

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**SOBRE EL FLUJO DE CALOR
EN EL TENSOR ENERGÍA MOMENTO
DE UN FLUIDO RELATIVISTA**

Tesis que presenta:

Ing. Fís. Martín Romero Muñoz

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

Asesores: **Dr. Leonardo Dagdug Lima (UAM-I)**
Dr. Guillermo Chacón Acosta (UAM-C)



Jurado Calificador:

Presidente:	M. en C. Ignacio Campos Flores	UNAM
Secretario:	Dr. Guillermo Chacón Acosta	UAM-C
Vocal:	Dr. Abel Camacho Quintana	UAM-I

México, D. F. Junio de 2014

Agradecimientos

Antes que nada quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis asesores y guías de ésta tesis el Dr. Leonardo Dagdug Lima y el Dr. Guillermo Chacón Acosta, por haberme brindado la oportunidad de trabajar con ellos, por haber tenido la paciencia necesaria para ayudarme, por transmitirme su conocimiento y por ser demasiado accesibles en todo momento.

También deseo agradecer a los sinodales encargados de revisar y corregir este trabajo, Dr. Abel Camacho Quintana, Dr. Guillermo Chacón Acosta y al M. en C. Ignacio Campos Flores.

A CONACYT por la beca 267825 que me proporcionaron, porque gracias a ello, fue posible mi estancia en este proyecto de investigación.

A mis padres Rosa María Muñoz Vargas (Mi Rosita) y Martín Romero Tenorio (Mi gordito) y hermanos Laura Belén Romero Muñoz y Erick Gabriel Romero Muñoz (El panson), a quienes agradezco su amor, cariño y comprensión. Un agradecimiento en especial a mi madre por que ella me motivaba a seguir en los momentos mas difíciles.

Agradezco a Jazmín Mendoza Rivero, siempre estuvo presente dándome aliento y esperanza para poder continuar.

Agradezco a mis amigos los Masio: Daniel, Gaston, Jairo, Juan Carlos, Julio, Victor y Yoshua y a mis amigas Evelyn y Dalia. Porque gracias a la convivencia con ellos la estancia en la UAM-I fue muy agradable. A Ivan y Toñita muy buenas personas.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00031

Matrícula: 2121800693

SOBRE EL FLUJO DE CALOR EN
EL TENSOR ENERGIA-MOMENTO DE
UN FLUIDO RELATIVISTA

En México, D.F., se presentaron a las 14:00 horas del día 17 del mes de junio del año 2014 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. IGNACIO CAMPOS FLORES
DR. ABEL CAMACHO QUINTANA
DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: MARTIN ROMERO MUÑOZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



MARTIN ROMERO MUÑOZ
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. IGNACIO CAMPOS FLORES

VOCAL

DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

SECRETARIO

DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA

Índice general

1. Introducción	7
2. Elementos de Relatividad Especial	13
2.1. Postulados de la Relatividad especial	13
2.2. Notación Matemática	14
2.3. Transformaciones de Lorentz	17
2.4. Efectos relativistas	24
2.5. 4-vectores	25
2.5.1. 4-velocidad	25
2.5.2. 4-aceleración	26
2.5.3. 4-momento	26
3. Fluidos en Relatividad	29
3.1. Descripción macroscópica	30
3.1.1. El 4-flujo a través de una superficie	32
3.1.2. El flujo de partículas N	32
3.1.3. El tensor energía-momento para polvo	34
3.1.4. Fluidos en general.	36
3.1.5. Fluidos perfectos	44
3.2. Descripción Microscópica	50
3.2.1. Mecánica Estadística del gas ideal relativista	50
3.3. Teoría cinética relativista.	60
3.3.1. Momentos estadísticos de la distribución relativista	61
3.3.2. El proyector $\Delta_{\alpha\beta}$	62
3.3.3. La termodinámica de fluidos perfectos.	64
3.3.4. Descomposición de Eckart	68
3.3.5. Termodinámica de un fluido simple.	73
3.3.6. Descomposición de Landau-Lifshitz	77

4. Condiciones para la anulación de \vec{q}	81
4.1. El flujo de calor en la teoría cinética no relativista.	82
4.2. flujo de energía convectivo inducido	83
4.3. condiciones de anulación del flujo de energía	85
4.4. Flujo de calor bajo transformación de Lorentz	92
4.5. Flujo de energía convectivo 2D	97
4.6. Condiciones de flujo de energía nulo 2D	100
4.7. Condiciones de energía	106
4.7.1. Condición débil de energía.	106
4.7.2. Condición nula de energía.	107
4.7.3. Condición nula de energía para el flujo de calor en di- rección x	107
4.8. Condición nula de energía en 2-D	108
4.9. La producción de entropía	110
4.10. Enfoque Eckart y Landau-Lifshitz	114
4.10.1. Esquema de Eckart	114
4.10.2. Esquema de Landau-Lifshitz	115
4.10.3. Comparación de ambos enfoques	116
5. Conclusiones y Perspectivas	119
A. Ecuaciones de campo	123
Bibliografía	125

Capítulo 1

Introducción

En muchas situaciones interesantes los fluidos relativistas son utilizados para describir sistemas astrofísicos como la presencia de vorticidad en estrellas de neutrones, [1] donde se producen efectos relevantes que están acoplados a efectos disipativos como conducción de calor, esfuerzos cortantes, viscosidad y otros. En astronomía se encuentra el jet relativista, fluido de alta velocidad muy colimado que se genera como consecuencia del material acretaado en torno a agujeros negros supermasivos, también es llamado chorro relativista, que es un término para referirse a chorros de materia que generalmente están asociados a discos de acreción, es decir una estructura en forma de disco alrededor de un objeto central masivo. El disco aumenta el cuerpo central siendo atraído por éste y contribuyendo a su aumento de masa [2]. También están los gases primordialmente en modelos cosmológicos, por ejemplo en experimentos que involucran colisiones entre núcleos pesados a altas velocidades como el RHIC (Colisionador de Iones Pesados Relativistas) o LHC (El Gran Colisionador de Hadrones) en el CERN a tiempos cortos se obtienen un gas de nucleones que corresponde a una aproximación de un gas ideal de partículas. En Relatividad General la fuente del campo gravitacional se puede modelar en general por fluidos relativistas con características diversas [3, 4]. Por lo anterior la descripción teórica es necesaria.

Por parte de la termodinámica relativista, este concepto que ha sido muy utilizado en el pasado [5], pero no parece haberse desarrollado hasta alcanzar una teoría consistente y aceptable por todos los físicos. Una de las posibles razones de esta falta de concreción puede ser su aparente falta de aplicaciones [6]. Tampoco faltan los autores que consideran, directamente, que no

es posible construir una termodinámica relativista; así es para Ter Haar y Wergeland [7]. J. Güémez [8] discute la necesidad conceptual de construir una termodinámica relativista Lorentziana, como generalización, aplicando la teoría especial de la relatividad de Einstein, de una termodinámica Galileana, y discute sobre las posibles bases con las que se podrían construir 4-vectores de energía interna, trabajo y calor.

Por parte del calor, J Güémez comenta que es tan extraño que algunos autores han propuesto eliminar el concepto de calor del desarrollo de la termodinámica [9]. Desde el punto de vista de la Teoría Especial de la Relatividad, y tal y como lo expresa Rindler ¹ [10] “Cualquier transferencia de energía, es equivalente a una transferencia de masa, implicará necesariamente momento. Así, por ejemplo, todas las formas de radiación deben ejercer presión, un hecho sorprendente es ilustrado por la desviación de la cola de un cometa por la radiación del sol ”.

Esta exigencia relativista de asociar momento a todas las formas de energía, o de intercambio de energía, implica claramente la necesidad de una caracterización mecánica del calor, asociándole momento. Por tanto debe desarrollarse algún método para asignar momento al calor. Puesto que el calor es una forma de que se transmita la energía y que en Termodinámica Clásica no lleva asociado momento, en Relatividad debe existir un marco de referencia privilegiado en el que la energía emitida en forma de calor tenga momento cero (teniendo momento distinto de cero en otros marcos de referencia). Para esto, se debe hacer la hipótesis de que debe existir un sistema de referencia privilegiado en el que el calor intercambiado por el sistema con su entorno lo sea de tal manera que el momento (relativista) sea nulo [8].

Otra opinión es dada por D. Mi y Hai Yang Zhong [11], en la que discuten las razones que existen para diferentes transformaciones relativistas de la temperatura. Una de las cosas que se preguntan referente al calor es ¿cómo se define la transferencia de calor en un marco en movimiento? D. Mi y Hai Yang Zhong comentan que diferentes autores tienen opiniones diferentes sobre esta cuestión, entre ellos Einstein [12], Landsberg [13] y Ott [14]. Ellos

¹“Any transfer of energy, being equivalent to a transfer of mass, will necessarily involve momentum. Thus, for example, all forms of radiation must exert pressure, a fact strikingly illustrated by the deflection of the tail of a comet by the sun’s radiation.”

concluyen que a partir de la teoría de la termodinámica no se está seguro de la existencia de una transformación relativista universal para la temperatura y el calor. Pero, si existiera una transformación relativista para estas dos cantidades entonces se deben transformar de acuerdo con la misma ecuación bajo la transformación de Lorentz.

El flujo de calor y sus ecuaciones constitutivas en sistemas relativistas han sido el objeto de interpretaciones y discusiones diversas. En el formalismo de Eckart [15] la ecuación constitutiva del flujo de calor contiene un término de aceleración que parece ser la fuente de importantes inestabilidades en las fluctuaciones alrededor del equilibrio [16, 17], lo que implica, entre otras cosas, que el agua a temperatura ambiente se vuelve inestable [18], además de la no existencia del espectro de Rayleigh- Brillouin [19] y la desaparición de la inestabilidad de Jeans responsable de la formación de estructura [20, 21].

Recientemente han aparecido propuestas alternativas a las ecuaciones constitutivas del flujo de calor que intentan solucionar el problema del término de aceleración que contiene la ecuación constitutiva del flujo de calor en el formalismo de Eckart [15]. Una opción proviene de la teoría cinética relativista [22, 16, 17] donde naturalmente aparece un gradiente de presión en el lugar del término de aceleración; se ha visto que esto hace estable a la teoría [16, 17]. También existen las teorías de primer orden [23] y segundo orden [24] para entender este término de aceleración. Otra opción es la extensión relativista del formalismo de Meixner-Prigogine [25] que no contiene este tipo de términos debido a que el flujo de calor no está incluido en el tensor energía-momento [25]. En este esquema de Meixner-Prigogine, el calor y las correspondientes ecuaciones de transporte son propuestas usando dos suposiciones fundamentales: que se cumplen las leyes de conservación y la hipótesis termodinámica de equilibrio local. Se introduce [25] un 4-vector de flujo de calor de manera análoga al caso no-relativista del esquema de Meixner-Prigogine de la termodinámica irreversible lineal, en lugar de introducir el flujo de calor en el tensor energía-momento, es decir, se extrapola el mismo esquema pero con el lenguaje de la relatividad general. En [25], aseguran que la única razón para que el flujo de calor esté en el esquema del tensor de energía-momento, es para cumplir la conservación de la energía y que también tiene propiedades de momento lineal y de inercia, lo cual no coincide necesariamente con el concepto de calor, el cual es una forma de energía no mecánica. Por los anteriores argumentos, realizan una separación

entre flujos de energía mecánica y no mecánica. Además encuentran que la producción de entropía y la energía interna local tienen la misma estructura que los encontrados en el caso no relativista; muestran que su análisis es consistente con las leyes de la termodinámica y la causalidad en relatividad especial [26]. Con respecto a el flujo de calor, incluirlo en el tensor energía-momento tiene sus limitaciones, conduciéndolos a una crítica al formalismo tradicional. En la parte del formalismo fenomenológico se analiza el flujo de calor al orden correspondiente a Navier-Stokes [27].

Por otra parte hacen un análisis a la ecuación de flujo de calor, basado en el formalismo de la teoría cinética, donde ocupan el método de Chapman y Enskog relativista, llegando a una nueva expresión basada en esta teoría. Al compararla con el formalismo fenomenológico, observan que la compatibilidad de éstos depende de la asociación de un término de gradiente de presión con la aceleración hidrodinámica [28].

Sin embargo el flujo de calor en un fluido relativista, por sus propiedades de transformación, es una cantidad que forma parte del tensor de energía-momento [4]. Desde el punto de vista de la teoría cinética relativista el tensor de energía momento puede entenderse como el flujo de 4-momento, es decir, promedios de contribuciones mecánicas a la energía [22]. Sin embargo, dado que el calor en termodinámica es entendido como una forma de energía no mecánica, entonces aquí surge la pregunta, planteada por García-Colín y Sandoval-Villabazo [26], de su adecuada introducción en $T^{\mu\nu}$.

Todo esto nos conduce a una motivación para llevar a cabo una revisión de la metodología empleada en la construcción del flujo de calor en la parte relativista.

Como veremos en el capítulo 4, en el caso de dos marcos inerciales conectados por una transformación de Lorentz en dirección x y el flujo de calor en la misma dirección, encontramos que existe un flujo de energía que consiste en dos contribuciones: un flujo convectivo más un flujo no convectivo. Al existir estas dos contribuciones, podríamos considerar el caso en que en un marco el fluido tuviera flujo de calor y en el otro no; esto querría decir que a través de una transformación entre sistemas de referencia, podríamos convertir un tipo de energía no mecánica en energía puramente mecánica sin ningún otro efecto. Esto violaría, en principio, el resultado expresado en la

segunda ley de la termodinámica.

En este trabajo nos dimos a la tarea de encontrar qué condición es la adecuada para que se pueda convertir flujo de energía no mecánico en flujo de energía puramente mecánico, así como que resultados nos puede dar en la producción de entropía.

La estructura de la tesis es la siguiente:

En el capítulo 2 se revisan los conceptos más importantes de relatividad especial (RE) que se utilizaron para la realización de este trabajo, como los postulados, transformaciones de Lorentz, 4-vectores etc. En el capítulo 3 se estudia el fluido relativista desde tres perspectivas; la primera es la descripción macroscópica en la cual se estudian las definiciones para un conjunto de partículas en un volumen infinitesimal moviéndose a una velocidad \vec{v} respecto de otro marco. La segunda es la descripción microscópica donde se estudia una gas relativista utilizando herramientas de mecánica estadística. En la tercera se estudia el formalismo de teoría cinética basado en la descripción de cantidades macroscópicas con promedios de cantidades microscópicas. También se estudia el proyector, la descomposición de Eckart y la descomposición de Landau- Lifshitz.

En el capítulo 4 se realiza el cálculo del flujo de calor en un marco móvil, esto es, el comportamiento del flujo de calor bajo transformaciones de Lorentz, encontrando que este se divide en dos partes, una convectiva y otra no convectiva. También se encuentra una condición para que en un marco el flujo de calor transformado se anule y que la transformación involucrada sea realmente de Lorentz. Para que la densidad de energía sea no negativa y tenga sentido físico, se calcula la condición nula de energía obteniendo como resultado una similitud con nuestra condición obtenida previamente. Finalmente se calcula la producción de entropía introduciendo nuestra condición en ésta, para ver el efecto de las condiciones encontradas para el gas sobre la segunda ley de la termodinámica. Y con nuestra condición es posible encontrar más sistemas de referencia además que la de Landau-Lifshitz para que el flujo de calor en un fluido se anule. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

La notación utilizada en esta tesis es descrita en la sección 2.2.

Capítulo 2

Elementos de Relatividad Especial

En este capítulo se resumen los resultados más importantes de la teoría de relatividad especial (RE), comenzando con los postulados y algunas consecuencias, como la dilatación temporal y la contracción de longitud. Posteriormente revisamos las transformaciones de Lorentz y finalizamos introduciendo la notación de 4-vectores.

2.1. Postulados de la Relatividad especial

La RE es una teoría que se publicó [29] en 1905 por Albert Einstein, que se basa en la invariancia de la velocidad de la luz y tiene dos principales postulados.

Primer postulado

Las leyes generales de la física tienen la misma forma en todo sistema coordenado inercial.

Segundo postulado

La rapidez de la luz en el vacío es la misma sin importar el estado de movimiento del observador en cuestión.

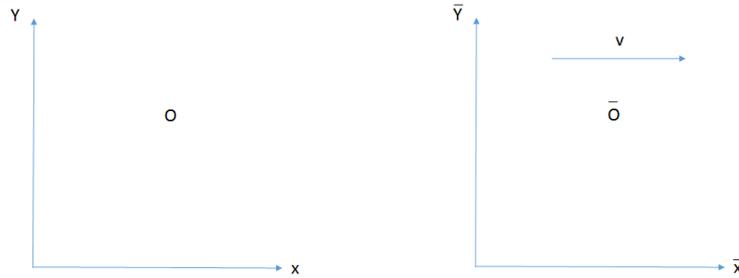


Figura 2.1: \bar{O} se mueve respecto de O con velocidad v

Para ver el efecto de estos postulados en la física de partículas, consideremos dos sistemas coordenados O y \bar{O} (ver figura 2.1), donde \bar{O} se mueve con velocidad constante respecto a O . En $t = 0$, los orígenes de O y \bar{O} coinciden. Si en un instante dado, un observador montado en \bar{O} lanza un haz luminoso en la dirección x , de acuerdo con Galileo y Newton la rapidez del haz respecto de O debe ser

$$c = \bar{c} + v.$$

Sin embargo si seguimos el segundo postulado $c = \bar{c}$, $c = \bar{c} + v = \bar{c}$. Esto implicaría que $v = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que \bar{O} se mueve respecto a O . En principio las transformaciones de la mecánica de Newton no son útiles cuando las velocidades de las partículas son cercanas a la de la luz; debemos entonces encontrar las transformaciones adecuadas.

2.2. Notación Matemática

En esta sección daremos a conocer la notación utilizada. Empezaremos por la definición de vectores, después pasaremos a las uno-formas, algunas de sus propiedades y finalizaremos con tensores.

Antes de empezar a definir los vectores, será de utilidad la convención de suma Einstein que es una manera de escribir sumas, cuando el mismo índice

aparece dos veces en una expresión, una vez arriba y una vez abajo; es decir una suma está implícita. Como un ejemplo específico,

$$\sum_{i=1}^3 A_i B^i \rightarrow A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$$

Un 3-vector lo definiremos como:

$$\vec{A} = A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3. \quad (2.1)$$

Un 4-vector como

$$\mathbf{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^0 \vec{e}_0 + A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3, \quad (2.2)$$

donde en (2.1) y (2.2), \vec{e}_a , $a = 0, 1, 2, 3$ es la base de los vectores.

El conjunto de uno-formas \tilde{p} definen un espacio vectorial y tiene una base \tilde{w} , es decir,

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{w}^\alpha = p_0 \tilde{w}^0 + p_1 \tilde{w}^1 + p_2 \tilde{w}^2 + p_3 \tilde{w}^3. \quad (2.3)$$

Ahora vamos a obtener una relación entre vectores base y uno-formas base. Tenemos que las componentes de \tilde{p} en algún sistema de referencia son

$$p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \quad (2.4)$$

y de un vector

$$\mathbf{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.5)$$

entonces

$$\tilde{p}(\mathbf{A}) = \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha p_\alpha. \quad (2.6)$$

Ahora usando la definición de uno-forma

$$\tilde{p}(\mathbf{A}) = p_\alpha \tilde{w}^\alpha (A^\beta \vec{e}_\beta) = p_\alpha A^\beta \tilde{w}^\alpha \vec{e}_\beta. \quad (2.7)$$

Observando (2.6), nos conduce a que

$$\tilde{w}^\alpha \vec{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad (2.8)$$

que es la delta de Kronecker.

Ahora sea O un marco inercial y sus vectores base \vec{e}_α . Se define la métrica

$$g_{\alpha\beta} \equiv \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta, \quad (2.9)$$

que matricialmente tiene la forma

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Si $\mathbf{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha$ y $\mathbf{B} = B^\beta \vec{e}_\beta$, tenemos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta. \quad (2.11)$$

$g_{\alpha\beta}$ es un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, es simétrico, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, y es definido como

$$\mathbb{G}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \equiv g_{\alpha\beta} \equiv \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\alpha = g_{\beta\alpha}. \quad (2.12)$$

Su inverso es $g^{\alpha\beta}$ y es un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tomemos un tensor \mathbb{F} tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; por definición (ver lo que se hizo en (2.3))

$$f_{\alpha\beta} \equiv \mathbb{F}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \Rightarrow f_{\nu\mu} \tilde{w}^{\nu\mu} = \mathbb{F}, \quad (2.13)$$

donde $\tilde{w}^{\nu\mu}$ es la base de \mathbb{F} . Entonces

$$\mathbb{F}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = f_{\mu\nu} [\tilde{w}^{\mu\nu}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)] = f_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \quad (2.14)$$

y en consecuencia

$$\tilde{w}^{\mu\nu}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \quad (2.15)$$

Por lo tanto $\tilde{w}^{\mu\nu}$ es un tensor que es igual al producto de los valores de una base de 2-formas y la conclusión es que

$$\tilde{w}^{\mu\nu} = \tilde{w}^\mu \otimes \tilde{w}^\nu \quad (2.16)$$

donde \otimes es el producto exterior [33],

$$\therefore \mathbb{F} = f_{\mu\nu} \tilde{w}^\mu \otimes \tilde{w}^\nu. \quad (2.17)$$

Es decir, la base de 1-formas involucra la base para las transformaciones bilineales tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donde $\tilde{d}x^\nu = \tilde{w}^\nu$. Por otra parte

$$\mathbb{F} = f_{\mu\nu} \tilde{d}x^\mu \tilde{d}x^\nu, \quad (2.18)$$

y para tensores tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\mathbb{F} = f^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta. \quad (2.19)$$

2.3. Transformaciones de Lorentz

Una transformación de Lorentz es una transformación de coordenadas que conecta dos marcos inerciales. Por ejemplo, un marco \bar{O} que se mueve respecto a un marco O (ver Figura 2.1). Si queremos describir un suceso que ocurre en cierto tiempo y en cierto momento, debemos especificar no sólo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta coordenada, el tiempo en que ocurrió el suceso. En el espacio de tres dimensiones es posible definir

la distancia entre dos puntos. En coordenadas cartesianas, por ejemplo, la distancia entre los puntos A_1 y A_2 con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , según el teorema de Pitágoras es:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.20)$$

Si ahora se considera la unión del espacio tridimensional y del tiempo ¿Se podrá definir la distancia entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2) ? Siguiendo la analogía del teorema de Pitagóricas uno estaría tentado a definirla como

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (ct_2 - ct_1)^2}; \quad (2.21)$$

pero ¿es la distancia así definida invariante? Y si lo es, ¿Bajo que transformaciones?.

Consideremos un sistema inercial O en el cual sucede lo siguiente: del punto (x_1, y_1, z_1) se emite en el tiempo t_1 una señal luminosa que llega al punto (x_2, y_2, z_2) en el tiempo t_2 . La velocidad de la señal luminosa es

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1}, \quad (2.22)$$

de donde

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2.23)$$

Considerando ahora el mismo suceso visto desde otro sistema inercial \bar{O} la señal luminosa es emitida del punto $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ en el tiempo \bar{t}_1 y recibida en el punto $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ en el tiempo \bar{t}_2 . Usando el segundo postulado, esto es que la velocidad de la luz es invariante, tenemos que

$$c = \frac{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}; \quad (2.24)$$

entonces,

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 - c^2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)^2 = 0. \quad (2.25)$$

Si se define la seudodistancia (al cuadrado) entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2) como

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (2.26)$$

si $s_{12}^2 = 0$ en O también es $\bar{s}_{12}^2 = 0$ en \bar{O} y por lo tanto

$$\bar{s}_{12}^2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 - c^2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)^2. \quad (2.27)$$

Es así como la seudodistancia entre dos sucesos puede considerarse invariante si su valor es cero. Ahora si la separación entre dos sucesos considerados es infinitesimal, la seudodistancia entre ellos es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (2.28)$$

Para formalizar lo discutido antes introduciremos las llamadas coordenadas de Minkowski definidas como

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.29)$$

Por la convención de suma de Einstein, podemos escribir (2.28) como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.30)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico en el espacio de 4 dimensiones caracterizado por el elemento ds . Este espacio es llamado el espacio de Minkowski y el tensor métrico es

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Es claro que esta matriz es su propio inverso, escribiéndola como

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

y

$$\eta_{\alpha\delta}\eta^{\delta\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad (2.33)$$

donde δ_{α}^{β} es la delta de Kronecker definida como $\delta_{\alpha}^{\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ y $\delta_{\alpha}^{\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ con $\delta_{\alpha}^{\alpha} = 4$.

Ahora nos damos a la tarea de determinar la ley de transformación entre dos sistemas inerciales \bar{x}^{α} y x^{β} que deja invariante el intervalo $d\bar{s}^2 = ds^2$. En primer lugar se descartará la solución trivial que es por traslación $\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + c^{\alpha}$, donde c^{α} son 4 constantes arbitrarias. Esta transformación puede ser usada para transformar cualquier punto en el espacio de Minkowski desde un origen. Por lo tanto si estamos en el origen podemos usar la propiedad del espacio-tiempo de la admisión de líneas rectas para ver que la invariancia de $\eta_{\gamma\delta}dx^{\gamma}dx^{\delta}$ es equivalente a la invariancia de $\eta_{\gamma\delta}x^{\gamma}x^{\delta}$ (cada desplazamiento infinitesimal puede ser sustituido por una línea recta finita que tiene la misma dirección). Para que se deje invariante la pseudodistancia, la transformación más general debe ser lineal y homogénea. Siendo Λ_{β}^{α} la matriz de transformación entre dos sistemas inerciales, la transformación de coordenadas de uno a otro marco como

$$\bar{x}^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha}x^{\beta} \quad (2.34)$$

A partir de la ecuación (2.34) se deduce que

$$d\bar{s}^2 = \eta_{\alpha\beta}d\bar{x}^{\alpha}d\bar{x}^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma}^{\alpha}\Lambda_{\delta}^{\beta}dx^{\gamma}dx^{\delta} = ds^2 = \eta_{\gamma\delta}dx^{\gamma}dx^{\delta}; \quad (2.35)$$

de lo anterior se obtiene

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta}. \quad (2.36)$$

Si el sistema inercial \bar{O} se mueve a velocidad constante en dirección x respecto de O (ver figura 2.1) tenemos que $x^2 = \bar{x}^2$, $x^3 = \bar{x}^3$, entonces la matriz de transformación se puede escribir como

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

ó

$$(\eta) = (\Lambda)^T (\eta) (\Lambda), \quad (2.38)$$

donde los paréntesis indican la forma matricial para (2.38). Si sustituimos (2.37) en (2.38), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para las componentes de la transformación,

$$(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_1^0)^2 = 1 \quad (2.39)$$

$$(\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_1^1)^2 = -1 \quad (2.40)$$

$$\Lambda_0^0 \Lambda_1^0 - \Lambda_0^1 \Lambda_1^1 = 0. \quad (2.41)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones podemos hacer el siguiente cambio de variable, $\Lambda_0^1 = -\sinh \phi$, $\Lambda_1^1 = -\sinh \psi$ y sin pérdida de generalidad obtenemos de (2.39) y (2.40),

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sinh^2 \psi = \cosh^2 \psi \quad (2.42)$$

$$(\Lambda_1^1)^2 = 1 + \sinh^2 \phi = \cosh^2 \phi. \quad (2.43)$$

Sustituyendo las anteriores ecuaciones en (2.41), tenemos que

$$-\cosh \psi \sinh \phi + \sinh \psi \cosh \phi = 0,$$

que implica que

$$\tanh \psi = \tanh \phi. \quad (2.44)$$

Se concluye de (2.44) que $\phi = \psi$ y la matriz de transformación (2.37) puede ser escrita como

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Para la determinación de ψ analizamos el movimiento del sistema \bar{O} . En este caso tenemos que $\bar{x} = 0$, $x^0 = ct$, $x^1 = vt$ y de (2.34)

$$\bar{x}^1 = 0 = \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 = -ct \sinh \psi + vt \cosh \psi. \quad (2.46)$$

De (2.46) tenemos que

$$-ct \sinh \psi + vt \cosh \psi = 0,$$

es decir,

$$\tanh \psi = \frac{v}{c}. \quad (2.47)$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \cosh \psi &= \frac{\cosh \psi}{\sqrt{1}} = \frac{\cosh \psi}{\sqrt{\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cosh^2 \psi} (\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi)}} \\ \cosh \psi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \psi}}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

y

$$\tanh \psi \cosh \psi = \sinh \psi. \quad (2.49)$$

Con el uso de las anteriores expresiones (2.45) tiene la siguiente forma

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Las transformaciones de Lorentz entre los sistemas O y \bar{O} son, de (2.36) y (2.50), por lo tanto

$$x^1 = \frac{\bar{x}^1 - v\bar{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3, \quad t = \frac{\bar{t} - \bar{x}^1 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.51)$$

o

$$\bar{x}^1 = \gamma(\bar{x}^1 - v\bar{t}), \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^3 = \bar{x}^3, \quad t = \gamma(\bar{t} - \bar{x}^1), \quad (2.52)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ es llamado factor de contracción de Lorentz.

Para un marco general moviéndose en dirección arbitraria, la matriz de transformación de Lorentz tiene la forma

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_x^2 + 1 & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_x\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_x\beta_z \\ \gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_x\beta_y & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_y^2 + 1 & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_y\beta_z \\ \gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_z\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_z\beta_y & \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}\beta_z^2 + 1 \end{bmatrix}$$

donde $\beta_i = \frac{v_i}{c}$, $i = x, y, z$.

2.4. Efectos relativistas: Dilatación temporal y Contracción de la longitud

En RE aparecen efectos que en la física de Newton no tenemos. Por ejemplo, consideremos que en el instante en que los orígenes de O y \bar{O} (ver figura 2.1) coinciden se lanza un haz luminoso. Tenemos dos relojes uno para O y otro para \bar{O} . Al moverse \bar{O} con una velocidad v con respecto al marco O observamos que los relojes corren diferente.

La fórmula para calcular la dilatación temporal [4] es

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \bar{t} \Rightarrow t = \gamma \bar{t}; \quad (2.53)$$

ya que $1 \leq \gamma < \infty$ y como $t > \bar{t}$, de ahí se dice que el reloj de \bar{O} corre más lento que el de O . El tiempo no es absoluto, depende del observador.

Si consideramos el mismo sistema que exhibe dilatación temporal, pero ahora en lugar de lanzar un haz de luz, tenemos una barra de longitud \bar{l} paralela al eje \bar{x} en el marco \bar{O} que se mueve con respecto a el marco O con una velocidad v , entonces se observa que al medir simultáneamente los extremos de la barra desde el marco O , la longitud es distinta en relación a la medida en \bar{O} .

La fórmula para calcular la contracción de la longitud [4] es

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} l; \quad (2.54)$$

utilizando el factor γ se obtiene

$$\bar{l} = \gamma l \Rightarrow l = \frac{\bar{l}}{\gamma} \Rightarrow \bar{l} > l \quad (2.55)$$

Por lo tanto en el sistema O la barra se vera más pequeña en comparación con el marco \bar{O} .

2.5. 4-vectores

En la relatividad especial trabajamos con una entidad unificada llamada espacio-tiempo, esto es, si queremos describir un suceso que ocurre en cierto lugar y en cierto momento, debemos especificar no solo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta coordenada, el tiempo en que ocurrió el suceso. Como resultado un vector en este espacio-tiempo, va a tener una componente adicional asociada a la coordenada temporal, además de las componentes espaciales. Sea w un elemento con 4 componentes. Se dice que w es un 4-vector si y sólo si sus componentes bajo la acción de una transformación de Lorentz se modifican igual que las componentes de las coordenadas $\mathbf{x} = x^0, x^1, x^2, x^3$ (los 4-vectores también aparecerán con índices griegos x^μ , donde la componente temporal corresponde $\mu = 0$ y las tres componentes espaciales son las componentes $\mu = 1, 2, 3$); es decir,

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y \text{ y } x^3 = z.$$

Hay 4-vectores que son importantes en relatividad especial que a continuación se mencionan.

2.5.1. 4-velocidad

Se define la 4-velocidad como

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right),$$

donde τ es el tiempo propio, que es el tiempo que mide un reloj en reposo respecto a un observador inercial y se calcula como $ds^2 = -d\tau^2$ y \mathbf{U} es un 4-vector tangente a la línea de mundo, que es la curva que dicha partícula describe en el espacio-tiempo.

En un marco inercial en el cual la partícula está en reposo las componentes espaciales de la velocidad son cero, pero la 4-velocidad no

$$\mathbf{U}_O = (c, 0, 0, 0).$$

2.5.2. 4-aceleración

Tenemos que la 4-velocidad es $\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$, por lo que la 4-aceleración puede ser escrita como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2}. \quad (2.56)$$

Tenemos que

$$\frac{d(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})}{d\tau} = 2\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \quad (2.57)$$

y utilizando que en el marco comóvil $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -c^2$, concluimos que

$$\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 0. \quad (2.58)$$

Esto nos lleva a que

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \rightarrow (0, a_x, a_y, a_z) \quad (2.59)$$

también se puede escribir como

$$\mathbf{a} = U_{i,\beta} U^\beta, \quad (2.60)$$

con $i = 1, 2, 3$.

2.5.3. 4-momento

Sea \mathbf{U} la 4-velocidad de una partícula; su 4-momento se define como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{U}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula. Hay que notar que en un marco en reposo

$$\mathbf{U} = (c, 0, 0, 0) \quad (2.61)$$

y

$$\mathbf{p} = (mc, 0, 0, 0). \quad (2.62)$$

Bajo una transformación de Lorentz en dirección x

$$\mathbf{p} = (mc^2\gamma, -\gamma\beta m, 0, 0) \quad (2.63)$$

$$\bar{p}^0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \quad (2.64)$$

En la ecuación (2.64) se desarrolla una serie binomial tomando factores sólo de segundo orden; el segundo termino de la serie es la energía cinética, por lo tanto $E = mc^2$ es la energía en reposo de la partícula y la componente temporal del 4-momento. Sus componentes son dadas como

$$\mathbf{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Capítulo 3

Fluidos en Relatividad

En muchas situaciones interesantes en astrofísica, la fuente del campo gravitacional puede ser un fluido perfecto como una primera aproximación [4]. En general, un fluido es un tipo especial de continuo [27]. Un continuo es un conjunto de partículas tan numerosas que la dinámica de las partículas individuales no puede ser seguida, dejando sólo una descripción de la colección en términos de cantidades *promedio* [30]: el número de partículas por unidad de volumen, la densidad de energía, densidad de momento, presión, temperatura, etc. Estas propiedades pueden variar de punto a punto, por ejemplo, en un recipiente con agua: la presión es mayor en el fondo que en la parte superior, y la temperatura puede variar también. La atmósfera, otro fluido, tiene una densidad que varía con la posición etc. Para hablar de promedios el conjunto de partículas debe ser lo suficientemente grande como para que las propiedades de las partículas individuales no importen, pero debe ser lo suficientemente pequeño para considerarlo aproximadamente homogéneo: *la velocidad media, la energía cinética, y el espaciamiento entre partículas debe ser igual en todas partes de la colección*. Esta colección se llama un elemento del fluido [30]. Aunque es un término algo impreciso es útil para que pueda considerarse que una gran colección de partículas tenga un valor único para cantidades tales como la densidad, la velocidad media y la temperatura. Si tal colección no existe (por ejemplo, un gas muy rarificado), entonces la aproximación continua se rompe.

Dado que los elementos son considerados como *pequeños*, esta aproximación es expresada matemáticamente asignando a cada punto un valor de densidad, temperatura, etc. Así que un continuo es definido por varios cam-

pos, que tienen valores en cada punto y en cada momento.

Hasta ahora, esta noción de un continuo abarca sólidos, líquidos y gases. Ahora bien un fluido es un continuo que *fluye*. La mayoría de los sólidos fluirán bajo presión suficientemente alta, ya que la rigidez proviene de fuerzas paralelas a la interfaz entre dos elementos. Dos elementos adyacentes pueden empujar y tirar de la otra, pero el continuo no será rígido a menos que también pueda evitar que la otra se deslice a lo largo de su límite común. Un fluido es caracterizado por la debilidad de tales fuerzas antideslizante en comparación con la fuerza directa, que se denomina presión.

Un fluido perfecto es definido como uno en el que todas las fuerzas antideslizantes son cero, y la fuerza entre los elementos de fluido es la presión.

Un fluido en relatividad especial [31] es un fluido cuyos constituyentes alcanzan velocidades cercanas a la de la luz, donde aquí un 4-vector une dos cantidades que en física no relativista no forman un vector, por ejemplo la ecuación de continuidad. Este capítulo se divide en tres partes iniciando por la parte macroscópica en donde se construye el tensor energía-momento para el caso de un sistema de N partículas todas con la misma velocidad, después la parte microscópica donde se describe un gas ideal relativista usando herramientas de mecánica estadística se encuentran las cantidades termodinámicas y finalizamos con la teoría cinética relativista.

3.1. Descripción macroscópica de los fluidos en relatividad

Vamos a introducir la descripción relativista de un fluido de la forma más simple: el polvo se define como una colección de partículas, todas las cuales están en reposo en algún marco de Lorentz, [4].

Lo primero que podemos hacer es contar cuantas partículas hay por unidad de volumen en el marco en reposo del fluido. De esta manera, en muchas regiones podríamos encontrar números diferentes en distintos puntos, ya que las partículas pueden ser distribuidas más densamente en una región que en otra. Definimos la densidad numérica en el marco comóvil (MC) como n .

La densidad numérica en un marco \bar{O} en donde las partículas se están moviendo tendrán velocidad \vec{v} . Si nos fijamos en las partículas que contamos en el sistema en reposo, es claro que hay el mismo numero de partículas vistas en el sistema móvil, pero no ocupan el mismo volumen; esto se debe a la contracción de Lorentz (en este caso elegimos un volumen infinitesimal de lados $\Delta x, \Delta y$ y Δz ; hay que recordar que no se contraen las longitudes perpendiculares). Entonces aparece el factor de Lorentz γ (ver figura 3.1). Tenemos que la densidad numérica en un marco en que las partículas tienen velocidad v es

$$\bar{n} = \frac{n}{\sqrt{(1 - v^2)}} \quad (3.1)$$

por comodidad tomaremos $c = 1$, esto es que $\frac{v^2}{c^2} = v^2$.

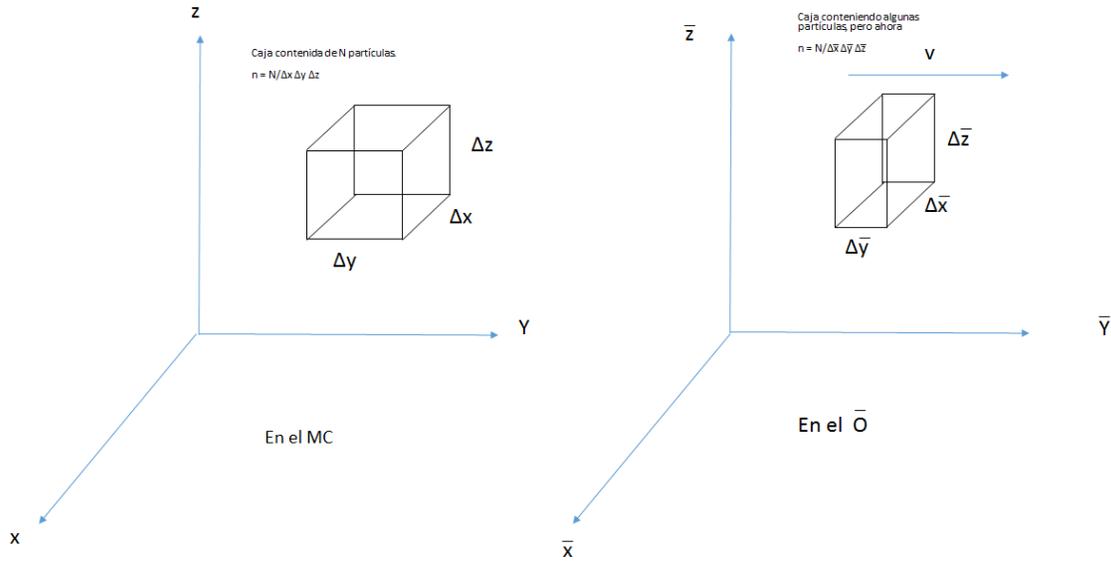


Figura 3.1: A causa de la contracción de Lorentz la densidad de partículas dependen del marco en donde se mida.

3.1.1. El 4-flujo a través de una superficie

El flujo de partículas a través de una superficie es el número de partículas que cruzan dicha superficie por unidad de área por unidad de tiempo. Esta cantidad dependerá del sistema inercial, ya que el área y el tiempo son dependientes del marco de referencia y de la orientación de la superficie, (una superficie paralela a la velocidad de las partículas no será cruzada por cualquiera de ellas). En el marco en reposo del polvo, el flujo es cero ya que todas las partículas están en reposo. Supongamos que en un marco \bar{O} las partículas se mueven con velocidad \vec{v} en la dirección x y por simplicidad consideremos una superficie S perpendicular a x , por ejemplo el plano yz . El volumen rectangular (ver figura 3.2) contiene sólo aquellas partículas que atravesará el área ΔA de S en el tiempo $\Delta\bar{t}$, es decir tiene volumen $\vec{v}\Delta\bar{t}\Delta A$ y contiene $\frac{n}{\sqrt{(1-v^2)}}\vec{v}\Delta\bar{t}\Delta A$ partículas ya que en este marco la densidad numérica es $\frac{n}{\sqrt{(1-v^2)}}$. El número de cruces por unidad de tiempo y por unidad de área es el flujo a través de superficies de \bar{x} constante y esta dado por:

$$(\text{flujo})^{\bar{x}} = \frac{nv^{\bar{x}}}{\sqrt{(1-v^2)}} \quad (3.2)$$

3.1.2. El flujo de partículas \mathbf{N}

Dado que la densidad de partículas y el flujo a través de una superficie en el marco \bar{O} contiene un factor de Lorentz, puede introducirse el 4-vector \mathbf{N} definido por

$$\mathbf{N} \equiv n\mathbf{U} \quad (3.3)$$

donde \mathbf{U} es la 4-velocidad de las partículas. En un marco \bar{O} en que el fluido tienen velocidad (v^x, v^y, v^z) tenemos

$$\mathbf{U} \rightarrow_{\bar{O}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (3.4)$$

resultando que

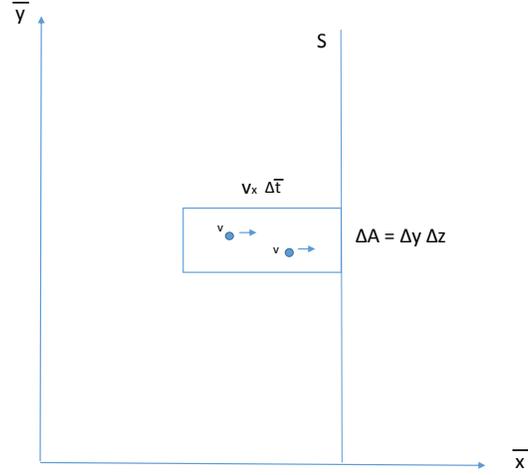


Figura 3.2: Flujo de partículas en dirección x a través de una superficie x constante

$$\mathbf{N} \rightarrow_{\bar{O}} \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (3.5)$$

Así, en cualquier marco la componente temporal de \mathbf{N} es la densidad numérica y las componentes espaciales son los flujos que cruzan una superficie. En la física Galileana, la densidad numérica era un escalar, el mismo en todos los marcos, mientras que el flujo es un tres-vector que depende del marco, ya que las velocidades de las partículas son relativas. Este enfoque relativista unifica estos dos conceptos en un único 4-vector. En particular cumple

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = n^2 ; n = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})^{1/2} \quad (3.6)$$

Por lo tanto, n es un escalar, de la misma manera que la masa en reposo es un escalar [4]. Es importante destacar que dado (3.1) podemos calcular la

densidad en distintos marcos de referencia. Lo que es invariante es la densidad medida en el marco comóvil del fluido.

3.1.3. El tensor energía-momento para polvo

Se ha discutido cuantas partículas de polvo hay en determinada región, sin embargo, éstas también tienen energía y momento; resulta que su energía y su momento son la fuente del campo gravitacional en RG [4]. Ahora nos preguntaremos como se representarían por lo tanto en un marco de referencia arbitrario. Por simplicidad se asumirá que todas las partículas tienen la misma masa en reposo m .

Densidad de energía

En el caso del polvo en el marco comóvil (MC), la energía de cada partícula es justamente $e = mc^2$ y el número por unidad de volumen es n . Por lo tanto, la energía por unidad de volumen es ne , esto es la densidad de energía en el MC, donde ne es un escalar como n (y m también).

En fluidos más generales, donde hay movimiento aleatorio de las partículas y por consiguiente movimiento por parte de la energía cinética, incluso en un sistema en reposo promedio, ne no será válida.

En el marco \bar{O} la densidad numérica es $\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$, pero ahora la energía de cada partícula es $\bar{e} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2}}$, ya que se está moviendo. Por lo tanto la densidad de energía en un marco en el cual las partículas tienen velocidad \vec{v} es

$$\bar{n}\bar{e} = \frac{ne}{1-v^2} \quad (3.7)$$

Esta transformación implica el producto de dos factores de Lorentz $(1-v^2)^{-1/2} = \Lambda_0^0$, por lo tanto el volumen y la energía se transforman como en (3.7). Por lo tanto es posible representar la densidad de energía como alguna componente de un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ver sección 2.2).

Tensor energía-momento

La definición más conveniente de el tensor energía-momento es en términos de sus componentes en algún marco (arbitrario) dados por

$$\mathbb{T}(\tilde{d}x^\alpha, \tilde{d}x^\beta) = T^{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

que es el flujo de momento α a través de una superficie x^β constante .

Veamos como esta definición se ajusta a nuestra discusión anterior. Para ello consideremos T^{00} , donde ésta es definida como el flujo de momento 0, es decir el flujo de energía a través de una superficie a $t = \text{constante}$, que va hacia el futuro. Entonces T^{00} es justamente la densidad de energía.

Del mismo modo, T^{0i} es el flujo de energía a través de una superficie $x^i = \text{constante}$.

Por lo tanto T^{i0} es el flujo del momento i a través de la superficie a $t = \text{constante}$, es decir, la densidad de momento i . Y por lo tanto T^{ij} es el flujo del momento i a través de la superficie j .

Para el polvo, las componentes de \mathbb{T} en el MC son particularmente simples. No hay movimiento de las partículas, por lo que todos los momentos i son cero y todos los flujos espaciales son cero. Por lo tanto

$$\begin{aligned} (T^{00})_{MC} &= ne \\ (T^{0i})_{MC} &= (T^{i0})_{MC} = (T^{ij})_{MC} = 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que el tensor $\mathbf{p} \otimes \mathbf{N}$ tiene exactamente estas componentes en el MC, donde $\mathbf{p} = m\mathbf{U}$ es el 4-momento de una partícula. Por lo tanto tenemos que para polvo:

$$\mathbb{T} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{N} = mc^2 n \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} = ne \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} \quad (3.9)$$

De esto se puede concluir,

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta} &= \mathbb{T}(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) \\
&= ne\mathbf{U}(\tilde{\omega}^\alpha)\mathbf{U}(\tilde{\omega}^\beta) \\
&= neU^\alpha U^\beta
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En el marco \bar{O} , donde,

$$\mathbf{U} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \dots \right),$$

por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned}
T^{\bar{0}\bar{0}} &= neU^{\bar{0}}U^{\bar{0}} = ne/(1-v^2), \\
T^{\bar{0}\bar{i}} &= neU^{\bar{0}}U^{\bar{i}} = nev^i/(1-v^2), \\
T^{\bar{i}\bar{0}} &= neU^{\bar{i}}U^{\bar{0}} = nev^i/(1-v^2), \\
T^{\bar{i}\bar{j}} &= neU^{\bar{i}}U^{\bar{j}} = nev^i v^j/(1-v^2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Esto es exactamente lo que se calcularía desde el inicio, para la densidad de energía, flujo de energía, densidad de momento y flujo de momento respectivamente. Hay que observar un punto importante: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$; es decir, \mathbb{T} es simétrico. Esto resulta ser cierto en general, no sólo para el polvo.

3.1.4. Fluidos en general.

Hasta ahora hemos estudiado la más simple colección de partículas. Para generalizar esto a fluidos reales, tenemos que tener en cuenta que (i) además del movimiento de un elemento del fluido, cada partícula tiene alguna velocidad al azar; y (ii) puede haber varias fuerzas entre las partículas que contribuyen a la energía potencial total.

Definición de las cantidades macroscópicas

Para cada elemento del fluido se define un MC, para dos elementos de fluido diferentes, tal que uno se mueve con respecto al otro, los 2 tendrían distintos MC. Por lo tanto el MC es específico para un solo elemento del fluido y que el MC es una función de posición y tiempo. Todas las cantidades asociadas con un elemento de fluido en relatividad (tales como la densidad numérica, densidad de energía y temperatura) son definidas a partir de sus valores en el MC. Así hacemos las definiciones que aparecen en la tabla 3.1

Tabla 3.1

Cantidades macroscópicas para fluidos

Símbolo	Nombre	Definición
\mathbf{U}	4-velocidad del elemento de fluido	4-velocidad de MC
n	Densidad numérica	Numero de partículas por unidad de volumen en MC
\mathbf{N}	4-Vector flujo	$\mathbf{N} \equiv n\mathbf{U}$
ne	Densidad de energía	Densidad de energía total de masa (masa en reposo, cinética al azar, química, etc.)
T	Temperatura	Definición termodinámica usual en MC
p	Presión	Usual concepto de fluido dinámico en MC.
s	Entropía específica	Entropía por partícula.

Leyes de la termodinámica

Es la ley de conservación de la energía en el MC. Imaginemos que el elemento de fluido es capaz de intercambiar energía con sus alrededores sólo de dos maneras: por conducción de calor (absorbiendo una cantidad de calor ΔQ) y por el trabajo (haciendo una cantidad de trabajo $p\Delta V$, donde V es el 3-volumen de el elemento). Si pedimos que E sea la energía total, ya que ΔQ es la energía ganada y $p\Delta V$ es la energía perdida, podemos escribir para un proceso cuasi-estático

$$\Delta E = \Delta Q - p\Delta V \quad (3.12)$$

o bien,

$$\Delta Q = \Delta E + p\Delta V. \quad (3.13)$$

Ahora, si el elemento contiene un total de N partículas y si este número no cambia (es decir, no hay creación o destrucción de partículas), podemos introducir la densidad de partículas y el cambio de volumen

$$V = \frac{N}{n}, \quad \Delta V = -\frac{N}{n^2}\Delta n. \quad (3.14)$$

Por otra parte, también podemos introducir la densidad de energía y el cambio en la energía como:

$$\begin{aligned} E &= neV = neN/n = Ne \\ \Delta E &= ne\Delta V + V\Delta(ne). \end{aligned}$$

Al sustituir (3.14) y ne en la ecuación (3.13) resulta

$$\Delta Q = \frac{N}{n}\Delta(ne) - N(ne + p)\frac{\Delta n}{n^2}.$$

Si escribimos $\tilde{q} \equiv Q/N$, que es el calor absorbido por partícula, obtenemos

$$n\Delta\tilde{q} = \Delta(ne) - \frac{ne + p}{n}\Delta n. \quad (3.15)$$

Supongamos ahora que los cambios son infinitesimales. Se puede demostrar [4] en general que el estado de un fluido puede ser dado por dos parámetros que se escogen según las condiciones experimentales. Esto significa que el lado derecho de la ecuación (3.15),

$$d(ne) - (ne + p)dn/n = nde + edn - (ne + p)dn/n = nde - pdn/n,$$

depende sólo de e y n . La teoría general de las ecuaciones de primer orden demuestra que para este tipo de expresiones hay un factor integrante, es decir, existen dos funciones A y B , que son funciones sólo de ne y n , tal que

$$nde - pdn/n \equiv AdB$$

es una identidad para todo ne y n . En termodinámica se verifica que $\frac{A}{n} = T$ con T la temperatura y $B = s$ la entropía específica de acuerdo a la segunda ley,

$$nde - pdn/n = nTds. \quad (3.16)$$

En otras palabras,

$$\Delta\tilde{q} = T\Delta s. \quad (3.17)$$

El calor absorbido por un elemento de fluido es proporcional a su incremento en entropía [34].

Hemos introducido por lo tanto T y s como definiciones matemáticas convenientes. T es la temperatura, y s la entropía específica total en cualquier sistema debe aumentar según la segunda ley de la termodinámica [34]. La entropía aparece aquí como una integral de la primera ley que no es más que la conservación de la energía. En particular utilizaremos ambas ecuaciones (3.16) y (3.17) más adelante.

El tensor energía-esfuerzos general

La definición de $T^{\alpha\beta}$ en (3.8) es perfectamente general. Vamos en particular a centrar nuestra atención en el MC, donde no hay flujo por parte del elemento del fluido y no hay momento espacial en las partículas. Por lo tanto en el MC tenemos

$$(1) T^{00} = \text{densidad de energía} = ne$$

(2) T^{0i} = flujo de energía. Aunque no hay movimiento en el MC, la energía puede ser transmitida por conducción de calor.

(3) T^{i0} = densidad de momento. Aunque las partículas no tienen movimiento en el MC, hay conducción de calor, por lo tanto la energía tendría un momento asociado. Se discutirá más adelante que $T^{i0} \equiv T^{0i}$.

(4) T^{ij} = Flujo de momento. Es llamado el tensor de esfuerzos.

Las componentes espaciales de \mathbb{T} , T^{ij}

Por definición T^{ij} es el flujo del momento i cruzando la superficie j . Considere dos elementos del fluido unidos representados como cubos que tienen una superficie en común S (ver figura (3.3)); en general ejercen fuerzas entre sí. En la figura 3.3 se muestra que la fuerza \vec{F} es la que ejerce A sobre B (por supuesto que B ejerce una fuerza igual y opuesta sobre A). Dado que la fuerza es igual a la tasa de cambio del momento (por la ley de Newton que es válida aquí, además estamos en el MC donde las velocidades son cero), A está cediendo momento a B en la tasa por unidad de tiempo \vec{F} . Por supuesto B , puede o no puede adquirir una nueva velocidad como un resultado de este nuevo momento que adquiere.

Obviamente el movimiento de B es consecuencia de la suma de todas las fuerzas. Sin embargo, cada fuerza le suma momento a B . Por lo tanto hay un flujo de momento a través de S de A hacia B en una tasa \vec{F} . Si S tiene área A_s , el flujo de momento a través de S es \vec{F}/A_s . Si S es una superficie x^j es constante, por lo tanto T^{ij} para el elemento A es F^i/A_s . Esta es una breve ilustración de el significado de T^{ij} que representa las fuerzas adyacentes entre elementos del fluido.

Como se ha mencionado antes, estas fuerzas no tienen que ser perpendiculares a las superficies entre los elementos (por ejemplo la viscosidad genera fuerzas paralelas a la interfaz). Pero si las fuerzas son perpendiculares a las interfaces T^{ij} serán cero a menos que $i = j$.

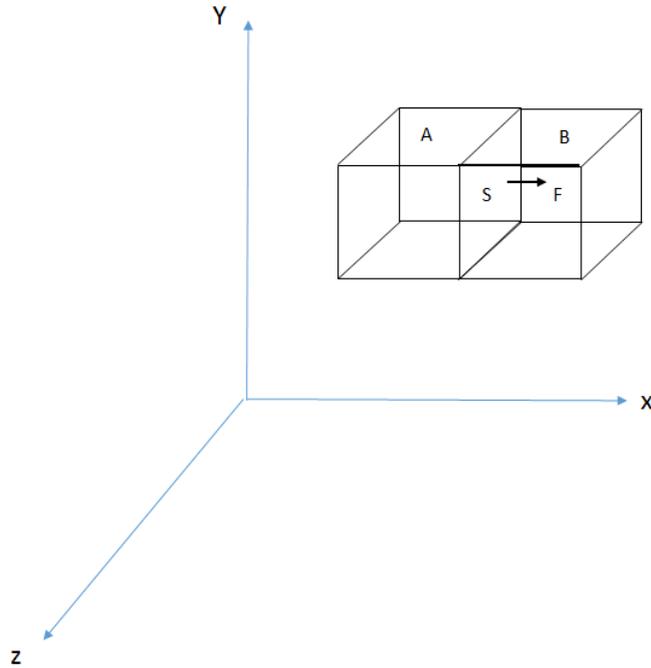


Figura 3.3: La fuerza \vec{F} ejercida por el elemento A en su vecino B puede ser en cualquier dirección, dependiendo de las propiedades del medio y de cualquier fuerza externa

Simetría de $T^{\alpha\beta}$ en el MC

Ahora demostraremos que \mathbb{T} es un tensor simétrico. Sólo necesitamos demostrar que sus componentes son simétricas en un marco; esto implica que para cualquier \tilde{r} , \tilde{q} , $\mathbb{T}(\tilde{r}, \tilde{q}) = \mathbb{T}(\tilde{q}, \tilde{r})$, lo que implica la simetría de sus componentes en cualquier otro marco. Para demostrar la simetría del tensor, el marco más fácil es el MC.

(a) Simetría de T^{ij}

Considerando la Fig. 3.4, en la cual se toma un elemento de fluido como un cubo de lado l . La fuerza que ejerce sobre un vecino a través de la superficie 1 (una superficie $x=\text{constante}$) es $F_1^i = T^{ix}l^2$ donde el factor l^2 da

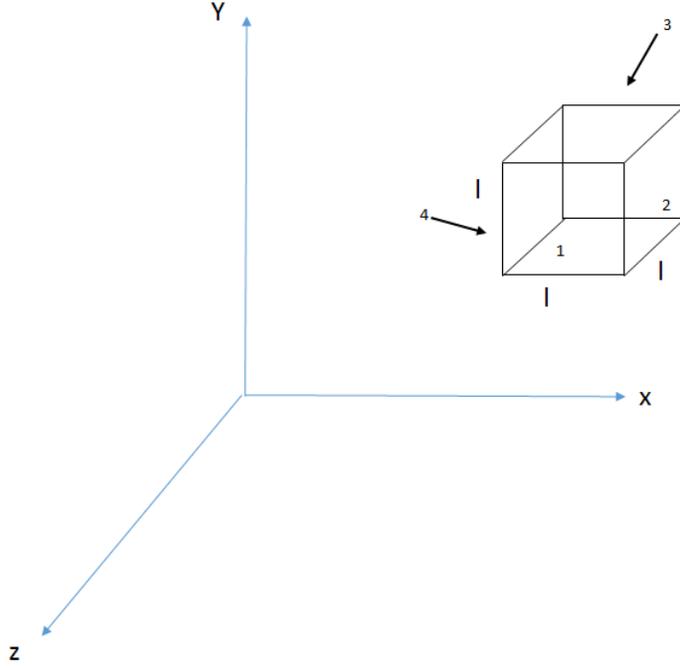


Figura 3.4: Un elemento de fluido

el área de la cara. Aquí, i corre de 1,2 y 3, ya que F no es necesariamente perpendicular a la superficie. Del mismo modo, la fuerza que ejerce sobre un vecino en 2 es $F_2^i = T^{iy}l^2$ (tomaremos el límite $l \rightarrow 0$, por lo que se debe tener en cuenta que el elemento es pequeño). El elemento también ejerce una fuerza sobre su vecino hacia la dirección x que llamamos F_3^i . Del mismo modo F_4^i se ejerce en la cara que mira en dirección negativa y . Las fuerzas sobre el elemento de fluido son respectivamente $-F_1^i$, $-F_2^i$, etc. Cuando $F_3^i \approx -F_1^i$ las fuerzas sobre el elemento deben desaparecer cuando $l \rightarrow 0$ (de lo contrario la pequeña masa obtenida al tomar $l \rightarrow 0$ tendría una aceleración infinita). El siguiente punto es para calcular torcas [32] alrededor de z a través del centro del elemento de fluido (ya que las fuerzas de la parte superior y parte inferior del cubo no contribuyen a ello, no las hemos considerado). La torca debido a $-F_1^i$ es $-(\vec{r} \times \vec{F}_1)^z = -\frac{1}{2}lT^{yx}l^2$, donde hemos aproximado la fuerza que actúa en el centro de la cara, y donde $\vec{r} \rightarrow (l/2, 0, 0)$. La torca debido a $-F_3^i$ es la misma, $-\frac{1}{2}l^3T^{yx}$. La torca debido a $-F_2^i$ es $-(\vec{r} \times \vec{F}_2)^z = +yF_2^x = \frac{1}{2}T^{xy}l^2$.

Del mismo modo la torca debida a \vec{F}_4 es la misma $\frac{1}{2}l^3T^{xy}$. Por lo tanto la torca total es

$$\tau_z = l^3(T^{xy} - T^{yx}) \quad (3.18)$$

El momento de inercia del elemento alrededor del eje z es proporcional a l^2 veces su masa, o

$$I = \alpha \rho l^5, \quad (3.19)$$

donde α es alguna constante numérica y ρ es la densidad de masa. Por lo tanto la aceleración angular es

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{I} = \frac{T^{xy} - T^{yx}}{\alpha \rho l^2}. \quad (3.20)$$

Ya que α es un numero y ρ es la densidad de masa, nos queda analizar l , pero si $l \rightarrow 0$, $\ddot{\theta}$ tiende a infinito a menos que

$$T^{xy} = T^{yx}$$

Por lo tanto obviamente no es cierto que los elementos de fluido están girando por el interior de los fluidos ni que fluidos más pequeños giran cada vez más rápido. Tenemos que los esfuerzos son siempre simétricos, por tanto

$$T^{ij} = T^{ji}. \quad (3.21)$$

Dado que no se consideraron propiedades particulares de la sustancia el resultado es cierto, tanto para sólidos como para fluidos.

(b) La igualdad de densidad de momento y flujo de energía.

El flujo de energía es la densidad de energía por la velocidad a la que fluye. Pero ya que la energía y la masa son lo mismo, esta es la densidad de masa veces la velocidad a la que se esta moviendo, en otras palabras la densidad de momento. Por lo tanto $T^{0i} = T^{i0}$.

3.1.5. Fluidos perfectos

Un fluido perfecto en relatividad se define como aquel cuya viscosidad y conducción de calor es cero en el MC. Es una generalización del gas ideal de la termodinámica clásica. Las dos restricciones en su definición simplifican enormemente el tensor energía-momento.

De la definición de $T^{\alpha\beta}$ vemos que en el MC, $T^{0i} = T^{i0} = 0$. La energía puede fluir sólo si las partículas fluyen. Recordemos de la primera ley de la termodinámica que si el número de partículas se conserva, la entropía específica esta relacionada con el calor por la ecuación (3.17).

La viscosidad es una fuerza paralela a la interfaz entre partículas. Su ausencia significa que las fuerzas deben siempre ser perpendiculares a la interfaz, es decir que T^{ij} debe ser cero a menos que $i = j$. Esto significa que T^{ij} debe ser una matriz diagonal en el MC. Por lo tanto una superficie x tendrá a través de ella sólo una fuerza en la dirección x y de la misma manera en y y z ; estas fuerzas por unidad de área son todas iguales y se identifican con la presión hidrostática p . Así que tenemos $T^{ij} = p\delta^{ij}$. De las seis cantidades posibles (el número de elementos independientes en la matriz simétrica de 3×3) y de la suposición de que la viscosidad sea cero se ha reducido el número de funciones a uno, la presión.

De esta forma en el MC, $T^{\alpha\beta}$ tiene las componentes siguientes

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} ne & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

que puede escribirse en componentes como

$$T^{\alpha\beta} = (ne + p)U^{\alpha\beta} + p\eta^{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

Por ejemplo si $\alpha = \beta = 0$, $U^0 = 1$, $\eta^{00} = -1$ y $T^{\alpha\beta} = (ne + p) - p = ne$ como en la ecuación (3.23). Pero la ecuación (3.23) debe ser una expresión que no dependa del marco de referencia, de modo tal que podemos escribir

el tensor

$$\mathbb{T} = (ne + p)\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p\mathbb{G}^{-1}. \quad (3.24)$$

Una comparación de la ecuación (3.24) con la ecuación (3.9) muestra que el polvo es un caso especial de un fluido perfecto sin presión. La presión surge de las velocidades aleatorias de las partículas, ya que la presión es el flujo de momento.

Conservación de la energía-momento

Puesto que \mathbb{T} representa el contenido de energía y momento del fluido, debe haber alguna manera de usarlo para expresar la ley de conservación de la energía y del momento. En la figura 3.5 vemos un elemento de fluido cubico, visto sólo en la sección transversal x - y (suprimiendo la sección z). La energía puede fluir a través de todos los lados. La tasa de flujo a través de la cara (4) es $l^2 T^{0x}(x=0)$ y a través de (2) es $-l^2 T^{0x}(x=l)$; el segundo termino tiene signo menos, ya que T^{0x} representa la energía que fluye en la dirección x positiva, que esta fuera del volumen a través de la cara (2). Del mismo modo la energía que fluye en la dirección y es $l^2 T^{0y}(y=0)$ y $-l^2 T^{0y}(y=l)$. La suma de estas tasas debe ser la tasa de aumento de la energía interna por unidad de tiempo, $\partial(T^{00}l^3)/\partial t$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} l^3 T^{00} &= l^2 [T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l) + T^{0y}(y=0) \\ &\quad - T^{0y}(y=l) + T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dividiendo por l^3 y tomando el limite $l \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{00} = -\frac{\partial}{\partial x} T^{0x} - \frac{\partial}{\partial y} T^{0y} - \frac{\partial}{\partial z} T^{0z}, \quad (3.26)$$

Donde usamos la definición de la derivada [61]

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l)}{l} \equiv -\frac{\partial}{\partial x} T^{0x} \quad (3.27)$$

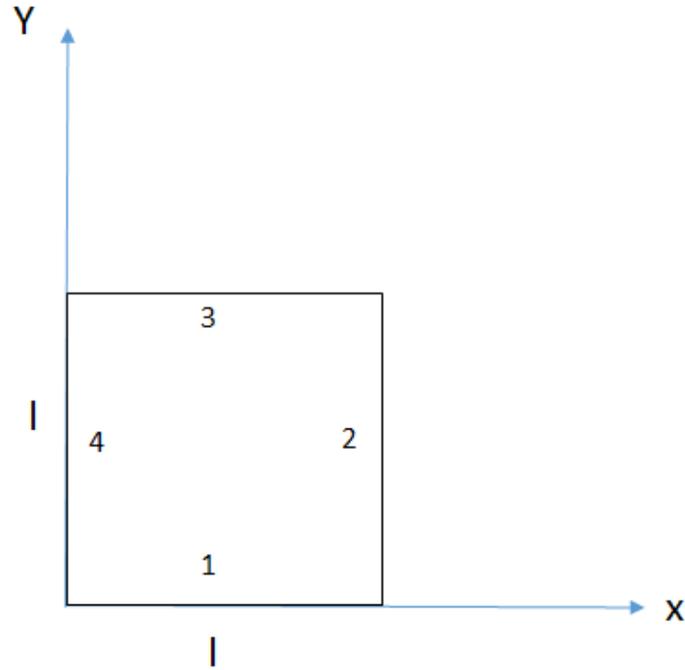


Figura 3.5: Una sección a $z = \text{constante}$ de un elemento de fluido cúbico.

La ecuación (3.30) puede ser escrita como

$$T^{00}_{,0} + T^{0x}_{,x} + T^{0y}_{,y} + T^{0z}_{,z}$$

donde la coma (,) indica derivada de manera sintética. Utilizando la convención de suma de Einstein [4] se tiene

$$T^{0\alpha}_{,\alpha} = 0. \quad (3.28)$$

Esto es el enunciado de la ley de conservación de la energía.

Del mismo modo el momento se conserva. Las mismas matemáticas se aplican, con el índice 0 cambiado a cualquier índice espacial correspondiente a la componente del momento, cuya conservación se está considerando. La

ley de conservación general es por lo tanto [4]

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad (3.29)$$

Esto se aplica a cualquier material en Relatividad especial.

Conservación de partículas

También puede suceder que durante cualquier flujo el número total de partículas no cambia. Esta ley de conservación es derivable de la misma manera como la ecuación (3.29). En particular, en la figura (3.5) la tasa de cambio de el número de partículas en un elemento de fluido se deberá únicamente a la pérdida o ganancia a través de las fronteras, es decir los flujos netos hacia fuera o dentro. Podemos escribir por lo tanto que

$$\frac{\partial}{\partial t} N^0 = -\frac{\partial}{\partial x} N^x - \frac{\partial}{\partial y} N^y - \frac{\partial}{\partial z} N^z$$

o por la convención de suma de Einstein,

$$N^\alpha{}_{,\alpha} = (nU^\alpha)_{,\alpha} = 0. \quad (3.30)$$

Nos limitaremos a discutir sólo fluidos que obedecen a la ley de conservación.

Ahora utilizando (3.23) y al calcular la derivada de la ecuación (3.29)

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = [(ne + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0. \quad (3.31)$$

Nos damos cuenta que hay 4 ecuaciones en la ecuación (3.31), una para cada valor de $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Suponemos que en nuestro sistema se conservan las partículas, por tanto la ecuación (3.30) es valida.

Como el primer término de (3.31) contiene derivadas, podemos utilizar (3.30) en dicho sumando

$$[(ne + p)U^\alpha U^\beta]_{,\beta} = \left[\frac{ne + p}{n} U^\alpha n U^\beta \right]_{,\beta} = n U^\beta \left[\frac{ne + p}{n} U^\alpha \right]_{,\beta} \quad (3.32)$$

Por otra parte en el espacio-tiempo de Minkowski la métrica $\eta^{\alpha\beta}$ es una matriz constante por lo que $\eta_{,\gamma}^{\alpha\beta} = 0$. Tenemos que $(U^\alpha U_\alpha)_{,\beta} = 0$, ya que $U^\alpha U_\alpha = -c^2$. Sin embargo, al hacer la derivada del producto obtenemos

$$2U^\alpha (U_\alpha)_{,\beta} = 0 \Rightarrow U^\alpha_{,\beta} U_\alpha = 0. \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.32) en (3.31) obtenemos

$$n U^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.34)$$

De las cuatro ecuaciones de aquí, podemos obtener una particularmente útil, al multiplicar por U_α y sumar sobre α . Esto da la componente temporal de la ecuación (3.34), en el MC:

$$n U^\beta U_\alpha \left(\frac{ne + p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + p_{,\beta} U^\beta = 0. \quad (3.35)$$

El último término es la derivada de p a lo largo de la línea de mundo del elemento de fluido, $dp/d\tau$. El primer término es cero cuando la derivada β opera en U^α (por la ecuación (3.33)) por lo que se obtiene (usando $U^\alpha U_\alpha = -1$, donde tomamos a $c = 1$)

$$U^\beta \left[-n \left(\frac{ne + p}{n} \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \right] = 0. \quad (3.36)$$

Con un poco de álgebra se reduce a

$$- U^\beta \left[ne_{,\beta} - \frac{ne + p}{n} n_{,\beta} \right] = 0. \quad (3.37)$$

que puede escribirse como

$$\frac{d(ne)}{d\tau} - \frac{ne + p}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0, \quad (3.38)$$

ya que $\frac{dF}{d\tau} = U^\beta F_{,\beta}$.

Esta expresión podemos compararla con la ecuación (3.16), que contiene a la entropía:

$$U^\alpha s_{,\alpha} = \frac{ds}{d\tau} = 0. \quad (3.39)$$

Por lo tanto la conservación del flujo de partículas en el fluido perfecto conserva la entropía específica. Esto define un proceso adiabático, por que la entropía es constante en un elemento de fluido a medida que fluye.

Las tres componentes restantes de la ecuación (3.31) son derivables de la siguiente manera. Escribimos de nuevo la ecuación (3.34):

$$nU^\beta \left(\frac{ne+p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0$$

en el MC, donde $U^i = 0$ pero $U^i_{,\beta} \neq 0$. En el MC, la componente 0 de esta ecuación es la misma que su contracción con U_α , que acabamos de examinar. Así que sólo necesitaremos las componentes espaciales $\alpha = i$,

$$nU^\beta \left(\frac{ne+p}{n} U^i \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{i\beta} = 0. \quad (3.40)$$

Ya que $U^i = 0$, la derivada respecto a β de $(ne+p)/n$ no contribuye en nada y tenemos

$$(ne+p)U^i_{,\beta} U^\beta + p_{,\beta} \eta^{i\beta} = 0. \quad (3.41)$$

Dado que $\eta_i^\beta = \delta_i^\beta$ tenemos

$$(ne+p)U_{i,\beta} U^\beta + p_{,i} = 0. \quad (3.42)$$

Finalmente recordamos (ver capítulo 2) que $U_{i,\beta} U^\beta$ es la definición de la 4-aceleración a_i :

$$(ne + p)a_i + p_{,i} = 0 \quad (3.43)$$

En dinámica de fluidos no relativista esto es la generalización de

$$\rho \vec{a} + \vec{\nabla} p = 0 \quad (3.44)$$

Donde

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \quad (3.45)$$

La única diferencia entre las ecuaciones (3.43) y (3.44) es el uso de $(ne + p)$ en lugar de la densidad de masa ρ . En relatividad, $(ne + p)$ desempeña el papel de la densidad de masa inercial. La ecuación (3.43) comparada con (3.44) es esencialmente $\vec{F} = m\vec{a}$ con $-p_{,i}$ es la fuerza por unidad de volumen en un elemento de fluido. En términos generales p es la fuerza que ejerce un elemento de fluido sobre su vecino, por lo que $-p$ es la fuerza sobre el elemento. Pero el vecino del lado opuesto del elemento esta empujando al contrario, por lo que sólo si hay un cambio en p a través del elemento del fluido habrá una fuerza neta causando que se acelere.

3.2. Descripción Microscópica de los fluidos en relatividad

3.2.1. Mecánica Estadística del gas ideal relativista

La descripción macroscópica es usualmente utilizada para describir sistemas astrofísicos [1] como estrellas de neutrones o gases primordiales en modelos cosmológicos. La descripción microscópica es necesaria, por ejemplo, en experimentos como las colisiones entre núcleos pesados a altas velocidades en el RHIC o el LHC en el CERN [3, 4]. En estos experimentos se obtiene un gas de nucleones que en una aproximación de grano-grueso corresponde a un gas ideal de partículas relativistas no interactuantes. En esta sección describiremos la mecánica estadística de estos sistemas. Como sabemos la Mecánica estadística con base en valores medios de cantidades microscópicas (momentos, coordenadas) nos lleva a cantidades macroscópicas dándonos

una conexión ente la teoría microscópica de la materia y la termodinámica macroscópica. Consideremos el Hamiltoniano no un ensamble de partículas relativistas

$$H = \sum_{i=1}^N mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\vec{p}^2}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (3.46)$$

Esto corresponde a la energía cinética de partículas relativistas libres, por eso se sustrae la energía en reposo mc^2 de las partículas. La función de partición total como usualmente se calcula en mecánica estadística [3] en sistemas no-interactuantes, puede calcularse como la integral sobre el espacio fase del factor de Boltzmann-Gibbs [3], que es la exponencial del Hamiltoniano correspondiente a los factores de la ecuación (3.46).

$$\begin{aligned} Z(T, V, N) &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int \frac{d^{3N} q d^{3N} p}{h^{3N}} \exp \left\{ -\frac{1}{kT} H(q_\nu, p_\nu) \right\} \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \prod_{\nu=1}^N \int d^3 q_\nu d^3 p_\nu \exp \left\{ -\frac{1}{kT} H(q_\nu, p_\nu) \right\}, \end{aligned}$$

donde T es la temperatura, k la constante de Boltzmann, h la constante de Planck, N el numero de partículas y el factor $N!$ toma en cuenta la no indistinguibilidad de las partículas.

La integral puede interpretarse como una función de partición de una partícula ($N=1$),

$$Z(T, V, 1) = \frac{1}{h^3} \int d^3 q_\nu d^3 p_\nu \exp \left\{ -\frac{1}{kT} H(q_\nu, p_\nu) \right\}, \quad (3.47)$$

de modo que la función de partición del sistema de N -partículas puede calcularse directamente a partir del sistema de una partícula,

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} (Z(T, V, 1))^N, \quad (3.48)$$

considerando partículas no distinguibles. Sustituyendo el hamiltoniano de las partículas relativistas, la función de partición resulta

$$Z(T, V, 1) = \frac{1}{h^3} \int d^3q \int d^3p \exp\left\{-\frac{1}{kT} mc^2 \left[1 + \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\}. \quad (3.49)$$

La integral sobre las coordenadas simplemente da el volumen donde está contenido el gas. Además, la integral sobre el momento puede calcularse utilizando coordenadas polares esféricas,

$$Z(T, V, 1) = \frac{4\pi V}{h^3} \exp\left\{\frac{1}{kT} mc^2\right\} \int_0^\infty p^2 dp \exp\left\{-\frac{1}{kT} mc^2 \left[1 + \frac{p^2}{2m}\right]^{1/2}\right\} \quad (3.50)$$

donde ya se integro sobre los ángulos.

Ahora realizamos una sustitución que es útil en muchos problemas de relatividad, que consiste en utilizar funciones hiperbólicas,

$$\begin{aligned} \frac{p}{mc} &= \sinh x \\ dp &= mc \cosh x dx \end{aligned}$$

$$\left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2} = \cosh x, \quad (3.51)$$

con lo que (3.50) puede escribirse como

$$Z(T, V, 1) = \frac{4\pi V}{h^3} (mc)^3 e^{\zeta} \int_0^\infty dx \cosh x \sinh^2 x \exp\{-\zeta \cosh x\} \quad (3.52)$$

donde se ha introducido el parámetro característico $\zeta = \frac{1}{kT} mc^2$. La cantidad ζ mide la relación de la energía en reposo mc^2 de las partículas, respecto a la energía térmica promedio kT de las partículas. La integral (3.52) puede tenerse de tablas [62] como la integral estándar siguiente

$$\int_0^\infty \exp\{-\zeta \cosh x\} \sinh(\gamma x) \sinh x dx = \frac{\gamma}{\zeta} K_\gamma(\zeta) \quad (3.53)$$

donde $K_\gamma(\zeta)$ es una función de Bessel modificadas de segunda clase [35]. En general, las funciones de Bessel modificadas se definen como las soluciones de la ecuación diferencial

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} - (z^2 + \gamma^2) \omega = 0, \quad (3.54)$$

donde z también puede ser complejo. La solución de la ecuación (3.54) que permanece finita para $z = 0$ es la función de Bessel $J_\gamma(z)$, mientras la solución singular es la función de Neumann $N_\gamma(z)$. De gran utilidad son las combinaciones lineales $H_\gamma^{(1),(2)}(z) = J_\gamma(z) \pm iN_\gamma(z)$, que se llaman funciones de Hankel de primera o segunda clase, respectivamente. Ahora bien, las funciones K_γ son esencialmente funciones de Hankel con un argumento imaginario; en el primer estudio de la estadística de partículas relativistas, hecho por Jüttner en 1911 [36], se utilizaron las funciones de Hankel

$$K_\gamma(z) = \frac{\pi i}{2} \exp\left\{\frac{\pi}{2}\gamma i\right\} H_\gamma^{(1)}(iz). \quad (3.55)$$

El comportamiento de las funciones $K_\gamma(z)$ puede verse en la figura (3.6).

La función $K_n(z)$ tiene dos límites importantes. Consideremos el caso en que $z \ll 1$, entonces se tiene el siguiente desarrollo en serie [3]

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \\ &\times \left[\ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \psi(k+1) - \frac{1}{2} \psi(n+k+1) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aquí la función ψ es conocida como la función Gauss, que es la derivada logarítmica de la función $\Gamma(x)$: $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$. Para pequeños argumentos las funciones $K_n(z)$ divergen como $K_n \approx \frac{1}{2}(n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}$, que puede verse en el desarrollo de la serie (3.56). Para grandes argumentos $z \gg 1$, estas funciones se comportan como exponenciales modificadas $\propto e^{-z}$ y su desarrollo

asintótico [3] es

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[\sum_{k=0}^{l-1} \frac{\Gamma(n+k+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(n-k+\frac{1}{2})} (2z)^{-k} + \Theta \frac{\Gamma(n+l+\frac{1}{2})}{n! \Gamma(n-l+\frac{1}{2})} (2z)^{-l} \right] \quad (3.57)$$

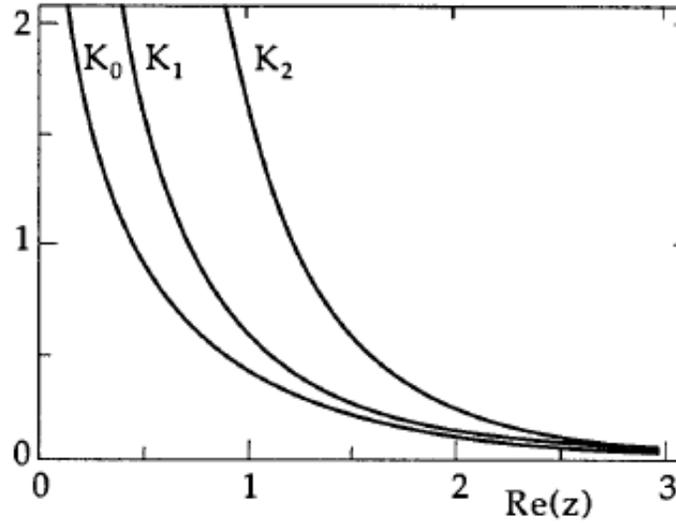


Figura 3.6: Las funciones $K_\gamma(z)$, disminuyen exponencialmente y son funciones que divergen en $z \rightarrow 0$. La forma asintótica para pequeños argumentos ($z \ll 1$, real) y grandes argumentos ($z \gg 1$, real) pueden consultarse en una tabla de fórmulas. Figura tomada de [3]

Aquí l es un parámetro real que se introduce para cortar la serie [3], y $\Theta \in [0, 1]$. El último término corresponde exactamente a la estimación del error en la expansión de Taylor.

Retomando el cálculo de la integral (3.52), notamos que con la identidad $\cosh x \sinh x = \frac{1}{2} \sinh(2x)$, encontramos que la función de partición (3.50) es

$$Z(T, V, 1) = \frac{4\pi V}{h^3} (mc)^3 e^\zeta \frac{K_2(\zeta)}{\zeta}. \quad (3.58)$$

Esto lleva inmediatamente al límite no relativista con $\zeta = \frac{1}{kT} mc^2 \rightarrow \infty$, es decir, $mc^2 \gg kT$. Si la energía térmica promedio kT es muy pequeña comparada con la masa mc^2 de las partículas, según la ecuación (3.57) tenemos $K_2 \approx \sqrt{\pi/2\zeta} e^{-\zeta}$ y por lo tanto

$$Z(T, V, 1) \approx \frac{4\pi V}{h^3} (mc)^3 \left(\frac{1}{\beta mc^2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}, \quad (3.59)$$

que corresponde a la función de partición del gas no relativista [3]. Análogamente, para temperaturas muy altas $\zeta = \beta mc^2 \ll 1$, con la ecuación (3.56) se encuentra de la ecuación (3.58), $K_2 \approx 2/\zeta^2$, así como $e^\zeta \approx 1$:

$$Z(T, V, 1) \approx \frac{8\pi V}{h^3} (mc)^3 \left(\frac{kT}{mc^2} \right)^3 = 8\pi V \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \quad (3.60)$$

Esta es la función de partición del gas ideal ultrarelativista, que se obtiene en el límite $kT \gg mc^2$ de temperaturas altas y pequeñas masas o nulas. La función de partición total, de acuerdo con la ecuación (3.48), es

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left[4\pi V \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \exp \left\{ kT mc^2 \frac{K_2(kT mc^2)}{\frac{1}{kT} mc^2} \right\} \right]^N. \quad (3.61)$$

Es posible calcular la energía libre [3], donde suponemos $N \gg 1$ y $\ln N! \approx N \ln N - N$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} F(T, V, N) &= -kT \ln Z(T, V, N) \\ &= -NkT \left[\ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta} e^\zeta \right\} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$= -NkT \left[\ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2\left(\frac{1}{kT}mc^2\right)}{\frac{1}{kT}mc^2} \right\} + 1 \right] - Nmc^2 \quad (3.62)$$

A partir de la energía libre, es posible calcular las demás cantidades termodinámicas[3].

Para la presión obtenemos

$$p(T, V, N) = -\frac{\partial F}{\partial V} \Big|_{T, N} = \frac{NkT}{V}, \quad (3.63)$$

es decir, la ecuación de estado del gas ideal también es válida para el gas ideal relativista. El potencial químico puede ser fácilmente calculado [3],

$$\mu(T, V, N) = \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_{T, V} = -kT \ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2\left(\frac{1}{kT}mc^2\right)}{\frac{1}{kT}mc^2} \right\} - mc^2 \quad (3.64)$$

En la ecuación (3.46) hay que notar, que se resta explícitamente la masa de las partículas y en la energía libre (3.62) se resta la energía en reposo Nmc^2 de todas las partículas para que quede sólo la contribución de la energía cinética de las partículas. Por la misma razón, en la ecuación (3.64) aparece restado el término mc^2 . Esto tiene la ventaja de que todos los resultados reproducen los resultados no relativistas en el límite correspondiente.

La entropía del gas ideal relativista es un poco más difícil de calcular. Tenemos

$$S(T, V, N) = -\frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{N, V} = Nk \left[\ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2\left(\frac{1}{kT}mc^2\right)}{\frac{1}{kT}mc^2} \right\} + 1 \right] \\ + NkT \left[\frac{\zeta}{K_2(u)} \left(\frac{K_2'(\zeta)}{\zeta} - \frac{K_2(\zeta)}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta}{dT} \right] \quad (3.65)$$

con

$$\frac{d\zeta}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{kT} mc^2 \right) = -\frac{mc^2}{kT^2} = -\frac{\zeta}{T} \quad (3.66)$$

Podemos calcular la derivada de la función de K_2 con la ayuda de una fórmula de recurrencia:

$$K'_n(\zeta) = -K_{n-1}(\zeta) - \frac{n}{\zeta} K_n(\zeta). \quad (3.67)$$

Insertando esto en la ecuación (3.65), obtenemos

$$\begin{aligned} S(T, V, N) &= Nk \left[\ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta} \right\} + 1 \right] + Nk \left[\zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + 3 \right] \\ &= Nk \left[\ln \left\{ 4\pi \frac{V}{N} \left(\frac{mc}{h} \right)^3 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta} \right\} + 4 + \zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Aquí también podemos reproducir el resultado no relativista en el límite $\zeta \gg 1$. Para $\zeta \gg 1$ en el primer término de la ecuación (3.68) tenemos $K_2(\zeta)/\zeta \approx \sqrt{\pi/2} \zeta^{-3/2} e^{-\zeta}$. El factor $\zeta^{-3/2}$ junto con otros factores produce sólo $\frac{V}{N\lambda^3}$, el argumento no relativista del logaritmo. El término $\ln e^{-\zeta} = -\zeta$ junto con $\zeta K_1(\zeta)/K_2 \approx \zeta(1 + \frac{3}{8\zeta} + \dots)/(1 + \frac{15}{8\zeta} + \dots) \approx \zeta - \frac{3}{2} + \dots$ produce una contribución constante $4 - 3/2 = 5/2$, por lo tanto es el término que falta en la entropía en el caso no relativista.

De la misma manera, se puede comprobar el límite para $\zeta \ll 1$. Entonces $\zeta K_1(\zeta)/K_2(\zeta) \approx \zeta^2/2 \approx 0$ y $K_2(\zeta)/\zeta \approx 2/\zeta^3$. De las ecuaciones (3.62) y (3.68) se calcula la energía interna (Figura 3.7)

$$U(T, V, N) = F + TS = NkT \left[3 + \zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right] - Nmc^2 = Nmc^2 \left[\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} + \frac{3}{\zeta} - 1 \right] \quad (3.69)$$

Aquí $\zeta \rightarrow \infty$ produce el límite no relativista $U \approx \frac{3}{2} NkT$, mientras que para $\zeta \rightarrow 0$ tenemos $K_1(\zeta)/K_2(\zeta) \approx \zeta/2$, así que $U \approx Nmc^2 3/\zeta = 3NkT$. La energía interna relativista, aumenta continuamente desde el caso no relativista $\frac{3}{2} NkT$ para pequeña T hasta el caso ultra relativista $U = 3NkT$.

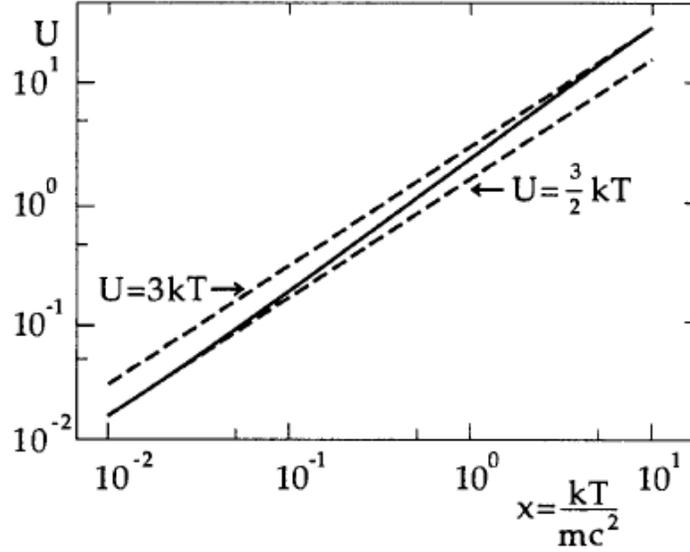


Figura 3.7: Energía interna de un gas ideal relativista. La imagen se tomo de [3]

A partir de la ecuación (3.69) podemos calcular la capacidad calorífica

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V = -\frac{\zeta}{T} \frac{\partial}{\partial \zeta} U \Big|_V \\
 &= -Nmc^2 \frac{\zeta}{T} \left\{ \frac{K_1'(\zeta)}{K_2(\zeta) - \frac{K_1(\zeta)K_2'(\zeta)}{K_2^2(\zeta)}} - \frac{3}{\zeta^2} \right\} \\
 &= \frac{Nmc^2}{T} \left\{ \zeta \frac{K_0(\zeta)}{K_2(\zeta)} - \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \left(1 + \zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right) + \frac{3}{\zeta} \right\} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

donde de nuevamente tuvimos que usar la formula de recurrencia (3.67).

La expresión (3.70) todavía se puede simplificar un poco, si se utiliza la fórmula de recurrencia

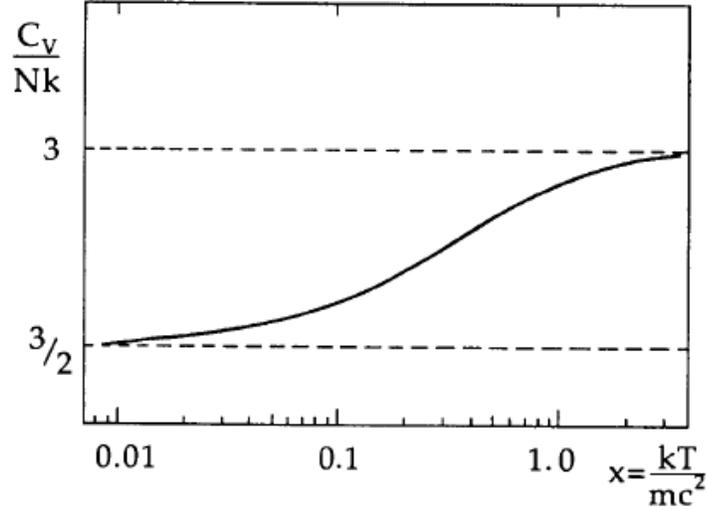


Figura 3.8: Calor específico del gas relativista. Imagen tomada de [3].

$$K_{n-1} = K_{n+1} - \frac{2}{\zeta} K_n. \quad (3.71)$$

Insertando la ecuación (3.71) en la ecuación (3.70) para $n - 1 = 0$, obtenemos

$$C_V = \frac{Nmc^2}{T} \left\{ \zeta + \frac{3}{\zeta} - \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \left(3 + \zeta \frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right) \right\}. \quad (3.72)$$

En la ecuación (3.72) sólo la relación $K_1(\zeta)/K_2(\zeta)$ queda por calcular, que es una simplificación considerable en comparación con la ecuación (3.70). Usando las aproximaciones para los casos límite

$$\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \approx 1 - \frac{3}{2\zeta} + \frac{240}{128\zeta^2} + \frac{1455}{1024\zeta^3} + \dots \quad \zeta \gg 1 \quad (3.73)$$

y

$$\frac{K_1(\zeta)}{K_2(\zeta)} \approx \frac{\zeta}{2} + \dots \quad \zeta \ll 1 \quad (3.74)$$

podemos reproducir el caso no relativista $C_V = \frac{3}{2}Nk$ y el caso ultra relativista $C_V = 3Nk$ de la ecuación (3.72). (ver figura 3.8).

3.3. Teoría cinética relativista.

El objetivo de la teoría cinética es explicar las propiedades macroscópicas de los gases a través de promediar las cantidades microscópicas utilizando una descripción estadística [37]. En 1911 Ferencz Jüttner formuló la generalización relativista de la función de distribución de Maxwell-Boltzman para las velocidades de un gas formado por partículas en equilibrio [38, 39]. Como se sabe, la función de distribución representa el número de partículas que se encuentran, a un tiempo t dado, en un elemento de volumen d^3x alrededor de la posición x , con velocidad en el intervalo d^3v centrado en la velocidad v , [40]. Nico van Kampen [41] demostró que la función de distribución relativista de Jüttner es un invariante; lo que él hace es considerar la función de distribución en el marco de referencia donde el gas está en reposo y la escribe en términos de las trayectorias a todo tiempo (es decir, las historias) de cada una de las partículas, de forma tal que, cuando considera otro sistema de referencia que se mueve a una velocidad \vec{v} respecto al primero puede efectuar una transformación de Lorentz a las historias de cada partícula. El resultado final es que la distribución que mide un observador en movimiento tiene el mismo valor que aquella que se mide en el marco comóvil. Esto puede interpretarse como que todos los observadores están de acuerdo en el valor de la distribución medida en el sistema en particular donde el gas está en reposo, el llamado sistema de referencia comóvil con el gas. A continuación mostramos la distribución de Jüttner en una notación más moderna utilizando funciones de Bessel modificadas de segunda clase en lugar de funciones Hankel. Puede escribirse de la siguiente forma [22, 42]

$$f_J = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2\left(\frac{mc^2}{kT}\right)} e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{kT}}$$

donde n es la densidad de partículas en el sistema de referencia del gas en reposo, k es la constante de Boltzmann, c la velocidad de la luz, m la masa de las partículas del gas, K_2 es la función de Bessel modificada de segunda especie y en el argumento de la exponencial tenemos a la energía de la partícula relativista dividida por la energía térmica kT . Recientemente se ha escrito la distribución de Jüttner no solo como un invariante sino de manera covariante manifiesta [44] en esta forma es posible distinguir las propiedades de transformación de cada cantidad involucrada.

Una revisión reciente sobre fluidos relativistas desde la perspectiva de la teoría cinética relativista y aplicaciones actuales de la distribución de Jüttner puede encontrarse en [45, 46].

3.3.1. Momentos estadísticos de la distribución relativista

La descripción macroscópica de el gas esta basada en los momentos estadísticos de la función de distribución de una partícula, que están definidos como [22]:

$$T^{\alpha\beta\cdots\gamma\delta} = c \int p^\alpha p^\beta \cdots p^\gamma p^\delta f \frac{d^3p}{p_0}. \quad (3.75)$$

Estos momentos son promedios de cantidades físicas microscópicas y es posible identificarlas con cantidades macroscópicas, vistas en la primera sección.

El primer momento se identifica con el 4-flujo de partículas

$$N^\alpha = c \int p^\alpha f \frac{d^3p}{p_0}, \quad (3.76)$$

El segundo momento se identifica con el tensor energía-momento

$$T^{\gamma\beta} = c \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3p}{p_0}, \quad (3.77)$$

mientras que los momentos de orden superior no tienen nombres propios. Por ejemplo, la contracción del momento de tercer orden

$$T^{\alpha\beta\gamma} = c \int p^\alpha p^\beta p^\gamma, \quad (3.78)$$

en el último índice se reduce al 4-flujo de las partículas, es decir

$$T_\beta^{\alpha\beta} = c \int m^2 c^2 p^\alpha f \frac{d^3 p}{p_0} = m^2 c^2 N^\alpha, \quad (3.79)$$

ya que $p^\beta p_\beta = m^2 c^2$.

Un caso interesante es la función que nos lleva al 4-flujo de entropía

$$S^\alpha = -kc \int p^\alpha f \ln(f h^3) \frac{d^3 p}{p_0}, \quad (3.80)$$

que cumple con el teorema H de Boltzmann [22]. Notemos que S^α transforma como un vector si se supone que f es invariante.

3.3.2. El proyector $\Delta_{\alpha\beta}$

Antes de analizar los estados de equilibrio de un gas relativista, introduciremos un proyector o métrica espacial que será útil para interpretar físicamente las consecuencias físicas de la función de distribución de equilibrio relativista [22].

El proyector se obtiene restando del tensor métrico, un tensor que es combinación de la 4-velocidad

$$\Delta^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} U^\alpha U^\beta. \quad (3.81)$$

Este objeto proyecta un 4-vector arbitrario en otro 4-vector perpendicular a la 4-velocidad U^α , ya que

$$\Delta^{\alpha\beta} U_\beta = 0. \quad (3.82)$$

Por lo anterior el tensor $\Delta^{\alpha\beta}$ es llamado un proyector y cumple

$$\Delta^{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma} = \Delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad \Delta_{\beta}^{\alpha}\Delta^{\beta\gamma} = \Delta^{\alpha\gamma}, \quad \Delta_{\alpha}^{\alpha} = 3. \quad (3.83)$$

En el marco comovil del fluido el proyector tiene la forma

$$(\Delta_{R}^{\alpha\beta}) = (\Delta_{R\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

$$(\Delta_{R,\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Si A^{α} es un 4-vector y $T^{\alpha\beta}$ un tensor

$$A^{(\alpha)} = \Delta_{\beta}^{\alpha}A^{\beta} \quad (3.86)$$

$$T^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\Delta_{\gamma}^{\alpha}\Delta_{\delta}^{\beta} + \Delta_{\gamma}^{\beta}\Delta_{\delta}^{\alpha})T^{\gamma\delta} \quad (3.87)$$

$$T^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(\Delta_{\gamma}^{\alpha}\Delta_{\delta}^{\beta} - \Delta_{\gamma}^{\beta}\Delta_{\delta}^{\alpha})T^{\gamma\delta} \quad (3.88)$$

que representan un 4-vector, un tensor simétrico y un tensor antisimétrico respectivamente que tienen solo las componentes espaciales del marco comovil. Además se puede definir

$$T^{<\alpha\beta>} = T^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}\Delta^{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\delta}T^{(\alpha\gamma)} \quad (3.89)$$

que es un tensor simétrico sin traza $\eta_{\alpha\beta}T^{<\alpha\beta>} = 0$ y cumple $\Delta_{\alpha\beta}T^{<\alpha\beta>} = 0$.

Vamos a descomponer la parte contravariante del gradiente ∂^{α} en dos, una parte paralela a la 4-velocidad U^{α} y otra perpendicular de la siguiente

manera:

$$\partial^\alpha = \frac{1}{c^2} U^\alpha U^\beta \partial_\beta + (\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} U^\alpha U^\beta) \partial_\beta = \frac{1}{c^2} U^\alpha D + \nabla^\alpha, \quad (3.90)$$

donde hemos definido

$$D = U^\alpha \partial_\alpha, \quad \nabla^\alpha = (\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} U^\alpha U^\beta) \partial_\beta = \Delta^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (3.91)$$

El operador diferencial D es llamado la derivada temporal convectiva y en el marco comóvil esto se reduce a una diferenciación parcial con respecto al tiempo,

$$D_R = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.92)$$

El operador gradiente ∇^α en un marco local de Lorentz en reposo se reduce a

$$(\nabla_{R\alpha}) = (0, \vec{\nabla})$$

con sólo componentes espaciales (la R quiere decir en reposo). Además, es fácil de verificar a partir de (3.90) que $U_\alpha \nabla^\alpha = 0$.

3.3.3. La termodinámica de fluidos perfectos.

Ya se había tratado con este tipo de fluidos en la sección 3.1.5, pero en esta sección lo que se hará es realizar el cálculo con un diferente método para notar la diferencia entre los marcos de Eckart y Landau y utilizando otra notación, que nos será útil en la sección 3.3.4.

El 4-flujo de partículas es una cantidad conservada cuya ecuación de balance es dada de acuerdo con (3.30),

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0, \quad \frac{\partial \gamma n}{\partial t} + \frac{\partial \gamma n v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (3.93)$$

La ecuación anterior se reduce a la ecuación de continuidad no relativista para velocidades pequeñas $v \ll c$, ya que en este caso tenemos que $\gamma \rightarrow 1$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (3.94)$$

Además de acuerdo con la ley de conservación de el tensor energía-momento

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.95)$$

Si introducimos la expresión del tensor de energía-momento para un fluido perfecto

$$T^{\alpha\beta} = (ne + p) \frac{U^\alpha U^\beta}{c^2} - p \eta^{\alpha\beta} \quad (3.96)$$

en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[(ne + p) \frac{U^\alpha U^\beta}{c^2} \right], \quad (3.97)$$

donde la componente temporal ($\alpha = 0$) y las espaciales ($\alpha = i$) son dadas por

$$\frac{\partial p}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[(ne + p) \frac{U^0 U^\beta}{c^2} \right], \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[(ne + p) \frac{U^0 U^\beta v^i}{c^2} \right] \quad (3.99)$$

En la última ecuación se ha utilizado la relación $U^i = \gamma v^i = U^0 \frac{v^i}{c}$. Ahora eliminaremos a partir de (3.99) el término que corresponde al lado izquierdo

de (3.98) dando

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial ct} \frac{v^i}{c} + (ne + p) \frac{U^0 U^\beta}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{v^i}{c} \right) \quad (3.100)$$

ó

$$n \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-c^2}{\gamma^2 h_E} [\vec{\nabla} p - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}]. \quad (3.101)$$

En la ecuación (3.101) introducimos la entalpia por partícula $h_E = e + p/n$ y la derivada material d/dt definida por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.102)$$

La ecuación (3.100) se reduce a la ecuación de balance de la densidad de momento no relativista para un fluido perfecto que ya teníamos anteriormente ,

$$ne \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla} p = 0. \quad (3.103)$$

Ya que en el caso limite no relativista $v \ll c$ y $\gamma \rightarrow 1$ tenemos que $h_E \rightarrow mc^2$ (considerando únicamente la energía en reposo). En (3.103) $ne = mn$ denota la densidad de masa de el fluido.

Por otro lado el producto escalar de (3.95) por U_α conduce a

$$U_\alpha \partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (U_\alpha T^{\alpha\beta}) - T^{\alpha\beta} \partial_\beta U_\alpha. \quad (3.104)$$

Utilizando (3.96) tenemos

$$\partial_\beta (U_\alpha T^{\alpha\beta}) - T^{\alpha\beta} \partial_\beta U_\alpha = \partial_\beta (ne U_\beta) + p \partial_\beta U^\beta, \quad (3.105)$$

donde usamos la relación que se deriva de la restricción $U^\alpha U_\alpha = c^2$:

$$U^\alpha \partial_\beta U_\alpha = 0. \quad (3.106)$$

De (3.105) y por el uso de (3.93) se obtiene la ecuación de balance para la densidad de energía de un fluido perfecto ,

$$n \frac{de}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} + \frac{p}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (3.107)$$

Una forma alternativa para escribir la ecuación de balance para la densidad de energía es eliminando $d\gamma/dt$ de (3.107) mediante el uso de la ecuación de balance por la densidad de momento (3.101), que es

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{nh_E} \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} p - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}]. \quad (3.108)$$

Por lo tanto tenemos de (3.107) y (3.108)

$$n \frac{de}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{p}{nh_E} \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} p - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}]. \quad (3.109)$$

El lado derecho de (3.109) desaparece en el límite no relativista y se reduce a la ecuación de balance no relativista para la densidad de energía interna de un fluido perfecto.

Si transformamos la ecuación de Gibbs

$$ds_E = \frac{1}{T} (de - \frac{p}{n^2} dn) \quad (3.110)$$

en una ecuación para la derivada total en el tiempo y usamos las ecuaciones de balance para la densidad de número de partículas (3.93) y la densidad de energía interna (3.109) obtenemos

$$\frac{ds_E}{dt} = \frac{1}{T} \left(\frac{de}{dt} - \frac{p}{n^2} \frac{dn}{dt} \right) = 0. \quad (3.111)$$

Esto es el flujo de un fluido perfecto que es isentrópico a lo largo de la trayectoria de cada partícula. Así la entropía por partícula es la misma en

cada punto en el instante $t = 0$, por lo que el flujo será globalmente isentrópico. Esto es cierto por supuesto sólo si las soluciones se suponen continuas. Si se permiten soluciones generalizadas, discontinuas, las ondas de choque y en general la solución no serán isentrópicas en todas partes.

3.3.4. Descomposición de Eckart

Con el fin de identificar el significado físico de las diferentes cantidades que aparecen en las ecuaciones de balance, es útil introducir descomposiciones de estas cantidades con respecto a la 4-velocidad U^α y la correspondiente dirección ortogonal. La descomposición más usual es debida a Eckart [22, 15], aunque existen otras descomposiciones como la de Landau-Lifshitz que consideran un 4-vector que denota la parte de no equilibrio del 4-flujo de partículas que es perpendicular a la 4-velocidad [22]; ésta se estudiará en la sección 3.3.6.

En la descomposición de Eckart el 4-flujo de partículas N^α y el tensor energía-momento $T^{\alpha\beta}$ para un fluido viscoso y conductor de calor, son:

$$N^\alpha = nU^\alpha \quad (3.112)$$

y

$$T^{\alpha\beta} = p^{\langle\alpha\beta\rangle} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha) + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta, \quad (3.113)$$

donde $\Delta^{\alpha\beta}$ es el proyector.

Por otro lado se definen las cantidades $n, p^{\langle\alpha\beta\rangle}, p, \varpi, q^\alpha$ que son identificadas como

densidad de número de partículas,

$$n = \frac{1}{c^2}N^\alpha U_\alpha, \quad (3.114)$$

las componentes no diagonales o viscosas del tensor de presiones,

$$p^{\langle\alpha\beta\rangle} = (\Delta_\gamma^\alpha \Delta_\delta^\beta - \frac{1}{3}\Delta^{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta})T^{\gamma\delta}, \quad (3.115)$$

presión hidrostática + presión dinámica,

$$(p + \varpi) = -\frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \quad (3.116)$$

flujo de energía, también conocido como flujo de calor,

$$q^\alpha = \Delta_\gamma^\alpha U_\beta T^{\beta\gamma}, \quad (3.117)$$

y la energía interna por partícula

$$e = \frac{1}{nc^2}U_\alpha T^{\alpha\beta}U_\beta. \quad (3.118)$$

La presión dinámica es la parte fuera del equilibrio de la traza del tensor de energía- momento, ya que la presión p y la energía por partícula e son cantidades en equilibrio.

En el marco local de Lorentz, en reposo o comóvil ($U^\alpha = (c, 0)$) y tenemos también que el proyector está dado por las ecuaciones (3.84) y (3.85). Así en el marco comóvil la densidad de número de partículas y la energía interna por partícula, quedan definidas como sigue

a) La densidad de número de partículas es dada por

$$n = \frac{1}{c}N_R^0. \quad (3.119)$$

b) Las componentes no nulas de la parte viscosa del tensor de esfuerzos, son las componentes espaciales de el tensor energía-momento $T_R^{(ij)}$,

$$p^{(00)} = 0, \quad p^{(0i)} = p^{(i0)} = 0, \quad p^{(ij)} = T_R^{(ij)}. \quad (3.120)$$

c) La traza de las componentes espaciales de el tensor de energía-momento es la suma de la presión hidrostática y la presión dinámica

$$p + \varpi = -\frac{1}{3}\eta_{ij}T_R^{ij}. \quad (3.121)$$

d) Las componentes distintas de cero del flujo de calor son solo las componentes espaciales

$$q^0 = 0, \quad q^i = cT_R^{0i}. \quad (3.122)$$

e) La densidad de energía es dada por la coordenada temporal del tensor energía momento

$$e = \frac{1}{n} T_R^{00}. \quad (3.123)$$

Otra cantidad que se puede descomponer en partes paralelas y perpendiculares a la 4-velocidad es el 4-flujo de entropía,

$$S^\alpha = nsU^\alpha + \phi^\alpha. \quad (3.124)$$

La descomposición anterior define las cantidades

entropía por partícula

$$s = \frac{1}{nc^2} S^\alpha U_\alpha, \quad (3.125)$$

y flujo de entropía

$$\phi^\alpha = \Delta_\beta^\alpha S^\beta. \quad (3.126)$$

En un marco comóvil obtenemos de (3.133), (3.84), (3.85), (3.125) y (3.126)

$$ns = \frac{1}{c} S_R^0, \quad \phi^0 = 0, \quad \phi^i = S_R^i, \quad (3.127)$$

la densidad de entropía es la componente temporal del 4-flujo de entropía, mientras que sus componentes espaciales representan el flujo de entropía.

Vamos a escribir ahora las ecuaciones de balance para el 4-flujo de partículas y para el tensor energía-momento en términos de los operadores diferenciales D y ∇^α (ver el gradiente contravariante (3.90)).

Primero insertamos la expresión para el 4-flujo de partículas $N^\alpha = nU^\alpha$ en la ecuación de balance $\partial_\alpha N^\alpha = 0$ y obtenemos por el uso de la ecuación de balance del 4-flujo de partículas,

$$\frac{1}{c^2}U^\alpha D(nU_\alpha) + \nabla^\alpha(nU_\alpha) = 0, \quad (3.128)$$

ó

$$Dn + n\nabla^\alpha U_\alpha = 0, \quad (3.129)$$

ya que $U^\alpha DU_\alpha = 0$ y $U_\alpha \nabla^\alpha = 0$. La ecuación (3.129) tiene una forma similar a la ecuación no relativista para la densidad numérica de partículas [22].

De la ecuación de balance para el tensor energía-momento $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, al utilizar (3.112) y (3.90) obtenemos

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{c^2}U_\beta D + \nabla_\beta\right)[p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha) + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta] = 0, \quad (3.130)$$

y después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}Dq^\alpha + \frac{en}{c^2}DU^\alpha + \frac{1}{c^2}U^\alpha(nDe + eDn) - \frac{1}{c^2}p^{(\alpha\beta)}DU_\beta + \frac{1}{c^2}(p + \\ \varpi)U^\alpha \nabla_\beta U^\beta + \frac{1}{c^2}q^\alpha \nabla_\beta U^\beta + \frac{1}{c^2}U^\alpha \nabla_\beta q^\beta \\ + \frac{1}{c^2}q^\beta \nabla_\beta U^\alpha + \frac{en}{c^2}U^\alpha \nabla_\beta U^\beta = 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Si tomamos el producto escalar de (3.131) por U_α se reduce a la ecuación de balance para la densidad de energía,

$$nDe = -(p + \varpi)\nabla_\alpha U^\alpha + p^{(\alpha\beta)}\nabla_\beta U_\alpha - \nabla_\alpha q^\alpha + \frac{2}{c^2}q^\alpha DU_\alpha. \quad (3.132)$$

Con el fin de derivar la ecuación anterior se ha utilizado el balance de la densidad de número de partículas (3.129) y las relaciones

$$p^{(\alpha\beta)}U_\alpha = 0, q^\alpha U_\alpha = 0$$

$$U_\alpha \nabla_\beta p^{(\alpha\beta)} = -p^{(\alpha\beta)} \nabla_\beta U_\alpha, U_\alpha Dq^\alpha = -q^\alpha DU_\alpha,$$

que fueron obtenidas de las ecuaciones (3.120) y (3.122).

Sin el último término en el lado derecho de (3.132) se tiene una forma similar a la ecuación de balance no relativista para la densidad de energía [22].

Por otro lado, si multiplicamos (3.131) por el proyector Δ_α^β obtenemos

$$\frac{nh_E}{c^2} DU^\alpha = \nabla^\alpha(p + \varpi) - \nabla_\beta p^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{c^2}(p^{(\alpha\beta)} DU_\beta$$

$$- \varpi DU^\alpha - Dq^\alpha - q^\alpha \nabla_\beta U^\beta - q^\beta \nabla_\beta U^\alpha - \frac{1}{c^2} U^\alpha q^\beta DU_\beta - U^\alpha p^{(\beta\gamma)} \nabla_\beta U_\gamma), \quad (3.133)$$

que es la ecuación de balance para la densidad de momento. Además del último término del lado derecho de (3.133) esta ecuación tiene una forma similar a la ecuación de balance no relativista por la densidad de momento [22].

Finalmente la ecuación de balance para el 4-flujo de entropía es

$$\partial_\alpha S^\alpha = \varsigma \geq 0, \quad (3.134)$$

donde ς es la tasa de producción de entropía que debe ser no negativa, para satisfacer la 2da ley de la termodinámica ¹. En términos de los operadores diferenciales D y ∇_α la ecuación anterior puede ser escrita como

$$nDs + \nabla_\alpha \phi^\alpha + \frac{1}{c^2} U_\alpha D\phi^\alpha = \varsigma \geq 0. \quad (3.135)$$

Sin el último término en el lado izquierdo de (3.135) esta ecuación tiene también una forma similar a la ecuación de balance no relativista para la densidad de entropía [22].

¹Por 2da ley se refiere al resultado del teorema H de Boltzman

3.3.5. Termodinámica de un fluido simple.

Partiendo de las ecuaciones anteriores quisiéramos determinar los campos $N^\alpha(x^\beta)$ del 4-flujo y de temperatura $T(x^\beta)$, ya que podemos escogerlos para describir el fluido.

Las ecuaciones de balance utilizadas para determinar estos campos son las leyes de conservación para el 4-flujo de partículas y para el tensor energía-momento (3.30) y (3.31), dadas en la sección 3.1.5.

Las ecuaciones no son ecuaciones de los campos básicos N^α y T , ya que dependen también de cantidades desconocidas: La presión dinámica ϖ , los términos viscosos $p^{(\alpha\beta)}$ y el flujo de calor q^α , además de que debemos conocer la ecuación térmica de estado $p = p(n, T)$ y la ecuación de estado de la energía $e = e(n, T)$ [22].

En lo siguiente se determinarán las ecuaciones constitutivas para las cantidades anteriores en términos de los campos básicos N^α y T , con base en la teoría termodinámica de procesos irreversibles y el uso de la descomposición de Eckart. El punto de partida de esta teoría es la ecuación de Gibbs (3.110) que se escribe en un marco comóvil como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{p}{n^2} \frac{\partial n}{\partial t} \right). \quad (3.136)$$

Dado que en un marco comóvil $\partial/\partial t \equiv U^0 \partial_0$, en un marco de Lorentz arbitrario tenemos $U^\alpha \partial_\alpha \equiv D$ y la ecuación de Gibbs puede ser escrita en términos de la derivada temporal convectiva D como

$$Ds = \frac{1}{T} (De - \frac{p}{n^2} Dn). \quad (3.137)$$

Si eliminamos las derivadas De y Dn y usando la ecuación de balance de la densidad de número de partículas (3.129) y para la densidad de energía (3.132), después de algunos reordenamientos obtenemos

$$nDs + \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{T} \right) + \frac{1}{c^2} U_\alpha D \left(\frac{q^\alpha}{T} \right)$$

$$= -\frac{\varpi}{T}\nabla_{\alpha}U^{\alpha} + \frac{p^{(\alpha\beta)}}{T}\nabla_{\alpha}U_{\beta} - \frac{q^{\alpha}}{T^2}(\nabla_{\alpha}T - \frac{T}{c^2}DU_{\alpha}). \quad (3.138)$$

Esto equivale a la definición de la densidad de entropía fuera del equilibrio como un estado variable relacionado para las otras cantidades de la misma forma que para los estados en equilibrio. Si comparamos (3.135) con (3.138) podemos identificar el flujo de entropía ϕ^{α} y la tasa de producción de entropía en el marco de Eckart como

$$\phi^{\alpha} = \frac{q^{\alpha}}{T} \quad (3.139)$$

$$\varsigma = -\frac{\varpi}{T}\nabla_{\alpha}U^{\alpha} + \frac{p^{(\alpha\beta)}}{T}\nabla_{\alpha}U_{\beta} - \frac{q^{\alpha}}{T^2}(\nabla_{\alpha}T - \frac{T}{c^2}DU_{\alpha}) \geq 0 \quad (3.140)$$

El flujo de entropía de un fluido relativista es justamente el flujo de calor dividido por la temperatura. Este resultado es similar al encontrado en la teoría no relativista [22].

En termodinámica de procesos irreversibles uno llama a cada gradiente una fuerza termodinámica y al factor multiplicado en la expresión de la tasa de producción de entropía, un flujo termodinámico. Por lo tanto uno identifica en (3.140) las cantidades

Fuerzas:

$$\nabla_{\alpha}U^{\alpha}, \nabla^{(\alpha}U^{\beta)}, [\nabla^{\alpha}T - (T/c^2)DU^{\alpha}]$$

Flujos:

$$\varpi, p^{(\alpha\beta)}, q^{\alpha}. \quad (3.141)$$

Además se supone que se sostiene una relación lineal entre los flujos termodinámicos y las fuerzas. En este caso tenemos

$$\varpi = -\eta\nabla_{\alpha}U^{\alpha} \quad (3.142)$$

$$p^{(\alpha\beta)} = 2\mu\nabla^{(\alpha}U^{\beta)} = 2\mu\left[\frac{1}{2}(\Delta_\gamma^\alpha\Delta_\delta^\beta + \Delta_\delta^\alpha\Delta_\gamma^\beta) - \frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta}\Delta_{\gamma\delta}\right]\nabla^\gamma U^\delta \quad (3.143)$$

$$q^\alpha = \lambda(\nabla^\alpha T - \frac{T}{c^2}DU^\alpha), \quad (3.144)$$

que representan las ecuaciones constitutivas para un fluido viscoso y con conducción de calor. Las ecuaciones (3.142) y (3.143) son ecuaciones constitutivas de un fluido viscoso Newtoniano también conocido como la ley de Navier - Stokes [22]. La ecuación (3.144) es la versión relativista de la ley de Fourier [22]. Los coeficientes η , μ y λ se llaman viscosidad de masa, viscosidad de cizallamiento y la conductividad térmica respectivamente. Todos los coeficientes son no negativos de forma tal que la tasa de producción de entropía es siempre positiva.

La ley de Navier Stokes relativista tiene una expresión similar a la no relativista [22], pero la ley de Fourier tiene sus peculiaridades que procedemos a analizar. En un marco local de Lorentz en reposo tenemos de (3.144)

$$q^0 = 0, \quad \vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T \quad (3.145)$$

La ecuación anterior tiene una forma similar a la ley de Fourier no relativista [22]. El termino $-TDU^\alpha/c^2$ en (3.144) no tiene una correspondencia en el caso no relativista, y representa un flujo de calor isotérmico cuando el fluido se acelera. Este término actúa en una dirección opuesta a la aceleración y se dice que es debido a la inercia del calor [15]. También podemos expresar a (3.144) en otra forma eliminando la derivada temporal de la 4-velocidad a través de (3.133) con $\varpi = 0$, $p^{(\alpha\beta)} = 0$ y $q^\alpha = 0$, que caracteriza el llamado fluido Euleriano. En este caso (3.133) puede ser escrita como

$$\frac{nh_E}{c^2}DU^\alpha = \nabla^\alpha p, \quad (3.146)$$

que representa la ecuación de balance para la densidad de momento de un fluido no viscoso y no conductor. Por lo tanto obtenemos de (3.144) y (3.146) que la ecuación constitutiva para el flujo de calor puede ser reescrita

como

$$q^\alpha = \lambda(\nabla^\alpha T - \frac{T}{nh_E} \nabla^\alpha p), \quad (3.147)$$

es decir, incluso para procesos isotérmicos existe un flujo de calor debido a un gradiente de presión. Esto se ha interpretado como un efecto puramente relativista ya que (3.146) sólo vale en este régimen.

Se ha visto [16] que el término de aceleración es el causante de inestabilidades genéricas debido a fluctuaciones cerca del equilibrio, que cuestionaban la validez de las teorías de primer orden [18]. De hecho estas inestabilidades se pretenden resolver con teorías alternativas de segundo orden o con la hidrodinámica de Israel-Stewart [43] que considera campos adicionales a los campos básicos. También existe el esquema de Meixner Prigogine relativista, donde se considera el tensor energía-momento sin flujo de calor, para obtener el flujo de energía mecánico [25]. Se ha argumentado que solo el tensor energía-momento debe contener a toda la energía mecánica obteniendo [25]

$$q_M^\nu = \frac{nec^2 U^\nu}{\sqrt{\eta_{00}}} - cp\eta^{0\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{\eta_{00}}} pU^\nu.$$

Después se introduce el 4-flujo de energía interna y el 4-flujo de calor, obteniendo un flujo de energía total dividido en tres factores: el flujo de energía mecánico, el flujo de energía interna y el flujo de calor [25],

$$q_T^\nu = \frac{nec^2 U^\nu}{\sqrt{\eta_{00}}} - cp\eta^{0\nu} + \frac{\gamma}{\sqrt{\eta_{00}}} pU^\nu + neh_E U^\nu + q^\nu.$$

Posteriormente obtienen la ecuación constitutiva dada por [25]

$$q_{[Q]}^\nu = -k\eta^{\mu\nu} T_{;\nu}$$

k es el término de conductividad.

Esto nos lleva a preguntarnos si realmente el esquema de Eckart a primer orden necesita complementarse de estos enfoques, o bien si es autoconsistente.

3.3.6. Descomposición de Landau-Lifshitz

En el esquema de Landau-Lifshitz [47] se propone una descomposición alternativa para el 4-flujo de partículas a diferencia del 4-flujo en la descomposición de Eckart (3.111), proponiendo lo siguiente

$$N^\alpha = n_L U_L^\alpha + \mathcal{J}^\alpha. \quad (3.148)$$

También para el tensor energía-momento se propone que

$$T^{\alpha\beta} = p_L^{\leq\alpha\beta} - (p_L + \bar{w}_L)\Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{e_L n_L}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta, \quad (3.149)$$

donde el índice L se refiere a las cantidades definidas por Landau-Lifshitz. El proyector para este caso es

$$\Delta_L^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} U_L^\alpha U_L^\beta. \quad (3.150)$$

El 4-vector \mathcal{J}^α denota la parte fuera del equilibrio del flujo de partículas, el cual es perpendicular a la 4-velocidad, esto es $\mathcal{J}_\alpha U_L^\alpha = 0$. Se mostrará que para los procesos cerca del equilibrio \mathcal{J}^α esta relacionado con el flujo de calor q^α de la descomposición de Eckart. Con el fin de relacionar ambas descomposiciones se escribe

$$U_L^\alpha = U^\alpha + \mathcal{U}^\alpha \quad (3.151)$$

donde \mathcal{U}^α representa una cantidad que no está en equilibrio; los productos $\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha$ pueden despreciarse. Por lo tanto para procesos cerca del equilibrio tenemos que

$$U_L^\alpha U_{L\alpha} = c^2 = (U^\alpha + \mathcal{U}^\alpha)(U_\alpha + \mathcal{U}_\alpha) \approx c^2 + 2U^\alpha \mathcal{U}_\alpha \quad (3.152)$$

Esto último implica que U^α y \mathcal{U}^α en esta aproximación son perpendiculares entre sí. Si se toma el producto escalar de (3.151) por U_α obtenemos por el uso de $U^\alpha \mathcal{U}_\alpha = 0$ que $U_L^\alpha U_\alpha = c^2$.

Por otro lado el 4-flujo de partículas se puede escribir como

$$N^\alpha = nU^\alpha = n_L U_L^\alpha + \mathcal{J}^\alpha. \quad (3.153)$$

Si tomamos el producto escalar de (3.153) por $U_{L\alpha}$ y usamos la relación $\mathcal{J}^\alpha U_{L\alpha} = 0$, $U^\alpha U_{L\alpha} = U_L^\alpha U_{L\alpha} = c^2$ tenemos que

$$n = n_L; \quad (3.154)$$

esto es para procesos cercanos al equilibrio, para lo que la densidad de número de partículas no dependerá de la descripción elegida. Ahora introduciendo (3.151) en (3.153) y considerando (3.154), tenemos que

$$\mathcal{U}^\alpha = -\frac{\mathcal{J}^\alpha}{n}. \quad (3.155)$$

Análogamente para el tensor energía-momento, tenemos de (3.112) que

$$T^{\alpha\beta} = p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(U^\alpha q^\beta + U^\beta q^\alpha) + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta.$$

Con el uso de (3.153), despreciando todos los términos no lineales $\mathcal{J}^\alpha \mathcal{J}^\beta$, $\varpi_L \mathcal{J}$ y considerando la definición de la entalpía por partícula $h_E^L = e_L + \frac{p_L}{n_L}$ tenemos que (3.149)

$$T^{\alpha\beta} = p_L^{<\alpha\beta>} - (p_L + \varpi_L)\Delta_L^{\alpha\beta} - \frac{h_E^L}{c^2}(U^\alpha \mathcal{J}^\beta + U^\beta \mathcal{J}^\alpha) + \frac{e_L n_L}{c^2}U_L^\alpha U_L^\beta. \quad (3.156)$$

Comparando (3.156) con (3.112) se llega a la conclusión de que

$$p_L = p, \quad e_L = e, \quad \varpi_L = \varpi, \quad p_L^{<\alpha\beta>} = p^{<\alpha\beta>}, \quad \mathcal{J}^\alpha = -\frac{1}{h_E}q^\alpha.$$

Es decir, que la presión hidrodinámica, la energía por partícula, la presión dinámica y las componentes viscosas del tensor de presiones son las mismas en ambas descripciones en procesos cerca del equilibrio, mientras que la parte fuera del equilibrio del 4-flujo de partículas \mathcal{J} en la descomposición de Landau-Lifshitz, está relacionada con el flujo de calor q^α en la descomposición de Eckart.

Considerando los resultados anteriores podemos reescribir el 4-flujo de partículas y el tensor energía-momento en la descomposición de Landau-Lifshitz para procesos cerca del equilibrio como

$$N^\alpha = nU_L^\alpha - \frac{q^\alpha}{h_E} \quad (3.157)$$

$$T^{\alpha\beta} = p^{<\alpha\beta>} - (p + \bar{w})\Delta_L^{\alpha\beta} + \frac{en}{c^2}U_L^\alpha U_L^\beta. \quad (3.158)$$

Es interesante describir la relación entre las 4-velocidades de Eckart U^α y Landau-Lifshitz U_L^α y el flujo de calor q^α . Combinando (3.147), (3.151) y $\mathcal{J}^\alpha = -\frac{1}{h_E}q^\alpha$, tenemos que

$$U^\alpha = U_L^\alpha - \frac{1}{nh_E}q^\alpha. \quad (3.159)$$

Un punto importante a notar aquí es que el marco está pensado para procesos cercanos al equilibrio (3.152). Indicando que $\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha \approx 0$ (ver 3.152) ó bien $\frac{1}{n^2}q^\alpha q_\alpha$. Como veremos en el próximo capítulo, esta restricción limita los posibles marcos de referencia donde se realizan transformaciones de Lorentz.

Capítulo 4

Análisis de las condiciones de un fluido con conducción de calor para la anulación del flujo de calor a través de las transformaciones de Lorentz

El flujo de calor en un fluido relativista es una cantidad que forma parte de el tensor energía-momento. Consideremos dos marcos inerciales conectados por una transformación de Lorentz, de forma tal que en uno de ellos el fluido tiene un cierto flujo de calor en alguna dirección y en el otro sistema de referencia no. Esto querría decir que a través de una transformación entre sistemas de referencia, podríamos convertir un tipo de energía no mecánica en puramente mecánica. Más precisamente tendríamos intercambios de flujos convectivos en no convectivos y viceversa. A continuación se lleva a cabo este análisis para diferentes direcciones del flujo de calor y para diferentes transformaciones de Lorentz en distintas direcciones.

4.1. El flujo de calor en la teoría cinética no relativista.

Desde el punto de vista de la teoría cinética relativista no hay objeción para introducir al flujo de calor en el tensor de energía-momento [17, 22]. Sin embargo existe una sutileza que debemos considerar y que podemos ver claramente en la teoría cinética no relativista.

En este caso un flujo de energía se puede escribir como [48] :

$$\frac{1}{2} \int v_i v^2 f dv = u_i \left(\frac{1}{2} n m u^2 + e \right) + u_i p_{ij} + \frac{1}{2} \int c_i c^2 f dv \quad (4.1)$$

donde v es la velocidad molecular, u velocidad hidrodinámica de las moléculas, c velocidad caótica (que es la velocidad molecular en el marco comóvil), nm la densidad de masa, e la energía y p la presión. Se tienen tres términos en (4.1). El primero de ellos es el flujo por convección macroscópica y el segundo debe ser interpretado macroscópicamente debido al trabajo realizado por los esfuerzos por unidad de tiempo. El tercer término representa otro tipo de flujo de energía, el término adicional es usualmente llamado el vector de flujo de calor, y se denota por q :

$$q_i = \frac{1}{2} \int c_i c^2 f dv \quad (4.2)$$

en donde este juega el mismo papel como el vector de flujo de calor en las ecuaciones macroscópicas. El nombre de flujo de calor es algo engañoso para este término, porque hay situaciones cuando $q \neq 0$ y la temperatura es prácticamente constante en todas partes, en este caso uno tiene que hablar de un flujo de calor a temperatura constante. Una denominación más apropiada para este término sería flujo de energía no convectivo aunque no se utiliza usualmente [48].

4.2. Flujo de energía convectivo inducido por una transformación de Lorentz

Como vimos en el capítulo 3 el tensor energía momento de un fluido no viscoso y sin conducción de calor en el sistema comóvil del fluido es (3.22):

$$T^{\epsilon\sigma} = \begin{pmatrix} ne & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

donde en principio, $p_1 \neq p_2 \neq p_3$; permitimos presiones anisotrópicas tal que en lugar de la ec. (3.119), que es

$$p = -\frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta},$$

tendríamos que

$$p_1 + p_2 + p_3 = -\Delta_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}.$$

Cuando queremos estudiar el comportamiento del fluido desde otro sistema de referencia inercial que se mueve respecto al marco comóvil del fluido con una velocidad \vec{v} , realizamos la siguiente transformación de Lorentz:

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\epsilon}^{\alpha}\Lambda_{\sigma}^{\beta}T^{\epsilon\sigma} \quad (4.3)$$

donde

$$\Lambda_{\epsilon}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\gamma = (1-\beta)^{-1/2}$, $\beta = \frac{v}{c}$, y se escogió que $\vec{v} = \hat{i}v$, es decir sólo en dirección x .

Dado que más adelante realizaremos cálculos similares con tensores con más componentes decidimos escribir una rutina en el paquete Mathematica, de manipulación algebraica, para realizar una simplificación del producto de matrices, el cual escribimos como

$$\mathbb{T} = \Lambda \mathbb{T} \Lambda^T.$$

Esto da como resultado:

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma^2(p_1\beta^2 + en) & -\beta\gamma^2(en + p_1) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma^2(en + p_1) & \gamma^2(en\beta^2 + p_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

De estas componentes podemos identificar las densidades y flujos macroscópicos vistos en este marco que se mueve respecto al fluido, los cuales denotamos con una barra:

$$\bar{n}e = \gamma^2(p_1\beta^2 + en) \tag{4.4}$$

$$\bar{q}_1 = -\beta\gamma^2(en + p_1) \tag{4.5}$$

$$\bar{p}_1 = \gamma^2(en\beta^2 + p_1) \tag{4.6}$$

$$\bar{p}_2 = p_2 \tag{4.7}$$

$$\bar{p}_3 = p_3. \tag{4.8}$$

Además de la transformación de la densidad de energía y la presión en la dirección del movimiento, vemos que aparece un flujo de energía en la dirección opuesta al movimiento dado por la ecuación (4.5),

$$\bar{q}_C = -\beta\gamma^2(ne + p_1).$$

Este es un flujo convectivo y está relacionado con las fuentes ne y p_1

4.3. Condiciones para la anulación del flujo de energía, en un marco que se mueve respecto al fluido

Consideremos ahora un fluido con conducción de calor representado por el siguiente tensor de energía-momento

$$T^{\epsilon\sigma} = \begin{pmatrix} ne & q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix},$$

donde suponemos que el flujo de calor sólo tiene componentes en dirección x y q_1 es una fuente no convectiva del flujo de energía en el marco comóvil al fluido. Ahora consideramos la transformación de Lorentz en la misma dirección del flujo de calor,

$$\Lambda_{\epsilon}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando esta transformación dada por (4.3), el tensor de energía momento en un marco que se mueve en dirección x con velocidad v es:

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} [ne + \beta(p_1\beta - 2q_1)]\gamma^2 & [q_1\beta^2 - (ne + p_1)\beta + q_1]\gamma^2 & 0 & 0 \\ [q_1\beta^2 - (ne + p_1)\beta + q_1]\gamma^2 & [p_1 + \beta(ne\beta - 2q_1)]\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Queremos saber cual es la condición para que en este sistema de referencia el flujo de calor sea igual a cero, es decir que la componente del flujo de calor del tensor energía-momento sea $\bar{q}_1 = 0$. Para ver que condiciones cumplen con esto nos damos a la tarea de identificar las componentes

$$\bar{n}\bar{e} = [ne + \beta(p_1\beta - 2q_1)]\gamma^2 \quad (4.9)$$

$$\bar{p}_1 = [p_1 + \beta(ne\beta - 2q_1)]\gamma^2 \quad (4.10)$$

$$\bar{q}_1 = [q_1\beta^2 - (ne + p_1)\beta + q_1]\gamma^2. \quad (4.11)$$

Tenemos que en (4.11) es un flujo de calor transformado que contiene un flujo convectivo más un flujo no convectivo y que es proporcional a la magnitud del flujo de calor no convectivo q_1 en el marco comovil. Es decir que

$$\bar{q}_T = \bar{q}_C + \bar{q}_{NC}$$

donde

$$\bar{q}_C = -\beta\gamma^2(ne + p_1)$$

$$\bar{q}_{NC} = q_1\gamma^2(1 + \beta^2)$$

Ahora, para encontrar qué condiciones debe tener un fluido relativista en un marco de referencia que se mueve respecto al fluido, para que cumpla que en el sistema transformado el flujo total de calor se anule, $\bar{q}_1 = 0$, en la ecuación (4.11) igualamos a cero

$$q_1\beta^2 - (ne + p_1)\beta + q_1 = 0. \quad (4.12)$$

Si introducimos la variable

$$\alpha = \frac{q_1}{ne + p_1},$$

entonces, resta resolver la ecuación cuadrática (4.13) que en términos de α se reescribe como

$$\alpha\beta^2 - \beta + \alpha = 0. \quad (4.13)$$

Calculando sus raíces, obtenemos

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha}. \quad (4.14)$$

Para entender el comportamiento de las soluciones (4.14), analizamos todos los posibles valores de α que permitan tener una velocidad β aceptable

Caso $\alpha = 0$.

Claramente la raíz positiva diverge en el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha} \rightarrow \infty.$$

Para la raíz negativa podemos utilizar la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta^- &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-(1 - 4\alpha^2)^{-1/2}(-8\alpha)}{2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4\alpha}{\sqrt{1 - 4\alpha^2}} = 0. \end{aligned}$$

Caso $\alpha > 0$. Este caso tiene dos subcasos.

Subcaso 1: $\alpha \geq 1$

Para las 2 raíces es claro que $\beta \in \mathbb{C}$

Subcaso 2: $0 < \alpha < 1$

En este subcaso nos damos cuenta para que β no sea un número imaginario debe cumplir que en sus raíces el discriminante sea

$$(1 - 4\alpha^2) \geq 0 \Rightarrow 4\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$$

Entonces la condición para esto es que

$$\alpha \leq \frac{1}{2}$$

En particular tenemos que para el caso $\alpha = \frac{1}{2}$ que $\beta = 1$, correspondiente a la velocidad de la luz, la cual no define una transformación de Lorentz [4].

Ahora analizamos el caso $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Para ello consideremos un número poco menor que $\frac{1}{2}$, es decir,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \epsilon$$

donde ϵ es muy pequeño. Entonces

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{1}{4} + \epsilon^2 - \epsilon)}}{2(1 - \epsilon)}.$$

Si no tomamos en cuenta términos cuadráticos en ϵ , tenemos

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{1}{4} - \epsilon)}}{2(1 - \epsilon)}.$$

Entonces,

$$\beta = \frac{1 \pm 2\sqrt{\epsilon}}{1 - 2\epsilon} = (1 \pm 2\sqrt{\epsilon})(1 - 2\epsilon)^{-1}.$$

como $2\sqrt{\epsilon} < 1$ podemos utilizar el teorema del binomio para aproximar el término del denominador; por lo tanto

$$\begin{aligned}\beta &\approx (1 \pm 2\sqrt{\epsilon})(1 + 2\epsilon) \\ \beta &\approx 1 \pm 2\sqrt{\epsilon} + 2\epsilon \pm 4\epsilon^{3/2} \\ \Rightarrow \beta &\approx 1 \pm 2\sqrt{\epsilon} + 2(\sqrt{\epsilon})^2 \pm 4(\sqrt{\epsilon})^3.\end{aligned}$$

Desechando términos de orden superior en ϵ , llegamos a que

$$\beta \approx 1 + 2\sqrt{\epsilon} > 1$$

y

$$\beta \approx 1 - 2\sqrt{\epsilon} < 1.$$

Notamos que la raíz positiva nos da velocidades superiores a la de la luz, por lo que queda descartado. Sin embargo la raíz negativa permite velocidades menores a la de la luz, es decir $0 < \beta < 1$. Esta es una velocidad aceptable.

Caso $\alpha < 0$. Este caso es análogo a el caso $\alpha > 0$ pero con signo negativo.

Subcaso 1. Para valores $\alpha \leq 1$, obtenemos $\beta \in \mathbb{C}$

Subcaso 2. $-1 < \alpha < 0$

Utilizando la condición $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ por los argumentos ya comentados, tenemos que

$$-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$$

Para el caso $\alpha = -\frac{1}{2}$ en particular tenemos que $\beta = -1$, el cual no es un vector aceptable, ya que se trata de la magnitud de la velocidad.

En el caso restringido $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, análogamente a el caso $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (la diferencia es solo un signo), tenemos

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \epsilon,$$

y por los mismos argumentos ya dichos tenemos que

$$\beta \approx -1 - 2\sqrt{\epsilon} < 0$$

$$\beta \approx -1 + 2\sqrt{\epsilon} < 0,$$

los cuales son físicamente permitidos. Las gráficas de $\beta(\alpha)$ se muestran en las figuras 4.1 y 4.2. Podemos observar que hay dos regiones para los valores de β , una con $\beta \geq 1$ que sería una región prohibida por la relatividad especial y otra con $0 \leq \beta < 1$.

Sabemos que $\alpha = \frac{q_1}{ne + p_1}$ y con lo analizado anteriormente podemos decir que cuando $\alpha = 0 \iff q_1 = 0$ ya que $ne \neq 0$. En este caso tenemos un fluido perfecto y de polvo; en estos casos no existe una transformación de Lorentz tal que $\bar{q}_1 = 0$, ya que el único valor permitido es $\beta = 0$.

En el caso $\alpha \geq 1$ ó $\frac{q_1}{ne + p_1} \geq 1$ para fluidos con $q \geq ne + p_1$, no existe ninguna transformación de Lorentz tal que $\bar{q}_1 = 0$.

El caso $\alpha = \frac{1}{2}$ ó $\frac{q_1}{ne + p_1} = \frac{1}{2}$ corresponde a fluidos que cumplan $q = \frac{1}{2}(ne + p_1)$; no existe una transformación de Lorentz en este caso ya que $\beta = 1$ cuando $\bar{q}_1 = 0$ y esto sería sólo para fotones.

Finalmente en el caso en que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ó $0 < \frac{q_1}{ne + p_1} < \frac{1}{2}$ para fluidos que cumplen con la condición $q < \frac{1}{2}(ne + p_1)$ tenemos que si hay una transformación de Lorentz tal que $0 < \beta < 1$ cuando $\bar{q}_1 = 0$.

Podemos entonces afirmar que:

$$\bar{q}_1 = 0 \iff q_1 < \frac{1}{2}(ne + p_1).$$

Esto lo podemos interpretar de la siguiente manera:

Para que en un sistema de referencia inercial, conectado a través de una transformación de Lorentz con el marco cómovil del fluido, se mida un flujo de calor o en general flujos de energía nulo es necesario que las propiedades del fluido en el marco comóvil cumplan que

$$q_1 < \frac{1}{2}(ne + p_1); \quad (4.15)$$

este es el principal resultado de esta sección.

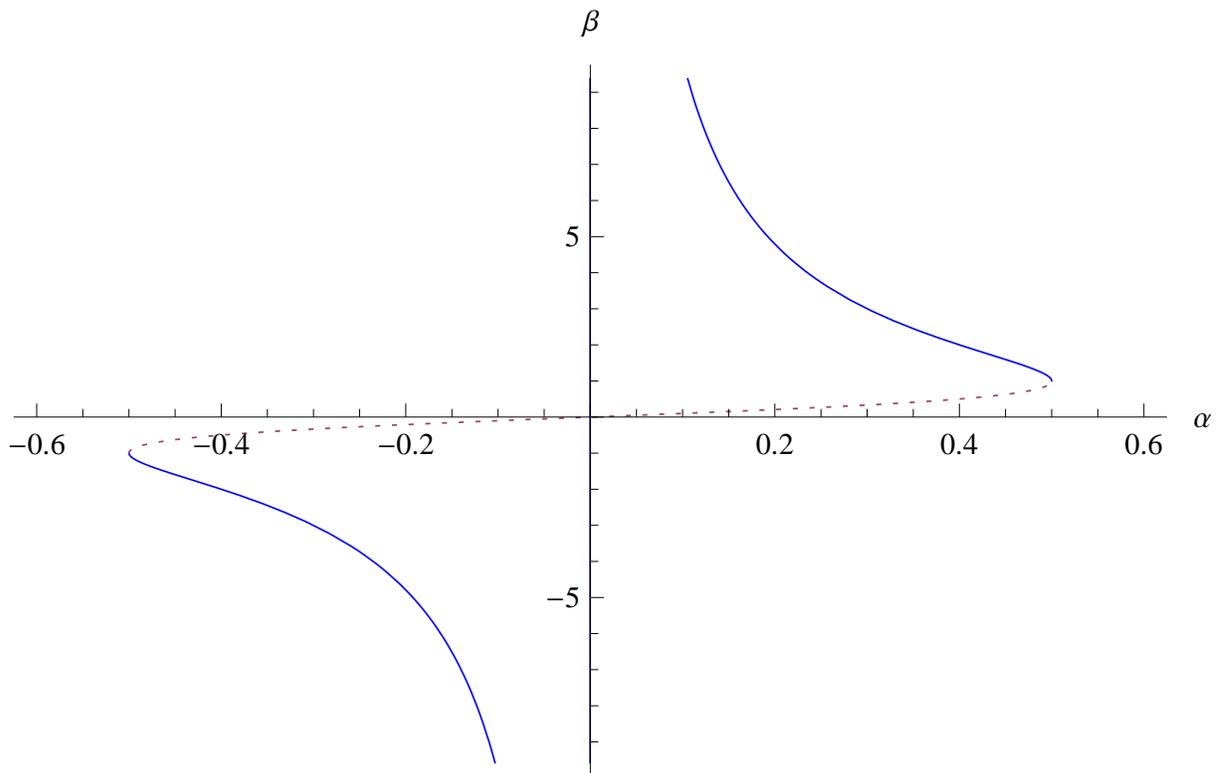


Figura 4.1: Donde $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha}$ se representa por la parte de la curva punteada y $\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2\alpha}$ es la curva azul.

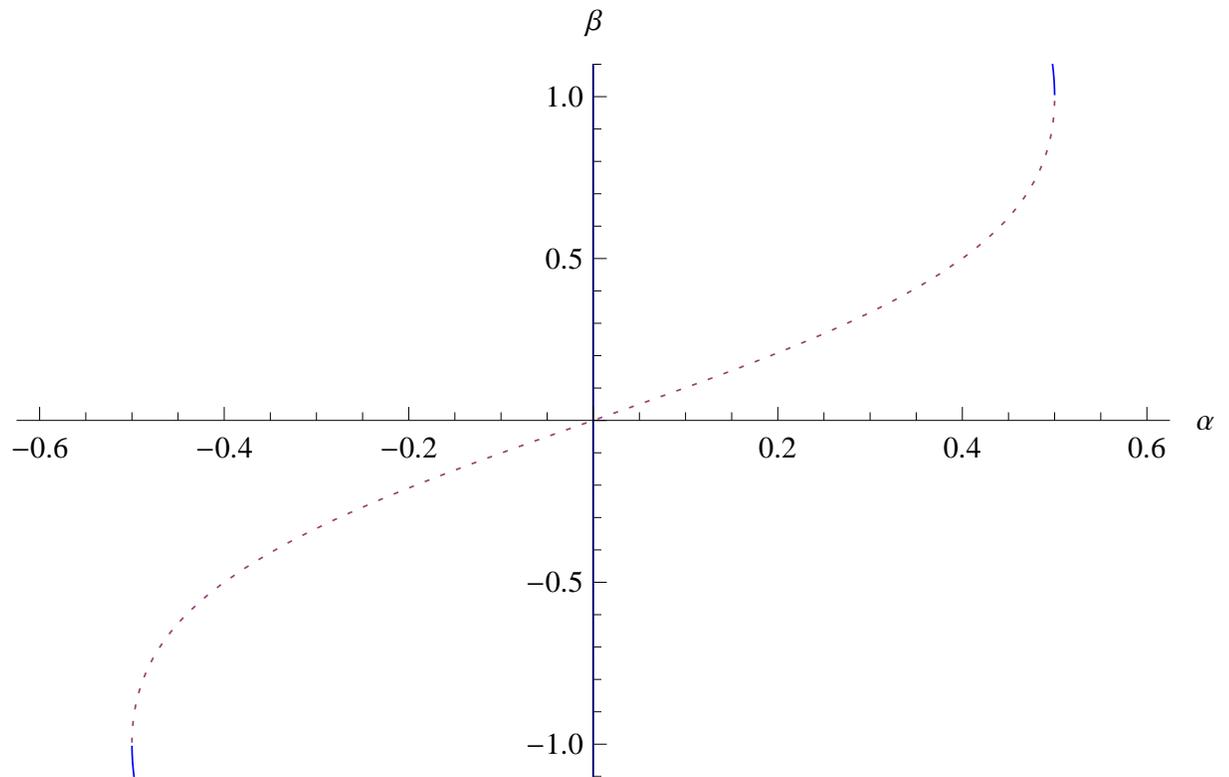


Figura 4.2: Aquí se hace un acercamiento de la figura anterior en la región físicamente permitida.

4.4. Flujo de calor en dirección x bajo una transformación de Lorentz en dirección y

Ahora nos preguntamos si puede existir un flujo de calor nulo cuando el flujo de calor q en el marco comóvil va en dirección x y la transformación de Lorentz en dirección y .

Tenemos que

4.4. FLUJO DE CALOR BAJO TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ 93

$$T^{\alpha\epsilon} = \begin{pmatrix} ne & q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

y la transformación de Lorentz al sistema móvil es ahora

$$\Lambda_{\epsilon}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El tensor energía-momento en el marco que se mueve respecto al fluido tiene la forma

$$\bar{T}^{\alpha\epsilon} = \begin{pmatrix} \gamma^2(p_2\beta^2 + ne) & \gamma q_1 & -\beta\gamma^2(ne + p_2) & 0 \\ \gamma q_1 & p_1 & -\beta\gamma q_1 & 0 \\ -\beta\gamma^2(ne + p_2) & -\beta\gamma q_1 & \gamma^2(ne\beta^2 + p_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Identificando las componentes tenemos que

$$\bar{n}e = \gamma^2(p_2\beta^2 + ne) \quad (4.16)$$

$$\bar{q}_1 = q_1\gamma \quad (4.17)$$

$$\bar{q}_2 = -\beta\gamma^2(ne + p_2) \quad (4.18)$$

$$\bar{\sigma}_1 = -q_1\beta\gamma \quad (4.19)$$

$$\bar{p}_1 = p_1 \quad (4.20)$$

$$\bar{p}_2 = \gamma^2(ne\beta^2 + p_2) \quad (4.21)$$

$$\bar{p}_3 = p_3 \quad (4.22)$$

Se observa que cuando el flujo de calor va en una dirección diferente a la de una transformación de Lorentz ocurre que una componente del flujo de calor es puramente convectiva y otra es puramente no convectiva ,

$$\bar{q}_2 = -\beta\gamma^2(ne + p_2) \text{ y } \bar{q}_1 = q_1\gamma.$$

Ahora observamos que (4.16) y (4.17) son componentes del flujo de calor en el otro marco, es decir

$$\vec{\bar{q}} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3).$$

Una manera de alcanzar nuestro objetivo de mezclar los flujos tal que se anulan es pedir que la magnitud del flujo de calor sea cero. Por lo tanto en este caso, usando (4.16) y (4.17),

$$\vec{\bar{q}} \cdot \vec{\bar{q}} = \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \bar{q}_3^2 = \gamma^2 q_1^2 + \beta^2 \gamma^4 (ne + p_1)^2 = 0,$$

y obtenemos

$$\Rightarrow \beta^2 \gamma^2 = -\frac{q_1^2}{(ne + p_2)^2}$$

$$\Rightarrow \beta\gamma = i\frac{q_1}{ne + p_2}.$$

Si

$$\alpha = \frac{q_1}{ne + p_2}, \quad (4.23)$$

entonces

$$i\alpha = \beta\gamma.$$

4.4. FLUJO DE CALOR BAJO TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ 95

Recordando que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, escribimos la expresión sólo en términos de β , obteniendo

$$\begin{aligned}
 i\alpha &= \beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
 (i\alpha)^2 &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\
 \Rightarrow -\alpha^2 &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \Rightarrow -\alpha^2(1-\beta^2) = \beta^2 \\
 \Rightarrow \beta^2 &= -\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \Rightarrow \beta^2 + \alpha^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \\
 &\Rightarrow \beta^2(1-\alpha^2) + \alpha^2 = 0 \\
 \beta^2 &= \frac{-\alpha^2}{(1-\alpha^2)} \\
 \beta^2 &= \sqrt{\frac{-\alpha^2}{\alpha^2(1-\alpha^2)}} \\
 \therefore \beta &= \sqrt{\frac{1}{(1-\frac{1}{\alpha^2})}}. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

En la figura 4.3 se observa la gráfica de esta raíz.

Analizando tenemos los siguientes casos:

Caso $\alpha = 0$

Es claro que para las dos raíces tenemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta^\pm = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}} = 0i.$$

Caso $\alpha = \pm 1$

Para las dos raíces tenemos que

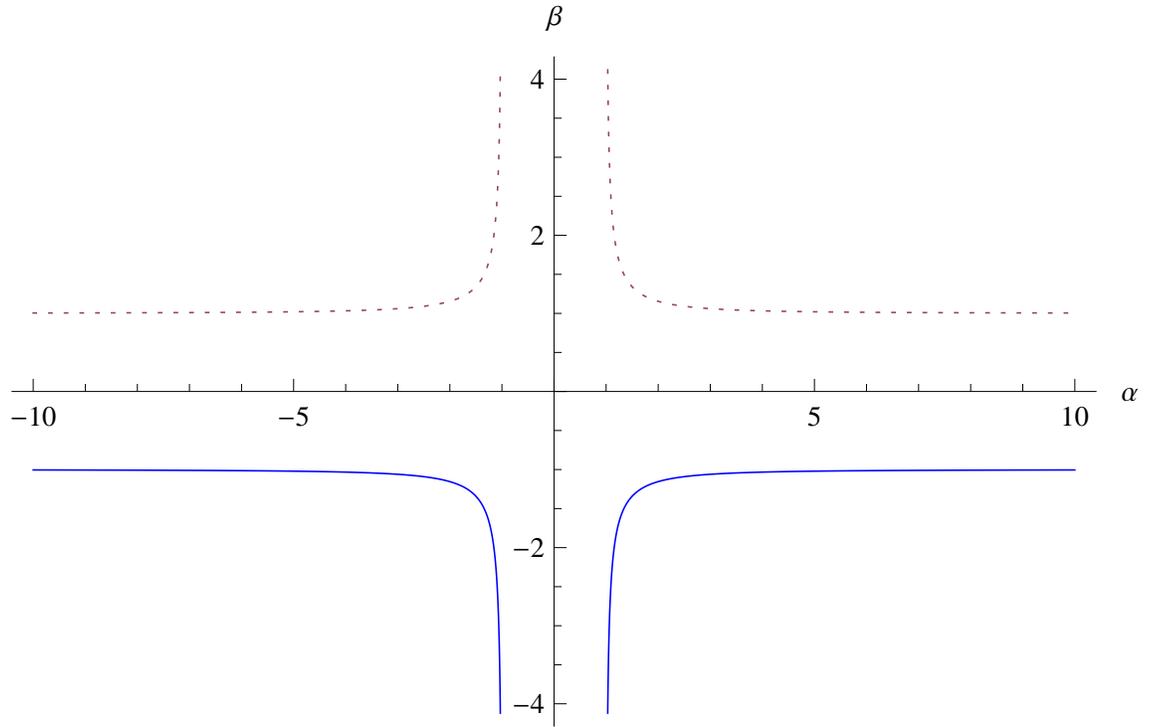


Figura 4.3: Donde $\beta = +\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}$ se representa por la curva punteada y

$\beta = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}$ es la curva azul

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \beta^{\pm} = \lim_{\alpha \rightarrow \pm 1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}} = \pm\infty.$$

Caso $0 < \alpha < 1$

Suponiendo $\alpha = 1 - \epsilon$, donde ϵ es muy pequeño

$$\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1-\epsilon^2}}} \cong \pm \frac{1}{\sqrt{1-(1+2\epsilon)}} = \pm(1-1-2\epsilon)^{-1/2}$$

$$\beta \pm \frac{1}{\sqrt{-2\epsilon}} = \mp \frac{i}{\sqrt{2\epsilon}}$$

Como todo es imaginario ningún caso cumple con la condición que nos indica la relatividad especial, que $0 < \beta < 1$, para que exista la transformación de Lorentz.

Por tanto, en el caso en el que el flujo de calor va en dirección ortogonal a la transformación de Lorentz, no se puede anular el flujo de calor en el marco transformado.

4.5. Flujo de energía convectivo inducido por una transformación de Lorentz en 2-Dimensiones

Análogamente a lo que se hizo en la sección 4.2, se calculará la transformación de Lorentz para un fluido perfecto, pero ahora se hará para cualquier dirección en 2-dimensiones[49], x ó y . Para simplificar el cálculo recurrimos a una parametrización angular donde ahora la transformación de Lorentz toma la forma

$$\Lambda_\epsilon^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos \delta & -\gamma\beta \sin \delta & 0 \\ -\gamma\beta \cos \delta & \gamma \cos^2 \delta + \sin^2 \delta & (\gamma - 1) \sin \delta \cos \delta & 0 \\ -\gamma\beta \sin \delta & (\gamma - 1) \sin \delta \cos \delta & \gamma \sin^2 \delta + \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la que δ es el ángulo que se mide en el marco móvil respecto a el no móvil.

Calculando la transformación de Lorentz, tenemos

$$\bar{T}^{\epsilon\sigma} = \begin{pmatrix} \bar{n}e & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & 0 \\ \bar{q}_1 & \bar{p}_1 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ \bar{q}_2 & \bar{\sigma}_1 & \bar{p}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{p}_3 \end{pmatrix},$$

donde identificamos las cantidades macroscópicas en el marco transformado,

$$\bar{n}e = \gamma^2[\beta^2 p_1 \cos^2(\delta) + en + \beta^2 \sin^2(\delta)p_2]$$

$$\bar{q}_1 = \beta\gamma \cos(\delta)[-(\gamma - 1)p_2 \sin^2(\delta) - en\gamma - (\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))p_1]$$

$$\bar{q}_2 = \beta\gamma \sin(\delta)[-(\gamma - 1)p_1 \cos^2(\delta) - en\gamma - (\cos^2(\delta) + \gamma \sin^2(\delta))p_2]$$

$$\bar{p}_1 = en\beta^2\gamma^2 \cos^2(\delta) + (\gamma - 1)^2 \sin^2(\delta)p_2 \cos^2(\delta) + (\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))^2 p_1$$

$$\bar{p}_2 = en\beta^2\gamma^2 \sin^2(\delta) + (\gamma - 1)^2 \cos^2(\delta)p_1 \sin^2(\delta) + (\cos^2(\delta) + \gamma \sin^2(\delta))^2 p_2$$

$$\bar{\sigma}_1 = \cos(\delta) \sin(\delta)[en\beta^2\gamma^2 + (\gamma - 1)(\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))p_1 + (\gamma - 1)(\cos^2(\delta) + \gamma \sin^2(\delta))p_2]$$

$$\bar{p}_3 = \bar{p}_3.$$

Si consideramos la presión isotrópica, esto es, $p = p_1 = p_2 = p_3$, tenemos que las ecuaciones anteriores se reducen considerablemente:

$$\bar{n}e = (p\beta^2 + en)\gamma^2$$

$$\bar{q}_1 = -(en + p)\beta\gamma^2 \cos(\delta)$$

$$\bar{q}_2 = -(en + p)\beta\gamma^2 \sin(\delta)$$

$$\bar{p}_1 = p\gamma^2 \cos^4(\delta) + [en\beta^2\gamma^2 + p(\gamma^2 + 1) \sin^2(\delta)] \cos^2(\delta) + p \sin^4(\delta)$$

$$\bar{p}_2 = p \cos^4(\delta) + p(\gamma^2 + 1) \sin^2(\delta) \cos^2(\delta) + \gamma^2 \sin^2(\delta)(en\beta^2 + p \sin^2(\delta))$$

$$\bar{\sigma}_1 = en\beta^2 + p(\gamma^2 - 1)] \cos(\delta) \sin(\delta)$$

$$\bar{p}_3 = \bar{p}_3.$$

Estas son las cantidades termodinámicas vistas en un sistema que se mueve respecto al fluido en cualquier dirección x ó y , como se muestra en la figura

4.4

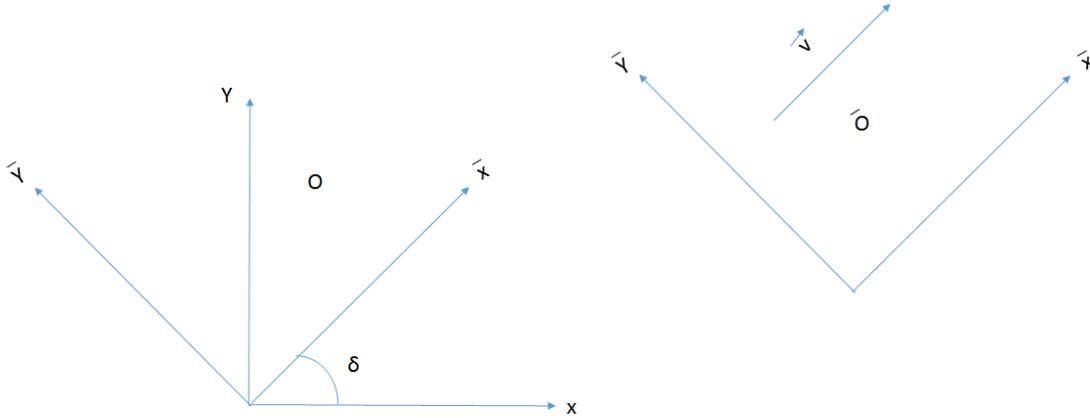


Figura 4.4: Rotación de un marco de coordenadas

Tenemos que para los dos flujos de calor q_1 y q_2 tenemos un flujo de energía convectivo, como era de esperarse por el cálculo de la sección 4.2, es decir,

$$\bar{q}_{1c} = -(en + p)\beta\gamma^2 \cos(\delta)\hat{i} \quad (4.25)$$

$$\bar{q}_{2c} = -(en + p)\beta\gamma^2 \sin(\delta)\hat{j}, \quad (4.26)$$

donde el flujo convectivo total es

$$\vec{\bar{q}}_c = \bar{q}_{1c}\hat{i} + \bar{q}_{2c}\hat{j} \quad (4.27)$$

4.6. Condiciones de flujo de energía nulo en un marco que se mueve respecto al fluido en 2-dimensiones

Análogamente a la sección 4.3, pero en 2 dimensiones, es decir, ahora la transformación de Lorentz puede ser dirección x ó y y el flujo de calor en dirección x ó y . Para simplificar el calculo de nuevo recurrimos a una parametrización angular donde la transformación de Lorentz toma la forma

$$\Lambda_\epsilon^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos \delta & -\gamma\beta \sin \delta & 0 \\ -\gamma\beta \cos \delta & \gamma \cos^2 \delta + \sin^2 \delta & (\gamma - 1) \sin \delta \cos \delta & 0 \\ -\gamma\beta \sin \delta & (\gamma - 1) \sin \delta \cos \delta & \gamma \sin^2 \delta + \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando esta transformación de Lorentz, el tensor energía-momento en un marco que se puede mover en cualquiera de las direcciones x ó y con velocidad v resulta

$$T^{\bar{\epsilon}\sigma} = \begin{pmatrix} \bar{n}e & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & 0 \\ \bar{q}_1 & \bar{p}_1 & \bar{\sigma}_1 & 0 \\ \bar{q}_2 & \bar{\sigma}_1 & \bar{p}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{p}_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\bar{n}e = \gamma^2(p\beta^2 - 2 \cos(\delta)q_1\beta - 2 \sin(\delta)q_2\beta + en)$$

$$\bar{q}_1 = \gamma[(1 + \beta^2)\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta)q_1 + \cos(\delta)(\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_2 \sin(\delta) \cos(\delta)] - (ne + p)\beta\gamma^2 \cos(\delta)$$

$$\bar{q}_2 = \gamma[((1 + \beta^2)\gamma \sin^2(\delta) + \cos(\delta))q_2 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_1 \sin(\delta) \cos(\delta)] - (ne + p)\beta\gamma^2 \sin(\delta)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2}[en\beta^2\gamma^2 + p\gamma^2 + en\beta^2 \cos(2\delta)\gamma^2 + p\cos(2\delta)\gamma^2 - 4\beta\cos(\delta)(\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))q_1\gamma - 4\beta(\gamma - 1) \cos^2(\delta) \sin(\delta)q_2\gamma + p - p\cos(2\delta)]$$

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2}[en\beta^2\gamma^2 + p\gamma^2 - en\beta^2 \cos(2\delta)\gamma^2 - p\cos(2\delta)\gamma^2 - 4\beta \sin(\delta)(\cos^2(\delta) + \gamma \sin^2(\delta))q_2\gamma - 4\beta(\gamma - 1) \cos^2(\delta) \sin(\delta)q_1\gamma + p + p\cos(2\delta)]$$

$$\bar{\sigma}_1 = \cos(\delta)[(en\beta^2\gamma^2 + p(\gamma^2 - 1)) \sin(\delta) + \beta\gamma((\gamma - 1) \cos(2\delta) - \gamma)q_2] - \beta\gamma(\gamma + (\gamma - 1) \cos(2\delta)) \sin(\delta)q_1$$

$$\bar{p}_3 = p$$

Acomodando términos tenemos que el flujo de calor en el otro marco, toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \{\gamma[((1 + \beta^2)\gamma \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))q_1 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_2 \sin(\delta)\cos(\delta)] \\ &\quad - (ne + p)\beta\gamma^2 \cos(\delta)\} \hat{i} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 &= \{\gamma[((1 + \beta^2)\gamma \sin^2(\delta) + \cos(\delta))q_2 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_1 \sin(\delta) \cos(\delta)] \\ &\quad - (ne + p)\beta\gamma^2 \sin(\delta)\} \hat{j}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

tenemos así un flujo convectivo y otro no convectivo. El flujo de calor total es

$$\bar{\vec{q}}_T = \bar{\vec{q}}_c + \bar{\vec{q}}_{nc}, \quad (4.30)$$

donde el flujo convectivo es

$$\bar{\vec{q}}_c = \bar{q}_{1c} \hat{i} + \bar{q}_{2c} \hat{j} \quad (4.31)$$

y el flujo no convectivo es

$$\bar{\vec{q}}_{nc} = \bar{q}_{1nc} \hat{i} + \bar{q}_{2nc} \hat{j}. \quad (4.32)$$

En estas expresiones

$$\begin{aligned}\bar{q}_{1c}\hat{i} &= -(ne + p)\beta\gamma^2\cos(\delta)\hat{i} \\ \bar{q}_{2c}\hat{j} &= -(ne + p)\beta\gamma^2\sin(\delta)\hat{j} \\ \bar{q}_{1nc}\hat{i} &= \gamma[((1 + \beta^2)\gamma\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))q_1 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_2\sin(\delta)\cos(\delta)]\hat{i} \\ \bar{q}_{2nc}\hat{j} &= \gamma[((1 + \beta^2)\gamma\sin^2(\delta) + \cos^2(\delta))q_2 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_1\sin(\delta)\cos(\delta)]\hat{j}.\end{aligned}$$

Ahora queremos encontrar qué condiciones debe tener un fluido relativista en 2-dimensiones para que un marco de referencia que se mueve respecto al fluido (ver figura 4.4), cumpla con $\bar{q}_1 = 0$ y $\bar{q}_2 = 0$.

Para \bar{q}_1

$$\bar{q}_1 = \gamma[((1 + \beta^2)\gamma\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta))q_1 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_2\sin(\delta)\cos(\delta)] - (ne + p)\beta\gamma^2\cos(\delta) = 0$$

\Rightarrow

$$[(1 + \beta^2)\gamma\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta)]q_1 + [\gamma(\beta^2) - 1]q_2\sin(\delta)\cos(\delta) = (ne + p)\beta\gamma\cos(\delta)$$

\Rightarrow

$$(1 + \beta^2)\gamma[\cos^2(\delta)q_1 + \sin(\delta)\cos(\delta)q_2] + (q_1\sin^2(\delta) - q_2\sin(\delta)\cos(\delta)) = (ne + p)\beta\gamma\cos(\delta)$$

\Rightarrow

$$(1 + \beta^2)\gamma\cos(\delta)[q_1\cos(\delta) + q_2\sin(\delta)] + \sin(\delta)(q_1\sin(\delta) - q_2\cos(\delta)) = (ne + p)\beta\gamma\cos(\delta).$$

Dividiendo entre $(ne + p)\cos(\delta)$ y definiendo $\alpha_i = \frac{q_i}{ne + p}$ donde $i = 1, 2$, tenemos

$$(1 + \beta^2)\gamma[\alpha_1\cos(\delta) + \alpha_2\sin(\delta)] + \tan(\delta)(\alpha_1\sin(\delta) - \alpha_2\cos(\delta)) = \beta\gamma$$

\Rightarrow

$$[\alpha_1 \cos(\delta) + \alpha_2 \sin(\delta)]\beta^2 - \beta + [\alpha_1 \cos(\delta) + \alpha_2 \sin(\delta)] + \frac{1}{\gamma} \tan(\delta)(\alpha_1 \sin(\delta) - \alpha_2 \cos(\delta)) = 0. \quad (4.33)$$

Para reducir la expresión definimos en (4.33), lo siguiente

$$A = \alpha_1 \cos(\delta) + \alpha_2 \sin(\delta) \quad (4.34)$$

y

$$B = \tan(\delta)(\alpha_1 \sin(\delta) - \alpha_2 \cos(\delta)). \quad (4.35)$$

Como se puede ver en la figura 4.4, tenemos que para que el flujo vaya en dirección x , y u otra dirección todo dependerá del ángulo, que puede tomar valores en el intervalo de $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$; a continuación se analizan algunos ángulos para A y B .

Para A

$$\delta = 0 \Rightarrow A = \alpha_1$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \alpha_2,$$

$$\text{entonces } \alpha_1 \leq A \leq \alpha_2.$$

Para B

$$\delta = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\delta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1 - \alpha_2]$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rightarrow \infty$$

$$\text{entonces, } 0 \leq B \leq \infty$$

utilizando (4.34) y (4.35), (4.31) toma la forma

$$A\beta^2 - \beta + A + \frac{1}{\gamma}B = 0$$

$$A\beta^2 - \beta + A + \sqrt{1 - \beta^2}B = 0 \quad (4.36)$$

Al obtener las raíces de β , observamos que sólo una de ellas tiene sentido para nuestro propósito. Se realiza una gráfica (ver figura 4.5), pero sólo para un caso particular de β , escogiendo valores para δ , α_1 y α_2 . Lo podríamos hacer para muchos valores, pero nosotros sólo escogimos un caso particular por sencillez y para visualizar el comportamiento que se tiene.

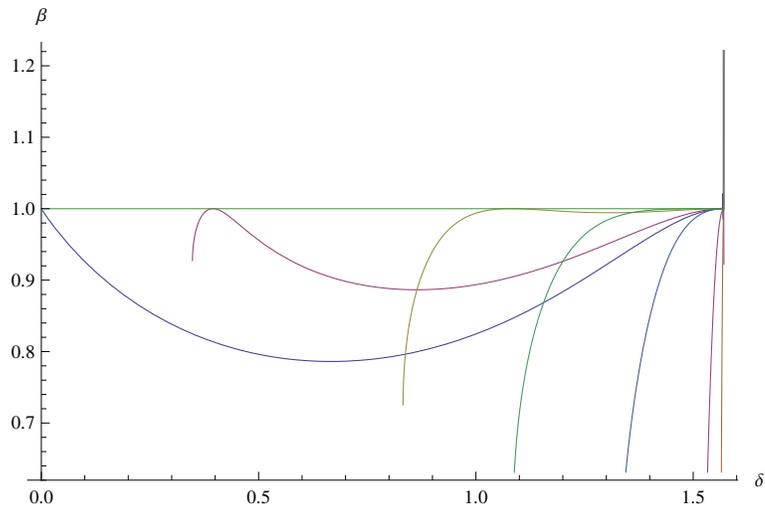


Figura 4.5: valores de $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = (0, 0, 1, 0, 3, 1, 5, 30)$ con $\delta = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Análogamente para \bar{q}_2 , tenemos

$$\bar{q}_2 = \gamma[((1 + \beta^2)\gamma \sin 2(\delta) + \cos^2(\delta))q_2 + (\gamma(\beta^2 + 1) - 1)q_1 \sin(\delta)\cos(\delta)] - (ne + p)\beta\gamma^2 \sin(\delta) = 0$$

\Rightarrow

$$[(1+\beta^2)\gamma \sin^2(\delta)+\cos^2(\delta)]q_2+[\gamma(\beta^2)-1]q_1 \sin(\delta)\cos(\delta) = (ne+p)\beta\gamma \sin(\delta)$$

\Rightarrow

$$(1 + \beta^2)\gamma[q_2 \sin^2(\delta) + q_1 \sin(\delta) \cos(\delta)] + (q_2 \cos^2(\delta) - q_1 \sin(\delta)\cos(\delta)) = (ne + p)\beta\gamma \sin(\delta)$$

\Rightarrow

$$(1 + \beta^2)\gamma \sin(\delta)[q_2 \cos(\delta) + q_1 \sin(\delta)] + \cos(\delta)(q_2 \cos(\delta) - q_1 \sin(\delta)) = (ne + p)\beta\gamma \sin(\delta).$$

Dividiendo entre $(ne + p) \sin(\delta)$ y definiendo $\alpha_i = \frac{q_i}{ne + p}$ donde $i = 1, 2$, tenemos

$$(1 + \beta^2)\gamma[\alpha_2 \sin(\delta) + \alpha_1 \cos(\delta)] + \cot(\delta)(\alpha_2 \cos(\delta) - \alpha_1 \sin(\delta)) = \beta\gamma$$

\Rightarrow

$$[\alpha_2 \sin(\delta) + \alpha_1 \cos(\delta)]\beta^2 - \beta + [\alpha_2 \sin(\delta) + \alpha_1 \cos(\delta)] + \frac{1}{\gamma} \cot(\delta)(\alpha_2 \cos(\delta) - \alpha_1 \sin(\delta)) = 0.$$

Nombrando

$$A_2 = \alpha_2 \sin(\delta) + \alpha_1 \cos(\delta), \quad (4.37)$$

$$\text{si } \delta = 0 \quad A_2 = \alpha_1$$

$$\text{si } \delta = \frac{\pi}{2} \quad A_2 = \alpha_2$$

$$\text{entonces } \alpha_1 \leq A_2 \leq \alpha_2$$

$$B_2 = \cot(\delta)(\alpha_2 \cos(\delta) - \alpha_1 \sin(\delta))$$

$$B_2 = \frac{1}{\tan(\delta)}(\alpha_2 \cos(\delta) - \alpha_1 \sin(\delta)) \quad (4.38)$$

Notar que $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$

si $\delta = 0$ $B_2 \rightarrow \infty$

si $\delta = \frac{\pi}{4}$ $B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_2 - \alpha_1]$

si $\delta = \frac{\pi}{2}$ $B_2 = 0$

entonces $0 \leq B_2 \leq \infty$

tenemos

$$A_2\beta^2 - \beta + A_2 + \frac{1}{\gamma}B_2 = 0$$

$$A_2\beta^2 - \beta + A_2 + \sqrt{1 - \beta^2}B_2 = 0 \quad (4.39)$$

Al obtener sus raíces, como en el caso de \bar{q}_1 , sólo una de ellas tiene sentido para nuestro propósito.

Al ser notablemente más complejo este caso, es probable que requiera un análisis numérico que queda fuera de los objetivos de este trabajo.

4.7. Condiciones de energía

4.7.1. Condición débil de energía.

La condición de energía débil plantea que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por un observador en el espacio-tiempo, debe ser no negativa [50]. Debido a que un observador con 4-velocidad mide una densidad de energía igual a $T^{\nu\mu}V_\nu V_\mu$, debemos tener entonces que

$$T^{\nu\mu}V_\mu V_\nu \geq 0, \quad (4.40)$$

para cualquier vector temporal V_ν orientado hacia el futuro. Esta condición implica, en términos de la densidad de energía ne y las presiones p_i que

$ne \geq 0$ y además, para todo i , debe ser $ne + p_i \geq 0$ [52].

4.7.2. Condición nula de energía.

La condición nula de energía establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador nulo, debe ser no-negativa. Así se debe tener que

$$T^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \geq 0 \quad (4.41)$$

para cualquier vector nulo k_ν . La condición nula de energía es el caso límite de la condición débil de energía en el sentido que la velocidad del observador tiende a ser la velocidad de la luz [53].

4.7.3. Condición nula de energía para el flujo de calor en dirección x

En la sección 4.7.2 ya se dijo lo que es la condición nula de energía. Aquí se hará el cálculo para nuestro caso, esto es, incluyendo el flujo de calor en el tensor energía-momento.

Indicamos los vectores nulos que se ocuparán, que son los siguientes

$$k^\nu = (c, c, 0, 0) \quad (4.42)$$

$$k_\nu = (c, -c, 0, 0). \quad (4.43)$$

De la ecuación (4.41) tenemos que

$$T^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = T^{0\nu}k_0 k_\nu + T^{i\nu}k_i k_\nu = T^{00}k_0 k_0 + T^{0j}k_0 k_j + T^{i0}k_i k_0 + T^{ij}k_i k_j = nec^2 + T^{01}k_0 k_1 + T^{10}k_1 k_0 + T^{ii}k_i k_i = nec^2 - 2q_1 c^2 + pc^2 = c^2 (ne + p - 2q_1)$$

$$c^2 (ne + p - 2q_1) \geq 0. \quad (4.44)$$

Haciendo un poco de álgebra tenemos que

$$\frac{1}{2} \geq \frac{q_1}{ne + p}, \quad (4.45)$$

encontrando la condición que debe de cumplir para que la densidad de energía sea no-negativa.

Al comparar la ecuación (4.45) con la ecuación (4.15), nuestra condición tiene una similitud a la que nos arroja la condición nula de energía [51].

4.8. Condición nula de energía en 2-D

Análogamente a la sección 4.7.3 haremos el cálculo, pero ahora con el flujo de calor en 2 dimensiones en las direcciones 1 y 2 y con los siguientes vectores nulos

$$K^\mu = (c, c \sin \theta, c \cos \theta, 0) \quad (4.46)$$

$$K_\mu = (c, -c \sin \theta, -c \cos \theta, 0). \quad (4.47)$$

Utilizando

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = T^{0\nu} k_0 k_\nu + T^{i\nu} k_i k_\nu = T^{00} k_0 k_0 + T^{0j} k_0 k_j + T^{i0} k_i k_0 + T^{ij} k_i k_j = \\ nec^2 + (T^{01} k_0 k_1 + T^{02} k_0 k_2 + T^{03} k_0 k_3) + (T^{10} k_1 k_0 + T^{20} k_2 k_0 + T^{30} k_3 k_0) + \\ (T^{1j} k_1 k_j + T^{2j} k_2 k_j + T^{3j} k_3 k_j), \end{aligned}$$

las componentes del tensor energía-momento para el flujo de calor en 2 dimensiones resultan

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = \\ nec^2 + T^{01} k_0 k_1 + T^{02} k_0 k_2 + T^{10} k_1 k_0 + T^{20} k_2 k_0 + (T^{1j} k_1 k_j + T^{2j} k_2 k_j + T^{3j} k_3 k_j) \end{aligned}$$

$$T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = nec^2 + T^{01}k_0k_1 + T^{02}k_0k_2 + T^{10}k_1k_0 + T^{20}k_2k_0 + (T^{11}k_1k_1 + T^{12}k_1k_2 + T^{13}k_1k_3) + (T^{21}k_2k_1 + T^{22}k_2k_2 + T^{23}k_2k_3) + (T^{31}k_3k_1 + T^{32}k_3k_2 + T^{33}k_3k_3).$$

Utilizando de nuevo las componentes del tensor energía-momento se reduce a

$$T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = nec^2 + T^{01}k_0k_1 + T^{02}k_0k_2 + T^{10}k_1k_0 + T^{20}k_2k_0 + T^{11}k_1k_1 + T^{22}k_2k_2 + T^{33}k_3k_3$$

Introduciendo ahora las componentes del tensor energía momento y las del vector nulo, tenemos que

$$T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = nec^2 - q_1c^2 \sin \theta - q_1c^2 \sin \theta - q_2c^2 \cos \theta - q_2c^2 \cos \theta + pc^2 \sin^2 \theta + pc^2 \cos^2 \theta = nec^2 - 2q_1c^2 \sin \theta - 2q_2c^2 \cos \theta + pc^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = nec^2 - 2c^2 (q_1 \sin \theta - 2q_2 \cos \theta) + pc^2.$$

Finalmente tenemos que

$$T^{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} = c^2 [ne - 2(q_1 \sin \theta - q_2 \cos \theta) + p], \quad (4.48)$$

y utilizando la ecuación (4.41) tenemos que

$$c^2 [ne - 2(q_1 \sin \theta - q_2 \cos \theta) + p] \geq 0. \quad (4.49)$$

Haciendo un poco de álgebra obtenemos que la condición nula de energía es

$$\frac{1}{2} \geq \frac{q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta}{ne + p}. \quad (4.50)$$

Al ver (4.50) y comparar con lo que se hizo en la sección 4.6 notamos que no hay alguna similitud por la complejidad que se presentó, pero en la figura 4.5 se puede observar que se utilizó $\alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{q_1}{ne + p}$ variando el ángulo, lo cual no se hizo en (4.50). Podría ser esto por el cual no se ve la similitud.

4.9. La producción de entropía

En esta sección calcularemos la producción de entropía con nuestra condición obtenida en la sección 4.3, es decir la ecuación (4.15).

En la sección 3.3.5 se estudió la producción de entropía y está dada por la ecuación (3.139). En nuestro caso no hay componentes viscosas del tensor de presiones y presión hidrostática, entonces la ecuación (3.139) toma la forma

$$\varsigma = -\frac{q^\alpha}{T^2} \left(\nabla_\alpha T - \frac{T}{c^2} D U_\alpha \right) \Rightarrow \varsigma = -\frac{1}{T^2} \left(q^\alpha \nabla_\alpha T - \frac{T}{c^2} q^\alpha D U_\alpha \right); \quad (4.51)$$

de la ecuación (4.51) tenemos que $q^\alpha = \Delta_\gamma^\alpha U_\beta T^{\beta\gamma}$, $\nabla_\alpha = \Delta_\alpha^\beta \partial_\beta$ y $D = U^\alpha \partial_\alpha$.

Para calcular esta producción de entropía usaremos el tensor energía-momento incluyendo el flujo de calor en dirección x ; la 4-velocidad será la del marco comóvil (esto es $U_\alpha = (c, 0, 0, 0)$) y se usara el proyector que se estudio en la sección 3.3.2 dado por las ecuaciones (3.83) y (3.84).

Primero nos concentraremos en calcular las componentes del flujo de calor, que es dado por

$$q^\alpha = \Delta_\gamma^\alpha U_\beta T^{\beta\gamma}. \quad (4.52)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} q^\alpha &= \Delta_0^\alpha U_\beta T^{\beta 0} + \Delta_i^\alpha U_\beta T^{\beta i} \\ \Rightarrow q^\alpha &= (\Delta_0^\alpha U_0 T^{00} + \Delta_0^\alpha U_i T^{i0}) + (\Delta_i^\alpha U_0 T^{0i} + \Delta_i^\alpha U_j T^{ji}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Usando (4.53) nos damos a la tarea de calcular las componentes del flujo de calor

$$\begin{aligned}
q^0 &= (\Delta_0^0 U_0 T^{00} + \Delta_0^0 U_i T^{i0}) + (\Delta_i^0 U_0 T^{0i} + \Delta_i^0 U_j T^{ji}), \\
q^1 &= (\Delta_0^1 U_0 T^{00} + \Delta_0^1 U_i T^{i0}) + (\Delta_i^1 U_0 T^{0i} + \Delta_i^1 U_j T^{ji}), \\
q^2 &= (\Delta_0^2 U_0 T^{00} + \Delta_0^2 U_i T^{i0}) + (\Delta_i^2 U_0 T^{0i} + \Delta_i^2 U_j T^{ji}), \\
q^3 &= (\Delta_0^3 U_0 T^{00} + \Delta_0^3 U_i T^{i0}) + (\Delta_i^3 U_0 T^{0i} + \Delta_i^3 U_j T^{ji}).
\end{aligned}$$

Ahora usando el proyector, el tensor energía momento y la 4-velocidad en el marco comóvil, tenemos que

$$\begin{aligned}
q^0 &= \Delta_i^0 U_0 T^{0i} = \Delta_1^0 U_0 T^{01} + \Delta_2^0 U_0 T^{02} + \Delta_3^0 U_0 T^{03} = 0 \\
&\Rightarrow q^0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Análogamente para q^1, q^2, q^3

$$\begin{aligned}
q^1 &= \Delta_i^1 U_0 T^{0i} = \Delta_1^1 U_0 T^{01} + \Delta_2^1 U_0 T^{02} + \Delta_3^1 U_0 T^{03} = U_0 T^{01} = cq_1 \\
&\Rightarrow q^1 = cq_1
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
q^2 &= \Delta_i^2 U_0 T^{0i} = \Delta_1^2 U_0 T^{01} + \Delta_2^2 U_0 T^{02} + \Delta_3^2 U_0 T^{03} = U_0 T^{02} = 0 \\
&\Rightarrow q^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
q^3 &= \Delta_i^3 U_0 T^{0i} = \Delta_1^3 U_0 T^{01} + \Delta_2^3 U_0 T^{02} + \Delta_3^3 U_0 T^{03} = U_0 T^{03} = 0 \\
&\Rightarrow q^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Finalmente para el flujo de calor tenemos las componentes

$$q^\alpha \rightarrow (0, cq_1, 0, 0). \tag{4.58}$$

De la ecuación (4.51) tomamos el término $q^\alpha \nabla_\alpha T$ para escribirlo en términos de las componentes,

$$\begin{aligned} q^\alpha \nabla_\alpha T &= q^\alpha \Delta_\alpha^\beta \partial_\beta T = q^0 \Delta_0^\beta \partial_\beta T + q^i \Delta_i^\beta \partial_\beta T \\ &= (q^0 \Delta_0^0 \partial_0 T + q^0 \Delta_0^j \partial_j T) + (q^i \Delta_i^0 \partial_0 T + q^i \Delta_i^j \partial_j T). \end{aligned}$$

Por el uso del proyector nos queda que

$$\begin{aligned} q^\alpha \nabla_\alpha T &= q^i \Delta_i^j \partial_j T. \\ &= q^1 \Delta_1^j \partial_j T + q^2 \Delta_2^j \partial_j T + q^3 \Delta_3^j \partial_j T. \end{aligned}$$

Utilizando las componentes del flujo de calor (4.58) tenemos que

$$q^\alpha \nabla_\alpha T = q^1 \Delta_1^j \partial_j T = q^1 \Delta_1^1 \partial_1 T + q^1 \Delta_1^2 \partial_2 T + q^1 \Delta_1^3 \partial_3 T = q^1 \Delta_1^1 \partial_1 T = cq_1 \partial_1 T$$

y

$$q^\alpha \nabla_\alpha T = cq_1 \partial_1 T. \quad (4.59)$$

Tomamos otro término de la ecuación (4.51) $q^\alpha DU_\alpha$ para también obtener sus componentes,

$$q^\alpha DU_\alpha = q^0 DU_0 + q^i DU_i = q^1 DU_1$$

$$q^\alpha DU_\alpha = q^1 DU_1 = cq_1 DU_1. \quad (4.60)$$

Insertando (4.59) y (4.60) en (4.51), tenemos que la producción de entropía toma la forma

$$\varsigma = -\frac{1}{T^2} \left[cq_1 \partial_1 T - \frac{T}{c^2} (cq_1 DU_1) \right].$$

Después de unos pasos algebraicos tenemos que

$$\varsigma = -\frac{1}{T^2} [cq_1 \partial_1 T - cq_1 DU_1] = -\frac{q_1 c}{T^2} \left[\partial_1 T - \frac{T}{c^2} DU_1 \right].$$

Finalmente la producción de entropía tiene la siguiente forma

$$\varsigma = -\frac{q_1 c}{T^2} \left[\partial_1 T - \frac{T}{c^2} DU_1 \right]. \quad (4.61)$$

El término $-T DU_1/c^2$ en (4.61) no tiene una correspondencia en el caso no relativista, y representa un flujo de calor isotérmico cuando el fluido se acelera. Este término actúa en una dirección opuesta a la aceleración y se dice que es debido a la inercia de la energía [15]. También podemos expresar (4.61) en otra forma eliminando la derivada temporal de la 4-velocidad a través de (3.132) con $\varpi = 0$, $p^{(\alpha\beta)} = 0$ y $q^\alpha = 0$, que caracteriza el llamado fluido Euleriano. En este caso (3.132) puede ser escrita como

$$\frac{nh_E}{c^2} DU^\alpha = \nabla^\alpha p, \quad (4.62)$$

que representa la ecuación de balance para la densidad de momento de un fluido no viscoso y no conductor. Por lo tanto (4.61) puede ser escrita como

$$\varsigma = -\frac{q_1 c}{T^2} \left[\partial_1 T - \frac{T}{nh_E} \nabla_1 p \right]. \quad (4.63)$$

Ahora al usar nuestra condición en la producción de entropía, tenemos que

$$\begin{aligned} q_1 &< \frac{1}{2}(ne + p) \\ -\frac{q_1}{T^2} &> -\frac{1}{2T^2}(ne + p) \\ -\frac{q_1 c}{T^2} \left[\partial_1 T - \frac{T}{nh_E} \nabla_1 p \right] &> -\frac{c}{2T^2}(ne + p) \left[\partial_1 T - \frac{T}{nh_E} \nabla_1 p \right] \\ \varsigma &> -\frac{c}{2T^2}(ne + p) \left[\partial_1 T - \frac{T}{nh_E} \nabla_1 p \right], \end{aligned}$$

pero $h_E = e + \frac{p}{n}$, entonces

$$\begin{aligned} \varsigma &> -\frac{c}{2T^2} (ne + p) \left[\partial_1 T - \frac{T}{n(e + \frac{p}{n})} \nabla_1 p \right] \\ \varsigma &> -\frac{c}{2T^2} (ne + p) \left[\partial_1 T - \frac{T}{ne + p} \nabla_1 p \right] \\ \varsigma &> -\frac{cnh_E}{2T^2} \partial_1 T + \frac{1}{2T} \nabla_1 p \end{aligned} \quad (4.64)$$

En el equilibrio encontramos

$$\varsigma > 0 \quad (4.65)$$

mientras fuera de equilibrio

$$\varsigma > 0 \quad (4.66)$$

4.10. Comparación entre los enfoques Eckart y Landau-Lifshitz

En esta sección se estudiará la 4-velocidad de la descomposición de Eckart y Landau-Lifshitz. Esto nos dará una idea de como se comportan ambas, en que aproximación existe una similitud y que es posible encontrar más sistemas de referencia aparte que el de Landau-Lifshitz.

4.10.1. Esquema de Eckart

La 4-velocidad en la descomposición de Eckart es

$$U^\alpha = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (4.67)$$

Calculando

$$U^\alpha U_\alpha = (U^0)^2 - |\vec{U}|^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2)$$

$$\begin{aligned}
 U^\alpha U_\alpha &= \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = \gamma^2 c^2 \frac{1}{\gamma^2} = c^2 \\
 &\Rightarrow \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

finalmente se obtiene el factor de Lorentz

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}. \tag{4.69}$$

4.10.2. Esquema de Landau-Lifshitz

Ahora la 4-velocidad en la descomposición de Landau Lifshitz [47], suponemos que es

$$U_L^\alpha = (\gamma_L c, \gamma_L \vec{v}_L). \tag{4.70}$$

Análogamente como en (4.68) calculamos

$$\begin{aligned}
 U_L^\alpha U_{L\alpha} &= (U_L^0)^2 - |\vec{U}_L|^2 = \gamma_L^2 (c^2 - v_L^2) = \gamma_L^2 c^2 \left(1 - \frac{v_L^2}{c^2}\right) = \gamma_L^2 c^2 (1 - \beta_L^2) \\
 U_L^\alpha U_{L\alpha} &= \gamma_L^2 c^2 (1 - \beta_L^2),
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

y utilizando la ecuación (3.159) se obtiene la relación de las 4-velocidades de Eckart U^α y Landau-Lifshitz U_L^α ,

$$U_L^\alpha = U^\alpha + \frac{1}{nh_E} q^\alpha.$$

Calculamos ahora $U_L^\alpha U_{L\alpha}$

$$\begin{aligned}
 U_L^\alpha U_{L\alpha} &= \left(U^\alpha + \frac{1}{nh_E} q^\alpha \right) \left(U_\alpha + \frac{1}{nh_e} q_\alpha \right) = \\
 &U^\alpha U_\alpha + \left(\frac{1}{nh_e} \right)^2 q^\alpha q_\alpha + \frac{2}{nh_E} U^\alpha q_\alpha,
 \end{aligned}$$

que con el uso de (3.117) resulta

$$U_L^\alpha U_{L\alpha} = c^2 + \left(\frac{q}{nh_E} \right)^2. \quad (4.72)$$

Sustituyendo (4.72) en (4.71) tenemos que

$$\begin{aligned} c^2 + \left(\frac{q}{nh_E} \right)^2 &= \gamma_L^2 c^2 (1 - \beta_L^2) \Rightarrow c^2 \left(1 + \left(\frac{q}{cnh_E} \right)^2 \right) = \gamma_L^2 c^2 (1 - \beta_L^2) \\ &\Rightarrow 1 + \left(\frac{q}{cnh_E} \right)^2 = \gamma_L^2 (1 - \beta_L^2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Si $\left(\frac{q}{cnh_E} \right)^2 = 0$, entonces

$$\Rightarrow \gamma_L^2 = \frac{1}{1 - \beta_L^2} \quad (4.74)$$

4.10.3. Comparación de ambos enfoques

Comparando las ecuaciones (4.69) y (4.74) concluimos que existe una transformación de Lorentz con γ_L y β_L , sólo si se aproxima a cero el término que involucra al flujo de calor en la ecuación (4.73), esto es,

$$\left(\frac{q}{cnh_E} \right)^2 \approx 0, \quad (4.75)$$

Recordando que en el esquema de Landu-Lifshtz se propone un tensor energía-momento que no involucra al flujo de calor, entonces al aproximarlo a cero quiere decir que nos encontramos en este esquema. Al comparar nuestra condición con (4.75), encontramos que es posible encontrar más sistemas de referencia que son aquellos que cumplan con

$$\left(\frac{q}{nh_E} \right)^2 < \frac{1}{4}, \quad (4.76)$$

condición que fue encontrada en este trabajo, que es la que debe cumplirse para que en un marco se cumpla que $\bar{q} = 0$.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

El flujo de calor y sus ecuaciones constitutivas en sistemas relativistas han sido un tema de discusión. Algunos autores aseguran que el flujo de calor no debería estar en el tensor energía-momento [25, 26], pero por sus propiedades de transformación y desde el punto de vista de la teoría cinética, el flujo de calor en un fluido relativista es una cantidad que forma parte de él [4].

La teoría de la relatividad especial (RE) reta nuestro sentido común, al aceptar que la rapidez de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores independientemente de su estado de movimiento; nos vemos obligados a desechar ideas básicas sobre el paso del tiempo y de las longitudes de objetos. La base matemática para la teoría de la RE son las transformaciones de Lorentz que relacionan cantidades físicas en dos marcos inerciales en movimiento relativo.

En este trabajo estudiamos cómo se comporta el flujo de calor contenido en el tensor energía-momento bajo transformaciones de Lorentz. Encontramos que bajo estas transformaciones en el tensor transformado hay un flujo de calor total que contiene una parte convectiva más otra no convectiva. Cuando el flujo de calor en el marco comóvil va en la misma dirección que la transformación de Lorentz se encuentra que, si se pide que el flujo de calor en el marco transformado se anule, se cumple la condición $q_1 < \frac{1}{2}(ne + p_1)$. Esto quiere decir que a través de una transformación entre sistemas de referencia es posible balancear un tipo de energía convectiva con una no-convectiva siempre y cuando el fluido satisfaga que el flujo de calor en la misma dirección que la transformación de Lorentz sea menor que un medio por la suma de la

densidad de energía más la presión. Cuando la transformación de Lorentz se realiza en una dirección ortogonal al flujo de calor se obtiene un flujo convectivo en la dirección de la transformación y por lo tanto las componentes no se mezclan.

Como se estudió en la sección 4.7.2, la condición nula de energía establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador nulo, debe ser no-negativa. La condición encontrada en este trabajo resulta idéntica a la condición nula de energía [63], con la diferencia de que fue encontrada en el contexto de cambios entre marcos inerciales.

Al introducir la condición encontrada en la producción de entropía en el esquema de Eckart, encontramos que no se viola la segunda ley de la termodinámica. En particular la producción de entropía es siempre mayor a cero, por lo que el fluido nunca está en equilibrio.

Por otra parte se estudió la 4-velocidad en el esquema de Eckart y Landau-Lifshitz. En su formulación el marco de Landau-Lifshitz existe sólo si el cuadrado de el flujo de calor entre el cuadrado de la densidad de energía más la presión es igual a cero. Hay que recordar que en el esquema de Landau-Lifshitz en su tensor energía-momento, no introducen el flujo de calor. Al comparar Landau-Lifshitz y nuestro esquema, concluimos que es posible encontrar más de un sistema de referencia, además que el de Landau-Lifshitz, donde no exista flujo de calor en el fluido.

Una posible extensión de este trabajo es hacer el mismo análisis para fluidos en algún espacio curvo con motivaciones astrofísicas y cosmológicas. Por ejemplo, en [65] se consideran distribuciones esféricamente simétricas de un fluido colapsándose donde supone localmente anisótropo, sufriendo una disipación en forma de flujo de calor limitado por una superficie esférica (ver apéndice A).

Otra posible dirección es en relación con la transición relativista. Los fluidos relativistas tienen dos límites bien conocidos, el límite no relativista a bajas temperaturas y el límite ultra relativista para temperaturas altas. Sin embargo, es reciente el estudio de la transición al régimen relativista a través de una analogía con la teoría de campo medio de las transiciones de fase,

encontrándose que la temperatura crítica a la cual en un fluido comienzan a ser relevantes las correcciones relativistas, depende de la dimensión del sistema [66]. Las consecuencias de este estudio aún no han sido ampliamente consideradas por lo que podría extenderse en varias direcciones, principalmente el estudio de la termodinámica en la transición, su generalización en espacios curvos, así como aplicaciones de interés astrofísico, cosmológico, de altas energías e incluso en materia condensada que son temas de interés actual. Además de estar abierto el caso fuera de equilibrio, donde podríamos estudiar en particular las transformaciones en el flujo de calor.

Apéndice A

Ecuaciones de campo

En la referencia [65] se consideran distribuciones esféricamente simétricas de un fluido colapsándose donde se supone que está localmente anisótropo y sufre su disipación en forma de flujo de calor limitado por una superficie esférica.

El elemento de línea es dado en las coordenadas esféricamente simétricas

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde $\nu(t, r)$ y $\lambda(t, r)$ son funciones centrales.

La métrica tiene que satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein [63].

$$G_\mu^\nu = -8\pi T_\mu^\nu. \quad (\text{A.1})$$

Para el caso del flujo de calor estamos interesados en la entrada T_{01}

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r},$$

despejando $q_1 = T_{01}$, tenemos

$$q_1 = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \left(\frac{1}{8\pi} \right). \quad (\text{A.2})$$

Para que en el marco transformado el flujo de calor se anule, $\bar{q} = 0$, tenemos que tener que satisfacer la condición $q_1 < \frac{1}{2}(ne + p)$, entonces sustituyendo esta condición en (A.2) tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\lambda}}{r} \left(\frac{1}{8\pi} \right) &< \frac{1}{2}(ne + p) \\ \dot{\lambda} &> -\frac{1}{2}(ne + p)(8\pi r) \end{aligned}$$

obteniendo finalmente que

$$\dot{\lambda} > -4\pi r(ne + p). \quad (\text{A.3})$$

Esta condición indica que, además de que el campo $\lambda(t, r)$ será solución de (A.1) con materia, para que el flujo de calor se anule ante una transformación de coordenadas, la geometría debe ser tal que satisfaga (A.3), es decir, tiene una influencia del tipo de materia que se considere.

Bibliografía

- [1] P. Salas, Revista Mexicana de Física E 52, 37-46 (2006).
- [2] A.C. Raga, L.F. Rodriguez y J. Cantó, Revista Mexicana de Física 43, 825-836 (1997).
- [3] Walter Greiner, Ludwig Neise, Horst Stöcker *Thermodynamics and Statistical Mechanics* , Springer, (1995).
- [4] Schutz, *A first course in general relativity* ,2nd edition, Cambridge University Press, (1985).
- [5] G Horwitz, Phys. Rev. D 4, 3812-3813 (1971).
- [6] C K Yuen, Am. J. Phys. 38, 246-252 (1970).
- [7] D Ter Haar, W Wergeland, physics Reports (Section C of Physics Letters) 2, 31-54 (1971).
- [8] Güémez, J. (2010). Rev. Esp. Fis, 24, 47-57.
- [9] G M Barrow, J. Chem Educ. 65, 122-125 (1988).
- [10] W Rindler, 2nd Ed. Oliver and Boyd Ltd. Edinburg 1996, pag. 91.
- [11] D. MI y Hai Yang Zhong, Modern Physics Letters A 24 , 73-80 (2009).
- [12] Einstein A, Jahbuch Radioaktivität und Elektronik 4 , 411 (1907).
- [13] Landsberg P T, Nature 212 , 571 (1966).
- [14] H. Ott, Z. Physics 175 , 70 (1963).
- [15] Eckart, C. Phys. Rev. 58, 919 (1940).

- [16] A.L. Garcia Perciante, L.S. Garcia Colin, Alfredo Sandoval Villalbaz, *General Relativity and Gravitation* 41,(2008).
- [17] Alfredo Sandoval Villalbaz, A.L. Garcia Perciante, L.S. Garcia Colin, *Physica A* 388,(2009).
- [18] Hiscock, Lindblom, *Phys. Rev. D* 31 , 725 (1985).
- [19] A. L. García-Perciante, L. S. García-Colín y A. Sandoval-Villalbaz, *Physical Rev. E* **79**, 066310 (2009).
- [20] J.H. Mondragón-Suaréz, A. Sandoval-Villalbaz, *Gen Relativ. Gravit.* 44, (2012).
- [21] J.H. Mondragón-Suaréz, A. Sandoval-Villalbaz, A. L. García-Perciante, *Gen Relativ. Gravit.* 45, (2013).
- [22] Carlo Cercignani, Gilberto Medeiros Kremer, *The Relativity Boltzmann Equation: Theory and Applications* , *Pogress in Mathematical Physics* Vol. 22, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, (2002).
- [23] P. Van, T.S. Biró, *Physics Letters B* 709,(2012).
- [24] W. Israel, *Annals Physics* 100, (1976).
- [25] L.S. García Colín, and A. Sandoval-Villalbaz, *Meixner-Prigogine scheme in relativistic transport theory*,*Physica A* 234 (1996) 358-370.
- [26] L.S. García Colín, and A. Sandoval-Villalbaz, *Relativistic non-equilibrium thermodynamics revisited*,*Physica A* 234 (1996) 358-370.
- [27] Rosa María Velasco *Introducción a la Hidrodinámica Clásica*, Fondo de Cultura Económica, México (2005).
- [28] L.S. García Colín, and A. Sandoval-Villalbaz, *Nota sobre la naturaleza del calor en la termodinámica relativista*, *Revista Mexicana de Física*, vol. 53, núm. Es4, agosto, 2007, pp. 148-149.
- [29] A. Einstein, *Annalen Physik* 17 (1905).
- [30] T.E. Faber *Fluid Dynamics For Physicists*, University of Cambridge, New york (2004).

- [31] A. M. Anile *Relativistic fluids and magneto-fluids with applications in astrophysics and plasma physics* Cambridge monographs on mathematical physics (1989).
- [32] Jerry B. Marion *Dinamica clasica de las partículas y sistemas* Academic Press, New York London (2003).
- [33] Álgebra Lineal Kolman, Bernard; Hill, David R., Pearson Educación (2006).
- [34] L. García-Colín Scherer, *Introducción a la Termodinámica Clasica*, (El Colegio Nacional, México 1990).
- [35] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, (2001).
- [36] Jüttner, Ann. Physik und Chemie 34, 856 (1911).
- [37] L. García-Colín Scherer, Leonardo Dagdug y José R. Gpe. Sánchez *Introducción a la teoría cinética*, (El colegio Nacional 2011).
- [38] F. Jüttner, *Ann. Physik.* , 339 (1911) 856.
- [39] F. Jüttner, *Ann. Physik.* , 340 (1911) 145.
- [40] L. García-Colín Scherer, *Introducción a la Física Estadística*, (El Colegio Nacional, México 2005).
- [41] N.G. van Kampen, *Physica* , 43 (1969) 244.
- [42] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*, North- Holland, Amsterdam (2002).
- [43] Israel, W., Stewart, J.M. Ann Phys. N. Y. 118, 341 (1979).
- [44] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug and H. Morales-Técotl, Phys. Rev. E **81**, 021126 (2010).
- [45] G. Chacón-Acosta, Rev. Mex. Fís. **58**, 117-126 (2012).
- [46] L. S. García-Colín, G. Chacón-Acosta, L. Dagdug *100 años de Teoría cinética relativista*, (Universidad Autónoma Metropolitana, 2013).

- [47] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Vol. 6 Curso de Física Teórica, Editorial Reverté, (1991).
- [48] Carlo Cercignani *Theory and application of the Boltzman equation*, Instituto di Matematica, Politecnico di Milano, Milano, Italy (1975).
- [49] Freund, Jürgen, *Special relativity for beginners: a textbook for undergraduates*, World Scientific Publishing (2008).
- [50] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
- [51] W. Hiscock and T. S. Olson, *Phys. Lett A* **141**, 125 (1989).
- [52] Owen Pavel Fernández Piedra, *Rev. Cub. Física* 25, 111-116 (2008).
- [53] Heiner René Sarmiento *Estudio y clasificación Algebraica del Tensor momento-energía en Relatividad General*, (Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias 2006).
- [54] Planck M, *Ann. Physics (Leipzig)* 26 , 1 (1908).
- [55] Tolman R C *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press (1934).
- [56] Landsberg P T, *Phys. Rev. Lett.* 45 , 149 (1980).
- [57] G Ares de Parga, B López-Carrera y F Angulo Brown , *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38 , 2821-2834 (2005).
- [58] Landsberg P T y Matsas G E A, *Phys. Rev. Lett.*A 223 , 401 (1996).
- [59] Landsberg P T y Matsas G E A, *Physica A* 340, 92 (2002).
- [60] N G van Kampen, *Phys. Rev.* 173, 295-301 (1968).
- [61] Earl Swokowski, *Calculo con Geometría Analítica*, (Marquette University 1988).
- [62] Gradstein - Ryshik, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press – Hardcover 1966).

- [63] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Company New York, (1973).
- [64] L. García-Colín Scherer y Patricia Goldstein *La física de los procesos irreversibles tomo 2*, (El colegio Nacional 2003).
- [65] L. Herrera, W. Barreto, A. Di Prisco and N. O. Santos, Physical Review D, 65 104004 (2002)
- [66] M. Mendoza, N.A.M. Araújo, S. Succi, H.J. Herrmann, Sci. Rep. **2**, 611 (2012).