

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EL Teorema de Hermite - Biehler

Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias
presenta:

El Lic. Edgar Cristian Díaz González

Director: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

México D. F. Junio de 2010

Agradecimientos

Esta tesis esta dedicada a Dios por su infinita gracia y misericordia conmigo.

Agradezco al Dr. Baltazar Aguirre Hernández por toda la ayuda proporcionada en la realización de esta tesis. Así como también al Dr. Luis Verde Star y al Dr. Fernando Verduzco González por su gran disposición en la revisión y discusión de esta tesis.

Agradezco a CONACYT por su apoyo económico por medio de su sistema de becas de posgrado, así como al departamento de Matemáticas de la UAM Iztapalapa por todas las facilidades proporcionadas.

Agradezco a mi familia y en especial a Patricia por su apoyo y paciencia a lo largo de esta etapa de estudios.

Agradezco a todos mis maestros y compañeros de escuela que me han brindado su amistad y apoyo.

Índice general

Introducción	5
1. El Teorema de Hermite-Biehler para polinomios Hurwitz y Schur	7
1.1. Preliminares.	8
1.2. El Teorema de Intersección de la Frontera.	11
1.3. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas continuos.	15
1.4. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas discretos.	25
2. Estabilidad asintótica de una posición de equilibrio de una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	32
2.1. Aplicación del Teorema de Hermite-Biehler	33
3. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas con Retardo	43
3.1. Introducción	44
3.2. Ecuación característica para sistemas con retardo	44
3.3. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas con Retardo	48
3.3.1. Los ceros de las funciones sin término principal	49
3.3.2. Los ceros de la función $f(z, \cos z, \sin z)$	52
3.3.3. Ceros de la función $h(z, e^z)$ en presencia de un término principal	59
4. Otras Generalizaciones	69
4.1. El Teorema de Hermite-Biehler	70
4.2. Signatura y fase acumulada neta	76
4.3. Generalizaciones del Teorema de Hermite-Biehler: Ninguna raíz en el eje imaginario	79

4.4. El Teorema de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna raíz en el origen	85
4.5. El Teorema de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna restricción en la localización de raíces	96
Conclusiones y Perspectivas	103
Bibliografía	105

Introducción

En el análisis de la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales podemos estudiar la parte lineal del sistema, en su tesis doctoral de 1892 *Problema general sobre la estabilidad de movimiento* [25], Lyapunov definió rigurosamente los conceptos principales de la teoría de la estabilidad y destacó los casos en que la linealización implica la estabilidad local del sistema original. Para la estabilidad asintótica de un sistema continuo (o discreto), es necesario que todas las raíces de su polinomio característico asociado se encuentren en \mathbb{C}^- (o en \mathbb{D}), donde \mathbb{C}^- es el conjunto de números complejos que tienen parte real negativa y \mathbb{D} es el conjunto de números complejos con norma menor que 1. En el caso en que un polinomio tenga todas sus raíces en \mathbb{C}^- se dice que es un polinomio Hurwitz y en el caso en que todas sus raíces estén en \mathbb{D} se dice que es un polinomio Schur. Esta condición de estabilidad espectral ya se conocía en el siglo *XIX*. Sin embargo, en la ausencia de procedimientos para encontrar la solución de ecuaciones algebraicas de orden $n \geq 5$ y sin computadoras para aproximar las raíces, este criterio sólo podía ser verificado para sistemas de dimensión menor a cinco.

En 1868, *Maxwell* plantea el problema matemático de la búsqueda de condiciones bajo las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica se encuentren en la mitad izquierda del plano complejo. Los trabajos pioneros de *Maxwell* y *Vyshnegradskii* sobre la estabilidad de sistemas controlados se limitaron a modelos lineales de orden bajo. Sin embargo, muchos matemáticos ya se habían ocupado de la determinación del número de raíces de ecuaciones algebraicas en determinados lugares (dentro y fuera del eje real, en la mitad del plano, etc) desde las primeras décadas del siglo *XIX*, tales como, *Cauchy*, *Sturm*, *Jacobi*, *Borchardt*, *Cayley*, *Sylvester* y *Hermite*. De hecho, *Hermite* (1853), ya había resuelto el problema de *Maxwell*, pero sus resultados no eran conocidos fuera del mundo de las matemáticas. *Routh* (1887) y *Hurwitz* (1895) demostraron que la estabilidad se puede determinar directamente de

los coeficientes del polinomio característico asociado. Los trabajos de *Routh* y *Hurwitz*, dieron lugar al Criterio de *Routh-Hurwitz*, probablemente el criterio más popular para determinar si un polinomio es o no polinomio Hurwitz. Sin embargo, otro criterio digno de mención es el Teorema de *Hermite-Biehler*, el cual es el tema de esta tesis. El potencial del Teorema de *Hermite-Biehler* fue apreciado en el Teorema de *Kharitonov*, el cual fue reportado en 1978 y su prueba esta basada en el Teorema de *Hermite-Biehler*. En esta tesis presentamos la prueba del Teorema de *Kharitonov* en el capítulo 2. El Teorema de *Kharitonov* da condiciones para que una Familia Intervalo de Polinomios consista solo de polinomios Hurwitz. Además de las Familias Intervalo existen otras familias de polinomios, pero las Familias Intervalo son sin duda las más famosas. Además del criterio de *Routh-Hurwitz* y del Teorema de *Hermite-Biehler*, existen otros criterios. En todos estos criterios se pueden ver variadas técnicas para su prueba. Estas técnicas fueron ampliadas por *Čebotarev* y luego por *Pontrjagin* para obtener condiciones necesarias y suficientes para que los ceros de polinomios de la forma $P(z, e^z)$ tengan raíces con parte real negativa.

En este trabajo se presenta el Teorema de *Hermite-Biehler* (Criterio de la Alternancia), aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales continuos, discretos y con retardo, también una aplicación del Teorema para analizar la estabilidad en familias de polinomios, así como algunas generalizaciones del teorema para polinomios que no son necesariamente Hurwitz.

En el Capítulo 1, se muestra como este criterio puede ser aplicado a sistemas continuos y discretos, donde se utilizará la propiedad de la fase creciente. Para la demostración del criterio se utilizará el Teorema de Intersección de la Frontera. En el Capítulo 2, se presenta una aplicación de este teorema dada por *Kharitonov* para analizar la estabilidad en familias de polinomios. En el Capítulo 3, se enuncia la generalización de este teorema para sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo, se analiza la generalización dada por *Pontrjagin* para polinomios del tipo $P(z, e^z)$ llamados Cuasipolinomios. En el Capítulo 4, se estudian otras generalizaciones de este teorema para polinomios que no son necesariamente Hurwitz estables.

Capítulo 1

El Teorema de Hermite-Biehler para polinomios Hurwitz y Schur

En el análisis de la estabilidad asintótica de un sistema continuo (o discreto) es necesario que todas las raíces de su polinomio característico asociado se encuentren en \mathbb{C}^- (o en \mathbb{D}), así, el problema de determinar condiciones bajo las cuales, todas las raíces reales de un polinomio característico se encuentren en la mitad izquierda del plano complejo juega un papel importante en la teoría de la estabilidad de sistemas autónomos (tiempo invariante). Un polinomio que posee esta propiedad es llamado polinomio Hurwitz. En el estudio de la distribución de las raíces de un polinomio sobre el plano complejo, uno de los primeros problemas fue, históricamente, el de determinar el número de raíces reales de una ecuación; esto es, dada una ecuación con coeficientes reales, determinar por algún criterio, que dependerá de sus coeficientes, y sin resolver la ecuación, si tiene raíces reales. En caso afirmativo, cuantas raíces positivas y cuantas negativas tiene. Diversos criterios han sido propuestos para determinar la estabilidad Hurwitz de un polinomio real sin conocer sus raíces reales. Resultados de esta naturaleza fueron obtenidos por *Routh*, *Hurwitz* y *Hermite*, en el siglo *XIX*. En el caso de sistemas discretos, para tener estabilidad se necesita que el polinomio característico asociado tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario abierto. Tales polinomios reciben el nombre de polinomios Schur.

En este capítulo presentamos el Teorema de Hermite-Biehler aplicado a sistemas continuos y discretos de tiempo invariante.

1.1. Preliminares.

Comenzaremos con el conocido Principio del Argumento de la teoría de variable compleja. Sea \mathcal{C} un contorno cerrado simple en el plano complejo y $w = f(z)$ una función de variable compleja z , la cual es diferenciable en cada punto de \mathcal{C} (analítica en \mathcal{C}). Sean Z y P el número de ceros y polos respectivamente, de $f(z)$ contenidos en \mathcal{C} . Sea $\Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z)]$ el cambio neto del argumento (ángulo) de $f(z)$ cuando z recorre el contorno \mathcal{C} en dirección positiva.

Teorema 1.1 (Principio del Argumento).

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z)] = 2\pi(Z - P). \quad (1.1)$$

Demostración. Ver [28]. □

Del principio del argumento se desprende el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Teorema de Rouché). *Sean $f(z)$ y $g(z)$, dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado simple en el plano complejo. Si*

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad (1.2)$$

para los puntos z en \mathcal{C} , entonces, $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ceros (multiplicidades incluidas) dentro de \mathcal{C} .

Demostración. Ya que $f(z)$ no puede anularse en \mathcal{C} , a causa de 1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z) + g(z)] &= \Delta_{\mathcal{C}} \arg\left\{f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\} \\ &= \Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z)] + \Delta_{\mathcal{C}} \arg\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Además, ya que

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

para todo $z \in \mathcal{C}$, el punto variable

$$w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

permanece en el disco $|w - 1| < 1$, cuando z recorre la curva \mathcal{C} . Por consiguiente, w no da ninguna vuelta alrededor del origen de coordenadas, de lo cual se obtiene que

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0. \quad (1.4)$$

Combinando (1.3) y (1.4), obtenemos que

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_{\mathcal{C}} \arg[f(z)].$$

Ya que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas dentro y sobre \mathcal{C} , el teorema se tiene a partir del principio del argumento. \square

El siguiente teorema es una aplicación del Teorema de Rouché.

Teorema 1.3. *Sean*

$$P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n = \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{t_j}, \quad p_n \neq 0, \quad (1.5)$$

$$Q(z) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (p_n + \epsilon_n)z^n, \quad (1.6)$$

y consideremos un círculo \mathcal{C}_k de radio r_k , centrado en z_k , la cual es una raíz de $P(z)$, de multiplicidad t_k . Sea r_k fijo, donde,

$$0 < r_k < \min |z_k - z_j|, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m. \quad (1.7)$$

Entonces, existe un número positivo ϵ , tal que el polinomio $Q(z)$ tiene t_k ceros dentro del círculo \mathcal{C}_k , siempre que $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. $P(z)$ es una función continua y distinta de cero sobre el compacto \mathcal{C}_k , y por lo tanto, alcanza un valor mínimo sobre éste, digamos $\delta_k > 0$, tal que

$$|P(z)| \geq \delta_k > 0, \quad \text{para todo } z \in \mathcal{C}_k. \quad (1.8)$$

Por otro lado, consideremos el polinomio $R(z)$, definido por

$$R(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \cdots + \epsilon_n z^n. \quad (1.9)$$

Observemos que $Q(z) = P(z) + R(z)$, queremos probar que $|R(z)| < |P(z)|$, para todo z en \mathcal{C}_k .

Si z pertenece al círculo \mathcal{C} entonces

$$\begin{aligned} |R(z)| &= |\epsilon_0 + \epsilon_1 z + \cdots + \epsilon_n z^n| \\ &\leq |\epsilon_0| + |\epsilon_1||z| + \cdots + |\epsilon_n||z^n| \\ &\leq |\epsilon_0| + |\epsilon_1|(|z - z_k| + |z_k|) + \cdots + |\epsilon_n|(|z - z_k| + |z_k|)^n, \end{aligned}$$

si tomamos $\epsilon_i \leq \epsilon$, se cumple que

$$|R(z)| \leq \epsilon \sum_{j=0}^n (r_k + |z_k|)^j,$$

llamemos

$$M_k = \sum_{j=0}^n (r_k + |z_k|)^j,$$

donde M_k es fijo. Si escogemos ϵ , tal que, $\epsilon < \frac{\delta_k}{M_k}$, entonces

$$|R(z)| \leq \epsilon M_k < \frac{\delta_k}{M_k} M_k = \delta_k,$$

así

$$|R(z)| < \delta_k \leq |P(z)|, \quad (1.10)$$

sobre \mathcal{C}_k . Entonces por el teorema 1.2, $P(z)$ y $P(z) + R(z)$ tienen el mismo número de raíces dentro de \mathcal{C}_k . Como $Q(z) = P(z) + R(z)$ y $P(z)$ tiene t_k raíces dentro de \mathcal{C}_k , entonces $Q(z)$ tiene t_k raíces dentro de \mathcal{C}_k . \square

Corolario 1.4. *Fijemos m círculos $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$, que son ajenos por parejas y están centrados en z_1, \dots, z_m , respectivamente. Aplicando sucesivamente el teorema anterior, podemos decir que existe $\epsilon > 0$, tal que, para cualquier conjunto de números $\{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n\}$, satisfaciéndose $|\epsilon_i| < \epsilon$, para $i = 0, \dots, n$, $Q(z)$ tiene precisamente t_j ceros dentro de cada círculo \mathcal{C}_j , donde*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = a_n \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{k_j}, \quad a_n \neq 0,$$

$$Q(z) = (a_0 + \epsilon_0) + (a_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (a_n + \epsilon_n)z^n.$$

Observación 1.5. *Por el corolario 1.4 y el teorema 1.3, el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n , digamos \mathcal{H}_n , es un conjunto abierto: si $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathcal{H}_n$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que, si $|\epsilon_i| < \epsilon$, $\forall i = 0, \dots, n$, entonces se cumple que $Q(z) = (a_0 + \epsilon_0) + (a_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (a_n + \epsilon_n)z^n \in \mathcal{H}_n$.*

1.2. El Teorema de Intersección de la Frontera.

El teorema y corolario anteriores nos llevan al Teorema de intersección de la frontera, en el cual se basará la demostración del Teorema de Hermite-Biehler.

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} y sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto dado. Sabemos que \mathcal{S} y su frontera $\partial\mathcal{S}$, junto con el interior \mathcal{U}° del conjunto cerrado $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$ forman una partición del plano complejo, esto es

$$\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S} \cup \mathcal{U}^\circ = \mathbb{C}, \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{U}^\circ = \mathcal{S} \cap \partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{S} \cap \mathcal{U}^\circ = \emptyset. \quad (1.11)$$

Supongamos, además, que cada uno de estos tres conjuntos es no vacío. Estas suposiciones son muy generales. En la teoría de la estabilidad, podemos elegir para \mathcal{S} , el semiplano abierto \mathbb{C}^- (para sistemas continuos) o el disco unitario abierto \mathbb{D} (para sistemas discretos) o cualquier subconjunto adecuado de éstos.

Consideremos una familia de polinomios $P(\lambda, z)$, que satisfaga la siguiente condición:

Hipótesis 1.6. *$P(\lambda, z)$ es una familia de polinomios*

1. *de grado fijo n .*
2. *continuos con respecto de la variable λ para $\lambda \in [a, b]$.*

Un elemento de la familia de $P(\lambda, z)$, puede ser escrito como

$$P(\lambda, z) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)z + \cdots + p_n(\lambda)z^n, \quad (1.12)$$

donde $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$, son funciones continuas de λ en $[a, b]$ y donde $p_n(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in [a, b]$. Por la observación 1.5, el conjunto de polinomios de grado n , que tienen todas sus raíces en un conjunto abierto \mathcal{O} , también es abierto. En el caso anterior, si para algún $t \in [a, b]$, $P(t, z)$ tiene todas sus raíces en \mathcal{S} , entonces siempre es posible encontrar un número real positivo α , tal que

$$\forall t' \in (t - \alpha, t + \alpha) \cap [a, b], P(t', z) \text{ tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}. \quad (1.13)$$

Esto nos lleva al siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.7 (Teorema de Intersección de la Frontera). Si $P(\lambda, z)$ satisface la Hipótesis 1.6 y $P(a, z)$ tiene todas sus raíces reales en \mathcal{S} ($P(a, z) \in \mathcal{H}$) y $P(b, z)$ tiene al menos una raíz en \mathcal{U} , entonces existe un número $\rho \in (a, b]$, tal que

a) $P(\rho, z)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ y

b) $P(\rho, z)$ tiene al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$.

Demostración. Para probar este resultado, introducimos el conjunto E de números reales t , tales que $t \in (a, b]$ que satisfacen la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P} : \forall t' \in (a, t), \quad P(t', z) \text{ tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}. \quad (1.14)$$

Por hipótesis, sabemos que $P(a, z)$ tiene todas sus raíces en \mathcal{S} y por lo tanto, como se mencionó anteriormente, es posible encontrar un $\alpha > 0$, tal que

$$\forall t' \in [a, a + \alpha) \cap [a, b], \quad P(t', z) \text{ también tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}. \quad (1.15)$$

De esto, se deduce que el conjunto E es no vacío, ya que, por ejemplo, $a + \frac{\alpha}{2}$ se encuentra en E .

Además, de la definición de E la siguiente propiedad se tiene:

$$t_2 \in E, \text{ y } a < t_1 < t_2, \text{ implica que } t_1 \text{ se encuentra en } E. \quad (1.16)$$

Dado esto, se tiene que E es un intervalo y además sea $\rho = \sup E$, este supremo existe, pues E está acotado superiormente por b .

A) Por un lado es imposible que $P(\rho, z)$ tenga todas sus raíces en \mathcal{S} . Si este fuera el caso, entonces necesariamente $\rho < b$ y sería posible encontrar un $\alpha > 0$, tal que, $\rho + \alpha < b$ y

$$\forall t' \in (\rho - \alpha, \rho + \alpha) \cap [a, b], \quad P(t', z) \text{ también tiene todas sus raíces en } \mathcal{S}. \quad (1.17)$$

Como consecuencia, $\rho + \frac{\alpha}{2}$ pertenece a E y esto contradice la definición de ρ .

B) Por otro lado, también es imposible que $P(\rho, z)$ tenga una sola raíz en el interior de \mathcal{U} , ya que por el Teorema 1.3, podríamos encontrar un $\alpha > 0$, tal que

$$\forall t' \in (\rho - \alpha, \rho + \alpha) \cap [a, b], \quad P(t', z) \text{ tiene al menos una raíz en } \mathcal{U}^\circ, \quad (1.18)$$

y esto contradice el hecho de que $\rho - \epsilon$ pertenece a E , para ϵ suficientemente pequeño.

De A) y B), se concluye que $P(\rho, z)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$, y al menos una raíz en $\partial\mathcal{S}$. \square

El siguiente resultado da un ejemplo de una situación, en la que la hipótesis sobre el grado puede ser relajada. Sea \mathcal{S} , la región de estabilidad.

Teorema 1.8. *Sea $\{P_n(z)\}$, una sucesión de polinomios estables de grado acotado y supongamos que $P_n(z) \rightarrow Q(z)$. Entonces las raíces de $Q(z)$ están en $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$.*

En otras palabras, el teorema dice que el límite de una sucesión de polinomios estables, de grado acotado, sólo puede tener raíces inestables en la frontera de la región de estabilidad.

Demostración. Por hipótesis, existe un entero N , tal que, $\text{gr}[P_n] \leq N$, para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, podemos escribir para todo n

$$P_n(z) = p_{0,n} + p_{1,n}z + \cdots + p_{N,n}z^N. \quad (1.19)$$

Ya que la sucesión $\{P_n(z)\}$ converge a $Q(z)$, entonces $Q(z)$ tiene grado menor o igual a N , así que también podemos escribir,

$$Q(z) = q_0 + q_1z + \cdots + q_Nz^N. \quad (1.20)$$

Además

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{k,n} = q_k, \text{ para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.21)$$

Ahora, supongamos que $Q(z)$ tiene una raíz z^* , la cual se encuentra en \mathcal{U}° . Mostraremos que esto conduce a una contradicción. Ya que \mathcal{U}° es abierto, podemos encontrar un número positivo r , tal que, el disco \mathcal{C} centrado en z^* y de radio r está contenido en \mathcal{U}° . Por el Teorema 1.3, existe un número positivo ϵ , tal que, para $|\epsilon_i| \leq \epsilon$, para $i = 0, 1, \dots, N$, el polinomio

$$(q_0 + \epsilon_0) + (q_1 + \epsilon_1)z + \cdots + (q_N + \epsilon_N)z^N, \quad (1.22)$$

tiene al menos una raíz dentro del círculo $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}^\circ$. Ahora, de acuerdo a (1.21) es posible encontrar un entero n_0 , tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |p_{k,n} - q_k| < \epsilon, \text{ para } k = 0, 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Pero entonces (1.23), implica que para $n \geq n_0$,

$$(q_0 + p_{0,n} - q_0) + (q_1 + p_{1,n} - q_1)z + \cdots + (q_N + p_{N,n} - q_N)z^N = P_n(z) \quad (1.24)$$

tiene al menos una raíz en $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}^\circ$, y esto contradice el hecho de que $P_n(z)$ es estable para todo n . \square

El Teorema de Intersección de la Frontera también puede ser aplicado a una familia de polinomios, para detectar la presencia de polinomios inestables en la familia. Supongamos que $\delta(z, \mathbf{p})$ denota un polinomio, cuyos coeficientes dependen continuamente sobre el vector de parámetros $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$, el cual varía en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, por lo tanto, genera la familia de polinomios

$$\Delta(z) := \{\delta(z, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Omega\}. \quad (1.25)$$

Tenemos una región de estabilidad \mathcal{S} y deseamos determinar si la familia $\Delta(z)$ contiene polinomios inestables. Supongamos que hay al menos un polinomio estable $\delta(z, \mathbf{p}_a)$ en la familia y que cada polinomio de la familia tiene el mismo grado. Entonces, si $\delta(z, \mathbf{p}_b)$ es un polinomio inestable, se sigue del Teorema de Intersección de la Frontera, que sobre cualquier trayectoria continua que conecta \mathbf{p}_a y \mathbf{p}_b , debe existir un punto \mathbf{p}_c , tal que, el polinomio $\delta(z, \mathbf{p}_c)$, contiene raíces sobre la frontera de la región de estabilidad $\partial\mathcal{S}$. Si esa trayectoria puede ser construida en su totalidad dentro de Ω , es decir, si Ω es arco-conexo, entonces \mathbf{p}_c se encuentra en Ω . En este caso, la presencia de polinomios inestables en la familia es equivalente a la presencia de polinomios en la familia con raíces en la frontera. Si z^* es una raíz de un polinomio en la familia se tiene que $\delta(z^*, \mathbf{p}) = 0$, para algún $\mathbf{p} \in \Omega$ y esto implica que $0 \in \Delta(z^*)$. Por lo tanto, la presencia de elementos inestables en $\Delta(z)$, pueden ser detectada mediante la generación del conjunto imagen $\Delta(z^*)$ de la familia en $z^* \in \partial\mathcal{S}$, *barriendo* z^* a lo largo de la frontera de estabilidad $\partial\mathcal{S}$, y verificando, si la condición de exclusión del cero, $0 \notin \Delta(z^*)$, es violada por algún $z^* \in \partial\mathcal{S}$. Esto es declarado como una versión alternativa del Teorema de Intersección de la Frontera.

Teorema 1.9 (Principio de exclusión del cero). *Supongamos que tenemos una familia $f(p, t)$ de polinomios, tal que, $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde Ω es arco-conexo, la familia es de grado constante y al menos hay un polinomio Hurwitz. Entonces toda la familia es Hurwitz, si y sólo si, $f(p, i\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ y $\forall p \in \Omega$.*

Demostración. Ver [5] y [24]. □

1.3. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas continuos.

Ahora presentamos el Teorema de Hermite-Biehler, también denominado Teorema de Alternancia. Nos limitaremos al caso de polinomios con coeficientes reales, primero nos ocuparemos del caso Hurwitz y luego del caso Schur.

Consideremos un polinomio de grado n ,

$$P(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n. \quad (1.26)$$

$P(z)$ es un polinomio Hurwitz, si y sólo si, todas sus raíces tienen parte real negativa, es decir, están en el semiplano abierto izquierdo (\mathbb{C}^-). Tenemos las siguientes propiedades

Propiedad 1.10. *Si $P(z)$ es un polinomio real Hurwitz, entonces todos sus coeficientes son distintos de cero y tienen el mismo signo, ya sea positivo o negativo.*

Demostración. Por el Teorema fundamental del álgebra, $P(z)$ puede ser factorizado en un producto de polinomios lineales y cuadráticos, los cuales son Hurwitz y cumplen la propiedad, por lo tanto, la propiedad se tiene. Ver [24]. \square

Propiedad 1.11. *Si $P(z)$ es un polinomio Hurwitz de grado n , entonces $\arg[P(j\omega)]$, también llamada la fase de $P(j\omega)$, es una función continua y estrictamente creciente de ω sobre $(-\infty, +\infty)$. Además, el incremento neto de la fase de $-\infty$ a $+\infty$ es*

$$\arg[P(+j\infty)] - \arg[P(-j\infty)] = n\pi. \quad (1.27)$$

Demostración. Por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir $P(z)$ como

$$P(z) = p_n(z - a_1 - jb_1)(z - a_2 - jb_2) \cdots (z - a_n - jb_n), \quad (1.28)$$

donde $z_i = a_i + jb_i$ y $a_i < 0$. Entonces

$$P(j\omega) = p_n[-a_1 + j(\omega - b_1)][-a_2 + j(\omega - b_2)] \cdots [-a_n + j(\omega - b_n)],$$

luego, calculamos la fase de $P(j\omega)$

$$\begin{aligned}\arg[P(j\omega)] &= \arg[p_n] + \arg[-a_1 + j(\omega - b_1)] + \cdots + \arg[-a_n + j(\omega - b_n)] \\ &= \arg(p_n) + \arctan\left(\frac{\omega - b_1}{-a_1}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{\omega - b_n}{-a_n}\right).\end{aligned}\quad (1.29)$$

Ahora

$$\frac{d}{d\omega}[\arg P(j\omega)] = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - b_1}{-a_1}\right)^2} \left(-\frac{1}{a_1}\right) + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - b_n}{-a_n}\right)^2} \left(-\frac{1}{a_n}\right)$$

y para todo $k = 1, \dots, n$, se tiene que $a_k < 0$, ya que $a_k + jb_k$ es raíz de $P(z)$, el cual es Hurwitz. Por lo tanto, $\arg[P(j\omega)]$ es una función creciente de ω . Ahora

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg[P(j\omega)] &= \arg(p_n) + \frac{\pi}{2} + \cdots + \frac{\pi}{2} = \arg(p_n) + \frac{n\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg[P(j\omega)] &= \arg(p_n) - \frac{\pi}{2} - \cdots - \frac{\pi}{2} = \arg(p_n) - \frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\arg[P(+j\infty)] - \arg[P(-j\infty)] = n\pi.$$

□

La parte par e impar de un polinomio real $P(z)$, es definida como:

$$\begin{aligned}P^{par}(z) &:= p_0 + p_2z^2 + p_4z^4 + \cdots \\ P^{impar}(z) &:= p_1z + p_3z^3 + p_5z^5 + \cdots\end{aligned}\quad (1.30)$$

Definimos

$$\begin{aligned}P^p(\omega) &:= P^{par}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \cdots \\ P^{im}(\omega) &:= \frac{P^{impar}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \cdots\end{aligned}\quad (1.31)$$

$P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ son ambos polinomios en ω^2 y como consecuencia, cada conjunto de raíces será siempre simétrico con respecto al origen del plano complejo.

Supongamos ahora que el grado del polinomio $P(z)$ es par, $n = 2m$, $m > 0$. En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}P^p(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \cdots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \\ P^{im}(\omega) &= p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \cdots + (-1)^{m-1} p_{2m-1}\omega^{2m-2}.\end{aligned}\quad (1.32)$$

Definición 1.12. Un polinomio real $P(z)$, satisface la propiedad de la alternancia si

- a) p_{2m} y p_{2m-1} tienen el mismo signo.
- b) Todas las raíces de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ son reales, distintas y además las m raíces positivas de $P^p(\omega)$ y las $m - 1$ raíces positivas de $P^{im}(\omega)$ se van alternando, es decir:

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \cdots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}. \quad (1.33)$$

Si por el contrario, el grado de $P(z)$ es impar, entonces, $n = 2m + 1$, $m \geq 0$ y

$$\begin{aligned} P^p(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \cdots + (-1)^m p_{2m}\omega^{2m} \\ P^{im}(\omega) &= p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \cdots + (-1)^m p_{2m+1}\omega^{2m}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

la definición de la propiedad de alternancia es modificada,

- a) p_{2m+1} y p_{2m} tienen el mismo signo.
- b) Todas las raíces de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ son reales, distintas y las m raíces positivas de $P^p(\omega)$ juntamente con las m raíces positivas de $P^{im}(\omega)$ se van alternando, es decir:

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \cdots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m} < \omega_{o,m}. \quad (1.35)$$

Una descripción alternativa de la propiedad de la alternancia es la siguiente: $P(z) = P^{par}(z) + P^{impar}(z)$ satisface la propiedad de la alternancia si y sólo si

- a) los coeficientes principales de $P^{par}(z)$ y $P^{impar}(z)$ tienen el mismo signo
y
- b) todas los ceros de $P^{par}(z)$ y $P^{impar}(z)$ son distintos, se encuentran en el eje imaginario y se alternan a lo largo de este.

Ahora podemos enunciar y probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.13 (Teorema de Hermite-Biehler o de la Alternancia).
Un polinomio real $P(z)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de la alternancia.

Demostración. (\Rightarrow) Para demostrar la necesidad de la propiedad de la alternancia consideremos un polinomio real Hurwitz de grado n ,

$$P(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n.$$

Ya que $P(z)$ es Hurwitz, se tiene de la propiedad 1.10 que todos los coeficientes p_i tienen el mismo signo, por lo tanto, la parte a) de la propiedad de la alternancia es probada, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los coeficientes son positivos. Para probar la parte b) supongamos que $P(z)$ es de grado par, así $n = 2m$. Ahora, también sabemos de la propiedad 1.11, que la fase de $P(j\omega)$ es estrictamente creciente de $-n\pi/2$ a $n\pi/2$, cuando ω recorre la recta desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Debido a que las raíces de $P(z)$ son simétricas con respecto al eje real, es también cierto que $\arg[P(j\omega)]$ crece desde 0 a $+n\pi/2 = m\pi$, cuando ω va de 0 a $+\infty$. Por lo tanto, como ω va de 0 a $+\infty$, $P(j\omega)$ comienza en el eje real positivo, ($P(0) = p_0 > 0$) y gira alrededor del origen, en sentido contrario a las manecillas del reloj, $m\pi$ radianes antes de ir hasta el infinito y nunca pasa a través del origen, ya que $P(j\omega) \neq 0$, para todo ω . Como consecuencia, la gráfica de $P(j\omega)$ corta el eje imaginario m veces, de manera que la parte real de $P(j\omega)$ se convierte en cero m veces, cuando ω crece en los valores positivos

$$\omega_{\mathcal{R},1}, \omega_{\mathcal{R},2}, \dots, \omega_{\mathcal{R},m}. \quad (1.36)$$

Análogamente, la gráfica $P(j\omega)$ comienza en el eje real positivo y corta el eje real otras $m - 1$ veces, cuando ω crece, de modo que la parte imaginaria de $P(j\omega)$ también se convierte en cero m veces, incluyendo $\omega = 0$, en

$$0, \omega_{\mathcal{I},1}, \omega_{\mathcal{I},2}, \dots, \omega_{\mathcal{I},m-1}, \quad (1.37)$$

antes de crecer hasta infinito, cuando ω va a infinito. Además, ya que $P(j\omega)$ gira alrededor del origen, tenemos que

$$0 < \omega_{\mathcal{R},1} < \omega_{\mathcal{I},1} < \omega_{\mathcal{R},2} < \omega_{\mathcal{I},2} < \cdots < \omega_{\mathcal{R},m-1} < \omega_{\mathcal{I},m-1} < \omega_{\mathcal{R},m}. \quad (1.38)$$

La prueba de la necesidad es completada, ya que la parte real de $P(j\omega)$ no es más que $P^p(\omega)$ y la parte imaginaria de $P(j\omega)$ es $\omega P^{im}(j\omega)$.

(\Leftarrow) Supongamos que $P(z)$ satisface la propiedad de la alternancia y también supongamos que $P(z)$ es de grado $n = 2m$ y que p_{2m}, p_{2m-1} son ambos positivos. Consideremos las raíces de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$,

$$0 < \omega_{e,1}^p < \omega_{o,1}^p < \cdots < \omega_{e,m-1}^p < \omega_{o,m-1}^p < \omega_{e,m}^p. \quad (1.39)$$

A partir de esto, $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ pueden escribirse como

$$P^p(\omega) = p_{2m} \prod_{i=1}^m (\omega^2 - \omega_{e,i}^p),$$

$$P^{im}(\omega) = p_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - \omega_{o,i}^p).$$

Ahora consideremos un polinomio $Q(z)$ estable de grado $2m$, con todos sus coeficientes positivos. Tomemos, por ejemplo, $Q(z) = (z + 1)^{2m}$. Escribimos

$$Q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{2m} z^{2m}.$$

Ya que $Q(z)$ es Hurwitz, se tiene de la primera parte del teorema, que $Q(z)$ satisface la propiedad de la alternancia, de modo que $Q^p(\omega)$ tiene m raíces positivas, $\omega_{e,1}^q, \dots, \omega_{e,m}^q$, $Q^{im}(\omega)$ tiene $m - 1$ raíces positivas, $\omega_{o,1}^q, \dots, \omega_{o,m-1}^q$, y

$$0 < \omega_{e,1}^q < \omega_{o,1}^q < \cdots < \omega_{e,m-1}^q < \omega_{o,m-1}^q < \omega_{e,m}^q. \quad (1.40)$$

Por lo tanto, también podemos escribir:

$$Q^p(\omega) = q_{2m} \prod_{i=1}^m (\omega^2 - \omega_{e,i}^q),$$

$$Q^{im}(\omega) = q_{2m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - \omega_{o,i}^q).$$

Consideremos ahora el polinomio $P_\lambda(z) := P_\lambda^{par}(z) + zP_\lambda^{impar}(z)$, definido por

$$P_\lambda^p(\omega) := [(1 - \lambda)q_{2m} + \lambda p_{2m}] \prod_{i=1}^m (\omega^2 - [(1 - \lambda)(\omega_{e,i}^q)^2 + \lambda(\omega_{e,i}^p)^2]),$$

$$P_\lambda^{im}(\omega) := [(1 - \lambda)q_{2m-1} + \lambda p_{2m-1}] \prod_{i=1}^{m-1} (\omega^2 - [(1 - \lambda)(\omega_{o,i}^q)^2 + \lambda(\omega_{o,i}^p)^2]).$$

Los coeficientes del polinomio $P_\lambda(z)$ son funciones polinomiales en λ , las cuales son, por lo tanto, continuas en $[0, 1]$. Además, el coeficiente del término de grado mayor en $P_\lambda(z)$ es $(1 - \lambda)q_{2m} + \lambda p_{2m}$ y siempre permanece positivo cuando λ varía de 0 a 1, además, para $0 < \lambda < 1$

$$0 < \lambda\omega_{e,1}^p + (1 - \lambda)\omega_{e,1}^q < \lambda\omega_{o,1}^p + (1 - \lambda)\omega_{o,1}^q < \cdots < \lambda\omega_{e,m}^p + (1 - \lambda)\omega_{e,m}^q.$$

Para $\lambda = 0$, tenemos $P_0(z) = Q(z)$, y para $\lambda = 1$, $P_1(z) = P(z)$. Supongamos ahora que $P(z)$ no es Hurwitz. Del Teorema de Intersección de la Frontera existe algún λ en $(0, 1]$, tal que, $P_\lambda(z)$ tiene una raíz en el eje imaginario. Sin embargo, $P_\lambda(z)$ tiene una raíz en el eje imaginario, si y sólo si, $P_\lambda^p(z)$ y $P_\lambda^{im}(z)$ tienen una raíz real en común. Pero las raíces de $P_\lambda^p(\omega)$ satisfacen

$$\omega_{e,i}^{\lambda^2} = (1 - \lambda)\omega_{e,i}^{q^2} + \lambda\omega_{e,i}^{p^2}, \quad (1.41)$$

y las de $P_\lambda^{im}(\omega)$ también satisfacen

$$\omega_{o,i}^{\lambda^2} = (1 - \lambda)\omega_{o,i}^{q^2} + \lambda\omega_{o,i}^{p^2}. \quad (1.42)$$

Ahora, tomando dos raíces de $P_\lambda^p(\omega)$ en 1.41, si $i < j$, de 1.39, $\omega_{e,i}^{p^2} < \omega_{e,j}^{p^2}$, y de la misma manera, de 1.40, $\omega_{e,i}^{q^2} < \omega_{e,j}^{q^2}$, así que

$$\omega_{e,i}^{\lambda^2} < \omega_{e,j}^{\lambda^2}.$$

De la misma forma, se puede verificar que el mismo orden, como en 1.39 y 1.40, es preservado entre las raíces de $P_\lambda^{im}(\omega)$ y también entre las raíces de $P_\lambda^p(\omega)$ y cualquier raíz de $P_\lambda^{im}(\omega)$. En otras palabras, la parte b) de la propiedad de la alternancia es invariante bajo tales combinaciones, así que también tenemos para cada λ en $[0, 1]$:

$$0 < \omega_{e,1}^{\lambda^2} < \omega_{o,1}^{\lambda^2} < \cdots < \omega_{e,m-1}^{\lambda^2} < \omega_{o,m-1}^{\lambda^2} < \omega_{e,m}^{\lambda^2}.$$

Pero esto demuestra que sea cual sea el valor de λ en $[0, 1]$, $P_\lambda^p(\omega)$ y $P_\lambda^{im}(\omega)$ nunca pueden tener una raíz común, y esto por lo tanto conduce a una contradicción, lo cual completa la prueba. \square

Aquí se presento una prueba alternativa usando el Teorema de Intersección de la Frontera [5], [6], por otra parte, existen diferentes pruebas de este teorema, ver [12], [14], el trabajo de *Olga Holtz* [18], por ejemplo. Para pruebas más algebraicas de esta versión real del teorema de Hermite-Biehler ver [15], (en donde se utilizan formas cuadráticas).

Definición 1.14. Un par de polinomios reales (u, v) , se dice que es un par positivo, si los coeficientes principales de u y v tienen el mismo signo, las raíces t_i de u y t'_j de v son simples, reales, negativas y además satisfacen una de las siguientes condiciones de alternancia, donde $m = \text{gr}(u)$, $l = \text{gr}(v)$,

$$\begin{aligned} m = l \quad & \text{y} \quad t'_m < t_m < t'_{m-1} < \cdots < t'_1 < t_1 < 0, \\ m = l + 1 \quad & \text{y} \quad t_m < t'_{m-1} < t_{m-1} < \cdots < t'_1 < t_1 < 0. \end{aligned}$$

Observación 1.15. De la definición y el teorema anterior, se tiene que los polinomios $P^{\text{par}}(z)$ y $P^{\text{imp}}(z)/z$ forman un par positivo, así el teorema de Hermite-Biehler puede ser enunciado en términos de un par positivo, ya que cada conjunto de raíces es simétrico con respecto al origen del plano complejo. Ver [15].

La propiedad de la alternancia de un polinomio puede ser verificada trazando las gráficas de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.16. Sea

$$\begin{aligned} P(z) = & 147 + 574z + 1363z^2 + 2103z^3 + 2402z^4 + 2015z^5 \\ & + 1293z^6 + 614z^7 + 221z^8 + 57z^9 + 10z^{10} + z^{11} \end{aligned}$$

entonces

$$P(j\omega) = P^p(\omega) + j\omega P^{im}(\omega)$$

con

$$\begin{aligned} P^p(\omega) = & 147 - 1363\omega^2 + 2402\omega^4 - 1293\omega^6 \\ & + 221\omega^8 - 10\omega^{10}, \\ P^{im}(\omega) = & 574 - 2103\omega^2 + 2015\omega^4 - 614\omega^6 \\ & + 57\omega^8 - \omega^{10}. \end{aligned}$$

Las gráficas de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ se muestran en la figura 1.1.

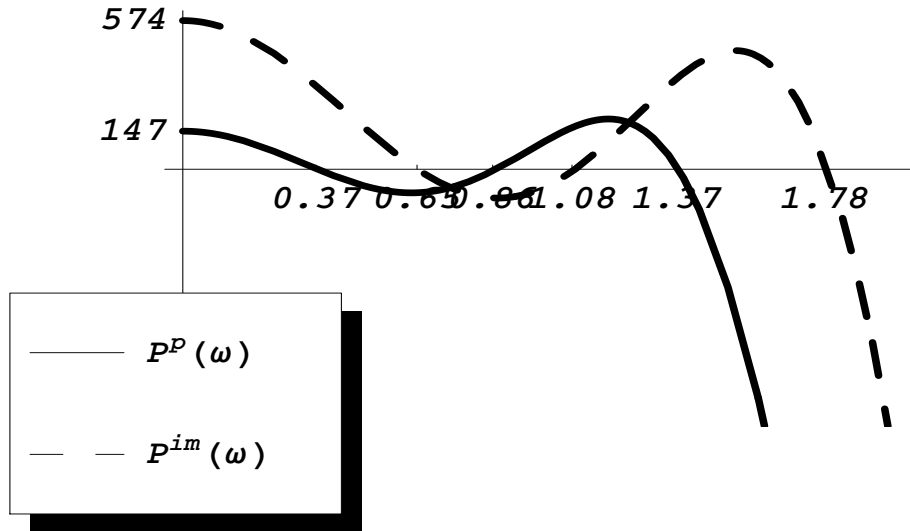


Figura 1.1: Teorema de la alternancia aplicado a polinomios Hurwitz(Ejemplo 1.16)

Ejemplo 1.17. Sea

$$P(z) = 36 + 32z + 13z^2 + 2z^3 + z^4$$

entonces

$$P(j\omega) = P^p(\omega) + j\omega P^{im}(\omega)$$

donde

$$\begin{aligned} P^p(\omega) &= 36 - 13\omega^2 + \omega^4 \\ P^{im}(\omega) &= 32 - 2\omega^2 \end{aligned}$$

Las gráficas de $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ se muestran en la figura 1.2. Esto muestra que el polinomio $P(z)$ no es Hurwitz, porque no se satisface la propiedad de la alternancia.

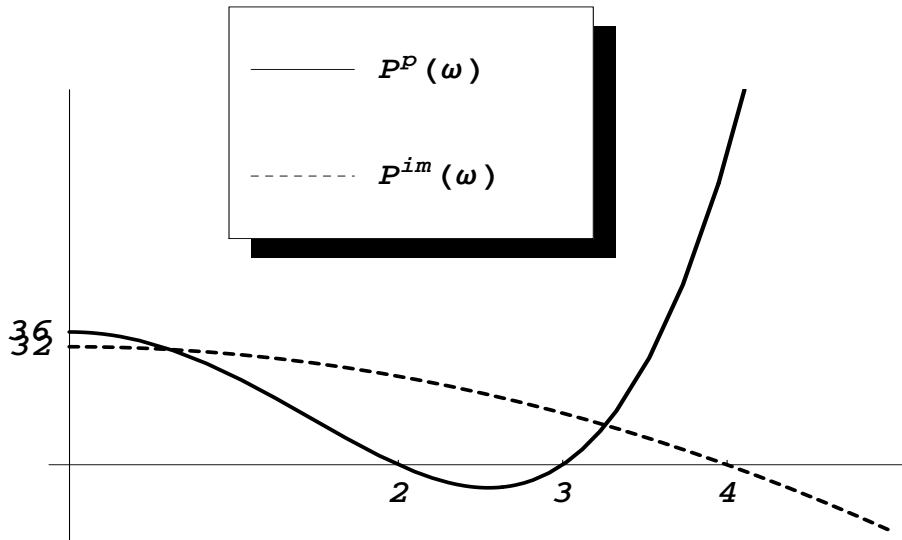


Figura 1.2: Teorema de la alternancia aplicado a polinomios no Hurwitz (Ejemplo 1.17)

Las dos gráficas en ambos ejemplos son no acotadas cuando ω tiende a ∞ . Una gráfica acotada que contiene la misma información puede ser construida de la siguiente manera. Para un polinomio

$$P(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n, \quad p_n > 0$$

escribimos

$$P(\omega) = P^p(\omega) + j\omega P^{im}(\omega)$$

y sean $S(\omega)$ y $T(\omega)$, funciones arbitrarias, positivas y continuas sobre $0 \leq \omega < \infty$. Sean

$$x(\omega) := \frac{P^p(\omega)}{S(\omega)}, \quad y(\omega) := \frac{P^{im}(\omega)}{T(\omega)}.$$

Lema 1.18. *Un polinomio real $P(z)$ es Hurwitz, si y sólo si, la gráfica $z(\omega)$, $z(\omega) := x(\omega) + jy(\omega)$, se mueve en sentido positivo y pasa a través de n cuadrantes.*

Demostración. El Teorema de Hermite-Biehler y la propiedad de fase monótona para polinomios Hurwitz, muestran que la gráfica de $P(j\omega)$ se mueve a través

de n cuadrantes, si y sólo si, $P(\omega)$ es Hurwitz. Ya que los signos de $P^p(\omega)$ y $x(\omega)$, $\omega P^{im}(\omega)$ y $y(\omega)$ coinciden para $\omega > 0$, el lema se tiene. \square

A pesar de que la gráfica $P(j\omega)$ no es acotada, la gráfica de $z(\omega)$ siempre puede ser acotada eligiendo las funciones $T(\omega)$ y $S(\omega)$ apropiadas. Por ejemplo, $T(\omega)$ y $S(\omega)$ pueden ser polinomios con grado igual a $P^p(\omega)$ y $P^{im}(\omega)$ respectivamente. El Lema 1.3 se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.19. *Tomemos el siguiente polinomio Hurwitz:*

$$P(z) = 6 + 49z + 155z^2 + 280z^3 + 331z^4 + 266z^5 + 145z^6 + 52z^7 + 11z^8 + z^9,$$

escribimos

$$P(j\omega) = P^p(\omega) + j\omega P^{im}(\omega),$$

así tenemos

$$\begin{aligned} P^p(\omega) &= 6 - 155\omega^2 + 331\omega^4 - 145\omega^6 + 11\omega^8, \\ P^{im}(\omega) &= 49 - 280\omega^2 + 266\omega^4 - 52\omega^6 + \omega^8. \end{aligned}$$

Elegimos

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8, \\ T(\omega) &= 1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8. \end{aligned}$$

La función $z(\omega)$ se muestra en la figura 1.3, se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj y pasa a través de nueve cuadrantes, esto demuestra que el polinomio $P(z)$ es Hurwitz según el Lema 1.18.

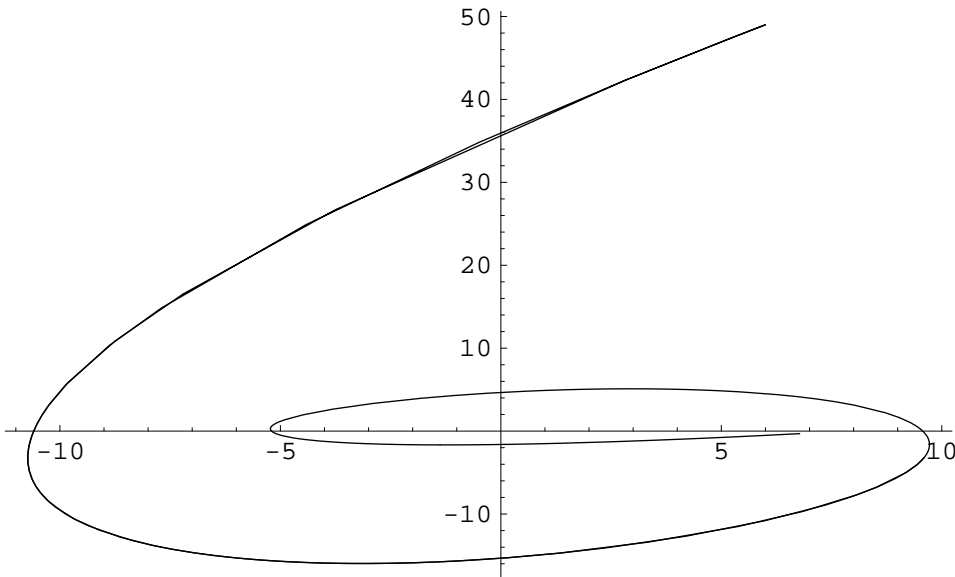


Figura 1.3: Gráfica de $z(\omega)$ (Ejemplo 1.19).

1.4. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas discretos.

Es posible obtener un resultado similar del teorema de alternancia con respecto a una región de estabilidad \mathcal{S} , que tiene la siguiente propiedad: la fase de un polinomio estable evaluada a lo largo de la frontera de \mathcal{S} tiene un incremento monótono. En este caso, la estabilidad del polinomio con respecto a \mathcal{S} es equivalente a la alternancia de las partes real e imaginaria evaluadas a lo largo de la frontera de \mathcal{S} . Ahora nos concentraremos en el caso donde \mathcal{S} es el disco unitario abierto \mathbb{D} . Esta es la región de estabilidad para sistemas de tiempo discreto.

Definición 1.20. *Un polinomio*

$$P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$$

es un polinomio Schur, si todas sus raíces se encuentran en el círculo unitario abierto \mathbb{D} , del plano complejo.

Propiedad 1.21. Una condición necesaria para la estabilidad Schur es que $|p_n| > |p_0|$.

Demostración. Ya que

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{p_n}{p_0} z^n + \frac{p_{n-1}}{p_0} z^{n-1} + \dots + \frac{p_1}{p_0} z + 1 \\ &= \frac{p_n}{p_0} (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \end{aligned}$$

en $z = 0$, $P(0) = 1$, así se tiene que

$$\left| \frac{p_n}{p_0} \prod_{i=0}^n (-1)^n z_i \right| = 1$$

o bien

$$\frac{|p_0|}{|p_n|} = \left| \prod_{i=0}^n z_i \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|$$

como cada $z_i \in \mathbb{D}$, $\prod_{i=1}^n |z_i| < 1$, se tiene que $|p_0| < |p_n|$. \square

Para la alternancia sobre el círculo unitario consideremos los dos polinomios siguientes, $P_s(z)$ y $P_a(z)$, que representan la parte *simétrica* y *asimétrica* del polinomio real $P(z) = P_s(z) + P_a(z)$:

$$P_s(z) = \frac{1}{2} \left[P(z) + z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right] \quad y \quad P_a(z) = \frac{1}{2} \left[P(z) - z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Para un polinomio real, la estabilidad de $P(z)$ es equivalente a la alternancia en el círculo unitario de los polinomios $P_s(z)$ y $P_a(z)$.

Para realizar la demostración utilizaremos la transformación de Möbius.

$$m(\cdot) : s \mapsto \frac{s+1}{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

con inversa $m^{-1}(\cdot) = m(\cdot)$. En particular, este mapeo envía 0 a -1 , ∞ a 1, -1 a 0.

Lema 1.22. El mapeo de Möbius $m : s \mapsto (s+1)/(s-1)$ es una biyección de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sobre si mismo. Mapea \mathbb{C}^- sobre \mathbb{D} , y $i\mathbb{R}$ sobre $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\} = \{e^{i\theta}; 0 < \theta < 2\pi\}$. Además, el mapeo

$$\omega \mapsto \theta(\omega) = \arg((i\omega + 1)/(i\omega - 1)) \in (0, 2\pi), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

es estrictamente creciente. En particular, si dos sucesiones (t_i) y (t'_j) son alternantes en \mathbb{R} , entonces $\theta(t_i)$ y $\theta(t'_j)$ son alternantes en $(0, 2\pi)$.

El mapeo de Möbius induce la siguiente transformación de polinomios.

Definición 1.23. La transformación de Möbius de un polinomio $p(z)$ de la forma $p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$, es definida por

$$\tilde{p}(z) = (z-1)^n p\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \sum_{i=0}^n p_i (z+1)^i (z-1)^{n-i}.$$

Escribiremos $\tilde{p}(s)$ en lugar de $\tilde{p}(z)$. Algunas propiedades elementales de la transformación de Möbius para polinomios se resumen en el siguiente lema.

Lema 1.24. (i) El mapeo $p \mapsto \tilde{p}$, cumple que, $\tilde{\tilde{p}} = 2^n p$.

(ii) Si $\nu \geq 0$ es el máximo entero, tal que, $(z-1)^\nu$ divide $p(z)$, entonces $\text{gr}(\tilde{p}) = n - \nu$.

(iii) Un polinomio p , tiene k raíces en \mathbb{D} (resp. en \mathbb{D}^+), si y sólo si, \tilde{p} tiene k raíces en \mathbb{C}^- (resp. en \mathbb{C}^+), tomando en cuenta multiplicidades.

(iv) Un polinomio p , de grado n , con $p(1) \neq 0$, es Schur, si y sólo si, \tilde{p} es Hurwitz.

Demostración. **(i)** Aplicando la definición 1.23, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{p}}(z) &= (z-1)^n \tilde{p}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = (z-1)^n \tilde{p}(m(z)) \\ &= (z-1)^n (m(z)-1)^n p(m(m(z))) = 2^n p(z). \end{aligned}$$

(ii) Supongamos que $\text{gr}(p) = m$ y $p(z) = p_m (z-1)^\nu \prod_{i=1}^{m-\nu} (z-z_i)$, donde $z_i \neq 1$. Entonces, $\text{gr}(\tilde{p}) = n - \nu$, se sigue de que

$$\begin{aligned} \tilde{p}(s) &= p_m (s-1)^n \left[\frac{s+1}{s-1} - 1 \right]^\nu \prod_{i=1}^{m-\nu} \left(\frac{s+1}{s-1} - z_i \right) \\ &= p_m (s-1)^{n-m} 2^\nu \prod_{i=1}^{m-\nu} (s+1 - z_i (s-1)) \\ &= 2^\nu p_m (s-1)^{n-m} \prod_{i=1}^{m-\nu} (1 - z_i) \prod_{i=1}^{m-\nu} (s - m(z_i)). \end{aligned}$$

(iii), (iv) Ya que $m(z_i)$ está en \mathbb{C}^- (resp. \mathbb{C}^+), si y sólo si, $z_i \in \mathbb{D}$ (resp. \mathbb{D}^+), las afirmaciones (iii) y (iv), son consecuencia directa de la fórmula anterior.

□

El siguiente ejemplo muestra que la transformación de Möbius $\tilde{p}(s)$ puede ser estable sin que $p(z)$ sea Schur. De las afirmaciones (ii) y (iii) del lema anterior esto puede ocurrir si el grado de \tilde{p} es menor que el grado de p , el cual es n , además, $p(1) = 0$.

Ejemplo 1.25. Sea $n = 2$ y $p(z) = z(z - 1)$ entonces $\tilde{p}(s) = 2(s + 1)$, el cual es Hurwitz, mientras que $p(z)$ no es Schur.

A continuación el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.26 (Schur–Biehler). Un polinomio real $P(z)$ es Schur, si y sólo si, $P_s(z)$ y $P_a(z)$ satisfacen lo siguiente:

- a) $P_s(z)$ y $P_a(z)$ son polinomios de grado n con coeficientes principales del mismo signo.
- b) $P_s(z)$ y $P_a(z)$ tienen sólo ceros simples, los cuales están en el círculo unitario.
- c) Los ceros de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ se alternan en el círculo unitario.

Demostración. (\Rightarrow). Sea $P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$ un polinomio Schur, por consiguiente los polinomios que se obtienen son

$$P_a(z) = z^n \frac{(p_n - p_0)}{2} + z^{n-1} \frac{(p_{n-1} - p_1)}{2} + \dots + z \frac{(p_1 - p_{n-1})}{2} + \frac{(p_0 - p_n)}{2},$$

$$P_s(z) = z^n \frac{(p_n + p_0)}{2} + z^{n-1} \frac{(p_{n-1} + p_1)}{2} + \dots + z \frac{(p_1 + p_{n-1})}{2} + \frac{(p_0 + p_n)}{2}.$$

Los coeficientes de $P_a(z)$ y $P_s(z)$ son $(p_n - p_0)/2$ y $(p_n + p_0)/2$, respectivamente, como $|p_0| < |p_n|$, ambos polinomios son de grado n y sus coeficientes tienen el mismo signo, por lo tanto se tiene a). Ahora, la transformación de Möbius $\tilde{P}(s) = T[P(z)]$ (ver definición 1.23) de $P_a(z)$ y $P_s(z)$, muestra que:

$$T[P_s(z)] = \tilde{P}^{par}(s), \quad T[P_a(z)] = \tilde{P}^{impar}(s), \quad \text{para } n \text{ par}$$

y

$$T[P_s(z)] = \tilde{P}^{impar}(s), \quad T[P_a(z)] = \tilde{P}^{par}(s), \quad \text{para } n \text{ impar.}$$

Pero $\tilde{P} = \tilde{P}^{par} + \tilde{P}^{impar}$ es Hurwitz por el lema 1.24, así \tilde{P}^{par} y \tilde{P}^{impar} cumplen la propiedad de la alternancia, como consecuencia todas las raíces de $P_a(z)$ y $P_s(z)$ son simples y de la forma $m(\iota s_k) = e^{\iota\theta_k}$ y $m(\iota s'_j) = e^{\iota\theta'_j}$ respectivamente, donde los argumentos θ_k y θ'_j son alternantes en $(0, 2\pi)$ por el lema 1.22. Esto prueba b) y c).

(\Leftarrow). Supongamos que $P_a(z)$ y $P_s(z)$ satisfacen a), b) y c). Sea $P(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \dots + p_1 z + p_0$, la condición a) es equivalente a $p_n^2 > p_0^2$, la cual es una condición necesaria para que $P(z)$ sea Schur (ver Propiedad 1.21), además

$$T[P_s(z)] = \tilde{P}^{par}(s), \quad T[P_a(z)] = \tilde{P}^{impar}(s), \quad \text{para } n \text{ par}$$

y

$$T[P_s(z)] = \tilde{P}^{impar}(s), \quad T[P_a(z)] = \tilde{P}^{par}(s), \quad \text{para } n \text{ impar.}$$

Entonces las raíces de \tilde{P}^{par} y \tilde{P}^{impar} serán reales, simples y alternantes en \mathbb{R} , así obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) = & \left[p_0 \binom{n}{0} + p_1 \binom{n-1}{0} + \dots + p_n \binom{n}{0} \right] s^n + \dots + \\ & \left[p_0 \binom{n}{n} (-1)^n + p_1 \binom{n-1}{n-1} (-1)^n (-1) + \dots + p_n \binom{n}{n} (-1)^n (-1)^n \right] \end{aligned}$$

escribimos

$$\tilde{P}(s) = \tilde{p}_n s^n + \tilde{p}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0$$

donde cada \tilde{p}_i es una función, la cual depende de los coeficientes de $P(z)$. Se sigue que si la transformación preserva el grado, entonces $P(z)$ es Schur estable si y solo si $\tilde{P}(s)$ es Hurwitz estable. La transformación descrita, preserva el grado, si y sólo si

$$\tilde{p}_n = \sum_{i=0}^{i=n} p_i = P(1) \neq 0$$

Esta igualdad es implicada por la condición c). Por lo tanto, $\tilde{P}(s)$ es Hurwitz, así, por el lema 1.24, $P(z)$ es Schur. \square

Observación 1.27. La transformación de $P(z)$ sobre $\tilde{P}(s)$ es una transformación lineal y puede ser escrita explícitamente como

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \binom{n}{n}(-1)^n & \binom{n-1}{n-1}(-1)^n(-1) & \cdots & \binom{n}{n}(-1)^n(-1)^n \\ \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} & [\binom{n-1}{n-1} - \binom{n-1}{n-2}](-1)^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1}(-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0}(-1)^0 & \binom{n-1}{0}(-1)^0 & \cdots & \binom{n}{0}(-1)^0(-1)^0 \end{pmatrix}$$

Observación 1.28. Tenemos que $P(1) = (1)^n P(1/1)$, así, 1 es raíz de $P_a(z)$, además, las raíces de $P_a(z)$ y $P_s(z)$ son localizadas simétricamente con respecto del eje real. Ahora, también se tiene que $P_a(-1) = 0$ ó $P_s(-1) = 0$. En particular, la condición de alternancia puede ser verificada sólo examinando las raíces sobre el semicírculo cerrado superior.

Ejemplo 1.29. Verificar si el polinomio $P(z)$ es polinomio Schur

$$P(z) = z^5 + 0.2z^4 + 0.3z^3 + 0.4z^2 + 0.03z + 0.02$$

obtenemos

$$P_s(z) = 0.51z^5 + 0.115z^4 + 0.35z^3 + 0.35z^2 + 0.115z + 0.51 \quad y$$

$$P_a(z) = 0.49z^5 + 0.085z^4 - 0.05z^3 + 0.05z^2 - 0.085z - 0.49$$

Vemos que el inciso a) se satisface. Ahora verificamos el inciso b) y c).

$$P_s(z) = 0 \iff z = -0.221 \pm 0.975i, 0.608 \pm 0.793i, -1.$$

$$P_a(z) = 0 \iff z = -0.857 \pm 0.514i, 0.270 \pm 0.962i, 1.$$

Cada una de las raíces de $P_s(z)$ y $P_a(z)$ es simple, se encuentran en el círculo unitario y se alternan. Por lo tanto, por el teorema 1.26, $P(z)$ es polinomio Schur.

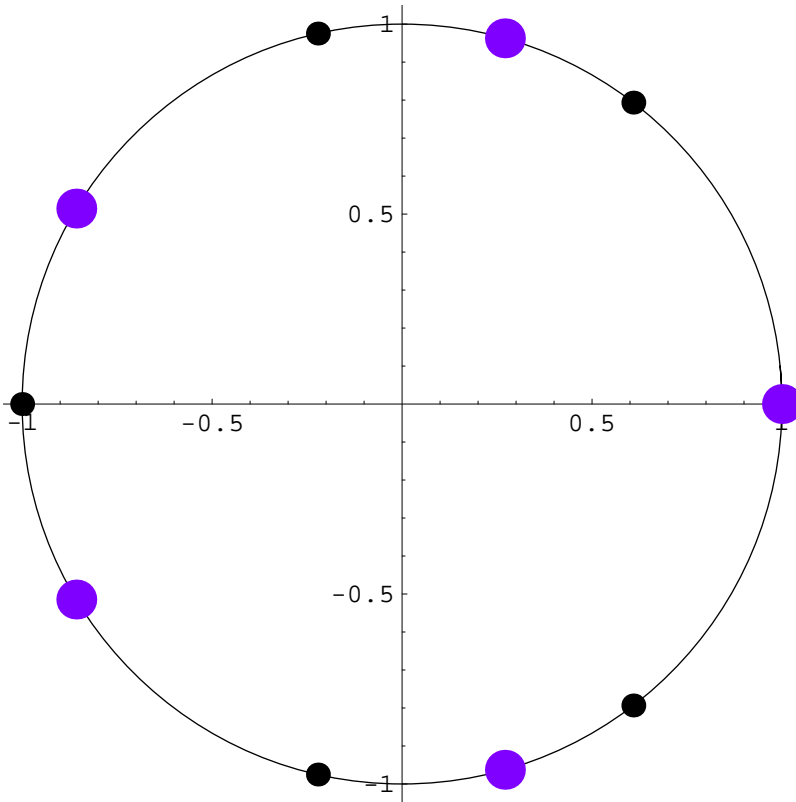


Figura 1.4: Teorema de la alternancia para polinomios Schur (Ejemplo 1.29)

El teorema de Hermite-Biehler se tiene para cualquier región de estabilidad \mathcal{S} , que tiene la propiedad de que la fase de cualquier polinomio estable con respecto a \mathcal{S} varía en forma monótona a lo largo de la frontera de \mathcal{S} . El semiplano izquierdo y el círculo unitario satisfacen este criterio.

Capítulo 2

Estabilidad asintótica de una posición de equilibrio de una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Introducción

El problema de la estabilidad en familias intervalo de polinomios fue planteado originalmente por Faedo [11], quien trató de resolverlo utilizando las condiciones de *Routh-Hurwitz*, hasta que Vladimir L. Kharitonov dio una solución completa al problema. Kharitonov mostró que se puede concluir que una familia intervalo de polinomios, que contiene un número infinito de éstos, es estable si únicamente cuatro elementos de esta familia, llamados polinomios de Kharitonov, son estables, publico por primera vez su teorema para polinomios reales en 1978 [19] y luego lo extendió al caso complejo [20]. Este teorema es útil en el campo de control robusto, donde se busca diseñar controladores que funcionan a pesar de las incertidumbres inherentes a los errores de modelado, medición y cambios en condiciones de operación. Los trabajos de Bialas [8] y Barmish [2] introdujeron este importante resultado en la literatura occidental.

Este capítulo esta dedicado al Teorema de Kharitonov. Aquí presentamos la prueba original del Teorema, con la inclusión de algunos detalles con el fin de hacerla más completa. Algo interesante del trabajo profesional del

Dr. Kharitonov es que en 1995 se incorporó al equipo de investigadores del Departamento de Control Automático del **Cinvestav** México, donde llegó ser Investigador 3E y miembro del Sistema Nacional de Investigadores con nivel 3. Después de once años de laborar en esta institución regreso a su natal Rusia y al puesto que ocupa en la Universidad de San Petersburgo.

Se decidió incluir en esta tesis la demostración del Teorema de Kharitonov pues se puede ver como se aplica el Teorema de Hermite-Biehler para obtener dicha prueba. De esta manera se ilustra el potencial y la importancia del Teorema de Hermite-Biehler, pues el resultado de Kharitonov le ha dado renombre internacional por sus numerosas aplicaciones y extensiones.

Para que la solución trivial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.1)$$

con coeficientes constantes, sea asintóticamente estable, donde A es una matriz real $n \times n$, es necesario y suficiente que todos los ceros del polinomio característico se encuentren en el semiplano izquierdo [25, 34].

Si los elementos de A se conocen sólo aproximadamente, la cuestión de la estabilidad asintótica de la solución $x = 0$, podría requerir la investigación de la familia de polinomios

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (2.2)$$

donde

$$a_i \in [\alpha_i, \beta_i], \quad (\alpha_i \leq \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

así, la familia es de la forma siguiente

$$x^n + [\alpha_1, \beta_1]x^{n-1} + [\alpha_2, \beta_2]x^{n-2} + \dots + [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]x + [\alpha_n, \beta_n].$$

2.1. Aplicación del Teorema de Hermite-Biehler

Problema. Encontrar condiciones bajo las cuales, todos los ceros de todos los polinomios (2.2) y (2.3) tengan parte real negativa.

Este problema fue planteado por primera vez en [11]. Sea G^n el conjunto de todos los polinomios de la forma (2.2), cuyos ceros están en el semiplano izquierdo, sea S^n la familia de polinomios (2.2), (2.3), y sea S_1^n la familia de los 2^n polinomios en S^n , en los cuales cada coeficiente a_i es igual a α_i ó a β_i .

Teorema 2.1. *Para que $S^n \subset G^n$, es necesario y suficiente, que $S_1^n \subset G^n$.*

Demostración. La necesidad es evidente, porque $S_1^n \subset S^n$.

Para probar la suficiencia utilizamos un lema. Consideremos la familia \tilde{S}^n de polinomios (2.2), (2.3), tales que

$$a_{2k+1} \in [\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

la familia \tilde{S}^n es de la forma siguiente, para $n = 2m + 1$

$$x^{2m+1} + [\alpha_1, \beta_1]x^{2m} + a_2x^{2m-1} + [\alpha_3, \beta_3]x^{2m-2} + \dots + a_{2m}x + [\alpha_{2m+1}, \beta_{2m+1}].$$

Cada coeficiente a_n con $n = 2k$ es fijo, para cada polinomio de \tilde{S}^n se tiene un par único de funciones $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ relacionadas con $p(x)$ por la igualdad

$$p(x) = h(x^2) + xg(x^2). \quad (2.4)$$

Para $n = 2m + 1$

$$p(x) = x^{2m+1} + a_1x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \dots + a_{2m-1}x^2 + a_{2m}x + a_{2m+1}.$$

$$p(x) = (x^{2m+1} + a_2x^{2m-1} + a_4x^{2m-3} + \dots + a_{2m}) + \\ + (a_1x^{2m} + a_3x^{2m-2} + a_5x^{2m-4} + \dots + a_{2m-1}x^2 + a_{2m+1})$$

$$p(x) = (a_1x^{2m} + a_3x^{2m-2} + a_5x^{2m-4} + \dots + a_{2m-1}x^2 + a_{2m+1}) + \\ + x(x^{2m} + a_2x^{2m-2} + a_4x^{2m-4} + \dots + a_{2m-2}x^2 + a_{2m}) \\ = h(x^2) + xg(x^2)$$

Los polinomios $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son de grado m . Para $n = 2m$, $h(\lambda)$ es de grado m y $g(\lambda)$ es de grado $m - 1$.

Para $p(x) \in \tilde{S}^n$ y $n = 2m$, $p(x)$ es de la forma

$$p(x) = (x^{2m} + a_2x^{2m-2} + a_4x^{2m-4} + \dots + a_{2m-2}x^2 + a_{2m}) + \\ + x(a_1x^{2m-2} + a_3x^{2m-4} + a_5x^{2m-6} + \dots + a_{2m-3}x^2 + a_{2m-1}) \\ = h(x^2) + xg(x^2),$$

y el polinomio $h(\lambda)$ es fijo; para $n = 2m + 1$, el polinomio $g(\lambda)$ es fijo. La familia \tilde{S}_1^n consiste de $2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ polinomios (a_{2k+1} es igual a α_{2k+1} ó β_{2k+1}).

$$x^{2m+1} + \{\alpha_1, \beta_1\}x^{2m} + a_2x^{2m-1} + \{\alpha_3, \beta_3\}x^{2m-2} + \dots + a_{2m}x + \{\alpha_{2m+1}, \beta_{2m+1}\}$$

Lema 2.2. *Para que $\tilde{S}^n \subset G^n$, es suficiente que, $\tilde{S}_1^n \subset G^n$.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{S}_1^n \subset G_n$ y que $n = 2m$. El teorema de Hermite-Biehler [12], implica que, a fin de que $p(x) \in G^n$, es necesario y suficiente que, $h(\lambda)$ y $g(\lambda)$ formen un par positivo [Ver 1.14]; es decir, los ceros de estos polinomios deben ser distintos, reales, negativos y alternantes de la siguiente manera:

$$u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \cdots < u_{m-1} < u_m < 0;$$

aquí u_i son los ceros de $h(\lambda)$ y v_i son los ceros de $g(\lambda)$. Supongamos que $p(x) \in \tilde{S}_1^n$, entonces $p(x) = h(x^2) + xg(x^2)$, donde $h(\lambda)$ es fijo y forma un par positivo con todos los $g(\lambda)$ correspondientes a los polinomios de \tilde{S}_1^n . Denotemos estos polinomios por $g_1(\lambda), \dots, g_{2^m}(\lambda)$. Todos los $p(x) = h(x^2) + xg_i(x^2)$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) son, por hipótesis, polinomios Hurwitz: por lo tanto, todos los coeficientes de cada polinomio $g_i(\lambda)$ son positivos. Si el valor absoluto de λ es suficientemente grande, $\text{sgn}[g_i(\lambda)] = \text{sgn}[(-1)^{m-1}]$, para $i = 1, 2, \dots, 2^m$ (m es impar).

Todos los $g_i(\lambda)$ cambian de signo por primera vez en el intervalo (u_1, u_2) ; i.e., $\text{sgn}[g_i(u_2)] = \text{sgn}[(-1)^{m-2}]$, para $i = 1, 2, \dots, 2^m$; en forma similar, $\text{sgn}(g_i(u_k)) = \text{sgn}((-1)^{m-k})$, para $i = 1, 2, \dots, 2^m$.

Consideremos un polinomio arbitrario en \tilde{S}^n , $p(x) = h(x^2) + xg(x^2)$, el correspondiente polinomio $g(\lambda)$ cambia de signo en cada intervalo (u_k, u_{k+1}) ; i.e., tiene ceros en este intervalo. Por lo tanto, $g(\lambda)$ forma un par positivo con $h(\lambda)$, así, cada polinomio en \tilde{S}^n también está en G^n . Esto demuestra el lema para $n = 2m$, la prueba es similar para $n = 2m + 1$. \square

Observación 2.3. *Se sabe ([5], [10], [15], [24]) que, con el fin de que $p(x) \in G^n$, cuando $a_1 > 0$, es necesario y suficiente, que el polinomio de grado $(n - 1)$*

$$\varphi_p(x) = \frac{(-1)^n x p(-x) - (x - 2a_1)p(x)}{2a_1^2} = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}, \quad (2.5)$$

donde

$$b_i = \begin{cases} \frac{a_1 a_{i+1} - a_{i+2}}{a_1^2} & , \text{ para } i \text{ impar,} \\ \frac{a_{i+1}}{a_1} & , \text{ para } i \text{ par,} \end{cases} \quad (2.6)$$

este en G^{n-1} .

Ahora demostramos la suficiencia en el Teorema 2.1, supongamos que $S_1^n \subset G^n$ y aplicamos inducción matemática sobre n . Supongamos, además, que el Teorema 2.1 se tiene para todas las familias de la forma (2.2) y (2.3) cuando los grados de los polinomios son menores que n , así, tenemos por hipótesis de inducción que $S^{n-1} \subset G^{n-1}$. Vamos a demostrar el teorema para familias de polinomios de grado n . Sea $p(x) \in S^n$, donde $p(x)$ es de la forma siguiente

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Queremos probar que $p(x) \in G^n$, calculamos $\varphi_p(x)$ y obtenemos que

$$\varphi_p(x) = x^{n-1} + \left(\frac{a_1a_2 - a_3}{a_1^2} \right) x^{n-2} + \frac{a_3}{a_1} x^{n-3} + \left(\frac{a_1a_4 - a_5}{a_1^2} \right) x^{n-4} + \frac{a_5}{a_1} x^{n-5} + \cdots$$

dejando fijos a_1, a_3, a_5, \dots , y tomando $a_2 \in [\alpha_2, \beta_2]$, $a_4 \in [\alpha_4, \beta_4]$, \dots , obtendríamos la familia intervalo

$$\begin{aligned} x^{n-1} + \left[\frac{a_1\alpha_2 - a_3}{a_1^2}, \frac{a_1\beta_2 - a_3}{a_1^2} \right] x^{n-2} + \frac{a_3}{a_1} x^{n-3} \\ + \left[\frac{a_1\alpha_4 - a_5}{a_1^2}, \frac{a_1\beta_4 - a_5}{a_1^2} \right] x^{n-4} + \frac{a_5}{a_1} x^{n-5} + \cdots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, todo elemento $p(x) \in S^n$ es Hurwitz, si y sólo si, toda la familia de la forma 2.7 esta contenida en $G^n, \forall (a_1, a_3, a_5, \dots) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_3, \beta_3] \times [\alpha_5, \beta_5] \times \cdots$. Y por hipótesis de inducción esto último se cumple, si y sólo si, la familia

$$\begin{aligned} x^{n-1} + \left\{ \frac{a_1\alpha_2 - a_3}{a_1^2}, \frac{a_1\beta_2 - a_3}{a_1^2} \right\} x^{n-2} + \frac{a_3}{a_1} x^{n-3} \\ + \left\{ \frac{a_1\alpha_4 - a_5}{a_1^2}, \frac{a_1\beta_4 - a_5}{a_1^2} \right\} x^{n-4} + \frac{a_5}{a_1} x^{n-5} + \cdots \end{aligned} \quad (2.8)$$

esta contenida en G^n . Por el resultado en 2.3 esto último se tiene, si y sólo si, la familia

$$x^n + a_1x^{n-1} + \{\alpha_2, \beta_2\} x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \{\alpha_4, \beta_4\} x^{n-4} + a_5x^{n-5} + \cdots \quad (2.9)$$

esta contenida en $G^n, \forall (a_1, a_3, \dots) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_3, \beta_3] \times \cdots$, es decir, veremos que

$$x^n + [\alpha_1, \beta_1] x^{n-1} + \{\alpha_2, \beta_2\} x^{n-2} + [\alpha_3, \beta_3] x^{n-3} + \{\alpha_4, \beta_4\} x^{n-4} + \cdots$$

esta contenida en G^n . Dejando fijos los coeficientes de x^{n-2} , x^{n-4} , \dots , tenemos que lo que falta probar es que

$$x^n + [\alpha_1, \beta_1] x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + [\alpha_3, \beta_3] x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + [\alpha_5, \beta_5] x^{n-5} + \dots$$

esta contenida en G^n , $\forall (a_2, a_4, \dots) \in \{\alpha_2, \beta_2\} \times \{\alpha_4, \beta_4\} \times \dots$, denotamos esta familia por \overline{S}^n . Por el Lema 2.2 sería suficiente probar que $\overline{S}_1^n \subset G^n$, pero $\overline{S}_1^n = S_1^n$ y, por hipótesis, $S_1^n \subset G^n$, esto completa la prueba del Teorema 2.1. \square

Lema 2.4. *Supongamos que*

$$p_*(x) = h(x^2) + xg_{p_*}(x^2)$$

$$q_*(x) = h(x^2) + xg_{q_*}(x^2)$$

donde $p_*(x)$ y $q_*(x)$ están en G^n y $g_{p_*}(\lambda) \leq g_{q_*}(\lambda)$, $(\lambda < 0)$.

Entonces, si

$$p(x) = h(x^2) + xg_p(x^2)$$

es otro polinomio, tal que

$$g_{p_*}(\lambda) \leq g_p(\lambda) \leq g_{q_*}(\lambda), \quad \lambda < 0,$$

entonces $p(x)$ está en G^n .

Demostración. Como $p_*(x)$ y $q_*(x)$ están en G^n , $h(\lambda)$ y $g_{p_*}(\lambda)$ forman un par positivo; $h(\lambda)$ y $g_{q_*}(\lambda)$, también tienen esta propiedad.

Se tiene entonces que

$$u_1 < v_1^{p_*} < v_1^{q_*} < u_2,$$

$$g_p(v_1^{p_*}) \geq g_{p_*}(v_1^{p_*}) = 0,$$

$$g_p(v_1^{q_*}) \leq g_{q_*}(v_1^{q_*}) = 0.$$

Por el teorema del valor intermedio, existe $v_1 \in [v_1^{p_*}, v_1^{q_*}]$, tal que, $g_p(v_1) = 0$ y $u_1 < v_1$, repitiendo este mismo argumento, se tiene que, $h(\lambda)$ y $g_p(\lambda)$ son un par positivo, por lo tanto, $p(x)$ está en G^n . \square

Lema 2.5. *Supongamos que*

$$p_*(x) = h_{p_*}(x^2) + x g(x^2)$$

$$q_*(x) = h_{q_*}(x^2) + x g(x^2)$$

donde $p_*(x)$ y $q_*(x)$ están en G^n y $h_{p_*}(\lambda) \leq h_{q_*}(\lambda)$, ($\lambda < 0$).

Entonces si

$$p(x) = h_p(x^2) + x g(x^2)$$

es otro polinomio, tal que,

$$h_{p_*}(\lambda) \leq h_p(\lambda) \leq h_{q_*}(\lambda), \quad \lambda < 0,$$

entonces $p(x)$ está en G^n .

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 2.4. □

Teorema 2.6. *Para que $S_1^n \subset G^n$, es necesario y suficiente que los siguientes cuatro polinomios de S_1^n estén en G^n :*

$p_1(x)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \alpha_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \alpha_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$p_2(x)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \beta_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \beta_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$p_3(x)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \beta_{n-2k} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \alpha_{n-2k-1} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$p_4(x)$

$$a_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k} & , \text{para } k \text{ par,} \\ \alpha_{n-2k} & , \text{para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

$$a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1} & , \text{para } k \text{ par,} \\ \beta_{n-2k-1} & , \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Demostración. La necesidad es evidente, vamos a probar la suficiencia.

Supongamos que $n = 2m$ (la prueba es similar para $n = 2m + 1$) y que $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ y $p_4(x)$ están en G^n , cada polinomio es de la forma siguiente

$$p_1(x) = \beta_{2m} + \beta_{2m-1}x + \alpha_{2m-2}x^2 + \alpha_{2m-3}x^3 + \beta_{2m-4}x^4 + \beta_{2m-5}x^5 + \cdots + x^{2m},$$

$$p_2(x) = \alpha_{2m} + \alpha_{2m-1}x + \beta_{2m-2}x^2 + \beta_{2m-3}x^3 + \alpha_{2m-4}x^4 + \alpha_{2m-5}x^5 + \cdots + x^{2m},$$

$$p_3(x) = \alpha_{2m} + \beta_{2m-1}x + \beta_{2m-2}x^2 + \alpha_{2m-3}x^3 + \alpha_{2m-4}x^4 + \beta_{2m-5}x^5 + \cdots + x^{2m},$$

$$p_4(x) = \beta_{2m} + \alpha_{2m-1}x + \alpha_{2m-2}x^2 + \beta_{2m-3}x^3 + \beta_{2m-4}x^4 + \alpha_{2m-5}x^5 + \cdots + x^{2m}.$$

Sea $p(x) \in S_1^n$, así $p(x)$ es de la forma

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^{2m} + a_2x^{2m-2} + a_4x^{2m-4} + \cdots + a_{2m-2}x^2 + a_{2m}) + \\ &\quad + x(a_1x^{2m-2} + a_3x^{2m-4} + a_5x^{2m-6} + \cdots + a_{2m-3}x^2 + a_{2m-1}) \\ &= h(x^2) + xg(x^2), \end{aligned}$$

con $a_i = \alpha_i$ o β_i , por notación, escribimos g_p y h_p como los polinomios g y h asociados al polinomio p .

Observación 2.7. $h_{p_2}(x) = h_{p_3}(x)$, $h_{p_1}(x) = h_{p_4}(x)$, $g_{p_2}(x) = g_{p_4}(x)$ y $g_{p_1}(x) = g_{p_3}(x)$.

Utilizamos el mismo tipo de razonamiento empleado en la prueba del lema 2.2. De los $g_i(\lambda)$ seleccionamos dos polinomios: $\bar{g}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k+1} = \begin{cases} \alpha_{2k+1} & , \text{para } k \text{ par,} \\ \beta_{2k+1} & , \text{para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

y $\tilde{g}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k+1} = \begin{cases} \beta_{2k+1} & , \text{para } k \text{ par,} \\ \alpha_{2k+1} & , \text{para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Evaluando cada polinomio en $\lambda < 0$, tenemos que

$$\bar{g}(\lambda) = \alpha_{2m-1} - \beta_{2m-3}\lambda + \alpha_{2m-5}\lambda^2 - \beta_{2m-7}\lambda^3 + \dots$$

$$\tilde{g}(\lambda) = \beta_{2m-1} - \alpha_{2m-3}\lambda + \beta_{2m-5}\lambda^2 - \alpha_{2m-7}\lambda^3 + \dots$$

Observación 2.8. $\bar{g}(\lambda) = g_{p_2}(\lambda) = g_{p_4}(\lambda)$, $\tilde{g}(\lambda) = g_{p_1}(\lambda) = g_{p_3}(\lambda)$.

Consideremos los siguientes polinomios: $\bar{h}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k} = \begin{cases} \alpha_{2k} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \beta_{2k} & , \text{ para } k \text{ impar,} \end{cases}$$

y $\tilde{h}(\lambda)$ con los coeficientes

$$a_{2k} = \begin{cases} \beta_{2k} & , \text{ para } k \text{ par,} \\ \alpha_{2k} & , \text{ para } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Evaluando cada polinomio en $\lambda < 0$, tenemos que

$$\bar{h}(\lambda) = \alpha_{2m} - \beta_{2m-2}\lambda + \alpha_{2m-4}\lambda^2 - \beta_{2m-6}\lambda^3 + \dots$$

$$\tilde{h}(\lambda) = \beta_{2m} - \alpha_{2m-2}\lambda + \beta_{2m-4}\lambda^2 - \alpha_{2m-6}\lambda^3 + \dots$$

Observación 2.9. $\bar{h}(\lambda) = h_{p_2}(\lambda) = h_{p_3}(\lambda)$, $\tilde{h}(\lambda) = h_{p_1}(\lambda) = h_{p_4}(\lambda)$.

Consideremos los polinomios

$$p_2(x) = \bar{h}(x^2) + x \bar{g}(x^2),$$

$$p_3(x) = \bar{h}(x^2) + x \tilde{g}(x^2),$$

$$q_*(x) = \bar{h}(x^2) + x g_p(x^2).$$

Los tres tienen misma parte par y es fácil observar que la gráfica de cada $g_p(\lambda)$, tal que, $a_{2k+1} \in [\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}]$ se sitúa entre las gráficas de $\bar{g}(\lambda)$ y $\tilde{g}(\lambda)$ para $\lambda < 0$; por lo tanto, por el lema 2.4, $q_*(x) = \bar{h}(x^2) + x g_p(x^2)$ está en G^n .

Análogamente

$$p_4(x) = \tilde{h}(x^2) + x \bar{g}(x^2),$$

$$p_1(x) = \tilde{h}(x^2) + x \tilde{g}(x^2),$$

$$p_*(x) = \tilde{h}(x^2) + x g_p(x^2).$$

Los tres tienen misma parte par y $\bar{g}(\lambda) \leq g_p(\lambda) \leq \tilde{g}(\lambda)$ para $\lambda < 0$; por lo tanto, por el lema 2.4, $p_*(x)$ está en G^n .

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} q_*(x) &= \bar{h}(x^2) + x g_p(x^2), \\ p_*(x) &= \tilde{h}(x^2) + x g_p(x^2), \\ p(x) &= h_p(x^2) + x g_p(x^2). \end{aligned}$$

Los tres tienen misma parte impar y $\bar{h}(\lambda) \leq h_p(\lambda) \leq \tilde{h}(\lambda)$, por el lema 2.5, cada $h_p(\lambda)$ y $g_p(\lambda)$, con coeficientes que satisfacen (2.3), forman un par positivo, esto es, $S_1^n \subset G^n$. Por lo tanto, el Teorema 2.6 se tiene. \square

Ahora consideremos el problema original. Sea la matriz $A \in U$ si $a_{ij} \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$ y $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), y sea $p(x) \in W$, si $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz U . Poniendo

$$\alpha_i = \min_W \{a_i\}, \quad \beta_i = \max_W \{a_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.10 (Kharitonov, 1978). *Para que en todos los sistemas (2.1), con $A \in U$, se tenga estabilidad asintótica para la solución de equilibrio $x = 0$, es suficiente que los cuatro polinomios descritos en el Teorema 2.6 estén en G^n .*

Demostración. La demostración se sigue de los Teoremas 2.1 y 2.6. \square

Observación 2.11. *Los Teoremas 2.1 y 2.6, seguirán siendo válidos para la familia de polinomios*

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

donde $a_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Ejemplo 2.12. *Para el polinomio intervalo*

$$p(x) = [0.25, 1.25] + [0.75, 1.25]x + [2.75, 3.25]x^2 + [0.25, 1.25]x^3,$$

los cuatro polinomios de Kharitonov son

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1.25 + 1.25x + 2.75x^2 + 0.25x^3; \\ p_2(x) &= 0.25 + 0.75x + 3.25x^2 + 1.25x^3; \\ p_3(x) &= 0.25 + 1.25x + 3.25x^2 + 0.25x^3; \\ p_4(x) &= 1.25 + 0.75x + 2.75x^2 + 1.25x^3. \end{aligned}$$

Para verificar que los polinomios son Hurwitz igualamos cada uno a cero y encontramos sus raíces, así tenemos que

Para $p_1(x)$, sus raíces son: $x = -10.571$, $x = -0.214 \pm 0.653i$,

para $p_2(x)$, sus raíces son: $x = -2.383$, $x = -0.108 \pm 0.268i$,

para $p_3(x)$, sus raíces son: $x = -12.609$, $x = -0.195 \pm 0.203i$,

para $p_4(x)$, sus raíces son: $x = -2.138$, $x = -0.030 \pm 0.683i$.

Por lo tanto, los cuatro polinomios son Hurwitz y así la familia de polinomios intervalo es estable.

En este capítulo hemos presentado la prueba original del Teorema de Kharitonov, sin embargo, otras pruebas pueden consultarse en [6] y [29]. Para un estudio de las Familias de polinomios de tipo intervalo ver [3], en donde también se da una prueba alternativa del Teorema de Kharitonov, así como en [1], en donde se utiliza la gráfica de *Mikhailov* como criterio de estabilidad de los cuatro polinomios de Kharitonov.

Capítulo 3

El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas con Retardo

En este capítulo presentamos una generalización del Teorema de Hermite-Biehler dada por *L. S. Pontrjagin* para funciones enteras de la forma $P(z, e^z)$. Las ecuaciones diferenciales con argumento desviado son ecuaciones diferenciales en las cuales la función incógnita f depende también de términos con diferentes valores de su argumento. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau(t)), \dot{x}(t - \tau(t))), \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t - \tau_1(t)), \dot{x}(t - \tau_2(t))).\end{aligned}$$

Si cada $\tau_i(t)$ es constante, tenemos entonces una *ecuación diferencial en diferencias*. La primera ecuación de este tipo apareció en la literatura en la segunda mitad del siglo *XVIII* (*Kondorse*, 1771), pero un estudio sistemático de las ecuaciones con argumento desviado comenzó en el siglo *XX* (especialmente en las primeras décadas - *A. D. Myshkis*, en la Unión Soviética, *E. M. Wright* y *R. Bellman* en otros países), en relación con las necesidades de la ciencia aplicada. Las ecuaciones diferenciales con argumento desviado tienen muchas aplicaciones en la teoría de control automático, el estudio de problemas relacionados con la combustión de cohetes en movimiento, en economía, en una serie de problemas biológicos y en muchos otros ámbitos de

la ciencia y la tecnología. En un estudio en sistemas reales, para una primera aproximación, se supone que el retraso $\tau = \tau_i(t)$ es constante.

3.1. Introducción

En el capítulo 1 se muestra el correspondiente Teorema de Hermite-Biehler para sistemas continuos y discretos, sin embargo, cuando el sistema bajo estudio involucra retardos no se pueden aplicar los teoremas dados. Sistemas lineales con retardos dan lugar a funciones características, conocidas como cuasipolinomios. *Pontrjagin* fue uno de los primeros investigadores en estudiar estos cuasipolinomios, él derivó condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de un cuasipolinomio tengan parte real negativa. Además, uso tales condiciones para estudiar la estabilidad de cierta clase de cuasipolinomios. Algo interesante acerca del matemático ruso *Pontrjagin* es que quedo ciego a la edad de trece años como resultado de un accidente, pero asumió las matemáticas bajo la guía de *Alexandrov* y pronto se convirtió en un líder mundial en la nueva disciplina de la topología, además, realizó un importante trabajo sobre el Quinto Problema de *Hilbert*, después de la segunda guerra mundial *Pontrjagin* cambio de campo de estudio y pasó de los grupos topológicos a la teoría del control óptimo, aunque desde la década de 1930 había estudiado problemas en la teoría de las oscilaciones y la teoría del control automático; el artículo con la generalización presentada en esta tesis fue publicado en 1942.

Este capítulo es organizado de la siguiente manera, en la sección 3.2, se introduce el concepto de ecuación característica para sistemas con retardo. En la sección 3.3, se presenta una extensión del Teorema de Hermite-Biehler para cuasipolinomios dada por *Pontrjagin*, por último, se muestra un ejemplo donde se aplica este resultado.

3.2. Ecuación característica para sistemas con retardo

Los retrasos, por ejemplo, están presentes en un sistema, cuando una señal o variable física originada en una parte de un sistema, está disponible en otra parte, después de un lapso de tiempo.

El bloque en la figura 3.1, representa un retardo:

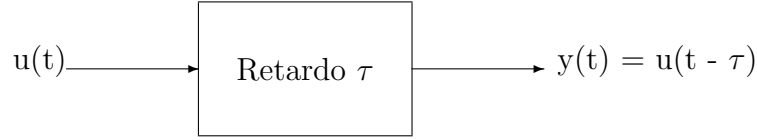


Fig. 3.1. Representación del retardo.

En un sistema dinámico con retroalimentación, donde el retardo esta presente, la ecuación del sistema es de la forma siguiente

$$\dot{y}(t) + a y(t - \tau) = u(t) \quad (3.1)$$

Si existe un retardo en la entrada, la ecuación asociada es de la siguiente manera

$$\dot{y}(t) + a y(t) = u(t - \tau) \quad (3.2)$$

Un sistema de orden superior con múltiples retrasos podría estar representado por la ecuación

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t - \tau_1) + a_0 y(t - \tau_0) = u(t) \quad (3.3)$$

El sistema (3.3), puede ser representado en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - \tau_0) \\ x_2(t - \tau_0) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - \tau_1) \\ x_2(t - \tau_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

En general, un sistema lineal con l distintos retardos, τ_1, \dots, τ_l , puede ser representado de la siguiente forma

$$\dot{x} = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - \tau_i) + B u(t). \quad (3.5)$$

Para discutir la estabilidad de sistemas, tales como (3.1)—(3.5), es común examinar las soluciones $y(t)$, con $u(t) \equiv 0$ y estudiar el comportamiento de $y(t)$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para este propósito, consideremos, por ejemplo, el sistema (3.3), con $u(t) \equiv 0$ y que $y(t) = e^{zt}$ es una solución de

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t - \tau_1) + a_0 y(t - \tau_0) \equiv 0. \quad (3.6)$$

Entonces tenemos que

$$(z^2 + a_1 e^{-z\tau_1} z + a_0 e^{-z\tau_0}) e^{zt} \equiv 0,$$

de manera que z debe satisfacer la ecuación

$$z^2 + a_1 e^{-z\tau_1} z + a_0 e^{-z\tau_0} = 0. \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) es la ecuación característica de (3.3) ó (3.6); la ubicación de sus raíces (o ceros) determina la estabilidad de los sistemas representados por (3.3). En particular, si algunas raíces se encuentran en el semiplano derecho cerrado, el sistema es inestable.

La ecuación característica asociada con (3.5), es

$$\begin{aligned} P^*(z) &:= \det \left(z I - A_0 - \sum_{i=1}^l e^{-z\tau_i} A_i \right) \\ &= P_0(z) + \sum_{k=1}^m P_k(z) e^{-L_k z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde L_k , $k = 1, 2, \dots, m$, son sumas de los τ_i y

$$P_0(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \quad (3.9)$$

$$P_k(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_k)_i z^i. \quad (3.10)$$

Ejemplo 3.1. Consideremos el siguiente sistema lineal con dos retardos

$$\dot{x}(t) = A_0 x + A_1 x(t - \tau_1) + A_2 x(t - \tau_2)$$

con

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica asociada al sistema es

$$\begin{aligned}
P^*(z) &= \det \left(z I - A_0 - \sum_{i=1}^2 e^{-z\tau_i} A_i \right) \\
&= \begin{vmatrix} z - a_1 - b_1 e^{-z\tau_1} - c_1 e^{-z\tau_2} & -a_2 - b_2 e^{-z\tau_1} - c_2 e^{-z\tau_2} \\ -a_3 - b_3 e^{-z\tau_1} - c_3 e^{-z\tau_2} & z - a_4 - b_4 e^{-z\tau_1} - c_4 e^{-z\tau_2} \end{vmatrix} \\
&= [z^2 + z(-a_1 - a_4) + a_1 a_4 - a_2 a_3] + \\
&\quad + e^{-z\tau_1} [z(-b_1 - b_4) + (a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_3 b_2 - a_2 b_3)] + \\
&\quad + e^{-z\tau_2} [z(-c_1 - c_4) + (a_1 c_4 + a_4 c_1 - a_3 c_2 - a_2 c_3)] + \\
&\quad + e^{-z\tau_1} [b_1 b_4 - b_2 b_3] + e^{-z\tau_2} [c_1 c_4 - c_2 c_3] + \\
&\quad + e^{-z(\tau_1 + \tau_2)} [b_1 c_4 + b_4 c_1 - b_3 c_2 - b_2 c_3].
\end{aligned}$$

En la ecuación (3.11) no hay ningún término de retardo asociado con la derivada de orden mayor. Tales sistemas se conocen como *sistemas de tipo retardo*. Cuando en el término de la derivada mayor aparece un retardo podemos tener una ecuación, tal como

$$\ddot{y}(t - \tau_2) + \alpha_1 \dot{y}(t - \tau_1) + \alpha_0 y(t - \tau_0) = u(t) \quad (3.11)$$

con ecuación característica

$$e^{-z\tau_2} z^2 + \alpha_1 e^{-z\tau_1} z + \alpha_0 e^{-z\tau_0} = 0. \quad (3.12)$$

Estos sistemas (con retardo en los términos de la derivada de orden mayor) se denominan *sistemas de tipo neutral*. En ambos sistemas la estabilidad es equivalente a la condición de que todas las raíces de la ecuación característica se encuentren en el semiplano izquierdo abierto (\mathbb{C}^-). En un sistema con retardo sólo puede haber un número finito de raíces en el semiplano derecho, la estabilidad en los sistemas con retardo es equivalente a la ausencia de raíces en el semiplano derecho cerrado.

Además, en las ecuaciones (3.7), (3.11) ó (3.12), los retardos pueden ser múltiplos enteros de un número positivo τ . En estos casos, se dice que los retardos son conmensurables y la ecuación característica toma la forma

$$P^*(z) = a_0(z) + a_1(z) e^{-\tau z} + a_2(z) e^{-2\tau z} + \dots + a_k(z) e^{-k\tau z},$$

donde los $a_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, k$, son polinomios. Así, $P^*(z)$ es un polinomio en dos variables, z y $v := e^{-z\tau}$. En el ejemplo 3.1 supongamos que $\tau_2 = k\tau_1$,

entonces tenemos que

$$P^*(z) = a_0(z) + a_1(z) e^{-\tau_1 z} + a_2(z) e^{-2\tau_1 z} + a_3(z) e^{-k\tau_1 z} + a_4(z) e^{-(k+1)\tau_1 z} + a_5(z) e^{-2k\tau_1 z}.$$

En el libro de *Gu, Kharitonov y Chen* [13], se da un análisis más detallado de la estabilidad en sistemas con retardo, una cobertura extensa sobre cuasipolinomios se puede encontrar en el libro de *Stépán* [31].

3.3. El Teorema de Hermite-Biehler: Sistemas con Retardo

Las funciones polinomiales son analíticas en el plano complejo, y por lo tanto, son una clase de funciones enteras. El Teorema de Hermite-Biehler es válido para una clase de funciones enteras, algunas extensiones son de particular interés en la Teoría del Control. Uno de los primeros intentos en generalizar el teorema fue hecho por *L. S. Pontrjagin*, en sus trabajos estudió funciones enteras de la forma $H(z, e^z)$, donde $H(z, t)$ es un polinomio en dos variables.

Antes de comenzar con este resultado, algunas definiciones preliminares son necesarias. Sea $H(z, t)$ un polinomio en dos variables con coeficientes reales o complejos,

$$H(z, t) = \sum_k \sum_i a_{ik} z^i t^k. \quad (3.13)$$

Sea r el grado mayor del polinomio en z y s el grado mayor del polinomio en t . $H(z, t)$ tiene un término principal, si y sólo si, $a_{rs} \neq 0$. Por ejemplo,

$$H(z, t) = z + t$$

no tiene un término principal, pero el siguiente polinomio si

$$H(z, t) = z + t + zt.$$

El desarrollo de esta generalización se basará en los trabajos realizados por *Pontrjagin*.

El término $a_{rs} z^r t^s$ será llamado término principal. Si el polinomio $h(z, t)$ no posee un término principal; la función $H(z)$ tiene un número infinito de ceros con parte real positiva arbitrariamente grande.

Si el polinomio tiene un término principal, entonces consideramos el comportamiento de la función $H(z)$ en el eje imaginario; i.e., para $z = iy$, donde y es una variable real. La función $H(iy)$ tiene una parte real y otra imaginaria; $H(iy) = F(y) + iG(y)$, donde $F(y) = f(y, \cos y, \sin y)$, $G(y) = g(y, \cos y, \sin y)$, además, $F(y, u, v)$ y $G(y, u, v)$ son polinomios.

Se demostrará de que, con el fin de que las partes reales de todas las raíces sean negativas, es necesario y suficiente, que las raíces de las funciones $F(y)$ y $G(y)$ sean reales, alternantes y también que la desigualdad $G'(y)F(y) - G(y)F'(y) > 0$, se tenga para un valor de y . El problema de cuando todas las raíces de una función de la forma $F(z)$ son reales es resuelto por el siguiente criterio: Para que todas las raíces de la función $F(z)$ sean reales, es necesario y suficiente, que sobre el intervalo $-2k\pi \leq y \leq 2k\pi$, la función $F(y)$ tenga, comenzando con un k suficientemente grande, exactamente $4sk + r$ raíces.

El trabajo de *Pontrjagin* fue presentado como un desarrollo de los trabajos de *N. G. Čebatarev*; en sus conferencias de matemáticas dadas en Moscú, en el invierno de 1941 – 42, donde resume la solución del problema de la localización de raíces para el caso en el cual el polinomio $h(z, t)$ es lineal con respecto a t . Sin embargo, para este caso, *N. G. Čebatarev* dio solamente condiciones suficientes para que la función $H(z)$ tenga solamente ceros con parte real negativa, la necesidad no se demostró. La posibilidad de aplicar los métodos de *Sturm* a la solución del problema de las raíces, de manera eficaz, fue observada por *H. G. Chebotareff*, todos sus resultados fueron publicados en la revista *Doklady Akademii Nauk*.

3.3.1. Los ceros de las funciones sin término principal

Sea $h(z, t)$ un polinomio en dos variables z y t , con coeficientes constantes reales o complejos

$$h(z, t) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m t^n. \quad (3.14)$$

Llamaremos al término $a_{rs} z^r t^s$, término principal del polinomio si $a_{rs} \neq 0$ y los exponentes r y s son máximos para cualquier otro término $a_{mn} z^m t^n$ en (3.14), para $a_{mn} \neq 0$, tenemos que, $r > m, s > n$ ó $r = m, s > n$ ó $r > m, s = n$. Claramente no todo polinomio tiene término principal.

Teorema 3.2. *Si el polinomio (3.14), no tiene un término principal, la función*

$$H(z) = h(z, e^z) \quad (3.15)$$

tiene un número infinito de ceros con parte real positiva arbitrariamente grande.

Demostración. Vamos a considerar el polinomio $t - z$, sin término principal y de su ejemplo deduciremos la solución que buscamos. Tenemos la ecuación $e^z - z = 0$. Tomando $z = x + iy$, obtenemos las ecuaciones

$$e^x \cos y = x \quad e^x \operatorname{sen} y = y. \quad (3.16)$$

Vamos a buscar una solución aproximada de estas dos ecuaciones, bajo la hipótesis de que y y x , son reales y muy grandes. Bajo esta suposición se deduce de (3.16), que $\cos y = xe^{-x}$ y por consiguiente, un valor aproximado para y es $2k\pi + \pi/2$. De la ecuación (3.16), se obtiene la otra aproximación $x = \log(2k\pi + \pi/2)$. Por lo tanto, buscamos una solución de la forma $z = \log(2k\pi + \pi/2) + i(2k\pi + \pi/2) + \zeta$, donde ζ es una pequeña cantidad desconocida, que tiende a cero con $1/k$.

Por analogía con la solución obtenida anteriormente, la solución para la ecuación general $H(z) = 0$ sin término principal, se buscará en la forma

$$z = \alpha \log(2k\pi) + 2k\pi i + \log \theta + \zeta. \quad (3.17)$$

Aquí α es un número racional real, el cual dependerá del polinomio (3.14), $\theta \neq 0$ es un número complejo, que también dependerá del polinomio (3.14); finalmente ζ es desconocida, tendiendo a cero con $1/k$. De (3.17) tenemos

$$e^z = (2k\pi)^\alpha \theta e^\zeta \quad z = 2k\pi i (1 + \delta_1(\zeta, k)). \quad (3.18)$$

donde $\delta_1(\zeta, k) = (\zeta + \log \theta + \alpha \log(2k\pi)) / (2k\pi i)$ es una función analítica de la variable ζ que tiende uniformemente a cero con $1/k$. Sustituyendo los valores dados en $H(z)$ tenemos

$$H(z) = \sum_{m,n} a_{mn} (2k\pi)^{m+\alpha n} i^m \theta^n e^{n\zeta} (1 + \delta_1(\zeta, k))^m. \quad (3.19)$$

Por lo tanto, expresamos la función $H(z)$ como una suma finita de potencias fraccionarias de la cantidad $2k\pi$. Seleccionamos en esta expansión el término principal, que es el término en el cual el exponente $m + \alpha n$ alcanza su máximo β , $\beta = \alpha n + m$, para $a_{mn} \neq 0$. Entonces, la expresión en (3.19) puede ser expresada de la siguiente manera

$$H(z) = \sum_n a_{\beta-\alpha n, n} (2k\pi)^\beta i^{\beta-\alpha n} \theta^n e^{n\zeta} + (2k\pi)^\beta \delta_2(\zeta, k). \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_2(\zeta, k) = & \sum_{\substack{n \geq 0, m \neq 0 \\ \alpha n + m = \beta}} a_{mn} i^m \theta^n e^{n\zeta} \left[\sum_{l=1}^m \binom{m}{l} \delta_1^l \right] + \\ & + \frac{1}{(2k\pi)^\beta} \sum_{\substack{m, n \\ \alpha n + m \neq \beta}} a_{mn} i^m (2k\pi)^{m+\alpha n} (1 + \delta_1)^m \theta^n e^{n\zeta}. \end{aligned}$$

Aquí la suma se extiende sobre los valores n para los cuáles $m + \alpha n = \beta$ y $a_{mn} \neq 0$. La suma con respecto a m no es necesaria, ya que por medio de la relación $m + \alpha n = \beta$, el número m es determinado en forma única por n . El término $\delta_2(\zeta, k)$ es una función analítica de la variable ζ que tiende uniformemente a cero en el círculo $|\zeta| < 1$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Como una consecuencia de la definición del número β , existe un valor n para el cual $m + \alpha n = \beta$ y simultáneamente $a_{mn} \neq 0$. Se mostrará que en ausencia de un término principal en el polinomio (3.14) y para una elección adecuada de α , existen al menos dos valores distintos de n para los cuáles los exponentes cumplen esta condición. Bajo esta suposición la ecuación

$$\sum_n a_{\beta-\alpha n, n} i^{\beta-\alpha n} \theta^n = \sum_n b_n \theta^n = 0 \quad (3.21)$$

para θ desconocida tendrá una solución distinta de cero. De aquí en adelante denotaremos esta solución por θ . De este modo, la relación (3.21) ya no será una ecuación, sino una identidad válida para el valor seleccionado de θ . Un número z de la forma (3.17) es un cero de $H(z)$, si y sólo si,

$$\sum_n b_n \theta^n e^{n\zeta} + \delta_2(\zeta, k) = 0. \quad (3.22)$$

El lado izquierdo de esta ecuación converge uniformemente, cuando $k \rightarrow \infty$, a la función $\sum_n b_n \theta^n e^{n\zeta}$, además, $\zeta = 0$ es raíz de $\sum_n b_n \theta^n e^{n\zeta} = 0$, ver (3.21). En vista de la convergencia uniforme, la ecuación (3.22) tiene, para k suficientemente grande, una solución ζ_k , la cual se aproxima a cero igual que $1/k$. Entonces la ecuación $H(z) = 0$ tiene una solución

$$z = \log 2k\pi + 2k\pi i + \log \theta + \zeta_k \quad (3.23)$$

comenzando con un k suficientemente grande, donde ζ_k se aproxima a cero al igual que $1/k$. Ya que α y θ no dependen de k , la solución tiene parte real positiva para k suficientemente grande.

Ahora falta seleccionar el número racional positivo α , de modo que existan al menos dos valores n , para los cuáles $m + \alpha n = \beta$ y $a_{mn} \neq 0$, para esto procedemos de la hipótesis de que el polinomio (3.14) no tiene término principal.

Sea s el valor máximo de n , para el cuál $a_{mn} \neq 0$, r el valor máximo de m , para el cuál $a_{ms} \neq 0$. Sobre la suposición de la ausencia de término principal en el polinomio (3.14), existen valores p y q para m y n , tales que, $p > r$, $q < s$ y $a_{pq} \neq 0$. Ahora sustituimos t por z^α en el polinomio (3.14), donde $\alpha > 0$ y consideramos la expresión resultante

$$\sum_{m,n} a_{mn} z^{m+\alpha n} \quad (3.24)$$

en términos de potencias positivas de la variable z . El término principal en esta expansión es definido como el término con exponente máximo $m + \alpha n$ y coeficiente no nulo. Cuando α es muy grande, el término principal en la expansión (3.24) será $a_{rs} z^{r+\alpha s}$. Cuando α es suficientemente cercano a cero, este término no será el principal, ya que el exponente en $a_{pq} z^{p+\alpha q}$ será más grande para $p > r$. Así, en el proceso de variar continuamente α , desde $+\infty$ a 0, se producirá el momento cuando dos términos principales se tengan en la expresión (3.24), este valor de α lo denotaremos por α . Este valor es racional, ya que esta determinado por alguna ecuación de la forma $r + \alpha s = m + \alpha n$.

Así, el Teorema 3.2 es demostrado. \square

3.3.2. Los ceros de la función $f(z, \cos z, \sen z)$

Sea $f(z, u, v)$ un polinomio con coeficientes reales y constantes con respecto a las variables z, u y v . Entonces

$$f(z, \cos z, \sen z) = F(z) \quad (3.25)$$

es una función entera trascendente en la variable z y asume valores reales para valores reales de z . Daremos condiciones necesarias y suficientes para que la función $F(z)$ tenga sólo ceros reales, en términos de su comportamiento en el dominio real. El polinomio $f(z, u, v)$ es representado en la forma

$$f(z, u, v) = \sum_{m,n} z^m \phi_m^{(n)}(u, v). \quad (3.26)$$

Por $\phi_m^{(n)}$ denotamos aquí un polinomio de grado n , homogéneo en u y v . Supongamos que $u = \cos z$, $v = \sen z$; sin pérdida de generalidad, también supongamos que $\phi_m^{(n)}(u, v)$ no es divisible por $u^2 + v^2$. En otras palabras,

$$\phi_m^{(n)}(1, \pm i) \neq 0 \quad (3.27)$$

para todo polinomio que aparece en la expresión (3.26).

El término principal en el polinomio (3.26) será el término $z^r \phi_r^{(s)}(u, v)$, para el cuál, en la expansión los índices r y s simultáneamente alcanzan su máximo, es decir, cualquier otro término $z^m \phi_m^{(n)}(u, v)$ que aparece en la expansión (3.26) satisface la condición: $r > m$, $s > n$, ó si $r = m$, $s > n$ ó $r > m$, $s = n$. Evidentemente no existe un término principal para cada polinomio. El polinomio (3.26) puede ser representado en la forma siguiente

$$f(z, u, v) = z^r \phi_*^{(s)}(u, v) + \sum_{m < r, n \leq s} z^m \phi_m^{(n)}(u, v). \quad (3.28)$$

Aquí $\phi_*^{(s)}(z)$ es un polinomio no homogéneo en u y v de grado s :

$$\phi_*^{(s)}(u, v) = \sum_{n \leq s} \phi_r^{(n)}(u, v). \quad (3.29)$$

La función $\Phi_*^{(s)}(z) = \phi_*^{(s)}(\cos z, \sen z)$ es periódica, con período 2π , y como se mostrará más adelante, tiene en la franja $a < x < 2\pi + a$, ($z = x + iy$), $2s$ ceros contando multiplicidades. Como una consecuencia de esto, existe un conjunto no numerado de valores ϵ , tal que, $\Phi_*^{(s)}(\epsilon + iy) \neq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$. En la mayoría de los casos ϵ puede tomar el valor de cero. Sustituyendo u y v en el polinomio $\phi_*^{(s)}(u, v)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_*^{(s)}(z) &= \phi_*^{(s)}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \sum_{n \leq s} \phi_r^{(n)}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\ &= e^{izs} \phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) + \dots + e^{-izs} \phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right), \end{aligned}$$

con $\phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pm i}{2}\right) \neq 0$ por (3.26). Tomando $t = e^{iz}$, la ecuación $\Phi_*^{(s)}(z) = 0$ es equivalente a

$$t^s \phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) + \dots + t^{-s} \phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos una serie acotada $\phi_*^{(s)}(t)$ en potencias positivas y negativas de t , el coeficiente de la potencia positiva más grande s de la variable t es $\phi_r^{(s)}(1/2, -i/2)$; ver (3.29); igualmente el coeficiente de la menor potencia negativa $-s$ es $\phi_r^{(s)}(1/2, i/2)$; ver (3.29). Consecuentemente ambos coeficientes son distintos de cero; ver (3.27). Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$t^{2s}\phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) + \cdots + \phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) = 0.$$

Por lo que la ecuación $\phi_*^{(s)}(t) = 0$ tiene exactamente $2s$ raíces y todas ellas son distintas de cero. Denotamos estas raíces por t_1, t_2, \dots, t_{2s} . Para la solución de la ecuación

$$\Phi_*^{(s)}(z) = 0 \tag{3.30}$$

es ahora suficiente resolver todas las ecuaciones $e^{iz} = t_j$. Para cada índice fijo j , cada ecuación tiene en la franja $a \leq x < 2\pi + a, \forall a \in \mathbb{R}$, exactamente una raíz, $z_j = -i \ln |t_j| + \arg t_j + 2k\pi$. Si todas las t_j son distintas, obtenemos en el dominio en cuestión, exactamente $2s$ raíces distintas de la ecuación (3.30). Si tenemos t_j múltiples, entonces obtenemos una multiplicidad correspondiente para la ecuación (3.30).

Con la ayuda de la subsección 3.3.1 demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Si el polinomio (3.26) no tiene un término principal entonces la función $F(z)$ en (3.25) tiene un número infinito de raíces con parte imaginaria arbitrariamente grande.*

Demostración. Sustituyendo $z = i\xi, \xi \in \mathbb{C}$ en la ecuación (3.25), obtenemos de (3.26) que

$$\sum_{m,n} \xi^m i^m \phi_m^{(n)}(\cos(i\xi), \operatorname{sen}(i\xi)) = 0,$$

así tenemos que

$$e^{-(\text{índice máximo } n)\xi} \cdot h(\xi, e^\xi) = 0,$$

donde $h(\xi, e^\xi)$ es un cuasipolinomio, correspondiente a un polinomio $h(u, t)$ de la forma (3.14) sin término principal. Esta ecuación tiene soluciones iguales a las raíces de $h(\xi, e^\xi)$.

Usando el teorema 3.2 concluimos que $h(\xi, e^\xi)$ tiene un número infinito de ceros con parte real positiva arbitrariamente grande. Como la transformación $z = i\xi$ mapea el semiplano inferior z sobre el semiplano derecho

ξ e inversamente, tenemos que la función $f(z, \cos z, \sen z)$ tiene un número infinito de raíces con parte imaginaria negativa arbitrariamente grande, por otro lado, la transformación $z = -i\xi$ mapea el semiplano superior z sobre el semiplano derecho ξ e inversamente, esto nos conduce a la conclusión de que la función $f(z, \cos z, \sen z)$ tiene ceros con parte imaginaria positiva arbitrariamente grande. Así, se completa la prueba. \square

El siguiente teorema juega un rol fundamental en la generalización dada por Pontrjagin.

Teorema 3.4. *Sea $f(z, u, v)$ un polinomio con término principal $z^r \phi_r^{(s)}(u, v)$. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$, tal que, $\Phi_*^{(s)}(\epsilon + iy)$ no se anula para todo $y \in \mathbb{R}$, entonces en la franja $-2k\pi + \epsilon \leq x \leq 2k\pi + \epsilon$, $z = x + iy$, la función $F(z) = f(z, \cos z, \sen z)$ tendrá, comenzando desde un valor $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, exactamente $4sk + r$ ceros. Así, la función $F(z)$ tiene raíces reales, si y sólo si, tiene exactamente $4sk + r$ ceros reales en el intervalo $[-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon] \subset \mathbb{R}$, comenzando desde un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Demostración. Vamos a demostrar el teorema suponiendo que en la franja $a \leq x < 2\pi + a$, $z = x + iy$, la función $\Phi_*^{(s)}(z)$ tiene exactamente $2s$ ceros. Tomamos $F(z)$ de la forma siguiente

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z, \cos z, \sen z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z) + \sum_{m < r, n \leq s} z^m \Phi_m^{(n)}(z) \\ &= z^r \Phi_*^{(s)}(z) \left(1 + \sum_{m < r, n \leq s} z^{m-r} \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $\Phi_m^{(n)}(z) = \phi_m^{(n)}(\cos z, \sen z)$. Ahora probaremos que para un suficientemente grande $k \in \mathbb{N}$, $b > 0$, tenemos que

$$\left| \sum_{m < r, n \leq s} z^{m-r} \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right| < 1 \quad \text{para todo } z \in \partial P_{kb} \quad (3.32)$$

en la región rectangular P_{kb} ; definida por las relaciones siguientes

$$-2k\pi + \epsilon \leq x \leq 2k\pi + \epsilon, \quad -b \leq y \leq b, \quad (z = x + iy).$$

Notemos que es suficiente demostrar que la expresión $\left| \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right|$ es acotada en ∂P_{kb} , ya que el término en el módulo se multiplica por potencias negativas

de z . Tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_m^{(n)}(z) &= \phi_m^{(n)} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \\ &= e^{-inz} \left[\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} \right) + e^{iz} \alpha_1 + \cdots + e^{2niz} \alpha_{2n} \right] \\ &= e^{ny-inx} \left[\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} \right) + \delta_1(z) \right],\end{aligned}$$

donde $\delta_1(z)$ se aproxima a cero uniformemente cuando $y \rightarrow +\infty$. En forma similar

$$\begin{aligned}\Phi_m^{(n)}(z) &= \phi_m^{(n)} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \\ &= e^{inz} \left[\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2} \right) + e^{-iz} \beta_1 + \cdots + e^{-2niz} \beta_{2n} \right] \\ &= e^{-ny+inx} \left[\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2} \right) + \delta_2(z) \right],\end{aligned}$$

donde $\delta_2(z)$ se aproxima a cero uniformemente cuando $y \rightarrow -\infty$. Así tenemos que

$$\left. \begin{aligned}\Phi_m^{(n)}(z) &= e^{ny-nix} \left(\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} \right) + \delta_1(z) \right) \\ \Phi_m^{(n)}(z) &= e^{-ny+nix} \left(\phi_m^{(n)} \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2} \right) + \delta_2(z) \right)\end{aligned}\right\} \quad (3.33)$$

De las relaciones en (3.33), se obtienen las siguientes expresiones para la función periódica $\Phi_*^{(s)}(z)$, así:

$$\left. \begin{aligned}\Phi_*^{(s)}(z) &= e^{sy-six} \left(\phi_r^{(s)} \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2} \right) + \delta_3(z) \right) \\ \Phi_*^{(s)}(z) &= e^{-sy+six} \left(\phi_r^{(s)} \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2} \right) + \delta_4(z) \right)\end{aligned}\right\} \quad (3.34)$$

donde $\delta_3(z)$ tiende uniformemente a cero cuando $y \rightarrow +\infty$ y $\delta_4(z)$ tiende uniformemente a cero cuando $y \rightarrow -\infty$.

Por otro lado, sólo hay un número finito de ceros de $\Phi_*^{(s)}(\cdot)$ en cualquier franja limitada, paralela al eje imaginario, entonces existe un $b > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\Phi_*^{(s)}(z) \neq 0 \quad \text{si} \quad |y| > b. \quad (3.35)$$

Además

$$\Phi_*^{(s)}(\pm 2k\pi + \epsilon + iy) = \Phi_*^{(s)}(\epsilon + iy) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Si k y b son suficientemente grandes entonces por (3.35) y (3.36), la expresión $|\Phi_m^{(n)}(z)/\Phi_*^{(s)}(z)|$ es acotada en ∂P_{kb} por alguna constante dependiente de k y b . Tomado k suficientemente grande, podemos librarnos de la dependencia de b .

Por (3.33) - (3.36), tenemos que para $z = \pm 2k\pi + \epsilon + iy$

$$\left| \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right| = e^{-(s-n)y} \left| \frac{\phi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_1(z)}{\phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_2(z)} \right|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

para $z = x + ib$ y $-2k\pi + \epsilon \leq x \leq 2k\pi + \epsilon$

$$\left| \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right| = e^{-(s-n)b} \left| \frac{\phi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_1(z)}{\phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) + \delta_3(z)} \right|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

para $z = x - ib$ y $-2k\pi + \epsilon \leq x \leq 2k\pi + \epsilon$

$$\left| \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right| = e^{-(s-n)b} \left| \frac{\phi_m^{(n)}\left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) + \delta_2(z)}{\phi_r^{(s)}\left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) + \delta_3(z)} \right|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Todos estos argumentos implican que (3.32) se tiene a partir de algún b suficientemente grande.

Sin embargo, de (3.32) tenemos que

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq \left| z^r \Phi_*^{(s)}(z) + \sum_{m < r, n \leq s} z^m \Phi_m^{(n)}(z) \right| \geq |z^r \Phi_*^{(s)}(z)| - \\ &\quad - \left| \sum_{m < r, n \leq s} z^m \Phi_m^{(n)}(z) \right| > 0 \quad \forall z \in \partial P_{kb}, \end{aligned}$$

y por lo tanto, F no tiene ceros en ∂P_{kb} . Como $F(z)$ es de la siguiente forma

$$F(z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z) \left(1 + \sum_{m < r, n \leq s} z^{m-r} \frac{\Phi_m^{(n)}(z)}{\Phi_*^{(s)}(z)} \right). \quad (3.37)$$

tenemos que sobre la frontera del polígono P_{kb} , para k y b suficientemente grandes, la relación

$$F(z) = z^r \Phi_*^{(s)}(z)(1 + \delta_5) \quad (3.38)$$

se tiene, donde δ_5 tiende a cero cuando los números k y b simultáneamente se aproximan a infinito. De (3.38) se sigue que el número de ceros de las funciones $F(z)$ y $z^r \Phi_*^{(s)}(z)$ en el rectángulo es idéntico. Varios párrafos más adelante, vamos a demostrar este resultado en forma general. Fijamos k en un valor suficientemente grande y hacemos que b se aproxime al infinito. Entonces tenemos que el número de ceros de las funciones $F(z)$ y $z^r \Phi_*^{(s)}(z)$ en la franja $-2k\pi + \epsilon \leq x \leq 2k\pi + \epsilon$ es idéntico. Para la función $z^r \Phi_*^{(s)}(z)$ el número de ceros es igual a $2k(2s) + r = 4ks + r$. Esto completa la prueba. \square

La parte final de la demostración anterior queda justificada con la siguiente observación.

Observación 3.5. *Sea P algún contorno cerrado en el plano de la variable compleja z y $g(z)$ una función analítica sin singularidades, ya sea dentro o sobre el contorno P , la cuál no se anula en el contorno. Entonces, como una consecuencia del conocido teorema concerniente al Residuo Logarítmico, el número de ceros de la función $g(z)$ dentro del contorno P es igual a el número total de revoluciones, de $w = g(z)$, alrededor del origen, cuando la variable z recorre el contorno P . Sea la función $g^*(z)$ también analítica dentro y sobre el contorno P y relacionada en el contorno P con la función $g(z)$, por medio de la relación $g^*(z) = g(z)(1 + \delta(z))$, donde $|\delta(z)| < 1$. Consideremos sobre el contorno P la función $g(z, r) = g(z)(1 + r\delta(z))$, donde r es un número real. Para un valor fijo r , el vector $w = g(z, r)$ gira algún número total de revoluciones en torno al origen mientras z atraviesa el contorno P . Si ahora r varía en forma continua de cero a uno, el vector w nunca toma el valor de cero, y por lo tanto, el número de revoluciones totales no cambia. Así el número de ceros de las funciones $g^*(z)$ y $g(z)$, en el interior del contorno, es idéntico.*

Los Teoremas 3.3 y 3.4 dan condiciones necesarias y suficientes para que la función $f(z, \cos z, \sin z)$ tenga solamente raíces reales. En el caso donde el polinomio $f(z, u, v)$ no tiene un término principal la función $f(z, \cos z, \sin z)$ tiene un conjunto infinito de raíces complejas.

3.3.3. Ceros de la función $h(z, e^z)$ en presencia de un término principal

En la subsección 3.3.1 se demostró que la función $h(z, e^z)$ tiene un conjunto infinito de ceros con parte real positiva arbitrariamente grande en el caso donde el polinomio $h(z, t)$ no posee un término principal. Aquí vamos a solucionar el problema de la naturaleza de los ceros de la función $H(z) = h(z, e^z)$ en presencia de un término principal. Sea

$$h(z, t) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m t^n \quad (3.39)$$

y $a_{rs} z^r t^s$ el término principal en el polinomio (3.39), así el polinomio puede ser representado en la forma siguiente

$$\begin{aligned} h(z, t) &= z^r \chi_*^{(s)}(t) + \sum_{m < r, n \leq s} a_{mn} z^m t^n, \\ \chi_*^{(s)}(t) &= \sum_{n \leq s} a_{rn} t^n. \end{aligned} \quad (3.40)$$

La función $\chi_*^{(s)}(e^z)$ es periódica, con período $2\pi i$, ya que, $\chi_*^{(s)}(e^{z+2\pi i}) = \chi_*^{(s)}(e^z)$, además, como se demuestra algunas líneas más adelante, en la franja $b \leq y < b + 2\pi$, ($z = x + iy$) la función no tiene más de s ceros. Como consecuencia de esto, existe un conjunto no numerado de números reales ϵ , tales que

$$\chi_*^{(s)}(e^{x+\epsilon i}) \neq 0 \quad (3.41)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sean t_1, t_2, \dots, t_s las raíces del polinomio (de grado s) $\chi_*^{(s)}(t)$. Entonces, los ceros de la función $\chi_*^{(s)}(e^z)$ son soluciones de las ecuaciones $e^z = t_j, j = 1, 2, \dots, s$. Para cada $j = 1, 2, \dots, s$ fijo, la última ecuación tiene una solución $z_j = \ln |t_j| + i \arg t_j + 2k\pi i$, siempre que $t_j \neq 0$. Por lo tanto, $\forall b \in \mathbb{R}$ en la franja $b \leq y < b + 2\pi$, la función $\chi_*^{(s)}(e^z)$ tiene a lo más s ceros, contando multiplicidades.

El siguiente resultado es similar al Teorema 3.4 y se refiere a los ceros del cuasipolinomio $h(z, e^z)$ en una franja semi-infinita de ancho suficiente.

Teorema 3.6. *Sea $h(z, t)$ un polinomio con término principal $a_{rs} z^r t^s$ y ϵ un número real, tal que, $\chi_*^{(s)}(e^{x+\epsilon i}) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, y $\chi_*^{(s)}(t)$ es la función definida en (3.40). El número de ceros del cuasipolinomio $H(z)$ en la franja*

$-2k\pi + \epsilon \leq y \leq 2k\pi + \epsilon$, $x \geq 0$, ($z = x + iy$) lo denotamos por N_k . Supongamos además que el cuasipolinomio $H(z)$ no tiene ceros en el eje imaginario; i.e., $H(iy) \neq 0$; denotamos por V_k el ángulo descrito por el vector $z = H(iy)$ alrededor del origen, cuando y recorre el intervalo $-2k\pi + \epsilon \leq y \leq 2k\pi + \epsilon$. Entonces

$$V_k = 2\pi(2ks - N_k + \frac{r}{2}) + \delta_k$$

donde $\delta_k \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración. Consideremos la región rectangular P_{ka} determinada por las condiciones $0 < x < a$, $-2k\pi + \epsilon < y < 2k\pi + \epsilon$ y estimamos el cambio total en el vector $z = H(w)$, cuando w recorre los tres lados del rectángulo P_{ka} en sentido contrario a las manecillas del reloj, con la excepción del lado $x = 0$, que son las partes superior, inferior y el lado derecho. Notemos por (3.40) que

$$H(z) = h(z, e^z) = z^r \chi_*^{(s)}(e^z) + \sum_{m < r, n \leq s} a_{mn} z^m e^{nz}$$

con

$$\chi_*^{(s)}(e^z) = \sum_{n \leq s} a_{rn} e^{nz}.$$

Por las propiedades de $\chi_*^{(s)}(e^z)$ se tiene que fuera de la parte de la frontera ∂P_{ka} del rectángulo P_{ka} , que no está contenida en el eje imaginario, tenemos que

$$H(z) = z^r \chi_*^{(s)}(e^z) \left(1 + \sum_{m < r, n \leq s} a_{mn} z^{m-r} \frac{e^{nz}}{\chi_*^{(s)}(e^z)} \right). \quad (3.42)$$

Cada una de las expresiones $\frac{e^{nz}}{\chi_*^{(s)}(e^z)}$, $n = 0, 1, 2, \dots, s$ es una función racional de e^z , y por lo tanto, todas están acotadas en $\partial P_{ka} \setminus \{\text{eje imaginario}\}$. Como $m < r$, eligiendo a y k suficientemente grandes, tenemos que

$$\left| \frac{a_{mn} z^m e^{nz}}{z^r \chi_*^{(s)}(e^z)} \right| < \delta \quad \forall z \in \partial P_{ka} \setminus \{\text{el eje imaginario}\} \quad (3.43)$$

con δ suficientemente pequeña. En esta parte de ∂P_{ka} el cuasipolinomio no tiene ceros, ya que aquí tenemos que

$$|H(z)| \geq |z^r \chi_*^{(s)}(e^z)| - \left| \sum a_{mn} z^m e^{nz} \right| > 0.$$

Utilizando el hecho de que el cuasipolinomio $H(z) = h(z, e^z)$ no tiene ceros en el eje imaginario, esto significa que el Principio del Argumento (Teorema 1.1) puede aplicarse tomando ∂P_{ka} como el contorno y $f = H$, así

$$2\pi N_k = -V_k + \lim_{a \rightarrow \infty} \{ \text{Ángulo descrito por el vector } H(w), \text{ cuando } w \text{ recorre} \\ \partial P_{ka} \setminus [\text{el eje imaginario}] \text{ en sentido contrario a las} \\ \text{manecillas del reloj, comenzando desde el punto} \\ (0, -2k\pi i + \epsilon i) \}. \quad (3.44)$$

Por (3.42) y (3.43) el último término es igual a la suma de los ángulos similares, pero para los vectores z^r y $\chi_*^{(s)}(e^z)$. Tomando un a suficientemente grande, podemos hacer el ángulo descrito por z^r , a lo largo de los segmentos horizontales, arbitrariamente cercano a $\pi r/2$, para cada segmento correspondiente. Al mismo tiempo, el ángulo descrito por z^r , a lo largo del lado vertical, es arbitrariamente cercano a cero. Como la función $\chi_*^{(s)}(e^z)$ es $2\pi i$ -periódica, el ángulo descrito por el vector $\chi_*^{(s)}(e^z)$ a lo largo de los lados horizontales es cero, ya que son recorridos en dirección contraria. Por otra parte, tomando a suficientemente grande, podemos hacer el ángulo descrito por $\chi_*^{(s)}(e^z)$, a lo largo del lado vertical, arbitrariamente cercano al mismo ángulo para e^{sz} , pero este último es igual a $4ks\pi$. Tomando en cuenta esto obtenemos el teorema de (3.44). \square

Del Teorema 3.6 se desprende que es importante considerar el comportamiento de la función $H(z)$, sobre el eje imaginario, para derivar condiciones necesarias y suficientes para que el cuasipolinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa.

Ahora daremos una caracterización analítica y otra geométrica del comportamiento de la función H en el eje imaginario. La caracterización analítica está dada por el siguiente lema.

Lema 3.7. *Las funciones $f(y, u, v)$, $g(y, u, v)$, que aparecen en la siguiente expresión de H :*

$$\begin{aligned} H(iy) &= h(iy, e^{iy}) = F(y) + iG(y) \\ &= f(y, \cos y, \sin y) + ig(y, \cos y, \sin y) \end{aligned} \quad (3.45)$$

tienen las siguientes propiedades:

- (i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, la función $\lambda f + \mu g$ es un polinomio de la forma (3.26).

(ii) Sean $y^r \varphi_*^{(s)}(u, v)$, $y^r \psi_*^{(s)}(u, v)$ los términos principales de los polinomios f y g , respectivamente, y de acuerdo a (3.29), (3.40), sean $\Phi_*^{(s)}(y) = \varphi_*^{(s)}(\cos y, \sen y)$, $\Psi_*^{(s)}(y) = \psi_*^{(s)}(\cos y, \sen y)$, $\chi_*^{(s)}(t) = \sum_{n \leq s} a_{rn} t^n$. Entonces

$$i^r \chi_*^{(s)}(e^{iy}) = \Phi_*^{(s)}(y) + i\Psi_*^{(s)}(y). \quad (3.46)$$

Demostración. Si el polinomio $h(z, t) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m t^n$ tiene término principal $a_{rs} z^r t^s$ entonces

$$H(iy) = h(iy, e^{iy}) = \sum_{m,n} a_{mn} (iy)^m e^{niy} = \sum_{m,n} a_{mn} (iy)^m (\cos y + i \sen y)^n.$$

Para la reconstrucción de f y g de $H(iy)$, sustituimos $u = \cos y$, $v = \sen y$ de acuerdo a (3.45), y descomponemos el último término en su parte real e imaginaria. Así, tenemos que

$$(u + iv)^n = \alpha^{(n)}(u, v) + i\beta^{(n)}(u, v)$$

donde $\alpha^{(n)}(u, v)$ y $\beta^{(n)}(u, v)$ son polinomios con coeficientes reales y

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(n)}(u, v) &= \frac{(u+iv)^n + (u-iv)^n}{2}; \\ \beta^{(n)}(u, v) &= \frac{(u+iv)^n - (u-iv)^n}{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} H(iy) &= \sum_{m,n} (iy)^m \cdot \{ [\operatorname{Re}(a_{mn})\alpha^{(n)}(u, v) - \operatorname{Im}(a_{mn})\beta^{(n)}(u, v)] + \\ &\quad + i [\operatorname{Re}(a_{mn})\beta^{(n)}(u, v) + \operatorname{Im}(a_{mn})\alpha^{(n)}(u, v)] \} \end{aligned}$$

con $a_{mn} = \operatorname{Re}(a_{mn}) + i\operatorname{Im}(a_{mn})$, donde $\operatorname{Re}(a_{mn})$ y $\operatorname{Im}(a_{mn})$ son números reales, por lo tanto

$$f(y, u, v) = \sum_{m,n} y^m \varphi_m^{(n)}(u, v), \quad g(y, u, v) = \sum_{m,n} y^m \psi_m^{(n)}(u, v)$$

donde $\varphi_m^{(n)}$ y $\psi_m^{(n)}$ son polinomios de grado n , que tienen una de las formas siguientes, dependiendo de m :

$$\begin{aligned} &\pm [\operatorname{Re}(a_{mn})\alpha^{(n)}(u, v) - \operatorname{Im}(a_{mn})\beta^{(n)}(u, v)] \\ &\pm [\operatorname{Re}(a_{mn})\beta^{(n)}(u, v) + \operatorname{Im}(a_{mn})\alpha^{(n)}(u, v)]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sean λ y μ números reales, no simultáneamente ceros, entonces

$$\lambda f(y, u, v) + \mu g(y, u, v) = \sum_{m,n} y^m [\lambda \varphi_m^{(n)}(u, v) + \mu \psi_m^{(n)}(u, v)].$$

Para completar la prueba de **(i)** es suficiente mostrar, según (3.26), que

$$\lambda \varphi_m^{(n)}(1, \pm i) + \mu \psi_m^{(n)}(1, \pm i) \neq 0 \quad \forall m \geq 0, \forall n \geq 1.$$

Tomemos para la prueba las primeras formas de $\varphi_m^{(n)}$, $\psi_m^{(n)}$, correspondientes a $m = 0, 4, 8, \dots$ (la prueba para las otras formas es casi la misma)

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_m^{(n)}(1, \pm i) + \mu \psi_m^{(n)}(1, \pm i) &= [\lambda \operatorname{Re}(a_{mn}) + \mu \operatorname{Im}(a_{mn})] \alpha^{(n)}(1, \pm i) + \\ &+ [-\lambda \operatorname{Im}(a_{mn}) + \mu \operatorname{Re}(a_{mn})] \beta^{(n)}(1, \pm i). \end{aligned}$$

así $\lambda \varphi_m^{(n)}(1, \pm i) + \mu \psi_m^{(n)}(1, \pm i) = a \alpha^{(n)}(1, \pm i) + b \beta^{(n)}(1, \pm i)$, donde a y b son reales. Ya que el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(a_{mn}) & -\operatorname{Im}(a_{mn}) \\ \operatorname{Im}(a_{mn}) & \operatorname{Re}(a_{mn}) \end{bmatrix}$$

es distinto de cero para $a_{mn} \neq 0$, a y b determinadas en esta relación no son simultáneamente cero, además, tomando $a \alpha^{(n)}(u, v) + b \beta^{(n)}(u, v) = \gamma^{(n)}(u, v)$, tenemos que

$$\gamma^{(n)}(1, \pm i) = 2^{n-1}(a \pm ib) \neq 0$$

Si $a_r s z^r t^s$ es el término principal en el polinomio $h(z, u, v)$, el término principal del polinomio $\lambda f(y, u, v) + \mu g(y, u, v)$ es $y^r \gamma^{(s)}(u, v) = y^r (a \alpha^{(s)}(u, v) + b \beta^{(s)}(u, v))$, donde a y b no son simultáneamente cero; por consiguiente, la condición (3.27) se satisface y la prueba de **(i)** es completada. Para la prueba de **(ii)**, notemos que

$$\begin{aligned} H(iy) &= (iy)^r \chi_*^{(s)}(e^{iy}) + \dots = y^r [\varphi_*^{(s)}(\cos y, \operatorname{sen} y) + \\ &+ i \psi_*^{(s)}(\cos y, \operatorname{sen} y) + \dots] = y^r [\Phi_*^{(s)}(y) + i \Psi_*^{(s)}(y)]. \end{aligned}$$

así

$$i^r \chi_*^{(s)}(e^{iy}) = \Phi_*^{(s)}(y) + i \Psi_*^{(s)}(y).$$

□

Observación 3.8. Como en la subsección 3.3.2, existe un número real ϵ , tal que, $\lambda \varphi_*^{(s)}(\epsilon + iy) + \mu \psi_*^{(s)}(\epsilon + iy) \neq 0$, para y real arbitrario. Así, de esta condición $\chi_*^{(s)}(e^{x+iy}) \neq 0$, para x real arbitrario.

Lema 3.9. *Supongamos que $F^2(y) + G^2(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$ (geométricamente esto significa que la curva $\{H(iy) \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}\}$ no pasa a través del punto $0 \in \mathbb{C}$). El ángulo de rotación $V(a, b)$ descrito por el vector $H(iy)$, cuando y recorre el intervalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:*

(i) *La función $V(0, y)$ es analítica y su derivada en y , $V'(0, y)$, satisface*

$$V'(0, y) = \frac{G'(y)F(y) - F'(y)G(y)}{F^2(y) + G^2(y)}. \quad (3.49)$$

donde F', G' son las derivadas de F y G

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} V'(0, y) = c < \infty, \quad (3.50)$$

(ii) *Para algunos $\bar{a} \in [a, a + \epsilon], \bar{b} \in [b, b + \epsilon]$*

$$V(a + \epsilon, b + \epsilon) = V(a, b) + [V'(0, \bar{b}) - V'(0, \bar{a})]\epsilon, \quad (3.51)$$

(iii) *Las siguientes implicaciones se tienen:*

$$V(-2k\pi, 2k\pi) = \tau(4k\pi s + r\pi) + \delta_k, \quad \delta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad \tau = \pm 1 \quad (3.52)$$

$\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, la función $\lambda F(y) + \mu G(y)$ tiene solamente ceros reales, simples y

$$G'(y)F(y) - F'(y)G(y) > 0 \quad \text{ó} \quad G'(y)F(y) - F'(y)G(y) < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Demostración. La función $V(0, y)$ es analítica. Como $\tan [V(0, y)] = \frac{G(y)}{F(y)}$, tenemos que

$$[1 + \tan^2 V(0, y)]V'(0, y) = \frac{F^2(y) + G^2(y)}{F^2(y)}V'(0, y) = \frac{G'(y)F(y) - F'(y)G(y)}{F^2(y)}$$

pero esto implica (3.49).

Además, $F(y) = f(y, \cos y, \sin y)$ y $G(y) = g(y, \cos y, \sin y)$, donde f y g son polinomios de la forma (3.26), y así, cada una de estas funciones es estimada por arriba y abajo, por un polinomio en y de grado r que, junto con (3.49), significa que $V'(0, y)$ es estimada por el cociente de dos polinomios

en y , de mismo grado r . Así, la expresión (3.50) se tiene. Aplicando el teorema del valor medio y notando que $V(0, b) - V(0, a) = V(a, b)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} V(a + \epsilon, b + \epsilon) &= V(0, b + \epsilon) - V(0, a + \epsilon) \\ &= V(0, b) + V'(0, \bar{b})\epsilon - V(0, a) - V'(0, \bar{a})\epsilon \\ &= V(a, b) + \epsilon[V'(0, \bar{b}) - V'(0, \bar{a})] \end{aligned}$$

donde $\bar{a} \in [a, a + \epsilon]$, $\bar{b} \in [b, b + \epsilon]$. Por lo tanto, (3.51) se tiene. Fijemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitrarios, con $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Por las propiedades de $\Phi_*^{(s)}(z)$ y el lema (3.7) existe $\epsilon \in \mathbb{R}$, tal que

$$\lambda \Phi_*^{(s)}(\epsilon + iy) + \mu \Psi_*^{(s)}(\epsilon + iy) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.54)$$

Ahora, (3.51) y (3.52) producen

$$\begin{aligned} V(-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon) &= V(-2k\pi, 2k\pi) + \epsilon[V'(0, \bar{b}) - V'(0, \bar{a})] \\ &= \tau(4k\pi s + \pi r) + \delta_k + \epsilon[V'(0, \bar{b}) - V'(0, \bar{a})] \end{aligned}$$

con $\bar{a} \in [-2k\pi, 2k\pi + \epsilon]$, $\bar{b} \in [2k\pi, 2k\pi + \epsilon]$. Ya que $\delta_k \rightarrow 0$ y $[V'(0, \bar{b}) - V'(0, \bar{a})] \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, por (3.50) se tiene que, comenzando desde un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $V(-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon) = \tau(4k\pi s + \pi r)$, es decir, $H(iy)$ gira $\tau(4ks + r)/2$ vueltas al origen cuando y recorre el intervalo $[-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon]$. Geométricamente, esto significa que la curva $\{H(iy) = F(y) + iG(y) : y \in [-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon]\}$ tiene exactamente $4ks + r$ puntos comunes con la línea que une a 0 con el número $F(2k\pi + \epsilon) + iG(2k\pi + \epsilon)$. Esto implica, sin embargo, que la función $\lambda F(y) + \mu G(y)$ tiene exactamente $4sk + r$ ceros reales en el intervalo $[-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon]$. En virtud de (3.54) y el Teorema 3.4, concluimos que esta función tiene solamente ceros reales. Supongamos que uno de ellos es múltiple. La tangente a la curva $\{H(iy) \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}\}$ en el punto $H(iy)$ que le corresponde estaría contenida en la línea recta $\lambda F + \mu G = 0$. En este caso, una pequeña variación de λ y μ podrían causar un cambio en el número de intersecciones de la gráfica $H(iy)$ con la línea recta $\lambda F + \mu G = 0$, en contradicción con los resultados obtenidos, donde λ, μ eran arbitrarias.

Así, resulta que nuestra suposición nos conduce a una contradicción, lo cual implica que los ceros de la función $\lambda F(y) + \mu G(y)$ son simples. El mismo argumento geométrico, también no lleva a la conclusión de que $\tau[V'(0, y)] > 0$. Por lo tanto, de (3.49) se tiene (3.53). \square

Para la formulación del resultado final, vamos a utilizar la definición de alternancia 1.12 para las funciones reales $p(y)$ y $q(y)$ de variable real. Diremos que los ceros de estas funciones se alternan, si cada una de las funciones no tiene raíces múltiples y entre dos ceros de cada una de estas funciones existe al menos un cero de la otra. Por último, supongamos que las funciones $p(y)$ y $q(y)$ no son simultáneamente cero. Bajo estas condiciones, los ceros de las funciones $p(y)$ y $q(y)$ se alternan a lo largo del eje y .

El siguiente teorema es el principal resultado de la generalización dada por Pontrjagin.

Teorema 3.10. *Sea $H(z) = h(z, e^z)$ el cuasipolinomio correspondiente al polinomio h de la forma (3.14), con término principal $a_{rs}z^r t^s$. Consideremos la resolución (3.45) para $H(iy)$. Si todos los ceros de la función $H(z)$ tienen parte real negativa, entonces los ceros de las funciones $F(y)$ y $G(y)$ son reales, alternantes y para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos que*

$$G'(y)F(y) - G(y)F'(y) > 0 \quad (3.55)$$

Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que todos los ceros de la función H , tengan parte real negativa:

- (i) *Todos los ceros de las funciones $F(y)$ y $G(y)$ son reales, alternantes y la desigualdad (3.55) se satisface para al menos un valor de y ;*
- (ii) *Todos los ceros de la función $F(y)$ son reales y para cada cero y_0 , la condición (3.55) se satisface; i.e., $F'(y_0)G(y_0) < 0$;*
- (iii) *Todos los ceros de la función $G(y)$ son reales y para cada cero y_0 , la condición (3.55) se satisface; i.e., $G'(y_0)F(y_0) > 0$.*

Demostración. Necesidad. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$, tal que, $\chi_*^{(s)}(e^{x+i\epsilon}) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Utilizando el Teorema 3.6 se tiene que

$$V(-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon) = 4k\pi s + \pi r + \delta_k, \quad \delta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Como $F^2(y) + G^2(y) \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$, por (3.51):

$$V(-2k\pi, 2k\pi) = 4k\pi s + \pi r + \delta'_k, \quad \delta'_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Por el Lema 3.9, todos los ceros de F y G son reales y simples. Además, para cada $y \in \mathbb{R}$ (3.55) se satisface. Interpretando geoméricamente toda la información obtenida de F y G hasta ahora, concluimos que el vector $H(iy)$ gira

en sentido contrario a las manecillas del reloj, interceptando alternadamente el eje real e imaginario, por lo tanto, las raíces de F y G se alternan.

Suficiencia. Como las raíces de F y G se alternan, se tiene que $F^2(y) + G^2(y) \neq 0$ (el cuasipolinomio no tiene ceros en el eje imaginario), que junto con el Teorema 3.6 implica que

$$V(-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon) = 2\pi(2ks + \frac{1}{2}r - N_k) + \delta_k, \quad \delta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$, tal que, $\chi_*^{(s)}(e^{x+i\epsilon}) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, de (3.51) para k suficientemente grande tenemos que

$$2\pi N_k = 4k\pi s + r\pi - V(-2k\pi, 2k\pi) \quad (3.56)$$

donde N_k es el número de ceros de H en la franja descrita en el Teorema 3.6. Notemos que, por (3.46), donde podemos sustituir $y = \epsilon - ix$, también tenemos $\Phi_*^{(s)}(\epsilon - ix) \neq 0, \Psi_*^{(s)}(\epsilon - ix) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Como por hipótesis todos los ceros de F y G son reales, por el Teorema 3.4 establecemos que en el intervalo $[-2k\pi + \epsilon, 2k\pi + \epsilon]$ cada una de estas funciones tiene exactamente $4ks + r$ ceros. Sin embargo, ya que (3.55) se tiene en al menos un punto, esto significa que $N_k = 0$ (3.56). Ya que k es arbitrariamente grande, el teorema se tiene. \square

La generalización del Teorema de Hermite-Biehler dada por *Pontrjagin* (Teorema 3.10) es particularmente útil en el análisis de la estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales que contienen retardos. Se ilustra esto en el ejemplo siguiente, utilizaremos la notación del capítulo 1.

Ejemplo 3.11. *Consideremos el cuasipolinomio:*

$$\delta(z) = d(z) + e^{-zT_1}n_1(z) + e^{-zT_2}n_2(z)$$

donde

$$\begin{aligned} d(z) &= 1 + 15z + 50z^2 + 100z^3 + 100z^4 + 200z^5 + 100z^6 + 20z^7 + 5z^8 + z^9, \\ n_1(z) &= 2 + 10z + 50z^2 + 50z^3 + 100z^4 + 15z^5 + 10z^6 + 10z^7 + 3z^8, \\ n_2(z) &= 3 + 24z + 55z^2 + 130z^3 + 131z^4 + 51z^5 + 35z^6 + 22z^7 + 2z^8. \end{aligned}$$

con $T_1 = 0.1$ y $T_2 = 0.3$. *Escribimos*

$$\begin{aligned} d(j\omega) &= d^p(\omega) + j\omega d^{im}(\omega), \\ n_1(j\omega) &= n_1^p(\omega) + j\omega n_1^{im}(\omega), \\ n_2(j\omega) &= n_2^p(\omega) + j\omega n_2^{im}(\omega). \end{aligned}$$

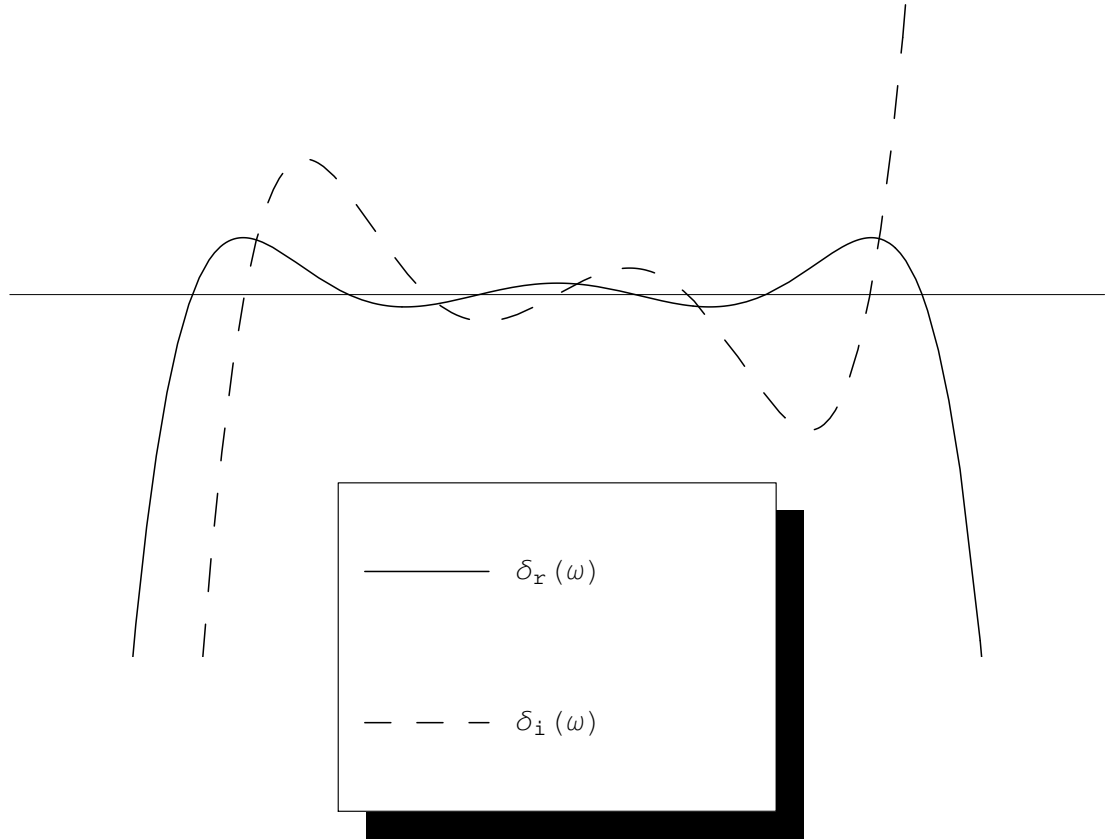


Figura 3.1: Teorema de la alternancia para un cuasipolinomio (Ejemplo 3.11)

así tenemos $\delta(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega)$, donde

$$\begin{aligned}\delta_r(\omega) &= d^p(\omega) + \cos(\omega T_1)n_1^p(\omega) - \omega \operatorname{sen}(\omega T_1)n_1^{im}(\omega) \\ &\quad + \cos(\omega T_2)n_2^p(\omega) - \omega \operatorname{sen}(\omega T_2)n_2^{im}(\omega), \\ \delta_i(\omega) &= \omega d^{im}(\omega) + \omega \cos(\omega T_1)n_1^{im}(\omega) - \operatorname{sen}(\omega T_1)n_1^p(\omega) \\ &\quad + \omega \cos(\omega T_2)n_2^{im}(\omega) - \operatorname{sen}(\omega T_2)n_2^p(\omega).\end{aligned}$$

La figura 3.1 muestra que $\delta_r(\omega)$ y $\delta_i(\omega)$ se alternan. Por lo tanto, concluimos que el cuasipolinomio $\delta(z)$ es Hurwitz.

Capítulo 4

Otras Generalizaciones

Como se muestra en el capítulo 1, el teorema de Hermite-Biehler da condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad Hurwitz de un polinomio en términos de ciertas condiciones de alternancia. En esta sección, generalizamos el teorema de Hermite-Biehler a polinomios que no son necesariamente Hurwitz. La generalización es dada en términos de una expresión analítica para la diferencia entre el número de raíces del polinomio en el semiplano abierto izquierdo y el semiplano abierto derecho.

Cuando un polinomio real no es Hurwitz, el teorema de Hermite-Biehler no proporciona información acerca de la distribución de sus raíces en el plano. En la sección 4.1, daremos nuevamente el Teorema de Hermite-Biehler, así como algunas caracterizaciones equivalentes. En la sección 4.2, daremos la relación entre el cambio de fase neto de un polinomio real, cuando ω varía de 0 a ∞ , y el número de raíces en el semiplano abierto izquierdo y derecho. En la sección 4.3, derivamos generalizaciones del teorema de Hermite-Biehler, aplicables al caso dónde la prueba polinomial no tiene ningún cero en el eje imaginario. La sección 4.4, muestra que el teorema establecido puede ser adaptado a el caso donde aparezcan ceros en el eje imaginario, distintos del origen. En la sección 4.5, modificamos el teorema establecido para adaptarlo al caso donde aparezcan uno ó más ceros en el origen. Finalmente se proporcionará un ejemplo que verificará la afirmación del teorema.

4.1. El Teorema de Hermite-Biehler

Comenzamos esta sección, reescribiendo el Teorema de Hermite-Biehler con el fin de introducir algunos cambios en la notación que nos permitirá exponer de una mejor manera las generalizaciones.

Teorema 4.1. (Hermite-Biehler). *Sea $p^*(z) = p_0 + p_1z + \cdots + p_nz^n$, un polinomio real de grado n . Escribimos, $p^*(z) = p_e(z^2) + zp_o(z^2)$, donde $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ son las componentes de $p^*(z)$, formadas con las potencias pares e impares de z , respectivamente. Sean $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_e(-\omega^2)$ y sean $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_o(-\omega^2)$, ordenados en magnitud ascendente. Entonces $p^*(z)$ es Hurwitz estable, si y sólo si, todos los ceros de $p_e(-\omega^2)$, $p_o(-\omega^2)$, son reales y distintos, p_n y p_{n-1} son del mismo signo y los ceros reales positivos, satisfacen la siguiente propiedad de la alternancia:*

$$0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \cdots \quad (4.1)$$

En este capítulo, el objetivo es obtener generalizaciones del teorema dado para polinomios reales que no son necesariamente Hurwitz. Primero proporcionamos algunas caracterizaciones alternativas e interpretaciones del teorema. Para esto, introducimos primero la función $\text{sgn}[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, definida por:

$$\text{sgn}[x] = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Lema 4.2. *Sea $p^*(z) = p_0 + p_1z + \cdots + p_nz^n$, un polinomio real de grado n . Escribimos $p^*(z) = p_e(z^2) + zp_o(z^2)$, donde $p_e(z^2)$ y $zp_o(z^2)$ son las componentes de $p^*(z)$ formadas con las potencias pares e impares de z , respectivamente. Para cada $\omega \in \mathbb{R}$, denotamos $p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, donde $p(\omega) = p_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega p_o(-\omega^2)$. Sean $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_e(-\omega^2)$ y sean $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ los distintos ceros reales positivos de $p_o(-\omega^2)$, ordenados en magnitud ascendente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $p^*(z)$ es Hurwitz estable.

(ii) p_n y p_{n-1} son del mismo signo y

$$n = \begin{cases} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ \operatorname{sgn}[p(0)] - 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)] \} & \text{para } n = 2m, \\ \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ \operatorname{sgn}[p(0)] - 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_m})] \} & \text{para } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

(iii) p_n y p_{n-1} son del mismo signo y

$$n = \begin{cases} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \cdots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] + (-1)^{m-1} \cdot 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})] \} & \text{para } n = 2m, \\ \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})] + (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[q(\infty)] \} & \text{para } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Demostración. (1) (i) \iff (ii).

(i) \implies (ii). Supongamos que $p^*(z)$ es Hurwitz estable, entonces p_n y p_{n-1} son del mismo signo, por la propiedad de fase monótona para polinomios Hurwitz podemos mostrar que la gráfica de $p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, crece en sentido contrario a las manecillas del reloj y atraviesa n cuadrantes cuando ω varía de 0 a ∞ [5]. Para $p^*(z)$ Hurwitz, la gráfica de $p^*(j\omega)$ es mostrada en la figura A.

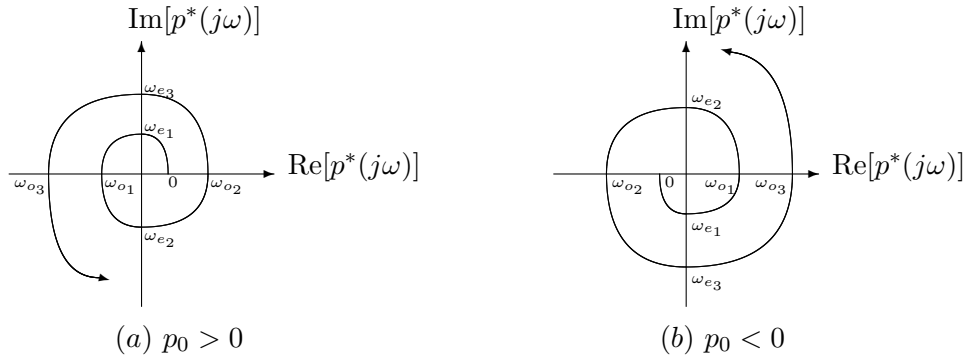


Fig.A: Propiedad de incremento de fase monótona para polinomios Hurwitz $p^*(z)$.

De la figura A, se observa que para $n = 2m$ se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(0)] &> 0 \\ -\operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] &> 0 \\ &\vdots \\ (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] &> 0 \\ (-1)^m \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)] &> 0 \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ \operatorname{sgn}[p(0)] - 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)] \} = 1 + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{(m-1)} + 1 = 2m = n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

y para $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(0)] &> 0 \\ -\operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] &> 0 \\ &\vdots \\ (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] &> 0 \\ (-1)^m \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_m})] &> 0 \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{ \operatorname{sgn}[p(0)] - 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot 2 \operatorname{sgn}[p(\omega_{o_m})] \} = 1 + \underbrace{2 + \cdots + 2}_m = 2m + 1 = n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.4) y (4.5) se tiene (4.2).

(ii) \Rightarrow (i).

Sea $\omega_{o_0} = 0$ y para $n = 2m$, denotamos $\omega_{o_m} = \infty$. La ecuación (4.2) se tiene, si y sólo si, $\operatorname{sgn}[p(\omega_{o_{i-1}})]$ y $\operatorname{sgn}[p(\omega_{o_i})]$ son de signo contrario para $i = 1, 2, \dots, m$. Por la continuidad de p , existe al menos un $\omega_e \in \mathbb{R}$, con $\omega_{o_{i-1}} < \omega_e < \omega_{o_i}$, tal que, $p(\omega_e) = 0$. Como $n = 2m$, el máximo número de raíces reales, no negativas de $p(\cdot)$ es m , de esto se sigue que existe una y solamente una $\omega_e \in (\omega_{o_{i-1}}, \omega_{o_i})$, tal que, $p(\omega_e) = 0$, satisfaciéndose así la propiedad de la alternancia, por el teorema de Hermite-Biehler $p^*(z)$ es Hurwitz estable.

(2) (i) \iff (iii).

Primero demostraremos que (i) \Rightarrow (iii).

Por la propiedad de fase monótona para polinomios Hurwitz (ver fig. A), se tiene que:

Para $n = 2m$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] &> 0 \\ -\operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] &> 0 \\ &\vdots \\ (-1)^{m-2} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] &> 0 \\ (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})] &> 0 \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \cdots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] + (-1)^{m-1} \cdot 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})]\} = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{(m)} = 2m = n. \end{aligned} \tag{4.6}$$

y para $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] &> 0 \\ -\operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] &> 0 \\ &\vdots \\ (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})] &> 0 \\ (-1)^m \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \operatorname{sgn}[q(\infty)] &> 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Así que } \operatorname{sgn}[p_0] \cdot \{2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q(\omega_{e_m})] + (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[q(\infty)]\} = \underbrace{2 + \cdots + 2}_m + 1 = 2m + 1 = n. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De (4.6) y (4.7) se tiene (4.3).

(iii) \Rightarrow (i). Para $n = 2m + 1$, denotemos $\omega_{e_{m+1}} = \infty$. La ecuación (4.3) se tiene, si y sólo si, $\operatorname{sgn}[q(\omega_{e_l})]$ y $\operatorname{sgn}[q(\omega_{e_{l+1}})]$ son de signos opuestos para $l = 1, 2, \dots, m + 1$. Por la continuidad de q , existe al menos un $\omega_o \in \mathbb{R}$, donde $\omega_{e_l} < \omega_o < \omega_{e_{l+1}}$, tal que, $q(\omega_o) = 0$, además, ya que el máximo número posible de raíces reales no negativas de $q(\cdot)$ es m , se tiene que existe una y solamente una $\omega_o \in (\omega_{e_l}, \omega_{e_{l+1}})$, tal que, $q(\omega_o) = 0$, satisfaciéndose

así la propiedad de la alternancia, por el teorema de Hermite-Biehler $p^*(z)$ es Hurwitz estable. \square

Observación 4.3. *La propiedad de la alternancia en el Teorema 4.1 da una interpretación gráfica del teorema de Hermite-Biehler, mientras que el Lema 4.2 da una caracterización analítica.*

Notemos del lema 4.2 que si $p^*(z)$ es Hurwitz estable entonces todos los ceros de $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son reales y distintos, de lo contrario (4.2) y (4.3) fallarán.

Ahora presentamos un ejemplo para ilustrar la aplicación del Teorema 4.1 y del Lema 4.2, para verificar la propiedad de la alternancia.

Ejemplo 4.4. *Consideremos el polinomio real $p^*(z)$, donde*

$$p^*(z) = z^7 + 5z^6 + 14z^5 + 25z^4 + 31z^3 + 26z^2 + 14z + 4.$$

Entonces

$$p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

donde

$$p(\omega) = -5\omega^6 + 25\omega^4 - 26\omega^2 + 4, \quad q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 14\omega^4 - 31\omega^2 + 14).$$

Las gráficas de $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son mostradas en la figura 4.1. Por lo tanto, el polinomio $p^*(z)$, satisface la propiedad de la alternancia.

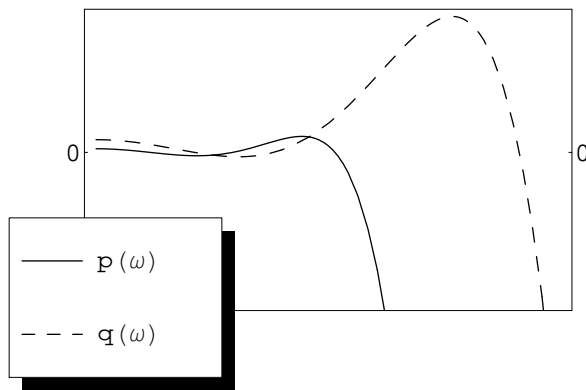


Figura 4.1: Propiedad de la alternancia para un polinomio Hurwitz.

Además

$$\omega_{e_1} = 0.43106, \omega_{e_2} = 1.08950, \omega_{e_3} = 1.90452,$$

$$\omega_{o_1} = 0.78411, \omega_{o_2} = 1.41421, \omega_{o_3} = 3.37419,$$

$$\text{sgn}[p(0)] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] = -1, \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_3})] = -1.$$

Ahora, $p^*(z)$ es de grado $n = 7$, el cual es impar y

$$\text{sgn}[p_0] \cdot [\text{sgn}[p(0)] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] - 2 \text{sgn}[p(\omega_{o_3})]] = 7,$$

lo cual muestra que (4.2) se tiene.

También tenemos que

$$\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] = 1, \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] = -1, \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] = 1, \text{sgn}[q(\infty)] = -1,$$

así que

$$\text{sgn}[p_0] \cdot [2 \text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2 \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] - \text{sgn}[q(\infty)]] = 7,$$

con lo cual se tiene (4.3).

Para verificar que $p^*(z)$ es un polinomio Hurwitz, igualamos $p^*(z)$ a cero y encontramos sus raíces:

$$-0.5 \pm 1.3229j \quad -0.5 \pm 0.8660j \quad -1 \pm j \quad -1$$

Todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo, así $p^*(z)$ es Hurwitz.

Ahora consideremos $p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, como el ilustrado en la figura 4.2. De la figura 4.2 deducimos que $p^*(z)$ no es un polinomio Hurwitz,

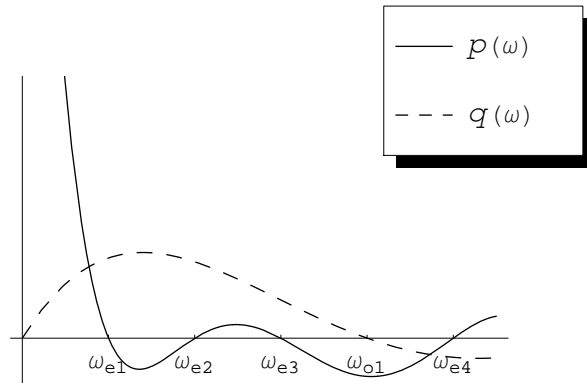


Figura 4.2: La propiedad de la alternancia falla para un polinomio no Hurwitz.

porque no satisface la propiedad de la alternancia, además podemos preguntarnos si es posible conocer la distribución de sus raíces en el plano, en las siguientes secciones se obtendrán generalizaciones del teorema de Hermite-Biehler, para polinomios que no son necesariamente Hurwitz.

4.2. Signatura y fase acumulada neta

En esta sección desarrollaremos, como paso preliminar para la generalización del Teorema de Hermite-Biehler, una relación entre la fase acumulada neta de un polinomio real y la diferencia entre el número de raíces de un polinomio real en el semiplano abierto izquierdo y el semiplano abierto derecho. Sea \mathbb{C} el plano complejo, \mathbb{C}^- el semiplano abierto izquierdo y \mathbb{C}^+ el semiplano abierto derecho.

En principio nos enfocaremos en polinomios sin ceros en el eje imaginario. Consideremos un polinomio real $p^*(z)$ de grado n ,

$$p^*(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad p_n \neq 0,$$

tal que, $p^*(j\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$.

Definición 4.5. Sean l y r , el número de raíces de $p^*(z)$ en \mathbb{C}^- y \mathbb{C}^+ respectivamente. Entonces la signatura de $p^*(z)$ denotada por $\sigma(p^*)$ es definida como

$$\sigma(p^*) \triangleq l - r.$$

Ya que $n = l + r$, se tiene que $\sigma(p^*)$ y n determinan en forma única l y r y, por lo tanto, la distribución de raíces de $p^*(z)$. Ahora, para cada $\omega \in \mathbb{R}$, $p^*(j\omega)$ es un punto en el plano complejo, sean $p(\omega)$ y $q(\omega)$, dos funciones definidas como $p(\omega) = \text{Re}[p^*(j\omega)]$, $q(\omega) = \text{Im}[p^*(j\omega)]$.

Con esta definición, tenemos

$$p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega), \quad \forall \omega.$$

Además, $\theta(\omega) \triangleq \angle p^*(j\omega) = \arctan[q(\omega)/p(\omega)]$. Sea $\Delta_0^\infty(\theta)$ que denota el cambio neto en el argumento $\theta(\omega)$, cuando ω crece de 0 a ∞ . Entonces podemos afirmar el siguiente lema [12]:

Lema 4.6. Sea $p^*(z)$ un polinomio real sin raíces imaginarias. Entonces

$$\Delta_0^\infty(\theta) = \frac{\pi}{2} \sigma(p^*).$$

Demostración. Supongamos que $p^*(z)$ tiene r raíces en el semiplano derecho y que $p^*(z)$ no tiene raíces en el eje imaginario. En el semiplano derecho construimos el semicírculo de radio R , con centro en el origen y consideremos el dominio acotado C por este semicírculo y el segmento del eje imaginario

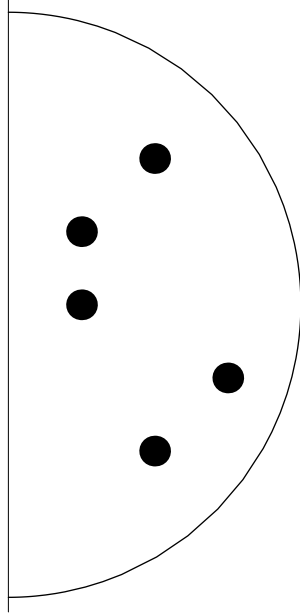


Figura 4.3: Dominio acotado C .

(Fig. 4.3). Para R suficientemente grande, todos los ceros de $p^*(z)$ con parte real positiva se encuentran en este dominio. Si

$$p^*(z) = p_0 \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

con z_i un cero de $p^*(z)$, entonces

$$\Delta \arg [p^*(z)] = \sum_{i=1}^n \Delta \arg [z - z_i].$$

Si el punto z_i se encuentra dentro del dominio C , entonces $\Delta \arg [z - z_i] = 2\pi$. Si se encuentra fuera del dominio, entonces, $\Delta \arg [z - z_i] = 0$. Por lo tanto, $\arg [p^*(z)]$ se incrementa $2r\pi$, cuando va en dirección positiva a lo largo del contorno del dominio C . Por otro lado, para analizar el incremento a lo largo del semicírculo de radio R , cuando $R \rightarrow \infty$, consideremos

$$p^*(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots$$

donde $a_0 \neq 0$, y la variable z , en su forma polar

$$z = Re^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

entonces

$$p^*(Re^{i\theta}) = a_0 R^n e^{in\theta} + b_0 R^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots$$

así, para $\theta = \pi/2$ tenemos

$$p^*(Re^{i\theta}) = a_0 R^n e^{i\frac{n\pi}{2}} + b_0 R^{n-1} e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}} + \dots \quad (4.8)$$

análogamente, para $\theta = -\pi/2$ tenemos

$$p^*(Re^{i\theta}) = a_0 R^n e^{-i\frac{n\pi}{2}} + b_0 R^{n-1} e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}} + \dots \quad (4.9)$$

reescribiendo la ecuación (4.8)

$$p^*(Re^{i\theta}) = a_0 R^n \left[\cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right] + b_0 R^{n-1} \left[\cos \frac{(n-1)\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{2} \right] + \dots$$

entonces

$$\operatorname{arg}[p^*(Re^{i\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{2}}] = \arctan \frac{a_0 R^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + b_0 R^{n-1} \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{2} + \dots}{a_0 R^n \cos \frac{n\pi}{2} + b_0 R^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{2} + \dots}$$

aplicando límite, cuando $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{arg}[p^*(Re^{i\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{2}}] = \arctan \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\cos \frac{n\pi}{2}} = \frac{n\pi}{2}.$$

Análogamente tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{arg}[p^*(Re^{i\theta})|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}] = -\frac{n\pi}{2}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (\operatorname{arg}[p^*(Re^{i\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{2}}] - \operatorname{arg}[p^*(Re^{i\theta})|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}]) = \frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{n\pi}{2}\right) = n\pi.$$

Así se tiene que

$$\Delta_C \operatorname{arg}[p^*(z)] = 2r\pi,$$

pero

$$\Delta_C \operatorname{arg}[p^*(z)] = \Delta_{C_1^+} \operatorname{arg}[p^*(z)] + \Delta_{C_2^-} \operatorname{arg}[p^*(z)],$$

donde C_1^+ es el semicírculo de radio R (recorrido en sentido positivo) y C_2^- es la recta sobre el eje imaginario (recorrida en sentido positivo). Luego

$$2r\pi = n\pi + \Delta_{C_2^-} \operatorname{arg}[p^*(z)]$$

$$\Rightarrow \Delta_{C_2^-} \arg[p^*(z)] = 2r\pi - n\pi$$

$$\Rightarrow \Delta_{C_2^+} \arg[p^*(z)] = n\pi - 2r\pi = (n - 2r)\pi.$$

Por lo tanto, el incremento de $\arg[p^*(z)]$ a lo largo del eje imaginario, cuando $R \rightarrow \infty$ ($n = l+r$), es $(l-r)\pi$, así se tiene que $\Delta_{-\infty}^{\infty} \arg[p^*(z)] = \Delta_{-\infty}^{+\infty} \theta(\omega) = (l-r)\pi$, por lo tanto, al variar ω desde 0 hasta $+\infty$, se tiene que

$$\Delta_0^{\infty}(\theta) = \frac{\pi}{2} \sigma(p^*).$$

□

4.3. Generalizaciones del Teorema de Hermite-Biehler: Ninguna raíz en el eje imaginario

En esta sección, nos enfocaremos en polinomios reales sin raíces en el eje imaginario y derivaremos dos generalizaciones del teorema de Hermite-Biehler, desarrollando primero un procedimiento para determinar el cambio de fase acumulada neta de un polinomio. Recordemos primero que para cualquier ω , el ángulo fase de $p^*(j\omega)$, es dado por

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{q(\omega)}{p(\omega)}$$

Por lo tanto, la razón de cambio de fase con respecto a la variable dada ω , esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{1 + q^2(\omega)/p^2(\omega)} \left[\frac{q'(\omega)p(\omega) - p'(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega)} \right] \\ &= \frac{q'(\omega)p(\omega) - p'(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega) + q^2(\omega)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si $p(\omega)$ y $q(\omega)$ son conocidas para toda ω , podemos integrar (4.10), para obtener la fase acumulada neta. Sin embargo, para calcular la acumulación neta de la fase, para todo ω , no es necesario conocer en forma precisa la

razón de cambio de fase en cada ω . Esto es porque cada vez que la gráfica polar $p^*(j\omega)$ hace una transición del eje real al eje imaginario o viceversa, puede haber a lo mas un cambio de fase neto de $\pm \pi/2$ radianes. El signo real del cambio de fase puede ser determinado examinando (4.10), en el cruce del eje real ó imaginario de la gráfica de $p^*(j\omega)$. Ya que en el cruce del eje real ó imaginario, uno de los dos términos en el numerador de (4.10) se anula, y el denominador es siempre positivo, la determinación efectiva del signo cambio de fase es aún más simple.

Ahora, para cualquier polinomio $p^*(z)$ de grado mayor ó igual que uno, la parte real ó imaginaria ó ambas de $p^*(j\omega)$, llega a ser infinitamente grande cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$. Sin embargo, si deseamos contar la acumulación de fase total en múltiplos enteros del cruzamiento de ejes, es imprescindible que la gráfica se aproxime al eje real o imaginario, cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$. Para lograr esto, podemos normalizar la gráfica de $p^*(z)$, escalandola con $1/f(\omega)$, donde $f(\omega) = (1 + \omega^2)^{n/2}$. Ya que $f(\omega)$ no tiene raíces reales, este escalamiento asegurará que la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega)$, realmente interseca el eje real ó imaginario en $\pm \infty$, mientras que al mismo tiempo, deja sin cambios los valores ω finitos en los cuales $p^*(j\omega)$ interseca el eje real e imaginario.

$$p_f^*(j\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega) = \frac{p(\omega)}{f(\omega)} + j \frac{q(\omega)}{f(\omega)}.$$

El siguiente desarrollo en este capítulo hace uso de la gráfica normalizada, para la determinación del cambio de fase neto acumulado, cuando ω varía de 0 a ∞ , la gráfica normalizada es análoga a la gráfica de Mikhailov [32], para polinomios Hurwitz.

Como en la sección 4.2, consideremos un polinomio $p^*(j\omega)$ de grado n ,

$$p^*(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_nz^n, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad p_n \neq 0,$$

tal que, $p^*(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in (-\infty, +\infty)$.

Sean $p(\omega), q(\omega), p_f(\omega), q_f(\omega)$, ya definidas y sean

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$$

los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar.¹

¹La función $q_f(\omega)$, no cambia de signo mientras pasa a través de un cero real de multiplicidad par, ya que tales ceros pueden saltarse mientras se cuenta la fase de acumulación neta.

También definamos $\omega_m = +\infty$.

Entonces podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si ω_i, ω_{i+1} son ambos ceros de $q_f(\omega)$ entonces:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \cdot \operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)]. \quad (4.11)$$

2. Si ω_i es un cero de $q_f(\omega)$, mientras que $\omega_{i+1} = +\infty$ no es un cero de $q_f(\omega)$ y ω_{i+1} es un cero de $p_f(\omega)$, además de que n impar, entonces:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] \cdot \operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)], \quad (4.12)$$

3. Para $i = 0, 1, 2, \dots, m-2$.

$$\operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1}^+)] = -\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)]. \quad (4.13)$$

La ecuación (4.11) es obvia, mientras que la ecuación (4.13) simplemente establece que $q_f(\omega)$ cambia de signo cuando este pasa a través de un cero de multiplicidad impar. La ecuación (4.12), por otro lado, puede ser directamente trazada de la ec. (4.10).

Usando (4.13) repetidamente, obtenemos:

$$\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)] = (-1)^{m-1-i} \cdot \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)], i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (4.14)$$

Sustituyendo (4.14) en (4.11), vemos que si ω_i, ω_{i+1} son ambos ceros de $q_f(\omega)$, entonces:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \cdot (-1)^{m-1-i} \cdot \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)]. \quad (4.15)$$

Las observaciones anteriores nos permiten formular y demostrar el teorema siguiente acerca de $\sigma(p^*)$.

Teorema 4.7. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el eje imaginario, i.e., la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega)$ no pasa a través del origen. Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Entonces*

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{\operatorname{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \{\operatorname{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{array} \right. \end{cases}$$

(4.16)

Demostración. Supongamos que n es par, además $\omega_m = \infty$ es un cero de $q_f(\omega)$. Calculamos el cambio neto en el argumento $\theta(\omega)$, cuando ω crece desde 0 a ∞ . Así

$$\Delta_0^\infty(\theta) = \Delta_{\omega_0}^{\omega_1}(\theta) + \Delta_{\omega_1}^{\omega_2}(\theta) + \cdots + \Delta_{\omega_{m-1}}^{\omega_\infty}(\theta)$$

utilizando repetidamente la ecuación (4.15), el lema 4.6 y tomando en cuenta que $\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)] = \text{sgn}[q(\infty)]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_0^\infty(\theta) &= \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_0)] - \text{sgn}[p_f(\omega_1)]] (-1)^{m-1} \cdot \text{sgn}[q(\infty)] + \\ &\quad + \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_1)] - \text{sgn}[p_f(\omega_2)]] (-1)^{m-2} \cdot \text{sgn}[q(\infty)] + \cdots + \\ &\quad + \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] - \text{sgn}[p_f(\omega_m)]] (-1)^0 \cdot \text{sgn}[q(\infty)]. \end{aligned}$$

ya que $\Delta_0^\infty(\theta) = \frac{\pi}{2}\sigma(p^*)$, entonces se tiene la primera expresión del teorema.

Ahora consideremos el caso en el cual n es impar, entonces, $\omega_m = \infty$ no es un cero de $q_f(\omega)$. Así, usando (4.15) y (4.12)

$$\begin{aligned} \Delta_0^\infty(\theta) &= \sum_{i=0}^{m-2} \Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) + \Delta_{\omega_{m-1}}^\infty(\theta) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \frac{\pi}{2} [\text{sgn}[p_f(\omega_i)] - \text{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \cdot (-1)^{m-1-i} \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)] \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \cdot \text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Aplicando el lema 4.6 y utilizando que $\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)] = \text{sgn}[q(\infty)]$, se tiene la expresión deseada, por lo tanto, el teorema es demostrado. \square

Ahora damos el resultado análogo al Teorema 4.7, usando los valores de las variables donde $p_f^*(j\omega)$ cruza el eje imaginario, sean

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$$

los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$ y $\omega_0 = 0$.

Para la demostración del teorema siguiente utilizaremos las siguientes observaciones:

1. Si ω_i y ω_{i+1} son ambos ceros de $p_f(\omega)$, entonces tenemos que:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1})]] \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i^-)]. \quad (4.18)$$

2. Si ω_i es un cero de $p_f(\omega)$ y ω_{i+1} no es un cero de $p_f(\omega)$, esto cuando $\omega_{i+1} = \infty$ es un cero de $q_f(\omega)$ y n es par, entonces tenemos que:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_i)] \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i^-)]. \quad (4.19)$$

3. Si ω_i no es un cero de $p_f(\omega)$ y ω_{i+1} es un cero de $p_f(\omega)$, esto es, cuando $\omega_0 = 0$ es un cero de $q_f(\omega)$, entonces tenemos que:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1})] \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i^-)]. \quad (4.20)$$

4. Para $i = 1, 2, \dots, m - 2$.

$$\operatorname{sgn}[p_f(\omega_{i+1}^-)] = -\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i^-)]. \quad (4.21)$$

Es fácil de verificar la ecuación (4.18), la ecuación (4.21) afirma que $p_f(\omega)$ cambia de signo cuando este pasa a través de un cero de multiplicidad impar. Las ecuaciones (4.19) y (4.20) son trazadas de la ec. (4.18).

Usando la ecuación (4.21) repetidamente, obtenemos que:

$$\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i^-)] = (-1)^{m-1-i} \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)], \quad i = 1, \dots, m - 1. \quad (4.22)$$

Sustituyendo la ec. (4.22) en (4.18), tenemos que si ω_i y ω_{i+1} son ambos ceros de $p_f(\omega)$, entonces:

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1})]] \cdot (-1)^{m-1-i} \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)]. \quad (4.23)$$

Teorema 4.8. Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el eje imaginario, i.e., la gráfica normalizada $p_f^*(j\omega)$, no pasa a través del origen. Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definimos $\omega_m = \infty$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p(\infty)] & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ \times \operatorname{sgn}[p(\infty)] & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Demostración. Supongamos que n es par, así $\omega_m = \infty$ es un cero de $q_f(\omega)$, calculamos el cambio neto en el argumento $\theta(\omega)$, cuando ω crece desde 0 a ∞ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta_0^\infty(\theta) &= \Delta_{\omega_0}^{\omega_1}(\theta) + \Delta_{\omega_1}^{\omega_2}(\theta) + \dots + \Delta_{\omega_{m-1}}^{\omega_m}(\theta), \\ &= \Delta_0^{\omega_1}(\theta) + \sum_{i=1}^{m-2} \Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}(\theta) + \Delta_{\omega_{m-1}}^\infty(\theta), \end{aligned}$$

utilizando las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.23) obtenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_0^\infty(\theta) &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] \cdot \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1})]] \cdot (-1)^{m-1-i} \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)] + \\ &+ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] \cdot (-1)^0 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)], \end{aligned}$$

del lema 4.6 se tiene que, $\Delta_0^\infty(\theta) = \frac{\pi}{2} \sigma(p^*)$, además, como $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)] = -\operatorname{sgn}[p(\infty)]$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p(\infty)], \end{aligned}$$

así se tiene la primera expresión del teorema 4.8. Ahora consideremos el caso en el cual n es impar, además $\omega_m = \infty$ es un cero de $p_f(\omega)$, calculamos el

cambio neto en el argumento $\theta(\omega)$, cuando ω crece desde 0 a ∞ , entonces

$$\Delta_0^\infty(\theta) = \Delta_{\omega_0}^{\omega_1}(\theta) + \Delta_{\omega_1}^{\omega_2}(\theta) + \cdots + \Delta_{\omega_{m-1}}^{\omega_m}(\theta),$$

utilizando las ecuaciones (4.19), (4.23), el lema 4.6 y tomando en cuenta que $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1}^-)] = -\operatorname{sgn}[p(\infty)]$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_0^\infty(\theta) &= \frac{\pi}{2} [-\operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)]] (-1)^m \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)] + \\ &+ \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)]] (-1)^{m-1} \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)] + \cdots + \\ &+ \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] - \operatorname{sgn}[q_f(\omega_m)]] (-1)^0 \cdot \operatorname{sgn}[p(\infty)]. \end{aligned}$$

Ya que $\Delta_0^\infty(\theta) = \frac{\pi}{2}\sigma(p^*)$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[p(\infty)], \end{aligned}$$

así se obtiene la segunda expresión del teorema 4.8. □

Observación 4.9. *Los Teoremas 4.7 y 4.8, esencialmente generalizan el Lema 4.2, partes (ii) y (iii) para polinomios no necesariamente Hurwitz. Es en este sentido que los Teoremas 4.7 y 4.8 son generalizaciones del Teorema de Hermite-Biehler.*

4.4. El Teorema de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna raíz en el origen

En esta sección extenderemos los Teoremas 4.7 y 4.8, ahora $p^*(z)$ puede tener raíces imaginarias distintas de cero. Los Teoremas 4.10 y 4.11 muestran que las expresiones en las afirmaciones de los Teoremas 4.7 y 4.8 son todavía válidas para este caso.

Teorema 4.10. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el origen. Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos*

$\omega_m = \infty$. Entonces

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \{ \text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)] \} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ \{ \text{sgn}[p_f(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Demostración. Ahora el polinomio $p^*(z)$ puede ser factorizado de la siguiente manera

$$p^*(z) = p_o^*(z) p_e^*(z) p_r^\bullet(z),$$

donde $p_o^*(z)$ contiene todas las raíces imaginarias de $p^*(z)$ con multiplicidad impar, $p_e^*(z)$ contiene todas las raíces imaginarias de $p^*(z)$ con multiplicidad par y $p_r^\bullet(z)$ no tiene raíces imaginarias. Así, $p_o^*(z)$ y $p_e^*(z)$ son de la siguiente forma

$$p_o^*(z) = \prod_{i_o} (z^2 + \alpha_{i_o}^2)^{n_{i_o}}, \alpha_{i_o} > 0, n_{i_o} \geq 0, n_{i_o} \text{ es impar y } \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

$$p_e^*(z) = \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}}, \beta_{i_e} > 0, n_{i_e} \geq 0, n_{i_e} \text{ es par.}$$

La prueba se realizará en dos pasos. Primero mostraremos que multiplicando $p_r^\bullet(z)$ por $p_e^*(z)$ la expresión (4.16) sigue siendo válida. Después usaremos un argumento inductivo para mostrar que multiplicando $p_e^*(z)p_r^\bullet(z)$ por $p_o^*(z)$ tampoco afecta (4.16). Paso I: Definimos

$$p_0^*(z) = p_e^*(z)p_r^\bullet(z) \\ = \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^\bullet(z). \quad (4.26)$$

Por demostrar que $p_0^*(z)$ satisface (4.25). Ahora definimos

$$p_r^\bullet(j\omega) = p^\bullet(\omega) + jq^\bullet(\omega), \\ p_0^*(j\omega) = p_0(\omega) + jq_0(\omega),$$

así que $p^\bullet(\omega)$, $p_0(\omega)$, $q^\bullet(\omega)$ y $q_0(\omega)$ están relacionados por

$$p_0(\omega) = \prod_{i_e} (\beta_{i_e}^2 - \omega^2)^{n_{i_e}} p^\bullet(\omega), \quad (4.27)$$

$$q_0(\omega) = \prod_{i_e} (\beta_{i_e}^2 - \omega^2)^{n_{i_e}} q^\bullet(\omega). \quad (4.28)$$

Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los distintos ceros finitos de $q_f^\bullet(\omega)$, reales, no negativos con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Primero supongamos que $p_r^\bullet(z)$ es de grado par. Entonces, del Teorema 4.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_r^\bullet) &= \{\text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q^\bullet(\infty)]. \end{aligned}$$

De la ecuación (4.28) se sigue que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$ son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{0_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, de las ecuaciones (4.27) y (4.28) tenemos que

$$\text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_i)] = \text{sgn}[p_{0_f}(\omega_i)], \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m, \quad (4.29)$$

$$\text{sgn}[q^\bullet(\infty)] = \text{sgn}[q_0(\infty)]. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, se tiene que $\sigma(p_o^*) = \sigma(p_r^\bullet)$, así la primera expresión de (4.25) es verdadera para $p_o^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_r^\bullet(z)$ es de grado impar, del Teorema 4.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_r^\bullet) &= \{\text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q^\bullet(\infty)]. \end{aligned}$$

De la ecuación (4.28) se tiene que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$ son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{0_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, de las ecuaciones (4.29) y (4.30) se obtiene que $\sigma(p_o^*) = \sigma(p_r^\bullet)$, por lo tanto, (4.25) se cumple para $p_o^*(z)$ de grado impar. Así, $p_o^*(z)$ satisface el teorema 4.10.

Paso II: *Prueba por Inducción*: Sea $j = 1$ y consideremos

$$\begin{aligned} p_1^*(z) &= (z^2 + \alpha_1^2)^{n_1} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^\bullet(z) \\ &= (z^2 + \alpha_1^2)^{n_1} p_0^*(z). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ahora definamos

$$p_1^*(j\omega) = p_1(\omega) + jq_1(\omega)$$

así que $p_1(\omega)$, $p_0(\omega)$, $q_1(\omega)$ y $q_0(\omega)$ están relacionados por:

$$p_1(\omega) = (\alpha_1^2 - \omega^2)^{n_1} p_0(\omega), \quad (4.32)$$

$$q_1(\omega) = (\alpha_1^2 - \omega^2)^{n_1} q_0(\omega). \quad (4.33)$$

Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $q_0(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Primero supongamos que $p_0^*(z)$ tiene de grado par. Entonces del Paso I, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_0^*) &= \{ \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_m)] \} \\ &\quad \times (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_0(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

De la ecuación (4.33) se tiene que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$; α_1 son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{1_f}(\omega)$ con multiplicidad impar, además $\omega_l < \alpha_1 < \omega_{l+1}$, para algún l menor o igual a $m-1$, de las ecuaciones (4.32) y (4.33) tenemos que

$$\operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_i)], \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad (4.35)$$

$$\operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_i)], \quad i = l+1, l+2, \dots, m, \quad (4.36)$$

$$\operatorname{sgn}[p_{1_f}(\alpha_1)] = 0, \quad (4.37)$$

$$\operatorname{sgn}[q_0(\infty)] = -\operatorname{sgn}[q_1(\infty)]. \quad (4.38)$$

Así tenemos que $\sigma(p_1^*) = \sigma(p_0^*)$, usando las ecuaciones (4.34) - (4.38), obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^*) &= \{ \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_2)] \\ &\quad + \dots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\alpha_l)] + (-1)^{l+2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_{l+1})] + \dots + (-1)^m 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^{m+1} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_m)] \} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[q_1(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la primera expresión de (4.25) es verdadera para $p_1^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_0^*(z)$ es de grado impar, del Paso I tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_0^*) &= \{ \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{0_f}(\omega_{m-1})] \} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_0(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

De la ecuación (4.33) se tiene que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$; α_1 son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{1_f}(\omega)$ con multiplicidad impar, además $\omega_l < \alpha_1 < \omega_{l+1}$, para algún l menor o igual a $m-1$, de las

ecuaciones (4.35) - (4.38) tenemos que $\sigma(p_1^*) = \sigma(p_0^*)$, así de la ecuación (4.39) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^*) = & \{\operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_2)] \\ & + \cdots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\alpha_l)] + (-1)^{l+2} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_{l+1})] + \cdots + (-1)^m 2 \operatorname{sgn}[p_{1_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[q_1(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la segunda expresión de (4.25) es verdadera para $p_1^*(z)$ de grado impar. Esto completa la prueba del primer paso del argumento de inducción.

Ahora sea $j = k$ y consideremos

$$p_k^*(z) = \prod_{i_o=1}^k (z^2 + \alpha_{i_o}^2)^{n_{i_o}} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^*(z). \quad (4.40)$$

Supongamos que (4.25) es verdadera para $p_k^*(z)$ (Hipótesis de inducción). Entonces

$$\begin{aligned} p_{k+1}^*(z) &= \prod_{i_o=1}^{k+1} (z^2 + \alpha_{i_o}^2)^{n_{i_o}} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^*(z) \\ &= (z^2 + \alpha_{k+1}^2)^{n_{k+1}} p_k^*(z). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} p_k^*(j\omega) &= p_k(\omega) + jq_k(\omega), \\ p_{k+1}^*(j\omega) &= p_{k+1}(\omega) + jq_{k+1}(\omega), \end{aligned}$$

así que $p_{k+1}(\omega)$, $p_k(\omega)$, $q_{k+1}(\omega)$ y $q_k(\omega)$ están relacionados por las ecuaciones

$$p_{k+1}(\omega) = (\alpha_{k+1}^2 - \omega^2)^{n_{k+1}} p_k(\omega), \quad (4.42)$$

$$q_{k+1}(\omega) = (\alpha_{k+1}^2 - \omega^2)^{n_{k+1}} q_k(\omega). \quad (4.43)$$

Sean $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$ reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $q_{k_f}(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Primero supongamos que $p_k^*(z)$ es de grado par. Entonces de la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_k^*) &= \{\operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_m)]\} \\ & \times (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_k(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ahora, de (4.43) se sigue que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$; α_{k+1} son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{k+1_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, además supongamos que $\omega_l < \alpha_{k+1} < \omega_{l+1}$, de las ecuaciones (4.42) y (4.43) tenemos que

$$\operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_i)], \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad (4.45)$$

$$\operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_i)], \quad i = l+1, l+2, \dots, m, \quad (4.46)$$

$$\operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\alpha_{k+1})] = 0, \quad (4.47)$$

$$\operatorname{sgn}[q_k(\infty)] = -\operatorname{sgn}[q_{k+1}(\infty)]. \quad (4.48)$$

Así tenemos que $\sigma(p_{k+1}^*) = \sigma(p_k^*)$, usando las ecuaciones (4.44) - (4.48), resulta que

$$\begin{aligned} \sigma(p_{k+1}^*) &= \{\operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_2)] \\ &\quad + \dots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\alpha_{k+1})] + (-1)^{l+2} 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_{l+1})] + \dots + (-1)^m \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^{m+1} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[q_{k+1}(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la primera expresión de (4.25) es verdadera para $p_{k+1}^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_k^*(z)$ es de grado impar, de la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_k^*) &= \{\operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_k(\infty)]. \quad (4.49) \end{aligned}$$

De la ecuación (4.43) se tiene que los $\omega_i, i = 0, 1, \dots, m-1$; α_{k+1} son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $q_{k+1_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, además supongamos que $\omega_l < \alpha_{k+1} < \omega_{l+1}$, de las ecuaciones (4.45) - (4.48) resulta que $\sigma(p_{k+1}^*) = \sigma(p_k^*)$, además, de la ecuación (4.49) obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_{k+1}^*) &= \{\operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_2)] \\ &\quad + \dots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\alpha_{k+1})] + (-1)^{l+2} 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_{l+1})] + \dots + (-1)^m \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_{k+1_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[q_{k+1}(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual también muestra que la segunda expresión de (4.25) es verdadera para $p_{k+1}^*(z)$ de grado impar. Esto completa el argumento de inducción, y por lo tanto, la prueba del teorema. \square

A continuación presentamos el resultado análogo al Teorema 4.10, concerniente a $p_f(\omega)$.

Teorema 4.11. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , sin raíces en el origen. Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos y no negativos de $p_f(\omega)$, con multiplicidad impar. También definimos $\omega_m = \infty$. Entonces*

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} (-1)^m \\ \times \operatorname{sgn}[p(\infty)] & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\{2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ \times \operatorname{sgn}[p(\infty)] & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.50)$$

Demostración. El polinomio $p^*(z)$ puede ser factorizado de la siguiente manera

$$p^*(z) = p_o^*(z) p_e^*(z) p_r^\bullet(z),$$

donde los polinomios $p_o^*(z)$, $p_e^*(z)$ y $p_r^\bullet(z)$ tienen la misma expresión que la presentada en la demostración del teorema anterior, la prueba de este teorema sigue la misma línea que la del teorema anterior y utilizaremos el Teorema 4.8. Primero mostraremos que multiplicando $p_r^\bullet(z)$ por $p_e^*(z)$ la expresión (4.24) sigue siendo válida. Después usaremos un argumento inductivo para mostrar que multiplicando $p_e^*(z)p_r^\bullet(z)$ por $p_o^*(z)$ tampoco afecta (4.24).

Paso I: Definimos

$$\begin{aligned} p_0^*(z) &= p_e^*(z) p_r^\bullet(z) \\ &= \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^\bullet(z). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Por demostrar que $p_0^*(z)$ satisface (4.50). Ahora definimos

$$\begin{aligned} p_r^\bullet(j\omega) &= p^\bullet(\omega) + jq^\bullet(\omega), \\ p_0^*(j\omega) &= p_0(\omega) + jq_0(\omega), \end{aligned}$$

así que $p^\bullet(\omega)$, $p_0(\omega)$, $q^\bullet(\omega)$ y $q_0(\omega)$ están relacionados por

$$p_0(\omega) = \prod_{i_e} (\beta_{i_e}^2 - \omega^2)^{n_{i_e}} p^\bullet(\omega), \quad (4.52)$$

$$q_0(\omega) = \prod_{i_e} (\beta_{i_e}^2 - \omega^2)^{n_{i_e}} q^\bullet(\omega). \quad (4.53)$$

Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ los distintos ceros finitos de $p_f^\bullet(\omega)$, reales, no negativos con multiplicidad impar, también definamos $\omega_m = \infty$. Primero supongamos que $p_r^\bullet(z)$ es de grado par. Entonces, del Teorema 4.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_r^\bullet) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)]. \end{aligned}$$

De la ecuación (4.52) se sigue que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{0_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, de las ecuaciones (4.52) y (4.53) tenemos que

$$\operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_i)], \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (4.54)$$

$$\operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)] = \operatorname{sgn}[p_0(\infty)]. \quad (4.55)$$

Por lo tanto, se tiene que $\sigma(p_o^*) = \sigma(p_r^\bullet)$, así la primera expresión de (4.50) es verdadera para $p_0^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_r^\bullet(z)$ es de grado impar, del Teorema 4.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_r^\bullet) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)]. \end{aligned}$$

De la ecuación (4.52) se tiene que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{0_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, de las ecuaciones (4.54) y (4.55) se obtiene que $\sigma(p_o^*) = \sigma(p_r^\bullet)$, por lo tanto, (4.50) también se cumple para $p_0^*(z)$ de grado impar. Así, $p_0^*(z)$ satisface el teorema 4.11.

Paso II: *Prueba por Inducción*: Sea $j = 1$ y consideremos

$$\begin{aligned} p_1^*(z) &= (z^2 + \alpha_1^2)^{n_1} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^\bullet(z) \\ &= (z^2 + \alpha_1^2)^{n_1} p_0^*(z). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ahora definimos

$$p_1^*(j\omega) = p_1(\omega) + jq_1(\omega)$$

así que, $p_1(\omega)$, $p_0(\omega)$, $q_1(\omega)$ y $q_0(\omega)$ están relacionados por:

$$p_1(\omega) = (\alpha_1^2 - \omega^2)^{n_1} p_0(\omega), \quad (4.57)$$

$$q_1(\omega) = (\alpha_1^2 - \omega^2)^{n_1} q_0(\omega). \quad (4.58)$$

Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ reales, no negativos, distintos ceros finitos de $p_{0_f}(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$. Primero supongamos que $p_0^*(z)$ tiene de grado par. Entonces del Paso I, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_0^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p_0(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

De la ecuación (4.57) se tiene que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$; α_1 son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{1_f}(\omega)$ con multiplicidad impar, además $\omega_l < \alpha_1 < \omega_{l+1}$, para algún l menor o igual a $m-1$, de las ecuaciones (4.57) y (4.58) tenemos que

$$\operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (4.60)$$

$$\operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_i)], \quad i = l+1, l+2, \dots, m-1, \quad (4.61)$$

$$\operatorname{sgn}[q_{1_f}(\alpha_1)] = 0, \quad (4.62)$$

$$\operatorname{sgn}[p_0(\infty)] = -\operatorname{sgn}[p_1(\infty)]. \quad (4.63)$$

Así tenemos que $\sigma(p_1^*) = \sigma(p_0^*)$, usando las ecuaciones (4.59) - (4.63), obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_l)] + \\ &\quad + (-1)^{l+1} 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\alpha_l)] + (-1)^{l+2} \times 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_{l+1})] + \dots + \\ &\quad + (-1)^{m-1} 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}[p_1(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la primera expresión de (4.50) es verdadera para $p_1^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_0^*(z)$ tiene de grado impar, del Paso I tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_0^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_{0_f}(\omega_m)]\} \cdot \\ &\quad \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p_0(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

De la ecuación (4.57) se tiene que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$; α_1 son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{1_f}(\omega)$ con multiplicidad impar, además $\omega_l < \alpha_1 < \omega_{l+1}$, para algún l menor o igual a $m-1$, de las ecuaciones (4.60) - (4.63) tenemos que $\sigma(p_1^*) = \sigma(p_0^*)$, así de la ecuación (4.64) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^*) = & -\{2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_2)] + \dots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_l)] + \\ & + (-1)^{l+1} 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\alpha_l)] + (-1)^{l+2} \times 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_{l+1})] + \dots + \\ & + (-1)^{m-1} 2 \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[q_{1_f}(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}[p_1(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la segunda expresión de (4.50) es verdadera para $p_1^*(z)$ de grado impar. Esto completa la prueba del primer paso del argumento de inducción.

Ahora sea $j = k$ y consideremos

$$p_k^*(z) = \prod_{i_o=1}^k (z^2 + \alpha_{i_o}^2)^{n_{i_o}} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^*(z). \quad (4.65)$$

Supongamos que (4.50) es verdadera para $p_k^*(z)$ (Hipótesis de inducción). Entonces

$$\begin{aligned} p_{k+1}^*(z) &= \prod_{i_o=1}^{k+1} (z^2 + \alpha_{i_o}^2)^{n_{i_o}} \prod_{i_e} (z^2 + \beta_{i_e}^2)^{n_{i_e}} p_r^*(z) \\ &= (z^2 + \alpha_{k+1}^2)^{n_{k+1}} p_k^*(z). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} p_k^*(j\omega) &= p_k(\omega) + jq_k(\omega), \\ p_{k+1}^*(j\omega) &= p_{k+1}(\omega) + jq_{k+1}(\omega), \end{aligned}$$

así que $p_{k+1}(\omega)$, $p_k(\omega)$, $q_{k+1}(\omega)$ y $q_k(\omega)$ están relacionados por las ecuaciones

$$p_{k+1}(\omega) = (\alpha_{k+1}^2 - \omega^2)^{n_{k+1}} p_k(\omega), \quad (4.67)$$

$$q_{k+1}(\omega) = (\alpha_{k+1}^2 - \omega^2)^{n_{k+1}} q_k(\omega). \quad (4.68)$$

Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $p_{k_f}(\omega)$ con multiplicidad impar. También definamos $\omega_m = \infty$.

Primero supongamos que $p_k^*(z)$ es de grado par. Entonces de la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_k^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p_k(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ahora, de (4.67) se sigue que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$; α_{k+1} son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{k+1_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, además supongamos que $\omega_l < \alpha_{k+1} < \omega_{l+1}$, de las ecuaciones (4.67) y (4.68) tenemos que

$$\operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (4.70)$$

$$\operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_i)], \quad i = l+1, l+2, \dots, m, \quad (4.71)$$

$$\operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\alpha_{k+1})] = 0, \quad (4.72)$$

$$\operatorname{sgn}[p_k(\infty)] = -\operatorname{sgn}[p_{k+1}(\infty)]. \quad (4.73)$$

Así tenemos que $\sigma(p_{k+1}^*) = \sigma(p_k^*)$, usando las ecuaciones (4.69) - (4.73), resulta que

$$\begin{aligned} \sigma(p_{k+1}^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_2)] \\ &\quad + \cdots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\alpha_{k+l})] + (-1)^{l+2} 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_{l+1})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}[p_{k+1}(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que la primera expresión de (4.50) es verdadera para $p_{k+1}^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que $p_k^*(z)$ es de grado impar, de la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_k^*) &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_{k_f}(\omega_m)]\} \\ &\quad \times (-1)^m \operatorname{sgn}[p_k(\infty)]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

De la ecuación (4.67) se tiene que los $\omega_i, i = 1, 2, \dots, m-1$; α_{k+1} son además de reales, no negativos, también distintos ceros finitos de $p_{k+1_f}(\omega)$, con multiplicidad impar, además supongamos que $\omega_l < \alpha_{k+1} < \omega_{l+1}$, de las ecuaciones (4.70) - (4.73) resulta que $\sigma(p_{k+1}^*) = \sigma(p_k^*)$, así, de la ecuación (4.74)

obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p_{k+1}^*) = & -\{2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_2)] \\ & + \cdots + (-1)^l 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_l)] + (-1)^{l+1} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\alpha_{k+l})] + (-1)^{l+2} 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_{l+1})] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[q_{k+1_f}(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m+1} \operatorname{sgn}[p_{k+1}(\infty)], \end{aligned}$$

lo cual también muestra que la segunda expresión de (4.50) es verdadera para $p_{k+1}^*(z)$ de grado impar, esto completa la prueba del teorema. \square

4.5. El Teorema de Hermite-Biehler generalizado: Ninguna restricción en la localización de raíces

En esta sección proporcionamos un refinamiento del Teorema 4.10, donde la presencia de raíces de $p^*(z)$ en el origen puede ser admitida.

Teorema 4.12. *Sea $p^*(z)$ un polinomio real de grado n , con una raíz en el origen de multiplicidad k . Sean $0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$ los ceros finitos, reales, distintos, positivos de $q_f(\omega)$ con multiplicidad impar. También definimos $\omega_0 = 0$, $\omega_m = \infty$ y denotamos $p^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k}[p(\omega)]|_{\omega=\omega_0}$. Entonces*

$$\sigma(p^*) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)] \end{array} \right\} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \end{array} \right\} \cdot (-1)^{m-1} \\ \times \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.75)$$

Demostración. El polinomio $p^*(z)$ puede ser expresado de la siguiente manera

$$p^*(z) = z^k p'(z),$$

donde $p'(z)$ es un polinomio real de grado n' , sin raíces en el origen. Definimos

$$p'(j\omega) = p^\bullet(\omega) + jq^\bullet(\omega) \quad y \quad p^*(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega),$$

donde

$$p^*(j\omega) = \begin{cases} \omega^{4l}p^\bullet(\omega) + j\omega^{4l}q^\bullet(\omega) & \text{para } k = 4l \\ -\omega^{4l+1}q^\bullet(\omega) + j\omega^{4l+1}p^\bullet(\omega) & \text{para } k = 4l + 1 \\ -\omega^{4l+2}p^\bullet(\omega) + j(-\omega^{4l+2}q^\bullet(\omega)) & \text{para } k = 4l + 2 \\ \omega^{4l+3}q^\bullet(\omega) + j(-\omega^{4l+3}p^\bullet(\omega)) & \text{para } k = 4l + 3 \end{cases}$$

Para $k = 4l$, tenemos que

$$p^*(j\omega) = \omega^{4l}p^\bullet(\omega) + j\omega^{4l}q^\bullet(\omega),$$

primero supongamos que n' es par, entonces del teorema 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= \{\text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ &\quad \times \text{sgn}[q^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.76)$$

donde los ω_i , con $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ son reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $q_f^\bullet(\omega)$, con multiplicidad impar, también definimos $\omega_m = \infty$. Ya que

$$p(\omega) = \omega^{4l} p^\bullet(\omega), \quad p^{(4l)}(\omega_0) = (4l)! p^\bullet(\omega_0)$$

y

$$q(\omega) = \omega^{4l} q^\bullet(\omega),$$

entonces tenemos que

$$\text{sgn}[p^{(4l)}(\omega_0)] = \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)], \quad (4.77)$$

$$\text{sgn}[p_f(\omega_i)] = \text{sgn}[p_f^\bullet(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.78)$$

$$\text{sgn}[q(\infty)] = \text{sgn}[q^\bullet(\infty)]. \quad (4.79)$$

Ya que n' es par y $k = 4l$ entonces n es par, usando las ecuaciones (4.76) - (4.79), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$, donde

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\text{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ &\quad \times \text{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.80)$$

lo cual muestra que la primera expresi3n de (4.75) se tiene para $p^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que n' es impar, del teorema 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= \{\operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.81)$$

ya que n' es impar y $k = 4l$ entonces n es impar, usando las ecuaciones (4.77) - (4.79) y (4.81), tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.82)$$

por lo tanto, el teorema es verdadero para $k = 4l$.

Para $k = 4l + 1$, tenemos que

$$p^*(j\omega) = -\omega^{4l+1} q^\bullet(\omega) + j\omega^{4l+1} p^\bullet(\omega),$$

supongamos que n' es par, entonces del teorema 4.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde los ω_i , con $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$, son reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $p_f^\bullet(\omega)$, con multiplicidad impar, adem1s sea $\omega_0 := 0$.

Como

$$p(\omega) = -\omega^{4l+1} q^\bullet(\omega), \quad p^{(4l+1)}(\omega_0) = -(4l+1)! q^\bullet(\omega_0) = 0$$

y

$$q(\omega) = \omega^{4l+1} p^\bullet(\omega),$$

entonces tenemos que

$$\operatorname{sgn}[p^{(4l+1)}(\omega_0)] = 0, \quad (4.84)$$

$$\operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.85)$$

$$\operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)] = \operatorname{sgn}[q(\infty)]. \quad (4.86)$$

Ya que n' es par y $k = 4l+1$ entonces n es impar, usando las ecuaciones (4.83) - (4.86), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] \\ &\quad + \dots + (-1)^{m-1} 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.87)$$

lo cual muestra que la segunda expresión de (4.75) se tiene para $p^*(z)$ de grado impar. Ahora supongamos que n' es impar, del teorema 4.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ya que n' es impar y $k = 4l + 1$ entonces n es par, utilizando las ecuaciones (4.84) - (4.86) y (4.88), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.89)$$

lo cual muestra que la primera expresión de (4.75) se tiene para $p^*(z)$ de grado par. Así el teorema es verdadero para $k = 4l + 1$.

Para $k = 4l + 2$, tenemos que

$$p^*(j\omega) = -\omega^{4l+2} p^\bullet(\omega) + j(-\omega^{4l+2} q^\bullet(\omega)),$$

primero supongamos que n' es par, entonces del teorema 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= \{\operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[q^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde los ω_i , con $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ son reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $q_f^\bullet(\omega)$, con multiplicidad impar, también definimos $\omega_m = \infty$. Ya que

$$p(\omega) = -\omega^{4l+2} p^\bullet(\omega), \quad p^{(4l+2)}(\omega_0) = -(4l+2)! p^\bullet(\omega_0)$$

y

$$q(\omega) = -\omega^{4l+2} q^\bullet(\omega),$$

entonces tenemos que

$$\operatorname{sgn}[p^{(4l+2)}(\omega_0)] = -\operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)], \quad (4.91)$$

$$\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] = -\operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.92)$$

$$\operatorname{sgn}[q(\infty)] = -\operatorname{sgn}[q^\bullet(\infty)]. \quad (4.93)$$

Ya que n' es par y $k = 4l + 2$ entonces n es par, usando las ecuaciones (4.90) - (4.93), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.94)$$

así tenemos que la primera expresión de (4.75) se tiene para $p^*(z)$ de grado par. Ahora supongamos que n' es impar, del teorema 4.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= \{\operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.95)$$

como n' es impar y $k = 4l + 2$ entonces n es impar, usando las ecuaciones (4.91) - (4.93) y (4.95), tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.96)$$

por lo tanto, el teorema es verdadero para $k = 4l + 2$.

Por último, para $k = 4l + 3$, tenemos que

$$p^*(j\omega) = \omega^{4l+3} q^\bullet(\omega) + j(-\omega^{4l+3} p^\bullet(\omega)),$$

supongamos que n' es par, así del teorema 4.11, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') &= -\{2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ &\quad \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.97)$$

donde cada ω_i , con $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$, son reales, no negativos, los distintos ceros finitos de $p_f^\bullet(\omega)$, con multiplicidad impar, además sea $\omega_0 := 0$.

Como tenemos que

$$p(\omega) = \omega^{4l+3} q^\bullet(\omega), \quad p^{(4l+3)}(\omega_0) = (4l+3)! q^\bullet(\omega_0) = 0$$

y

$$q(\omega) = -\omega^{4l+3} p^\bullet(\omega),$$

entonces tenemos que

$$\operatorname{sgn}[p^{(4l+3)}(\omega_0)] = 0, \quad (4.98)$$

$$\operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_i)] = \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.99)$$

$$\operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)] = -\operatorname{sgn}[q(\infty)]. \quad (4.100)$$

Como n' es par y $k = 4l + 3$, entonces n es impar, usando las ecuaciones (4.97) - (4.100), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) = & \{ \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \\ & + \dots + (-1)^{m-1} 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \} \\ & \times (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.101)$$

así, la segunda expresión de (4.75) es válida para $p^*(z)$ de grado impar. Ahora supongamos que n' es impar, del teorema 4.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(p') = & -\{ 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_1)] - 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-2} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_{m-1})] + (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}[q_f^\bullet(\omega_m)] \} \cdot (-1)^m \\ & \times \operatorname{sgn}[p^\bullet(\infty)], \end{aligned} \quad (4.102)$$

Ya que n' es impar y $k = 4l + 3$ entonces n es par, utilizando las ecuaciones (4.98) - (4.100) y (4.102), tenemos que $\sigma(p') = \sigma(p^*)$ con

$$\begin{aligned} \sigma(p^*) = & \{ \operatorname{sgn}[p^{(k)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ & \times 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \operatorname{sgn}[p_f(\omega_m)] \} \cdot (-1)^{m-1} \\ & \times \operatorname{sgn}[q(\infty)], \end{aligned} \quad (4.103)$$

lo cual verifica la primera expresión de (4.75) para $p^*(z)$ de grado par. Con esto la demostración del teorema es completada. \square

Utilizaremos el Teorema 4.12 en el siguiente ejemplo, para obtener información acerca de la distribución de las raíces de un polinomio, en el plano.

Ejemplo 4.13. *Consideremos el polinomio*

$$p^*(z) = z^4(z^2 + 4)(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z^2 + z + 1).$$

Sustituyendo $z = j\omega$, tenemos que $p^(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, donde*

$$p(\omega) = 5\omega^{10} - 21\omega^8 + 10\omega^6 - 24\omega^4$$

y

$$q(\omega) = -\omega^{11} + 10\omega^9 - 29\omega^7 + 20\omega^5.$$

Los ceros reales, finitos positivos de $q_f(\omega)$, con multiplicidad impar, son $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$ y $\omega_3 = \sqrt{5}$, también definimos $\omega_0 = 0$. Por lo tanto,

$\operatorname{sgn}[p^{(4)}(\omega_0)] = -1$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] = -1$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] = 0$, $\operatorname{sgn}[p_f(\omega_3)] = 1$, además, $\operatorname{sgn}[q(\infty)] = -1$. Ya que $p^*(z)$ es de grado impar y con una raíz en el origen de multiplicidad 4, de la fórmula (4.75), se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma(p^*) &= \{\operatorname{sgn}[p^{(4)}(\omega_0)] - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_2)] \\ &\quad - 2 \operatorname{sgn}[p_f(\omega_3)]\} \cdot (-1)^3 \operatorname{sgn}[q(\infty)] \\ &= \{(-1) - 2(-1) + 2(0) - 2(1)\}(-1)^3(-1) = -1.\end{aligned}$$

De la factorización de $p^*(z)$, observamos que el polinomio tiene tres raíces reales y dos raíces con parte real negativa, además, como $\sigma(p^*) = l - r$, el Teorema 4.12 se cumple.

Conclusiones y Perspectivas

En el estudio de la estabilidad en sistemas de ecuaciones diferenciales, el análisis del sistema linealizado muchas veces nos permite determinar la estabilidad de este, ya que bajo determinadas condiciones la estabilidad del sistema linealizado implica la estabilidad del sistema original.

Existen diferentes criterios, tales como, el *Criterio de Routh*, el *Criterio de Routh-Hurwitz*, el *Criterio de Liénard-Chipart*, ver [21]; en los capítulos anteriores se presentó el *Criterio de Hermite-Biehler*, también conocido como el *Criterio de la Alternancia*. Este criterio nos permite determinar, mediante el análisis del polinomio asociado, la estabilidad de sistemas continuos, su demostración esta basada en el Teorema de Intersección de la Frontera y la presentamos en el capítulo 1. Se analiza el polinomio característico asociado al sistema y a partir de este se obtiene dos polinomios para los cuales se estudia la distribución de sus raíces a lo largo del eje y . Este mismo estudio se puede realizar para analizar la estabilidad de sistemas discretos, haciendo uso de la transformada de *Möbius*, estudiando la distribución de los ceros a lo largo del círculo unitario. Este análisis también fue presentado en el capítulo 1.

A partir del Teorema de la Alternancia, y por lo tanto, del Teorema de Intersección de la Frontera se puede desarrollar un test, equivalente al test de Routh, para verificar la estabilidad Hurwitz para polinomios reales.

En el capítulo 2, se muestra una aplicación dada por *Kharitonov*, en donde utilizó este criterio en los trabajos que realizó en el estudio de la estabilidad en familias de polinomios de tipo Intervalo.

En la teoría del control aparecen sistemas con retardo los cuales tienen como función característica quasipolinomios, *Čebotarev* y posteriormente *Pontrjagin*, generalizaron el Teorema de Hermite-Biehler a este tipo de funciones enteras, en el capítulo 3, se estudia la generalización dada por *Pontrjagin*.

Un cúmulo considerable de investigación se ha hecho en la distribución de

los ceros de funciones enteras y numerosos artículos se pueden encontrar en la literatura matemática [23]. Como perspectiva se podrían estudiar otras generalizaciones del criterio de Hermite-Biehler para funciones enteras arbitrarias, tales como, funciones enteras de tipo exponencial.

También se puede investigar una posible generalización del Teorema de *Hermite-Biehler* en funciones complejas donde se busquen condiciones para que las raíces tengan modulo menor que uno. Pueden también plantearse posibles generalizaciones del Teorema de *Hermite-Biehler* en polinomios de varias variables.

Finalmente, en el último capítulo se presentaron generalizaciones del Teorema aplicables a polinomios no necesariamente Hurwitz donde se incluye el caso en que las raíces puedan ser igual a cero, que son de interés pues es donde podrían presentarse bifurcaciones.

Otra perspectiva de investigación es el estudio del Teorema de *Hermite-Biehler*, donde el conjunto de interés sea un conjunto distinto de \mathbb{C}^- ó \mathbb{D} .

Bibliografía

- [1] Ackermann, J. (2002) *Robust Control, The Parameter Space Approach*, Communication and Control Engineering Series, Springer-Verlag, London.
- [2] Barmish, B.R. (1984) *Invariance of strict Hurwitz property of polynomials with perturbed coefficients*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC - 29, no. 10, pp. 935- 936.
- [3] Barmish, B.R. (1994) *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York.
- [4] Bellman, R.E., Cooke, K.L. (1963) *Differential-Difference Equations*, Number 6 in Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York.
- [5] Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H., Keel, L.H. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [6] Bhattacharyya, S.P., Datta, A., Keel, L.H. (2009) *Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization*, Automation and Control Engineering Series, CRC Press Taylor and Francis Group, Boca Raton, Fl.
- [7] Bhattacharyya, S.P. (1987) *Robust Stabilization Against Structured Perturbations*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 99, Springer, Berlin.
- [8] Bialas, S. A. (1983) *A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices*, International Journal of Control, vol. 37, pp. 717 - 722.
- [9] Chapellat, H., Mansour, M., Bhattacharyya, S.P. (1990) *Elementary proofs of some classical stability criteria*, IEEE Trans. Education 33, 3.
- [10] Chetaev, N. G. (1965) *Motion Stability [in Russian]*, Nauka, Moscow.

- [11] Faedo, S. (1953) *A new stability problem for polynomials with real coefficients.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. Ser. 3 - 7, pp. 53 - 63.
- [12] Gantmacher, F. R. (1959) *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.
- [13] Gu, K., Kharitonov, V. L., and Chen, J. (2003) *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston.
- [14] Guillemin, E. A. (1949) *The Mathematics of Circuit Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY.
- [15] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J. (2005) *Mathematical Systems Theory I*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 48, Mathematical Systems Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [16] Ho, M.T., Datta, A., Bhattacharyya, S.P. *A new approach to feedback design part I: Generalized interlacing and proportional control*, Department of Electrical Engineering, Texas A & M University, College Station, TX, Tech. Report TAMU-ECE97-001-A.
- [17] Ho, M.T., Datta, A., Bhattacharyya, S.P. *A new approach to feedback design part II: PI and PID controllers*, Department of Electrical Engineering, Texas A & M University, College Station, TX, Tech. Report TAMU-ECE97-001-B.
- [18] Holtz O. (2003) *Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz, and total positivity*, Linear Algebra and its Applications 372, pp. 105-110.
- [19] Kharitonov, V.L. (1978) *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differential Uravnen, vol. 14, pp. 2086 - 2088. Translation in Differential Equations, vol. 14, pp. 1483 - 1485, 1979.
- [20] Kharitonov, V.L. (1979) *The Routh - Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials*. Izvetiy Akademii Nauk Kazakhskoi SSR, Seria fizikomatematicheskaja, vol. 26, pp. 69 - 79.
- [21] Lancaster, P., Tismenetsky, M. (1985) *The Theory of Matrices with Applications*, Academic Press, San Diego, CA.
- [22] LaSalle, J.P. (1986) *The Stability and Control of Discrete Processes*, New York Inc., Springer-Verlag, New York.

- [23] Levin, B.J. (1980) *Distribution of zeros of entire functions*, vol 5. American Mathematical Society, Providence, Translation of Mathematical Monographs, Rhode Island.
- [24] Loredó, C.A. (2004) *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [25] Lyapunov, A. M. (1992) *The General Problem of the Stability of Motion*, Translated by A. T. Fuller from Edouard Davaux's French translation (1907) of the original Russian dissertation (1892), Taylor and Francis, London.
- [26] Mansour, M. (1992) *Robust stability in systems described by rational functions*, in: C.T., Leondes (Ed.), *Control and Dynamic Systems*, vol. 51, Academic Press, pp. 79-128, New York.
- [27] Markushevich, A. (1987) *Teoría de las funciones analíticas*, URSS, Mir Moscu.
- [28] Marsden, J. E. y M. J. Hoffman. (2003) *Análisis básico de variable compleja*, Ed. Trillas.
- [29] Olshevsky A., Olshevsky V. (2005) *Kharitonov's Theorem and Bezoutians*, *Linear Algebra and its Applications* 399, pp. 285-297.
- [30] Pontrjagin, L.S. (1955) *On the zeros of some elementary transcendental functions*, *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 6, 1942, pp. 115-134. English translation, American Mathematical Society Translation, vol. 2, pp. 95-110.
- [31] Stépán, G. (1989) *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Longman Scientific and Technical, Wiley and Sons, New York.
- [32] Stojic, M.R., Siljak, D.D. (1965) *Generalization of hurwitz nyquist and mikhaïlov stability criteria*, *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-10, 250-254.
- [33] Silva, G.J., Datta, A., Bhattacharyya, S.P. (2005) *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Boston, Birkhäuser.
- [34] Zubov, V. I. (1959) *Mathematical Methods of Investigating Automatic-Control Systems [in Russian]*, Sudpromgiz, Leningrad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

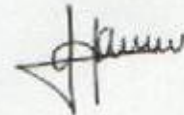
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EL Teorema de Hermite - Biehler

Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias
presenta:

El Lic. Edgar Cristian Díaz González

Director: Dr. Baltazar Aguirre Hernández



México D. F. Junio de 2010