad (3.47)$$

Esta ecuación sugiere escribir $a_k = -e_k \sin \sigma_k$ y $b_k = e_k \cos \sigma_k$ (o $a_k = e_k \sin \sigma_k$, y $b_k = -e_k \cos \sigma_k$ que en este caso los ángulos de colisión serán en $\sigma_k \rightarrow \sigma_k \pm \pi$), donde e_k son constantes positivas tales que $a_k^2 + b_k^2 = e_k^2$. Una sustitución similar, pero con una base particular de \mathbf{P} se hace en [8]. Los signos de a_k y b_k definen en qué cuadrante está σ_k . Por la ecuación (3.11), los factores e_k deben estar en el elipsoide

$$\frac{e_1^2}{2\mu/m_1} + \frac{e_2^2}{2\mu/m_2} + \frac{e_3^2}{2\mu/m_3} = 1, \quad (3.48)$$

y se pueden calcular de las ecuaciones (3.42)

$$e_k = \epsilon_c \sqrt{\frac{m_i + m_j}{m_k}}, \quad (3.49)$$

con $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ y ϵ_c .

3.2.2. Las tres partículas están sobre el eje x

Ahora, se establece la condición colineal $\theta = \pi/2$ (o $\theta = 3\pi/2$), entonces $s_y = 0$, obtenemos los ángulos de colisión doble σ'_k entre las partículas i y j ($\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$) cuando $\tan \sigma'_k = b_k/a_k = -\cot \sigma_k$, esto es, ahora los ángulos de colisión doble están en $\sigma_k + \pi/2 \text{ mod}(\pi)$. Está presente una fase de $\pi/2$ en el ángulo σ entre los dos casos colineales, $R_1 = 0$ o $R_2 = 0$.

De ahí que, una vez que tenemos los dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} de la base de \mathbf{P} en términos de las masas, los ángulos de colisión doble también están definidos en términos de las masas con la ecuación (3.47). Además, de la ecuación (3.43), las diferencias de los ángulos de colisión doble satisfacen

$$\begin{aligned} \cos(\sigma_1 - \sigma_2) &= \pm \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}} = \pm \frac{\epsilon_c}{e_1 e_2}, \\ \cos(\sigma_1 - \sigma_3) &= \pm \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}} = \pm \frac{\epsilon_c}{e_1 e_3}, \\ \cos(\sigma_2 - \sigma_3) &= \pm \sqrt{\frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}} = \pm \frac{\epsilon_c}{e_2 e_3}. \end{aligned}$$

Los signos dependen de los de a_k y b_k , $k = 1, 2, 3$, dados por las ecuaciones (3.45) y (3.46). Las diferencias de los ángulos de colisión doble, no sus valores, están determinadas por las masas.

Para calcular el cuadrado de las distancias entre las partículas partimos de la base dual

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

y tomamos el vector \mathbf{c} tal que

$$\mathbf{c}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \mu$$

sabiendo que

$$\mathbf{c} = \epsilon_c (1, 1, 1)$$

y

$$\Delta = |\mathbf{abc}|$$

retomando (3.44) y desarrollando

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{aM} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\Delta} = \frac{\epsilon_c}{\Delta} [\mathbf{b} \times (1, 1, 1)],$$

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{aM} = \frac{\epsilon_c}{\Delta} (b_2 - b_3, b_3 - b_1, b_1 - b_2),$$

obteniendo

$$(b_2 - b_3, b_3 - b_1, b_1 - b_2) = \frac{\Delta}{\epsilon_c \mu} \mathbf{aM}.$$

Análogamente

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{bM} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\Delta} = \frac{\epsilon_c}{\Delta} [(1, 1, 1) \times \mathbf{a}], \quad (3.50)$$

obteniendo

$$(a_3 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_1) = \frac{\Delta}{\epsilon_c \mu} \mathbf{bM},$$

y reordenando tenemos

$$(a_2 - a_3, a_3 - a_1, a_1 - a_2) = -\frac{\Delta}{\epsilon_c \mu} \mathbf{bM}. \quad (3.51)$$

Retomando (3.13)

$$\begin{pmatrix} s_{1x} & s_{2x} & s_{3x} \\ s_{1y} & s_{2y} & s_{3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

para así calcular las distancias

$$\begin{pmatrix} s_{2x} - s_{3x} & s_{3x} - s_{1x} & s_{1x} - s_{2x} \\ s_{2y} - s_{3y} & s_{3y} - s_{1y} & s_{1y} - s_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 - a_3 & a_3 - a_1 & a_1 - a_2 \\ b_2 - b_3 & b_3 - b_1 & b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

donde podemos utilizar ecuación (3.50) y ecuación (3.51)

$$\begin{pmatrix} s_{2x} - s_{3x} & s_{3x} - s_{1x} & s_{1x} - s_{2x} \\ s_{2y} - s_{3y} & s_{3y} - s_{1y} & s_{1y} - s_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{\Delta}{\epsilon_c \mu} \begin{pmatrix} -b_1 m_1 & -b_2 m_2 & -b_3 m_3 \\ a_1 m_1 & a_2 m_2 & a_3 m_3 \end{pmatrix},$$

ahora, recordemos que r_{23} es la distancia que existe entre las partículas 2 y 3, r_{13} la distancia que existe entre las partículas 1 y 3 y r_{12} entre las partículas 1 y 2, por lo que se puede escribir

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s_{2x} - s_{3x})^2 + (s_{2y} - s_{3y})^2 \\ (s_{3x} - s_{1x})^2 + (s_{3y} - s_{1y})^2 \\ (s_{1x} - s_{2x})^2 + (s_{1y} - s_{2y})^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{\Delta^2}{\epsilon_c^2 \mu^2} \begin{pmatrix} m_1^2 b_1^2 & m_1^2 a_1^2 & -m_1^2 a_1 b_1 \\ m_2^2 b_2^2 & m_2^2 a_2^2 & -m_2^2 a_2 b_2 \\ m_3^2 b_3^2 & m_3^2 a_3^2 & -m_3^2 a_3 b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 \\ \beta^2 + \delta^2 \\ 2(\alpha\beta + \gamma\delta) \end{pmatrix}.$$

Definiendo

$$\mathbf{B} = \frac{\Delta^2}{\epsilon_c^2 \mu^2} \begin{pmatrix} m_1^2 b_1^2 & m_1^2 a_1^2 & -m_1^2 a_1 b_1 \\ m_2^2 b_2^2 & m_2^2 a_2^2 & -m_2^2 a_2 b_2 \\ m_3^2 b_3^2 & m_3^2 a_3^2 & -m_3^2 a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

y desarrollando mediante (3.13) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 \\ \beta^2 + \delta^2 \\ 2(\alpha\beta + \gamma\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^2 \sen^2 \sigma + R_2^2 \cos^2 \sigma \\ R_1^2 \cos^2 \sigma + R_2^2 \sen^2 \sigma \\ (R_2^2 - R_1^2) 2 \sen \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} R_1^2 \sen^2 \sigma + R_2^2 \cos^2 \sigma \\ R_1^2 \cos^2 \sigma + R_2^2 \sen^2 \sigma \\ (R_2^2 - R_1^2) 2 \sen \sigma \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Recordando que $\Delta = \frac{\mu^3}{\bar{m}}$, $\mu = \sqrt{\frac{\bar{m}}{m}}$ y $\epsilon_c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$, donde además $\bar{m} = m_1 m_2 m_3$ y $m = m_1 + m_2 + m_3$, podemos realizar la siguiente simplificación

$$\frac{\Delta^2}{\epsilon_c^2 \mu^2} = \frac{\mu^3 m}{\bar{m} \mu \mu^2} = \frac{1}{\frac{\bar{m}}{m}} = \frac{1}{\mu^2},$$

donde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} m_1^2 b_1^2 & m_1^2 a_1^2 & -m_1^2 a_1 b_1 \\ m_2^2 b_2^2 & m_2^2 a_2^2 & -m_2^2 a_2 b_2 \\ m_3^2 b_3^2 & m_3^2 a_3^2 & -m_3^2 a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Sustituyendo las componentes a_k y b_k obtenemos

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu m} \begin{pmatrix} m_1 (m_2 + m_3) [R_1^2 + R_2^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos 2(\sigma - \sigma_1)] \\ m_2 (m_1 + m_3) [R_1^2 + R_2^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos 2(\sigma - \sigma_2)] \\ m_3 (m_1 + m_2) [(R_1^2 + R_2^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cos 2(\sigma - \sigma_3))] \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

o las distancias en función de R y los dos ángulos θ y σ como

$$\begin{pmatrix} r_{23}^2 \\ r_{13}^2 \\ r_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{R^2}{2\mu m} \begin{pmatrix} m_1 (m_2 + m_3) [1 - \cos 2(\sigma - \sigma_1) \cos(2\theta)] \\ m_2 (m_1 + m_3) [1 - \cos 2(\sigma - \sigma_2) \cos(2\theta)] \\ m_3 (m_1 + m_2) [1 - \cos 2(\sigma - \sigma_3) \cos(2\theta)] \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Nuevamente, sólo las diferencias $\sigma - \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$ y θ caracterizan la forma del triángulo. De las anteriores ecuaciones para las distancias, observamos que una colisión doble C_k tiene lugar cuando $r_{ij} = 0$, $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, esto es cuando $\theta = 0, \pi$ y σ tiene un valor $\sigma_k \pmod{\pi}$, si las partículas están sobre el eje y , y también cuando $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ y σ vale $\sigma_k \pm \pi/2 \pmod{\pi}$, en este caso las partículas están sobre el eje x , como ya se había analizado.

Los resultados anteriores son generales para cualquier base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ de \mathbb{P} , que junto con \mathbf{c} , forman una base ortonormal en \mathbb{R}^3 y, satisfacen las condiciones de ortonormalización (3.10) y (3.11) y para cualquier factor de norma μ .

Anteriormente hicimos notar que debe darse una condición extra para poder determinar completamente los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . En [31] y [54], la condición es

$$\mathbf{b} \mathbf{M}^2 \mathbf{a}^T = 0,$$

y en [51] y [53] la condición adicional es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T = 0 \quad (3.57)$$

donde el punto es el producto euclidiano habitual. Una vez que se escoge la base, se fijan los ángulos de colisión.

Como ejemplo, escojamos la condición extra expresada en la ecuación (3.57), así como la norma

$$\mu = \sqrt{\bar{m}/m}, \quad (3.58)$$

recordando que $\bar{m} = m_1 m_2 m_3$ y $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Existen números reales $x, y \in \mathbb{R}$, tales que

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = x\mathbf{a} + y\mathbf{M}\mathbf{c}.$$

De donde

$$\mathbf{a} = y\epsilon_c(\mathbf{M} - x\mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{M}(1, 1, 1)^T$$

recordando que ϵ_c esta dada por la expresión (3.12) y siempre que

$$|\mathbf{M} - x\mathbf{1}| \neq 0.$$

En lo siguiente asumimos sin pérdida de generalidad, que las tres masas satisfacen

$$m_1 > m_2 > m_3.$$

Con un procedimiento similar para \mathbf{b} obtenemos las siguientes expresiones para la base

$$\mathbf{a} = y_a \left(\frac{m_1}{m_1 - x_a}, \frac{m_2}{m_2 - x_a}, \frac{m_3}{m_3 - x_a} \right), \quad (3.59)$$

$$\mathbf{b} = y_b \left(\frac{m_1}{m_1 - x_b}, \frac{m_2}{m_2 - x_b}, \frac{m_3}{m_3 - x_b} \right), \quad (3.60)$$

donde y_a y y_b se obtienen de la condición de norma dado por la ecuación (3.11), y los escogemos como números positivos.

Sustituyendo la ecuación (3.59) en

$$\mathbf{a}\mathbf{M}\mathbf{a}^T = \mu,$$

o bien, sustituyendo la ecuación (3.60) en

$$\mathbf{b}\mathbf{M}\mathbf{b}^T = \mu.$$

Ahora, tenemos

$$\mathbf{aMc}^T = \frac{m_1^2}{m_1 - x} + \frac{m_2^2}{m_2 - x} + \frac{m_3^2}{m_3 - x} = 0$$

esto es

$$\frac{m_1^2(m_2 - x)(m_3 - x) + m_2^2(m_1 - x)(m_3 - x) + m_3^2(m_1 - x)(m_2 - x)}{(m_1 - x)(m_2 - x)(m_3 - x)} = 0,$$

$$\begin{aligned} & m_1^2(m_2m_3 - m_2x - m_3x + x^2) + m_2^2(m_1m_3 - m_1x - m_3x + x^2) + \\ & + m_3^2(m_1m_2 - m_1x - m_2x + x^2) = 0, \\ & m_1^2x^2 - m_1(m_1m_2 + m_1m_3)x + m_1(m_1m_2m_3) + m_2^2x^2 + \\ & - m_2(m_2m_1 + m_2m_3)x + m_2(m_1m_2m_3) + m_3^2x^2 + \\ & - m_3(m_3m_1 + m_3m_2)x + m_3(m_1m_2m_3) = 0, \end{aligned}$$

que sumando y restando términos como

$$2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)x^2 - 2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)x^2$$

nos permite escribir en las expresiones

$$[(m_1 + m_2 + m_3)^2 - 2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)] x^2$$

así como

$$-3m_1m_2m_3x + 3m_1m_2m_3x$$

para obtener

$$- [(m_1 + m_2 + m_3)(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) - 3m_1m_2m_3] x$$

y finalmente se consigue la expresión

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_2 + m_3)^2 - 2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)] x^2 + \\ & - [(m_1 + m_2 + m_3)(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) - 3m_1m_2m_3] x + \\ & + (m_1 + m_2 + m_3)(m_1m_2m_3) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

obtenemos una ecuación cuadrática donde una raíz es x_a y la otra x_b .

$$(m^2 - 2\hat{m})x^2 - (m\hat{m} - 3\bar{m})x + m\bar{m} = 0, \quad (3.62)$$

siendo $\hat{m} = m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2$, y

$$x_{a,b} = \frac{(m \hat{m} - 3 \bar{m}) \pm \sqrt{(m \hat{m} - 3 \bar{m})^2 - 4(m^2 - 2 \hat{m})m\bar{m}}}{2(m^2 - 2 \hat{m})} \quad (3.63)$$

Por otro lado, de la ecuación (3.59), se puede observar que

$$m_1 > x_a > m_3,$$

o de la ecuación (3.60) que

$$m_1 > x_b > m_3,$$

de otro modo las tres coordenadas a_i , $i = 1, 2, 3$ tendrían el mismo signo, lo mismo pasa con b_i , $i = 1, 2, 3$ y los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} no satisfecerían la condición de que el centro de masas está fijo en el origen:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0.$$

Por último, dado que $\mathbf{aMb}^T = 0$, tenemos que $a_2b_2 < 0$, que significa que una de las soluciones de la ecuación (3.62) es mayor que m_2 , mientras que la otra es menor. Resumiendo, si escogemos x_a , x_b como la mayor o menor de las soluciones de la ecuación (3.62), entonces son reales y deben satisfacer que

$$m_1 > x_a > m_2 > x_b > m_3.$$

Para el caso particular en que $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, los valores de x_a , x_b , y_a y y_b son:

$$\begin{aligned} x_a &= 2,32038, & y_a &= 0,0854449, \\ x_b &= 1,10819, & y_b &= 0,0985189, \end{aligned}$$

y la base resultante es

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0,37717, -0,53340, -0,06471), \\ \mathbf{b} &= (0,15623, 0,22094, -0,91057). \end{aligned}$$

Estos valores para las masas y la base serán utilizados en lo que resta de esta sección.

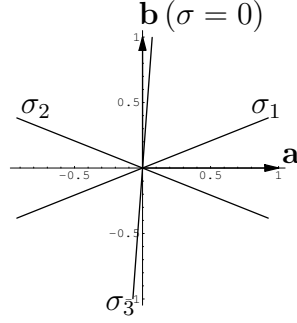


Figura 3.3: Ángulos de Colisión doble en el plano P para $\theta = 0$ y $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$. La base está dada por (3.59) y (3.60): $\mathbf{a} = (0,377172, -0,533402, -0,0647125)$, $\mathbf{b} = (0,15623, 0,220942, -0,910574)$. Las tres partículas están colineales en el eje y en las posiciones $\bar{s}_y = -\sin \sigma \mathbf{a} + \cos \sigma \mathbf{b}$. Por ejemplo $\bar{s}_y(0) = \mathbf{b}$, $\bar{s}_y(\pi/2) = -\mathbf{a}$ y $\bar{s}_y(\sigma_i)$ y $\mathbf{s}_y(\sigma_i \pm \pi)$ son configuraciones de la colisión C_i .

Los ángulos de doble colisión C_i para $\theta = 0, \pi$, que nos indica que las tres partículas están a lo largo del eje y , están localizadas en

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 5,10509, \\ \sigma_2 &= 1,17810, \\ \sigma_3 &= 3,07064.\end{aligned}$$

Podemos ver también que en $\sigma_i + \pi$, mod 2π , tiene lugar una colisión doble en C_i , $i = 1, 2, 3$. Se muestran dichos ángulos en la Figura 3.3

La figura 3.4 muestra a las tres masas en el sistema de ejes principales, cuando $R = 1$, $\theta = 0,4$ están fijas, y σ está incrementándose en $\pi/4$ partiendo de cero. Las tres partículas rotan manteniendo un área signada constante. En σ y $\sigma + \pi$, tienen la misma configuración, pero reflejadas por el origen.

Por otra parte, en la Figura 3.5, dibujamos los triángulos de tal manera que m_1 está fija en la posición anterior izquierda, m_2 en la posición inferior derecha y m_3 viaja por la curva cerrada mientras σ cambia de cero a π . Todos estos triángulos tienen la misma área.

En la figura 3.6 mostramos nuevamente los tres cuerpos cuando $R = 1$, pero ahora $\sigma = \pi/6$ está fijo y θ se incrementa por $\pi/4$ iniciando desde cero. Las masas alternan de configuración colineal a configuración de área máxima, con reflejos por los ejes x y y después de cada configuración colineal, donde ocurre un cambio de orientación.

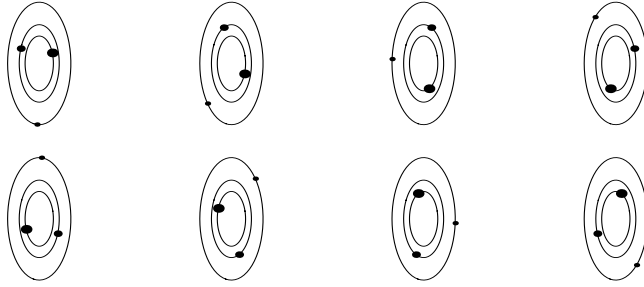


Figura 3.4: Posiciones de las tres masas en el sistema de ejes principales cuando $R = 1$, $\theta = 0,4$, y $\sigma = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$. m_1 es el punto más grande, m_3 es el punto más pequeño.

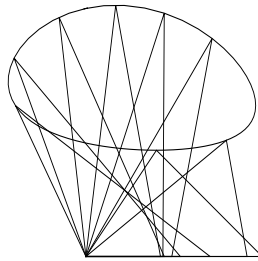


Figura 3.5: La masa m_1 está fija en la posición inferior izquierda, m_2 en la posición inferior derecha, y m_3 viaja alrededor de la curva cerrada, mientras σ cambia de cero a π y $\theta = 0,4$. Todos estos triángulos tienen la misma área.

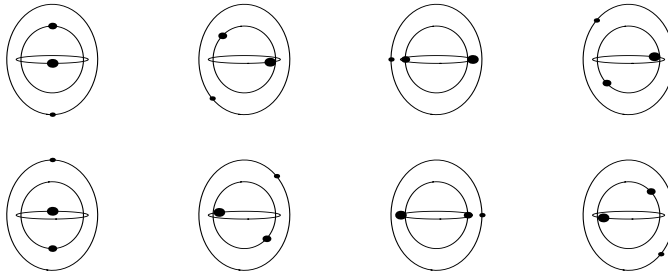


Figura 3.6: Posiciones de los tres cuerpos en el sistema de ejes principales cuando $R = 1$, $\sigma = \pi/6$ y $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$. m_1 es el punto más grande, m_3 es el punto más pequeño.

Observamos que las configuraciones de Euler E_j (la j -ésima partícula está entre la i -ésima y la k -ésima partículas, $\{i, j, k\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$) deben ocurrir en valores particulares $\xi_j \bmod \pi$ y $\theta = 0$, tales que $\sigma_i < \xi_j < \sigma_k$. De hecho, una rotación por σ_0 puede darse tal que $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \rightarrow \{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$, mientras que la configuración de Euler E_1 va a $\sigma = 0$ en la nueva base: $\bar{\mathbf{s}}_y(0) = \mathbf{b}' = E_1$. Generalmente, E_1 está localizada en $\sigma = 0$ en la esfera de formas S .

3.3. Hamiltoniano en coordenadas de Piña

Basandonos en las secciones anteriores buscamos encontrar las energías cinética y potencial en términos de las variables R_1, R_2 , y σ en los ejes principales del sistema. Así tenemos que si

$$\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{b}^T \mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b} = 0$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son los vectores de la base, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \\ \mathbf{s}_y &= \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Se cumple

$$\mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{a}^T = 0,$$

y las siguientes ecuaciones nos proporcionan la normalización

$$\mathbf{a} \mathbf{M} \mathbf{a}^T = \mathbf{b} \mathbf{M} \mathbf{b}^T = \mu.$$

Vimos que α, β, γ y δ están relacionadas con las coordenadas R_1, R_2 y σ mediante la ecuación (2.30):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma & \text{sen } \sigma \\ -\text{sen } \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}$$

de donde identificamos

$$\begin{aligned} \alpha &= R_2 \cos \sigma, \\ \beta &= R_2 \text{sen } \sigma, \\ \gamma &= -R_1 \text{sen } \sigma, \\ \delta &= R_1 \cos \sigma. \end{aligned}$$

Como tendremos que obtener las velocidades $\dot{\mathbf{s}}_x$ y $\dot{\mathbf{s}}_y$ derivamos a α , β , γ y δ con respecto al tiempo, obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{R}_2 \cos \sigma - R_2 \operatorname{sen} \sigma \dot{\sigma} \\ \dot{\beta} &= \dot{R}_2 \operatorname{sen} \sigma + R_2 \cos \sigma \dot{\sigma} \\ \dot{\gamma} &= -\dot{R}_1 \operatorname{sen} \sigma - R_1 \cos \sigma \dot{\sigma} \\ \dot{\delta} &= \dot{R}_1 \cos \sigma - R_1 \operatorname{sen} \sigma \dot{\sigma}\end{aligned}$$

que están presentes en

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}_x &= \dot{\alpha} \mathbf{a} + \dot{\beta} \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{s}}_y &= \dot{\gamma} \mathbf{a} + \dot{\delta} \mathbf{b}\end{aligned}$$

La energía cinética en el sistema rotatorio de ejes principales, ecuación (2.13), es

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{s}}_j^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_j m_j \mathbf{s}_j \times \dot{\mathbf{s}}_j + \\ &\quad + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbb{I} \boldsymbol{\omega},\end{aligned}\tag{3.65}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \left[\mathbf{1} \sum_j m_j \mathbf{s}_j^2 - \sum_j m_j \mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T \right] = \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 + I_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

es la matriz de inercia diagonal y, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular en el sistema rotatorio.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

del capítulo anterior sabemos que

$$\mu \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2 \right) = \mu \left[\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2 \right]$$

y así queda

$$\frac{\mu}{2} \left[\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2 \right].$$

Para el segundo término resulta

$$-2\mu R_1 R_2 \dot{\sigma} \dot{\psi}$$

recordando la ecuación (3.15), tenemos que el tercer término es

$$\frac{\mu}{2} (R_1^2 + R_2^2) \dot{\psi}^2,$$

con lo que la energía cinética es

$$T = \frac{\mu}{2} \left\{ \left[\dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2 \right] - 2R_1 R_2 \dot{\sigma} \dot{\psi} + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \dot{\psi}^2 \right\}. \quad (3.66)$$

Con el objeto de reducir el número de parámetros, consideraremos que las masas m_1 y m_2 son iguales, así que la energía potencial tiene la forma

$$V = -Gm_1 \left(\frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_1}{r_{12}} \right). \quad (3.67)$$

donde r_{23} , r_{13} , r_{12} son las distancias encontradas en la ecuación (3.55) o (3.56).

La lagrangiana del sistema es $L = T - V$,

$$L = \frac{\mu}{2} \left\{ \left[\dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2 + (R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma}^2 \right] - 2R_1 R_2 \dot{\sigma} \dot{\psi} + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \dot{\psi}^2 \right\} + \\ + Gm_1 \left(\frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_1}{r_{12}} \right), \quad (3.68)$$

necesaria para calcular los momentos conjugados por medio de

$$p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.69)$$

que resulta en los momentos canónicos de R_1 , R_2 , σ y ψ como a continuación se escriben

$$P_1 = \mu \dot{R}_1, \quad (3.70)$$

$$P_2 = \mu \dot{R}_2, \quad (3.71)$$

$$P_\sigma = \mu \left[(R_1^2 + R_2^2) \dot{\sigma} - 2R_1 R_2 \dot{\psi} \right] \quad (3.72)$$

$$P_\psi = \mu \left[(R_1^2 + R_2^2) \dot{\psi} - 2R_1 R_2 \dot{\sigma} \right]. \quad (3.73)$$

Despejando las velocidades generalizadas y sustituyendo en $H = T + V$, obtenemos

$$H = \frac{1}{2\mu} \left\{ P_1^2 + P_2^2 + (P_\psi^2 + P_\sigma^2) \frac{R_1^2 + R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} + 4P_\psi P_\sigma \frac{R_1 R_2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} \right\} - Gm_1 m_3 \left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{\eta r_{12}} \right), \quad (3.74)$$

donde $\eta = m_3/m_1$, $s_{ij} = r_{ij}$ es la distancia relativa entre m_i y m_j , $i, j = 1, 2, 3$, donde $i \neq j$, y μ es el factor de norma

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{m}}{m}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} = m_1 \sqrt{\frac{\eta}{2 + \eta}}.$$

Ahora, introducimos variables adimensionales y así, obtenemos un hamiltoniano adimensional y una reducción en el número de parámetros. Para esto, tenemos dos casos:

i) El momento angular $P_\psi = 0$.

Si $H = E$ es una constante, y d es una longitud característica del problema, sean $R'_i = R_i/d$, $\Pi_i = P_i / \sqrt{G\mu m_1 m_3/d}$, $i = 1, 2$, y $\Pi_\alpha = P_\alpha / \sqrt{G\mu m_1 m_3 d}$, $\alpha = \sigma, \psi$, las distancias y momentos adimensionales, respectivamente.

Sean $r'_{ij} = r_{ij}/d$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ las distancias relativas adimensionales. Definimos $h = Ed/Gm_1 m_3$ para la energía, y $\tau = t\sqrt{Gm_1 m_3/\mu d^3}$ para el tiempo. En este caso, la función Hamiltoniana adimensional es:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_\sigma^2 \frac{R_1'^2 + R_2'^2}{(R_1'^2 - R_2'^2)^2} \right\} - \left(\frac{1}{r'_{23}} + \frac{1}{r'_{13}} + \frac{1}{\eta r'_{12}} \right) = h. \quad (3.75)$$

ii) El caso más general $P_\psi \neq 0$. Podemos seleccionar el marco de ejes principales tal que $P_\psi > 0$. Para E , valor constante de la función hamiltoniana, sean $d = P_\psi^2/G\mu m_1 m_3$, $R'_i = R_i/d$, $\Pi_i = P_i d/P_\psi$, $i = 1, 2$,

$\Pi_\sigma = P_\sigma/P_\psi$, $\Pi_\psi = 1$, las distancias y momenta adimensionales, respectivamente. La energía y el tiempo adimensionales son iguales a $h = EP_\psi^2/\mu m_1 m_3$ y $\tau = tP_\psi/\mu d^2$ respectivamente. Entonces, sólo el producto EP_ψ^2 , la energía por el cuadrado del momento angular, es el parámetro importante. El hamiltoniano adimensional resulta:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + (\Pi_\psi^2 + \Pi_\sigma^2) \frac{R_1'^2 + R_2'^2}{(R_1'^2 - R_2'^2)^2} + 4\Pi_\psi \Pi_\sigma \frac{R_1' R_2'}{(R_1'^2 - R_2'^2)^2} \right\} - \left(\frac{1}{r_{23}'} + \frac{1}{r_{13}'} + \frac{1}{\eta r_{12}'} \right) = h. \quad (3.76)$$

En ambos casos hemos obtenido funciones hamiltonianas similares (3.75) y (3.76); en el primero $\Pi_\psi = 0$ y en el segundo $\Pi_\psi = 1$. Con el objetivo de simplificar la notación, renombraremos a las variables adimensionales con sus símbolos anteriores, con lo que (3.75) y (3.76) quedan:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ P_1^2 + P_2^2 + (P_\psi^2 + P_\sigma^2) \frac{R_1^2 + R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} + 4P_\psi P_\sigma \frac{R_1 R_2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} \right\} - \left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{\eta r_{12}} \right) = T + V = h, \quad (3.77)$$

con $h \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^+$ y sólo dos valores para el momento angular, $P_\psi = 0, 1$. Asumimos que h es negativa debido a que estamos interesados en órbitas periódicas.

Capítulo 4

Simetrías y Órbitas Periódicas

4.1. Método General

Consideremos el sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

con n par, supongamos que éste admite una reflexión o involución I_0 , que es un mapeo lineal de \mathbb{R}^n que satisface $I_0^2 = 1$ [41]. Esto implica que los eigenvalores de I_0 son $+1$ y -1 .

Sean E_+ y E_- los eigenespacios de los valores propios de I_0 , $+1$ y -1 , por lo que podemos representar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ en la forma

$$x = x_+ + x_-, \quad (4.2)$$

donde $x_+ \in E_+$ y $x_- \in E_-$. Aplicando I_0 obtenemos

$$I_0 x = x_+ - x_-, \quad (4.3)$$

con $\dim E_+ = \dim E_-$ como veremos más adelante. Tomemos al sistema (4.1) calculando en el punto $I_0 x$ invirtiendo la dirección del tiempo

$$\frac{d(I_0 x)}{d(-t)} = f(I_0 x), \quad (4.4)$$

al ser I_0 una transformación lineal tenemos

$$\frac{d(I_0 x)}{d(-t)} = -I_0 \frac{dx}{dt} = f(I_0 x),$$

que resulta

$$-I_0 f(x) = f(I_0 x).$$

Decimos que el sistema (4.1) es reversible con respecto a I_0 si

$$f(I_0 x) = -I_0 f(x). \quad (4.5)$$

Lo que quiere decir que el sistema es invariante bajo la transformación $(t, x) \rightarrow (-t, I_0 x)$.

La condición (4.5) es equivalente a

$$\phi^t I_0 = I_0 \phi^{-t} \quad (4.6)$$

para el flujo del sistema (4.1)

De la ecuación (4.6) podemos notar que con $x = x(t) = \phi^t(x(0))$, $I_0 x(-t)$ también es una solución de nuestro sistema. Decimos que $x(t)$ es una solución simétrica respecto a I_0 si

$$x(t) = I_0 x(-t). \quad (4.7)$$

Ahora, utilicemos (4.1) de la siguiente manera [23]

$$\dot{x} = f(x) = J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (4.8)$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz antisimétrica de la formulación simpléctica.

Sea $y = I_0 x$, como I_0 es lineal, identificamos a I_0 con el Jacobiano de la reflexión R , $R = I_0$. En lo que sigue de esta sección utilizaremos R , derivando respecto al tiempo tenemos

$$\dot{y} = R \dot{x}$$

entonces, de la ecuación (4.8)

$$\dot{y} = R J \frac{\partial H(x)}{\partial x} = R J R^T \frac{\partial H(y(x))}{\partial y}, \quad (4.9)$$

usamos $H(x) = H(y(x))$, que es el hamiltoniano y éste es invariante bajo reflexión.

Debido a la reversibilidad del sistema, $y = I_0 x$ obedece a las mismas ecuaciones diferenciales (4.8), pero con $t \rightarrow -t$,

$$\frac{dy}{d(-t)} = f(y) = J \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (4.10)$$

de donde surge

$$\dot{y} = -J \frac{\partial H}{\partial y},$$

y comparando con la ecuación (4.9) obtenemos el siguiente resultado, que es la condición antisimpléctica

$$RJR^T = -J.$$

Y como es sabido, el producto de dos matrices antisimplécticas da una matriz simpléctica, esto es, si R_1 y R_2 son antisimplécticas

$$R_1JR_1^T = -J = R_2JR_2^T,$$

entonces obtenemos

$$R_2R_1JR_1^TR_2^T = -R_2JR_2^T = J,$$

así que R_2R_1 es simpléctica.

La condición antisimpléctica implica que los paréntesis de Poisson de I_0q_i e I_0p_j son

$$[I_0q_i, I_0p_j] = -\delta_{ij}.$$

Ahora si

$$I_0q_i = q_i \Rightarrow [I_0q_i, I_0p_j] = -\delta_{ij} \Rightarrow I_0p_j = -p_j, \quad (4.11)$$

y si

$$I_0q_i = -q_i \Rightarrow [I_0q_i, I_0p_j] = -\delta_{ij} \Rightarrow I_0p_j = p_j, \quad (4.12)$$

las ecuaciones (4.11) y (4.12) nos proporcionan la información de que una reflexión sólo cambia el signo de una de las dos coordenadas que forma el par canónico. Con esto, se muestra que en los sistemas Hamiltonianos la multiplicidad de los autovalores $+1$ y -1 es la misma: $\dim E_+ = \dim E_-$.

Consideremos ahora una transformación canónica C con Jacobiano, M satisface la condición simpléctica; el Jacobiano de una transformación no lineal CI_0 , esto es una reflexión no lineal, es antisimpléctica debido a que

$$MRJR^TM^T = -J.$$

Podemos escribir cualquier transformación canónica como el producto de una reflexión lineal con una no lineal

$$C = (CI_0) I_0.$$

Si la transformación canónica es el flujo del sistema en el tiempo t , la invariancia bajo reflexión e inversión en el tiempo implica que

$$I_0 f = -f I_0 \Rightarrow -f = I_0 f I_0,$$

que puede escribirse de la siguiente forma

$$\varphi^{-t} = I_0 \varphi^t I_0, \tag{4.13}$$

y nos muestra que, al ser $x(t) = \phi^t(x(0))$, $I_0 x(-t)$ también es una solución del sistema.

Ahora, como el sistema (4.1) es autónomo, el movimiento tiene lugar en la hipersuperficie de energía constante E_h , donde $\dim E_h = n - 1$.

Sea $\Sigma \subset E_h$, una sección de Poincaré, que escogemos tal que $I_0 \Sigma = \Sigma$, esto es, invariante bajo I_0 , I_0 es la transformación lineal de reflexión, definida al principio de esta sección; donde $\dim \Sigma = n - 2$. Sea x un punto en la sección de Poincaré Σ , y sean Tx, T^2x, \dots las intersecciones sucesivas de la trayectoria fase con Σ . T es el operador de evolución temporal y es una transformación canónica. Aplicar T a un punto x_0 en Σ significa integrar las ecuaciones de Hamilton tomando al punto x_0 como condiciones iniciales, hasta encontrar el siguiente punto de cruce con Σ . Esto es, encontrar soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales (4.1) es equivalente a determinar los puntos fijos de la transformación $T^N : \Sigma \rightarrow \Sigma$, donde $N \in \mathbb{Z}$.

Introducimos un grupo discreto de transformaciones en Σ [49].

Sean I_0 e I_1 , donde $I_1 = T I_0$, dos transformaciones de Σ en Σ . Tenemos que:

$$I_0 I_0 = 1. \tag{4.14}$$

Debido a la reversibilidad de la ecuación (4.14),

$$T^{-1} = I_0 T I_0 \tag{4.15}$$

o sea

$$T^{-1} = I_0 I_1. \quad (4.16)$$

La transformación canónica T puede escribirse como el producto de dos involuciones:

$$T = I_1 I_0, \quad (4.17)$$

I_1 también es involución puesto por definición de que de I_1 y la ecuación (4.15) obtenemos

$$I_1 I_1 = T I_0 T I_0 = T T^{-1} = 1. \quad (4.18)$$

Ahora, en lo que sigue, consideraremos i, j, k y l números enteros cualesquiera.

Cuando T se factoriza en dos involuciones, definimos el mapeo I_j por

$$I_j = T^j I_0, \quad (4.19)$$

que, a la vez, es una involución, considerando $T^{-j} = I_0 T^j I_0$ tenemos

$$I_j I_j = T^j I_0 T^j I_0 = T^j T^{-j} = 1. \quad (4.20)$$

Debido a que $T^j = I_j I_0$, aplicando I_0 por la izquierda nos da

$$I_0 T^j = I_0 I_j I_0$$

$$I_0 T^j = T^{-j} I_0. \quad (4.21)$$

El conjunto de transformaciones T^k, I_j , es un grupo infinito discreto con la representación

$$T^j I_k = I_{j+k}, \quad (4.22)$$

$$I_j I_k = T^{j-k}, \quad (4.23)$$

$$I_j T^k = I_{j-k}. \quad (4.24)$$

Definimos un subconjunto Γ_j de Σ como el conjunto de puntos fijos bajo I_j :

$$\Gamma_j = \{x \in \Sigma \mid I_j x = x\}. \quad (4.25)$$

A Γ_j la llamamos hipersuperficie de simetría. Una propiedad de las hipersuperficies de simetría es que éstas se mapean bajo T o I en otras regiones de simetría, lo que se expresa de la siguiente manera:

$$T^l \Gamma_k = \Gamma_{2l+k}, \quad (4.26)$$

$$I_l \Gamma_k = \Gamma_{2l-k}. \quad (4.27)$$

Sea $x \in \Gamma_k$, entonces $I_k x = x$, que también puede ser escrita como $I_{l+k} T^{-l} x = x$. Lo que, por la ecuación (4.23), nos queda $I_{l+k-l} x = T^{l+k} I_{-l} x$, que implica $x = T^{l+k} I_{-l} x = T^{l+k} I_0 T^l x$, que se obtiene utilizando la ecuación (4.23). Aplicamos T^l en ambos extremos de la última igualdad: $T^{2l+k} I_0 T^l x = T^l x$. En consecuencia $I_{2l+k} T^l x = T^l x$. Esto es $T^l x \in \Gamma_{2l+k}$. Por lo tanto,

$$\Gamma_{2l+k} \subset T^l \Gamma_k. \quad (4.28)$$

Por otro lado, sea $x \in \Gamma_{2l+k}$, entonces $I_{2l+k} x = x$, lo que por la ecuación (4.22) queda $I_{l+k} T^{-l} x = x$, así $T^{l+k} I_0 T^{-l} x = x$. Aplicamos T^{-l} en ambos lados: $T^k I_0 T^{-l} x = T^{-l} x$, lo que nos dice que $T^{-l} x \in \Gamma_k$. Por lo tanto,

$$\Gamma_{2l+k} \subset T^l \Gamma_k. \quad (4.29)$$

Con lo que queda demostrado (4.26); la demostración de (4.20) es análoga.

De la ecuación (4.26) vemos que Γ_0 y Γ_1 son las hipersuperficies fundamentales de simetría, ya que ellas generan todas las otras hipersuperficies de simetría con la aplicación de Poincaré T . Por lo que las hipersuperficies de simetría tienen la misma dimensión que Γ_0 y Γ_1 , que es la mitad de la dimensión de Σ ; recordando que n es un entero par debido a la ecuación (4.11) y (4.12),

$$\dim \Gamma_j = \frac{n-2}{2} \quad \forall \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La dimensión del conjunto $\Gamma_j \cap \Gamma_i$ es cero, lo que se ve de lo siguiente:

$$\dim (\Gamma_j \cap \Gamma_i) = \dim \Gamma_j + \dim \Gamma_i - \dim \Sigma. \quad (4.30)$$

Este resultado implica que las hipersuperficies de simetría se intersectan en puntos.

De la ecuación (4.23) se sigue que un punto en la intersección de dos hipersuperficies de simetría Γ_j y Γ_i es un punto periódico. Su periodo N divide a $|j - i|$.

Sea $x \in \Gamma_j \cap \Gamma_i$ entonces $I_j I_i x = x$, que por la ecuación (4.23) queda $T^{j-i} x = x$, cuya implicación es que x es un punto de periodo $|j - i|$ o un divisor.

4.2. El caso de tres grados de libertad

En lo que sigue nos restringimos a tres grados de libertad, esto es, al caso donde el espacio fase Ω es de dimensión 6, la hipersuperficie de energía constante E_h es de dimensión 5 y, la sección de Poincaré Σ de dimensión 4. Es importante escoger la sección transversal Σ tal que sea invariante bajo la transformación I_0 del sistema reversible. El conjunto fundamental de simetría Γ_0 es

$$\Gamma_0 = \{x \in \Sigma \mid x_- = 0\}, \quad (4.31)$$

y su dimensión es 2. Este conjunto puede ser dibujado en el plano con cierta facilidad.

Si mapeamos Γ_0 con T obtenemos Γ_2 , también de dimensión 2, pero éste no puede ser dibujado debido a que está en Σ y $\dim \Sigma = 4$. No obstante, sólo nos interesa calcular $\Gamma_0 \cap \Gamma_2$ para encontrar las órbitas periódicas, este conjunto son puntos en Σ .

Sea $z \in \Sigma \subset E_h$. Como escogemos Σ invariante bajo I_0 , podemos tomar la sección transversal en $z_6 = 0$, suponiendo que z_6 tiene el valor propio de -1 bajo I_0 , ésto sin pérdida de generalidad. Si z_5 es su par canónico, lo podemos despejar de la ecuación de la energía y tiene el valor propio de +1 bajo I_0 . Permanecen cuatro variables para los puntos en Σ y suponemos, sin perder generalidad, que para $z \in \Sigma$

$$I_0 z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_3 \\ -z_4 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

donde (z_1, z_3) y (z_2, z_4) son pares de coordenadas canónicas. La ecuación (4.32) tiene sustento en las ecuaciones (4.11) y (4.12). Construimos los siguientes conjuntos U_1 y U_2 de dimensión 3

$$U_1 = \{z \in \Sigma \mid z_3 = 0\}$$

y

$$U_2 = \{z \in \Sigma \mid z_4 = 0\}. \quad (4.33)$$

Vemos que su intersección $U_1 \cap U_2 = \Gamma_0$, y se verifica que

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim \Sigma = 2$$

como debe ser.

Esta es la región de simetría Γ_0 , también podemos ver esto ya que $z_- = 0$ para $z \in U_1 \cap U_2$. Calculamos numéricamente $\Gamma_2 = T\Gamma_0$ que por el teorema de Lioville deberá tener la misma dimensión o volumen que Γ_0 . Debido a la dificultad para graficarla, graficamos la preimagen de $\Gamma_2 \cap U_1$ y la de $\Gamma_2 \cap U_2$, las que nombramos V_1 y V_2 respectivamente. Esto es

$$V_{1i} = \{z \in \Gamma_0 \mid T^i z \in U_1\}$$

y

$$V_{2i} = \{z \in \Gamma_0 \mid T^i z \in U_2\}. \quad (4.34)$$

Estos dos conjuntos tienen dimensión 1. Si $z \in V_{1i} \cap V_{2i} \implies T^i z \in U_1 \cap U_2$, donde $U_1 \cap U_2 = \Gamma_0$. De la propiedad $T^l \Gamma_k = \Gamma_{2l+k}$ obtenemos $T^i z \in \Gamma_{2i} \implies T^i z \in \Gamma_{2i} \cap \Gamma_0$. Esto nos conduce a $V_{1i} \cap V_{2i} \subset \Gamma_{2i} \cap \Gamma_0$, con $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y esto es un conjunto de órbitas periódicas simétricas de periodo $|2i|$ o un divisor. Si tomamos $i = 1$, entonces z es una órbita periódica de periodo 2 o 1.

4.3. Aplicación al Problema Plano de Tres Cuerpos

Retomamos al hamiltoniano (3.77) en el sistema rotatorio:

$$H = \frac{1}{2} \left\{ P_1^2 + P_2^2 + (P_\psi^2 + P_\sigma^2) \frac{R_1^2 + R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} + 4P_\psi P_\sigma \frac{R_1 R_2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} \right\} - \left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{\eta r_{12}} \right) = T + V = h, \quad (4.35)$$

Donde P_ψ sólo toma los valores 0 y 1. Escribimos las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= P_1, \\ \dot{R}_2 &= P_2, \\ \dot{\psi} &= \frac{(R_1^2 + R_2^2) P_\psi + 2R_1 R_2 P_\sigma}{(R_1^2 - R_2^2)^2}, \\ \dot{\sigma} &= \frac{(R_1^2 + R_2^2) P_\sigma + 2R_1 R_2 P_\psi}{(R_1^2 - R_2^2)^2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= \frac{R_1 (3R_2^2 + R_1^2) (P_\psi^2 + P_\sigma^2) + 2R_2 (3R_1^2 + R_2^2) P_\psi P_\sigma}{(R_1^2 - R_2^2)^3} - \frac{\partial V}{\partial R_1}, \\ \dot{P}_2 &= -\frac{R_2 (3R_1^2 + R_2^2) (P_\psi^2 + P_\sigma^2) + 2R_1 (3R_2^2 + R_1^2) P_\psi P_\sigma}{(R_1^2 - R_2^2)^3} - \frac{\partial V}{\partial R_2}, \\ \dot{P}_\psi &= 0, \\ \dot{P}_\sigma &= -\frac{\partial V}{\partial \sigma}, \end{aligned}$$

con

$$V = -\left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{\eta r_{12}} \right),$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{23}}, \frac{1}{r_{13}}, \frac{1}{\eta r_{12}} \right) \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} R_1^2 \sin^2 \sigma + R_2^2 \cos^2 \sigma \\ R_1^2 \cos^2 \sigma + R_2^2 \sin^2 \sigma \\ (R_2^2 - R_1^2) \sin^2 2\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Las ecuaciones de movimiento (4.36) forman un sistema del tipo (4.1) con $n = 6$ del que podemos obtener simetrías bajo transformaciones de involución.

$$I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ -\psi \\ P_1 \\ -P_2 \\ -P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix}, I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ -R_2 \\ \sigma \\ -\psi \\ -P_1 \\ P_2 \\ -P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix},$$

$$I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ P_1 \\ P_2 \\ -P_\sigma \\ -P_\psi \end{pmatrix}, I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \\ P_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ \psi \\ -P_1 \\ -P_2 \\ -P_\sigma \\ -P_\psi \end{pmatrix}.$$

Como se vió en (4.11) y (4.12), así como en (4.32) de (4.2) sólo uno del par canónico cambia de signo bajo I_0 . Las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo I_0 , si $t \rightarrow -t$. Como escogemos $R_1 \geq 0$ en $t = 0$, en el sistema rotatorio, escogemos la simetría:

$$I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ -R_2 \\ \sigma \\ -P_1 \\ P_2 \\ -P_\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

El espacio de configuración es

$$Q = \{(R_1, R_2, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid r_{ij} \neq 0, i \neq j\}, \quad (4.39)$$

y el espacio fase es

$$\Omega = \{x = (R_1, R_2, \sigma, P_1, P_2, P_\sigma) \mid x \in Q \times \mathbb{R}^3\}; \quad (4.40)$$

donde $\dim \Omega = 6$. H es autónomo, lo que implica que el movimiento tiene lugar en la hipersuperficie de energía constante de dimensión 5, entonces

podemos encontrar a P_2 de $H(x) = \text{const.}$. Escogemos $P_2 \geq 0$ para la condición inicial

$$E_h = \{x \in \Omega \mid H(x) = h = \text{const.}\},$$

de (3.77) obtenemos

$$P_2 = \sqrt{2(h - V) - \left[P_1^2 + \frac{(P_\psi^2 + P_\sigma^2)(R_1^2 + R_2^2) + 4P_\psi P_\sigma R_1 R_2}{(R_1^2 - R_2^2)^2} \right]}. \quad (4.41)$$

Con esta simetría definimos nuestra sección de Poincaré Σ de dimensión 4 tal que $I_0\Sigma = \Sigma$, por lo que escogemos $R_2 = 0$. Esta elección toma la configuración de condiciones iniciales en la que las partículas están colineales a lo largo del eje y . Nos hemos quedado sólo con cuatro coordenadas independientes $x = (R_1, \sigma, P_1, P_\sigma)$ en Σ :

$$\Sigma = \{x \in E_h \mid R_2 = 0\}. \quad (4.42)$$

A continuación definimos dos subconjuntos de Σ también invariantes bajo I_0 :

$$U = \{x \in \Sigma \mid P_1 = 0\}, \quad (4.43)$$

$$S = \{x \in \Sigma \mid P_\sigma = 0\}, \quad (4.44)$$

donde $\dim U = \dim S = 3$. Así mismo, vemos que se cumple $I_0U = U$ e $I_0S = S$.

Sea $\Gamma_0 = U \cap S$ y, como vimos en la sección anterior, $\dim(U \cap S) = \dim \Gamma_0 = 2$. Esta región de simetría Γ_0 es el conjunto de puntos fijos bajo I_0 . Si mapeamos esta región de simetría con T , $\Gamma_2 = T\Gamma_0$ también tiene dimensión 2 pues T conserva el volumen.

Observamos que $\dim[(T\Gamma_0) \cap U] = \dim[(T\Gamma_0) \cap S] = 1$, esto es son curvas en general. Entonces, hemos construido dos curvas en $T\Gamma_0 = \Gamma_2$, cuyas intersecciones $\Gamma_2 \cap \Gamma_0$ son órbitas periódicas, su preimagen está en Γ_0 y puede graficarse en el plano.

La preimagen consiste en las dos líneas de simetría

$$v = \{x \in \Gamma_0 \mid Tx \in U\},$$

$$s = \{x \in \Gamma_0 \mid Tx \in S\},$$

en Γ_0 . Entonces $\forall x \in v \cap \varsigma$, y por la definición de estos conjuntos $x \in \Gamma_0$, por la misma razón $Tx \in U$ así como $Tx \in S \implies Tx \in U \cap S$, lo que nos conduce a que $Tx \in \Gamma_0$. Como $Tx \in \Gamma_2 \cap \Gamma_0$, entonces x es un punto periódico con periodo $|2-0|$ o un divisor, lo que implica que x es una órbita de periodo 1 o 2.

También podemos definir las líneas

$$v_i = \{x \in \Gamma_0 \mid T^i x \in U, i \in \mathbb{Z}\} \quad (4.45)$$

y

$$\varsigma_j = \{x \in \Gamma_0 \mid T^j x \in S, j \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.46)$$

Si $x \in v_i \cap \varsigma_i \implies T^i x \in U \cap S$, $U \cap S = \Gamma_0$, de la propiedad $T^l \Gamma_k = \Gamma_{2l+k}$ tenemos que $T^i x \in \Gamma_{2i} \implies T^i x \in \Gamma_{2i} \cap \Gamma_0$. Lo que nos lleva a $v_i \cap \varsigma_i \subset \Gamma_{2i} \cap \Gamma_0$, con $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, es decir, tendremos un conjunto de órbitas periódicas simétricas con periodo $|2i|$ o un divisor.

Capítulo 5

Obtención numérica de órbitas

5.1. Resultados numéricos

El problema Plano de Tres Cuerpos en el sistema rotatorio tiene tres grados de libertad, así mismo vimos que Γ_0 está ubicado en el plano (σ, R_1) cuando Σ se elige como en (4.42), para así calcular y dibujar los puntos que terminen en $(T\Gamma_0) \cap U$ y $(T\Gamma_0) \cap S$. Tomaremos condiciones iniciales en el plano (σ, R_1) que están en Γ_0 . De esta manera obtenemos $v \cap \varsigma$ en Γ_0 , y así encontrar mas órbitas periódicas, estables e inestables, en un vasto rango de condiciones iniciales.

Para este fin, hicimos un programa computacional que barriese toda la región de simetría para encontrar las líneas de simetría v y ς , así como los puntos en los que se intersectaban. Para facilitar esta tarea hicimos uso del método de integración Runge- Kutta Fehlberg de órdenes 7 y 8, dentro de una subrutina desarrollada por Jaume Llibre y su grupo de la Universidad Autónoma de Barcelona.

El problema aquí tratado tiene dos masas iguales, $m_1 = m_2$. Cuando $R_2 = 0$, $I_2 = 0$ y los cuerpos están en una posición colineal en el eje y , como podremos observar en las figuras de las órbitas periódicas donde se muestran a los cuerpos en sus posiciones iniciales.

5.2. Cálculo de las regiones de simetría Γ_0

Elegimos la simetría

$$I_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \sigma \\ P_1 \\ P_2 \\ P_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ -R_2 \\ \sigma \\ -P_1 \\ P_2 \\ -P_\sigma \end{pmatrix},$$

con la sección transversal Σ dada en (4.42), con $R_2 = 0$.

Para calcular las regiones de simetría tomamos las condiciones iniciales $x \in \Gamma_0 \subset \Sigma$, tal que $P_1 = P_\sigma = 0$. De aquí en adelante usamos el momento angular distinto de cero, *i.e.*, $P_\psi = 1$. Por otro lado, $P_2^2 \geq 0$ en la ecuación de la energía (3.77), en la frontera de la región de simetría tenemos que $P_2 = 0$.

La frontera está definida por

$$H(R_1, R_2 = 0, \sigma, P_1 = 0, P_2 = 0, P_\sigma = 0, P_\psi) = h,$$

esto es

$$h = \frac{P_\psi^2}{2R_1^2} + V(R_1, R_2 = 0, \sigma), \quad (5.1)$$

donde $P_\psi = 0, \pm 1$

$$V(R_1, R_2 = 0, \sigma) = - \left(\frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{\eta r_{12}} \right)$$

es la energía potencial, $\eta = m_3/m_1$ y las distancias están dadas en la ecuación (3.55), pero con $R_2 = 0$

$$r_{23} = |R_1| \sqrt{\frac{1 + \eta}{2\sqrt{\eta}(2 + \eta)}} (1 - \cos 2(\sigma - \sigma_1)), \quad (5.2)$$

$$r_{13} = |R_1| \sqrt{\frac{1 + \eta}{2\sqrt{\eta}(2 + \eta)}} (1 - \cos 2(\sigma - \sigma_2)), \quad (5.3)$$

$$r_{12} = |R_1| \sqrt{\sqrt{\frac{\eta}{2 + \eta}}} (1 - \cos 2(\sigma - \sigma_3)), \quad (5.4)$$

donde los ángulos de colisión doble σ_1 , σ_2 y σ_3 están dados por la ecuación (3.47).

De donde

$$V(R_1, R_2 = 0, \sigma) = -\frac{1}{|R_1|} \left(\frac{1}{\bar{r}_{23}} + \frac{1}{\bar{r}_{13}} + \frac{1}{\eta \bar{r}_{12}} \right),$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{r}_{23} &= \frac{r_{23}}{|R_1|}, \\ \bar{r}_{13} &= \frac{r_{13}}{|R_1|}, \\ \bar{r}_{12} &= \frac{r_{12}}{|R_1|} \end{aligned}$$

y recordemos del capítulo 2 que $\eta = m_3/m_1$.

Podemos tener un potencial que sólo dependa de σ si

$$\bar{V}(\sigma) = |R_1|V(R_1, R_2 = 0, \sigma) = -\left(\frac{1}{\bar{r}_{23}} + \frac{1}{\bar{r}_{13}} + \frac{1}{\eta \bar{r}_{12}} \right).$$

Reescribiendo la ecuación (5.1), tenemos

$$h = \frac{P_\psi^2}{2R_1^2} + \frac{\bar{V}(\sigma)}{|R_1|}.$$

Ordenando

$$hR_1^2 - \bar{V}(\sigma)R_1 - \frac{P_\psi^2}{2} = 0$$

lo que nos permite obtener la solución

$$R_1 = \frac{\bar{V}(\sigma) \pm \sqrt{\bar{V}(\sigma)^2 + 2hP_\psi^2}}{2h}, \quad (5.5)$$

Las distancias relativas \bar{r}_{ij} como función de σ están graficadas en la figura (5.1). El intervalo $\sigma \in (\pi, 2\pi)$ no da nueva información pues sólo significa una permutación no cíclica de la aquí presentada.

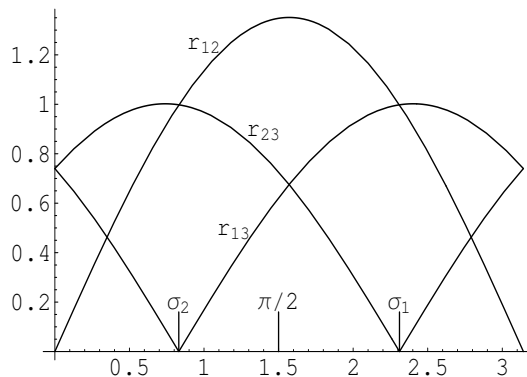


Figura 5.1: Distancias relativas entre los tres cuerpos, cuando $R_2 = 0$ (configuración colineal en el eje y), como función de σ . Cuando $\sigma = \sigma_2 = \tan^{-1} \sqrt{1 + 2/\eta}$, m_1 y m_3 chocan, y en $\sigma_1 = \pi - \sigma_2$, m_2 y m_3 están en colisión.

La energía potencial $\bar{V}(\sigma)$ vs. σ , para el caso expuesto en la figura (5.1), esto es $\eta = 10$, $R_2 = 0$ y $R_1 = 1$, se muestra en la figura (5.2). Como es de esperar el potencial es singular en σ_1 , σ_2 y σ_3 .

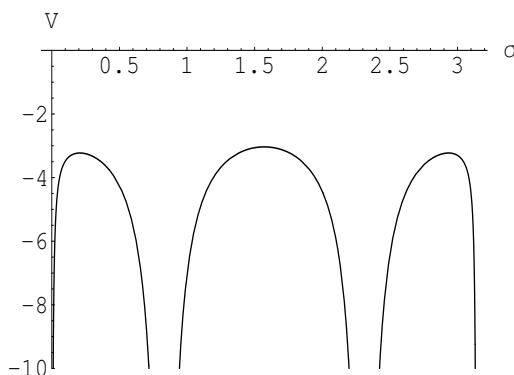


Figura 5.2: Energía potencial vs. σ , para $\eta = 10$, $R_2 = 0$.

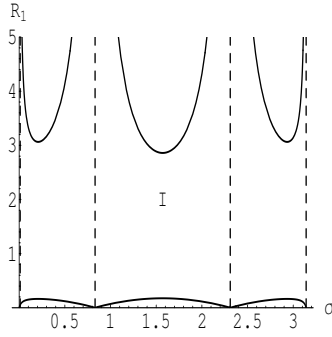
La ecuación (5.5) define la frontera de la región de simetría Γ_0 . Podemos observar que esta región depende del valor de la energía, que es un parámetro de bifurcación. A medida que el valor de la energía varíe también cambia el número de regiones conexas de simetría de condiciones iniciales posibles, como podremos ver en las siguientes figuras.

La frontera superior está dada por

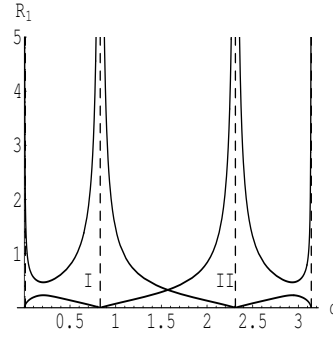
$$R_1^{\text{sup}} = \frac{\bar{V}(\sigma) - \sqrt{\bar{V}(\sigma)^2 + 2hP_\psi^2}}{2h},$$

y la inferior por

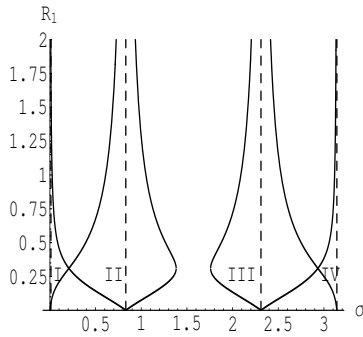
$$R_1^{\text{inf}} = \frac{\bar{V}(\sigma) + \sqrt{\bar{V}(\sigma)^2 + 2hP_\psi^2}}{2h}.$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: a) Para $\eta = 10$, cuando la energía es igual a -1 tenemos una región a lo largo de σ . b) Cuando la energía es igual a $-4,6036$, aparece la primera bifurcación y divide la región en dos. c) Cuando la energía es igual a $-5,2061$, ocurre la segunda bifurcación y la región se divide en cuatro subregiones. Las líneas punteadas muestran las colisiones dobles. Cuando aparecen los números romanos indican las regiones o subregiones con las condiciones iniciales posibles en que se encuentran divididas en cada caso.

De aquí hasta lo que resta del capítulo, tomaremos el valor P_ψ distinto de cero, por facilidad tomaremos $P_\psi = 1$.

Para que dé inicio una bifurcación, las dos fronteras se unen

$$R_1^{\text{sup}} = R_1^{\text{inf}},$$

para que esto suceda, el discriminante debe ser cero.

$$\bar{V}(\sigma)^2 + 2h = 0.$$

Encontramos las raíces σ_0 de la ecuación

$$\left. \frac{d\bar{V}(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma_0} = 0,$$

una vez hecho esto calculamos los valores de $h = E$, tales que satisfagan

$$\bar{V}(\sigma_0)^2 + 2E = 0,$$

que son los valores de la energía que presentaremos en adelante.

Hay tres casos cualitativamente diferentes.

I. $m_1 = m_2 < m_3$ y $\eta > 1$. En la figura (5.3) exponemos el caso en el que $\eta = 10$. Cuando la energía es negativa y mayor que $-4,6036$, sólo existe una región que contiene todas las posibles condiciones iniciales, esto se muestra en la figura (5.3a), que para ella usamos $E = -1$.

Cuando la energía alcanza $E = -4,6036$, se presenta la primera bifurcación, ésta divide en dos la región, lo que puede observarse en la figura (5.3b).

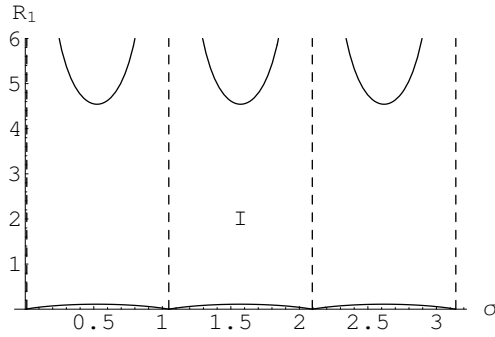
Cuando la energía llega al valor de $-5,2061$, acaece la segunda bifurcación donde tenemos cuatro regiones, mostradas en la figura (5.3c).

En general, para $\eta > 1$, esto es la masa del cuerpo 3 mayor que las otras, las regiones van de una a dos y, finalmente, a cuatro.

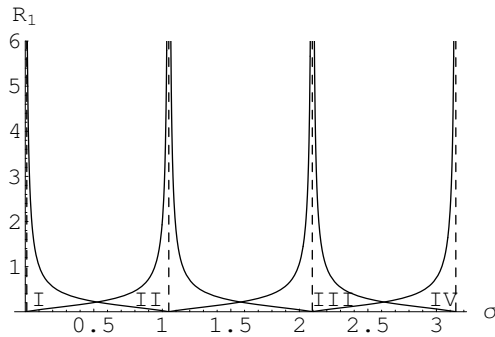
Si $\eta > 1 \Rightarrow 1 \text{ región} \rightarrow 2 \text{ regiones} \rightarrow 4 \text{ regiones}$ a medida que decrece la energía.

II. $m_1 = m_2 = m_3$ y $\eta = 1$. El caso siguiente sucede para tres masas iguales, esto es $\eta = 1$.

Cuando la energía es negativa y mayor que $-10,8253$, existe una sola región que contiene las condiciones iniciales posibles, lo que se muestra en la figura (5.4a) para $E = -1$. Cuando la energía alcanza el valor de $-10,8253$, surge la bifurcación que divide a la región en cuatro, esto puede verse en la



(a)



(b)

Figura 5.4: a) $\eta = 1$, cuando la energía es igual a -1 y tenemos sólo una región. b) Cuando la energía tiene el valor $-10,8253$, aparece la bifurcación y la región se divide en cuatro subregiones. Aquí, los números romanos nos indican las regiones o subregiones conexas de las posibles condiciones iniciales en que se divide cada caso.

figura (5.4b). En general, para masas iguales, $\eta = 1$, las regiones de simetría pasan de ser una a cuatro al disminuir la energía.

Al decrecer la energía tenemos:

Si $\eta = 1 \Rightarrow 1$ región $\rightarrow 4$ regiones.

III. $m_1 = m_2 > m_3$ y $\eta < 1$. El último caso pasa cuando la masa diferente es menor que las otras, esto es, $\eta < 1$.

Como ejemplo ver figura (5.5), tomemos $\eta = 0,1$.

Cuando la energía es negativa y mayor que $-210,6680$, la región de simetría es conexas, lo que puede observarse en la figura (5.5a) para $E = -1$.

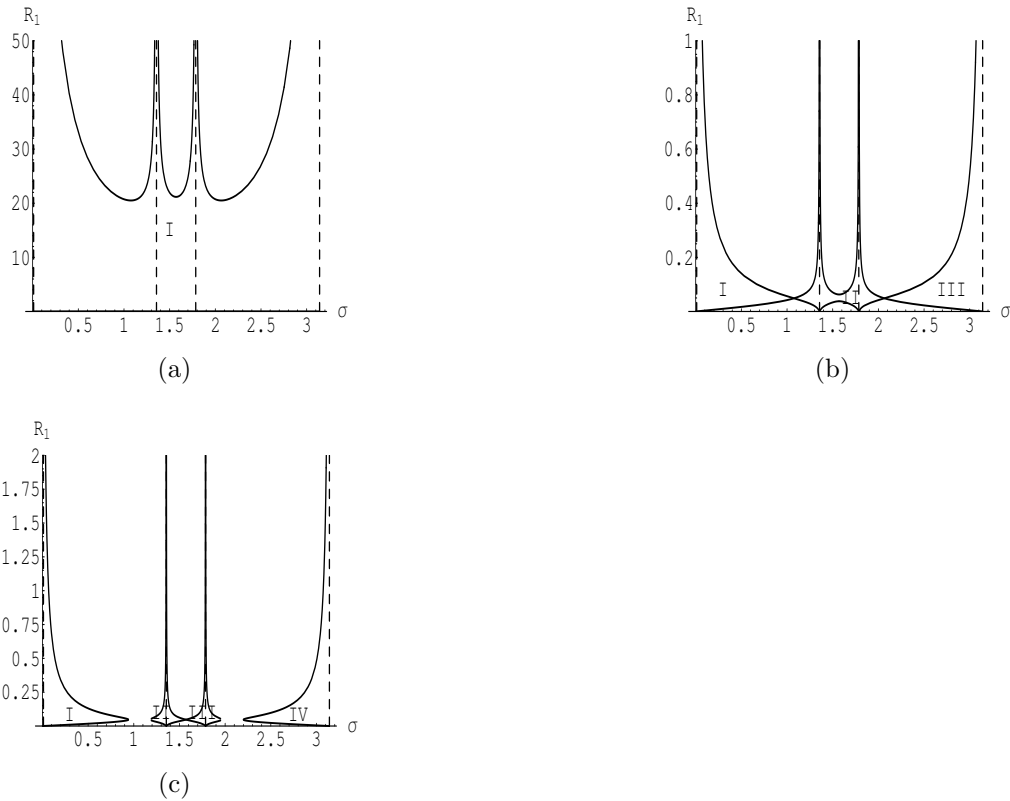


Figura 5.5: a) $\eta = 0,1$, cuando la energía es igual a -1 tenemos sólo una región. b) Cuando la energía es igual a $-210,6680$ tenemos tres subregiones. c) Cuando la energía es igual a $-224,5460$ nos encontramos cuatro subregiones. Nuevamente los números romanos nos indican las regiones o subregiones conexas de las posibles condiciones iniciales en que se divide cada caso.

Al alcanzar la energía el valor de $-210,6680$, viene la primera bifurcación que divide en tres subregiones a la original, como se muestra en la figura(5.5b).

Cuando la energía toma el valor de $-224,5460$, se presenta la segunda bifurcación dejando, ahora, cuatro subregiones, mostradas en la figura(5.5c).

Para η menor que uno, la masa diferente es menor que las otras. Las región de simetría Γ_0 va de uno a tres y finalmente a cuatro regiones disconexas.

Esto es, al decrecer la energía

Si $\eta < 1 \Rightarrow 1$ región $\rightarrow 3$ regiones $\rightarrow 4$ regiones desconexas.

Recapitulando, si la energía es negativa y decrece tenemos:

Si $\eta > 1 \Rightarrow 1$ región $\rightarrow 2$ regiones $\rightarrow 4$ regiones ,

Si $\eta = 1 \Rightarrow 1$ región $\rightarrow 4$ regiones,

Si $\eta < 1 \Rightarrow 1$ región $\rightarrow 3$ regiones $\rightarrow 4$ regiones.

En lo que sigue, mostraremos algunos resultados numéricos para tres casos particulares, en los que tomamos $E = -1$ y $P_\psi = 1$.

El primer caso es para $\eta = 10$, esto es, la masa diferente mayor que las demás; el segundo caso es cuando las tres masas son iguales, esto es $\eta = 1$; el tercer y último caso $\eta = 0,1$, las masas iguales son diez veces mayores que la distinta. Nuestro interés es mostrar algunas órbitas periódicas que se encuentran al tomar los puntos de intersección como condiciones iniciales. La primera región de simetría, Γ_0 , a observar es la que mostramos en la

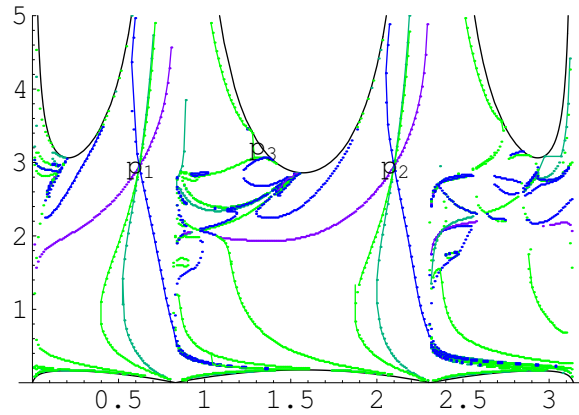


Figura 5.6: Los conjuntos invariantes v y ζ para el caso $\eta = 10$ con $E = -1$. Hay tres puntos sobresalientes de intersección marcados como p_1 , p_2 y p_3 .

figura (5.6), para $\eta = 10$. Como puede verse en la figura, marcamos tres puntos como p_1, p_2, p_3 , siendo $p_i = (\sigma_i, R_{1i})$, donde $i = 1, 2, 3$, tenemos que $p_1 = (0,6200, 2,9300)$, $p_2 = (2,1110, 2,9300)$ y $p_3 = (1,3450, 3,0550)$, son puntos en los que se presentan intersecciones de v y ζ .

Tomando estos puntos como condiciones iniciales, encontramos las órbitas que se muestran en la figura (5.7). Notemos que, al estar p_1 en $\sigma = (0, \sigma_0)$, los cuerpos están ordenados $m_3 - m_1 - m_2$, como se previó en el primer capítulo.

Se muestra, la órbita presentada en la figura (5.7c) en el sistema sideral

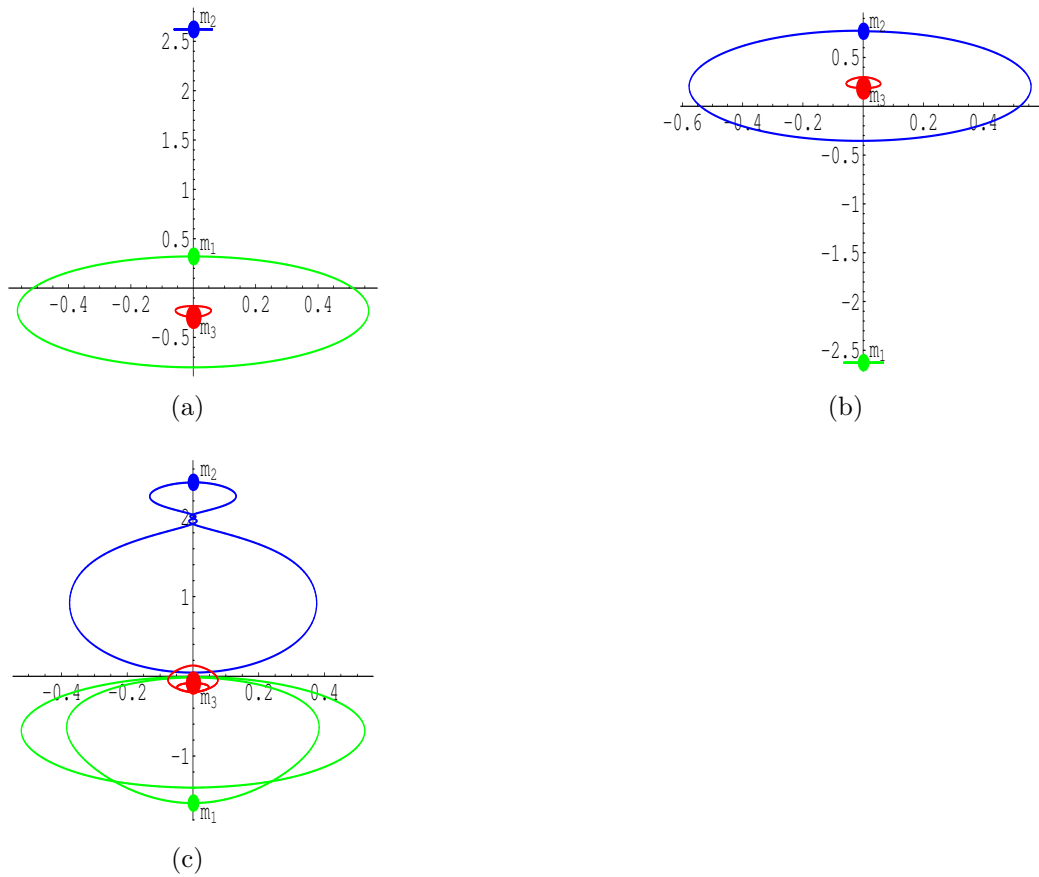


Figura 5.7: Cuando $\eta = 10$ y $E = -1$, los puntos marcados como p_1 , p_2 y p_3 son tres puntos sobresalientes de intersección de la figura 5.6. a) La órbita periódica producida por p_1 . m_1 está orbitando m_3 , ambas masas se mueven en el sentido de las manecillas del reloj, y m_2 comienza su movimiento hacia la izquierda. b) La órbita generada por la condición inicial p_2 . m_2 se encuentra orbitando m_3 , ambas masas se mueven en el sentido de las manecillas del reloj, m_1 comienza sus movimientos hacia la derecha. c) La órbita de la condición inicial p_3 . m_2 se mueve en un primer círculo en el sentido de las manecillas del reloj, luego en el segundo ciclo en el sentido contrario de las manecillas del reloj, m_3 y m_1 , ambas se mueven en el sentido de las manecillas del reloj.

en la figura (5.8). La misma órbita periódica vista sobre el espacio de formas

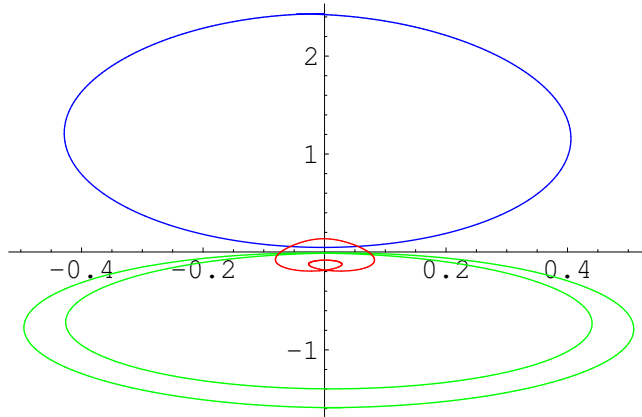


Figura 5.8: La órbita presentada en la figura (5.7c) en el sistema sideral.

X está en la figura (5.9)

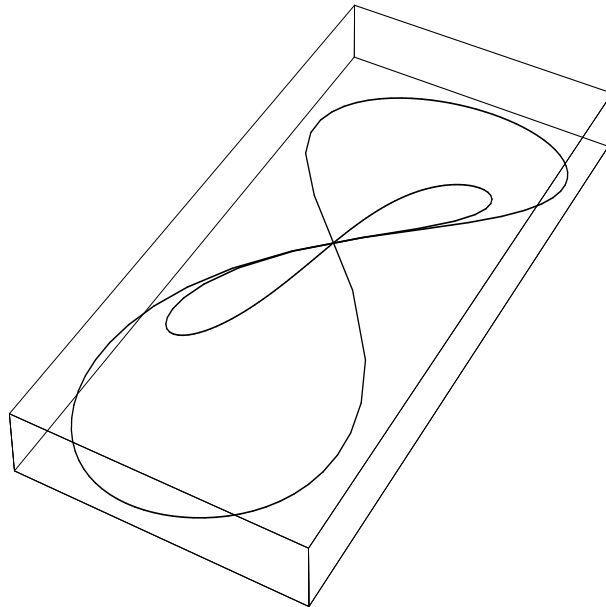
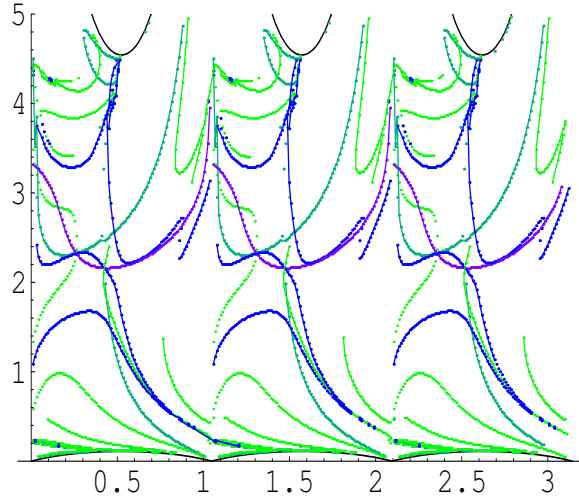
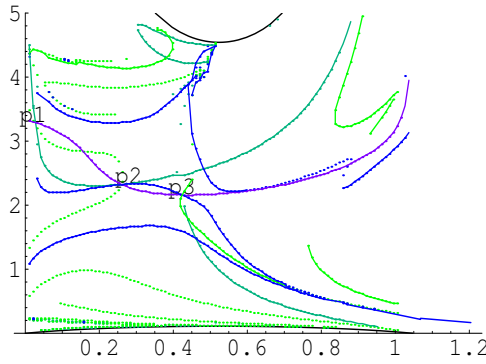


Figura 5.9: La órbita de la figura (5.7c) en el espacio de formas X. Los valores son $\eta = 10$, $E = -1$ y p_3 es el punto de intersección de la figura (5.6), donde m_2 se mueve en el primer círculo en sentido de las manecillas del reloj, luego en el segundo círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj, m_3 y m_1 , ambas se mueven en el sentido de las manecillas del reloj.



(a)



(b)

Figura 5.10: a) Caso en que $\eta = 1$ con $E = -1$, y $P_\psi = 1$, R_1 vs. σ . b) Región donde $\sigma \in [0, \pi/3]$, donde p_1 , p_2 y p_3 , son puntos de intersección que nos proporcionarán órbitas periódicas.

La segunda región de simetría que observamos en la figura (5.10) es para el caso $\eta = 1$, las tres masas iguales. Debido a la simetría de esta región, ésta se repite en los intervalos $(0, \pi/3)$, $(\pi/3, 2\pi/3)$ y $(2\pi/3, \pi)$. Por esta razón, estudiaremos el intervalo $\sigma \in (0, \pi/3)$, que es la que se muestra en la figura (5.10b). También marcamos tres puntos, $p_i = (\sigma_i, R_{1i})$: $p_1 = (0,0216, 3,3000)$, $p_2 = (0,2610, 2,3200)$ y $p_3 = (0,4240, 2,1650)$. Al tomar estos puntos como condiciones iniciales, generamos las órbitas periódicas de

la figura (5.11).

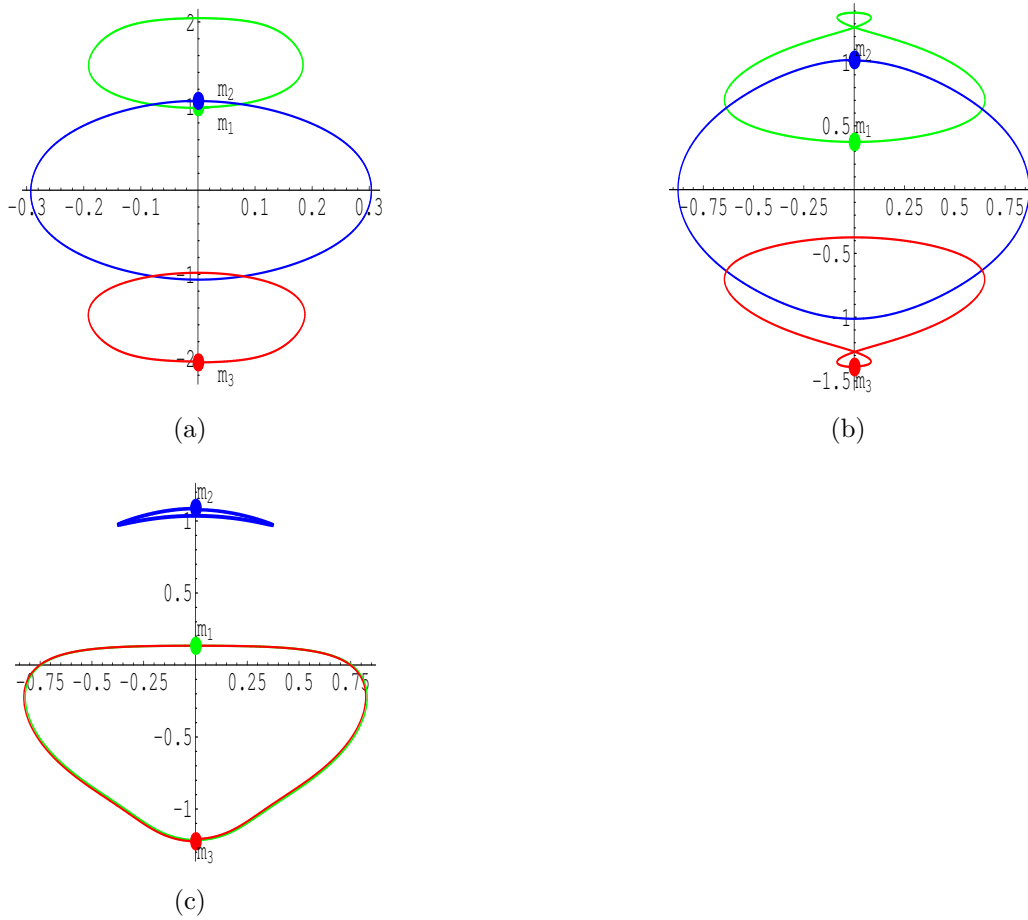


Figura 5.11: a) Órbitas que se generan a partir de las condiciones iniciales p_1 de la figura (5.10). m_3 , m_1 y m_2 se mueven en el sentido contrario a las manecillas del reloj. b) Órbita generada por las condiciones iniciales p_2 . Este caso es similar al anterior. c) Órbita que se genera a partir de las condiciones iniciales p_3 . m_3 y m_1 tienen la misma órbita, y se mueven en el sentido de las manecillas del reloj, m_2 se mueve a la izquierda.

Debido a que tomamos el primer tercio de Γ_0 , $\sigma \in (0, \sigma_0)$, el orden que tienen las masas es $m_3 - m_1 - m_2$ ascendiendo en el eje vertical.

Para finalizar esta parte, tenemos el tercer caso $\eta = 0,1$. En la figura (5.12) mostramos la región de simetría con los puntos $p_i = (\sigma_i, R_{1i})$: $p_1 =$

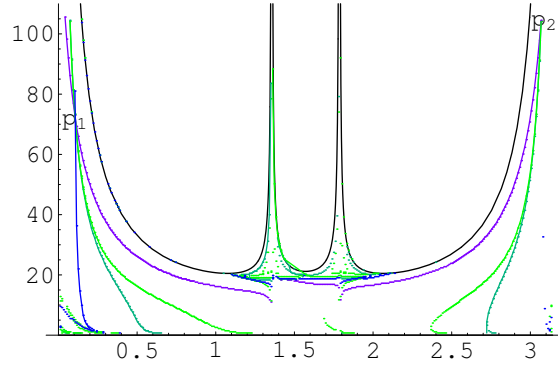


Figura 5.12: Cuando $\eta = 0,1$ se encuentran dos puntos muy claros de intersección, p_1 y p_2 , en la región simétrica.

$(0,1068, 71,8900)$ y $p_2 = (3,0687, 104,6667)$, cuando $E = -1$.

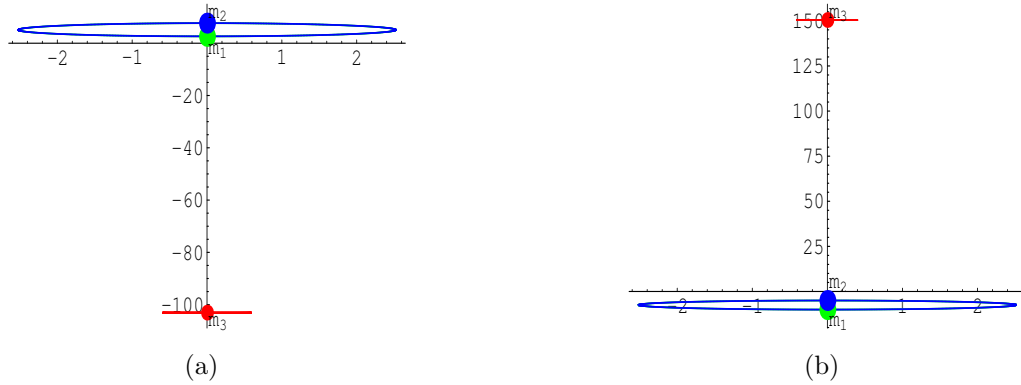


Figura 5.13: a) Órbita que se genera por las condiciones iniciales p_1 de la figura (5.12). m_3 se mueve a la izquierda, m_1 y m_2 tienen órbitas muy parecidas y su movimiento es en el sentido contrario a las manecillas del reloj. b) Órbita generada por las condiciones iniciales p_2 como en la figura anterior, m_1 y m_2 tienen órbitas muy parecidas, pero se mueven en el sentido de las manecillas del reloj, y m_3 se mueve a la izquierda.

En la figura (5.13) vemos las órbitas periódicas generadas por estos puntos. Al estar p_1 en $\sigma = (0, \sigma_0)$, el orden de los cuerpos es $m_3 - m_1 - m_2$, así como al encontrarse p_2 en $\sigma = (\pi - \sigma_0, \pi)$ el orden es $m_1 - m_2 - m_3$.

5.3. Familias de órbitas periódicas

Cuando cambiamos los valores de algunos parámetros, tales como la energía E o las masas η , encontramos familias de órbitas periódicas.

A modo de ejemplo, fijaremos $E = -1$. El parámetro que sufrirá variaciones será $\eta = m_3/m_1$.

En la figura (5.14) mostramos las regiones de simetría y los puntos de intersección para los valores $\eta = 0,1$, $\eta = 0,111$ y $\eta = 0,125$, respectivamente.

Las familias F_η^i , donde $i = 1, 2$, y $\eta = m_3/m_1$, están formadas por órbitas periódicas con el mismo comportamiento al variar el parámetro η . Los puntos de condiciones iniciales de órbitas periódicas que pertenecen a la familia F_η^1 son $p_{1\alpha} = (0,1068, 71,8900)$, $p_{1\beta} = (0,1291, 52,4167)$, $p_{1\gamma} = (0,1552, 37,0473)$, que están ubicados en el lado izquierdo de las regiones mostradas en la figura (5.14).

En cuanto a la familia F_η^2 , los puntos de condiciones iniciales que dan origen a sus órbitas periódicas son $p_{2\alpha} = (3,0686, 104,6667)$, $p_{2\beta} = (3,0578, 80,1314)$, $p_{2\gamma} = (3,0473, 62,0000)$, ubicados en la parte derecha de sus respectivas Γ_0 .

En lo que sigue fijamos al parámetro $\eta = 0,1$, esto es fijamos las masas. Ahora variaremos el parámetro E que tendrá los valores $E = -1$, $E = -10$ y $E = -15$.

Las regiones de simetría y puntos de condiciones iniciales se presentan en la figura (5.15). Las familias F_E^i , donde $i = 1, 2$ y E es la energía están formadas por órbitas con el mismo comportamiento al variar el parámetro E . Los puntos de condiciones iniciales de órbitas periódicas pertenecientes a la familia F_E^1 son $p_{1\alpha} = (0,1068, 71,8900)$, $p_{1\beta} = (0,1758, 4,4100)$ y $p_{1\gamma} = (0,2087, 2,4958)$, ubicadas en el lado izquierdo de las regiones de simetría de la figura (5.15).

En el lado derecho de las regiones arriba mencionadas encontramos a los puntos de las condiciones iniciales que pertenecen a la familia F_E^2 , éstos son $p_{2\alpha} = (3,0686, 104,6667)$, $p_{2\beta} = (3,0853, 13,5433)$ y $p_{2\gamma} = (3,0952, 10,8350)$.

Una órbita que pertenece a la familia F_E^1 es la que se genera cuando la energía E tiene un valor de -25 , el punto está en $(0,2932153143350473, 1,08)$ y se muestra en la figura (5.16a), muy similar a la órbita mostrada en la figura (5.13a). Ahora podemos apreciar la misma órbita en el sistema sideral en la figura (5.16b), la masa m_3 dando vueltas a las masas m_2 y m_1 en lo que parece una región densa en el centro.

Esto hace necesario presentar la figura (5.17), donde la figura (5.17a)

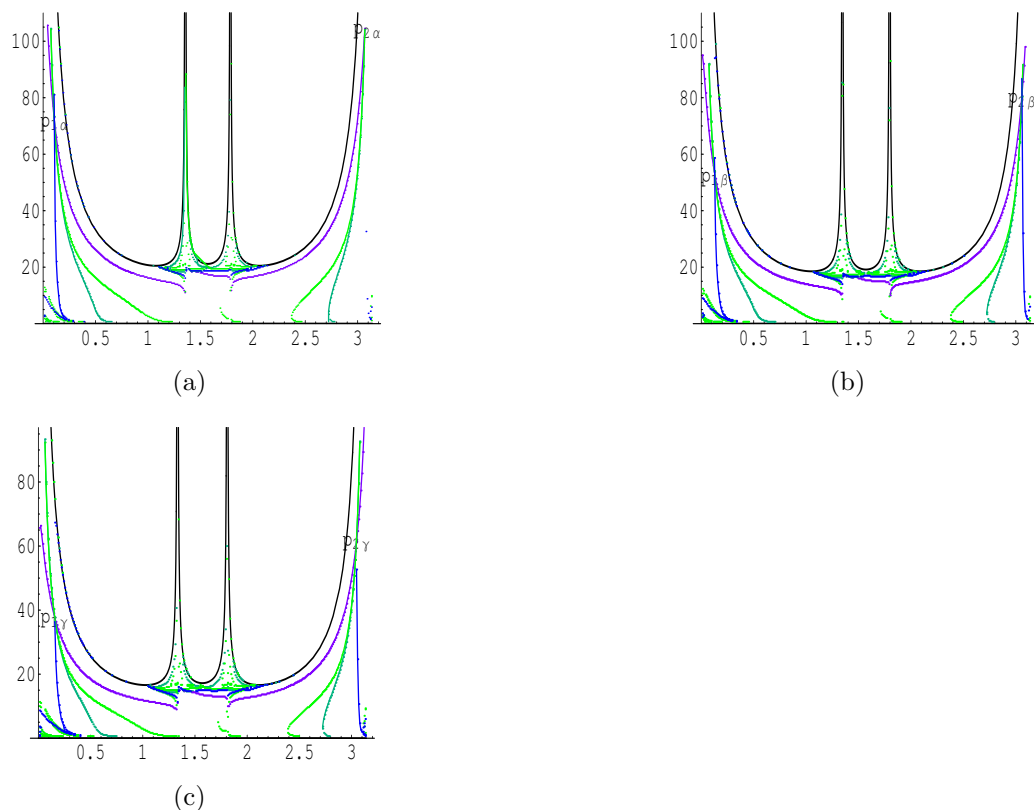


Figura 5.14: a) Mantenemos fijo el valor de $E = -1$, y comenzamos analizando el valor del parámetro $\eta = 0,1$ para encontrar las órbitas periódicas que pertenecen a las familias F_{η}^1 y F_{η}^2 , donde el subíndice η indica que el parámetro que varía es el valor de $\eta = m_3/m_1$, aquí tenemos los puntos de condiciones iniciales $p_{1\alpha}$ y $p_{2\alpha}$. b) El parámetro siguiente es $\eta = 0,111$, aquí tenemos los puntos de condiciones iniciales $p_{1\beta}$ y $p_{2\beta}$. c) El parámetro que continua es $\eta = 0,125$, aquí tenemos los siguientes puntos de condiciones iniciales $p_{1\gamma}$ y $p_{2\gamma}$.

muestra la trayectoria de m_1 y la figura (5.17b) la de m_2 . Obviamente, no colisionan su coreografía es la de girar una alrededor de la otra en su momento inicial m_1 debajo de m_2 como se muestra en la figura (5.18). Éste es un buen ejemplo del comportamiento de los miembros de la familia F_E^1 .

La familia F_E^2 se comporta de manera similar, sólo cambia la posición inicial de m_3 .

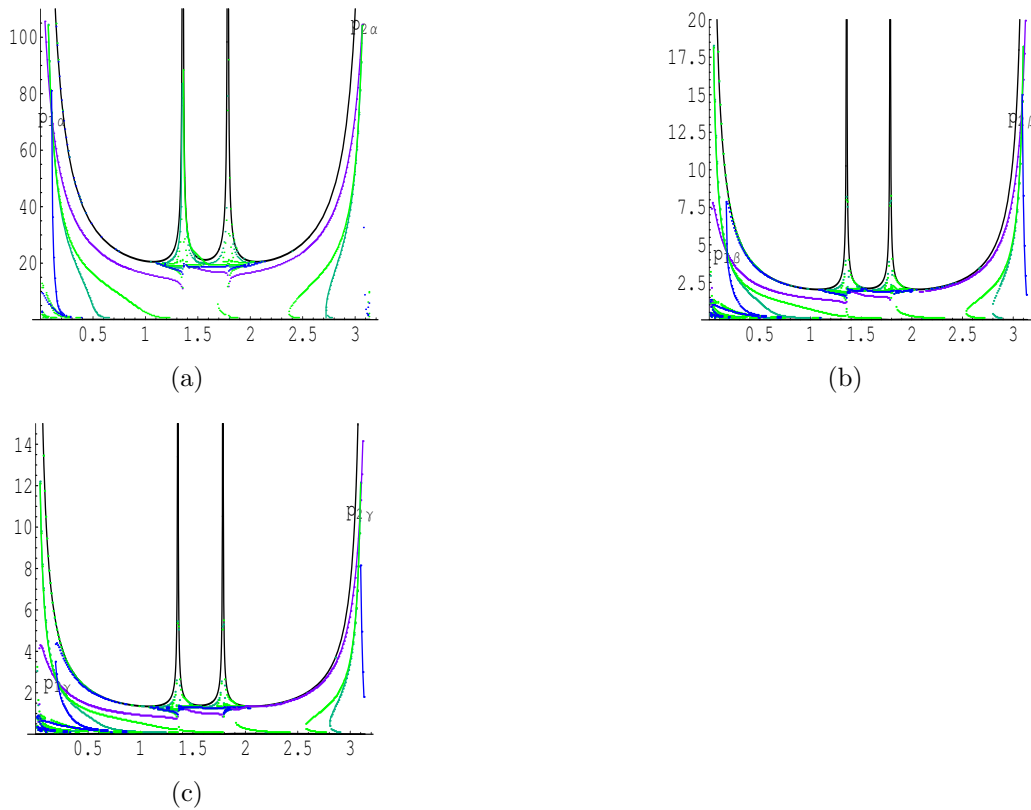


Figura 5.15: a) Mantenemos fijo el valor de $\eta = 0,1$, comenzamos con el parámetro $E = -1$ para encontrar las familias de las órbitas periódicas F_E^1 y F_E^2 , aquí se encuentran los puntos de condiciones iniciales $p_{1\alpha}$ y $p_{2\alpha}$. b) Ahora movemos el parámetro a el valor $E = -10$, y tenemos los puntos de condiciones iniciales $p_{1\beta}$ y $p_{2\beta}$. c) Ahora el parámetro toma el valor $E = -15$, aquí tenemos los puntos de condiciones iniciales $p_{1\gamma}$ y $p_{2\gamma}$.

En esta figura (5.19) tenemos los puntos que forman parte de F_E^1 , en lo que sería parte de la curva con valores inferiores en R_1 y σ . El origen de F_E^1 está muy cercano al valor de la energía $E = -55$, por eso la concentración de puntos en esa vecindad. F_E^2 son los puntos que formarían parte de la curva con los valores superiores de R_1 y σ , el origen de F_E^2 no está cercano a $E = -55$, sigue existiendo en energías menores.

A continuación presentamos dos tablas. La primera tiene puntos de la familia F_E^1 , la segunda, de la familia F_E^2 . Tomamos los puntos de $E = -55$

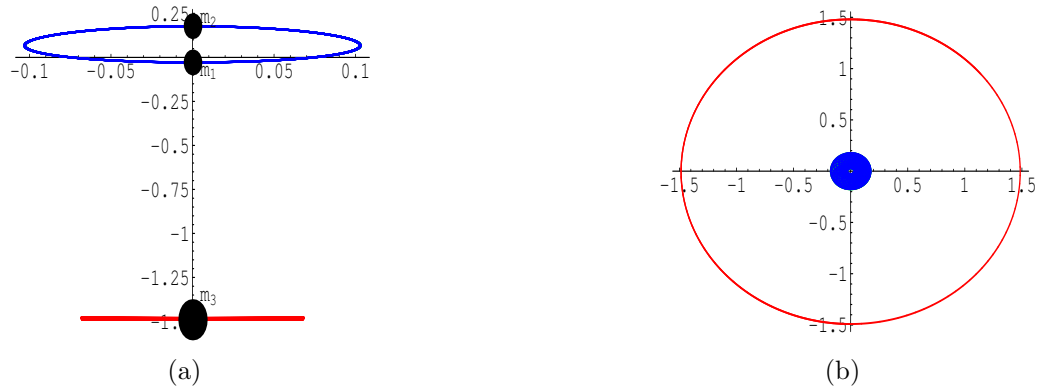


Figura 5.16: a) Órbita periódica generada por la condición inicial $E=-25, R_1=0.2932153143350473$ y $\sigma =1.08$ b) La misma órbita en el sistema sidereal.

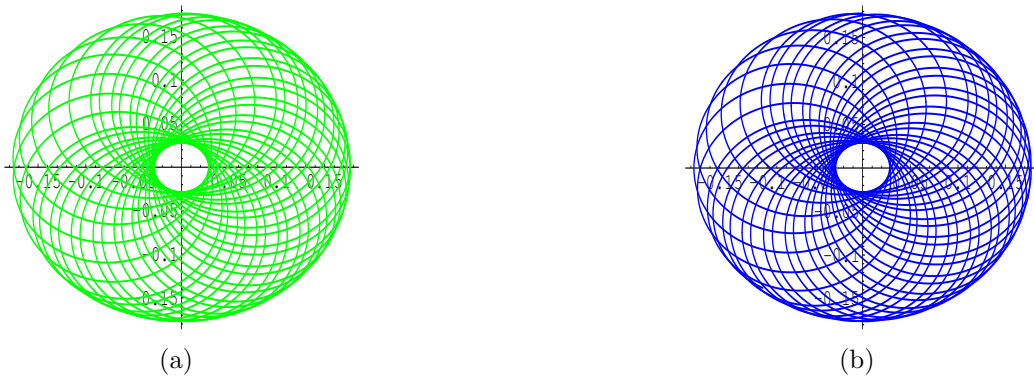


Figura 5.17: a) Trayectoria de m_1 en el sistema sidereal b) Trayectoria de m_2 en el sistema sidereal.

hasta $E = -10$, los valores con energía superior a la última hacen perder detalle, y graficamos estos puntos en la figura (5.19)

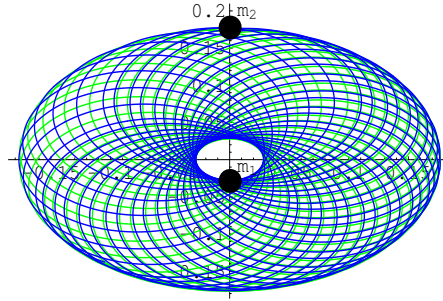


Figura 5.18: En esta imagen se muestran las posiciones iniciales de las masas m_1 y m_2 , de la figura (5.17), en el sistema sideral sobre sus trayectorias.

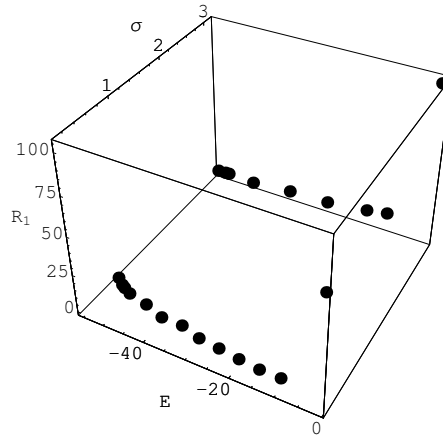


Figura 5.19: Puntos que pertenecen a las familias F_E^1 y F_E^2 . F_E^1 contiene los puntos con valores inferiores de R_1 y σ , F_E^2 contiene los puntos con valores superiores de R_1 y σ .

Tabla de Familia F_E^1		
E	R_1	σ
-1	0.106760000000000	71.8900000000000
-10	0.175795000000000	4.41000000000000
-15	0.208660000000000	2.49583000000000
-20	0.2513274122871833	1.56000000000000
-25	0.2932153143350473	1.08000000000000
-30	0.3246312408109453	0.833333333333333
-35	0.4084070449666732	0.570000000000000
-40	0.4084070449666732	0.525252525252525
-45	0.5026548245743671	0.390000000000000
-50	0.565486677646163	0.305000000000000
-52	0.6178465552059930	0.280000000000000
-53	0.6492624817418909	0.256666666666667
-54	0.7016223593017209	0.240000000000000
-55	0.7330382858376189	0.221666666666666

Tabla de Familia F_E^2		
E	R_1	σ
-1	3.0900000000000000	104.66000000000000
-10	3.0853000000000000	13.543300000000000
-15	3.0952000000000000	10.835000000000000
-20	3.078760800517978	6.060000000000000
-25	3.099704751541910	7.406666666666666
-30	3.089232776000000	4.854166667000000
-35	3.110176727053875	6.247500000000000
-40	3.102322745000000	4.747603833000001
-45	3.099704751541310	4.250000000000000
-50	3.102322745000010	3.527833333300000
-52	3.110176727053875	4.680000000000000
-53	3.110176727053875	4.638333333000000
-54	3.110176727053875	4.638333333000000
-55	3.110176727053875	4.493250000000000

5.4. Explicación final de los resultados numéricos

Para el caso general, donde intervienen n grados de libertad, obtendremos regiones de simetría de dimensiones 3, 4,...; esto dificulta los cálculos numéricos.

En el caso de 4 grados de libertad, la región de simetría Γ_0 es tridimensional, por lo que tendríamos que construir tres conjuntos u , v y w , cada uno de dimensión 2 cuyas intersecciones son líneas, y las intersecciones triples son órbitas periódicas, mismas que son excepcionales.

Conclusiones

En el capítulo 2 explicamos las coordenadas simétricas o de Piña y sus propiedades. A partir de éstas en el capítulo 3 nos enfocamos a su aplicación al problema plano de tres cuerpos. En el capítulo 4 se desarrolló la extensión del método de líneas de simetría planteado por de Vogelaere, planteado para dos grados de libertad, al de regiones de simetría con tres grados de libertad; definimos una sección de Poincaré 4-dimensional inmerso en un nivel de energía constante e introducimos una región de simetría 2-dimensional. En esta región, construimos conjuntos invariantes de simetría 1-dimensional cuyas intersecciones nos dieron puntos que generaron órbitas periódicas para el caso en que dos y tres masas fueron iguales. Así en el capítulo 5 presentamos resultados numéricos e imágenes de nuestras regiones y órbitas periódicas obtenidas.

Logramos relacionar las coordenadas R_1 , R_2 y σ en el marco de ejes principales con el espacio de formas \mathbf{X} , observando similitudes con la esfera de formas de Moeckel [38]. Explicamos, de manera clara, el sentido geométrico de los ángulos θ y σ en el segundo capítulo.

Encontramos los ángulos de colisión doble en términos de la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, para cualquier factor de norma. Estos resultados permiten que las distancias entre los cuerpos puedan expresarse en términos de los ángulos θ , σ y los de colisión doble σ_i , donde $i = 1, 2, 3$.

Generalizamos el método de líneas de simetría propuesto por De Vogelaere [12], empleado para muchos sistemas de dos grados de libertad, a sistemas reversibles de n grados de libertad. Por cuestiones prácticas, lo ejemplificamos con un sistema con tres grados de libertad. En nuestro caso desarrollamos su aplicación al problema Plano de tres cuerpos, donde haciendo uso de regiones de simetría, encontramos conjuntos invariantes nombrados curvas de simetría y denotados v , ς , cuyas intersecciones son puntos pertenecientes a las órbitas periódicas en el sistema rotatorio del marco de referencia de

ejes principales. Esto se mostró con los casos de dos y tres masas iguales con energía negativa y momento angular distinta de cero. Las órbitas periódicas que así se obtuvieron en el sistema rotatorio pueden ser cuasi -periódicas o periódicas en el marco de referencia inercial, dependiendo del cociente de la frecuencia de la órbita periódica y de la frecuencia del movimiento de ψ .

Finalmente, encontramos algunas familias de órbitas periódicas al variar el parámetro de la energía, así como al variar el parámetro η , que es el cociente m_3/m_1 .

Es posible extender la investigación reportada en este trabajo buscando por un lado trabajar en el Problema de cuatro cuerpos con suficientes simetrías para reducirlo a tres grados de libertad y así encontrar condiciones iniciales de órbitas periódicas, y por el otro lado podemos extendernos en el Problema de tres o cuatro cuerpos cargados, con un potencial Coulombiano, y así encontrar órbitas periódicas.

Bibliografía

- [1] Abraham R., Marsden J. E.; *Foundations of Mechanics*; Perseus Publishing; USA,(1978).
- [2] Arnold V. I.; *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition; Springer-Verlag; New York,(1989).
- [3] Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I.; *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Second Edition; Springer-Verlag; Hiedelberg, (1997).
- [4] Barrow-Green J.; *Poincare and the Three Body Problem*; American Mathematical Society; USA, (1997).
- [5] Byron Jr. F.W., Fuller R. W.; *Mathematics of Classical and Quantum Physics*; Ed. Dover; USA, (1992).
- [6] Beutler G.;*Methods of Celestial Mechanics*, Volume I, Springer-Verlag; Germany, (2005).
- [7] Birkoff, G. D., *Dynamical Systems*, American Mathematical Society. Coll. Pub 9,(1927).
- [8] Bengochea A., Piña E., The Saturn, Janus and Epimetheus dynamics as a gravitational three-body problem in the plane, *Rev.Mex. Fis.*, **55**(2),97(2009).
- [9] Boccaletti D., Pucacco G.; *Theory of Orbits 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*; Springer-Verlag; Hiedelberg, (2001).
- [10] Boccaletti D., Pucacco G.; *Theory of Orbits 2: Perturbative and Geometrical Methods*; Springer-Verlag; Hiedelberg,(1999).

- [11] Chenciner A. , Féjoz J., Montgomery R.; Rotating Eights: I . The three families; *Nonlinearity*. **18**, 1407 (2005).
- [12] De Vogelaere R.; Contributions to the theory of non-linear Oscillations, Lefschetz S. (ed.), Princeton University Press. **4**, 53 (1958).
- [13] Diacu F., Homes P.; *Celestial Encounters*; Princeton University Press; USA, 1996.
- [14] Divakar V., The Lindstedt-Poincaré Technique as an Algorithm for computing Periodic Orbits; *SIAM Review*, Vol. 43, No.3, pp. 478-495,(2001).
- [15] Divakar V.,Periodic Orbits of the N-body Problem; Department of Mathematics, University of Michigan, 525 East University Avenue, Ann Arbor, MI 48109-1109, USA. (2001).
- [16] Doedel E. J., Faffenroth R. C., Keller H. B., Dichmann D. J., Gal án J., Vanderbauwhede A.; Computation of Periodic Solutions of Conservative Systems with Application to the 3-Body Problem; *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **13**, 1353 (2003).
- [17] Endler, A., Gallas, J.A.C., Reductions and simplifications of orbital sums in a Hamiltonian repeler, *Phys Lett A*. **352**, 124 (2006).
- [18] *Doce Mil Grandes de las Ciencias Exactas*, Enciclopedia Biográfica Universal, Editorial Promexa, **3**, México D.F. (1982)
- [19] *The Cambridge Encyclopedia of Astronomy*; Edited by Simon Mitton y Sir Martin Ryle, Ed. Crown Publishers, Inc., USA, (1980)
- [20] Endler, A., Gallas, J.A.C., Cojugacy classes an chiral doublets in the Hénon Hamiltonian repeller, *Phys Lett A*. **356**, 1 (2006).
- [21] Escalona Buendía A., Piña Garza E. The Sun-Earth-Moon Problem in New Coordinates, Bidimensional Case; *Revista Mexicana de Física* 47 (6) 525-531,(2001).
- [22] Fowles G. R., Cassiday G. L.; *Analytical Mechanics*, Seventh Edition; Brooks/Cole; USA,(2005).
- [23] Goldstein H.; *Classical Mechanics*, Second Edition; Addison-Wesley; U. S. A.,(1980).

- [24] Gutzwiller M. C.; *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*; Springer-Verlag; New York, (1990).
- [25] Gutzwiller M. C.; *Moon-Earth-Sun: The Oldest Three-Body problem*; Reviews of Modern Physics, Volume 70, No. 2, p.p. 589, (1997).
- [26] Hestenes D.; *New Foundations for Classical Mechanics*; Kluwer Academic Publishers; Holanda,(1999).
- [27] Holmes P., Poincaré celestial mechanics, dynamical-systems theory and "chaos". Physics Reports. **193**(3), 137-163,(1990).
- [28] Holton G., Brush S. G.; *Introducción a los Conceptos y Teorías de las Ciencias Físicas*; Ed. Reverté, Barcelona, (1979).
- [29] Hoyle Fred.; *Astronomy and Cosmology, A Modern Course*. Ed. W.H. Freeman; USA, (1975).
- [30] Hsiang W. and Straume E.; *Kinematic geometry of triangles and the study of the three-body problem*; pp. 1-107.; archiv:math-ph/0608060v1 (2006)
- [31] Jiménez-Lara L. and Piña E. The three-body problem with an inverse square law potential. J. Math. Phys, **44**, No. 9, 4078(2003)
- [32] Jiménez-Lara, L., Piña, E., Periodic orbits of an electric charge in a magnetic dipole field. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. **49**, 327 (1990).
- [33] Jiménez-Lara L. and Escalona-Buendía A. Symmetries and Bifurcations in the Sitnikov Problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **79**, 97(2001)
- [34] Kalantonis, V.S., Markellos, V.V., Perdios, E.A., Computing periodic orbits of the Three-Body Problem: Effective convergence of Newton's method on the surface of section, Astrophysics and Space Science. **298**, 441 (2005).
- [35] Lamb J.S.W., Roberts J. A. G., Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey, Physica D. **112**, 1 (1998).

- [36] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.; *Regular and Chaotic Dynamics*, Second Edition; Springer-Verlag; New York. Moser J. *Dynamical Systems*; Notas, (1992).
- [37] Meyer, K. y Offin, D.; *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Segunda Edición, Springer; Boston, (2010).
- [38] Moeckel R.; Some qualitative features of the three-body problem. *Contemporary Mathematics*, **81**, 1(1988).
- [39] Moeckel R., Shooting for the eight-A topological existence proof for a Figure-Eight orbit of the Three-Body Problem; (sin publicar) (2007).
- [40] Montgomery R.; The geometric phase of the three body problem. *Nonlinearity*, 1341(1996).
- [41] Moser, J., *Dynamical Systems*, Notes, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, (1973).
- [42] Moser J., Zehnder E. J.; *Notes on Dynamical systems*; American Mathematical Society and Courant Institute of Mathematical Sciences; USA; 2005.
- [43] Marchal C., The Family P_{12} of the Three-Body Problem- The simplest Family of Periodic orbits, with Twelve Symmetries per period, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **78**, 279 (2000).
- [44] Montgomery, R., A New Solution to the Three-Body Problem, *Notices of the American Mathematical Society*. **May**, 471 (2001).
- [45] Muñoz-Almaraz F.J., Freire E., Galán J., Doedel E.J., Vanderbauwhede A.; Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems; *Physica D*. **181**, 1 (2003).
- [46] Newton I.; *Principios matemáticos de la Filosofía natural*; Editorial Altaya; Barcelona, (1993).
- [47] Pauli W.; Über das Modell des Wasserstoff moleküllions. *Ann. Phys.* (Leipzig), 68: 177-240, (1922).

- [48] Perdios, E.A., Kalantonis, V.S., Vrahatis, M.N., Efficient method for computing with certainty periodic orbits on a surface of section, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **84**, 231 (2002).
- [49] Piña, E., *Dinámica de Rotaciones*, Ed. UAM, México D.F. 1996.
- [50] Piña, E., Jiménez-Lara, L., On the Symmetry Lines of the Standard Mapping. *Physica D*. **26**, 369 (1987).
- [51] Piña E., A new solution to the Lagrange's case of the three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **74**,163(1999).
- [52] Piña E., New coordinates for the four-body problem. *Rev. Mex. Fís*, **563**,195(2010).
- [53] Piña E., Jiménez-Lara L., Properties of new coordinates for the general three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **82**, 1(2002).
- [54] Piña E., Jiménez-Lara L., Perturbing the Lagrange solution to the three-body problem. In: Delgado J. et al.(ed) *New Advances in Celestial Mechanics and Hamiltonian Systems*. **123**. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2004).
- [55] Piña E., Lonngi P. On the Figure Eight Orbit of the Three-Body Problem; *Revista Mexicana de Física* 49 (5) 439, (2001).
- [56] Poincaré H.; *New Methods of Celestial Mechanics*,3 volúmenes; American Institute of Physics. USA, (1993).
- [57] Prada I., Jiménez-Lara L. The Planar Three-Body Problem, Symmetries and Perodic Orbits; *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **8**: 419-442, (2009).
- [58] Suvakov M., Dmitrasinovic V. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits; *Phys. Rev. Lett* **110**: 114301, (2013).
- [59] Suvakov M., Dmitrasinovic V. A guide to hunting periodic three-body orbits; *American Journal of Physics*. **82**: 609, (2014).
- [60] Szebehely V.; *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three Bodies*; Academic Press; New York, (1967).

- [61] Szebehely V. G., Mark H., *Adventures in Celestial Mechanics*; Wiley-VCH; Second Edition; Alemania, (2004).
- [62] Thorton S. T., Marion J. B.; *Classical Dynamics of Particles and Systems*; Fifth Edition; Thomson Brooks/Cole; USA, (2004).
- [63] Viniegra H. F.; *Mecánica, libro 1*. Ed. UNAM; México, (2007).
- [64] Viniegra Heberlein Fermín.; *Mecánica, libro 2*. Ed. UNAM; México, (2008).
- [65] Viniegra H. F.; *Mecánica, libro 3*. Ed. UNAM; México, (2009).
- [66] Waalkens H., Dullin H. R., Richter P. H.; *The Problem of Two Fixed Centers: Bifurcations, Actions Monodromy*; www.itp.uni-bremen.de/prichter/download/TwoCenter.pdf, (2006).
- [67] Whittaker E. T. A.; *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Fourth Edition; Cambridge University Press; U. K., (1988).