



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

**Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería**

**Teoría cuántica de un electrón confinado a la superficie de un cono
circular recto. Efectos de confinamiento y de campos magnéticos**

Tesis que presenta:

Luis Manuel Arvizu Cornejo

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Física)

Matrícula: 2172801617

Asesor: Dr. Eleuterio Castaño Tostado

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Eugenio Ley-Koo

Secretario: Dr. Eleuterio Castaño Tostado

Vocal: Dr. Robin Preenja Sagar

Iztapalapa, Ciudad de México, 30 de marzo de 2022

Agradecimientos

Le doy gracias a mi madre y a mi hermano por el apoyo incondicional que siempre me han brindado. A mi padre, que jamás dejó de alentarme. Gracias por tanto.

Agradezco al Dr. Eleuterio Castaño Tostado por guiarme en el desarrollo de este trabajo, por sus observaciones y consejos durante el mismo; por su tiempo, dedicación, paciencia y su total apoyo para conmigo.

Asimismo, quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Eugenio Ley-Koo y el Dr. Robin Preenja Sagar, como miembros del jurado, por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y por sus útiles comentarios y observaciones sobre este trabajo.

Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada durante mis estudios de posgrado.

Finalmente, a la Universidad Autónoma Metropolitana por brindarme la oportunidad de continuar con mi formación académica.

Resumen

El objetivo de esta tesis es estudiar la teoría cuántica de un electrón confinado a moverse sobre la superficie de un cono circular recto, como un caso particular de los llamados puntos cuánticos. Obtenemos las energías y las funciones propias de este modelo resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, considerando diferentes situaciones caracterizadas por los potenciales correspondientes a casos específicos, los cuales son:

- a) Potencial cuadrado circular infinito y efecto Aharonov-Bohm.
- b) Efecto de potencial armónico.
- c) Efectos magnéticos.
- d) Efectos magnéticos y potencial armónico.

Índice

Capítulo 1	5
Introducción	5
Capítulo 2	7
Electrón en un cono circular recto	7
2.1 Aspectos geométricos	7
2.2 Hamiltoniano	8
Capítulo 3	13
Potencial cuadrado circular infinito y efecto Aharonov-Bohm	13
Capítulo 4	30
Efecto de potencial armónico	30
Capítulo 5	39
Efectos magnéticos	39
Capítulo 6	56
Efectos magnéticos y potencial armónico	56
Capítulo 7	72
7.1 Promedios, varianza y desviación estándar	72
7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg	79
Conclusiones y perspectivas	88
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

Hasta hace poco más de treinta años la mayor parte de los estudios de la física de la materia condensada estaban dedicados a sistemas tridimensionales (3D), algo que ahora ha cambiado de manera radical gracias al desarrollo de técnicas sofisticadas que nos permiten crear y estudiar experimentalmente sistemas cuya dimensionalidad efectiva es 2D, 1D e incluso 0D; en los cuales, los efectos de cuantización por tamaño son mucho más notables que aquellos presentes en sistemas atómicos y moleculares que se han estudiado desde la aparición misma de la mecánica cuántica [1]. Estos sistemas han originado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales, tanto a nivel de ciencia básica como aplicada, pues los efectos cuánticos pueden modificarse y observarse de manera relativamente sencilla pues son muy pronunciados.

En general, de manera tal vez algo simplista, un átomo es una caja muy pequeña que encierra electrones a través de la fuerza de Coulomb que ejerce el núcleo sobre ellos, lo que resulta en niveles cuánticos y, por lo tanto, propiedades eléctricas y magnéticas particulares de los átomos listados en la Tabla Periódica de los Elementos [2], [3]. Al crear puntos cuánticos en particular y sistemas mesoscópicos en general, la forma y el tamaño del confinamiento de electrones en pozos, alambres o puntos cuánticos, se puede escoger casi a voluntad por lo que se pueden diseñar sistemas con propiedades eléctricas y magnéticas de manera muy específica hasta llegar a los llamados *átomos diseñados*, con propiedades que en mucho extienden las observadas en los elementos [3].

En este trabajo, estudiamos un modelo particular de puntos cuánticos de un electrón que se mueve sobre la superficie de un cono circular recto en general, bajo los efectos de potenciales particulares, todos del tipo central, que describimos más adelante.

En todo esto, el método de estudio es resolver la ecuación de Schrödinger de manera exacta para obtener las funciones y las energías propias de manera explícita, las cuales son analizadas de manera cualitativa en cada caso particular, todos y cada uno de los cuales es un caso particular de un sistema mesoscópico.

En los sistemas mesoscópicos objeto de este trabajo, los electrones se encuentran confinados a regiones cuyas dimensiones típicas, L , son comparables con la longitud de onda de Fermi, λ_F , por lo que su estudio es necesariamente cuántico, y hay coherencia de fase a lo largo de todo el sistema, es decir L es a lo más del orden de caminos libres medios, sea el elástico, l_e , o inelástico, l_i , o la longitud de coherencia de fase, λ_ϕ [1], [4]. Dado todo esto, el estudio experimental de estos sistemas requiere mediciones a muy bajas temperaturas, T , tales que la energía térmica, $k_B T$, sea menor que el espaciado medio entre los niveles energéticos para poder observar los efectos de cuantización por tamaño y de coherencia de fase [4].

A manera de resumen, para observar efectos cuánticos en sistemas mesoscópico necesitamos que

$L \lesssim \lambda_F$	Longitud de onda de Fermi
$L \lesssim l_e$	Camino libre medio elástico
$L \lesssim l_i$	Camino libre medio inelástico
$L \lesssim \lambda_\phi$	Longitud de coherencia de fase

y que, además,

$\Delta E \lesssim k_B T$	Energía térmica de Boltzmann
---------------------------	------------------------------

De manera breve describimos a continuación lo que se presenta a lo largo de este trabajo.

En el capítulo 2 se describe el modelo general que se estudia a lo largo de toda la presente tesis, en el cual estudiamos el comportamiento cuántico de un electrón que se mueve sobre la superficie de un cono circular recto. Para esto, resolvemos la ecuación de Schrödinger en la aproximación de masa efectiva para el electrón, el cual está además sujeto a diferentes combinaciones de potenciales de confinamiento y de campos magnéticos externos que son descritos detalladamente en todos los capítulos siguientes. En el capítulo 3, se estudia el caso del potencial cuadrado circular infinito y efectos Aharonov-Bohm, se obtienen y se grafican las funciones de onda, las energías y la densidad de probabilidad para este sistema y para uno de los sistemas estudiados. En el capítulo 4, se analiza el efecto solo de potencial armónico, con campos magnéticos nulos. En el capítulo 5, se estudia el caso en que el electrón se encuentra sujeto a efectos magnéticos, sin incluir el efecto de confinamiento tipo oscilador armónico. En el capítulo 6, se considera el caso del electrón sujeto a efectos magnéticos y que además se ha introducido un potencial de confinamiento tipo oscilador armónico. Posteriormente se dedica un capítulo al estudio de los promedios, varianzas, desviación estándar y principio de incertidumbre de Heisenberg para el modelo del electrón sujeto a efectos magnéticos y un potencial de confinamiento del tipo oscilador armónico, es decir, el modelo central de esta tesis. Finalmente, damos las conclusiones del trabajo y sugerencias para trabajos futuros.

Capítulo 2

Electrón en un cono circular recto

El modelo general de nuestro estudio está centrado en considerar un electrón que se mueve confinado a la superficie de un cono circular. Para esto, resolvemos la ecuación de Schrödinger en la aproximación de masa efectiva, bajo la acción de diferentes potenciales centrales, así como efectos magnéticos.

2.1 Aspectos geométricos

Describimos ahora el cono que se usa, el cual es del tipo mostrado en la Figura 2.1; el eje de simetría del cono se alinea con el eje z , con el vértice en el origen de coordenadas cuya semiapertura angular es θ_0 , pero para simplificar la notación, usamos θ , en todo el trabajo. El vector de posición del electrón, \vec{r} , tiene una longitud r , y ϕ es el ángulo azimutal [5]

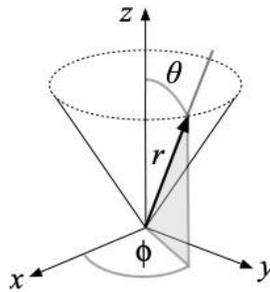


Figura 2.1 Geometría de un cono circular derecho

El vector de posición está dado por

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (2.1)$$

donde \hat{r} es el vector radial unitario,

$$\hat{r} = \text{sen } \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (2.2)$$

mientras que el vector unitario circunferencial es

$$\hat{\phi} = -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}. \quad (2.3)$$

Dado que θ es constante, el elemento diferencial de desplazamiento, $d\vec{r}$, es

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r \text{sen } \theta d\phi\hat{\phi}, \quad (2.4)$$

Notemos que, a partir del elemento diferencial de desplazamiento, $d\vec{r}$, podemos identificar los factores de escala dados por

$$h_r = 1 \quad y \quad h_\phi = r \operatorname{sen} \theta$$

por lo que la forma general del operador gradiente, está dada por

$$\nabla = \hat{r} \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

así

(2.5)

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Asimismo, la forma general del operador Laplaciano, se escribe como

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_r h_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(h_\phi \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_r}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right]$$

de modo que

(2.6)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Observemos que este Laplaciano se reduce al caso bidimensional, cuando el cono se aplasta para formar el plano xy , lo cual sucede cuando $\theta = 90^\circ$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.7)$$

2.2 Hamiltoniano

En esta sección presentamos el Hamiltoniano que se utiliza, en el cual se introducen diferentes efectos a través de los diferentes potenciales que consideramos; la carga eléctrica del electrón es $-e$ y su masa efectiva es m_0 .

Consideramos dos tipos de efectos magnéticos. Uno se debe a la presencia de un campo magnético externo que es uniforme y paralelo al eje z , \vec{B} , tal como se muestra en la figura 2.2. El otro se debe al potencial vectorial magnético de un solenoide infinitesimal que está a lo largo del eje z y cuyo flujo magnético es Φ_0 .

Dado esto, obtenemos que en la norma de Landau el potencial vectorial magnético que incluye estos dos efectos es el siguiente:

$$\vec{A}(r, \phi) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin\theta} + \frac{B}{2} r \sin\theta \right) \hat{\phi} = A(r) \hat{\phi} \quad (2.8)$$

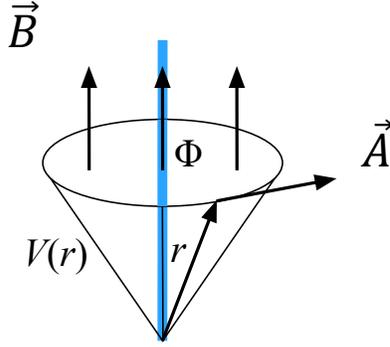


Figura 2.2 Campo magnético externo \vec{B} y flujo magnético es Φ_0 en dirección del eje z.

Esto se incluye en el Hamiltoniano por medio de la llamada *substitución mínima* [6], es decir:

$$H_{mag} = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 \quad (2.9)$$

donde \vec{p} es el operador de momento:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.10)$$

A este Hamiltoniano sumamos efectos de potenciales centrales que, por lo tanto, sólo dependen de la coordenada radial y son entonces de la forma $V(r)$.

Por lo tanto, el Hamiltoniano más general, $H = H_{mag} + V(r)$, que se estudia en este trabajo es:

$$H = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(r) \quad (2.11)$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + 2 \frac{e}{2m_0} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{1}{2m_0} (Ae)^2 + V(r) \quad (2.12)$$

por lo que

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2 \frac{e\vec{A}}{2m_0} \left(-i\hbar \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{2m_0} (Ae)^2 + V(r) \quad (2.13)$$

Recordemos además que el momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.14)$$

que, en nuestro caso está dado por

$$\vec{L} = i\hbar \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.15)$$

En consecuencia

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.16)$$

y

$$L^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.17)$$

Entonces,

$$H = \frac{\hat{p}_r^2}{2m_0} + \frac{L^2}{2m_0 r^2} + 2 \frac{e}{2m_0} \frac{A L_z}{r \sin \theta} + \frac{(Ae)^2}{2m_0} + V(r) \quad (2.18)$$

por lo que:

$$[H, L^2] = 0 \quad (2.19)$$

$$[H, L_z] = 0$$

Dado esto, la función de onda se puede escribir como una eigenfunción simultánea de H , L^2 y L_z , razón por la cual podemos además utilizar el método de separación de variables para escribir a la función de onda como

$$\psi(r, \phi) = R(r) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.20)$$

ya que $e^{im\phi}$, con $\phi \in \mathbb{Z}$ es eigenfunción tanto de la componente z del momento angular, como del cuadrado de este mismo operador:

$$L_z \left(\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \hbar m \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.21)$$

$$L^2 \left(\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = -\frac{\hbar^2}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \hbar^2 m^2 \left(\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (2.22)$$

por lo que la ecuación radial a resolver es la siguiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} R \right) - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \frac{Aim}{r \text{sen} \theta} R + \frac{e^2 A^2}{2m_0} R + VR = ER \quad (2.23)$$

Resolvemos esta ecuación para los casos particulares contenidos en la tabla 1, para cada uno de los cuales se obtienen las funciones de onda y las energías propias de manera analítica.

Además, en los capítulos siguientes, cuando se introduce el concepto de función de onda radial unidimensional, dada por

$$u(r) = \sqrt{r \text{sen} \theta} R(r) \quad (2.24)$$

da origen de manera general a la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V_{ef}(r)u(r) = Eu(r) \quad (2.25)$$

que permite identificar un potencial efectivo adimensional, $V_{ef}(r)$, para cada uno de los casos estudiados en esta tesis y contenidos en la tabla 2, en los cuáles se observan las contribuciones a cada uno de ellos del potencial centrífugo, más potenciales de confinamiento centrales, más las contribuciones del flujo y del campo magnético. En [7], se encuentra una aplicación de estos potenciales efectivos, en donde se identifica y se discute el caso del potencial centrífugo para el corral cuántico que es el mismo potencial centrífugo que aparece en todos los casos estudiados en esta tesis, es decir, el término dependiente de μ^2 .

	\vec{A}	$V(r)$
Potencial cuadrado circular infinito y efecto Aharonov-Bohm	$\vec{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} \hat{\phi}$	$V(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \infty & r > r_0 \end{cases}$
Efecto de potencial armónico	$\vec{A} = 0$	$V(r) = \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2$
Efectos magnéticos	$\vec{A} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} + \frac{B}{2} r \text{sen}\theta \right) \hat{\phi}$	$V(r) = 0$
Efectos magnéticos en presencia de un potencial armónico	$\vec{A} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} + \frac{B}{2} r \text{sen}\theta \right) \hat{\phi}$	$V(r) = \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2$

Tabla 1 Potencial vectorial magnético, \vec{A} , y potenciales centrales, $V(r)$, para los casos particulares contenidos en esta tesis.

	$V_{ef}(r)$
Potencial cuadrado circular infinito y efecto Aharonov-Bohm	$V_{ef}(r/r_0) = \frac{\mu^2 - 1/4}{(r/r_0)^2}$
Efecto de potencial armónico	$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2$
Efectos magnéticos	$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + (\beta \text{sen}\theta)^2 r^2$
Efectos magnéticos en presencia de un potencial armónico	$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2\theta}{4} \right)$

Tabla 2 Potenciales efectivos, $V_{ef}(r)$ adimensionales, en términos de la variable r adimensional, para cada uno de los casos estudiados en este trabajo.

Capítulo 3

Potencial cuadrado circular infinito y efecto Aharonov-Bohm

En este capítulo estudiamos que sucede cuando se mueve un electrón dentro de una caja circular cónica de radio r_0 , tal como se muestra en la figura 3.1, en presencia de un solenoide infinitamente delgado a lo largo del eje del cono de magnitud Φ_0 que es paralelo al eje z.

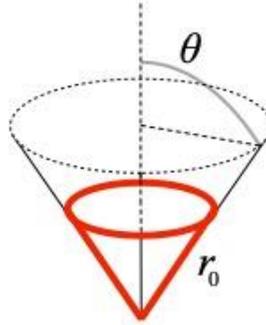


Figura 3.1 Electrón confinado dentro de una caja circular cónica de radio r_0 .

El potencial radial es

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \infty & r > r_0 \end{cases}$$

por lo que el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(r) \quad (3.1)$$

donde \vec{A} , el potencial vectorial magnético está dado por

$$\vec{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi r \sin\theta} \hat{\phi} \quad (3.2)$$

y dado que

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \quad (3.3)$$

$$p^2 = -\hbar^2\nabla^2$$

el operador Hamiltoniano queda como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.4)$$

$$+ \frac{e^2}{2m_0} \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 (r \sin \theta)^2} + V(r)$$

Entonces, tenemos que

$$H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi) \quad (3.5)$$

con la condición de frontera

$$\psi(r_0, \phi) = 0$$

Dado esto, podemos escribir que

$$\psi(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} R(r) \quad (3.6)$$

con $R(r_0) = 0$; por lo tanto, la ecuación radial para $R(r)$ es,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} R \right) - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} \frac{im}{r \sin \theta} R \quad (3.7)$$

$$+ \left(\frac{e\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} \right)^2 \frac{1}{2m_0} R = ER$$

Hacemos un primer cambio de variable y definimos un parámetro relacionado con el flujo magnético,

$$y = \frac{r}{r_0} \quad (3.8)$$

$$\nu = \frac{e\Phi_0}{h}$$

por lo que

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR}{dy} - \frac{(m + \nu)^2}{y^2 \sin^2 \theta} R = -\frac{2m_0 E}{\hbar^2} r_0^2 R(y) \quad (3.9)$$

y al definir

$$k^2 = \frac{2m_0 E}{\hbar^2} r_0^2 \quad (3.10)$$

y

$$\mu = \frac{|m + \nu|}{\text{sen } \theta} \quad (3.11)$$

tenemos que

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR}{dy} + \left[k^2 - \frac{\mu^2}{y^2} \right] R = 0 \quad (3.12)$$

por lo que al cambiar nuevamente de variable

$$x = ky,$$

llegamos finalmente a la ecuación de Bessel [8]:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right] R = 0 \quad (3.13)$$

cuya solución más general está dada por:

$$R = A_+ J_{|\mu|}(x) + A_- Y_{-|\mu|}(x) \quad (3.14)$$

donde $J_{|\mu|}(x)$ son las funciones de Bessel de primera especie de orden $|\mu|$, estas funciones son finitas en el origen.

Las funciones $Y_{-|\mu|}(x)$, funciones Bessel de segunda especie de orden $|\mu|$, divergen en el origen, tal como se muestra en la siguiente figura y, por lo tanto, no son relevantes para el presente trabajo.

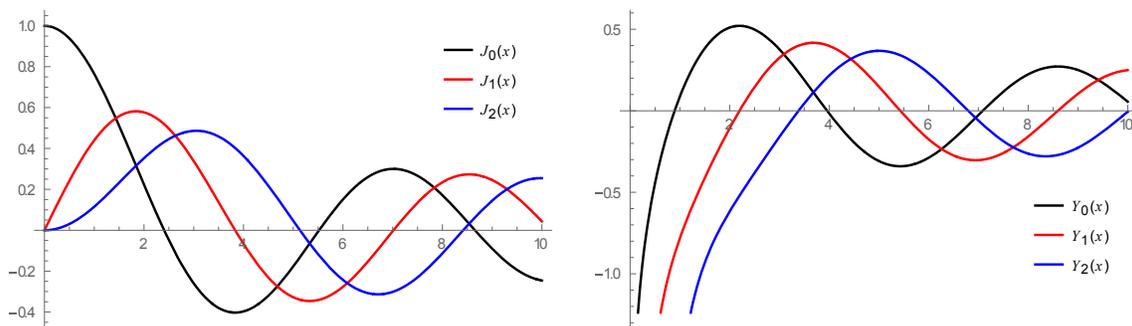


Figura 3.2 Gráficas de las funciones de Bessel. Del lado izquierdo, se muestran las funciones de primera especie para $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$, que como se observa, tienen un valor finito en el origen; mientras que del lado derecho, se muestran las funciones de Bessel de segunda especie para $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$, las cuales divergen a $-\infty$ en el origen.

En resumen, la solución es

$$R(r) = NJ_{|\mu|} \left(k \frac{r}{r_0} \right) \quad (3.15)$$

por lo que al usar la condición de frontera se obtiene la ecuación de valores propios,

$$R(r = r_0) = 0 = NJ_{|\mu|}(k) \quad (3.16)$$

y, por lo tanto,

$$k = \chi_{|\mu|,n}$$

donde $\chi_{|\mu|,n}$ es el n-ésimo cero de $J_{|\mu|}(x)$. Tenemos entonces que las funciones de onda propias de nuestro modelo están dadas por:

$$\psi_{|\mu|,n}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} NJ_{|\mu|} \left(\chi_{|\mu|,n} \frac{r}{r_0} \right) \quad (3.17)$$

donde N es la constante de normalización que se calcula de manera inmediata,

$$N = \left[\frac{2}{r_0^2 \text{sen} \theta J_{|\mu|+1}^2(\chi_{|\mu|,n})} \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

Entonces, finalmente, las funciones y las energías propias del modelo estudiado en este capítulo están respectivamente dadas por:

$$\psi_{|\mu|,n}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi \text{sen} \theta} r_0} \left[\frac{2}{J_{|\mu|+1}^2(\chi_{|\mu|,n})} \right]^{1/2} J_{|\mu|} \left(\chi_{|\mu|,n} \frac{r}{r_0} \right) \quad (3.19)$$

$$E(\mu, n) = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \chi_{|\mu|,n}^2 \quad (3.20)$$

Nótese que en el caso de $\theta = 90^\circ$ y sin presencia de flujo magnético, es decir, $\Phi_0 = 0$, se recupera el caso de una partícula confinada en una caja circular plana de radio r_0 que ya ha sido estudiado en la literatura, en particular por N. Aquino y E. Castaño [9], de manera detallada, donde espectro de energías y las funciones de onda se reducen a

$$E(m, n) = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \chi_{|m|,n}^2 \quad (3.21)$$

$$\psi_{|m|,n}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi r_0}} \left[\frac{2}{J_{|m|+1}^2(\chi_{|m|,n})} \right]^{1/2} J_{|m|} \left(\chi_{|m|,n} \frac{r}{r_0} \right) \quad (3.22)$$

Estos niveles de energía están doblemente degenerados para $m \neq 0$, lo cual se debe a los dos valores equivalentes de $\pm|m|$.

Notemos además que el Hamiltoniano para un electrón que se mueve libremente sobre la superficie del cono sin presencia del potencial vectorial magnético, es decir, $\vec{A} = 0$, está dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.23)$$

de manera que esto conduce a resolver la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} R \right) = ER \quad (3.24)$$

y haciendo los cambios de variable correspondientes, se llega a la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{M^2}{x^2} \right] R = 0 \quad (3.25)$$

donde $M = |m|/\sin \theta$

cuya solución más general, en analogía con (3.13), está dada por

$$R = A_+ J_{|M|}(x) + A_- J_{-|M|}(x) \quad (3.26)$$

es decir

$$R = A_+ J_{|M|}(x) \quad (3.27)$$

pues sabemos ya que las $J_{-|M|}(x)$ divergen en el origen y no son relevantes para nuestro caso.

Este caso sirve de referencia para ilustrar el efecto Aharonov-Bohm presente en este capítulo, en los estados ligados del electrón. Observemos que la diferencia entre (3.13) y (3.25) reside en el término extra que surge del potencial vectorial magnético, el flujo magnético, ν , es decir se muestra la influencia del potencial vectorial magnético sobre los estados de energía y las

eigenfunciones del sistema, los cuales dependen de la suma $m + \nu$ y su combinación de valores, cuyo análisis se muestra en las siguientes páginas.

Cabe mencionar también, que D. Kouznetsov, E. Ley-Koo and G. Villa-Torres estudiaron el efecto Aharonov-Bohm sobre los estados del electrón libre en una caja cilíndrica anular [10], en presencia de un campo de inducción magnética axial y uniforme confinado y centrado en la perforación. En este modelo se exhibe el efecto Aharonov-Bohm sobre los estados ligados del electrón a través de la dependencia de los eigenvalores de la energía y las funciones con respecto al flujo magnético encerrado, ν , es decir

$$R_M(\rho) = A_M J_M(K_T \rho) + B_M Y_M(K_T \rho), \quad M = m + \nu \quad (3.28)$$

cuya solución general es la combinación lineal de las funciones de Bessel de primera y de segunda especie y los eigenvalores de la energía están dados por

$$E_{Msn} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{x_{Ms}^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \quad (3.29)$$

Notemos que la diferencia entre la solución a la ecuación radial de este capítulo, ecuación (3.27), con el caso del electrón libre en una caja cilíndrica anular, es que en nuestro modelo no aparecen en la solución las funciones Bessel de segunda especie pues divergen en el origen y no son relevantes para nuestro caso, y para el electrón libre en una caja cilíndrica anular se tiene una región que excluye el origen, a la cual no puede penetrar el electrón, por lo tanto, las funciones de Neumann si forman parte de la solución a la ecuación radial. Además, se nota de inmediato, la dependencia en nuestro caso del ángulo de apertura, es decir

$$\mu = \frac{|m + \nu|}{\sin \theta}$$

por tanto, los eigenvalores de energía también dependen de μ en (3.20) comparado con (3.29), que solo dependen de $M = m + \nu$, cuyos niveles de energía en ambos casos corresponden a los cuadrados de los ceros y en ambos casos se observa la periodicidad del espectro de energía, conforme ν cambia en una unidad.

Regresando a nuestro problema, observemos que hay degeneración para diferentes valores de m y ν , pues se puede obtener un mismo valor μ y, por lo tanto, tenemos que las correspondientes energías son iguales entre sí.

Para entender el comportamiento de estas energías propias, además de notar la degeneración, es útil introducir el concepto de función de onda radial unidimensional, la cual está dada por

$$u(y) = \sqrt{y \sin \theta} R(y), \quad (3.30)$$

cuya ecuación con la variable $y = r/r_0$ es:

$$-\frac{d^2 u(y)}{dy^2} + \left[\frac{\mu^2 - 1/4}{y^2} - k^2 \right] u(y) = 0 \quad (3.31)$$

la cual es una ecuación de Schrödinger unidimensional que nos permite identificar un potencial centrífugo adimensional dado por

$$V_{cf}(y) = \frac{\mu^2 - 1/4}{y^2} \quad (3.32)$$

cuya forma en general se representa en la figura siguiente para $\mu^2 < 1/4$ y $\mu^2 > 1/4$

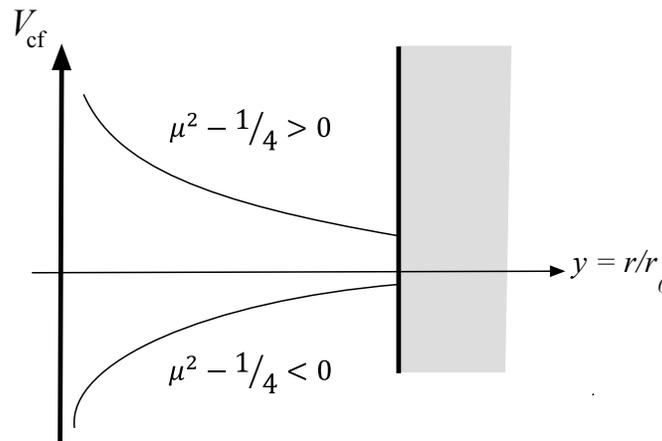


Figura 3.3 Gráfica del potencial centrífugo adimensional para la ecuación (3.32), en términos de la variable r adimensional.

Vemos entonces que la partícula además de estar confinada entre 0 y r_0 , $u(0) = u(1) = 0$, es decir, un pozo infinito de potencial está también bajo el efecto de un potencial centrífugo que depende del momento angular y del flujo magnético.

Cuando $\mu^2 < 1/4$, el potencial centrífugo es atractivo y tiende a llevar a la partícula hacia el origen; en caso contrario, $\mu^2 > 1/4$, el potencial centrífugo es positivo, diverge en el origen, por lo que mantiene al electrón alejado de este punto y lo expulsa hacia la barrera exterior.

Conforme μ aumenta el electrón se ve entonces confinado a regiones más pequeñas pero cercanas a la frontera del sistema; en consecuencia, tanto las energías propias como el espaciamiento entre ellas aumenta con μ .

Dado que

$$\mu = \frac{|m + \nu|}{\text{sen } \theta}$$

el potencial centrífugo crece con $|m + \nu|$ y, de manera muy importante, con $1/(\text{sen } \theta)$, lo que representa un pronunciado efecto de cuantización por tamaño cuando el cono tiende a ser una delgada aguja cónica.

Todo esto se presenta en las siguientes gráficas.

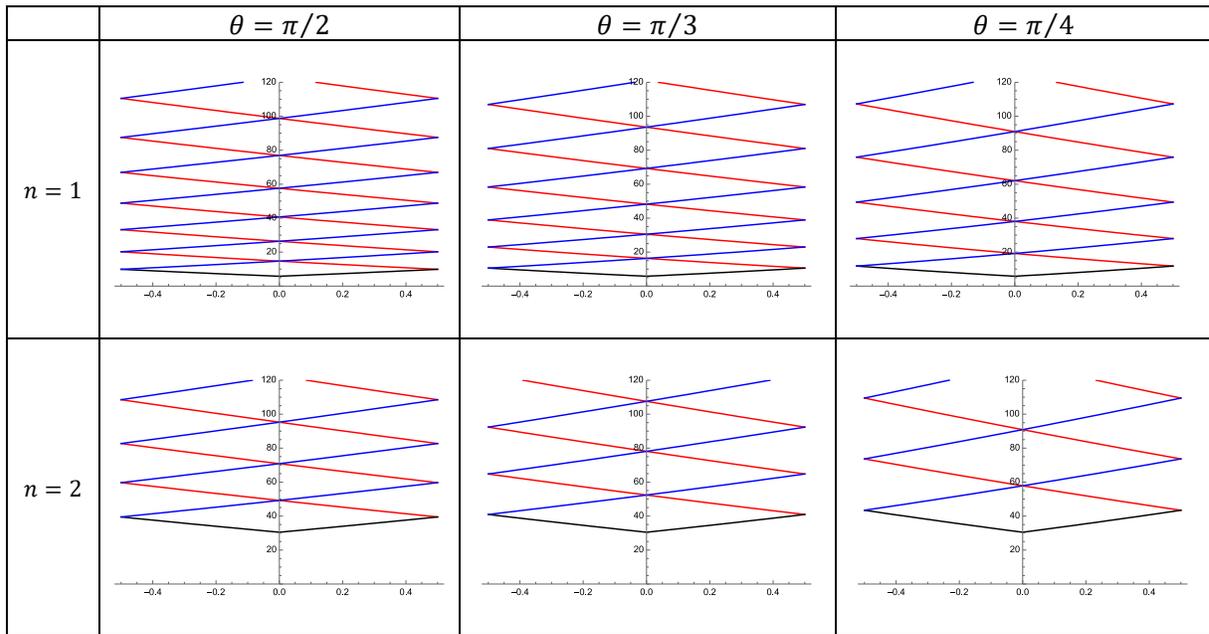


Figura 3.4 Energías para $n = 1$ y 2 , $|m| = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y $\theta = \pi/2, \pi/3$ y $\pi/4$, como función del flujo, ν , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. En color negro $m = 0$, en rojo $m < 0$ y en azul $m > 0$; entre mayor es $|m|$ más grande el valor de la energía.

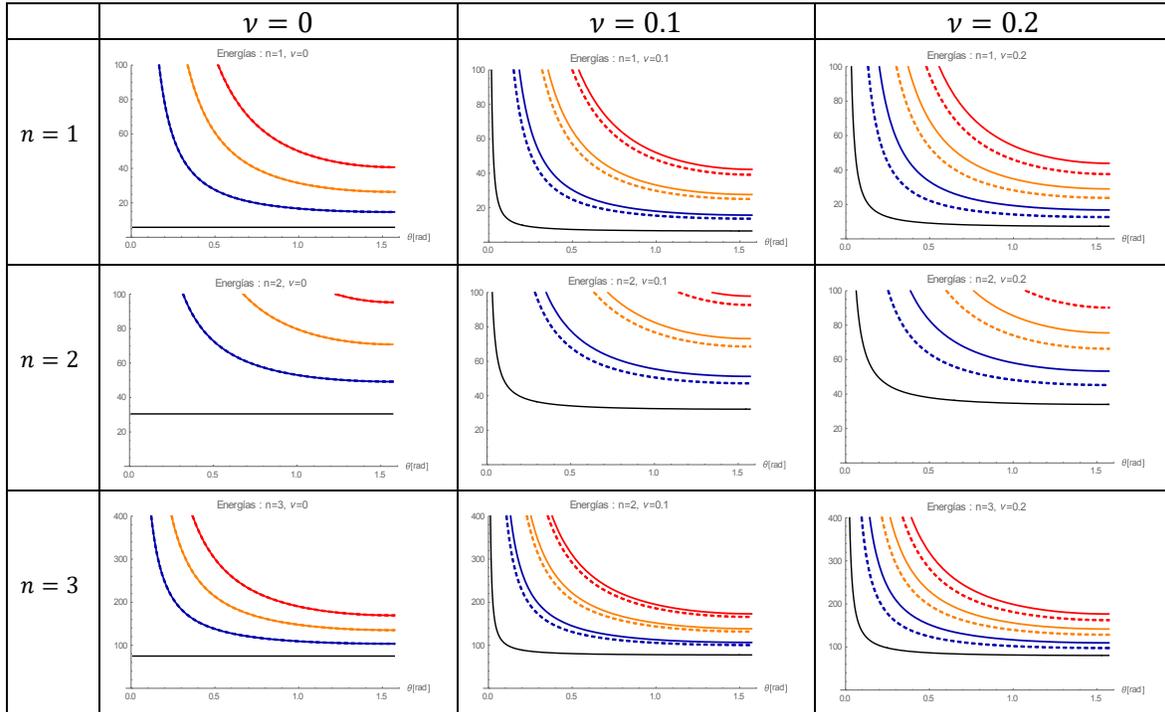


Figura 3.5 Energías para $n = 1, 2$ y 3 , $|m| = 0$ (negro), 1 (azul), 2 (naranja) y 3 (rojo), como función del ángulo θ , en el intervalo $[0.01, \pi/2]$, para $\nu = 0, 0.1$ y 0.2 . En color negro $m = 0$, curvas sólidas para $m > 0$ y punteadas para $m < 0$.

Notemos que en las figuras 3.4 y 3.5, se observa el comportamiento del espectro de energías, variando el ángulo de apertura, θ , en un caso y el flujo magnético, ν , en otro, respectivamente. En la figura 3.4 observamos que a medida que se reduce el ángulo de apertura, θ , los niveles de energía se van abriendo, es decir, la diferencia entre los niveles es mayor, mientras que al aumentar n , la energía aumenta. En la figura 3.5 observamos que igualmente al aumentar n , los niveles de energía aumentan, y observamos que para $\nu = 0$, los niveles de energía están degenerados, mientras que para $\nu = 0.1$ y 0.2 se rompe la degeneración y los niveles de energía se van separando a medida que se aumenta el flujo.

Además, notemos que al aumentar el flujo magnético desaparece la degeneración en general, degeneración que se recupera cuando $\nu = 0.5$, como es de esperarse dada la periodicidad de nuestras expresiones en este parámetro, lo cual se ve claramente en las gráficas de la siguiente figura.

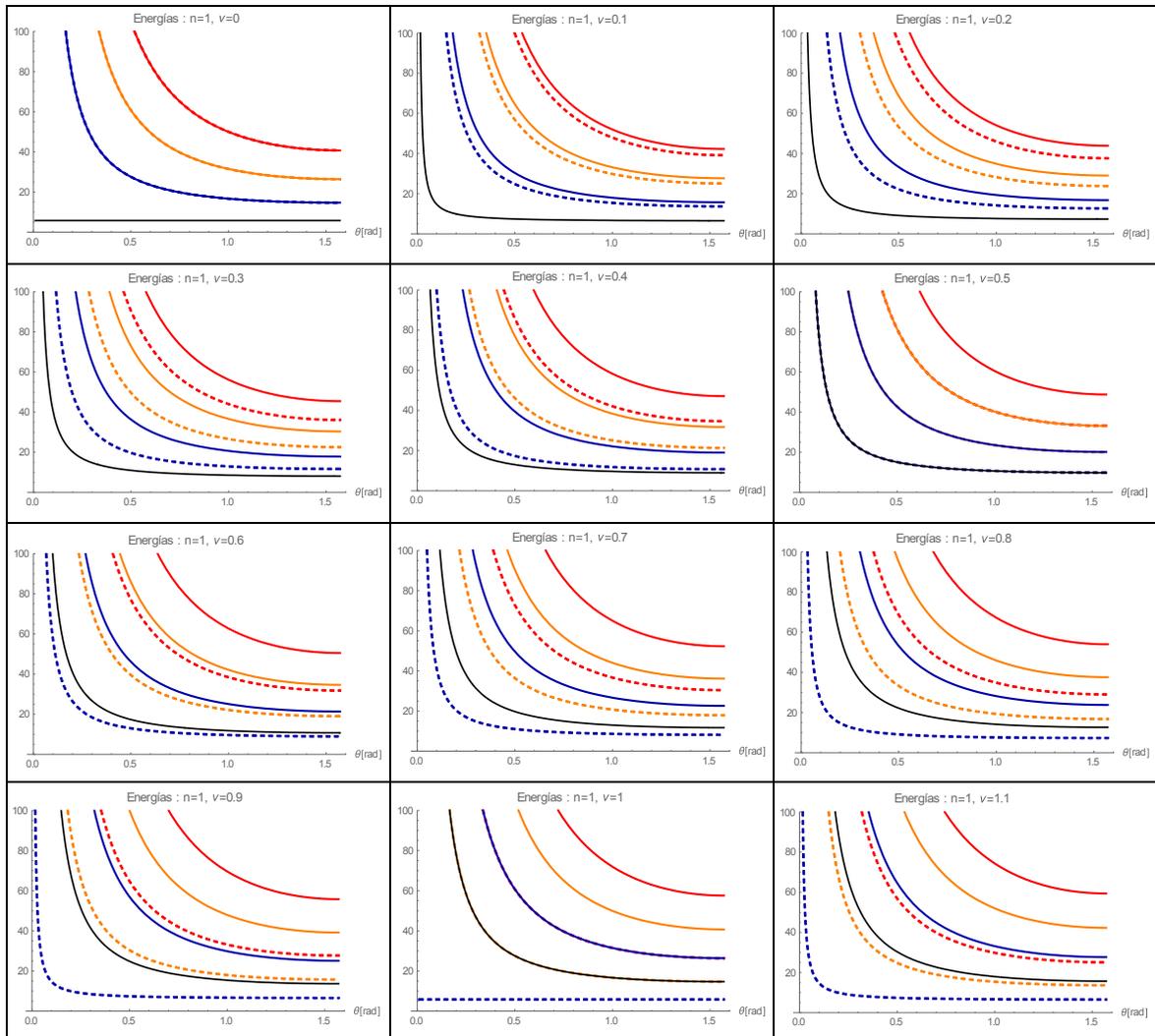


Figura 3.6 Energías para $n = 1$, $|m| = 0$ (negro), 1(azul), 2(naranja) y 3 (rojo), como función del ángulo θ , en el intervalo $[0.01, \pi/2]$, para $\nu = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.1$. En color negro $m = 0$, curvas sólidas para $m > 0$ y punteadas para $m < 0$.

Estudiemos ahora la densidad de probabilidad por unidad de área, la cual es el módulo cuadrado de la función de onda:

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = |\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$$

que, de manera explícita está dada por:

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = \frac{1}{\pi r_0^2 \text{sen}\theta J_{|\mu|+1}^2(\chi_{|\mu|,n})} \left| J_{|\mu|} \left(\chi_{|\mu|,n} \frac{r}{r_0} \right) \right|^2 \quad (3.33)$$

para valores de $r < r_0$, siendo igual a cero si $r > r_0$.

A continuación, se muestran algunas gráficas de esta función.

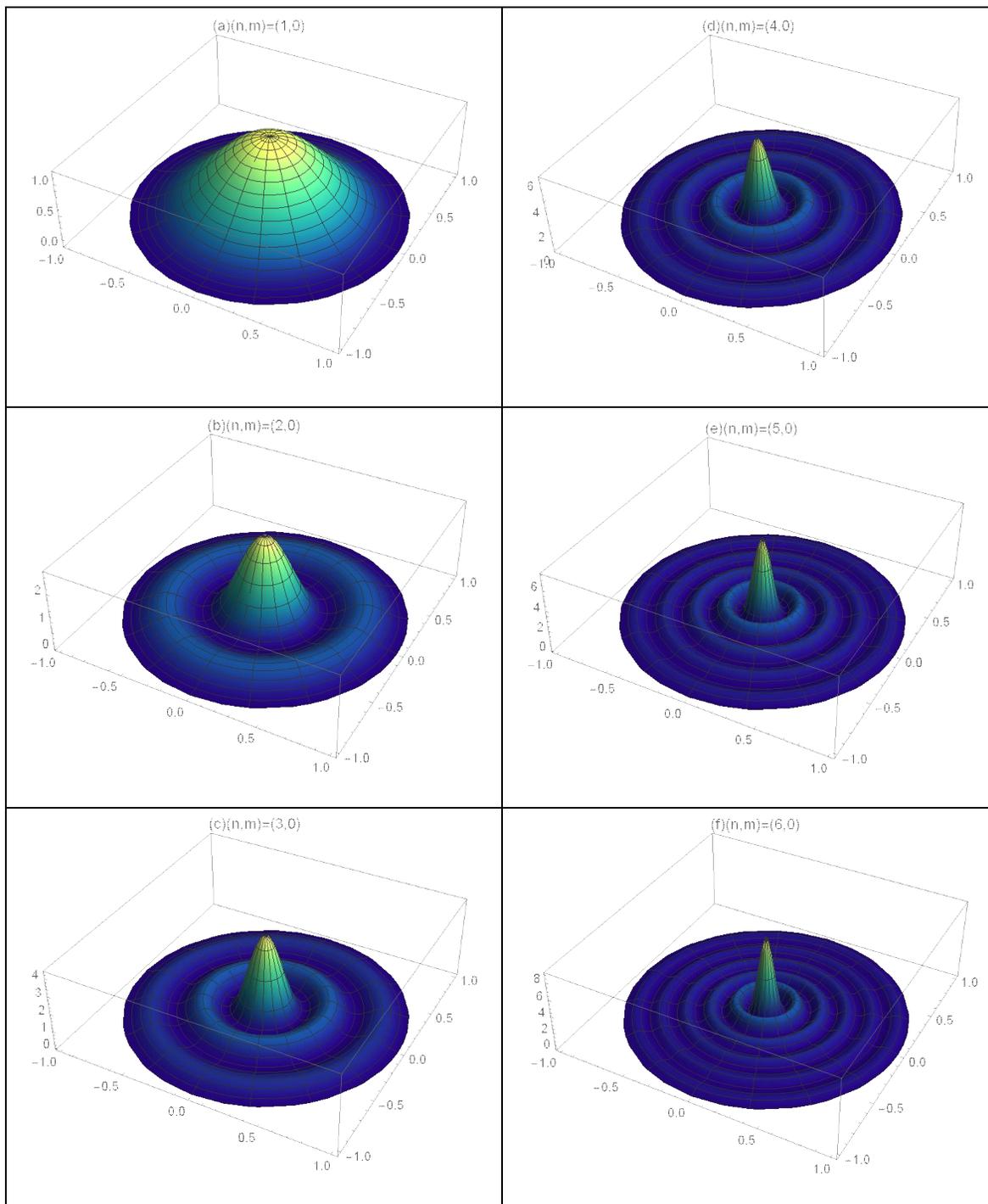


Figura 3.7 Gráficas de las funciones $|\psi_{l,m}|^2$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 , $m = 0$, $v = 0$ para conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2$.

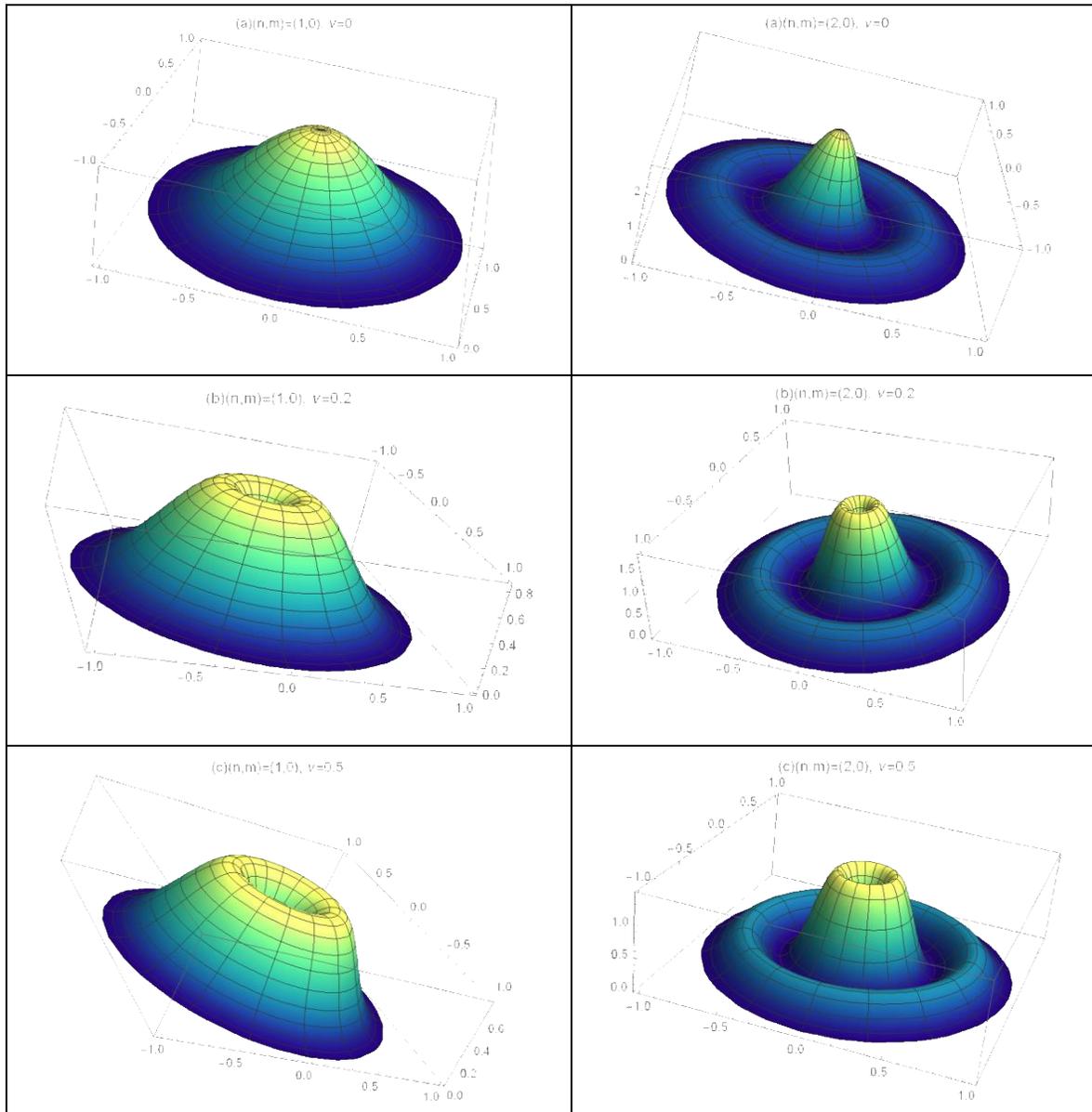


Figura 3.8 Gráficas de las funciones $|\psi_{l,m,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0$, $v = 0, 0.2, 0.5$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2$.

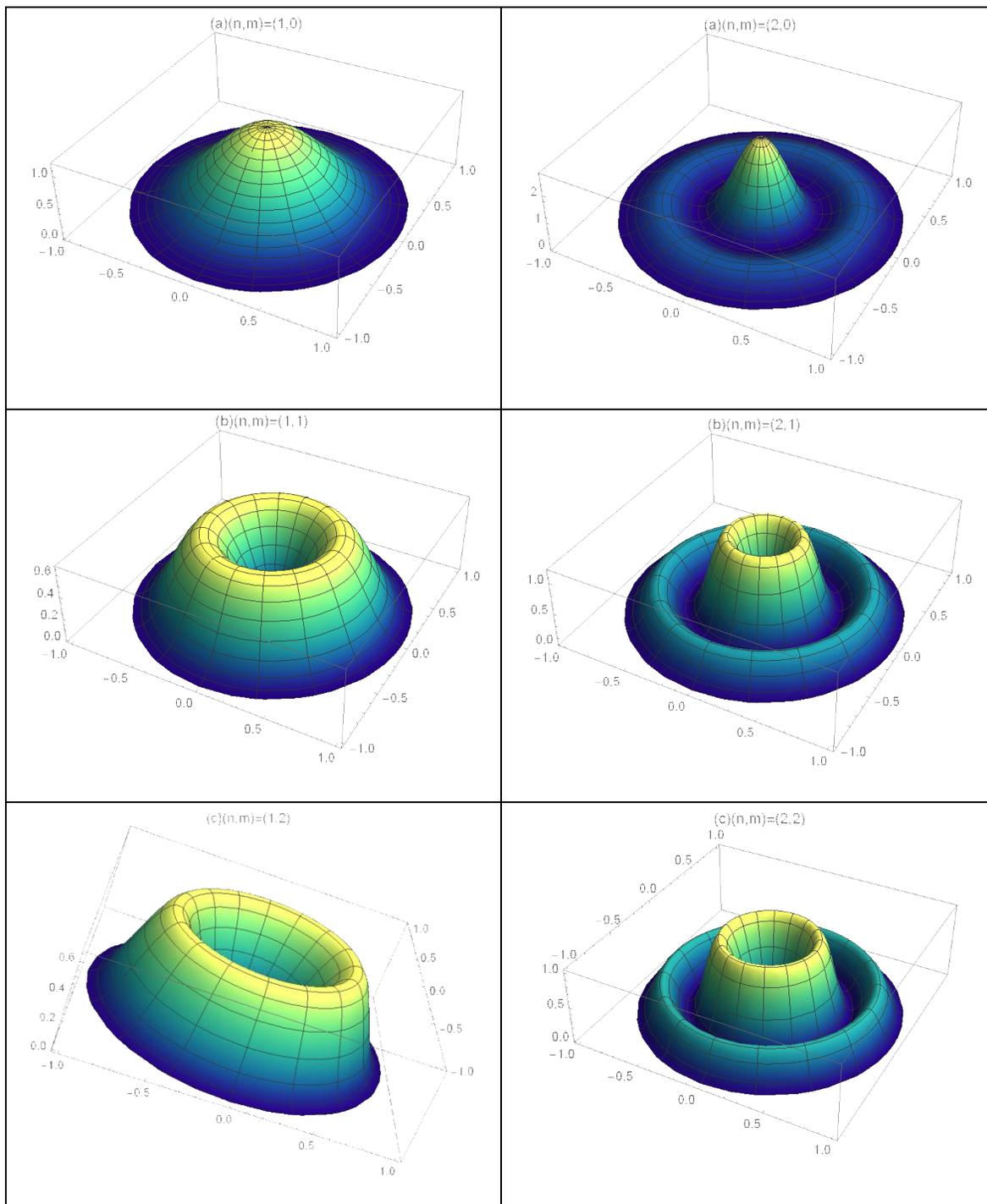


Figura 3.9 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0, 1$ y 2 , $\nu = 0$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2$.

Observamos que en la figura 3.7 solo se muestra la estructura nodal para la densidad de probabilidad por unidad de área, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 , y el caso particular en que $\theta = \pi/2$, donde a medida que aumenta n , aumenta el número de nodos.

En la figura 3.8 notamos la influencia del flujo magnético, ν , la columna de la izquierda corresponde a $n = 1$ y la columna de la derecha, a $n = 2$, en donde la estructura nodal en las densidades de probabilidad es evidente. En ambos casos vemos que a medida que aumentamos el flujo magnético, la probabilidad de que la partícula se encuentre cerca del origen disminuye, lo cual se puede observar claramente cuando estudiamos el potencial centrífugo, en donde se observa que cuando este es positivo, se tiene una barrera centrífuga repulsiva que hace que la partícula no pueda penetrar en el origen de coordenadas.

Mientras que en la figura 3.9 observamos qué sucede cuando tomamos diferentes valores del número cuántico magnético, m , en este caso, $m = 0, 1$ y 2 , vemos que para el caso de $n = 1$ y 2 , a medida que m aumenta, más grande será la región de exclusión, es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula cerca del origen de coordenadas, es menor.

Estudiemos ahora el comportamiento de la densidad de probabilidad radial dada en términos de la función de onda radial unidimensional es

$$d_{|\mu|,n}(r) = \frac{2r/r_0}{r_0 J_{|\mu|+1}^2(\chi_{|\mu|,n})} \left| J_{|\mu|} \left(\chi_{|\mu|,n} \frac{r}{r_0} \right) \right|^2 \quad (3.34)$$

función de la cual presentamos diferentes casos en las tablas de figuras que se muestran a continuación, en las cuales se aprecia el efecto de confinamiento inducido por la barrera centrífuga de acuerdo con los valores de m , ν y θ .

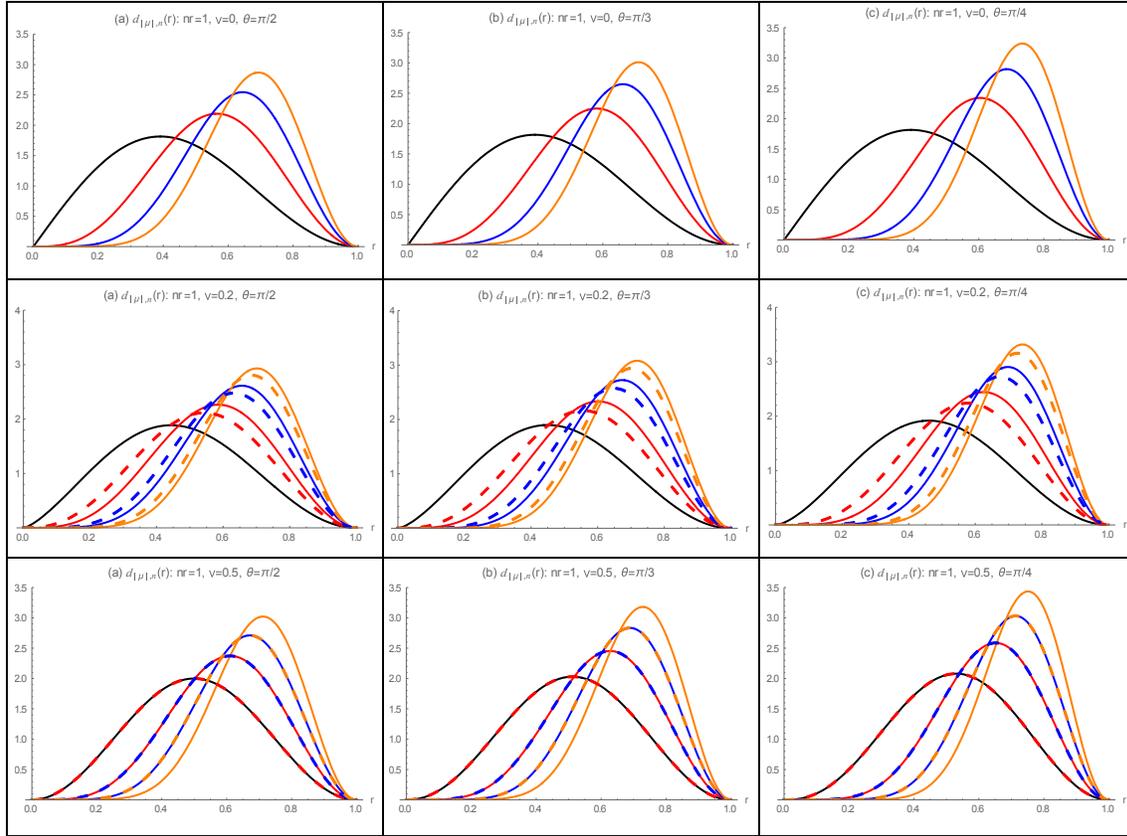


Figura 3.10 Densidad de probabilidad radial, $d_{|m|,n}(r)$, para $n = 1$, como función de r en el intervalo $[0, 1]$, para $|m| = 0$ (negro), 1(rojo), 2 (azul) y 3(naranja), $v = 0, 0.2, 0.5$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3$ y $\pi/4$ respectivamente.

Notamos que cuando $m = 0$ y $v = 0$, el potencial centrífugo es atractivo y tiende a llevar a la partícula hacia el origen de coordenadas mientras que para $m \neq 0$, desplaza a la partícula hacia la barrera exterior y mantiene al electrón alejado del origen de coordenadas. También podemos observar que cuando $v = 0.5$ existe degeneración en los estados de densidad de probabilidad radial, mientras que para $v = 0.2$ la degeneración se rompe y a medida que aumenta el flujo magnético, desplaza a la partícula hacia la barrera exterior y es menos probable que el electrón penetre al origen de coordenadas. Los mismos efectos ocurren para $n = 2$, mostrados en la siguiente tabla.

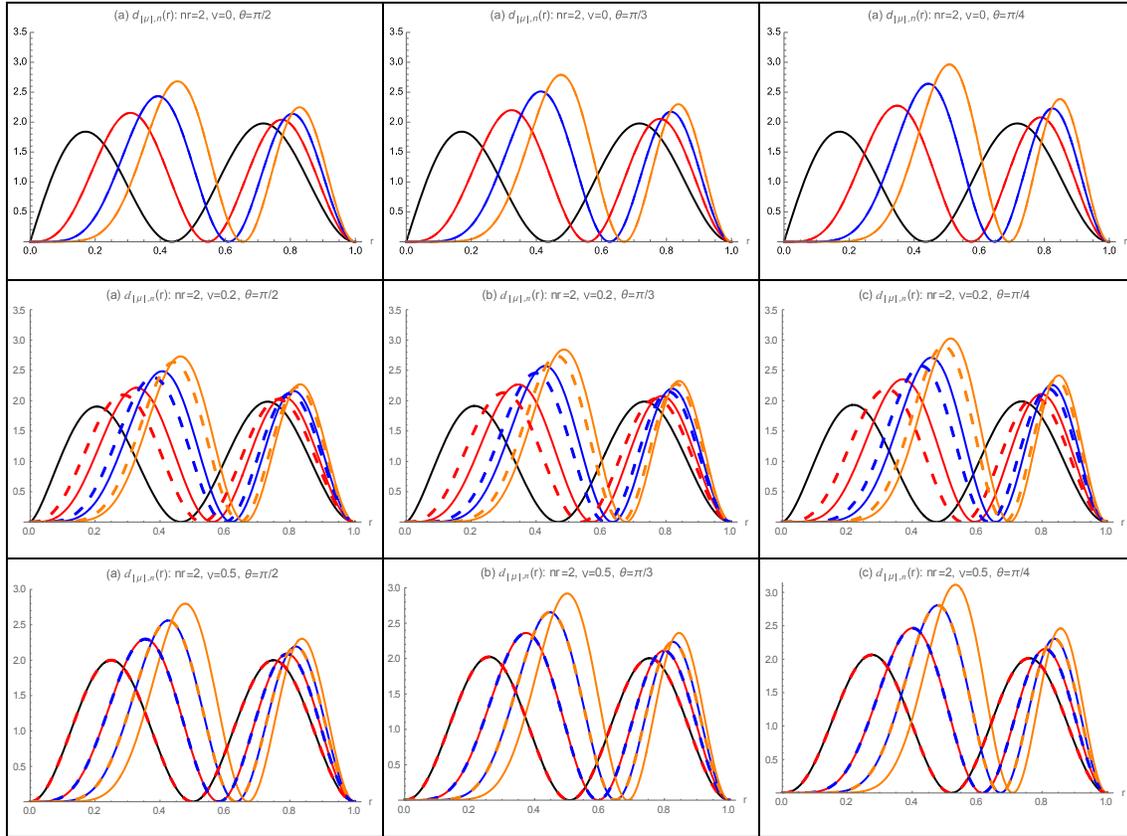


Figura 3.11 Densidad de probabilidad radial, $d_{|\mu|,n}(r)$, para $n = 2$, como función de r en el intervalo $[0, 1]$, para $|m| = 0$ (negro), 1 (rojo), 2 (azul) y 3 (naranja), curvas sólidas para $m > 0$ y punteadas para $m < 0$ para $\nu = 0, 0.2, 0.5$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3$ y $\pi/4$, respectivamente.

Para $n = 2$ observamos que para $\nu = 0.2$ se rompe la degeneración, mientras que para $\nu = 0.5$ se recupera la degeneración.

Capítulo 4

Efecto de potencial armónico

En este capítulo se estudia a un electrón que se mueve sobre la superficie de un cono circular recto de amplitud angular θ , bajo la influencia de un potencial central armónico, es decir Hookiano.

El Hamiltoniano del sistema está entonces dado por la siguiente expresión,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 \quad (4.1)$$

donde m_0 es la masa efectiva del electrón y ω_0 es la frecuencia del oscilador, por lo que

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 \quad (4.2)$$

Nótese que si $\theta = \pi/2$ se obtiene el Hamiltoniano de un oscilador armónico bidimensional en el plano [11],[12]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 \quad (4.3)$$

cuyas energías propias están dadas por

$$E_n^{2D} = \hbar \omega_0 (2n + 1) \quad (4.4)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$

Entonces

$$H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi) \quad (4.5)$$

y al escribir a la función de onda como

$$\psi(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} R(r) \quad (4.6)$$

en general, la ecuación radial es,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta^2} R \right) + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 R = ER \quad (4.7)$$

Para resolver la ecuación de interés en nuestro caso, hacemos cambios de variable,

$$r = l\rho \quad (4.8)$$

$$E = \hbar\omega_0\varepsilon$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2 \sin^2 \theta^2} R - \frac{m_0^2 \omega_0^2}{\hbar^2} \rho^2 l^4 R = -\frac{2m_0 \omega_0}{\hbar} l^2 \varepsilon R \quad (4.9)$$

donde, para simplificar podemos escoger que

$$\frac{\omega_0^2 m_0^2}{\hbar^2} \rho^2 l^4 = 1 \quad (4.10)$$

es decir, introducimos una longitud

$$l = \left(\frac{\hbar^2}{\omega_0^2 m_0^2} \right)^{1/4} \quad (4.11)$$

y, además, se define

$$\mu \equiv \frac{|m|}{\sin \theta} \quad (4.12)$$

Hacemos un cambio de notación, $\rho \rightarrow r$, por lo que

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[2\varepsilon - \frac{\mu^2}{r^2} - r^2 \right] R(r) = 0 \quad (4.13)$$

Si $r \ll 1$, $R \rightarrow R_0$ donde

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} - \frac{\mu^2}{r^2} R_0(r) = 0 \quad (4.14)$$

cuya solución físicamente aceptable, es decir, la que es regular en el origen es

$$R_0 = r^{|\mu|}. \quad (4.15)$$

Dado esto, escribimos ahora que la función de onda radial, la podemos escribir de la siguiente forma,

$$R(r) = r^{|\mu|}G(r). \quad (4.16)$$

$$\frac{dR}{dr} = r^{|\mu|} \left[\frac{dG}{dr} + \frac{|\mu|}{r}G \right] \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = r^{|\mu|} \left[\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{2|\mu|}{r} \frac{dG}{dr} + \frac{|\mu|(|\mu| - 1)}{r^2}G \right] \quad (4.18)$$

y, por lo tanto, la ecuación para $G(r)$

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{2|\mu| + 1}{r} \frac{dG}{dr} + [2\varepsilon - r^2]G(r) = 0 \quad (4.19)$$

Ahora hacemos un nuevo cambio de variable,

$$z = r^2 \quad (4.20)$$

por lo que,

$$\frac{dG}{dr} = 2\sqrt{z} \frac{dG}{dz} \quad (4.21)$$

y

$$\frac{d^2G}{dr^2} = 4z \frac{d^2G}{dz^2} + 2 \frac{dG}{dz}$$

Expresiones que al introducirlas en la ecuación para G y simplificar nos da como resultado que,

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \frac{|\mu| + 1}{z} \frac{dG}{dz} + \left[\frac{\varepsilon}{2z} - \frac{1}{4} \right] G(z) = 0 \quad (4.22)$$

Si $z \gg 1, G \rightarrow G_\infty$

$$\frac{d^2G_\infty}{dz^2} - \frac{1}{4}G_\infty(z) = 0 \quad (4.23)$$

cuya solución es

$$G_\infty(z) = e^{-z/2} \quad (4.24)$$

por lo que, al escribir ahora

$$G(z) = e^{-z/2} F(z) \quad (4.25)$$

se sigue que

$$\frac{dG}{dz} = e^{-z/2} \left[F' - \frac{1}{2} F \right] \quad (4.26)$$

y

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = e^{-z/2} \left[F'' - F' + \frac{1}{4} F \right] \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la ecuación para F es:

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (|\mu| + 1 - z) \frac{dF}{dz} + \frac{\varepsilon - |\mu| - 1}{2} F(z) = 0 \quad (4.28)$$

que es la ecuación hipergeométrica confluyente [13], [14]; cuya solución en este caso es

$$F(z) = L_{n_r}^{|\mu|}(z) \quad (4.29)$$

que son los polinomios generalizados de Laguerre [13], donde n_r debe ser un entero no negativo,

$$n_r = \frac{\varepsilon - |\mu| - 1}{2}, \quad (4.30)$$

Por lo tanto, la solución normalizada a uno es:

$$R(z) = \left[\frac{2 n_r!}{(\text{sen}\theta)(n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} z^{|\mu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|\mu|}(z) \quad (4.31)$$

$$\text{donde } n_r = 0, 1, 2, \dots, \mu \equiv \frac{|m|}{\text{sen}\theta} \text{ y } z = r^2$$

así

$$R(r) = \left[\frac{2 n_r!}{(\text{sen}\theta)(n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} (r^2)^{|\mu|/2} e^{-r^2/2} L_{n_r}^{|\mu|}(r^2) \quad (4.32)$$

Por lo que las funciones propias del sistema están dadas por

$$\psi_{|\mu|,n_r}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2 n_r!}{(\sin\theta)(n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} (r^2)^{|\mu|/2} e^{-r^2/2} L_{n_r}^{|\mu|}(r^2) \quad (4.33)$$

y las energías propias

$$E = \hbar\omega_0 \left(2n_r + \frac{|m|}{\sin\theta} + 1 \right), \quad n_r = 0,1,2, \dots \quad (4.34)$$

Observemos que cuando $\theta = \pi/2$ en (4.33) y (4.34), se reduce al caso del oscilador armónico bidimensional en coordenadas polares, que también se encuentra resuelto en la literatura [15], cuyas energías y funciones de onda respectivamente, están dadas por

$$E = \hbar\omega_0(2n_r + |m| + 1), \quad n_r = 0,1,2, \dots \quad (4.35)$$

$$\psi_{|\mu|,n_r}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2 n_r!}{(n_r + |m|)!} \right]^{1/2} (r^2)^{|m|/2} e^{-r^2/2} L_{n_r}^{|m|}(r^2) \quad (4.36)$$

A continuación, se muestran las gráficas de las energías para (4.34), utilizando unidades naturales, $\hbar = \omega_0 = 1$, para diferentes valores n_r .

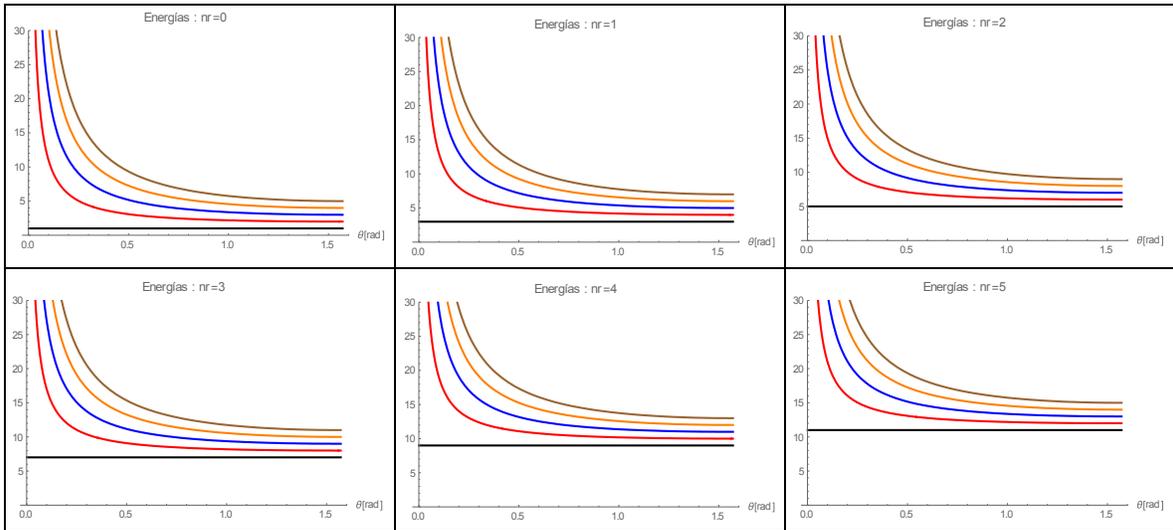


Figura 4.1 Energías para $n_r = 0,1,2,3,4$ y 5, en función del ángulo, θ , en el intervalo $[0.01, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (negro), 1(rojo), 2 (azul), 3 (naranja), 4 (café).

Podemos observar como a medida que aumenta n_r y m , la energía aumenta, pues hay una dependencia directa en (4.34) de estos dos números cuánticos y cuando $m = 0$, no existe

dependencia en θ , por lo tanto la energía es constante para todo n_r , como se puede observar en las gráficas de la figura 4.1. Notemos además, que estos niveles de energía están doblemente degenerados para $m \neq 0$, esto se debe a los dos valores equivalentes de $|m|$.

Estudiemos ahora la densidad de probabilidad por unidad de área para este sistema, es decir

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = |\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$$

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = \left[\frac{n_r!}{\pi(\sin\theta)(n_r + |\mu|)!} \right] (r^2)^{|\mu|} e^{-r^2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(r^2) \right]^2 \quad (4.37)$$

A continuación, se grafican las funciones para $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para diferentes valores del número cuántico principal n , donde n lo escribimos de la forma $n = n_r + 1$, así n_r contabiliza el número de nodos radiales, $n_r = 0, 1, 2, \dots$

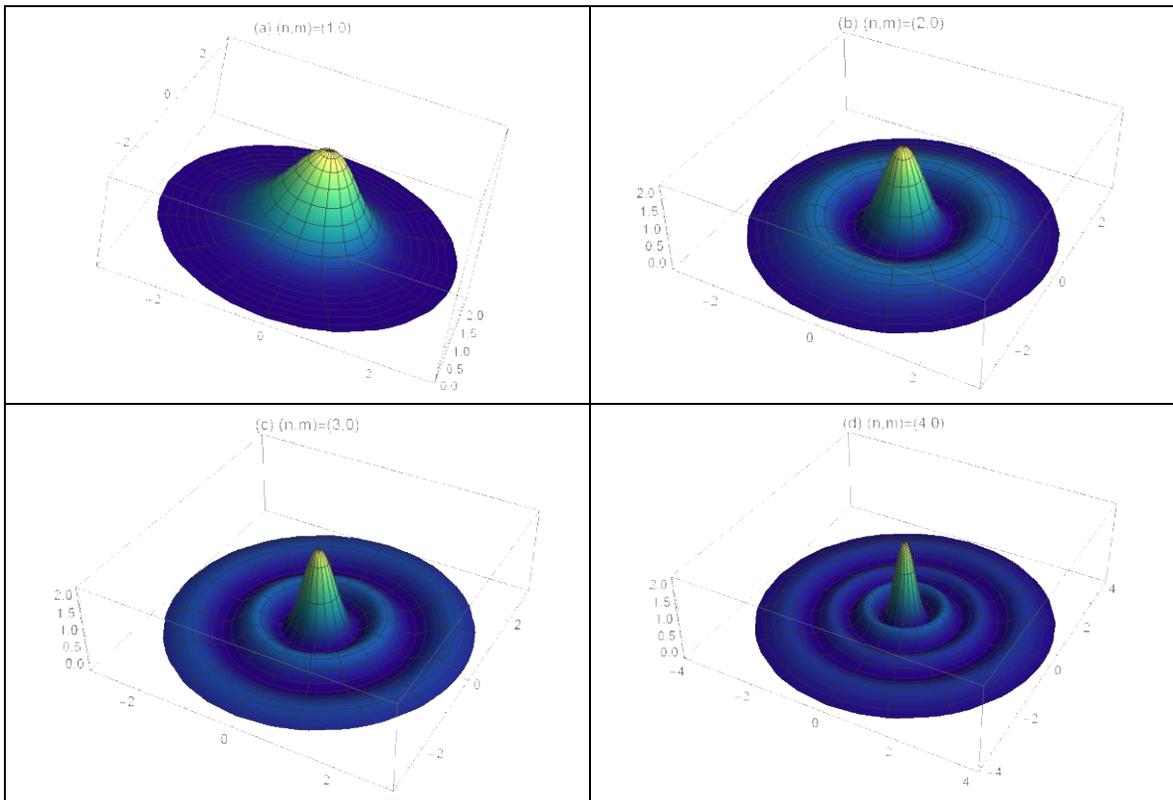


Figura 4.2 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ como función de r , para $n = 1, 2, 3$ y 4 , $m = 0$, y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

En la figura 4.2 solo se muestra la estructura nodal para $n = 1, 2, 3$ y 4 , y se observa como a medida que n aumenta, aumenta el número de nodos.

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento para las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para los dos primeros estados y $m = 0, 1$ y 2 .

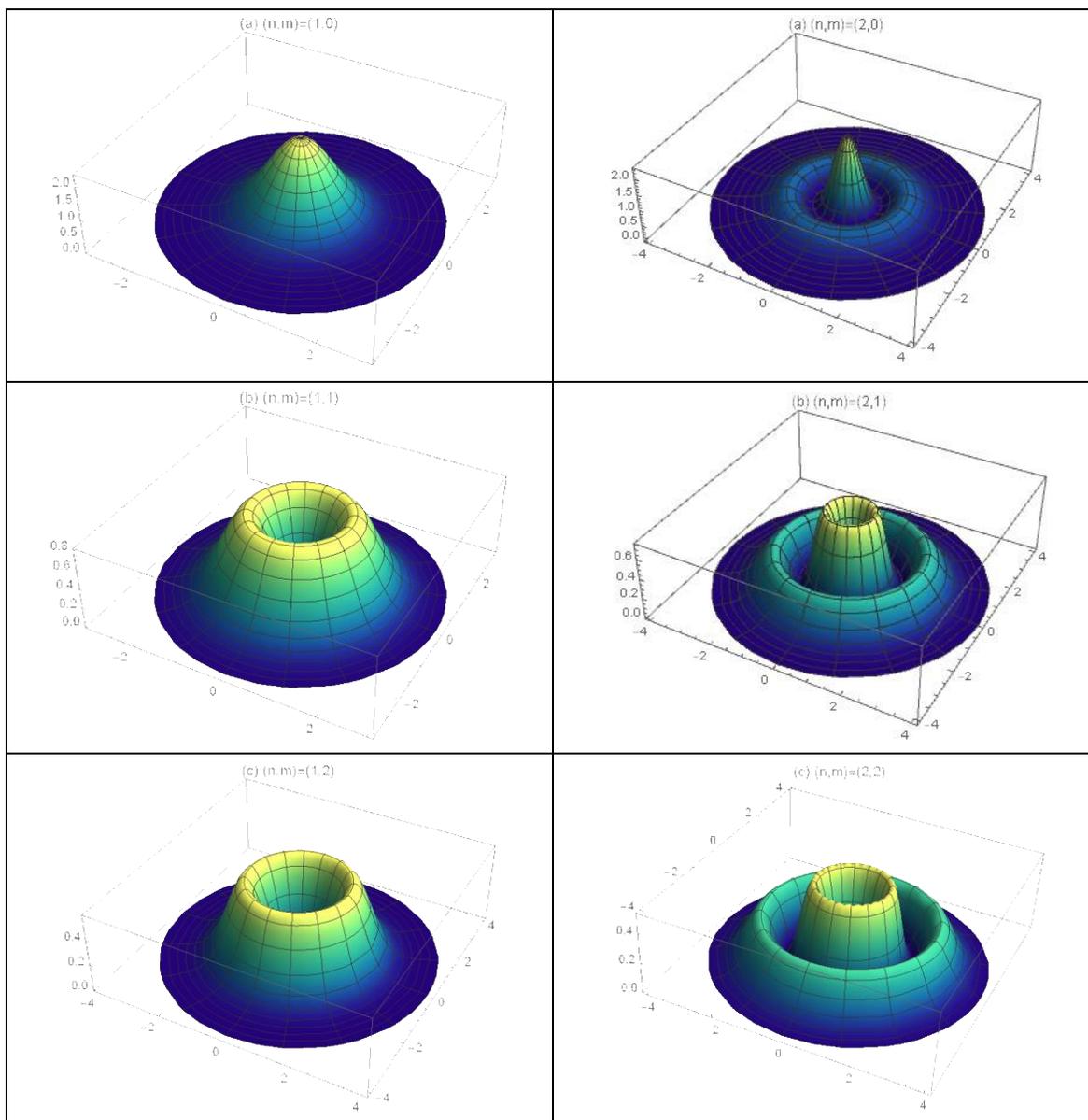


Figura 4.3 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ como función de r , para $n = 1, 2$, $m = 0, 1$ y 2 , y con una semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

Observamos que cuando $m = 0$ la partícula puede tocar el origen pues la barrera centrífuga es atractiva, si $m \neq 0$, la barrera centrífuga diverge en el origen y hace que el electrón se mantenga alejado de este punto.

La densidad de probabilidad radial en términos de la función $u(r) = \sqrt{r \sin \theta} R(r)$, está dada por:

$$d_{|\mu|,n}(r) = \left[\frac{2 r n_r!}{(n_r + |\mu|)!} \right] (r^2)^{|\mu|} e^{-r^2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(r^2) \right]^2 \quad (4.38)$$

Notemos que la ecuación para $u(r)$ es

$$-u'' + \left(\frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2 \right) u = -\epsilon u \quad (4.39)$$

lo cual nos permite identificar un potencial efectivo adimensional dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2 \quad (4.40)$$

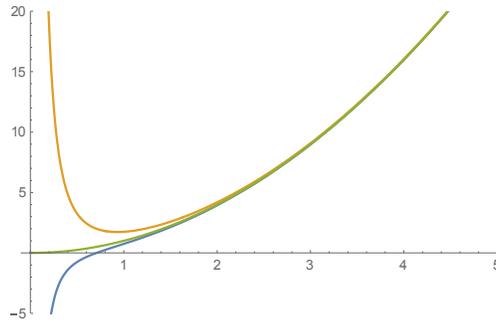


Figura 4.4 Gráfica del potencial efectivo adimensional en función de la variable r adimensional, para la ecuación (4.40).

Notemos que, a diferencia del caso anterior, el potencial efectivo tiene dos contribuciones, por una parte, una barrera centrífuga o potencial centrífugo que depende de μ^2 , la cual ya fue explicada en el capítulo anterior y un potencial de confinamiento armónico, que liga a la partícula hacia el origen.

Veamos que en la figura 4.4 la curva azul corresponde al caso en que $\mu^2 = 0$, entonces el potencial es atractivo y el electrón puede penetrar al origen de coordenadas, la curva verde corresponde al caso en que $\mu^2 = 1/4$ y por tanto no hay barrera centrífuga y solo queda el potencial de confinamiento armónico y la curva amarilla corresponde al caso en que $\mu^2 \neq 0$ y por tanto el potencial es repulsivo e impide que el electrón pueda tocar el origen.

A continuación, se muestran algunas gráficas para esta función:

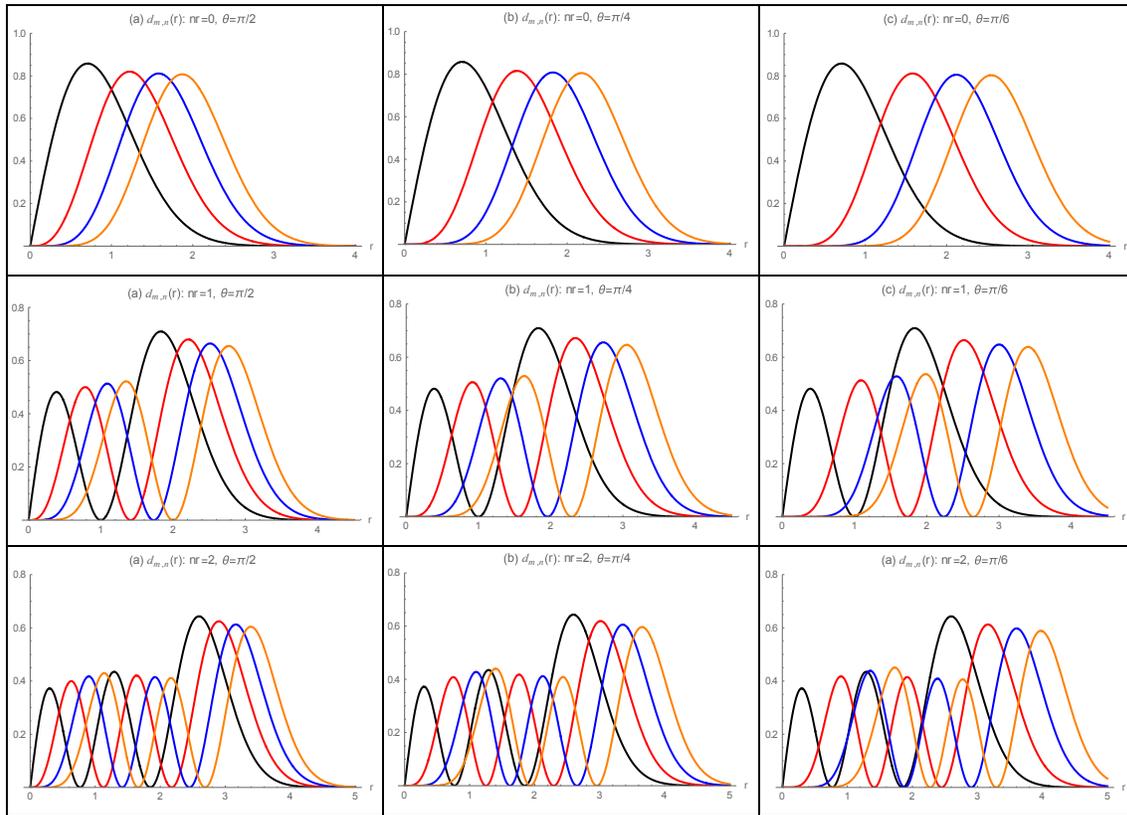


Figura 4.5 Densidad de probabilidad radial, $d_{|m|,n}(r)$, para $n = 1, 2$ y 3 como función de r en el intervalo $[0, 5]$, para $|m| = 0$ (negro), 1 (rojo) y 2 (azul) y 3 (naranja), y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/4$ y $\pi/6$, respectivamente.

Se observa la estructura nodal para las distintas $n = 1, 2$ y 3 , recordando $n = n_r + 1$, y n_r contabiliza el número de nodos radiales, es decir, $n_r = 0, 1$ y 2 , para este caso.

Capítulo 5

Efectos magnéticos

En este capítulo estudiamos el caso de un electrón confinado a moverse sobre la superficie de un cono circular recto, en presencia de un campo magnético constante y uniforme aplicado de magnitud B que es paralelo al eje z y un solenoide infinitamente delgado a lo largo del eje del cono de magnitud Φ_0 , es decir, paralelo al eje z , sin presencia de spin. Calculamos los eigenvalores de la energía y las eigenfunciones para este sistema.

El Hamiltoniano para este sistema está dado por

$$H = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 \quad (5.1)$$

donde \vec{A} es el vector potencial dado por

$$\vec{A} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin\theta} + \frac{B}{2} r \sin\theta \right) \hat{\phi} \quad (5.2)$$

así, el Hamiltoniano del sistema, al utilizar que $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, es entonces

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - 2i \frac{e\hbar}{2m_0} \frac{A}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{2m_0} (eA)^2 \quad (5.3)$$

Entonces

$$H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi) \quad (5.4)$$

y al escribir a la función de onda como

$$\psi(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} R(r) \quad (5.5)$$

la ecuación radial es,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[\frac{m}{r \sin\theta} + \frac{r \sin\theta e B / \hbar}{2} + \frac{e \Phi_0 / \hbar}{2\pi r \sin\theta} \right]^2 R = -\frac{2m_0}{\hbar^2} ER \quad (5.6)$$

Ahora, definimos

$$v \equiv \frac{e\Phi_0}{2\pi\hbar}, \quad \phi_0 \equiv \frac{\hbar}{e} \quad (5.7)$$

y

$$\mu \equiv \frac{m + \nu}{\text{sen } \theta} \quad (5.8)$$

así, la ecuación radial resulta

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[\frac{\mu}{r} + \frac{eB}{2\hbar} (r \text{sen } \theta) \right]^2 R = -\frac{2m_0}{\hbar^2} ER \quad (5.9)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$r = lr', \quad r' \rightarrow r$$

y

(5.10)

$$\beta \equiv \frac{eB}{2\hbar} l^2$$

donde β y r' es ahora adimensional; l es un factor de escala que escogemos más adelante para simplificar, en algún sentido, la ecuación radial.

Entonces

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left[\frac{\mu}{r} + \beta (r \text{sen } \theta) \right]^2 R = -\epsilon R \quad (5.11)$$

donde

$$\epsilon = \frac{2m_0 l^2}{\hbar^2} E \quad (5.12)$$

Introducimos,

$$\gamma = \beta \text{sen } \theta \quad (5.13)$$

y finalmente la ecuación radial, queda expresada como

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\epsilon - \left[\frac{\mu}{r} + \gamma r \right]^2 \right) R = 0 \quad (5.14)$$

en donde todos los efectos del flujo y apertura del cono están implícitos en las constantes, pero podemos observar que se tiene una ecuación que corresponde al caso de dos dimensiones, en donde las constantes obtendrían su valor correspondiente cuando $\theta = 90^\circ$.

Ahora, cuando $r \rightarrow 0$,

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} - \frac{\mu^2}{r^2} R_0 = 0 \quad (5.15)$$

cuya solución aceptable es

$$R = r^{|\mu|} G \quad (5.16)$$

entonces

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = r^{|\mu|} \left[G'' + (2|\mu| + 1) \frac{G'}{r} + \frac{\mu^2}{r^2} G \right] \quad (5.17)$$

así

$$G'' + \frac{1}{r} (2|\mu| + 1) G' + \left[\frac{\mu^2}{r^2} + \epsilon - \left(\frac{\mu}{r} + \gamma r \right)^2 \right] G = 0 \quad (5.18)$$

Ahora hacemos un cambio de variable,

$$x = r^2 \quad (5.19)$$

por lo que,

$$\frac{dG}{dr} = 2\sqrt{x} \frac{dG}{dx} \quad (5.20)$$

y

$$\frac{d^2 G}{dr^2} = 4x \frac{d^2 G}{dx^2} + 2 \frac{dG}{dx}$$

Expresiones que al introducirlas en la ecuación para G y simplificar nos da como resultado que,

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{(|\mu| + 1)}{x} \frac{dG}{dx} + \left[\frac{\epsilon}{4x} - \frac{\mu^2}{4x^2} - \left(\frac{\mu}{2x} + \frac{\gamma}{2} \right)^2 \right] G = 0 \quad (5.21)$$

Si $x \gg 1$, $G \rightarrow G_\infty$

$$\frac{d^2 G_\infty}{dx^2} - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 G_\infty(x) = 0 \quad (5.22)$$

cuya solución es

$$G_\infty(x) = e^{-\gamma x/2} \quad (5.23)$$

por lo que, al escribir ahora

$$G(x) = e^{-\gamma x/2} F(x) \quad (5.24)$$

se sigue que

$$\frac{dG}{dx} = e^{-\gamma x/2} F' - \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma x/2} F \quad (5.25)$$

y

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = e^{-\gamma x/2} F'' - 2\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{-\gamma x/2} F' + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 e^{-\gamma x/2} F \quad (5.26)$$

Por lo tanto, la ecuación para F es:

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (|\mu| + 1 - \gamma x) \frac{dF}{dx} - \left[\frac{\epsilon}{4x} - \frac{\gamma}{2} (|\mu| + \mu + 1) \right] F = 0 \quad (5.27)$$

y haciendo el cambio de variable

$$\gamma x = y \quad (5.28)$$

tenemos finalmente que

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (|\mu| + 1 - y) \frac{dF}{dy} - \left[\frac{\epsilon}{4\gamma} - \frac{1}{2} (|\mu| + \mu + 1) \right] F = 0 \quad (5.29)$$

que es la ecuación hipergeométrica confluyente cuya solución es

$$F(y) = L_{n_r}^{|\mu|}(y) \quad (5.30)$$

con

$$n_r = \frac{\epsilon}{4\gamma} - \frac{1}{2} (|\mu| + \mu + 1),$$

son los polinomios generalizados de Laguerre. Por lo tanto, la solución ya normalizada es

$$R(y) = \left[\frac{2 \gamma n_r!}{(n_r + |\mu|)! (\text{sen}\theta)} \right]^{1/2} y^{|\mu|/2} e^{-y/2} L_{n_r}^{|\mu|}(y), \quad n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (5.31)$$

y, entonces, las funciones propias del sistema están dadas por

$$\psi_{|\mu|, n_r}(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2 \gamma n_r!}{(n_r + |\mu|)! (\text{sen}\theta)} \right]^{1/2} (\gamma r^2)^{|\mu|/2} e^{-(\gamma r^2)/2} L_{n_r}^{|\mu|}(\gamma r^2),$$

$$n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (5.32)$$

Ahora, para las energías propias del sistema, se tiene que

$$y = \gamma x = \gamma r^2 = \gamma (r')^2 = \gamma \left(\frac{r}{l} \right)^2 = \frac{\gamma}{l^2} r^2 \quad (5.33)$$

pero

$$\gamma = \beta \text{sen}\theta \quad (5.34)$$

y escogemos que

$$\frac{\hbar^2}{2m_0 l^2} = \hbar \omega_c \quad (5.35)$$

donde ω_c es la frecuencia del ciclotrón, es decir que la unidad de longitud l es

$$l^2 = \frac{\hbar}{2m_0 \omega_c} \quad (5.36)$$

así

$$y = \frac{eB}{2\hbar} r^2 \text{sen}\theta \quad (5.37)$$

y

$$\beta = \frac{1}{4} \quad (5.38)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{4\gamma} &= \frac{1}{2}(|\mu| + \mu + 1) + n_r \\ \epsilon &= 2\gamma(|\mu| + \mu + 1) + 4\gamma n_r \\ \epsilon &= 2\beta(|m + \nu| + (m + \nu) + \text{sen}\theta) + 4\text{sen}\theta \beta n_r \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(|m + \nu| + (m + \nu) + \text{sen}\theta) + \text{sen}\theta n_r\end{aligned}\tag{5.39}$$

Por lo tanto

$$E = \hbar\omega_c \left[\text{sen}\theta n_r + \frac{1}{2}(|m + \nu| + (m + \nu) + \text{sen}\theta) \right]\tag{5.40}$$

que son los niveles de energía, llamados también niveles de Landau [16], [17].

Cabe mencionar que, N. Aquino, E. Castaño and E. Ley-Koo, estudiaron el modelo de un anti punto cuántico, que consiste en un electrón que puede moverse por todo el espacio, excepto en una región cilíndrica excluida definida por $(0 < \rho < a, \phi, z)$ en coordenadas cilíndricas [18], en dos situaciones: A) bajo la acción de un campo de inducción magnética uniforme $\vec{B} = \hat{k}B$ en todo el espacio, incluida la región excluida, y B) bajo la acción del mismo campo de inducción magnética en la región permitida con un campo de inducción magnética uniforme diferente $\vec{B}' = \hat{k}B'$ en la región excluida. La ecuación radial de Schrödinger para el electrón que se mueve en la región permitida bajo la acción del potencial vectorial magnético dado por

$$\vec{A}(0 < \rho < \infty, \phi, z) = \frac{1}{2}B \rho \hat{\phi}\tag{5.41}$$

toma la siguiente forma

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) \right] + \frac{\hbar^2 m^2}{2m_e \rho^2} + \hbar\omega m + \frac{1}{2} m_e \omega^2 \rho^2 \right\} R(\rho) = ER(\rho)\tag{5.42}$$

que es la misma ecuación que describe los estados normales de Landau cuando el electrón tiene todo el espacio disponible para su movimiento y las soluciones corresponden a los estados del oscilador armónico bidimensional

$$R_{nm}(\rho) = N_{nm} \rho^{|m|} e^{-m_e \omega \rho^2 / 2\hbar} M \left(-n, |m| + 1, \frac{m_e \omega \rho^2}{\hbar} \right)\tag{5.43}$$

donde $M(\alpha, \beta, z)$ es la función hipergeométrica confluyente de Kummer de primera especie; La energía es la suma de la energía del oscilador armónico más la energía diamagnética

$$E = \hbar\omega(2n + |m| + m + 1), \quad \omega = eB/2m_e c \quad (5.44)$$

El espectro de energía normal de Landau consta de niveles de energía igualmente espaciados con una separación de $2\hbar\omega$. Cada nivel es infinitamente degenerado debido a la cancelación de los términos m dependientes en la ecuación (5.44) para $m = -|m|$.

Notemos que el espectro de energías dado por (5.44) se recupera de la expresión para la energía (5.40) cuando $\theta = \pi/2$ y el flujo magnético, $\nu = 0$, es decir este caso está contenido en nuestras expresiones para las funciones de onda y la energía para este modelo.

Ahora, las soluciones a la ecuación (5.42) para el anti punto cuántico, están sujetas a las condiciones de contorno

$$\psi(\rho = a, \phi, z) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(\rho \rightarrow \infty, \phi, z) = 0 \quad (5.45)$$

En general, la función de Kummer $M(\alpha, \beta, z)$ es regular en el origen, $z \rightarrow 0$, y diverge exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$, mientras que la segunda función de Kummer $U(\alpha, \beta, z)$ es singular en el origen y se comporta asintóticamente como $z^{-\alpha}$. Estas condiciones y propiedades determinan que la función de onda radial que describe el anti punto cuántico es

$$R_{vm}(\rho) = N_{vm} \rho^{|m|} e^{-m_e \omega \rho^2 / 2\hbar} U\left(-v, |m| + 1, \frac{m_e \omega \rho^2}{\hbar}\right) \quad (5.46)$$

y los valores propios de la energía para el anti punto cuántico, están dados por

$$E = \hbar\omega(2v_s + |m| + m + 1) \quad (5.47)$$

Los niveles de energía de la ecuación (5.47) no están igualmente espaciados, pero exhiben una casi degeneración infinita debido a la misma cancelación de sus términos m dependientes para $m = -|m|$ como en la ecuación (5.44). Los detalles de este modelo se pueden ver en la referencia, en este caso solo se hace alusión al trabajo para comparar las expresiones de los niveles de Landau de este capítulo con los obtenidos en dicho trabajo y hacer notar que de la expresión para la energía (5.40) se recuperan los estados de Landau para el oscilador armónico bidimensional.

Por otra parte, el caso para una partícula en un campo magnético homogéneo en los estados en los que la partícula posee valores determinados del impulso y del momento cinético en la dirección del campo, se trata en el libro de Teoría cuántica no-relativista [19].

En este caso se tiene que en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , con el eje z dirigido en el sentido del campo, el potencial vectorial magnético tiene las componentes $\vec{A}_\phi = \frac{1}{2}B\rho$, $\vec{A}_z = \vec{A}_\phi = 0$ y la ecuación de Schrödinger se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{ie\hbar B}{2Mc} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{e^2 B^2}{8Mc^2} \rho^2 \psi = E\psi \quad (5.48)$$

Se busca una solución de la forma

$$\psi = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} R(\rho) e^{ip_z z/\hbar} \quad (5.49)$$

con lo que para la función radial se obtiene la ecuación

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left[\frac{1}{\hbar^2} (2ME - p_z^2) - \left(\frac{eB}{2c\hbar} \right)^2 \rho^2 + \frac{eB}{c\hbar} m - \frac{m^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (5.50)$$

e introduciendo la variable independiente $\xi = (eB/2c\hbar)\rho^2$, se reescribe (5.50) como

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{1}{4}\xi + \beta - \frac{m^2}{4\xi} \right) R = 0 \quad (5.51)$$

donde

$$\beta = \frac{(2ME - p_z^2)c}{2\hbar eB} + \frac{1}{2}m \quad (5.52)$$

Para $\xi \rightarrow \infty$, la función buscada se comporta como $e^{-\xi/2}$, y para $\xi \rightarrow 0$, como $\xi^{|m|/2}$. De acuerdo con esto la solución es de la forma

$$R = e^{-\xi/2} \xi^{|m|/2} w(\xi) \quad (5.53)$$

y para $w(\xi)$ se obtiene la ecuación de la función hipergeométrica confluyente

$$w = F \left\{ -\left(\beta - \frac{1}{2}|m| - \frac{1}{2} \right), |m| + 1, \xi \right\} \quad (5.54)$$

Para que la función de onda sea finita en todo el espacio, la cantidad $\beta - (|m| + 1)/2$ debe ser un número entero no negativo n_q . Así los niveles de energía están dados por

$$E = \frac{eB}{Mc} \hbar \left(n_r + \frac{1}{2} |m| + \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2M} \quad (5.55)$$

Estos estados de energía también se recuperan de (5.40) cuando $\theta = \pi/2$ y $p_z = v = 0$.

Observemos que en (5.40) hay degeneración en los estados de energía pues para diferentes valores de m y v se puede obtener un mismo valor para la energía, por ejemplo, se puede notar inmediatamente que para cualquier valor negativo de m , $m = -1, -2, -3, \dots$ y dado un valor de v , el valor de la energía siempre será el mismo, pues los términos $|m + v|$ y $(m + v)$ se cancelan y la energía solo depende del ángulo de apertura, θ , del número cuántico n_r y del valor del campo magnético. Esta degeneración se observa en las gráficas siguientes. Notamos también, que al aumentar n_r , los estados de energía también aumentan, como era de esperarse.

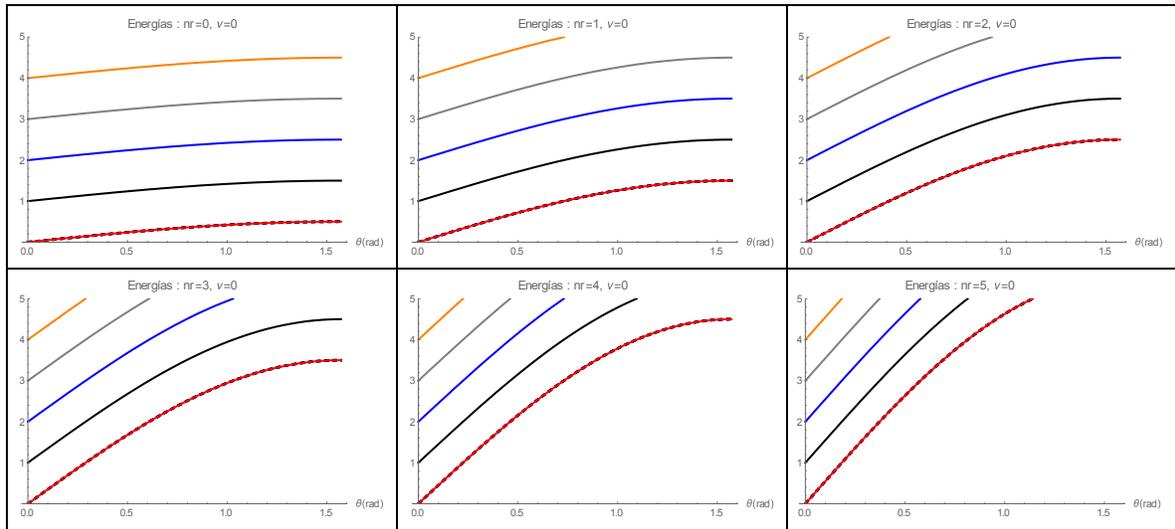


Figura 5.1 Energías para $n_r = 0, 1, \dots, 5$, como función del ángulo θ , en el intervalo $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris), 4 (naranja), para $v = 0$. En color rojo $m = 0$, curvas sólidas para $m > 0$ y punteadas para $m < 0$.

Veamos el comportamiento de las energías al aumentar el flujo gradualmente.

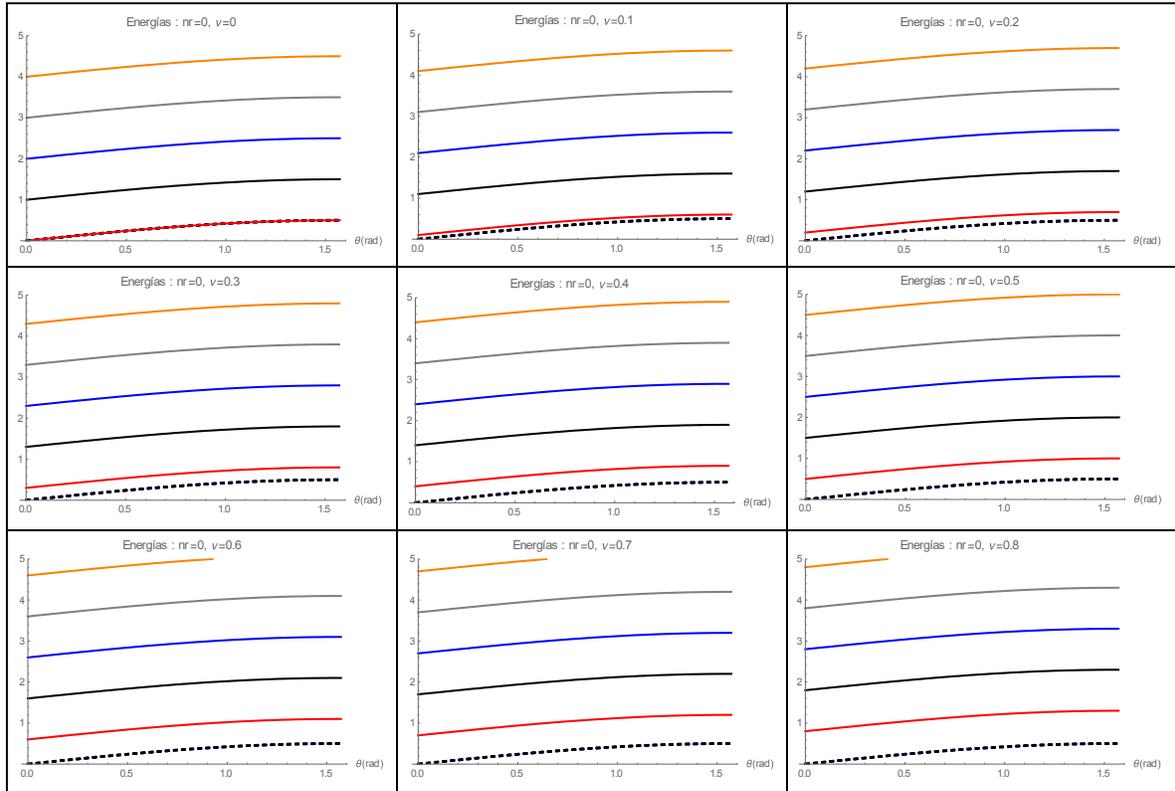


Figura 5.2 Energías para $n_r = 0$, como función del ángulo θ , en el intervalo $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris), 4 (naranja), para $v = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. En color rojo $m = 0$, curvas sólidas para $m > 0$ y punteadas para $m < 0$.

Observamos que ir aumentando el flujo magnético, los estados de energía para $m = 0$ y $m = -1$ inicialmente degenerados para $v = 0$, se van separando. También se observa que al ir aumentando el flujo magnético, los estados de energía para las distintas m también aumentan.

A continuación, se estudia la densidad de probabilidad por unidad de área para este sistema, es decir

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = |\psi_{|\mu|,n_r}(r, \phi)|^2 \quad (5.56)$$

$$\rho_{|\mu|,n_r}(r) = \left(\frac{\gamma n_r!}{\pi(n_r + |\mu|)! (\sin\theta)} \right) (\gamma r^2)^{|\mu|} e^{-(\gamma r^2)} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(\gamma r^2) \right]^2$$

expresiones que de manera gráfica mostramos en las siguientes páginas.

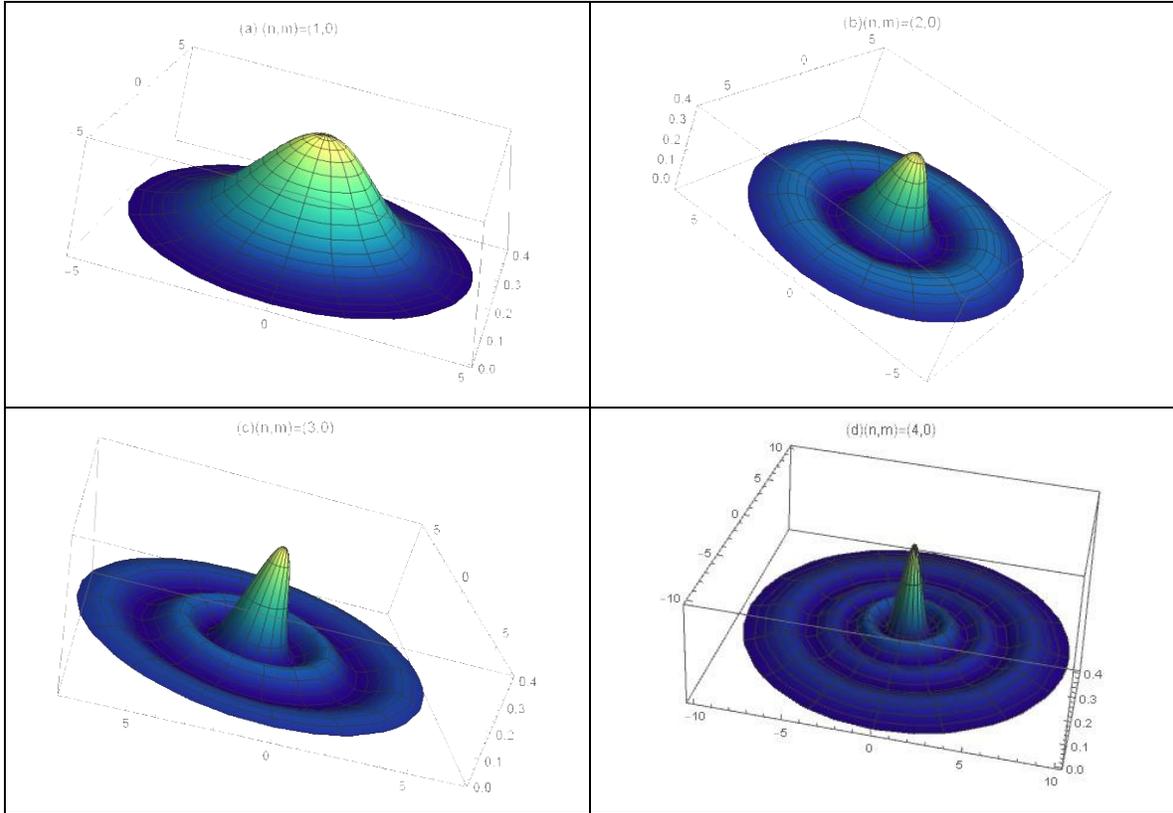


Figura 5.3 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2, 3$ y 4 , $m = 0$, $\nu = 0$, $\beta = 0.2$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

Nuevamente, con esta gráfica solo se pretende mostrar la estructura nodal para este sistema. Mientras que en las siguientes tres páginas se observan los efectos de variar el flujo magnético en la figura 5.4 que ya hemos discutido en el capítulo 3. En la figura 5.5 se observa el efecto de tomar diferentes valores para m , que también ya se discutió anteriormente, y por último en la figura 5.6, observamos el efecto de variar el campo magnético, que se aprecia mejor cuando analizamos el potencial centrífugo para este caso.

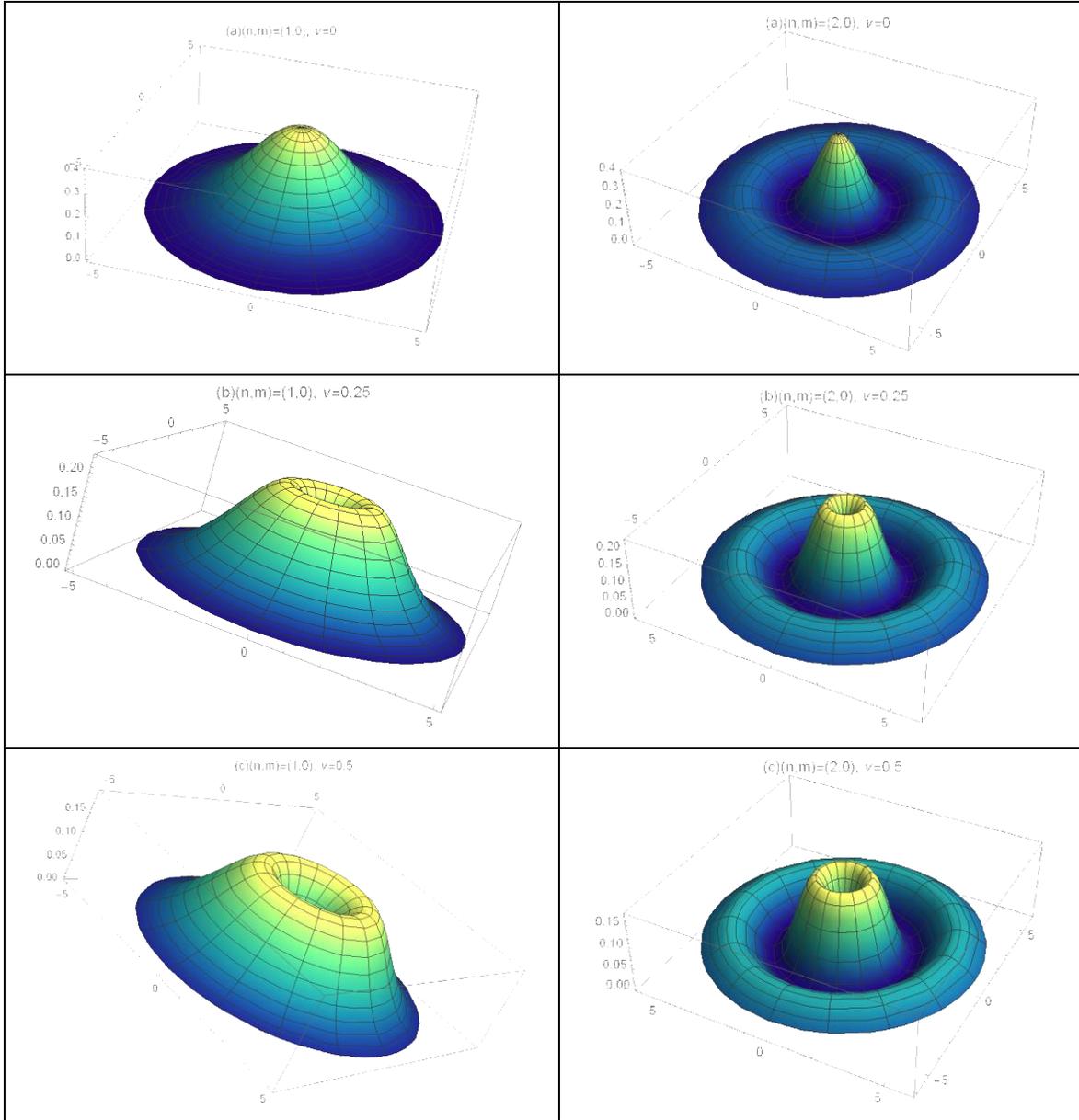


Figura 5.4 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0$, $\nu = 0, 0.25, 0.5$, $\beta = 0.2$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

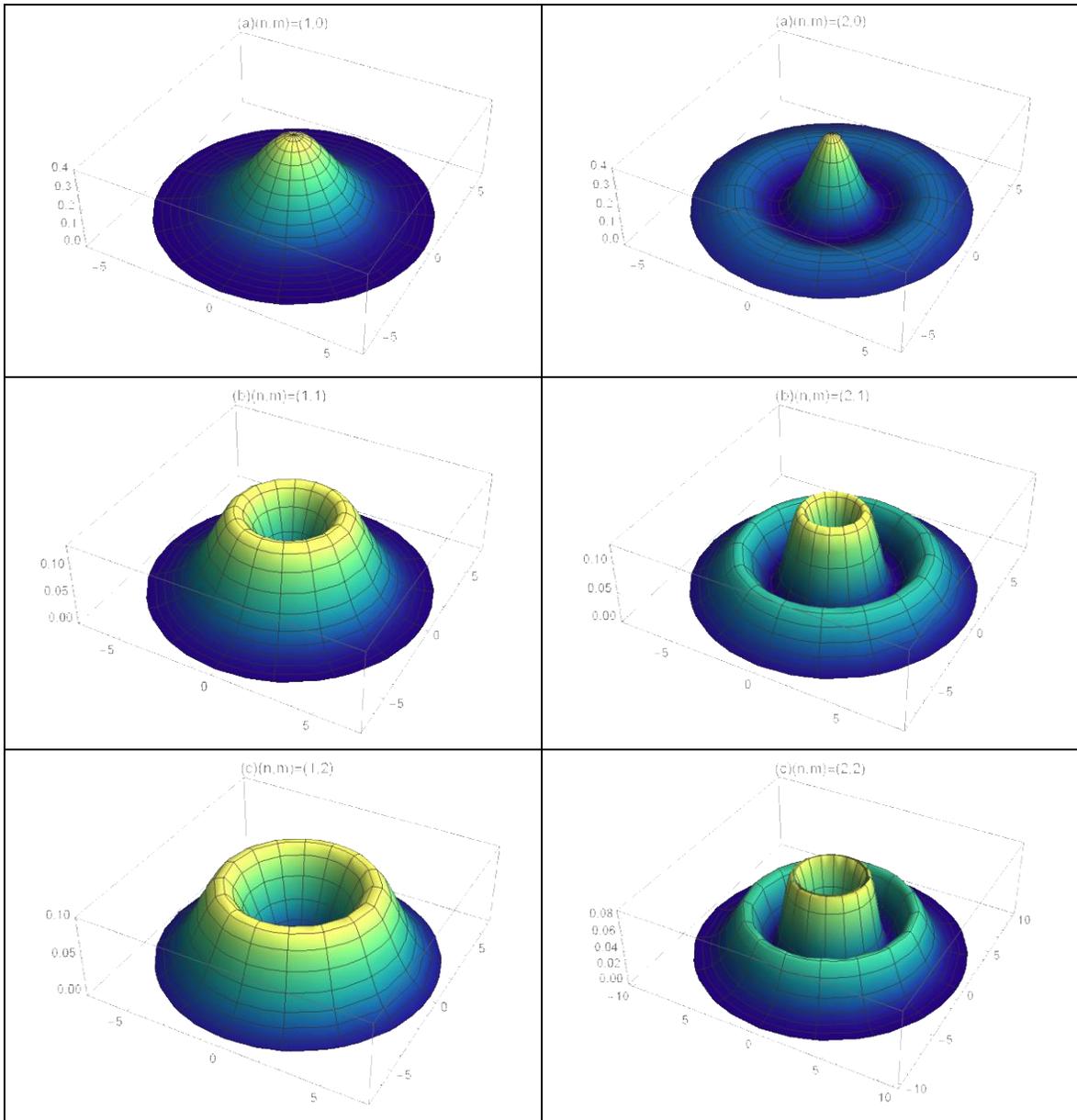


Figura 5.5 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0, 1$ y 2 , $\nu = 0$, $\beta = 0.2$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

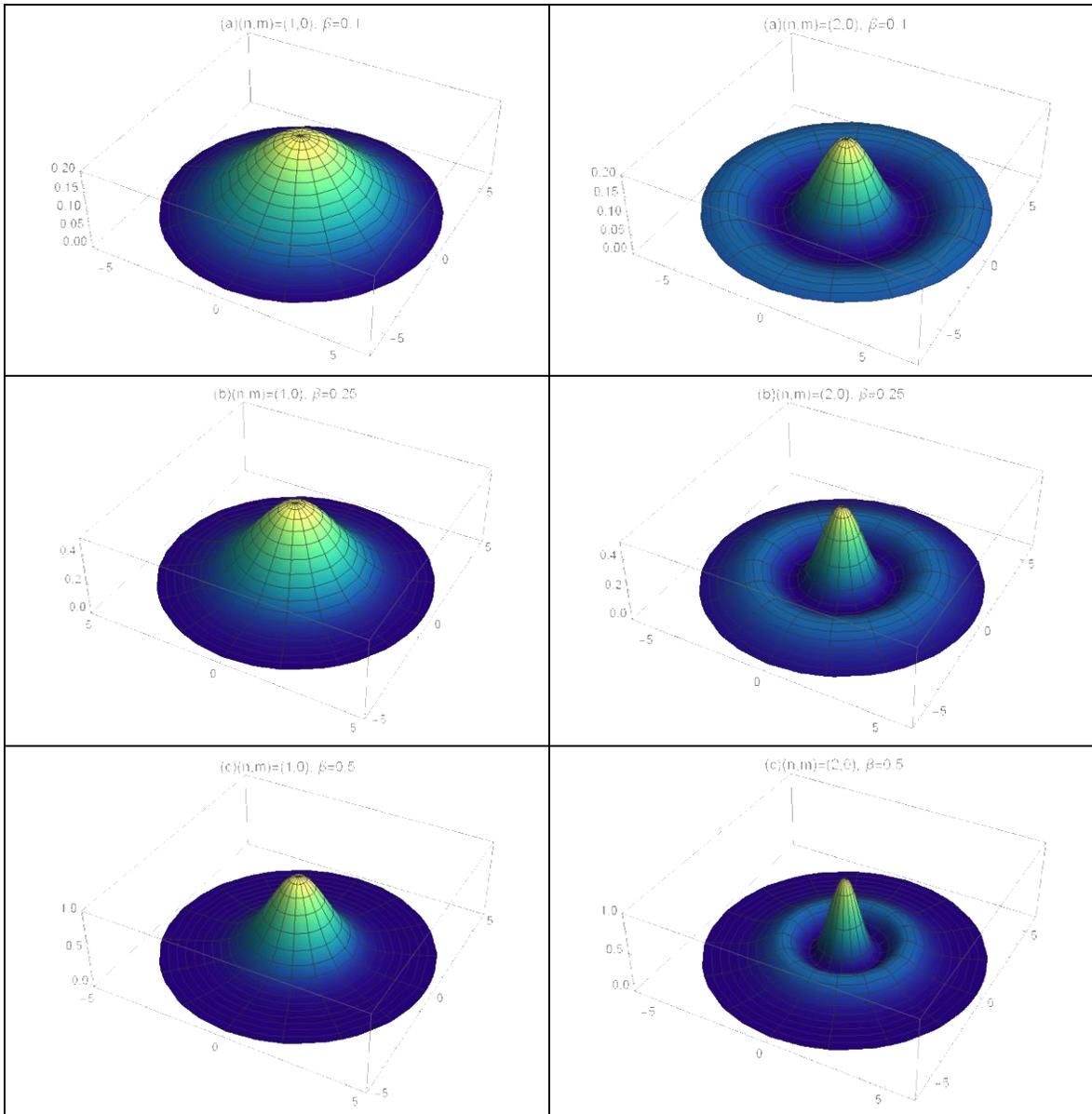


Figura 5.6 Gráficas de las funciones $|\psi_{\mu,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0$, $\nu = 0$, $\beta = 0.1, 0.25, 0.5$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

Por otra parte, la densidad de probabilidad radial en términos de la función $u(r) = \sqrt{r \sin \theta} R(r)$, está dada por:

$$d_{|\mu|,n}(r) = \left(\frac{2 r \gamma n_r!}{(n_r + |\mu|)!} \right) (\gamma r^2)^{|\mu|} e^{-(\gamma r^2)} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(\gamma r^2) \right]^2 \quad (5.57)$$

Notemos que la ecuación para $u(r)$ es

$$-u'' + \left\{ \left[\frac{\mu}{r} + \beta(r \sin \theta) \right]^2 - \frac{1}{4r^2} \right\} u = -\epsilon u \quad (5.58)$$

lo cual nos permite identificar un potencial efectivo adimensional dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + (\beta \sin \theta)^2 r^2 \quad (5.59)$$

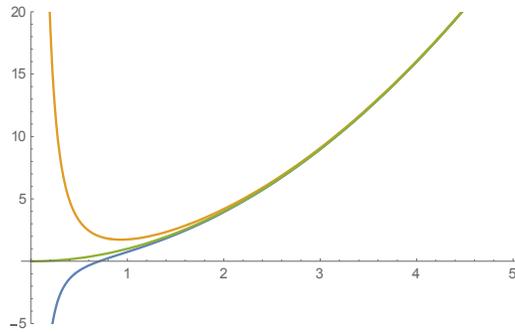


Figura 5.7 Gráfica del potencial efectivo adimensional, en términos de la variable r adimensional, dada por la ecuación (5.59).

Veamos que, para este caso, el potencial efectivo, al igual que en el caso anterior, tiene dos contribuciones, por una parte, una barrera centrífuga que depende de μ^2 , cuya física ya fue tratada anteriormente y un potencial de confinamiento tipo armónico debido al campo magnético externo que liga la partícula hacia el origen.

Notemos que en la figura 5.7 la curva azul corresponde nuevamente al caso en que $\mu^2 = 0$, entonces el potencial es atractivo y el electrón puede penetrar al origen de coordenadas, la curva verde corresponde al caso en que $\mu^2 = 1/4$ y por tanto no hay barrera centrífuga y solo queda el potencial de confinamiento tipo armónico debido al campo magnético externo y la curva amarilla corresponde al caso en que $\mu^2 \neq 0$, por tanto, la barrera centrífuga diverge en el origen y hace que el electrón se mantenga alejado de este punto.

A continuación, se muestran algunas gráficas para las funciones de la densidad de probabilidad radial.

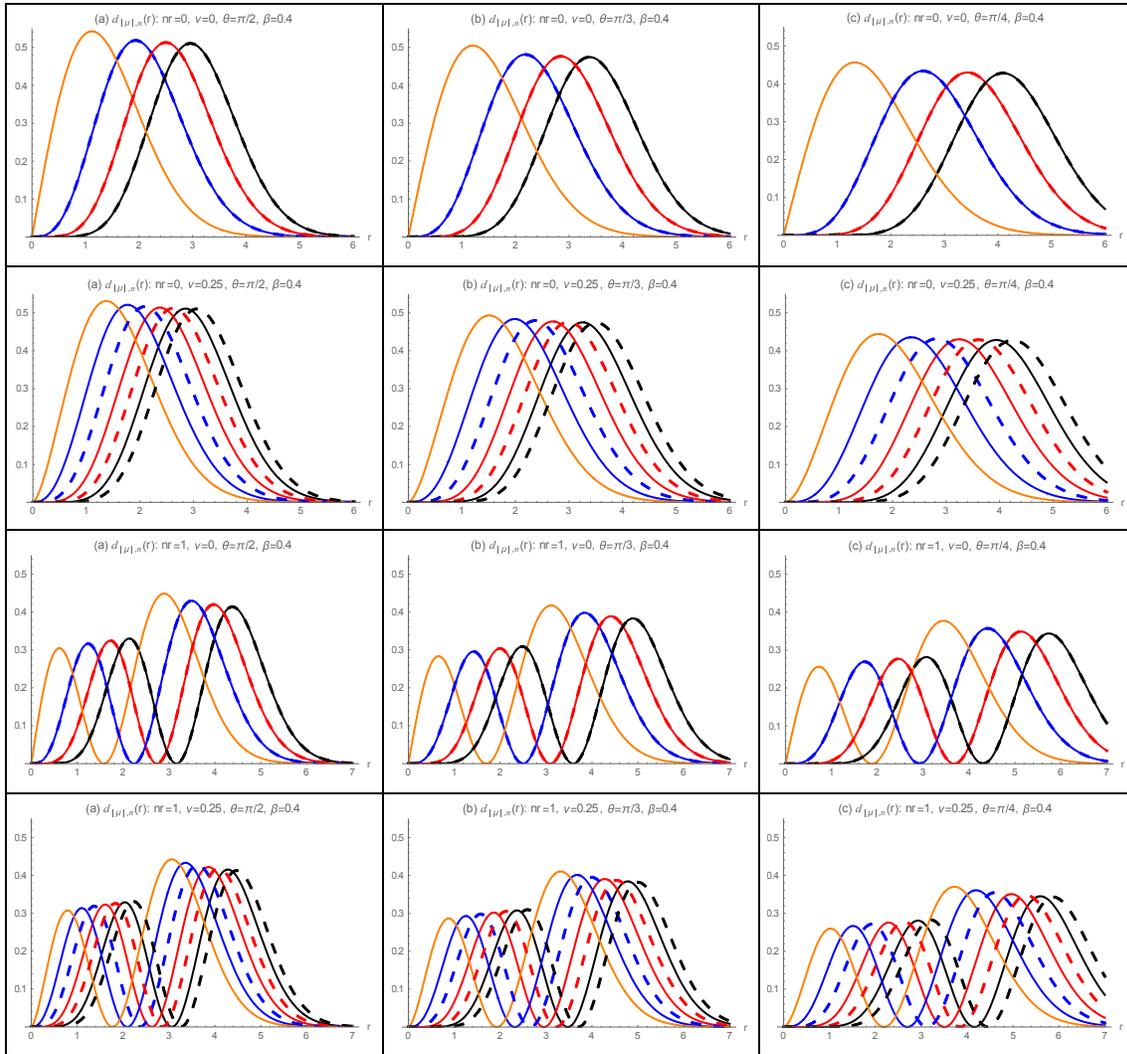


Figura 5.8 Densidad de probabilidad radial, $d_{|\mu|,n}(r)$, para $n = 1, 2$, como función de r en el intervalo $[0, 7]$, para $|m| = 0$ (naranja), 1 (azul), 2 (rojo) y 3 (negro), curvas punteadas para $m > 0$ y sólidas para $m < 0$ para $\nu = 0, 0.25, \beta = 0.4$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

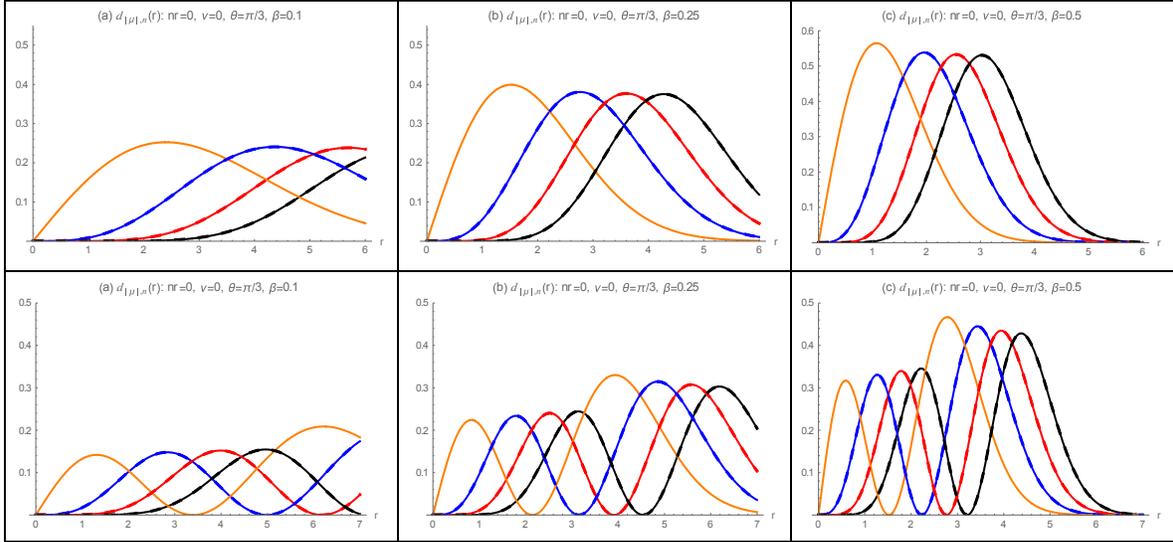


Figura 5.9 Densidad de probabilidad radial, $d_{|\mu|,n}(r)$, para $n = 1, 2$, como función de r en el intervalo $[0, 7]$, para $|m| = 0$ (naranja), 1 (azul), 2 (rojo) y 3 (negro), $\nu = 0$, $\beta = 0.1, 0.25, 0.5$ y con cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

En la figura 5.8, notamos que cuando $\nu = 0$, las funciones $d_{|\mu|,n}(r)$ están degeneradas, pero para un valor de $\nu = 0.25$ se rompe la degeneración. En este caso, el campo magnético externo liga a la partícula hacia el origen, es decir, hace el papel de confinamiento de efecto armónico, discutido anteriormente; también vemos que a medida que m aumenta, la barrera centrífuga diverge en el origen y hace que el electrón se mantenga alejado de este punto. En la figura 5.9, vemos el efecto de variar el campo magnético, en donde se observa que a medida que aumenta, la probabilidad de encontrar a la a la partícula cerca del origen, es mayor, es decir, está más ligada al origen, cuando B es mayor. Este mismo efecto se puede observar en las gráficas de la figura 5.6, donde se nota que a medida que aumentamos el campo magnético, la partícula se liga más hacia el origen.

Capítulo 6

Efectos magnéticos y potencial armónico

En este capítulo se estudia a un electrón que se mueve sobre la superficie de un cono circular recto de amplitud angular θ , bajo la influencia de un campo magnético constante y uniforme aplicado de magnitud B que es paralelo al eje z , así como de un solenoide infinitesimal colocado a lo largo del eje z , cuyo flujo magnético es igual a Φ_0 , y que además se introduce un potencial de confinamiento tipo oscilador armónico, es decir

$$H = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + \frac{m_0\omega_0^2}{2} r^2 \quad (6.1)$$

donde m_0 es la masa efectiva del electrón y ω_0 es la frecuencia del oscilador, y \vec{A} es el vector potencial dado por

$$\vec{A} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} + \frac{B}{2} r \text{sen}\theta \right) \hat{\phi} \quad (6.2)$$

Por lo tanto, al utilizar que

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \quad (6.3)$$

y

$$p^2 = -\hbar^2\nabla^2$$

así como las relaciones (2.5) y (2.6), resulta

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} + \frac{B}{2} r \text{sen}\theta \right) \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e^2}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \text{sen}\theta} + \frac{B}{2} r \text{sen}\theta \right)^2 + \frac{m_0\omega_0^2}{2} r^2 \quad (6.4)$$

Por lo que

$$H\psi(r, \phi) = E\psi(r, \phi) \quad (6.5)$$

Podemos nuevamente escribir que

$$\psi(r, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} R(r) \quad (6.6)$$

llegamos a que la ecuación radial es

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} R \right) - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} + \frac{B}{2} r \sin \theta \right) \frac{im}{r \sin \theta} R + \frac{e^2}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} + \frac{B}{2} r \sin \theta \right)^2 R + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 R = ER \quad (6.7)$$

Para simplificar esta ecuación, se define

$$\nu \equiv \frac{e\Phi_0}{\hbar}, \quad (6.8)$$

y

$$\mu \equiv \frac{m + \nu}{\sin \theta} \quad (6.9)$$

por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{m_0^2 \omega_0^2}{\hbar^2} r^2 \left(1 + \frac{e^2 B_0^2 \sin^2 \theta}{4m_0^2 \omega_0^2} \right) \right] R = \left[\frac{eB_0(m + \nu)}{\hbar} - \frac{2m_0}{\hbar^2} E \right] R \quad (6.10)$$

donde se introduce la frecuencia del ciclotrón

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_0} \quad (6.11)$$

y definimos

$$\beta = \frac{\omega_c}{\omega_0} \quad (6.12)$$

de donde resulta que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{m_0^2 \omega_0^2}{\hbar^2} r^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{4} \right) \right] R = \left[\beta \frac{m_0(m + \nu)}{\hbar} \omega_0 - \frac{2m_0}{\hbar^2} E \right] R \quad (6.13)$$

Cambio de variable,

$$r = a\rho \quad (6.14)$$

escogemos que

$$\frac{m_0^2 \omega_0^2}{\hbar^2} a^4 \equiv 1 \quad (6.15)$$

$$a^2 = \frac{\hbar}{m_0 \omega_0} \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \left[\frac{\mu^2}{\rho^2} + \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right) \rho^2 \right] R = \left[\beta(m + \nu) - \frac{2}{\hbar \omega_0} E \right] R \quad (6.17)$$

de modo que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \left[\frac{\mu^2}{\rho^2} + \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right) \rho^2 \right] R = -\epsilon R \quad (6.18)$$

donde

$$\epsilon \equiv \frac{2}{\hbar \omega_0} E - \beta(m + \nu) \quad (6.19)$$

por lo que

$$E = E_0(\epsilon + \beta(m + \nu)) \quad (6.20)$$

donde

$$E_0 \equiv \frac{\hbar \omega_0}{2} \quad (6.21)$$

Regresamos a la ecuación de interés,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \left[\frac{\mu^2}{\rho^2} + \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right) \rho^2 \right] R = -\epsilon R \quad (6.22)$$

Para simplificar hacemos un nuevo cambio de variable,

$$y = \alpha \rho \quad (6.23)$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dR}{dy} \right) - \left[\frac{\mu^2}{y^2} + \alpha^4 \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right) y^2 \right] R = -\alpha^2 \epsilon R \quad (6.24)$$

por lo que resulta conveniente hacer

$$\alpha^4 \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right) \equiv 1 \quad (6.25)$$

y, por lo tanto

$$\alpha = \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right)^{-1/4} \quad (6.26)$$

que al introducir una nueva energía adimensional,

$$\varepsilon \equiv \alpha^2 \epsilon \quad (6.27)$$

nos permite escribir a la ecuación radial como,

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dR}{dy} \right) - \left[\frac{\mu^2}{y^2} + y^2 - \varepsilon \right] R = 0 \quad (6.28)$$

Ahora, veamos los casos extremos de distancias radiales pequeñas y grandes.

Si $y \ll 1$, caso en el cual llamamos a la solución R_0 , tenemos que

$$\frac{d^2 R_0}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR_0}{dy} - \frac{\mu^2}{y^2} R_0(y) = 0 \quad (6.29)$$

cuya solución es $R_0 = y^{|\mu|}$; dado esto, escribimos ahora que $R = y^{|\mu|} G(y)$ por lo que

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{2|\mu| + 1}{y} \frac{dG}{dy} + [\varepsilon - y^2] G = 0 \quad (6.30)$$

Para resolver esta ecuación es conveniente cambiar de variable con $z = y^2$, por lo que

$$\frac{dz}{dy} = 2y = 2\sqrt{z} \quad (6.31)$$

de donde

$$\frac{dG}{dy} = \frac{dz}{dy} \frac{dG}{dz} = 2\sqrt{z} \frac{dG}{dz} \quad (6.32)$$

y

$$\frac{d^2 G}{dy^2} = 4z \frac{d^2 G}{dz^2} + 2 \frac{dG}{dz} \quad (6.33)$$

entonces, tenemos que

$$G'' + \frac{|\mu| + 1}{z} G' + \left[\frac{\varepsilon}{4z} - \frac{1}{4} \right] G = 0 \quad (6.34)$$

Cuando $z \gg 1$, $G \rightarrow G_\infty$, se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 G_\infty}{dz^2} - \frac{1}{4} G_\infty(z) = 0 \quad (6.35)$$

cuya solución físicamente aceptable es

$$G_\infty(z) = e^{-z/2} \quad (6.36)$$

Entonces, podemos escribir

$$G(z) = e^{-z/2} F(z) \quad (6.37)$$

se sigue que

$$\frac{dG}{dz} = e^{-z/2} \left[F' - \frac{1}{2} F \right] \quad (6.38)$$

y

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = e^{-z/2} \left[F'' - F' + \frac{1}{4} F \right] \quad (6.39)$$

Por lo tanto, la ecuación para F es:

$$zF'' + (|\mu| + 1 - z)F' + \frac{1}{4}(\varepsilon - 2(|\mu| + 1))F = 0 \quad (6.40)$$

que es la ecuación hipergeométrica confluyente, cuya solución está dada por

$$F(z) = L_{n_r}^{|\mu|}(z) \quad (6.41)$$

donde el entero n_r es igual a

$$n_r = \frac{1}{4}(\varepsilon - 2(|\mu| + 1)), \quad (6.42)$$

son los polinomios generalizados de Laguerre. Por lo tanto

$$R(z) = Nz^{|\mu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|\mu|}(z) \quad (6.43)$$

y, al normalizar tenemos que

$$R(z) = \left[\frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2 (\text{sen}\theta)(n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} z^{|\mu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|\mu|}(z), \quad n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (6.44)$$

donde, para facilitar la lectura recordemos que nuestra unidad de longitud a está dada por,

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_0}} \quad (6.45)$$

y el factor de escala α es igual a

$$\alpha = \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right)^{-1/4} \quad (6.46)$$

Por lo que las funciones propias del sistema están dadas por

$$\psi_{|\mu|, n_r}(z, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2 (\text{sen}\theta)(n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} z^{|\mu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|\mu|}(z), \quad n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (6.47)$$

Para las energías propias del sistema tenemos que

$$\varepsilon = 4n_r + 2|\mu| + 2 = \alpha^2 \epsilon = \left(1 + \frac{\beta^2 \text{sen}^2 \theta}{4} \right)^{-1/2} \left[\frac{2}{\hbar\omega_0} E - \beta(m + \nu) \right] \quad (6.48)$$

por lo que, las energías propias de este modelo general están dadas por

$$E = \frac{\hbar\omega_c}{2} (m + \nu) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2 \text{sen}^2 \theta \right)^{1/2} \left(4n_r + \frac{2|m + \nu|}{\text{sen}\theta} + 2 \right) \quad (6.49)$$

Ahora, analicemos diferentes casos que se reducen a situaciones ya estudiadas en este trabajo o en la literatura.

Si $\omega_c = 0$ y $\nu = 0$ en (6.49), lo cual sucede en ausencia de campos magnéticos externos, recuperamos las energías correspondientes al caso armónico dadas por (4.32):

$$E = \hbar\omega_0 \left(2n_r + \frac{|m|}{\sin\theta} + 1 \right) \quad (6.50)$$

En las siguientes gráficas se muestran los estados de energía doblemente degenerados para $m \neq 0$ de (6.50):

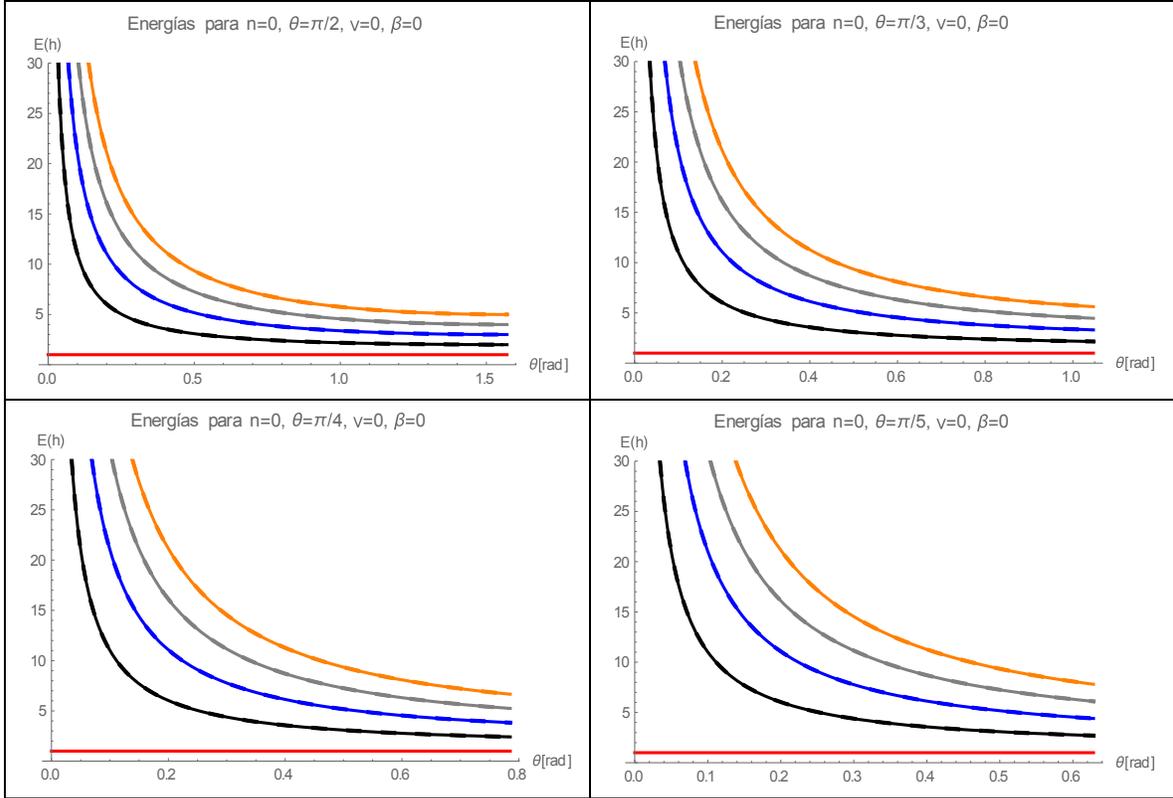


Figura 6.1 Energías para $n = 1$, $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris), 4 (naranja), que muestran el espectro de energías para el caso del oscilador armónico en ausencia de campos magnéticos externos, y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/4$, $\pi/5$ respectivamente.

De igual manera, si $\omega_0 = 0$ en (6.49), es decir, cuando apagamos el confinamiento armónico nos quedamos con los niveles de AB-Landau, cuyas energías están entonces dadas por

$$E = \hbar\omega_c \left[\sin\theta n_r + \frac{1}{2} (|m + \nu| + (m + \nu) + \sin\theta) \right] \quad (6.51)$$

que son justamente las energías obtenidas en (5.40) en el capítulo 5.

Notemos que cuando $\theta = \pi/2$ en (6.47) y (6.49), el espectro de energías y las funciones de onda para este sistema están dadas por

$$E = \frac{\hbar\omega_c}{2}(m + \nu) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2 \right)^{1/2} (4n_r + 2|m + \nu| + 2) \quad (6.52)$$

$$\psi_{|\mu|,n_r}(z, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2\lambda^2 n_r!}{a^2 (n_r + |m + \nu|)!} \right]^{1/2} z^{|m+\nu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|m+\nu|}(z), \quad n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (6.53)$$

donde

$$\lambda = \left(1 + \frac{\beta^2}{4} \right)^{-1/4} \quad (6.54)$$

Ahora, veamos el comportamiento de los estados de energía dados por (6.49), es decir, en presencia de campos magnéticos externos y confinamiento armónico. Notemos que cuando ν toma valores de $[-0.5, 0.5]$, se puede observar la degeneración en los estados de energía.

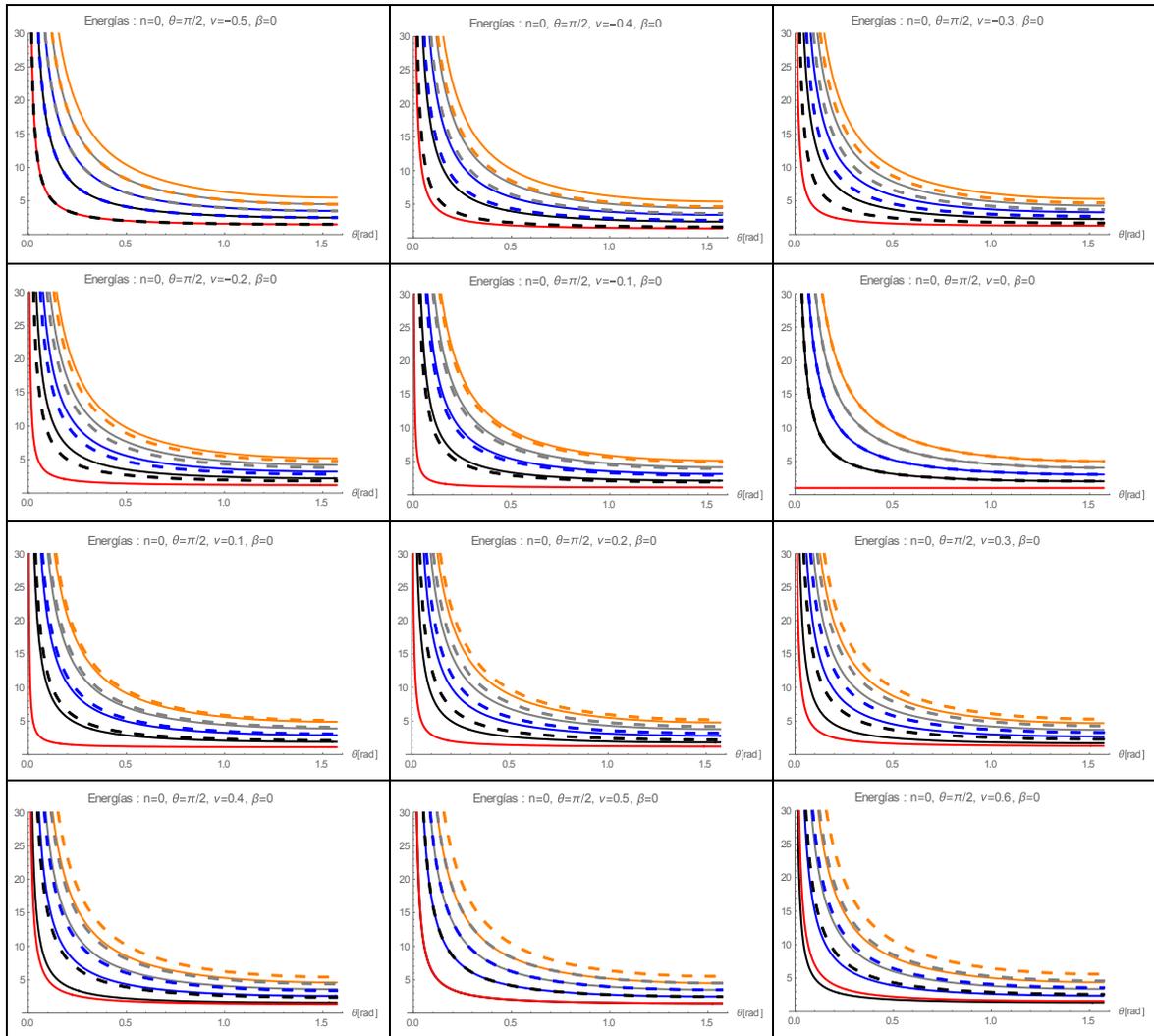


Figura 6.2 Energías para $nr = 0$, como función del ángulo θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$ para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris), 4 (naranja), $\nu = [-0.5, 0.5]$, $\beta = 0$. Curvas punteadas para $m > 0$ y sólidas para $m < 0$.

Se observa que nuevamente para $\nu = -0.5$ y 0.5 , hay degeneración en los estados de energía, mientras que se rompe esta degeneración para $\nu \neq -0.5$ y 0.5 .

Veamos ahora el efecto de variar el campo magnético.

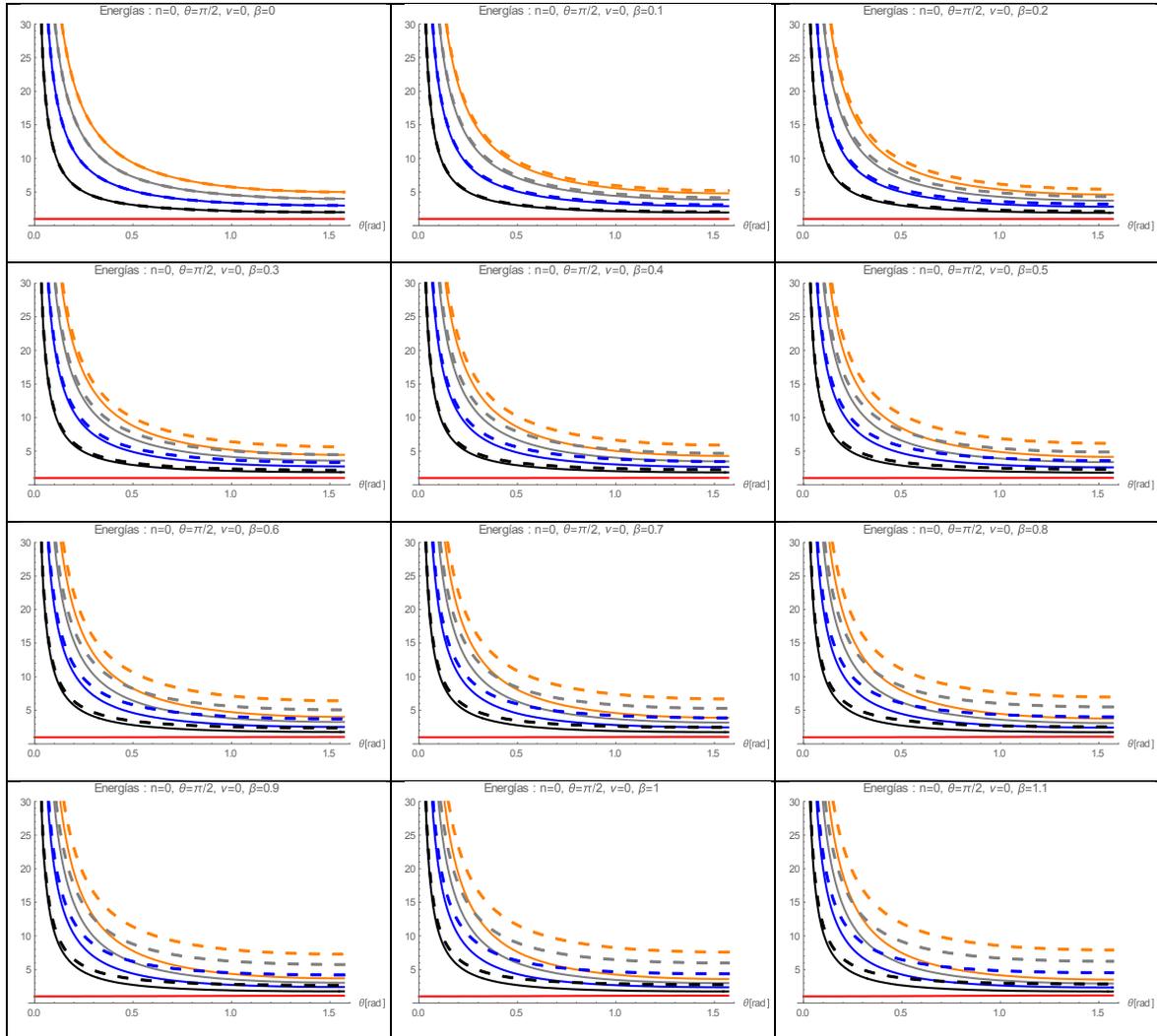


Figura 6.3 Energías para $nr = 0$, como función del ángulo θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$ para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris), 4 (naranja), $\beta = [0, 1.1]$, $v = 0$. Curvas punteadas para $m > 0$ y sólidas para $m < 0$.

Notamos en este caso que, al ir aumentando el campo magnético, se rompe la degeneración y los niveles de energía se van separando, y la energía aumenta a medida que aumenta m .

En la siguiente grafica observamos las energías, (6.49), en función del flujo magnético. Observamos que para el caso de $n = 1$, al aumentar β , la energía disminuye, para cada número cuántico magnético, m , y al aumentar n , la energía aumenta, como era de esperarse.

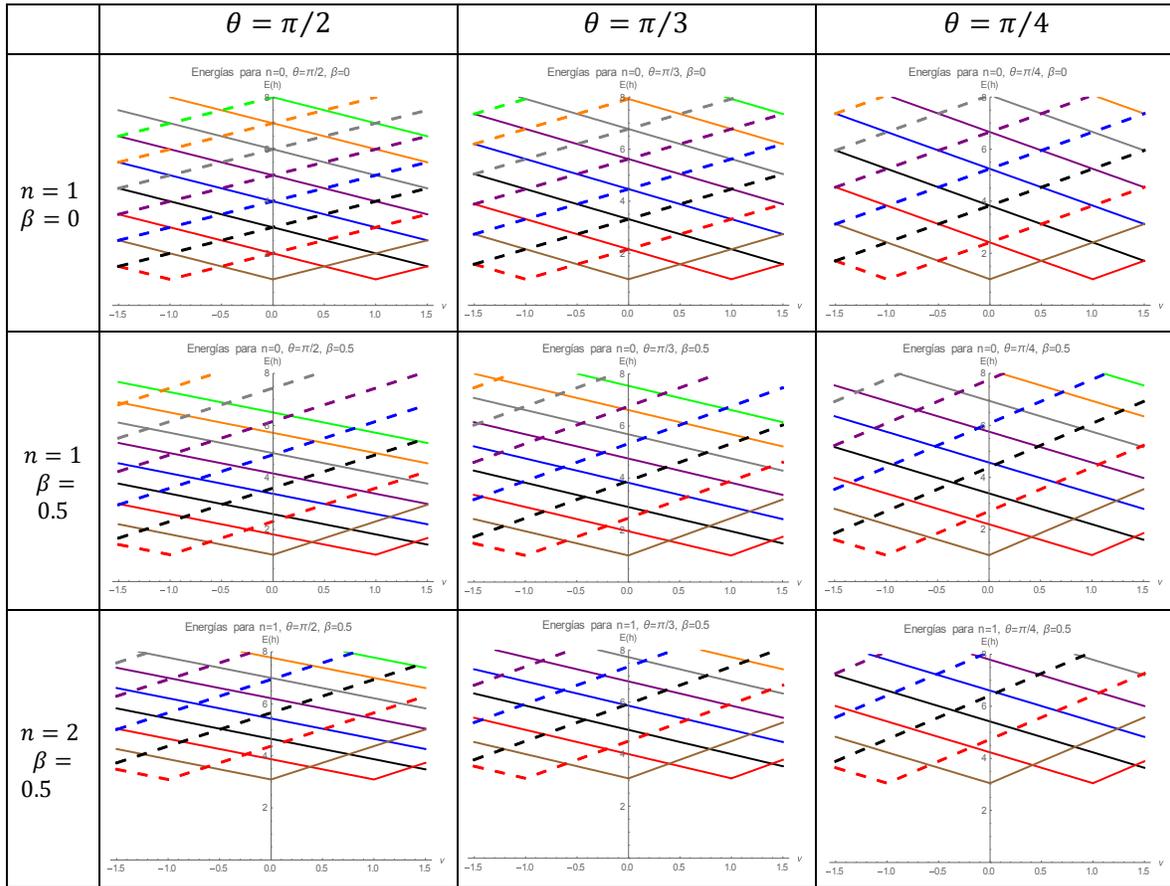
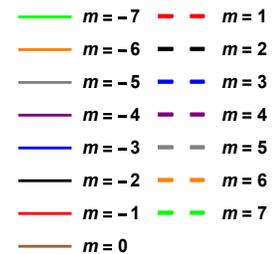


Figura 6.4 Energías para $n = 1, 2$, $\beta = 0, 0.5$, como función de ν en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 (como se muestra en la leyenda siguiente), y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3$ y $\pi/4$, respectivamente.



Estudiemos ahora la densidad de probabilidad por unidad de área, la cual es el módulo cuadrado de la función de onda:

$$\rho_{|\mu|,n}(r) = |\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2 \quad (6.55)$$

que, de manera explícita está dada por:

$$\rho_{|\mu|,n_r}(r) = \left(\frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2 (\sin\theta)(n_r + |\mu|)!} \right) (\alpha r)^{2|\mu|} e^{-(\alpha r)^2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(\alpha r)^2 \right]^2 \quad (6.56)$$

A continuación, se muestran algunas gráficas de esta función. En la figura 6.2 solo se pretende mostrar la estructura nodal para diferentes números cuánticos n . En la figura 6.3 se muestra el efecto de tomar diferentes valores de m , que ya se discutió en los capítulos anteriores, y en la figura 6.4, se observa el efecto de variar el flujo magnético, cuya discusión también ya ha sido tratada.

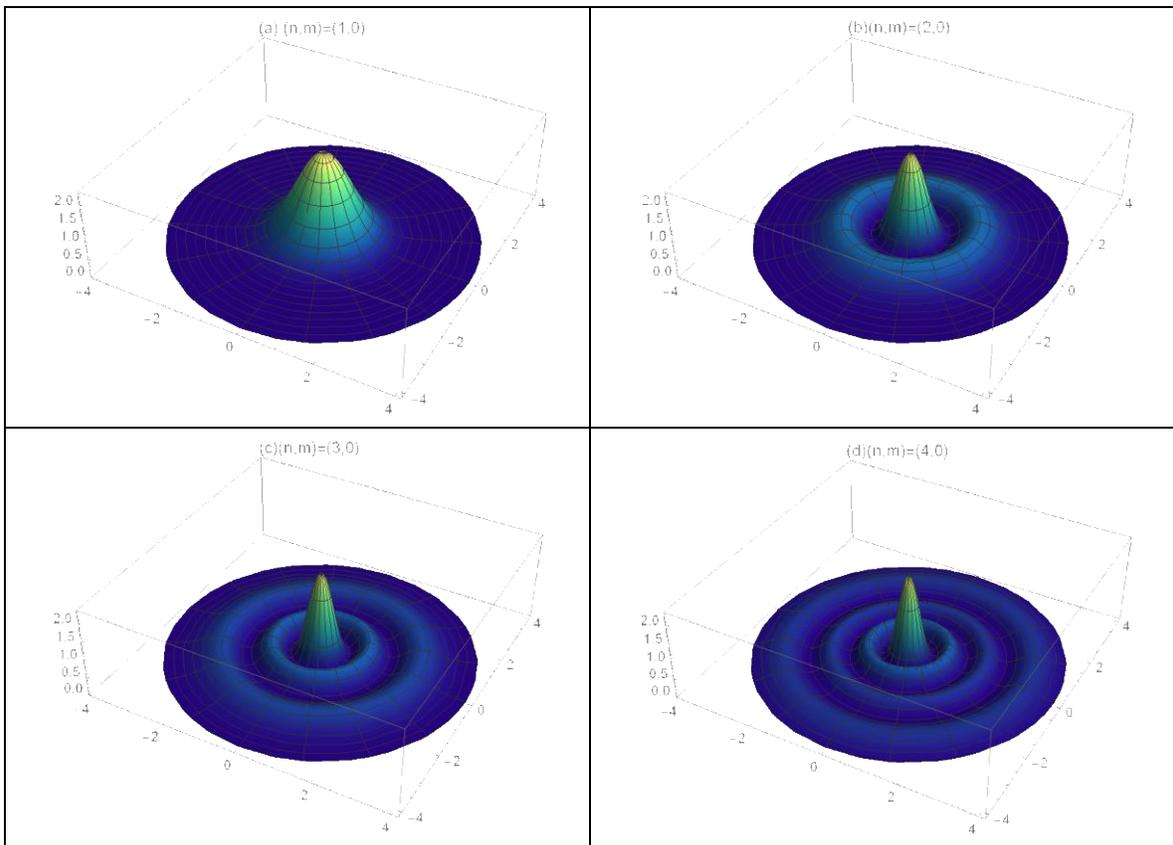


Figura 6.5 Gráficas de las funciones $|\psi_{|\mu|,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2, 3$ y 4 , $m = 0$, $\nu = 0$, $\beta = 0.2$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

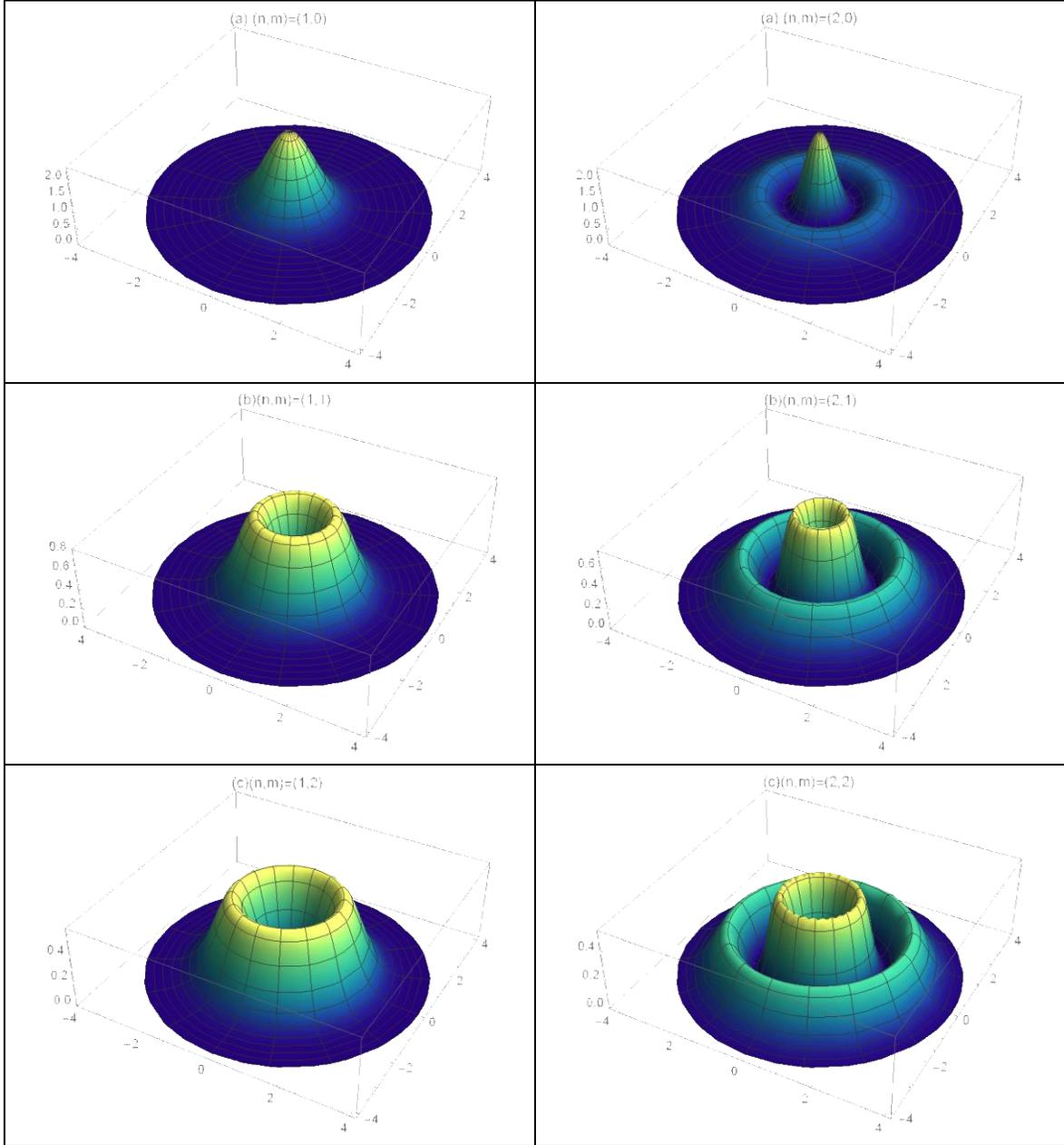


Figura 6.6 Gráficas de las funciones $|\psi_{\mu,n}(r, \phi)|^2$ como función de r , para $n = 1, 2, v = 0$, $\beta = 0.2$, $m = 0, 1$ y 2 , y cono cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

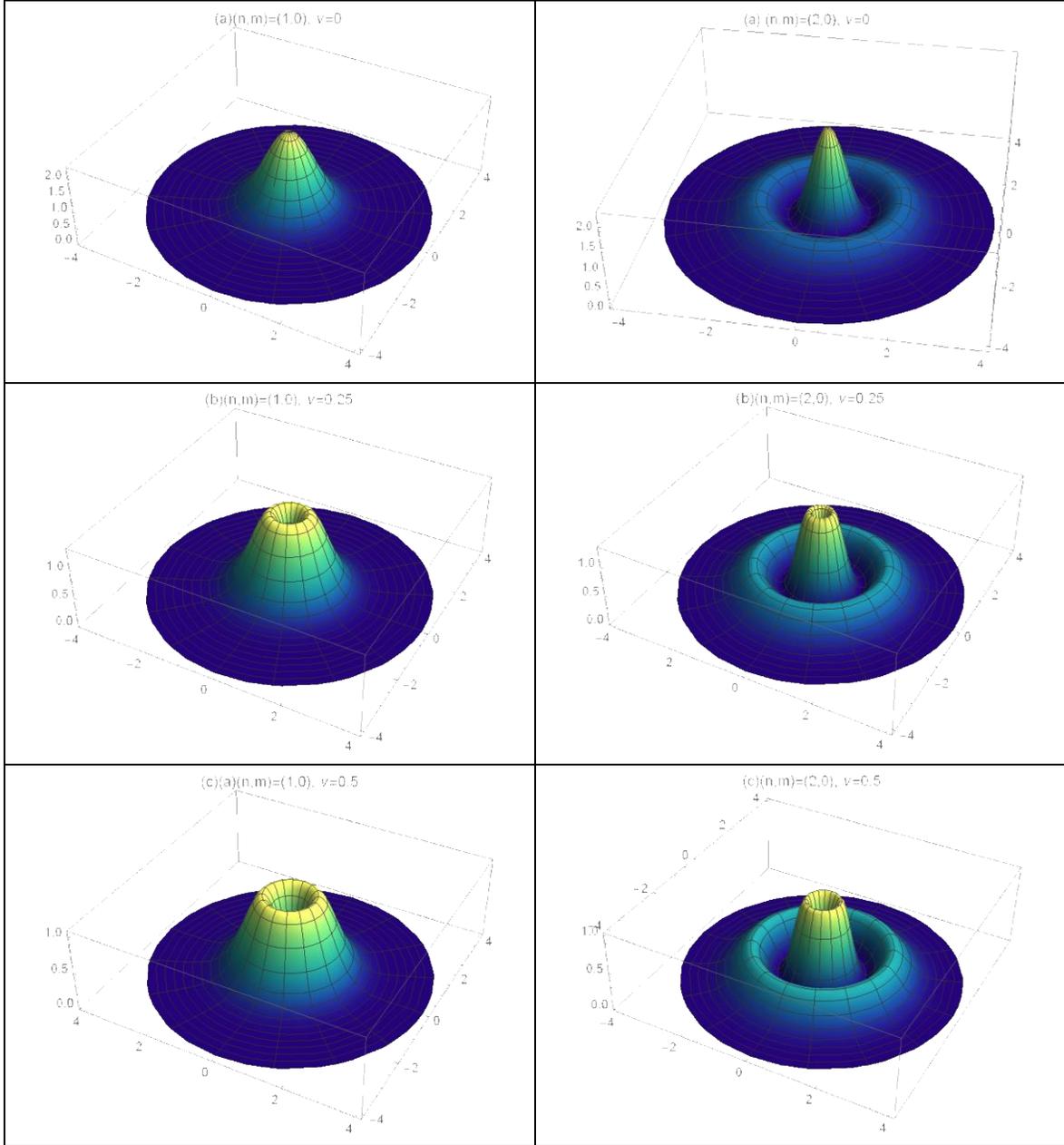


Figura 6.7 Gráficas de las funciones $|\psi_{l,\mu,n}(r, \phi)|^2$ para $n = 1, 2$, $m = 0$, $v = 0, 0.25, 0.5$, $\beta = 0.2$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/3$.

Por otra parte, la densidad de probabilidad radial en términos de la función $u(r) = \sqrt{r \sin \theta} R(r)$, para este modelo está dada por:

$$d_{|\mu|,n}(r) = \left(\frac{2 r \alpha^2 n_r!}{a^2 (n_r + |\mu|)!} \right) (\alpha r)^{2|\mu|} e^{-(\alpha r)^2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}((\alpha r)^2) \right]^2 \quad (6.57)$$

Notemos que la ecuación para $u(r)$ en este caso, está dada por

$$-u'' + \left\{ \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{4} \right) \right\} u = -\epsilon u \quad (6.58)$$

en donde vemos que el potencial efectivo adimensional para este sistema está dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} + r^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{4} \right) \quad (6.59)$$

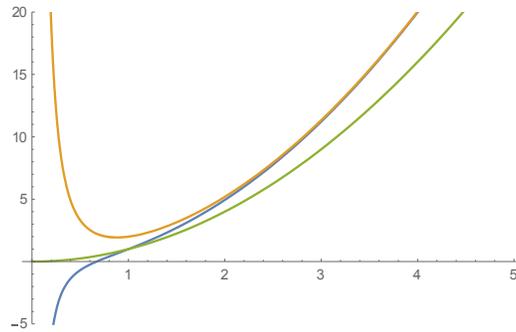


Figura 6.8 Gráfica del potencial efectivo adimensional, en términos de la variable r adimensional, dada por la ecuación (6.59).

Podemos ver que el potencial efectivo para este modelo está compuesto por la barrera centrífuga, el potencial de confinamiento armónico y el potencial de confinamiento cuadrático dado por el campo magnético externo, los cuáles ligarán a la partícula hacia el origen de coordenadas, aún más que para el caso estudiado en el capítulo 5, en donde solo se tiene el potencial de confinamiento cuadrático dado por el campo magnético externo.

Notemos que si apagamos el campo magnético y el confinamiento armónico nos quedamos solo con la barrera centrífuga, que corresponde al potencial centrífugo estudiado en el capítulo 3. Si apagamos el flujo y el campo magnético, resulta el potencial efectivo dado por la barrera centrífuga y el potencial de confinamiento armónico estudiado en el capítulo 4. Si solo apagamos el confinamiento armónico nos resulta el potencial compuesto por la barrera centrífuga y el potencial de confinamiento cuadrático con el que contribuye el campo magnético externo estudiado en el capítulo 5.

A continuación, se muestran un conjunto de resultados para diferentes situaciones.

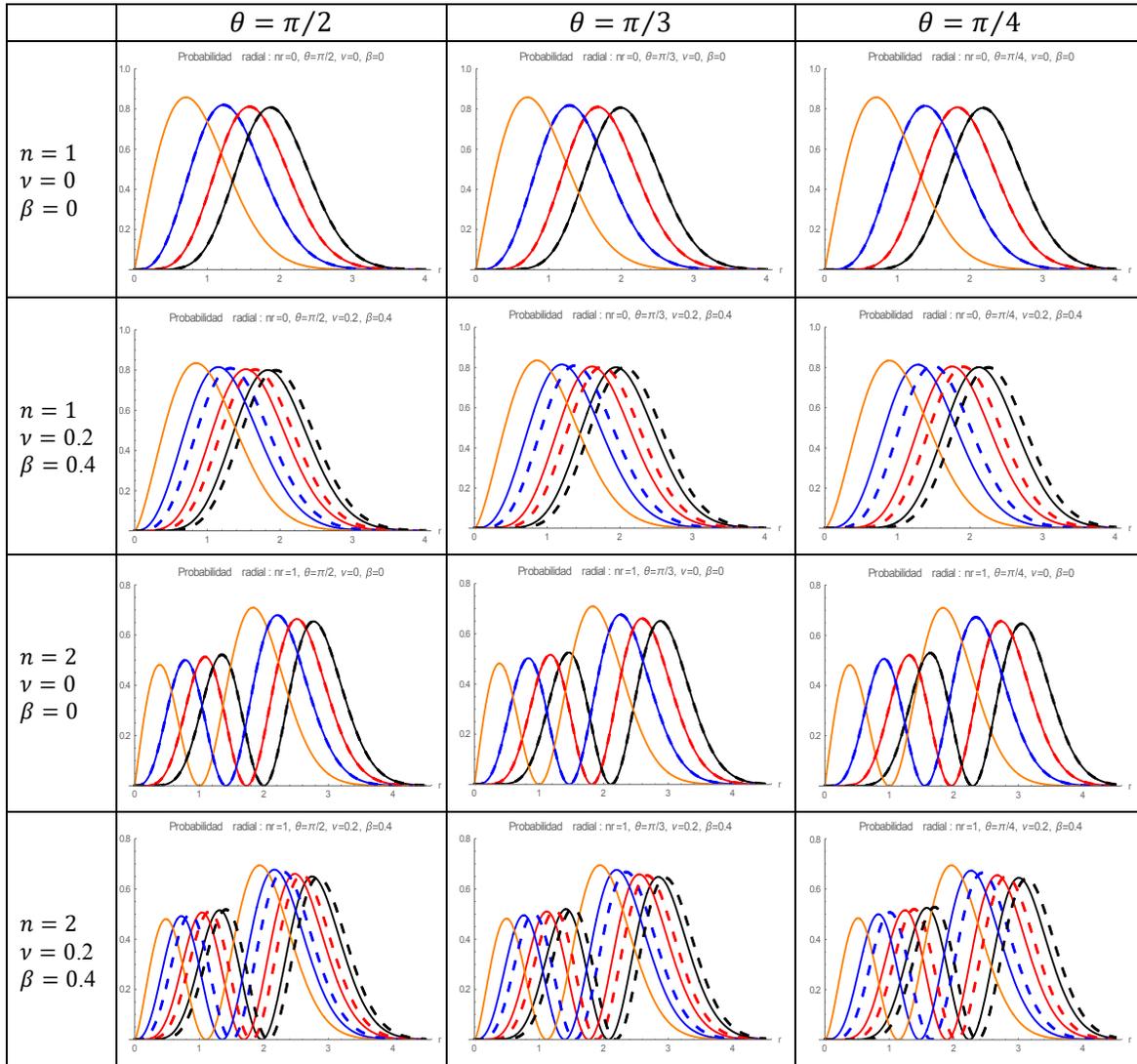


Figura 6.9 Densidad de probabilidad radial, $d_{|\mu|,n}(r)$, para $n = 1, 2$, como función de r en el intervalo $[0, 5]$, para $|m| = 0$ (naranja), 1 (azul), 2 (rojo) y 3 (negro), curvas punteadas para $m > 0$ y sólidas para $m < 0$, para $\nu = 0, 0.2, \beta = 0, 0.4$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

Podemos observar que cuando $\nu = 0$, las funciones $d_{|\mu|,n}(r)$ están degeneradas, pero para un valor de $\nu = 0.2$ se rompe la degeneración. En este caso, el campo magnético externo liga a la partícula hacia el origen y refuerza el confinamiento de efecto armónico, es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula cerca del origen, es mayor cuando β aumenta. También vemos que a medida que m aumenta, la barrera centrífuga diverge en el origen y hace que el electrón no pueda penetrar al origen de coordenadas.

Capítulo 7

7.1 Promedios, varianza y desviación estándar

En este capítulo se calcula la varianza y la desviación estándar para el modelo general, es decir, el modelo estudiado en el capítulo anterior.

Empecemos por definir la *varianza o dispersión de un operador* [20], \hat{A} , como

$$(\Delta A)^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (7.1)$$

Se acostumbra, también definir la desviación estándar ΔA , que no es más que la raíz cuadrada de la varianza, es decir

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle} \quad (7.2)$$

Recordando que los paréntesis $\langle \rangle$ representan un valor promedio mecánico-cuántico, podemos reescribir (7.1), suponiendo que la condición de normalización de Ψ se satisface, como

$$(\Delta A)^2 = \langle (\hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \int_{TE} \Psi^* (\hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \Psi dV$$

Separando esta expresión en tres integrales (en todo el espacio) y recordando que $\langle A \rangle$ es un número que puede salir de las mismas, obtenemos

$$(\Delta A)^2 = \int_{TE} \Psi^* \hat{A}^2 \Psi dV - 2\langle A \rangle \int_{TE} \Psi^* \hat{A} \Psi dV + \langle A \rangle^2 \int_{TE} \Psi^* \Psi dV$$

Identificamos el primer término como el valor esperado del operador \hat{A}^2 ; a la integral del segundo término como $\langle A \rangle$, y la integral del tercer sumando, por la condición de normalización, será igual a la unidad, o sea, que

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \\ (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

De acuerdo con esto, podemos expresar a la desviación estándar de (7.2) de la siguiente forma

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (7.4)$$

Ahora, a partir del desarrollo mostrado anteriormente, sabemos que el valor esperado de la posición x de una partícula que se encuentra en el estado Ψ (normalizado) se define como

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx, \quad (7.5)$$

y el significado físico del valor esperado $\langle x \rangle$ o el valor promedio de x , es el de la posición más probable en todo el espacio, en el que se encuentra la partícula.

Así, de (7.3), la varianza σ^2 en la posición de la partícula está definida como

$$\sigma^2 = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (7.6)$$

mientras que la incertidumbre, $\Delta x = \sigma$ en la posición de la partícula, de (7.4), está dada por la desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (7.7)$$

Promedio de potencias de la distancia radial

Dado que la función radial está dada por

$$R(z) = \left[\frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2 (\sin\theta) (n_r + |\mu|)!} \right]^{1/2} z^{|\mu|/2} e^{-z/2} L_{n_r}^{|\mu|}(z), \quad n_r = 0, 1, 2 \dots \quad (7.8)$$

entonces

$$[R(z)]^2 = \frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2 (\sin\theta) (n_r + |\mu|)!} e^{-z} z^{|\mu|} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(z) \right]^2 \quad (7.9)$$

Ahora, dado que r

$$r = \frac{a}{\alpha} \sqrt{z} \quad (7.10)$$

Tenemos que

$$\langle r^p \rangle = \left\langle \left(\frac{a}{\alpha} \right)^p z^{p/2} \right\rangle \quad (7.11)$$

Donde p es un entero en este caso y no debe confundirse con la p asociada a la cantidad de movimiento usada en la sección (7.2), es decir,

$$\langle r^p \rangle = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^p \frac{2\alpha^2 n_r!}{a^2(\text{sen}\theta)(n_r + |\mu|)!} \int_0^\infty r dr \text{sen}\theta e^{-z} z^{|\mu|+p/2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(z)\right]^2 \quad (7.12)$$

$$\langle r^p \rangle = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^p \frac{n_r!}{(n_r + |\mu|)!} \int_0^\infty dz e^{-z} z^{|\mu|+p/2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(z)\right]^2 \quad (7.13)$$

Para $p = 1$ tenemos que

$$\langle r \rangle = \left[\frac{a n_r!}{\alpha(n_r + |\mu|)!} \right] \int_0^\infty e^{-z} z^{|\mu|+1/2} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(z)\right]^2 dz \quad (7.14)$$

Para $p = 2$:

$$\langle r^2 \rangle = \left[\frac{a^2 n_r!}{\alpha^2(n_r + |\mu|)!} \right] \int_0^\infty e^{-z} z^{|\mu|+1} \left[L_{n_r}^{|\mu|}(z)\right]^2 dz \quad (7.15)$$

Los resultados finales, más simplificados para estas expresiones para diferentes valores de n_r , se muestran en la siguiente tabla, donde en general $\Gamma(x)$, corresponde a la función gamma [21] dada por $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

n_r	$\langle r \rangle / a$	$\langle r^2 \rangle / a^2$
0	$\frac{1}{\alpha \mu !} \Gamma\left[\frac{3}{2} + \mu \right]$	$\frac{1}{\alpha^2 \mu !} \Gamma[2 + \mu]$
1	$\frac{1}{\alpha(1 + \mu)!} \frac{1}{4} \Gamma\left[\frac{3}{2} + \mu \right] (7 + 4 \mu)$	$\frac{1}{\alpha^2(1 + \mu)!} \frac{\Gamma[4 + \mu]}{2 + \mu }$
2	$\frac{2}{\alpha(2 + \mu)!} \frac{1}{64} \Gamma\left[\frac{3}{2} + \mu \right] (145 + 16 \mu)$ $(9 + 2 \mu)$	$\frac{2}{\alpha^2(2 + \mu)!} \frac{1}{2} \Gamma[3 + \mu] (5 + \mu)$
3	$\frac{3!}{\alpha(3 + \mu)!} \frac{1}{768} \Gamma\left[\frac{3}{2} + \mu \right]$ $(2061 + 4 \mu (667 + 8 \mu (33 + 4 \mu)))$	$\frac{3!}{\alpha^2(3 + \mu)!} \frac{1}{6} \Gamma[4 + \mu] (7 + \mu)$

De modo que podemos representar gráficamente la varianza y la desviación estándar para distintos valores de n , como se muestra a continuación.

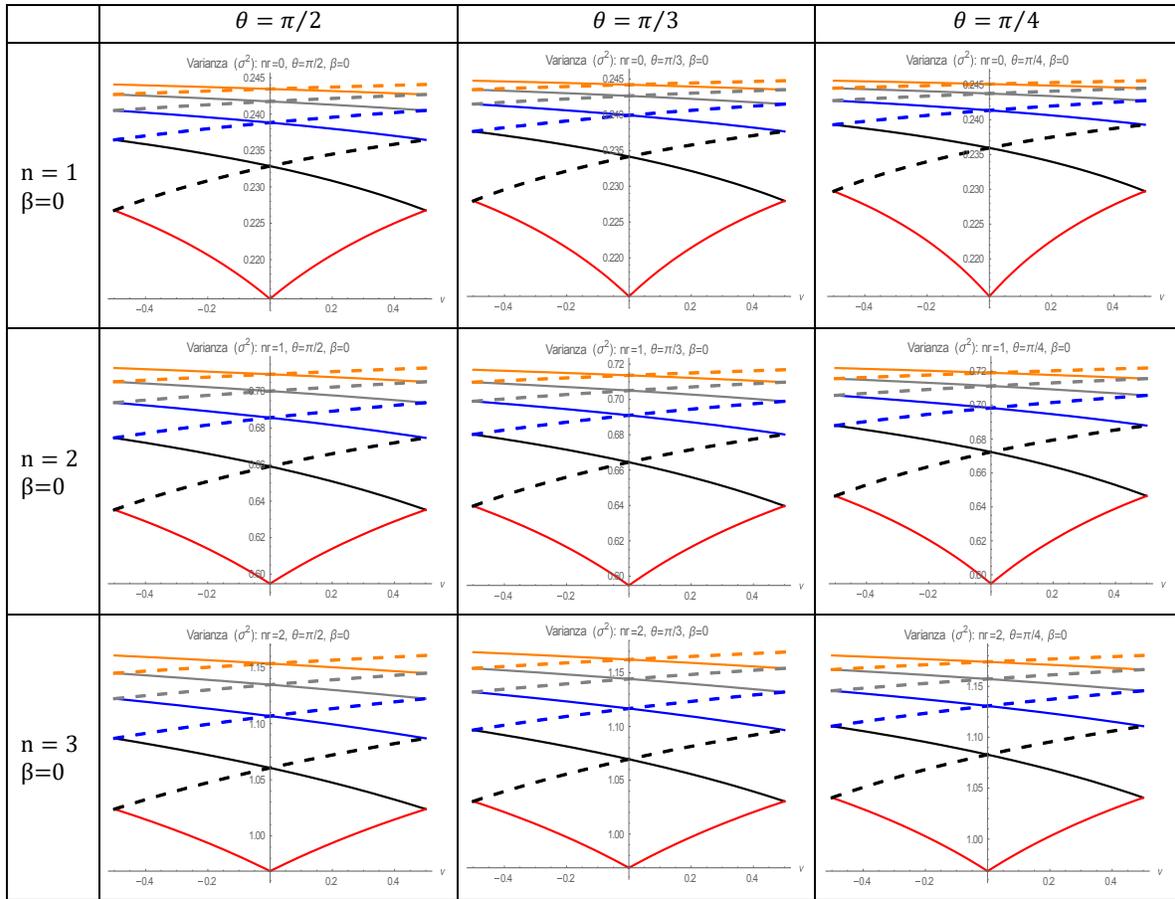


Figura 7.1 Varianza, σ_r^2 , para $n = 1, 2$ y 3 como función de ν en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0$ y con θ cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

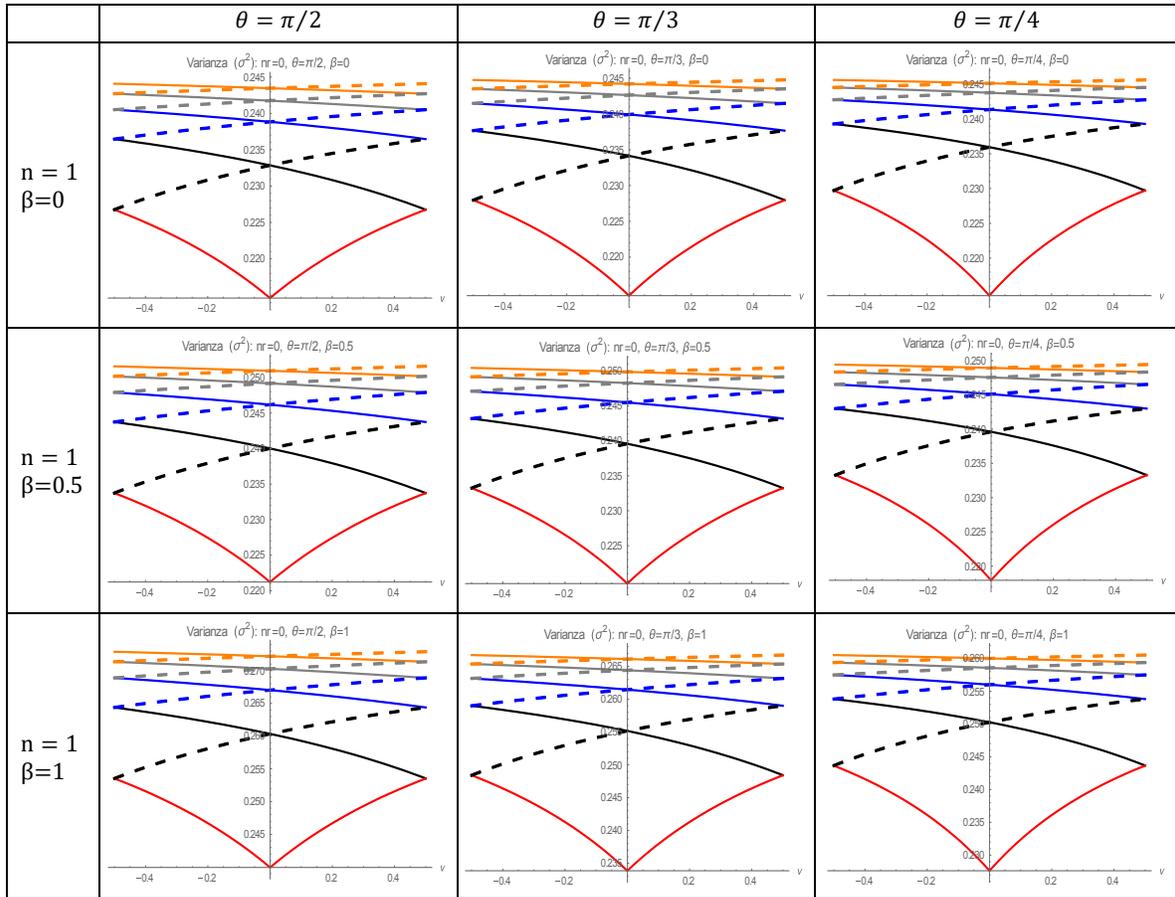


Figura 7.2 Varianza, σ_r^2 , para $n = 1$ como función de v , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0, 0.5$ y 1 , y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

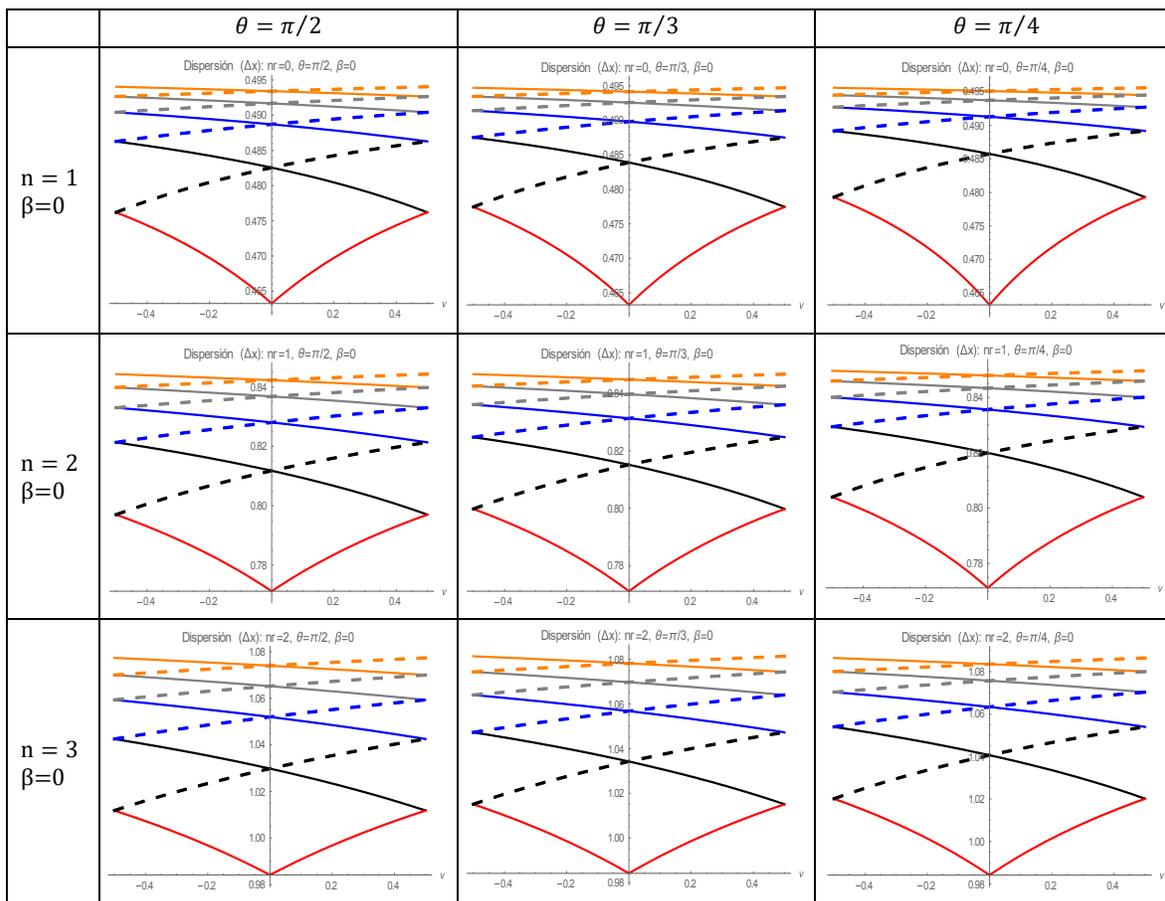


Figura 7.3 Dispersión, σ_r , para $n = 1, 2$ y 3 como función de ν , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

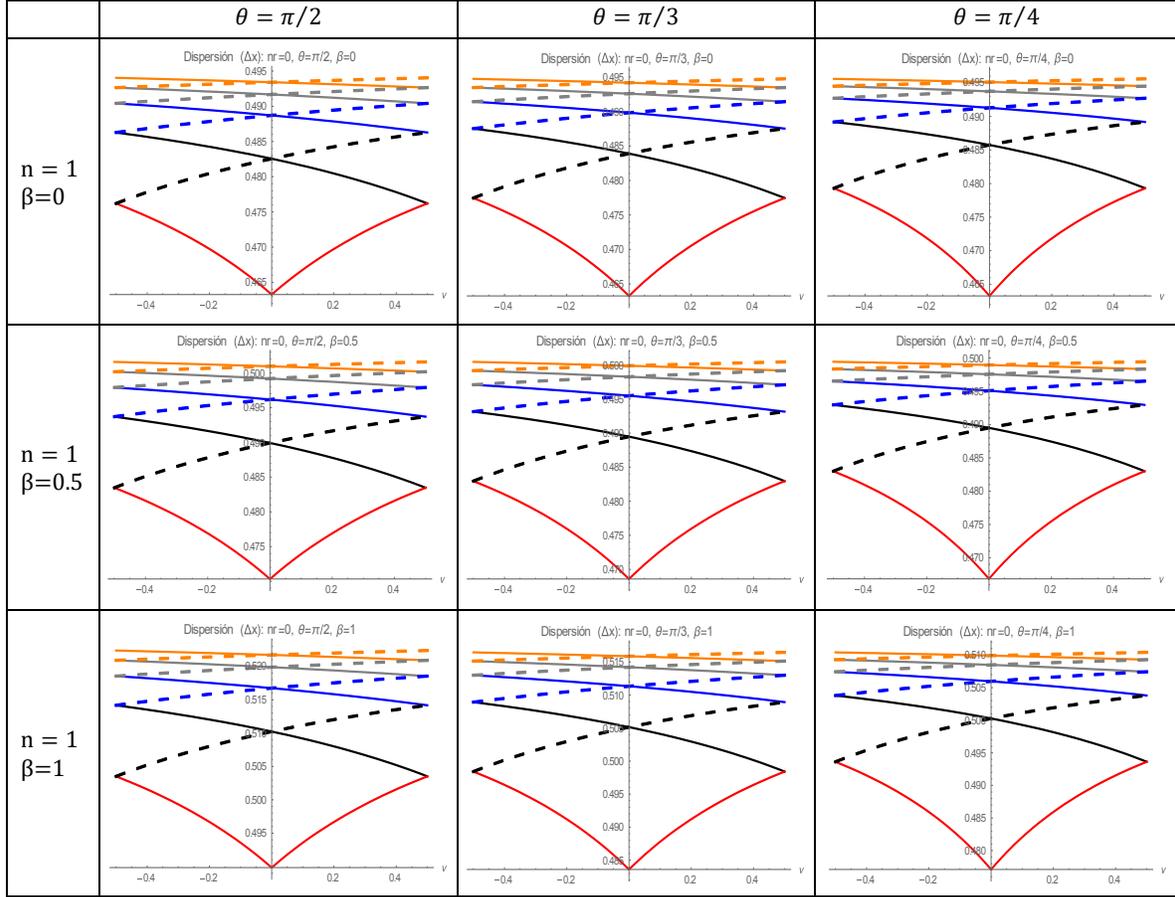


Figura 7.4 Dispersión, σ_r , para $n = 1$ como función de ν , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0, 0.5$ y 1, y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

La desviación estándar nos da una idea de qué tanto los valores individuales se alejan del valor promedio, en este caso, la desviación estándar en la posición de la partícula. No sabemos si, durante las diversas mediciones, esta variable física se ha mantenido cercana a su valor promedio o ha oscilado mucho alrededor de él; esta información la encontramos en σ_r . Si σ_r resulta un valor pequeño, podemos afirmar que, al realizar múltiples mediciones de la posición más probable de la partícula en todo el espacio, estas se desvían poco del valor promedio de ellas, como podemos notar en las gráficas mostradas anteriormente para la dispersión, en donde se puede observar que toma valores entre 0 y 0.5 en la figura 7.4 para $n = 1$ y $|m| = 0, 1, 2, 3$ y 4.

7.2 El principio de incertidumbre de Heisenberg

Una vez familiarizados con las desviaciones estándar de la mecánica cuántica, podemos aplicar el principio de incertidumbre de Heisenberg [22], [23] a nuestro sistema de estudio. Heisenberg demostró que, para dos variables físicas conjugadas, como lo son, por ejemplo, la coordenada x y la cantidad de movimiento en x , p_x , del movimiento de una partícula en una dimensión, cumple la siguiente desigualdad para el producto de las desviaciones estándar de las observables mencionadas

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (7.16)$$

No existe un sistema cuántico para el cual la posición y la cantidad de movimiento sean variables bien definidas simultáneamente. Si preparamos un buen número de muestras de un sistema para efectuar mediciones experimentales de posición y cantidad de movimiento, nunca lograremos en todas ellas detectar valores constantes de x y de p_x , una o las dos variables arrojarán datos dispersos que satisfarán la desigualdad de Heisenberg (7.16).

En la sección anterior ya hemos calculado la desviación estándar para la coordenada r , Δr , por lo que solo resta obtener

$$\Delta p_r = \sqrt{\langle p_r^2 \rangle - \langle p_r \rangle^2} \quad (7.17)$$

Dado que $\langle p_r \rangle = 0$ [24], por tratarse de estados ligados (no se transporta el electrón por el espacio), nos limitamos a obtener $\langle p_r^2 \rangle$.

Para hacer el cálculo de $\langle p_r^2 \rangle$ partimos del Hamiltoniano dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{2ei\hbar}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} + \frac{B}{2} r \sin \theta \right) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e^2}{2m_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi r \sin \theta} + \frac{B}{2} r \sin \theta \right)^2 + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 \quad (7.18)$$

de modo que

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{em\hbar\Phi_0}{2\pi m_0 \sin^2 \theta} \frac{1}{r^2} + \frac{em\hbar B}{2m_0} + \frac{e^2 \Phi_0^2}{8\pi^2 m_0 \sin^2 \theta} \frac{1}{r^2} + \frac{e^2 B^2 \sin^2 \theta}{8m_0} r^2 + \frac{e^2 \Phi_0 B}{4\pi m_0} + \frac{m_0 \omega_0^2}{2} r^2 \quad (7.19)$$

Pero sabemos que el promedio del Hamiltoniano es la energía, es decir

$$\langle H \rangle = E_{n_r, m, \nu} \quad (7.20)$$

entonces

$$\langle p_r^2 \rangle = \left[E_{n_r, m} - \frac{em\hbar\Phi_0}{2\pi m_0 \text{sen}^2\theta} \langle \frac{1}{r^2} \rangle - \frac{e^2\Phi_0^2}{8\pi^2 m_0 \text{sen}^2\theta} \langle \frac{1}{r^2} \rangle - \frac{e^2 B^2 \text{sen}^2\theta}{8m_0} \langle r^2 \rangle - \frac{m_0\omega_0^2}{2} \langle r^2 \rangle - \frac{em\hbar B}{2m_0} - \frac{e^2\Phi_0 B}{4\pi m_0} \right] 2m_0 \quad (7.21)$$

y haciendo las simplificaciones correspondientes, se llega a

$$\langle p_r^2 \rangle = \left[\frac{\hbar\omega_c}{2} (m + \nu) + \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \text{sen}^2\theta \right)^{1/2} \left(4n_r + \frac{2|m + \nu|}{\text{sen}\theta} + 2 \right) - \frac{m\nu\hbar^2}{m_0 \text{sen}^2\theta} \langle \frac{1}{r^2} \rangle - \frac{\nu^2\hbar^2}{2m_0 \text{sen}^2\theta} \langle \frac{1}{r^2} \rangle - \frac{\beta^2\omega_0^2 m_0 \text{sen}^2\theta}{8} \langle r^2 \rangle - \frac{m_0\omega_0^2}{2} \langle r^2 \rangle - \frac{m\hbar\beta\omega_0}{2} - \frac{\nu\hbar\beta\omega_0}{2} \right] 2m_0 \quad (7.22)$$

Por lo que

$$\Delta p_r = \sqrt{\langle p_r^2 \rangle} \quad (7.23)$$

A continuación, se muestran algunas gráficas para Δp_r .

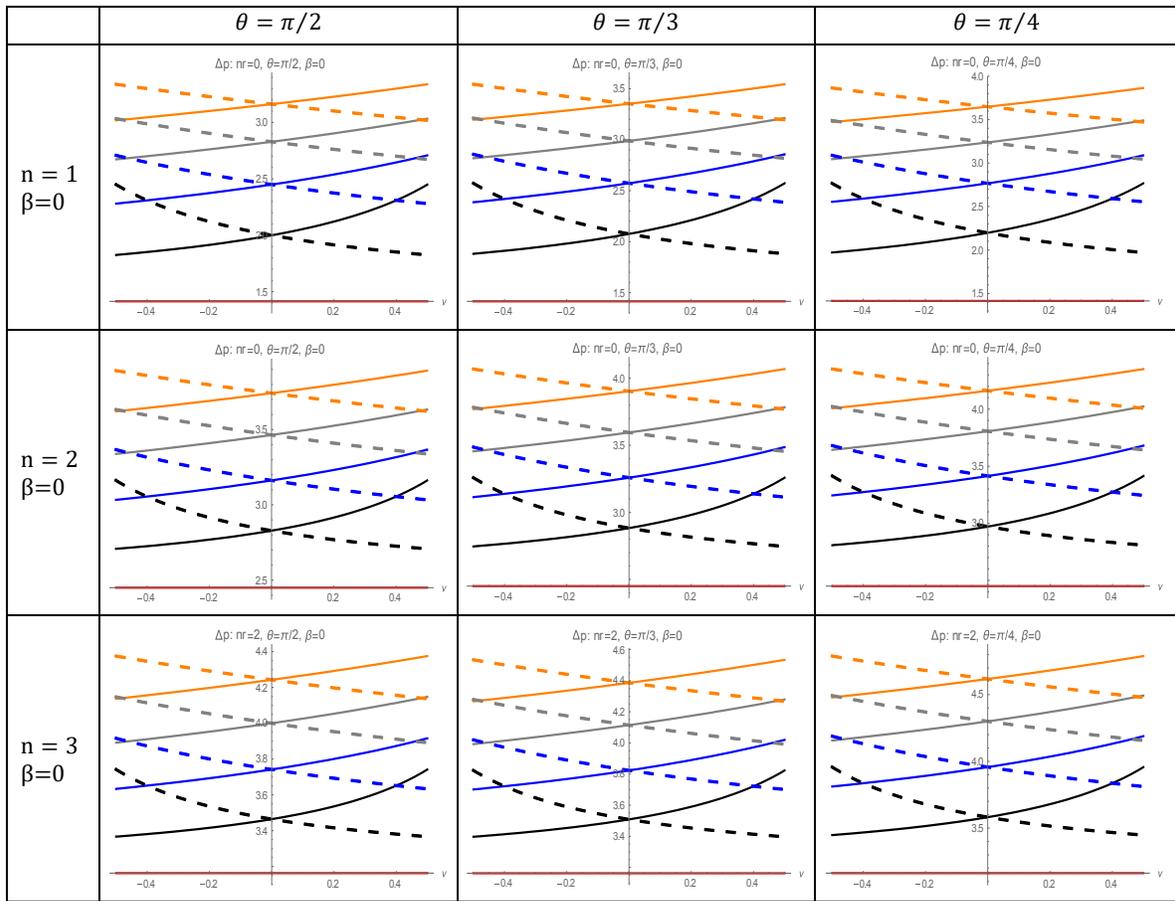


Figura 7.5 Dispersión, Δp_r , para $n = 1, 2$ y 3 como función de v , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0$ y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

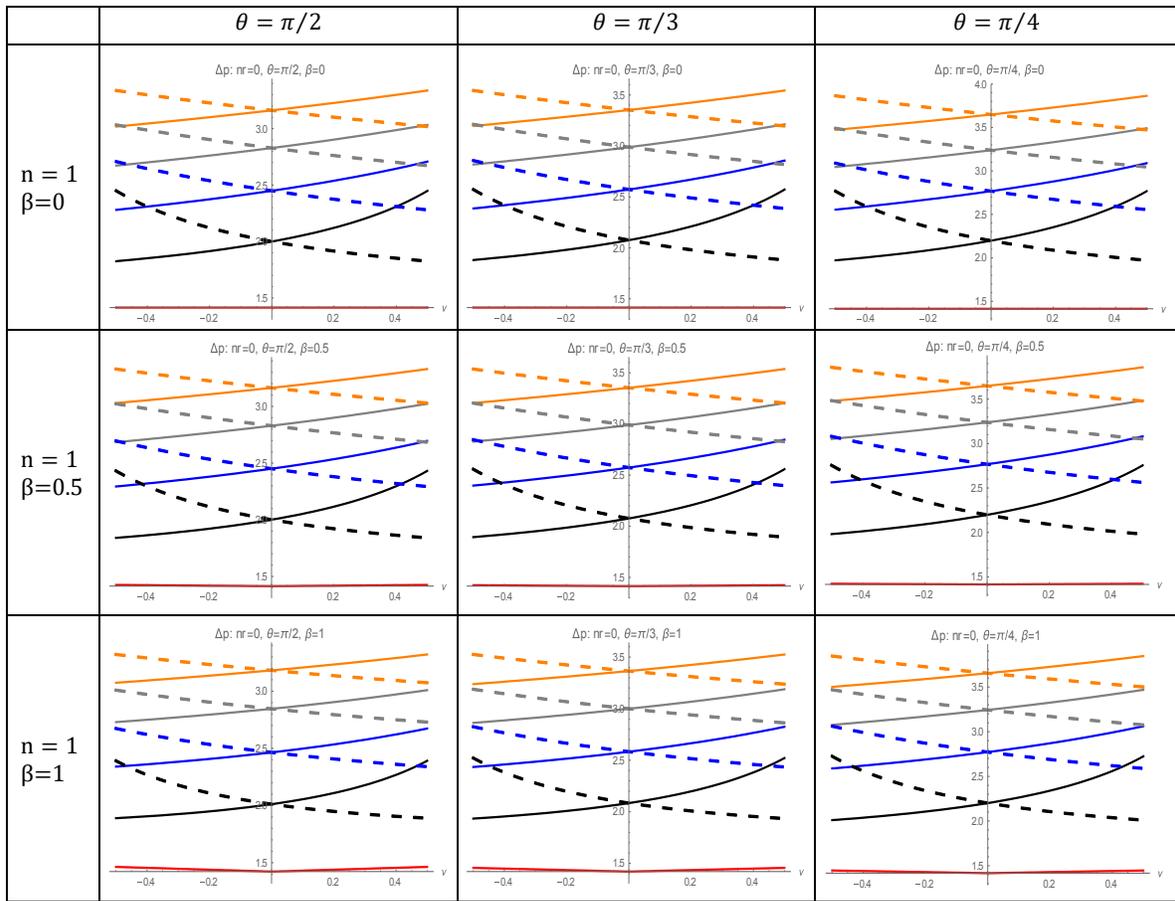


Figura 7.6 Dispersión, Δp_r , para $n = 1$ como función de ν , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0, 0.5$ y 1, y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

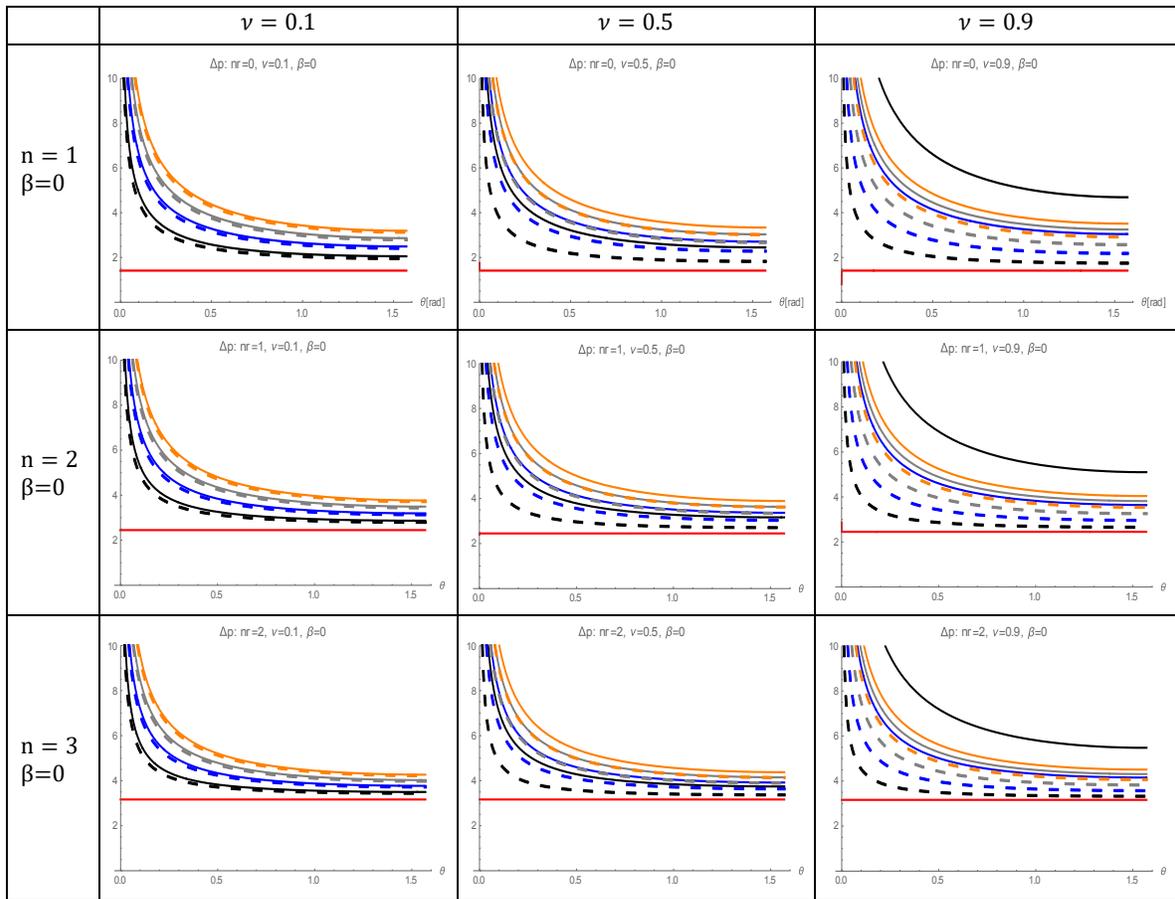


Figura 7.7 Δp_r , para $n = 1, 2$ y 3 , como función de θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$, para $\beta = 0, \nu = 0.1, 0.5$ y 0.9 .

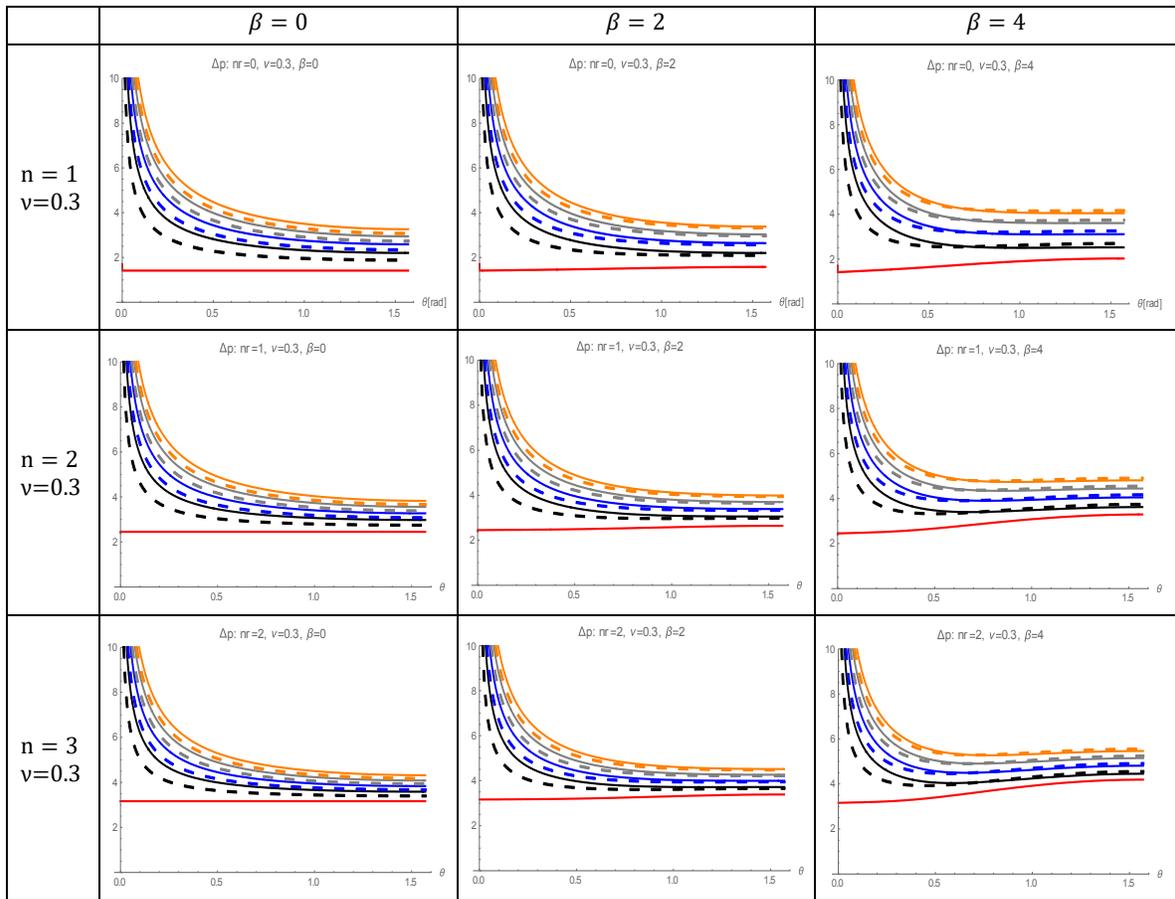


Figura 7.8 Δp_r , para $n = 1, 2$ y 3 , como función de θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$, para $v = 0.3$ y $\beta = 0, 2$ y 4 .

Observamos que Δp_r en todos los casos toma valores mayores que las gráficas de Δr , pues, en este caso, Δp_r arroja valores dispersos, que satisfacen la desigualdad de Heisenberg, como se muestra en las siguientes gráficas, $\Delta r \Delta p_r$, en donde en todos los casos es mayor a la unidad (en este caso, al hacer el cálculo analítico se factorizó $\hbar/2$, por lo tanto al graficar, uno debería esperar valores mayores a la unidad) para las distintas m y n , así como para los diferentes valores del campo magnético, β , y el flujo magnético, v , y podemos concluir que el principio de incertidumbre se cumple, como se observa a continuación.

Gráficas para $\Delta r \Delta p_r$.

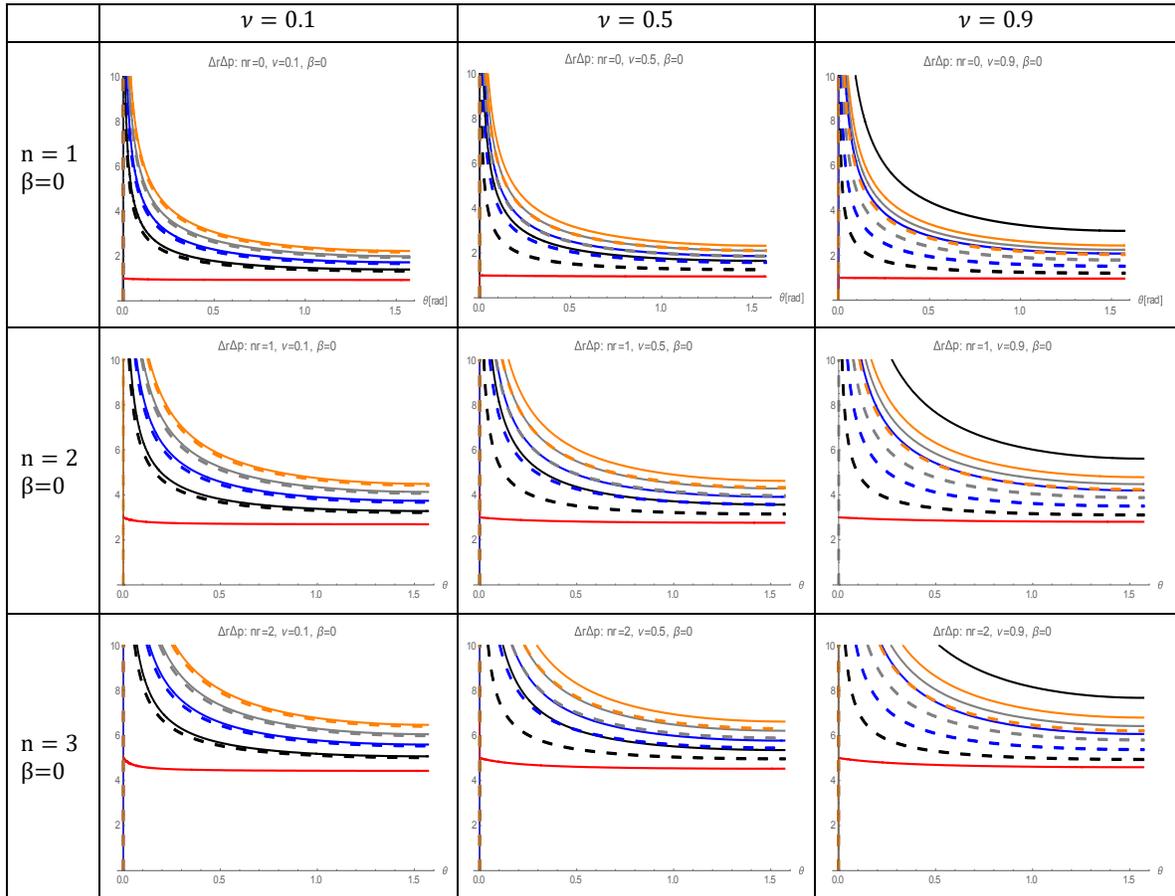


Figura 7.9 $\Delta r \Delta p_r$, para $n = 1, 2$ y 3 , como función de θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$, para $\beta = 0, \nu = 0.1, 0.5$ y 0.9 .

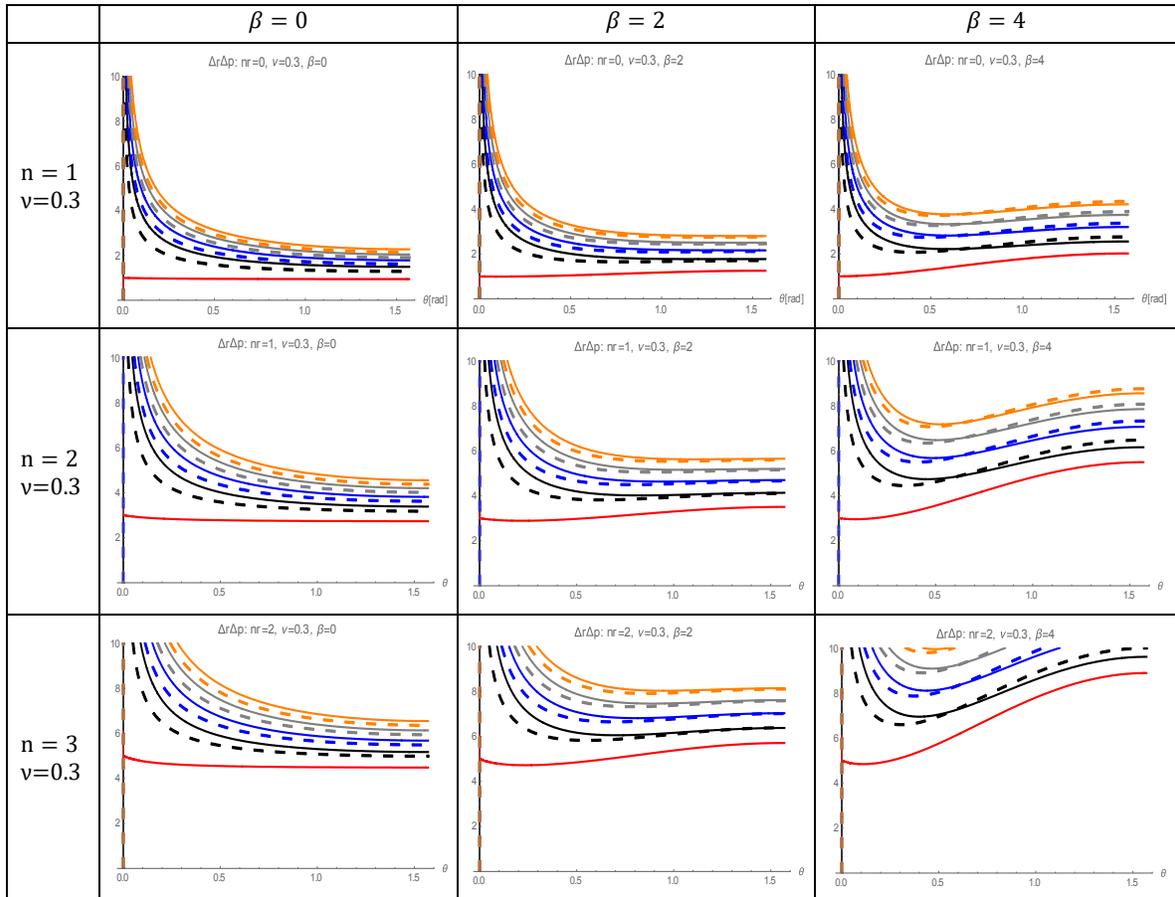


Figura 7.10 $\Delta r \Delta p_r$, para $n = 1, 2$ y 3 , como función de θ , en el intervalo de $[0, \pi/2]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$, para $v = 0.3$ y $\beta = 0, 2$ y 4 .

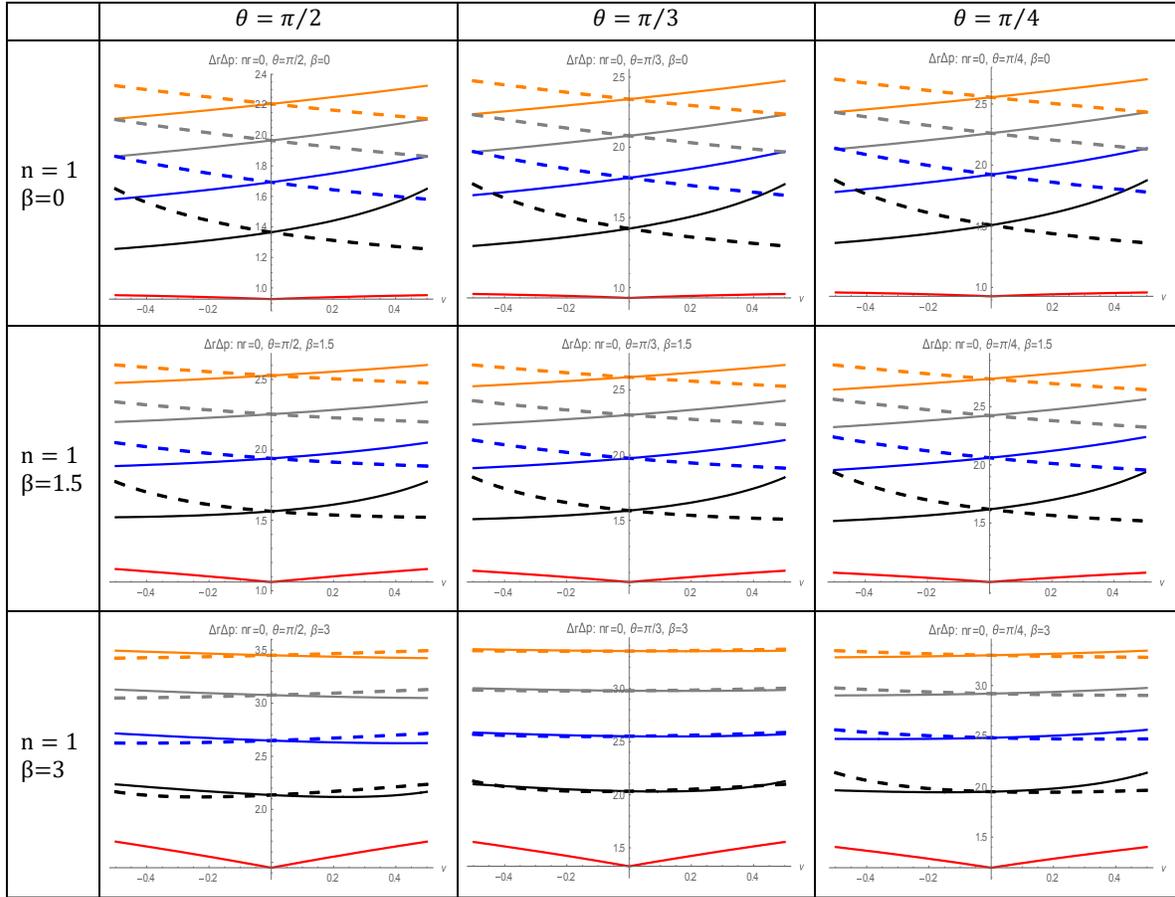


Figura 7.11 $\Delta r \Delta p_r$, para $n = 1$ como función de ν , en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, para $|m| = 0$ (rojo), 1 (negro), 2 (azul), 3 (gris) y 4 (naranja), curvas sólidas para $m < 0$ y punteadas para $m > 0$ para $\beta = 0, 1.5$ y 3, y conos cuya semi-apertura angular es $\theta = \pi/2, \pi/3, \pi/4$, respectivamente.

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos estudiado la dinámica cuántica de electrones confinados a moverse sobre la superficie de un cono circular recto, bajo la influencia de diferentes interacciones físicas que incluyen el confinamiento a una región finita del espacio, efectos de potenciales centrales armónicos y efectos magnéticos a través del cálculo exacto tanto de las funciones como de las energías propias de los diferentes sistemas que fueron estudiados resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Al estudiar el comportamiento radial, estudiamos además la función radial unidimensional que debe ser igual a cero en el origen. Además, surge el efecto de un potencial centrífugo que, sin duda, permite estudiar con mayor claridad cualitativa los efectos de cuantización por confinamiento pues introduce una barrera centrífuga debido a efectos de momento angular y de flujo de campo magnético.

En cada uno de los capítulos hemos estudiado las energías y las funciones de onda como función de los diferentes parámetros introducidos en los modelos particulares y presentando los resultados de manera gráfica y analítica para entender su significado físico.

Notamos además que cuando $\theta = \pi/2$, es decir, sobre el plano, se reduce a los casos ya estudiados que se encuentran en la literatura. También se comparan nuestros resultados con otros casos ya resueltos para los niveles de Landau y el efecto y el efecto Aharonov-Bohm.

Como trabajo a futuro, ya que en todos los casos se obtuvieron de forma analítica las funciones y energías propias para cada sistema, podemos obtener propiedades eléctricas y magnéticas del sistema de interés, como corrientes persistentes, magnetización y polarizabilidad [25].

Esto se logra al analizar las propiedades cuánticas más básicas, dentro del marco general de sistemas cuánticos confinados son ciertamente de gran utilidad a nivel de tecnología de punta y, sin duda para estudiar temas básicos de entropía cuántica de Shannon, efectos Aharonov-Bohm en problemas de dispersión y sistemas hidrogenoides sobre los cuales ya estamos trabajando [26].

Cabe enfatizar como comentario final que los puntos cuánticos son átomos artificiales que pueden diseñarse para tener propiedades eléctricas y magnéticas que no se encuentran en los elementos de la tabla periódica y que, por lo tanto, amplían nuestras perspectivas de estudio en muy diferentes niveles y aspectos.

Bibliografía

- [1] E.A. Johnson (2001), “*Electrons in Quantum Semiconductor Structures: An Introduction*”, In *Low-dimensional semiconductor structures: fundamental and device applications* (p. 56-76), Cambridge University Press.
- [2] David K. Ferry, Stephen M. Goodnick and Jonathan Bird, “*Transport in nanostructures*”, Cambridge University Press, New York, Second edition, 2009.
- [3] M. López López, M. A. Meléndez Lira, “*Pozos, Hilos y Puntos Cuánticos: Estructuras Semiconductoras de Baja Dimensión*”, *Avance y Perspectiva* vol. **16** (1997).
- [4] François M. Peeters. *Low Dimensional Semiconductor Structures*. Brazilian Journal of *Physics*, vol. 22, no. **3**, September 1992.
- [5] K. Kowalski and J. Rembielinski. *On the dynamics of a particle on a cone*. Phys. Scr., 22 Apr 2013.
- [6] L. D. Landau y E. Lifshitz, “*Mecánica Cuántica, Teoría no-relativista*”. Reverte, México (1976).
- [7] H.H Corzo, E. Castaño, H.G. Laguna and R.P. Sagar, “*Measuring localization-delocalization phenomena in a quantum corral*”, *J Math Chem*, (2013) 51:179–193.
- [8] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Capítulo 11, Elsevier Academic Press, Sixth Edition, (2005).
- [9] N. Aquino and E. Castaño. *La partícula dentro de una caja circular*. *Contactos*, 26:11–15, Diciembre 1998.
- [10] D. Kouznetsov, E. Ley-Koo and G. Villa-Torres, “*Aharonov-Bohm Effect on the bound states of an electron inside an annular cylindrical box*”, *Rev. Mex. Fís.* **45**(1999) 485.
- [11] A. Consortini and B. R. Frieden. *Quantum-mechanical solution for the simple harmonic oscillator in a box*. *IL Nuovo Cimento*, 35(2):153–164, Octubre 1976.
- [12] H E Montgomery Jr, G Campoy, and N Aquino. *The confined N-dimensional harmonic oscillator revisited*. Phys. Scr., 81, Marzo 2010.
- [13] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Capítulo 13, Elsevier Academic Press, Sixth Edition, (2005).

- [14] N.N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Capítulo 9, Prentice-Hall (1965).
- [15] Richard W. Robinnet, *Quantum Mechanics: classical results, modern systems, and visualized examples*, capítulo 15, Oxford University Press, Second edition (2006).
- [16] Walter Greiner. *Quantum Mechanics an Introduction*. Capítulo 9, Springer, Fourth Edition (2001).
- [17] C. Furtado, A. Rosas y S. Azevedo. *Landau quantization and curvature effects in a two-dimensional quantum dot*. EPL, **79** (2007) 57001.
- [18] N. Aquino, E. Castaño and E. Ley-Koo, “*The Aharonov-Bohm Effect on Quantum Antidot Landau States*”, Chinese Journal of Physics”, vol. **41**, no. **3**, June 2003.
- [19] L. D. Landau y E. Lifshitz, “*Mecánica Cuántica, Teoría no-relativista*”. Reverte, México (1976).
- [20] Diana Cruz-Garriz, José A. Chamizo y Andoni Garriz, “*Estructura atómica, un enfoque químico*”, Capítulo 6, Fondo educativo interamericano, México (1986).
- [21] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Capítulo 10, Elsevier Academic Press, Sixth Edition, (2005).
- [22] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik A*, **43**, 172 (1927).
- [23] E. H. Kennard, *Zeitschrift für Physik*, **44**, 326 (1927).
- [24] S.H. Patil and K.D. Sen, Uncertainty relations for modified isotropic harmonic oscillator and Coulomb potentials, *Phys. Lett. A*, **362**, 109-114 (2006).
- [25] N Aquino, E Castaño, G Campoy, and V Granados. *Einstein coefficients and dipole moments for the asymmetrically confined harmonic oscillator*. European Journal of Physics, 22:645–656, Octubre 2001.
- [26] L. M. Arvizu y E. Castaño, trabajo en progreso.

Otra bibliografía consultada

1. E. S. Moreira, Jr. *Aspects of classical and quantum motion on a flux cone*. Phys. Rev. Volume **58**, number **3**, September 1998.
2. E. S. Moreira, Jr., and E. S. Oliveira. *Specific heat of a particle on the cone*. PHYSICAL REVIEW A **73**, 052105 (2006).
3. G Campoy, N Aquino, and V D Granados. *Energy eigenvalues and Einstein coefficients for the one-dimensional confined harmonic oscillator*. J. Phys. A: Math. Gen., 35:4903–4914, Mayo 2002.
4. H E Montgomery Jr, G Campoy, and N Aquino. *The confined N-dimensional harmonic oscillator revisited*. Phys. Scr., 81, Marzo 2010.
5. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products, Elsevier, Amsterdam, 2007.
6. James B. Seaborn. Hypergeometric Functions and Their Applications. Capítulo 3, Springer, New York, (1991).
7. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), “Handbook of Mathematical Functions”. Dover, New York, 1965.
8. R. M. Cavalcanti. *Comment on “Quantum mechanics of an electron in a homogeneous magnetic field and a singular magnetic flux tube”*. Phys. Rev, (September 7, 2007).
9. Richard Vawter. *Effects of finite boundaries on a one-dimensional harmonic oscillator*. Physical Review, 174(3):749–757, Octubre 1968.
10. Walter Greiner. *Quantum Mechanics an Introduction* Springer, Fourth Edition (2001).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00111

Matrícula: 2172801617

Teoría Cuántica de un electrón confinado a la superficie de un cono circular recto. Efectos de confinamiento y de campos magnéticos



Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 16:00 horas del día 30 del mes de marzo del año 2022 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. EUGENIO LEY-KOO
DR. ROBIN PREENJA SAGAR
DR. ELEUTERIO CASTAÑO TOSTADO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: LUIS MANUEL ARVIZU CORNEJO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Luis Manuel Arvizu C.
LUIS MANUEL ARVIZU CORNEJO
ALUMNO

APROBAR

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. EUGENIO LEY-KOO

VOCAL

DR. ROBIN PREENJA SAGAR

SECRETARIO

DR. ELEUTERIO CASTAÑO TOSTADO

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella