
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Mundos Membrana Tipo de Sitter

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física) presenta:

Fís. Gastón de los Santos de los Santos

Asesor

Dr. Román Linares Romero

Sustentación de tesis: viernes 28 de junio de 2013, 13:00 hrs.

Índice general

Contenido	I
Introducción	III
1. Dimensiones extras	1
1.1. Dimensiones extras a la Kaluza-Klein (KK)	2
1.2. Localización sobre defectos topológicos	5
1.3. Dimensiones extras (grandes) a la (ADD)	7
1.4. Modelo de Randall-Sundrum I (RSI)	10
1.4.1. Jerarquía exponencial	13
1.5. Modelo RS II	15
1.6. Otros mundos brana	17
1.6.1. Branas delgadas	17
1.6.2. Branas gruesas	18
2. Espacios máximamente simétricos	21
2.1. Simetrías y vectores de Killing	21
2.2. Homogeneidad e isotropía de un espacio máximamente simétrico	23
2.3. Espacios de curvatura constante	24
2.3.1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n	24
2.3.2. La esfera n-dimensional S^n	26
2.3.3. El espacio de Minkowski n-dimensional \mathbb{M}_n	28
2.3.4. Espacios hiperbólicos n-dimensionales \mathbb{H}_n	30
2.3.4.1. Hiperboloide n-dimensionales de escalar de curvatura $R > 0$	30
2.3.4.2. Hiperboloide n-dimensional con escalar de curvatura $R < 0$.	33

3. Espacio-tiempo de Sitter (dS)	35
3.1. Soluciones máximamente simétricas a las ecuaciones de Einstein	35
3.2. De Sitter como un hiperboloide en $(n+1)D$	36
3.3. De Sitter en diferentes coordenadas	37
3.3.1. Coordenadas globales (τ, θ_i) , $i = 1, 2, \dots, n - 1$	37
3.3.2. Coordenadas conformes (T, θ_i) , $i = 1, \dots, n - 1$	38
3.3.3. Coordenadas planas (t, x^i) , $i = 1, \dots, n - 1$	40
3.3.4. Coordenadas estáticas (t, r, θ_a) , $a = 1, \dots, n - 2$	43
3.4. Geodésicas	45
3.4.1. Coordenadas globales	45
3.4.2. Coordenadas conformes	47
3.4.3. Coordenadas planas	49
3.4.4. Coordenadas estáticas	52
3.5. Diagramas de Penrose	56
3.5.1. Diagrama de Penrose del Espacio-tiempo de Minkowski	56
3.5.2. Diagrama de Penrose del Espacio-tiempo de Sitter	58
4. Mundos membrana tipo de Sitter y localización de un campo escalar	61
4.1. Brana dS_4 encajada en dS_5	62
4.2. Membrana gruesa espacialmente plana ($\kappa = 0$)	63
4.2.1. Coordenadas conformes	63
4.2.2. Métrica deformada	65
4.2.3. La métrica conforme a dS_5	67
4.2.4. De la membrana dS_4 encajada en dS_5 a RSII	68
4.2.5. Localización de un campo escalar	69
4.3. Membrana delgada dS_4	72
4.3.1. Membrana espacialmente plana ($\kappa = 0$)	72
4.3.2. Membrana con curvatura espacial constante ($\kappa \neq 0$)	74
Conclusiones	75
Bibliografía	77

Introducción

Existen muchos enigmas físicos esperando por una respuesta satisfactoria y falta mucho camino por recorrer si nuestro objetivo es tener una teoría que describa de manera completa y coherente al Universo en toda su complejidad. Actualmente el modelo estándar de partículas y el Modelo Estándar cosmológico son las mejores teorías físicas que tenemos para describir y entender, a pequeña y grandes escalas nuestro Universo. No obstante su éxito, es importante recordar que los modelos presentan aspectos y resultados incompletos, por lo que cabe la posibilidad de que en el futuro surjan observaciones y avances teóricos que incorporen ideas y planteamientos no convencionales que nos permitan entender el Universo. Esta esperanza se basa en el importante número de nuevas observaciones experimentales que se están realizando tanto en física de partículas como en cosmología, entre las que se encuentran: los experimentos del LHC en el CERN, las mediciones de la radiación cósmica de fondo por Planck, la nucleosíntesis, las supernovas Ia y las rotaciones galácticas, entre otros y la posibilidad de que estos experimentos puedan guiar la investigación actual.

Desde el punto de vista teórico uno se pregunta qué ideas e hipótesis nos pueden permitir resolver alguno de los problemas que enfrenta la física como: el problema de jerarquía, el de la energía oscura, el de la materia oscura, etc. Una de las ideas posibles es la de dimensiones espaciales extras. La premisa detrás de esta idea es sencilla y consiste en pensar que vivimos en un Universo de aparentemente una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales, pero que sin embargo puede ser que el universo tenga efectivamente, un espacio de alta dimensionalidad, solamente que nos encontramos limitados en nuestra capacidad para experimentar y comprender todas estas dimensiones. Históricamente las dimensiones extras han sido objeto de estudio desde que Gunar Nordström introdujo la idea hace 99 años [1] y después de que Theodor Kaluza y Oskar Klein la reintrodujeron en la década de los 1920 [2], con el objetivo fallido de unificar la Relatividad General de Einstein y la teoría electromagnética de Maxwell. El surgimiento de la teoría de supercuerdas en la década de los años 70, generó una actividad considerable en el estudio de las consecuencias de las dimensiones extras, ya que esta teoría está definida de manera natural en espacios-tiempo de 10-dimensiones. Con el paso del tiempo, el interés de los científicos se ha extendido a modelos inspirados en la teoría de cuerdas aunque no necesariamente relacionados con ésta. Como consecuencia de la intensa actividad de investigación en este campo, a menudo escuchamos conceptos tales como: cuerdas, membranas, dimensiones extras, compactificaciones, orbifolios, universos

paralelos, multiuniversos, etc. Todos estos elementos e ideas emergentes brindan la posibilidad de aproximarnos a un conocimiento más amplio de la física-matemática, por ello debemos mantener la mente abierta a todos estos conceptos hasta que los experimentos y datos observacionales determinen si los modelos de dimensiones extras se ajustan en alguna medida a la descripción del Universo.

Hasta antes de 1998 las dimensiones extras fueron introducidas en la física a la Kaluza-Klein (KK). Para que las dimensiones extras de KK sean compatibles con la física observable, es necesario que éstas sean muy pequeñas, del orden de la longitud de Planck 10^{-33} cm., sin embargo después de la aparición del artículo [3] El problema de jerarquía y nuevas dimensiones a un milímetro de los autores Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos y Gia Dvali (ADD), hubo un tremendo interés por entender las consecuencias que la idea de las dimensiones extras grandes pudieran tener en la física. La premisa básica del modelo ADD es suponer que nuestro Universo 4D (3-brana) es una subvariedad de un espacio-tiempo de mayor dimensión, por ejemplo de 6D, y que la materia está confinada a la 3-brana mientras que la interacción gravitacional permea el espacio-tiempo de mayor dimensionalidad, o dicho de otra manera, que la interacción gravitacional es la única que tiene acceso a las dimensiones extras. En este modelo se habla de dimensiones extras grandes porque como el título del artículo lo indica, las dimensiones extras en este modelo pueden ser del orden de decimas de milímetros, esto es, 10^{-33} ordenes de magnitud más grandes que el tamaño típico de las dimensiones extras de Kaluza-Klein. Este modelo permite también reformular el problema de jerarquía en términos del tamaño de las dimensiones extras. Cabe señalar que aunque el modelo ADD no está necesariamente relacionado con la teoría de cuerdas, si está inspirado en las propiedades de algunos objetos definidos de manera natural en la teoría de cuerdas, como lo son las D-branas. Este tipo especial de branas son superficies donde viven los extremos de cuerdas abiertas y como consecuencia, tienen la propiedad de que la materia está confinada a estas superficies. Poco después de la aparición del modelo ADD aparecieron varias otras construcciones similares, destacándose entre ellas los llamados modelos de Randall-Sundrum (RS). El modelo de Randall-Sundrum I (RSI) [4] consiste de dos 3-branas planas (métrica de Minkowski) encajadas en un espacio anti de Sitter 5-dimensional (AdS5). La dimensión espacial extra tiene la topología de un orbifold S^1/Z_2 y las dos membranas están situadas en los puntos fijos de este orbifold. Este modelo tiene varias virtudes interesantes, entre ellas: es solución de las ecuaciones de Einstein 5D con constante cosmológica $\Lambda < 0$ y replantea al igual que el modelo ADD el problema de jerarquía en términos del tamaño de la dimensión extra. El modelo de Randall-Sundrum II (RSII) [5] es un modelo en donde sólo existe una 3-brana plana encajada en AdS5 y puede pensarse como un caso límite del modelo RSI en donde una brana es mandada al infinito, como consecuencia, la dimensión extra es de tamaño infinito. Los modelos RS son modelos típicos de lo que la gente refiere como mundos membrana y en particular algunos utilizan el adjetivo membranas delgadas para enfatizar que las membranas se introducen explícitamente como funciones de distribución delta de Dirac en la acción, localizándolas en algún punto de la dimensión extra. En contraste, existen también modelos de mundos membrana denominados membranas gruesas o gordas, en estos modelos

la membrana aparece como una pared de dominio o en general como un defecto topológico de la teoría hiper-dimensional y por tanto está asociada a un campo, típicamente a un campo escalar, aunque no exclusivamente. En la literatura a menudo se dice que la membrana está hecha del campo al que está asociado el defecto topológico y su gordura está asociada al tamaño característico no nulo del defecto. A nivel de la métrica la diferencia fundamental entre el modelo de KK y los modelos de mundos brana tipo RS es que en el primer caso el espacio-tiempo es factorizable en la forma: mundo $4D \times$ dimensiones extras, mientras que en los mundos brana la métrica no es factorizable ya que la parte de la métrica $4D$ está multiplicada por un factor llamado warping factor o factor de doblamiento que depende de las dimensiones extras.

Al reconocerse las fuentes de las propiedades tan importantes de los modelos RS, la gente se preguntó inmediatamente por posibles generalizaciones del modelo o construcciones análogas. Una posibilidad utiliza la idea de espacios encajados en otros espacios de mayor dimensión. Por ejemplo, el modelo RSII se puede visualizar como una 3-brana plana encajada en AdS_5 . Ambos espacios son máximamente simétricos, entonces uno se puede preguntar que otros espacios máximamente simétricos se pueden encajar en un espacio máximamente simétrico de dimensión mayor. De las diferentes posibilidades que existen, en este trabajo estamos interesados en un mundo brana tipo de Sitter (dS) el cual consiste en encajar una membrana con geometría dS_4 en un espacio-tiempo dS_5 . Esta idea fue investigada en 2002 [7, 8], pero sólo recientemente se han reconocido propiedades importantes del modelo al investigarlo con mayor detalle [9, 10, 11]. La construcción ha sido realizada en las versiones de membrana delgada y gruesa y conserva muchas de las características importantes del modelo RSII. El interés físico en esta construcción está relacionado con las observaciones de supernovas que nos llevaron a la conclusión de que nuestro Universo se está expandiendo de manera acelerada [12, 13] y el espacio más sencillo que nos genera un universo en expansión es el espacio dS , el cual por cierto, es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica positiva. Dado que en los mundos brana, nuestro universo es representado por la 3-brana, existen mejores posibilidades de describir el comportamiento cosmológico de nuestro universo, si la membrana está dotada de una constante cosmológica positiva.

El objetivo principal de esta tesis es presentar las características importantes de los mundos brana tipo dS y compararlos con las características correspondientes del modelo RSII. Para ello se ha dividido el trabajo en 4 capítulos. En el capítulo 1 se hace un repaso de la idea de las dimensiones extras. Se comienza discutiendo las dimensiones extras *á la* Kaluza-Klein y se analizan las características básicas del modelo. A continuación se discute la idea de localización de campos en una pared de dominio, la cual constituye uno de los dos pilares del modelo ADD. Posteriormente se revisan los modelos membrana más conocidos: ADD, RSI y RSII y se discuten sus propiedades. El capítulo finaliza con una discusión de otras construcciones posibles de mundos brana. Dado que mayoritariamente los modelos de mundos brana están formulados en espacios máximamente simétricos, el capítulo 2 está dedicado a presentar las ideas básicas de estos espacios. En el capítulo 3 nos especializamos en el espacio máximamente simétrico con curvatura positiva y

signatura Lorentziana, esto es, el espacio de Sitter. Se analiza este espacio en diferentes coordenadas (globales, conformes, planas y estáticas), se estudian las geodésicas así como sus diagramas de Penrose. De particular importancia es la sección donde se presenta la relación del espacio dS con la métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker. La construcción del mundo brana dS se presenta y discute en el capítulo 4, se comienza planteando la acción del modelo y se encuentran soluciones tanto de membrana delgada como de membrana gorda. Se exponen en detalle las diferentes posibilidades para encajar una membrana dS_4 en dS_5 , como se verá, estas posibilidades están asociadas a la curvatura κ de las 3 dimensiones espaciales en la métrica dS_4 . El caso $\kappa = 0$ es el que mejor se conoce en la literatura, este caso permite soluciones de membrana delgada y gruesa, y muy recientemente se presentó el estudio de la localización de los campos de espín: 0, 1/2 y 1 en el caso de membrana gruesa [14]. En este trabajo a manera de ejemplo se discute el caso de la localización del campo escalar. En el capítulo también se estudia el modelo en el caso $\kappa \neq 0$. El trabajo finaliza con la sección de conclusiones.

1

Dimensiones extras

Dentro del marco de las teorías convencionales permanecen muchas interrogantes sin respuesta. ¿En que marco o contexto existen 4, 9 o 25 dimensiones espaciales? ¿Por qué el valor de la constante cosmológica es tan pequeño? ¿Qué sucedió realmente en el Big Bang? ¿Cuál será el destino del Universo? Estas y muchas otras cuestiones surgen de la observación y del análisis del comportamiento del Universo y nos dan motivo para introducir y estudiar nuevas ideas que nos ayuden a responder estas interrogantes, en particular a lo largo de los años los físicos han introducido en este contexto la idea de dimensiones extras.

Percibimos un Universo con una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales, puede ser sin embargo que el Universo esté descrito efectivamente por un espacio de alta dimensionalidad, solamente que nos encontramos limitados en nuestra capacidad para experimentar y entender todas estas dimensiones. Las teorías de dimensiones extras y en particular los llamados modelos de mundos brana son un camino posible para aproximarnos al entendimiento de la gravedad, sin abandonar la relatividad general de Einstein. Además el paradigma de los mundos brana permite construir modelos que hacen posible incorporar las restricciones físicas del modelo estándar de partículas (ver por ejemplo [15] y referencias allí citadas), del modelo estándar de la cosmología (ver por ejemplo [16] y referencias allí citadas), y entre muchas otras cosas permite realizar una propuesta a la solución de problemas como: el de jerarquía, el de la constante cosmológica, el de materia y de energía oscura, entre otros. El estudio de los modelos de mundos brana ha llegado a ser un tema muy fructífero, involucrando varias áreas de la física teórica. Es justo decir, sin embargo, que muchas de las líneas de investigación principales obedecen a ideas especulativas más que a hechos bien establecidos, no obstante, el estudio de los mundos brana es guiado por los principios de la física y de la consistencia matemática, y

por las posibilidad de conectar estos modelos con teorías más fundamentales, y así con experimentos en un futuro cercano.

En los modelos de mundos brana se considera un espacio-tiempo de altas dimensiones, con una topología particular, el cual es llamado el bulk (volumen) y las branas las constituyen hipersuperficies encajadas en el bulk, el cual es llamado "bulto", de forma tal que, en los modelos de branas, se asume que el Universo observable, descrito en buena aproximación por el modelo estándar de partículas y el modelo estándar cosmológico, queda restringido a la brana. En este capítulo haremos una revisión breve de las características principales de las diferentes formas en que se consideran a las dimensiones extras: la idea de Kaluza-Klein (KK) y los modelos de mundos brana ADD, RSI y RSII.

1.1. Dimensiones extras a la Kaluza-Klein (KK)

El primer registro que se tiene de la idea de dimensiones extras se debe al físico Finlandés Gunnar Nordström en 1914 [1]. En esos años dos de los problemas relevantes en física eran: 1) construir una teoría de la gravitación consistente con la Relatividad Especial y 2) construir una teoría unificada de la gravitación y la electrodinámica. Nordström trabajó arduamente en el primer problema, sin embargo no lo pudo resolver debido a que trabajó con una teoría escalar al igual que Newton, no obstante propuso una teoría de la gravitación escalar relativista. Una vez que tuvo esta teoría, Nordström trató de resolver el segundo problema, para ello consideró la teoría de Maxwell en un espacio de 5-dimensiones (5D) y requiriendo que los campos no dependieran de la coordenada espacial extra, obtuvo una teoría 4-dimensional que incluía la teoría de Maxwell y su teoría escalar de la gravitación.

Con el surgimiento de la Relatividad General de Einstein en 1916, la cual describe la interacción gravitacional de manera correcta a través de un tensor métrico, el primer problema quedó resuelto y algunos científicos concentraron sus esfuerzos en resolver el segundo. En este contexto Theodor Kaluza en 1919 y Oskar Klein en 1926 [2] propusieron una manera de unificar los campos electromagnético y gravitacional, al considerarlos campo gravitatorio de cinco dimensiones, de modo similar a como lo había hecho Nordström. Además, para obtener la física en el mundo 4D Nordström partió de una teoría electromagnética en 5D, mientras Kaluza y Klein lo hicieron a partir de un campo gravitatorio. Específicamente Kaluza y Klein partieron de la acción de Hilbert-Einstein de la Relatividad General en 5D

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_{(5)}} \int d^5x \sqrt{|g_{(5)}|} R_{(5)}, \quad (1.1)$$

donde $g_{(5)}$ denota el determinante de la métrica y $R_{(5)}$ es el escalar de curvatura del espacio-tiempo 5D, y consideraron que la topología del espacio-tiempo 5D está descrita por el producto directo: $\mathbb{M}_4 \otimes S^1$ donde \mathbb{M}_4 es una variedad pseudo-Riemanniana 4D y S^1 es un círculo de radio R . Si dividimos las coordenadas del espacio-tiempo 5D en la

forma $X^M = (x^\mu, R\theta)$ donde x^μ denota las coordenadas del espacio-tiempo 4D y θ es la coordenada angular de S^1 y por lo tanto satisface la condición de periodicidad $\theta = \theta + 2\pi$, es posible hacer un desarrollo en serie de Fourier de las componentes del tensor métrico en la dirección de la dimensión extra

$$g_{(5)MN}(x, R\theta) = \sum_n g_{(4)MN}^{(n)}(x)e^{in\theta}, \quad (1.2)$$

donde $g_{(4)MN}^{(n)}(x)$ denota el n -ésimo modo de Fourier, los cuales solo dependen de las coordenadas del espacio-tiempo 4D y por lo tanto se interpretan como campos en 4D. Es claro que como $n \in \mathbb{Z}$, hay un número infinito de estos campos. Como resultado se tiene que los modos con $n \neq 0$ están asociados con campos masivos, mientras que aquellos asociados con $n = 0$ son no masivos.

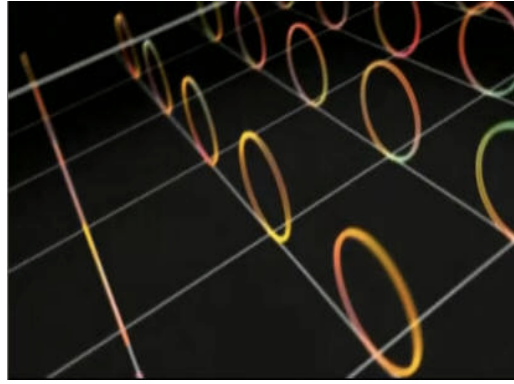


Figura 1.1: En esta figura se representa la topología del espacio-tiempo considerada por Kaluza y Klein. Cada punto de la red bidimensional representa un punto del espacio-tiempo de Minkowski 4D. En cada punto la cuarta dimensión espacial está representada por S^1 .

Con el objetivo de mantener la discusión tan simple como sea posible, mostremos la validez de esta afirmación en el caso de un campo escalar no masivo en 5D, para el cual la métrica es el producto directo de la métrica de Minkowski 4D y S^1 . En este caso la acción del campo escalar es

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x R d\theta \partial_M \Phi \partial^M \Phi, \quad (1.3)$$

durante todo este trabajo los índices griegos corren de 0 a $D - 1$, la signatura para el espacio-tiempo es $(-, +, +, \dots, +)$ y la velocidad de la luz es $c = 1$. El elemento de línea para este caso será

$$ds_{(5)}^2 = \eta_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + R^2 d\theta^2. \quad (1.4)$$

Debido a la topología del espacio-tiempo 5D podemos desarrollar el campo escalar en términos de la serie de Fourier

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_n \phi_n(x^\mu) e^{in\theta}. \quad (1.5)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. La ecuación de movimiento del campo escalar $\Phi(x^\mu, y)$ es la ecuación de Klein-Gordon 5D

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{1}{R^2} \partial_\theta^2 \right) \Phi(x^\mu, y) = 0, \quad (1.6)$$

con lo cual cada modo $\phi_n(x^\mu)$ satisface la ecuación

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - \frac{n^2}{R^2} \right) \phi_n(x^\mu) = 0. \quad (1.7)$$

Consecuentemente, cada modo de Kaluza-Klein (KK) se puede interpretar como un campo escalar 4D de masa $m_n = \frac{|n|}{R}$, lo cual muestra nuestra afirmación. Técnicamente a este procedimiento de ir de una teoría de dimensión mayor a una de dimensión menor se le llama *compactificación*. Queda claro entonces que al compactificar una teoría de campo escalar no masivo 5D, uno obtiene una teoría de un campo escalar no masivo 4D asociada al modo cero del desarrollo de Fourier, y un número infinito de campos escalares masivos conocidos como la torre de Kaluza-Klein, asociados a los modos restantes en el desarrollo en serie de Fourier. Si hacemos la compactificación al nivel de la acción (1.3) obtenemos

$$S = 2\pi R \sum_n \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n^* - \frac{|n|^2}{R^2} |\phi_n|^2 \right), \quad (1.8)$$

lo cual es consistente con la interpretación anterior. El factor de $2\pi R$ en la acción proviene de integrar en la coordenada $R\theta$ y corresponde al volumen de la dimensión extra. Adicionalmente es posible truncar de manera consistente en este caso la torre de Kaluza-Klein, y quedarse únicamente con el modo cero del campo, técnicamente a este procedimiento se le llama *reducción dimensional*.

Kaluza y Klein realizaron la reducción dimensional de la acción (1.1) y obtuvieron

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_{(4)}} \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} \left(R_{(4)} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (1.9)$$

donde la constante de Newton 4D está dada en términos de la 5D en la forma $G_{(4)} = \frac{G_{(5)}}{2\pi R}$. $g_{(4)}$ denota el determinante de la métrica del espacio-tiempo 4D y $R_{(4)}$ es el escalar de curvatura 4D. Si uno impone el valor $\phi = 0$ entonces uno obtiene una acción que solo involucra las acciones de Hilbert-Einstein y Maxwell en 4D, sin embargo es posible mostrar que esta elección es inconsistente y uno irremediamente tiene que considerar el campo escalar ϕ en la teoría 4D. Es necesario imponer que $\phi > 0$ para obtener el signo correcto relativo al término de la acción de Einstein-Maxwell. Esto significa que la quinta dimensión sea tipo espacio. Tal restricción de Kaluza conduce a dificultades tanto para la ecuación del campo escalar como para la traza de la ecuación de Einstein.

La reducción dimensional es consistente a bajas energías $E \ll 1/R$, ya que en este caso solamente los campos sin masa contribuyen significativamente a la acción 4D, mientras que a energías $E \gg 1/R$ las dimensiones extras (si existen) se pueden manifestar. Dado que no hay evidencia experimental de la existencia de la torre de KK para

partículas ordinarias (electrones, fotones, etc.) la escala de energía $1/R$ debe ser por lo menos algunos cientos de GeV según los resultados experimentales del Modelo Estándar, así que el tamaño de las dimensiones extras á la KK debe ser tal que $R \approx 10^{-35} m$. A pesar de ser una idea revolucionaria, el mecanismo de KK no prosperó, en parte por la ausencia de aplicaciones realistas. Una forma de salir de esta restricción fue sugerida en 1998 por Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, Gia Dvali (lo que llevó al modelo ADD) [3], basado en una idea formulada en 1983 por Valerij A. Rubakov y Mikhail E. Shaposhnikov [17] y que revisamos brevemente en la sección siguiente como preparativo al modelo ADD.

1.2. Localización sobre defectos topológicos

Una serie de ideas que ahora constituyen uno de los pilares del paradigma de las dimensiones extras surgieron y fueron desarrolladas en las décadas de los 80 y 90 del siglo pasado por diferentes científicos, entre ellos dos artículos destacados se deben a Akama [18] y Visser [19]. La idea consiste en localizar materia sobre defectos topológicos y fue formulada, en la forma más clara por Rubakov y Shaposhnikov [17], en el artículo titulado “¿Vivimos dentro una pared de dominio?” En esta sección discutiremos de manera general esta idea siguiendo la presentación hecha en [20].

Por conveniencia explicaremos la esencia de esta idea en un modelo simplificado donde suponemos que “nuestro” mundo es $(2+1)$ -dimensional, mientras que la coordenada z es pensada como una “dimensión extra”. Supongamos que la teoría bajo este estudio tiene un número discreto de vacíos degenerados los cuales están etiquetados por diferentes valores de un parámetro de orden. Elijamos dos de estos vacíos arbitrariamente y llamémoslos vacíos I y II (ver Fig. (1.2)). Existe una configuración de campo estático, una pared de dominio, la cual divide el espacio 3D en dos partes, digamos por ejemplo que al lado izquierdo de la pared el sistema está en el vacío I, mientras que al lado derecho el sistema se encuentra en el vacío II. La pared de dominio representa un dominio de transición y es topológicamente estable. Una vez creada, ésta no puede ser destruida. La anchura δ de la pared de dominio depende de los detalles de la teoría en consideración. A distancias $\gg \delta$ podemos ver a la pared de dominio como una superficie 2D.

Es posible excitar la configuración de campo que describe la pared de dominio al desplazar la pared a cierto punto o transfiriendo energía de alguna otra forma. Todas las excitaciones posibles caen de manera natural en dos categorías. Algunas de ellas están localizadas sobre la pared (su extensión espacial en la dirección perpendicular es del orden de δ). Estas son usualmente asociadas con *modos cero*. Desde el punto de vista $(1+2)D$, los modos cero representan partículas no masivas que se pueden propagar únicamente a lo largo de la superficie de la pared. El otro tipo de excitaciones están deslocalizadas y pueden escapar de la pared (esto es, se pueden propagar en la dirección perpendicular). Estas excitaciones están representadas por modos *no-cero* con valores propios de energía típicos del orden de $1/\delta$. Desde el punto de vista $(1+2)D$ cada modo no-cero representa

una partícula con masa $M_n \sim 1/\delta$.

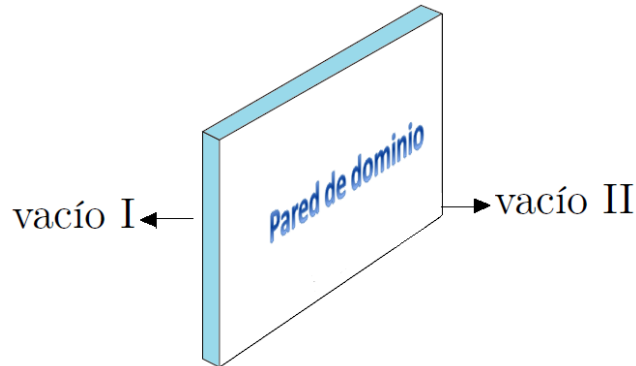


Figura 1.2: Ilustración de una pared de dominio separando dos vacíos degenerados.

Si suponemos que toda la materia que vemos a nuestro alrededor está hecha de los modos cero atrapados sobre la superficie de la pared de dominio, entonces “nuestro mundo” estará confinado a la pared y será efectivamente $(1+2)D$. Para poder descubrir la tercera dimensión espacial (perpendicular) un observador hecho de los modos cero tendrá que tener acceso a energías mayores a $1/\delta$.

Toda esta historia suena similar a la discutida en la sección 1.1, para el modelo de Kaluza-Klein, sin embargo una distinción obvia entre el modelo de KK y la localización sobre la pared de dominio (u otro defecto topológico) es la escala de masa de los modos excitados. En el modelo KK las masas están relacionadas al inverso del tamaño de una dimensión extra, mientras que en el caso de las paredes de dominio la dimensión extra es infinita y la escala de masa está determinada por el inverso de la anchura de la pared. Esta distinción resulta crucial en las aplicaciones físicas.

La existencia de al menos un modo cero es fácil de demostrar. De hecho, la teoría bajo consideración tiene invariancia traslacional en las 3 direcciones espaciales. La pared de dominio rompe, espontáneamente, la invariancia con respecto a traslaciones en la dirección z . La física se vuelve dependiente de la distancia a la pared en la dirección perpendicular. Debido a este rompimiento de simetría y de acuerdo con el teorema de Goldstone, surge un bosón de Goldstone el cual está confinado a la superficie de la pared. Si conocemos el perfil del parámetro de orden que describe la pared (y el cual llamaremos $\phi(z)$), entonces el perfil del modo cero traslacional está dado por la derivada $d\phi/dz$.

El bosón de Goldstone $(1+2)D$ que aparece en esta forma tiene espín cero. De hecho, el trabajo original de Rubakov y Shaposhnikov fue motivado por el deseo de tener un bosón de Higgs cuya masa estuviera protegida, por el teorema de Goldstone de adquirir divergencias cuadráticas en el ultravioleta, típicas de las masas de partículas escalares en teoría de campos. La novedad de la idea y su potencial no fueron reconocidos hasta mediados de los 1990 dado que poco después de la publicación de [17], la idea de supersimetría atrajo la atención de los científicos en esta área.

1.3. Dimensiones extras (grandes) a la (ADD)

El modelo ADD aparece en escena en 1998 y es llamado así en referencia a sus proponentes: N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos y G. Dvali [3]. Este se basa en la idea sencilla de que las dimensiones extras son accesibles sólo a la gravedad y no a los campos del Modelo Estándar. Una consecuencia de esta hipótesis es que las dimensiones extras en estos modelos pueden ser del orden de μm . Al comparar el tamaño de estas dimensiones, con el tamaño de las dimensiones extras en los modelos de KK que son del orden de la longitud de Planck, se utilizó el adjetivo de *grandes* para denominarlas. Técnicamente la propuesta del modelo ADD es realizar un matrimonio entre el escenario de Kaluza-Klein y la localización sobre las paredes de dominio. Como veremos, el compactificar las dimensiones extras á la Kaluza-Klein resuelve el problema de la gravedad, mientras que localizar todos los otros campos sobre la pared de dominio resuelve el problema de jerarquía¹.

Es justo mencionar que en el contexto de teoría de cuerdas hubieron algunos trabajos previos al modelo ADD donde se introdujeron ideas similares. Por ejemplo en 1990 Antoniadis [21] sugirió que podrían existir dimensiones extras grandes en el contexto del Modelo estándar, con campos de norma propagándose en el bulto y campos de materia localizados en los puntos fijos de un orbifolio (a pesar de que la palabra membrana nunca fue usada). Poco tiempo después Petr Horava y Edward Witten [22] señalaron que una sola dimensión extra de tamaño $\sim 10^{28}$ cm., podría eliminar la brecha entre la escala de gran unificación y la escala de Planck.

El modelo ADD parte de la suposición de que el espacio-tiempo es $(4+n)\text{D}$, $n \geq 1$, mientras que su geometría es factorizable: $\mathbb{M}_4 \otimes K_n$, o a nivel del intervalo

$$ds_{4+n}^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + \sum_n dy_n^2, \quad (1.10)$$

donde la parte 4D de la métrica no depende de las coordenadas extras y_n .

Ahora bien, el Gran Colisionador de Hadrones en el CERN alcanzará energías del orden de 10 TeV y estas son las energías más grandes a las que tenemos acceso hoy día en experimentos terrestres, por lo que si elegimos la anchura de la pared de dominio de forma tal que $\delta \lesssim (10 \text{ TeV})^{-1}$, entonces a energías $\lesssim 10 \text{ TeV}$ la física es efectivamente 4D en todo los experimentos, excepto aquellos que involucran a la gravedad. Dado que

¹El problema de jerarquía consiste en tener en la naturaleza dos escalas de energía completamente diferentes para describir física fundamental: la escala de la teoría de partículas, esto es, la escala electrodébil $M_{EW} \sim 10^3 \text{ GeV}$ y la escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19} \text{ GeV}$, escala a la cual la gravedad se vuelve tan o más fuerte que las interacciones electrodébiles y a la cual se espera que la gravedad cuántica juegue un papel relevante. No es sólo el hecho de que parezca antinatural tener dos escalas de energía tan separadas para describir física fundamental, un problema realmente serio consiste en que si pudiéramos construir una teoría cuántica donde todas las interacciones estén unificadas, la cual describiría también a la gravedad, la escala M_{Pl} entraría en las correcciones cuánticas de todas las cantidades a la escala electrodébil, ya que éstas no están protegidas, por ejemplo, por simetrías, estropeando así el exitoso Modelo Estándar de bajas energías.

la gravedad escapa al bulto, ésta es 4D solo a distancias $r \gg R$. A distancias $r \lesssim R$ la gravedad es $(4+n)$ D.

Como veremos, en este escenario se satisface que $R \gg \delta$. De hecho si comenzamos preguntando ¿qué tamaño R de las dimensiones compactas es compatible con lo que sabemos de nuestro mundo hoy día? nos sorprendemos de la respuesta. Experimentalmente la gravedad está bien estudiada con certeza a escalas del sistema solar, donde esta es ciertamente 4D, sin embargo conocemos su validez a pequeñas distancias con mucho menos exactitud. De hecho, debajo de aproximadamente 0.1 mm. la fuerza gravitacional no ha sido medida, y uno no puede excluir la posibilidad de que a esas distancias la gravedad sea $(4+n)$ D. Es esta ignorancia que tenemos sobre la fuerza gravitacional la que nos permite la posibilidad de tener dimensiones extras grandes²

Analíticamente la acción se puede escribir como

$$S = \frac{(M_f)^{2+n}}{2} \int d^{4+n}x \sqrt{g_{(4+n)}} R_{(4+n)} + \int d^4x \sqrt{g_{(4)}} (T + \mathcal{L}_{ME}(\Phi_{ME})), \quad (1.11)$$

donde M_f es la constante fundamental de la gravedad, $g_{(4+n)}$ y $R_{(4+n)}$ son la métrica y el escalar de curvatura $(4+n)$ D respectivamente, g_4 es la métrica 4D y \mathcal{L}_{ME} es un lagrangiano que describe simbólicamente todos los campos del Modelo Estándar (los cuales están confinados en la brana). La escala de una masa típica asociada con \mathcal{L}_{ME} , la cual será denotada como M_{ME} , es: $M_{MS} \sim 100$ GeV. Finalmente, T es una constante que tiene que ser ajustada de forma tal que el término cosmológico total, el cual incluye a T más todas las correcciones cuánticas, se anule. Este es la condición usual de sintonía de la constante cosmológica. El modelo ADD no introduce nada nuevo a este respecto.

Apliquemos el desarrollo en modos del campo gravitacional á la KK, y concentremosnos únicamente en el modo cero, esto es, despreciemos todos los estados en la torre KK con masas del orden $1/R$. Dado que el modo cero es independiente de las dimensiones extras y , podemos realizar la integral en las n dimensiones extras para el término gravitacional de la acción (1.11) obteniendo

$$\frac{(M_f)^{2+n}}{2} \int d^{(4+n)}x \sqrt{g_{(4+n)}} R_{(4+n)} \longrightarrow \frac{(M_f)^{2+n}}{2} V_n \int d^4x \sqrt{g_{(4)}} R_{(4)}, \quad (1.12)$$

donde $g_{(4)}$ y $R_{(4)}$ son la métrica y el escalar de curvatura 4D evaluados sobre el modo cero, y V_n es el volumen de las dimensiones extras

$$V_n = (2\pi R)^n. \quad (1.13)$$

La expresión del lado derecho de la ecuación (1.12) es aplicable a distancias $r \gg R$. A estas distancias la fuerza gravitacional toma la forma estándar de Newton

$$F = -\frac{G_{(4)} m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.14)$$

²En 1998 las medidas de la gravedad se habían realizado a distancias de 1mm. Experimentos posteriores realizados después de la sugerencia del modelo ADD dieron origen a una mejora en las medidas de un orden de magnitud.

donde la constante de Newton 4D está determinada por el lado derecho de la ecuación (1.12)

$$G_{(4)} = ((M_f)^{2+n} V_n)^{-1}. \quad (1.15)$$

Al mismo tiempo, si $r \lesssim R$ debemos entonces regresar a la ecuación (1.11), la cual implica la siguiente ley de fuerza en $(4+n)$ D

$$F(r) = -\frac{G_{(4+n)} m_1 m_2}{r^{n+2}} = -\frac{1}{(M_f)^{2+n}} \frac{m_1 m_2}{r^{n+2}}. \quad (1.16)$$

Ahora bien, al inspeccionar la ecuación (1.15), un observador 4D interpretará el producto $(M_f)^{2+n} V_n$ como el cuadrado de la masa de Plank

$$(M_f)^{2+n} V_n = M_{Pl}^2 \sim (10^{19} \text{GeV})^2. \quad (1.17)$$

Esta ecuación representa la consecuencia fundamental de las dimensiones extras en el modelo ADD. Lo que hemos hecho hasta el momento es proponer una nueva escala fundamental de masa en el espacio $(4+n)$ -dimensional, que denotamos por M_f^{2+n} y que a través de esta ecuación resulta relacionada con la escala de Plank en 4D y con el radio R de las n dimensiones extras. Recordemos que M_f es la energía a la cual la gravedad $(4+n)$ D es fuerte. Escribiendo explícitamente el volumen V_n obtenemos

$$M_f = \frac{1}{2\pi R} (2\pi R M_{Pl})^{\frac{2}{n+2}}, \quad (1.18)$$

o despejando R en términos de M_f y M_{Pl} obtenemos

$$R \sim \frac{1}{2\pi M_f} \left(\frac{M_{Pl}}{M_f} \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (1.19)$$

La última suposición es que la escala fundamental M_f sea del orden de 10 TeV, esto es, del orden de la máxima energía experimental disponible (la cual es muy cercana a la escala electrodébil). Si $n = 1$ entonces $R \lesssim 10^{12}$ cm., lo cual es definitivamente inconsistente con la bien establecida ley de Newton a esas distancias. Así una sola dimensión extra es excluida en el escenario ADD. Para $n = 2$ $R \sim 0,1$ mm., la cual también está descartada debido a observaciones cosmológicas y astronómicas. Así, la existencia de tres o más dimensiones extras en el modelo ADD no es inconsistente con los datos experimentales existentes. Es importante señalar que aún para valores grandes de n , el tamaño de las dimensiones extras R es grande comparado con δ y aún más con M_{Pl}^{-1} . Debemos enfatizar que no existe razón teórica alguna detrás de la elección $M_f \sim 10$ TeV. La única razón es el deseo de tener nueva física en el rango accesible de energías. Si una escala típica es mayor a 10 TeV, podemos ajustar M_f de manera apropiada y obtener nuevos valores numéricos para los fenómenos físicos conocidos.

Concluimos entonces que en el escenario ADD, la debilidad de la gravedad en comparación con las otras fuerzas encuentra una explicación en el hecho de que la gravedad se diluye en el gran volumen de las dimensiones adicionales. La jerarquía entre la escala

de Planck 4D y la magnitud de la “escala fundamental” sería en realidad sólo aparente. Sin embargo, esta solución sólo traduce el problema de la jerarquía en el problema de la discrepancia entre el gran tamaño de las dimensiones extra $R \simeq 1 \text{ mm}$ y su valor natural $R \simeq l_{Pl} \simeq 10^{-33} \text{ cm}$.

Poco tiempo después del surgimiento de los modelos ADD, se propusieron modelos con características similares, los llamados modelos de Randall-Sundrum (RSI) y (RSII), que describiremos brevemente a continuación.

1.4. Modelo de Randall-Sundrum I (RSI)

En el escenario ADD la gravedad de la pared de dominio como tal tiene un papel irrelevante. Dado que las tensiones de la brana son pequeñas, esta es una buena aproximación. Sin embargo esta propiedad no necesita satisfacerse en todo tipo de modelo de dimensiones extras. En el escenario sugerido por Lisa Randall y Raman Sundrum en 1999, la gravedad inducida por la membrana deforma fuertemente las dimensiones extras, lo cual es fundamental para garantizar una localización apropiada de los campos. Una observación general sobre la cual se basa la construcción consiste en notar que si uno tiene 3-branas en 5D, uno puede en principio balancear los efectos gravitacionales de las branas con una constante cosmológica 5D del bulto, para obtener una teoría en la cual la constante cosmológica efectiva de nuestro mundo 4D se anule. El precio a pagar por este ajuste fino es tener un espacio de fondo 5D fuertemente curvado. Existen dos

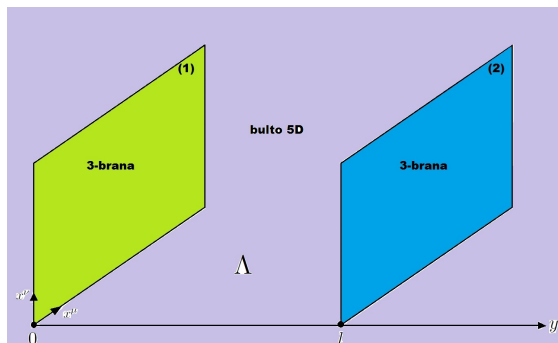


Figura 1.3: Representación del modelo de RSI.

modelos propuestos por Randall y Sundrum, los cuales difieren por el número de membranas consideradas. En el primer modelo propuesto por ellos introdujeron 2 membranas, mientras que en el segundo se considera el límite en el que una de las dos membranas se manda a infinito, quedando así un modelo con solo una membrana. A estos modelos se les conoce como los modelos RSI [4] y RSII [5, 6] respectivamente. En esta sección nos concentraremos en el modelo RSI, en el cual se consideran dos membranas o branas de 4D, encajadas en un espacio-tiempo de anti-de Sitter 5D (AdS_5), donde una de las membranas representa el Universo físico observable y la otra es la llamada membrana

oculta (ver Fig. (1.3)). En este modelo se supone que la dimensión extra es compacta y tiene la topología de un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 y las membranas están localizadas en los puntos fijos del orbifold, una en el origen $y = 0$ y la otra en $y = \pi R \equiv l$ (ver Fig. (1.4)).

El orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 se obtiene al identificar los puntos opuestos de un círculo S^1 de radio r , mediante la transformación $\mathbb{Z}_2 : y \rightarrow -y$, por consiguiente la coordenada extra se puede considerar como un segmento de línea recta cuya longitud es πr , y donde los extremos $y = 0$ y $y = l$ son puntos fijos bajo la transformación \mathbb{Z}_2 ; de tal forma que las branas se encuentran ubicadas en estos puntos fijos que a su vez constituyen los contornos del espacio-tiempo en 5D.

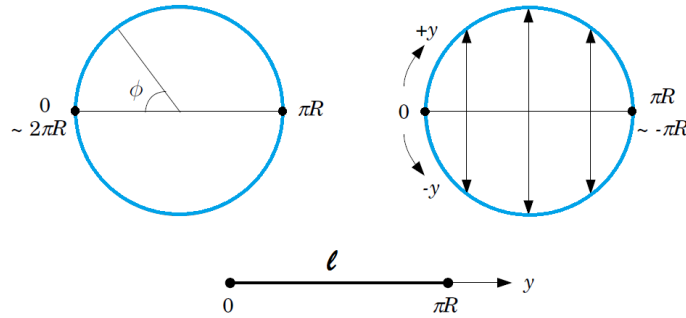


Figura 1.4: Representación gráfica del orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 .

La acción que describe este modelo está dada por

$$S = M_f^3 \int d^5x \sqrt{|g_{(5)}|} (R_{(5)} - 2\Lambda_5) + \int d^4x \left[\sqrt{|g_{(4)}^{b1}|} (\mathcal{L}_{b1} + V_{b1}) + \sqrt{|g_{(4)}^{b2}|} (\mathcal{L}_{b2} + V_{b2}) \right], \quad (1.20)$$

donde $g_{(4)}^{b1}$ y $g_{(4)}^{b2}$ son las métricas inducidas en las branas que se localizan en $y = 0$ y $y = l$, respectivamente. Λ_5 , M_f y $R_{(5)}$ son la constante cosmológica, la constante fundamental de la gravedad y el escalar de Ricci en 5D respectivamente. Por otro lado tenemos que \mathcal{L}_{b1} y \mathcal{L}_{b2} son los lagrangianos de los campos contenidos en las branas, cuyo valor esperado del vacío es cero. Los términos V_{b1} y V_{b2} son las contribuciones a la energía del vacío, de campos cuyo valor esperado del vacío es distinto de cero, e stos actúan como fuentes gravitatorias incluso en ausencia de excitaciones de las partículas. El primer paso es encontrar la métrica para dicha configuración. Puesto que estamos buscando soluciones a las ecuaciones de Einstein en 5D que puedan ajustarse a la realidad, es necesario que la métrica sobre las branas preserve la invariancia de Poincaré, de manera tal que el universo 4D que se pueda derivar de esta teoría, aparecerá como plano y estático. Esto lleva al siguiente ansatz:

$$ds^2 = e^{-2\phi(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r^2 dy^2, \quad \text{con} \quad -l \leq y \leq l, \quad (1.21)$$

donde r es el radio de compactificación, $e^{-2\phi(y)}$ es una función de la dimensión extra, llamada factor de doblamiento y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski 4D. La métrica (1.21)

no es factorizable, aunque parece describir un escenario Kaluza-Klein usual, no es el producto de un espacio de Minkowski con una variedad compacta, en realidad corresponde a dos parches del espacio AdS_5 unidos a lo largo de la dimensión extra, y donde las hipersuperficies 4D son planas, es decir, la métrica inducida es la de Minkowski. Es importante mencionar que debido a la invariancia de Poincaré 4D de la métrica, en este fondo cada campo se puede descomponer en ondas planas 4D. Como resultado se encuentra que los modos de vibración inferiores están sobre la brana o en una vecindad de la misma, mientras que los modos superiores están lejos de la brana. Esta propiedad está detrás de muchas de las peculiaridades físicas que emergen de la métrica de RSI. Bajo estas observaciones realizamos una variación sobre la acción (1.20) para así obtener las ecuaciones de campo de Einstein en 5D:

$$\sqrt{|g_{(5)}|} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R_{(5)} \right) = -\frac{1}{2M_f^3} \left[2\Lambda_5 \sqrt{|g_{(5)}|} g_{MN} + V_{b1} \sqrt{|g_{(4)}^{b1}|} g_{\mu\nu}^{b1} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y) + \right. \\ \left. V_{b2} \sqrt{|g_{(4)}^{b2}|} g_{\mu\nu}^{b2} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y-l) \right], \quad (1.22)$$

con $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$. Puede observarse que la parte derecha corresponde al término de fuente y la izquierda al tensor de curvatura. Llevando la métrica de prueba (1.21) a las ecuaciones de campo, se obtiene el siguiente sistema

$$\frac{\phi'(y)^2}{r^2} = -\frac{\Lambda_5}{6M_f^3}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\phi''(y)}{r^2} = \frac{V_{b1}}{6M_f^3 r} \delta(y) + \frac{V_{b2}}{6M_f^3 r} \delta(y-l), \quad (1.24)$$

obteniendo como solución para $\phi(y)$, consistente con la simetría $y \rightarrow -y$

$$\phi(y) = r|y|k, \quad \text{donde} \quad k \equiv \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_f^3}}. \quad (1.25)$$

Evidentemente una solución real para ϕ sólo existe si la constante cosmológica es $\Lambda_5 \leq 0$, lo que a su vez muestra que el espacio-tiempo entre las branas debe ser AdS_5 . El caso en el que ϕ es puramente imaginario corresponde a un factor de doblamiento oscilante, el cual no es de importancia en el modelo RSI. Esta restricción se puede pensar como la condición de ajuste fino para una constante cosmológica efectiva en 4D. Si asumimos que $k \leq M_f$, esto quiere decir que la curvatura del bulto es menor comparada con la escala de Planck en altas dimensiones. Por último, la métrica de fondo en el modelo de RSI está parametrizada por

$$ds^2 = e^{-2kr|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r^2 dy^2. \quad (1.26)$$

De la solución que acabamos de encontrar para ϕ , vemos que la primera derivada de ϕ es

$$\phi'(y) = \text{sgn}(y)k. \quad (1.27)$$

El término $\text{sgn}(y)$ puede ser escrito como una combinación de funciones Heaviside

$$\text{sgn}(y) = \theta(y) - \theta(-y). \quad (1.28)$$

Así la segunda derivada es

$$\phi''(y) = 2kr\delta(y). \quad (1.29)$$

Esta función delta surgió de la torsión de ϕ en el origen $y = 0$, la cual, se obtiene para el caso de una sola membrana situada en el origen (ver Fig 1.5). De la misma manera, el punto de torsión en $y = l$ da lugar a otra función delta, y la expresión completa para $\phi''(y)$ es

$$\phi''(y) = 2rk[\delta(y) - \delta(y - l)]. \quad (1.30)$$

Con el fin de satisfacer las ecuaciones de Einstein tenemos que imponer la relación

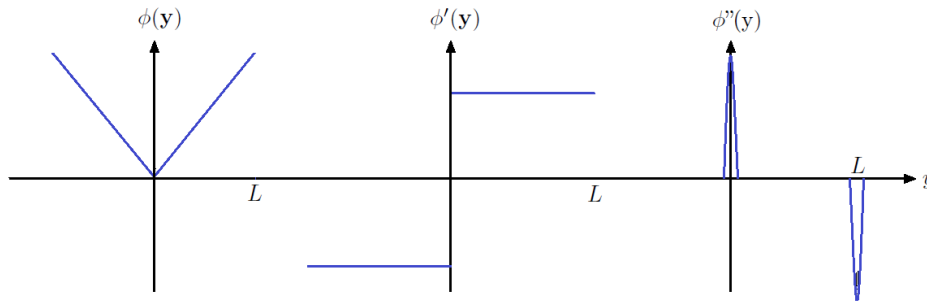


Figura 1.5: La función $\phi(y)$ con su primera y segunda derivadas.

$$V_{b1} = -V_{b2} = 6M_f^3 k \quad (1.31)$$

Además, por la definición de k tenemos

$$\Lambda_5 = -\frac{V_{b1}^2}{24M_f^3}. \quad (1.32)$$

Estas últimas dos relaciones son consecuencia de la exigencia de que el universo 4D sea plano y estático.

1.4.1. Jerarquía exponencial

Habiendo presentado y encontrado la métrica para la configuración del modelo de RSI, nos gustaría investigar cuáles serían las escalas físicas que podrían estar involucradas si los campos de materia estuvieran del modelo si los campos de materia estuvieran

confinados sobre la segunda brana localizada en $y = l$, para ello considérese al campo escalar de Higgs con la acción

$$\begin{aligned} S_{Higgs} &= \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}^{b2}|} \left[g_{b2}^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - V_{b2} (H^\dagger H - v^2)^2 \right] \\ &= \int d^4x e^{-4kl} \left[e^{2kl} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - V_{b2} (H^\dagger H - v^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Para obtener una acción canónicamente normalizada redefinimos el campo de Higgs como $H = e^{kl} \tilde{H}$. La acción se convierte en

$$S_{Higgs} = \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - V_{b2} \left(\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - (e^{-kl} v)^2 \right)^2 \right]. \quad (1.34)$$

Pero esta es la acción de un escalar de Higgs habitual, excepto por el valor esperado del vacío (vev), el cual está suprimido exponencialmente:

$$v_{ef} = e^{-kl} v. \quad (1.35)$$

Dado que el valor esperado del vacío (vev) del potencial del Higgs fija todos los parámetros de masa en el Modelo Estándar, todos los parámetros de masa están sujetos a una supresión exponencial sobre la segunda brana. Si el valor de la masa desnuda del Higgs ³ es del orden de la escala de Planck, la masa física del Higgs podría ser suprimida a la escala débil, donde sabemos que está, según los datos del LHC. Por esta razón, la primera brana en $y = 0$ es llamada a menudo la brana de “Planck”, mientras que la segunda brana se llama la brana “TeV”, también a estas branas se les denomina, el universo físico observable o visible y la brana oculta respectivamente. Ya que $M_{EW} \simeq 10^{-16} M_{Pl}$, el valor adecuado para el tamaño de la dimensión extra está dado por $kl \simeq \ln 10^{16} \simeq 35$.

Para entender si esta supresión exponencial es útil para tratar el problema de la jerarquía, hay que saber cómo la escala efectiva de la gravedad se comporta con respecto a la dimensión extra. Esta información se obtiene de la manera en que la acción (1.20) en cinco dimensiones contiene a la acción de cuatro dimensiones. Para ello, se toma una pequeña perturbación alrededor de la métrica RSI

$$ds^2 = e^{-2kr|y|} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta + r^2 dy^2, \quad (1.36)$$

reemplazando esta métrica en la acción de cinco dimensiones e integrando sobre y se obtiene la acción efectiva para la gravedad 4D

$$S_{eff} = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} R_{(4)}. \quad (1.37)$$

³En teoría cuántica de campos, específicamente en la teoría de renormalización, la masa desnuda de una partícula elemental es el límite de su masa cuando la escala de distancia se aproxima a cero o, equivalentemente, cuando la energía de la colisión de una partícula se aproxima a infinito. Esta masa difiere de la masa invariante como es entendida habitualmente porque esta última incluye el “vestido” de una partícula constituido por pares de partículas virtuales que son creadas temporalmente por los campos de fuerza alrededor de la partícula. Esto nos permite escribir $m = m_0 + \delta_m$, donde m denota la masa de la partícula observable experimentalmente, m_0 es su masa desnuda y δ_m es el incremento en la masa debido a la interacción de la partícula con el medio.

Aquí $R_{(4)}$ es el escalar de Ricci en cuatro dimensiones que es función de $h_{\mu\nu}(x)$, la cual representa las fluctuaciones alrededor de la métrica de Minkowski y físicamente representan al gravitón. Integrando sobre la coordenada extra se obtiene la acción efectiva cuatridimensional, de la cual se puede leer la relación entre la escala fundamental M_f y la escala cuatridimensional de Planck M_{Pl} , esto es

$$M_{Pl}^2 = M_f^3 r \int_{-l}^l dy e^{-2kr|y|} = \frac{M_f^3}{k} (1 - e^{-2krl}). \quad (1.38)$$

Esta relación implica que la escala de Planck 4D depende muy débilmente de la dimensión extra, suponiendo que kl es moderadamente grande.

Poniendo los dos resultados juntos tenemos que la escala débil está suprimida exponencialmente a lo largo de la dimensión extra, mientras que la escala de la gravedad es casi independiente de ésta.

En el límite $kr \gg 1$ (tomando en cuenta que r en este modelo es pequeño) la dependencia en r es cada vez más pequeña, esto es, el problema de jerarquía no recae en el tamaño de las dimensiones extras como en el caso de ADD ver Fig. (1.6). Esto muestra que escogiendo la escala 5D del orden de la escala de Planck dará el orden correcto de magnitud para la escala de Planck 4D. En conclusión, en una teoría en la que los valores de todos los parámetros (M , Λ_5 , V_{b1} , v) están determinadas por la escala de Planck, una jerarquía exponencial puede ser generada de forma natural entre la escala débil y la escala de gravedad. Así, el modelo de Randall-Sundrum ofrece una solución original al problema de la jerarquía. Cabe destacar que la masa de Planck efectiva sigue siendo finita, incluso si tomamos el límite $l \rightarrow \infty$. Este caso en el que sólo hay una brana se conoce como el modelo de Randall-Sundrum II (RSII) que a continuación presentaremos.

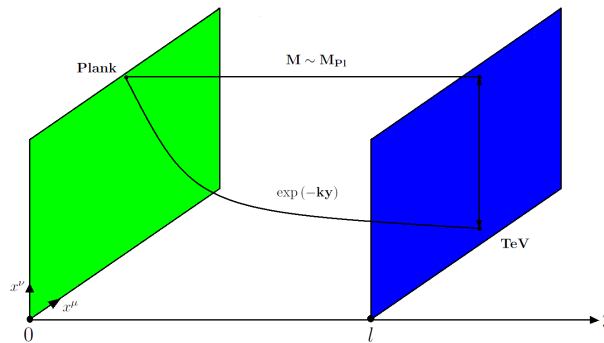


Figura 1.6: La representación de una jerarquía exponencial.

1.5. Modelo RS II

En el modelo RSII se considera el límite en el que la segunda membrana se manda al infinito, quedando una 3-brana encajada en un espacio-tiempo 5D, esto traerá como

consecuencia una posible solución al problema de jerarquías ya que se logra explicar la disminución de la intensidad gravitacional sobre la 3-brana y entre otras cosas permite deducir una cosmología satisfactoria. En este modelo se considera que la dimensión extra tiene como dominio $-\infty < y < \infty$. La acción gravitacional en presencia de la brana es

$$S = M_f^3 \int d^5x \sqrt{|g_{(5)}|} (R_{(5)} - 2\Lambda_5) + \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}^b|} (\mathcal{L}_b + V_b), \quad (1.39)$$

donde g_b es la métrica inducida en la brana ubicada en $y = 0$ y V_b es la densidad de energía en la membrana. La métrica para este escenario es

$$ds^2 = a^2(y) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad a(y) = e^{-\kappa|y|} \quad (1.40)$$

aquí $1/\kappa$ es el radio de AdS_5 . Como en el caso del modelo de RSI las ecuaciones de Einstein son resueltas y la relación entre la tensión de la brana y la constante cosmológica deben ser ajustadas entre sí. Realizamos una variación sobre la acción (1.39), se obtiene las ecuación de campo de Einstein 5D:

$$\sqrt{|g_{(5)}|} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R_{(5)} \right) = -\frac{1}{4M_f^3} \left[\Lambda_5 \sqrt{|g_{(5)}|} g_{MN} + V_b \sqrt{|g_{(4)}^b|} g_{\mu\nu}^{(b)} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y) \right]. \quad (1.41)$$

Las ecuaciones de Einstein para la métrica (1.40) son

$$\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} = -\frac{V_b}{12M_f^3} \delta(y), \quad (1.42)$$

$$\frac{2a''}{a^2} = -\frac{\Lambda_5}{12M_f^3} \quad (1.43)$$

donde la prima denota la deriva con respecto a la coordenada extra y , si introducimos $a(y) = e^{-\kappa|y|}$ en (1.43) tenemos

$$\kappa^2 = -\frac{\Lambda_5}{24M_f^3}. \quad (1.44)$$

Y así como se hizo para el caso de RSI, si derivamos $a(y) = e^{-\kappa|y|}$ dos veces y comparamos (1.42) con (1.43) se obtendrá una condición para la tensión de la brana. Esta condición nuevamente ajusta la constante cosmológica de cinco dimensiones y la tensión de la brana a través de

$$V_b = 12M_{Pl}^3 \kappa^2. \quad (1.45)$$

Debido a la invariancia de cuatro dimensiones de Poincaré, una propiedad de la métrica (1.40) es que cada campo en este fondo puede ser descompuesto en ondas planas cuatridimensionales como

$$\psi \sim e^{ip_\mu x^\mu} \psi_p(y) \quad (1.46)$$

donde el momento p_μ coincide con el momento físico en la brana, pero desde el punto de vista de un observador que reside en $y = 0$, el momento físico cuatridimensional sería

$$p_\mu^{\text{físico}} = \frac{1}{a(y)} p_\mu. \quad (1.47)$$

Esta propiedad de escalamiento es una de las propiedades físicas inherentes al fondo (1.40).

1.6. Otros mundos brana

1.6.1. Branas delgadas

A la luz de la discusión de los modelos de Randall-Sundrum, es posible visualizar el problema de manera tal que nos permita construir ciertas generalizaciones. Podemos considerar que el modelo de Randall-Sundrum consiste en un sistema constituido por el encajamiento de una 3-brana plana (espacio de Minkowski 4D) en un espacio AdS_5 , y donde el ajuste fino queda determinado por la ecuaciones de Einstein 5D. En este contexto una pregunta plausible es ¿existen otras geometrías 5D en las cuales sea posible encajar una 3-brana con alguna geometría, no necesariamente plana? y más aún, ¿es posible que si esto se puede permitir, el modelo así obtenido conserve algunas de las características físicas y geométricas que hacen interesante a los modelos RS? Esta pregunta ha sido realizada ya en el pasado y parte de la respuesta es la siguiente. En [7] se encontró que es posible encajar una brana tipo Friedmann-Robertson-Walker⁴ tanto en un espacio-tiempo tipo de Sitter (dS_5) como en uno AdS_5 , y más aún, se encontró también que aunque el encajamiento se puede realizar en todos estos casos, sólo es posible localizar a la gravedad sobre la brana si esta tiene una geometría dS_4 o Minkowski 4D. Pero aún cuando existe localización, en [8] se mostró después de estudiar el encajamiento de una brana tipo dS_4 en dS_5 , AdS_5 y Minkowski 5D que las únicas posibilidades que dan origen a la ley de Newton convencional es cuando el espacio-tiempo 5D es dS_5 y AdS_5 . Note que en todos estos modelos, al igual que en el modelo de Randall-Sundrum II, uno introduce en la acción el término de la brana. Desde el punto de vista de la dimensión extra, la brana está localizada en un sólo punto. Por este motivo algunas veces se utiliza en la literatura el nombre de branass delgadas para denotar a este tipo de modelos.

El interés en que la membrana que representa nuestro Universo tenga una geometría tipo dS en vez de una geometría plana como es el caso en los modelos de Randall-Sundrum, viene de la cosmología. El espacio-tiempo de dS ha sido explorado desde diferentes puntos de vista ya que esta geometría nos proporciona una explicación bastante directa de la expansión acelerada de nuestro Universo. Hoy día existe una actividad considerable de investigación en el contexto de dimensiones extras, con el objetivo de construir modelos y soluciones que nos provean de un espacio-tiempo 4D tipo dS . En el contexto de la teoría de cuerdas el reto es escoger un espacio interno 6D apropiado, de manera tal que al compactificar sobre el mismo, obtengamos una teoría 4D que acepte como solución el espacio dS_4 . Este ha resultado ser un problema bastante difícil [23], en el que incluso

⁴Un espacio-tiempo tipo Friedmann-Robertson-Walker es un espacio homogéneo e isotrópico donde la parte espacial de la métrica tiene una curvatura constante que puede ser positiva, negativa o nula. En la sección 3.3.3 presentamos esta métrica.

se han establecido varios teoremas sobre la imposibilidad de lograrlo [24] y en el que se ha llegado a proponer incluso ideas como compactificar sobre espacios no-geométricos [25] para poder darle la vuelta al problema. No obstante recientemente, se han reportado ejemplos en el que parece que la solución al problema está cerca [26, 27, 28].

Los modelos membrana también han incursionado en este tipo de problemas, ya hemos mencionado estudios realizados en este contexto en el pasado [7, 8]. Sin embargo en la actualidad se han revivido modelos donde la membrana tiene una geometría dS. Por ejemplo recientemente en este contexto se ha estudiado la posibilidad de que una membrana con geometría dS_n se pueda encajar en un espacio dS_{n+1} para varios valores de n [10] y también se han estudiado algunas consecuencias cosmológicas de estos modelos.

Una propiedad interesante de esos modelos es que es posible tener una geometría dS₄ aún cuando a nivel de la acción 5D no se introduzca la parte correspondiente a una membrana [9]. Este tipo de soluciones es un ejemplo de lo que se conoce en la literatura como membranas gordas y de las cuales mencionaremos sus propiedades principales en la subsección siguiente. Finalmente mencionemos que en este modelo han estudiado algunos aspectos fenomenológicos en cosmología [11] y también algunos aspectos formales incluyendo la localización de diferentes campos: escalar, de norma, gravitacional y fermiones de espín 1/2 [14].

1.6.2. Branas gruesas

Desde un punto de vista realista, una brana debería tener un grosor no nulo en la dimensión extra. Esta consideración viene de una idea que a muchos científicos les parece básica y es el hecho de que si existe una teoría fundamental de las interacciones, esta debe tener una longitud de escala mínima. El incluir la idea de la anchura de la brana en los modelos con dimensiones extras ha llevado a nuevas posibilidades y por tanto a una variedad más rica de modelos de mundos brana, ya que los efectos de la anchura pueden ser importantes en algunas cantidades físicas. Desde luego el incorporar la idea también lleva a nuevos problemas, por ejemplo en algunos modelos lleva a ambigüedades en la definición de las cantidades efectivas 4D [29].

De manera simplificada, los modelos de mundo membrana 5D tienen una métrica de la forma

$$ds^2 = a^2(y)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (1.48)$$

donde $-\infty < y < \infty$ es la coordenada de la dimensión extra, $g_{\mu\nu}$ es la métrica 4D que como hemos discutido puede ser Minkowski, dS o AdS. $a(y)$ es el llamado factor de doblamiento, el cual es una función regular, tiene un valor máximo en la brana y cae rápidamente a cero cuando nos alejamos de la misma. Si la membrana es delgada, este factor tiene una derivada discontinua en la posición de la brana (debido a que la brana es introducida en la acción a través de una delta de Dirac), sin embargo para el caso de las membranas gordas la derivada de la función es continua en la posición de la membrana. En la Fig. (1.7) mostramos el comportamiento típico de la función de doblamiento para

soluciones de membranas delgadas y gruesas, cuando se supone válida la simetría Z_2 : $a(y) = a(-y)$. Se puede mostrar que la condición de normalización en el modo cero del gravitón produce la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy a^2(y) = c, \quad \text{con: } c \neq 0 \quad \text{y} \quad c < \infty. \quad (1.49)$$

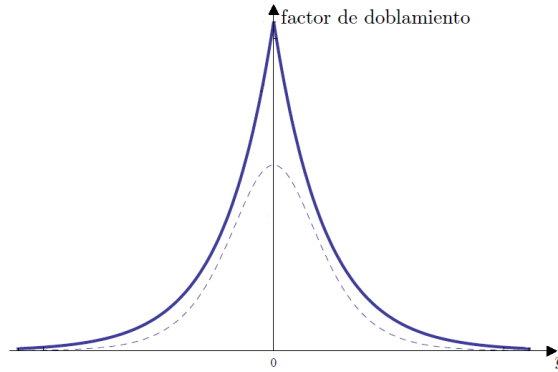


Figura 1.7: Esta figura muestra el comportamiento típico de la solución del factor de doblamiento $a(y)$ de una membrana delgada y otra gruesa. La línea punteada indica el factor de doblamiento de la brana gruesa, mientras que la línea continua indica la brana delgada.

En los modelos 5D, la aproximación de membrana delgada es válida siempre y cuando la gordura de la membrana no sea accesible a las energías involucradas, esto es, si la escala de energía de la gordura de la brana es mucho mayor a las escalas de energías en el bulto o en la membrana. Pero esta son exactamente las condiciones que discutimos en la sección 1.3.

Una pregunta es ¿cómo se construyen los modelos de membranas gordas? La respuesta es sencilla, uno comienza con la acción de Hilbert-Einstein con constante cosmológica en el espacio-tiempo hiperdimensional, pero en vez de introducir en la acción la densidad de energía de la membrana a través de un término delta como en (1.22) o (1.39) para el modelo RS, uno introduce en la acción algún campo de materia acoplado a la gravedad, por ejemplo campos escalares.

Todas las soluciones de membrana gorda que se conocen pueden clasificarse en dos grupos: las soluciones estáticas y las soluciones dependientes del tiempo. A su vez las soluciones estáticas se pueden dividir en dos grupos

- Branmas gruesas topológicamente no triviales: Estas soluciones se basan en la suposición de la existencia de algún defecto topológico en el espacio-tiempo. En este caso se dice que las membranas gordas están hechas de un campo escalar o de múltiples campos escalares que no interactúan entre sí.

- Branjas gruesas topológicamente triviales: Estas soluciones pueden existir para campos escalares que interactúan, pero están ausentes en el caso de un solo campo escalar.

Desde luego existen ejemplos de modelos de membranas gordas que están “hechas” de campos diferentes a los escalares, pero aquí no abundaremos sobre el tema.

Queda claro que las posibilidades de estudiar modelos de dimensiones extras grandes va más allá del modelo de Randall-Sundrum. El objetivo de este trabajo justamente es estudiar algunos aspectos del modelo de membrana tipo dS. Como hemos mencionado anteriormente, el interés principal en este tipo de escenarios viene de la cosmología. Sin embargo en este trabajo en vez de realizar estudios fenomenológicos, estamos interesados en entender algunos aspectos formales del modelo, en particular la propiedad de localización del campo escalar. Como veremos el modelo tiene la propiedad de que puede estudiarse introduciendo tanto membranas delgadas [10], como membranas gruesas [9]. En este último caso la construcción es bastante económica, ya que la membrana gruesa no está hecha de campo escalar, sino es producida por la constante cosmológica del espacio-tiempo de fondo.

Finalmente, dado que todos los modelos de dimensiones extras que hemos mencionado involucran de alguna u otra manera espacios máximamente simétricos, en el capítulo siguiente presentamos una introducción breve al tema, con el objetivo de tener un mejor entendimiento de los modelos.

2

Espacios máximamente simétricos

Desde que en 1917 Albert Einstein desarrolló la Teoría de la Relatividad General se ha generado un gran interés por estudiar los orígenes del Universo, así como también su destino final. En Relatividad General, el Universo físico está modelado por un espacio-tiempo cuyos puntos representan eventos, es decir, instancias que se dan en un momento y lugar definido. En esta teoría la geometría del espacio-tiempo se entrelaza con la materia y otras fuerzas mediante la ecuación de Einstein. Para que un espacio-tiempo represente de manera acertada la realidad, es necesario que dicho espacio-tiempo satisfaga la ecuación de Einstein. A lo largo de los años se han encontrado numerosas soluciones a dichas ecuaciones, entre las cuales sobresalen las llamadas soluciones algebraicas exactas que se caracterizan por su alto grado de simetría.

Como preparación para esta discusión, veremos una de las maneras de formular en términos matemáticos las nociones de los espacios máximamente simétricos. Estos son espacios que admiten el número máximo de vectores de Killing que resultan ser igual a $n(n+1)/2$ para un espacio n -dimensional y que además están caracterizados por tener un escalar de curvatura constante. Entre los que discutiremos en este capítulo se encuentran el espacio Euclideo \mathbb{R}^n , la esfera S^n , el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{M}_n y el espacio-tiempo de Sitter dS_n , este último se analizará con mayor detalle en el siguiente capítulo.

2.1. Simetrías y vectores de Killing

Todos hemos escuchado el mantra de la física moderna, y es verdad: simetrías llevan a las leyes de conservación. Así que una cosa que uno se podría estar preguntando es ¿cómo

podemos encontrar las simetrías en la teoría de la relatividad general?. Por ejemplo, podríamos decir que la métrica estándar de una S^2 esfera o S^3 esfera tiene simetría de rotación, ya que son invariantes bajo rotaciones de la esfera. Así que, las simetrías puede ser entendida como una invariancia de la métrica en una familia particular de las transformaciones de coordenadas. Resulta que hay una manera sistemática para obtener las simetrías si uno encuentra un tipo especial de vectores llamados *vectores de Killing*. En concreto, considérese una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ en un sistema coordenado $\{x^\mu\}$, entonces bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ la métrica transforma como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'). \quad (2.1)$$

Una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ se dice que es invariante bajo una transformación de coordenadas, cuando la métrica transformada $g'_{\rho\sigma}(x')$ cumple la siguiente igualdad

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \forall \quad y, \quad (2.2)$$

una transformación que satisface (2.2) es llamada una isometría. Ahora toca turno para obtener estas isometrías de la métrica y para ello se aplica una transformación de coordenadas infinitesimal en (2.1) dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x), \quad (2.3)$$

donde el parámetro $|\varepsilon| \ll 1$ y ξ^μ es un campo vectorial. Al hacer un desarrollo en serie de Taylor sobre esta transformación infinitesimal y si solo consideramos términos a primer orden en ε la transformación en (2.1) será isométrica si cumple que

$$0 = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu}(x) + \xi^\mu(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu}. \quad (2.4)$$

Esto puede ser escrito en términos de derivadas de las componentes covariantes $\xi_\sigma \equiv g_{\mu\sigma} \xi^\mu$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\sigma} + \xi^\mu \left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} \right] \\ &= \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu. \end{aligned} \quad (2.5)$$

o, de forma más compacta,¹

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma}. \quad (2.6)$$

A esta última expresión se le conoce como **la ecuación de Killing** y cualquier campo de vectores $\xi_\sigma(x)$ que satisfacen (2.6) se dice que forma un **vector de Killing** de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$. El problema de encontrar todas las isometrías infinitesimales de una métrica dada, ahora se reduce al problema de determinar todos los vectores de Killing de la métrica.

Observaciones :

¹Esta forma compacta de la ecuación de Killing se escribe con la ayuda de la definición de la derivada covariante de un vector covariante $\xi_{\mu;\nu}(x) \equiv \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} - \xi_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \xi_{\mu;\nu} - \xi_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

- Cualquier combinación lineal de los vectores de Killing $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$, con coeficientes constantes a y b , $a\xi^{(1)} + b\xi^{(2)}$ es un vector de Killing.
- El conmutador $[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]$ es un vector de Killing. Este es el álgebra de Lie del grupo de isometría.
- En general, si las componentes de la métrica son todas independientes de una coordenada particular, por ejemplo, $ds^2 = -d\tau^2 + r f(\theta) dr^2 + d\theta^2$, entonces, $\xi_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}$ es un vector de Killing, es decir de la ecuación (2.6) se observa que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g_{\mu\nu} = 0, \quad \forall \mu, \nu \quad \Rightarrow \quad \xi_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \text{es un Vector de Killing}$$

2.2. Homogeneidad e isotropía de un espacio máximamente simétrico

Con el objetivo de entender cómo definir y caracterizar a un espacio máximamente simétricos, necesitaremos obtener alguna información más sobre cómo los vectores de Killing se pueden clasificar. Si un espacio n -dimensional es máximamente simétrico, entonces la curvatura es la misma en todas partes, esto quiere decir que el espacio admite n vectores de Killing de traslación y es la misma en cualquier dirección, esto quiere decir que admite $n(n-1)/2$ vectores de Killing de rotación, es decir, un espacio máximamente simétrico es necesariamente homogéneo e isotrópico sobre todos los puntos del espacio. Por consiguiente, un espacio máximamente simétrico admite $n(n+1)/2$ vectores de Killing. El hecho de tener una variedad n -dimensional máximamente simétrica implicara tener las siguientes relaciones:

1. Los espacios máximamente simétricos son los únicos que son especificados por un escalar de curvatura constante $R_{(n)}$, es decir, si conocemos la curvatura en un punto, entonces lo conocemos en todas partes,

$$R_{(n)} = kn(n-1), \quad k = \text{cte.} \quad (2.7)$$

2. El tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{R_{(n)}}{n} g_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

3. El tensor de Riemann está dado por

$${}^{(n)}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{n(n-1)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R_{(n)}. \quad (2.9)$$

2.3. Espacios de curvatura constante

Hemos visto en la sección anterior lo importante que pueden ser los vectores de Killing. Los espacios altamente simétricos son importantes tanto en matemáticas como en física. Vamos a estudiar a los espacios máximamente simétricos con una métrica de Riemann, \mathbb{R}^n , S^n , \mathbb{M}_n y \mathbb{H}_n . En esta sección se abordarán algunos ejemplos para ilustrar lo discutido en las posteriores secciones. El de mayor interés en nuestro estudio serán los espacios hiperbólicos. Vamos a empezar con el más familiar, el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

2.3.1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n

Ya estamos familiarizados con el espacio euclideo n -dimensional cuya métrica es de la forma

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.10)$$

donde los índices latinos i, j, \dots , corren de 1 a n . Como afirmamos anteriormente, este es un espacio máximamente simétrico, en consecuencia tiene $\frac{1}{2}n(n+1)$ vectores de Killing linealmente independientes. Hay que destacar que cuando se dice linealmente independientes en este contexto, nos referimos a soluciones linealmente independientes de las ecuaciones de Killing. Así que, fácilmente encontramos un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.6), las cuales son soluciones de la forma

$$\vec{\xi}_{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (2.11)$$

que corresponden a n traslaciones espaciales y por otro lado se tendrán soluciones de la forma

$$\vec{\xi}_{(ab)} = x^b \frac{\partial}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial}{\partial x^b} \quad (2.12)$$

que corresponden a $\frac{1}{2}n(n-1)$ rotaciones espaciales independientes. Las soluciones $\vec{\xi}_{(ab)}$ son antisimétricas en los índices. Así, todas las soluciones $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Killing. Y como se había afirmado, los espacios euclídeos admiten $\frac{1}{2}n(n+1)$ vectores de Killing linealmente independientes y por lo tanto son espacios máximamente simétricos. Este espacio tiene como escalar de curvatura $R = 0$.

Ejemplo 1. El espacio euclídeo 3D \mathbb{R}^3 .

En este ejemplo calculemos los vectores de Killing de un espacio plano 3D cuya métrica en coordenadas cartesianas se escribe

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.13)$$

la ecuación de (2.6) se reduce a lo siguiente

$$0 = \frac{\partial \xi_{x^1}}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi_{x^2}}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi_{x^3}}{\partial x^3}, \quad 0 = \frac{\partial \xi_{x^i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_{x^j}}{\partial \xi_{x^i}}, \quad (2.14)$$

donde $i, j = x^1, x^2, x^3$ con $i \neq j$. El anterior sistema de ecuaciones diferenciales producirá las siguientes soluciones

$$\begin{aligned} \xi_{x^1} &= a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_4 = \xi^{x^1}, & \xi_{x^2} &= -a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 = \xi^{x^2} \\ \xi_{x^3} &= -a_2 x^1 - a_3 x^2 + a_6 = \xi^{x^3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ son constantes. Y el vector de Killing más general se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^{x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^{x^3} \frac{\partial}{\partial x^3} = a_1 \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + a_2 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &+ a_3 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + a_4 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_5 \frac{\partial}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Entonces la correspondiente base de vectores de Killing es

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, & \vec{\xi}_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2}, & \vec{\xi}_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ \vec{\xi}_4 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, & \vec{\xi}_5 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}, & \vec{\xi}_6 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

los cuales corresponden a las tres traslaciones de simetrías sobre los ejes x, y, z del espacio plano y a tres rotaciones sobre los ejes x, y, z respectivamente. Ahora, para llevar a cabo el cálculo de sus conmutadores renombraremos de una forma conveniente los 6 vectores de Killing que fueron obtenidos con anterioridad. Esto para facilitar la notación en el álgebra de sus conmutadores, así que tendremos:

Tres vectores de Killing de traslaciones espaciales

$$\vec{P} = \{ \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3 \} = \{ \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3 \}. \quad (2.17)$$

Tres vectores de Killing de rotaciones espaciales

$$\vec{L} = \{ \vec{\xi}_4, \vec{\xi}_5, \vec{\xi}_6 \} = \{ \vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3 \}. \quad (2.18)$$

Estos seis vectores de Killing definen la siguiente álgebra de Lie

$$[\vec{L}_i, \vec{L}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{L}_k, \quad [\vec{L}_i, \vec{P}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{P}_k, \quad (2.19)$$

donde los índices i, j, k corren de 1, 2, 3, y ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } ijk \text{ tiene una permutación par} \\ -1, & \text{si } ijk \text{ tiene una permutación impar} \\ 0, & \text{si dos índices son los mismos} \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.2. La esfera n-dimensional S^n

Una forma fácil de sustituir la habitual geometría de los espacios euclídeos (2.10) a un espacio geométrico curvo es mediante el encaje de esta hipersuperficie en un espacio euclídeo de dimensión mayor a la hipersuperficie a la vez de una parametrización adecuada de las coordenadas. Así que uno de los modelos más simples de un espacio curvo es la superficie de una hipersfera incrustada en un espacio euclídeo $(n+1)D$

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2 = \delta_{AB} dx^A dx^B \quad (2.21)$$

donde los índices en mayúscula A, B, \dots , corren de 1 a $n+1$ y δ_{AB} es la delta de Kronecker que se define como

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1, & \text{si } A = B \\ 0, & \text{si } A \neq B. \end{cases} \quad (2.22)$$

Entonces la S^n esfera puede ser definida como una ecuación algebraica de la forma

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = \delta_{AB} x^A x^B = r^2, \quad r = \text{cte.} \quad (2.23)$$

encajada en (2.21) y por lo tanto se obtendrá la métrica inducida g_{ij} de la esfera S^n

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2 - \delta_{nm} x^n x^m}. \quad (2.24)$$

Es fácil mostrar que el escalar de curvatura de la esfera S^n es $R = n(n-1)/r^2$. Hay $n(n+1)/2$ vectores de Killing en el espacio de incrustación que salen de la esfera S^n esfera, a saber

$$\vec{\xi}_{(ab)} = x^b \frac{\partial}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad (2.25)$$

que corresponden a rotaciones espaciales. Estos vectores de Killing generan el grupo de rotación $SO(n+1)$.

Ejemplo 2. La esfera S^2 encajada en \mathbb{R}^3 .

Por lo mencionado anteriormente se entiende ahora que una esfera S^2 puede ser vista encajada en un espacio euclídeo \mathbb{R}^3 mediante ecuación

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2. \quad (2.26)$$

La esfera S^2 se ilustra en Fig. (2.1). Podemos introducir las coordenadas adecuadas que sean solución de (2.26), es decir, parametrizando la esfera S^2 , con ayuda de las coordenadas esféricas

$$x^1 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x^2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad x^3 = r \cos \theta_1$$

donde $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Al substituir esta transformación de coordenadas en (2.24) obtendremos la métrica de la esfera S^2

$$ds^2 = r^2 d\theta_1^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 \quad (2.27)$$

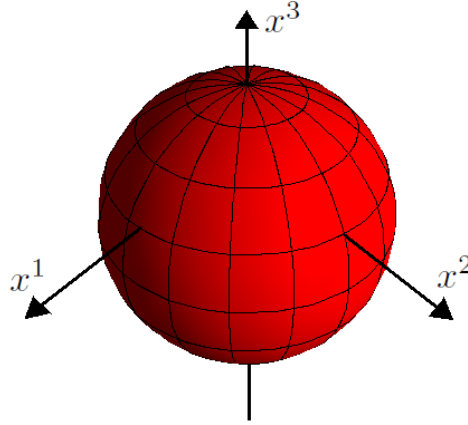


Figura 2.1: La esfera S^2 incrustada en un espacio euclídeo 3D, \mathbb{R}^3 .

El escalar de curvatura para este caso es $R = 2/r^2$. Para esta métrica los símbolos de Christoffel distintos de cero son $\Gamma_{\theta_2\theta_2}^{\theta_1} = -\text{sen}\theta_1 \cos\theta_1$, $\Gamma_{\theta_1\theta_2}^{\theta_2} = \Gamma_{\theta_2\theta_1}^{\theta_1} = \cot\theta_1$. Ahora tendremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a resolver debido a las ecuaciones de (2.6)

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = \theta_2 &\Rightarrow \frac{\partial \xi_{\theta_2}}{\partial \theta_2} = -\xi_{\theta_1} \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1, & \alpha = \beta = \theta_1 &\Rightarrow \frac{\partial \xi_{\theta_1}}{\partial \theta_1} = 0, & \Rightarrow \xi_{\theta_1} = f(\theta_2) \\ \alpha = \theta_1, \beta = \theta_2 &\Rightarrow \frac{\partial \xi_{\theta_1}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \xi_{\theta_2}}{\partial \theta_1} = 2\xi_{\theta_2} \cot\theta_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

La solución general del anterior sistema de ecuaciones está dado por.

$$\begin{aligned} \xi_{\theta_1} &= a_1 \cos\theta_2 + a_2 \text{sen}\theta_2 = r^2 \xi^{\theta_1}, \\ \xi_{\theta_2} &= \text{sen}^2\theta_1 (a_3 - \cot\theta_1 (a_1 \text{sen}\theta_2 - a_2 \cos\theta_2)) = r^2 \text{sen}^2\theta_1 \xi^{\theta_2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes y además se ocupó la relación de las componentes covariantes del vector de killing $\xi_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta$ en las ecuaciones de arriba. Para este caso los índices pueden tomar los siguientes posibles valores $\alpha, \beta, \dots = \theta_1, \theta_2$. Va a resultar que para la esfera S^2 vamos a ser capaces de escribir el vector de killing en términos de los operadores del momento angular. Por último, terminemos por escribir el vector de killing más general

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^{\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \xi^{\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ &= \frac{a_3}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{a_1}{r^2} \left(\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \cot\theta_1 \text{sen}\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{a_2}{r^2} \left(\text{sen}\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cot\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \end{aligned}$$

Y la base de vectores es

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\cos\theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\cot\theta_1 \text{sen}\theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\text{sen}\theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cot\theta_1 \cos\theta_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

$$\vec{\xi}_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (2.30)$$

Los vectores $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ y $\vec{\xi}_3$ son precisamente los operadores de momento angular los cuales generan rotaciones alrededor de los ejes x^1 , x^2 , x^3 respectivamente. El cálculo de sus conmutadores gener el álgebra de Lie $SO(3)$

$$[\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{\xi}_k. \quad (2.31)$$

2.3.3. El espacio de Minkowski n-dimensional \mathbb{M}_n

Tomando en consideración la métrica plana \mathbb{R}^n será fácil generalizar al caso de un espacio-tiempo de Minkowski n-dimensional, esto es, si ponemos a la métrica $\delta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, entonces podremos escribir a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski n-dimensional como

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.32)$$

Ya que este es un espacio máximamente simétrico implicará que tenga $\frac{1}{2}n(n+1)$ vectores linealmente independientes de la ecuación de Killing (2.6). Los vectores de Killing para este espacio-tiempo se clasificarán en tres clases, es decir, hay $(n-1)$ rotaciones espacio-temporales o boosts:

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = x^0 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad (2.33)$$

$(n-1)(n-2)/2$ rotaciones espaciales:

$$\vec{\xi}_{(\alpha\beta)} = x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad (2.34)$$

y por último n traslaciones:

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.35)$$

Ejemplo 3. Espacio de Minkowski \mathbb{M}_4 .

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.36)$$

Usando la métrica de Minkowski 4D en la ecuación de Killing, este da

$$0 = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.37)$$

Para $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$ la ecuación anterior produce las siguientes condiciones:

$$0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x^0} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x^3} \Rightarrow \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(x^1, x^2, x^3), & \xi_1 = \xi_1(x^0, x^2, x^3) \\ \xi_2 = \xi_2(x^0, x^1, x^3), & \xi_3 = \xi_3(x^0, x^1, x^2) \end{cases}$$

de aquí se sigue que las componentes de los vectores de Killing ξ_μ satisfacen las siguientes seis relaciones:

$$0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^0}, \quad 0 = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ con $j \neq i$. La solución del anterior sistema de ecuaciones es dado por

$$\xi_\mu(x) = a_{\mu\nu}x^\nu + b_\mu$$

donde $a_{\mu\nu}$ y b_μ son constantes, con $a_{\mu\nu}$ siendo antisimétrico, $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$. Usando notación matricial, la ecuación anterior se escribirá de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ -a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Las componentes covariantes del vector de Killing ξ^μ se puede obtener por.

$$\xi^\mu(x) = \eta^{\mu\alpha}\xi_\alpha(x) = a^\mu{}_\alpha x^\alpha + b^\mu,$$

donde $a^\mu{}_\alpha = \eta^{\mu\nu}a_{\nu\alpha}$, $b^\mu = \eta^{\mu\nu}b_\nu$. Por lo tanto, usando la notación de matrices, obtendremos

$$\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

Luego el vector de Killing más general es

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(x) &= \xi^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} = b^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + b^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + b^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ &+ a_{12} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + a_{13} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &+ a_{23} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) - a_{01} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \\ &- a_{02} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) - a_{03} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

así que tenemos cuatro vectores de Killing de traslaciones

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \vec{\xi}_3 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \vec{\xi}_4 = \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.38)$$

tres vectores de Killing de rotaciones espaciales

$$\vec{\xi}_5 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \vec{\xi}_6 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3},$$

$$\vec{\xi}_7 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

y por último tres vectores de Killing tipo boosts

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_8 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1}, & \vec{\xi}_9 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \vec{\xi}_{10} &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ahora de la misma forma que en el ejemplo 1 renombraremos de una forma conveniente los 10 vectores de Killing que fueron obtenidos con anterioridad para así tener lo siguiente: Una traslación temporal

$$\vec{H} = \{\vec{\xi}_1\} = \{\vec{P}_0\}. \quad (2.41)$$

Tres traslaciones espaciales

$$\vec{P} = \{\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_4\} = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\}. \quad (2.42)$$

Tres rotaciones espaciales

$$\vec{J} = \{\vec{\xi}_5, \vec{\xi}_6, \vec{\xi}_7\} = \{\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3\}. \quad (2.43)$$

Tres boosts

$$\vec{K} = \{\vec{\xi}_8, \vec{\xi}_9, \vec{\xi}_{10}\} = \{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3\}. \quad (2.44)$$

Estos vectores obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\vec{J}_i, \vec{P}_0] &= [\vec{P}_i, \vec{P}_0] = 0, & [\vec{J}_i, \vec{J}_j] &= \epsilon_{ijk} \vec{J}_k, \\ [\vec{J}_i, \vec{K}_j] &= \epsilon_{ijk} \vec{K}_k, & [\vec{K}_i, \vec{K}_j] &= -\epsilon_{ijk} \vec{J}_k, & [\vec{J}_i, \vec{P}_j] &= \epsilon_{ijk} \vec{P}_k, \\ [\vec{K}_i, \vec{P}_j] &= \delta_{ij} \vec{P}_0, & [\vec{K}_i, \vec{P}_0] &= \vec{P}_i, \end{aligned}$$

donde i, j, k corren de 1, 2 y 3, y ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Estas relaciones de conmutación define el *álgebra de Lie* del *grupo de Poincaré*.

2.3.4. Espacios hiperbólicos n-dimensionales \mathbb{H}_n

2.3.4.1. Hiperboloide n-dimensionales de escalar de curvatura $R > 0$

Como se hizo para la esfera S^n , un espacio hiperbólico puede ser visto como una hipersuperficie en un espacio plano $(n+1)D$, pero ahora debemos usar el espacio plano de Minkowski $(n+1)D$ con la métrica

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + \dots + (dX^n)^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B \quad (2.45)$$

donde los índices en mayúscula A, B, \dots , corren de 0 a n y representan el espacio de \mathbb{M}_{n+1} . Este espacio hiperbólico es definido como la hipersuperficie

$$-(X^0)^2 + \dots + (X^n)^2 = \eta_{AB} X^A X^B = l^2, \quad l = \text{cte.} \quad (2.46)$$

que llamaremos hiperboloide de una hoja de radio l . Sus vectores de killing pueden ser encontradas usando los mismos algoritmo que se usó para la esfera S^n . Es decir, si encajamos el hiperboloide (2.46) en la métrica (2.45) con ello se obtendrá la métrica inducida $g_{\mu\nu}$ del hiperboloide n -dimensional \mathbb{H}_n

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{X_\mu X_\nu}{l^2 - \eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta}. \quad (2.47)$$

La hipersuperficie (2.46) encajada en \mathbb{M}_{n+1} define un hiperboloide con una métrica Lorentziana de escalar de curvatura constante y positiva

$$R = \frac{n(n-1)}{l^2} \quad (2.48)$$

Los vectores de Killing para el hiperboloide n -dimensional encajado en \mathbb{M}_{n+1} pueden ser de dos clases:

n boosts

$$\vec{\xi}_{(\alpha)} = X^0 \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^0}, \quad (2.49)$$

y $\frac{1}{2}n(n-1)$ rotaciones espaciales

$$\vec{\xi}_{(\alpha\beta)} = X^\beta \frac{\partial}{\partial X^\alpha} - X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\beta} \quad (2.50)$$

Entonces las $n + n(n-1)/2 = \frac{1}{2}n(n+1)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Killing (2.6) y generan el grupo de isometrías $SO(n, 1)$, el cual es el grupo de isometrías de Poincaré en el espacio encajado. Este es conocido como el espacio de Sitter dS_n . En la siguientes secciones estudiaremos con mayor detalle dicho espacio.

Ejemplo 4. El espacio de Sitter 2D encajado en Minkowski 3D.

De igual forma que en los anteriores ejemplos obtendremos con gran facilidad los correspondientes vectores de killing de dS_2 , para ello primero consideremos la constricción algebraica de un hiperboloide

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 = l^2, \quad l = \text{cte.} \quad (2.51)$$

El espacio hiperbólico 2D se ilustra en la Fig. (2.2). Una parametrización que es solución de (2.51) es

$$X^0 = l \sinh\left(\frac{\tau}{l}\right), \quad X^1 = l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta, \quad X^2 = l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sin \theta$$

donde $-\infty \leq \tau \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, así que la métrica inducida debido al hiperboloide es

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) d\theta^2. \quad (2.52)$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero de esta métrica son $\Gamma_{\theta\theta}^\tau = l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sinh\left(\frac{\tau}{l}\right)$, $\Gamma_{\theta\tau}^\theta = \frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right)$, entonces tendremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a resolver debido a las ecuaciones (2.6)

$$\begin{aligned} a = b = \theta &\longrightarrow \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} = \xi_\tau l \cosh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sinh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta, \\ a = b = \tau &\longrightarrow \frac{\partial \xi_\tau}{\partial \tau} = 0, \quad \Rightarrow \xi_\tau = f(\theta), \\ a = \theta, b = \tau &\longrightarrow \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi_\tau}{\partial \theta} = 2\xi_\theta \frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

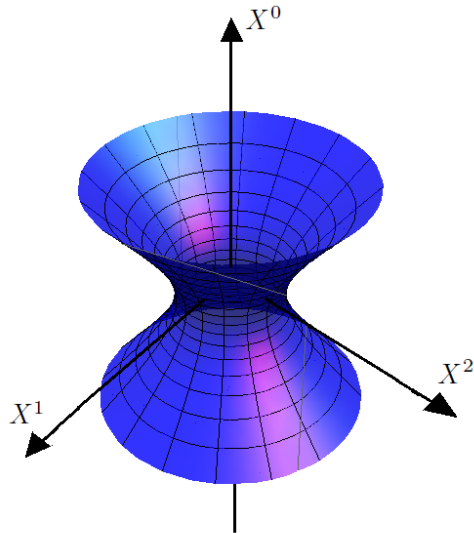


Figura 2.2: Espacio hiperbólico 2D de curvatura positiva incrustado en el espacio-tiempo de Minkowski 3D.

Y la solución general del anterior sistema de ecuaciones diferenciales está dada por

$$\begin{aligned} \xi_\tau = c_2 \cos \theta + c_3 \sin \theta = -\xi^\tau, \quad \xi_\theta = \cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) \left(l \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) (c_2 \sin \theta - c_3 \cos \theta) + c_1 \right) \\ \xi^\theta = \frac{1}{l^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{l}\right) \xi_\theta, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes y el vector de Killing es

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \xi^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = c_1 \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + c_2 \left(\frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \\ &+ c_3 \left(-\frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \end{aligned}$$

Entonces la base vectores es

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_1 &= \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, & \vec{\xi}_2 &= \frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \vec{\xi}_3 &= -\frac{1}{l} \tanh\left(\frac{\tau}{l}\right) \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \tau}.\end{aligned}\quad (2.55)$$

El cálculo de sus conmutadores nos da lo siguiente

$$\left[\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\right] = \vec{\xi}_1, \quad \left[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\right] = -\frac{1}{l^2} \vec{\xi}_3, \quad \left[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_3\right] = \frac{1}{l^2} \vec{\xi}_2. \quad (2.56)$$

Esto nos define el álgebra de Lie del grupo de isometrías de $SO(2, 1)$, que al final viene siendo un subgrupo de isometrías del grupo de Poincaré $(2+1)$ -dimensional. El escalar de curvatura para este caso es $R = 2/l^2$.

2.3.4.2. Hiperboloide n-dimensional con escalar de curvatura $R < 0$.

Como en el caso anterior, este espacio hiperbólico n-dimensional puede ser visualizado encajado en un espacio plano $(n+1)$ -dimensional pero ahora la signatura de la métrica plana se modifica mediante la adición de dos direcciones tipo tiempo, de las cuales una juega el mismo rol como en el espacio-tiempo de Minkowski y $(n-1)$ direcciones tipo espacio, por lo tanto este no es un espacio-tiempo en el sentido ordinario que hemos estado estudiando (una variedad Lorentziana con una dimensión temporal y $(n-1)$ dimensiones espaciales). La métrica en cuestión es

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^{n-1})^2 - (dX^n)^2 \quad (2.57)$$

y el espacio hiperbólico es definido por la hipersuperficie

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^{n-1})^2 - (X^n)^2 = a^2 \quad a = \text{cte.} \quad (2.58)$$

El encaje de esta hipersuperficie en la métrica plana (2.57) dará un escalar de curvatura inducido R

$$R = -\frac{n(n-1)}{a^2}. \quad (2.59)$$

Este espacio también es conocido como el espacio de anti-de Sitter n-dimensional (AdS_n). Además es un espacio homogéneo que tiene $n(n+1)/2$ vectores de Killing que generan el grupo de isometrías de $SO(n-1, 2)$, así que, AdS_n es un espacio máximamente simétrico.

Ejemplo 5. El espacio anti-de Sitter 2D AdS_2 .

Como lo hemos venido haciendo consideraremos una parametrización que sea solución de (2.58), la cual es

$$X^0 = a \cosh(\rho) \operatorname{sen}(t), \quad X^2 = a \cosh(\rho) \cos(t), \quad X^1 = a \operatorname{senh}(\rho) \quad (2.60)$$

donde $0 \leq \rho < \infty$ y $-\infty < t < \infty$, dicho hiperboloide se ve ilustrado en la Fig. (2.3). Esta parametrización nos permitirá tener la siguiente expresión para la métrica (2.57)

$$ds^2 = -a^2 \cosh^2(\rho) dt^2 + a^2 d\rho^2. \quad (2.61)$$

El cálculo de sus vectores de Killing se obtiene de manera sencilla, estos serán los siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1 &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t}, & \vec{\xi}_2 &= \frac{1}{a^2} \cos(t) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{a^2} \tanh(\rho) \sin(t) \frac{\partial}{\partial t}, \\ \vec{\xi}_3 &= \frac{1}{a^2} \sin(t) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{a^2} \tanh(\rho) \cos(t) \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

Además obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3] = \vec{\xi}_1, \quad [\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2] = \frac{1}{a^2} \vec{\xi}_3, \quad [\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_3] = \frac{1}{a^2} \vec{\xi}_2 \quad (2.63)$$

Esto nos define el álgebra de Lie del grupo de isometrías $SO(1, 2)$. El escalar de curvatura para este caso es $R = -2/a^2$

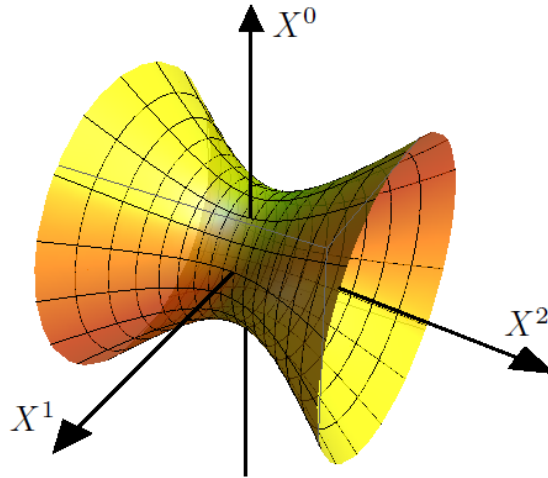


Figura 2.3: Espacio hiperbólico 2D de curvatura negativa incrustado en un espacio plano 3D.

3

Espacio-tiempo de Sitter (dS)

En este capítulo se introduce la configuración básica para el estudio de la geometría clásica del espacio tiempo de Sitter en dimensiones arbitrarias.

3.1. Soluciones máximamente simétricas a las ecuaciones de Einstein

Comencemos con la acción de Einstein-Hilbert n-dimensional acoplada con materia:

$$S = \frac{1}{16\pi G_{(4)}} \int d^n x \sqrt{|g_{(n)}|} (R_{(n)} - 2\Lambda_n) + S_m, \quad (3.1)$$

donde S_m representa la acción de la materia de nuestro interés, la cual se anula para el límite de gravedad pura, $g_{(n)}$, $R_{(n)}$, y Λ_n son la métrica, el escalar de curvatura y la constante cosmológica n-dimensional y esta última la consideraremos positiva para el caso de espacios de Sitter. Así que las ecuaciones de Einstein se obtienen bajo un principio de mínima acción de la acción (3.1)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_n g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

aquí los índices griegos representan al espacio-tiempo n-dimensional y el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ se define por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.3)$$

Para el espacio de Sitter puro el tensor de energía-momento de la materia, $T_{\mu\nu}$, se anula de modo que este espacio-tiempo se puede interpretar como una solución de las ecuaciones de Einstein (3.4)

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_n g_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

de un espacio-tiempo vacío con una energía de vacío constante y positiva ($\Lambda_n > 0$):

$$T_{\mu\nu}^{\text{vacío}} \equiv \frac{\Lambda_n}{8\pi G_4} g_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Tenemos así que la única componente no trivial de las ecuaciones de Einstein (3.4) es

$$R_{(n)} = \frac{2n}{n-2} \Lambda_n > 0. \quad (3.6)$$

Esto quiere decir que el espacio tiempo de Sitter es un espacio máximamente simétrico-como anteriormente ya se había comprobado.

3.2. De Sitter como un hiperboloide en (n+1)D

Como vimos en la sección anterior la topología del espacio-tiempo n-dimensional de curvatura constante y positiva dS_n que fue encajado en Minkowski (n+1)D podía visualizar si introducíamos la restricción algebraica (2.46) en la métrica (2.45) del espacio-tiempo plano (n+1)D. Ahora juntaremos este estudio realizado de dS_n con las ecuaciones de Einstein. Primero vemos que en un espacio-tiempo de Minkowski (n+1)D, la ecuación de Einstein también se satisface trivialmente

$$0 = R_{(n+1)} \equiv g^{AB} R_{AB} = R_{(n)} + R_{DD}, \quad (3.7)$$

donde R_{n+1} , g^{AB} y R_{AB} son el escalar de curvatura, el tensor métrico y el tensor de Ricci (n+1)D respectivamente y además R_{DD} es la componente n+1, con los índices en mayúsculas A, B, \dots , corriendo de 0 a n . Si hacemos $R_{DD} = -\frac{2n}{n-2} \Lambda_n$ la cual implica una curvatura constante positiva del encaje del espacio, entonces la ecuación (3.2) de Sitter se reproduce.

Enseguida aclararemos la relación que guardan la constante cosmológica Λ_n y la longitud l mediante la sustitución de la restricción (2.46) en la ecuación de Einstein (3.6). Para especificar esto, primero vemos que el escalar de curvatura en (3.7) no se anula, entonces podremos comparar (3.6) con (2.48) y así determinar la relación entre la longitud l y la constante cosmológica Λ

$$\Lambda_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2l^2}. \quad (3.8)$$

3.3. De Sitter en diferentes coordenadas

Una vez que conocemos la geometría que representa el espacio-tiempo de Sitter, lo que ahora realizaremos es especificar ciertas transformaciones de coordenadas que pueden describir parte del espacio-tiempo de Sitter.

3.3.1. Coordenadas globales (τ, θ_i) , $i = 1, 2, \dots, n - 1$

El espacio-tiempo de Sitter puede visualizarse como un hiperboloide n-dimensional encajado en un espacio-tiempo de Minkowski (n+1)-dimensional describiendo una topología cilíndrica $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ ver Fig. (3.1).

Un sistema de coordenadas conocidas para cubrir todo el hiperboloide n-dimensional (2.46) se obtiene de la siguiente observación: Como se muestra en la Fig. (3.1), la relación entre X^0 y la longitud espacial de (X^1, X^2, \dots, X^n) es hiperbólica y la sección espacial de una X^0 constante define una esfera (n-1)D de radio $\sqrt{l^2 + (X^0)^2}$. Por lo tanto, una elección conveniente que satisface la ecuación (2.46) es

$$X^0 = l \sinh \frac{\tau}{l} \quad y \quad X^i = l \omega^i \cosh \frac{\tau}{l}, \quad (3.9)$$

donde $-\infty < \tau < \infty$ y las $\omega^{i'}$ s para las secciones espaciales de una τ constante satisfacen

$$\sum_{i=1}^n (\omega^i)^2 = 1 \quad (3.10)$$

Posteriormente, se tienen n variables angulares θ_i :

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \cos \theta_1, & 0 \leq \theta_1 < \pi, \\ \omega^2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, & 0 \leq \theta_2 < \pi, \\ &\vdots & \\ \omega^{n-2} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-3} \cos \theta_{d-3}, & 0 \leq \theta_{n-3} < \pi, \\ \omega^{n-1} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, & 0 \leq \theta_{n-2} < \pi, \\ \omega^n &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} & 0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) y las relaciones de (3.11), en la métrica (2.45), obtenemos una métrica prescrita en términos de las coordenadas (τ, θ_i) :

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2 \left(\frac{\tau}{l} \right) d\Omega_{n-1}^2, \quad (3.12)$$

donde $d\Omega_{n-1}^2$ es el elemento de línea de una esfera S^{n-1}

$$d\Omega_{n-1}^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) d\theta_j^2. \quad (3.13)$$

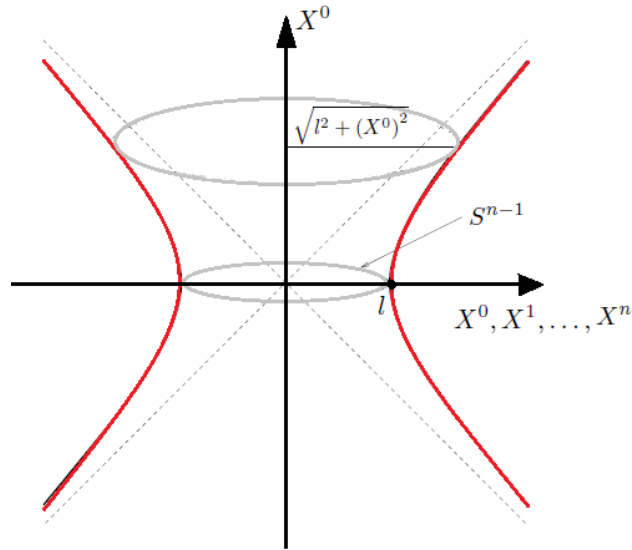


Figura 3.1: Hiperboloide n-dimensional de Sitter incrustado en el espacio-tiempo de Minkowski (n+1)-dimensional.

Dado un tiempo fijo τ en estas coordenadas, la hipersuperficie espacial corresponderá a una esfera S^{n-1} de radio $l \cosh(\tau/l)$. Por lo tanto, su radio es infinitamente grande cuando $\tau \rightarrow -\infty$, se reduce al radio mínimo l en $\tau = 0$, y luego se incrementa a un tamaño infinito con $\tau \rightarrow \infty$. Nuevamente enfatizamos que la sección espacial es compacta (finita) excepto para el pasado y futuro más lejano. En este sistema de coordenadas, $\partial/\partial\theta_{n-1}$ es el único vector de Killing, porque la métrica (3.12) es isométrica bajo la rotación de una coordenada θ_{n-1} . Por otro lado, $\partial/\partial\tau$ no es un vector de Killing y perdiendo esta simetría se rompe la conservación de la energía de modo que no hay un Hamiltoniano definido correctamente y esto traerá como consecuencia que el procedimiento de cuantificación no se produzca de forma sencilla.

3.3.2. Coordenadas conformes (T, θ_i) , $i = 1, \dots, n-1$

Una propiedad notable de Sitter es proporcionado del tensor de por el tensor de Weyl (o conforme)

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{n-2} (g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (3.14)$$

para $n \geq 4$, o el tensor de Cotton

$$C^{\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\rho\sigma\mu}}{\sqrt{-g}} \nabla_{\sigma} \left(R^{\nu}_{\rho} - \frac{\delta^{\nu}_{\rho}}{4} R_{(3)} \right) \quad (3.15)$$

para $n = 3$. Sustituyendo la ecuación de Einstein (3.6) y la ecuación (2.9) tensores conformes de las ecuaciones (3.14) y (3.15), obtenemos que estos se anulan, por lo que se demuestra que el espacio-tiempo de Sitter es conformemente plano:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{2}{n(n-2)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \right] (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R_{(n)} = 0 \quad (3.16)$$

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho}}{\sqrt{|g_{(n)}|}} \nabla_{\rho} (R_{(n)} - 4\Lambda_n) = 0 \quad (3.17)$$

Por lo tanto, la condición (2.9) que el tensor de curvatura de Riemann está determinado únicamente por el escalar de curvatura es equivalente a la condición de que el tensor conforme se anule en este sistema. En consecuencia, el único parámetro de Sitter $l = \sqrt{(n-1)(n-2)/2\Lambda_n}$, puede ser escalado por una transformación de Weyl.

La anterior propiedad conforme de Sitter nos sugiere que el sistema de coordenadas conforme es un buen sistema de coordenadas. Así que la métrica es escrita en términos de un tiempo conforme T como

$$ds^2 = F(T/l)^2 (-dT^2 + l^2 d\Omega_{n-1}^2) \quad (3.18)$$

Si se compara la métrica de las coordenadas globales (3.12) con la de las coordenadas de conforme (3.18), entonces la transformación de coordenadas entre estas dos se resume en una ecuación diferencial de primer orden de $F(T/l)$

$$\frac{d \log F}{dT} = \pm \sqrt{F^2 - 1}, \quad (3.19)$$

donde $F(T/l) = \cosh(\tau/l) \geq 1$ proporciona una condición de frontera de la forma $F(0) = 1$. Y la única solución de la anterior ecuación es

$$F(T/l) = \sec\left(\frac{T}{l}\right). \quad (3.20)$$

Sustituyendo el resultado de (3.20) en la métrica (3.18), obtenemos

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{T}{l}\right)} (-dT^2 + l^2 d\Omega_{n-1}^2) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{T}{l} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

Ya que la métrica (2.20) es isométrica bajo la rotación de θ_{n-1} , $\partial/\partial\theta_{n-1}$ es un vector de Killing y no habrá otro. Por lo tanto, la única simetría que existe es la simetría axial. Tenga en cuenta que existe una correspondencia biunívoca entre las coordenadas globales (3.12) y las coordenadas conforme (3.21), lo que significa que el sistema de coordenadas conforme describe todo el espacio-tiempo de Sitter. Además, cualquier geodésica nula con respecto a la métrica conforme (3.21) es también nula en la métrica conformemente transformada:

$$d\tilde{s}^2 \equiv \cos^2\left(\frac{T}{l}\right) ds^2 = -dT^2 + l^2 d\Omega_{n-1}^2. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, el diagrama de Penrose para de Sitter puede fácilmente ser identificado a partir de la métrica (3.22), que contiene toda la información sobre la estructura causal del de Sitter, pero las distancias son altamente distorsionadas. Sin embargo, vamos a discutir el diagrama de Penrose para de Sitter en una sección posterior. Como se mencionó anteriormente, la topología del espacio-tiempo de Sitter es cilíndrica $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ así que para procede a hacer el diagrama de Penrose es necesario cambiar el hiperboloide por un cilindro de n dimensiones de una altura finita, siendo este $I \times S^{n-1}$ ($I = [0, \pi]$). Una vez más nótese que el sistema de coordenadas conforme (3.21) no incluye la simetría de traslaciones temporales, así que que el Hamiltoniano no puede ser escogido como una cantidad conservada y la teoría cuántica en estas coordenadas también está inconclusa.

3.3.3. Coordenadas planas (t, x^i) , $i = 1, \dots, n - 1$

Una característica notable del espacio de Sitter (3.6) es el hecho de que es máximamente simétrico. Consideremos un observador comóvil en el espacio de Sitter puro, entonces este puede encontrar hipersuperficies espaciales máximamente simétricas que son ortogonales a su dirección temporal. La correspondiente métrica plana toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t/l) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.23)$$

donde $a(t/l)$ es el factor de escala cósmico o factor de expansión y la métrica espacial γ_{ij} (n-1)D está caracterizada por tener un tensor de curvatura de la forma

$$R_{ijkl}^{(n-1)} = k (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}), \quad (3.24)$$

donde $k = \frac{a^4}{(n-1)(n-2)} R_{(n-1)}$, donde $R_{ijkl}^{(n-1)}$ y $R_{(n-1)}$ son el tensor de Riemann y el escalar de curvatura (n-1)D.

En el espacio-tiempo de de-Sitter de nuestro interés, solamente tenemos una energía del vacío positiva (o equivalentemente una constante cosmológica positiva) como la fuente de materia dada en (3.5). Así que esto lo podemos interpretar en términos de un fluido perfecto cosmológico del cual podemos escribir su tensor de energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

donde ρ y p son la densidad de energía y presión respectivamente medidos en el sistema de referencia en reposo, y U_μ es la velocidad del fluido. Ya que el fluido está en reposo para un observador comóvil, la velocidad del fluido U_μ es

$$U^\mu = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad (3.26)$$

y entonces $T_\nu^\mu \equiv \text{diag}(-\rho, p, p, \dots, p)$. Por lo tanto, la ecuación de estado es $\omega = p/\rho = -1$ y está nos dice que es un fluido perfecto con densidad constante y positiva y una presión constante negativa:

$$\rho = -p = \frac{\Lambda_n}{8\pi G_4}. \quad (3.27)$$

Obviamente esto también es consistente con la conservación del tensor de energía-momento (3.5), es decir, $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$. Debido a la homogeneidad e isotropía de la métrica espacial (3.23) γ_{ij} la podemos escribir como la métrica de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker en términos de las coordenadas esféricas (n-1)-dimensionales (r, θ_a) , $(a = 1, 2, \dots, n-2)$:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t/l) \left[\frac{dr^2}{1 - k(r/l)^2} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \right] \quad (3.28)$$

donde $k > 0$, $k = 0$ o $k < 0$. Para $k > 0$ las hipersuperficies espaciales tienen curvatura constante positiva y son usualmente llamados modelos cerrados. Para $k = 0$ las hipersuperficies espaciales son espacios Euclídeos y son llamados modelos planos. Por último, para $k < 0$ las hipersuperficies espaciales tienen curvatura constante negativa y son llamados modelos abiertos. En virtud de la métrica (3.28), las ecuaciones de Einstein (3.4) se resumen en dos ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G_{(n)}}{n-2} \left[\frac{n}{n-1} \rho - (n-4)p \right] - \frac{k}{a^2} = \frac{n-2}{2(n-1)} \Lambda_n - \frac{k}{a^2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G_{(n)} \left(\frac{\rho}{n-1} + p \right) = \frac{n-2}{2(n-1)} \Lambda_n, \quad (3.30)$$

donde el punto denota la derivada respecto al tiempo $\dot{a} \equiv da(t/l)/d(t/l)$. El segundo miembro de la ecuación (3.30) es siempre positivo en el caso de Sitter. Esto implica que el universo representado por de Sitter está acelerándose o equivalentemente

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0, \quad (3.31)$$

se observa que es negativo, esta última expresión se conoce como el parámetro de de-

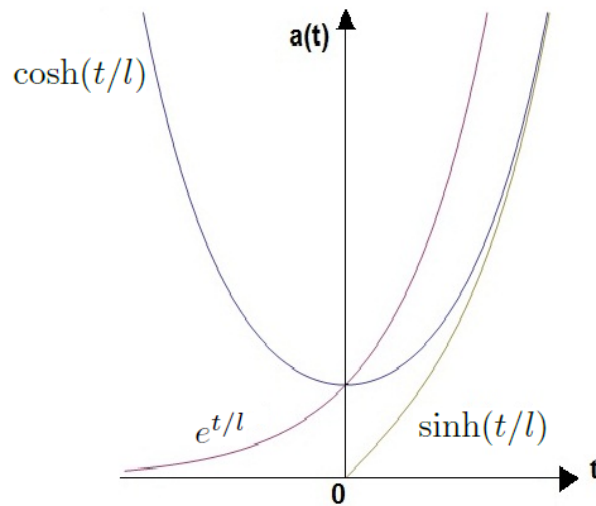


Figura 3.2: Soluciones del factor de escala para distintos valores de k .

leración. Cuando $k = 0$ o $k < 0$, el lado derecho de la ecuación (3.29) es siempre positivo. Esto quiere decir que una vez que el universo comenzó a expandirse, este lo hará por siempre. O equivalentemente, una vez que el parámetro de Hubble

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.32)$$

fue observado como positivo, la tasa de expansión del universo queda siempre positiva. Incluso para el caso de $k = 1$, y una vez que el factor de escala cósmico $a(t/l)$ llega a un tamaño crítico tal como $a_{cr} = \sqrt{2(n-1)/(n-2)\Lambda_n}$ el universo continuará expandiéndose eternamente. Las soluciones exactas de las ecuaciones de Friedmann (3.29)-(3.30) no son más que soluciones de la inflación, en consonancia se tendrá lo siguiente (ver Fig. (3.2))

$$a(t/l) = \begin{cases} l \cosh(t/l), & k > 0, \\ \exp(\pm t/l), & k = 0, \\ l \sinh(t/l), & k < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Si interpretamos la singularidad en $a = 0$ como el “Big Bang” de la creación del Universo, entonces para un universo cerrado $k > 0$, el universo se contrae en su pasado infinito $t \rightarrow -\infty$ y alcanza un mínimo en $t = 0$, posteriormente se expande en su futuro infinito $t \rightarrow \infty$, en este caso el universo experimenta un rebote y no llega a una singularidad. Para el caso $k = 0$, el Universo realmente no llega a ser de tamaño cero en su pasado infinito $t \rightarrow -\infty$, parece ser no tiene una singularidad para todo t . Para $k < 0$, tiene lo que párese ser una singularidad en $t = 0$. La constricción del hiperboloide n -dimensional(2.46) encajado en Minkowski $(n+1)D$ puede ser descompuesta en dos constricciones si se introduce un parámetro adicional t , una de las cuales será un hiperboloide 2-dimensional de radio $\sqrt{1 - \left(\frac{x^i}{l}\right)^2} e^{2t/l}$

$$-\left(\frac{X^0}{l}\right)^2 + \left(\frac{X^d}{l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x^i}{l}\right)^2 e^{2t/l}, \quad (3.34)$$

y la otra una esfera $(n-1)$ -dimensional de radio $\frac{x^i}{l} e^{t/l}$

$$\begin{aligned} \frac{X^0}{l} &= -\sinh(t/l) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^i}{l}\right)^2 e^{t/l} \\ \frac{X^i}{l} &= \frac{x^i}{l} e^{t/l}, \quad i = 1, \dots, d-1 \\ \frac{X^d}{l} &= \cosh(t/l) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^i}{l}\right)^2 e^{t/l} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde $-\infty < x^i < \infty$, $-\infty < t < \infty$. Como $-X^0 + X^n = l e^{t/l} < 0$, estas coordenadas cubren únicamente la mitad inferior del espacio de Sitter como se muestra en la Fig. (3.3). Insertando la transformación (3.35) en la métrica de Minkowski $(n+1)$ -dimensional (2.45), esta toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/l} dx^{i^2} \quad (3.36)$$

que coincide exactamente con la solución para el caso de $k = 0$ en (3.33) que se encuentra resolviendo las ecuaciones de Friedmann (3.29)-(3.30). Ya que la métrica (3.36) no es isométrica bajo traslaciones temporales, $\partial/\partial t$ ni un vector de killing tipo tiempo, esto implica que no hay conservación de la energía y un Hamiltoniano bien definido, lo que dificulta la descripción de la gravedad cuántica en las coordenadas planas. Sin embargo, la métrica (3.36) es independiente de las x^i , por lo que satisface la forma invariante de (2.2). Por lo tanto, $\partial/\partial x^i$ son vectores de killing tipo espacio y la geometría espacial implica simetrías de traslación y simetrías de rotación.

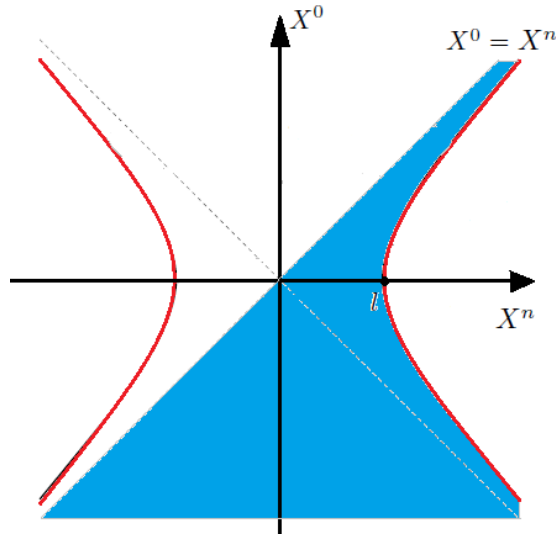


Figura 3.3: Mitad inferior sombreada de dS_n cubierto por las coordenadas planas.

3.3.4. Coordenadas estáticas (t, r, θ_a) , $a = 1, \dots, n - 2$

La constricción del hiperboloide n -dimensional (2.46) incrustado en el espacio-tiempo de Minkowski $(n+1)$ -dimensional es nuevamente descompuesta en dos constricciones mediante la introducción de un parámetro adicional r , una de las cuales uno es una hipérbola 2-dimensional de radio $\sqrt{1 - (r/l)^2}$

$$-\left(\frac{X^0}{l}\right)^2 + \left(\frac{X^d}{l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad (3.37)$$

y la otra es una esfera S^{n-1} de radio r/l

$$\left(\frac{X^1}{l}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X^{n-1}}{l}\right)^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2. \quad (3.38)$$

Por lo tanto, una buena parametrización de coordenadas para las anteriores constriccio-

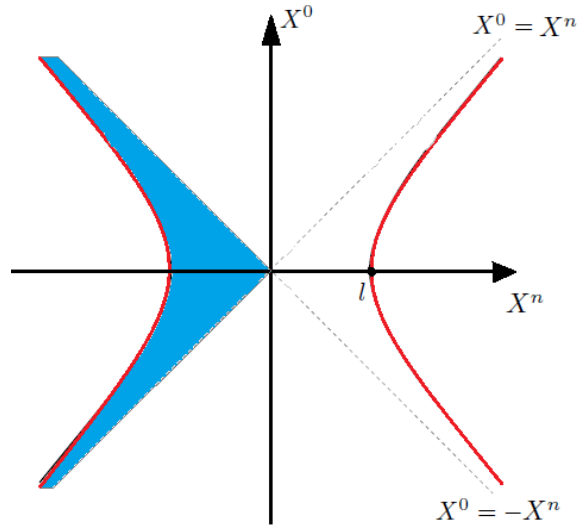


Figura 3.4: La región acotada por el horizonte de Sitter ($r \leq l$) se muestra sombreada.

nes es

$$\begin{aligned}\frac{X^0}{l} &= -\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \sinh(t/l), \\ \frac{X^i}{l} &= \frac{r}{l} \omega^i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{X^n}{l} &= -\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \cosh(t/l),\end{aligned}\tag{3.39}$$

donde las ω^i 's fueron introducidas en la parametrización de las coordenadas globales, y ($0 < r < \infty$) será identificada con la coordenada radial del sistema de coordenadas estático. Ya que $-X^0 + X^n = -\sqrt{l^2 - r^2} \exp(-t/l) \leq 0$ y $X^0 + X^n = -\sqrt{l^2 - r^2} \exp(t/l) \leq 0$, la región $r \leq l$ cubre una cuarta parte de todo dS_n como se muestra en la región sombreada en la Fig. (3.4). Luego, $r = l$ será identificado por un horizonte del espacio-tiempo de Sitter puro. Sustituyendo la transformación (3.39) en la métrica de Minkowski (n+1)D (2.45), obtendremos la métrica estática de dS_n :

$$ds^2 = - \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \right]} + r^2 d\Omega_{d-2}^2,\tag{3.40}$$

En este sistema de coordenadas $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial\theta_{n-2}$ serán dos de los vectores de Killing presentes en la métrica (3.40). En consecuencia, la geometría del espacio-tiempo tiene simetría axial y traslación temporal. Por lo tanto, el Hamiltoniano está bien definido en las coordenadas estáticas, pero la unitariedad se ve amenazada por la existencia del horizonte en $r = l$, es decir, la norma de $\partial/\partial t$ se anula.

3.4. Geodésicas

En esta sección se analizarán las posibles geodésicas de los cuatro sistemas coordenados de Sitter, obtenidas en la sección anterior. También se introducirán varias cantidades que serán de utilidad en cada sistema de coordenadas y se explicarán algunos caracteres de las geodésicas obtenidas.

La estructura de un espacio-tiempo curvo fijo suele ser investigado por los movimientos clásicos de una partícula de prueba. La curva mínima, la geodésica, que conecta dos puntos en el espacio de Sitter, por un punto inicial P_i y un punto final P_f , está determinada por el mínimo de su longitud de arco σ y está parametrizada por un parámetro arbitrario λ como $x^\mu(\lambda)$:

$$\sigma = \int_{P_i}^{P_f} d\sigma = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \frac{dI}{d\lambda} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (3.41)$$

Conforme al principio variacional, la geodésica debe obedecer la ecuación de segundo orden de Euler-Lagrange

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (3.42)$$

3.4.1. Coordenadas globales

La Lagrangiana para el movimiento de las geodésicas (3.41) es obtenido de la métrica de las coordenadas globales:

$$\mathfrak{L} = - \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + l^2 \cosh \left(\frac{\tau}{l} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.43)$$

donde λ es un parámetro afín. Las correspondientes ecuaciones de las geodésicas (3.42) están dadas por las siguientes ecuaciones acopladas

$$\frac{d^2 \tau}{d\lambda^2} + l \sinh \left(\frac{\tau}{l} \right) \cosh \left(\frac{\tau}{l} \right) \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{d\lambda^2} + \frac{2 \sinh(\tau/l)}{l \cosh(\tau/l)} \frac{d\tau}{d\lambda} \frac{d\theta_i}{d\lambda} - \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \frac{\sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_k \right)}{\prod_{k=1}^{i-1} \sin^2 \theta_k} \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 + 2 \left(\sum_{a=1}^{i-1} \frac{\cos \theta_a}{\sin \theta_a} \frac{d\theta_a}{d\lambda} \right) \frac{d\theta_i}{d\lambda} = 0. \quad (3.45)$$

Puesto que θ_{n-1} es cíclica, $d\theta_{n-1}/d\lambda$ en la ecuación (3.44) se reemplaza por una constante de movimiento J tal que

$$l^2 \cosh^2(\tau/l) \prod_{j=1}^{n-2} \sin^2 \theta_j \frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda} = J. \quad (3.46)$$

Conociendo el hecho de que dados dos puntos arbitrarios en una esfera S^{n-1} , la curva contenida en la superficie esférica que une los dos puntos y tiene longitud mínima es la geodésica de círculo máximo entre los puntos y debido a la simetría de rotación en la esfera S^{n-1} , uno siempre puede orientar el sistema de coordenadas de modo que la proyección radial de la órbita coincida con el ecuador,

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots = \theta_{n-2} = \frac{\pi}{2}, \quad (3.47)$$

de las coordenadas esféricas. Esto también puede ser confirmado por una comprobación explícita que la ecuación (3.47) debe ser una solución de la ecuación (3.45). Por lo tanto, el sistema de nuestro interés se reduce de d -dimensiones (1+1)-dimensiones sin pérdida de generalidad. Si insertamos la ecuación (3.47) en la ecuación (3.46) tendremos que

$$\frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda} = \frac{J}{l^2 \cosh(\tau/l)}, \quad (3.48)$$

de modo que la ecuación (3.44) se convierte en

$$\frac{d^2\tau}{d\lambda^2} = -\frac{J^2 \sinh(\tau/l)}{l^3 \cosh(\tau/l)}. \quad (3.49)$$

La integración de la ecuación (3.49) nos lleva a la conservación de la energía E

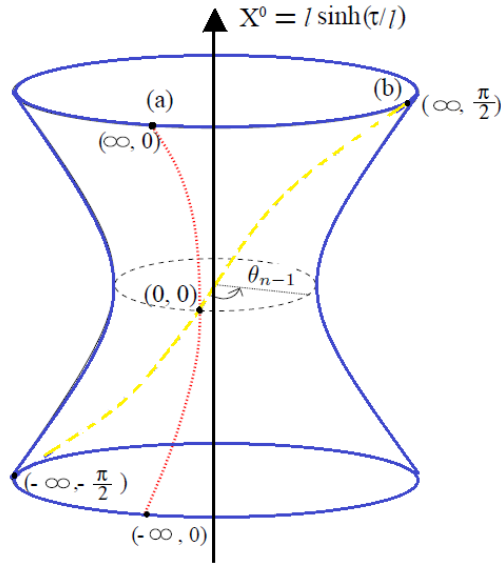


Figura 3.5: Dos movimientos representativos de las geodésicas en las coordenadas globales: (a) la línea en puntos rojos es para $J = 0$, (b) la línea en trazos amarillos es para $J \neq 0$.

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(\tau/l) \quad (3.50)$$

donde el potencial efectivo V_{eff} es dado por

$$V_{eff} = \begin{cases} 0, & J = 0 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{J}{l}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2(\tau/l)}, & J \neq 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

y por lo tanto otra constantes de movimiento E debe ser limitada por $E \geq \frac{1}{2} (J/2l)^2$. Eliminando el parámetro afín λ , tanto en la ecuación (3.48) como en la (3.50), la órbita, la cual se integra como una ecuación algebraica:

$$\tan \theta_{n-1} = \frac{J}{l} \frac{\sinh(\tau/l)}{\sqrt{(J/l)^2 + 2E \cosh^2(\tau/l)}}. \quad (3.52)$$

Dado que las secciones espaciales son esferas S^{n-1} de una curvatura constante positiva, sus geodésicas normales de $J = 0$ son las líneas en la cuales se contraen a un mínimo de separación espacial y luego se vuelven a expandir hasta el infinito (Vea la línea punteada en Fig (3.5)). Otra movimiento de la geodésica de $J \neq 0$ (línea discontinua) es dibujada también en Fig. (3.5). Por ejemplo, supongamos que el parámetro afín λ es identificado con la coordenada temporal τ . Entonces, se puede confirmar a partir del análisis anterior que cada geodésica que proviene desde cualquier punto se puede extender a valores infinitos de los parámetros afines en ambas direcciones, $\lambda = \tau \in (-\infty, \infty)$, de modo que el espacio-tiempo de Sitter se dice que es geodésicamente completo. Sin embargo, existen puntos separados espacialmente que no pueden ser unidos por una geodésica.

3.4.2. Coordenadas conformes

Al igual que en el procedimiento anterior, podemos obtener de forma automática el Lagrangiano para las geodésicas a partir de la métrica conforme (3.21):

$$\mathfrak{L} = \sec^2\left(\frac{T}{l}\right) \left[-\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i\right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda}\right)^2 \right], \quad (3.53)$$

y entonces las correspondientes ecuaciones de las geodésicas son

$$\frac{d^2 T}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} \frac{\sin(T/l)}{\cos(T/l)} \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l \frac{\sin(T/l)}{\cos(T/l)} \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \left(\frac{d\theta_i}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{d\lambda^2} + \frac{2 \sin(T/l)}{l \cos(T/l)} \frac{dT}{d\lambda} \frac{d\theta_i}{d\lambda} - \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i} \frac{\sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_k\right)}{\prod_{k=1}^{i-1} \sin^2 \theta_k} \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda}\right)^2 + 2 \left(\sum_{a=1}^{i-1} \frac{\cos \theta_a}{\sin \theta_a} \frac{d\theta_a}{d\lambda}\right) \frac{d\theta_i}{d\lambda} = 0 \quad (3.55)$$

Puesto que θ_{n-1} es cíclica, $d\theta_{n-1}/d\lambda$ se sustituye por una constante de movimiento J de la siguiente manera

$$l^2 \cos^{-2}(T/l) \prod_{j=1}^{n-2} \sin^2 \theta_j \frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda} = J. \quad (3.56)$$

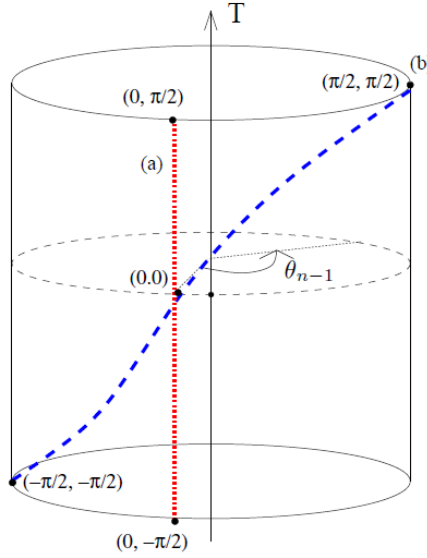


Figura 3.6: Geodésicas sobre el plano (T, θ_{n-1}) : (a) la línea punteada en rojo es para $J = 0$, (b) la línea discontinua en azul es para $J \neq 0$.

Dado que las θ_{n-1} coordenadas angulares constituyen una esfera S^{n-1} , el argumento que se mencionó en la previa sección en torno a la ecuación (3.47) será nuevamente válido y por lo tanto el sistema de nuestro interés se reduce de nuevo de n -dimensiones a $(1+1)$ -dimensiones sin pérdida de generalidad. Aplicando la condición de la ecuación (3.47) en la ecuación (3.56), tenemos

$$\frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda} = \frac{J}{l^2} \cos^2(T/l) \quad (3.57)$$

y la ecuación (3.54) se podrá reescribir como

$$\frac{dT}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} \tan(T/l) \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l \tan(T/l) \left(\frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (3.58)$$

Ahora el Lagrangiano 2-dimensional es:

$$\mathfrak{L} = \sec^2 \left[- \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + l^2 \left(\frac{d\theta_{n-1}}{d\lambda}\right)^2 \right]. \quad (3.59)$$

De aquí obtendremos la siguiente cantidad conservada \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{J}{l}\right)^2 \cos^2(T/l) - \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 \cos^{-2}(T/l). \quad (3.60)$$

Eliminando el parámetro afín λ , tanto en la ecuación (3.57) y la ecuación (3.60), obtenemos la ecuación de la órbita, la cual se integra como una ecuación algebraica

$$\tan \theta_{d-1} = \frac{J}{l} \frac{\tan(T/l)}{\sqrt{\left(\frac{J}{l}\right)^2 - 2\mathcal{E} \sec^2(T/l)}} \quad (3.61)$$

(T, θ_{n-1}) representa un cilindro de altura finita, como se muestra en la Fig. (3.6). La geodésica de energía cero, $\mathcal{E} = 0$, (o equivalentemente de momento angular cero, $J = 0$), es mostrada como una línea de puntos, y la de energía positiva, $\mathcal{E} > 0$, (o momento angular distinto de cero, $J \neq 0$), se muestra como una línea discontinua en la Fig (3.6).

3.4.3. Coordenadas planas

El Lagrangiano para el movimiento de las geodésicas para el espacio plano de $k = 0$ se lee de la métrica (3.28):

$$\mathfrak{L} = - \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + e^{2t/l} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + e^{2t/l} r^2 \sum_{j=1}^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2, \quad (3.62)$$

y las correspondientes ecuaciones de las geodésicas son

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} e^{2t/l} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r^2}{l} e^{2t/l} \sum_{j=1}^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - r \sum_{j=1}^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.64)$$

$$\frac{d^2 \theta_k}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\theta_k}{d\lambda} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta_k}{d\lambda} - \frac{\cos \theta_k}{\sin \theta_k} \frac{\sum_{j=k+1}^{n-2} \left(\prod_{i=k+1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2}{\prod_{i=1}^{k-1} \sin^2 \theta_i} + 2 \left(\sum_{a=1}^{k-1} \frac{\cos \theta_a}{\sin \theta_a} \frac{d\theta_a}{d\lambda} \right) \frac{d\theta_k}{d\lambda} = 0 \quad (3.65)$$

Ya que θ_{n-2} es cíclica, $d\theta_{n-2}/d\lambda$ es sustituida por una constante de movimiento J como

$$2e^{2t/l} r^2 \prod_{a=1}^{n-3} \sin^2 \theta_a \frac{d\theta_{n-2}}{d\lambda} = J. \quad (3.66)$$

Si utilizamos el hecho bien conocido de que cualquier geodésica que conecta dos puntos arbitrarios en una esfera S^{n-2} se ubica en su mayor círculo, así uno siempre puede escoger sin pérdida de generalidad

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n-3} = \frac{\pi}{2}, \quad (3.67)$$

la cual debe ser una solución de la ecuación (3.65) debido a la simetría rotacional de la esfera S^{n-2} . Por lo tanto, el sistema de nuestro interés se reduce de n-dimensiones a (2+1)D sin pérdida de generalidad. Aplicando la afirmación de (3.67) en (3.66) esta se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{d\theta_{n-2}}{d\lambda} = \frac{J}{2e^{2t/l} r^2}, \quad (3.68)$$

de modo que las ecuaciones (3.63) y (3.64) tomarán la siguiente forma

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{l} e^{2t/l} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{4lr^2} e^{-2t/l} = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{2}{l} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{J^2}{4r^3} e^{-4t/l} = 0. \quad (3.70)$$

Si eliminamos el tercer término de ambas ecuaciones (3.69)-(3.70) por una resta, tendremos la ecuación combinada

$$r \frac{dr}{d\lambda} e^{2t/l} = -l \frac{dt}{d\lambda} + C, \quad (3.71)$$

donde C es una constante. Finalmente, para $C = 0$, la ecuación radial (3.71) tiene como solución particular

$$r = l e^{(-t/l)}. \quad (3.72)$$

Para $J = 0$, la ecuación (3.71) se convierte en

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^{(2t/l)} \frac{dr}{d\lambda} \right) = 0 \quad (3.73)$$

Esto nos sugiere que $dr/d\lambda = C' e^{-2t/l}$ con C' siendo una constante.

La información sobre el factor de escala $a(t)$ está en gran parte adquirida a través de la observación de los cambios en la longitud de onda de la luz emitida por las fuentes distantes. Convencionalmente se mide en términos de los parámetros del corrimiento al rojo del parámetro z entre dos eventos, que se define como el cambio fraccional en la longitud de onda:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (3.74)$$

donde λ_0 es la longitud de onda observada por nosotros después de un viaje largo y λ_1 es la que es emitida por una fuente lejana. Para mayor comodidad, nos situamos en el origen $r = 0$ de coordenadas donde nuestro espacio de Sitter es homogéneo e isotrópico, y considerando un fotón que viaja con nosotros en la dirección radial con θ'_a s fijas. Supongamos que una luz se emite desde la fuente en el tiempo t_1 y llega a nosotros en el tiempo t_0 . Luego, a partir de la métrica (3.28), la geodésica nula que conecta $(t_1, r_1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ y $(t_0, 0, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$ relaciona la coordenada temporal y la distancia de la siguiente forma

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv f(r_1). \quad (3.75)$$

Si la próxima cresta de la onda deja r_1 en el tiempo $t_1 + \delta t_1$ y nos llega en el tiempo $t_0 + \delta t_0$, la independencia temporal de $f(r_1)$ proporciona

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.76)$$

Para un tiempo suficientemente corto δt_0 o (δt_1) el factor de escala $a(t)$ se aproxima por una constante a lo largo de una integración temporal en la ecuación (3.76), y con la ayuda de $\lambda_0 = \delta t_0 \ll |t_1 - t_0|$ (o $\lambda_1 = \delta t_1 \ll |t_1 - t_0|$), la ecuación (3.76) resulta

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} = 1 + H_0 (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots, \quad (3.77)$$

donde $H_0 = H(t_0)$ y $q_0 = q(t_0)$ son cantidades medidas hoy en día. Substituyendo la ecuación (3.77) en la ecuación (3.74), obtendremos

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (3.78)$$

Por otro lado, la distancia comóvil r_1 no es medible, de modo que podemos definir la distancia de luminosidad d_L :

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi F} \quad (3.79)$$

donde L es la luminosidad absoluta de la fuente y F es el flujo medido por el observador. En la expansión del universo, el flujo se diluye por el corrimiento al rojo de la luz por un factor $(1+z)$ y por la diferencia entre el tiempo de emisión y el tiempo medido. Cuando la distancia comóvil entre el observador y la fuente de luz es r_1 , una distancia física d se convierte en $a_0 r$, donde a_0 es el factor de escala cuando la luz se observa. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r_1^2 (1+z)^2}. \quad (3.80)$$

Substituyendo la ecuación (3.80) en (3.79), tenemos que

$$d_L = a_0 r_1 (1+z). \quad (3.81)$$

Usando la expansión de la ecuación (3.77), la ecuación (3.78) se expresa por

$$\frac{1}{1+z} = 1 + H_0 (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (3.82)$$

Para valores pequeños de $H_0 (t_1 - t_0)$, la ecuación (3.82) puede ser invertida a

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \dots \right]. \quad (3.83)$$

Cuando $k = 0$ y con valores pequeños de $H_0 (t_1 - t_0)$ la ecuación (3.75) da como resultado lo siguiente

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_{t_1}^{t_0} dt \left(\frac{1}{a(t_1)} - \frac{\dot{a}(t_1)}{a^2(t_1)} t + \dots \right) \\ &= \frac{1}{a_0} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde $a(t_1) \simeq a_0 + \dot{a}(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots$ se utilizó en la segunda línea y la ecuación (3.83) se insertó en la tercera línea. Reemplazando r_1 de la ecuación (3.81) en la ecuación anterior obtendremos finalmente la ley de Hubble:

$$d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \quad (3.85)$$

la cual se refiere a la distancia de una fuente con su corrimiento al rojo observado. Tenga en cuenta que podemos determinar y el parámetro de Hubble presente H_0 y parámetro de desaceleración actual q_0 , medidos de la distancias de luminosidad y del corrimiento al rojo. Como referencia, el valor observado de H_0 en la actualidad es $H_0 = 1000 \text{ km/sMpc}$ ($0,62 \lesssim h \lesssim 0,82$), así que la correspondiente escala de tiempo $T_{universo} \equiv H_0^{-1}$ es alrededor de mil millones de años y la escala de longitud $L_{universo} \equiv cH_0^{-1}$ es alrededor de varios miles de Mpc. Ya que el factor de escala está dada por una función exponencial, $a(t) = e^{t/l}$, para el espacio-tiempo plano de $k = 0$, dado de la ecuación (3.76) es integrada en una forma cerrada:

$$\frac{r_1}{l} = e^{-t_1/l} - e^{-t_0/l}. \quad (3.86)$$

Además, el parámetro del corrimiento al rojo z se expresa como

$$z = e^{(t_0-t_1)/l} - 1, \quad (3.87)$$

así la distancia de luminosidad d_L en la ecuación (3.81) se convierte en

$$d_L = l(z + z^2). \quad (3.88)$$

Comparando la ecuación (3.88) con la ley de Hubble (3.85), finalmente nos confirma que la solución en expansión del espacio plano de $k = 0$ tiene como parámetro de Hubble presente $H_0 = 1/l$, y el universo de Sitter se acelera con un parámetro de desaceleración presente $q_0 = -1$ como se esperaba.

3.4.4. Coordenadas estáticas

Escribamos el Lagrangiano de las coordenadas estáticas con la ayuda de la métrica estática (3.40):

$$\mathcal{L} = - \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sum_{j=1}^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i \right) \left(\frac{d\theta_j}{d\lambda} \right)^2. \quad (3.89)$$

Puesto que el tiempo t y la variable angular θ_{n-2} son coordenadas cíclicas, obtendremos las siguientes cantidades conservadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\theta_{n-2}/d\lambda)} = r^2 \prod_{i=1}^{n-3} \sin^2 \theta_i \frac{d\theta_{n-2}}{d\lambda} \equiv J, \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dt/d\lambda)} = - \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \frac{dt}{d\lambda} \equiv \sqrt{-2E}, \quad E < 0. \quad (3.91)$$

Por el mismo argumento que se vio en la anterior sección, el sistema de nuestro interés se reduce de n -dimensiones a $(2+1)D$ sin pérdida de generalidad, y entonces la ecuación (3.90) se convierte en

$$\frac{d\theta_{n-2}}{d\lambda} = \frac{J}{r^2}. \quad (3.92)$$

A partir de aquí vamos a utilizar las variables reescaldadas $e = E/l^2$, $x = r/l$ y $j = J/l^2$. Tenga en cuenta que j no puede exceder de 1 debido a la limitación de la velocidad de la luz. Entonces la ecuación de segundo orden de la geodésica radial que es obtenida a partir del Lagrangiano (3.90) será

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{x}{1-x^2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + 2el \frac{x}{1-x^2} - j^2 \frac{1-x^2}{x^3} = 0. \quad (3.93)$$

Y luego el Lagrangiano se puede reescribir como sigue

$$\mathfrak{L} = \frac{l^2}{1-x^2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2 j^2}{x^2} + \frac{2el^2}{1-x^2}. \quad (3.94)$$

De aquí se obtiene la conservación de la energía e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \frac{V_{eff}}{l^2} = -e \geq 0 \quad (3.95)$$

donde hemos fijado $\mathfrak{L} = l^2$ y el potencial efectivo V_{eff} es dado por

$$V_{eff} = \frac{l^2}{2} \left(\frac{j^2}{x^2} - 1 \right) (1-x^2). \quad (3.96)$$

Como se muestra en la Fig. (3.7) el movimiento de una partícula que tienen una energía e_1 nunca puede ser menor a $x = j$ debido a la fuerza centrífuga repulsiva, la cual llega a ser 0 conforme j se aproxima a 0. Todos los rangos excepto $j < r < 1$, están prohibidas por el hecho de que la energía cinética debe ser positiva. Para $e = e_2$ indicada en la Fig (3.7), una partícula de prueba se mueve en una órbita delimitada dentro de los dos puntos de retorno x_1 y x_2 . El perihelio x_1 y el afelio x_2 se obtuvieron de $dx/d\lambda$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{j^2 + 1 + 2e - \sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2}}{2}, \\ x_2^2 &= \frac{j^2 + 1 + 2e + \sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Si la energía e tienen un valor mínimo del potencial efectivo $e = e_3$, entonces el movimiento sólo es posible en $x = x_0$, de modo que el movimiento de la órbita debe ser circular. La región sombreada en la Fig. (3.7) es la región permitida para un observador estático y está limitada por el horizonte de de Sitter ($x = 1$). Esta corresponde a un cuarto de la región global del hiperboloide de la Fig (3.7).

Resolviendo para $dr/d\lambda$ de la ecuación 3.95, obtenemos

$$d\lambda = \frac{dx^2}{2\sqrt{-x^4 + (j^2 + 2e + 1)x^2 - j^2}}. \quad (3.98)$$

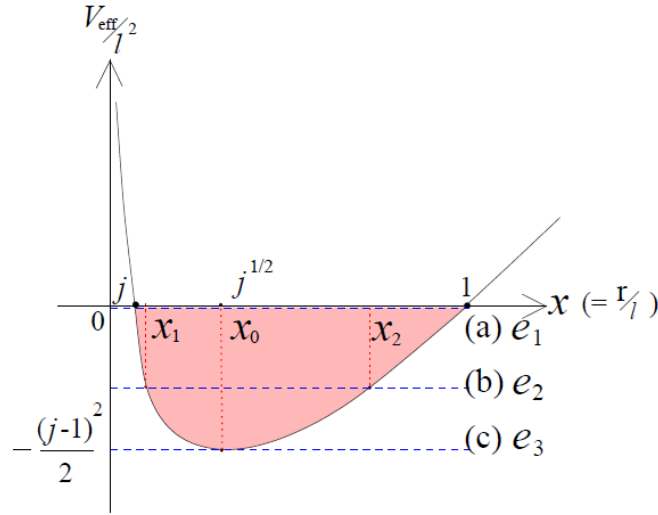


Figura 3.7: Potencial efectivo y diversos valores disponibles de la energía e : (a) $e_1 = 0$, (b) $-\frac{(j-1)^2}{2} < e_2 < 0$, (c) $e_3 = -\frac{(j-1)^2}{2}$.

Entonces la integración de esta ecuación nos da como resultado

$$x^2 = \frac{j^2 + 1 + 2e}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(j^2 + 1 + 2e)^2 - 4j^2 \sin(2\sigma + C)}, \quad (3.99)$$

donde C es una constante de integración. Si escogemos el perihelio x_1 dado en la ecuación (3.97) para $\sigma = 0$, la constante C será fijada por $-\pi/2$ y luego el afelio x_2 será $\sigma = \pi/2$. Cuando la energía e toma el valor máximo de $e = 0$, la posición del afelio en $x_1 = 1$ no es más que el horizonte de Sitter. Así que el tiempo propio transcurrido para el movimiento desde el perihelio al afelio es, $-\pi/2, \pi/2$, es finito.

Cambiando el tiempo propio σ en la ecuación (3.98) para coordinar el tiempo t de un observador estático por medio de la ecuación (3.91), nos encontramos con

$$dt = dx^2 \frac{\sqrt{-2e}}{(x^2 - 1) \sqrt{-x^4 + (j^2 + 2e + 1)x^2 - j^2}}, \quad (3.100)$$

y la integración para $e = e_2$ da lo siguiente

$$\tan[2(t - t_0)] = \frac{4e - (j^2 - 1 + 2e)(1 - x^2)}{\sqrt{-2e}(x^2 - 1) \sqrt{2e + (1 - x^2)(1 - j^2/x^2)}}. \quad (3.101)$$

Note que los rangos son

$$j < x < 1, \quad 0 < j < 1, \quad -\frac{(j-1)^2}{2} < e_2 < 0. \quad (3.102)$$

En el caso de $e = e_1$, la integración de la ecuación (3.100) dará

$$t - t_0 = \lim_{e \rightarrow 0} l \sqrt{-2e} \frac{\sqrt{(1 - j^2)(1 - x^2) - (1 - x^2)^2}}{(1 - j^2)(x^2 - 1)}. \quad (3.103)$$

Para alcanzar el horizonte de Sitter en $x = 1$, la energía e debe tener un valor de e_1 independientemente del valor de j como se muestra en la Fig. (3.8). Para $e = e_3 = -(j - 1)^2/2$, x se fija por $x_0 = \sqrt{j}$. Cuando una partícula de prueba se acerca al horizonte de Sitter, el tiempo transcurrido diverge como

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2}l}{1 - j^2} \sqrt{\frac{1 - j^2}{1 - x^2} - 1} \\ &\sim \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Combinando el resultado de integrar las ecuaciones (3.92) y (3.98), obtenemos la ecuación

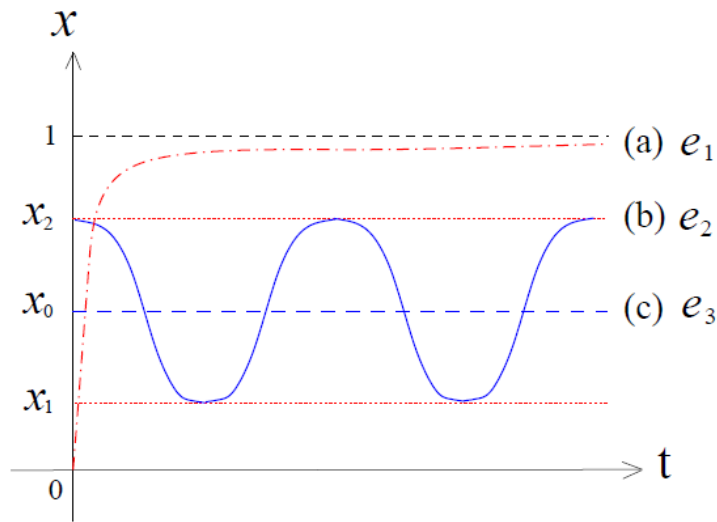


Figura 3.8: Geodésicas radiales en el tiempo t : (a) la línea de puntos y rayas es para e_1 , (b) la línea continua es para e_2 , (c) la línea de puntos es para e_3 .

de una órbita elíptica para $e = e_2$:

$$\text{sen}(2\theta_{d-2} + \theta_0) = \frac{-2j^2 + (1 + j^2 + 2e)x^2}{x^2 \sqrt{[(1 + j)^2 + 2e][(1 - j)^2 + 2e]}}. \quad (3.105)$$

Si elegimos a x como el perihelio en $\theta_{d-2} = 0$, θ_0 se convierte en $-\pi/2$. De la ecuación (3.97), el semieje mayor de x^2 está dado por

$$a = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{j^2 + 1 + 2e}{2}. \quad (3.106)$$

La excentricidad ε de la elipse puede escribirse como

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{j^2}{a^2}}. \quad (3.107)$$

La dependencia de la orbita para ε es la siguiente:

$$\begin{cases} \varepsilon < 1, & e \leq 0 : & \text{elipse,} \\ \varepsilon = 0, & e = -\frac{(j-1)^2}{2} : & \text{círculo.} \end{cases} \quad (3.108)$$

Este esquema está de acuerdo con la discusión cualitativa realizada mediante el uso del potencial efectivo (3.96) y el diagrama de energía en la Fig. (3.7).

3.5. Diagramas de Penrose

Un diagrama de Penrose es simplemente un diagrama del espacio-tiempo ordinario de una métrica sobre la cual se ha llevado a cabo una transformación de coordenadas particularmente inteligente que lleva puntos en el infinito a una posición finita para que todo el espacio-tiempo se comprima en una región finita. Como nuestro objetivo es representar la estructura causal del espacio-tiempo que se define por sus conos de luz, “inteligente” significa que las nuevas coordenadas $x^{\mu'}$ tengan una coordenada tipo tiempo y radial, con la característica de que los conos de luz radiales pueden ser consistentemente representados a 45° en un diagrama del espacio-tiempo.

Ya que nos gustaría encontrar las coordenadas en las que los conos de luz son a 45° , sólo tenemos que encontrar las coordenadas en las que la métrica de interés esta conformemente relacionada con una métrica distinta para la cual sabemos que los conos de luz son de 45° . Para llevar acabo esto lo primero es construir un espacio-tiempo $\tilde{g}_{\mu\nu}$ que contenga al espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ en cuestión, de tal forma que las métricas estén conformemente relacionadas, de la siguiente forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad (3.109)$$

para una función $\Omega^2(x)$ no nula llamada factor conforme. Notemos que el inverso de la transformación conforme es $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}$. Aquí, el factor conforme Ω es convenientemente elegido para “llevar” puntos del infinito a una posición finita y así todo el espacio-tiempo se comprime en una región finita la cual es llamada diagrama de Penrose.

3.5.1. Diagrama de Penrose del Espacio-tiempo de Minkowski

Vamos a comenzar con el espacio-tiempo de Minkowski para ver cómo funciona la técnica de los diagramas de Penrose. Escribamos al espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{M}^4 en las coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) :

$$ds^2 = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (3.110)$$

Si usamos coordenadas esféricas polares $(t, r, \theta_1, \theta_2)$ dadas por $x^0 = t, x^1 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, x^2 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, x^3 = r \cos \theta_1$ con rangos $0 < r < \infty, 0 < \theta_1 < \pi$ y $0 < \theta_2 < 2\pi$, la métrica toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta_1^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2. \quad (3.111)$$

A continuación introducimos coordenadas nulas avanzadas y retardadas las cuales se

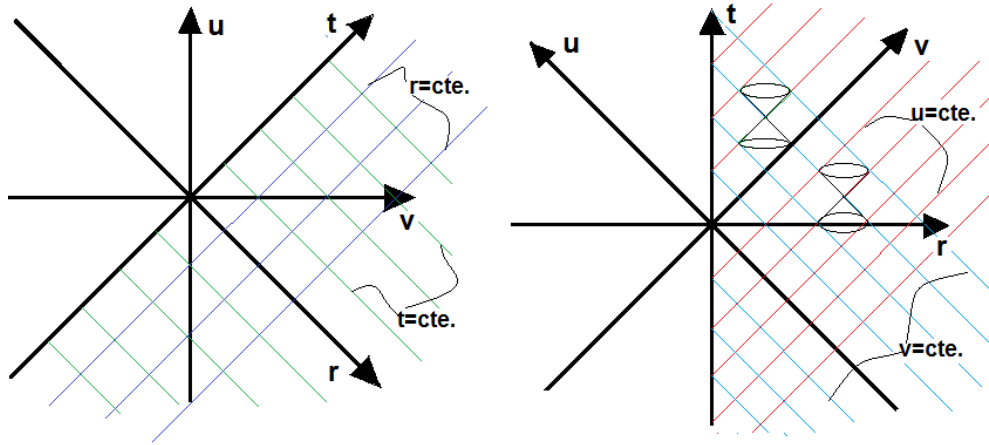


Figura 3.9: Representación de las coordenadas (v, u) y (r, t) en el espacio de Minkowski.

obtienen al hacer la transformación $(t, r, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (u, v, \theta_1, \theta_2)$ y están dadas por $u = t - r$ y $v = t + r$. Entonces $v \geq u$, y los rangos quedan definidos por $-\infty < v < \infty$ y $-\infty < u < \infty$. La métrica toma la forma

$$ds^2 = -dvdu + \frac{1}{4}(v - u)^2 (d\theta_1^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2) \quad (3.112)$$

La ausencia en la métrica de los términos dv^2 y du^2 corresponde al hecho de que las superficies $u = cte.$ y $v = cte.$ son nulas; ver Fig. (3.9).

Ahora se realizará la transformación fundamental, en donde las coordenadas con rangos infinitos v y u se transforman en coordenadas con rangos finitos V y U . La transformación $(v, u, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (V, U, \theta_1, \theta_2)$ está definida por $V = \arctan(v)$ y $U = \arctan(u)$, donde $-\frac{1}{2}\pi < V < \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < U < \frac{1}{2}\pi$ y $V \geq U$ ver Fig. (3.10). Así la métrica se transforma en

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2(V) \sec^2(U) [-4dVdU + \sin^2(V - U) (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2)], \quad (3.113)$$

por lo que la métrica física (3.112), es conforme a la métrica \tilde{g} dada por

$$ds^2 = -4dUdV + \sin^2(V - U) (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2), \quad (3.114)$$

con factor conforme

$$\Omega = 2 \cos(V) \cos(U). \quad (3.115)$$

Finalmente, para llevar la métrica a una forma más familiar, se introducen nuevas coordenadas $(U, V, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (T, R, \theta_1, \theta_2)$ dadas por $T = U + V$ y $R = V - U$. De esta forma, los rangos son $-\pi < T + R < \pi$, $-\pi < T - R < \pi$ y $R \geq 0$ y entonces la métrica \tilde{g} tendrá la siguiente expresión

$$d\tilde{s}^2 = -(dT)^2 + (dR)^2 + \sin^2 R (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2). \quad (3.116)$$

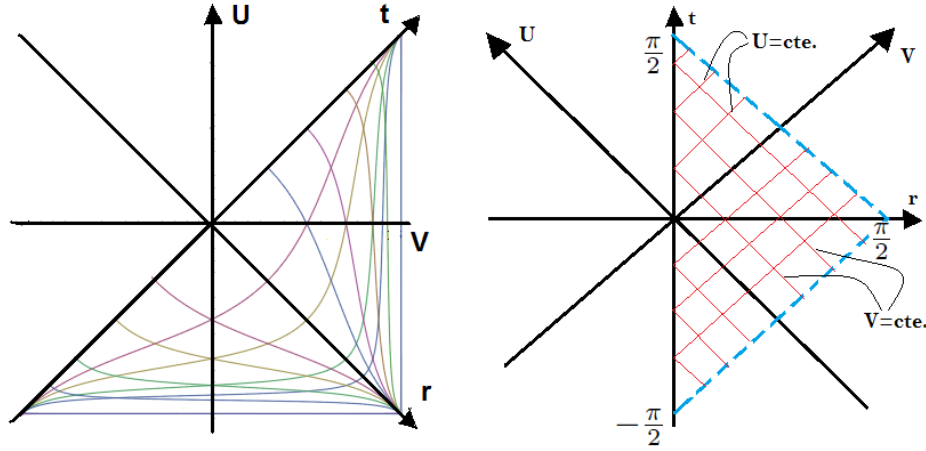


Figura 3.10: Representación de las coordenadas (V, U) y (r, t) en el espacio de Minkowski.

Observemos que esta expresión es localmente idéntica a la descripción del universo estático de Einstein $(\mathbb{R} \times S^3)$, el cual es un espacio-tiempo completamente homogéneo. Por lo tanto, \mathbb{M}^4 es conforme a la región del universo estático de Einstein acotada por $\mathcal{J} = \Omega^1(0)$. A este espacio se le conoce como el espacio de Minkowski compactificado, que se muestra en Fig. (3.11). Esta estructura nos permite dividir el infinito en regiones conformes diferentes. La frontera \mathcal{J} está formada por las superficies $V = \pi/2$ (denotada por \mathcal{J}^+) y $U = -\pi/2$ (denotada por \mathcal{J}^-) y los puntos i^+ , i^0 e i^- definidos por $V = U = \pi/2$, $V = -U = \pi/2$ y $V = U = -\pi/2$, respectivamente. Cualquier geodésica temporal se origina en i^- y termina en i^+ . De manera similar, las geodésicas espaciales empiezan y terminan en i^0 , mientras que las geodésicas nulas empiezan en \mathcal{J}^- y terminan en \mathcal{J}^+ . Debido a la simetría esférica del espacio-tiempo de Minkowski, podemos representar el espacio-tiempo de Minkowski compactificado por medio de un diagrama bidimensional, basado en las coordenadas (T, R) y suprimiendo las coordenadas θ_1 y θ_2 . En este diagrama, cada punto representa una S^2 esfera excepto los puntos i^+ , i^- , i^0 y la línea v , que es donde las coordenadas esféricas son singulares ver Fig. (3.12).

3.5.2. Diagrama de Penrose del Espacio-tiempo de Sitter

En el caso del espacio-tiempo de De Sitter sabemos que la métrica se puede escribir en términos de las coordenadas globales $(\tau, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, dadas por $x^0 = l \sinh(\tau/l)$, $x^1 = l \cos \theta_1 \cosh(\tau/l)$, $x^2 = l \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cosh(\tau/l)$, $x^3 = l \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cosh(\tau/l)$ y $x^4 = l \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cosh(\tau/l)$, con rangos $0 < \theta_1 < \pi$, $0 < \theta_2 < \pi$, $0 < \theta_3 < 2\pi$ y $-\infty < \tau < \infty$, así la métrica toma la forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2)) \quad (3.117)$$

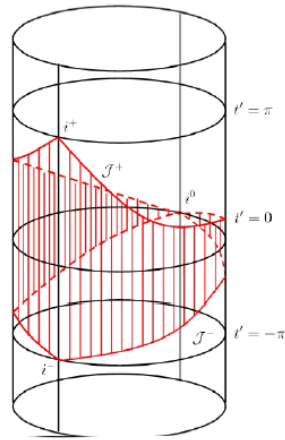


Figura 3.11: El universo estático de Einstein ($\mathbb{R} \times S^3$), proyectado como un cilindro. La región delimitada por el contorno rojo está conformemente relacionada con el espacio de Minkowski.

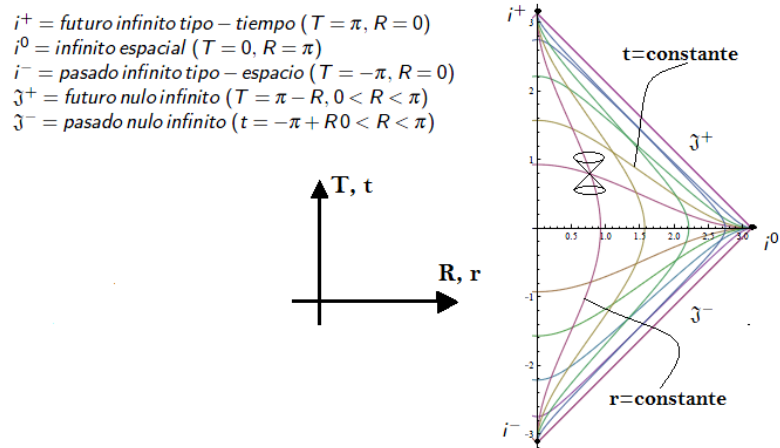


Figura 3.12: Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski.

Para estudiar el infinito conforme de dS_4 recurrimos a la transformación $\tau \rightarrow \tau'$ dada por

$$\tau' = 2 \arctan (\exp (\tau / l)) - \frac{1}{2} \pi, \quad (3.118)$$

y en consecuencia, $-\frac{\pi}{2} < \tau' < \frac{\pi}{2}$. De tal modo que la métrica se transforma en

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \tau'} \left(-(d\tau')^2 + d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2) \right) \quad (3.119)$$

que es conforme a la del universo estático de Einstein con factor conforme

$$\Omega = \cos (\tau'). \quad (3.120)$$

La frontera está acotada por $\mathcal{J} = \Omega^-(0)$ y está formada por las superficies \mathcal{J}^+ determinada por $\tau' = \frac{\pi}{2}$ y \mathcal{J}^- determinada por $\tau' = -\frac{\pi}{2}$. A la región del universo estático de Einstein delimitada por \mathcal{J} se le conoce como el espacio de Sitter compactificado, ver la Fig. (3.13).

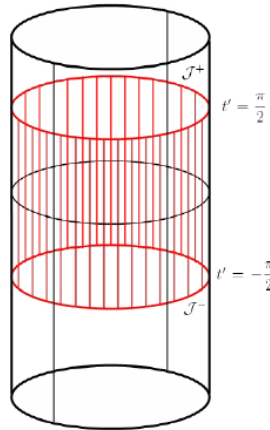


Figura 3.13: El espacio de Sitter compactificado.

4

Mundos membrana tipo de Sitter y localización de un campo escalar

El Universo está dotado de una serie de misterios cosmológicos, pero el que más aflige a los físicos es la pequeñez de la densidad de energía del vacío observada en el universo actual y sus efectos sobre la expansión acelerada del Universo en una época tardía [12, 13]. Este enigma cosmológico ha desafiado hasta ahora una explicación elegante y directa.

Como hemos discutido en el capítulo 1, los modelos de mundos brana ofrecen nuevas e interesantes posibilidades para tratar de explicar fenómenos físicos para los que aún no tenemos una explicación convincente, como el problema de jerarquía. Los mundos brana introducen también consecuencias interesantes para la física gravitacional y la cosmología (ver por ejemplo [16] y referencias citadas ahí). Históricamente los primeros modelos de mundo brana que se construyeron fueron los modelos de Randall-Sundrum, en particular en el modelo RSII se considera una 3-brana plana (espacio-tiempo de Minkowski 4D) encajado en un espacio-tiempo AdS_5 . Dado que en este modelo nuestro mundo está mimificado por un espacio plano, esto es, con constante cosmológica nula, lo cual está en desacuerdo con observaciones cosmológicas recientes [12, 13], es interesante explorar la posibilidad de tener un modelo donde la 3-brana que representa nuestro universo tenga una constante cosmológica $\Lambda > 0$ y el espacio más simple con esta propiedad es el espacio-tiempo de Sitter (como vimos en el capítulo 2, este es un espacio-tiempo máximamente simétrico).

En este capítulo estudiamos un mundo brana similar al modelo RSII (el cual contiene solo una brana), pero en el que se reemplaza la 3-brana plana del modelo de RS por

una brana dinámica o hipersuperficie física (3+1)D con un parámetro de expansión de Hubble H no nulo, lo cual se logra dotando a la brana de una métrica tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Con esta modificación de la geometría de la brana, a priori no existe garantía de que las fluctuaciones del modo cero del gravitón estén localizadas sobre la brana, si el espacio-tiempo de bulto es AdS. Sin embargo, si el espacio-tiempo de bulto es de Sitter o de curvatura positiva, entonces siempre existe un modo cero para el gravitón, que es normalizable y está localizado sobre una brana dS [9, 11]. En estas teorías la pequeñez de la constante cosmológica 4D está relacionada a la extensión infinitamente grande de la quinta dimensión.

4.1. Brana dS₄ encajada en dS₅

Los modelos de mundo brana tipo de Sitter en 5D están caracterizados por una dimensión extra y donde el espacio-tiempo del bulto tiene curvatura positiva. Estos pertenecen a una clase de modelos que intentan explicar la pequeñez de la densidad de energía del vacío cosmológica observada y la localización gravitacional. La idea básica detrás de la existencia de una solución tipo de Sitter 4D (dS_4) modificada por la deformación de la dimensión extra, comienza por considerar una métrica 5D conforme de la forma [11]

$$ds_5^2 = e^{2A(\phi)}(ds_4^2 + \rho^2 d\phi^2), \quad (4.1)$$

donde ρ es un parámetro libre con dimensión de longitud y $e^{2A(\phi)}$ es el factor de deformación (warp factor) como función de ϕ . Buscamos soluciones para las cuales el elemento de línea 4D toma la forma estándar de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds_4^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right], \quad (4.2)$$

donde κ es la constante de curvatura 3D de la parte espacial de la métrica y cuya dimensión es el inverso del cuadrado de longitud como vimos en la sección 3.3.3. El tensor de Riemann 5D satisface la ecuación (2.9)

$${}^{(5)}R_{ABCD} = \frac{\Lambda_5}{6} ({}^{(5)}g_{AC} {}^{(5)}g_{BD} - {}^{(5)}g_{AD} {}^{(5)}g_{BC}). \quad (4.3)$$

donde R_{ABCD} y g_{AC} son el tensor de Riemann y el tensor métrico 5D respectivamente. Aquí los índices en mayúsculas van de $M, N, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$. La acción de Einstein-Hilbert de 5D con constante cosmológica toma la forma

$$S_{grav} = M_f^3 \int d^5x \sqrt{|g_{(5)}|} (R_{(5)} - 2\Lambda_5), \quad (4.4)$$

donde M_f y $\Lambda_5 = 6/l^2$ son la masa de Planck y la constante cosmológica 5D respectivamente, siendo l el radio de curvatura del espacio-tiempo en el bulto 5D como vimos en 1.4

y 1.5. Si queremos tratar el modelo de membranas gordas como se hizo en [9] es suficiente considerar la acción (4.4)¹. Sin embargo si queremos tratar el modelo de membranas delgadas debemos adjuntar a la acción gravitacional la acción de una 3-brana

$$S_{brana} = -\tau \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}^b|} = -\tau \int d^4x d\phi \sqrt{|g_{(4)}^b|} \delta(\phi - \phi_0) \quad (4.5)$$

y como se realizó antes, τ denota la tensión de la brana y $g_{(4)}^b$ es la métrica inducida en la brana. Las ecuaciones de campo de Einstein 5D son dadas por

$$R_{AB} - \frac{1}{2}R_{AB}R_{(5)} = -\frac{\tau}{2M_f^3} \frac{\sqrt{|g_{(4)}^b|}}{\sqrt{|g_{(5)}|}} g_{\mu\nu}^b \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(\phi - \phi_0) - \Lambda_5 g_{AB}. \quad (4.6)$$

Las ecuaciones de Einstein para la métrica (4.1) son

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) - \frac{6}{\rho^2} (A'^2 + A'') = \frac{\tau}{\rho M_f^3} \delta(\phi - \phi_0) e^{-5A} + 2\Lambda_5 e^{2A} \quad (4.7)$$

$$2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) - \frac{6}{\rho^2} (A'^2 + A'') + 4 \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\tau}{\rho M_f^3} \delta(\phi - \phi_0) e^{-5A} + 2\Lambda_5 e^{2A} \quad (4.8)$$

$$\frac{6}{\rho^2} A'^2 - 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) - 3 \frac{\ddot{a}}{a} = -\Lambda_5 e^{2A} \quad (4.9)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede reducir a 3 ecuaciones de movimiento independientes

$$\frac{6A'^2}{\rho^2} = 6 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) - \Lambda_5 e^{2A} \quad (4.10)$$

$$\frac{6A''}{\rho^2} = -\Lambda_5 e^{2A} - \frac{\tau}{\rho M_{(5)}^3} \delta(\phi - \phi_0) \quad (4.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (4.12)$$

donde la prima y el punto denotan la derivada con respecto a la dimensión extra y y al tiempo t respectivamente. Aquí estamos interesados en estudiar una teoría de una sola brana, esto es, tendremos una teoría con extensión infinita tanto en la dirección positiva y negativa de ϕ .

4.2. Membrana gruesa espacialmente plana ($\kappa = 0$)

4.2.1. Coordenadas conformes

Como se discute en [9], es posible encontrar una solución de membrana gorda para la acción (4.4), sin necesidad de introducir un campo escalar. Esta solución se obtiene

¹Es importante mencionar que existen otro tipo de membranas gordas tipo de Sitter, en donde el mecanismo de generación de la membrana es através de un campo escalar. En este trabajo no abundaremos sobre este caso, pero el lector interesado puede consultar [11].

en el caso en que $\kappa = 0$ (universo espacialmente plano) y las ecuaciones de campo de Einstein en 5D son resueltas para el factor de escala

$$a(t) = a_0 e^{Ht} \quad (4.13)$$

y para el factor de doblamiento

$$A(\phi) = \ln(2l_0 H) - \ln \left(\exp(\rho H \phi) + \frac{l_0^2}{l^2} \exp(-\rho H \phi) \right) \quad (4.14)$$

donde l_0 y H son dos constantes de integración. Podemos obtener el resultado estándar en el espacio AdS_5 si reemplazamos l^2 con $-l_{AdS}^2$ o $6/\Lambda_5$ [30]. De esta solución podemos obtener la acción efectiva en 4D, la cual es

$$S_{eff} = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} R_{(4)} - \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} K, \quad (4.15)$$

donde la masa de Planck 4D es

$$\begin{aligned} M_{Pl}^2 &= 8\rho M_f^3 l_0^3 H^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\rho H \phi} + \frac{l_0^2}{l^2} e^{-\rho H \phi} \right)^{-3} d\phi \\ &= 8M_f^3 l_0^3 H^2 \frac{\tan^{-1}(l_0/l) + \cot^{-1}(l_0/l)}{8l_0^3/l^3} = \frac{\pi}{2} M_f^3 l^3 H^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

y K está dada por

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{M_f^3}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3A} \left(12A'^2 + 8A'' + \frac{12\rho^2}{l^2} e^{2A} \right) d\phi \\ &= 8M_f^3 l_0^3 H^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(3e^{2\varphi} + 3\lambda^2 e^{-2\varphi} - 2\lambda)}{(e^\varphi + \lambda e^{-\varphi})} d\varphi = 8M_f^3 l_0^3 H^4 \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\varphi), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde hemos definido $\varphi \equiv \rho H \phi$ y $\lambda \equiv l_0^2/l^2$. Esto produce finalmente

$$K = 8M_f^3 l_0^3 H^4 \frac{3\pi}{8\lambda^{3/2}} = 6H^2 M_{Pl}^2. \quad (4.18)$$

La acción efectiva (4.15) en 4D se puede describir en términos de la constante cosmológica 4D Λ_4 como

$$S_{eff}^{D=4} = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} (R_{(4)} - 2\Lambda_4), \quad (4.19)$$

por lo que

$$\Lambda_4 = 3H^2. \quad (4.20)$$

Estos resultados son diferentes de los que se obtienen en el modelo RSII al menos en dos aspectos. Primeramente, la reducción de la fórmula de la masa cosmológica

$$M_f^3 = \frac{2M_{Pl}^2}{\pi l^3 H^2}, \quad (4.21)$$

es claramente diferente de la que se obtiene en una configuración de un mundo brana de tipo AdS_5 estática, para la cual

$$M_f^3 = \frac{M_{Pl}^2}{l_{AdS}}. \quad (4.22)$$

En segundo lugar, y quizá más importante, es que no tenemos que ajustar ningún parámetro de la acción para mantener a Λ_4 positiva.

4.2.2. Métrica deformada

En esta sección presentaremos un modelo simple de un mundo-membrana que se genera por una interacción interesante entre una constante cosmológica 5D con una métrica inducida en la 3-brana tipo de-Sitter sin la inclusión del campo escalar. Por lo tanto, comenzamos con la siguiente acción 5D para un modelo de un mundo brana:

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{|g_{(5)}|} (R_{(5)} - 2\Lambda_5). \quad \text{con} \quad G_5 = \frac{1}{M_f^3} \quad (4.23)$$

A partir de la acción (4.23) las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en cinco dimensiones son fáciles de conseguir:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} = -\Lambda_5 g_{MN}. \quad (4.24)$$

La métrica 5D más general que es compatible con una 3-brana inducida con un fondo cosmológico espacialmente plano puede ser tomada de la siguiente manera

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} [g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu] + dy^2 \\ e^{2A(y)} [-dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] + dy^2, \quad (4.25)$$

$g_{\mu\nu}(x)$ denota al tensor métrico 4D con $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$. Utilizando la propuesta (4.25) podemos calcular las componentes del tensor de Einstein

$$3 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} - e^{2A(y)} (2A'^2 + A'') \right] = \Lambda_5 e^{2A}, \quad (4.26)$$

$$-2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + 3a^2 e^{2A(y)} (2A'^2 + A'') = -\Lambda_5 a^2 e^{2A}, \quad (4.27)$$

$$-3e^{-2A(y)} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + 6A'^2 = -\Lambda_5. \quad (4.28)$$

El conjunto de ecuaciones que resultan de (4.26)-(4.28) pueden ser escritas de una forma muy simple

$$A''(y) = \frac{1}{3} \left(2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 5\frac{\ddot{a}}{a} \right) e^{-2A(y)}, \quad (4.29)$$

$$A'^2(y) = \frac{1}{6} \left[\left(5\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) e^{-2A(y)} - \Lambda_5 \right], \quad (4.30)$$

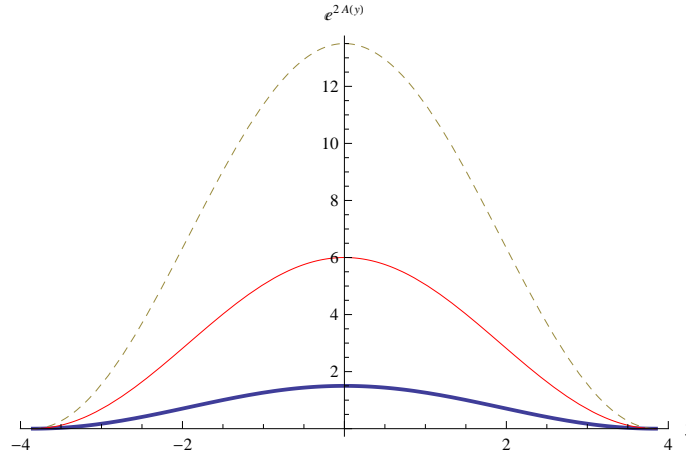


Figura 4.1: Factor de doblamiento $e^{2A(y)}$ de una brana gruesa localizada alrededor de $y = 0$ con diferentes valores de H , para la línea punteada se tiene que $H = 0.5$, para la línea delgada $H = 1.0$ y $H = 1.5$ para la línea punteada.

Al derivar la ecuación (4.30) con respecto a y y comparándola con la ecuación (4.29), podremos obtener una ecuación diferencial de segundo orden para el factor de escala

$$a\ddot{a} - \dot{a}^2 = 0. \quad (4.31)$$

La solución general de la ecuación (4.31) es $a(t) = a_0 e^{Ht}$ con a_0 y H como constantes arbitrarias, y podemos elegir el factor de escala correspondiente a un fondo cosmológico de Sitter 4D

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (4.32)$$

Ya que la constante a_0 se puede absorber dentro de una redefinición de coordenadas. Aquí H es el parámetro de Hubble y $3H^2 = \Lambda_4$ siendo Λ_4 la constante cosmológica efectiva 4D obtenida tras haber integrado la dimensión extra y . Por otro lado, la solución para el factor de doblamiento es

$$A(y) = \ln \left[\frac{H}{b} \cos(b(y - y_0)) \right], \quad (4.33)$$

donde y_0 es una constante que nos dice dónde está posicionada la brana, y $1/b$ parametriza el espesor de la 3-brana y además esta relacionada con la constante cosmológica 5D de la siguiente manera:

$$\Lambda_5 = 6b^2. \quad (4.34)$$

Así, la métrica relevante 5D con una 3-brana de Sitter inducida es obtenida

$$ds^2 = \frac{H^2}{b^2} \cos^2(by) [-dt^2 + e^{2Ht} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] + dy^2. \quad (4.35)$$

De la forma que tiene la expresión del factor de doblamiento, podremos decir que una brana tipo de Sitter se localiza alrededor $y = 0$ (ver Fig. (4.1)), y el rango de la dimensión extra es $-\left| \frac{\pi}{2b} \right| < y < +\left| \frac{\pi}{2b} \right|$.

4.2.3. La métrica conforme a dS_5

Dado que nuestro universo se está expandiendo de forma acelerada, este puede ser descrito por una 3-brana de dS_4 ya que una propiedad notable de este modelo cosmológico es que $\ddot{a} > 0$. Por otra parte, como se ha indicado anteriormente, la constante cosmológica efectiva 4D está relacionado con el parámetro de Hubble en la forma usual, es decir, $\Lambda_4 = 3H^2$.

Bajo este escenario es importante escribir la métrica (4.35) en una forma conforme mediante la realización de la transformación de coordenada

$$dz = e^{-A(y)} dy. \quad (4.36)$$

Entonces, la siguiente expresión para z se puede obtener

$$z(y) = \int e^{-A(y)} dy = \frac{2}{H} \operatorname{arctanh} \left[\tan \left(\frac{by}{2} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Se puede ver con facilidad que $z \rightarrow \pm\infty$ cuando $y \rightarrow \pm \left| \frac{\pi}{2b} \right|$, por lo que el rango de z es $-\infty < z < +\infty$. Debido a esta transformación, el factor de doblamiento A puede ser reescrita como una función de z

$$A(z) = \ln \left[\frac{H}{b} \operatorname{sech}(Hz) \right], \quad (4.38)$$

y la métrica adopta la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2A(z)} [g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + dz^2] \\ &= \frac{H^2}{b^2} \operatorname{sech}^2(Hz) [-dt^2 + e^{2Ht} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + dz^2]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Al igual que en la sección (4.2) de la solución de (4.38) se podrá obtener la acción efectiva 4D

$$S_{eff} = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} R_{(4)} + \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} \mathcal{K}, \quad (4.40)$$

así que la masa de Planck 4D es

$$M_{pl}^2 = M_f^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{3A(z)} dz = \frac{M_f^3 H^3}{b^3} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3(Hz) dz = \frac{\pi M_f^3 H^2}{2b^3}, \quad (4.41)$$

que resulta ser finita, como debe ser para una teoría 4D bien definida, por otro lado \mathcal{K} es dada por

$$\mathcal{K} = \frac{4H^2 M_f^3}{b^3} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^5(Hz) dz = \frac{3\pi M_f^3 H^4}{2b^3} = 3H^2 M_{Pl}^2. \quad (4.42)$$

Después de haber integrado sobre la coordenada extra z haremos una comparación directa de los resultados de la acción de Einstein-Hilbert 4D en la brana

$$S_{brana} = M_{pl}^2 \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} (R_{(4)} - 2\Lambda_4), \quad (4.43)$$

como resultado se tendrá

$$\Lambda_4 = 3H^2. \quad (4.44)$$

Esta relación también puede obtenerse a partir de las ecuaciones Friedmann y es derivada directamente a partir de la variación de la acción (4.43).

4.2.4. De la membrana dS_4 encajada en dS_5 a RSII

Una cuestión interesante es verificar si hay un límite significativo cuando el parámetro de Hubble se anula $H = 0$. Para aclarar este punto, expresemos la solución de las ecuaciones de Einstein (4.33) de la siguiente manera:

$$A(y) = \ln \left[e^{-iby} \frac{H^2 + e^{2iby} (b - \sqrt{b^2 - H^2})^2}{2b (b - \sqrt{b^2 - H^2})} \right], \quad (4.45)$$

que es equivalente a la ecuación (4.33) con $by_0 = i \ln \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - H^2}}{H} \right)$. Cuando el parámetro H es pequeño, la solución anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned} A(y) &\cong \ln \left[e^{-iby} \frac{H^2 + e^{2iby} \left(\frac{H^2}{2b} \right)^2}{2b \left(\frac{H^2}{2b} \right)} \right] \\ &= \ln \left[e^{-iby} \left(1 + e^{2iby} \left(\frac{H}{2b} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por lo tanto, al tomar el límite de $H \rightarrow 0$, esta solución se reducirá al caso de la 3-brana espacialmente plana:

$$A(y) = -iby \equiv -k |y|, \quad (4.47)$$

donde hemos utilizado la simetría \mathbb{Z}_2 a lo largo de la coordenada extra y y además se impuso que $ib \equiv k$. Como vemos este límite permitió pasar de un espacio de Sitter a uno de anti de Sitter, ya que, el análisis de este límite produjo la solución de Randall-Sundrum, lo que implica que tenemos que añadir a la acción 5D la correspondiente delta en el espacio-tiempo de 4D para tener consistencia matemática. Este resultado se puede ver dentro de las ecuaciones diferenciales (4.29)-(4.30), ya que, si fijamos $H = 0$, de la ecuación (4.30) vemos que la constante Λ_5 debe ser negativa, puesto que es proporcional a $-A^2$, y así finalmente se obtiene la solución

$$A(y) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6}} |y|, \quad (4.48)$$

que justamente corresponde a la solución de RSI. Por lo tanto, la conclusión es que una brana plana debe estar encajada en un espacio-tiempo 5D de anti de Sitter.

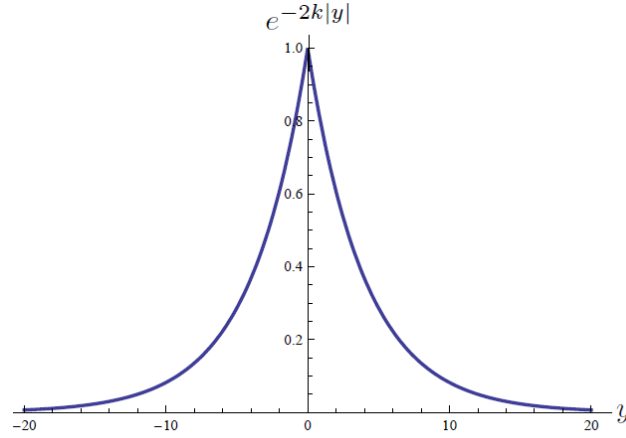


Figura 4.2: Factor de doblamiento $e^{-2k|y|}$ de una brana delgada localizada alrededor de $y = 0$.

4.2.5. Localización de un campo escalar

En esta sección mostraremos los mecanismos que permiten localizar al campo escalar sin masa en el modelo de una 3-brana tipo de Sitter. Empecemos por considerar la acción de un campo escalar real sin masa acoplado a la gravedad

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi. \quad (4.49)$$

Al utilizar la métrica conforme (4.35), la ecuación de movimiento que se obtiene al aplicar una variación en (4.49) es

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + e^{-3A} \partial_z \left(e^{3A} \partial_z \Phi \right) = 0. \quad (4.50)$$

Luego, utilizando la descomposición de KK $\Phi(x, z) = \sum_n \phi_n(x) \chi_n(z) e^{-3A/2}$ y exigiendo que satisfaga la ecuación de Klein-Gordon con masa 4D

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \right) - m_n^2 \right] \phi_n(x) = 0, \quad (4.51)$$

donde m_n es la masa 4D de KK del campo escalar, podemos obtener la ecuación escalar para el modo $\chi_n(z)$ de KK

$$\left[-\partial_z^2 + V_0(z) \right] \chi_n(z) = m_n^2 \chi_n(z), \quad (4.52)$$

el cual es una ecuación de Schrödinger con el potencial efectivo dado por

$$V_0(z) = \frac{3}{2} A'' + \frac{9}{4} A'^2. \quad (4.53)$$

Es claro que el potencial $V_0(z)$ definido en la ecuación (4.53) está completamente determinado por el factor de doblamiento y , y, por lo tanto, se trata de un potencial independiente de masa 4D.

La acción completa 5D (4.49) puede ser reducida a la acción estándar 4D mediante una serie de escalares masivos de la siguiente forma

$$S = -\frac{1}{2} \sum_n \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_n \partial_\nu \phi_n + m_n^2 \phi_n^2), \quad (4.54)$$

cuando se integra sobre la dimensión extra, con la condición de que la ecuación (4.52) se cumple, entonces se cumplen las siguientes condiciones ortonormalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(z) \chi_n(z) dz = \delta_{mn}. \quad (4.55)$$

Para la solución que se obtuvo en (4.38), el potencial (4.53) adopta la forma

$$V_0(z) = \frac{9}{4}H^2 - \frac{15}{4}\text{sech}^2(Hz). \quad (4.56)$$

Este potencial tiene como mínimo $-\frac{3H^2}{2}$ en $z = 0$ y como máximo $\frac{9H^2}{4}$ en $z = \pm\infty$, ver

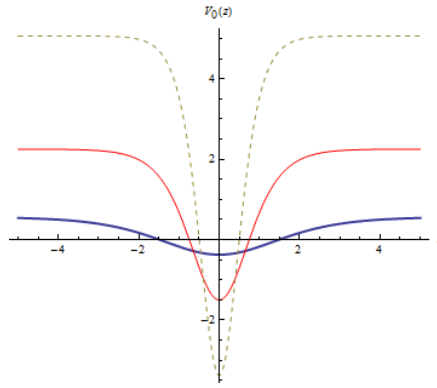


Figura 4.3: Se muestra la forma del potencial de los modos escalares de KK $V_0(z)$ para diferentes valores de H , para la línea gruesa se tiene el valor $H = 0.5$, para la línea delgada, $H = 1.0$ y $H = 1.5$ para la línea punteada.

Fig (4.3). A continuación, mediante la sustitución de la ecuación (4.56) en la ecuación (4.52), esta última se convierte en la conocida ecuación de Schrödinger con $E_n = m_n^2 - \frac{9H^2}{4}$

$$\left[-\partial_z^2 - \frac{15H^2}{4}\text{sech}^2(Hz) \right] \chi_n = E_n \chi_n. \quad (4.57)$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $u = \tanh(Hz)$, la ecuación de arriba tomará la siguiente forma de

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d}{du} \chi_n(u) \right] + \left(\frac{15}{4} + \frac{E_n}{H^2(1-u^2)} \right) \chi_n(u) = 0, \quad (4.58)$$

o de forma equivalente la reescribimos como la conocidas ecuaciones diferenciales de Legendre:

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{d}{du} \chi_n(u) \right] + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu}{(1-u^2)} \right) \chi_n(u) = 0, \quad (4.59)$$

de grado $\lambda = 3/2$ y orden $\mu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m_n^2}{H^2}}$, con solución general dada por

$$\chi_n(z) = C_1 P_{\frac{3}{2}}^{\mu}(\tanh(Hz)) + C_2 Q_{\frac{3}{2}}^{\mu}(\tanh(Hz)) \quad (4.60)$$

donde $P_{\frac{3}{2}}^{\mu}$ y $Q_{\frac{3}{2}}^{\mu}$ son las funciones asociadas de Legendre de primera y segunda clase respectivamente. En este caso el espectro de energía de los estados base se lee de

$$E_n = -H^2 \left(\frac{3}{2} - n \right)^2 \quad (4.61)$$

o en términos de la masa al cuadrado 4D,

$$m_n^2 = n(3-n)H^2, \quad (4.62)$$

donde n es un número entero y acotado en $0 \leq n < \frac{3}{2}$, de modo que es evidente que hay dos estados ligados. El primero corresponde a un estado base sin masa, es decir, $m_0^2 = 0$ con energía $E_0 = -\frac{9}{4}H^2$ y $\mu = 3/2$

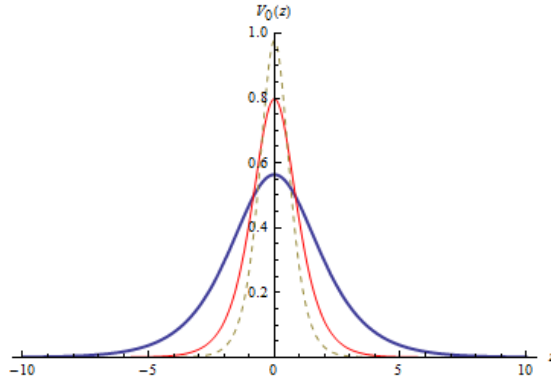


Figura 4.4: Se muestra la forma del modo cero para el escalar $\chi_0(z)$ a diferentes valores de H , para la línea gruesa se tiene el valor $H = 0.5$, para la línea delgada, $H = 1.0$ y $H = 1.5$ para la línea punteada.

$$\chi_0(z) = \sqrt{\frac{2H}{\pi}} \operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz), \quad (4.63)$$

el cual es justamente el modo sin masa y también muestra que no hay un modo escalar taquiónico y el segundo corresponde a un estado excitado con $m_1^2 = 2H^2$, energía $E_1 = -\frac{1}{4}H^2$ y $\mu = \frac{1}{2}$, y puede ser escrito como

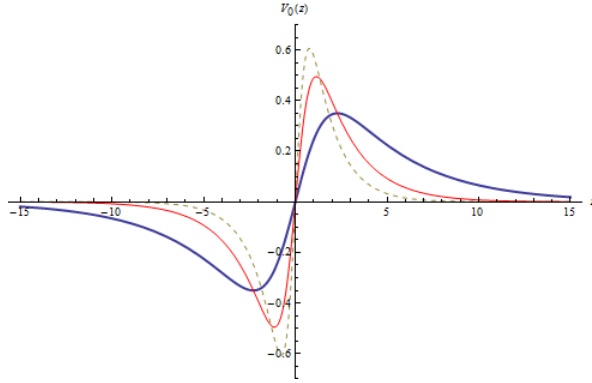


Figura 4.5: Se muestra la forma del primer estado excitado para el escalar $\chi_1(z)$ a diferentes valores de H , para la línea gruesa se tiene el valor $H = 0.5$, para la línea delgada, $H = 1.0$ y $H = 1.5$ para la línea punteada.

$$\chi_1(z) = \sqrt{\frac{2H}{\pi}} \operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz) \sinh(Hz), \quad (4.64)$$

el cual también representa un gravitón masivo localizado en la brana, y por último tenemos una torre de modos continuos masivos que comienzan de $m^2 > \frac{9H^2}{4}$ descrito por las siguientes funciones propias de orden imaginario $\mu = i\rho$

$$\chi_m(z) = C_1 P_{\frac{3}{2}}^{\pm i\rho}(\tanh(Hz)) + C_2 Q_{\frac{3}{2}}^{\pm i\rho}(\tanh(Hz)), \quad (4.65)$$

donde $\rho = \sqrt{\frac{m^2}{H^2} - \frac{9}{4}}$, que debe ser asintóticamente una onda plana.

Con el fin de encontrar este comportamiento consideramos $2m > 3H$ y $C_2 = 0$ en la ecuación (4.65) ya que el espectro continuo de funciones propias describe asintóticamente ondas planas

$$\chi_m^\mu = \sum_{\pm} C_{\pm} P_{3/2}^{\pm} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm iH\rho z}. \quad (4.66)$$

El espectro continuo comienza en $m^2 = 9H^2/4$. Así que podemos concluir que cuando la energía de los escalares es mayor que $\frac{3H}{2}$, los escalares no pueden ser atrapados en la brana, estos serán excitados en el bulto, lo cual se traduce en una buena oportunidad para descubrir experimentalmente las dimensiones extra.

4.3. Membrana delgada dS_4

4.3.1. Membrana espacialmente plana ($\kappa = 0$)

En la presencia de una acción de una brana, tenemos que considerar la métrica de una función de paso en ϕ , cuando sean calculadas las derivadas de $A(\phi)$ (con respecto a ϕ)

. La solución válida para $-\infty \leq \phi \leq \infty$ implica entonces que

$$A'' + \frac{4\lambda\rho^2 H^2}{\Phi_+^2} + \frac{\rho H \Phi_-}{\Phi_+} (2\delta(\phi - \phi_0)) = 0, \quad (4.67)$$

donde $\Phi_{\pm} \equiv e^{\rho H \phi} \pm \lambda e^{-\rho H \phi}$. Se podría pensar en una brana de tipo de Sitter como la localización de $\phi = \phi_0$ ($z = z_c$) donde el modo cero de la función de onda del gravitón ha alcanzado su punto máximo. Las componentes de las ecuaciones de Einstein en 5 dimensiones producen

$$A'' + \frac{4\lambda\rho^2 H^2}{\Phi_+^2} + \frac{2\rho H l_0}{3M_{(5)}^3 \Phi_+} (\tau \delta(\phi - \phi_0)) = 0. \quad (4.68)$$

Comparando las ecuaciones (4.67) y (4.68), obtenemos

$$\tau = \frac{3M_{(5)}^3}{l_0} (e^{\rho H \phi_0} - \lambda e^{-\rho H \phi_0}). \quad (4.69)$$

Particularmente, en el límite de $\lambda \rightarrow 0$, el espacio tiempo de 5 dimensiones llegara a ser

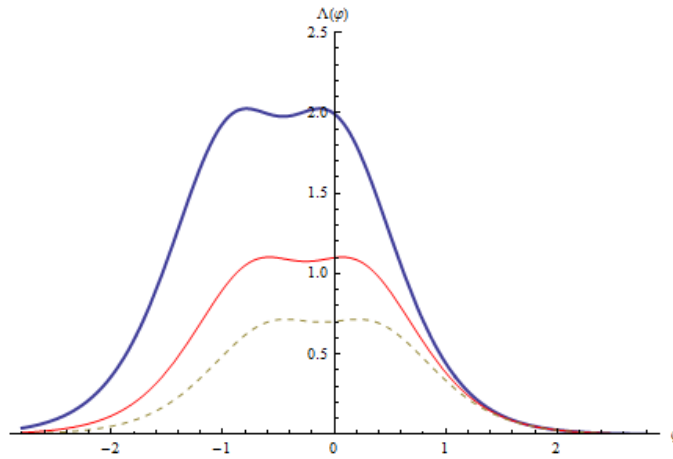


Figura 4.6: La grafica de la función $\Lambda(\varphi)$ con $\lambda = 0.4$ para la línea gruesa, $\lambda = 0.6$ para la línea delgada y $\lambda = 0.8$ para la línea punteada. Al igual que el factor de doblamiento e^A , $\Lambda(\varphi)$ es regular, tiene un pico en $\phi \equiv \phi_0$ y se decae rápidamente lejos de la membrana.

espacialmente plano y la gravedad no será localizada en este caso. Para $\lambda > 0$, el factor de doblamiento se mantiene en la región ilustrada en la Fig. (4.6) y además definimos lo siguiente

$$\phi \equiv \frac{1}{\rho} \left(z + \ln \frac{l_0}{l} \right). \quad (4.70)$$

La solución para el factor de doblamiento (4.14), y la tensión de la brana puede ser escrita en la siguiente forma estándar, es decir

$$e^{A(z)} = \frac{lH}{\cosh(Hz)}, \quad \tau = \frac{6M_{(5)}^3}{l} \sinh(Hz_c), \quad (4.71)$$

donde $z_c > 0$. La escala de la compactificación de doblamiento es

$$r_c \equiv \rho e^A = \frac{2l_0 \rho H}{(e^{\rho H \phi} + \lambda e^{-\rho H \phi})} = \frac{\rho H l}{\cosh(Hz)}. \quad (4.72)$$

El límite $\rho \rightarrow \infty$ da lugar a una teoría con una dimensión extra semi-infinita. Tenga en cuenta que, en términos de la coordenada conforme z , la solución clásica presentada anteriormente es regular en todas partes, en particular, cuando $\Lambda_5 > 0$ y en la notación que hemos utilizado tenemos que $\lambda \equiv l_0^2/l^2 = \Lambda_5 l_0^2/6$.

4.3.2. Membrana con curvatura espacial constante ($\kappa \neq 0$)

En un universo espacialmente que no es plano ($\kappa \neq 0$), las ecuaciones de Einstein de cinco dimensiones son resueltas explícitamente y esta son

$$a(t) = \frac{c_0^2 + \kappa \rho^2}{2c_0} \cosh\left(\frac{t}{\rho}\right) + \frac{c_0^2 - \kappa \rho^2}{2c_0} \sinh\left(\frac{t}{\rho}\right) \quad (4.73)$$

y para el factor de doblamiento

$$A(\phi) = \ln\left(\frac{2l_0}{\rho}\right) - \ln\left(\exp(\phi) + \frac{l_0^2}{l^2} \exp(-\phi)\right), \quad (4.74)$$

El parámetro de Hubble H (el cual apareció en caso anterior para $\kappa = 0$) ya no es arbitrario sino que ahora se fija en términos del parámetro longitud ρ , es decir, $H \rightarrow 1/\rho$. La acción efectiva de cuatro dimensiones seguirá tomando la forma de (4.15), pero ahora

$$M_{Pl}^2 = \frac{\pi M_{(5)}^3 l^3}{2 \rho^2}, \quad K = \frac{3\pi M_{(5)}^3 l^3}{\rho^4}. \quad (4.75)$$

Tenga en cuenta que, a diferencia de los modelos de mundos brana tipo RS, no se requirió la simetría \mathbb{Z}_2 con el fin de obtener una masa de Planck finita de cuatro dimensiones, ahora esto ocurre siempre y cuando $\lambda > 0$ o $l_0^2/l^2 > 0$.

En el caso $\kappa \neq 0$, la ecuación (4.69) es modificada como

$$\tau = \frac{3M_{(5)}^3}{l_0} (e^{\phi_0} - \lambda e^{-\phi_0}). \quad (4.76)$$

La escala de la compactificación de doblamiento es

$$r_c \equiv \rho e^A = \frac{2l_0}{(e^\phi + \lambda e^{-\phi})} \equiv \frac{2l}{\cosh y}, \quad (4.77)$$

en la que $y \equiv \phi - \ln(l_0/l)$. Esto es exponencialmente suprimido a manera que $y \rightarrow \pm\infty$. Claramente, no hay ningún problema con tomar el límite $\rho \rightarrow \infty$ de la solución de fondo dada arriba.

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado y mostrado un estudio paralelo entre los modelos de mundos brana tipo de Sitter y anti de Sitter. Dentro de este contexto se analizó el caso más general del encajamiento de una 3-brana tipo de Sitter en un espacio-tiempo 5D también tipo de Sitter, lo cual da lugar a un número finito de la masa de Planck 4D similar a la de los modelos de mundos brana en Randall-Sundrum donde el espacio-tiempo de fondo es un espacio anti de Sitter 5D. No obstante, la masa de Planck depende también del parámetro de Hubble, a diferencia de los modelos que tienen 3-branas planas. Este resultado se obtiene independientemente de si uno considera una brana gorda ($\kappa = 0$ y $\tau = 0$) o delgada ($\tau \neq 0$). En el caso de la membrana gorda se reportó recientemente en la literatura la localización de los campos de espín: 0, 1/2, 1 y 2 [9, 14]. En este trabajo presentamos la localización del campo escalar y vimos que el espectro consiste de dos estados discretos más una torre de KK continua separada de los estados discretos por una brecha de masa. Importante en este modelo es el hecho de que el estado discreto más bajo es un estado sin masa, por lo cual no existen estados taquiónicos en el modelo. El espectro para los otros campos, aunque no son discutidos aquí, tiene un comportamiento similar. En este sentido el modelo posee características importantes que pueden tener consecuencias interesantes al analizar fenómenos físicos en él.

Una característica importante del modelo es la posibilidad de tener una constante cosmológica 4D pequeña que sea consistente con los datos cosmológicos. Además, el modelo considerado en este trabajo también posee una brecha de masa en su espectro KK, para las fluctuaciones de la métrica, el cual es proporcional a H y, por lo tanto, proporcional a la raíz cuadrada de la constante cosmológica 4D, esto significa físicamente que la escala de energía a la que las fluctuaciones KK pueden ser excitadas será grande o pequeña dependiendo de si el parámetro de Hubble es grande o pequeño. Al tener en cuenta el límite en el que el parámetro de Hubble tiende a cero $H \rightarrow 0$, la escala de energía de la brecha de masa de las diferentes fluctuaciones del espectro del campo también tiende a desaparecer. Por lo tanto, para las fluctuaciones de la métrica, en este límite se recupera una solución exponencial para el factor de doblamiento con una métrica 4D con simetría de Poincaré en lugar de la de Sitter. Matemáticamente, este procedimiento implica la exigencia de un comportamiento de una extensión compleja del parámetro $ib \rightarrow k$ y la imposición de la simetría Z_2 sobre la variedad 5D. Así, por consistencia, se debe colocar una fuente de la configuración a través de una función delta, introduciendo así una tensión de la brana para este modelo. En este límite también la constante cosmológica sufre un

cambio y va de un valor positivo a uno negativo, es decir, el espacio-tiempo de bulto cambia de dS a AdS obteniéndose el modelo de Randall-Sundrum como límite del mundo brana dS.

Este trabajo puede ser extendido en varias direcciones y aquí sólo mencionamos algunas posibilidades: 1) Una posibilidad inmediata es estudiar la localización de los campos de materia en el modelo, cuando la curvatura κ de la parte espacial de la 3-brana dS es no nula ($\kappa \neq 0$). 2) Otra posibilidad es estudiar fenómenos físicos de altas y bajas energías en el modelo, dado que ya se conoce la expresión de los modos de los campos de materia para el caso de membranas gruesas, por ejemplo se podría estudiar el efecto Casimir entre placas paralelas en la brana. 3) Se puede ahondar en el estudio de la generalización a dimensiones $D \geq 5$. 4) Se pueden estudiar fenómenos cosmológicos en el marco de este modelo, por ejemplo, la "isotropización del Universo temprano". 5) El estudio del posible establecimiento de la correspondencia dS/QFT.

Bibliografía

- [1] G. Nordström, *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields*, Phys. Z. **15** (1914) 504-506. arXiv: physics/0702221. (document), 1.1
- [2] T. Kaluza Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse 966 (1921). O. Klein Z. F. Physik **37** (1926) 895. (document), 1.1
- [3] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B429** (1998) 263-272. (document), 1.1, 1.3
- [4] L. Randall and R. Sundrum, *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370-3373. hep-ph/9905221. (document), 1.4
- [5] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690-4693. hep-th/9906064. (document), 1.4
- [6] M. Gogberashvili, *Hierarchy problem in the shell universe model*, Int.J.Mod.Phys. **D11** (2002) 1635-1638. hep-ph/9812296. 1.4
- [7] I. H. Brevik, K. Ghoroku, S. Odintsov, and M. Yahiro, *Localization of gravity on brane embedded in AdS(5) and dS(5)*, Phys. Rev. **D66** (2002) 064016. hep-th/0204066. (document), 1.6.1
- [8] A. Kehagias and K. Tamvakis, *Graviton localization and Newton law for a dS(4)-brane in 5-D bulk*, Class. Quant. Grav. **19** L185 (2002). hep-th/0205009. (document), 1.6.1
- [9] A. Herrera-Aguilar, D. Malagón-Morejón and R. R. Mora-Luna, *Localization of gravity on a de Sitter thick braneworld without scalar fields*, JHEP **1011** (2010) 1-15, arXiv: 1009.1684. (document), 1.6.1, 1.6.2, 4, 4.1, 4.2.1, 4.3.2
- [10] I. P. Neupane, *Warped compactification to de Sitter space*, Nucl.Phys. **B847** (2001) 549-566. arXiv: 1011.5007. (document), 1.6.1, 1.6.2
- [11] I. P. Neupane, *De Sitter brane-world, localization of gravity, and the cosmological constant*, Phys. Rev. **D83** (2011) 086004. arXiv: 1011.6357. (document), 1.6.1, 4, 4.1, 1

- [12] A. G. Riess *et al.* (Supernova Search Team) *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. 116 (1998) 1009-1038. astro-ph/9805201. (document), 4
- [13] S. Perlmutter *et al.* (Supernova Cosmology Project), *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. 517 (1999) 565-586. astro-ph/9812133. (document), 4
- [14] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y.-X. Liu, D. Malagón-Morejón and R. R. Mora-Luna, *Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb's law on a pure de Sitter thick braneworld*, Phys. Rev. D **87** (2013) 095011. arXiv:1103.2430. (document), 1.6.1, 4.3.2
- [15] T. G. Rizzo, *Introduction to Extra Dimensions*, AIP Conf.Proc., **1256** (2010) 27-50. arXiv: 1003.1698. 1
- [16] R. Maartens and K. Koyama, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Rel., **13** (2010) 1-119. arXiv: 1004.3962. 1, 4
- [17] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Do We Live inside a Domain Wall?*, Phys. Lett. B125, 136 (1983). 1.1, 1.2, 1.2
- [18] K. Akama, *Pregeometry* Lect. Notes Phys. **176** (1982) 267-271. hep-th/0001113. 1.2
- [19] M. Visser, *An Exotic Class of Kaluza-Klein Models*, Phys. Lett. **B159** (1985) 22. hep-th/9910093. 1.2
- [20] M. Shifman, *Large Extra Dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm*, Int. J. Mod. Phys. **A25** (2010) 199-225. arXiv: 0907.3074. 1.2
- [21] I. Antoniadis, *A Possible new dimension at a few TeV*, Phys. Lett. **B246** (1990) 377-384. 1.3
- [22] P. Horava and E. Witten, *Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94-114. hep-th/9603142. 1.3
- [23] S. Kachru, R. Kallosh, A. D. Linde, and S. Trivedi, *De Sitter vacua in string theory*, Phys. Rev. **D68** (2003). hep-th/0301240. 1.6.1
- [24] J. M. Maldacena and C. Nuñez, *Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem*, Int.J.Mod.Phys. **A16** (2001) 822-855. hep-th/0007018. 1.6.1
- [25] J. Shelton, W. Taylor and B. Wecht, *Nongeometric flux compactifications*, JHEP **0510** (2005) 085. hep-th/0508133. 1.6.1
- [26] J. Blaback, U. Danielsson and G. Dibitetto, *Fully stable dS vacua from generalised fluxes* (2013). arXiv:1301.7073. 1.6.1

- [27] C. Damian, O. Loaiza-Brito, L. Rey and M. Sabido, *Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification* (2013). arXiv: 1302.0529. 1.6.1
- [28] C. Damian and O. Loaiza-Brito, *More stable dS vacua from S-dual non-geometric fluxes* (2013). arXiv: 1304.0792. 1.6.1
- [29] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev and M. Minamitsuji, *Thick brane solutions*, Rept. Prog. Phys.**73** (2010) 066901. arXiv: 0904.1775. 1.6.2
- [30] Gen, Uchida and Sasaki, Misao, *Radion on the de Sitter brane*, Prog.Theor.Phys. 105 (2001) 591-606. gr-qc/0011078 4.2.1
- [31] P. D. B. Collins, A. D. Martin, E. J. Squires, *Particle Physics and Cosmology*, Durham, England, 1988.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Fecha : 27/06/2013
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA) del alumno GASTON DE LOS SANTOS DE LOS SANTOS, matrícula 210280086, quien cumplió con los 144 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha veintiocho de junio del 2013 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

MUNDOS MEMBRANA TIPO DE SITTER.

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 204 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

Secretario

Román Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO

Vocal

DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL

UNIDAD IZTAPALAPA

Coordinación de Sistemas Escolares

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, DF, CP 09340 Apdo. Postal 555-320-9000, Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax: 5804-4876



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO


No. 00025

Matricula: 210280086

MUNDOS MEMBRANA TIPO DE SITTER.

En México, D.F., se presentaron a las 13:00 horas del día 28 del mes de junio del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR
- DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL
- DR. ROMAN LINARES ROMERO



GASTÓN DE LOS SANTOS DE LOS SANTOS
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

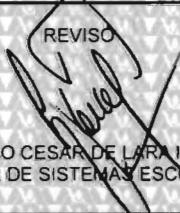
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: GASTÓN DE LOS SANTOS DE LOS SANTOS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

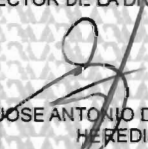
REVISO



LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES


Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI




DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE



DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

VOCAL



DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL

SECRETARIO

Román Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO