



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Matemáticas

Tesis

EL ÁLGEBRA DOMINIO DE UN SEMIGRUPO COMPLETAMENTE POSITIVO

que presenta el **Lic. Luis Daniel Regalado Hernández**,

matrícula **2173802163**,

para obtener el grado de **Maestro en Ciencias (Matemáticas)**

Esta tesis fue dirigida por

Dra. Judith Campos Cordero

Dr. Roberto Quezada Batalla

Y defendida ante jurado, conformado por

Presidente: Dr. Luis Octavio Silva Pereyra

Vocal: Dra. Judith Campos Cordero

Secretario: Dr. Jorge Ricardo Bolaños Servin

Iztapalapa, Ciudad de México, a 9 de julio de 2020



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

El álgebra dominio de un semigrupo completamente positivo

por
Luis Daniel Regalado Hernández

Tesis para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Departamento de matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa
Ciudad de México



Dra. Judith Campos Cordero (asesora)



Dr. Roberto Quezada Batalla (asesor)

03 de Febrero de 2020

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. Preliminares	1
1.1. Algunas clases de operadores sobre espacios de Hilbert.	1
1.2. Topologías sobre Álgebras de Banach	3
1.3. Semigrupos completamente positivos	10
2. El dominio del generador de un semigrupo C.P.	13
2.1. Teorema de factorización de Stinespring	13
2.2. Dominio del generador de un semigrupo C.P.	16
2.2.1. El álgebra dominio	20
3. Un álgebra dominio mínima.	27
3.1. El semigrupo de desplazamientos a la izquierda.	27
3.1.1. La derivada y el semigrupo de desplazamiento hacia la izquierda. . .	30
3.2. Perturbación del semigrupo dinámico cuántico inducido por W_t	32
3.2.1. Predual	32
3.2.2. Perturbación del semigrupo inducido por W_t	33
3.3. Semigrupo dinámico cuántico mínimo (m.q.d.s.)	36
3.3.1. Conservatividad del m.q.d.s. perturbado	37
3.4. El álgebra dominio del semigrupo perturbado	41
4. Construcción de un operador Ω.	47
4.1. Funciones de Laguerre.	47
4.2. Construcción del operador Ω	51
A. Derivada débil y continuidad absoluta.	57
A.1. Convolución y funciones regularizantes	57
A.2. Derivada débil	59
A.3. Funciones absolutamente continuas	61
A.4. Teorema de Meyers-Serrin	63

B. Kernel de operadores de la clase de traza	67
B.1. Operadores de Hilbert-Schmidt	67
B.2. Kernel de un operador de Hilbert-Schmidt	68

Resumen

Dados un semigrupo completamente positivo $\Phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ y su generador L , nos preguntamos qué tan grande es la máxima $*$ -álgebra dentro de $D(L)$, el dominio de L . Iniciaremos con la revisión de algunas topologías en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert separable H , y siguiendo a W. Arveson [3] discutiremos un criterio que caracteriza a la máxima $*$ -álgebra $\mathcal{A} \subset D(L)$. Mediante un ejemplo mostraremos que la máxima álgebra puede llegar a ser tan trivial como $\mathbb{C}\mathbf{1}$.

Introducción

El concepto de Semigrupo Cuántico de Markov (SCM) se introdujo en física cuántica para describir la evolución disipativa de un sistema cuántico que interacción con su entorno, al cual se le llama sistema cuántico abierto. Las primeras referencias al tema datan de los años setenta del siglo pasado, [19, 21]. Desde entonces la noción de SCM se usa ampliamente en matemáticas y física, aplicándose de manera exitosa para describir fenómenos típicamente cuánticos como la decoherencia, que corresponde al decaimiento de las características (correlaciones) cuánticas de un sistema. Por esta razón los SCM son herramienta fundamental en áreas donde la decoherencia juega un papel relevante, tales como óptica cuántica, computación cuántica y teoría cuántica de la información y comunicación, entre otras, así como en modelos de control y transporte cuánticos.

Si un SCM es uniformemente continuo y actúa sobre el álgebra de von Neumann $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, de todos los operadores acotados sobre un espacio de Hilbert separable, el teorema de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad (GKSL) [14, 22] establece que su generador infinitesimal $\mathcal{L}$ tiene la forma

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(x) + G^*x + xG \quad (1)$$

donde Φ es una transformación completamente positiva y G es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones. Este resultado fue extendido posteriormente al caso de una C^* -álgebra arbitraria actuando sobre un espacio de Hilbert por Christensen y Evans [8]. Si el semigrupo es continuo en una topología más débil que la uniforme, la caracterización de su generador infinitesimal es un problema abierto.

Un resultado de A. Holevo [18] muestra la existencia de un SCM cuyo generador no tiene una representación estándar similar a (1). No obstante, existen trabajos como [13] y otros más recientes [2, 1] que estudian ciertas clases de semigrupos cuyo generador tiene una representación estándar. En particular, Androulakis y Ziemke demuestran la existencia de una representación estándar para cierta clase de SCM donde la parte completamente positiva Φ es una transformación que asocia a cada elemento x en el álgebra dominio $\mathcal{A}$ del semigrupo, una forma sesquilineal $\Phi(x)$ definida sobre un subespacio de $\mathcal{H}$. Pero, como demuestra Holevo [17], el álgebra dominio de un semigrupo puede consistir sólo de múltiplos de la identidad, de manera que la transformación completamente positiva Φ encontrada por Androulakis-Ziemke y, consecuentemente, la representación estándar del generador infinitesimal del semigrupo pueden estar definidas sólo sobre un subespacio no denso.

El propósito del presente trabajo es estudiar a fondo el concepto de álgebra dominio de un SCM introducido por Arveson [3] y el ejemplo de Holevo [17] de un SCM con álgebra

dominio trivial, elaborando una exposición autocontenida de estos dos artículos. En nuestra exposición desarrollamos todos los detalles técnicos de las demostraciones que se han dado por sentado en los artículos de investigación en los que está basado este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Algunas clases de operadores sobre espacios de Hilbert.

En este trabajo $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ que es lineal en la segunda componente y lineal conjugado en la primera, *i.e.*

$$\langle \alpha u + v, \beta w + z \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle u, w \rangle + \bar{\alpha} \langle u, z \rangle + \beta \langle v, w \rangle + \langle v, z \rangle.$$

Definición 1.1.1 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Definimos el operador $|\xi\rangle\langle\eta| : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ actuando de la siguiente manera

$$|\xi\rangle\langle\eta|\zeta = \langle\eta, \zeta\rangle \xi, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}.$$

El cual proyecta al vector ζ en dirección del vector ξ , por un el escalar $\langle\eta, \zeta\rangle$. A esta clase de operadores los denominaremos **proyectores**.

Estos operadores resultan ser lineales, acotados y de rango finito.

Observación 1.1.2 No debe confundir estos operadores con las **proyecciones u operadores proyección**, ya que estos últimos tienen la característica de ser idempotentes, con el producto de operadores.

Un subconjunto particular de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el conjunto de **operadores de la clase de Traza**, el cual denotamos mediante $L_1(\mathcal{H})$, en el Apéndice B se detalla más al respecto. Sea $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, y la función $\text{tr} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, actuando de la siguiente manera

$$\text{tr}(|T|) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| \xi_n, \xi_n \rangle, \quad |T| := \sqrt{T^* T}.$$

Usando esto se define $L_1(\mathcal{H})$,

$$L_1(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{tr}(|T|) < \infty\}.$$

Del inciso (d) de la siguiente proposición se deduce que los proyectores son operadores de la clase de traza.

Proposición 1.1.3 Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $|\xi\rangle\langle\eta|$ un proyector, con $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Se tienen las siguientes propiedades

- a) $T|\xi\rangle\langle\eta| = |T\xi\rangle\langle\eta|$;
- b) $|\xi\rangle\langle\eta|T = |\xi\rangle\langle T^*\eta|$;
- c) $|\xi\rangle\langle\eta|^* = |\eta\rangle\langle\xi|$;
- d) $\text{tr}(|\xi\rangle\langle\eta|) = \langle\eta, \xi\rangle$.

Demostración.

- a) $T|\xi\rangle\langle\eta|\zeta = T\langle\eta, \zeta\rangle\xi = \langle\eta, \zeta\rangle T\xi = |T\xi\rangle\langle\eta|\zeta$.
- b) $|\xi\rangle\langle\eta|T\zeta = \langle\eta, T\zeta\rangle\xi = \langle T^*\eta, \zeta\rangle\xi = |\xi\rangle\langle T^*\eta|\zeta$.
- c) Sean $\zeta, \phi \in \mathcal{H}$, entonces:

$$\langle|\xi\rangle\langle\eta|\zeta, \phi\rangle = \langle\langle\eta, \zeta\rangle\xi, \phi\rangle = \langle\zeta, \eta\rangle\langle\xi, \phi\rangle = \langle\zeta, \langle\xi, \phi\rangle\eta\rangle = \langle\zeta, |\eta\rangle\langle\xi|\phi\rangle.$$

- d) Supongamos que $\xi, \eta \neq 0$, completando el conjunto $\{\xi\}$ a una base ortonormal $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\xi_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$, obtenemos

$$\text{tr}(|\xi\rangle\langle\eta|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle\xi_n, |\xi\rangle\langle\eta|\xi_n\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle\eta, \xi_n\rangle\langle\xi_n, \xi\rangle = \langle\eta, \xi_1\rangle\langle\xi_1, \xi\rangle = \langle\eta, \xi_1\rangle\|\xi\| = \langle\eta, \xi\rangle.$$

■

Definición 1.1.4 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice positivo si

$$\langle\xi, A\xi\rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

En este caso, usamos la notación $A \geq 0$. Además, para dos operadores $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diremos que $A \leq B$ si $B - A \geq 0$.

Lema 1.1.5 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores positivos tales que $AB = BA$, entonces el operador AB es positivo.

Demostración. Como los operadores A y B son positivos, existen los operadores $A^{1/2}$ y $B^{1/2}$, que son las raíces cuadradas de A y B respectivamente. Además, dado que $AB = BA$, tenemos que $A^{1/2}B^{1/2} = B^{1/2}A^{1/2}$. Entonces, para $\xi \in \mathcal{H}$ arbitrario,

$$\langle AB\xi, \xi\rangle = \langle B^{1/2}A^{1/2}A^{1/2}B^{1/2}\xi, \xi\rangle = \langle (A^{1/2}B^{1/2})^* A^{1/2}B^{1/2}\xi, \xi\rangle \geq 0.$$

Por lo tanto el operador AB es positivo.

■

Lema 1.1.6 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se puede expresar como $\mathbb{C}$ -combinación lineal de cuatro operadores positivos.*

Demostración. Primero, cada operador lineal $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se puede expresar de la forma

$$A = A^+ + iA^-, \quad A^+ := \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A^- := \frac{1}{2i}(A - A^*),$$

donde A^+ y A^- son operadores autoadjuntos. Ahora, bastará mostrar que cada operador autoadjunto puede descomponerse como diferencia de operadores positivos.

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y sea $|T| = (T^2)^{\frac{1}{2}}$. Entonces

$$T = T_+ - T_-,$$

con $T_+ := \frac{1}{2}(|T| + T)$ y $T_- := \frac{1}{2}(|T| - T)$. Observe que los operadores T_+ y T_- son autoadjuntos.

Para ver que ambos operadores son operadores positivos, sea P la proyección ortogonal hacia $N(T_+)$. Se cumple

$$T_+T_- = \frac{1}{4}(|T| + T)(|T| - T) = 0,$$

lo cual indica que $R(T_-) \subset N(T_+)$. En consecuencia $PT_- = T_-$ y

$$\begin{aligned} 2PT &= P(|T| + T) - P(|T| - T) = T - |T| \Rightarrow |T| = (\mathbb{1} - 2P)T, \\ 2P|T| &= P(|T| + T) + P(|T| - T) = |T| - T \Rightarrow T = (\mathbb{1} - 2P)|T|. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son consistentes, ya que $(\mathbb{1} - 2P)^2 = \mathbb{1}$. Al tomar adjuntos en las ecuaciones anteriores se observa que P conmuta con T y $|T|$, así los operadores T_+ y T_- pueden ser escritos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} T_+ &= \frac{1}{2}(|T| + T) = \frac{1}{2}(|T| + (\mathbb{1} - 2P)|T|) = (\mathbb{1} - P)|T|, \\ T_- &= \frac{1}{2}(|T| - T) = \frac{1}{2}(|T| - (\mathbb{1} - 2P)|T|) = P|T|. \end{aligned}$$

Por ser T_+ y T_- autoadjuntos obtenemos

$$(\mathbb{1} - P)|T| = |T|(\mathbb{1} - P), \quad \text{y} \quad P|T| = |T|P.$$

Por esto último y dado que los operadores P , $\mathbb{1} - P$ y $|T|$ son positivos, el Lema 1.1.5 asegura que T_+ y T_- son positivos. Esto concluye la demostración. ■

1.2. Topologías sobre Álgebras de Banach

En esta sección presentaremos algunas topologías sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y mostraremos las relaciones entre ellas. Cabe resaltar que existen más topologías sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pero solo presentaremos

las que nos son pertinentes para este trabajo. Para consultar algunas de las topologías que aquí no se incluyen se puede ver [26].

A continuación daremos las definiciones de conjunto dirigido y red topológica, además de convergencia de redes en espacios topológicos. Esto para definir algunas topologías sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 1.2.1 Sea X un espacio topológico.

1. Una relación $(\leq)$ que es reflexiva y transitiva en un conjunto D se llama una **dirección** si para cualesquiera $d_1, d_2 \in D$ existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \leq d_3$ y $d_2 \leq d_3$. El par $(D, \leq)$ se llama un **conjunto dirigido**.

Una **red** en un conjunto X es una función $f : (D, \leq) \rightarrow X$, donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. Si $f(d) = x_d \in X$ denotaremos la red mediante $(x_d)_{d \in D}$.

2. Sea $x \in X$. Un subconjunto U de X se llama una **vecindad** de x si hay un conjunto abierto V de X tal que

$$x \in V \subset U.$$

El conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas las vecindades de x se llama **sistema de vecindades** en x .

3. Si $(x_d)_{d \in D}$ es una red en X entonces se dice que $(x_d)_{d \in D}$ está **finalmente** en un conjunto $U \subset X$ si existe $d_U \in D$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_U$. La red $(x_d)_{d \in D}$ **converge** a $x \in X$, escrito $(x_d) \rightarrow x$, si está finalmente en cada vecindad de x .

Observación 1.2.2 Para nuestra finalidad, la condición de convergencia de una red nos dice lo siguiente: Dada una red $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ diremos que converge a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$|Ct(T - T_\alpha)| < \varepsilon, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0,$$

donde $Ct(T)$ representa una condición de convergencia en una determinada topología, las cuales veremos más adelante.

Durante ésta sección y para mayor comodidad al escribir algunas demostraciones, si $(T_\alpha) \rightarrow T$ en alguna topología, simplemente escribiremos

$$\lim_{\alpha} Ct(T - T_\alpha) = 0,$$

en vez de la expresión formal en la Observación 1.2.2.

Ahora estamos en condiciones de definir algunas topologías sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, haciendo uso de redes de operadores en este espacio. Para más detalles puede consultar [26].

Definición 1.2.3 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de Banach de operadores lineales acotados $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Para $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, una red de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definimos:

- (i) **Topología de convergencia uniforme (topología uniforme)** $[\tau_u]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge uniformemente a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{u} T$, si

$$\lim_{\alpha} \|T_\alpha - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0.$$

- (ii) **Topología de convergencia ultra-fuerte (topología σ -fuerte o ultra-fuerte)** $[\tau_{\sigma-s}]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge ultra-fuertemente a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{\sigma-s} T$, si para todo operador positivo de la clase de traza $\rho \in L_1(\mathcal{H})$,

$$\lim_{\alpha} \operatorname{tr}((T - T_\alpha)^*(T - T_\alpha)\rho)^{1/2} = 0$$

Observación 1.2.4 La definición original se establece mediante seminormas (ver [26] definición 2.2.), pero es posible ver que ambas definiciones son equivalentes si se piensa la convergencia en el sentido de los abiertos.

- (iii) **Topología de convergencia fuerte (topología fuerte)** $[\tau_s]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge fuertemente a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{s} T$, si para cada $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\alpha} \|T_\alpha \xi - T \xi\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

- (iv) **Topología de convergencia fuerte* (topología fuerte*)** $[\tau_{s*}]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge fuerte* a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{s*} T$, si

$$\lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)\xi\| + \|(T_\alpha - T)^*\xi\| = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Es decir, si T_α y T_α^* convergen respectivamente a T y T^* en la topología fuerte.

- (v) **Topología de convergencia débil* (Topología débil* o ultradébil)** $[\tau_{w*}]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge ultradébilmente a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{w*} T$, si para todo operador de la clase de traza $\rho \in L_1(\mathcal{H})$,

$$\lim_{\alpha} \operatorname{tr}(\rho(T_\alpha - T)) = 0.$$

- (vi) **Topología de convergencia débil (topología débil)** $[\tau_w]$. Diremos que $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge débilmente a T , denotado $T_\alpha \xrightarrow{w} T$, si para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\alpha} \langle \xi, (T_\alpha - T)\eta \rangle = 0.$$

Estas condiciones de convergencia sirven para definir los abiertos básicos en la topología correspondiente de la siguiente manera:

Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varepsilon > 0$,

$$S_\varepsilon(T) := \{\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |Ct(T - \Psi)| < \varepsilon\}. \quad (1.1)$$

De la ecuación (1.1) observamos que las topologías antes definidas pueden ser dotadas de una base local numerable de vecindades abiertas $\mathcal{V}_T$, para ver esto basta tomar $\varepsilon = 1/n$ en (1.1), esto para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto indica que las topologías antes definidas son primero numerables.

Definición 1.2.5 Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un espacio topológico X , diremos que τ_1 es más débil que τ_2 , o τ_2 es más fuerte que τ_1 , si $\tau_1 \subset \tau_2$.

Proposición 1.2.6 Sean τ_1 y τ_2 topologías sobre un espacio topológico X . Entonces, τ_1 es más débil que τ_2 si y solo si cada red que converge en (X, τ_2) también converge en (X, τ_1) .

Demostración. Supongamos que τ_1 es más débil que τ_2 y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red convergente a (X, τ_2) , digamos a $x \in X$. Ahora para cada vecindad U de x , con $U \in \tau_1$, se tiene $U \in \tau_2$ y, por la convergencia en (X, τ_2) , existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Concluimos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge en (X, τ_1) .

Para la otra parte, supongamos que cada red que converge en (X, τ_2) también converge en (X, τ_1) . Mostraremos que cada conjunto cerrado en (X, τ_1) también es cerrado en (X, τ_2) .

Sea $C \subset X$ cerrado en (X, τ_1) , y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en C que converge a x en (X, τ_2) , entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge en (X, τ_1) . Por ser C cerrado en (X, τ_1) obtenemos $x \in C$.

Concluimos que C es cerrado en (X, τ_2) . ■

Teorema 1.2.7 τ_w es de Hausdorff.

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operadores distintos, entonces existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $T_1(x) \neq T_2(x)$, por lo cual $(T_1 - T_2)x \neq 0$. Existe $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle y, (T_1 - T_2)x \rangle \neq 0.$$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{4} |\langle y, (T_1 - T_2)x \rangle|$, y sean

$$\mathcal{U}_j := \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle y, (T_j - S)x \rangle| < \varepsilon\}, \quad j = 1, 2,$$

vecindades de los operadores T_1, T_2 , respectivamente, estos conjuntos son abiertos pues son elementos de la base de τ_w . Supongamos que existe un operador $S_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $S_0 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, entonces tendríamos

$$|\langle y, (T_1 - T_2)x \rangle| \leq |\langle y, (T_1 - S_0)x \rangle| + |\langle y, (S_0 - T_2)x \rangle| < \frac{1}{2} |\langle y, (T_1 - T_2)x \rangle|,$$

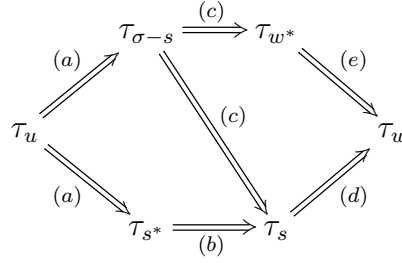
lo cual es una contradicción. Esto muestra que τ_w es de Hausdorff. ■

Teorema 1.2.8 Para las topologías de la Definición 1.2.3 tenemos las siguientes relaciones:

- (a) La topología uniforme es más fuerte que las topologías σ -fuerte y fuerte*;
- (b) La topología fuerte* es más fuerte que la topología fuerte;
- (c) La topología σ -fuerte es más fuerte que las topologías fuerte y débil*;
- (d) La topología fuerte es más fuerte que la topología débil;

(e) La topología débil* es más fuerte que la topología débil.

En el siguiente diagrama expresamos las convergencias antes señaladas.



Demostración. Sea $\{T_\alpha\}$ una red de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(a) Supongamos que $\{T_\alpha\}$ converge a un operador T en la topología uniforme.

i) $[\tau_{s^*} \subset \tau_u]$ Para cada operador acotado A se verifica $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. Entonces,

$$\lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \lim_{\alpha} \|T_\alpha - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0.$$

Así, para cada $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)\xi\| = 0, \quad \lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)^*\xi\| = 0.$$

Es decir, las redes de operadores $\{T_\alpha\}$ y $\{T_\alpha^*\}$ convergen a los operadores T y T^* respectivamente en la topología fuerte.

ii) $[\tau_{\sigma-s} \subset \tau_u]$ Para cada operador positivo $\rho \in L_1(\mathcal{H})$

$$|\text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho)| \leq \|(T_\alpha - T)\|^2 \|\rho\|_1,$$

por lo cual,

$$\lim_{\alpha} \text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho) = 0.$$

Es decir, $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología σ -fuerte.

(b) Se sigue de la definición.

(c) Supongamos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología σ -fuerte.

i) $[\tau_s \subset \tau_{\sigma-s}]$ Sea $\xi \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\|(T_\alpha - T)\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle (T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\xi, \xi \rangle = \text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)|\xi\rangle\langle\xi|),$$

observe que el operador $|\xi\rangle\langle\xi|$ es positivo y de la clase de traza, por lo cual

$$\lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)\xi\|_{\mathcal{H}} = \lim_{\alpha} \text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)|\xi\rangle\langle\xi|)^{1/2} = 0.$$

Concluimos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología fuerte.

ii) $[\tau_w^* \subset \tau_{\sigma-s}]$. Para mostrar esto primero mostraremos que es cierto para un operador positivo de la clase de traza, después usaremos que cada operador se puede descomponer como $\mathbb{C}$ -combinación lineal de cuatro operadores positivos.

Sea φ positivo y de la clase de traza, entonces el funcional lineal $\omega(A) := \text{tr}(\varphi A)$ es positivo en el sentido de la Definición 1.3.6, por la Proposición 1.3.7 es continuo y cumple,

$$|\omega(A)|^2 \leq \|\omega\| \omega(A^*A),$$

en nuestro caso,

$$|\text{tr}(\varphi(T_\alpha - T))|^2 \leq \|\varphi\|_1 \text{tr}(\varphi(T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)), \quad \text{para } A = (T_\alpha - T).$$

Usando que la red $\{T_\alpha\}$ converge σ -fuertemente al operador T obtenemos

$$\lim_\alpha |\text{tr}(\varphi(T_\alpha - T))| \leq \|\varphi\|_1^{1/2} \lim_\alpha \text{tr}(\varphi(T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T))^{1/2} = 0. \quad (1.2)$$

Ahora, supongamos que $\varphi \in L_1(\mathcal{H})$. Éste se puede descomponer como suma de dos operadores autoadjuntos de la forma $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) + i\frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$, los cuales pertenecen a $L_1(\mathcal{H})$. Por el Lema 1.1.6 cada operador autoadjunto se puede descomponer como diferencia de operadores positivos; por lo cual, si φ es autoadjunto, podemos afirmar que cada operador positivo en su descomposición es de la clase de traza (ver demostración del Lema 1.1.6).

Por lo anterior, si $\varphi \in L_1(\mathcal{H})$,

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 c_j \varphi_j, \quad \varphi_j \in L_1(\mathcal{H}) \text{ positivo}, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

entonces, por (1.2),

$$\lim_\alpha |\text{tr}(\varphi(T_\alpha - T))| \leq \sum_{j=1}^4 |c_j| \lim_\alpha |\text{tr}(\varphi_j(T_\alpha - T))| = 0.$$

Concluimos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología débil*.

- (d) Supongamos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología fuerte. Para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se cumple

$$|\langle (T_\alpha - T)\xi, \eta \rangle| \leq \|(T_\alpha - T)\xi\|_{\mathcal{H}} \|\eta\|_{\mathcal{H}},$$

por lo cual,

$$\lim_\alpha \langle (T_\alpha - T)\xi, \eta \rangle = 0, \quad \text{para cada } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Concluimos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología débil.

- (e) Supongamos que $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología débil*. Para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se cumple

$$\langle \xi, (T_\alpha - T)\eta \rangle = \text{tr}(|(T_\alpha - T)\eta\rangle\langle \xi|) = \text{tr}((T_\alpha - T)|\eta\rangle\langle \xi|),$$

donde $|\eta\rangle\langle \xi| \in L_1(\mathcal{H})$. Por tanto

$$\lim_{\alpha} \langle \xi, (T_\alpha - T)\eta \rangle = \lim_{\alpha} \text{tr}((T_\alpha - T)|\eta\rangle\langle \xi|) = 0,$$

es decir, $\{T_\alpha\}$ converge a T en la topología débil. ■

Corolario 1.2.9 *Las topologías de la Definición 1.2.3 son de Hausdorff.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.2.8 con el Teorema 1.2.7. ■

Por último mostraremos que existe una relación más fuerte entre algunas topologías antes definidas.

Proposición 1.2.10 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Para las topologías de la Definición 1.2.3 tenemos*

- (1) *Las topologías fuerte y σ -fuerte coinciden sobre conjuntos acotados de $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})})$.*
- (2) *Las topologías débil y débil* coinciden sobre conjuntos acotados de $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})})$.*

Demostración.

- (1) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que la red de operadores $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ forma un conjunto acotado y converge a un operador T en la topología fuerte. Como $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es acotado, existe $M > 0$ tal que,

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq M, \quad \text{para todo } \alpha \in I.$$

Es sencillo mostrar, bajo las suposiciones anteriores, que T tiene norma finita.

Por otro lado, sea $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces, para el operador $\rho = |\xi\rangle\langle \xi|$ se tiene

$$\lim_{\alpha} \text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho) = \lim_{\alpha} \|(T_\alpha - T)\xi\|^2 = 0.$$

De modo similar, para un conjunto ortogonal $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \mathcal{H}$, se muestra que

$$\lim_{\alpha} \text{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho_n) = 0, \quad \rho_n := \sum_{k=1}^n |\xi_k\rangle\langle \xi_k|.$$

Por último, sea $\rho \in L_1(\mathcal{H})$ positivo. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\rho - \rho_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(1 + M + \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})})^2}, \quad \rho_n := \sum_{k=1}^n |\xi_k\rangle\langle \xi_k|, \quad n \geq N,$$

con $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ un conjunto ortogonal. Tomando $n \geq N$ fijo, para este ρ_n existe α_0 tal que

$$|\operatorname{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho_n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para cada } \alpha \geq \alpha_0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho)| &\leq |\operatorname{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)(\rho - \rho_n))| + |\operatorname{tr}((T_\alpha - T)^*(T_\alpha - T)\rho_n)| \\ &\leq \|T_\alpha - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \|\rho - \rho_n\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $\{T_\alpha\}_\alpha$ converge a T en la topología σ -fuerte.

- (2) Para este caso usaremos un resultado clásico de Topología general que dice lo siguiente *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua biyectiva sobre espacios topológicos con X compacto y Y de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Sean así X la bola unitaria cerrada en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \tau_w)$ la cual es débilmente compacta, y Y la bola unitaria cerrada en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \tau_w)$. Usando la función $\operatorname{id}_{X,Y} : X \rightarrow Y$ esta es biyectiva por definición y continua por el Teorema 1.2.8 inciso (e). Entonces $\operatorname{id}_{X,Y}$ es un homeomorfismo, es decir $\operatorname{id}_{Y,X} : Y \rightarrow X$ es continua.

Esto muestra que que las topologías coinciden sobre conjuntos acotados. ■

1.3. Semigrupos completamente positivos

Definición 1.3.1 Sea $\mathcal{B}$ un álgebra. Diremos que $\mathcal{B}$ es un **álgebra unital** si $\mathcal{B}$ es un álgebra con unidad.

Sea T un mapeo sobre un álgebra de operadores con unidad. Diremos que T es un **mapeo unital** si es un mapeo que preserva la unidad.

Definición 1.3.2 Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos $*$ -álgebras con unidad actuando sobre $\mathcal{H}$.

- 1) Diremos que la aplicación lineal $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es **n -positiva** si para cada subconjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $\mathcal{A}$ y cada subconjunto $\{b_1, \dots, b_n\}$ de $\mathcal{B}$, se cumple

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* T(a_i^* a_j) b_j \geq 0.$$

- 2) Diremos que la aplicación lineal $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es **completamente positiva** si T es n -positiva para cada $n \geq 1$.

Definición 1.3.3 Sea X un espacio de Banach. Una familia uniparamétrica $\phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados $\phi_t : X \rightarrow X$ es un **semigrupo de operadores lineales acotados en X** si

- (i) $\phi_0 = \mathbb{1}_X$, el operador identidad sobre X ; y
- (ii) $\phi_{s+t} = \phi_t \phi_s$ para todo $s, t \geq 0$.

Más aún, si $\|\phi_t\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1$ para cada $t \geq 0$, se dice que Φ es un **semigrupo de contracciones**.

Definición 1.3.4 Sea $\mathcal{A}$ una $*$ -álgebra. Un **semigrupo dinámico cuántico (qds)** sobre $\mathcal{A}$ es un semigrupo $\Phi = \{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ de operadores acotados en $\mathcal{A}$ que es

- a) **Completamente positivo (C.P.)**, i.e., para cada $t \geq 0$, $\Phi_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es completamente positivo.
- b) **Normal o σ -débil continuo**, i.e., para cada $t \geq 0$ y cada red creciente $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de elementos positivos en $\mathcal{A}$ con cota superior, se tiene

$$\Phi_t \left(\sup_{\alpha \in I} x_\alpha \right) = \sup_{\alpha \in I} \Phi_t(x_\alpha).$$

- c) **Ultradébil o $*$ -débil continuo en t** , i.e., para cada operador de la clase de traza y cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{tr}(\rho \Phi_t(x)) = \text{tr}(\rho x).$$

- d) $\Phi_t(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$ para todo $t \geq 0$.

Definición 1.3.5 Un semigrupo dinámico cuántico se dice **de Markov o conservativo** (resp. **sub-Markov**) si

$$\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad (\text{resp. } \mathcal{T}_t(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}) \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

Definición 1.3.6 Un funcional lineal ω sobre una $*$ -álgebra $\mathcal{A}$ se dice **positivo** si

$$\omega(A^*A) \geq 0, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Proposición 1.3.7 Sea ω un funcional lineal sobre una C^* -álgebra $\mathcal{A}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- (1) ω es positivo
- (2) ω es continuo, y

$$\|\omega\| = \lim_{\alpha} \omega(E_\alpha^2)$$

para alguna aproximación a la identidad $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $\mathcal{A}$.

Además, si esas condiciones se satisfacen, i.e., si ω es positivo entonces se cumple que

- (a) $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$;
- (b) $|\omega(A)|^2 \leq \omega(A^*A)\|\omega\|$;
- (c) $|\omega(A^*BA)| \leq \omega(A^*A)\|B\|$;
- (d) $\|\omega\| = \sup\{\omega(A^*A), \|A\| = 1\}$,

para todo $A, B \in \mathcal{A}$, y

$$\|\omega\| = \lim_{\alpha} \|\omega(E_{\alpha})\|,$$

donde $\{E_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es cualquier aproximación a la identidad de $\mathcal{A}$.

Demostración. Ver [5] Proposición 2.3.11 ■

Definición 1.3.8 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Von Neumann de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea ω un funcional lineal sobre $\mathcal{A}$. Diremos que ω es **normal** si

$$\sup_{\alpha} \omega(a_{\alpha}) = \omega\left(\sup_{\alpha} a_{\alpha}\right), \quad \alpha \in I, \quad a_{\alpha} \in \mathcal{A}. \quad (1.3)$$

Teorema 1.3.9 Sea ω un estado sobre un álgebra de Neumann $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Son equivalentes:

- (1) ω es normal;
- (2) ω es σ -débil continuo;
- (3) Existe un operador positivo $\rho \in L_1(\mathcal{H})$ tal que $\text{tr}(\rho) = 1$ y $\omega(x) = \text{tr}(\rho x)$.

Demostración. Ver [5] Teorema 2.4.21 ■

Capítulo 2

El dominio del generador de un semigrupo C.P.

En la primera sección de este capítulo se estudiará el teorema de factorización de Stinespring, referencia [11], donde se muestra que cada mapeo completamente positivo en una C^* -álgebra con unidad se puede ver como un $*$ -homomorfismo de álgebras, via unos operadores entre espacios de Hilbert. Esto nos será de utilidad para la segunda sección, en la cual, dado un semigrupo completamente positivo de contracciones Φ y su generador infinitesimal L , se desarrollarán los resultados principales acerca del dominio del generador L , así como de la máxima álgebra contenida en éste. Esta parte corresponde a la referencia [3], desarrollando cada demostración e incluyendo los resultados necesarios para una mejor comprensión de los mismos.

2.1. Teorema de factorización de Stinespring

Teorema 2.1.1 (Factorización de Stinespring)

Sean $\mathcal{B}$ una sub C^* -álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra unital. Un mapeo lineal $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es completamente positivo si y solo existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, un operador acotado $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ y un $*$ -homomorfismo $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ tal que

$$T(a) = V^* \pi(a) V, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (2.1)$$

Demostración. Para la primera parte, si T puede representarse como en la ecuación (2.1), entonces para $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{A}$ y $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathcal{B}$,

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \xi, b_i V^* \pi(a_i^* a_j) V b_j \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(a_i) V b_i \xi, \pi(a_j) V b_j \xi \rangle \geq 0, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

porque π es $*$ -homomorfismo. Inversamente, supongamos que T es completamente positivo y consideremos el espacio vectorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. En este espacio definimos la forma $(\cdot, \cdot)$

$$(x, y) = \sum_{i,j} \langle \xi_i, T(a_i^* b_j) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}}$$

para $x = \sum_i a_i \otimes \xi_i$, $y = \sum_j b_j \otimes \eta_j$ en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Esta forma resulta ser bilineal, ya que si tomamos x, y como antes y $w = \sum_k c_k \otimes \varphi_k$, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha x + w, y) &= \left(\sum_l d_l \otimes \zeta_l, y \right) = \sum_{l,j} \langle \zeta_l, T(d_l^* b_j) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i,j} \langle \xi_i, T((\alpha a_i)^* b_j) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{k,j} \langle \varphi_k, T(c_k^* b_j) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

donde el último término corresponde a $\bar{\alpha}(x, y) + (w, y)$. De manera similar se muestra la linealidad de la segunda coordenada.

Por ser T completamente positivo se tiene

$$(x, x) = \sum_{i,j} \langle \xi_i, T(a_i^* a_j) \xi_j \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para todo $x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Entonces, la forma bilineal $(\cdot, \cdot)$ es positiva. Consideremos la seminorma

$$\|\cdot\|_{\otimes} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$$

con $\|x\|_{\otimes}^2 = (x, x)$, para cada $x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$.

Considere el homomorfismo de álgebras $\pi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})$. Dado $a \in \mathcal{A}$, $\pi_0(a)$ actúa de la siguiente manera

$$\pi_0(a) \left(\sum_i a_i \otimes \xi_i \right) = \sum_i (a a_i) \otimes \xi_i.$$

Fácilmente se verifican $\pi_0(ab) = \pi_0(a)\pi_0(b)$, $\pi_0(a+b) = \pi_0(a) + \pi_0(b)$ con $a, b \in \mathcal{A}$. Para todo $x, y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned} (x, \pi_0(a)y) &= \left(\sum_i a_i \otimes \xi_i, \sum_j ab_j \otimes \eta_j \right) \\ &= \sum_{i,j} \langle \xi_i, T(a_i^* (ab_j)) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i,j} \langle \xi_i, T((a^* a_i)^* b_j) \eta_j \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= (\pi_0(a^*)x, y). \end{aligned}$$

Se sigue que para cada $x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$, el mapeo

$$\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega(a) = (x, \pi_0(a)x)$$

es un funcional lineal positivo en $\mathcal{A}$ dado que para $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$(x, \pi_0(a^* a)x) = (x, \pi_0(a)^* \pi_0(a)x) = (\pi_0(a)x, \pi_0(a)x) \geq 0.$$

Más aún,

$$\|\pi_0(a)x\|_{\otimes}^2 = (x, \pi_0(a^*a)x) \leq \|a^*a\|_{\mathcal{A}} \omega(\mathbb{1}) = \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \|x\|_{\otimes}^2, \quad (2.2)$$

esto último consecuencia del inciso (c) del Teorema 1.3.7, con $B = \mathbb{1}$.

Sea $\mathcal{N} := \{x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : (x, x) = 0\}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz para formas bilineales positivas y por la ecuación (2.2), $\mathcal{N}$ es lineal e invariante bajo $\pi_0(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Consideramos el espacio cociente pre-Hilbert $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$, definiendo el pre-producto escalar en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$ como

$$\langle x + \mathcal{N}, x + \mathcal{N} \rangle_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}} = (x, x).$$

Sea $\mathcal{K}$ el espacio de Hilbert que se obtiene al completar $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$. Por la anterior construcción del $*$ -homomorfismo π_0 , es posible extenderlo a una representación π de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ dada por

$$\pi(a)(x + \mathcal{N}) = \pi_0(a)x + \mathcal{N},$$

para $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Consideramos el operador lineal $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ actuando de la siguiente manera

$$Vu = \mathbb{1} \otimes u + \mathcal{N}.$$

Este operador es acotado, ya que

$$\|Vu\|_{\mathcal{K}}^2 = \langle \mathbb{1} \otimes u + \mathcal{N}, \mathbb{1} \otimes u + \mathcal{N} \rangle_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}} = \langle u, T(\mathbb{1})u \rangle_{\mathcal{H}} \leq \|T(\mathbb{1})\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como $\mathcal{K}$ es la completación de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$, bastará verificar la forma del operador adjunto V^* en los elementos simples de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$. Sean $u \in \mathcal{H}$, $x = \sum_i a_i \otimes u_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$

$$\langle u, V^*(x + \mathcal{N}) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Vu, x + \mathcal{N} \rangle_{\mathcal{K}} = (\mathbb{1} \otimes u, x) = \left\langle u, \sum_i T(a_i)u_i \right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

De este modo se define al operador $V^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ por

$$V^*(x + \mathcal{N}) = \sum_i T(a_i)u_i, \quad x = \sum_i a_i \otimes u_i.$$

De la definición se observa que V^* es lineal.

Para verificar que está bien definido notemos que

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : (x, y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}\}.$$

Sean $x, z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ tales que $x - z \in \mathcal{N}$, y $u \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\langle u, V^*(x - z + \mathcal{N}) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Vu, x - z + \mathcal{N} \rangle_{\mathcal{K}} = (\mathbb{1} \otimes u, x - z) = 0.$$

Tenemos que $V^*(x - z + \mathcal{N}) = 0$ en $\mathcal{H}$ y, por linealidad, $V^*(x + \mathcal{N}) = V^*(z + \mathcal{N})$.

Por último, sean $u, w \in \mathcal{H}$, $a \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$\langle u, V^*\pi(a)Vw \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Vu, \pi(a)Vw \rangle_{\mathcal{K}} = (\mathbb{1} \otimes u, a \otimes w) = \langle u, T(a)w \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Esto muestra que $T(a) = V^*\pi(a)V$. ■

Corolario 2.1.2 (Desigualdad de Kadison-Schwarz para mapeos unitales C.P.) *Sea $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra unital y $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un mapeo lineal completamente positivo unital. Entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene*

$$\phi(A^*A) \geq \phi(A^*)\phi(A).$$

Demostración. Por el Teorema de Stinespring existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, un $*$ -homomorfismo $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$, y operadores $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, $V^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ tales que

$$\phi(A) = V^*\pi(A)V, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Es sencillo mostrar que $V^*V = \mathbb{1}$ en $\mathcal{H}$ y que el operador

$$VV^* : \mathcal{K} \rightarrow (\mathbb{1} \otimes \mathcal{H}) + \mathcal{N} \subset \mathcal{K},$$

es una proyección ortogonal en $\mathcal{K}$. Entonces $V^*V \leq \mathbb{1}$ y por tanto, dado $A \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\phi(A^*A) = V^*\pi(A^*)\pi(A)V \geq V^*\pi(A^*)V^*V\pi(A)V = \phi(A^*)\phi(A).$$

Esto demuestra lo deseado. ■

2.2. Dominio del generador de un semigrupo C.P.

En esta sección, bastará suponer que el semigrupo considerado es completamente positivo, normal, conservativo y sólo débilmente continuo en t . A un semigrupo completamente positivo de esta clase le llamaremos *continuo en sentido natural* o más brevemente, semigrupo CP.

Lema 2.2.1 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador lineal positivo y normal, tal que $\|\phi(\mathbb{1})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$. Entonces, $\|\phi\| \leq 1$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador positivo. Por ser ϕ como en la hipótesis, se tiene que la aplicación

$$\omega_\xi(A) = \langle \phi(A)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{para cada } \xi \in \mathcal{H},$$

es un funcional lineal positivo y normal. Por el inciso (3) del Teorema 1.3.9, existe un operador positivo de la clase de traza $\phi_*(\xi)$, tal que

$$\omega_\xi(A) = \text{tr}(\phi_*(\xi)A), \quad \text{para cada } \xi \in \mathcal{H},$$

y se cumple

$$\langle \phi(A)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \text{tr}(\phi_*(\xi)A) \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\phi_*(\xi)\|_1.$$

Observe que $\|\phi_*(\xi)\|_1 = \text{tr}(\phi_*(\xi)\mathbb{1}) = \langle \phi(\mathbb{1})\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}}$. Entonces

$$\langle \phi(A)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \langle \phi(\mathbb{1})\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}},$$

por lo cual

$$\|\phi(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\phi(\mathbb{1})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}, \quad \text{para } A \geq 0. \quad (2.3)$$

Ahora, tomando $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ arbitrario de norma uno y usando la desigualdad de Kadison-Schwarz, obtenemos $\|\phi(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \leq \|\phi(A^*A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. Usando esto y la desigualdad (2.3), resulta

$$\|\phi(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \leq \|A^*A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\phi(\mathbb{1})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Por último, usando que $\|A^*A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2$ y tomando supremo sobre los operadores A de norma uno, concluimos que $\|\phi\| \leq 1$. ■

Sea $\Phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo CP. Entonces, se tienen las siguientes caracterizaciones para el dominio del generador, ver Definición 2.2.3.

Lema 2.2.2 *Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(i) *El límite*

$$L(A) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(A) - A)$$

existe respecto a la topología fuerte de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

(ii) *El límite*

$$L(A) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(A) - A)$$

existe respecto a la topología débil de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(iii)

$$\sup_{t > 0} \frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\| \leq M < \infty.$$

(iv) *Existe una sucesión $t_n \rightarrow 0^+$ para la cual*

$$\sup_n \frac{1}{t_n} \|\phi_{t_n}(A) - A\| \leq M < \infty.$$

Demostración. Las relaciones (i) implica (ii) y (iii) implica (iv) son inmediatas.

Para (ii) implica (iii), sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Los funcionales

$$\Gamma_{t,\eta}(\xi) := \left\langle \xi, \frac{1}{t} (\phi_t(A) - A) \eta \right\rangle$$

cumplen que $\Gamma_{t,\eta}(\xi)$ converge a algún $z_\eta(\xi) \in \mathbb{C}$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Para $\epsilon = 1$ existe $T > 0$ tal que, para cada $0 \leq t \leq T$,

$$|\Gamma_{t,\eta}(\xi)| < 1 + |z_\eta(\xi)|.$$

Luego para $t \geq T$,

$$|\Gamma_{t,\eta}(\xi)| \leq \|\xi\| \|\eta\| \frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \frac{2}{t} \|\xi\| \|\eta\| \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \frac{2}{T} \|\xi\| \|\eta\| \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})},$$

esto para cada $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces, por Banach-Steinhaus,

$$\frac{1}{t} \|(\phi_t(A) - A)\eta\| = \|\Gamma_{t,\eta}\|_{\mathcal{H}'} < \infty,$$

esto último para toda $t > 0$, y cada $\eta \in \mathcal{H}$ fija. Nuevamente, por Banach-Steinhaus, obtenemos para toda $t > 0$

$$\frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \infty,$$

con lo cual queda demostrado (iii).

Para (iv) implica (i), dado que la bola unitaria en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacta en la topología débil* y ésta coincide con la topología débil sobre subconjuntos acotados de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces la bola unitaria es compacta en la topología débil y, por tanto, débilmente secuencialmente compacta.

Por la hipótesis (iv), existe una subsucesión $\{t_m\} := \{t_{n_m}\}$ de $\{t_n\}$ tal que $t_m \rightarrow 0^+$ y

$$\frac{1}{t_m} (\phi_{t_m}(A) - A) \longrightarrow T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

en la topología débil de operadores. Afirmamos que para cada $s > 0$,

$$\int_0^s \phi_\lambda(T) d\lambda = \phi_s(A) - A, \quad (2.4)$$

donde la integral anterior se interpreta como una integral débil; esto es, para $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\int_0^s \langle \phi_\lambda(T)\xi, \eta \rangle d\lambda = \langle \phi_s(A)\xi, \eta \rangle - \langle A\xi, \eta \rangle.$$

Para ver esto, fijemos $\lambda > 0$. Como ϕ_λ es normal y positivo, para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, el funcional

$$\omega_\lambda(B) := \langle \phi_\lambda(B)\xi, \eta \rangle, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

es un funcional lineal continuo $\omega_\lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, el cual es normal y positivo. Por el inciso (c) del Teorema 1.3.9, es σ -débil continuo y es débilmente continuo en subconjuntos acotados de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, por tanto,

$$\frac{1}{t_m} (\phi_{\lambda+t_m}(A) - \phi_\lambda(A)) = \phi_\lambda \left(\frac{1}{t_m} (\phi_{t_m}(A) - A) \right) \longrightarrow \phi_\lambda(T)$$

en la topología débil de operadores, cuando $m \rightarrow \infty$.

Sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ fijos, la función $F_m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F_m(\lambda) = \frac{1}{t_m} \langle (\phi_{\lambda+t_m}(A) - \phi_\lambda(A))\xi, \eta \rangle$$

es continua y converge puntualmente a la función continua $F(\lambda) = \langle \phi_\lambda(T)\xi, \eta \rangle$.

Tomando $s > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $\lambda \in (0, s]$ se cumple,

$$|F_m(\lambda)| \leq M \|\xi\| \|\eta\|.$$

Por el teorema de convergencia dominada se tiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \left(\int_0^s \langle \phi_{\lambda+t_m}(A)\xi, \eta \rangle d\lambda - \int_0^s \langle \phi_\lambda(A)\xi, \eta \rangle d\lambda \right) = \int_0^s \langle \phi_\lambda(T)\xi, \eta \rangle d\lambda. \quad (2.5)$$

Escribiendo $f(\lambda + t_m) + f(\lambda) = F_m(\lambda)$, obtenemos

$$\int_0^s f(\lambda + t_m) d\lambda - \int_0^s f(\lambda) d\lambda = \int_s^{s+t_m} f(\lambda) d\lambda - \int_0^{t_m} f(\lambda) d\lambda,$$

por lo que el lado izquierdo de la ecuación (2.5) se vuelve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{t_m} \left(\int_s^{s+t_m} \langle \phi_\lambda(A)\xi, \eta \rangle d\lambda - \int_0^{t_m} \langle \phi_\lambda(A)\xi, \eta \rangle d\lambda \right),$$

lo cual, por continuidad débil de ϕ en el parámetro t , es $\langle \phi(A)\xi, \eta \rangle - \langle A\xi, \eta \rangle$ como se afirmó.

Para mostrar la convergencia fuerte*, fijemos $\xi \in \mathcal{H}$ y usando la ecuación (2.4) escribimos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s} (\phi_s(A)\xi - A\xi) - T\xi \right\| &= \frac{1}{s} \left\| \int_0^s \phi_\lambda(T)\xi d\lambda - \int_0^s T\xi d\lambda \right\| \\ &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \|\phi_\lambda(T)\xi - T\xi\| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{s} \|\chi_{[0,s]}\|_2 \left\| \phi_\lambda(T)\xi - T\xi \right\|_2 \\ &= \left(\frac{1}{s} \int_0^s \|\phi_\lambda(T)\xi - T\xi\|^2 d\lambda \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La desigualdad del segundo renglón es Cauchy-Schwarz para las funciones $\|\phi_\lambda(T)\xi - T\xi\|$ y $\chi_{[0,s]}$ en $L^2[0, s]$.

La última igualdad se desarrolla como

$$\begin{aligned} \|\phi_\lambda(T)\xi - T\xi\|^2 &= \langle \phi_\lambda(T)^* \lambda(T)\xi, \xi \rangle - 2\operatorname{Re} \langle \phi_\lambda(T)\xi, T\xi \rangle + \|T\xi\|^2 \\ &\leq \langle \phi_\lambda(T^*T)\xi, \xi \rangle - 2\operatorname{Re} \langle \phi_\lambda(T)\xi, T\xi \rangle + \|T\xi\|^2. \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a la desigualdad de Kadison-Schwarz; como $\phi_\lambda(T^*T)$ y $\phi_\lambda(T)$ convergen débilmente respectivamente a T^*T y T cuando $\lambda \rightarrow 0^+$, se sigue

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^s \|\phi_\lambda(T)\xi - T\xi\|^2 d\lambda \leq \langle T^*T\xi, \xi \rangle - 2 \langle T\xi, T\xi \rangle + \|T\xi\|^2 = 0.$$

Concluimos que $\frac{1}{t}(\phi_t(A) - A)$ converge fuertemente a T cuando $s \rightarrow 0^+$.

De manera similar se obtiene que $\frac{1}{t}(\phi_t(A) - A)^* = \frac{1}{t}(\phi_t(A^*) - A^*)$ converge fuertemente a T^* cuando $t \rightarrow 0^+$. ■

Definición 2.2.3 Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfacen alguna de las condiciones del Lema 2.2.2. Entonces, $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotará el generador del semigrupo ϕ definido por

$$L(A) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(A) - A), \quad A \in \mathcal{D},$$

con el límite en la topología débil o fuerte*. $\mathcal{D}$ se denomina el dominio del operador L .

Note que $\mathcal{D}$ es un subespacio lineal autoadjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para el cual $L(A^*) = L(A)^*$, $A \in \mathcal{D}$. En algunos casos y para evitar confusiones se escribirá $D(L)$, en vez de $\mathcal{D}$, haciendo énfasis en el operador al cual corresponde el dominio. Como el semigrupo es continuo en sentido natural, un procedimiento estándar permite demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en la topología débil de operadores, véase [24].

Lema 2.2.4 Para cada operador $A \in \mathcal{D}$ tenemos

$$\|L(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup_{t>0} \frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Demostración. La desigualdad ($\leq$) se sigue del hecho que $L(A)$ es el límite débil de $\frac{1}{t} (\phi_t(A) - A)$ cuando $t \rightarrow 0^+$, es decir,

$$\|L(A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \limsup_{t>0} \frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \sup_{t>0} \frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Para la otra desigualdad, sea $T = L(A)$. Usando (2.5), para cada $t > 0$ podemos escribir

$$\frac{1}{t} \|\phi_t(A) - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \frac{1}{t} \left\| \int_0^t \phi_\lambda(T) d\lambda \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|\phi_\lambda(T)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} d\lambda \leq \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

La última desigualdad se tiene dado que $\|\phi_\lambda\| \leq 1$. ■

2.2.1. El álgebra dominio

Sea $t > 0$ fijo. Por el teorema de Stinespring, Teorema 2.1.1, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_t$, con norma

$$\|x\|_{\mathcal{H}_t} = \inf \left\{ \sum_n \|A_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\xi_n\|_{\mathcal{H}} : x = \sum_n A_n \otimes \xi_n \right\},$$

un operador lineal acotado $V_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_t$ y un *-homomorfismo normal de álgebras $\pi_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$, tales que

$$\phi_t(X) = V_t^* \pi_t(X) V_t, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (2.6)$$

V_t resulta una isometría, ya que

$$\|V_t \xi\|_{\mathcal{H}_t}^2 = \langle \mathbb{1} \otimes \xi, \mathbb{1} \otimes \xi \rangle_{\mathcal{H}_t} = (\mathbb{1} \otimes \xi, \mathbb{1} \otimes \xi) = \langle \xi, \phi_t(\mathbb{1}) \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Como

$$V_t^* V_t(\xi) = V_t^*(\mathbb{1} \otimes \xi) = \phi_t(\mathbb{1})\xi = \xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{H},$$

resulta que $V_t^* V_t = \mathbb{1}$. En consecuencia, $P_t := V_t V_t^*$ es una proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_t$.

Para $t > 0$ consideramos las seminormas p_t, q_t definidas sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mediante

$$\begin{aligned} p_t(X) &= t^{-1} \|\phi_t(X) - X\|, \\ q_t(X) &= t^{-1/2} \|P_t \pi_t(X) - \pi_t(X) P_t\|_t, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \end{aligned}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y $\|\cdot\|_t$ es la norma en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$.

Usando lo anterior se puede probar el siguiente Lema.

Lema 2.2.5 *Consideremos a Φ , su generador infinitesimal L , y $\mathcal{D}$ el dominio de L . Para cada operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos las siguientes caracterizaciones.*

(i) $X \in \mathcal{D}$ si y solo si

$$\sup_{t>0} p_t(X) < \infty$$

y, en tal caso, $\|L(X)\| = \sup_{t>0} p_t(X)$.

(ii)

$$X \in \mathcal{A} := \{A \in \mathcal{D} : A^* A \in \mathcal{D}, AA^* \in \mathcal{D}\}$$

si y solo si ambas $\sup\{p_t : t > 0\}$ y $\sup\{q_t : t > 0\}$ son finitas y, en tal caso

$$\max(\|\sigma_L(dX^* dX)\|^{1/2}, \|\sigma_L(dX dX^*)\|^{1/2}) \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} q_t(X),$$

donde $\sigma_L(dX^* dX)$ y $\sigma_L(dX dX^*)$ son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definidos como

$$\begin{aligned} \sigma_L(dX^* dX) &= L(X^* X) - X^* L(X) - L(X^*) X \\ \sigma_L(dX dX^*) &= L(X X^*) - X L(X^*) - L(X) X^*. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Demostración. La afirmación (i) se sigue de los Lemas 2.2.2 y 2.2.4.

Para probar (ii) usaremos lo siguiente,

$$\begin{aligned} q_t(X) &\geq \max \left\{ \left\| \frac{1}{t} (\phi_t(X^* X) - \phi_t(X)^* \phi_t(X)) \right\|^{1/2}, \left\| \frac{1}{t} (\phi_t(X X^*) - \phi_t(X) \phi_t(X)^*) \right\|^{1/2} \right\} \\ q_t(X) &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \left\| \frac{1}{t} (\phi_t(X^* X) - \phi_t(X)^* \phi_t(X)) \right\|^{1/2}, \left\| \frac{1}{t} (\phi_t(X X^*) - \phi_t(X) \phi_t(X)^*) \right\|^{1/2} \right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para probar esto, descompondremos el conmutador $\pi_t(X) P_t - P_t \pi_t(X)$ en la suma

$$\pi_t(X) P_t - P_t \pi_t(X) = (\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t - P_t \pi_t(X) (\mathbb{1} - P_t),$$

donde los operadores $(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t$ y $P_t \pi_t(X) (\mathbb{1} - P_t)$ tienen rangos ortogonales, así que

$$\|\pi_t(X) P_t - P_t \pi_t(X)\|_t^2 = \|(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t\|_t^2 + \|P_t \pi_t(X) (\mathbb{1} - P_t)\|_t^2. \tag{2.9}$$

Ahora, para $x \in \mathcal{H}_t$

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_tx\|_t^2 &= \langle (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_tx, (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_tx \rangle_t \\ &= \langle (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_tV_t^*x, (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_tV_t^*x \rangle_t \\ &= \langle \xi, V_t^*\pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_t\xi \rangle, \end{aligned}$$

donde $\xi = V_t^*x$.

Por ser $V_t^*\pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_t$ un operador positivo y autoadjunto, es posible calcular su norma a partir del producto $\langle \xi, V_t^*\pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_t\xi \rangle$. A partir de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ tenemos, para $x = \sum_{k=1}^n A_k \otimes \xi_k$,

$$\|V^*x\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_{k=1}^n \|A_k\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\xi_k\|_{\mathcal{H}},$$

esto para cualquier representación de $x \in \mathcal{H}_t$, por lo cual

$$\|V^*x\|_{\mathcal{H}} \leq \|x\|_{\mathcal{H}_t}.$$

Por tanto $\|V^*x\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ si $\|x\|_{\mathcal{H}_t} \leq 1$, y

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_t\|_t^2 &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}_t} \leq 1} \langle (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_tx, (\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)P_tx \rangle_t \\ &\leq \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \langle \xi, V_t^*\pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_tV_t^*\xi \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \|V_t^*\pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t)\pi_t(X)V_t\|. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\eta \in \mathcal{H}$ con $\|\eta\|_{\mathcal{H}} = 1$. Como V_t^* es sobreyectivo, existe $x \in \mathcal{H}_t$ tal que $V_t^*x = \eta$. Supongamos

$$\eta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \eta_n \varphi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \eta_k \varphi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \xi_k,$$

para $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\eta_n = \langle \eta, \varphi_n \rangle$. Tomemos

$$x_n = \mathbb{1} \otimes \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) + \mathcal{N}.$$

La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $V_t^*x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Tomando $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, se cumple $V^*x = \eta$ y

$$\|x_n\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2.$$

En la última ecuación, el lado izquierdo converge a $\|x\|_{\mathcal{H}_t}^2$, mientras que el lado derecho converge a $\|\eta\|_{\mathcal{H}}^2$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si η está en la bola unitaria de $\mathcal{H}$ entonces x está en la bola unitaria de $\mathcal{H}_t$, obteniendo

$$\begin{aligned} \|V_t^* \pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) V_t \eta\|_{\mathcal{H}} &= \sup_{\|\eta\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \langle \eta, V_t^* \pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) V_t \eta \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}_t} \leq 1} \langle (\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t x, (\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t x \rangle_{\mathcal{H}_t} \\ &= \|(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t\|_t^2, \end{aligned}$$

lo cual muestra que

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) P_t\|_t^2 &= \|V_t^* \pi_t(X^*)(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X) V_t\| \\ &= \|V_t^* \pi_t(X^* X) V_t - V_t^* \pi_t(X^*) V_t V_t^* \pi_t(X) V_t\| \\ &= \|\phi_t(X^* X) - \phi_t(X^*) \phi_t(X)\|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|P_t \pi_t(X)(\mathbb{1} - P_t)\|_t^2 &= \|V_t^* \pi_t(X)(\mathbb{1} - P_t) \pi_t(X^*) V_t\| \\ &= \|\phi_t(X X^*) - \phi_t(X) \phi_t(X^*)\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.8) se sigue de las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11).

Ahora, si $X \in \mathcal{A}$, entonces los cuatro operadores $X, X^*, X^* X, X X^*$ están en $\mathcal{D}$. De este modo, los límites

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(X^* X) - X^* X) &= L(X^* X), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(X X^*) - X X^*) &= L(X X^*), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(X) - X) &= L(X), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(X^*) - X^*) &= L(X^*), \end{aligned}$$

existen en la topología fuerte de operadores.

Dado que

$$\begin{aligned} \phi_t(X^* X) - \phi_t(X^*) \phi_t(X) &= (\phi_t(X^* X) - X^* X) - X^* (\phi_t(X) - X) \\ &\quad - (\phi_t(X^*) - X^*) \phi_t(X), \end{aligned} \quad (2.12)$$

usando convergencia fuerte de la multiplicación sobre subconjuntos acotados, tenemos que el límite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(X^* X) - \phi_t(X^*) \phi_t(X)) &= L(X^* X) - X^* L(X) - L(X^*) X \\ &= \sigma_L(dX^* dX) \end{aligned}$$

existe en la topología débil de operadores. Del mismo modo deducimos la existencia del límite fuerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\phi_t(XX^*) - \phi_t(X)\phi_t(X^*)) &= L(XX^*) - XL(X^*) - L(X)X^* \\ &= \sigma_L(dXdX^*). \end{aligned}$$

Se sigue que para cada $X \in \mathcal{A}$, las seminormas $q_t(X)$ son acotadas para $t > 0$ y, para tal X , tenemos

$$\max(\|\sigma_L(dX^*dX)\|^{1/2}, \|\sigma_L(dXdX^*)\|^{1/2}) \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} q_t(X).$$

Recíprocamente, supongamos que tenemos dado un operador $X \in \mathcal{A}$ para el cual las seminormas q_t son acotadas para cada $t > 0$. Debemos mostrar que X^*X y XX^* están en $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es cerrado bajo la toma de adjuntos y las seminormas q_t son simétricas se tiene $q_t(X^*) = q_t(X)$. Así será suficiente mostrar que $X^*X \in \mathcal{D}$.

La ecuación (2.12) implica, para $t > 0$ fijo, que

$$\begin{aligned} \phi_t(X^*X) - X^*X &= (\phi_t(X^*X) - \phi_t(X^*)\phi_t(X)) \\ &\quad + X^*(\phi_t(X) - X) + (\phi_t(X^*) - X^*)\phi_t(X). \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.8), el primer término del lado derecho es acotado en norma por M_1t . De manera similar, como X y X^* pertenecen a $\mathcal{D}$, el segundo y tercer elementos también son acotados en norma por M_2t y M_3t respectivamente, con cada M_k una constante positiva. Por tanto,

$$\|\phi_t(X^*X) - X^*X\| \leq (M_1 + M_2 + M_3)t$$

y, por el Lema 2.2.2, X^*X pertenece a $\mathcal{D}$. ■

Siguiendo la notación del Lema anterior, concluimos el capítulo con el resultado que caracteriza la máxima $*$ -álgebra $\mathcal{A}$, contenida en el dominio del generador L . La maximidad se deduce inmediatamente de la definición de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2.6 *Si Φ es de Markov entonces*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{D} : A^*A \in \mathcal{D}, AA^* \in \mathcal{D}\}$$

es una $$ -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demostración. De la definición se observa que $\mathcal{A}$ es un conjunto de operadores autoadjuntos. Debemos mostrar que $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial que satisface $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

El Lema 2.2.5 nos dice que $\mathcal{D}$ consiste de los operadores $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para los cuales

$$\sup_{t>0} p_t(X) < \infty, \quad \sup_{t>0} q_t(X) < \infty.$$

Como p_t y q_t son ambas seminormas, se sigue que $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial complejo, el cual es cerrado bajo la toma de adjuntos.

Para ver que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo multiplicación, tomemos $X, Y \in \mathcal{A}$. De acuerdo al Lema 2.2.5, es suficiente mostrar

$$\sup_{t>0} q_t(XY) < \infty \quad (2.13)$$

y

$$\sup_{t>0} p_t(XY) < \infty. \quad (2.14)$$

Para probar (2.13) afirmamos que

$$q_t(XY) \leq q_t(X)\|Y\| + \|X\|q_t(X). \quad (2.15)$$

Para verificar esto, escribimos $[A, B] = AB - BA$, se tiene entonces que

$$[P_t, \pi_t(XY)] = [P_t, \pi_t(X)]\pi_t(Y) + \pi_t(X)[P_t, \pi_t(Y)].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} q_t(XY) &= t^{1/2} \|[P_t, \pi_t(XY)]\| \\ &\leq t^{1/2} \|[P_t, \pi_t(X)]\| \|\pi_t(Y)\| + t^{1/2} \|\pi_t(X)\| \|[P_t, \pi_t(Y)]\|. \end{aligned}$$

Dado que

$$\|\pi_y(A)x\| \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}_t}, \quad \text{entonces} \quad \|\pi_t(A)\| \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})},$$

para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $x \in \mathcal{H}_t$. Esto verifica la ecuación (2.13).

Ahora verificaremos la ecuación (2.14). Por definición de $\mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{A}$ tenemos $A^*A \in \mathcal{D}$. Por ser $\mathcal{A}$ un espacio vectorial, si $X, Y \in \mathcal{A}$ entonces $(Y + i^k X) \in \mathcal{A}$ y en consecuencia $(Y + i^k X)^*(Y + i^k X) \in \mathcal{D}$.

Por la fórmula de polarización,

$$X^*Y = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k (Y + i^k X)^*(Y + i^k X),$$

de este modo X^*Y debe pertenecer a $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, podemos remplazar X^* por X para concluir que $XY \in \mathcal{D}$. Ahora, la ecuación (2.14) se sigue del Lema 2.2.5 inciso (i). ■

Capítulo 3

Un álgebra dominio mínima.

En este capítulo, mediante el uso de la herramienta obtenida en el Capítulo 2, desarrollaremos un par de teoremas que nos permitirán demostrar la existencia de semigrupos de contracciones completamente positivos para los cuales sus generadores infinitesimales poseen álgebra dominio mínima. Los resultados corresponden a las referencias [10] y [17], pero hemos realizado algunas modificaciones que se pueden considerar como una extensión de los mismos.

Durante este capítulo Ω representará un estado sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir un operador de la clase de traza con la siguiente descomposición espectral

$$\Omega := \sum_{\ell=1}^{\infty} |g_{\ell}\rangle\langle g_{\ell}|, \quad \text{y} \quad \|\Omega\|_1 = 1, \quad (3.1)$$

con $(g_{\ell})_{\ell \geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

También trabajaremos con los espacios $L^2(\mathbb{R}_+)$, el espacio de Hilbert, de clases de funciones sobre $\mathbb{R}_+$; y los espacios de Sobolev $W^{n,p}(\mathbb{R}_+)$, definido en el Apéndice B.

3.1. El semigrupo de desplazamientos a la izquierda.

Para esta sección haremos uso del Teorema de Hille-Yosida, del cual omitiremos su demostración. Ésta pueden ser consultada en [24]. El objetivo es mostrar que el operador derivada es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo, mismo que será de utilidad en las siguientes secciones.

Antes de citar el Teorema de Hille-Yosida, daremos la definición del conjunto resolvente de un operador L .

Definición 3.1.1 *Dado un operador $L : X \rightarrow X$, no necesariamente acotado, actuando sobre un espacio de Banach X , definimos el conjunto resolvente de L como*

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{el operador } (\lambda \mathbb{1} - L)^{-1} \text{ existe c.d. en } X, \text{ y pertenece a } \mathcal{B}(X)\}.$$

Para $\lambda \in \rho(L)$ definimos al operador resolvente de L en λ mediante $R(\lambda; L) := (\lambda \mathbb{1} - L)^{-1}$.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Hille-Yosida)

Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal $L : X \rightarrow X$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{\phi_t\}_{t \geq 0} : X \rightarrow X$, si y solo si

- (1) L es cerrado y $\overline{D(L)} = X$,
- (2) El conjunto resolvente $\rho(L)$ contiene a $\mathbb{R}_+$ y, para cada $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda, L)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demostración. Ver Teorema 3.1 en [24]. ■

Ahora daremos unos resultados auxiliares. La siguiente proposición nos da una representación integral del resolvente, la cual nos será de utilidad para el objetivo de esta sección.

Proposición 3.1.3 Sea $(\phi_t)_{t \geq 0} : X \rightarrow X$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo y L su generador infinitesimal. Definimos al operador S_λ mediante

$$S_\lambda A := \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_s(A) ds, \quad A \in X.$$

Entonces $S_\lambda = R(\lambda, L)$.

Demostración. Por ser $(\phi_t)_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones se cumple $\|\phi_t(A)\| \leq \|A\|$, y por tanto

$$\|S_\lambda A\| \leq \lambda^{-1} \|A\|, \quad A \in X, \quad \lambda > 0.$$

Esto muestra que el operador S_λ está bien definido para $\lambda > 0$.

Ahora verificaremos que $S_\lambda = R(\lambda, L)$. Aplicando L al operador S_λ ,

$$LS_\lambda(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\phi_h(S_\lambda A) - S_\lambda A), \quad A \in X,$$

en la topología fuerte de operadores. Usando la definición de S_λ obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\phi_h(S_\lambda A) - S_\lambda A) &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_{s+h}(A) ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_s(A) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} \phi_s(A) ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_s(A) ds \right) \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_s(A) ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} \phi_s(A) ds. \end{aligned}$$

De modo que al tomar el límite cuando $h \rightarrow 0^+$ resulta,

$$LS_\lambda(A) = \lambda S_\lambda A - A, \quad A \in X,$$

en la topología fuerte de operadores, *i.e.* $(\lambda \mathbb{1} - L)S_\lambda A = A$, para cada $A \in X$.

Por tanto $(\lambda \mathbb{1} - L)S_\lambda = \mathbb{1}$, es decir $S_\lambda = R(\lambda, L)$. ■

Consideremos el espacio de Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, de las funciones absolutamente continuas con la primera derivada en $L^2(\mathbb{R}_+)$

Lema 3.1.4 *Para cada $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ se cumple*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demostración. Ver Corolario 8.9 en [6]. ■

Observación 3.1.5 La proposición anterior tiene sentido ya que cada $f \in W^{1,2}$ puede ser identificada con una función absolutamente continua, la que a su vez es continua y, por tanto, las evaluaciones puntuales tienen sentido.

Observación 3.1.6 En realidad este resultado se puede extender a cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Usando el resultado anterior más un resultado de teoría de la medida, que establece que para cada sucesión de funciones que converge en $L^p(\mathbb{R}_+)$ existe una subsucesión de funciones que converge puntualmente c.d. al mismo límite de la sucesión original.

Proposición 3.1.7 *Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ tal que converge a una función f y que la sucesión de derivadas (f'_n) converge a una función g , todo esto en $L^2(\mathbb{R}_+)$, entonces $f' = g$ c.d.*

Demostración. Dado que $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}_+)$, para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ tenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} ((f_n - f)\varphi)(x)dx \right| \leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Por lo cual,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} (f_n \varphi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} (f \varphi)(x)dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Del mismo modo se prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} (f'_n \varphi)(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} (g \varphi)(x)dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Al integrar por partes, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} (f_n \varphi')(x)dx = - \int_{\mathbb{R}_+} (f'_n \varphi)(x)dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la ecuación anterior resulta,

$$\int_{\mathbb{R}_+} (f \varphi')(x)dx = - \int_{\mathbb{R}_+} (g \varphi)(x)dx \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Por lo cual g es la derivada débil de f , *i.e.* $f' = g$ casi dondequiera. ■

Ahora pasaremos a la parte principal de la sección.

3.1.1. La derivada y el semigrupo de desplazamiento hacia la izquierda.

Definición 3.1.8 Dado un operador T , un conjunto $E \subset D(T)$ se denomina una **esencia para T** si al tomar $S = T|_E$ (la restricción de T al conjunto E), se obtiene que $\overline{S} = T$.

Sean $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $K = -\frac{d}{dx}$, con este operador actuando de $W^{1,2}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{H}$ hacia $\mathcal{H}$.

De la Proposición 3.1.7 tenemos que la derivada es un operador cerrado, además por el Teorema de Meyers-Serrin (Teo. A.4.1) tenemos que

$$\overline{\mathcal{D}_1}^{W^{1,2}(\mathbb{R}_+)} = W^{1,2}(\mathbb{R}_+), \quad \text{donde} \quad \mathcal{D}_1 := C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}_+).$$

Es decir, el conjunto $\mathcal{D}_1$ es una esencia para el operador derivada. Entonces K es un buen candidato para ser el generador de un semigrupo de contracciones (Teorema 3.1.2).

Consideremos al semigrupo de desplazamientos $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ de la siguiente forma

$$W_t \varphi(x) = \varphi(x+t), \quad \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+), \quad t \geq 0$$

y extendido por continuidad de Wt a todo $\mathcal{H}$. Observe además que las propiedades $W_0 = \mathbb{1}$ y $W_{s+t} = W_s W_t$ son evidentes, además cada W_t es continuo y con norma menor o igual a uno.

Proposición 3.1.9 El semigrupo $(W_t)_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo.

Demostración. Para probar esto primero lo haremos para funciones en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ con soporte compacto, después para funciones en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ arbitrarias, y para terminar usaremos la densidad de $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ en $\mathcal{H}$.

Sea $\varepsilon > 0$.

1. Sea $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ con soporte compacto K , entonces podemos elegir a φ representante continuo, y por tener soporte compacto es uniformemente continua. De este modo existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x+t) - \varphi(x)|^2 < \frac{\varepsilon}{m(K)}, \quad 0 \leq t < \delta.$$

Por tanto, para $0 \leq t < \delta$,

$$\int_0^\infty |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

2. Supongamos $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ arbitrario y continuo, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_M^\infty |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t > 0.$$

La función φ es uniformemente continua en el compacto $[0, M]$, por lo cual existe $\delta > 0$ tal que $\|\xi_{[0,M]}(W_t \varphi - \varphi)\|_2^2 < \varepsilon/2$, para $0 \leq t < \delta$. Entonces

$$\|W_t \varphi - \varphi\|_2^2 = \int_0^M |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^2 dx + \int_M^\infty |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

3. Sea $\psi \in \mathcal{H}$, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \rightarrow \psi$ en la norma de $\mathcal{H}$. Para este $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_n - \psi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N.$$

Para $n \geq N$ fijo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|W_t \varphi_n - \varphi_n\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 0 \leq t < \delta.$$

En conclusión, para $0 \leq t < \delta$,

$$\|W_t \psi - \psi\|_2 \leq \|W_t(\psi - \varphi_n)\|_2 + \|W_t \varphi_n - \varphi_n\|_2 + \|\varphi_n - \psi\|_2 < \varepsilon.$$

Esto demuestra lo deseado. ■

El generador infinitesimal del semigrupo $(W_t)_{t \geq 0}$ está dado por

$$(G\varphi)(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Este límite existe en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, y por tanto el operador G está definido en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$.

Ahora mostraremos un resultado que conecta a G y K .

Proposición 3.1.10 *Para $\lambda > 0$, el operador S_λ , definido en la Proposición 3.1.3 con $(\phi_t)_{t \geq 0} = (W_t)_{t \geq 0}$, es el operador resolvente del operador $-K$, consecuentemente, $(W_t)_{t \geq 0}$ es el semigrupo generado por $-K$ (i.e. $G = -K$).*

Demostración. Sean $\lambda > 0$. El operador lineal S_λ se define mediante

$$S_\lambda \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \varphi(x+s) ds, \quad \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Para $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ y $x \in \mathbb{R}_+$ se cumple

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \varphi(x+s) ds &= \int_x^\infty e^{-\lambda(s-x)} \varphi(s) ds \\ &= \int_0^\infty \chi_{(x,\infty)}(s) e^{-\lambda(s-x)} \varphi(s) ds \\ &= \int_0^\infty \chi_{(0,\infty)}(s-x) e^{-\lambda(s-x)} \varphi(s) ds \\ &= g_\lambda * \varphi(x), \end{aligned}$$

donde $g_\lambda(y) = \chi_{(0,\infty)}(y) e^{-\lambda y}$.

Dado que $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ y $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ la desigualdad de Young, Proposición A.1.4, indica

$$\|S_\lambda \varphi\|_2 = \|g_\lambda * \varphi\|_2 \leq \|g_\lambda\|_1 \|\varphi\|_2 = \frac{1}{\lambda} \|\varphi\|_2.$$

Entonces S_λ es un operador lineal acotado en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, y puede ser extendido a todo $\mathcal{H}$.

Para $\psi \in \mathcal{D}_1$, y $x \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\lambda \mathbb{1} + K)S_\lambda \psi(x) &= \lambda S_\lambda \psi(x) + K S_\lambda \psi(x) \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds - \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi'(x+s) ds \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds - e^{-\lambda s} \psi(x+s) \Big|_{s=0}^{s=\infty} - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

El intercambio de la integral se debe a la continuidad del integrando en ambas coordenadas y que la parcial con respecto a x también es continua. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
S_\lambda \psi'(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi'(x+s) ds \\
&= e^{-\lambda s} \psi(x+s) \Big|_{s=0}^{s=\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} \psi(x+s) ds \\
&= -\psi(x) + \lambda S_\lambda \psi(x),
\end{aligned}$$

en consecuencia, $S_\lambda(\lambda \mathbb{1} + K)\psi(x) = \psi(x)$.

De lo anterior se obtiene que

$$S_\lambda(\lambda \mathbb{1} + K) = (\lambda \mathbb{1} + K)S_\lambda = \mathbb{1}, \quad \text{sobre } \mathcal{D}_1,$$

por lo cual $(\lambda \mathbb{1} + K)^{-1} = S_\lambda$ en $\mathcal{D}_1$, y por tanto en $\mathcal{H}$.

Por otra parte tenemos que $S_\lambda = (\lambda \mathbb{1} - G)^{-1}$, entonces

$$(\lambda \mathbb{1} - G) = (\lambda \mathbb{1} + K), \quad \text{sobre } \mathcal{D}_1.$$

Como $\mathcal{D}_1$ es una esencia de K , de lo anterior se concluye que $G = -K$ en $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$. ■

3.2. Perturbación del semigrupo dinámico cuántico inducido por W_t

3.2.1. Predual

Definición 3.2.1 *Al espacio de todos los funcionales σ -débilmente continuos sobre un álgebra de von Neumann $\mathcal{X}$ se le llama **espacio predual de $\mathcal{X}$** , y se denota $\mathcal{X}_*$.*

El espacio $\mathcal{X}_$ resulta un espacio de Banach en la norma de $\mathcal{X}$.*

Los semigrupos dinámicos cuánticos $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ sobre un espacio $\mathcal{X}$ pueden ser vistos como el dual de semigrupos dinámicos cuánticos $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ en el espacio $\mathcal{X}_*$.

Definición 3.2.2 *El semigrupo predual de un semigrupo dinámico cuántico $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ en $\mathcal{X}$ es el semigrupo $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ de operadores en $\mathcal{X}_*$, definido mediante*

$$(\mathcal{S}_t(\omega))(X) = \omega(\mathcal{T}_t(X)), \quad t \geq 0,$$

para cada $X \in \mathcal{X}$ y $\omega \in \mathcal{X}_*$.

En el caso de $\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos que el semigrupo predual está definido en $L_1(\mathcal{H})$ mediante la relación

$$\text{tr}(\mathcal{T}_t(x)\rho) = \text{tr}(x\mathcal{S}_t(\rho)), \quad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \rho \in L_1(\mathcal{H}) \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

Si el semigrupo $\mathcal{T}$ es continuo respecto a la topología débil de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces el semigrupo predual $\mathcal{S}$ también resulta ser continuo en la topología débil de $L_1(\mathcal{H})$. Más aún, por el Corolario 3.6 en [5], se tiene que $\mathcal{S}$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach $L_1(\mathcal{H})$.

El generador $\mathcal{L}_*$ del semigrupo predual $(\mathcal{S}_t)_{t \geq 0}$ y el generador $\mathcal{L}$ del semigrupo $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ tienen la misma relación de dualidad que la de sus semigrupos

$$\text{tr}(\mathcal{L}(x)\rho) = \text{tr}(x\mathcal{L}_*(\rho)), \quad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \rho \in L_1(\mathcal{H}). \quad (3.3)$$

3.2.2. Perturbación del semigrupo inducido por W_t

Recordando un poco $-K$ denota al operador derivada con dominio $\mathcal{D} = W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, el generador del semigrupo de contracciones $(W_t)_{t \geq 0}$ fuertemente continuo sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$. En la Sección 3.1 se mostró que $(W_t)_{t \geq 0}$ es el semigrupo de desplazamientos a la izquierda.

Ahora, para cada $t \geq 0$, el operador adjunto al operador W_t se calcula de la siguiente forma. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \varphi, W_t \psi \rangle = \int_0^\infty \overline{\varphi(x)} \psi(x+t) dx = \int_t^\infty \overline{\varphi(x-t)} \psi(x) dx = \int_0^\infty \overline{\chi_{[t,\infty)}(x) \varphi(x-t)} \psi(x) dx,$$

para cada $t \geq 0$. De este modo se observa que el operador adjunto W_t^* está definido mediante

$$W_t^* \varphi(x) = \chi_{[t,\infty)}(x) \varphi(x-t), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Además se tienen las siguientes propiedades.

- i) $W_t W_t^* \varphi(x) = W_t \chi_{[t,\infty)}(x) \varphi(x-t) = \chi_{[t,\infty)}(x+t) \varphi(x) = \varphi(x),$
- ii) $W_t^* W_t \varphi(x) = W_t^* \varphi(x+t) = \chi_{[t,\infty)} \varphi(x).$

Es decir, $W_t W_t^* = \mathbb{1}$ sobre $\mathcal{D}$ y, por densidad y continuidad, esta identidad se extiende a todo $\mathcal{H}$. De manera análoga se ve que el operador $W_t^* W_t$ es una proyección de $\mathcal{H}$ hacia el subespacio de funciones en $\mathcal{H}$ que se anulan en $[0, t)$ (i.e., que su producto con $\xi_{[0, t)}$ es nulo).

Sea $\omega : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal, $\omega \in L_1(\mathcal{H})$, y consideremos el semigrupo dinámico cuántico fuertemente continuo inducido por W_t , que se define mediante

$$\mathcal{S}_{0,t}[\omega] := W_t \omega W_t^*, \quad \text{equivalentemente,} \quad \mathcal{S}_{0,t}[\omega](x, y) = \omega(x + t, y + t), \quad (3.4)$$

actuando sobre $L_1(\mathcal{H})$, con el generador

$$\mathcal{L}_{0*}\omega = \omega'_x(x, y) + \omega'_y(x, y) = \left. \frac{d}{dt} \omega(x + t, y + t) \right|_{t=0}.$$

Definimos el dominio inicial de $\mathcal{K}_o$ por

$$\mathcal{D}_0 = \text{span}\{\omega : \omega = |\phi\rangle\langle\psi|; \phi, \psi \in \mathcal{D}\} \subset L_1(\mathcal{H}).$$

Siendo el $\text{span}\{A\}$, el conjunto de las F -combinaciones lineales de elementos en un espacio vectorial (A, F) .

Observación 3.2.3 (a) La segunda igualdad de la ecuación (3.4) cobra sentido cuando usamos $\omega = |\xi\rangle\langle\eta|$, con $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, y la representación de los operadores de clase traza mediante de una función de dos variables, también llamada kernel (Apéndice B). Además se tiene

$$\mathcal{S}_{0,t}[\omega]\phi(x) = |W_t \xi\rangle\langle W_t \eta|\phi(x) = \int_0^\infty \overline{\eta(y + t)} \xi(x + t) \phi(y) dy.$$

(b) El semigrupo dual $\mathcal{T}_0$, de $\mathcal{S}_0$, puede definirse gracias a la relación (3.2) de la siguiente manera, para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\omega \in L_1(\mathcal{H})$,

$$\text{tr}(X \mathcal{S}_{0,t}(\omega)) = \text{tr}(X W_t \omega W_t^*) = \text{tr}(W_t^* X W_t \omega).$$

Por lo cual $\mathcal{T}_{0,t}[X] := W_t^* X W_t$.

El generador infinitesimal del semigrupo dual $(\mathcal{T}_{0,t})_{t \geq 0}$ tiene la forma

$$\mathcal{L}_0(X) = K^* X + X K$$

Ahora consideremos al generador perturbado

$$\mathcal{L}_*[\omega] = \mathcal{L}_{0*}[\omega] + \Lambda[\omega], \quad \omega \in D(\mathcal{L}_{0*}).$$

Donde,

$$\Lambda[\omega] = -\Omega \text{tr} \mathcal{L}_{0*}[\omega] = \Omega \omega(0, 0),$$

con Ω un estado. La segunda igualdad se obtiene con el siguiente razonamiento, usando $\psi, \phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{L}_{0*}[\omega] &= \text{tr } \mathcal{L}_{0*}|\phi\rangle\langle\psi| \\ &= \text{tr } (|\phi'\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\psi'|) \\ &= \int_0^\infty (\bar{\psi}\phi)'(s)ds \\ &= -\bar{\psi}(0)\phi(0). \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0*}[|\psi\rangle\langle\phi|] &= |\psi'\rangle\langle\phi| + |\psi\rangle\langle\phi'| = -|K\psi\rangle\langle\phi| - |\psi\rangle\langle K\phi|, \\ \Lambda[|\psi\rangle\langle\phi|] &= \Omega \psi(0)\bar{\phi}(0) = \sum_{\ell=1}^\infty |L_\ell\psi\rangle\langle L_\ell\phi|, \end{aligned}$$

con los operadores $L_\ell : W^{1,2}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{H}$, definidos por $L_\ell\psi = \psi(0)g_\ell$ y los $g_\ell \in \mathcal{H}$ tales que

$$\Omega = \sum_{\ell=1}^\infty |g_\ell\rangle\langle g_\ell|.$$

El generador del semigrupo dual perturbado tiene la forma

$$\mathcal{L}(X) = -K^*X - XK + \sum_{\ell} L_\ell^* X L_\ell$$

Es decir, para $\psi, \phi \in \mathcal{D}$ el semigrupo dual perturbado debe satisfacer la *ecuación del semigrupo en forma débil*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi, \mathcal{T}_t[X]\psi \rangle &= \text{tr } (\mathcal{K}[|\psi\rangle\langle\phi|] \mathcal{T}_t[X]) \\ &= \text{tr } \left(\left[|\psi'\rangle\langle\phi| + |\psi\rangle\langle\phi'| + \sum_{\ell=1}^\infty |L_\ell\psi\rangle\langle L_\ell\phi| \right] \mathcal{T}_t[X] \right) \\ &= \langle \phi', \mathcal{T}_t[X]\psi \rangle + \langle \phi, \mathcal{T}_t[X]\psi' \rangle + \sum_{\ell=1}^\infty \langle L_\ell\phi, \mathcal{T}_t[X]L_\ell\psi \rangle \\ &= -\langle K\phi, \mathcal{T}_t[X]\psi \rangle - \langle \phi, \mathcal{T}_t[X]K\psi \rangle + \sum_{\ell=1}^\infty \langle L_\ell\phi, \mathcal{T}_t[X]L_\ell\psi \rangle \\ &= \langle \phi, \mathcal{L}(\mathcal{T}_t(X))\psi \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aunque conocemos bien al semigrupo no perturbado $\mathcal{S}_{0t}\omega = W_t\omega W_t^*$ y a su dual $\mathcal{T}_{0t}(X) = W_t^*XW_t$, no es evidente que exista un semigrupo dinámico cuántico generado por el operador perturbado $\mathcal{L}_*$ o por su dual $\mathcal{L}$. La existencia de este semigrupo perturbado en su representación dual, se puede demostrar construyendo la solución mínima (semigrupo mínimo) de la ecuación (3.5). Si además demostramos que este semigrupo mínimo perturbado es conservativo tendremos unicidad, véase [11]. Esto es lo que haremos en la siguiente sección.

3.3. Semigrupo dinámico cuántico mínimo (m.q.d.s.)

En esta sección enunciaremos dos hipótesis principales, para después definir lo que es un semigrupo dinámico cuántico mínimo. Estas hipótesis serán esenciales para mostrar que un determinado semigrupo dinámico cuántico mínimo es de Markov. Basamos gran parte de este capítulo en los resultados obtenidos en [10].

Hipótesis:

- A.** El operador G es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $(P_t)_{t \geq 0}$ que es fuertemente continuo en $\mathcal{H}$. El dominio de los operadores $\{L_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ contienen a $D(G)$, el dominio del operador G . Además, para cada $u, v \in D(G)$ se tiene

$$\langle v, Gu \rangle + \langle Gu, v \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \langle L_\ell v, L_\ell u \rangle = 0.$$

- C.** Un operador positivo autoadjunto C satisface la condición **C** si

- (i) El dominio del operador $C^{1/2}$ contiene a $D(G)$, y $D(G)$ es una esencia para $C^{1/2}$.
- (ii) Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, el subespacio lineal $L_\ell(D(G))$ está contenido en el dominio de $C^{1/2}$.
- (iii) Existe una constante positiva $b > 0$ tal que

$$2 \operatorname{Re} \langle C^{1/2}u, C^{1/2}Gu \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \langle C^{1/2}L_\ell u, C^{1/2}L_\ell u \rangle \leq b \|C^{1/2}u\|^2, \quad \forall u \in D(G^2).$$

Suponiendo que la hipótesis **A** se cumple, queremos construir un semigrupo dinámico cuántico $\{T_t\}_{t \geq 0}$ que satisfaga la ecuación

$$\langle v, T_t(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \langle v, \mathcal{L}(T_s(x))u \rangle ds. \quad (3.6)$$

Además buscamos que para cada $u, v \in D(G)$

$$\langle v, T_t(x)u \rangle = \langle P_t v, x P_t u \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_\ell P_{t-s} v, T_s(x) L_\ell P_{t-s} u \rangle ds. \quad (3.7)$$

Teorema 3.3.1 *Supongamos que la hipótesis **A** se cumple. Si para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la familia de operadores $(\mathcal{T}_t(x))_{t \geq 0}$ es continua en la topología débil*, y además se cumple*

$$\|\mathcal{T}_t(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}, \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

Entonces las ecuaciones (3.6) y (3.7) son equivalentes.

Demostración. Ver Proposición 3.18 en [11]. ■

Definición 3.3.2 *Supongamos que la hipótesis **A** se cumple.*

*Un semigrupo dinámico cuántico $(\mathcal{T}_t^{(min)})_{t \geq 0}$ se denomina **semigrupo dinámico cuántico mínimo** (m.q.d.s.) si satisface las ecuaciones (3.6) y (3.7) y tiene las siguientes propiedades*

- (i) $\mathcal{T}_t^{(min)}(\mathbb{1}) \leq \mathbb{1}$, para cada $t \geq 0$.
- (ii) *Para cada familia de operadores positivos $(T_t)_{t \geq 0}$ débil* continua sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface las ecuaciones (3.6) y (3.7), y para cada operador positivo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se tiene*

$$\mathcal{T}_t^{(min)}(x) \leq T_t(x), \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

Este semigrupo tiene la propiedad de ser sub-Markov, y es el único con estas propiedades, una prueba de esto puede encontrarse en [11], así como la construcción de los m.q.d.s.

3.3.1. Conservatividad del m.q.d.s. perturbado

Consideremos el espacio $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ y los operadores

$$\begin{aligned} D(G) &= W^{1,2}(\mathbb{R}_+), & Gu &= -Ku = u', \\ D(L_\ell) &= W^{1,2}(\mathbb{R}_+), & L_\ell u &= u(0)g_\ell, \end{aligned}$$

con $g_\ell \in \mathcal{H}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Aquí las funciones $\{g_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ satisfacen

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \|g_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 = 1.$$

Observación 3.3.3 *El operador G coincide con el operador $-K$ y los operadores L_ℓ son los mismos operadores de la perturbación Λ de la sección anterior.*

Definición 3.3.4 *Sean los operadores $F_n^o : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definidos como*

$$F_n^o := \sum_{\ell \in \mathbb{N}} (nL_\ell R(n; G))^* (nL_\ell R(n; G)), \quad n \in \mathbb{N},$$

mediante ellos podemos definir a los operadores $F_n := \overline{F_n^o}$, que representan la extensión (única) de los operadores F_n^o .

Veremos que estos operadores son acotados. Para $u, v \in D(G)$,

$$\begin{aligned} \langle v, F_n^o u \rangle &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \langle nL_\ell R(n; G)v, nL_\ell R(n; G)u \rangle \\ &= -n^2 (\langle v_0, Gu_0 \rangle + \langle Gv_0, u_0 \rangle), \quad v_0 = R(n; G)v, \quad u_0 = R(n; G)u. \end{aligned}$$

Dado que $R(n; G)\mathcal{H} = D(G)$, $GR(n; G) = R(n; G)G$ y $\|R(n; G)\| \leq 1/n$, se tiene

$$\begin{aligned} |\langle v, F_n^o u \rangle| &= n^2 |\langle v_0, Gu_0 \rangle + \langle Gv_0, u_0 \rangle| \\ &= n^2 |\langle v_0, R(n; G)Gu \rangle + \langle R(n; G)Gv, u_0 \rangle| \\ &\leq n(\|v_0\|_{\mathcal{H}}\|Gu\|_{\mathcal{H}} + \|u_0\|_{\mathcal{H}}\|Gv\|_{\mathcal{H}}) \\ &\leq \|v\|_{\mathcal{H}}\|Gu\|_{\mathcal{H}} + \|u\|_{\mathcal{H}}\|Gv\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Como $GR(n; G)$ es un operador acotado existe $M > 0$ tal que

$$\|GR(n; G)w\|_{\mathcal{H}} \leq M\|w\|_{\mathcal{H}}.$$

Si además $u = R(n; G)u_1$ y $v = R(n; G)v_1$, con $u_1, v_1 \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} |\langle v, F_n^o u \rangle| &\leq \|R(n; G)v_1\|_{\mathcal{H}}\|GR(n; G)u_1\|_{\mathcal{H}} + \|R(n; G)u_1\|_{\mathcal{H}}\|GR(n; G)v_1\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{2M}{n}\|v_1\|_{\mathcal{H}}\|u_1\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{2M}{n}\|R(n; G)^{-1}\|^2\|v\|_{\mathcal{H}}\|u\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Lo cual muestra la continuidad de los operadores F_n^o , y en consecuencia los operadores F_n resultan ser acotados.

Definición 3.3.5 Diremos que un generador infinitesimal $\mathcal{L}$ puede ser representado en la forma de **Davis-Lindblad** si se cumple la hipótesis **A** y además para cada $u, v \in D(G)$ y cada $X \in D(\mathcal{L})$ se cumple

$$\langle u, \mathcal{L}(X)v \rangle = \langle u, XGv \rangle + \langle Gu, Xv \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \langle L_{\ell}u, XL_{\ell}v \rangle.$$

Los siguientes resultados corresponden al Teorema 2.4 en [4] así como al Teorema 4.3 y Lema 5.2 en [7], en el mismo orden, por lo cual omitiremos sus demostraciones.

Teorema 3.3.6 Sea $\mathcal{L}$ el generador infinitesimal de un semigrupo $T = (T_t)_{t \geq 0}$. Supongamos que $\mathcal{L}$ puede ser representado en la forma de Davis-Lindblad y sea $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ el m.q.d.s. que satisface la ecuación

$$\langle u, \mathcal{T}_t(X)u \rangle = \langle P_t u, X P_t u \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_0^t \langle L_{\ell} P_{t-s} u, \mathcal{T}_t(X) L_{\ell} P_{t-s} u \rangle ds, \quad (3.8)$$

para $u, v \in D(G)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) $\mathcal{T}$ es una extensión de T ,
- 2) $\mathcal{T}$ es de Markov,

3) para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la familia σ -débil continua de operadores $\mathcal{T}$ es la única solución de la ecuación integral (3.8) que además satisface la condición

$$\|\mathcal{T}_t(X)\| \leq \alpha \|X\|, \quad \text{para algún } \alpha > 0.$$

Teorema 3.3.7 *Supongamos que la hipótesis **A** se cumple, y existe un operador C el cual satisface la hipótesis **C**, tal que*

$$\langle u, F_n u \rangle \leq \langle u, Cu \rangle, \quad \forall u \in D(G), \quad n \geq 1.$$

Entonces el m.q.d.s. es conservativo.

Lema 3.3.8 *Sea C el operador $Cu = -2u''$, con dominio*

$$D(C) = \{u \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+) : u'(0) = u(0)\}.$$

Entonces, C es positivo y el espacio vectorial $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ está contenido en el dominio del operador $C^{1/2}$, además

$$\|C^{1/2}u\|_{\mathcal{H}}^2 = 2 \left(\|u'\|_{\mathcal{H}}^2 + |u(0)|^2 \right), \quad (3.9)$$

para toda $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$.

Usaremos estos resultados para demostrar la siguiente proposición, la cual es una generalización de la Proposición 3.1 en [10] con algunas modificaciones necesarias.

Proposición 3.3.9 *Supongamos que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $g_\ell \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$. Además,*

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} (|g_\ell(0)|^2 + \|g'_\ell\|_{\mathcal{H}}^2) < \infty. \quad (3.10)$$

Entonces el m.q.d.s. $\mathcal{T}$ asociado con los operadores G y $\{L_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ (m.q.d.s. perturbado) es de Markov.

Demostración. Primero veremos que los operadores G y $\{L_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ cumplen la hipótesis **A**. Sean $u, v \in D(G)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle Gv, u \rangle + \langle v, Gu \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell v, L_\ell u \rangle &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^\infty \overline{v(0)g_\ell(t)} u(0) g_\ell(t) dt + \int_0^\infty (\bar{v}'u + \bar{v}u')(t) dt \\ &= \int_0^\infty (\bar{v}u)'(t) dt + \overline{v(0)}u(0) \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^\infty |g_\ell(t)|^2 dt \\ &= \overline{v(t)}u(t) \Big|_0^\infty + \overline{v(0)}u(0) = 0. \end{aligned}$$

Esto verifica **A**, y podemos definir una forma sesquilineal sobre $D(G) \times D(G)$, mediante

$$\langle v, \mathcal{L}(X)u \rangle := \langle Gv, Xv \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell v, XL_\ell u \rangle + \langle v, XGu \rangle. \quad (3.11)$$

Siguiendo [11] podemos construir el m.q.d.s. asociado a los operadores G y $\{L_\ell\}_{\ell \geq 1}$. Ahora mostraremos que el mqds es de Markov.

Consideremos el operador autoadjunto C del Lema 3.3.8 y al dominio $D = D(G^2) = W^{2,2}(\mathbb{R}_+)$. Tenemos

- (i) El dominio de $C^{1/2}$ contiene a $W^{1,2}(\mathbb{R}_+) = D(G) \supset D$. Además D es una esencia para $C^{1/2}$, por que este contiene a $D(C)$, el cual es una esencia para $C^{1/2}$.
- (ii) Como $W^{1,2}(\mathbb{R}_+) \subset D(C^{1/2})$ y cada $g_\ell \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, tenemos que el subespacio $L_\ell(D(G)) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$, para cada $\ell \in \mathbb{N}$.
- (iii) Para cada $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+) = D(G)$ se tiene

$$|u(0)|^2 = -2 \operatorname{Re} \langle u, Gu \rangle \leq 2 \left(\|u'\|_{\mathcal{H}}^2 + |u(0)|^2 \right) = \|C^{1/2}u\|^2. \quad (3.12)$$

Para cada $u \in D$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle C^{1/2}u, C^{1/2}Gu \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \|C^{1/2}L_\ell u\|_{\mathcal{H}}^2 &= 2 \operatorname{Re} \langle Cu, Gu \rangle + |u(0)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \|C^{1/2}g_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= -4 \operatorname{Re} \langle Gu', u' \rangle + 2|u(0)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\|g'_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 + |g_\ell(0)|^2 \right) \quad (3.13) \\ &= 2|u(0)|^2 \left[1 + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\|g'_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 + |g_\ell(0)|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene usando integración por partes en $\langle Gu', u' \rangle$ y la condición de frontera para $D(C)$.

En resumen, por las ecuaciones (3.12) y (3.13), resulta

$$2 \operatorname{Re} \langle C^{1/2}u, C^{1/2}Gu \rangle + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \|C^{1/2}L_\ell u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2 \left[1 + \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\|g'_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 + |g_\ell(0)|^2 \right) \right] \|C^{1/2}u\|^2.$$

El lado derecho es finito por hipótesis. Esto muestra que C cumple la condición **C**.

Para mostrar que el m.q.d.s. asociado a los operadores G y $\{L_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ es conservativo, y en virtud del Teorema 3.3.7, es suficiente verificar la desigualdad

$$\langle u, F_n u \rangle \leq \langle u, Cu \rangle, \quad u \in D(C), \quad n \geq 1.$$

Como los operadores F_n son la extensión acotada de los operadores F_n^o , bastará con hacer el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\langle u, F_n^o u \rangle &= \sum_{\ell=1}^{\infty} n^2 \langle L_{\ell} R(n; G) u, L_{\ell} R(n; G) u \rangle \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| n L_{\ell} \int_0^{\infty} \exp(-nt) T_t u(x) dt \right|^2 dx \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| n \int_0^{\infty} \exp(-nt) L_{\ell} u_t(x) dt \right|^2 dx \\
&= \left| n \int_0^{\infty} \exp(-nt) u_t(0) dt \right|^2 \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |g_{\ell}(x)|^2 dx \right],
\end{aligned}$$

con las funciones $u_t(x) := u(x+t)$, para cada $t \geq 0$.

Integrando por partes, usando el hecho de que $2ab \leq a^2 + b^2$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| n \int_0^{\infty} \exp(-nt) u(t) dt \right|^2 &= \left| u(0) + \int_0^{\infty} \exp(-nt) u'(t) dt \right|^2 \\
&\leq \left(|u(0)| + \left| \int_0^{\infty} \exp(-nt) u'(t) dt \right| \right)^2 \\
&\leq 2|u(0)|^2 + 2 \left| \int_0^{\infty} \exp(-nt) u'(t) dt \right|^2 \\
&\leq 2|u(0)|^2 + 2 \left(\int_0^{\infty} \exp(-2nt) dt \right) \left(\int_0^{\infty} |u'(t)|^2 dt \right) \\
&\leq 2 \left(|u(0)|^2 + \|u'\|_{\mathcal{H}}^2 \right).
\end{aligned}$$

De este modo la hipótesis del Teorema 3.3.7 se satisface, por lo que el m.q.d.s. es de Markov. La última parte del teorema se sigue de lo aquí mostrado y el Teorema 3.3.6. $\blacksquare$

3.4. El álgebra dominio del semigrupo perturbado

Lema 3.4.1 *Sea $\mathcal{L}_0$ el generador del semigrupo no perturbado $(\mathcal{T}_{0,t})_{t \geq 0}$. Entonces el dominio $D(\mathcal{L}_0)$ es una $*$ -álgebra y $\mathbb{1} \notin D(\mathcal{L}_0)$.*

Demostración. Como $W_t^* W_t$ es un proyector al subespacio de funciones que se desvanecen en $[0, t)$, entonces

$$\|W_t^* W_t \varphi - \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{\infty} \chi_{[0,t]} |\varphi(x)|^2 dx \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Al tomar φ de norma uno, con $\text{sop}(\varphi) = [0, t]$ obtenemos

$$\|\mathcal{T}_{0,t}[\mathbb{1}] - \mathbb{1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|W_t^* W_t - \mathbb{1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 1.$$

De este modo, usando el inciso (iii) del Lema 2.2.2 tenemos que $\mathbb{1} \notin D(\mathcal{L}_0)$, ya que

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \|\mathcal{T}_{0,t}[\mathbb{1}] - \mathbb{1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup_{t>0} \frac{1}{t} = \infty.$$

De la definición del semigrupo $\mathcal{T}_{0,t}$ se observa que $D(\mathcal{L}_0)$ es autoadjunto. Ahora, para probar que $D(\mathcal{L}_0)$ es una $*$ -álgebra usaremos que $W_t W_t^* = \mathbb{1}$. Nótese que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (\mathcal{T}_{0,t}[XY] - XY) &= \frac{1}{t} (\mathcal{T}_{0,t}[X] \mathcal{T}_{0,t}[Y] - XY) \\ &= \frac{1}{t} (\mathcal{T}_{0,t}[X] - X) \mathcal{T}_{0,t}[Y] + X \frac{1}{t} (\mathcal{T}_{0,t}[Y] - Y), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{t} \|\mathcal{T}_{0,t}[XY] - XY\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{t} \|\mathcal{T}_{0,t}[X] - X\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|\mathcal{T}_{0,t}[Y]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} + \frac{1}{t} \|\mathcal{T}_{0,t}[Y] - Y\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|X\|_X.$$

Tomando $X, Y \in D(\mathcal{L}_0)$, nuevamente por (iii) del Lema 2.2.2, obtenemos $XY \in D(\mathcal{L}_0)$. ■

La ecuación (3.5) es equivalente a la ecuación integral

$$\begin{aligned} \langle \phi, \mathcal{T}_t[X] \psi \rangle &= \langle \phi, \mathcal{T}_{0,t}[X] \psi \rangle + \int_0^t \text{tr} \left(\Lambda[\mathcal{S}_{0,s} | \psi] \langle \phi | \right) \mathcal{T}_{t-s}[X] ds \\ &= \langle \phi, \mathcal{T}_{0,t}[X] \psi \rangle + \int_0^t \text{tr} \left(\Omega \overline{\phi(s)} \psi(s) \mathcal{T}_{t-s}[X] \right) ds \\ &= \langle \phi, \mathcal{T}_{0,t}[X] \psi \rangle + \int_0^t \text{tr} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\mathcal{T}_{t-s}[X] \phi(0+s) g_{\ell} \rangle \langle \psi(0+s) g_{\ell} | \right) ds \\ &= \langle \phi, \mathcal{T}_{0,t}[X] \psi \rangle + \int_0^t \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} W_s \phi, \mathcal{T}_{t-s}[X] L_{\ell} W_s \psi \rangle ds, \end{aligned} \tag{3.14}$$

para $\phi, \psi \in \mathcal{D}$. De la segunda igualdad de la ecuación (3.14), restando $\langle \phi, X \psi \rangle$ y dividiendo entre t , resulta

$$\begin{aligned} \langle \phi, t^{-1} (\mathcal{T}_t[X] - X) \psi \rangle &= \langle \phi, t^{-1} (\mathcal{T}_t^0[X] - X) \psi \rangle \\ &\quad + t^{-1} \int_0^t \psi(s) \overline{\phi(s)} \text{tr} (\Omega \mathcal{T}_{t-s}[X]) ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Lema 3.4.2 Sea $\mathcal{L}$ el generador del semigrupo perturbado, si $X \in D(\mathcal{L})$, entonces

$$X_0 = X - \text{tr}(\Omega X) \mathbb{1} \in D(\mathcal{L}_0) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[X] = \mathcal{L}_0[X_0].$$

Demostración. Sea $X \in D(\mathcal{L})$. Como $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ para cada $t > 0$, tenemos

$$t^{-1}\|\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) - \mathbb{1}\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Esto indica que $\mathbb{1} \in D(\mathcal{L})$, entonces $X_0 = X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1} \in D(\mathcal{L})$. Además observe que

$$\text{tr}(\Omega \mathcal{T}_t[X_0]) = \text{tr}(\Omega \mathcal{T}_t[X]) - \text{tr}(\Omega X)\text{tr}(\Omega \mathcal{T}_t[\mathbb{1}]) = \text{tr}(\Omega(\mathcal{T}_t[X] - X)).$$

De este modo, para cada $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, (3.15) implica

$$\begin{aligned} \langle \phi, t^{-1}(\mathcal{T}_{0,t}[X_0] - X_0)\psi \rangle &= \langle \phi, t^{-1}(\mathcal{T}_t[X_0] - X_0)\psi \rangle \\ &\quad - t^{-1} \int_0^t \psi(s) \overline{\phi(s)} \text{tr}(\Omega(\mathcal{T}_{t-s}[X] - X)) ds. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle \phi, t^{-1}(\mathcal{T}_{0,t}[X_0] - X_0)\psi \rangle| &\leq |\langle \phi, t^{-1}(\mathcal{T}_{0,t}[X_0] - X_0)\psi \rangle| \\ &\quad + \left| \int_0^t \psi(s) \overline{\phi(s)} \text{tr}(\Omega t^{-1}(\mathcal{T}_{t-s}[X] - X)) ds \right| \\ &\leq M\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\psi\|_{\mathcal{H}} + M \int_0^t t^{-1}(t-s) |\psi(s) \overline{\phi(s)}| ds \\ &\leq 2M\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\psi\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se obtiene al usar $t^{-1}(t-s) \leq 1$ y la desigualdad de Hölder.

Esto prueba que la forma sesquilineal asociada con $t^{-1}(\mathcal{T}_{0,t}[X_0] - X_0)$ es acotada, por tanto, el operador asociado es acotado, y éste cumple

$$t^{-1}\|\mathcal{T}_{0,t}[X_0] - X_0\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2M,$$

por el Lema 2.2.2 concluimos que $X_0 \in D(\mathcal{L}_0)$.

Ahora veremos que $\mathcal{L}[X] = \mathcal{L}_0[X_0]$. Primero,

$$\mathcal{L}_0[X_0] = (X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1})G + G^*(X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}) = XG + G^*X - \text{tr}(\Omega X)(G + G^*).$$

Por otra parte,

$$\mathcal{L}[X] = XG + G^*X + \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{\ell}^* X L_{\ell},$$

pero,

$$\left\langle \phi, \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{\ell}^* X L_{\ell} \psi \right\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} \phi, X L_{\ell} \psi \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \phi(0) g_{\ell}, X \psi(0) g_{\ell} \rangle = \overline{\phi(0)} \psi(0) \text{tr}(\Omega X).$$

Dado que los operadores G y $\{L_{\ell}\}$ cumplen la condición **A**, usando que $\text{tr}(\Omega) = 1$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\overline{\phi(0)} \psi(0) = \overline{\phi(0)} \psi(0) \text{tr}(\Omega) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \phi(0) g_{\ell}, \psi(0) g_{\ell} \rangle = -(\langle G\phi, \psi \rangle + \langle \phi, G\psi \rangle).$$

Resumiendo,

$$\left\langle \phi, \sum_{\ell=1}^{\infty} L_{\ell}^* X L_{\ell} \psi \right\rangle = -\text{tr}(\Omega X)(\langle G\phi, \psi \rangle + \langle \phi, G\psi \rangle) = -\text{tr}(\Omega X) \langle \phi, (G^* + G)\psi \rangle.$$

Por lo cual $\mathcal{L}[X] = \mathcal{L}_0[X_0]$, como se afirmó. ■

Lema 3.4.3 Sea $\Gamma : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal positiva sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces

$$|\Gamma(A, B)|^2 \leq \Gamma(A, A)\Gamma(B, B), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (3.16)$$

Demostración. Sea Γ como en la hipótesis. Para verificar la desigualdad (3.16) usaremos una demostración análoga a la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el caso conmutativo. Sean $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tomemos $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Gamma(A - \lambda\alpha B, A - \lambda\alpha B) \\ &= \Gamma(A, A) - \lambda\alpha\Gamma(A, B) - \lambda\bar{\alpha}\Gamma(B, A) + \lambda^2|\alpha|^2\Gamma(B, B) \\ &= \lambda^2|\alpha|^2\Gamma(B, B) - 2\lambda\text{Re } \alpha\Gamma(A, B) + \Gamma(A, A). \end{aligned}$$

Si $\Gamma(B, B) = 0$ basta usar $\bar{\alpha} = \Gamma(A, B)$ y λ positivo suficientemente grande para ver que $\Gamma(A, B) = 0$. Supongamos que $\Gamma(A, B)$ y $\Gamma(B, B)$ son distintos de cero, usando $\alpha = \overline{\Gamma(A, B)}|\Gamma(A, B)|^{-1}$ y $\lambda = |\Gamma(A, B)|(\Gamma(B, B))^{-1}$ obtenemos

$$0 \leq \frac{|\Gamma(A, B)|^2}{\Gamma(B, B)} - 2\frac{|\Gamma(A, B)|^2}{\Gamma(B, B)} + \Gamma(A, A).$$

Despejando la expresión anterior obtenemos la ecuación (3.16). ■

Teorema 3.4.4 Sea Ω un estado, $\mathcal{T}_t$ un semigrupo que satisface la ecuación (3.5), y $\mathcal{L}$ su generador. Si X pertenece a $\mathcal{A}$, el álgebra dominio de $\mathcal{L}$, entonces

$$[X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}]\Omega = \Omega[X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}] = 0. \quad (3.17)$$

En particular, si Ω es no-degenerado, entonces X es un múltiplo de la identidad, es decir $\mathcal{A} = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Demostración. Sea $X \in D(\mathcal{L})$ tal que $X^*X, XX^* \in D(\mathcal{L})$, entonces

$$\begin{aligned} X &= [X - \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}] + \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1} = X_0 + \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}, \\ X^*X &= [X^*X - \text{tr}(\Omega X^*X)\mathbb{1}] + \text{tr}(\Omega X^*X)\mathbb{1} = Y_0 + \text{tr}(\Omega X^*X)\mathbb{1}, \end{aligned}$$

donde $X_0, Y_0 \in D(\mathcal{L}_0)$ por el Lema 3.4.2. Así

$$Y_0 + \text{tr}(\Omega X^*X)\mathbb{1} = X^*X = [X_0 + \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}]^* [X_0 + \text{tr}(\Omega X)\mathbb{1}].$$

Desarrollando y despejando la última expresión obtenemos

$$(\operatorname{tr}(\Omega X^* X) - |\operatorname{tr}(\Omega X)|^2) \mathbb{1} = X_0^* X_0 + \operatorname{tr}(\Omega X) X_0^* + \overline{\operatorname{tr}(\Omega X)} X_0 - Y_0.$$

El Lema 3.4.1 asegura que el lado derecho pertenece a $D(\mathcal{L}_0)$, ya que $\mathcal{L}_0$ es una $*$ -álgebra. Pero $\mathbb{1} \notin D(\mathcal{L}_0)$ (Lema 3.4.1), entonces la identidad anterior solo es posible si

$$\operatorname{tr}(\Omega X^* X) = |\operatorname{tr}(\Omega X)|^2.$$

La forma sesquilineal $\Gamma(A, B) = \operatorname{tr}(\Omega A^* B)$ cumple con las condiciones del Lema 3.4.3. Por la ecuación (3.16), con $A = X$ y $B = \mathbb{1}$, sabemos que la desigualdad siempre se tiene. Para conseguir la igualdad en la demostración del Lema 3.4.3, es necesario que

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tr}(\Omega(X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1})^*(X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1})) \\ &= \operatorname{tr}\left[\left((X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1})\Omega^{1/2}\right)^*\left((X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1})\Omega^{1/2}\right)\right]. \end{aligned}$$

De lo cual se deduce $[X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1}]\Omega^{1/2} = 0$.

Ahora sea $XX^* = Z_0 + \operatorname{tr}(\Omega XX^*)\mathbb{1}$, con $Z_0 = XX^* - \operatorname{tr}(\Omega XX^*)\mathbb{1}$. Entonces, usando las expresiones de X y X^* y despejando, obtenemos

$$(\operatorname{tr}(\Omega XX^*) - |\operatorname{tr}(\Omega X^*)|^2) \mathbb{1} = X_0 X_0^* + \operatorname{tr}(\Omega X^*) X_0 + \overline{\operatorname{tr}(\Omega X^*)} X_0^* - Z_0.$$

Nuevamente, como el lado derecho pertenece al dominio de $\mathcal{L}_0$ y la identidad no, la única manera de que la igualdad sea cierta es si $\operatorname{tr}(\Omega XX^*) = |\operatorname{tr}(\Omega X^*)|^2$. Esta igualdad se obtiene solo si

$$\operatorname{tr}(\Omega(X^* - \operatorname{tr}(\Omega X^*)\mathbb{1})^*(X^* - \operatorname{tr}(\Omega X^*)\mathbb{1})) = 0,$$

i.e., $[X^* - \operatorname{tr}(\Omega X^*)\mathbb{1}]\Omega^{1/2} = 0$. De estas identidades se obtiene (3.17).

Por último, supongamos que Ω es no degenerado, es decir que no tiene valores propios cero. Al ser Ω positivo, todos sus valores propios son positivos y existe una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ para la cual,

$$\Omega = \sum_{\ell=1}^{\infty} |g_\ell\rangle\langle g_\ell|, \quad g_\ell := \sqrt{\lambda_\ell} \varphi_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Cada λ_ℓ es un valor propio asociado al vector propio φ_ℓ (descomposición espectral de Ω). Entonces, para cada φ_k ,

$$0 = [X - \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1}]\Omega\varphi_k = \lambda_k[X\varphi_k - \operatorname{tr}(\Omega X)\varphi_k],$$

por lo tanto $X = \operatorname{tr}(\Omega X)\mathbb{1}$. Concluimos que $\mathcal{A} = \mathbb{C}\mathbb{1}$. ■

Capítulo 4

Construcción de un operador Ω .

El objetivo de este capítulo será mostrar, mediante un ejemplo, la existencia de funciones en $\mathbb{R}_+$ que cumplen las hipótesis dadas en la Proposición 3.3.9 del Capítulo 3. Para ello usaremos los polinomios de Laguerre (ref. [15]).

4.1. Funciones de Laguerre.

Definición 4.1.1 *Definimos los polinomios de Laguerre mediante la fórmula*

$$L_n(x) = e^x D^n(x^n e^{-x}), \quad D^n := \frac{d^n}{dx^n} \quad n \geq 0.$$

Estos polinomios forman una base ortogonal numerable del espacio de las funciones medibles con norma $\|g\|_e < \infty$, i.e., satisface las relaciones

$$\langle g, g \rangle_e := \|g\|_e^2, \quad \langle L_m, L_n \rangle_e = m!n!\delta_{m,n},$$

y el producto interno

$$\langle f, g \rangle_e := \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx,$$

y sus combinaciones lineales finitas son densas. Una pequeña modificación de estos polinomios nos permite obtener las funciones de Laguerre, que son elementos del espacio $(L_2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con su producto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

Definición 4.1.2 *Definimos las funciones de Laguerre en el espacio $(L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de la siguiente forma*

$$L_n(x) := \frac{1}{n!}e^{-x/2}L_n(x) = \frac{1}{n!}e^{x/2}D^n(x^n e^{-x}), \quad n \geq 0. \quad (4.1)$$

Ahora mostraremos que la colección $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$ forma una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}_+)$. Para ello, requerimos un pequeño lema.

Lema 4.1.3 *Una función $f(x)$ pertenece a $(L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si y solo si $\|g\|_e < \infty$, donde $g(x) = f(x)e^{x/2}$ y $\|\cdot\|_e$ es la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$.*

Demostración. Sea $f \in (L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, tenemos que $g(x) = f(x)e^{x/2}$ es una función medible y cumple

$$\|g\|_e^2 = \langle g, g \rangle_e = \int_0^\infty (f(x)e^{x/2})^2 e^{-x} dx = \|f\|^2 < \infty.$$

Ahora, si $\|g\|_e < \infty$, tomando $f(x) = g(x)e^{-x/2}$ tenemos que f es medible y

$$\langle f, f \rangle = \int_0^\infty (g(x)e^{-x/2})^2 dx = \int_0^\infty g(x)^2 e^{-x} dx = \langle g, g \rangle_e < \infty,$$

Lo cual muestra que $f \in (L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Esto concluye la demostración. $\blacksquare$

Proposición 4.1.4 *La colección $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$ forma una base ortonormal del espacio $(L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Demostración. Primero verificaremos la ortogonalidad,

$$\langle \mathbb{L}_n, \mathbb{L}_m \rangle = \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \langle L_n, L_m \rangle_e = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0.$$

De la ecuación anterior se obtiene que $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$ es un conjunto ortonormal.

Ahora supongamos que existe $f \in (L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ortogonal al conjunto $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$. Usando el Lema 4.1.3, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbb{L}_n, f \rangle &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-x/2} L_n(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_n(x) (f(x)e^{x/2}) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \langle L_n, g \rangle_e. \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $f(x)e^{x/2} = g(x)$ pertenece al espacio de las funciones medibles definidas en $\mathbb{R}_+$ con norma $\|\cdot\|_e$ finita, y al ser $\{L_n\}_{n \geq 0}$ una base de este espacio se tiene que $g = 0$, es decir $f = 0$. Esto muestra que $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$ es una base de $(L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

De la ecuación (4.2) se observa que para calcular los coeficientes de Fourier de una función, $f \in (L^2(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, basta usar los coeficientes de Fourier de la función $g = f(x)e^{x/2}$ en el espacio $(\mathcal{H}(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con los L_n normalizados. $\blacksquare$

Definición 4.1.5 *Para los polinomios de Laguerre se define su función generadora mediante*

$$\psi(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < 1. \tag{4.3}$$

Usando la definición de los polinomios de Laguerre se puede demostrar que

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right), \quad |t| < 1. \quad (4.4)$$

Despejando la exponencial y derivando respecto a t se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) &= (1-t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) - \psi(x, t) \\ &= (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n \\ &= (L_1(x) - L_0(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora, como

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \frac{x}{(1-t)^2} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \frac{x}{1-t} \psi(x, t),$$

despejando $x\psi(x, t)$ de la última ecuación, y usando (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} x\psi(x, t) &= (L_1(x) - L_0(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)) \frac{t^n}{n!} \\ &\quad - (L_1(x) - L_0(x))t - \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x)) \frac{t^{n+1}}{n!} \\ &= (L_1(x) - L_0(x)) + (L_2(x) - 3L_1(x) + L_0(x))t \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (L_{n+1}(x) - (2n+1)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x)) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por último, usando (4.3) en (4.6) y comparando término a término, se llega a la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x). \quad (4.7)$$

Proposición 4.1.6 *Para las funciones de Laguerre se tiene la siguiente relación de recurrencia,*

$$\mathbb{L}_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} ((2n+1-x)\mathbb{L}_n(x) + n\mathbb{L}_{n+1}(x)), \quad n \geq 1. \quad (4.8)$$

Además, para su derivada se cumple,

$$\mathbb{L}'_n(x) = \mathbb{L}'_{n-1}(x) - \frac{1}{2}(\mathbb{L}_n(x) + \mathbb{L}_{n-1}(x)). \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

Demostración. Observe que para obtener (4.7) solo se involucraron derivadas parciales respecto a t . Entonces es válido hacer lo siguiente,

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} e^{-x/2} L_{n+1}(x) \\ &= (2n+1-x) \frac{1}{(n+1)!} e^{-x/2} L_n(x) - \frac{1}{(n+1)!} e^{-x/2} n^2 L_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{n+1} ((2n+1-x) \mathbb{L}_n(x) + n \mathbb{L}_{n+1}(x)).\end{aligned}$$

Para la derivada tenemos,

$$\begin{aligned}D\mathbb{L}_n(x) &= \frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) + \frac{1}{n!} e^{x/2} D^{n+1}(x^n e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) + \frac{1}{n!} e^{x/2} D^n (n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) + e^{x/2} D \left[(e^{-x/2}) \left(\frac{1}{(n-1)!} e^{x/2} D^{n-1}(x^{n-1} e^{-x}) \right) \right] \\ &= D\mathbb{L}_{n-1}(x) - \frac{1}{2} (\mathbb{L}_n(x) + \mathbb{L}_{n-1}(x)).\end{aligned}$$

Estos cálculos muestran (4.8) y (4.9) respectivamente. ■

Es posible seguir desarrollando la ecuación (4.9) y dejarla en términos de los $\mathbb{L}_k$, con k anteriores a n , así obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.7 *Para cada $n \geq 1$ se tiene*

$$\mathbb{L}'_n(x) = -\frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{L}_k(x).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Tenemos que $\mathbb{L}_0(x) = e^{-x/2}$ y $\mathbb{L}'_0(x) = -\frac{1}{2} \mathbb{L}_0(x)$, además por la ecuación (4.9)

$$\mathbb{L}'_1(x) = \mathbb{L}'_0(x) - \frac{1}{2} (\mathbb{L}_1(x) + \mathbb{L}_0(x)) = -\frac{1}{2} \mathbb{L}_1(x) - \mathbb{L}_0(x).$$

Vemos que la ecuación se cumple para el caso base, ahora supongamos que

$$\mathbb{L}'_n(x) = -\frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{L}_k(x).$$

Veremos que se vale para $n+1$. Por la ecuación (4.9)

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_{n+1}(x) &= \mathbb{L}'_n(x) - \frac{1}{2} (\mathbb{L}_{n+1}(x) + \mathbb{L}_n(x)) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{L}_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{L}_k(x) - \frac{1}{2} (\mathbb{L}_{n+1}(x) + \mathbb{L}_n(x)) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{L}_{n+1}(x) - \sum_{k=0}^n \mathbb{L}_k(x).\end{aligned}$$

Esto demuestra lo deseado. ■

Por último, es posible definir una función generadora para los $\{\mathbb{L}_n\}_{n \geq 0}$ mediante el uso de la función generadora de los $\{L_n\}_{n \geq 0}$ descrita en la ecuación (4.4).

Definición 4.1.8 *Para las funciones de Laguerre definimos su función generadora mediante,*

$$\phi(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{L}_n(x) t^n = e^{-x/2} \psi(x, t) = \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-x(1+t)}{2(1-t)}\right), \quad (4.10)$$

esto para $|t| < 1$.

4.2. Construcción del operador Ω .

El objetivo de esta sección será construir un operador $\Omega \in L_1(\mathcal{H})$ que cumpla las condiciones de la Proposición 3.3.9. Para ello usaremos las funciones de Laguerre y sus propiedades estudiadas en la sección anterior.

Consideraremos el espacio de sucesiones cuadrado-sumables sobre $\mathbb{C}$, definido mediante

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (b_n)_{n \geq 0} : b_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} |b_n|^2 < \infty \right\}.$$

Definición 4.2.1 [Propiedad O] *Sean $b = \{b_n\}_{n \geq 0}$ en $\ell^2(\mathbb{N})$, y $\{L_n\}_{n \geq 0}$ las funciones de Laguerre. Tomando $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$, con $c_n := \frac{1}{2^n} b_n$ para cada $n \geq 0$, definimos al operador, que depende de la sucesión b*

$$\Omega := \sum_{n \geq 0} |g_n\rangle \langle g_n|, \quad \text{dónde } g_n = \mathbf{c}_n L_n, \quad \mathbf{c}_n = \frac{|c_n|}{\|c\|_{\ell_2}}, \quad n \geq 0, \quad (4.11)$$

Mostraremos que los operadores con la propiedad **O** satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.9. Para esto usaremos los siguientes lemas.

Lema 4.2.2 *Los operadores Ω , con la propiedad **O**, pertenecen a $L_1(\mathcal{H})$ y son estados.*

Demostración. Como cada $|b_n|$ es no negativo tenemos,

$$0 \leq |c_n| = \frac{1}{2^n} |b_n| \leq |b_n|, \quad \text{entonces} \quad \|c\|_{\ell_2} \leq \|b\|_{\ell_2}.$$

Esto muestra que la sucesión c está en $\ell_2(\mathbb{N})$, consecuentemente la sucesión $\mathbf{c}$ que resulta de normalizar la sucesión c también pertenece a $\ell_2(\mathbb{N})$, y tiene norma igual a uno. Entonces, para Ω definido como en (4.11) y usando como base de $\mathcal{H}$ a las funciones de Laguerre, tenemos

$$\|\Omega\|_1 = \sum_{k \geq 0} \langle \Omega L_k, L_k \rangle = \sum_{k \geq 0} |\langle L_k, g_k \rangle|^2 = 1.$$

El operador Ω es positivo ya que está representado en su forma espectral, y sus valores propios son no negativos. Esto prueba que es un estado. ■

Lema 4.2.3 *Supongamos que Ω tiene la propiedad **O**. Para cada $n \geq 0$, las funciones g_n pertenecen a $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$. Más aún,*

$$\sum_{n \geq 0} \|g'_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Demostración. Por definición de las funciones de Laguerre tenemos que cada $g_n \in C^1(\mathbb{R}_+)$, y la suma de sus normas es igual a uno. Ahora debemos verificar que la norma de las g'_n sea finita. Para ello, usando el Lema 4.1.7 obtenemos

$$\|g'_n\|_{\mathcal{H}}^2 = |\mathbf{c}_n|^2 \|\mathbf{L}'_n\|_{\mathcal{H}}^2 = |\mathbf{c}_n|^2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{L}_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \|\mathbf{L}_k\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \leq (n+1) |\mathbf{c}_n|^2,$$

esto para cada $n \geq 0$.

Por lo anterior, y usando la forma en que están definidas las $\mathbf{c}_n$, se verifica,

$$\sum_{n \geq 0} \|g'_n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{\|\mathbf{c}\|_{\ell_2}^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)}{2^{2n}} |b_n|^2 \leq \frac{\|b\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{c}\|_{\ell_2}^2}.$$

Esto muestra lo deseado. ■

Lema 4.2.4 *Los operadores que cumplen con la propiedad **O** satisfacen*

$$\sum_{n \geq 0} |g_n(0)|^2 < \infty.$$

Demostración. Para demostrar esto usaremos la expresión (4.10) en el punto $(x, t) = (0, \frac{1}{2})$, por lo cual tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{L}_n(0) = \phi\left(0, \frac{1}{2}\right) = 2.$$

Para que la serie converja, los términos deben converger a cero conforme n crece, así la sucesión $\{2^{-n} |\mathbf{L}_n(0)|\}$ converge a cero. En consecuencia, existe una constante, $M > 0$, tal que

$$\frac{1}{2^n} |\mathbf{L}_n(0)| \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(0)|^2 = \frac{1}{\|\mathbf{c}\|_{\ell_2}^2} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \left| \frac{1}{2^n} \mathbf{L}_n(0) \right|^2 \leq M^2 \frac{\|b\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{c}\|_{\ell_2}^2}.$$

■

Ahora estamos listos para probar la existencia de los operadores Ω .

Teorema 4.2.5 *Sea Ω un operador que satisface la propiedad **O**. Entonces Ω es un estado y cumple las condiciones de la Proposición 3.3.9.*

Demostración. Por el Lema 4.2.3 las funciones g_n , de la definición 4.2.1, pertenecen a $W^{1,2}(\mathbb{R}_+)$ y por el Lema 4.2.2 se obtiene que $\Omega \in L_1(\mathcal{H})$ es un estado. Usando los Lemas 4.2.3 y 4.2.4, y el hecho que estas series convergen absolutamente, tenemos,

$$\sum_{n \geq 0} (|g_n(0)|^2 + \|g'_n\|_{\mathcal{H}}^2) = \sum_{n \geq 0} |g_n(0)|^2 + \sum_{n \geq 0} \|g'_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Esto demuestra que el conjunto de operadores que satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.9 es no vacío. ■

Conclusiones y perspectivas

Hemos discutido el concepto de álgebra dominio máxima del generador infinitesimal de un semigrupo dinámico cuántico. Aunque para los semigrupos uniformemente continuos esta álgebra coincide con el dominio, mediante un ejemplo hemos demostrado que, en casos más singulares, esta álgebra puede consistir sólo de los múltiplos de la identidad.

No obstante, para los semigrupos completamente positivos continuos en una topología más débil que la uniforme, existen varios puntos principales aún por estudiar:

1. ¿Bajo qué condiciones el álgebra dominio máxima es densa o trivial?
2. Para el caso cuando el álgebra máxima es densa ¿Es posible caracterizar los correspondientes generadores infinitesimales?
3. Las mismas preguntas para el caso cuando el álgebra dominio máxima no es densa.

Para el caso del Teorema 3.3.9 ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la ecuación (3.10)?

Apéndice A

Derivada débil y continuidad absoluta.

En este apéndice se compilan algunas definiciones y resultados sobre derivada débil y los espacios de Sobolev en algún conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con el objetivo de estudiar la relación que existe entre éstos, y sentar las bases para los resultados que se establecen en los capítulos principales de esta Tesis. Por último, se enuncia y demuestra el Teorema de Meyers-Serrin, el cual establece que las funciones infinitamente diferenciables pertenecientes a un determinado espacio de Sobolev, forman un subconjunto denso de este.

Durante este capítulo Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

A.1. Convolución y funciones regularizantes

Gran parte de los resultados que aquí se presentan carecerán de demostración, pero estas pueden ser consultadas en [9], u otros textos que abarquen estos temas. El objetivo es tener en mente la existencia de varios resultados que nos fueron de ayuda durante la elaboración de esta tesis, sin apartar la atención de lo mas importante.

Definición A.1.1 *Tenemos las siguientes definiciones,*

- i) Denotaremos al espacio de funciones continuas sobre un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ mediante $C(\Omega)$. Además, para $k \geq 1$, definimos

$$C^k(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \partial^j f \text{ existe y } \partial^j f \in C(\Omega), \text{ para } 1 \leq j \leq k\}.$$

Donde $\partial^j f$ representa cualquier derivada parcial de f de orden j .

- ii) Definimos el conjunto de funciones k -diferenciables de soporte compacto, mediante

$$C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : f \text{ tiene soporte compacto contenido en } \Omega\}.$$

- iii) Diremos que un subconjunto abierto $U \subset \Omega$ está **compactamente contenido en Ω** si $\bar{U}$ es compacto y esta contenido en Ω ; y la denotaremos mediante $U \Subset \Omega$.

Para $1 \leq p < \infty$ definimos

$$L_{loc}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : f\chi_U \in L^p(\Omega), \text{ para cada } U \Subset \Omega\}.$$

Note que, si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\text{sop}(f) \subset B_r(0)$, entonces

$$f(x-y)g(y) = f(x-y)g(y)\chi_{B_r(x)}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$g(y)\chi_{B_r(x)}(y) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \phi_x = f(x-\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

la función $y \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Esto da pie a la siguiente definición.

Definición A.1.2 Sea $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. La **convolución** de f con g es la función $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

A continuación enlistaremos algunas de las propiedades más elementales de la convolución.

Proposición A.1.3 a) Si $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, en particular $f * g$ es medible.

b) Si $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $C^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

c) Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

d) Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, \infty]$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Proposición A.1.4 [Desigualdad de Young] Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$. Para r tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, la función $f * g$ está bien definida y se cumple

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ahora definiremos lo que es una sucesión de funciones regularizantes, así como unas propiedades de estas, que nos serán de utilidad más adelante.

Definición A.1.5 Una sucesión de funciones $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se llama una **sucesión regularizante** si, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\zeta_k \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n), \quad \zeta_k \geq 0, \quad \text{sop}(\zeta_k) \subset \overline{B^n}(0, 1/k), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_k = 1.$$

Ejemplo A.1.6 Sea

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right) & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

y sea $c^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho$. Definimos

$$\rho_k := ck^n \rho(kx).$$

Se puede comprobar que (ρ_k) es una sucesión regularizante. A este ejemplo se le llama **sucesión regularizante estándar**.

Lema A.1.7 Sean (ρ_k) una sucesión de funciones regularizantes y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\text{sop}(f) \subset \Omega$. Entonces

$$\text{sop}(f * \rho_k) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \text{sop}(f)) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Proposición A.1.8 Dadas $g \in C^0_c(\Omega)$ y una sucesión regularizante (ρ_k) , existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_k * g \in C^\infty_c$ para todo $k \geq k_0$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \rho_k * g\|_p = 0, \quad \forall p \in [1, \infty).$$

A.2. Derivada débil

En esta sección definimos a la derivada débil, para introducir el concepto de espacio de Sobolev, así como unas pequeñas propiedades que serán necesarias para la demostración del teorema de Meyer-Serrin. Las demostraciones omitidas en esta sección pueden ser consultadas en [9].

Proposición A.2.1 a) Si $\varphi \in C^1_c(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

b) Si $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi + \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

El resultado anterior motiva la definición de una función débilmente diferenciable, como hacemos a continuación.

Definición A.2.2 Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u es **débilmente diferenciable en Ω** si existen $v_1, \dots, v_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} v_i \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega), \quad (\text{A.1})$$

para toda $i = 1, \dots, n$. A v_i se le llama la **i -ésima derivada débil de u en Ω** y se denota $D_i u := v_i$.

Observación A.2.3 Si $v, w \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfacen

$$-\int_{\Omega} v\varphi = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} w\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

entonces $v = w$ c.d. en Ω . Es decir, para cada $i = 1, \dots, n$ la función v_i que cumple la ecuación (A.1) es única.

Observación A.2.4 Si $u \in C^1(\Omega)$, entonces u es débilmente diferenciable en Ω y

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Los siguientes resultados establecen que el conjunto de las funciones débilmente diferenciables forman un espacio vectorial, y su estructura es casi un álgebra de funciones.

Proposición A.2.5 Si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Proposición A.2.6 Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces la extensión trivial de ζu , es decir cero fuera del soporte de ζ , es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y

$$D_i(\zeta u) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} u + \zeta D_i u.$$

Ahora introducimos el concepto del espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Definición A.2.7 Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, D_k u \in L^p(\Omega), k = 1, \dots, n\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\|u\|_p^p + \|D_1 u\|_p^p + \dots + \|D_n u\|_p^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|u\|_\infty, \|D_1 u\|_\infty, \dots, \|D_n u\|_\infty\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Observación A.2.8 En el caso de $\Omega \subset \mathbb{R}$ se tienen los espacios,

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, Du \in L^p(\Omega)\} \\ W^{2,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, Du \in W^{1,p}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Estos son usados en el capítulo 3 de este trabajo.

Estos últimos resultados serán relevantes en la parte final de este capítulo.

Proposición A.2.9 $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial, y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es una norma en $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Lema A.2.10 Sean $p \in [1, \infty]$ y (u_k) una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y $D_i u_k \rightarrow v_i$ en $L^p(\Omega)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces u es débilmente diferenciable en Ω , $D_i u = v_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, y $u_k \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.2.11 $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $p \in [1, \infty]$.

Lema A.2.12 Sean $p \in [1, \infty)$ y (ψ_k) una sucesión en $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_k \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una sucesión (φ_k) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_k \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

A.3. Funciones absolutamente continuas

En la primera parte de esta sección veremos algunas definiciones y propiedades de las funciones absolutamente continuas, cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [25]. En la segunda parte se mostrará que cada función absolutamente continua sobre un intervalo de $\mathbb{R}$ pertenece a cierto espacio de Sobolev sobre el mismo intervalo. En esta sección definiremos lo que es una función absolutamente continua así como algunas propiedades que son de gran utilidad.

Definición A.3.1 Una función f sobre el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ se dice que es **absolutamente continua** en $[a, b]$ si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada colección finita y disjunta $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ de intervalos abiertos en (a, b) ,

$$\text{si } \sum_{k=1}^n [b_k - a_k] < \delta, \text{ entonces } \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

De la definición anterior se observa que cada función absolutamente continua es continua, pero no necesariamente al revés.

Ejemplo: Si f es una función de Lipschitz en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f es absolutamente continua en $[a, b]$.

Teorema A.3.2 Sea f una función absolutamente continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces f es diferenciable casi dondequiera en (a, b) , su derivada f' es integrable sobre $[a, b]$, y

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Definición A.3.3 Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y supongamos que una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable sobre $[a, b]$. Decimos que una función f , definida sobre $[a, b]$, es la **integral indefinida** de la función g , si

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

El siguiente resultado nos provee de una caracterización de las funciones absolutamente continuas, la cual usaremos en vez de la definición A.3.1. Denotaremos el conjunto de las funciones absolutamente continuas sobre Ω mediante $AC(\Omega)$.

Teorema A.3.4 *Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si y solo si es una integral indefinida sobre $[a, b]$.*

Ahora mostraremos un resultado que relaciona las funciones absolutamente continuas y las funciones débilmente diferenciables. Antes definimos el conjunto $AC(I)$, como el conjunto de las funciones absolutamente continuas sobre I , un intervalo de $\mathbb{R}$; y

$$AC^p(I) := AC(I) \cap W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Proposición A.3.5 *Sea $\Omega = [a, b]$. Entonces, $f \in AC^p(\Omega)$ si y solamente si $f \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. La primera parte es inmediata de la definición de $AC^p(\Omega)$, pero la otra dirección requiere un poco más de trabajo, aunque ésta puede consultarse en la referencia [6], Teorema 8.2. ■

Los anteriores resultados pueden ser extendidos al caso de un intervalo abierto acotado, y después al caso de un intervalo no acotado. Para ello se debe modificar la definición de función absolutamente continua, de la siguiente forma.

Definición A.3.6 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función absolutamente continua en I** si para cada intervalo cerrado acotado $J \subset I$ se tiene que f es absolutamente continua en J .*

La siguiente definición está motivada por el Teorema A.3.4.

Definición A.3.7 *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Una función $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ es **absolutamente continua** si existe una función medible $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ que es integrable sobre cada intervalo cerrado y acotado contenido en I , y además*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \quad \text{para } a, x \in I. \quad (\text{A.2})$$

De la definición A.3.6 surge la siguiente incógnita, si al tomar dos intervalos I_1, I_2 , tales que su intersección es no vacía y sus respectivas funciones g_1 y g_2 , de acuerdo con el teorema A.3.4, ¿Cuál es la relación entre las funciones g_1 y g_2 ?

El siguiente Teorema responde esta incógnita.

Proposición A.3.8 *Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$, y f una función absolutamente continua en I en el sentido de A.3.6. Dados dos intervalos acotados $J_1, J_2 \subset I$ con cada uno de la forma*

$$J_k := [a_k, b_k], \quad a_k, b_k \in I \quad k = 1, 2,$$

es posible escribir a $f|_{J_k}$, según el Teorema A.3.4, mediante

$$f(x) = f(a_k) + \int_{a_k}^x g_k(t)dt, \quad k = 1, 2. \quad (\text{A.3})$$

Si $J_1 \cap J_2$ es no vacía, tenemos que $g_1 = g_2$ casi dondequiera en $J_1 \cap J_2$.

Demostración. Si $J_1 \cap J_2$ es no vacía tenemos dos casos:

- (a) $J_1 \cap J_2 = \{a_2\}$, donde $a_2 = b_1$, ó
- (b) $J_1 \cap J_2 = [a_2, b_1]$, con $a_2 < b_1$.

Para el caso (a) el enunciado se verifica fácilmente. Para el caso (b) usaremos la Proposición A.3.5. Así para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se cumple

$$\int_{a_2}^{b_1} (g_1 \varphi)(t) dt = - \int_{a_2}^{b_1} (f \varphi')(t) dt = \int_{a_2}^{b_1} (g_2 \varphi)(t) dt.$$

Lo cual implica,

$$\int_{a_2}^{b_1} (g_1 - g_2)(t) \varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

De lo cual concluimos que $g_1 = g_2$ casi donde quiera en $[a_2, b_1]$. ■

Es posible ver que las definiciones A.3.6 y A.3.7 son equivalentes.

Proposición A.3.9 *Las definiciones A.3.6 y A.3.7 son equivalentes.*

Demostración. Se sigue del Teorema A.3.4, y las Proposiciones A.3.5 y A.3.8. ■

Observación A.3.10 Es necesario hacer notar la equivalencia de la proposición A.3.5, ya que en el artículo de A.S. Holevo, referencia [17], se refiere al conjunto $AC^2(\Omega)$, mientras que en este trabajo se realiza con el espacio de Sovoleb $W^{1,2}(\Omega)$, del cual aprovechamos algunas de las propiedades existentes, y damos un mayor desarrollo a diversos conceptos que, tanto el autor del artículo [17] como investigadores adentrados en el tema, conocen y da por conocidos.

A.4. Teorema de Meyers-Serrin

En esta sección mostraremos que el espacio $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ bajo la norma de este último. La prueba que daremos fue dada por Norman G. Meyers y James Serrin [23] en 1964. El teorema dice lo siguiente:

Teorema A.4.1 *La cerradura, en la norma de $W^{m,p}(\Omega)$, de $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es $W^{m,p}(\Omega)$.*

Antes de proceder con la prueba será necesario introducir el concepto de partición de la unidad.

Definición A.4.2 *Una familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de funciones continuas $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$, con dominio en un espacio topológico, se dice que es una **partición de la unidad** en X si para cada $x \in X$ se cumple que $f_\alpha(x) = 0$ excepto para un conjunto numerable de índices $F_x \subset I$, y*

$$\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1.$$

La prueba del Teorema A.4.1 recae en el siguiente lema.

Lema A.4.3 *Si u posee derivadas de orden m en Ω con todas ellas en $L^p_{loc}(\Omega)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $u - v \in W^{m,p}(\Omega)$ y $\|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$.*

Demostración. Definamos los conjuntos Ω_k mediante

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : \|x\| < k, \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\},$$

donde $k = 1, 2, \dots$. Por conveniencia definiremos $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$. Observe que $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, para $k = -1, 0, 1, 2, \dots$.

Ahora sea (ψ_k) una partición de la unidad en Ω tal que

$$\text{sop}(\psi_k) \subset \Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

También, sea (ρ_k) una sucesión de funciones regularizantes que satisfacen las siguientes condiciones

- (1) $\text{sop}(\rho_k) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1/(k+1)(k+2)\}$, y
- (2) $\|\rho_k * \psi_k u - \psi_k u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon/2^{k+1}$, para $k = 1, 2, \dots$

Afirmación: $\text{sop}(\rho_k * \psi_k u) \subset \Omega_{k+2} \setminus \Omega_{k-2}$.

Sabemos que $\text{sop}(\psi_k u) \subset \Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}$. Entonces por el Lema A.1.7

$$\text{sop}(\rho_k * \psi_k u) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}) < 1/(k+1)(k+2)\}.$$

Tomemos $x \in \text{sop}(\rho_k * \psi_k u)$, $y \in \Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}$ y $z \in \partial\Omega$. Como $y \in \Omega_{k+1}$, $\|y\| < k+1$ y $\text{dist}(y, \partial\Omega) > 1/(k+1)$, entonces

- i) $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \leq k+1 + 1/(k+1)(k+2) < k+2$,
- ii) $\|x - z\| \geq \|z - y\| - \|x - y\| > 1/(k+1) - 1/(k+1)(k+2) = 1/(k+2)$.

Esto muestra que $\text{sop}(\rho_k * \psi_k u) \subset \Omega_{k+2}$.

Sea $k > 2$. Veremos que $\text{sop}(\rho_k * \psi_k u) \not\subset \Omega_{k-2}$, como $y \notin \Omega_{k-2}$ se cumple alguna de las siguientes afirmaciones

- a) $\|y\| \geq k-1$, entonces para $x \in \text{sop}(\rho_k * \psi_k u)$

$$\|x\| \geq \|y\| - \|x - y\| > k-1 - 1/(k+1)(k+2) > k-2,$$

- b) $\text{dist}(y, \partial\Omega) \leq 1/(k-1)$, entonces para $x \in \text{sop}(\rho_k * \psi_k u)$, $z \in \partial\Omega$

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < 1/(k+1)(k+2) + 1/(k-1).$$

Por cálculo directo se obtiene que

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k-1)} < \frac{1}{(k-2)}.$$

Esto significa que $\text{sop}(\rho_k * \psi_k u) \not\subseteq \Omega_{k-2}$, lo cual muestra la afirmación.

▲ Afirmación

Por esto, la serie

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_k * \psi_k u)(x)$$

converge para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y define una función en $C^\infty(\Omega)$. Finalmente, eligiendo $N = 1, 2, \dots$ tenemos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega_N)} &= \left\| \sum_{k=1}^{N+1} (\rho_k * \psi_k u - \psi_k u) \right\|_{W^{m,p}(\Omega_N)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{N+1} \|\rho_k * \psi_k u - \psi_k u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, el resultado se sigue del Teorema de convergencia monótona de Lebesgue. ■

Apéndice B

Kernel de operadores de la clase de traza

Durante este capítulo $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert separable. Comenzaremos definiendo lo que es un operador de Hilbert-Schmidt, y presentaremos algunas propiedades de estos operadores.

B.1. Operadores de Hilbert-Schmidt

Definición B.1.1 Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tenemos las siguientes definiciones.

- (a) Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Definimos $\text{tr} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, la traza de T , mediante

$$\text{tr}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

- (b) Definimos el valor absoluto de T como

$$|T| := \sqrt{T^*T}.$$

- (c) Diremos que T es un operador de la **clase de traza** si y solo si

$$\text{tr}|T| < \infty,$$

denotando la familia de operadores de la clase de traza por $L_1(\mathcal{H})$.

- (d) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Diremos que T es un operador de **Hilbert-Schmidt** si y solo si

$$\text{tr}(T^*T) < \infty.$$

Denotaremos la familia de operadores de Hilbert-Schmidt sobre $\mathcal{H}$ por $L_2(\mathcal{H})$.

Proposición B.1.2 Para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se tienen las siguientes equivalencias

- 1) $T \in L_2(\mathcal{H})$,
- 2) $T^*T = |T|^2 \in L_1(\mathcal{H})$,
- 3) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T\varphi_n\| < \infty$, esto para cualquier base ortogonal $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$.

Demostración. Se sigue inmediatamente de las definiciones. ■

El siguiente lema nos dice que los operadores de rango finito pertenecen a $L_2(\mathcal{H})$.

Lema B.1.3 $L_1(\mathcal{H}) \subset L_2(\mathcal{H})$

Demostración. Se sigue del lema anterior. ■

El siguiente teorema es un resultado clásico, y lo presentaremos sin demostración.

Teorema B.1.4 *Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_2$ -densos en $L_2(\mathcal{H})$, con*

$$\|T\|_2 := \text{tr}(T^*T) = \text{tr}|T|^2.$$

B.2. Kernel de un operador de Hilbert-Schmidt

Durante esta sección el par (M, μ) representará un espacio de medida σ -finito.

Lema B.2.1 *Sea $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ entonces el operador A_K está bien definido y $\|A_K\| \leq \|K\|_{L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)}$, donde*

$$A_K : L^2(M, \mu) \longrightarrow L^2(M, \mu),$$

actuando de la siguiente forma

$$(A_K\varphi)(x) := \int_M K(x, y)\varphi(y)d\mu(y), \quad \forall \varphi \in L^2(M, \mu).$$

Demostración. Sea $f(x, y) = |K(x, y)|^2$, $f : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Por hipótesis K pertenece a $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ y por el Teorema de Fubini, existe un conjunto $\Omega \subset M$ con $\mu(\Omega) = 0$, tal que

$f(x, \cdot) \in L^1(M, \mu)$ para todo $x \in M \setminus \Omega$. Esto significa que $|K(x, \cdot)|^2 \in L^1(M, \mu)$, lo cual implica $K(x, \cdot) \in L^2(M, \mu)$, es decir

$$\left(\int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} < \infty,$$

esto para $x \in M \setminus \Omega$ y en consecuencia para estos $x \in M \setminus \Omega$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_M K(x, y)\varphi(y)d\mu(y) \right| &\leq \int_M |K(x, y)||\varphi(y)|d\mu(y) \\ &\leq \left[\int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right]^{1/2} \left[\int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

esta última desigualdad por Cauchy-Schwarz. Se sigue

$$\left| \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y) \right|^2 \leq \int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y)$$

y

$$\int_M \left| \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \leq \int_M \int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y),$$

es decir,

$$\int_M |A_K \varphi(x)|^2 d\mu(x) \leq \int_{M \times M} |K(x, y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y).$$

Esta desigualdad muestra que $A_K \in L^2(M, \mu)$ y que $\|A_K \varphi\|_2^2 \leq \|K\|_2^2 \|\varphi\|_2^2$. ■

Lema B.2.2 Si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(M, \mu)$, entonces $\{\overline{\varphi_n} \varphi_m\}$ es una base ortonormal para $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$.

Demostración. Veremos primero la ortonormalidad. Como

$$\int_{M \times M} \overline{\varphi_n(x) \varphi_m(y)} \varphi_r(x) \overline{\varphi_s(y)} d(\mu \otimes \mu) = \int_M \overline{\varphi_n(x) \varphi_r(x)} d\mu(x) \int_M \varphi_m(y) \overline{\varphi_s(y)} d\mu(y),$$

se sigue que

$$\langle \overline{\varphi_n} \varphi_m, \varphi_r \overline{\varphi_s} \rangle_{M \times M} = \langle \varphi_n, \varphi_r \rangle \langle \varphi_s, \varphi_m \rangle = \delta_{n,r} \delta_{m,s}.$$

Para verificar que es completo, sea $f(x, y) \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ tal que

$$\int_{M \times M} \overline{\varphi_k(x) \varphi_l(y)} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0.$$

Por el Teorema de Fubini, la integral anterior puede escribirse como

$$\int_M \left(\int_M \overline{\varphi_k(x) f(x, y)} d\mu(x) \right) \varphi_l(y) d\mu(y),$$

y al tener $\{\varphi_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2(M, \mu)$ resulta

$$\int_M \overline{\varphi_k(x) f(x, y)} d\mu(x) = 0,$$

excepto para $y \in S_k \subset M$ con $\mu(S_k) = 0$ y así, para $y \notin S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ con $\mu(S) = 0$, se tiene

$$\int_M \overline{\varphi_k(x) f(x, y)} d\mu(x) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in M \setminus S.$$

Ahora, como $\{\overline{\varphi_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(M, \mu)$, obtenemos que $f(x, y) = 0$ μ -c.d. En consecuencia $f(x, y) = 0$, $\mu \times \mu$ -c.d.

$$\|f\|_2^2 = \int_{M \times M} |f(x, y)|^2 d(\mu \otimes \mu) = \int_M \left(\int_M \chi_{M \setminus S} |f(x, y)|^2 d\mu \right) d\mu = 0.$$

■

Corolario B.2.3 *Todo $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ puede escribirse como*

$$K(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m} \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(y),$$

donde $\alpha_{n,m}$ son los coeficientes de Fourier en $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$, dados por

$$\alpha_{n,m} = \langle A_K \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(M, \mu)}.$$

Demostración. Por el lema anterior $\{\overline{\varphi_n} \varphi_m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $L^2(M \times M)$, y los coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} \langle \overline{\varphi_n} \varphi_m, K \rangle_{L^2(M \times M)} &= \int_{M \times M} K(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d(\mu \otimes \mu) \\ &= \int_M \int_M K(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_M \left[\int_M K(x, y) \varphi_n(x) d\mu(x) \right] \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\ &= \int_M (A_K \varphi_n)(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\ &= \langle \varphi_m, A_K \varphi_n \rangle_{L^2(M, \mu)} = \alpha_{n,m}. \end{aligned}$$

■

Corolario B.2.4 *Para todo $K \in L^2(M \times M)$ el operador $A_K : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ tal que*

$$(A_K \varphi)(x) = \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y)$$

está en $L^2(L^2(M))$ y $\|A_K\|_2 = \|K\|_{L^2(M \times M)}$.

Demostración. Calcularemos la norma de A_K en $L^2(L^2(M))$,

$$\begin{aligned} \|A_K\|_2^2 &= \text{tr}(A_K^* A_K) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|A_K \varphi_n\|_{L^2(M)}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A_K \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(M)}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{n,m}|^2 \\ &= \|K\|_{L^2(M \times M)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

pues $K \in L^2(M \times M)$.

Entonces, $A_K \in L^2(L^2(M))$ y $\|A_K\|_2 = \|K\|_{L^2(M \times M)}$. ■

Terminamos con un teorema que caracteriza a los operadores de Hilbert-Schmidt.

Teorema B.2.5 *Sea $\mathcal{H} = L^2(M, \mu)$. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de Hilbert-Schmidt si y solo si existe una función $K \in L^2(M \otimes M, \mu \times \mu)$ tal que*

$$(A\varphi)(x) = \int_M K(x, y)\varphi(y)d\mu(y), \quad \forall \varphi \in \mathcal{H},$$

y además $\|A\|_2^2 = \int_{M \times M} |K(x, y)|^2 d(\mu \otimes \mu)$.

Demostración. Por el corolario anterior sabemos que la asignación $K \mapsto A_K$ es una isometría de $L^2(M \times M)$ en $L_2(\mathcal{H})$, así que su rango es cerrado.

A continuación mostraremos que los operadores de rango finito están en ese rango y, por la densidad de éstos en $L_2(\mathcal{H})$, el rango es todo $L^2(\mathcal{H})$.

Sea $R = |\xi\rangle\langle\eta|$, con $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Tenemos que $K_R(x, y) = \xi(x)\overline{\eta(y)}$, así $K_R \in L^2(M \times M)$ pues

$$\begin{aligned} \|K_R\|_{L^2(M \times M)}^2 &= \|\xi\bar{\eta}\|_{L^2(M \times M)}^2 = \int_{M \times M} |\xi(x)\overline{\eta(y)}|^2 d(\mu \otimes \mu) \\ &= \int_M |\xi(x)|^2 d\mu(x) \int_M |\eta(y)|^2 d\mu(y) = \|\eta\|_{\mathcal{H}}^2 \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned} (A_{K_R}\varphi)(x) &= \int_M \xi(x)\overline{\eta(y)}\varphi(y)d\mu(y) = \xi(x) \int_M \overline{\eta(y)}\varphi(y)d\mu(y) \\ &= \langle\eta, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} \xi(x) = (|\xi\rangle\langle\eta|\varphi)(x). \end{aligned}$$

Por último, como los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_2$ -densos y el rango es cerrado obtenemos lo deseado. ■

Bibliografía

- [1] Alazzawi, S. and Baumgartner, B. *Generalized Kraus operators and generators of quantum dynamical semigroups*. Rev. Math. Phys. 27 (2015), no. 7, 1550016, 19 pp.
- [2] Androulakis, G. and Ziemke, M., *Generators of quantum Markov semigroups*, J. Math. Phys. 56, 083512 (2015)
- [3] Arverson, W. *The Domain Algebra of a CP-semigroups*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 203, No. 1, pp. 67-77
- [4] Bhat, R., Fagnola, F. and Sinha, B. *On quantum extensions of semigroups of brownian motion on an half-line*. Russian J. Math. Phys. 4 (1996), 13-28.
- [5] Bratteli, O. and Robinson, D. W. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* 1-2, Ed. Springer, 1987, second edition.
- [6] Brezis, H. *Functional analysis, Sovolev spaces and partial diferential equations*. Ed. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] Chevotarev, A.M. and Fragnola, F. *Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups*. J. Funct. Anal. 153 (1998), 382-404.
- [8] Christensen E. and Evans, D.E., *Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups*, J. London Math. Soc. 20 (2), 358–368, 1979.
- [9] Clapp, M. *Análisis Matemático*, Instituto de Matemáticas UNAM, 2013.
- [10] Fagnola, F. *A simple singular quantum Markov semigroup*, Stochastic Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Boston, MA, 2000.
- [11] Fagnola, F. *Quantum Markov semigroups and quantum flows*, Proyecciones, 1999.
- [12] Fagnola, F. and Rebolledo, R. *The approach to equilibrium of a class quantum dynamical semigroups*. Infinite dimensional analysis and quantum probability, World Scientific Publishing Company Vol. 1, No. 4, 561-572, 1998.
- [13] García, J.C. *Una Clase de Transformaciones Completamente Positivas no Acotadas y Conservatividad de la Solución Minimal de la Ecuación Maestra*, tesis de doctorado, UAM-Iztapalapa, 1998.

- [14] Gorini, V., Kossakowski, A., and Sudarshan, E. C. G., *Completely positive dynamical semigroups of N -level systems*, J. Math. Phys. 17, 821 (1976).
- [15] Hochstadt, H. *The Functions of Mathematical Physics*, Ed. Dover Pubs., NY, 1986.
- [16] Holevo, A. S. Excessive maps, "arrival times" and perturbations of dynamical semigroups, Izvestiya: Mathematics **59** (6), 1311-1325 (1995).
- [17] Holevo, A. S. *On singular Perturbations of Quantum Dynamical Semigroups*, Mathematical Notes, 2018, Vol. 103, No. 1 pp. 133-144
- [18] Holevo, A. S. Uspekhi Mat. Nauk 51 (1996), no. 6(312), 225-226.
- [19] Ingarden, R. S. and Kossakowski, A., *On the connection of nonequilibrium information thermodynamics with non-Hamiltonian quantum mechanics of open systems*, Ann. Phys. 89, 451-485 (1975).
- [20] Kato, T. *Perturbation theory for linear operators*, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [21] Kossakowski, A., *On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems*, Rep. Math. Phys. 3, 247-274 (1972).
- [22] Lindblad, G., *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. 48, 119-130 (1976).
- [23] Meyers, N.G. and Serrin, J. " $H = W$ ", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 51 (1964), 1055-1056.
- [24] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [25] Royden, H.L. and Fitzpatrick, P.M. *Real analysis*, Ed. Pearson education, fourth edition, 2010.
- [26] Takesaki, M. *Theory of operator algebras I*, Ed. Springer, segunda reimpresión de la primera edición de 1979.
- [27] Weidmann, J. *Linear operators in Hilbert spaces*. Ed. Springer, 1980.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00204

Matrícula: 2173802163

El álgebra dominio de un
semigrupo Completamente
Positivo

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 15:00 horas del día 9 del mes de julio del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA
DRA. JUDITH CAMPOS CORDERO
DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: LUIS DANIEL REGALADO HERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

REMSÓ

MTRA. ROSALVA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA

VOCAL

DRA. JUDITH CAMPOS CORDERO

SECRETARIO

DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN