

Modelo de un lecho fluidizado de flujo descendente bifásico y trifásico

Tesis que presenta

M.C. Guillermo Benítez Olivares

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Energía y Medio Ambiente)



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO DE ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE**

Modelo de un lecho fluidizado de flujo descendente bifásico y trifásico

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS (ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE)

PRESENTA:

M.C. Guillermo Benítez Olivares

Director:

Dr. Francisco José Valdés Parada

Co-directora:

Dra. Mónica Alicia Meraz Rodríguez

Asesor:

Dr. Alberto Soria López

Sinodales:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

Dr. Carlos Omar Castillo Araiza

Dr. Sergio Antonio Baz Rodríguez

Dr. José Enrique Botello Álvarez

Dr. Jorge Ramírez Muñoz

Ti' in chaanpal
In lak'ech - hala k'in

Agradecimientos

El Doctorado en Ciencias (Energía y Medio Ambiente) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, pertenece al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad del CONACyT y cuenta con apoyo de CONACyT-SENER sustentabilidad energética con el convenio **005383**; por lo que agradece la beca recibida, a través del convenio No. (CVU/Becario): **500995/303577** para el desarrollo de esta tesis.

Agradecimientos personales

Después de todas las grandes batallas y hermosos momentos, no queda más que agradecer a la vida y a todo lo que me ha dado hasta este día, en donde los logros obtenidos, son la suma de los esfuerzos de todos y cada uno de ustedes que hacen posible que el conocimiento continúe.

A mi familia, mis profesores y amigos.

Comité asesor

Director:

Dr. Francisco José Valdés Parada. Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Co-directora:

Dra. Mónica Alicia Meraz Rodríguez. Departamento de Biotecnología. División de Ciencias Biológicas y de la Salud. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Asesor:

Dr. Alberto Soria López. Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

El jurado designado por la
Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente

de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

GUILLERMO BENÍTEZ OLIVARES

El día **14** de **noviembre** del año **2019**

Miembros del Jurado

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

Presidente

Dr. Carlos Omar Castillo Araiza

Secretario

Dr. Sergio Antonio Baz Rodríguez

Vocal 1

Dr. José Enrique Botello Álvarez

Vocal 2

Dr. Jorge Ramírez Muñoz

Vocal 3



Índice general

I	Parte Uno	
	Resumen	1
	Abstract	5
	Introducción	9
1	Revisión bibliográfica de la fluidización	13
1.1	Antecedentes y justificación	14
1.2	Descripción de la fluidización	15
1.2.1	Características de los lechos fluidizados	16
1.3	Fluidización ascendente	17
1.3.1	Aplicaciones, ventajas y desventajas	20
1.4	Fluidización descendente	21
1.4.1	Aplicaciones, ventajas y desventajas	23

1.5	Modelos matemáticos para la fluidización	25
1.5.1	Fluidización bifásica (líquido-sólido)	26
1.5.2	Fluidización bifásica (líquido-gas)	37
1.5.3	Fluidización trifásica (líquido-sólido-gas)	43
2	Objetivos y pregunta de investigación	47
2.1	Pregunta de investigación	47
2.2	Objetivo general	47
2.3	Objetivos particulares	47
3	Metodología	49
3.1	Objetivo particular 1	49
3.2	Objetivo particular 2	50
3.3	Objetivo particular 3	51
3.4	Objetivo particular 4	52
3.5	Objetivo particular 5	53
II	Parte Dos	
4	Sistema experimental	57
4.1	Características del sistema experimental bifásico (líquido-sólido)	57
4.2	Características del sistema experimental bifásico (líquido-gas)	63
4.2.1	Estancia de investigación	68
4.3	Características del sistema experimental trifásico (líquido-sólido-gas)	71
4.4	Resumen del Capítulo	73
5	Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-sólido	75
5.1	Ecuaciones promedio	77
5.2	Problema de cerradura	79
5.2.1	Ecuación cerrada	80

5.3	Resultados y discusión	81
5.4	Artículo publicado	88
5.5	Resumen de capítulo	88
6	Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-gas	91
6.1	Problemas de cerradura	96
6.2	Resultados y discusión	98
6.3	Estancia de investigación	105
6.3.1	Modelo bifásico (β - γ) de dos ecuaciones	106
6.3.2	Modelo bifásico (β - γ) de una ecuación	112
6.4	Resumen del capítulo	119
7	Análisis trifásico del lecho fluidizado líquido-sólido-gas	121
7.1	Modelo microscópico en una celda periódica	122
7.2	Solución formal del problema microscópico	125
7.3	Problemas de cerradura	128
7.4	Modelo promedio	134
7.5	Resumen del capítulo	136
III	Parte Tres	
	Conclusiones	139
	Nomenclatura	143
	Bibliografía	146
A	Promediado espacial para el sistema líquido-sólido	161
A.1	Ecuación de continuidad	161
A.2	Ecuación de cantidad de movimiento	162
A.2.1	Cerradura en la ecuación de continuidad	165

A.2.2	Cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento	166
B	Promediado espacial para el sistema líquido-gas	171
B.1	Ecuación de continuidad	171
B.2	Ecuación de cantidad de movimiento	172
B.2.1	Cerradura en la ecuación de continuidad	176
B.2.2	Cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento	177
C	Análisis de las fuentes para el sistema líquido-sólido-gas	183
C.1	Fuente en γ	183
C.2	Fuente en σ	186
C.3	Fuentes para las condiciones iniciales	189
	Index	190

Parte Uno

Resumen 1

Abstract 5

Introducción 9

1 Revisión bibliográfica de la fluidización 13

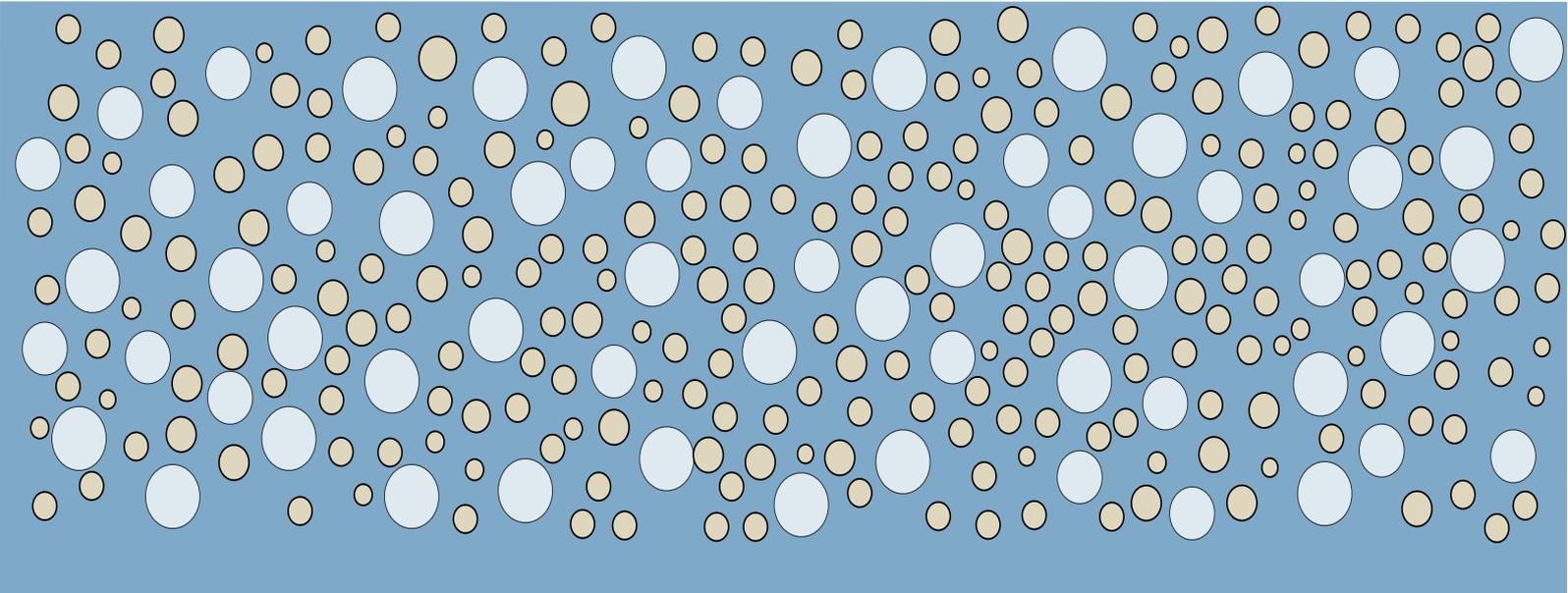
- 1.1 Antecedentes y justificación
- 1.2 Descripción de la fluidización
- 1.3 Fluidización ascendente
- 1.4 Fluidización descendente
- 1.5 Modelos matemáticos para la fluidización

2 Objetivos y pregunta de investigación 47

- 2.1 Pregunta de investigación
- 2.2 Objetivo general
- 2.3 Objetivos particulares

3 Metodología 49

- 3.1 Objetivo particular 1
- 3.2 Objetivo particular 2
- 3.3 Objetivo particular 3
- 3.4 Objetivo particular 4
- 3.5 Objetivo particular 5



Resumen

La fluidización de flujo descendente es una operación unitaria atractiva porque permite tener una circulación suave del fluido y el material de soporte sólido, así como una operación ininterrumpida y controlada del fluido a tratar. La motivación de esta investigación, está basada en la búsqueda de modelos matemáticos que permitan describir este fenómeno y apoyen la descripción hidrodinámica durante el tratamiento de aguas residuales.

Los modelos que se presentan en este trabajo, están basados en la física operacional de la fluidización de flujo descendente. La característica principal de estos sistemas es la curva de la velocidad mínima de fluidización, la cual, en este caso no tiene una meseta donde la caída de presión es constante, a diferencia de los sistemas de fluidización ascendente donde si existe. Dicha caída de presión, está dada en función de la densidad de las partículas utilizadas. En los sistemas de fluidización descendente, la densidad de las partículas es menor a la densidad del fluido donde se encuentran dispersas.

El transporte de cantidad de movimiento en lechos fluidizados generalmente se modela mediante modelos macroscópicos. Dichos modelos se expresan en términos de coeficientes de medio efectivo que vienen de desarrollar analogías con el transporte en medios porosos, que en este caso se suponen como un lecho fijo. En la práctica, es deseable deducir estos modelos y predecir los coeficientes involucrados de una manera confiable, al obtener el significado físico de dichos coeficientes

asociados al transporte de cantidad de movimiento.

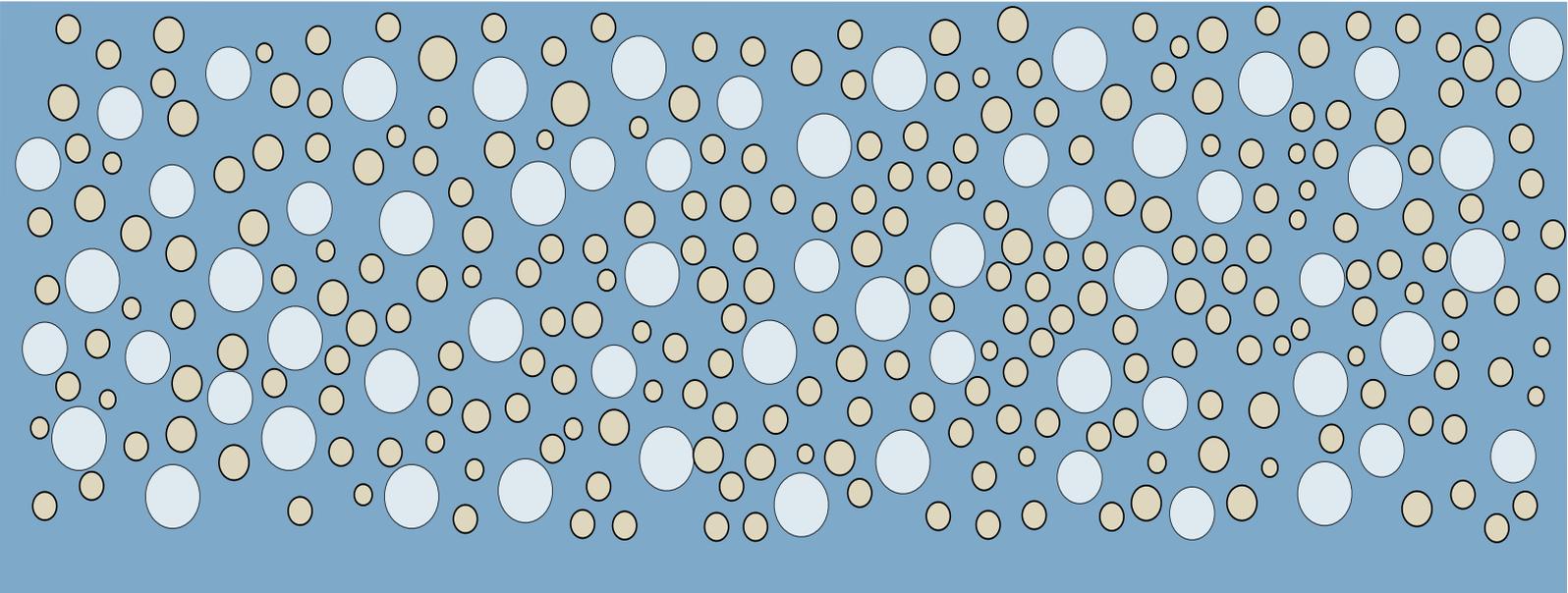
El lecho fluidizado a modelar, es un sistema de tres fases (trifásico) que contiene a las partículas sólidas, el gas que se produce al tratar aguas residuales y el líquido en donde están inmersas e interactuando tanto las partículas como las burbujas de gas. Debido a la complejidad matemática que representa el abordar directamente el sistema trifásico, el desarrollo de este trabajo se propone de manera escalonada. Lo anterior quiere decir que primero se analizan las interacciones bifásicas líquido-sólido y líquido-gas, de donde se obtienen las características físicas, regiones de promediado junto con la propuesta de ecuaciones y condiciones de frontera asociadas. Una vez realizados estos análisis y al haber obtenido dichos parámetros, estas simplificaciones se emplean en el sistema trifásico, dando lugar a un modelo que contiene las características descriptivas de la interacción con todas sus fases.

En la primera parte de este trabajo se desarrolla un modelo macroscópico para la hidrodinámica de la fluidización de flujo descendente, utilizando el método del promedio volumétrico, obteniendo un modelo con la forma de la ley de Darcy con una corrección en la velocidad relativa del fluido respecto del sólido. Una característica destacada del modelo es que permite predecir el coeficiente de permeabilidad aparente en diferentes geometrías y en diferentes condiciones de transporte. Además, el modelo promedio obtenido se puede usar para ambos tipos de fluidización (ascendente o descendente), ya que no está restringido por la dirección del flujo.

En la segunda parte del trabajo, para el modelado del flujo bifásico líquido-gas, se desarrolla un modelo de medio efectivo y se usa para predecir la hidrodinámica del flujo de burbujas en su velocidad terminal por medio de una versión abreviada del método del promedio volumétrico. Este modelado, es un problema desafiante en hidrodinámica debido a la complejidad para determinar la estructura del movimiento de la fase gaseosa. En este caso, el transporte de cantidad de movimiento de dicha fase se estudia realizando simulaciones numéricas directas. El modelo resultante, es aplicable para describir la velocidad en las dos fases, una vez que las burbujas han adquirido la velocidad terminal. Dicho modelo consta de dos ecuaciones promedio expresadas en términos de cuatro coeficientes de medio efectivo de permeabilidad aparente. Estos coeficientes se determinan a partir de la solución de los problemas de cerradura asociados a un nivel de escala de una burbuja. El modelo se valida mediante la comparación de los campos de velocidad de la fase gaseosa con los datos de la velocidad que surgen de simulaciones numéricas directas y con resultados experimentales de sistemas de burbujas que miden la velocidad terminal.

En la tercera y última parte del trabajo, se utilizan los parámetros físicos obtenidos de los modelos anteriores, las regiones de promediado y las expresiones de cantidad de movimiento tales como las ecuaciones de continuidad y de transporte asociadas a cada fase y las condiciones de frontera correspondientes a cada interfase. Cabe señalar que en esta parte del modelado, se considera la variación en el tiempo, la cual es una variable que no se toma en cuenta en los modelos bifásicos. El modelo macroscópico trifásico obtenido queda en términos de los coeficientes asociados de los problemas de cerradura desarrollados, que en este último caso también consideran términos temporales.

En general, durante el desarrollo de los modelos bifásicos se obtienen las permeabilidades aparentes en cada uno de ellos. En el sistema trifásico, queda expresado el modelo macroscópico en términos de los coeficientes efectivos de transporte que del mismo modo que para los sistemas bifásicos son permeabilidades aparentes. Como como prospectiva de análisis, dichos coeficientes efectivos de transporte, se pueden emplear para la determinación de los parámetros de los sistemas de bombeo necesarios para la implementación experimental y de una adecuada velocidad mínima de fluidización.



Abstract

Downflow fluidization is an attractive unit operation because it allows a smooth circulation of the fluid and the solid support material, as well as an uninterrupted and controlled operation of the fluid to be treated. The motivation of this work, is based on the search for mathematical models that allow describing this phenomenon and support hydrodynamic description during wastewater treatment.

The models presented in this work are based on the operational physics of downflow fluidization. The main feature of these systems is the minimum fluidization velocity curve, which does not have a plateau where the pressure drop is constant, unlike the upward fluidization systems where it does exist. This pressure drop is given as a function of the density of the particles used. In downflow fluidization systems, the density of the particles is less than the density of the fluid where they are dispersed.

Momentum transport in fluidized beds is generally modeled by macroscopic models. These models are expressed in terms of effective transport coefficients that result from analogies of transport in porous media, which in this case are assumed as a fixed bed. In practice, it is desirable to deduce these models and predict the coefficients involved in a reliable manner, by obtaining the physical meaning of these coefficients associated with momentum transport.

The fluidized bed to be modeled is a three-phase system that contains solid particles, the gas

that is produced by treating wastewater and the liquid where both, particles and gas bubbles are immersed and interacting. Due to the mathematical complexity of directly addressing the three-phase system, the development of this work in a phased manner is proposed. This means that the two-phase liquid-solid and liquid-gas interactions are analyzed first, from which the physical characteristics, average regions along with the proposal of equations and associated boundary conditions are obtained. Once these analyses have been carried out and these parameters have been obtained, these simplifications are used in the three-phase system, giving rise to a model that contains the descriptive characteristics of the interaction with all its phases.

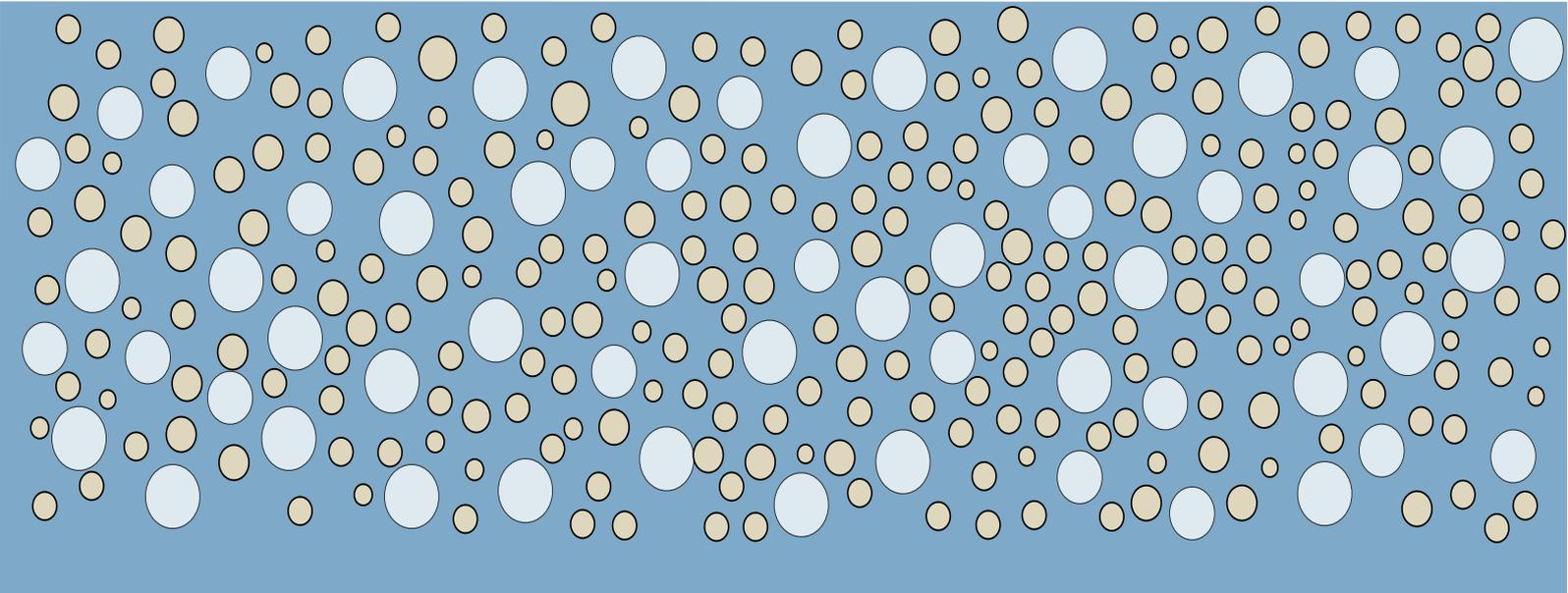
In the first part of this work a macroscopic model for the hydrodynamics of the downflow fluidization is developed, using the method of volume averaging, obtaining a model with the form of Darcy's law with a correction in velocity relative of the fluid with respect to the solid. A salient feature of the model is that it allows predicting the apparent permeability coefficient in different geometries and in different transport conditions. In addition, the average model obtained can be used for both types of fluidization (upward or downflow), since it is not restricted by the flow direction.

In the second part of the work, for the modeling of the two-phase liquid-gas flow, an effective medium model is developed and used to predict the hydrodynamics of the bubble flow at its terminal velocity by means of an abbreviated version of the method of volume averaging. This modeling is a challenging problem in hydrodynamics due to the complexity to determine the structure of the gas phase movement. In this case, the momentum transport of that phase is studied by direct numerical simulations. The resulting model is applicable to describe the velocity in the two phases, once the bubbles have acquired the terminal velocity. This model consists of two average equations expressed in terms of four effective average coefficients of apparent permeability. These coefficients are determined from the solution of the closure problems associated with a bubble scale level. The model is validated by comparing the velocity fields of the gas phase with the velocity data arising from direct numerical simulations and with experimental results of bubble systems that measure the terminal velocity.

In the third and last part of the work, the physical parameters obtained from the previous models, the averaging regions and the expressions of momentum transport such as the continuity and transport equations associated with each phase and the corresponding boundary conditions are used at each interface. It should be noted that the time dependence is considered in this part of

the modeling, which is a variable that is not usually taken into account in two-phase models. The three-phase macroscopic model obtained is written in terms of the associated coefficients of the developed closure problems, which also consider temporal terms.

In general, during the development of the biphasic models the apparent permeabilities in each of them are obtained. In the three-phase system, the macroscopic model is expressed in terms of the effective transport coefficients that in the same way as for the two-phase systems are apparent permeabilities. As a prospective analysis, those effective transport coefficients can be used for the determination of the parameters of the pumping systems necessary for experimental implementation and for an adequate minimum fluidization rate.



Introducción

La fluidización es una operación utilizada ampliamente en la ingeniería. Su importancia a nivel industrial es de gran importancia debido a que puede ser utilizada para diferentes rubros, ya que la circulación suave del fluido y la separación de las fases involucradas, permite una operación ininterrumpida y controlada. Para describir el proceso de fluidización, se ha propuesto establecer teorías y correlaciones obtenidas a partir de experimentos y desarrollos matemáticos para predecir el comportamiento de las fases involucradas en el sistema.

Dentro de la gama de aplicaciones de la fluidización, de acuerdo con Pérez & Torres (2008), el diseño de los sistemas de tratamiento de aguas residuales se ha centrado fundamentalmente en el proceso bioquímico dejando en segundo plano aspectos hidrodinámicos como la transferencia de cantidad de movimiento y los patrones hidrodinámicos que proveen la transferencia de masa, estado de agregación de elementos del fluido, etc. Dichos aspectos, influyen en el desempeño de los procesos que se llevan a cabo durante el tratamiento. Por tanto, el estudio del patrón hidrodinámico de los sistemas de tratamiento permitirá mejorar su eficiencia (Gíacomán y *col.*, 2006).

El comportamiento hidrodinámico de reactores puede evaluarse siguiendo el método experimental estímulo-respuesta, en el que se inyecta en el efluente un trazador de concentración conocida, fácilmente detectable y que no participe en ninguno de los procesos físicos y químicos que puedan alterar la hidrodinámica real del fluido (Rocha y *col.*, 2000). En reactores biológicos esta evaluación

es compleja debido a la presencia de varias fases: agua residual, gas, biomasa y medio de soporte (en el caso de filtros biológicos, lechos móviles y lechos fluidizados) lo que puede ocasionar resultados erróneos por la adsorción del trazador en cualquiera de estas fases (Jiménez y *col.*, 1988).

Debido a la complejidad de la evaluación de la hidrodinámica en lechos fluidizados, en este trabajo, se plantean modelos representativos que describan las propiedades hidrodinámicas del sistema en sus diferentes fases y escalas, para ello, se utiliza el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). El objetivo es obtener modelos de medio efectivo¹ de transferencia de cantidad de movimiento y de masa, que describan las interacciones entre las fases líquida, sólida y gaseosa.

La presente tesis se organiza de acuerdo a los diferentes sistemas de fluidización, dividiendo el trabajo de una forma escalonada. Lo anterior quiere decir, que primero se analiza la interacción bifásica entre las fases líquida y sólida. En segundo lugar, se describe la interacción bifásica entre la fase líquida y gaseosa. Finalmente se analiza la interacción trifásica entre las fases líquida, sólida y el gaseosa. En la organización general, se comienza con la revisión bibliográfica de antecedentes, aplicaciones y modelos para cada una de las interacciones entre las fases. En segundo lugar se hace el planteamiento del objetivo general y de los particulares. En seguida, se describe detalladamente de cada uno de los objetivos en la metodología, lo que conduce a la motivación del trabajo y el desarrollo de la parte experimental.

En el análisis experimental que se lleva a cabo en el Capítulo 4, se describen de manera observacional los sistemas bifásicos y trifásico. Es decir, se instalaron los sistemas de fluidización descendente y se observa su hidrodinámica y las interacciones que suceden cerca de las paredes, en las entradas y salidas y sobretodo en el seno del sistema, que es donde se centran los análisis de interacción entre las diferentes fases en este trabajo. Aunado a ello, se describen y determinan los tamaños característicos de las fases, así como las propiedades físicas asociadas a cada sistema.

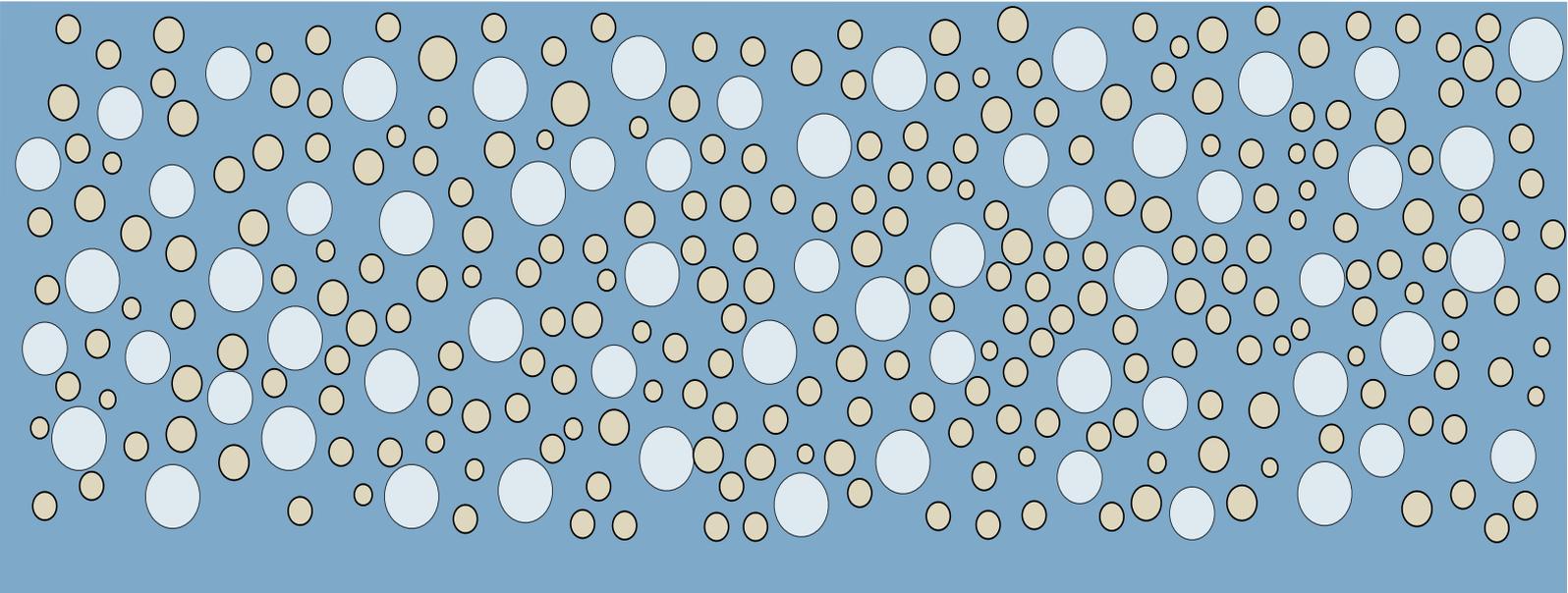
En el Capítulo 5, se analiza el sistema bifásico líquido-sólido, partiendo del análisis observado en el sistema experimental. Se hace uso del método del promedio volumétrico, para obtener un modelo de medio efectivo que describe la caída de presión en el sistema de fluidización bifásico. Este modelo tiene la característica que toma en cuenta la velocidad relativa del sólido respecto del fluido. Aunado a lo anterior, se puede utilizar para sistemas de fluidización ascendente y descendente, debido a que las ecuaciones de transporte utilizadas, no están limitadas en la dirección

¹Un modelo de medio efectivo se describe como una porción de materia formada por un conjunto infinito de partículas estudiado desde el punto de vista macroscópico, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico, que para este caso, son consideradas a través del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

del flujo.

Una vez realizado el análisis bifásico líquido-sólido, en el Capítulo 6 se desarrolla un modelo de medio efectivo bifásico líquido-gas. En este capítulo se hace uso de una versión abreviada del método del promedio volumétrico, para obtener un modelo de medio efectivo que describe la velocidad terminal de la fase gaseosa en el sistema bifásico. Aunado a ello, se abordaron dos formas de plantear el modelo líquido-gas. La primera, con las ecuaciones de transporte considerando las contribuciones inerciales y viscosas para ambas fases. La segunda, reduciendo la ecuación que domina a la fase gaseosa en los términos viscosos e inerciales, dejándola en términos de su gradiente de presión. Los resultados obtenidos para los modelos promedio desarrollados a lo largo de este capítulo, muestran concordancia con los resultados numéricos y experimentales de otros trabajos que determinan la velocidad terminal de la burbuja en un medio continuo.

Finalmente en el Capítulo 7, se hace uso de la combinación de las ecuaciones descritas en los Capítulos 5 y 6, para desarrollar un modelo de medio efectivo trifásico líquido-sólido-gas. Lo anterior, es una suma de resultados y de análisis de la validez de utilizar también una región de promediado conocida y una restricción de escala asociada. En este capítulo, se hace uso de la versión abreviada del método del promedio volumétrico utilizada en la obtención del modelo de medio efectivo del Capítulo 6. Cabe señalar que en este modelo, se considera la variación en el tiempo, la cual es una variable que no se toma en cuenta en los modelos de los Capítulos 5 y 6. El modelo macroscópico trifásico queda en términos de los coeficientes asociados de los problemas de cerradura desarrollados, que en este último caso también consideran términos temporales.



1. Revisión bibliográfica de la fluidización

En este capítulo se describe y justifica la utilización de la fluidización como un sistema de tratamiento de aguas residuales con ahorro energético así como sus ventajas y desventajas para la industria química y bioquímica. Se mencionan los rendimientos y resultados en estos sistemas y la necesidad de establecer el vínculo con modelos matemáticos que complementan la información de sistemas multifásicos. Estos modelos son obtenidos a partir de relaciones directas de balances de fuerzas. La información tiene una secuencia escalonada, es decir, primero se hace el análisis de lechos fluidizados de interacción líquido-sólido lo cual permite entender y establecer la interacción entre estas fases. El segundo análisis es la interacción bifásica líquido-gas, centrando la atención en los sistemas de burbujeo y su comportamiento. Finalmente, se analiza el sistema de tres fases líquido-sólido-gas, el cual es una combinación de las fases analizadas previamente. El capítulo se organiza como sigue:

- Antecedentes y justificación
- Descripción de la fluidización con énfasis en las características de los lechos fluidizados
- Fluidización ascendente. Aplicaciones, ventajas y desventajas.
- Fluidización descendente. Aplicaciones, ventajas y desventajas.
- Modelos matemáticos para la fluidización.
 - Fluidización bifásica (líquido-sólido)

- Fludización bifásica (líquido-gas)
- Fludización trifásica (líquido-sólido-gas)

1.1 Antecedentes y justificación

En la búsqueda del *desarrollo humano sustentable* el derecho al agua es indiscutible, la Asamblea General de las Naciones Unidas, a través de la Resolución 64/292 (julio 2010), reconoce el derecho humano al agua y su saneamiento (tratamiento de aguas residuales). El acceso al agua potable limpia y el saneamiento son esenciales para la realización de todos los derechos y actividades humanas, lo cual conduce a tener una vida digna, que compromete el patrimonio y el desarrollo de las generaciones futuras. Al discutir sobre el bienestar social enfocado en el cuidado del agua, se debe analizar el ciclo de vida que va desde la extracción junto con los servicios de suministro de agua potable hasta el tratamiento después de su uso para promover su re inserción.

Dentro de las posibles formas para el control de contaminantes en las aguas residuales, se propone llevar a cabo el tratamiento en el mismo sitio donde se realiza la separación de sólidos, dejando una parte mínima para la naturaleza en las zonas de descarga (Patterson, 1985). Para ello, el nivel de tratamiento requerido está en función de la capacidad natural del cuerpo receptor de descarga. A su vez, la capacidad natural es función del caudal del cuerpo receptor, de su contenido en oxígeno, y de su capacidad de oxigenación (Henze y *col.*, 2008). Con lo anterior se puede concluir que el objetivo del tratamiento de las aguas residuales es generar un efluente que sea utilizable por el ambiente y un residuo sólido (biomasa sólida o lodos residuales) adecuado para su disposición o reutilización dentro de las normas establecidas (Grady Jr y *col.*, 2011).

En general, se debe tener especial atención en lo señalado, debido a que los efluentes de aguas residuales se reconocen por la capacidad de aumentar la cantidad de sustancias tóxicas vertidas en los cuerpos de agua, afectando los ecosistemas acuáticos (Fan y *col.*, 1982; Limas-Ballesteros y *col.*, 1982). Algunos efluentes industriales son ricos en materia orgánica disuelta, y a pesar de ser tratados por procesos biológicos, una parte es de difícil degradación y permanece reminiscente (Henze y *col.*, 2008).

Al centrar la atención en el tratamiento de aguas, se debe considerar una mayor inversión científica y tecnológica que permita el crecimiento de este tipo de sistemas, debido a que a mediados del año 2014, se trataban en México aproximadamente el 20% de éstos efluentes (CONAGUA, 2015) y actualmente se operan y mantienen 13 plantas de tratamiento de aguas residuales, en seis

localidades, ubicadas en cinco entidades federativas (CONAGUA, 2019). Lo anterior, podría llevar a sustituir el agua de primer uso, por agua residual tratada y este esfuerzo se vería reflejado en la recarga de los acuíferos, la calidad de los ríos y lagos del territorio nacional.

De acuerdo con Ramalho y col. (1990), uno de los objetivos principales del tratamiento de las aguas residuales, es la remoción de materia orgánica, donde, en la mayoría de los casos, se utilizan procesos biológicos, los cuales remueven la materia orgánica a través del metabolismo bacteriano. Dicho mecanismo consiste en la utilización de la materia orgánica como fuente de energía y carbono para generar biomasa y biogás y esto puede llevarse a cabo por dos vías: aerobia y anaerobia (Borzacconi y col., 1996).

Para el tratamiento aerobio, se llevan a cabo procesos catabólicos oxidativos. El catabolismo oxidativo requiere la presencia de oxígeno para degradar la materia orgánica y requiere ser introducido por medio de aereación mecánica (Ramalho y col., 1990), lo que implica un costo operacional adicional del sistema de tratamiento. Adicionalmente, la mayor parte de la DQO¹ de la materia orgánica es convertida en biomasa o lodo (Torres, 2013).

En contraste, en la digestión anaerobia, una mínima parte de la materia orgánica es convertida en biomasa (3 a 10%) y el resto se transforma a biogás con un alto contenido de metano (CH₄) (Ramalho y col., 1990). En las reacciones bioquímicas que ocurren en la digestión anaerobia, la mayor parte de la energía libre permanece como energía en el metano producido, por lo que energéticamente, este proceso tiene mayor productividad (Borzacconi y col., 1996).

Algunos de los sistemas de tratamiento anaerobios más notables son los lechos empacados y los lechos fluidizados. En comparación con el lecho empacado, un lecho fluidizado tiene ventajas notables, como un mejor control de la temperatura, sin punto caliente en el lecho, distribución uniforme del catalizador y una mayor duración del catalizador (Wang y col., 2002).

1.2 Descripción de la fluidización

De acuerdo con Kunii y col. (2013), la *fluidización* se define como un proceso donde el lecho del sistema, conformado por partículas sólidas, se encuentran dispersas a lo largo y ancho de la columna por la influencia de la fuerza de arrastre de un fluido. Desde un punto de vista macroscópico, las partículas del lecho se comportan como un pseudo-fluido dentro del reactor, de aquí la denominación

¹Se entiende por demanda química de oxígeno a la cantidad de materia orgánica e inorgánica en un cuerpo de agua susceptible de ser oxidada por un agente oxidante fuerte (Lehninger, 2002).

de *lecho fluidizado*.

La fluidización es un proceso utilizado ampliamente en la industria debido a la gama de usos que van desde la clasificación mecánica de partículas con base en sus características físicas, hasta biorreactores anaerobios de lecho fluidizado para el tratamiento de aguas residuales (Epstein, 2003a). Su utilización se ha hecho más frecuente desde principios de siglo, debido a que dichos sistemas permiten trabajar con velocidades de carga orgánica relativamente altas respecto del catalizador debido al acortamiento del tiempo de retención hidráulica que estos sistemas permiten, al mejorar el transporte en las fases involucradas (Hidalgo-Barrio & García-Encina, 2002).

La conveniencia de usar lechos fluidizados depende del logro de una buena mezcla entre las fases. La desventaja sería puntualmente la generación de biomasa, la cual, tendría consecuencias en su operación y mantenimiento (Epstein, 2003a). Debido a ello, este tipo de sistemas centran su atención en procesos de tratamiento para aguas recalcitrantes que producen poca biomasa, tales como son los desechos de la industria textil, generación o reciclado de papel y celulosa, la industria química, farmacéutica, destiladoras de alcohol y vinazas (Brenner, 2013).

1.2.1 Características de los lechos fluidizados

Para caracterizar el comportamiento hidrodinámico del lecho, se debe describir la caída de presión a lo largo del mismo y su grado de expansión. Esta información permite determinar el tipo de fluidización que presenta el sistema en las condiciones de operación y parámetros tales como la velocidad mínima de fluidización², la fracción de espacio que ocupa cada fase y la velocidad de arrastre de las partículas. Existen además, otras variables que afectan el patrón hidrodinámico del lecho como son el tamaño, densidad y forma de las partículas sólidas utilizadas como soporte, las cuales, deben ser caracterizadas en cada caso (Lin y col., 2002). La combinación de las fases involucradas en un sistema de fluidización se considera como un *nuevo fluido* (Brenner, 2013), lo cual genera otras variables³ como la densidad y la viscosidad aparentes³ que también son caracterizadas. Las variables mencionadas generalmente se agrupan en números adimensionales como el número de Reynolds (Re) que relaciona los esfuerzos inerciales y los esfuerzos viscosos en el fluido y el número de Arquímedes (Ar) que relaciona la fuerza de arrastre del líquido y la oposición del movimiento de las partículas (Kunii y col., 2013).

²La velocidad mínima de fluidización se observa cuando la mezcla en el lecho es totalmente homogénea (Kunii y col., 2013).

³La relación de densidad y viscosidad aparentes está dada en función de la fracción volumétrica de cada fase involucrada (Kunii y col., 2013).

La velocidad mínima de fluidización (v_{mf}), es el valor de la velocidad de fluido que permite que las partículas del lecho sobrepasen la expansión inicial, pero sin presentar arrastre y que a su vez no se genere un gasto de bomba innecesario (Wen, 1966). La fracción volumétrica (ϵ_i ; donde i , es el indicador de la fase a la que se está haciendo referencia), se define en este caso, como el espacio ocupado por cada una de las fases dentro del sistema. La fracción volumétrica de las fases fluidas aumenta o disminuye, dependiendo de la velocidad inducida al fluido debido a que el lecho se expande o se contrae (Rao & Bheemarasetti, 2001). Cuando la velocidad del fluido se incrementa de tal modo que las partículas comienzan a ser arrastradas fuera del lecho, se le conoce como velocidad de arrastre (v_a); bajo este régimen de velocidad, la fracción de espacios ocupada por el fluido se incrementa enormemente (Brenner, 2013). La consecuencia de llegar a esta velocidad, es la pérdida de material catalítico y ello se ve reflejado en la disminución de la eficiencia de conversión del sistema (Sánchez-Ramírez y col., 2007).

1.3 Fluidización ascendente

En la fluidización ascendente las partículas del lecho son más densas que el fluido donde se encuentran inmersas, y de acuerdo con Epstein (2003a), generalmente se utilizan en dos tipos de procesos: físicos o mecánicos y químicos o bioquímicos. En los procesos físicos se usa para la clasificación y lavado mecánico de partículas con base en su tamaño, forma o densidad y el lavado o lixiviación de las mismas (Brenner, 2013). En el área de la industria química, se emplea en producción de gasolinas, gasificación del carbón, en general en procesos de intercambio de calor y transferencia de masa (Muroyama & Fan, 1985). Finalmente, en el área biotecnológica se emplean en el tratamiento de aguas residuales (Daizo & Levenspiel, 1991).

De acuerdo al esquema de fluidización que se muestra en la Figura 1.1a), las partículas sólidas se encuentran inicialmente en el fondo del sistema debido a la diferencia de densidades. En la Figura 1.1b), se ilustra que al comenzar el proceso, se induce una velocidad del fluido (líquido o gas) relacionada al gasto volumétrico de entrada generado por los sistemas de bombeo (\dot{Q}_{in}), desde el fondo del sistema comenzando así una expansión del lecho de partículas (E_σ). Esta expansión permite que el espacio entre las partículas sea mayor que cuando están todas juntas en el fondo del sistema, lo cual mejora la transferencia de calor y masa (Brenner, 2013). A partir de ello, como ya se mencionó se debe encontrar la velocidad mínima de fluidización durante la expansión del lecho, la cual, está relacionada con velocidad inducida (v_{in}). Dicha velocidad está relacionada directamente

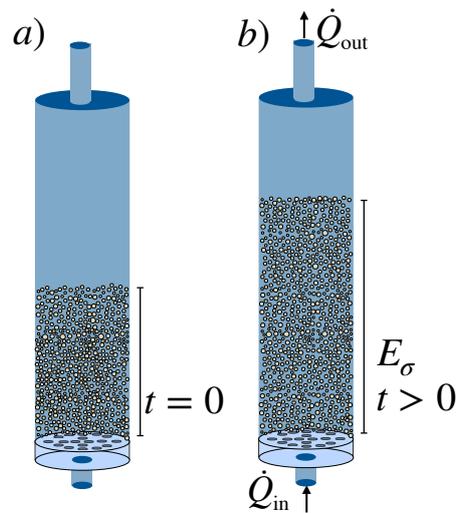


Figura 1.1: a) Esquema de fluidización ascendente en estado inicial y b) transitorio.

con la fracción de espacios vacíos, ya que la interacción de las partículas con el fluido puede ser insuficiente o excesiva afectando así la producción (Sánchez-Ramírez y *col.*, 2007). De acuerdo con la Figura 1.2, la velocidad mínima de fluidización (v_{mf}), se determina a través de la caída de presión en la altura del lecho $\left(\frac{\Delta P_B}{E_\sigma}\right)$, es decir, cuando la caída de presión en este tipo de sistemas llega a ser constante. Muroyama & Fan (1985) expresan que esta es la línea de la velocidad mínima de fluidización en términos de la caída de presión, debido a que las partículas han comenzado a comportarse como un pseudo-fluido y el flujo que pasa a través de ellas ha dejado de experimentar la resistencia al movimiento de las mismas.

De acuerdo con Yang (2003), los parámetros mencionados, son los que le dan el sentido al diseño de sistemas de fluidización, entre ellos, la fracción volumétrica de cada fase involucrada. Dicha fracción contiene entre sus características, otras variables que influyen el patrón hidrodinámico del lecho como son: el tipo de partículas sólidas utilizadas como soporte y el tipo de fluido que hace posible la fluidización (Kunii y *col.*, 2013). Las características físicas de estas variables son el tamaño, densidad y forma de las partículas sólidas y la densidad y la viscosidad de el o los fluidos, las cuales se obtienen experimentalmente (Brenner, 2013). Como se mencionó, el comportamiento hidrodinámico del lecho, se caracteriza por la caída de presión a lo largo del lecho, la velocidad superficial del fluido y el grado de expansión del mismo y de acuerdo con Muroyama & Fan (1985), esto permite determinar el tipo de fluidización que presenta el sistema: particulada, turbulenta o circulante, las cuales se muestran la Figura 1.3.

De acuerdo a la Figura 1.3a), la fluidización *particulada* se caracteriza por una expansión

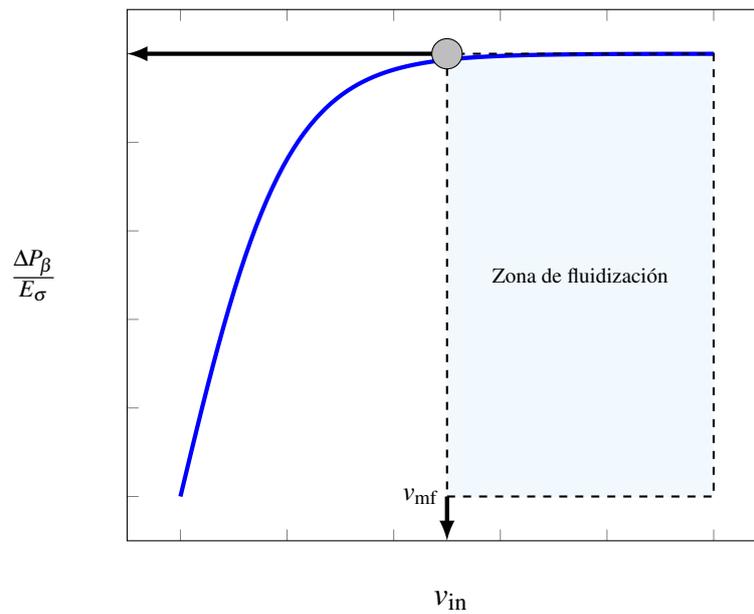


Figura 1.2: Esquema de la caída de presión respecto de la velocidad inducida en un sistema de flujo ascendente.

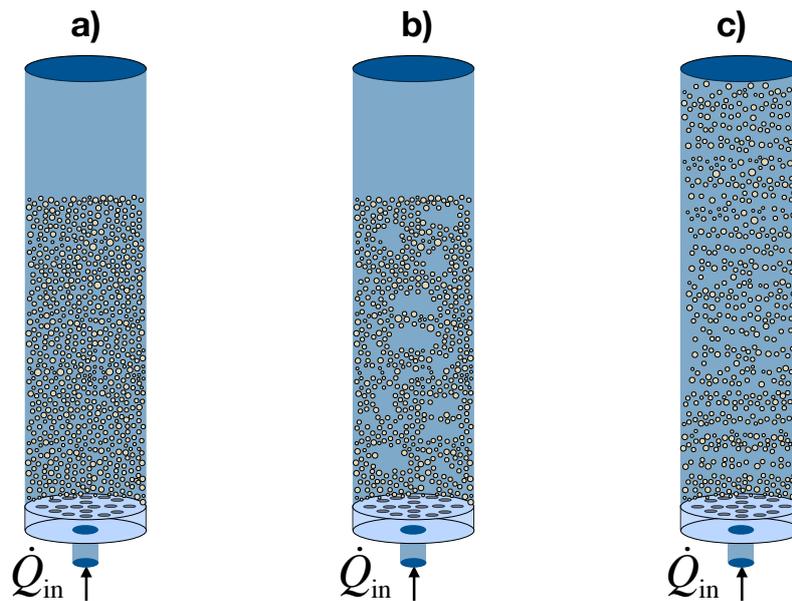


Figura 1.3: Tipos de fluidización de acuerdo al régimen de flujo (Kunii y col., 2013): a) particulada, b) turbulenta y c) circulante.

uniforme pero grande respecto del tamaño inicial de la altura del lecho a velocidades elevadas (Epstein, 2003a). En este tipo de fluidización las partículas se encuentran muy separadas y su movimiento es más vigoroso a medida que aumenta el gasto volumétrico; en este caso la densidad media del lecho a una velocidad constante, es la misma en todas sus secciones. El lecho fluidizado *turbulento o de burbujeo* (Figura 1.3b)), se da en sistemas fluidizados con una corriente líquida o

gaseosa que atraviesa un lecho de partículas que contienen una fracción volumétrica de espacios vacíos mayor (Kunii y col., 2013), en este caso, la caída de presión o se puede determinar por la ecuación de Blake Kozeny, la cual se describirá más adelante en este capítulo. En la fluidización turbulenta, la mayor parte del fluido pasa a través del lecho en forma de huecos que están casi exentos de sólidos, y solamente una pequeña fracción del fluido fluye por los canales existentes entre las partículas (Brenner, 2013). Finalmente, la fluidización *circulante* (Figura 1.3c)) se da a velocidades de gas más elevadas llegando a velocidades de arrastre v_a , donde todas las partículas de alimentación, son rápidamente arrastradas con el gas, pero es posible recuperarlas con un ciclón interno y regresarlas al fondo para mantener los sólidos dentro del sistema (Daizo & Levenspiel, 1991).

1.3.1 Aplicaciones, ventajas y desventajas

De acuerdo con Brenner (2013), las ventajas de los sistemas de fluidización, se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- El mezclado de sólidos con la velocidad mínima de fluidización permite un rápido mezclado, lo cual conduce a condiciones cercanas a las isotérmicas.
- Los sistemas de fluidización son aptos para adaptarse a sistemas a gran escala.
- Es apropiado para la operación ininterrumpida, controlada y de fácil manejo debido a la circulación suave y fluida del soporte.
- En comparación con otros sistemas de contacto, la transferencia de calor y masa se favorece debido al mezclado.

Entre las desventajas generalizadas de la fluidización se encuentran (Sánchez-Ramírez y col., 2007):

- La velocidad a la que los sólidos se están mezclando, conducen a que el tiempo de residencia de los mismos sea variable.
- La descripción real del tipo de flujo que ocurre dentro del sistema, no está debidamente caracterizada por la fracción volumétrica variable de las fases involucradas.

De acuerdo con Sánchez-Ramírez y col. (2007), los sistemas de fluidización se han utilizado ampliamente en diversas aplicaciones industriales, como el craqueo de hidrocarburos, para operaciones físicas de intercambio de calor y masa y para biofluidización en el cultivo de microorganismos y el tratamiento de aguas residuales, lo cual se resume en la Figura 1.4.

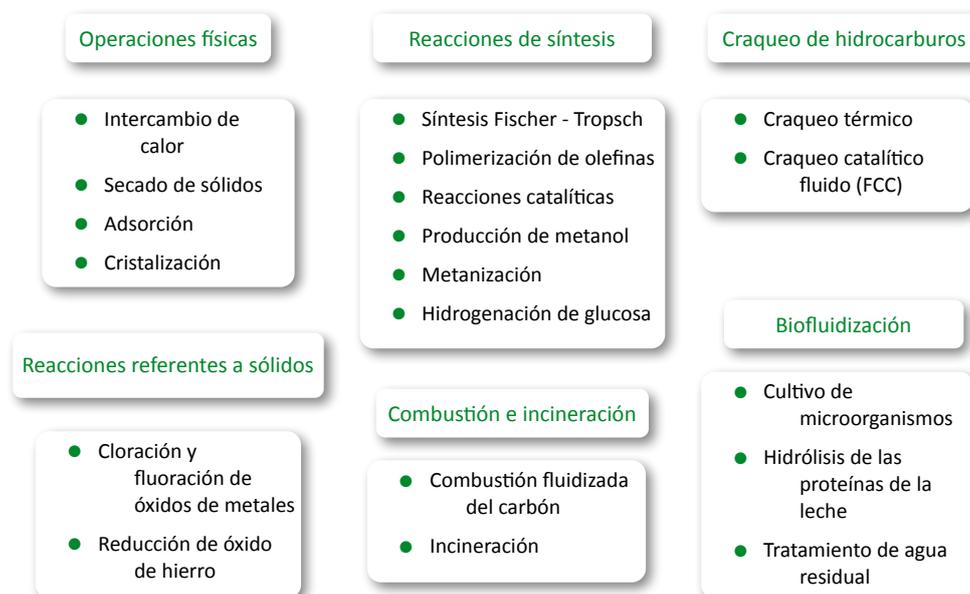


Figura 1.4: Diagrama de ejemplos de las aplicaciones industriales para la fluidización ascendente (Sánchez-Ramírez y col., 2007).

1.4 Fluidización descendente

La fluidización descendente se da cuando las partículas tienen una densidad menor que la del líquido en donde están inmersas (Fan y col., 1982). Debido a ello, las partículas flotan y permanecen inicialmente en la parte superior de la columna como se ilustra en la Figura 1.5a), por lo cual, el lecho es expandido por la corriente de fluido que es inducido por la parte superior de la columna como se muestra en la Figura 1.5b) (Alvarado-Lassman y col., 2010; Abdurahman y col., 2013). Como se mencionó, la fluidización se debe al flujo volumétrico inducido (\dot{Q}_{in}) por la parte superior de la columna, de tal forma que la fuerza de arrastre del mismo, empuja a las partículas hacia abajo, en contra de su tendencia natural a ascender, es decir, en este caso se busca vencer la fuerza de flotación y el peso de las partículas (Sowmeyan & Swaminathan, 2008).

Bajo el mismo principio que la fluidización ascendente, en este caso la expansión del lecho de partículas depende directamente del gasto volumétrico de entrada generado por los sistemas de bombeo (\dot{Q}_{in}), el cual expande el lecho de partículas (E_{σ}) (Sivasubramanian, 2010). De acuerdo con Yang (2003), en la fluidización descendente, el gasto de la bomba es mucho menor que para los

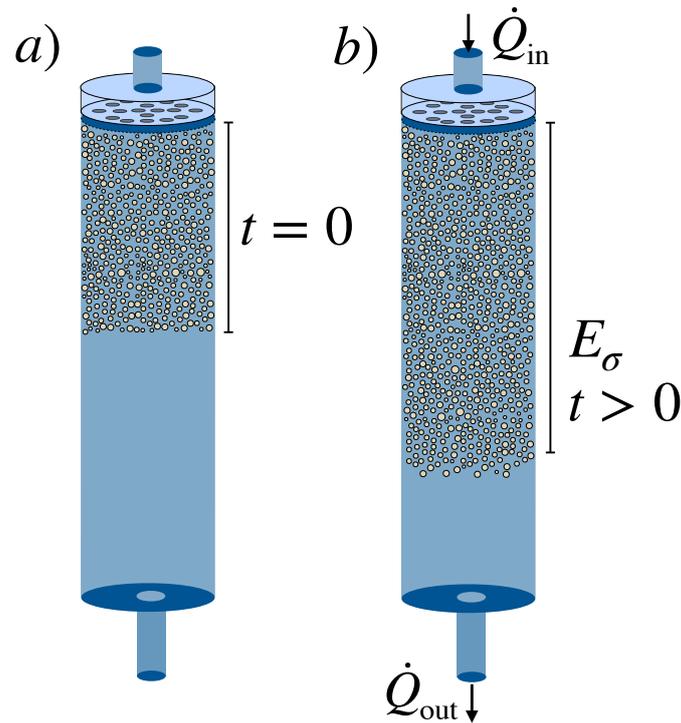


Figura 1.5: a) Esquema de fluidización descendente en estado inicial y b) transitorio.

sistemas de flujo ascendente debido a la densidad de las partículas, por lo anterior, la velocidad mínima de fluidización en este caso, no se puede determinar a través de la caída de presión en el lecho $\left(\frac{\Delta P_\beta}{E_\sigma}\right)$ (Renganathan & Krishnaiah, 2003). Cabe señalar que la diferencia de densidades entre el fluido y las partículas es, a lo más, de un orden de magnitud, lo cual permite que las partículas y el fluido se comporten como un pseudo-fluido, con la característica de que la resistencia al movimiento de las partículas es menor a la resistencia al movimiento del fluido y esto se ve reflejado en una pendiente constante en la caída de presión (Yang, 2003), como se ilustra en la Figura 1.6

Para la fluidización descendente, la velocidad mínima de fluidización no está dada por la caída de presión en el sistema; sin embargo, es posible establecer un rango de valores donde dicha velocidad puede ser establecida. Cuando se logra la expansión del lecho a una velocidad dada y constante, dicha expansión también permanece constante (Muroyama & Fan, 1985). Al considerarse un lecho fluidizado pero constante en su expansión, se puede modelar al sistema como un medio poroso fijo con fracción volumétrica constante (Roberto Leyva y *col.*, 1993). A partir de esta información, se puede hacer uso de la permeabilidad aparente mencionada anteriormente, para determinar el rango de valores donde la velocidad inducida puede ser la velocidad mínima de

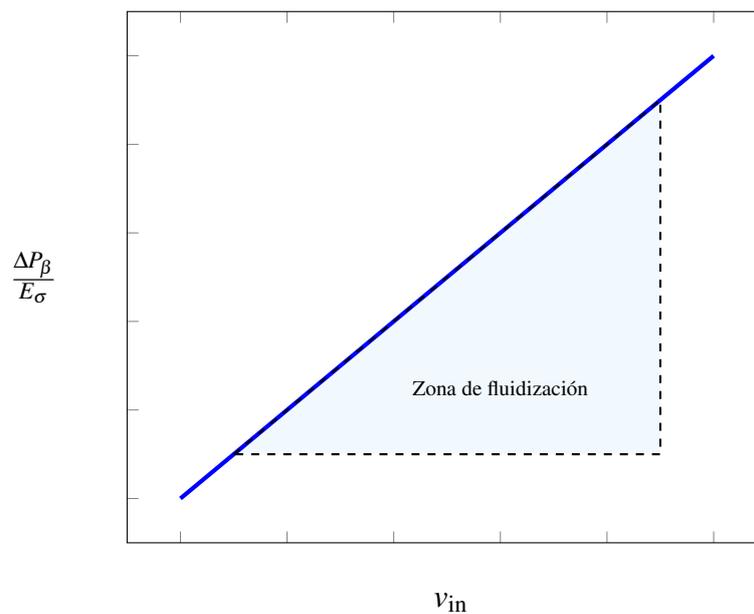


Figura 1.6: Esquema de la caída de presión respecto de la velocidad inducida en un sistema de flujo descendente.

fluidización. En la fluidización descendente, para el caso de la producción de gas, éste contribuye como otra fase y apoya a la expansión del lecho, disminuyendo la velocidad inducida de bombeo, con lo cual se logra una *pseudofluidización* (Arnaiz y col., 2005).

1.4.1 Aplicaciones, ventajas y desventajas

En general, la fluidización descendente se recomienda para el tratamiento anaerobio de efluentes industriales como se muestra en la Figura 1.7, por ejemplo, las vinazas con frecuencia han sido tratadas mediante procesos anaerobios en fluidización descendente (Houbron y col., 2016). Aunado a lo anterior, se considera que la fluidización descendente puede alcanzar una carga orgánica volumétrica superior a $30 \frac{\text{g DQO}}{\text{Ld}}$ (Alvarado-Lassman y col., 2008). Los experimentos sobre este proceso, han sido probados a nivel laboratorio para vinazas, aguas residuales urbanas (Sowmeyan & Swaminathan, 2008; Choudhury & Sahoo, 2012; Thaiyalnayaki & Sowmeyan, 2012) y aguas residuales de cervecería (Alvarado-Lassman y col., 2008). En sistemas industriales también ha sido probada la eficacia de estos sistemas para la remoción de contaminantes en aguas residuales de la industria refresquera, textil y de productos químicos (Yougsheng 2008). También se ha aplicado para el tratamiento de efluentes provenientes de la producción de etanol a partir de melaza de azúcar de caña (Houbron y col., 2016).

La fluidización descendente tiene ventajas sobre la fluidización ascendente, entre ellas, están:

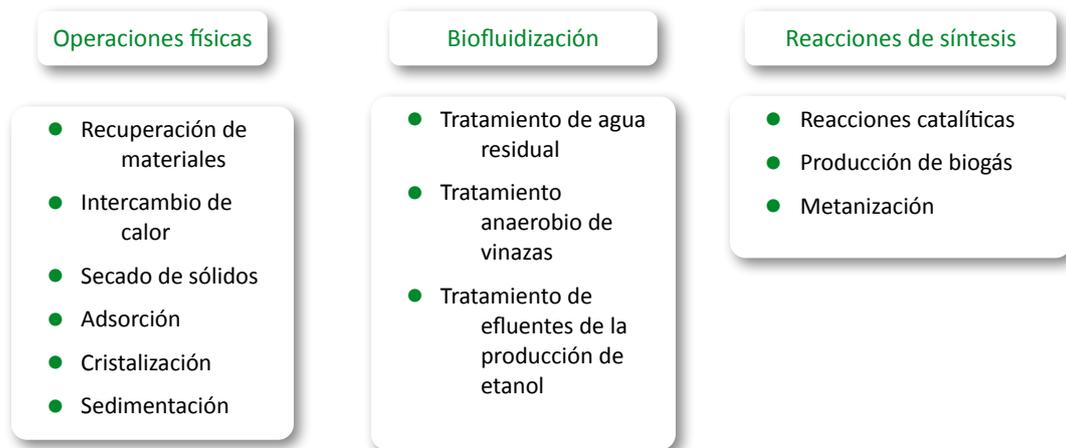


Figura 1.7: Diagrama de ejemplos de las aplicaciones industriales para la fluidización descendente (Epstein, 2003a,b).

- Menor consumo energético⁴.
- Debido a la baja velocidad de las bombas, se puede controlar el arrastre de partículas sólidas y establecer diseños de recuperación.
- Permite la recuperación de sólidos en el fondo del reactor.

La fluidización descendente ofrece ventajas en el tratamiento anaerobio de efluentes con elevado contenido de materia orgánica biodegradable al usar espacios reducidos y un tiempo de retención hidráulico más corto (Alvarado-Lassman y *col.*, 2008), a parte de ello, se pueden mencionar algunas ventajas como son:

- Se puede alimentar el sistema con requerimientos de DQO con una fracción lentamente biodegradable (recalcitrante).
- Durante el proceso se generan cantidades de lodos que pueden ser removidas.
- Se produce biogás que puede ser utilizado como combustible.

Se menciona la producción de biogás, ya que es importante señalar que este producto permite al proceso no sólo ahorrar energía, sino también generarla. Si se utiliza en el mismo sistema de producción como un suministro energético, se reducen significativamente los costos de operación comparados con el consumo de energía de los procesos aerobios (Fernández y *col.*, 2008).

Las principales desventajas de utilizar este sistema para procesos anaerobios de tratamiento de aguas residuales son (Papirio, 2012):

- Los sistemas con generación de biomasa más densa que el fluido que la soporta puede

⁴Solo se requiere el gasto energético de la bomba que mueve al fluido debido a la baja densidad de las partículas.

provocar tapones en el sistema de bombeo.

- Se debe utilizar para el tratamiento de residuales recalcitrantes que producen poca biomasa.

El enfoque de la investigación está centrado en estos sistemas de tratamiento de aguas residuales recalcitrantes de baja producción de biomasa. Aunado a ello, como se describe, estos sistemas tienen un bajo consumo energético y la capacidad de remoción de contaminantes altamente perjudiciales al ambiente. En la siguiente sección se describen los modelos matemáticos que se emplean para la implementación experimental de la fluidización ascendente y descendente, así como los enfoques empíricos y semiempíricos que permiten modelarlos.

1.5 Modelos matemáticos para la fluidización

Los lechos fluidizados se han descrito a través de las correlaciones físicas de las fases involucradas en el sistema y los números adimensionales de Reynolds y Arquímedes mencionados. Por ejemplo, Carman (1937); Ergun & Orning (1949); Ergun (1952); Anderson & Jackson (1967); Foscolo & Gibilaro (1987); Di Felice (1995); Pan *y col.* (2002); Epstein (2003a), han buscado interpretar los lechos fluidizados a través del manejo de la velocidad inducida del fluido y cantidad de soporte añadido, los cuales, permiten encontrar las condiciones de operación y parámetros tales como la velocidad mínima de fluidización, la fracción de espacio que ocupa cada fase (ϵ_i) y la velocidad de arrastre de las partículas (v_a).

Los modelos que correlacionan la expansión del lecho (E_σ) con la velocidad inducida del fluido pueden ser clasificados en tres grupos principales. El primer grupo está basado en una correlación que tienen dependencia entre la velocidad superficial del fluido v_0 y la fracción volumétrica (ϵ_i donde $i = \beta, \sigma, \gamma$ es el indicador de fase), para este caso el modelo de Richardson & Zaki (1954), es el que representa esta relación. El segundo grupo de clasificación, se encuentra en función de la velocidad de arrastre v_a para partículas múltiples (o de tamaños de partícula variables (d_p)), dados en función de los números adimensionales de Re y Ar. Para este grupo, los modelos fueron desarrollados por Ramamurthy & Subbaraju (1973); Riba & Couderc (1977). El tercer grupo se basa en la relación de la fracción volumétrica ϵ_i y la velocidad mínima de fluidización v_{mf} del sistema propuesta por Wen (1966).

1.5.1 Fluidización bifásica (líquido-sólido)

Para los sistemas fluidizados ascendentes o descendentes bifásicos (líquido-sólido) como se ilustra en las Figuras 1.1b) y 1.5b), se han establecido correlaciones entre los diferentes parámetros que describen su hidrodinámica. Dichos parámetros son el balance de las fuerzas que se relacionan al movimiento del fluido y el sólido. A partir de este punto en el trabajo, a la fase líquida se le denomina fase- β y a la fase sólida, fase- σ .

Los lechos fluidizados bifásicos se han descrito como lechos fijos, debido a que una vez que la expansión y la caída de presión son constantes, se considera que la cantidad de movimiento del fluido es mucho mayor que la cantidad de movimiento de las partículas (Daizo & Levenspiel, 1991). Por ello, se han aplicado los modelos matemáticos de lechos fijos a este tipo de sistemas como se describe a continuación.

Ecuación de Darcy

El modelo de Darcy (1856) se utiliza ampliamente para describir el flujo de fluidos a través de medios porosos en ingeniería (Bear, 2013). Aunado a lo anterior, como el lecho de partículas se comporta como un medio fijo, de acuerdo con Yang (2003), se hace uso de este modelo para determinar la caída de presión en el largo del lecho respecto de la velocidad inducida del fluido como se describe en la siguiente ecuación

$$-\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = \frac{\mu_{\beta}}{H_{\beta,C}} v_{in} \quad (1.1)$$

donde v_{in} es la velocidad inducida de fluido, ΔP_{β} es la caída de presión medida para la fase fluida β , E_{σ} o L es la longitud del lecho, μ_{β} es la viscosidad del fluido y $H_{\beta,C}$ comúnmente es conocida como la permeabilidad del medio poroso, pero en este caso se denomina como permeabilidad aparente debido a que su valor se modifica no solo con la geometría del medio sino también con el régimen de flujo. Basándose en argumentos de escala simples, Kozeny (1927) y Carman (1937) desarrollaron la siguiente fórmula basada en el flujo alrededor de una esfera para predecir la permeabilidad en medios porosos

$$K_{\beta,C} = \frac{\ell_{\beta}^2 \varepsilon_{\beta}^3}{180(1 - \varepsilon_{\beta})^2} \quad (1.2)$$

En este punto es conveniente señalar que, el tensor de permeabilidad aparente está relacionado con el tensor de Forchheimer y el tensor de permeabilidad intrínseca mediante la siguiente relación (Whitaker, 1996):

$$\mathbf{H}_{\beta,C} = \mathbf{K}_{\beta,C} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{F}_{\beta,C}) \quad (1.3)$$

Dicho coeficiente de permeabilidad aparente está ligado en este caso a la ecuación de Darcy (1.1), que se refiere al flujo de fluidos unidimensional a través del lecho que se encuentra expandido. El coeficiente de permeabilidad aparente es función de la viscosidad del fluido (que es función a su vez de la temperatura) y del tamaño y continuidad del espacio vacío que permiten las partículas sólidas.

Ecuación de Blake

Bajo la misma óptica y de acuerdo con Yang (2003), otro modelo utilizado para determinar la caída de presión en el lecho es la ecuación de Blake (1922). Este modelo se toma en consideración debido a que usa la permeabilidad aparente del medio y tiene parámetros ajustables que se adaptan al comportamiento de dicha caída. Aunado a ello, toma en cuenta los efectos de la gravedad y la fracción volumétrica de la fase sólida como se muestra en la siguiente expresión

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = \frac{a^2 S_e^2 \mu_{\beta} H_{\beta,C}}{e_c g_c \rho_{\beta} \epsilon_{\sigma}^3} \quad (1.4)$$

donde a^2 y e_c son parámetros numéricos ajustables, S_e es la superficie específica de sólidos, g_c es la constante de gravedad, ρ_{β} es la densidad de la fase fluida y ϵ_{σ} es la fracción volumétrica de la fase sólida. Si bien este modelo tiene los parámetros de ajuste a^2 y e_c y puede reproducir las curvas de caída de presión, la principal restricción es que dichos parámetros no tienen un significado físico claro.

Ecuación de Kozeny

El modelo de Kozeny (1927) es una de las correlaciones más utilizadas para predecir la caída de presión en lechos fluidizados debido a que es donde está basada la ecuación de Ergun (1952), la cual, se describe más adelante. La ecuación de Kozeny (1927) es un modelo semiempírico basado

en un modelo de poro cilíndrico y tiene la siguiente forma

$$-\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_{\beta})^2}{\varepsilon_{\beta}^3} \frac{\mu_{\beta}}{\ell_{\sigma}^2} v_{\beta} + 1.75 \left(\frac{1 - \varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\beta}^3} \right) \frac{\rho_{\beta}}{\ell_{\sigma}} v_{\beta}^2 \quad (1.5)$$

donde ℓ_{σ} (o d_p) es la longitud característica de las partículas sólidas que es del mismo orden de magnitud que ℓ_{β} . La ecuación (1.5) es una forma de la ecuación de Forchheimer (1901) para lechos homogéneos de partículas finas y flujo unidireccional (Nield & Bejan, 2006). Los dos términos en el lado derecho de la ecuación (1.5) pueden ser reconocidos como contribuciones laminar e inercial respectivamente. Para números de Reynolds $O(1 \times 10^1)$, el segundo término es despreciable y la ecuación (1.5) se reduce a la ley de Darcy, descrita en la ecuación (1.2). Para números de Reynolds $O(1 \times 10^4)$, cuando la inercia del fluido es importante, el segundo término se vuelve relevante.

Ecuación de Ergun

Ergun & Orning (1949) desarrollaron su modelo de aplicación a la fluidización a partir de la caracterización de las partículas. En este trabajo se buscó calcular el diámetro equivalente esférico (d_{eq}), el cual, relaciona los diferentes diámetros de las partículas utilizadas en el sistema con diámetros de esferas que aproximen al lecho de partículas como medios uniformes (Rose, 1945b). A partir de ello, se calcularon las pérdidas cinéticas que ocurren por la capilaridad del sistema, las cuales suceden con frecuencia y están relacionadas estadísticamente con el número de partículas por unidad de longitud (Rose, 1945a). Por estas razones, se debe aplicar un factor de corrección a cada término. Estos factores pueden ser designados como α_e y β_e y se determinan experimentalmente respecto de la velocidad inducida en el sistema (v_{in}), la cual permite describir la caída de presión en términos de esta última como sigue

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = \left[1 + 96 \frac{\alpha_e}{\beta_e} \frac{1 - \varepsilon_{\beta}}{Re_{v_{in}}} \right] \frac{\beta_e}{8} \frac{1 - \varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\beta}^3} S_e \rho_{\beta} v_{in}^2 \quad (1.6)$$

donde $Re_{v_{in}}$ es el número de Reynolds respecto de la velocidad inducida definido como sigue

$$Re_{v_{in}} = \frac{\rho_{\beta} v_{in} \ell_{\sigma}}{\mu_{\beta}} \quad (1.7)$$

el cual relaciona los esfuerzos inerciales vinculados al movimiento de la partícula respecto de la viscosidad fluido en el que sucede la interacción. La desventaja de la ecuación (1.6), es que

los factores de corrección α_e y β_e , deben ser determinados para cada experimento respecto de la velocidad inducida (Ergun & Orning, 1949). Debido a ello, buscando un modelo más general, bajo la mismas consideraciones y la premisa de un medio uniforme, Ergun (1952) desarrolló un modelo basado en la esfericidad (ϕ_σ).

Definición 1.5.1 — Esfericidad. Área superficial de una esfera que tiene igual volumen que la partícula respecto del área superficial de la partícula

$$\phi_\sigma = \left(\frac{\text{Superficie de la esfera}}{\text{Superficie de la partícula}} \right) \quad (1.8)$$

Con esta definición, $\phi_\sigma=1$ para esferas y $0<\phi_\sigma<1$ para cualquier otro tipo de geometría de partícula. Con lo anterior, puede modelarse un lecho de partículas no esféricas como un lecho de esferas de diámetro regular (d_p o ℓ_σ), siempre y cuando el área superficial total y la fracción volumétrica (ε_i) permanezcan constantes (Rose, 1945b). Esta representación, debe garantizar una resistencia a la fricción similar para cualquiera de los lechos, es decir, una geometría de partículas irregular se puede modelar como una geometría regular siempre que la siguiente relación se cumpla

$$d_{eq} = \phi_\sigma d_p = \phi_\sigma \ell_\sigma \quad (1.9)$$

basado en la relación anterior, la superficie específica (a') de partículas en cada lecho se describe como sigue

$$a' = \left(\frac{\text{Superficie de la partícula}}{\text{volumen de la partícula}} \right) = \left(\frac{\pi \ell_\sigma^2 / \phi_\sigma}{\pi \ell_\sigma^3 / 6} \right) = \frac{6}{\phi_\sigma \ell_\sigma} \quad (1.10)$$

y la superficie específica total (a), para todo el lecho se define como

$$a = \left(\frac{\text{Superficie de todas las partículas}}{\text{Volumen total de partículas en el lecho}} \right) = \frac{6(1 - \varepsilon_\sigma)}{\phi_\sigma \ell_\sigma} \quad (1.11)$$

en los casos mencionados, ϕ_σ se mide directamente o se calcula (Kunii y col., 2013), donde se relacionan los diámetros de la partícula irregular respecto de una esfera de geometría regular. El diámetro de partícula a su vez se relaciona con la presión que se ejerce en el sistema, dicha presión

se describe a través de la ecuación de Ergun (1952) como muestra a continuación

$$-\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_{\beta})^2}{\varepsilon_{\beta}^3} \frac{\mu_{\beta}}{(\phi_{\sigma} l_{\sigma})^2 e_c} v_{in} + 1.75 \left(\frac{1 - \varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\beta}^3} \right) \frac{\rho_{\beta}}{\phi_{\sigma} l_{\sigma} e_c} v_{in}^2 \quad (1.12)$$

Finalmente, la ecuación de Ergun (1952) se propone para sistemas fluidizados y se recomienda en la literatura para regímenes de flujo laminar e inercial (Leva, 1959; Zenz & Othmer, 1960; Daizo & Levenspiel, 1991; Yang, 2003; Kunii y *col.*, 2013; Brenner, 2013). Como se mencionó, el modelo de Ergun (1952) es puramente empírico y está basado en el modelo de Kozeny (1927), al considerar en su estructura las mismas propiedades descriptivas. La desventaja de este modelo continúa siendo la variable de ajuste numérico e_c , que no tiene un significado físico claro.

Ecuaciones de Wen

Wen (1966) propusieron una correlación para el cálculo de la expansión del lecho de partículas esféricas, basándose en la dinámica individual de las partículas y en las fuerzas que actúan en cada una de ellas, así mismo, desarrollaron una ecuación general, la cual representa la fuerza de arrastre útil en la predicción de la expansión del lecho basándose en la ecuación de Ergun (1952) siguiendo una metodología similar en comparación con la ecuación (1.23), como se muestra en la siguiente ecuación

$$Ar = K_{w1} Re_{\sigma}^2 + K_{w2} Re_{\sigma} \quad (1.13)$$

donde K_{w1} y K_{w2} son parámetros ligados a las características del lecho. Dichos parámetros permanecen casi constantes para diferentes tipos de partículas en un amplio rango de condiciones experimentales, así mismo, Re_{σ} depende de las características del lecho de partículas sólidas (Feng y *col.*, 2017). Aunado a ello, Wen (1966) demuestran que la velocidad del fluido no es necesariamente la velocidad mínima de fluidización y el número de Reynolds puede depender o no de la velocidad inducida. Las ventajas de la ecuación obtenida por Wen (1966) en comparación con la ecuación de Ergun (1952) es que el modelo es considerablemente más sencillo, con una mayor exactitud Wen (1966).

En un trabajo posterior, Wen & Fan (1974) propusieron correlaciones empíricas de expansión en lechos fluidizados bifásicos, nuevamente en función de números de Reynolds y Arquímedes, usando como parámetro la fracción volumétrica del lecho. Las gráficas del número de Reynolds

contra el número de Arquímedes, son aplicables desde el inicio de la fluidización hasta la velocidad de arrastre donde se da la fase diluida del lecho fluidizado. Más adelante y bajo los mismos parámetros Garside & Al-Dibouni (1977) describieron la expansión del lecho en términos de la fracción volumétrica y el número de Reynolds de partícula respecto de la velocidad terminal, el cual, está definido como sigue

$$\text{Re}_t = \frac{\rho_\beta v_t \ell_\sigma}{\mu_\beta} \quad (1.14)$$

donde v_t es la velocidad terminal de una sola partícula. La ecuación de Garside & Al-Dibouni (1977) corresponde a una curva logística con parámetros ajustables dada por la siguiente relación

$$\frac{\frac{v_{\beta\sigma}}{v_t} - A(\text{Re}_t)}{B(\text{Re}_t) - \frac{v_{\beta\sigma}}{v_t}} = C \text{Re}_t^m \quad (1.15)$$

donde $A(\text{Re}_t) = \varepsilon_\sigma^{4.14}$ y $B(\text{Re}_t) = \varepsilon_\sigma^{1.68}$ son constantes asintóticas de la relación de velocidades $\frac{v_{\beta\sigma}}{v_t}$ en función del número de Re_t ; $v_{\beta\sigma}$ es la velocidad relativa de las partículas respecto del fluido, C y m son constantes numéricas de ajuste para la correlación.

Ecuación de Givler y Altobelli

Givler & Altobelli (1994) utilizan como punto de partida la ecuación de Brinkman-Forchheimer, la cual, describe un equilibrio entre el gradiente de presión del fluido y las fuerzas que se oponen al movimiento. Estos autores señalan que, en el caso de que el gradiente de presión aplicado esté exactamente compensado por el término de arrastre lineal, se recupera la ley de Darcy (1.1). La ecuación propuesta por Givler & Altobelli (1994) tiene la suposición de que los efectos de la pared son despreciables respecto de lo que sucede en el centro de la columna, en relación con lo observado en su investigación. La ecuación que obtuvieron tiene la siguiente forma

$$\frac{\Delta P_\beta}{E_\sigma} = -\frac{\mu_\beta}{H_{\beta,C}} v_\beta - \rho_\beta \frac{c}{\sqrt{H_{\beta,C}}} v_\beta^2 \quad (1.16)$$

la cual, es una modificación a la ley de Darcy extendida por el término de Forchheimer unidimensional, donde c es una variable numérica ajustable denominada coeficiente de Forchheimer, que en ese caso está determinada experimentalmente por mediciones de flujo en el sistema experimental (Givler & Altobelli, 1994).

Ecuación de Jamialahmadi

Jamialahmadi y *col.* (2005) desarrollaron un modelo matemático basado en el promedio de la ecuación de energía en un volumen dado, para predecir la distribución de temperatura y el coeficiente de transferencia de calor en una sola fase. Las observaciones experimentales del flujo del fluido a través de medios porosos de este experimento, mostraron dos regímenes de flujo distintos: laminar e inercial. El desarrollo de la ecuación de este trabajo está basado en la caída de presión para el flujo de un fluido incompresible en el lecho, donde se considera que la contribución inercial es más relevante que la contribución laminar como se describe a continuación (Coulson y *col.*, 1977)

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = \frac{f_i}{2} \frac{6(1 - \varepsilon_{\beta}^2)}{\ell_{\sigma} \varepsilon_{\beta}^3} \rho_{\beta} v_{\beta}^2 \quad (1.17)$$

donde f_i es factor de fricción en función del número de Reynolds definido en la ecuación (1.7), dado por la siguiente relación

$$\frac{f_i}{2} = \frac{25}{\text{Re}_{v_{in}}} + 0.292 \quad (1.18)$$

En este trabajo se realizó la comparación con datos experimentales y con las predicciones de otros modelos (Ecuaciones (1.5), (1.4) y (1.12)). Jamialahmadi y *col.* (2005) mostraron que los resultados están en excelente acuerdo con los datos experimentales y con la predicción del modelo de Kozeny (Ecuación (1.4)).

En resumen, la medición de la caída de presión en lechos fluidizados está en función de la geometría del sistema, la fracción volumétrica, la permeabilidad del lecho y las propiedades físicas de las fases involucradas. Para establecer la caída de presión respecto de la velocidad inducida en el sistema de fluidización, se han desarrollado varias correlaciones para describir la hidrodinámica en sistemas bifásicos (Jamialahmadi y *col.*, 2005). En general, las correlaciones mostradas en la Tabla 1.1, predicen un aumento en la caída de presión al aumentar la velocidad inducida del fluido.

Tabla 1.1: Ecuaciones para la caída de presión en sistemas bifásicos (Jamialahmadi y col., 2005).

Publicación	Ecuación
Darcy (1856)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -\frac{\mu_{\beta}}{H_{\beta,c}} v_{\beta}$
Blake (1922)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -\frac{a^2 S_e^2 \mu_{\beta} H_{\beta,c}}{e_c g_c \rho_{\beta} \epsilon_{\beta}^3}$
Kozeny (1927)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -150 \frac{(1-\epsilon_{\beta})^2}{\epsilon_{\beta}^3} \frac{\mu_{\beta}}{\ell_{\sigma}^2} v_{\beta} - 1.75 \left(\frac{1-\epsilon_{\beta}}{\epsilon_{\beta}^3} \right) \frac{\rho_{\beta}}{\ell_{\sigma}} v_{\beta}^2$
Ergun (1952)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -150 \frac{(1-\epsilon_{\beta})^2}{\epsilon_{\beta}^3} \frac{\mu_{\beta}}{(\phi_{\sigma} \ell_{\sigma})^2 e_c} v_{\beta} - 1.75 \left(\frac{1-\epsilon_{\beta}}{\epsilon_{\beta}^3} \right) \frac{\rho_{\beta}}{\phi_{\sigma} \ell_{\sigma} e_c} v_{\beta}^2$
Givler & Altobelli (1994)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -\frac{\mu_{\beta}}{H_{\beta,c}} v_{\beta} - \rho_{\beta} \frac{c}{\sqrt{H_{\beta,c}}} v_{\beta}^2$
Jamialahmadi y col. (2005)	$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -\frac{f_t}{2} \frac{6(1-\epsilon_{\beta}^2)}{\ell_{\sigma} \epsilon_{\beta}^3} \rho_{\beta} v_{\beta}^2$

Velocidad mínima de fluidización

Para el cálculo de la velocidad mínima de fluidización, regularmente se utiliza la ecuación de Ergun (1952) para regímenes de flujo laminar e inercial. Para ello, se necesita la ecuación de caída de presión a lo largo del lecho, la cual está relacionada con el balance de fuerzas en una partícula. Bajo el principio de expansión constante, Ramamurthy & Subbaraju (1973) establecieron el balance de fuerzas que actúan sobre una partícula en movimiento unidimensional en la dirección vertical. Estos autores, suponen estado estacionario o como se mencionó, que la expansión del lecho es constante, lo cual se define a continuación

Definición 1.5.2 — Balance de fuerzas en una partícula. Fuerza de aceleración = fuerza de gravedad - fuerza de arrastre - fuerza de reacción de masa aparente.

Con la definición anterior y utilizando las suposiciones de los autores que son:

- las partículas están dispuestas en un nodo imaginario de una red cúbica simple,
- la velocidad inducida del fluido en la sección transversal se puede promediar respecto al tiempo (Ruckenstein, 1964),
- la velocidad de la partícula v_{σ} se puede despreciar respecto de la velocidad inducida del fluido multiplicada por un factor de corrección de la velocidad ϕ_v

Ramamurthy & Subbaraju (1973) determinan la velocidad mínima de fluidización respecto del factor de corrección de la velocidad (ϕ_v), el cual, está ligado al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\phi_v^2 = \frac{4}{3} \frac{\text{Ar}}{C_D \text{Re}_{v_{in}}^2}; \quad \text{Ar} = \frac{\ell_\sigma^3 \rho_\beta (\rho_\sigma - \rho_\beta) g_c}{\mu_\beta^2}; \quad C_D = \frac{a}{\left[\ell_\sigma v_{in} \phi_v \frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \right]^b} \quad (1.19)$$

donde ρ_σ es la densidad de las partículas sólidas, ρ_β y μ_β son la densidad y la viscosidad del fluido, respectivamente, g_c es la constante de gravedad y los valores de a y b representan valores de ajuste numérico y se obtienen a partir de correlaciones descritas a detalle en el trabajo de Ramamurthy & Subbaraju (1973). Ar es el número de Arquímedes (o número de Galilei (Ga)), el cual es proporcional al cociente entre las fuerzas gravitatorias y las fuerzas viscosas, C_D es el coeficiente de arrastre de las partículas respecto de la velocidad inducida del fluido y $\text{Re}_{v_{in}}$ está definido en la ecuación (1.7). En ese trabajo, se demostró que las características de la expansión en espacios anulares no son diferentes de las que se presentan en tubos con espacios continuos, siempre y cuando se establezca una relación de diámetro de tubo o reactor (L_R) con el diámetro de partícula de $\frac{L_R}{d_p} > 8$ (Ramamurthy & Subbaraju, 1973).

Otra manera de obtener la velocidad mínima de fluidización, es utilizar una ecuación de caída de presión a lo largo del lecho descrita en términos de las densidades de las fases involucradas, la cual, es una representación de la ecuación de Richardson & Zaki (1954) modificada por un parámetro ajustable y tiene la siguiente forma

$$-\frac{\Delta P_\beta}{E_\sigma} = \frac{g_c}{e_c} (1 - \varepsilon_\beta) (\rho_\sigma - \rho_\beta) \quad (1.20)$$

de acuerdo con Ergun (1952), la velocidad mínima de fluidización teórica, se basa en la combinación de las ecuaciones (1.12) y (1.20) de donde se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1.75}{\varepsilon_\beta^3 \phi_\sigma} \left(\frac{\rho_\beta v_{mf} \ell_\sigma}{\mu_\beta} \right)^2 + \frac{150(1 - \varepsilon_\beta)}{\varepsilon_\beta^3 \phi_\sigma^2} \left(\frac{\ell_\sigma v_{mf} \rho_\beta}{\mu_\beta} \right) = \frac{\ell_\sigma^3 \rho_\beta (\rho_\sigma - \rho_\beta) g}{\mu_\beta^2} \quad (1.21)$$

Cabe señalar que la velocidad mínima de fluidización toma el lugar de la velocidad inducida (v_{in}) debido a que los parámetros de la ecuación están definidos en este régimen. Aunado a lo anterior, se puede definir al número de Reynolds de partícula en términos de la velocidad mínima

de fluidización como sigue

$$\text{Re}_{\text{mf}} = \frac{\rho_{\beta} v_{\text{mf}} \ell_{\sigma}}{\mu_{\beta}} \quad (1.22)$$

Con las definiciones de las ecuaciones (1.19) y (1.22), la ecuación (1.21) toma la siguiente forma

$$\text{Ar} = \frac{1.75}{\varepsilon_{\beta}^3 \phi_{\sigma}} \text{Re}_{\text{mf}}^2 + \frac{150(1 - \varepsilon_{\beta})}{\varepsilon_{\beta}^3 \phi_{\sigma}^2} \text{Re}_{\text{mf}} \quad (1.23)$$

Para el caso particular de flujo laminar con partículas menores del orden de $1 \times 10^{-3} \text{m}$, la ecuación (1.21) se modifica y se despeja la velocidad mínima de fluidización v_{mf} quedando como sigue

$$v_{\text{mf}} = \frac{\ell_{\sigma}^2 (\rho_{\sigma} - \rho_{\beta}) g}{150 \mu_{\beta}} \frac{\varepsilon_{\beta}^3 \phi_{\sigma}^2}{1 - \varepsilon_{\beta}} \quad (1.24)$$

Cabe recordar que la velocidad mínima de fluidización obtenida a través de los modelos anteriores, funciona para sistemas de fluidización ascendentes (Nan y *col.*, 2001). Lo anterior, debido a la diferencia en el cálculo de la caída de presión para los diferentes sistemas de fluidización (ver Figuras 1.2 y 1.6).

Algunos modelos que se han utilizado para sistemas de fluidización descendente, corresponden a Fan y *col.* (1982); Legile (1992); Buffière & Moletta (1999); Renganathan & Krishnaiah (2005, 2007). Dichos autores en general, realizaron un estudio acerca del comportamiento hidrodinámico de los lechos fluidizados descendentes en dos tipos de sistemas: líquido-sólido, y gas-líquido-sólido. Trabajaron con sólidos de esfericidad variable y materiales como: polietileno de alta y baja densidad, polipropileno, expandospher, entre otros materiales plásticos de diferentes densidades. Se caracterizaron en los diferentes trabajos, las propiedades físicas de las fases involucradas, así como las fracciones volumétricas, antes y durante la fluidización por una medida directa de la altura del lecho. Con ello, se desarrollaron correlaciones para la expansión del lecho líquido-sólido y líquido-sólido-gas. Una de las correlaciones para la caída de presión en el lecho está dada por la siguiente ecuación (Buffière & Moletta, 1999)

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = -g_c (\varepsilon_{\beta} \rho_{\beta} + \varepsilon_{\sigma} \rho_{\sigma} + \varepsilon_{\gamma} \rho_{\gamma}) \quad (1.25)$$

donde ρ_{γ} es la densidad de la fase gaseosa y ε_{γ} es la fracción volumétrica de la misma. La caída

de presión es de forma lineal y depende directamente de la fracción volumétrica de las fases involucradas así como sus densidades. Otras correlaciones están expresadas en términos de números adimensionales como la porosidad del lecho, número de Arquímedes y la relación del diámetro de la partícula con respecto al diámetro de la columna, como se muestra en la siguiente ecuación (Renganathan & Krishnaiah, 2005),

$$\text{Re}_{\text{mf}} = \text{Re}_{\text{mf}0} - a_1 \text{Ar}^{a_2} \text{Re}_{v_{\gamma,\text{in}}}^{a_3} \quad (1.26)$$

donde $\text{Re}_{v_{\gamma,\text{in}}} = \frac{\rho_{\gamma} v_{\gamma,\text{in}} \ell_{\sigma}}{\mu_{\gamma}}$ y $v_{\gamma,\text{in}}$ es la velocidad de entrada de la fase gaseosa. Estos modelos sólo funcionan para ciertos intervalos de aplicación, y en general, se llegó a la conclusión de que los datos experimentales que obtuvieron para la expansión del lecho fluidizado descendente en sistemas sólido-líquido, deben de ser determinados para cada experimento. Del mismo modo, se deben determinar los valores de las variables numéricas de ajuste a_1 , a_2 y a_3 , que corresponden a cada sistema experimental.

Para modelos mixtos, Nan y *col.* (2001), desarrollaron un estudio experimental de la hidrodinámica de lechos bifásicos sólido-líquido, para sistemas de flujo descendente y ascendente. Con este estudio, llegaron a la conclusión de que para ambos sistemas de fluidización, el gradiente de presión adimensional se incrementa inicialmente con la velocidad inducida del fluido. Pero decrece gradualmente cuando la velocidad inducida del fluido sobrepasa la velocidad mínima de fluidización debido a la expansión del lecho, a excepción del lecho fluidizado descendente como se muestra en las Figuras 1.1b) y 1.5b). Nan y *col.* (2001), decidieron aplicar las correlaciones experimentales y la ecuación de Richardson & Zaki (1954),

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{E_{\sigma}} = (\rho_{\sigma} - \rho_{\beta})(1 - \varepsilon_{\beta})g_c \quad (1.27)$$

para demostrar que tanto los sistemas en flujo descendente como los de flujo ascendente pueden ser descritos con dicha ecuación (Kramer y *col.*, 2019). Con ello, se concluye que las ecuaciones presentadas en la Tabla 1.1, predicen un aumento en la caída de presión para ambos sistemas, pero lo que restringe su uso o aplicación es la velocidad inducida de fluido debido a la baja densidad de las partículas en la fluidización descendente, lo cual, depende directamente de dicha velocidad.

1.5.2 Fluidización bifásica (líquido-gas)

Los modelos bifásicos líquido-gas, se han estudiado para la obtención de la solución en la microescala para la descripción del movimiento de las fases involucradas (Ladyzhenskaya, 1969; Heywood, 1980; Lions, 1996; Allievi & Bermejo, 2000; Temam, 2001; Dijkhuizen y col., 2010), lo cual es numéricamente costoso. Aunque en general se desea este tipo de análisis local e instantáneo, esto último supera el alcance de este trabajo, donde el enfoque se centra en la determinación de la velocidad terminal de una burbuja. Lo anterior, se basa en la necesidad de tener un modelo promedio que pueda representar de manera numérica la cantidad de movimiento entre dos fases fluidas.

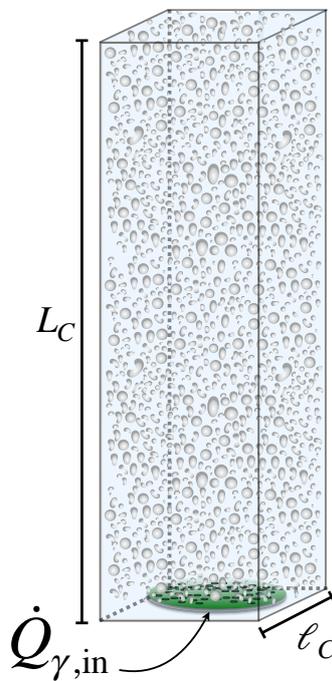


Figura 1.8: Esquema de una columna de burbujas de sección transversal cuadrada.

En la Figura 1.8, se representa el esquema de una columna de burbujas de sección transversal cuadrada, donde $\dot{Q}_{\gamma,in}$ es el gasto volumétrico de entrada de la fase gaseosa (fase- γ), l_C y L_C son el ancho y el largo de la columna, respectivamente. En el caso operacional de esta columna, $\dot{Q}_{\gamma,in}$ es un parámetro que determina v_γ ; sin embargo, el objetivo es determinar la velocidad terminal cuando la fase- γ es introducida al sistema, es decir, cuando $\dot{Q}_{\gamma,in} \rightarrow 0$. En este caso, sólo las fuerzas que interactúan entre las fases, determinan la velocidad terminal de la fase- γ . Aunado a lo anterior y bajo esta óptica, existen correlaciones para determinar la velocidad terminal de la fase gaseosa, las cuales se revisan a lo largo de esta sección.

Una de las primeras investigaciones sobre el desarrollo de la velocidad terminal de una burbuja fue realizada por Stokes (1880). En ese trabajo se mostró que cuando un cuerpo se mueve en caída libre en el vacío, él mismo se encuentra sometido sólo a la acción de su peso. Su aceleración es constante igual a la fuerza de gravedad y su velocidad aumenta proporcionalmente con el tiempo. Al realizar el balance de fuerzas mencionado, se obtiene la siguiente relación

$$\langle v_{\gamma} \rangle = k_s \frac{g_c (\rho_{\beta} - \rho_{\gamma}) \ell_{\gamma}^2}{\mu_{\beta}} \quad (1.28)$$

donde ℓ_{γ} es el diámetro equivalente de una burbuja (o diámetro de una esfera con el mismo volumen que la burbuja) y k_s es una constante de ajuste numérico. Dicha constante es equivalente a $\frac{1}{18}$ cuando se trata de una esfera rígida y con ello se recupera la ley de Stokes. Cuando esta constante es $k_s = \frac{1}{3}$, se recupera la relación obtenida por Hadamard (1911) y Rybczynski (1911). Cabe señalar que esta ecuación funciona bajo el supuesto de que las burbujas no tienen circulación interna y se comportan como una fase rígida.

En un trabajo posterior, Davies & Taylor (1950) relacionaron la velocidad de ascenso de la burbuja y el radio de curvatura para el caso de burbujas esféricas ($6.9 \text{ mm} < \ell_{\gamma} < 36 \text{ mm}$). Supusieron que la presión sobre el frente de la burbuja (la cual modifica su forma), es la misma que en una burbuja completamente esférica y que la velocidad de ascenso era independiente de las propiedades del líquido. Bajo estas suposiciones, los efectos de la tensión superficial y la viscosidad son despreciables y la velocidad de ascenso de la burbuja viene dada por la siguiente relación (Davies & Taylor, 1950)

$$\langle v_{\gamma} \rangle = 0.707 \sqrt{\ell_{\gamma} g_c} \quad (1.29)$$

Aunado a lo anterior, estos autores mostraron que para burbujas de tamaños $\ell_{\gamma} \geq \mathbf{O} (4 \times 10^{-2}) \text{ m}$, los efectos de la inercia en el líquido, la tensión superficial, la viscosidad y la pureza son importantes. Lo anterior se observa en los sistemas experimentales, debido a que la presión sobre el frente de la burbuja, influye directamente en su movimiento durante el ascenso, modificando su trayectoria que puede ser descrita por líneas rectas, oscilantes o en espiral (Talaia, 2007).

Haberman & Morton (1953) se basaron en la información obtenida de los trabajos experimentales y teóricos de Stokes (1880); Hadamard (1911); Rybczynski (1911); Davies & Taylor

(1950). Durante el desarrollo de su trabajo experimental para diferentes líquidos, mostraron que la velocidad terminal de burbujas esféricas puede determinarse a partir del valor constante del coeficiente de arrastre o directamente de la curva de velocidad. Con ello, observaron que se obtiene una tasa de aumento constante en todos los líquidos utilizados y por lo tanto, la velocidad terminal de las burbujas es una función del tamaño y no de las propiedades del líquido dando lugar a la siguiente expresión (Haberman & Morton, 1953)

$$\langle v_{\gamma} \rangle = 1.02 \sqrt{\ell_{\gamma} g_c} \quad (1.30)$$

En trabajos posteriores Harmathy (1960); Angelino (1966); Lehrer (1976) expresaron la velocidad terminal de burbuja basados en las mismas premisas de balance fuerzas alrededor de un objeto sólido y obtuvieron correlaciones y factores de corrección asociados al movimiento para diferentes geometrías de burbuja. El efecto de la tensión superficial (σ) asociado a la interacción de la fase gaseosa con la fase líquida en estos sistemas, se estudió de manera más precisa en el trabajo de Nickens & Yannitell (1987), quienes corroboraron la relación de tamaños de burbuja establecida por Davies & Taylor (1950), donde se muestra que la tensión superficial influye para tamaños de burbuja $\ell_{\gamma} \geq \mathbf{O}(4 \times 10^{-2})$ m.

Adrian (1991) desarrolló un trabajo experimental para determinar la forma de las burbujas a través de fotografías y análisis digital de imágenes tanto para partículas sólidas como para burbujas. Blanco & Magnaudet (1995) determinaron la forma de las burbujas bajo la influencia de números de $Re_{\gamma} \geq 10^3$, donde mostraron que para burbujas de tamaño $\ell_{\gamma} < 1 \times 10^{-3}$ m, la forma de la burbuja no es notoriamente afectada donde Re_{γ} esta definido como sigue

$$Re_{\gamma} = \frac{\rho_{\beta} \langle v_{\gamma} \rangle \ell_{\gamma}}{\mu_{\gamma}} \quad (1.31)$$

Delnoij y col. (1997) desarrollaron una simulación dinámica bifásica líquido-gas utilizando un modelo Euleriano-Lagrangiano dependiente del tiempo para burbujas de tamaño $\ell_{\gamma} < 1.72 \times 10^{-3}$ m. Estos autores determinaron este tamaño, para poder utilizar un modelo de colisión para describir el rebote y la separación de dos burbujas. Aunado a lo anterior, también sirve para suponer la forma esférica de las burbujas en todo momento como se había descrito en la literatura (Nickens & Yannitell, 1987; Blanco & Magnaudet, 1995). La ecuación que gobierna a la velocidad terminal

para una burbuja que se eleva con una velocidad constante a través de un líquido inactivo, es igual a la suma de la fuerza de gravedad y la fuerza de arrastre (Haberman & Morton, 1953). De este equilibrio de fuerzas se puede determinar la velocidad terminal de la burbuja como sigue

$$\langle v_{\gamma} \rangle = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}(\rho_{\beta} - \rho_{\gamma})\ell_{\gamma}g_c}{\rho_{\beta}C_D}} \quad (1.32)$$

donde C_D es el coeficiente de arrastre y está determinado de manera adimensional para diferentes regímenes de flujo como se muestra a continuación (Clift y col., 2005)

$$C_D = \begin{cases} \text{Re}_{\gamma} < 1000 \rightarrow \frac{24}{\text{Re}_{\gamma}} (1 + 0.15\text{Re}_{\gamma}^{0.687}) \\ \text{Re}_{\gamma} \leq 1000 \rightarrow 0.44 \end{cases} \quad (1.33)$$

Nguyen (1998) basó su estudio en la predicción de la velocidad terminal de una burbuja en aguas contaminadas, comparando los resultados con los obtenidos en el estudio de Haberman & Morton (1953). Nguyen (1998) obtuvo una correlación de balance de fuerzas muy similar a los trabajos desarrollados por Davies & Taylor (1950). Más adelante y bajo la misma óptica, Raymond & Rosant (2000) desarrollaron un estudio numérico y experimental de la velocidad terminal de burbuja y su forma en líquidos viscosos.

Rodrigue (2001) desarrolló una correlación generalizada para la determinación de la velocidad terminal de una burbuja, basado en un análisis dimensional con un extenso banco de datos experimentales. La ecuación que determina la velocidad terminal de la burbuja está dada por la siguiente relación

$$\langle v_{\gamma} \rangle = \frac{V_n}{\sqrt[3]{\frac{\ell_{\gamma}^2 \rho_{\beta}^2}{\sigma \mu_{\beta}}}} \quad (1.34)$$

donde dicha velocidad terminal de burbuja, está determinada a través del número de velocidad (V_n) y un número de flujo (F_n) definidos como sigue

$$V_n = \frac{\frac{1}{12}F_n}{\sqrt[4]{1 + 0.018F_n^3}} \quad F_n = g_c \sqrt[3]{\frac{\ell_{\gamma}^8 \rho_{\beta}^5}{\sigma \mu_{\beta}^4}} \quad (1.35)$$

Talaia (2007) desarrolló un sistema experimental para la determinación de la velocidad terminal de una burbuja. En este trabajo se utilizó una columna y un difusor de burbuja, el cual, liberó por

intervalos un burbuja aislada para estudiar su velocidad de ascenso en diferentes fluidos como el agua y el glicerol. Talaia (2007) mostró que la velocidad terminal depende en gran medida al efecto de la viscosidad dinámica. Cuando la inercia es dominante, es posible desarrollar una expresión global para predecir la velocidad de una sola burbuja cuando se conocen su diámetro y propiedades físicas de las fases involucradas. Las relaciones para determinar la velocidad terminal de la burbuja están determinadas por Re_γ y se describen a continuación

$$\langle v_\gamma \rangle = (1.5 \pm 0.045) \sqrt{\frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{\rho_\beta}} \quad 255 \leq Re \leq 695 \quad (1.36)$$

$$\langle v_\gamma \rangle = \sqrt{0.289 \frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{\rho_\beta} + 877.193 \frac{\mu_\beta \sqrt{g_c}}{\rho_\beta \sqrt{\ell_\beta}}} \quad 695 < Re \leq 3425 \quad (1.37)$$

$$\langle v_\gamma \rangle = (0.694 \pm 0.021) \sqrt{\frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{\rho_\beta}} \quad 3425 < Re \leq 7490 \quad (1.38)$$

Talaia (2007) propone una relación general, que es la combinación algebraica de las ecuaciones anteriores para predecir la velocidad terminal de una burbuja como sigue

$$\langle v_\gamma \rangle = 0.415 \frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{\rho_\beta} - \sqrt{0.529 \frac{\mu_\beta \sqrt{g_c}}{\rho_\beta \sqrt{\ell_\beta}} - 2.386 \times 10^{-2} \frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{\rho_\beta}} \quad (1.39)$$

De acuerdo con Tomiyama (1998), La forma y la velocidad terminal de las burbujas aisladas varían a medida que aumenta el diámetro equivalente, de acuerdo con tres regímenes:

- viscosidad dominante,
- región intermedia, donde deben tomarse en cuenta efectos viscosos, inerciales y tensión superficial e
- inercia dominante.

Además, la velocidad terminal es particularmente sensible a la presencia de contaminantes e incluso a la deformación inicial inducida por inyección (Cho & Laskowski, 2002; Celata y col., 2007).

Baz-Rodríguez y col. (2012) propusieron una ecuación para predecir la velocidad terminal del ascenso de burbujas aisladas en líquidos Newtonianos. Estos autores desarrollaron una formulación que combina el balance de fuerzas obtenido de la teoría de capa límite para burbujas esféricas con una ecuación analítica proveniente de un balance de energía mecánica. Se asume que la ponderación de las fuerzas dominantes es suficiente para predecir adecuadamente la velocidad terminal en los

regímenes de movimiento intermedio e inercial como se describe a continuación

$$\langle v_\gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{T1}^2} + \frac{1}{v_{T2}^2}}} \quad (1.40)$$

donde

$$V_{T1} = V_{Tpot} \sqrt{1 + 0.73667 \frac{\sqrt{g_c \ell_\gamma}}{V_{Tpot}}} \quad V_{T2} = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho_\beta \ell_\gamma} + \frac{g_c \ell_\gamma (\rho_\beta - \rho_\gamma)}{2\rho_\beta}} \quad (1.41)$$

y la definición de V_{Tpot} está dada por la ley de Stokes en la ecuación (1.28) con un valor de $k_s = \frac{1}{36}$. De acuerdo con Baz-Rodríguez y col. (2012) las predicciones de la ecuación propuesta presentan buen ajuste con datos experimentales para burbujas ascendiendo en líquidos puros.

En trabajos más recientes, Park y col. (2017) desarrollaron dos modelos para describir la velocidad terminal de una burbuja en función de su diámetro. Dichos modelos no requieren conocimiento previo de la forma de la burbuja y de acuerdo con Park y col. (2017), se pueden emplear para burbujas con y sin circulación interna. La ecuación desarrollada para describir la velocidad terminal sin circulación interna se describe a continuación

$$\langle v_\gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma sp}^2} + \frac{1}{v_{\gamma sph}^2}}} \quad (1.42)$$

y con circulación interna se describe como sigue

$$\langle v_\gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma vis}^2} + \frac{1}{v_{\gamma in}^2} + \frac{1}{v_{\gamma sph}^2}}} \quad (1.43)$$

donde $v_{\gamma vis}$ está definida en la ecuación (1.28) con un valor de $k_s = \frac{1}{12}$ cuando los esfuerzos inerciales son despreciables respecto de los esfuerzos viscosos. Aunado a ello, cuando se considera a la fase gaseosa como un cuerpo rígido se recupera la ley de Stokes en la ecuación (1.28) con $k_s = \frac{1}{18}$. $v_{\gamma in}$ está definida por la siguiente ecuación para burbujas esféricas con esfuerzos inerciales no despreciable para números de $Re < 100$ (Wallis, 1974)

$$v_{\gamma in} = 0.14425 g_c^{5/6} \left(\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \right)^{2/3} \ell_\gamma^{3/2} \quad (1.44)$$

Aunado a ello, la velocidad terminal que desarrollan las burbujas de formas esferoidales se establece

a través de la siguiente relación (Clift y col., 2005)

$$v_{\gamma\text{sph}} = \sqrt{\frac{2.14\sigma}{\rho_{\beta}\ell_{\gamma}} + 0.505g_c\ell_{\gamma}} \quad (1.45)$$

y la velocidad terminal utilizada para burbujas esféricas está definida en términos de la ley de Stokes y la ecuación (1.44) como sigue

$$v_{\gamma\text{sp}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma\text{vis}}^2} + \frac{1}{v_{\gamma\text{in}}^2}}} \quad (1.46)$$

En resumen, se establecen diferentes correlaciones para determinar la velocidad terminal de una burbuja en un medio líquido. Las correlaciones se muestran en la Tabla 1.2 y funcionan para burbujas que se comportan como un medio rígido o con circulación interna y deformación.

Tabla 1.2: Correlaciones para la predicción de la velocidad terminal de una burbuja.

Publicación	Ecuación
Stokes (1880)	$\langle v_{\gamma} \rangle = k_s \frac{g_c(\rho_{\beta}-\rho_{\gamma})\ell_{\gamma}^2}{\mu_{\beta}}$
Davies & Taylor (1950)	$\langle v_{\gamma} \rangle = 0.707\sqrt{\ell_{\gamma}g_c}$
Haberman & Morton (1953)	$\langle v_{\gamma} \rangle = 1.02\sqrt{\ell_{\gamma}g_c}$
Rodrigue (2001)	$\langle v_{\gamma} \rangle = \frac{V_n}{\sqrt[3]{\frac{\ell_{\gamma}^2\rho_{\beta}^2}{\sigma\mu_{\beta}}}}$
Talaia (2007)	$\langle v_{\gamma} \rangle = 0.415 \frac{g_c\ell_{\gamma}(\rho_{\beta}-\rho_{\gamma})}{\rho_{\beta}} - \sqrt{0.529 \frac{\mu_{\beta}\sqrt{g_c}}{\rho_{\beta}\sqrt{\ell_{\beta}}} - 2.386 \times 10^{-2} \frac{g_c\ell_{\gamma}(\rho_{\beta}-\rho_{\gamma})}{\rho_{\beta}}}$
Baz-Rodríguez y col. (2012)	$\langle v_{\gamma} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma 1}^2} + \frac{1}{v_{\gamma 2}^2}}}$
Park y col. (2017)	$\langle v_{\gamma} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma\text{sp}}^2} + \frac{1}{v_{\gamma\text{sph}}^2}}}$
Park y col. (2017)	$\langle v_{\gamma} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_{\gamma\text{vis}}^2} + \frac{1}{v_{\gamma\text{in}}^2} + \frac{1}{v_{\gamma\text{sph}}^2}}}$

1.5.3 Fluidización trifásica (líquido-sólido-gas)

En la revisión bibliográfica de los diferentes modelos y aplicaciones para la determinación de la caída de presión para el sistema bifásico líquido-sólido (ver Tabla 1.1) y para el sistema bifásico líquido-gas para la predicción de la velocidad terminal de la fase gaseosa (ver Tabla 1.2), se han mostrado correlaciones que también son aplicables para los sistemas trifásicos (Herskowitz & Merchuk, 1986; Legile, 1992; Livingston & Zhang, 1993; Han y col., 2003; Sivasubramanian,

2010).

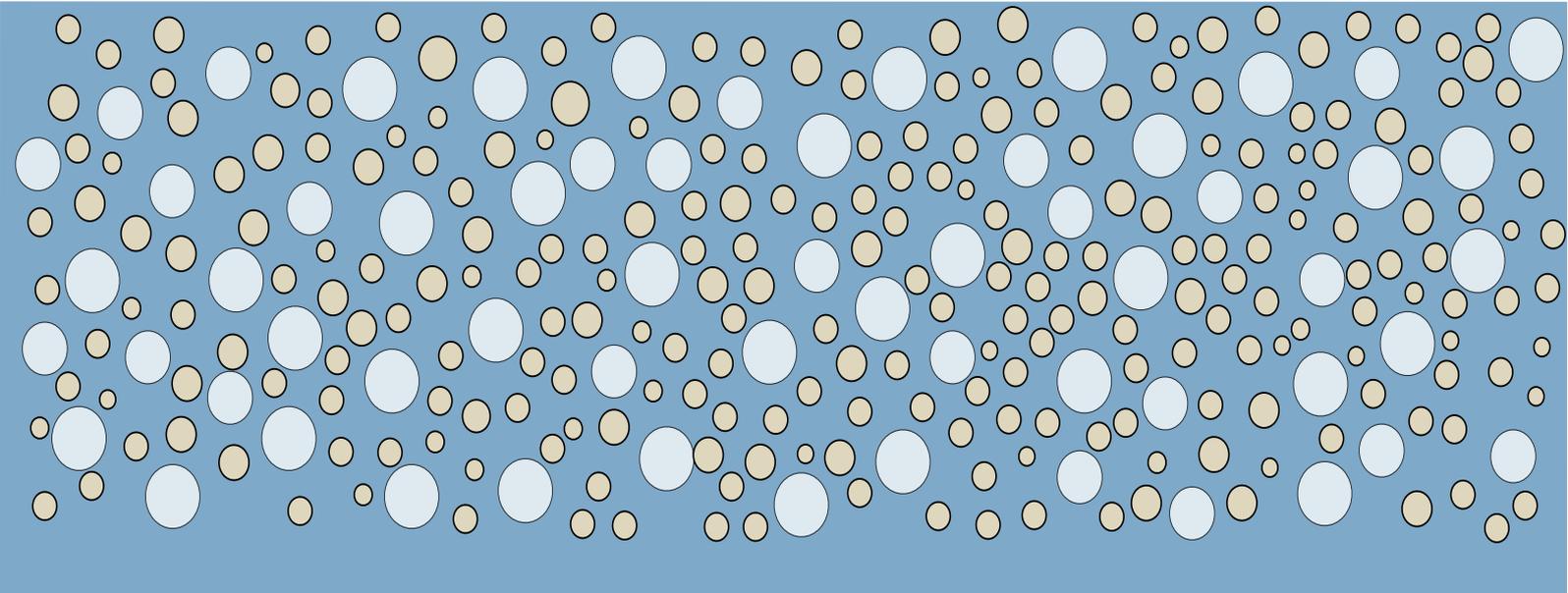
Fan y col. (1990) realizaron un análisis estocástico de un lecho fluidizado trifásico desde el punto de vista de un abordaje fractal. Es decir, dividieron el lecho como si se tratase de un medio periódico que era reproducido por un sistema de imágenes fractales. Más adelante Chen y col. (1994) basaron el estudio de la fluidización trifásica, en el análisis de la estructura en el flujo de la columna en cortes transversales y con una reconstrucción en tres dimensiones, basándose en las mismas relaciones descritas por Ergun (1952). Para aplicaciones biológicas y generación de biomasa, Schügerl (1997) estudiaron la fluidización trifásica y sus aplicación en la biotecnología, basándose en la descripción de la hidrodinámica y la caída de presión en el lecho está como se describe en la ecuación (1.25) (Buffière & Moletta, 1999).

En general, en la revisión de la literatura, los sistemas fluidizados trifásicos pueden ser descritos a través de las relaciones de caída de presión utilizadas para la fluidización ascendente bifásica (Coulson y col., 1977; Ingham & Pop, 1998). Aunado a lo anterior, la velocidad mínima de fluidización v_{mf} , debe ser la misma tanto para fluidización ascendente como para la descendente. Esto se debe a que, en general, las ecuaciones mostradas para la fluidización bifásica se basan en la premisa principal de que, la fuerza de arrastre del fluido se mueve con una velocidad superficial igual al peso de las partículas en el lecho (Epstein, 2003a; Yang, 2003). Con ello, para los sistemas de fluidización trifásica descendente se ha corroborado que las correlaciones mostradas para lechos bifásicos descendentes líquido-sólido, pueden ser utilizadas para describir la caída de presión en el lecho (Buffière & Moletta, 1999; Raasimman y col., 2007; Alvarado-Lassman y col., 2008; Sivasubramanian, 2010; Alvarado-Lassman y col., 2010; Choudhury & Sahoo, 2012; Das y col., 2010, 2015).

Si bien el panorama de estudio de la fluidización desde el punto de vista cuasiestacionario y macroscópico da una idea del comportamiento de las distintas fases, en este trabajo se propone el análisis de los sistemas bifásicos y trifásico como si se tratase de un pseudo-fluido. Lo anterior, motiva a desarrollar ecuaciones de transporte que no sólo se determinen por medio de un balance macroscópico de la presión, sino que incluya la información de las fases involucradas así como sus características físicas y ecuaciones de transporte (Ingham & Pop, 1998; Bear, 2013). Con ello, se busca darle al trabajo un enfoque desde el punto de vista de sistemas multifásicos bajo la óptica del análisis de las ecuaciones de transporte a través del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

En general, el método del promedio volumétrico, se utiliza para estudiar sistemas de escalas múltiples y permite desarrollar modelos promedio del sistema que no desprecian términos que, en este caso, son importantes para la caracterización hidrodinámica. Cabe mencionar, que se buscan modelos matemáticos que describan la transferencia de la cantidad de movimiento dentro de los sistemas bifásicos y trifásico. Con ello, se busca determinar la caída de presión en el lecho para el sistema líquido-sólido, la velocidad terminal de burbuja en el sistema líquido-gas y un modelo trifásico que se desarrolla siguiendo la metodología propuesta por Lasseux y *col.* (2019) que considera variación en el tiempo, la cual es una variable que no se consideró en los modelos bifásicos anteriores.

En el siguiente capítulo, se abordan los objetivos y la pregunta de investigación que le dan paso a la metodología con la que se busca llevar a cabo el desarrollo de esta tesis.



2. Objetivos y pregunta de investigación

2.1 Pregunta de investigación

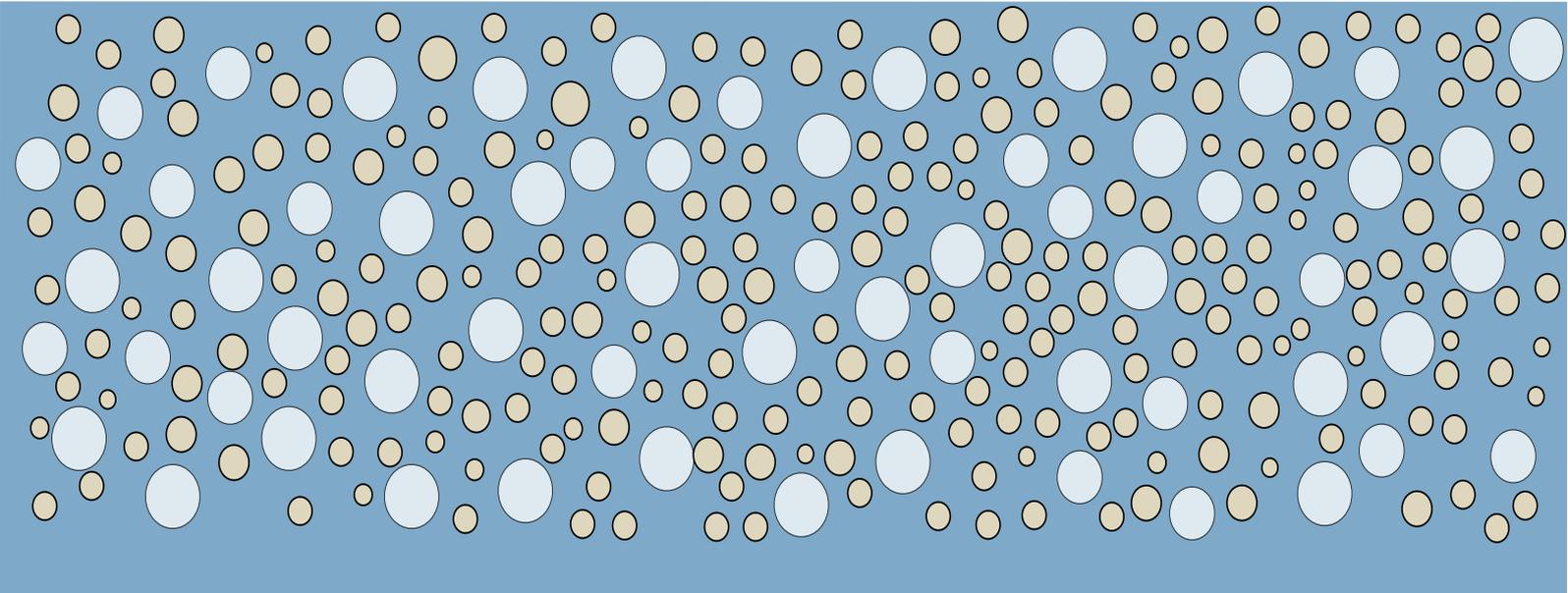
¿Cómo es posible describir la transferencia total de masa y de cantidad de movimiento a escala macroscópica un lecho fluidizado de flujo descendente?

2.2 Objetivo general

Desarrollar teóricamente modelos de medio efectivo para predecir la transferencia total de masa y de cantidad de movimiento en un lecho fluidizado de flujo descendente

2.3 Objetivos particulares

1. Caracterizar experimentalmente el sistema de fluidización descendente bifásico líquido-sólido.
2. Desarrollar, resolver y analizar un modelo de medio efectivo para un lecho fluidizado descendente bifásico líquido-sólido.
3. Caracterizar experimentalmente el sistema de fluidización descendente bifásico líquido-gas.
4. Desarrollar, resolver y analizar un modelo de medio efectivo para un lecho fluidizado descendente bifásico líquido-gas.
5. Desarrollar un modelo de medio efectivo para el sistema trifásico líquido-sólido-gas.



3. Metodología

Como se mencionó, la idea de representar las interacciones líquido-sólido, líquido-gas y sólido-líquido-gas en modelos macroscópicos, es describir a los sistemas heterogéneos como si se tratase de sistemas pseudo-homogéneos. Aunado a lo anterior, utilizando las características físicas de las fases involucradas, se pueden obtener las propiedades experimentales del proceso como son la velocidad promedio en cada fase, la caída de presión y los coeficientes de permeabilidad aparente.

El trabajo se desarrolla bajo la secuencia escalonada descrita en el Capítulo 1 y se lleva a cabo bajo el cumplimiento de los objetivos particulares. En otras palabras, se desarrollan tres modelos teóricos de medio efectivo para predecir la transferencia total de masa y de cantidad de movimiento en un reactor de lecho fluidizado descendente bifásico líquido-sólido, bifásico líquido-gas y trifásico líquido-sólido-gas.

3.1 Objetivo particular 1

Para caracterizar experimentalmente el sistema de fluidización descendente líquido-sólido, fue necesario operar el sistema y familiarizarse con las variables físicas involucradas como son: las dimensiones del sistema, el sistema de bombeo, el tipo soporte añadido que en este caso particular se utilizó polietileno de baja densidad y polipropileno. Estos materiales dan paso al análisis de sus características físicas tales como: distribución de los tamaños de partícula, esfericidad, densidad,

velocidad de flotación en ascenso libre, adherencia e hidrofobicidad.

Se caracterizaron también durante este proceso, la velocidad de expansión del lecho, la velocidad de fluidización, la velocidad de arrastre y la caída de presión para los diferentes materiales involucrados. Una vez realizado esto, se describió el proceso y se determinaron las características de operación y fracciones volumétricas del sólido añadido y del fluido, que permitieron observar nuevamente las diferentes velocidades de fluidización bajo estos parámetros. El punto final de esta parte del trabajo fue la determinación de la región de promediado de la que depende la utilización del método del promedio volumétrico. En dicha región, se determina la velocidad de la fase sólida promedio, la cual se utiliza como condición en el planteamiento de las ecuaciones.

3.2 Objetivo particular 2

A partir de la caracterización del patrón hidrodinámico, para desarrollar un modelo de medio efectivo de un lecho fluidizado descendente líquido-sólido, se plantean ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y de transferencia de masa total para la fase líquida. La velocidad promedio de la fase sólida obtenida experimentalmente, se incluye en la condición de frontera de continuidad en la velocidad. Para desarrollar el modelo, se parte de las ecuaciones que gobiernan el transporte de cantidad de movimiento mediante un proceso de escalamiento, el cual involucra un proceso de promediado y el uso de suposiciones y restricciones de escala aceptables (Wood & Whitaker, 1999), para obtener un modelo válido para este sistema.

Cabe señalar que algunas de las suposiciones para el lecho fueron que, la fracción volumétrica se considera constante en el volumen de estudio y el modelo se desarrolla para la porción homogénea del reactor, es decir, no aplica en las fronteras superior e inferior del sistema. Siguiendo el método propuesto, se aplica un operador de promediado superficial y un promedio intrínseco definidos en el volumen de la región de promediado a la ecuación de transporte de la fase fluida. Una vez realizado esto se propone una descomposición espacial en la velocidad y en la presión y a través de análisis de órdenes de magnitud, se obtiene una ecuación promedio con términos de desviaciones espaciales. Para obtener la solución formal, se desarrollan problemas de cerradura a partir de las variables de las desviaciones en términos de las fuentes.

Una vez que se obtiene la solución formal para el sistema líquido-sólido, se puede determinar la permeabilidad aparente, que es uno de los coeficientes de transporte asociados para este modelo. Dicho modelo, apoya la descripción y la comprensión de la dinámica del sólido junto con el fluido

a través de los grados de libertad que tiene. El modelo desarrollado contiene la información de las velocidades involucradas en el sistema, ligadas a través de la condición de frontera.

Para resolver el modelo bifásico se propone llevar a cabo un análisis paramétrico del sistema líquido-sólido que permita describir el transporte de la cantidad movimiento en el sistema. El modelo y la caracterización anterior, ponen a prueba la validez de las suposiciones impuestas en las ecuaciones para las fases líquido-sólido utilizando el resolutor de elementos finitos comercial Comsol Multiphysics 5.2.

Este modelo macroscópico representa la interacción entre la fase líquida y la fase sólida en promedio, que en este caso, se supone que se mueven a la misma velocidad. Como se mencionó, el modelo se desarrolla en una porción del reactor, que está lo suficientemente lejos de los límites macroscópicos superior, inferior y de la pared, de donde se obtiene el coeficiente de la permeabilidad aparente al resolver los problemas de cerradura asociados (Whitaker, 1999).

Finalmente, se analizan los resultados de la permeabilidad aparente del sistema. En este caso, se supone que la predicción de los valores de la permeabilidad aparente, se puede realizar en celdas unitarias con diferentes geometrías ya sean vectorizadas o simplificadas. Se busca también que el modelo promedio obtenido pueda predecir la caída de presión en los lechos fluidizados y ser comparado con los modelos descritos en la Tabla 1.1 que predicen dicha caída, teniendo en cuenta la velocidad relativa del sólido con respecto al fluido.

3.3 Objetivo particular 3

Para caracterizar experimentalmente el sistema de fluidización descendente bifásico líquido-gas, se opera el sistema para familiarizarse con las variables físicas involucradas como el sistema de bombeo, el difusor de aire y la velocidad de entrada de la fase gaseosa. El análisis para los tamaños de burbuja están determinados por el tamaño de poro en el difusor. En este caso, se usa un difusor que establece tamaños de burbuja del mismo orden de magnitud que las partículas sólidas. Esto último, muestra una disparidad de escalas característica y con ello, se determina la región de promediado de la fase gaseosa, del mismo tamaño que para el modelo líquido-sólido.

Una vez obtenida la región de promediado, se determina durante el desarrollo experimental que solo es necesario obtener la velocidad terminal de una burbuja. Este tipo de experimentos están ampliamente descritos en la literatura y son utilizados como punto de comparación para desarrollar experimentos numéricos. Dichos experimentos, se llevan a cabo por medio de soluciones numéricas

directas de las ecuaciones de transporte asociadas al modelo líquido-gas.

Aunado a lo anterior, se realizan experimentos numéricos para determinar la velocidad terminal de una burbuja en el sistema, lo que conduce a utilizar simulaciones numéricas directas. Dichas simulaciones se realizan por medio de la ecuación de fase level-set y por el método de malla movable. Ambas relaciones se utilizan para predecir la velocidad terminal de la fase gaseosa. Más adelante se utilizó el método de malla movable para comparar los resultados con datos experimentales disponibles en la literatura y con los modelos predictivos descritos en la Tabla 1.2, dando resultados aceptables, por lo que se pudo comenzar con el planteamiento de modelo promedio.

3.4 Objetivo particular 4

Para desarrollar un modelo de medio efectivo para un lecho fluidizado bifásico líquido-gas, primero se adoptaron un conjunto de suposiciones iniciales que apoyan las ecuaciones que rigen en la microescala como son continuidad del esfuerzo y de la velocidad entre las fases, así como la suposición de la inclusión de los esfuerzos inerciales en la fase- γ . Lo anterior conduce a la segunda parte del análisis de la fase- γ y se propuso un modelo simplificado, donde los esfuerzos inerciales en dicha fase no contribuyen de manera significativa al modelo promedio.

Partiendo de las ecuaciones que gobiernan el transporte de cantidad de movimiento, se hace uso de una versión abreviada del método del promedio volumétrico. Dicho método abreviado, involucra un proceso de promediado y el uso de suposiciones y restricciones de escala, para obtener un modelo válido para este sistema. Siguiendo el método propuesto, se aplica un operador de promediado superficial y un promedio intrínseco definidos en el volumen de la región de promediado a las ecuaciones de transporte de las fases fluidas. Una vez realizado esto se propone una descomposición espacial esta vez solo en la presión. Con ello, se obtiene una ecuación promedio con términos fuente. Para obtener la solución formal, se desarrollan problemas de cerradura a partir de las variables de las desviaciones en términos de las fuentes.

Para resolver el modelo bifásico y llevar a cabo un análisis paramétrico líquido-gas, primero se lleva a cabo la solución numérica utilizando el solucionador de elementos finitos comercial Comsol Multiphysics 5.4. El segundo paso, fue elaborar un modelo de simulación numérica directa de donde se extrajo la velocidad terminal de la burbuja en un líquido estacionario. Esta velocidad terminal se compara con los modelos descritos en la Tabla 1.2 dando resultados aceptables.

Una vez obtenida la velocidad terminal de una burbuja, se realiza una simulación numérica con

los problemas de cerradura asociados para obtener las permeabilidades aparentes para cada fase. En el simulador numérico, se realizaron análisis de malla clásicos para garantizar la convergencia numérica de los resultados. Aunado a ello, se elabora la solución numérica del modelo simplificado y se compara numéricamente con los datos obtenidos de la velocidad terminal para el modelo sin simplificaciones.

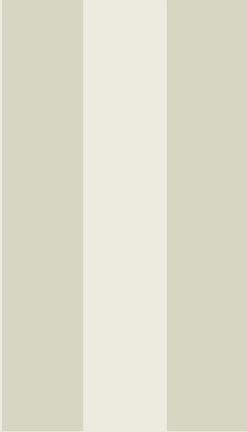
3.5 Objetivo particular 5

Para desarrollar el modelo de medio efectivo para el sistema trifásico líquido-sólido-gas, se propuso que sea la suma de los análisis experimentales líquido-sólido y líquido-gas realizados en los objetivos particulares anteriores. Esto significa que las características físicas y las regiones de promediado no varían respecto de los modelos anteriores y por tanto se puede empezar el análisis desde este punto. Recordando, en este caso el flujo del líquido es de manera descendente y el flujo de gas es de forma ascendente. Lo cual, genera un mezclado del lecho de partículas sólidas que es experimentalmente complicado de describir, pero que en esencia, contiene las restricciones de escala pertinentes obtenidas en los modelos anteriores. De la misma forma que en los objetivos particulares en el desarrollo de los modelos bifásicos, se busca obtener un modelo de medio efectivo que describa al sistema trifásico a través de los coeficientes permeabilidad aparente.

Una vez realizada la caracterización del sistema trifásico, y para desarrollar el modelo de medio efectivo correspondiente, se plantea un conjunto de ecuaciones de transporte que describan las interacciones entre las partículas suspendidas, el soporte líquido y el gas. Cabe remarcar que las ecuaciones propuestas para esta etapa del trabajo, son la adición de las ecuaciones de las etapas bifásicas líquido-sólido y líquido-gas. Es decir, se conservan las ecuaciones de transporte para las fases líquida y gaseosa. Aunado a ello, la velocidad de las partículas es conocida en el sistema, la cual, se propone que sea la velocidad promedio del sólido en la región de promediado.

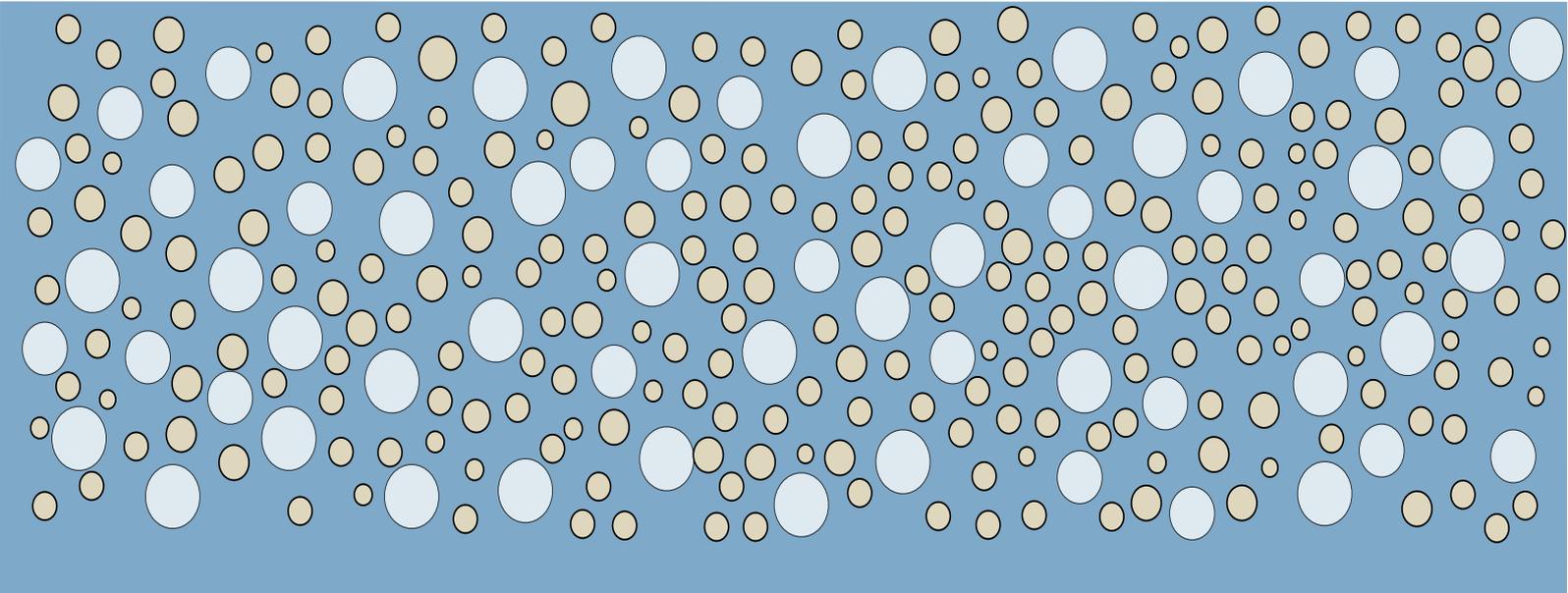
Cabe señalar que en esta etapa del modelado, se considera la variación en el tiempo, la cual es una variable que no se consideró en los modelos bifásicos. El modelo macroscópico trifásico se basa en la metodología propuesta por Lasseux y *col.* (2019) queda en términos de los coeficientes asociados de los problemas de cerradura desarrollados, que en este último caso también consideran términos temporales. Finalmente para plantear el análisis paramétrico del sistema β - σ - γ , se busca establecer celdas unitarias pertinentes, basadas en el tamaño de la región de promediado. Lo anterior, puede ser tomando muestras físicas del sistema y vectorizarlas. Con ello, se busca resolver los

problemas de cerradura asociados y del mismo modo que en los análisis paramétricos anteriores, obtener los coeficientes de permeabilidad aparente del sistema.



Parte Dos

4	Sistema experimental	57
4.1	Características del sistema experimental bifásico (líquido-sólido)	
4.2	Características del sistema experimental bifásico (líquido-gas)	
4.3	Características del sistema experimental trifásico (líquido-sólido-gas)	
4.4	Resumen del Capítulo	
5	Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-sólido	75
5.1	Ecuaciones promedio	
5.2	Problema de cerradura	
5.3	Resultados y discusión	
5.4	Artículo publicado	
5.5	Resumen de capítulo	
6	Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-gas	91
6.1	Problemas de cerradura	
6.2	Resultados y discusión	
6.3	Estancia de investigación	
6.4	Resumen del capítulo	
7	Análisis trifásico del lecho fluidizado líquido-sólido-gas	121
7.1	Modelo microscópico en una celda periódica	
7.2	Solución formal del problema microscópico	
7.3	Problemas de cerradura	
7.4	Modelo promedio	
7.5	Resumen del capítulo	



4. Sistema experimental

En este capítulo se describe la implementación del sistema experimental y las simulaciones numéricas realizadas de acuerdo con la metodología descrita en el Capítulo 3. La primera etapa consiste en montar el sistema para observar y tomar las medidas durante la interacción del líquido y el sólido vertido. En la segunda etapa se monta un aereador en la parte inferior del sistema para analizar y observar la interacción entre el líquido y el gas en una columna de burbujeo. Finalmente, para la tercer etapa se observó la interacción entre las tres fases líquido, sólido y gas y se analizó su comportamiento.

4.1 Características del sistema experimental bifásico (líquido-sólido)

Para desarrollar el modelo, se armó, operó y observó un dispositivo experimental de fluidización descendente, el cual es meramente descriptivo, ya que ayuda al enfoque del modelo como el que se muestra en la Figura 4.1. Los componentes del sistema son: la *columna del reactor*, que en este caso, está hecha de acrílico transparente para la observación de partículas fluidizadas, sus medidas son: diámetro (d_R) = 5 cm, longitud (L_R) = 80 cm. El *distribuidor* es una placa con perforaciones y su diseño es fundamental para el patrón hidrodinámico del lecho fluidizado. El *control del nivel del reactor* es responsable de mantener la distancia entre la altura del lecho fluidizado y el distribuidor; es esencial mantener una distancia mínima entre estos dos, porque esto determina la turbulencia

en la zona de entrada del lecho. El *sistema de bombeo de fluido* es el sistema de conexiones y la bomba, que mantiene el flujo volumétrico en las condiciones requeridas. En este caso, la bomba de recirculación es peristáltica y funciona mediante impulsos, de ahí la necesidad de un eliminador de aire en el flujo para interrumpir estos impulsos y mantener un flujo constante en el distribuidor.

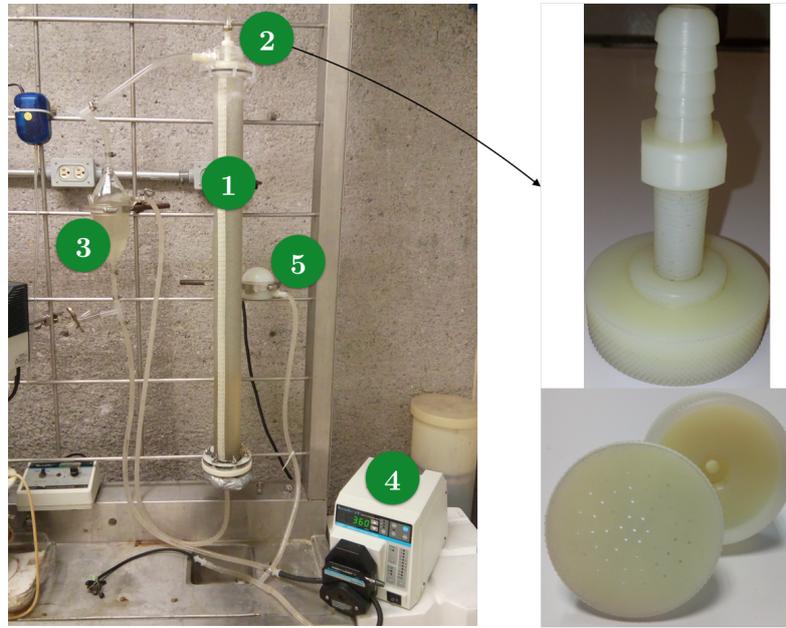


Figura 4.1: Esquema del sistema experimental de lecho fluidizado de flujo descendente. 1) Columna del reactor, 2) distribuidor, 3) control de nivel del reactor, 4) sistema de bombeo de fluido, 5) eliminador de aire en el flujo.

La operación del sistema está sujeta a las siguientes variables experimentales: la tasa de flujo volumétrico (\dot{Q}_{in}) que da lugar a la velocidad superficial (v_{in}), la cual, se relaciona directamente con el volumen de fluidización, que es el volumen de la columna donde el fluido se mueve y las partículas permanecen suspendidas. Lo anterior está relacionado con la *expansión del lecho*, que es la altura del volumen de fluidización y ambos están directamente relacionados con el diámetro de la partícula (d_p o ℓ_{σ}).

Se utilizaron bombas peristálticas de alimentación y recirculación de marca Masterflex Cole-Parmer[®], las cuales se operaron a diferentes revoluciones por minuto (RPM) donde se midieron desplazamientos del volumen en la columna para obtener el flujo volumétrico (\dot{Q}_{in}) en $\frac{m^3}{s}$. A partir de esta información, se generaron gráficas de donde se obtiene la ecuación lineal que define el gasto (\dot{Q}) como sigue

$$Q(RPM) = 5.6 \times 10^{-8} \frac{m^3}{s} * RPM \qquad Q(RPM) = 5.6 \frac{ml}{min} * RPM \qquad (4.1)$$

En el sistema de bombeo de fluido en el paso por las bombas de recirculación y de alimentación se utilizaron mangueras de neopreno, las cuales son más resistentes que las mangueras de latex utilizadas para las demás conexiones en el sistema de bombeo. Una vez operando el sistema de bombeo, se buscaron diferentes soportes sólidos para el sistema de fluidización descendente, los cuales, deben ser materiales menos densos que el agua, como lo son plásticos o expandospher.

En este caso se utilizó polietileno de baja densidad 20020X (PEBD) y polietileno de alta densidad 60120 (PEAD), donde se dependía del diámetro de partícula para la fluidización uniforme y sin un alto gasto de energía para la bomba. La variación en la selección del soporte depende de su grado de expansión, por lo que en primera instancia, se empleó un soporte que no representara una diferencia significativa respecto de las curvas obtenidas en la calibración de las bombas. La medición de la expansión del lecho se realizó con un flexómetro como se muestra en la Figura 4.2a), donde de manera visual, se determina el tamaño de la expansión que es una línea imaginaria que está representada por el ovalo con línea punteada en la Figura 4.2b).

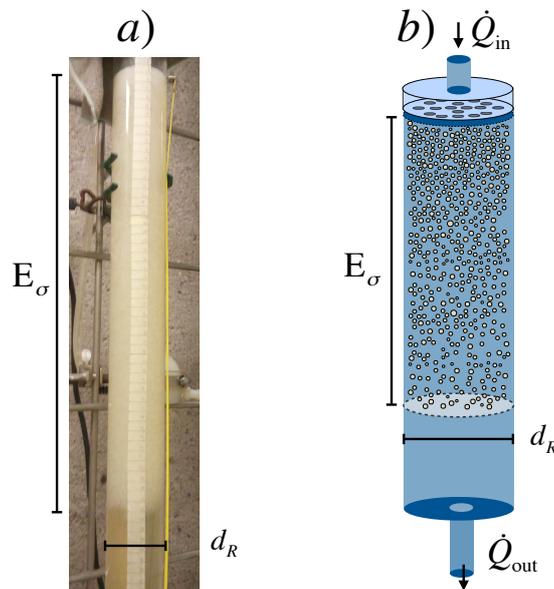


Figura 4.2: Esquema representativo del lecho fluidizado descendente líquido-sólido a) experimental y b) diagrama representativo.

De acuerdo a lo anterior se seleccionó el soporte de polietileno de baja densidad el cual, con un volumen añadido (V_a) variable, generó diferentes gráficos de expansión respecto de la velocidad inducida del fluido. Al realizar el análisis, se observa un comportamiento casi lineal en la mayoría de los casos, los cuales corresponden a la ecuación (4.1).

De acuerdo a Das y *col.* (2010), existe una relación probada entre el diámetro de la partícula y

el diámetro del reactor, que satisface $\ell_\sigma \ll d_R$, y en los experimentos realizados, el diámetro de la partícula es de $\ell_\sigma = 0.08$ cm, recordando que $d_R = 5$ cm. En general, las partículas de soporte utilizadas son de forma irregular y de morfología de superficie diversa, por lo tanto, existen muchas formas y técnicas diferentes para caracterizar las partículas. Debido a esto, los resultados pueden no ser completamente consistentes, lo cual también está relacionado a la forma de obtención de partículas como los diversos procesos de molienda y tratamiento (Allen, 2013). Sin embargo, la forma de la mayoría de las partículas irregulares no se puede definir exclusivamente porque sus tamaños generalmente se definen con base a ciertas propiedades de referencia. La elección de cualquier diámetro particular para la caracterización de una partícula irregular depende en muchos casos de la aplicación prevista (Shi, 2001). Sin embargo, en la mayoría de los casos, la elección correcta de un diámetro representativo es incierta. En este caso particular, se han seleccionado el análisis de imágenes digitales, específicamente, ayudado por el software Matlab[®], que permitirá definir los tamaños y la esfericidad de las partículas que se utilizarán.

El primer paso es obtener imágenes digitales del soporte en diferentes cantidades y tamaños de muestra mediante una cámara digital con 8 Megapíxeles. El siguiente paso es convertir a escala de grises la imagen y vectorizarla para crear un patrón en blanco y negro donde las fracciones que ocupa cada partícula se pueden calcular en la muestra de la fotografía tomada como se muestra en la Figura 4.3a).

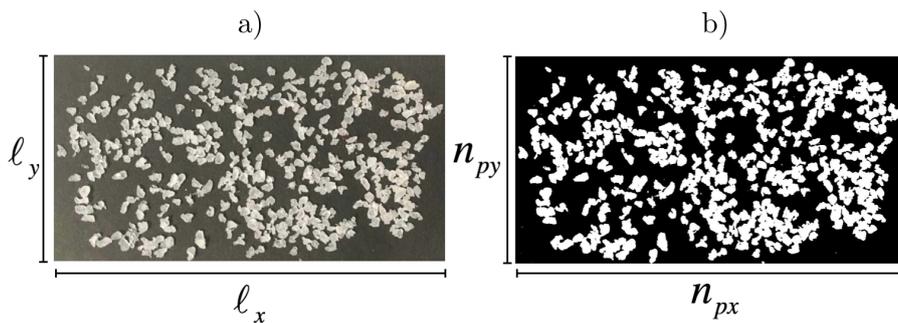


Figura 4.3: Imagen digital del soporte: a) fotografía en un área física con $\ell_y = 4$ cm y $\ell_x = 7$ cm; b) fotografía vectorizada en un área de píxeles por pulgada (ppi) con $n_{py} = 1040$ ppi y $n_{px} = 1394$ ppi.

Posteriormente, se establece el área física de la muestra, donde ℓ_x y ℓ_y son distancias medibles y se desarrolla una conversión del porcentaje del área ocupada por las partículas para obtener su diámetro promedio de partícula (ℓ_σ). Aunado a lo anterior, n_{px} y n_{py} son distancias conocidas en *píxeles por pulgada* (o ppi) como se muestra en la Figura 4.3b), con ello, se obtiene el área

ocupada en ppi. Paso seguido, se convierte nuevamente el porcentaje del área en ppi ocupado a una distancia medible en el sistema internacional y al analizar todo el soporte a utilizar en la columna se determinaron tres tamaños promedio característicos a los cuales se les asignó, largo, ancho y alto y con ello se obtiene la esfericidad media¹ (ϕ_σ). Las proporciones relativas de esfericidad encontradas en el análisis de imágenes digitales fueron 1:1:2 y, según Kunii y *col.* (2013), este tipo de partículas pueden caracterizarse como esferoides.

La densidad (ρ_σ) y la porosidad (ϵ_σ), se determinan experimentalmente con las relaciones $\rho_\sigma = \frac{m_p}{V_p}$ y $\epsilon_\sigma = \frac{V_V}{V_T}$ donde m_p es la masa medida de las partículas, V_p es el volumen de las partículas, V_V es el volumen entre las partículas y V_T es el volumen total. Los datos para la caracterización de las partículas se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Características del soporte.

Propiedad	Medida
Diámetro de partícula (ℓ_σ)	0.0008 [m]
Esfericidad (ϕ_σ)	0.75
Densidad (ρ_σ)	480 [kg/m ³]
Porosidad (ϵ_σ)	0.68

El siguiente paso es tomar fotografías de la columna de manera frontal evitando la curvatura de la misma al utilizar un cubo de acrílico que se coloca al rededor del volumen a analizar. Paso seguido, se busca vectorizar cada imagen obtenida como se muestra en la Figura 4.4a), donde la fase- σ se modela en gráficos vectoriales escalables (svg), porque este tipo de vectorización tiene un software de patrones conocido y son fácilmente importables entre los diferentes software de análisis gráfico. Después de obtener las geometrías vectorizadas, se necesitan determinar los cambios de porosidad fluidizada (ϵ_β), en cada imagen para establecer el tamaño de la región promedio r_0 como se muestra en la Figura 4.4b). En este punto, es importante mencionar que, para utilizar el método de promediado de volumen, es necesario que el tamaño del dominio de promediación esté limitado entre las longitudes características de la escala de poros y de la macroescala.

Como primer enfoque, se toma la porosidad como parámetro para determinar un tamaño de dominio promedio adecuado. En la Figura 4.5 se presentan los resultados de las ocho muestras obtenidas del sistema mostradas en la Figura 4.6 y varios tamaños de volumen promediados. Lo anterior quiere decir que se realiza un barrido para diferentes tamaños de región de promediado

¹Es la medida de cuán cerca la forma de un objeto se aproxima a la de una esfera matemáticamente perfecta o, en otras palabras, se conoce como el área de superficie de una esfera que puede tener el mismo volumen que la partícula dividida por el área de superficie real de la partícula (Kunii y *col.*, 2013).

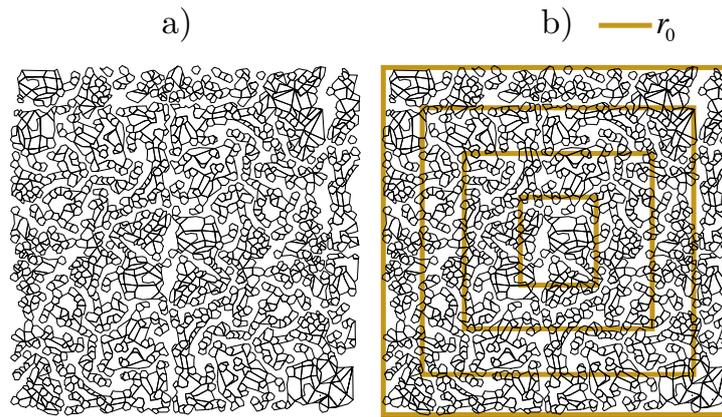


Figura 4.4: Imagen vectorizada del soporte de LDPE en: a) gráficos vectoriales escalables desde la vista lateral del reactor, y b) para calcular la porosidad fluidizada (ϵ_β) en diferentes tamaños de las regiones promedio representativas (r_0).

como se muestra la Figura 4.4b). Se comienza con una región de promediado cercana al orden de magnitud del tamaño de partícula y se incrementa hasta que la fracción volumétrica tenga un comportamiento constante.

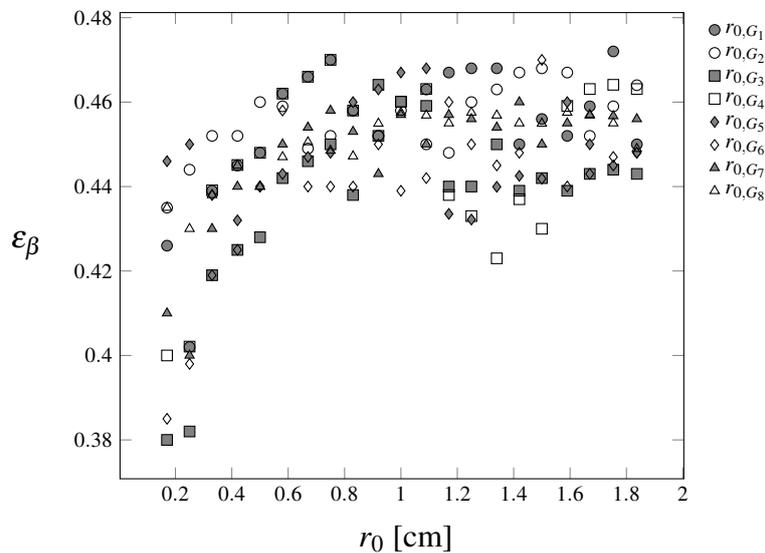


Figura 4.5: Cálculo de la región promediada r_0 en zx del reactor.

De esta manera, se determina que la porosidad de fluidización promedio del sistema en este caso es $\epsilon_\beta = 0.45$, que es mayor que la porosidad estática $\epsilon_{\beta,s} = 0.32$, debido a la expansión del lecho. Este valor de porosidad corresponde a un tamaño de la región promedio $r_0 \leq 0.5$ cm, y de aquí se tiene la siguiente relación

$$\text{máx}(\ell_\beta, \ell_\sigma) < r_0 < \text{mín}\{d_R, L_R\} \quad (4.2)$$

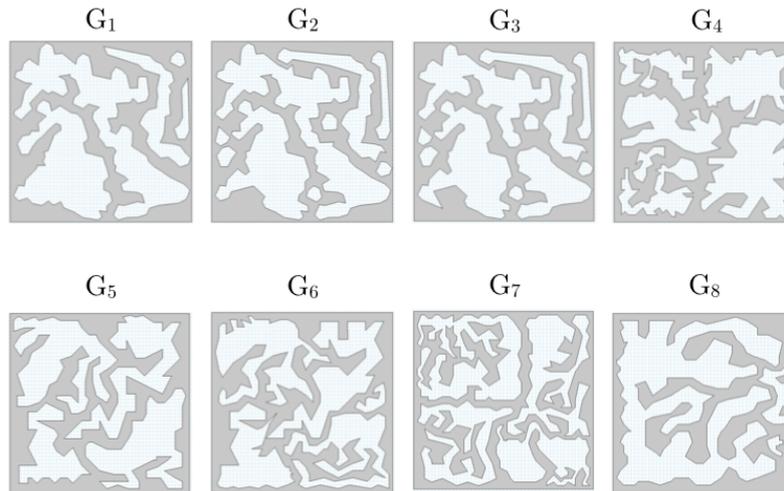


Figura 4.6: Gráficos vectorizados escalables de las diferentes geometrías tomadas de las imágenes en el reactor.

Una vez que se tienen estas celdas unitarias representativas y la restricción de escala en la ecuación (4.2), se puede aplicar el método del promedio volumétrico para el sistema bifásico líquido-sólido como se describe en el Capítulo 5.

4.2 Características del sistema experimental bifásico (líquido-gas)

Para el sistema experimental líquido-gas, se utilizó un difusor de aire de 4 cm de diámetro que fue colocado en el fondo del sistema para ejemplificar una columna de burbujeo como se muestra en la Figura 4.7. Esta columna de burbujeo, se operó a diferentes flujos volumétricos para observar el comportamiento hidrodinámico de las burbujas en el sistema.

En general, la mayoría de las columnas experimentales de burbujas de dos fases, como en este caso, están construidas de vinilo transparente para facilitar la observación del movimiento de las burbujas originadas por un difusor ubicado en la parte inferior del sistema como se muestra en la Figura 4.7b). De esta manera, el flujo volumétrico de aire de entrada se puede controlar mediante el sistema de bombeo asociado. Normalmente, la fase gaseosa se recoge en la parte superior de la columna y se recircula a la entrada.

Como se mencionó en el Capítulo 1, y para simplificar, en el resto del análisis, se supone que la

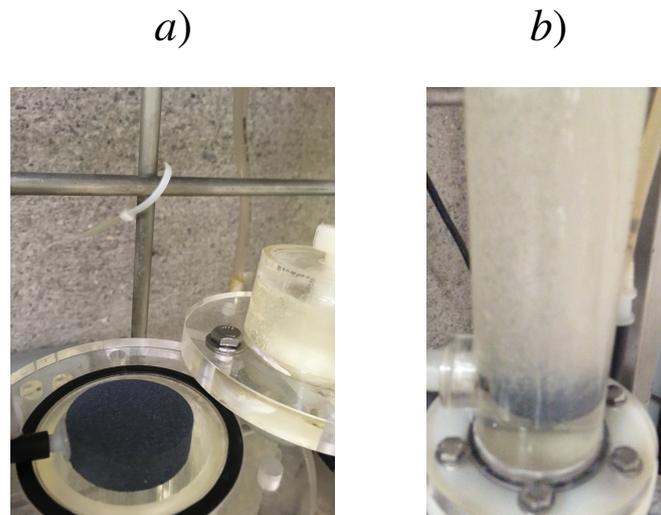


Figura 4.7: a) Difusor de aire para el sistema de fluidización descendente para el modelo líquido-gas, b) operación del difusor en el fondo del reactor para la columna de burbujeo.

fase líquida se mueve solo debido al desplazamiento de la fase gaseosa, es decir, no hay corrientes de entrada o salida para esta fase. Debido a ello, sólo las fuerzas que interactúan entre las fases, determinan la velocidad terminal de la fase- γ .

Bajo esta óptica, se considera el sistema simplificado esbozado en la Figura 4.8, que consiste en una serie ordenada de burbujas ubicadas inicialmente en la parte inferior de la columna en una cuadrícula regular cuadrada. Para ello, se generó una cuadrícula cuadrada en la parte inferior del sistema para formar matrices de paralelepípedos de sección cuadrada, cada una de las cuales contiene una burbuja. Luego, a $t > 0$, todas las burbujas pueden moverse hacia arriba por las fuerzas de flotabilidad y con ello, determinar la velocidad terminal de una burbuja evitando efectos de atracción y coalescencia. Estos efectos no se consideran en el desarrollo del modelo macroscópico (ver Capítulo 6); sin embargo, varios autores como Prince & Blanch (1990); Hoppe & Breuer (2018); Sarhan y *col.* (2018) entre otros, han estudiado la predicción de la coalescencia de burbujas y su atracción hidrófoba.

La solución numérica se llevó a cabo utilizando el resolvidor de elementos finitos comercial Comsol Multiphysics 5.4. Se hizo uso del método de conservación de fase (o *level-set*), el cual desarrolla una ecuación de fase, es decir, mapea la interfase en cada punto del tiempo, junto con las ecuaciones de transporte de masa y cantidad de movimiento ((6.1) - (6.6), revisar Capítulo 6), para determinar la hidrodinámica del sistema bifásico y con ello los perfiles de velocidad y presión. Se realizaron análisis de malla clásicos para garantizar la convergencia numérica de los resultados. Los

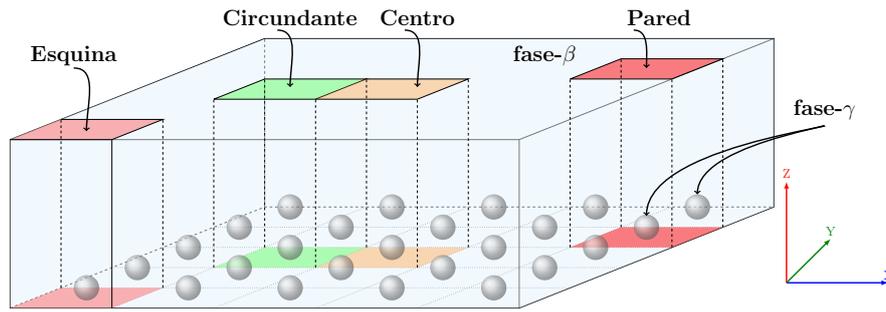


Figura 4.8: Esquema de la columna de burbujas simplificada utilizada para determinar la pertinencia de usar una región de promediado. Consta de una matriz cuadrada de 25 burbujas.

valores de densidad y viscosidad para la fase líquida se tomaron como los del agua a temperatura ambiente ($\rho_\beta = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\mu_\beta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) y los de la fase gaseosa se tomaron como los del aire también a temperatura ambiente ($\rho_\gamma = 1.276 \text{ kg/m}^3$ y $\mu_\gamma = 17.22 \text{ Pa} \cdot \text{s}$). Además, la tensión superficial se ajustó a 72 mN/m .

Se buscó un primer enfoque para determinar la existencia y la pertinencia de una región de promediado r_0 . Para establecer la distancia que debe separarse cada burbuja una de la otra para evitar influir en el desarrollo de la velocidad de la burbuja circundante, se realizaron varias pruebas numéricas y se encontró que la distancia crítica, se obtiene cuando el tamaño de la sección transversal cuadrada de los paralelepípedos es un orden de magnitud mayor que el diámetro de la burbuja. En general, se encontró que si la longitud de separación entre las burbujas es menor que $20 \ell_\gamma$, el volumen de desplazamiento del líquido producido por la burbuja vecina, afecta el movimiento de las demás y genera efectos de atracción y en algunos casos coalescencia. Una vez obtenida la distancia pertinente de separación entre burbujas, se propone simplificar la obtención de la velocidad terminal de la burbuja con el uso de una celda unitaria periódica como se muestra en la Figura 4.9.

Al contar con los esquemas de la celda periódica y de la columna de burbujas, se resuelven los problemas puntuales de las ecuaciones (6.1) - (6.6) con una simulación numérica directa (DNS). Con lo anterior, se obtienen las velocidades de cada fase reportadas en la Figura 4.10, donde se muestra la evolución del promedio intrínseco de la velocidad de la burbuja tomada en la celda unitaria y en los diferentes paralelepípedos hasta llegar a su velocidad terminal.

De los resultados mostrados en la Figura 4.10, queda claro que la velocidad de la burbuja en el centro del sistema se parece a la que corresponde a sus vecinos circundantes e incluso a la que se encuentra cerca de la pared del sistema (vea la Figura 4.8 para ubicar las posiciones). La única

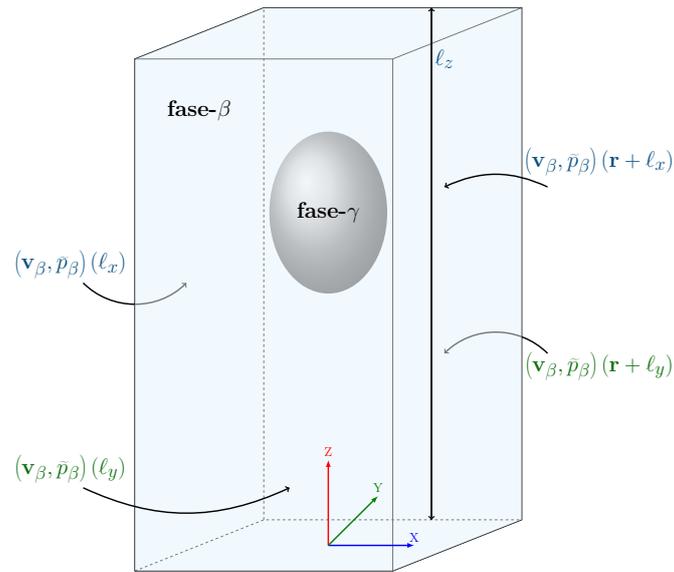


Figura 4.9: Esquema de la celda unitaria para la solución del problema para la determinación de la velocidad terminal de una burbuja, incluidas las condiciones de periodicidad.

velocidad que parece estar en desacuerdo en tiempos suficientemente largos es la de la burbuja de la esquina. Aunado a lo anterior, las predicciones de la celda unitaria concuerdan con las de tomar el promedio de la velocidad de la burbuja ubicada en el centro del sistema.

Con el fin de tener una imagen más cuantitativa sobre el acuerdo entre los resultados de la celda periódica unitaria, el promedio de la burbuja central y de las otras celdas identificadas en la Figura 4.8, se presenta en la Tabla 4.2 los porcentajes de error relativos correspondientes para los datos del último tiempo computacional reportado en la Figura 4.10.

Tabla 4.2: Error relativo porcentual de las velocidades promedio intrínsecas correspondientes al tiempo final reportado en la Figura 4.10 respecto de las burbuja central y la celda periódica unitaria.

Posición	Centro _β	Celda unitaria _β	Centro _γ	Celda unitaria _γ
Centro	-	0.85 %	-	6.49 %
Circundante	1.64 %	1.53 %	13.42 %	9.61 %
Pared	1.01 %	1.72 %	20.02 %	15.34 %
Esquina	3.60 %	2.93 %	10.36 %	16.83 %

Como se esperaba, los valores del porcentaje de error relativo están por debajo del 5 % para la fase β y por debajo del 10 % para la fase γ , excepto cuando se comparan con la burbuja de la pared y con la burbuja de la esquina. Este desacuerdo se atribuye a los efectos de pared que influyen en la hidrodinámica de estas burbujas. Al calcular el error relativo con respecto a la celda unitaria periódica, se obtiene que para la comparación con la velocidad desarrollada en el centro para ambas

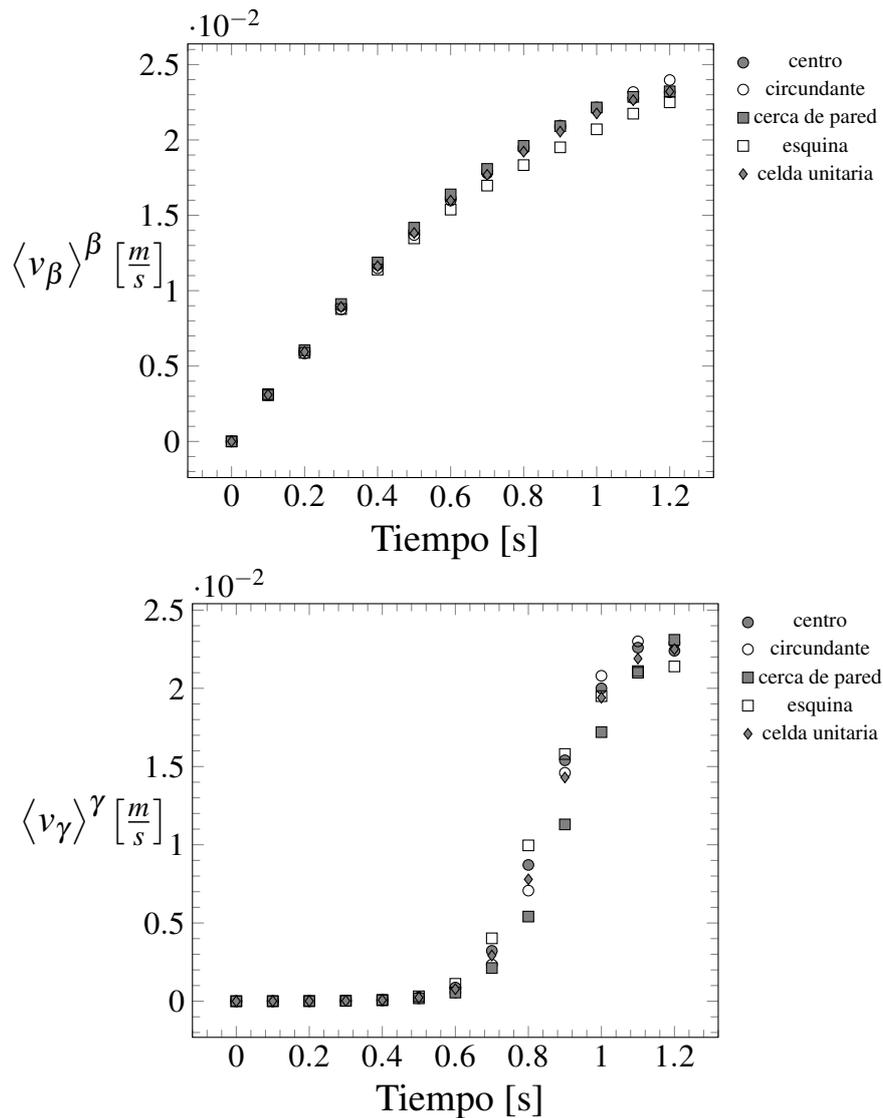


Figura 4.10: Dinámica de las velocidades promedio intrínsecas calculadas en las diferentes ubicaciones del sistema esbozado en la Figura 4.8. El diámetro equivalente de las burbujas es de 2 mm.

fases es 0.85 % y 6.49 %, para la posición circundante es 1.53 % y 9.61 %, para la posición cerca de la pared son 1.72 % y 15.34 % y para la posición cerca de la esquina son 2.93 % y 16.83 % para las fases β y γ respectivamente.

A partir de los resultados anteriores, se propone una celda unitaria periódica como el dominio de solución de las ecuaciones gobernantes en la microescala. Este dominio de solución simplificado es el punto de partida para el desarrollo del modelo de macroescala, como se muestra más adelante en el Capítulo 6. Como nota final de este análisis, vale la pena señalar que el tamaño de la sección transversal de la celda unitaria (r_0) está de acuerdo con la desigualdad dada en (4.2), que en este

caso se puede expresar de la siguiente manera

$$\text{máx}(\ell_{\beta}, \ell_{\gamma}) < r_0 < \text{mín}\{d_R, L_R\} \quad (4.3)$$

4.2.1 Estancia de investigación

Durante los estudios de doctorado, se realizó una estancia de investigación en la Universidad de Bordeaux en Francia, contando con la asesoría del Dr. Didier Lasseaux quien actualmente trabaja en el laboratorio I2M - TREFLE, y realiza investigación en transporte en medios porosos, ingeniería mecánica e ingeniería física. En esta investigación, se complementó se analizó y revisó la pertinencia de utilizar las ecuaciones que modelan al sistema bifásico líquido-gas. La diferencia radica en el método numérico para la solución y la propuesta de un análisis simplificado para la fase gaseosa, lo cual, se revisa a detalle en la segunda parte del Capítulo 6 en la Sección 6.3.

El método numérico para la solución propuesta fue de malla movable en vez de utilizar el método level-set. En términos generales, el detalle que limitaba la investigación con el método de level-set, es que la malla para el dominio de solución, podría no ser del todo constante en cuanto la interfase comienza a desplazarse. Por otro lado, el método de malla movable, resultó tener una malla constante en el dominio de solución, por lo que se optó por este método durante la estancia. Aunado a lo anterior, durante la estancia, se propuso la simplificación del modelo de dos ecuaciones descrito en (6.1) - (6.6), a un modelo de una ecuación descrito a detalle en la Sección 6.3 en las ecuaciones (6.62).

Como parte de este análisis, se propuso resolver los problemas anteriores (de una y dos ecuaciones) en el sistema experimental propuesto por Talaia (2007) de acuerdo a la Figura 4.11. En este trabajo, la sección transversal de la pared horizontal del sistema era un cuadrado de 20 x 20 cm, con cuatro paredes verticales de acrílico transparente, con una altura de 150 cm. Como se muestra en la Figura 4.11, las burbujas se inyectan con una aguja graduada por un costado del tanque, una vez inyectadas, la burbuja se acumula en la copa hemisférica que se encuentra al centro del sistema.

Una vez posicionada la burbuja, se gira la manivela que está en el otro extremo del tanque para liberarla y de esta manera controlar la frecuencia de generación, con ello, al ajustar la velocidad de rotación fue posible minimizar la producción de burbujas secundarias. Ya liberada la burbuja, se capta su movimiento, velocidad y forma en la cámara posicionada en la parte superior del sistema.

Todos los experimentos se realizaron a temperatura ambiente de aproximadamente 20⁰C. Todas las medidas se realizaron desde la parte superior de la burbuja.

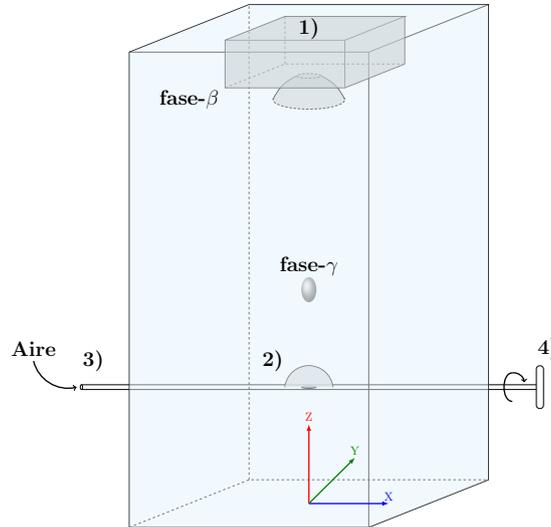


Figura 4.11: Esquema de una columna experimental de burbujas empleada por Talaia (2007). 1) Cámara de video para la captación de la velocidad de las burbujas, 2) copa hemisférica para generar las burbujas, 3) inyector de aire con agujas graduadas y 4) manivela de rotación.

Aunado a lo anterior, se realizó una simulación numérica directa (DNS) utilizando los valores de densidad y viscosidad para la fase líquida y gaseosa de acuerdo con los valores experimentales reportados en Talaia (2007), tales como $\rho_{\beta}=998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{\beta}=1 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, $\rho_{\gamma}=1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{\gamma}=1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ y $\sigma=72.6 \times 10^{-3} \text{ kg/s}^2$. La simulación se realizó en el diseño mostrado en la Figura 4.12, donde se utilizan las medidas del sistema experimental $L_C=150 \text{ cm}$ y $\ell_C/2=10 \text{ cm}$ y el modelo de dos ecuaciones descrito en (6.1)-(6.6).

La solución numérica se llevó a cabo utilizando el solucionador de elementos finitos comercial Comsol Multiphysics 5.4. Se realizaron análisis de malla clásicos para garantizar la convergencia numérica de los resultados, señalando en este caso que no es necesaria una malla fina en el sistema completo, si no solamente cerca de las interacciones de la interfaz como se muestra en la Figura 4.12. Lo anterior, se debe a que el dominio de solución de velocidad está dado en las inmediaciones del movimiento de la burbuja y aparte de ello, se realizó un análisis de convergencia de malla en la velocidad terminal de la burbuja. Esta velocidad no se ve modificada aún cuando la malla asignada a la fase- β sea del tamaño de la burbuja. Lo anterior, es debido a la naturaleza del método, donde la malla que se encuentra al rededor de la burbuja y que va capturando la velocidad está refinada y no se modifica con el tiempo.

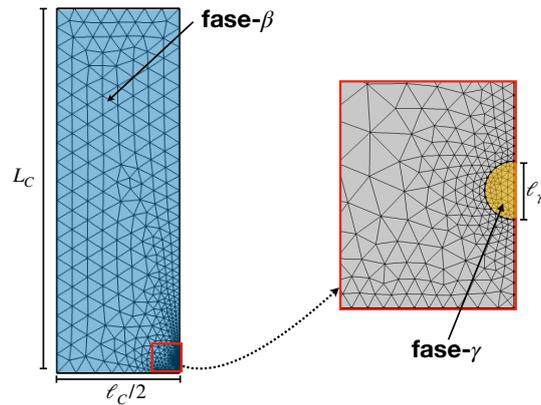


Figura 4.12: Diseño para el modelado en DNS para la columna experimental de burbujas de Talaia (2007).

A partir de la información mostrada sobre el mallado anterior, se decidió explorar una simplificación del sistema como se presenta en la Figura 4.13b). Aquí se muestra que en vez de obtener la velocidad desarrollada de la burbuja en todo el sistema, se desarrolla en una pequeña parte en donde las condiciones a los costados del movimiento de la burbuja son periódicas. El tamaño de celda unitaria $5 \times 20 \ell_\gamma$, se estableció una vez que se mostrara que la burbuja había desarrollado su velocidad hasta llegar a la velocidad terminal.

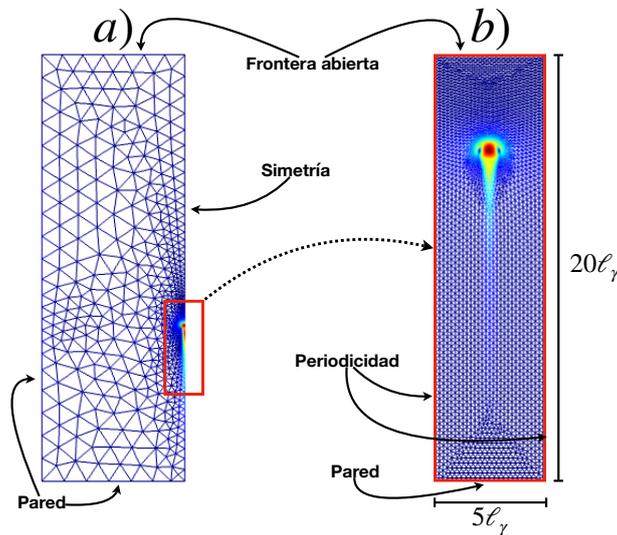


Figura 4.13: a) Diseño del modelo experimental para DNS y b) diseño de un sistema simplificado.

Los resultados de la comparación de las simulaciones numéricas directas para el modelo del sistema experimental completo, así como en la celda unitaria simplificada se muestran en la Figura 4.14. La celda unitaria es una forma de representar el modelo de una manera simplificada. Aunado

a ello, numéricamente es menos costoso que resolver el problema en el dominio completo del sistema.

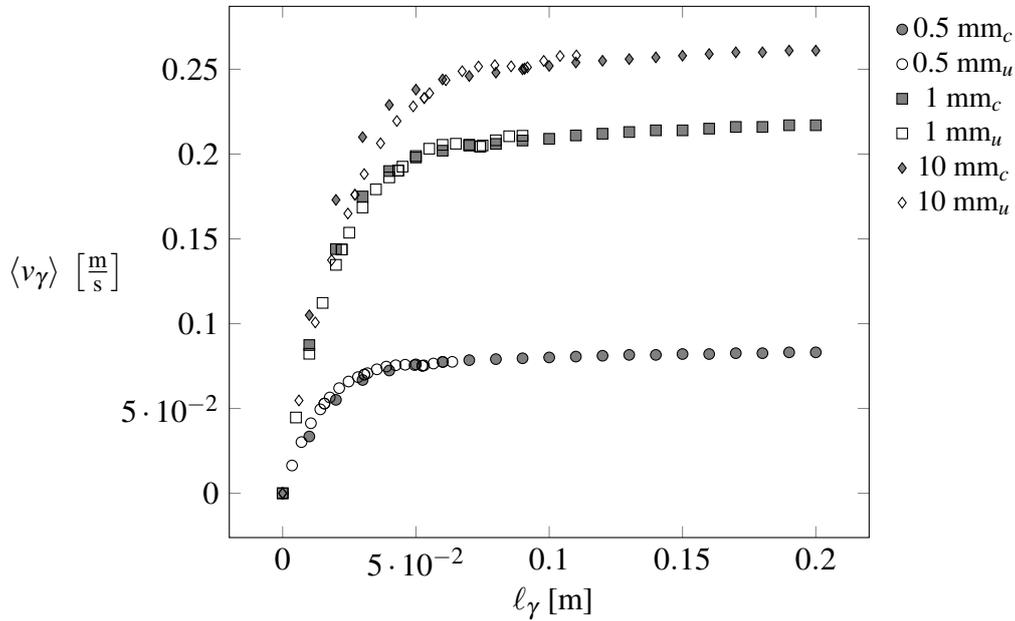


Figura 4.14: Obtención de la velocidad terminal de burbuja en un sistema líquido-gas experimental (Talaia, 2007) con geometría completa (subíndice c), contra una celda unitaria (subíndice u) de $5 \times 20 \ell_{\gamma}$ utilizando el planteamiento de las ecuaciones (6.1)-(6.6).

En la comparación de los modelos se obtiene un error numérico de 6.76 %, 2.86 % y 1.08 % para los tamaños de burbuja ℓ_{γ} de 0.5 mm, 1 mm y 10 mm, respectivamente. Al obtener un error numérico debajo del 7 % en general, se procedió a comparar los valores de la celda unitaria de la Figura 4.13b) para el modelo de dos ecuaciones descrito en (6.1)-(6.6) y el modelo de una ecuación descrito en las ecuaciones (6.62), ambos contra los datos experimentales de Talaia (2007)

Al calcular el error experimental promedio entre los datos experimentales y los valores de las simulaciones numéricas directas es de 12.52 % y 12.36 % para el modelo de una y de dos ecuaciones, respectivamente. A partir de este punto y con estos resultados, se parte hacia el análisis de la obtención de los modelos promedio con el método del promedio volumétrico, como se muestra a detalle en el Capítulo 6.

4.3 Características del sistema experimental trifásico (líquido-sólido-gas)

El sistema experimental, que en este caso es meramente descriptivo, se muestra en la Figura 4.16a) y corresponde al sistema de fluidización trifásica descendente líquido-sólido-gas, que es la suma de los análisis experimentales líquido-sólido y líquido-gas. En este caso el flujo del fluido es

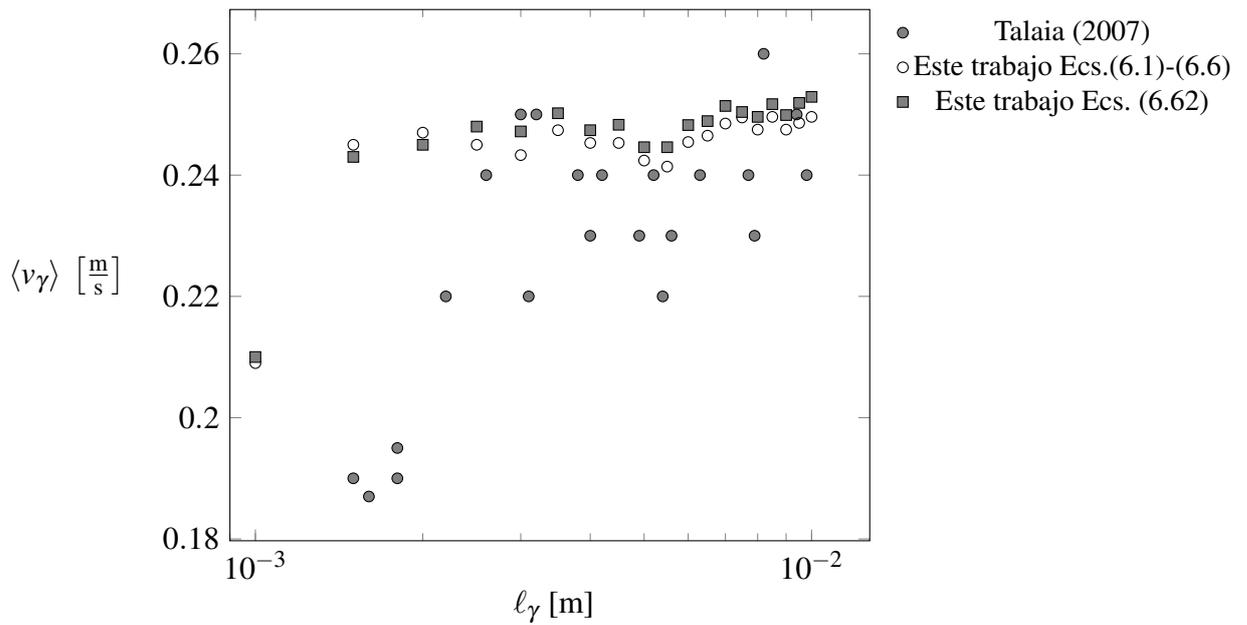


Figura 4.15: Obtención de la velocidad terminal de burbuja en un sistema líquido-gas experimental (Talaia, 2007) en una celda unitaria, utilizando la DNS con el planteamiento de los modelos de una y dos ecuaciones contra los datos experimentales del mismo trabajo.

de manera descendente y el flujo de gas es de forma ascendente, lo cual, genera un mezclado del lecho que experimentalmente es complicado de describir.

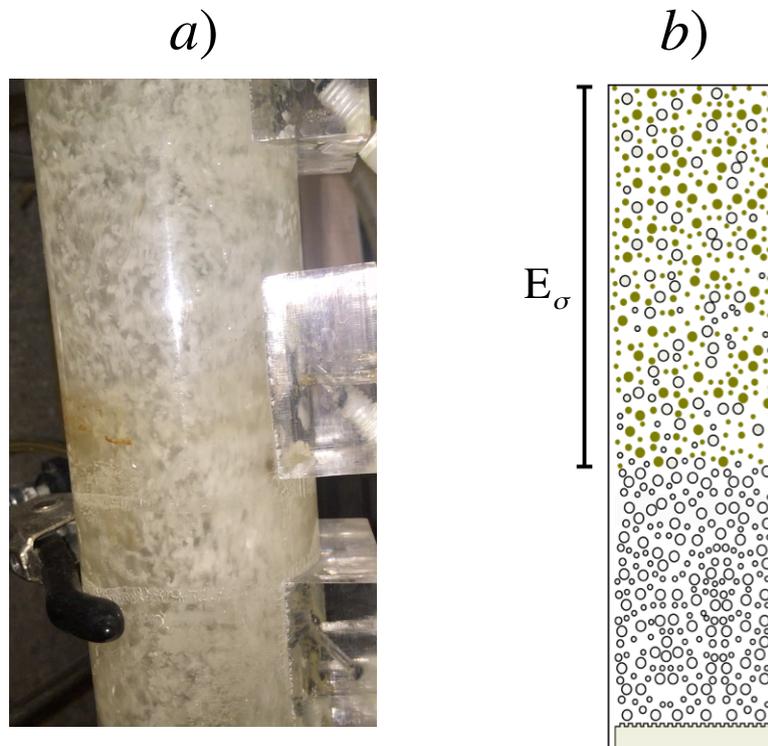


Figura 4.16: a) Operación del sistema trifásico líquido-sólido-gas en la región central del lecho fluidizado y b) esquema del sistema trifásico indicando la expansión del lecho de partículas sólidas.

Aunado a lo anterior se describe un esquema en la Figura 4.16b) que representa la expansión del lecho durante la interacción del sistema trifásico, el cual, contiene la siguiente restricción de escala debido a que se considera que es una suma de los análisis anteriores

$$\text{máx}(\ell_{\beta}, \ell_{\sigma}, \ell_{\gamma}) < r_0 < \text{mín}\{d_R, L_R\} \quad (4.4)$$

con esta restricción, de la misma manera que en los modelos anteriores, en el Capítulo 7 se describirán las ecuaciones y correspondientes al sistema trifásico del lecho fluidizado descendente.

4.4 Resumen del Capítulo

En este capítulo se caracterizó experimentalmente el sistema de fluidización líquido-sólido, líquido-gas y sólido líquido-gas. Para ello, fue necesario operar el sistema y familiarizarse con las variables físicas involucradas como son: las dimensiones del sistema, el sistema de bombeo, el tipo soporte añadido que en este caso particular se utilizó polietileno de baja densidad y polipropileno. Estos materiales dan paso al análisis de sus características físicas tales como: distribución de los tamaños de partícula, esfericidad, densidad, velocidad de flotación en ascenso libre, adherencia e hidrofobicidad.

En la primera parte, para el sistema bifásico líquido-sólido, se caracterizaron también, la velocidad de expansión del lecho, la velocidad de fluidización, la velocidad de arrastre y la caída de presión para los diferentes materiales involucrados. Una vez realizado esto, se describió el proceso y se determinaron las características de operación y fracciones volumétricas del sólido añadido y del fluido, que permitieron observar nuevamente las diferentes velocidades de fluidización bajo estos parámetros.

Se analizaron los diámetros equivalentes de las partículas sólidas a través de un análisis digital de imágenes por medio del software de Matlab y se determinó la esfericidad promedio. Aunado a ello, se utilizaron las imágenes del sólido en el lecho fluidizado para determinar la región de promediado. Para ello, se realiza un barrido para diferentes tamaños de región de promediado como se muestra la Figura 4.4b). Se comienza con una región de promediado cercana al orden de magnitud del tamaño de partícula y se incrementa hasta que la fracción volumétrica tenga un comportamiento constante. El punto final de esta parte del trabajo fue la determinación de la región

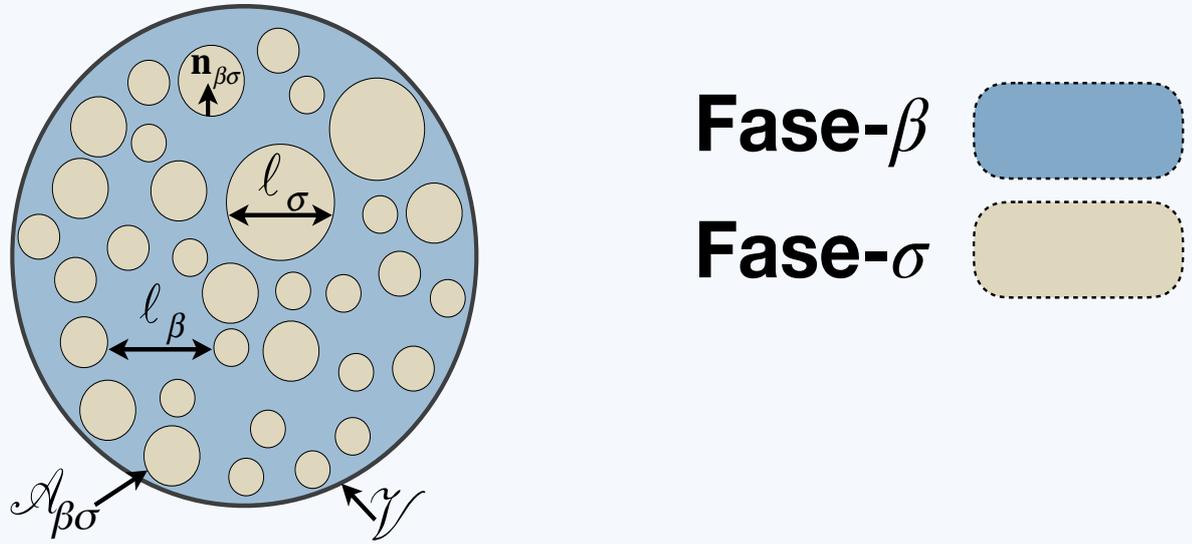
de promediado de la que depende la utilización del método del promedio volumétrico. En dicha región, se determina la velocidad de la fase sólida promedio, la cual se utiliza como condición en el planteamiento de las ecuaciones.

En la segunda parte de este capítulo se caracteriza experimentalmente el sistema de fluidización descendente bifásico líquido-gas. Del mismo modo que en el sistema líquido-sólido, se opera el sistema para familiarizarse con las variables físicas involucradas como el sistema de bombeo, el difusor de aire y la velocidad de entrada de la fase gaseosa. El análisis para los tamaños de burbuja están determinados por el tamaño de poro en el difusor. En este caso, se usa un difusor que establece tamaños de burbuja del mismo orden de magnitud que las partículas sólidas. Esto último, muestra una disparidad de escalas característica y con ello, se determina la región de promediado de la fase gaseosa, del mismo tamaño que para el modelo líquido-sólido.

Una vez obtenida la región de promediado, se determina durante el desarrollo experimental que solo es necesario obtener la velocidad terminal de una burbuja. Este tipo de experimentos están ampliamente descritos en la literatura y son utilizados como punto de comparación para desarrollar experimentos numéricos. Dichos experimentos, se llevan a cabo por medio de soluciones numéricas directas de las ecuaciones de transporte asociadas al modelo líquido-gas.

Aunado a lo anterior, se realizan experimentos numéricos para determinar la velocidad terminal de una burbuja en el sistema, lo que conduce a utilizar simulaciones numéricas directas. Dichas simulaciones se realizan por medio de la ecuación de fase level-set y por el método de malla movable. Ambas relaciones se utilizaron para predecir la velocidad terminal de la fase gaseosa. Más adelante se utilizó el método de malla movable para comparar los resultados con datos experimentales disponibles en la literatura y con los modelos predictivos descritos en la Tabla 1.2, dando resultados aceptables, por lo que se pudo comenzar con el planteamiento de modelo promedio.

Finalmente, para el sistema trifásico líquido-sólido-gas, se propuso que sea la suma de los análisis experimentales líquido-sólido y líquido-gas. Esto significa que las características físicas y las regiones de promediado no varían respecto de los modelos anteriores y por tanto se puede empezar el análisis del modelado desde este punto. En esencia, el modelo trifásico líquido-sólido-gas, contiene las restricciones de escala obtenidas en los modelos anteriores.



5. Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-sólido

En este capítulo se desarrolla un modelo de medio efectivo para estudiar el sistema de fluidización de flujo descendente bifásico líquido-sólido del lecho fluidizado de acuerdo a la caracterización experimental descrita en el Capítulo 4 y con ello se busca desarrollar un modelo de medio efectivo. Este modelo macroscópico representa la interacción entre la fase β y la fase- σ en promedio, que en este caso, se supone que se mueven a la misma velocidad. El modelo se desarrolla en una porción del reactor, que está lo suficientemente lejos de los límites macroscópicos superior, inferior y de la pared siguiendo la metodología del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

De acuerdo con la representación mostrada en la Figura 5.1, l_β y l_σ son las longitudes características de la fase- β y la fase- σ respectivamente, r_0 es la muestra representativa de la región de promediado, $A_{\beta\sigma}$ representa la interfaz entre el sólido y el fluido y $\mathbf{n}_{\beta\sigma}$ es el vector unitario normal dirigido desde la fase fluida hacia la fase sólida y \mathcal{V} es la región representativa. Para la fase fluida, se asocia el flujo de fluido newtoniano, incompresible e isotérmico en estado estacionario. A partir de esto, se proponen las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes para describir el transporte de masa y de cantidad de movimiento en el fluido, en este caso las propiedades físicas

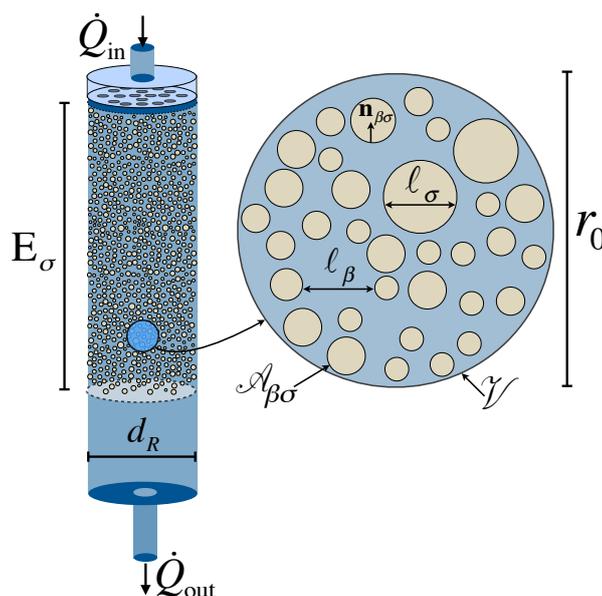


Figura 5.1: Muestra representativa del sistema de fluidización que modela a las fases β y σ en una región representativa r_0 .

del fluido se consideran constantes, dando lugar así a las siguientes ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase-}\beta \quad (5.1)$$

$$\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase-}\beta \quad (5.2)$$

Para la condición de frontera de la interfaz, se consideró que la velocidad del sólido (fase- σ) debe ser la misma que la del fluido (fase- β), esto es razonable debido a que no hay intercambio de masa entre las fases involucradas

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\sigma \quad \text{at } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.3)$$

De acuerdo con Whitaker (1999), para comenzar con el suavizado espacial del modelo a escala de poro, se introduce un operador de promediado superficial a una propiedad, ψ_β , definida en todas partes en la fase fluida como se describe abajo

$$\langle \psi_\beta \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi_\beta dV \quad \text{donde } \psi_\beta = \mathbf{v}_\beta, p_\beta \quad (5.4)$$

donde \mathcal{V}_β representa el espacio de la fase β contenida en la región promedio \mathcal{V} . Si bien la velocidad del fluido en la macroescala generalmente se reporta como un promedio superficial, no ocurre lo

mismo con la presión, que generalmente se expresa en términos del *promedio intrínseco*, que es la representación preferida en la práctica y se define por

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \psi_\beta dV \quad \langle \psi_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle \psi_\beta \rangle^\beta \quad (5.5)$$

Tanto la velocidad como la presión pueden descomponerse en términos de su promedio intrínseco y desviaciones espaciales de la siguiente manera (Gray, 1975)

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad p_\beta = \langle p_\beta \rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \quad (5.6)$$

Antes de comenzar con el promediado de las ecuaciones que gobiernan a la fase fluida, vale la pena señalar que se requiere conocer la velocidad de la interfaz como se indica en la ecuación (5.3). Este problema se puede superar de varias maneras, por ejemplo, considerando las ecuaciones que rigen la fase sólida y uniéndolas con las de la fase fluida. Sin embargo, como primer enfoque, se propone que las desviaciones espaciales de la velocidad de las partículas son insignificantes en comparación con la velocidad media¹ en esta interfaz, esto significa que $\tilde{\mathbf{v}}_\sigma \ll \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma$; a partir de esto, la condición de frontera de la interfaz se puede expresar de la siguiente manera

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma \quad \text{at } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.7)$$

bajo estas condiciones, la velocidad $\langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma$ como se muestra en la Sección 4.1, se determina experimentalmente y se considerará como un parámetro dado para el modelo.

5.1 Ecuaciones promedio

Siguiendo el método del promedio volumétrico, se aplica el operador de promediado de la ecuación de continuidad en (5.1), que lleva a (consultar detalles en el Apéndice A en las ecuaciones (A.1)-(A.7) basados en las notas del Capítulo 4 de Whitaker (1999).)

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (5.8)$$

¹Los cálculos experimentales de la velocidad de las partículas en el lecho fluidizado, se desarrollan en el sistema experimental donde se determinó dicha velocidad.

El desarrollo de la expresión promedio para el transporte de cantidad de movimiento es extensa y, por brevedad, los detalles se presentan en el Apéndice A en las ecuaciones (A.8)-(A.31). Aquí simplemente se expresa el resultado como sigue

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta dA \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para obtener estos resultados, se han tomado las siguientes suposiciones: no hay transferencia de masa entre las fases β y σ , la incompresibilidad del fluido y la porosidad ε_β es constante en la posición. Para cerrar las ecuaciones promedio, es necesario determinar las desviaciones espaciales de la velocidad y la presión, para hacer esto, y de la descomposición de la ecuación (5.6), se hace uso de la ecuación de continuidad promedio (5.8) y la ecuación puntual (5.1), para obtener

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = - \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{Fuente}} \quad (5.10)$$

y de acuerdo con el análisis realizado en la Sección 4.1 sobre la determinación de la región promedio r_0 , la porosidad ε_β es constante en la posición, lo que lleva a

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = 0 \quad (5.11)$$

Después de esto, se usa la definición de la ecuación (5.6), y se resta la ecuación promedio (5.9) a la ecuación puntual (5.2) y con la ayuda de órdenes de análisis de magnitud, (consulte los detalles en el Apéndice A en las ecuaciones (A.32)-(A.45)) se obtiene la siguiente expresión

$$\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \quad \text{en la fase-}\beta \quad (5.12)$$

La condición de frontera de la interfaz, surge de la sustitución de las descomposiciones espaciales de la ecuación (5.6), en la expresión (5.3), y puede escribirse como

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{(\langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta)}_{\text{Fuente}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.13)$$

Para resolver el problema de cerradura, es necesario conocer las condiciones de frontera en las entradas y las salidas del dominio de la solución. Por conveniencia, se elige resolver el problema en una celda unitaria periódica, que es una aproximación del estudio, que para muchos casos es razonable. Así se proponen las siguientes condiciones de frontera

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\beta}(\mathbf{r} + \ell_i) = \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}(\mathbf{r}) \quad \tilde{p}_{\beta}(\mathbf{r} + \ell_i) = \tilde{p}_{\beta}(\mathbf{r}) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3 \quad (5.14)$$

Finalmente, la separación de las escalas permite tratar las cantidades promedio como constantes dentro del dominio de integración, lo anterior, lleva a las siguientes restricciones de promedio para los campos de desviaciones

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}_{\beta} \rangle^{\beta} = 0 \quad \langle \tilde{p}_{\beta} \rangle^{\beta} = 0 \quad (5.15)$$

5.2 Problema de cerradura

Debido a la linealidad del problema, su solución formal se puede escribir en términos del término fuente de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\beta} = \mathbf{B}_{\beta} \cdot (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta} - \langle \mathbf{v}_{\sigma} \rangle^{\sigma}) \quad (5.16)$$

$$\tilde{p}_{\beta} = \mu_{\beta} \mathbf{f}_{\beta} \cdot (\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta} - \langle \mathbf{v}_{\sigma} \rangle^{\sigma}) \quad (5.17)$$

donde \mathbf{B}_{β} y \mathbf{f}_{β} son variables de cerradura que registran el efecto de la fuente en las desviaciones. Desde este punto, se pueden sustituir las ecuaciones (5.16) y (5.17) en el problema de las desviaciones y con esto se tiene el siguiente problema de valor de límite para las variables de cerradura:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\beta} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

$$\left(\frac{\rho_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}}{\mu_{\beta}} \right) \cdot \nabla \mathbf{B}_{\beta} = -\nabla \mathbf{f}_{\beta} + \nabla^2 \mathbf{B}_{\beta} + \varepsilon_{\beta} \mathbf{H}_{\beta}^{-1} \quad \text{en la fase-}\beta \quad (5.19)$$

$$\mathbf{B}_{\beta} = -\mathbf{l} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (5.20)$$

$$\langle \mathbf{B}_{\beta} \rangle^{\beta} = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{f}_{\beta} \rangle^{\beta} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{r} + \ell_i) = \mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_{\beta}(\mathbf{r} + \ell_i) = \mathbf{B}_{\beta}(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.22)$$

donde la velocidad \mathbf{v}_β se considera un campo conocido en la ecuación (5.18), y siguiendo a Whitaker (1996) se presenta el tensor de permeabilidad aparente como sigue

$$\varepsilon_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} = -\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{f}_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \quad (5.23)$$

5.2.1 Ecuación cerrada

Sustituyendo la solución formal de las ecuaciones (5.16) y (5.17), en la ecuación (5.9), se obtiene la forma cerrada de la ecuación de transporte que se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \varepsilon_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta \varepsilon_\beta \nabla \cdot \left[(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma) \cdot \langle \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \rangle \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma) \right] = \\ & -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma) \\ & + \mu_\beta \nabla \cdot \left(\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{B}_\beta \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma) dA \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Aquí se puede introducir un cambio de variable a la velocidad relativa del fluido respecto del sólido en la interfaz $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ como

$$\langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma \quad (5.25)$$

De esta forma, solo es necesario calcular el coeficiente \mathbf{H}_β^{-1} , debido a las contribuciones en la ecuación (5.24) de los efectos inerciales causados por la interacción con la pared y el coeficiente medio efectivo de tercer orden no contribuyen significativamente, con ello se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{0} = -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} - \mu_\beta \varepsilon_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle \quad (5.26)$$

Esta ecuación puede reacomodarse para obtener el gradiente de presión en términos de las fuerzas volumétricas y la permeabilidad aparente con la contribución de la velocidad relativa del sólido al fluido de la siguiente manera

$$\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta = \rho_\beta \mathbf{g} - \mu_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle \quad (5.27)$$

Cada término representa la fuerza por unidad de volumen del fluido y esta es una forma conveniente para determinar la caída de presión en lechos fluidizados bajo el supuesto de que el lecho se comporta como un medio poroso rígido y homogéneo (Darcy, 1856; Blake, 1922; Ergun, 1952; Joseph y *col.*, 1982; Givler & Altobelli, 1994; Jamialahmadi y *col.*, 2005; Kaviani, 2012). Vale la pena mencionar que este resultado funciona para ambos tipos de fluidización, ya que la dirección del flujo se toma en cuenta en las condiciones de frontera macroscópicas y en la velocidad de la fase sólida.

5.3 Resultados y discusión

Dado que el problema original de las ecuaciones (5.18) - (5.22) es integrodiferencial, es preferible escribirlo en una forma puramente diferencial como lo sugiere Whitaker (1996), por lo tanto, se propone un cambio de variables para $\langle \mathbf{B}_\beta \rangle^\beta$ y $\langle \mathbf{f}_\beta \rangle^\beta$, como sigue

$$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{H}_\beta^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\beta - \mathbf{I} \qquad \mathbf{f}_\beta = \mathbf{m}_\beta \cdot \mathbf{H}_\beta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^{-1} \qquad (5.28)$$

lo que da lugar al siguiente problema de cerradura

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_\beta = 0 \qquad (5.29)$$

$$\left(\frac{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta}{\mu_\beta} \right) \cdot \nabla \mathbf{M}_\beta = -\nabla \mathbf{m}_\beta + \nabla^2 \mathbf{M}_\beta + \mathbf{I} \quad \text{en la fase-}\beta \qquad (5.30)$$

$$\mathbf{M}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \qquad (5.31)$$

$$\langle \mathbf{M}_\beta \rangle = \mathbf{H}_\beta \quad \langle \mathbf{m}_\beta \rangle^\beta = 0 \qquad (5.32)$$

$$\mathbf{m}_\beta(\mathbf{r} + \ell_i) = \mathbf{m}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}_\beta(\mathbf{r} + \ell_i) = \mathbf{M}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \qquad (5.33)$$

Debido a que la solución del problema de cerradura depende de la velocidad puntual (o microscópica) del sistema, como se muestra en la ecuación (5.30), es necesario calcularlo en la celda unitaria resolviendo el problema puntual de las ecuaciones (5.1) y (5.2) antes de resolver el problema de cerradura. Con esto, se obtienen los perfiles de la velocidad microscópica acoplada al problema de cerradura en las celdas unitarias de la geometría vectorizada descrita en el Capítulo 4 en la Figura 4.6, como se muestra en la Figura 5.2.

Con los campos de las variables de cerradura disponibles, ahora se pueden predecir los compo-

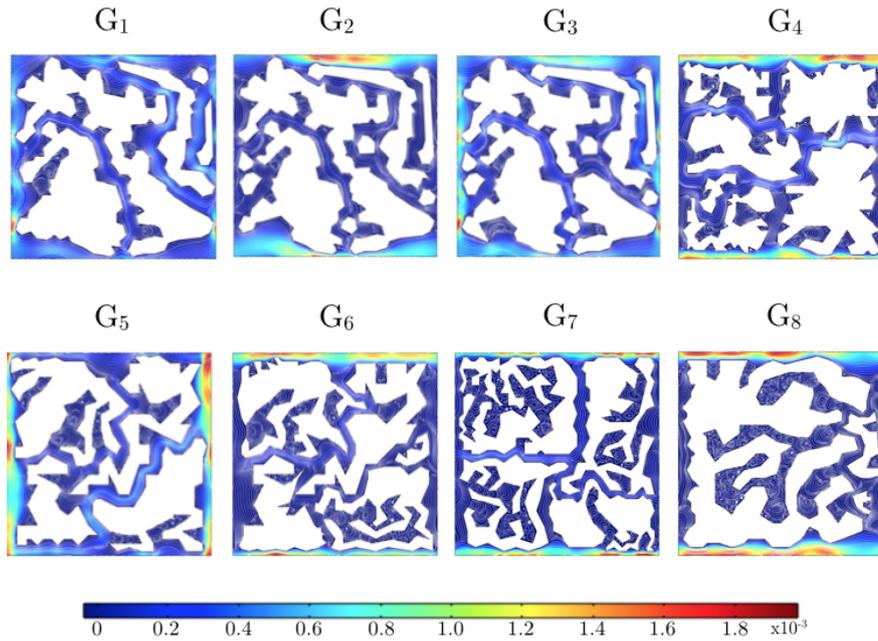


Figura 5.2: Ejemplos de los campos de las variables de cerradura $H_{\beta,xx}$ obtenido para diferentes geometrías en el sistema líquido-sólido: $G_1(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_2(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_3(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_4(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_5(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_6(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_7(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$, $G_8(\varepsilon_{\beta} = 0.45)$.

mentos xx y zx del tensor de permeabilidad aparente \mathbf{H}_{β} con la relación descrita en la ecuación (5.32), en cada geometría. De acuerdo con la restricción escala de la ecuación (4.2), y para determinar el tamaño de la celda unitaria que se usa, se desarrolla el cálculo de los componentes xx y zx como se ve en la Figura 5.3a) y 5.3b) respectivamente. En cada figura, se muestra que el tamaño de la región promediada r_0 es consistente con la obtenida en el análisis de porosidad fluidizada (ε_{β}) en la Figura 4.5.

Una vez corroborado el tamaño promedio de la región, se puede calcular la magnitud del tensor de permeabilidad aparente, $\|\mathbf{H}_{\beta}\|$ para cada geometría como se muestra en la Figura 5.4. Se observa que no hay ningún cambio en los valores de permeabilidad para diferentes valores de número de Reynolds, que se define por

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\beta} \|\mathbf{v}_{\beta}\| \ell_{\beta}}{\mu_{\beta}} \quad (5.34)$$

hasta que el valor de $\text{Re} = 1 \times 10^5$ donde disminuye. El valor para el Reynolds utilizado para este sistema debe estar alrededor de 1×10^3 ; sin embargo, se decidió variar los valores para tener en cuenta la sensibilidad del modelo con respecto a este número adimensional. Estos resultados son consistentes con el reportado por Lasseux y *col.* (2011), donde mostraron que para apreciar cambios

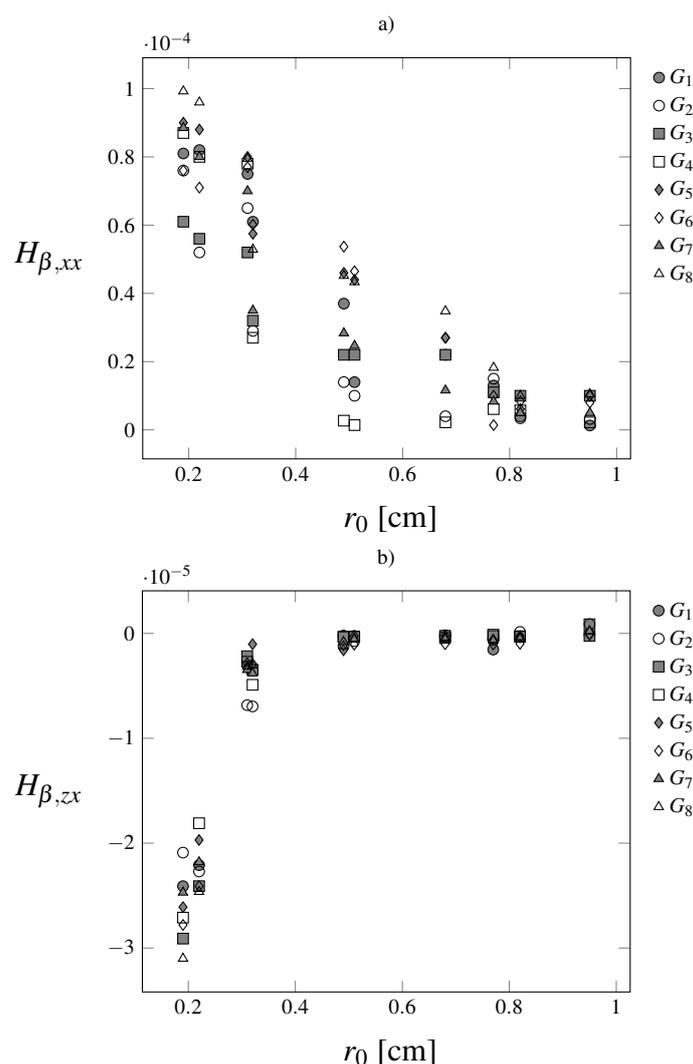


Figura 5.3: Predicción de los componentes del tensor H_β para la determinación del tamaño de la región de promediado r_0 en el componente a) xx y el componente b) zx .

más drásticos en el tensor, se requieren valores más altos del número de Reynolds.

Después de esto, se explora la influencia de diferentes ángulos de flujo como se ve en la Figura 5.5. Se observa que la permeabilidad disminuye si el ángulo del fluido con respecto a la partícula es paralelo. Esto significa que la fuerza se equilibra en la fase- σ cuando aumenta el ángulo de ataque de la fase- β . Con el análisis anterior, en las Figuras 5.4 y 5.5 se puede tener para este caso, los valores donde oscila la permeabilidad aparente. Los valores más bajos para la permeabilidad aparente se alcanzan en combinaciones de números de Reynolds superiores a 1×10^5 y con incidencias de ángulo de flujo perpendicular a la fase σ .

El siguiente paso es examinar la validez del uso de geometrías simplificadas para representar los resultados mostrados anteriormente en el procesamiento de imágenes del sistema experimental.

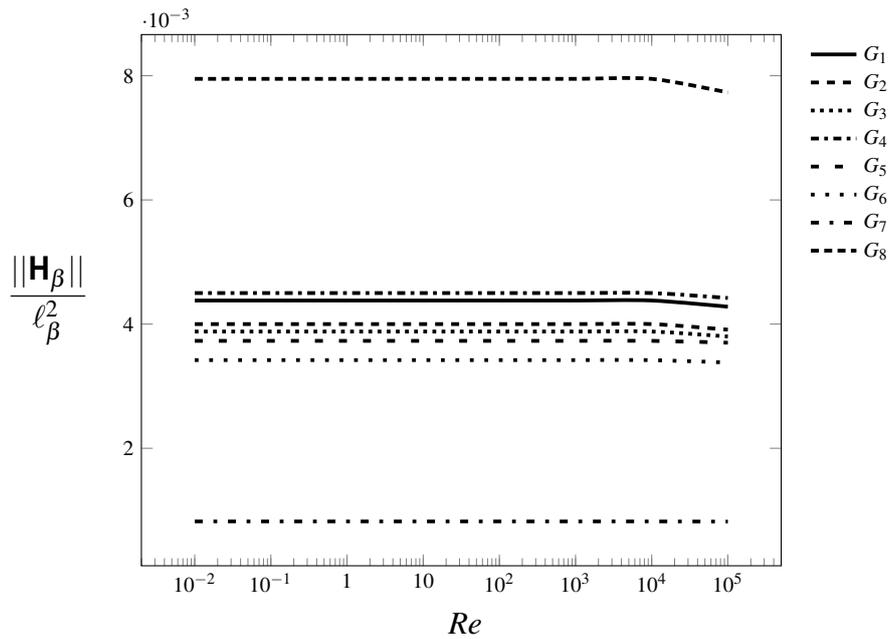


Figura 5.4: Dependencia del valor de la magnitud de la permeabilidad aparente $\|\mathbf{H}_\beta\|$ para cada geometría para diferentes valores del número de Reynolds.

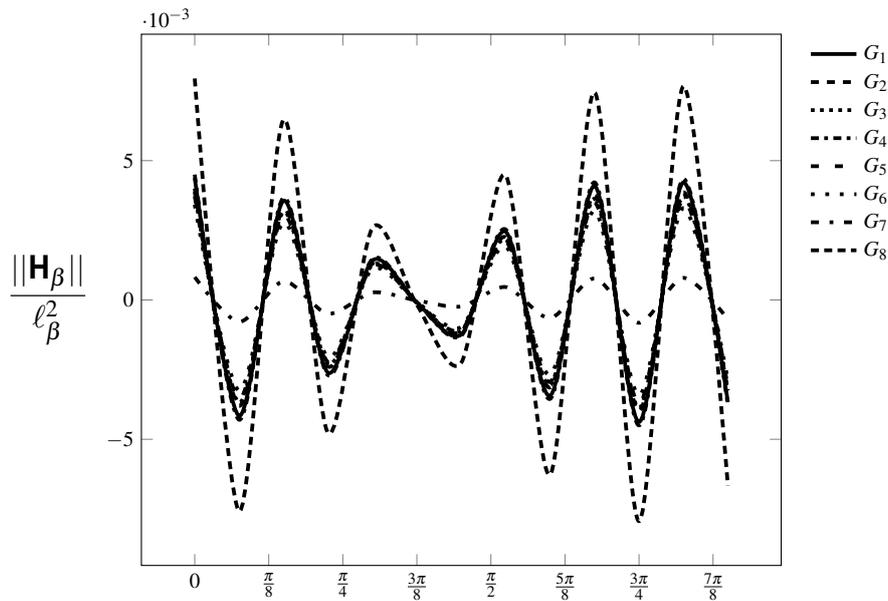


Figura 5.5: Calculo de la magnitud del tensor de permeabilidad aparente $\|\mathbf{H}_\beta\|$, a diferentes ángulos de incidencia con $Re=1 \times 10^3$

Para este fin, se organizan cuadrados y círculos según la relación del diámetro de partícula y el tamaño de la región promedio r_0 como se ve en la Figura 5.6.

Cuando se usa la aproximación de una geometría simplificada, se observa que su uso en una matriz de cuadrados tiene un error relativo de 16% con respecto a las geometrías vectorizadas, siempre que la relación de ℓ_σ y r_0 permanezca, es una aproximación aceptable, y para lo anterior,

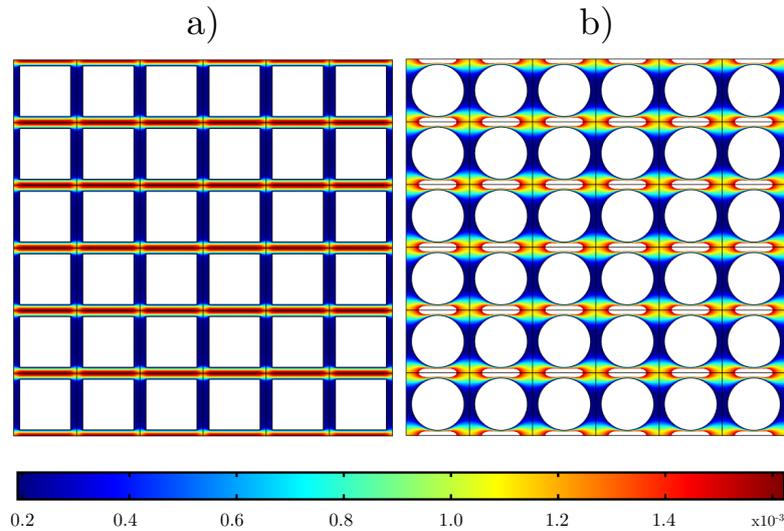


Figura 5.6: Muestras representativas de la variable de cerradura adimensional para diferentes conjuntos de celdas unitarias de a) cuadrados y b) círculos, con la porosidad media obtenida para las geometrías en la Figura 5.2, $\varepsilon_\beta=0.45$ y $Re=1 \times 10^4$.

se pueden proponer diferentes arreglos de tamaño de partícula como se ve en la Figura 5.7. Los valores de la permeabilidad se informan en la Tabla 5.1, donde las predicciones se comparan con las de la ecuación de Carman-Kozeny descrita en el Capítulo 1 en la ecuación (1.2) para determinar la permeabilidad aparente en medios porosos.

Tabla 5.1: Valores de la permeabilidad aparente para diferentes geometrías.

Geometría	Permeabilidad aparente
Geometría vectorizada	2.56×10^{-9}
Arregle de cuadrados	2.21×10^{-9}
Arreglo de círculos	1.08×10^{-9}
Carman-Kozeny	1.03×10^{-9}

Los valores de la permeabilidad aparente obtenida para cada una de las geometrías descritas en la Figura 5.7 se muestran de manera gráfica en la Figura 5.8, ésto último es evidencia de la influencia de la geometría en la permeabilidad aparente. En otras palabras, el fluido en su intento de pasar entre las partículas busca los canales preferenciales que le permiten ser transportado. Esto se observa en el análisis previo de los diferentes ángulos, porque para un ángulo paralelo del fluido, que puede ser considerado en este caso como canales preferenciales, la permeabilidad aparente aumenta. Otra observación es que al aumentar el tamaño de partícula, la permeabilidad aumenta pero no para todos los casos, porque la región promedio quizás no sea la misma si se aumenta demasiado el

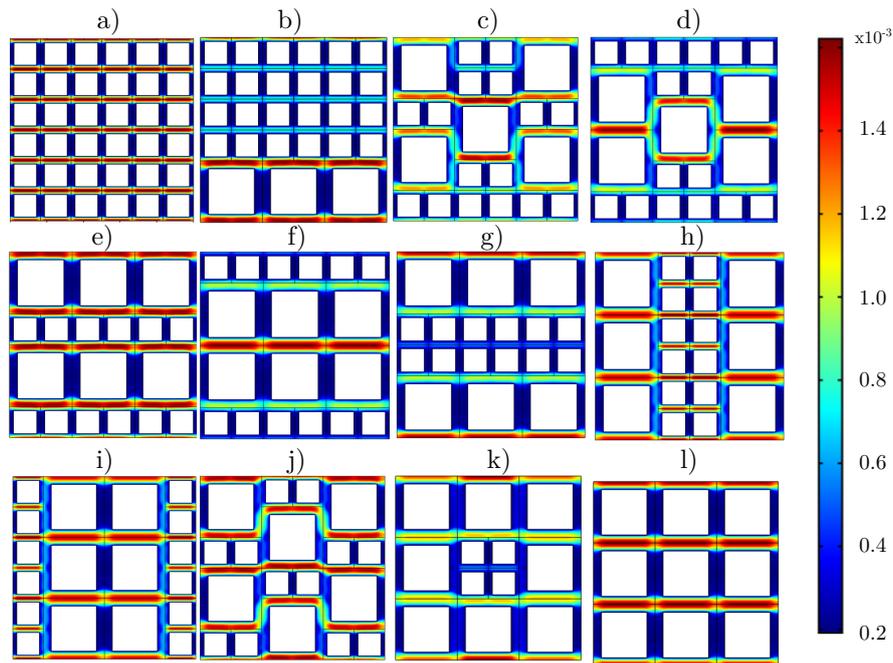


Figura 5.7: Muestras representativas de la variable de cerradura adimensional para diferentes tamaños y distribuciones de partículas. Se muestran dos tamaños de partículas diferentes, ℓ_σ y $2\ell_\sigma$ (0.8mm y 1.6 mm respectivamente).

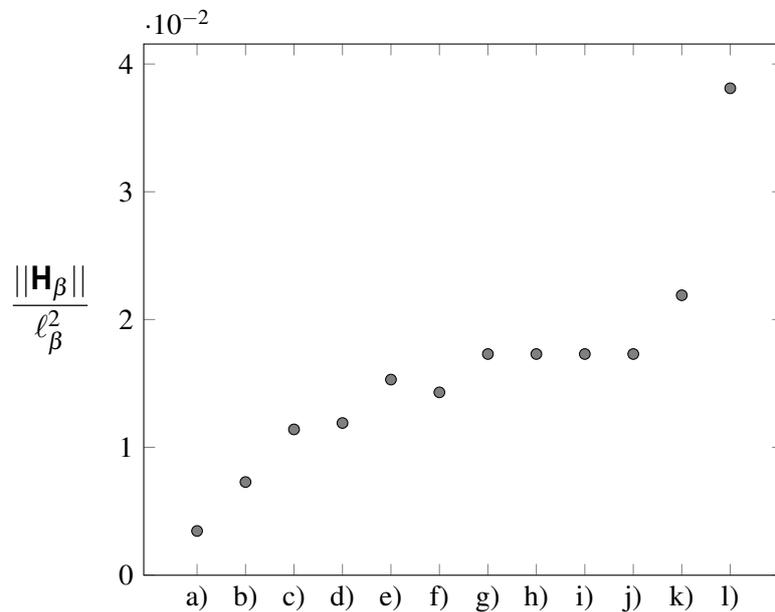


Figura 5.8: Cálculo del valor de la permeabilidad aparente $||\mathbf{H}_\beta||$ para las diferentes muestras de celdas unitarias mostradas en la Figura 5.7.

tamaño de partícula. Esto puede ser útil para comprender la influencia de diferentes tamaños de partículas en el reactor.

Las correlaciones generalmente utilizadas para determinar la caída de presión en lechos flui-

dizados se describen bajo el supuesto de que el lecho se comporta como un medio poroso rígido y homogéneo (Darcy, 1856; Blake, 1922; Ergun, 1952; Joseph *y col.*, 1982; Givler & Altobelli, 1994; Jamialahmadi *y col.*, 2005; Nield & Bejan, 2006; Kaviany, 2012), y de lo anterior, se usa la ecuación obtenida en (5.27), donde la relación para el gradiente de presión en el sistema de fluidización se expresa como una ecuación del transporte de momento en medios porosos con la corrección de la velocidad relativa del sólido en relación con el fluido en la interfaz $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ como se describe en la ecuación (5.25)

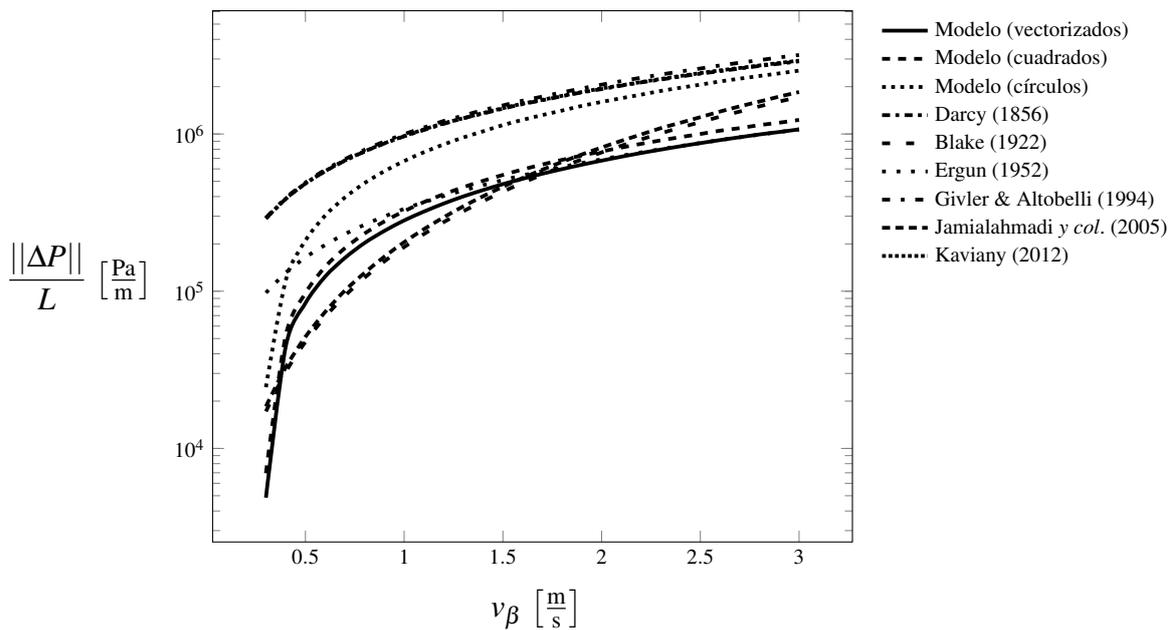


Figura 5.9: Comparación con otros modelos para la determinación de la presión en medios porosos.

En la Figura 5.9, se usa el valor de la permeabilidad para los otros modelos (ver las ecuaciones en la Tabla 1.1) obtenida por la ecuación de Carman-Kozeny descrita en la ecuación (1.2). Se observa que las simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo, para la celda unitaria de geometrías vectorizadas en la Figura 5.2 y la matriz cuadrada simplificada en la Figura 5.6a), están cerca de la predicción de la ecuación de Ergun (Ergun, 1952). Por otro lado, la matriz de círculos simplificada en la Figura 5.6a) está muy cerca de las ecuaciones de Darcy (1856), Blake (1922), Kaviany (2012) y Givler & Altobelli (1994), que son las ecuaciones para describir la permeabilidad de la ley de Darcy, la ecuación de Blake-Kozeny y la ley de Darcy con la corrección de Brinkman, respectivamente.

En este caso, se supone que los valores de la permeabilidad aparente obtenida de la solución del problema de cerradura en las celdas unitarias con diferentes geometrías (vectorizadas o simplifi-

cadadas), tienen resultados consistentes a los obtenidos previamente para las ecuaciones de Darcy y Ergun. Esto nos permite utilizar el modelo promedio obtenido para predecir la caída de presión en los lechos fluidizados, teniendo en cuenta la velocidad relativa del sólido con respecto al fluido.

5.4 Artículo publicado

Cabe señalar que los resultados obtenidos de este Capítulo, se encuentran publicados en la revista indexada *International Journal of Chemical Reactor Engineering* (Benítez-Olivares y col., 2017)

5.5 Resumen de capítulo

En este capítulo se desarrolla un modelo de medio efectivo de un lecho fluidizado descendente líquido-sólido. Se plantean ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y de transferencia de masa total para la fase líquida. La velocidad promedio de la fase sólida obtenida experimentalmente, se incluye en la condición de frontera de continuidad en la velocidad. Para desarrollar el modelo, se parte de las ecuaciones que gobiernan el transporte de cantidad de movimiento descritas en (5.1)-(5.3), mediante un proceso de escalamiento.

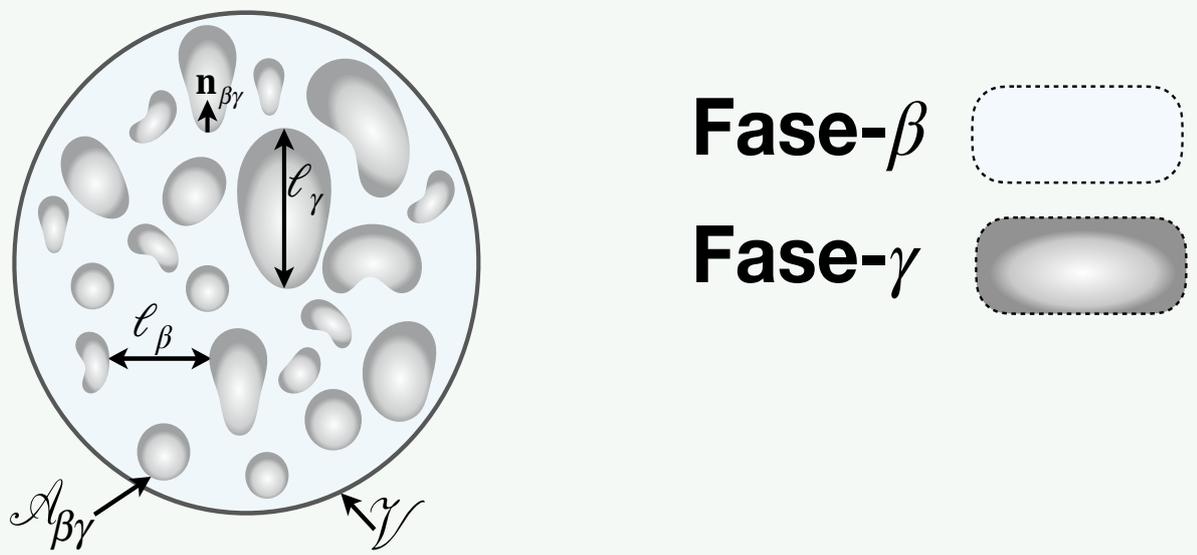
Cabe señalar que en el análisis del Capítulo 4 se muestra que la fracción volumétrica se considera constante en el volumen de estudio y el modelo se desarrolla para la porción homogénea del reactor, es decir, no aplica en las fronteras superior e inferior del sistema. Bajo esta suposición y siguiendo el método propuesto, se aplica un operador de promediado superficial y un promedio intrínseco definidos en el volumen de la región de promediado a la ecuación de transporte de la fase fluida. Una vez realizado esto se propone una descomposición espacial en la velocidad y en la presión y a través de análisis de órdenes de magnitud, se obtiene una ecuación promedio con términos de desviaciones espaciales como se muestra en la ecuación (5.9).

Para obtener la solución formal, se desarrollan problemas de cerradura a partir de las variables de las desviaciones en términos de las fuentes. Una vez que se obtiene la solución formal para el sistema líquido-sólido, se determina la permeabilidad aparente, que es uno de los coeficientes de transporte asociados para este modelo. Dicho modelo, apoya la descripción y la comprensión de la dinámica del sólido junto con el fluido a través de los grados de libertad que tiene. El modelo desarrollado contiene la información de las velocidades involucradas en el sistema, ligadas a través de la condición de frontera. Al resolver el modelo bifásico, se lleva a cabo un análisis paramétrico

del sistema líquido-sólido que describe el transporte de la cantidad movimiento en el sistema. El modelo y la caracterización anterior, ponen a prueba la validez de las suposiciones impuestas en las ecuaciones para las fases líquido-sólido utilizando el resolutor de elementos finitos comercial Comsol Multiphysics 5.2.

Finalmente, se analizan los resultados de la permeabilidad aparente del sistema. En este caso, se supone que la predicción de los valores de la permeabilidad aparente, se puede realizar en celdas unitarias con diferentes geometrías ya sean vectorizadas o simplificadas. El modelo promedio obtenido, predice la caída de presión en los lechos fluidizados y al ser comparado con los modelos descritos en la Tabla 1.1, muestra que las simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo, para la celda unitaria de geometrías vectorizadas en la Figura 5.2 y la matriz cuadrada simplificada en la Figura 5.6a), están cerca de la predicción de la ecuación de Ergun (Ergun, 1952). Por otro lado, la matriz de círculos simplificada en la Figura 5.6a) está muy cerca de las ecuaciones de Darcy (1856), Blake (1922), Kaviani (2012) y Givler & Altobelli (1994), que son las ecuaciones para describir la permeabilidad de la ley de Darcy, la ecuación de Blake-Kozeny y la ley de Darcy con la corrección de Brinkman, respectivamente.

En este caso, se supone que los valores de la permeabilidad aparente obtenida de la solución del problema de cerradura en las celdas unitarias con diferentes geometrías (vectorizadas o simplificadas), tienen resultados consistentes a los obtenidos previamente para las ecuaciones de Darcy y Ergun. Esto nos permite utilizar el modelo promedio obtenido para predecir la caída de presión en los lechos fluidizados, teniendo en cuenta la velocidad relativa del sólido con respecto al fluido.



6. Análisis bifásico del lecho fluidizado líquido-gas

En este capítulo se obtiene un modelo de medio efectivo para estudiar el sistema bifásico del lecho fluidizado de flujo descendente líquido-gas, de acuerdo con la Figura 6.1, la cual es una representación del sistema experimental descrito en la Sección 4.2 en la Figura 4.7. Para este fin, primero se adoptan un conjunto de suposiciones iniciales que apoyan las ecuaciones que rigen en la microescala. Posteriormente, se usa el análisis numérico del Capítulo 4, donde se establece la pertinencia de utilizar una región de promediado. Finalmente, las ecuaciones de la microescala se resuelven formalmente y luego se promedian para obtener el modelo macroscópico junto con los problemas de cerradura.

En lo siguiente, se denota a la microescala y la macroescala y como los niveles de escala correspondientes a la escala de longitud característica de una sola burbuja y de la columna de burbujeo completa, respectivamente. En la Figura 6.1 ℓ_β y ℓ_γ son las longitudes características de la fase fluida (o fase- β) y la fase gaseosa (o fase- γ) respectivamente, r_0 es la muestra representativa de la región de promediado, $A_{\beta\gamma}$ es la superficie de la interfaz líquido-gas, $\mathbf{n}_{\beta\gamma}$ es el vector unitario asociado que va de la fase- β a la fase- γ y $\dot{Q}_{\gamma,in}$ es el flujo volumétrico de la fase- γ .

A partir de lo anterior, se comienza con el modelado del sistema esbozado en la Figura 6.1 mediante la adopción de un conjunto de suposiciones iniciales que conducen a definir las ecuaciones y las condiciones de los límites en la microescala. Para ambas fases fluidas, se suponen flujos

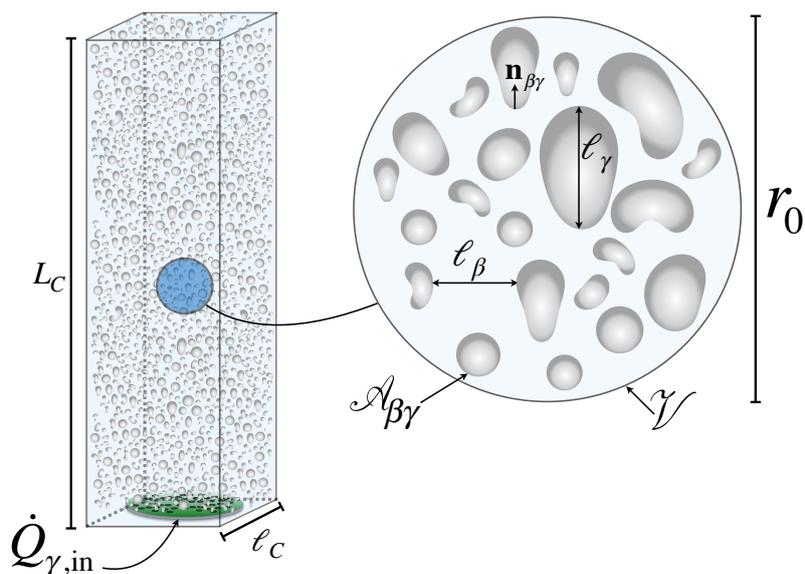


Figura 6.1: Esquema de una columna de burbujas y de un dominio de promediado, incluidas las longitudes características del sistema.

puramente newtonianos, incompresibles e isotérmicos, de modo que las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes se pueden usar para describir la transferencia de masa total y el transporte de cantidad de movimiento en ambas fases como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.2)$$

$$\rho_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{b}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.3)$$

$$\rho_\gamma \frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + \rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma = -\nabla p_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{b}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.4)$$

donde \mathbf{b}_j ($j = \beta, \gamma$) representa la fuerza volumétrica por unidad de masa en cada fase. Para las condiciones de frontera, se supone que no hay intercambio de masa entre las fases, y con ello se puede imponer la continuidad de la velocidad. Además, se toma en cuenta la tensión superficial de las burbujas, lo que genera una discontinuidad en el esfuerzo. Por lo tanto, se pueden imponer las siguientes condiciones de frontera en la interfaz

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\gamma + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.6)$$

aquí σ representa la tensión superficial y H es la curvatura media de la interfaz, respectivamente. Además, $\mathbf{T}_j = -p_j\mathbf{I} + \mu_j[\nabla\mathbf{v}_j + (\nabla\mathbf{v}_j)^T]$ ($j = \beta, \gamma$) es el tensor total de esfuerzos para cada fase fluida. Aunado a ello, se imponen condiciones de no deslizamiento en las paredes del sistema. El problema se completa con las condiciones de frontera en las entradas y salidas del sistema macroscópico y con las condiciones iniciales correspondientes, que no se presentan aquí porque no son necesarias para el desarrollo del modelo en la macroescala. En este punto es conveniente definir un operador de promediado intrínseco para cualquier cantidad uniforme, ψ_i , definido en todas partes en la fase i como sigue

$$\langle \psi_i \rangle^i = \frac{1}{V_i} \int_{\mathcal{V}_i} \psi_i dV \quad \text{donde } \psi_i = \mathbf{v}_i, p_i \text{ y } i = \beta, \gamma \quad (6.7)$$

donde \mathcal{V}_i representa el espacio ocupado por la fase i en el dominio \mathcal{V} y V_i es su volumen. Una vez realizado el análisis del Capítulo 4, donde se mostró que la velocidad terminal de la burbuja ya no es dependiente del tiempo, permite reescribir las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento para ambas fases en estado estacionario como sigue

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\frac{1}{\mu_\beta} \nabla p_\beta + \frac{1}{\mu_\beta} \rho_\beta \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad (6.8)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma = -\frac{1}{\mu_\gamma} \nabla p_\gamma + \frac{1}{\mu_\gamma} \rho_\gamma \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma \quad (6.9)$$

Recordando, el objetivo es desarrollar un modelo válido en la macroescala utilizando el método del promedio volumétrico; sin embargo, en lugar de usar el esquema tradicional del método del promedio volumétrico detallado por Whitaker (1999), se hace uso de una versión abreviada de este método bajo la misma óptica que en el trabajo de Barrere y *col.* (1992), quienes estudiaron el flujo monofásico en medios porosos rígidos y homogéneos. El método consiste en solamente descomponer la presión en términos del promedio y de las desviaciones a diferencia del esquema tradicional, donde se descompone también a la velocidad. De esa forma se busca que la solución del problema de cerradura, quede expresado en términos de la velocidad puntual y de las desviaciones de la presión.

Como una nota para este trabajo, a pesar de utilizar una versión abreviada del método, se hace uso de la misma metodología del Capítulo 5. Con ello, se desarrollan todos los análisis de órdenes de magnitud y aplicación completa del método del promedio volumétrico en el Apéndice B y se obtiene

una relación del término fuente desarrollado por el método abreviado en términos del método clásico en la ecuación (B.57). Una vez explicado esto, se continúa con una versión *abreviada* del método del promedio volumétrico, donde se busca una solución al problema de cerradura directamente en términos de \mathbf{v}_β y \tilde{p}_β , en lugar de $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ y \tilde{p}_β como se desarrolla para el método clásico. Este tipo de enfoque fue utilizado por diferentes autores (Nassik, 1979; Bensoussan, 1978; Sánchez-Palencia, 1980; Barrere y col., 1992) para describir el método del promedio volumétrico desde otro enfoque. Recientemente, en el trabajo de Lasseux y col. (2019) se retoma la idea para flujo transitorio, mostrando la implementación y la factibilidad de usar este método abreviado, dando resultados aceptables al predecir los resultados del método clásico. A partir de esta idea, se comienza con la descomposición de la presión en cada fase fluida en su promedio intrínseco correspondiente y sus desviaciones espaciales de la siguiente manera (Gray, 1975)

$$p_i = \langle p_i \rangle^i + \tilde{p}_i \quad \text{donde } i = \beta, \gamma \quad (6.10)$$

Al utilizar la descomposición de la ecuación (6.10) en las ecuaciones (6.8) y (6.9), se tiene que

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\frac{1}{\mu_\beta} \nabla \tilde{p}_\beta + \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + \underbrace{\frac{1}{\mu_\beta} \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (6.11)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma = -\frac{1}{\mu_\gamma} \nabla \tilde{p}_\gamma + \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma + \underbrace{\frac{1}{\mu_\gamma} \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (6.12)$$

donde los gradientes de presión y las fuerzas de gravedad se consideran fuentes constantes al nivel de la celda unitaria. Esto significa que las velocidades locales y las desviaciones de la presión en cada fase, son ahora las variables dependientes del problema. La condición de frontera dada en la ecuación (6.5) que indica la continuidad de los campos de velocidad en la interfaz líquido-gas, todavía es aplicable a este problema. Sin embargo, la condición de frontera del esfuerzo en la ecuación (6.6) debe expresarse en términos de las desviaciones de presión de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_\beta - \mu_\beta \left(\nabla \mathbf{v}_\beta + (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \right) \right] &= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_\gamma - \mu_\gamma \left(\nabla \mathbf{v}_\gamma + (\nabla \mathbf{v}_\gamma)^T \right) \right] \\ + \left(\langle p_\gamma \rangle^\gamma - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) \mathbf{n}_{\beta\gamma} + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma} &\quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Además, para geometrías esféricas, se deduce que $H = \langle H \rangle_{\beta\gamma}$, siendo este último el promedio de la interfaz de la curvatura como se describe a continuación

$$\langle H \rangle_{\beta\gamma} = \frac{1}{A_{\beta\gamma}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} H dA \quad (6.14)$$

Además, siempre que sea aceptable suponer que la curvatura depende de las fuerzas de equilibrio de la presión alrededor de una esfera, se tiene que

$$2\sigma \langle H \rangle_{\beta\gamma} = \left(\langle p_\gamma \rangle^\gamma - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) \quad (6.15)$$

Según Clift y *col.* (2005), las burbujas de gas son esféricas cuando la tensión de la interfaz líquido-gas y las fuerzas viscosas son mucho más importantes que las fuerzas inerciales, y ese supuesto se corrobora más adelante. Bajo esta suposición, la ecuación (6.13) se reduce a

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_\beta - \mu_\beta \left(\nabla \mathbf{v}_\beta + (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \right) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_\gamma - \mu_\gamma \left(\nabla \mathbf{v}_\gamma + (\nabla \mathbf{v}_\gamma)^T \right) \right] \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.16)$$

Sumado a esto, la velocidad local de las dos fases fluidas y las desviaciones de las presiones a lo largo de la columna de burbujas son periódicas, como se muestra en la Figura 4.9 descrita en el Capítulo 4. Con ello, se proponen las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \quad \tilde{p}_i(\mathbf{r} + \ell_j) = \tilde{p}_i(\mathbf{r}) \quad \text{donde } i = \beta, \gamma \text{ y } j = x, y \quad (6.17)$$

Además, se imponen condiciones antideslizantes para \mathbf{v}_β en la parte superior e inferior de la celda unitaria, es decir, en $z = 0$ y en $z = \ell_z$. Finalmente, basados en la restricción de escala característica, las desviaciones de la presión cumplen con las restricciones promedio como sigue

$$\langle \tilde{p}_\beta \rangle^\beta = 0; \quad \langle \tilde{p}_\gamma \rangle^\gamma = 0 \quad (6.18)$$

6.1 Problemas de cerradura

El planteamiento del problema en términos de las velocidades locales y las desviaciones de las presiones en cada fase está completo; sin embargo, los términos inerciales no lineales en las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento, impiden desarrollar una solución formal. Para abordar este problema, siguiendo el trabajo de Whitaker (1996), se considera la velocidad de convección en los términos inerciales como campos conocidos. Esto elimina el carácter no lineal de las ecuaciones diferenciales y permite desarrollar las siguientes soluciones formales del problema en términos de las fuentes

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{D}_{\beta\beta} \cdot \frac{1}{\mu_\beta} \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \mathbf{D}_{\beta\gamma} \cdot \frac{1}{\mu_\gamma} \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.19)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mathbf{d}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \mathbf{d}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.20)$$

$$\mathbf{v}_\gamma = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \cdot \frac{1}{\mu_\beta} \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \cdot \frac{1}{\mu_\gamma} \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.21)$$

$$\tilde{p}_\gamma = \mathbf{d}_{\gamma\beta} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.22)$$

donde \mathbf{D}_{ij} y \mathbf{d}_{ij} ($i, j = \beta, \gamma$) son variables de cerradura que registran el efecto de las fuentes sobre las desviaciones de las presiones y para las velocidades microscópicas en cada fase. Estas variables resuelven los siguientes problemas de valor a la frontera

Problema-I

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\beta} = 0 \quad (6.23a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\beta} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\beta} + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.23b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\beta} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.23c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.23d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\beta} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\beta})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\beta} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.23e)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\beta} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.23f)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r} + \ell_j) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \boldsymbol{\psi} = \mathbf{d}_{\beta\beta}, \mathbf{d}_{\gamma\beta}, \mathbf{D}_{\beta\beta}, \mathbf{D}_{\gamma\beta} \quad (6.23g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.23h)$$

Problema-II

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (6.24a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.24b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + \mathbf{I}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.24c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.24d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.24e)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\gamma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.24f)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r} + \ell_j) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \boldsymbol{\psi} = \mathbf{d}_{\beta\gamma}, \mathbf{d}_{\gamma\gamma}, \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad (6.24g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.24h)$$

En su forma actual, estos problemas de cerradura dependen de los campos de velocidad en ambas fases. En realidad, esta dependencia puede evitarse sustituyendo las soluciones formales dadas en las ecuaciones (6.20) y (6.22) en estos problemas como se sugiere en el trabajo reciente de Valdés-Parada *et al.* (2016); sin embargo, para efectos prácticos, parece más conveniente dejar los problemas de cerradura tal y como están presentados. Como paso final, se promedian intrínsecamente las ecuaciones (6.19) y (6.21) para obtener el siguiente conjunto de ecuaciones de tipo Darcy

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta = \frac{\mathbf{K}_{\beta\beta}}{\mu_\beta} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \frac{\mathbf{K}_{\beta\gamma}}{\mu_\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.25)$$

$$\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle_\gamma = \frac{\mathbf{K}_{\gamma\beta}}{\mu_\beta} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \frac{\mathbf{K}_{\gamma\gamma}}{\mu_\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (6.26)$$

donde $\langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\beta}$, $\langle \mathbf{D}_{\beta\gamma} \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\gamma}$, $\langle \mathbf{D}_{\gamma\beta} \rangle_\gamma = \mathbf{K}_{\gamma\beta}$ y $\langle \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \rangle_\gamma = \mathbf{K}_{\gamma\gamma}$, se denominan como *tensores de permeabilidad aparentes relativos*. Cabe mencionar que los modelos promedio obtenidos son similares al modelo deducido por Lasseux *et al.* (1996) usando el esquema tradicional del método

del promedio volumétrico. En las expresiones anteriores, se describe a la velocidad en términos del operador promedio superficial para cada fase $\langle \psi_j \rangle_j = \langle \psi_j \rangle^j \varepsilon_j$ ($j = \beta, \gamma$), con ε_j siendo la fracción volumétrica de la fase j dentro del dominio de promediado. Las ecuaciones (6.25) y (6.26) constituyen las principales ecuaciones de este trabajo y se denominarán a continuación como el modelo macroscópico. En la siguiente sección, se realiza un análisis paramétrico de los coeficientes de medio efectivos involucrados en el modelo en términos de los principales grados de libertad del modelo.

6.2 Resultados y discusión

Para evaluar las capacidades predictivas del modelo macroscópico, es necesario evaluar primero los cuatro coeficientes efectivos para diferentes condiciones de flujo. Dado que estos coeficientes se pueden predecir a partir de la solución de problemas de cerradura asociados, el primer punto de enfoque en esta sección se dirige hacia la solución numérica de los problemas de cerradura que se presentan en las ecuaciones (6.23) y (6.24). Para este fin, es necesario tener los perfiles de velocidad de ambas fases, así como la forma de las burbujas una vez que el flujo se vuelve independiente del tiempo. Esta información puntual está disponible a partir de los experimentos numéricos realizados en el Capítulo 4, donde se dirige el análisis para estudiar el flujo en una celda unitaria periódica y en las diferentes posiciones de la burbuja en la columna.

Por lo tanto, una vez que los campos de velocidad se vuelven constantes (o independientes del tiempo como se muestra en la Figura 4.10), los datos de geometría de la burbuja se extraen y analizan en Matlab para determinar las caras geométricas específicas y los perfiles de la burbuja. Esta información se inserta más tarde en el software de Comsol Multiphysics 5.4 para resolver los problemas de cerradura en celdas unitarias periódicas. De manera conveniente, las simulaciones se realizaron resolviendo versiones adimensionales de los problemas de cerradura, que se dan en términos de las siguientes variables

$$\nabla^* = \ell \nabla; \quad \mathbf{D}_{ij}^* = \frac{\mathbf{D}_{ij}}{\ell^2}; \quad \mathbf{d}_{ij}^* = \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\ell}, \quad i, j = \beta, \gamma \quad (6.27)$$

donde $\ell = \ell_x = \ell_y = 2$ mm. Aunado a ello, ℓ_z se fijó en 100ℓ . Las variables dependientes adimen-

sionales para el problema de flujo son

$$\mathbf{v}_j^* = \frac{\mathbf{v}_j}{v_{\text{ref}}}; \quad p_j^* = \frac{p_j}{p_{\text{ref}}}, \quad j = \beta, \gamma \quad (6.28)$$

donde $v_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{p_{\text{ref}}}{\rho_\beta}}$, de esta forma, la versión adimensional del problema de flujo se puede escribir como sigue

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0; \quad \nabla^* \cdot \mathbf{v}_\gamma^* = 0 \quad (6.29a)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* p_\beta^* - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^*, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.29b)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\gamma^* = -\nabla^* p_\gamma^* - \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{e}_z + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\gamma^*, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.29c)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{v}_\gamma^*, \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.29d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} p_\beta^* + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{v}_\beta^* + (\nabla^* \mathbf{v}_\beta^*)^T) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} p_\gamma^* + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{v}_\gamma^* + (\nabla^* \mathbf{v}_\gamma^*)^T) \right] \\ + \frac{2H^*}{\text{Ca Re}} \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.29e)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{l}_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \quad \psi = \mathbf{v}_\beta^*, \mathbf{v}_\gamma^* \quad (6.29f)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.29g)$$

donde los números de Froude, Reynolds y el capilar están definidos por

$$\text{Re} = \frac{\rho_\beta v_{\text{ref}} \ell}{\mu_\beta}; \quad \text{Fr}^2 = \frac{v_{\text{ref}}^2}{\ell g}; \quad \text{Ca} = \frac{p_{\text{ref}} \ell}{\sigma} \quad (6.30)$$

En las ecuaciones anteriores $H^* = H\ell$ y \mathbf{e}_z es el vector unitario en la dirección z . Bajo la misma óptica, las versiones adimensionales de los problemas de cerradura son las siguientes

Problema-I

$$\nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta}^* = 0 \quad \nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\gamma\beta}^* = 0 \quad (6.31a)$$

$$\text{Re} \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta}^* = -\nabla^* \mathbf{d}_{\beta\beta}^* + \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\beta\beta}^* + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.31b)$$

$$\text{Re} \frac{\rho_{\gamma\beta}}{\mu_{\gamma\beta}} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta}^* = -\nabla^* \mathbf{d}_{\gamma\beta}^* + \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\gamma\beta}^*, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.31c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta}^* = \mathbf{D}_{\gamma\beta}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.31d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\beta}^* + \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta}^* + (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta}^*)^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\beta}^* + \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta}^* + (\nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta}^*)^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.31e)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\beta}^* \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\beta}^* \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.31f)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \ell_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \psi = \mathbf{d}_{\beta\beta}^*, \mathbf{d}_{\gamma\beta}^*, \mathbf{D}_{\beta\beta}^*, \mathbf{D}_{\gamma\beta}^* \quad (6.31g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta}^* = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.31h)$$

Problema-II

$$\nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma}^* = 0 \quad \nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* = 0 \quad (6.32a)$$

$$\text{Re} \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\gamma}^* = -\nabla^* \mathbf{d}_{\beta\gamma}^* + \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\beta\gamma}^*, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.32b)$$

$$\text{Re} \frac{\rho_{\gamma\beta}}{\mu_{\gamma\beta}} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* = -\nabla^* \mathbf{d}_{\gamma\gamma}^* + \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.32c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma}^* = \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.32d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\gamma}^* + \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\gamma}^* + (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\gamma}^*)^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\gamma}^* + \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* + (\nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^*)^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.32e)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\gamma}^* \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\gamma}^* \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.32f)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \ell_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \psi = \mathbf{d}_{\beta\gamma}^*, \mathbf{d}_{\gamma\gamma}^*, \mathbf{D}_{\beta\gamma}^*, \mathbf{D}_{\gamma\gamma}^* \quad (6.32g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma}^* = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.32h)$$

donde $\mu_{\gamma\beta} = \mu_\gamma / \mu_\beta = 0.01722$ y $\rho_{\gamma\beta} = \rho_\gamma / \rho_\beta = 1.276 \times 10^{-3}$. En la Figura 6.2a) se muestra la solución numérica de las ecuaciones (6.29), de donde se extrae la velocidad terminal puntual. En las Figuras 6.2b) y 6.2c) se muestra un ejemplo del componente zz de los campos de solución de las

variables de cerradura adimensionales de las ecuaciones (6.31) y (6.32), respectivamente. Como se esperaba, para el Problema I, debido a la fuente en la fase- β los valores más significativos de las variables de cerradura se encuentran en la fase líquida cerca de la interfaz. Por otro lado, las variables de cerradura para el Problema II, alcanzan sus valores más significativos en la fase- γ .

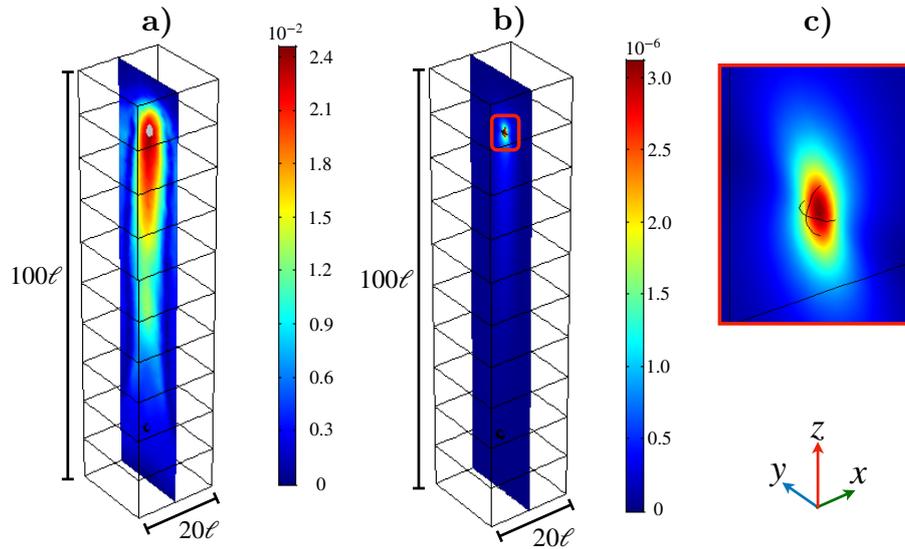


Figura 6.2: a) Ejemplo del campo de velocidad independiente del tiempo [m/s], b) celda unitaria con los campos de los componentes zz de las variables de cerradura correspondientes a la solución de las ecuaciones (6.31) y c) es un acercamiento a los perfiles de las variables de cerradura. Los resultados corresponden a valores de los números de Froude y Reynolds de 10^{-2} y 10^4 , respectivamente.

Con los campos de las variables de cerradura disponibles, ahora es posible predecir los coeficientes efectivos de transporte. Como primer conjunto de evaluaciones numéricas, se dirige la atención a la dependencia de los coeficientes efectivos y a las velocidades macroscópicas con los números de Froude y Reynolds para una geometría de burbuja fija, que se elige como una esfera. La fracción volumétrica del líquido es $\varepsilon_\beta = 0.99$. La dependencia con el número de capilar no se informa aquí porque se encontró que juega un papel insignificante en los experimentos numéricos.

Las predicciones resultantes del componente zz de los cuatro coeficientes efectivos de transporte se reportan en las Tablas 6.1 - 6.4. Se observa que estos coeficientes aumentan, en general, con el número de Reynolds y disminuyen con el número de Froude. Curiosamente, los valores de los coeficientes presentes en la misma fase, es decir, $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ y $\mathbf{K}_{\beta\gamma}$ o $\mathbf{K}_{\gamma\beta}$ y $\mathbf{K}_{\gamma\gamma}$ son bastante similares y esto se atribuye al hecho de que la burbuja que ocupa una fracción volumétrica $\varepsilon_\gamma = 0.01$, es muy pequeña respecto de la fracción volumétrica de la fase fluida.

Aunado a ello, la burbuja se mueve a una velocidad constante y solo debe considerarse la

columna de agua. En otras palabras, esto implica que el análisis del transporte de cantidad de movimiento en la fase- γ podría simplificarse enormemente y dicho análisis se describe a detalle en la Sección 6.3. El modelo presentado aquí es lo suficientemente general como para abarcar situaciones en las que la velocidad de la fase- γ puede o no ser constante.

Tabla 6.1: Valores del tensor de permeabilidad aparente $K_{\beta\beta,zz}/\ell^2$ del **Problema I** para diferentes números de Froude y Reynolds

Re \ Fr²	1×10^{-2}	1×10^{-1}	1×10^0	1×10^1	1×10^2
1×10^{-2}	5.92×10^{-9}	2.96×10^{-9}	2.37×10^{-9}	1.42×10^{-9}	1.14×10^{-9}
1×10^{-1}	9.78×10^{-8}	4.89×10^{-8}	3.91×10^{-8}	2.35×10^{-8}	1.88×10^{-8}
1×10^0	1.37×10^{-6}	6.86×10^{-7}	5.49×10^{-7}	3.29×10^{-7}	2.64×10^{-7}
1×10^1	3.72×10^{-4}	1.86×10^{-4}	1.49×10^{-4}	8.94×10^{-5}	7.15×10^{-5}
1×10^2	7.98×10^{-2}	3.99×10^{-2}	3.19×10^{-2}	1.92×10^{-2}	1.53×10^{-2}
1×10^3	1.35×10^0	6.77×10^{-1}	5.41×10^{-1}	3.25×10^{-1}	2.60×10^{-1}
1×10^4	1.38×10^1	6.92×10^0	5.54×10^0	3.32×10^0	2.66×10^0

Tabla 6.2: Valores del tensor de permeabilidad aparente $K_{\gamma\beta,zz}/\ell^2$ del **Problema I** para diferentes números de Froude y Reynolds

Re \ Fr²	1×10^{-2}	1×10^{-1}	1×10^0	1×10^1	1×10^2
1×10^{-2}	4.45×10^{-7}	2.23×10^{-7}	1.78×10^{-7}	1.07×10^{-7}	8.55×10^{-8}
1×10^{-1}	4.61×10^{-6}	2.31×10^{-6}	1.85×10^{-6}	1.11×10^{-6}	8.86×10^{-7}
1×10^0	3.77×10^{-5}	1.88×10^{-5}	1.51×10^{-5}	9.05×10^{-6}	7.24×10^{-6}
1×10^1	2.45×10^{-4}	1.22×10^{-4}	9.79×10^{-5}	5.88×10^{-5}	4.70×10^{-5}
1×10^2	5.85×10^{-3}	2.92×10^{-3}	2.34×10^{-3}	1.40×10^{-3}	1.12×10^{-3}
1×10^3	5.73×10^{-2}	2.86×10^{-2}	2.29×10^{-2}	1.37×10^{-2}	1.10×10^{-2}
1×10^4	1.26×10^0	6.32×10^{-1}	5.06×10^{-1}	3.03×10^{-1}	2.43×10^{-1}

Tabla 6.3: Valores del tensor de permeabilidad aparente $K_{\beta\gamma,zz}/\ell^2$ del **Problema II** para diferentes números de Froude y Reynolds

$Re \setminus Fr^2$	1×10^{-2}	1×10^{-1}	1×10^0	1×10^1	1×10^2
1×10^{-2}	5.92×10^{-9}	2.96×10^{-9}	2.37×10^{-9}	1.42×10^{-9}	1.14×10^{-9}
1×10^{-1}	9.78×10^{-8}	4.89×10^{-8}	3.91×10^{-8}	2.35×10^{-8}	1.88×10^{-8}
1×10^0	1.37×10^{-6}	6.86×10^{-7}	5.49×10^{-7}	3.29×10^{-7}	2.64×10^{-7}
1×10^1	3.74×10^{-4}	1.87×10^{-4}	1.50×10^{-4}	8.97×10^{-5}	7.18×10^{-5}
1×10^2	7.98×10^{-2}	3.99×10^{-2}	3.19×10^{-2}	1.92×10^{-2}	1.53×10^{-2}
1×10^3	1.35×10^0	6.77×10^{-1}	5.41×10^{-1}	3.25×10^{-1}	2.60×10^{-1}
1×10^4	1.38×10^1	6.92×10^0	5.54×10^0	3.32×10^0	2.66×10^0

Tabla 6.4: Valores del tensor de permeabilidad aparente $K_{\gamma\gamma,zz}/\ell^2$ del **Problema II** para diferentes números de Froude y Reynolds

$Re \setminus Fr^2$	1×10^{-2}	1×10^{-1}	1×10^0	1×10^1	1×10^2
1×10^{-2}	4.41×10^{-7}	2.20×10^{-7}	1.76×10^{-7}	1.06×10^{-7}	8.46×10^{-8}
1×10^{-1}	4.63×10^{-6}	2.31×10^{-6}	1.85×10^{-6}	1.11×10^{-6}	8.89×10^{-7}
1×10^0	3.75×10^{-5}	1.88×10^{-5}	1.50×10^{-5}	9.01×10^{-6}	7.21×10^{-6}
1×10^1	2.46×10^{-4}	1.23×10^{-4}	9.85×10^{-5}	5.91×10^{-5}	4.73×10^{-5}
1×10^2	5.86×10^{-3}	2.93×10^{-3}	2.34×10^{-3}	1.41×10^{-3}	1.13×10^{-3}
1×10^3	5.74×10^{-2}	2.87×10^{-2}	2.30×10^{-2}	1.38×10^{-2}	1.10×10^{-2}
1×10^4	1.27×10^0	6.34×10^{-1}	5.07×10^{-1}	3.04×10^{-1}	2.44×10^{-1}

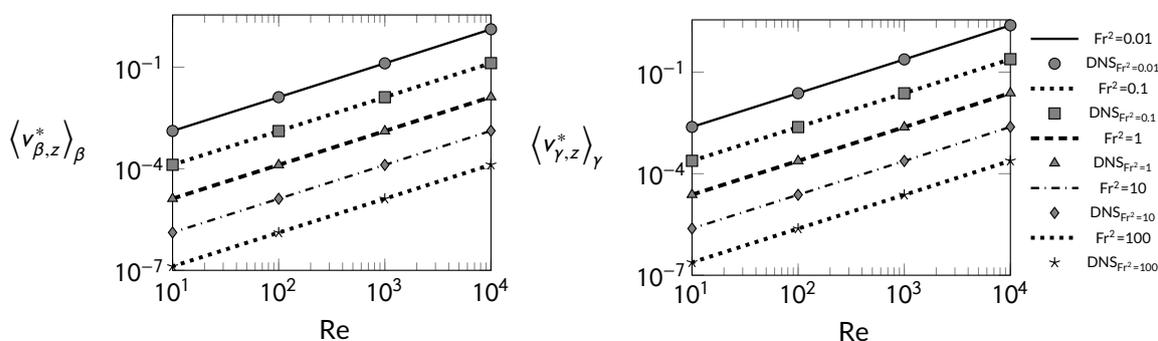


Figura 6.3: Predicciones de la velocidad adimensional $\langle v_{\beta,z}^* \rangle_{\beta}$ y $\langle v_{\gamma,z}^* \rangle_{\gamma}$ para diferentes números de Froude y Reynolds tomando como referencia una geometría esférica para la fase- γ como resultado del modelo promedio y de la realización de simulaciones numéricas directas.

La sustitución de los valores resultantes de los coeficientes efectivos de transporte, junto con los gradientes de presión correspondientes del DNS, en el modelo promedio dado por las ecuaciones (6.25) y (6.26) permite predecir las velocidades macroscópicas en ambas fases y los resultados se presentan en la Figura 6.3. Las velocidades en ambas fases son funciones crecientes del número de Reynolds y disminuyen con el número de Froude lo cual es de esperarse de acuerdo a la literatura (Burridge & Hunt, 2012).

Además, las velocidades en la fase líquida son ligeramente más pequeñas que las de la fase gaseosa, especialmente para los valores más bajos del número de Froude. Sumado a esto, la relación de la presión promedio en cada una de las mediciones da una relación lineal. Lo anterior se debe al equilibrio de presiones que tiene lugar en la fase fluida, que es lineal porque la velocidad terminal de la burbuja representa un equilibrio entre las fuerzas que lo rodean. Vale la pena señalar que las predicciones del modelo promedio están en excelente acuerdo con las de las simulaciones numéricas directas para los experimentos considerados en el Capítulo 4.

Como último punto de análisis, vale la pena investigar el rango de validez de las predicciones que surgen del concepto de la celda unitaria. Con esto en mente, se centra la atención al primer experimento numérico donde se obtuvo la velocidad para diferentes posiciones en una columna de burbujas, como se muestra en la Figura 4.8. En este sistema, los problemas de flujo y de cerradura se resolvieron para cada una de las posiciones descritas, para registrar la sensibilidad del modelo y los cambios en la velocidad de las burbujas adyacentes.

En la Figura 6.4, se presentan ejemplos de los campos del componente zz de las variables de cerradura calculadas en diferentes ubicaciones. Curiosamente, todas las muestras exhiben perfiles similares desde un punto de vista cualitativo. Estos resultados se utilizaron para predecir los coeficientes efectivos de transporte y, posteriormente, los perfiles de velocidad también se calcularon siguiendo la estrategia descrita anteriormente. Los resultados se compararon entre sí y con las predicciones de DNS para diferentes valores numéricos de Reynolds como se muestra en la Figura 6.5.

Claramente, los resultados muestran un excelente acuerdo entre ellos, lo que indica que el modelo promedio desarrollado en este trabajo puede aplicarse ampliamente en el sistema. Por lo tanto, se deduce que, para las condiciones aquí analizadas, las burbujas vecinas no producen una influencia significativa entre sí y un concepto de celda unitaria es razonable para predecir la velocidad terminal de una burbuja.

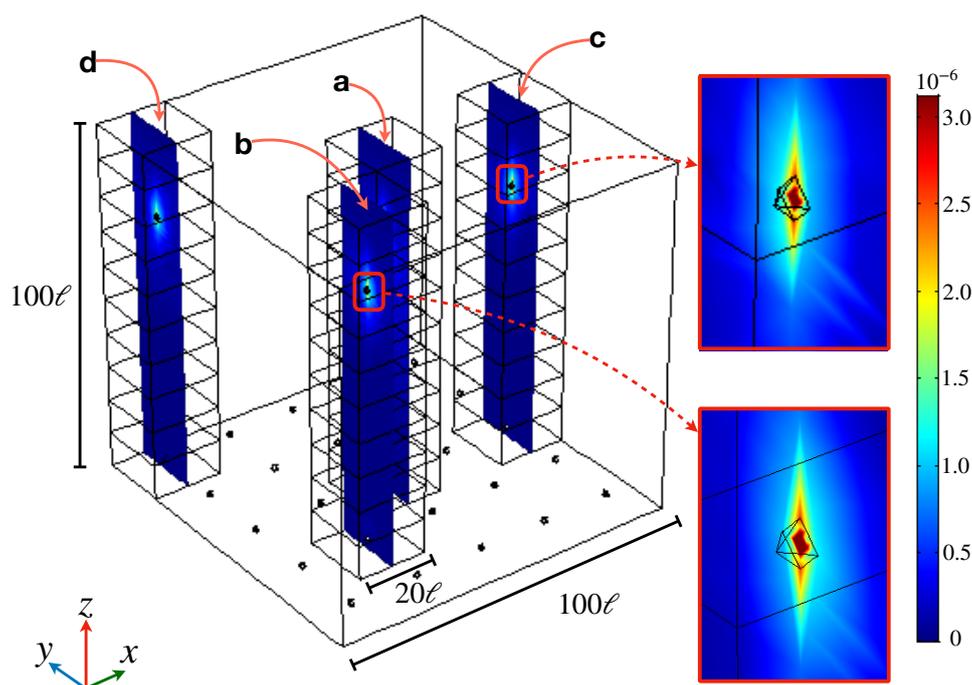


Figura 6.4: Ejemplo de los campos de los componentes zz de las variables de cerradura correspondientes a la solución del *Problema II* para las diferentes locaciones en el sistema: a) centro, b) alrededores, c) pared y d) esquina (ver Figura 4.8). Los resultados corresponden a los valores de Froude y Reynolds de 10^{-2} y 10^4 , respectivamente.

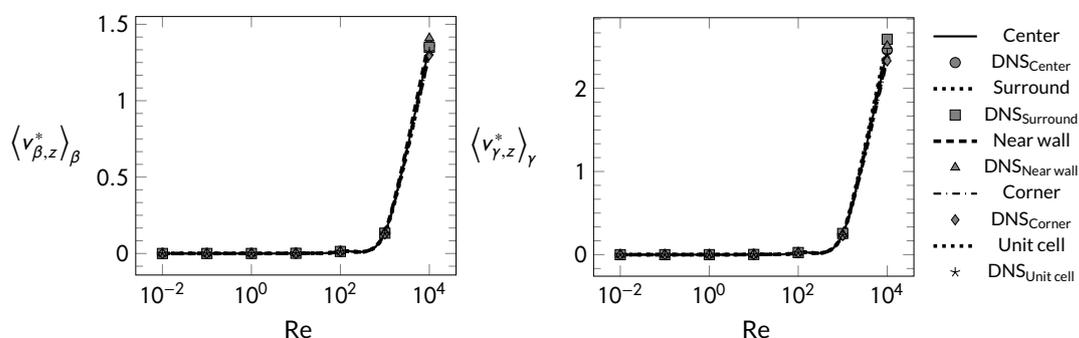


Figura 6.5: Predicción de las velocidades adimensionales $\langle v_{\beta,z}^* \rangle_{\beta}$ y $\langle v_{\gamma,z}^* \rangle_{\gamma}$ para diferentes números de Reynolds con $Fr^2=1 \times 10^{-2}$ para diferentes locaciones en el sistema resultado del modelo promedio y de simulaciones numéricas directas.

6.3 Estancia de investigación

Como se mencionó en el Capítulo 4, se realizó una estancia de investigación en la Universidad de Bordeaux en Francia. Durante la asesoría del Dr. Didier Lasseaux, se propuso que el análisis del transporte de cantidad de movimiento en la fase- γ podría simplificarse.

A parte de la simplificación propuesta para la fase- γ , se evaluó el método numérico para obtener la velocidad terminal de la burbuja. La evaluación se basó en un análisis de convergencia de malla.

En dicho análisis, los resultados de convergencia mostraban variaciones al sobrestimar o subestimar los parámetros ajustables disponibles. Dichos parámetros ajustables, corresponden a los valores de las variables γ y ε en las ecuaciones de fases, las cuales se muestran a continuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \phi = \gamma \nabla \cdot \left[\varepsilon \nabla \phi - \phi(1-\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.33a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \phi = \gamma \nabla \cdot \left[\varepsilon \nabla \phi - \phi(1-\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.33b)$$

donde γ y ε son parámetros de reinicio ajustables para la solución de las ecuaciones de fase. Estas ecuaciones se encuentran en los manuales del módulo CFD en la sección de sistemas multifásicos; sin embargo, la explicación dedicada al análisis de los parámetros ajustables de las ecuaciones (6.33), no es del todo clara en los manuales de solución del software.

En vez de utilizar la solución numérica por el método de level-set y tener que utilizar dos ecuaciones más en el modelo, se optó por utilizar el método de malla movable. En términos generales, el método de malla movable, tiene una malla constante en el dominio de solución y la variación en el análisis numérico de convergencia logra una asíntota con valores de malla refinados, por lo que se optó por este método durante la estancia.

6.3.1 Modelo bifásico (β - γ) de dos ecuaciones

Como se muestra en el Capítulo 4, el método numérico se utiliza para resolver el modelo de las ecuaciones (6.1)-(6.6), el cual se denomina en adelante como modelo de dos ecuaciones. Al obtener la velocidad terminal de una burbuja al simular un sistema líquido-gas experimental (Talaia, 2007) en una celda unitaria, como se mostró en la Figura 4.15, se decide realizar los siguientes cambios de variable para mantener la concordancia con la adimensionalización anterior utilizada en el método level-set, es decir,

$$t^* = \frac{t}{t_{\text{ref}}} \quad t_{\text{ref}} = \frac{\ell_\beta}{v_{\text{ref}}} \quad \nabla^* = \ell_\beta \nabla \quad \mathbf{v}_j^* = \frac{\mathbf{v}_\beta}{v_{\text{ref}}} \quad (6.34)$$

debido a lo anterior, se utiliza la definición del tiempo adimensional para la ecuación en la fase- β y después de algunos pasos algebraicos, la expresión queda como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\beta^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\frac{1}{\rho_\beta v_{\text{ref}}^2} \nabla^* p_\beta + \frac{\ell_\beta}{v_{\text{ref}}^2} \mathbf{g} + \frac{\mu_\beta}{\rho_\beta v_{\text{ref}} \ell_\beta} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* \quad (6.35)$$

Una vez obtenida esta expresión y después de numerosas discusiones sobre la pertinencia de utilizar la definición del número de Froude en el sistema de ecuaciones, se optó por generar la igualdad en el término gravitatorio, es decir, se supone a la velocidad de referencia (v_{ref}) como la velocidad terminal de la burbuja. En otras palabras, es cuando la velocidad terminal es igual a la raíz de las fuerzas gravitatorias por la distancia que debe recorrer dentro del sistema o $v_{\text{ref}} = \sqrt{\ell_{\beta} g_z}$, con ello, la ecuación de transporte para la fase- β es

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\beta}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}_{\beta}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* = -\nabla^* p_{\beta}^* - \mathbf{e}_z + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_{\beta}^* \quad (6.36)$$

donde las definiciones de los números adimensionales utilizados están dados por las siguientes relaciones

$$p_j^* = \frac{p_j}{p_{\text{ref}}} \quad p_{\text{ref}} = \rho_{\beta} v_{\text{ref}}^2 \quad v_{\text{ref}} = \sqrt{\ell_{\beta} g_z} \quad \text{Re} = \frac{\rho_{\beta} v_{\text{ref}} \ell_{\beta}}{\mu_{\beta}} \quad (6.37)$$

para la fase- γ se utilizan las mismas definiciones de la ecuación (6.34) y de los números adimensionales de la ecuación (6.37) con lo que se obtiene

$$\rho_{\gamma\beta} \frac{\partial \mathbf{v}_{\gamma}^*}{\partial t^*} + \rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_{\gamma}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* = -\nabla^* p_{\gamma}^* - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_{\gamma}^* \quad (6.38)$$

donde la relación de densidades entre las fases es $\rho_{\gamma\beta} = \frac{\rho_{\gamma}}{\rho_{\beta}}$ y la relación de viscosidades está definida por $\mu_{\gamma\beta} = \frac{\mu_{\gamma}}{\mu_{\beta}}$. Para la condición de frontera de continuidad en la velocidad se tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{v}_{\beta}^* = \mathbf{v}_{\gamma}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.39)$$

Para la condición de frontera de salto en el estrés, se divide entre p_{ref} y después de manipulación algebraica se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} p_{\beta}^* + \frac{\mu_{\beta}}{\rho_{\beta} v_{\text{ref}} \ell_{\beta}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* \right)^T \right) \right] = \\ \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} p_{\gamma}^* + \frac{\mu_{\gamma}}{\mu_{\beta}} \frac{\mu_{\beta}}{\rho_{\beta} v_{\text{ref}} \ell_{\beta}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* \right)^T \right) \right] + \frac{2\sigma H \ell_{\beta}}{\mu_{\beta} v_{\text{ref}}} \frac{\mu_{\beta}}{\rho_{\beta} v_{\text{ref}} \ell_{\beta}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (6.40)$$

y al utilizar las definiciones de los números adimensionales se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l}p_{\beta}^* + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* \right)^T \right) \right] &= \\ \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l}p_{\gamma}^* + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* \right)^T \right) \right] + \frac{2H^*}{\text{Ca Re}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} &\quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde las definiciones para el número de capilar y la curvatura están dadas por

$$\text{Ca} = \frac{\mu_{\beta} v_{\text{ref}}}{\sigma} \qquad H^* = H\ell_{\beta} \quad (6.42)$$

Una vez realizado esto, se propone la solución del problema puntual en el sistema, de donde se ha de obtener la velocidad terminal de la burbuja en el modelo líquido-gas. Este problema es necesario resolverlo, debido a que se necesita la información de dicha velocidad para resolver el problema de cerradura y obtener los valores de la permeabilidad aparente.

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_{\beta}^* = 0 \quad (6.43a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\beta}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}_{\beta}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* = -\nabla^* p_{\beta}^* - \mathbf{e}_z + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_{\beta}^* \quad (6.43b)$$

$$\mathbf{v}_{\beta}^* = \mathbf{v}_{\gamma}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.43c)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l}p_{\beta}^* + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\beta}^* \right)^T \right) \right] = \quad (6.43d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l}p_{\gamma}^* + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* + \left(\nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* \right)^T \right) \right] + \frac{2H^*}{\text{Ca Re}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.43e)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_{\gamma}^* = 0 \quad (6.43e)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \frac{\partial \mathbf{v}_{\gamma}^*}{\partial t^*} + \rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_{\gamma}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_{\gamma}^* = -\nabla^* p_{\gamma}^* - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_{\gamma}^* \quad (6.43f)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_j) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}_{\beta}^*, \mathbf{v}_{\gamma}^* \quad (6.43g)$$

$$\mathbf{v}_{\beta}^* = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.43h)$$

$$\text{en } t = 0 \quad \mathbf{v}_i^* = \mathbf{0}, \quad i = \beta, \gamma \quad (6.43i)$$

Paso seguido, se plantea el desarrollo del problema de cerradura para obtener los coeficientes efectivos de transporte asociados. Comenzando por las ecuaciones anteriores en estado estacionario, debido a que una vez que se haya obtenido la velocidad terminal de la burbuja, la velocidad de la misma ya no dependerá del tiempo y con ello el termino de acumulación puede ser despreciado

respecto de los demás. Cabe señalar que se hará uso de la versión abreviada del método como se ha mencionado. A parte de ello y siguiendo la descomposición espacial para la presión de acuerdo con Gray (1975), esta queda como sigue

$$p_j^* = \langle p_j^* \rangle^j + \tilde{p}_j^* \quad \text{donde } j = \beta, \gamma \quad (6.44)$$

al aplicar la descomposición anterior en el término de la presión, se obtienen las siguientes ecuaciones para ambas fases como sigue

$$\mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* \tilde{p}_\beta^* + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* - \underbrace{\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta}_{\text{Fuente}} - \mathbf{e}_z \quad (6.45)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\gamma^* = -\nabla^* \tilde{p}_\gamma^* + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\gamma^* - \underbrace{\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma}_{\text{Fuente}} - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \quad (6.46)$$

La condición de frontera de salto en el esfuerzo, al ser expresada en términos de la descomposición de la presión, queda como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta^* + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_\beta^* + (\nabla^* \mathbf{v}_\beta^*)^T \right) \right] = \\ \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} \tilde{p}_\gamma^* + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \left(\nabla^* \mathbf{v}_\gamma^* + (\nabla^* \mathbf{v}_\gamma^*)^T \right) \right] + \frac{2H^*}{\text{Ca Re}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} - \mathbf{n}_{\beta\gamma} \left(\langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \langle p_\beta^* \rangle^\beta \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Recordando la definición del balance de presiones alrededor de una esfera como se mostró en la ecuación (6.15), y de acuerdo con Clift y *col.* (2005), las burbujas de gas son esféricas cuando la tensión de la interfaz y las fuerzas viscosas son mucho más importantes que las fuerzas inerciales, con ello, se puede suponer que

$$\frac{2H^*}{\text{Ca Re}} = \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \langle p_\beta^* \rangle^\beta \quad (6.48)$$

Aunado a lo anterior, la velocidad puntual de las dos fases fluidas y las desviaciones de la presión a lo largo del sistema en las direcciones x y y son periódicas. Por esta razón, se proponen las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{v}_j^*(\mathbf{r} + \ell_i) = \mathbf{v}_j^*(\mathbf{r}) \quad \tilde{p}_j^*(\mathbf{r} + \ell_i) = \tilde{p}_j^*(\mathbf{r}) \quad \text{donde } j = \beta, \gamma \text{ y } i = x, y \quad (6.49)$$

Finalmente basados en la separación de escalas características, las desviaciones de la presión tienen las siguientes restricciones promedio

$$\langle \tilde{p}_\beta^* \rangle^\beta = 0; \quad \langle \tilde{p}_\gamma^* \rangle^\gamma = 0 \quad (6.50)$$

El análisis realizado conlleva a desarrollar las soluciones formales del problema en términos de las fuentes como se describe a continuación

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{D}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{D}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.51)$$

$$\tilde{p}_\beta^* = \mathbf{d}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{d}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.52)$$

$$\mathbf{v}_\gamma^* = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.53)$$

$$\tilde{p}_\gamma^* = \mathbf{d}_{\gamma\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.54)$$

Aunado a ello, las versiones adimensionales de los problemas de cerradura, para el problema líquido-sólido están dadas por las siguientes ecuaciones

Problema-I

$$\nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta} = 0 \quad \nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\gamma\beta} = 0 \quad (6.55a)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta} = -\nabla^* \mathbf{d}_{\beta\beta} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\beta\beta} + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.55b)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta} = -\nabla^* \mathbf{d}_{\gamma\beta} + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\gamma\beta}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.55c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.55d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\beta} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta} + (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta})^T) \right) = \quad (6.55e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\beta} + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta} + (\nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\beta})^T) \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma}$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\beta} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.55f)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \ell_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \psi = \mathbf{d}_{\beta\beta}, \mathbf{d}_{\gamma\beta}, \mathbf{D}_{\beta\beta}, \mathbf{D}_{\gamma\beta} \quad (6.55g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.55h)$$

Problema-II

$$\nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (6.56a)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\gamma} = -\nabla^* \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.56b)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \mathbf{v}_\gamma^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = -\nabla^* \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + \mathbf{I}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.56c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.56d)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma})^T) \right) = \quad (6.56e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \frac{\mu_{\gamma\beta}}{\text{Re}} (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma})^T) \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma}$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\gamma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (6.56f)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \ell_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \psi = \mathbf{d}_{\beta\gamma}, \mathbf{d}_{\gamma\gamma}, \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad (6.56g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.56h)$$

donde $\mu_{\gamma\beta} = \mu_\gamma / \mu_\beta = 0.01722$ y $\rho_{\gamma\beta} = \rho_\gamma / \rho_\beta = 1.276 \times 10^{-3}$. Debido a que las fuentes de las variables de cerradura no dependen del valor de la presión en ninguna de las fases, se propone reducirlas para tener solamente un problema, con esto, las soluciones del problema de cerradura en términos de las fuentes se pueden promediar, lo cual lleva a obtener las siguientes relaciones promedio

$$\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle = \langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle_\beta \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \langle \mathbf{D}_{\beta\gamma} \rangle_\beta \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.57)$$

$$\langle \mathbf{v}_\gamma^* \rangle = \langle \mathbf{D}_{\gamma\beta} \rangle_\gamma \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \langle \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \rangle_\gamma \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.58)$$

al realizar los cambios de variable pertinentes para dejar estas ecuaciones en términos de los tensores de permeabilidad aparente como sigue $\langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\beta}$, $\langle \mathbf{D}_{\beta\gamma} \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\gamma}$, $\langle \mathbf{D}_{\gamma\beta} \rangle_\gamma = \mathbf{K}_{\gamma\beta}$, $\langle \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \rangle_\gamma = \mathbf{K}_{\gamma\gamma}$ para obtener el siguiente conjunto de ecuaciones tipo Darcy como se describe a continuación

$$\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle = \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{K}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.59)$$

$$\langle \mathbf{v}_\gamma^* \rangle = \mathbf{K}_{\gamma\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\gamma^* \rangle^\gamma - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \right) \quad (6.60)$$

6.3.2 Modelo bifásico (β - γ) de una ecuación

Para el modelo de una sola ecuación, durante la estancia de investigación, se tuvo una discusión basada en que el tamaño de la burbuja en este caso, permitía suponer que tanto los esfuerzos inerciales así como los viscosos, podían ser despreciables en la ecuación de cantidad de movimiento para la fase- γ . Lo anterior, se basa en la suposición del tamaño de burbuja y que solo se rige por la diferencia de presiones que existe en la misma. Con ello, el modelo de dos ecuaciones se puede simplificar a un modelo de una sola ecuación como se describe a continuación

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.61a)$$

$$\rho_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.61b)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\gamma + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.61c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0 \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.61d)$$

$$\rho_\gamma \frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} = -\nabla p_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.61e)$$

Para ser consistentes, se utilizan las mismas definiciones adimensionales descritas en las ecuaciones (6.34) y (6.37) para obtener el problema puntual adimensional como se describe a continuación

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.62a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\beta^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla p_\beta^* - \mathbf{e}_z + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.62b)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-p_\beta^* \mathbf{I} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{v}_\beta^* + (\nabla^* \mathbf{v}_\beta^*)^T) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} P_\gamma^* + \frac{2H^*}{\text{Ca Re}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.62c)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}_\gamma^* = 0, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.62d)$$

$$\rho_{\gamma\beta} \frac{\partial \mathbf{v}_\gamma^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_\gamma^* - \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (6.62e)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{l}_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \quad \psi = \mathbf{v}_\beta^* \quad (6.62f)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.62g)$$

$$\text{en } t = 0 \quad \mathbf{v}_i^* = \mathbf{0}, \quad i = \beta, \gamma \quad (6.62h)$$

Para el desarrollo del problema de cerradura, se supone nuevamente que la velocidad de la burbuja está desarrollada y no depende más del término de acumulación, aunado a ello, se puede realizar una integración en la presión en la ecuación diferencial para la fase- γ , con ello se tiene la

siguiente expresión

$$p_{\gamma}^* = \mathbf{r}_{\gamma}^* \cdot \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z + p_0 \quad (6.63)$$

Al aplicar el operador de promedio intrínseco se tiene que

$$\nabla^* \langle p_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} = \nabla^* \langle \mathbf{r}_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} \cdot \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \quad (6.64)$$

siendo el vector de posición $\mathbf{r}_{\gamma}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}_{\gamma}^*$, se puede analizar como sigue, aplicando el promedio intrínseco y el operador ∇^* con esto se obtiene que

$$\nabla^* \langle \mathbf{r}_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} = \nabla^* \langle \mathbf{x}^* \rangle^{\gamma} + \nabla^* \langle \mathbf{y}_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} \quad (6.65)$$

Si se acepta que $\nabla^* \langle \mathbf{y}_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} = 0$ y al sustituir este término en la ecuación (6.64) esto conduce a,

$$\nabla^* \langle p_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} = \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \quad (6.66)$$

Al descomponer la presión, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\nabla^* \langle p_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} + \nabla^* \tilde{p}_{\gamma}^* = \rho_{\gamma\beta} \mathbf{e}_z \quad (6.67)$$

Al utilizar el resultado de la ecuación (6.66) en la ecuación anterior, el resultado es

$$\nabla^* \tilde{p}_{\gamma}^* = 0 \quad (6.68)$$

Bajo la misma premisa de separación de escalas características, las desviaciones de la presión tienen las siguientes restricciones promedio como se describe a continuación

$$\langle \tilde{p}_{\beta}^* \rangle^{\beta} = 0; \quad \langle \tilde{p}_{\gamma}^* \rangle^{\gamma} = 0 \quad (6.69)$$

Una vez obtenido esto, con las ecuaciones (6.68) y (6.69) se puede demostrar que

$$\tilde{p}_{\gamma}^* = 0 \quad (6.70)$$

Los términos anteriores, permiten que se obtenga la solución formal en términos de la fuente como se describe a continuación

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{D}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) \quad (6.71)$$

$$\tilde{p}_\beta^* = \mathbf{d}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta - \mathbf{e}_z \right) \quad (6.72)$$

Con ello, el problema de cerradura para el problema de una sola ecuación para el modelo de dos fases considerando solo la contribución de la presión en la burbuja, toma la siguiente forma

$$\nabla^* \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta} = 0 \quad (6.73a)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta} = -\nabla^* \mathbf{d}_{\beta\beta} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{D}_{\beta\beta} + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (6.73b)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \mathbf{d}_{\beta\beta} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta} + (\nabla^* \mathbf{D}_{\beta\beta})^T) \right) = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (6.73c)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\beta} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (6.73d)$$

$$\psi(\mathbf{r} + \ell_j) = \psi(\mathbf{r}), \quad j = x, y; \psi = \mathbf{d}_{\beta\beta}, \mathbf{D}_{\beta\beta} \quad (6.73e)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } z = 0, \ell_z \quad (6.73f)$$

Finalmente, para obtener una ecuación promedio de tipo Darcy, se promedia la ecuación (6.71) para obtener la siguiente expresión

$$\langle \mathbf{v}_\beta^* \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta + \mathbf{e}_z \right) \quad (6.74)$$

donde $\langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle_\beta = \mathbf{K}_{\beta\beta}$

El análisis numérico para estos dos problemas, es decir, el problema puntual de una y dos ecuaciones, se realizó en la celda unitaria mostrada en la Figura 4.13b). Estos resultados numéricos, se compararon con los reportados en la literatura para la determinación de la velocidad terminal de una burbuja y con los modelos presentados en la Tabla 1.2.

Las relaciones de densidades y viscosidades están dadas por $\rho_{\gamma\beta} = 1.2 \times 10^{-3}$; $\mu_{\gamma\beta} = 17.9 \times 10^{-3}$. Los resultados numéricos muestran concordancia con los obtenidos por estos autores bajo diferentes metodologías, las cuales se describen a detalle en el Capítulo 1. Si bien la velocidad puntual para ambas fases utilizando cualquiera de los modelos de una y de dos ecuaciones parecen reproducir los datos experimentales, es necesario probar su validez para las diferentes relaciones de densidad y

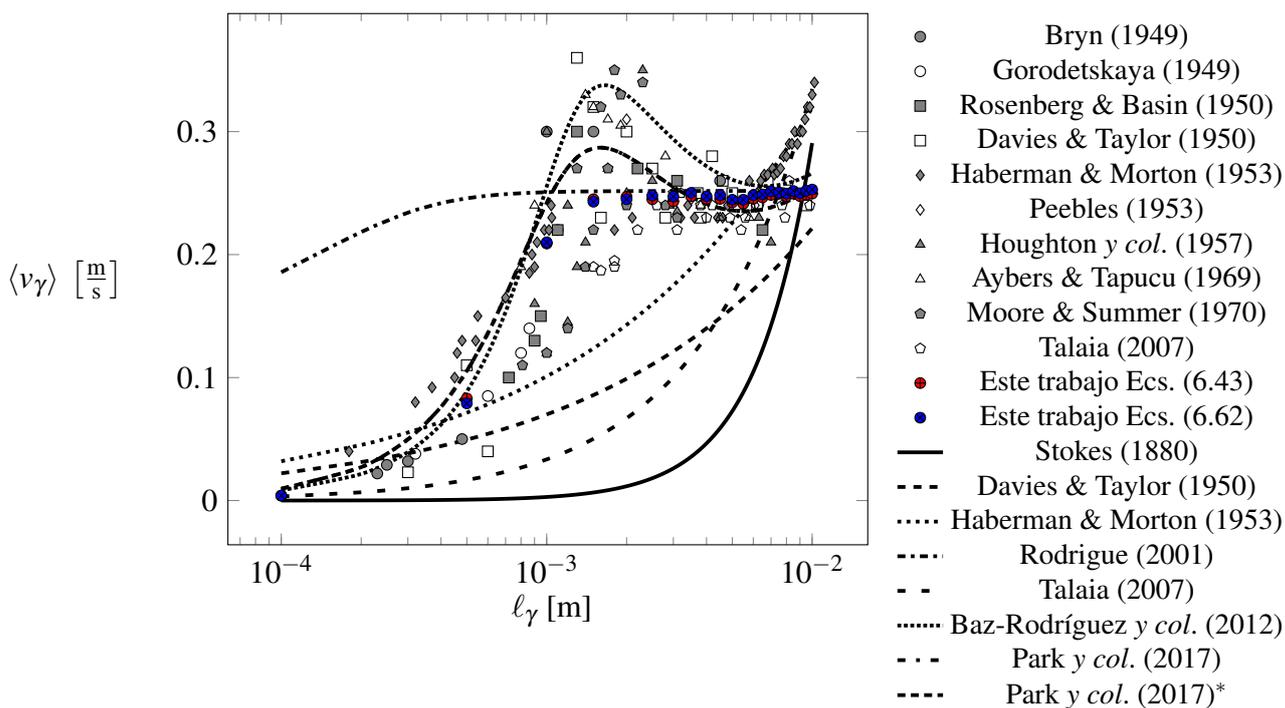


Figura 6.6: Comparación con otros modelos para la determinación de la velocidad terminal de una burbuja. *modelo de Park y col. (2017) sin recirculación interna en la burbuja.

viscosidad $\rho_{\gamma\beta}$ y $\mu_{\gamma\beta}$, respectivamente.

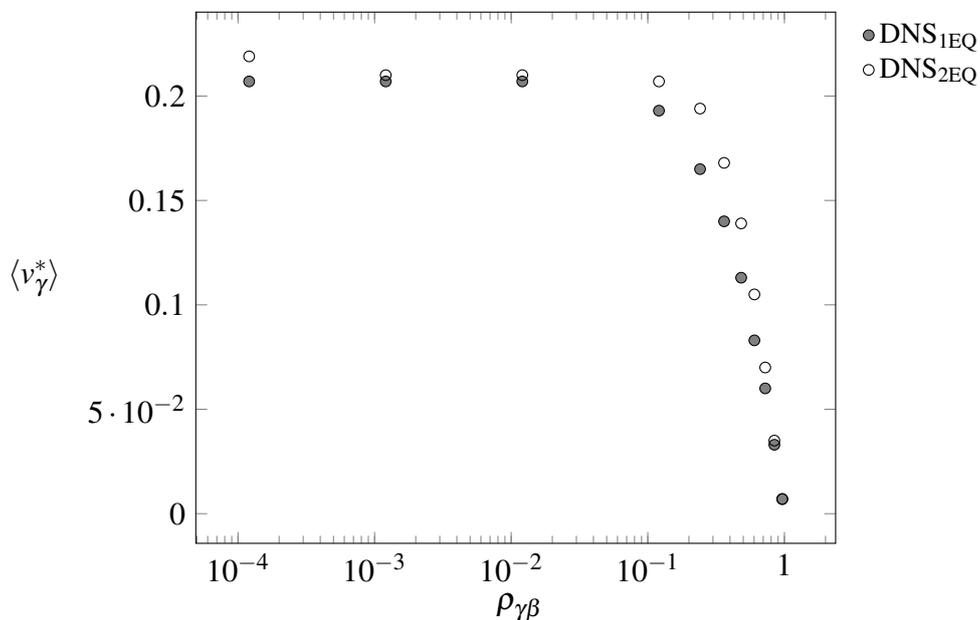


Figura 6.7: Barrido de la relación de densidades $\rho_{\gamma\beta}$ utilizando el planteamiento de los modelos de una y dos ecuaciones. Con valores de $Ca=0.0014$, $Re=97.93$ y $\mu_{\gamma\beta}=17.9 \times 10^{-3}$.

donde DNS_{1EQ} es la solución del problema puntual de una ecuación descrito en las ecuaciones (6.62) y DNS_{2EQ} es la solución del problema puntual de dos ecuaciones descrito en las ecuaciones

(6.43), los cuales se resolvieron para valores de relaciones aire y agua que son $Ca=0.0014$, $Re=97.93$ y $\mu_{\gamma\beta}=17.9 \times 10^{-3}$. Para el barrido de $\rho_{\gamma\beta}$, como se muestra en la Figura 6.7, cuando la relación de densidades tiende a 1 (o que las densidades son iguales), tal y como se esperaba físicamente, la velocidad tiende a cero. Por otro lado, cuando la densidad de la fase diluida disminuye en un orden de magnitud respecto de la densidad de la fase continua, la velocidad de la burbuja permanece constante. El siguiente paso, es analizar la relación de viscosidades como se muestra a continuación.

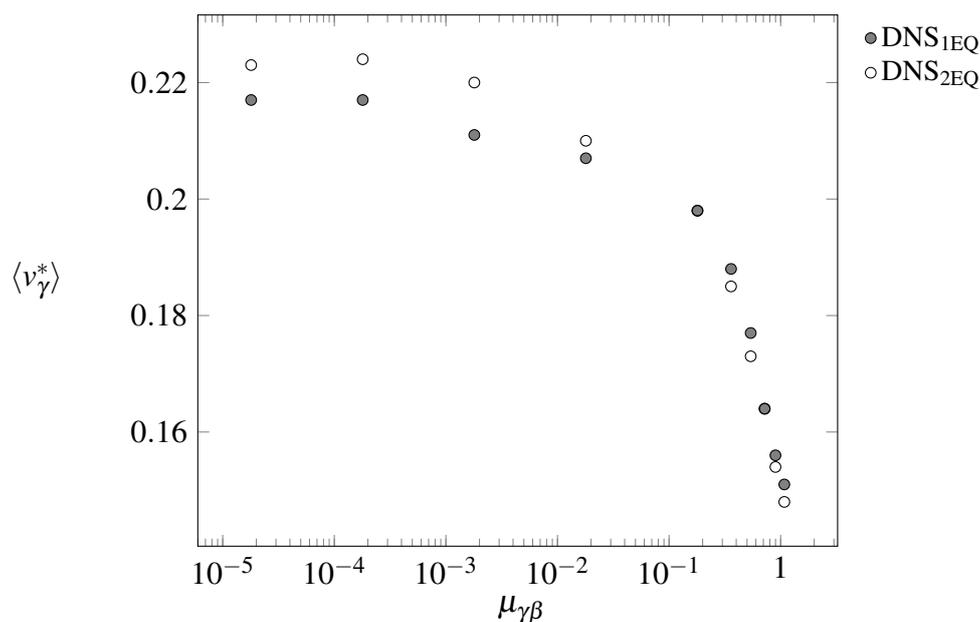


Figura 6.8: Barrido de la relación de viscosidades $\mu_{\gamma\beta}$ utilizando el planteamiento de los modelos de una y dos ecuaciones. Con valores de $Ca= 0.0014$, $Re= 97.93$ y $\rho_{\gamma\beta}= 1.2 \times 10^{-3}$.

En el barrido de la relación de viscosidades $\mu_{\gamma\beta}$, como se muestra en la Figura 6.8, la velocidad de la fase- γ tiende a disminuir en una caída suave cuando las viscosidades en ambas fases comienzan a ser iguales. Si la diferencia de viscosidades comienza a ser significativa, a partir de una diferencia de dos órdenes de magnitud, la velocidad de la fase- γ comienza a ser constante.

Como parte del análisis, también es necesario probar la validez de los modelos promedio, los cuales no se habían tomado en cuenta para compararse debido a que el modelo de una sola ecuación es comparable en la fase- β únicamente. Aunado a lo anterior, se propone un barrido para las diferentes relaciones de densidad y viscosidad en los modelos promedio para la fase- β como se muestra a continuación

donde AV_{1EQ} es la solución de la ecuación promedio en (6.74) y AV_{2EQ} es la solución de la ecuación promedio en (6.59). Para el barrido de $\rho_{\gamma\beta}$, como se muestra en la Figura 6.9, cuando la densidad de

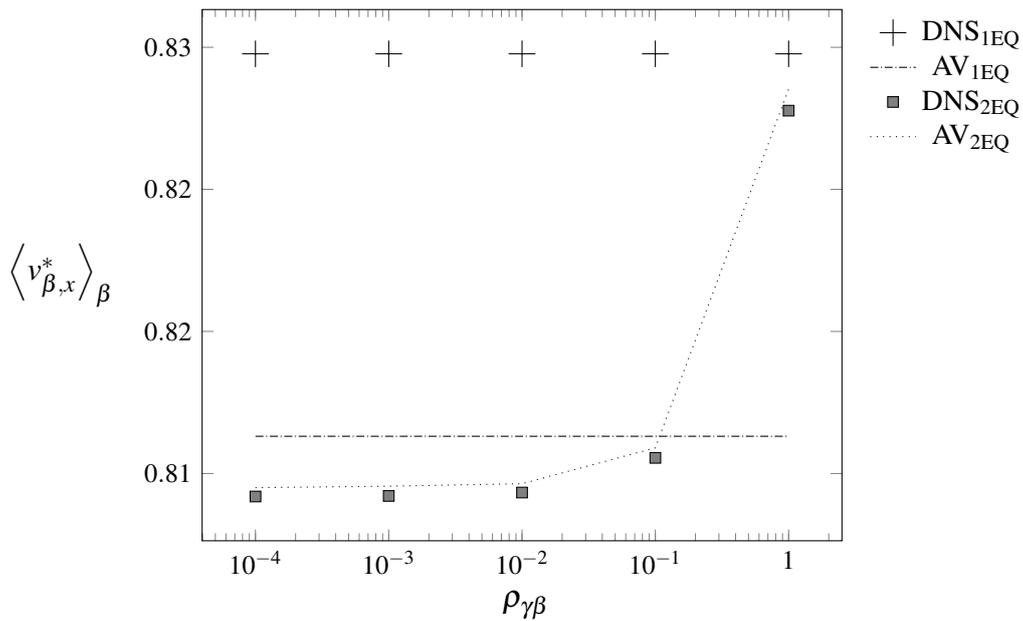


Figura 6.9: Barrido de valores de $\rho_{\gamma\beta}$ para los diferentes modelos. Con valores de $Ca=0.0014$, $Re=97.93$ y $\mu_{\gamma\beta}=17.9 \times 10^{-3}$.

la fase dispersa tiende a ser igual que la densidad de la fase continua, el modelo puntual y promedio de una ecuación, no son capaces de reproducir esta diferencia; sin embargo la aproximación del error promedio entre estos modelos inferior al 3%, lo que es numéricamente aceptable. Como se esperaba, los modelos de dos ecuaciones puntual y promedio, son sensibles a los cambios de la relación de densidades y tienden a aumentar la velocidad promedio en la fase beta a medida que las densidades tienden a ser iguales.

De los resultados observados en la Figura 6.9, se realiza un análisis del error relativo respecto de los datos obtenidos de la solución puntual de las ecuaciones (6.43). En el análisis del error relativo de la Figura 6.10, se observa que el modelo que reproduce los resultados puntuales con mayor error es el modelo promedio de una ecuación; sin embargo, este último es menor a 1.5% lo cual es aceptable. Los otros modelos, reproducen los datos experimentales con un error menor al 0.5%.

Para el barrido de valores de $\mu_{\gamma\beta}$ para los diferentes modelos como se muestra en la Figura 6.11, se obtiene una tendencia a la baja en la velocidad de la fase- β cuando la relación de viscosidades tiende a uno. El modelo promedio y el puntual de una ecuación reproducen los datos experimentales del problema puntual de dos ecuaciones cuando la relación de viscosidades tiene una diferencia de dos órdenes de magnitud. El modelo promedio de dos ecuaciones reproduce los cambios y es

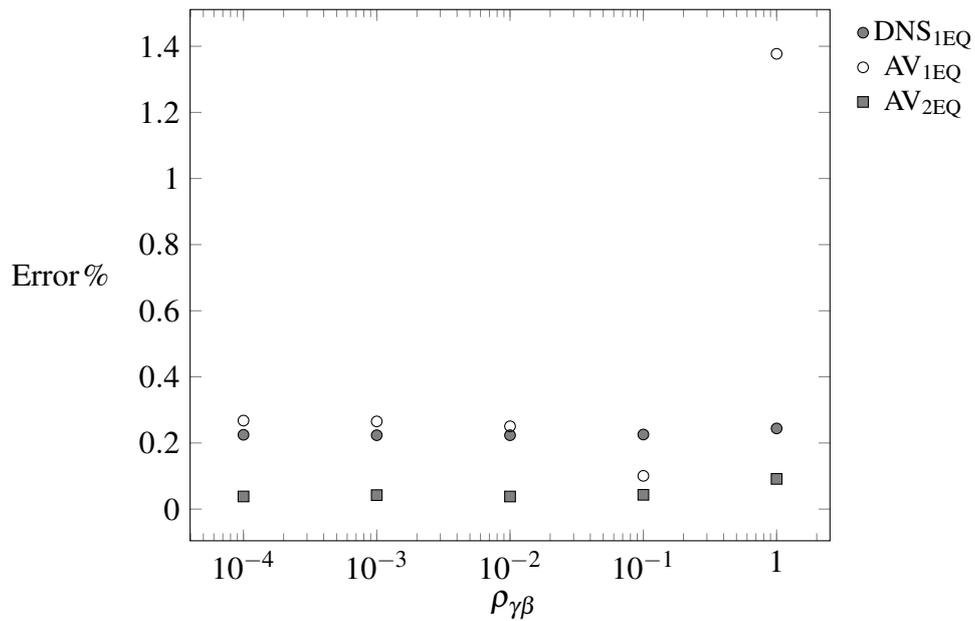


Figura 6.10: Análisis del error relativo porcentual para el barrido de $\rho_{\gamma\beta}$. Con valores de $Ca=0.0014$, $Re=97.93$ y $\mu_{\gamma\beta}=17.9 \times 10^{-3}$.

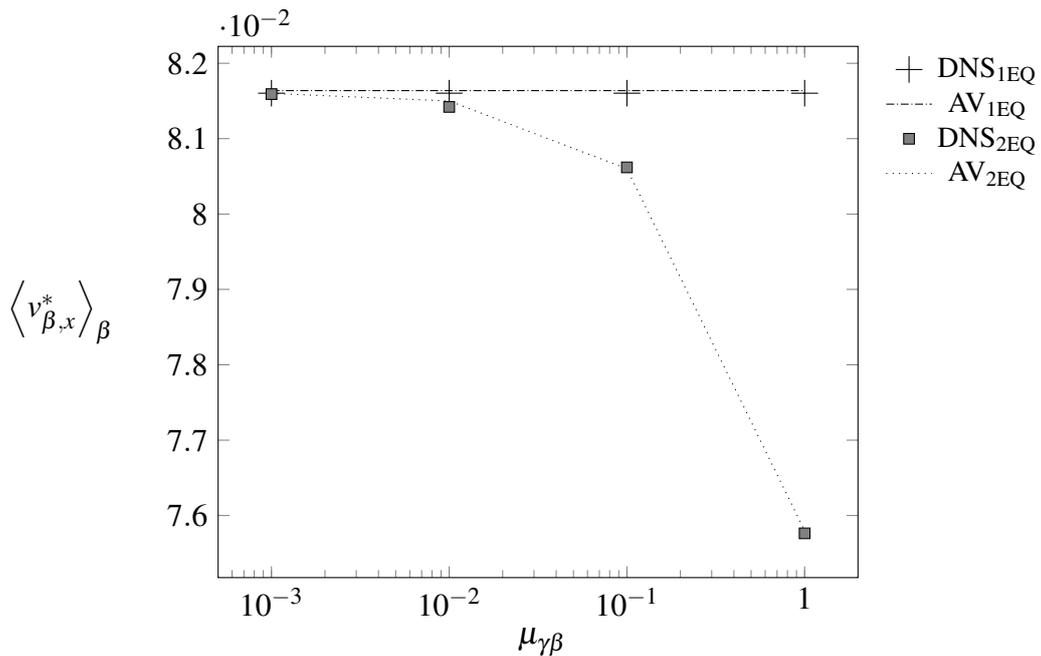


Figura 6.11: Barrido de valores de $\mu_{\gamma\beta}$ para los diferentes modelos. Con valores de $Ca= 0.0014$, $Re= 97.93$ y $\rho_{\gamma\beta}= 1.2 \times 10^{-3}$.

sensible a la relación de viscosidades.

Paso seguido, tomando los resultados observados en la Figura 6.11, se realiza un análisis del error relativo respecto de los datos obtenidos de la solución puntual del modelo de dos ecuaciones. En el análisis del error relativo de la Figura 6.10, se observa que el modelo promedio de dos

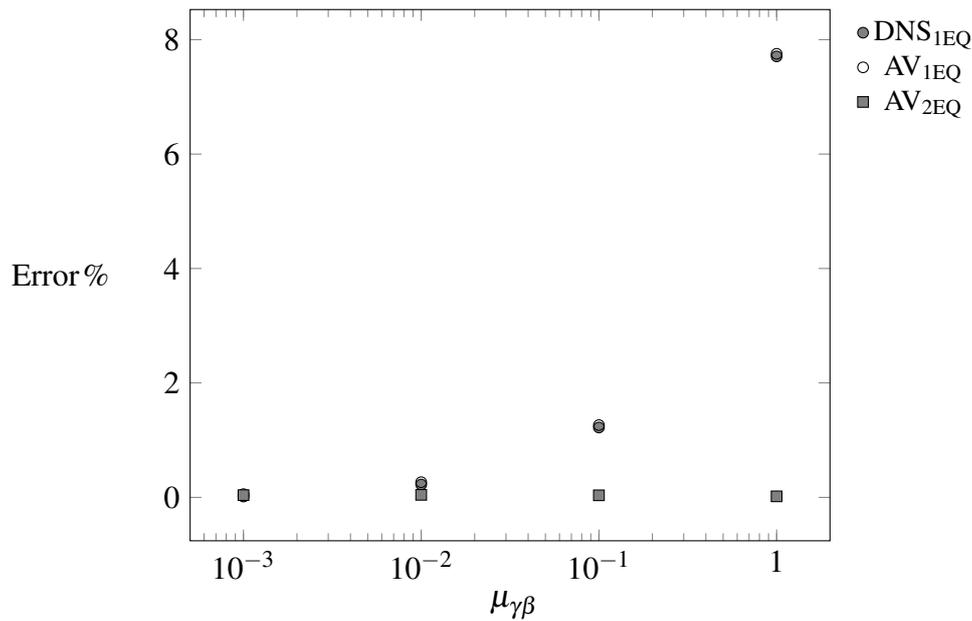


Figura 6.12: Análisis del error relativo porcentual para el barrido de $\mu_{\gamma\beta}$. Con valores de $Ca=0.0014$, $Re=97.93$ y $\rho_{\gamma\beta}=1.2 \times 10^{-3}$.

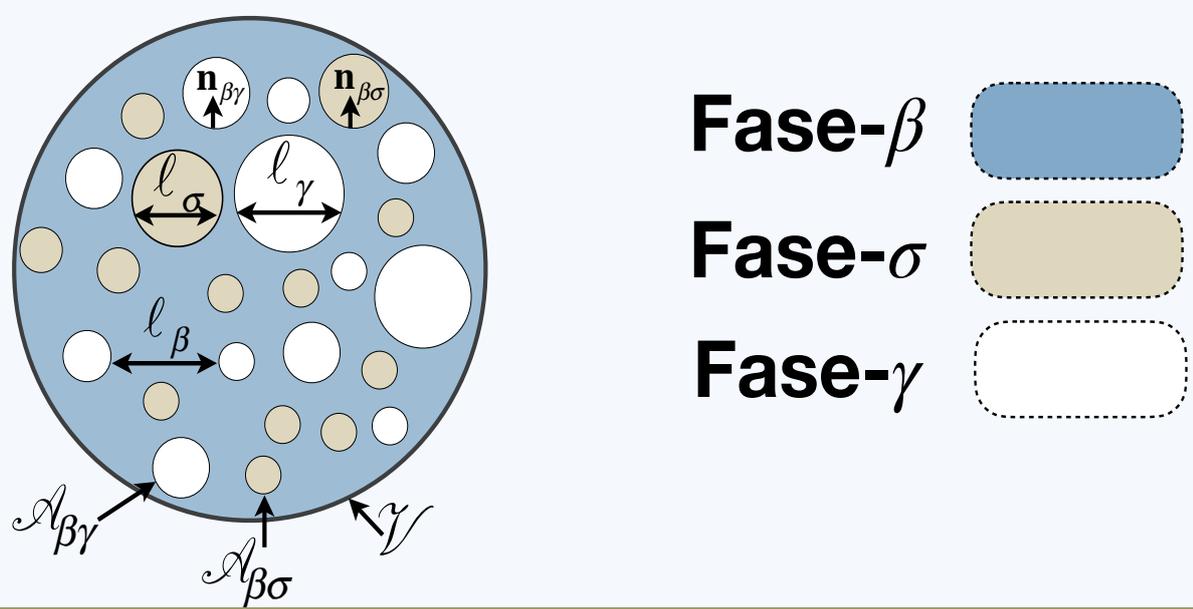
ecuaciones reproduce adecuadamente los resultados puntuales con un error relativo menor del 0.5%. Por otro lado, el modelo puntual y promedio de una ecuación tienen un error relativo menor al 8%; sin embargo, en la práctica, la diferencia de viscosidades en estos sistemas se mantiene con diferencias de un orden de magnitud lo que mantendría el error relativo menor al 2%.

6.4 Resumen del capítulo

En resumen, en este capítulo se abordaron dos formas de plantear el modelo bifásico líquido-gas. Para este fin, se plantearon las ecuaciones puntuales de cada fase así como sus condiciones de frontera y las restricciones a las que está sujeto el problema. Estas restricciones son, que el análisis se realiza en el centro del sistema lejos de la influencia de las paredes laterales y de las entradas y salidas del sistema. Otro punto importante es, que las burbujas sólo se mueven por las fuerzas de flotabilidad y desarrollan su velocidad terminal en una porción del sistema.

Para obtener la velocidad puntual, se utilizaron los dos métodos numéricos mencionados con análisis de malla clásicos, buscando la convergencia de resultados durante el refinamiento de la misma. Se establece una nueva forma de abordar el modelado del sistema, reduciendo la ecuación que domina a la fase diluida en los términos viscosos e inerciales, dejándola en términos de su gradiente de presión, basando la suposición anterior en un tamaño de burbuja del orden de mm. Los

resultados obtenidos para los modelos promedio desarrollados a lo largo de este capítulo, muestran concordancia con los resultados numéricos y experimentales de otros trabajos que determinan la velocidad terminal de la burbuja en un medio continuo.



7. Análisis trifásico del lecho fluidizado líquido-sólido-gas

En este capítulo se desarrolla un modelo de medio efectivo para estudiar el modelo trifásico del lecho fluidizado de flujo descendente líquido-sólido-gas, de acuerdo a la Figura 7.1, la cual es una representación del sistema experimental descrito en la Figura 4.16 de la Sección 4.3. Con el mismo fin que los capítulos anteriores, salvo la diferencia que en este caso, el conjunto de suposiciones iniciales que apoyan las ecuaciones que rigen en la microescala están anteriormente estudiados, se comenzará directamente con la descripción de las ecuaciones que rigen el sistema trifásico. Lo anterior, es una suma de resultados y de análisis de la validez de utilizar también una región de promediado conocida y una restricción de escala asociada descrita en la ecuación (4.4).

En la Figura 7.1 l_β , l_σ y l_γ son las longitudes características de la fase- β , la fase- σ y la fase- γ respectivamente, r_0 es la longitud característica de la región de promediado, $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ es la superficie de la interfaz entre el líquido y el sólido, $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$ es la superficie de la interfaz entre el líquido y el gas, $\mathbf{n}_{\beta\sigma}$ es el vector unitario asociado que va de la fase- β a la fase- σ , $\mathbf{n}_{\beta\gamma}$ es el vector unitario asociado que va de la fase- β a la fase- γ .

El capítulo está organizado de la siguiente manera: primero se realiza un análisis del modelo microscópico en una celda periódica,

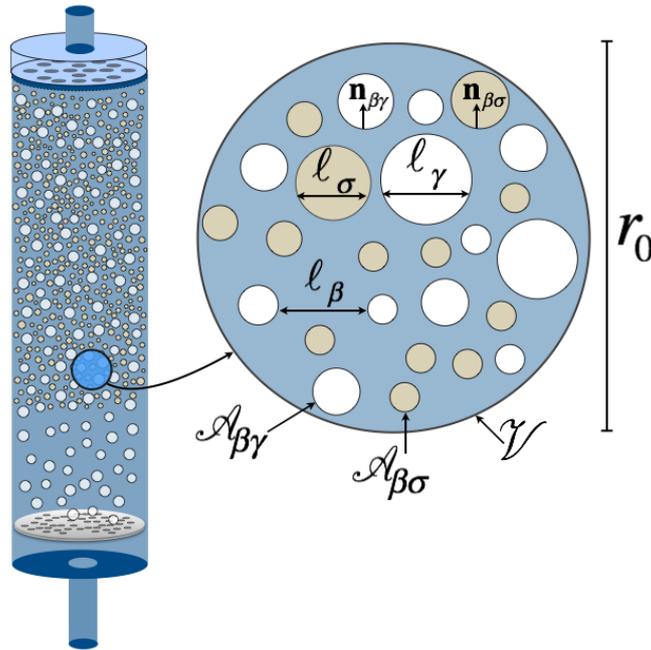


Figura 7.1: Esquema representativo del sistema trifásico estableciendo una región de promediado, incluidas las longitudes características del sistema.

7.1 Modelo microscópico en una celda periódica

Dados los análisis realizados en los Capítulos 5 y 6 para los sistemas bifásicos líquido-sólido y líquido-gas, respectivamente, se da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones que gobiernan el transporte en la microescala

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0 \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.2)$$

$$\rho_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad (7.3)$$

$$\rho_\gamma \frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + \rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma = -\nabla p_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma \quad (7.4)$$

Como se mencionó, las condiciones de frontera propuestas, son la suma de las condiciones empleadas para los modelos bifásicos descritos en los Capítulos 5 y 6, es decir que hay conservación de la velocidad entre la fase- β y la fase- σ , donde cabe remarcar que la velocidad del sólido se considera conocida e igual a su valor promedio. También hay conservación de la velocidad y del tensor total de esfuerzos entre la fase- β y la fase- γ . Aunado a ello, las interacciones entre la fase- σ y la fase- γ no se consideran debido a que en esta interfaz no hay intercambio de cantidad de movimiento y se

presentan en forma de obstáculos la una para la otra. De acuerdo a lo anterior, las condiciones de frontera para el problema microscópico son las siguientes

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{T}_\gamma + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.7)$$

Para completar el planteamiento del modelo en la microescala, se deben establecer condiciones iniciales, las cuales en este caso están dadas por

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_\gamma = \mathbf{v}_1 \quad \text{en } t = 0 \quad (7.8)$$

En este punto como en los modelos anteriores, es pertinente definir al operador de promedio intrínseco ψ_i , definido en todas partes de la fase- i (donde $i = \beta, \gamma, \sigma$) como sigue

$$\langle \psi_i \rangle^i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \psi_i dV \quad \text{donde } \psi_i = \mathbf{v}_i, p_i \text{ e } i = \beta, \gamma, \sigma \quad (7.9)$$

Recordando, se hará uso de una versión abreviada del método del promedio volumétrico y de acuerdo a la descomposición propuesta por Gray (1975) se tiene la siguiente relación para la presión en cada fase fluida

$$p_i = \langle p_i \rangle^i + \tilde{p}_i \quad \text{donde } i = \beta, \gamma \quad (7.10)$$

Al utilizar la descomposición de la ecuación (7.10) en las ecuaciones puntuales (7.3) y (7.4) se tiene lo siguiente

$$\rho_\beta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \right) = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.11)$$

$$\rho_\gamma \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma \right) = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.12)$$

Aplicando la descomposición de las presiones en la condición de frontera interfacial para los esfuerzos, se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_{\beta} - \mu_{\beta} \left(\nabla\mathbf{v}_{\beta} + (\nabla\mathbf{v}_{\beta})^T \right) \right] &= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_{\gamma} - \mu_{\gamma} \left(\nabla\mathbf{v}_{\gamma} + (\nabla\mathbf{v}_{\gamma})^T \right) \right] \\ + \left(\langle p_{\gamma} \rangle^{\gamma} - \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} \right) \mathbf{n}_{\beta\gamma} + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma} &\quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Además, como se mostró en el Capítulo 6, para geometrías esféricas, se deduce que $H = \langle H \rangle_{\beta\gamma}$, siendo este último el promedio de la interfaz de la curvatura. Siempre que sea aceptable suponer que la curvatura depende de las fuerzas de equilibrio de la presión alrededor de una esfera, la ecuación (7.13) se reduce a

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_{\beta} - \mu_{\beta} \left(\nabla\mathbf{v}_{\beta} + (\nabla\mathbf{v}_{\beta})^T \right) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l}\tilde{p}_{\gamma} - \mu_{\gamma} \left(\nabla\mathbf{v}_{\gamma} + (\nabla\mathbf{v}_{\gamma})^T \right) \right] \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.14)$$

En este punto del modelado, se supone que el dominio de solución del problema microscópico, es una celda unitaria periódica así como se realiza en los Capítulos 5 y 6. Más aún, suponiendo que la velocidad local de las tres fases y las desviaciones de las presiones para cada fase en el sistema son periódicas, se tiene que

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) \quad \tilde{p}_i(\mathbf{r} + \ell_j) = \tilde{p}_i(\mathbf{r}) \quad \text{donde } i = \beta, \gamma, \sigma \text{ y } j = x, y \quad (7.15)$$

Aunado a lo anterior, las desviaciones de la presión en cada fase están acotadas por las siguientes relaciones promedio

$$\langle \tilde{p}_{\beta} \rangle^{\beta} = 0 \quad \langle \tilde{p}_{\gamma} \rangle^{\gamma} = 0 \quad (7.16)$$

Bajo las suposiciones anteriores, el problema queda descrito de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.17a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0 \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.17b)$$

$$\rho_\beta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \right) = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.17c)$$

$$\rho_\gamma \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma \right) = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.17d)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \underbrace{\langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma}_{\text{Fuente}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.17e)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.17f)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l} \tilde{p}_\beta - \mu_\beta \left(\nabla \mathbf{v}_\beta + (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \right) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{l} \tilde{p}_\gamma - \mu_\gamma \left(\nabla \mathbf{v}_\gamma + (\nabla \mathbf{v}_\gamma)^T \right) \right] \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.17g)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \underbrace{\mathbf{v}_0}_{\text{Fuente}} \quad \mathbf{v}_\gamma = \underbrace{\mathbf{v}_1}_{\text{Fuente}} \quad \text{en } t = 0 \quad (7.17h)$$

7.2 Solución formal del problema microscópico

A partir de este punto y por la dificultad de obtener la solución formal debido al término no lineal, se busca la aproximación de una linealización a la velocidad convectiva. Si se considera que la velocidad es aproximadamente la misma en el tiempo t que en el tiempo $t - \Delta t$, es decir

$$\mathbf{v}_i \Big|_t \approx \mathbf{v}_i \Big|_{t-\Delta t} \equiv \mathbf{v}_{i\Delta} \quad (7.18)$$

las ecuaciones de cantidad de movimiento toman la siguiente forma

$$\rho_\beta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \right) = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.19)$$

$$\rho_\gamma \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma \right) = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma + \underbrace{\left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.20)$$

Para desarrollar la solución formal de este problema, por conveniencia, el análisis se lleva a cabo en el dominio de Laplace. Un punto de partida es el desarrollo de la siguiente identidad, que se cumple para cualquier vector \mathbf{f} constante pero arbitrario

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}'(t)\} = s\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\} - \mathbf{f}(0) \quad (7.21)$$

\mathbf{f} es un vector que depende del tiempo y s es la variable simbólica de Laplace. Al aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones para el transporte de cantidad de movimiento en la microescala así como sus condiciones de frontera quedan descritas como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0 \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.22b)$$

$$\rho_\beta s \bar{\mathbf{v}}_\beta - \rho_\beta \mathbf{v}_0 + \rho_\beta \overline{\mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta} = -\nabla \bar{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}_\beta + \underbrace{\left(-\nabla \langle \bar{p}_\beta \rangle^\beta + \frac{\rho_\beta \mathbf{g}}{s} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.22c)$$

$$\rho_\gamma s \bar{\mathbf{v}}_\gamma - \rho_\gamma \mathbf{v}_1 + \rho_\gamma \overline{\mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{v}_\gamma} = -\nabla \bar{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}_\gamma + \underbrace{\left(-\nabla \langle \bar{p}_\gamma \rangle^\gamma + \frac{\rho_\gamma \mathbf{g}}{s} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (7.22d)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{\langle \bar{\mathbf{v}}_\sigma \rangle^\sigma}_{\text{Fuente}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.22e)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_\beta = \bar{\mathbf{v}}_\gamma \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.22f)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\bar{\mathbf{l}}_{p_\beta} - \mu_\beta \left(\nabla \bar{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \bar{\mathbf{v}}_\beta)^T \right) \right] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\bar{\mathbf{l}}_{p_\gamma} - \mu_\gamma \left(\nabla \bar{\mathbf{v}}_\gamma + (\nabla \bar{\mathbf{v}}_\gamma)^T \right) \right] \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.22g)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{\bar{\mathbf{v}}_0}_{\text{Fuente}} \quad \bar{\mathbf{v}}_\gamma = \underbrace{\bar{\mathbf{v}}_1}_{\text{Fuente}} \quad \text{en } t = 0 \quad (7.22h)$$

Las variables sobrerayadas indican la transformada de Laplace de sus contrapartes temporales. Con el planteamiento anterior en el dominio de Laplace, es posible deducir las siguientes

expresiones que constituyen la solución formal del problema,

$$\overline{\mathbf{v}}_{\beta} = \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\beta\beta}}{\mu_{\beta}} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\beta} \rangle^{\beta} + \frac{\rho_{\beta}\mathbf{g}}{s} \right) + \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\beta\gamma}}{\mu_{\gamma}} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \frac{\rho_{\gamma}\mathbf{g}}{s} \right) + \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\beta\sigma}}{\mu_{\beta}} \cdot \langle \overline{\mathbf{v}}_{\sigma} \rangle^{\sigma} + \frac{\overline{\mathbf{m}}_{\beta\beta}}{\mu_{\beta}} + \frac{\overline{\mathbf{m}}_{\beta\gamma}}{\mu_{\gamma}} \quad (7.23)$$

$$\widetilde{\overline{p}}_{\beta} = \overline{\mathbf{d}}_{\beta\beta} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\beta} \rangle^{\beta} + \frac{\rho_{\beta}\mathbf{g}}{s} \right) + \overline{\mathbf{d}}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \frac{\rho_{\gamma}\mathbf{g}}{s} \right) + \overline{\mathbf{d}}_{\beta\sigma} \cdot \langle \overline{\mathbf{v}}_{\sigma} \rangle^{\sigma} + n_{\beta\beta} + n_{\beta\gamma} \quad (7.24)$$

$$\overline{\mathbf{v}}_{\gamma} = \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\gamma\beta}}{\mu_{\beta}} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\beta} \rangle^{\beta} + \frac{\rho_{\beta}\mathbf{g}}{s} \right) + \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\gamma\gamma}}{\mu_{\gamma}} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \frac{\rho_{\gamma}\mathbf{g}}{s} \right) + \frac{s\overline{\mathbf{D}}_{\gamma\sigma}}{\mu_{\gamma}} \cdot \langle \overline{\mathbf{v}}_{\sigma} \rangle^{\sigma} + \frac{\overline{\mathbf{m}}_{\gamma\beta}}{\mu_{\beta}} + \frac{\overline{\mathbf{m}}_{\gamma\gamma}}{\mu_{\gamma}} \quad (7.25)$$

$$\widetilde{\overline{p}}_{\gamma} = \overline{\mathbf{d}}_{\gamma\beta} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\beta} \rangle^{\beta} + \frac{\rho_{\beta}\mathbf{g}}{s} \right) + \overline{\mathbf{d}}_{\gamma\gamma} \cdot \left(-\nabla \langle \overline{p}_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \frac{\rho_{\gamma}\mathbf{g}}{s} \right) + \overline{\mathbf{d}}_{\gamma\sigma} \cdot \langle \overline{\mathbf{v}}_{\sigma} \rangle^{\sigma} + n_{\gamma\beta} + n_{\gamma\gamma} \quad (7.26)$$

Al aplicar el operador de transformada inversa de Laplace a las expresiones de la solución formal del problema, la solución en el dominio del tiempo se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\beta} &= \frac{1}{\mu_{\beta}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} + \rho_{\beta}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ &+ \frac{1}{\mu_{\gamma}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \rho_{\gamma}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ &+ \frac{1}{\mu_{\beta}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_{\sigma} \rangle^{\sigma} \Big|_{t_0} dt_0 + \frac{\mathbf{m}_{\beta\beta}}{\mu_{\beta}} + \frac{\mathbf{m}_{\beta\gamma}}{\mu_{\gamma}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{\beta} &= \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\beta}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} + \rho_{\beta}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ &+ \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \rho_{\gamma}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 + \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_{\sigma} \rangle^{\sigma} \Big|_{t_0} dt_0 + n_{\beta\beta} + n_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\gamma} &= \frac{1}{\mu_{\beta}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} + \rho_{\beta}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ &+ \frac{1}{\mu_{\gamma}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_{\gamma} \rangle^{\gamma} + \rho_{\gamma}\mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ &+ \frac{1}{\mu_{\gamma}} \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left. \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_{\sigma} \rangle^{\sigma} \Big|_{t_0} dt_0 + \frac{\mathbf{m}_{\gamma\beta}}{\mu_{\beta}} + \frac{\mathbf{m}_{\gamma\gamma}}{\mu_{\gamma}} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\gamma = & \int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 \\ & + \int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \Big|_{t_0} dt_0 + \int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma \Big|_{t_0} dt_0 + n_{\gamma\beta} + n_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Las variables de cerradura anteriores, contienen términos temporales que serán analizados a continuación. Para completar esta solución es necesario deducir los problemas de valor a la frontera que resuelven cada una de las variables de cerradura. En específico, en la siguiente sección se ilustra la deducción para las variables $\mathbf{D}_{\beta\beta}$ y $\mathbf{D}_{\gamma\beta}$.

7.3 Problemas de cerradura

En general, la solución formal del problema viene de sustituir las variables de cerradura en el problema microscópico. Este problema sólo puede completarse si se obtiene la solución de los problemas de cerradura que mapean el efecto de las fuentes en la solución formal. Una vez que se tienen los problemas de cada fuente, se aísla a cada uno y se desarrolla sus contribución. En este caso, se centra la atención en el problema de la fuente en la fase- β , lo que da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones,

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad (7.31)$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\beta}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} - \mathbf{I} \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right]_{t-t_0} \\ & \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\beta}}{\partial t} - \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right]_{t-t_0} \\ & \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.35)$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} - \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left\{ \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_{t-t_0} \right. \\ & \left. - \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mu_{\gamma\beta} \left\{ \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right)^T \right\} \right) \right]_{t-t_0} \right\} \\ & \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (7.37)$$

donde \mathcal{H} es la función escalón de Heaviside, también llamada función escalón unitario. Al analizar las ecuaciones anteriores, se debe considerar que las fuentes no son nulas y arbitrarias, sino la solución del problema planteado es la trivial. Bajo esta premisa, se pueden extraer los integrandos de cada una de las ecuaciones para obtener lo siguiente

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \quad (7.38)$$

$$\left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\beta}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} - \mathbf{l} \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right]_{\tau} = \mathbf{0} \quad (7.39)$$

$$\left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\beta}}{\partial t} - \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right]_{\tau} = \mathbf{0} \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \Big|_{\tau} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.42)$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_{\tau} = \quad (7.43)$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mu_{\gamma\beta} \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mu_{\gamma\beta} \left\{ \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} \right)^T \right\} \right) \right]_{\tau} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma}$$

donde τ es el tiempo transcurrido que contiene el producto de convolución. Este producto se obtiene con dos tensores de cualquier orden \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 que son dependientes del tiempo y puede escribirse como sigue

$$\mathbf{k}_1 * \mathbf{k}_2 = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \mathbf{k}_1|_{t-t_0} dt_0 \cdot \mathbf{k}_2|_{t_0} dt_0 = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \mathbf{k}_1|_{t_0} dt_0 \cdot \mathbf{k}_2|_{t-t_0} dt_0 \quad (7.44)$$

Para eliminar las derivadas temporales, se integra definitivamente cada ecuación desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$, donde se establece el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ para que $\mathbf{v}_{\Delta} \rightarrow \mathbf{v}$. Aunado a lo anterior, el valor del paso de tiempo Δ y la información del resto de los términos en la expansión en series de Taylor en el tiempo ya no son necesarios, con ello, se da lugar al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\beta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (7.45a)$$

$$\left[\frac{\rho_{\beta}}{\mu_{\beta}} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta} \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\beta\beta} - \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\beta} - \mathbf{l} \mathcal{H}_{\beta\beta} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (7.45b)$$

$$\left[\frac{\rho_{\gamma}}{\mu_{\beta}} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma} \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\gamma\beta} - \mu_{\gamma\beta} \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (7.45c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.45d)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.45e)$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \mathbf{d}_{\beta\beta} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\beta})^T \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \mathbf{d}_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \left\{ \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta})^T \right\} \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \text{ en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.45f)$$

En este punto, se elige como condiciones iniciales para $\mathbf{D}_{\beta\beta}$, $\mathbf{d}_{\beta\beta}$, $\mathbf{D}_{\gamma\beta}$ y $\mathbf{d}_{\gamma\beta}$ que sean *cero*. Bajo la suposición anterior, las ecuaciones anteriores dan lugar al problema de cerradura descrito en las ecuaciones (7.46). Estos problemas requieren de conocer la velocidad microscópica en cada fase. Por lo que el procedimiento a seguir para obtener la solución es, primero resolver las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento en cada fase en una celda unitaria. Paso seguido, se sustituyen los resultados en los problemas de cerradura para calcular cada una de las variables.

Problema I

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\beta} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\beta} = 0 \quad (7.46a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\beta} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta} + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.46b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\beta}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.46c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.46d)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{D}_{\gamma\beta} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.46e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\beta} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\beta})^T \right) = \quad (7.46f)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \{ \nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\beta})^T \} \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma}$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\beta} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (7.46g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\beta} = \mathbf{D}_{\gamma\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (7.46h)$$

$$\mathbf{d}_\beta(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{d}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.46i)$$

Problema II

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (7.47a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.47b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + \mathbf{l}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.47c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.47d)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.47e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \{ \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma})^T \} \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l}_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.47f)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\gamma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (7.47g)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (7.47h)$$

$$\mathbf{d}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{d}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{D}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.47i)$$

Problema III

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\sigma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\sigma} = 0 \quad (7.48a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\sigma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.48b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\sigma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.48c)$$

$$\mathbf{D}_{\beta\sigma} = \mu_\beta \mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.48d)$$

$$\mu_\gamma \mathbf{D}_{\beta\sigma} = \mu_\beta \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.48e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.48f)$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\sigma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\sigma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (7.48g)$$

$$\mu_\gamma \mathbf{D}_{\beta\sigma} = \mu_\beta \mathbf{D}_{\gamma\sigma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (7.48h)$$

$$\mathbf{d}_{\beta\sigma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{d}_{\beta\sigma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_{\beta\sigma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{D}_{\beta\sigma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.48i)$$

Problema-IV

$$\nabla \cdot \mathbf{m}_{\beta\beta} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{m}_{\gamma\beta} = 0 \quad (7.49a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\beta\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\beta\beta} \right) = -\nabla n_{\beta\beta} + \nabla^2 \mathbf{m}_{\beta\beta}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.49b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta} \right) = -\nabla n_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \nabla^2 \mathbf{m}_{\gamma\beta}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.49c)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.49d)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mathbf{m}_{\gamma\beta} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.49e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\beta\beta} + \nabla \mathbf{m}_{\beta\beta} + (\nabla \mathbf{m}_{\beta\beta})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \{ \nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta} + (\nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta})^T \} \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.49f)$$

$$\langle n_{\beta\beta} \rangle^\beta = 0 \quad \langle n_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = 0 \quad (7.49g)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mu_\beta \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{m}_{\gamma\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (7.49h)$$

$$n_{\beta\beta}(\mathbf{r} + \ell_j) = n_{\beta\beta}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{m}_{\beta\beta}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{m}_{\beta\beta}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.49i)$$

Problema-V

$$\nabla \cdot \mathbf{m}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{m}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (7.50a)$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma} \right) = -\nabla n_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \nabla^2 \mathbf{m}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (7.50b)$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \right) = -\nabla n_{\gamma\gamma} + \nabla^2 \mathbf{m}_{\gamma\gamma}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (7.50c)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.50d)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.50e)$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \{ \nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma})^T \} \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (7.50f)$$

$$\langle n_{\beta\gamma} \rangle^\beta = 0 \quad \langle n_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = 0 \quad (7.50g)$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \mathbf{m}_{\gamma\gamma} = \mu_\gamma \mathbf{v}_1, \quad \text{en } t = 0 \quad (7.50h)$$

$$n_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = n_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{m}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{m}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.50i)$$

El desarrollo de los otros cuatro problemas de cerradura, en términos de las fuentes mostradas en las ecuaciones (7.27)-(7.30), se muestran a detalle en el Apéndice C. Aquí, solo se muestran los resultados siguientes.

Una vez obtenidos los problemas de cerradura de las ecuaciones 7.46, 7.47, 7.48, 7.49 y 7.50, se pueden resolver en una celda unitaria y de ahí extraer los valores de los coeficientes efectivos de transporte e introducirlos al modelo promedio, el cual, se describirá en la siguiente sección.

7.4 Modelo promedio

El modelo promedio para las velocidades, se considera que todas las fuentes son constantes en la región de promediado. Bajo la suposición anterior, y al aplicar el operador de promediado a las soluciones formales de las velocidades deducidas en las ecuaciones (7.27) y (7.29), estas toman la siguiente forma

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle}{\partial t} * \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\beta\gamma} \rangle}{\partial t} * \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (7.51a)$$

$$+ \frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\beta\sigma} \rangle}{\partial t} * \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma + \frac{\langle \mathbf{m}_{\beta\beta} \rangle}{\mu_\beta} + \frac{\langle \mathbf{m}_{\beta\gamma} \rangle}{\mu_\gamma}$$

$$\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle = \frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\gamma\beta} \rangle}{\partial t} * \cdot \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \rangle}{\partial t} * \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) \quad (7.51b)$$

$$+ \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{\partial \langle \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \rangle}{\partial t} * \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma + \frac{\langle \mathbf{m}_{\gamma\beta} \rangle}{\mu_\beta} + \frac{\langle \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \rangle}{\mu_\gamma}$$

Nótese que para las ecuaciones (7.51), se adopta la notación $* \cdot$ para describir el producto de convolución, descrito en la ecuación (7.44), aunado a ello se consideran los siguientes cambios de variable,

$$\mathbf{s}_\beta = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \quad \mathbf{s}_\gamma = -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \quad \mathbf{s}_\sigma = \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma \quad (7.52)$$

Con ello, las ecuaciones macroscópicas de cantidad de movimiento en (7.51) para ambas fases quedan expresadas como sigue

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{1}{\mu_\beta} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}_{\beta\beta,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\beta + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \frac{\partial \mathbf{H}_{\beta\gamma,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{H}_{\beta\sigma,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\sigma \right\} + \alpha_{\beta\beta} + \alpha_{\beta\gamma} \quad (7.53a)$$

$$\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle = \frac{1}{\mu_\gamma} \left\{ \mu_{\gamma\beta} \frac{\partial \mathbf{H}_{\gamma\beta,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\beta + \frac{\partial \mathbf{H}_{\gamma\gamma,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{H}_{\gamma\sigma,t}}{\partial t} * \cdot \mathbf{s}_\sigma \right\} + \alpha_{\gamma\beta} + \alpha_{\gamma\gamma} \quad (7.53b)$$

Aquí $\mathbf{H}_{ij,t}$ ($i, j = \beta, \gamma$ o σ) son los tensores de permeabilidad aparente dinámicos o temporales, que contienen los términos históricos de la cantidad de movimiento en las fases. Dichos coeficientes efectivos dependen de las condiciones iniciales a las que están sujetos para cada problema de cerradura y se definen como sigue

$$\mathbf{H}_{\beta\beta,t} = \langle \mathbf{D}_{\beta\beta} \rangle \quad \mathbf{H}_{\beta\gamma,t} = \langle \mathbf{D}_{\beta\gamma} \rangle \quad \mathbf{H}_{\beta\sigma,t} = \langle \mathbf{D}_{\beta\sigma} \rangle \quad (7.54)$$

$$\mathbf{H}_{\gamma\beta,t} = \langle \mathbf{D}_{\gamma\beta} \rangle \quad \mathbf{H}_{\gamma\gamma,t} = \langle \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \rangle \quad \mathbf{H}_{\gamma\sigma,t} = \langle \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \rangle \quad (7.55)$$

Los valores de α_{ij} ($i, j = \beta, \gamma$) tienen las unidades de la velocidad en cada fase y están sujetas a los campos de las velocidades iniciales propuestas en el problema puntual en la ecuación (7.8), los cuales tienden a cero en tiempos prolongados y están definidos como sigue

$$\alpha_{\beta\beta} = \frac{\langle \mathbf{m}_{\beta\beta} \rangle}{\mu_\beta} \quad \alpha_{\beta\gamma} = \frac{\langle \mathbf{m}_{\beta\gamma} \rangle}{\mu_\gamma} \quad \alpha_{\gamma\beta} = \frac{\langle \mathbf{m}_{\gamma\beta} \rangle}{\mu_\beta} \quad \alpha_{\gamma\gamma} = \frac{\langle \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \rangle}{\mu_\gamma} \quad (7.56)$$

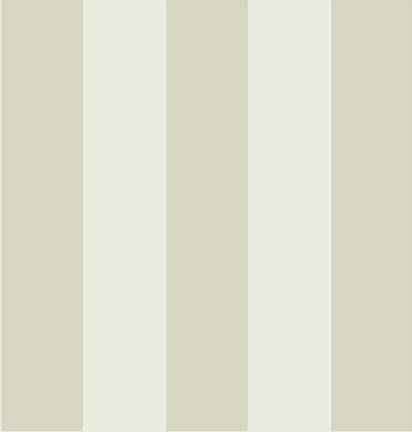
En trabajos previos Lasseux y *col.* (2019), desarrollaron un modelo macroscópico para flujo incompresible de una fase inestable en medios porosos rígidos y periódicos. En este trabajo, los autores mostraron que los coeficientes efectivos son funciones crecientes del tiempo, de la geometría y de las condiciones de flujo. Se realizaron soluciones numéricas de los problemas de cerradura en una estructura periódica para un amplio rango de números de Reynolds. Basados en esta información, para este trabajo se buscan establecer celdas unitarias pertinentes, basadas en el tamaño de la región de promediado. Lo anterior, puede ser tomando muestras físicas del sistema y vectorizarlas. Con ello, se busca resolver los problemas de cerradura asociados y del mismo modo que en los análisis paramétricos anteriores, obtener los coeficientes de permeabilidad aparente del sistema. Estos análisis se proponen llevar a cabo en trabajos futuros.

7.5 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrolla un modelo de medio efectivo para predecir la velocidad de las fases fluidas en el sistema trifásico líquido-sólido-gas. Cabe recordar que las ecuaciones propuestas para esta etapa del trabajo, son la adición de las ecuaciones de las etapas de promediado anterior líquido-sólido y líquido-gas. Aunado a ello, la velocidad de las partículas es conocida en el sistema, la cual, se propone que sea la velocidad promedio del sólido en la región de promediado.

En este modelo se hizo uso de una versión simplificada del método del promedio volumétrico y se considera la variación en el tiempo. Con ello, se obtienen los términos fuente que mueven el problema aunados a los términos temporales de las condiciones iniciales del problema. Una vez establecidas las fuentes, se hace uso de la transformada de Laplace para poder pasar del dominio del tiempo al dominio de la Laplace con el fin de resolver formalmente el problema. El paso siguiente fue regresar la solución al dominio del tiempo y se promediaron las soluciones, lo que da paso a obtener el modelo.

Finalmente, los problemas de cerradura se deducen de los términos fuente obtenidos de regresar los problemas del dominio de Laplace al dominio del tiempo. Aunado a lo anterior, el modelo macroscópico trifásico líquido-sólido-gas queda en términos de los coeficientes asociados de los problemas de cerradura desarrollados, que en este último caso también consideran términos temporales. Cabe señalar que la solución de los problemas de cerradura se llevará a cabo en trabajos futuros.



Parte Tres

Conclusiones 139

Nomenclatura 143

Bibliografía 146

**A Promediado espacial para el sistema
líquido-sólido** 161

A.1 Ecuación de continuidad

A.2 Ecuación de cantidad de movimiento

**B Promediado espacial para el sistema
líquido-gas** 171

B.1 Ecuación de continuidad

B.2 Ecuación de cantidad de movimiento

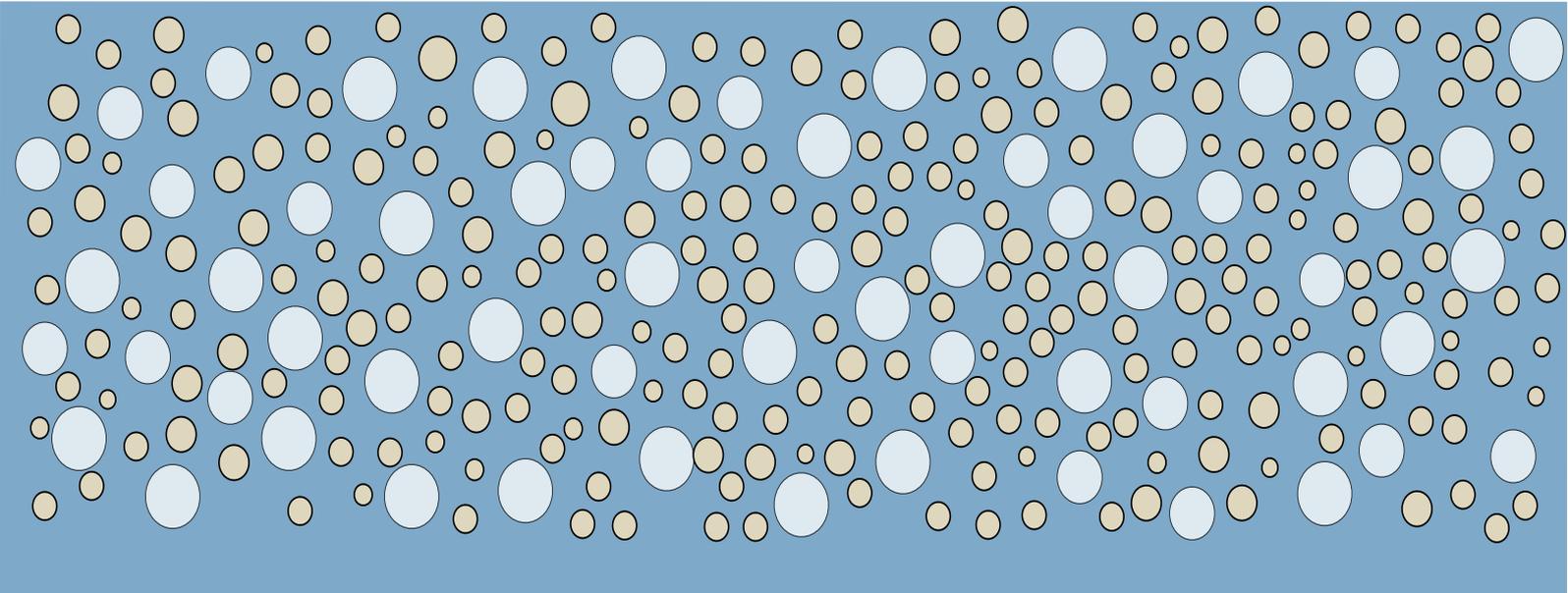
**C Análisis de las fuentes para el sistema
líquido-sólido-gas** 183

C.1 Fuente en γ

C.2 Fuente en σ

C.3 Fuentes para las condiciones iniciales

Index 190



Conclusiones

En el presente trabajo se desarrollaron dos modelos bifásicos y un trifásico de un sistema de fluidización descendente bajo la óptica del método del promedio volumétrico. En los sistemas bifásicos se obtuvieron las permeabilidades aparentes en cada uno de ellos y se analizaron los grados de libertad del modelo correspondiente. En el sistema trifásico, queda expresado el modelo macroscópico en términos de las permeabilidades aparentes que quedan como prospectiva de análisis.

El primer análisis bifásico se desarrolló en el Capítulo 5, donde se deduce un modelo macroscópico de las interacciones entre las fases sólida y fluida, las cuales, describen el transporte de cantidad de movimiento. Sumado a esto, el modelo también proporciona las restricciones que limitan la aplicabilidad del modelo en la ecuación (4.2), en otras palabras, la restricción de escala obtenida, permite que el modelo se aplique por un orden de magnitud de diferencia del tamaño de partícula respecto de la región de promediado en el sistema.

El tamaño de la región de promediado se determinó por un análisis geométrico, el cual, es tomado de las fotografías vectorizadas del sistema en la zona de fluidización, lo que resulta en que la región de promediado es aproximadamente un orden de magnitud mayor que el diámetro de partícula como se ve en la Figura 4.6. Para corroborar lo anterior, se resolvió el problema de cerradura asociado (ecuaciones (5.29)- (5.33)), lo que permite calcular el coeficiente del tensor

de permeabilidad aparente ($\|\mathbf{H}_\beta\|$), que se usa en el modelo promedio para predecir la caída de presión en el lecho fluidizado. Se utilizaron los valores obtenidos para $\|\mathbf{H}_\beta\|$ en cada geometría, y se observó que los valores obtenidos para la región promedio son consistentes para los componentes xx y zx del tensor como se muestra en las Figuras 5.3a) y 5.3b) respectivamente. Además, se calcularon los perfiles para diferentes ángulos de incidencia como se ve en la Figura 5.5, donde se observó que para los ángulos paralelos los valores del coeficiente de permeabilidad aparente disminuyen y para los ángulos perpendiculares aumenta debido a la interacción del flujo con las partículas.

En los análisis para diferentes geometrías, se observó que el modelo es sensible a los cambios en la geometría del sistema, por lo tanto, se realizó una simplificación en celdas periódicas de cuadrados y círculos como se mostró en las Figuras 5.6a) y 5.6b), respectivamente. Se utilizó este número de elementos en la celda periódica, porque es necesario preservar la relación entre el diámetro de partícula y la región de promedio de la ecuación (4.2). Al proponer este enfoque, se obtuvo que los valores promedio de la permeabilidad aparente son consistentes con un error de 16 % en comparación con el valor promedio de la permeabilidad en geometrías complejas. Esto lleva a suponer que se pueden usar geometrías simplificadas, siempre que se intente encontrar un valor aproximado a las geometrías complejas. Aunque el diseño de geometrías complejas requiere una mayor precisión, éstas brindan más información sobre lo que sucede dentro del lecho fluidizado.

Se observó que el modelo promedio para el presente trabajo, puede usarse para ambos tipos de fluidización, porque el flujo global de fluido se considera en la ecuación de transporte de cantidad de movimiento y puede ser para la fluidización ascendente o descendente. Finalmente, este modelo promedio se comparó con otros modelos macroscópicos para determinar la caída de presión. Se observó en la Figura 5.9 que los valores obtenidos por el modelo promedio, son similares a los modelos desarrollados por Darcy (1856) y Kaviany (2012), debido a que el modelo promedio obtenido tiene la forma de la ley de Darcy con una corrección en la velocidad relativa del fluido respecto del sólido definido en la ecuación (5.25). Cabe señalar que, dada la naturaleza del modelo desarrollado para el presente trabajo, puede usarse para ambos tipos de fluidización, ya que el modelo promedio obtenido no está restringido por la dirección del flujo.

En el Capítulo 6 se desarrolló un modelo macroscópico promedio utilizando una versión abreviada del método del promedio volumétrico. La estructura del modelo es similar a las reportadas en la literatura (Marle, 1982; Gennes y *col.*, 1983; Lasseux y *col.*, 1996) para sistemas de medios porosos. Además, los cuatro coeficientes de permeabilidad aparentes involucrados en el modelo

se pueden calcular a partir de la solución de los problemas de cerradura que se desarrollaron y resolvieron en muchas situaciones de flujo. Cuando se compara la velocidad terminal microscópica de una burbuja, con la obtenida por la solución del problema de cerradura, estas se ajustan.

Para configuraciones específicas del sistema, se encontró que existe una región de promediado. De esta manera, se demostró que las permeabilidades aparentes son funciones crecientes del número de Reynolds y funciones decrecientes del número de Froude. Esta información se insertó en el modelo para predecir la velocidad promedio en cada fase para diferentes condiciones de flujo. Para obtener la velocidad puntual, se utilizaron los métodos de level-set y de malla movible. Estos dos métodos numéricos se emplearon con análisis de malla clásicos, buscando la convergencia de resultados durante el refinamiento de la misma. Se estableció una nueva forma de abordar el modelado del sistema, reduciendo la ecuación que domina a la fase diluida en los términos viscosos e inerciales, dejándola en términos de su gradiente de presión, basando la suposición anterior en un tamaño de burbuja del orden de mm. Los resultados obtenidos para los modelos promedio desarrollados a lo largo de este capítulo, muestran concordancia con los resultados numéricos y experimentales de otros trabajos que determinan la velocidad terminal de la burbuja en un medio continuo.

Finalmente en el Capítulo 7 se dedujeron los problemas de cerradura de un modelo macroscópico de las interacciones entre las tres fases que corresponden al lecho fluidizado de flujo descendente trifásico: líquida, sólida y gaseosa. Estos problemas de cerradura buscan calcular el efecto de las variables de cerradura, que en este caso cuentan con términos temporales, en el modelo macroscópico correspondiente. Dicho modelo describe el transporte de cantidad de movimiento utilizando una versión abreviada del método del promedio volumétrico. Sumado a esto, el modelo también se adhiere a las restricciones de escala propuestas en los Capítulos 5 y 6. Lo anterior refleja que bajo la metodología propuesta en el presente trabajo, se puede abordar un modelo de tres fases, analizando las interacciones bifásicas previas.

Nomenclatura

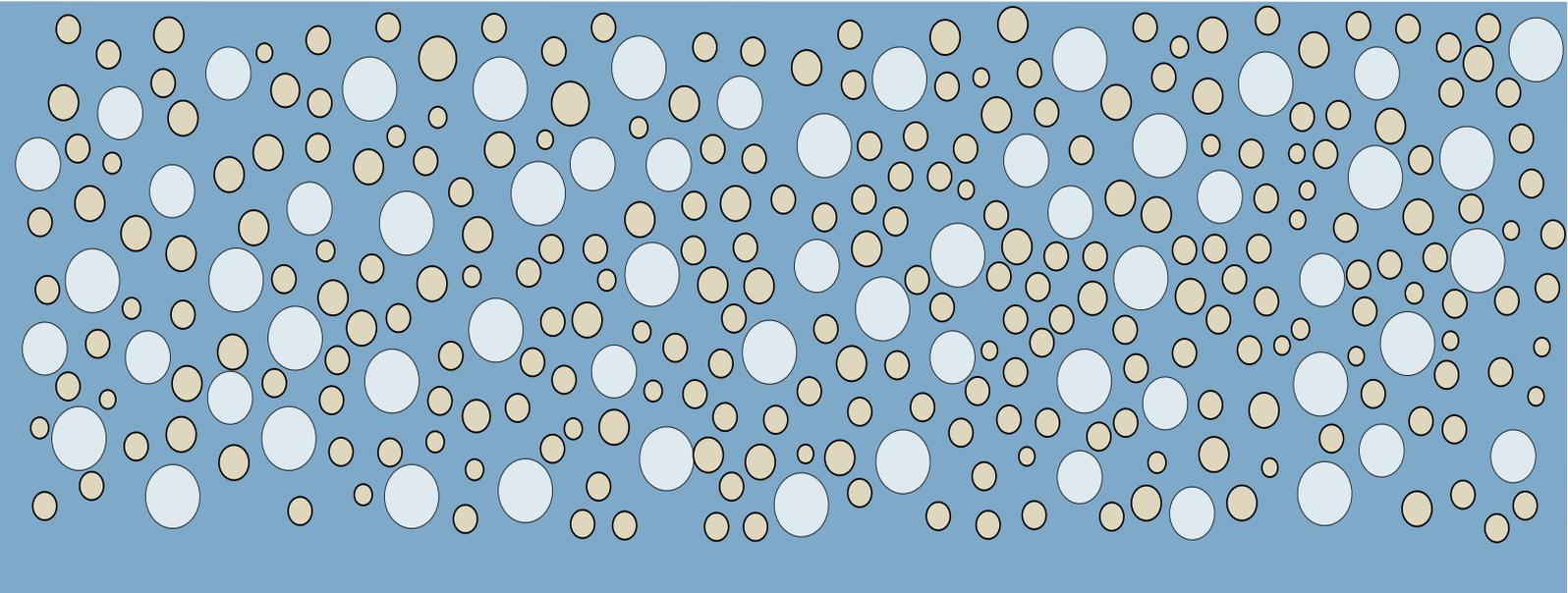
- $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$ frontera interfacial entre el líquido y el gas
- $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ frontera interfacial entre el líquido y el sólido
- \mathbf{b}_j fuerza del cuerpo por unidad de masa en la fase- j , $j = \beta, \gamma$, m/s^2
- \mathbf{B}_β variable de cerradura que mapea $\langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle$ sobre $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$
- Ca número de capilar
- d_p diámetro de partícula del soporte, m
- d_R diámetro de la columna, m
- $\mathbf{d}_{\beta\beta}$ variable de cerradura que mapea $(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g})$ sobre \tilde{p}_β , m
- $\mathbf{d}_{\beta\gamma}$ variable de cerradura que mapea $(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g})$ sobre \tilde{p}_β , m
- $\mathbf{d}_{\gamma\beta}$ variable de cerradura que mapea $(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g})$ sobre \tilde{p}_γ , m
- $\mathbf{d}_{\gamma\gamma}$ variable de cerradura que mapea $(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g})$ sobre \tilde{p}_γ , m
- $\mathbf{D}_{\beta\beta}$ variable de cerradura que mapea $\mu_\beta^{-1} (-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g})$ sobre \mathbf{v}_β , m^2
- $\mathbf{D}_{\beta\gamma}$ variable de cerradura que mapea $\mu_\gamma^{-1} (-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g})$ sobre \mathbf{v}_β , m^2
- $\mathbf{D}_{\gamma\beta}$ variable de cerradura que mapea $\mu_\beta^{-1} (-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g})$ sobre \mathbf{v}_γ , m^2
- $\mathbf{D}_{\gamma\gamma}$ variable de cerradura que mapea $\mu_\gamma^{-1} (-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g})$ sobre \mathbf{v}_γ , m^2

Fr	número de Froude
\mathbf{f}_β	variable de cerradura que mapea $\mu_\beta \langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle$ sobre \tilde{p}_β , m^{-1}
\mathbf{F}	tensor de Forchheimer
\mathbf{g}	vector de gravedad, m/s^2
H	curvatura de una esfera, $1/\text{m}$
$\langle H \rangle_{\beta\gamma}$	promedio interfacial de la curvatura, $1/\text{m}$
\mathbf{H}_β	tensor de permeabilidad aparente de magnitud $\ \mathbf{H}_\beta\ $, m^2
$H_{\beta,xx}$	componente xx del tensor de permeabilidad aparente, m^2
\mathbf{I}	tensor identidad
\mathbf{K}	tensor de permeabilidad intrínseco, m^2
$\mathbf{K}_{\beta\beta}$	tensor de permeabilidad aparente de la fase- β sobre la fase- β , m^2
$\mathbf{K}_{\beta\gamma}$	tensor de permeabilidad aparente de la fase- γ sobre la fase- β , m^2
$\mathbf{K}_{\gamma\beta}$	tensor de permeabilidad aparente de la fase- β sobre la fase- γ , m^2
$\mathbf{K}_{\gamma\gamma}$	tensor de permeabilidad aparente de la fase- γ sobre la fase- γ , m^2
ℓ_R	tamaño lateral de la columna, m
ℓ_β	longitud característica de la fase- β , m
ℓ_γ	longitud característica de la fase- γ , m
ℓ_σ	longitud característica de la fase- σ , m
\mathbf{l}_i	vectores de celda unitaria, $i=1,2,3$, m
L_R, L	longitud característica de la columna, m
$\mathbf{n}_{\beta\gamma}$	vector unitario normal de la fase- β a la fase- γ
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector unitario normal de la fase- β a la fase- σ
p_β	presión de la fase fluida, Pa
$\langle p_\beta \rangle^\beta$	promedio intrínseco de la presión en la fase fluida, Pa
\tilde{p}_β	desviaciones espaciales de la presión en la fase fluida, Pa
p_γ	presión de la fase gaseosa, Pa
$\langle p_\gamma \rangle^\gamma$	promedio intrínseco de la presión en la fase gaseosa, Pa
\tilde{p}_γ	desviaciones espaciales de la presión en la fase gaseosa, Pa
$\dot{Q}_{\gamma,\text{in}}$	gasto volumétrico en la columna, m^3/s
Re	número de Reynolds a escala de columna
Re_p	número de Reynolds a escala de partícula

\mathbf{r}	vector de posición, m
r_0	tamaño de la región de promediado, m
\mathbf{T}_β	tensor total de esfuerzos en la fase- β , Pa
\mathbf{T}_γ	tensor total de esfuerzos en la fase- γ , Pa
\mathcal{V}	dominio de promediado
V	volumen del dominio de promediado, m ³
V_β	volumen de la fase fluida contenida en el dominio de promediado, m ³
V_γ	volumen de la fase gaseosa contenida en el dominio de promediado, m ³
V_p	volumen de partículas, m ³
\mathbf{v}_β	velocidad puntual del fluido, m/s
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$	promedio superficial de la velocidad de la fase fluida, m/s
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$	promedio intrínseco de la velocidad de la fase fluida, m/s
$\tilde{\mathbf{v}}_\beta$	desviaciones espaciales de la velocidad del fluido, m/s
\mathbf{v}_γ	velocidad puntual de la fase- γ , m/s
$\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle$	promedio superficial de la velocidad de la fase- γ , m/s
$\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$	promedio intrínseco de la velocidad de la fase gaseosa, m/s
$\tilde{\mathbf{v}}_\gamma$	desviaciones espaciales de la velocidad del gas, m/s
\mathbf{v}_σ	velocidad puntual del sólido, m/s
$\langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma$	promedio intrínseco de la velocidad de la fase sólida, m/s
$\langle \mathbf{v}_{\beta\sigma} \rangle$	velocidad relativa promedio del fluido respecto del sólido, m/s

Letras Griegas

ε_{β}	fracción volumétrica del fluido o fase- β
ε_{γ}	fracción volumétrica del gas o fase- γ
ε_{σ}	fracción volumétrica del sólido o fase- σ
μ_{β}	viscosidad de la fase- β , Pa s
μ_{γ}	viscosidad de la fase- γ , Pa s
$\mu_{\gamma\beta}$	viscosidad relativa de la fase- γ respecto de la fase- β
ϕ_{σ}	esfericidad de las partículas
ρ_{β}	densidad de la fase- β , kg/m ³
ρ_{γ}	densidad de la fase- γ , kg/m ³
ρ_{σ}	densidad de la fase- σ , kg/m ³
$\rho_{\gamma\beta}$	densidad relativa de la fase- γ respecto de la fase- β
σ	coeficiente de tensión interfacial, Pa m



Bibliografía

- Abdurahman, N H, Rosli, Y M, and Azhari, N H. 2013. The performance evaluation of anaerobic methods for Palm Oil Mill Effluent (POME) treatment: A review. *International perspectives on water quality management and pollutant control*.
- Adrian, Ronald J. 1991. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 23, (1), 261–304.
- Allen, Terence, 2013. *Particle size measurement*. Springer.
- Allievi, Alejandro and Bermejo, Rodolfo. 2000. Finite element modified method of characteristics for the Navier - Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32, (4), 439–463.
- Alvarado-Lassman, A, Rustrián, E, García-Alvarado, M A, Rodríguez-Jiménez, G C, and Houbron, Eric. 2008. Brewery wastewater treatment using anaerobic inverse fluidized bed reactors. *Bioresource technology*, 99, (8), 3009–8524.
- Alvarado-Lassman, A, Sandoval-Ramos, A, Flores-Altamirano, M G, Vallejo-Cantu, N A, and Mendez-Contreras, J M. 2010. Strategies for the startup of methanogenic inverse fluidized-bed reactors using colonized particles. *Water Environment Research*, 82, (5), 387–4303.

- Anderson, T Bo and Jackson, Roy. 1967. Fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 6, (4), 527–539.
- Angelino, H. 1966. Hydrodynamique des grosses bulles dans les liquides visqueux. *Chemical Engineering Science*, 21, (6-7), 541–550.
- Arnaiz, C, Elmaleh, S, Lebrato, J, and Moletta, René. 2005. Start up of an anaerobic inverse turbulent bed reactor fed with wine distillery wastewater using pre-colonised bioparticles. *Water science and Technology*, 51, (1), 153–1223.
- Aybers, N. M. and Tapucu, A. 1969. The motion of gas bubbles rising through stagnant liquid. *Wärme- und Stoffübertragung*. ISSN 00429929. doi: 10.1007/BF01089056.
- Barrere, Jean, Gipouloux, Olivier, and Whitaker, Stephen. mar 1992. On the closure problem for Darcy's law. *Transport in Porous Media*, 7, (3), 209–222. doi: 10.1007/bf01063960.
- Baz-Rodríguez, S, Aguilar-Corona, A, and Soria, A. 2012. Rising velocity for single bubbles in pure liquids. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 11, (2), 269–278.
- Bear, Jacob, 2013. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation. ISBN 0486131807.
- Benítez-Olivares, Guillermo, Valdés-Parada, Francisco J., Meraz-Rodríguez, Mónica, and Soria-López, Alberto. 2017. Macroscopic model for momentum transport in down-flow fluidization. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 15, (6).
- Bensoussan, Alain. 1978. *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*. La Bibliothèque Centrale.
- Blake, F C. 1922. The resistance of packing to fluid flow. *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers*, 14, (415-421), 3.
- Blanco, Armando and Magnaudet, Jacques. 1995. The structure of the axisymmetric high-reynolds number flow around an ellipsoidal bubble of fixed shape. *Physics of fluids*, 7, (6), 1265–1274.
- Borzacconi, Liliana, López, Iván, Arcia, Esteban, Cardelin, Luis, Castagna, Alvaro, and Viñas, María, 1996. Comparación de tratamientos aerobios y anaerobios aplicados a lixiviado de relleno sanitario. AIDIS.

- Brenner, Howard, 2013. Gas-liquid-solid fluidization engineering. Butterworth-Heinemann. ISBN 1483289516.
- Bryn, Oslo, 1949. Speed of rise of air bubbles in liquids. David Taylor Model Basin Washington DC.
- Buffière, Pierre and Moletta, René. 1999. Some hydrodynamic characteristics of inverse three phase fluidized-bed reactors. *Chemical Engineering Science*, 54, (9), 1233–1242.
- Burridge, H. C. and Hunt, G. R. 2012. The rise heights of low and high froude number turbulent axisymmetric fountains. *Journal of Fluid Mechanics*, 691, 392–416.
- Carman, Phillip C. 1937. Fluid flow through granular beds. *Transactions-Institution of Chemical Engineeres*, 15, 150–166.
- Celata, Gian Piero, D'Annibale, Francesco, Di Marco, Paolo, Memoli, Gianluca, and Tomiyama, Akio. 2007. Measurements of rising velocity of a small bubble in a stagnant fluid in one-and two-component systems. *Experimental thermal and fluid science*, 31, (6), 609–623.
- Chen, RC, Reese, J, and Fan, L-S. 1994. Flow structure in a three-dimensional bubble column and three-phase fluidized bed. *AIChE Journal*, 40, (7), 1093–1104.
- Cho, Y S and Laskowski, J S. 2002. Effect of flotation frothers on bubble size and foam stability. *International Journal of Mineral Processing*, 64, (2), 69–80. doi: [https://doi.org/10.1016/S0301-7516\(01\)00064-3](https://doi.org/10.1016/S0301-7516(01)00064-3).
- Choudhury, S and Sahoo, A. 2012. Waste water treatment by inverse fluidization process: an overview. *IJAET*, 3, 8–16.
- Clift, Roland, Grace, John R, and Weber, Martin E, 2005. Bubbles, drops, and particles. Ed. Courier Corporation. ISBN 0486445801.
- CONAGUA, , 2015. Programa de tratamiento de aguas residuales (PROTAR). CONAGUA.
- Coulson, JM, Richardson, JF, Backhurst, JR, and Harker, JH, 1977. *Chemical Engineering-Volume 1: Fluid Flow, Heat Transfer and Mass Transfer (SI Units)*. New York, NY, Pergamon Press.
- Daizo, Kunii and Levenspiel, O. 1991. *Fluidization engineering*. Stoneham, MA (United States); Butterworth Publishers.

- Darcy, Henry. 1856. The public fountains of the city of dijon. Dalmont, Paris, 647.
- Das, Bimal, Ganguly, Uma Prasad, and Das, Sudip Kumar. 2010. Inverse fluidization using non-Newtonian liquids. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 49, (11), 1169–1175.
- Das, Bimal, Ganguly, Uma Prasad, Bar, Nirjhar, and Das, Sudip Kumar. 2015. Holdup prediction in inverse fluidization using non-newtonian pseudoplastic liquids: empirical correlation and ann modeling. *Powder technology*, 273, 83–90.
- Davies, RM and Taylor, Geoffrey Ingram. 1950. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200, (1062), 375–390.
- Delnoij, E, Lammers, FA, Kuipers, JAM, and Swaaij, Willibrordus Petrus Mariavan . 1997. Dynamic simulation of dispersed gas-liquid two-phase flow using a discrete bubble model. *Chemical engineering science*, 52, (9), 1429–1458.
- Di Felice, Renzo. 1995. Hydrodynamics of liquid fluidisation. *Chemical Engineering Science*, 50, (8), 1213–1245.
- Dijkhuizen, W, Roghair, I, Annaland, M Van Sint, and Kuipers, JAM. 2010. Dns of gas bubbles behaviour using an improved 3d front tracking model—drag force on isolated bubbles and comparison with experiments. *Chemical Engineering Science*, 65, (4), 1415–1426.
- Epstein, Norman. 2003a. Liquid-solids fluidization. *Handbook of fluidization and fluid-particle systems*, Marcel Dekker, New York.
- Epstein, Norman. 2003b. Applications of liquid-solid fluidization. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 1, (1).
- Ergun, Sabri. 1952. Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Prog.*, 48, 89–94.
- Ergun, Sabri and Orning, Ao Ao. 1949. Fluid flow through randomly packed columns and fluidized beds. *Industrial & Engineering Chemistry*, 41, (6), 1179–1184.

- Fan, Liang-Shih, Muroyama, Katsuhiko, and Chern, Song-Hsing. 1982. Hydrodynamic characteristics of inverse fluidization in liquid–solid and gas–liquid–solid systems. *The Chemical Engineering Journal*, 24, (2), 143–150.
- Fan, LT, Neogi, D, Yashima, M, and Nassar, R. 1990. Stochastic analysis of a three-phase fluidized bed: Fractal approach. *AIChE Journal*, 36, (10), 1529–1535.
- Feng, Rongtao, Li, Junguo, Cheng, Zhonghu, Yang, Xin, and Fang, Yitian. 2017. Influence of particle size distribution on minimum fluidization velocity and bed expansion at elevated pressure. *Powder technology*, 320, 27–36.
- Fernández, N, Montalvo, S, Borja, R, Guerrero, L, Sánchez, E, Cortés, I, Colmenarejo, M F, Travieso, L, and Raposo, F. 2008. Performance evaluation of an anaerobic fluidized bed reactor with natural zeolite as support material when treating high-strength distillery wastewater. *Renewable Energy*, 33, (11), 1481–2458.
- Forchheimer, P H. 1901. *Wasserbewegung Durch Boden*. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 45.
- Foscolo, P U and Gibilaro, L G. 1987. Fluid dynamic stability of fluidised suspensions: the particle bed model. *Chemical Engineering Science*, 42, (6), 1489–1500.
- Garside, John and Al-Dibouni, Maan R. 1977. Velocity-voidage relationships for fluidization and sedimentation in solid-liquid systems. *Industrial & engineering chemistry process design and development*, 16, (2), 206–214.
- Gennes, De, P., G, De Gennes, P G, Gennes, De, P., G, and De Gennes, P G. 1983. Hydrodynamic dispersion in unsaturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 136, 189–200. ISSN 1469-7645.
- Giácoman, G, Rejón, L I, and Aguilar, S R, 2006. Evaluación de las características hidráulicas de un reactor de lecho fluidificado para el tratamiento aerobio de las aguas residuales. México. XV Congreso Nacional de Ingeniería Sanitaria y Ciencias Ambientales.
- Givler, R C and Altobelli, S A. 1994. A determination of the effective viscosity for the Brinkman–Forchheimer flow model. *Journal of Fluid Mechanics*, 258, 355–370.

- Gorodetskaya, A. 1949. The rate of rise of bubbles in water and aqueous solutions at great reynolds numbers. *J1. Phys. Chem*, 71, (8).
- Grady Jr, CP Leslie, Daigger, Glen T, Love, Nancy G, and Filipe, Carlos DM, 2011. *Biological wastewater treatment*. CRC press. ISBN 142000963X.
- Gray, William G. 1975. A derivation of the equations for multi-phase transport. *Chemical Engineering Science*, 30, (2), 229–233.
- Haberman, William L and Morton, RK. 1953. An experimental investigation of the drag and shape of air bubbles rising in various liquids. David Taylor Model Basin Washington DC.
- Hadamard, JS. 1911. Mouvement permanent lent d'une sphère liquid et visqueuse dans un liquide visqueux. *CR Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, 152, 1735–1738.
- Han, Hee-Dong, Lee, Won, Kim, Young-Kang, Kwon, Jae-Lee, Choi, Ho-Suk, Kang, Yong, and Kim, Sang-Done. 2003. Phase hold-up and critical fluidization velocity in a three-phase inverse fluidized bed. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 20, (1), 163–168.
- Harmathy, Tibor Z. 1960. Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent. *AIChE Journal*, 6, (2), 281–288.
- Henze, Mogens, Loosdrecht, Mark CMvan , Ekama, George A, and Brdjanovic, Damir, 2008. *Biological wastewater treatment*. IWA publishing. ISBN 1843391880.
- Herskowitz, Mordechai and Merchuk, Jose C. 1986. A loop three-phase fluidized bed reactor. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 64, (1), 57–61.
- Heywood, John G. 1980. The Navier-Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions. *Indiana University Mathematics Journal*, 29, (5), 639–681.
- Hidalgo-Barrio, María Dolores and García-Encina, Pedro A. 2002. Reactores biológicos de lecho fluidizado. *Ingeniería Química-Madrid*, 34, (391), 122–134.
- Hoppe, F and Breuer, M. 2018. A deterministic and viable coalescence model for euler-lagrange simulations of turbulent microbubble-laden flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 99, 213–230.

- Houbron, Eric, Sandoval Rojas, Martha Elvira, and Hernández Muñoz, Aurelio Felix. 2016. Tratamiento de vinazas en un reactor de lecho fluidizado inverso anaerobio. *Revista internacional de contaminación superior ambiental*, 32, (3), 255–266.
- Houghton, G., Ritchie, P. D., and Thomson, J. A. 1957. Velocity of rise of air bubbles in sea–water, and their types of motion. *Chemical Engineering Science*, 7, (1–2), 111–112.
- Howes, Frederick A and Whitaker, Stephen. 1985. The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science*, 40, (8), 1387–1392. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0009-2509\(85\)80078-6](http://dx.doi.org/10.1016/0009-2509(85)80078-6).
- Ingham, Derek B and Pop, Ioan, 1998. *Transport phenomena in porous media*. Elsevier. ISBN 0080543197.
- Jamialahmadi, M, Müller-Steinhagen, H, and Izadpanah, M R. 2005. Pressure drop, gas hold-up and heat transfer during single and two-phase flow through porous media. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 26, (1), 156–172.
- Jiménez, B, Noyola, A, and Capdeville, B. 1988. Selected dyes for residence time distribution evaluation in bioreactors. *Biotechnology techniques*, 2, (2), 77–82.
- Joseph, D D, Nield, D A, and Papanicolaou, G. 1982. Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium. *Water Resour. Res*, 18, (4), 1049–1052.
- Kaviany, Massoud, 2012. *Principles of heat transfer in porous media*. Springer Science & Business Media.
- Kozeny, J, 1927. *Über kapillare leitung der wasser in boden*, volume 136. Hölder-Pichler-Tempsky, A.-G. [Abt.:] Akad. d. Wiss.
- Kramer, OJI, Moel, PJde , Baars, ET, Vugt, WHvan , Padding, JT, and Hoek, JPvan der . 2019. Improvement of the richardson-zaki liquid-solid fluidisation model on the basis of hydraulics. *Powder technology*, 343, 465–478.
- Kunii, D, Levenspiel, O, and Brenner, H, 2013. *Fluidization Engineering*. Elsevier Science.
- Ladyzhenskaya, Olga A, 1969. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 76. Gordon and Breach Publishers: New York.

- Lasseux, Didier, Quintard, Michel, and Whitaker, Stephen. 1996. Determination of permeability tensors for two-phase flow in homogeneous porous media: Theory. *Transport in Porous Media*, 24, (2), 107–137.
- Lasseux, Didier, Arani, A A Abbasian, and Ahmadi, A. 2011. On the stationary macroscopic inertial effects for one phase flow in ordered and disordered porous media. *Physics of Fluids (1994-present)*, 23, (7), 73103.
- Lasseux, Didier, Valdés-Parada, Francisco J, and Bellet, Fabien. 2019. Macroscopic model for unsteady flow in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 862, 283–311.
- Legile, PG. 1992. Contribution to the study of an inverse three-phase fluidized bed operating counter-currently. *Intl. Chem. Eng. J.*, 32, 41–50.
- Lehninger, Albert L., 2002. *Lehninger Principios En Bioquímica*. Editorial Omega.
- Lehrer, Isaac H. 1976. A rational terminal velocity equation for bubbles and drops at intermediate and high reynolds numbers. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 9, (3), 237–240.
- Leva, Max, 1959. *Fluidization*. McGraw-Hill.
- Limas-Ballesteros, R, Riba, J P, and Couderc, J P. 1982. Expansion de couches de particules non sphériques fluidisées par un liquide. *Entropie*, 106, 37–45.
- Lin, Chiou-Liang, Wey, Ming-Yen, and You, Shr-Da. 2002. The effect of particle size distribution on minimum fluidization velocity at high temperature. *Powder Technology*, 126, (3), 297–301.
- Lions, Pierre-Louis, 1996. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, volume 2. Oxford University Press, USA. ISBN 0198514883.
- Livingston, A G and Zhang, S F. 1993. Hydrodynamic behaviour of three-phase (gas-liquid-solid) airlift reactors. *Chemical Engineering Science*, 48, (9), 1641–1654.
- Marle, C M. 1982. On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media. *International Journal of Engineering Science*, 20, (5), 643–662.
- Moore, F. K. and Summer, B., 1970. Boundary layer separation on a liquid sphere. *National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center*.

- Muroyama, Katsuhiko and Fan, Liang-Shih. 1985. Fundamentals of gas-liquid-solid fluidization. *AIChE Journal*, 31, (1), 1–34.
- Nan, Ji-Xing, Park, Eun-Jeon, Yang, Byung-Keun, Song, Chi-Hyun, Ko, Geonil, and Sohn, Dong Hwan. 2001. Antifibrotic effect of extracellular biopolymer from submerged mycelial cultures of *cordyceps militaris* on liver fibrosis induced by bile duct ligation and scission in rats. *Archives of pharmacal research*, 24, (4), 327–332.
- Nassik, Ahmed Zaki. 1979. Homogénéisation des équations de stokes pour un écoulement en milieu poreux périodique. Doctoral dissertation.
- Nguyen, Anh V. 1998. Prediction of bubble terminal velocities in contaminated water. *AIChE Journal*, 44, (1), 226–230.
- Nickens, HV and Yannitell, DW. 1987. The effects of surface tension and viscosity on the rise velocity of a large gas bubble in a closed, vertical liquid-filled tube. *International journal of multiphase flow*, 13, (1), 57–69.
- Nield, Donald A and Bejan, Adrian, 2006. *Convection in porous media*. Springer Science & Business Media.
- Pan, T-W, Joseph, D D, Bai, R, Glowinski, R, and Sarin, V. 2002. Fluidization of 1204 spheres: simulation and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 451, 169–191.
- Papirio, Stefano. 2012. Fluidized-bed bioreactor applications for the treatment of metal-sulfate and nitrate-contaminated mine waters. A Doctoral Thesis of the Department of Chemical Engineering, University of Cassino and Southern Lazio, Italy.
- Park, Sung Hoon, Park, Changhwan, Lee, JinYong, and Lee, Byungchul. 2017. A simple parameterization for the rising velocity of bubbles in a liquid pool. *Nuclear Engineering and Technology*, 49, (4), 692–699.
- Patterson, James William. 1985. *Industrial wastewater treatment technology*. Butterworth Publishers, Stoneham, MA.
- Peebles, F. N. 1953. Studies on the motion of gas bubbles in liquid. *Chemical Engineering and Prog.*, 49, (2), 89–97.

- Pérez, Andrea and Torres, Patricia. 2008. Evaluación del comportamiento hidrodinámico como herramienta para optimización de reactores anaerobios de crecimiento en medio fijo. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 45, 27–40.
- Prince, Michael J and Blanch, Harvey W. 1990. Bubble coalescence and break-up in air-sparged bubble columns. *AIChE Journal*, 36, (10), 1485–1499. doi: 10.1002/aic.690361004.
- Raasimman, M, Govindarajan, I, and Karthikeyan, C. 2007. Artificial neural network modeling of an inverse fluidized bed bioreactor. *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, 11, (2).
- Ramalho, Rubens Sette, Beltrán, Domingo Jiménez, and Lora, Federico , 1990. Tratamiento de aguas residuales. Reverté.
- Ramamurthy, K and Subbaraju, K. 1973. Bed expansion characteristics of annular liquid-fluidized beds. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 12, (2), 184–189.
- Rao, T R and Bheemarasetti, JV Ram. 2001. Minimum fluidization velocities of mixtures of biomass and sands. *Energy*, 26, (6), 633–644.
- Raymond, F and Rosant, J-M. 2000. A numerical and experimental study of the terminal velocity and shape of bubbles in viscous liquids. *Chemical Engineering Science*, 55, (5), 943–955.
- Renganathan, T and Krishnaiah, K. 2005. Voidage characteristics and prediction of bed expansion in liquid–solid inverse fluidized bed. *Chemical Engineering Science*, 60, (10), 2545–2555.
- Renganathan, T and Krishnaiah, K. 2007. Spatio-temporal evolution of void fraction in liquid-solid inverse fluidized bed. *Chemical engineering science*, 62, (1), 328–338.
- Renganathan, Thiruvengadam and Krishnaiah, Kamatam. 2003. Prediction of Minimum Fluidization Velocity in Two and Three Phase Inverse Fluidized Beds. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 81, (3-4), 853–860.
- Riba, J P and Couderc, J P. 1977. Expansion de couches fluidisées par des liquides. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 55, (2), 118–121.
- Richardson, J F and Zaki, W N. 1954. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. *Chemical Engineering Science*, 3, (2), 65–73.

- Roberto Leyva, R, Soriano, Sonia, and Serrato, Lilia E. 1993. Hidrodinámica de un lecho semifluidizado líquido-sólido. *Tecnología, Ciencia y Educación (IMIQ)*, 9, (1), 23–31.
- Rocha, M A, Normando, H, and Onofre, C, 2000. Aplicación de trazadores en filtros anaeróbicos para la evaluación de características hidrodinámicas. XXVII Congreso Interamericano de Engenharia Sanitária e Ambiental.
- Rodrigue, D. 2001. Generalized correlation for bubble motion. *AIChE journal*, 47, (1), 39–44.
- Rose, HE. 1945a. An investigation into the laws of flow of fluids through beds of granular materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 153, (1), 141–148.
- Rose, HE. 1945b. On the resistance coefficient–reynolds number relationship for fluid flow through a bed of granular material. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 153, (1), 154–168.
- Rosenberg, B. and Basin, David W. Taylor Model, 1950. The Drag and Shape of Air Bubbles Moving in Liquids. Navy Department, David W. Taylor Model Basin.
- Ruckenstein, E. 1964. Homogeneous Fluidization. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 3, (3), 260–268. doi: 10.1021/i160011a015.
- Rybczynski, Witold. 1911. Über die fortschreitende bewegung einer flussigen kugel in einem zahren medium. *Bull. Acad. Sci. Cracovie A*, 1, 40–46.
- Sánchez-Palencia, Enrique. 1980. Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture notes in physics*, 127.
- Sánchez-Ramírez, J, Anaya-Sosa, I, Vizcarra-Mendoza, M G, and Gutiérrez-López, G. 2007. Estudio de la hidrodinámica del café tostado (*coffea arabica* l.) en lecho fluidizado. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 6, (2), 185–192.
- Sarhan, AR, Naser, J, and Brooks, G. 2018. Effects of particle size and concentration on bubble coalescence and froth formation in a slurry bubble column. *Particuology*, 36, 82–95.
- Schügerl, K. 1997. Three-phase-biofluidization—application of three-phase fluidization in the biotechnology—a review. *Chemical Engineering Science*, 52, (21-22), 3661–3668.

- Shi, Yuhui, 2001. Particle swarm optimization: developments, applications and resources, volume 1. IEEE.
- Sivasubramanian, V. 2010. Gas-liquid mass transfer in three-phase inverse fluidized bed reactor with Newtonian and non-Newtonian fluids. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 5, (2), 361–368.
- Sowmeyan, R and Swaminathan, G. 2008. Evaluation of inverse anaerobic fluidized bed reactor for treating high strength organic wastewater. *Bioresource Technology*, 99, (9), 3877–8524.
- Stokes, George G. 1880. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves. *Mathematical and Physical papers*, 1, (314-326), 14.
- Talaia, Mário A R. 2007. Terminal velocity of a bubble rise in a liquid column. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 28, 264–268.
- Temam, Roger, 2001. Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, volume 343. American Mathematical Society. ISBN 0821827375.
- Thaiyalnayaki, D and Sowmeyan, R. 2012. Effect of carrier materials in inverse anaerobic fluidized bed reactor for treating high strength organic waste water. *J. Environment Analytic Toxicol*, 2, (3), 2161–0525.1000134.
- Tomiyama, Akio. 1998. Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, 10, (4), 369–1459.
- Torres, Patricia. 2013. Perspectivas del tratamiento anaerobio de aguas residuales domésticas en países en desarrollo. *Revista EIA*, 9, (18), 115–129.
- Valdés-Parada, Francisco J., Lasseux, Didier, and Bellet, Fabien. 2016. A new formulation of the dispersion tensor in homogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, 90, 70–82.
- Wallis, Graham B. 1974. The terminal speed of single drops or bubbles in an infinite medium. *International Journal of Multiphase Flow*, 1, (4), 491–511.
- Wang, Yao, Wei, Fei, Luo, Guohua, Yu, Hao, and Gu, Guangsheng. 2002. The large-scale production of carbon nanotubes in a nano-agglomerate fluidized-bed reactor. *Chemical Physics Letters*, 364, (5-6), 568–572.

Wen, C Y and Fan, L S. 1974. Some remarks on the correlation of bed expansion in liquid-solid fluidized beds. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 13, (2), 194–197.

Wen, C Yu. 1966. Mechanics of fluidization. *Chem. Eng. Prog., Symp. Ser.*, 62, 100–111.

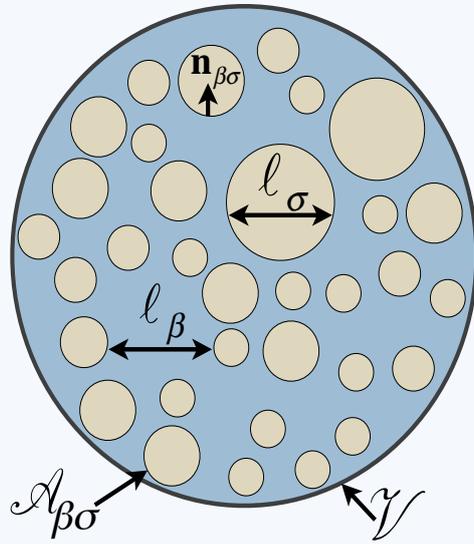
Whitaker, Stephen. 1996. The Forchheimer equation: A theoretical development. *Transport in Porous Media*, 25, (1), 27–61. ISSN 1573-1634. doi: 10.1007/BF00141261.

Whitaker, Stephen, 1999. *The method of volume averaging*. Kluwer Academic Publishers.

Wood, Brian D and Whitaker, Stephen. 1999. Cellular growth in biofilms. *Biotechnology and bioengineering*, 64, (6), 656–670.

Yang, Wen-ching W.-C., 2003. *Handbook of fluidization and fluid-particle systems*. CRC press.

Zenz, Frederick A and Othmer, Donald Frederick, 1960. *Fluidization and fluid-particle systems*. Reinhold.



Fase- β



Fase- σ



A. Promediado espacial para el sistema líquido-sólido

A.1 Ecuación de continuidad

Para llevar a cabo el promediado en el sistema, primero se utiliza el teorema general del transporte, el cual está definido por la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi dV \right) = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n} \cdot \psi \mathbf{w} dA \quad (\text{A.1})$$

donde al suponer estado estacionario y un valor de $\psi = 1$, la ecuación es la siguiente

$$-\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{w} dA = 0 \quad (\text{A.2})$$

Al tratarse de un fluido incompresible, se puede suponer que la densidad ρ_β es constante, por lo tanto la ecuación (5.1), se puede ver como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (\text{A.3})$$

A partir de ello y de acuerdo con Whitaker (1999), se define un operador de promediado superficial

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi dV \quad \text{donde } \psi = v_\beta, p_\beta \quad (\text{A.4})$$

el cual se aplica a la ecuación (A.3) y de acuerdo con Howes & Whitaker (1985), al utilizar el teorema de promediado espacial se obtiene que

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta dA = 0 \quad (\text{A.5})$$

Cuando se igualan las ecuaciones (A.2) y (A.5), se obtiene la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{w}) dA = 0 \quad (\text{A.6})$$

Bajo la suposición de que no hay transferencia de masa, se obtiene lo siguiente

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (\text{A.7})$$

A.2 Ecuación de cantidad de movimiento

Del mismo modo que en la ecuación de continuidad, se aplica el operador de promediado de la ecuación (A.4) a la ecuación de cantidad de movimiento de la fase- β (5.2), donde se supone que los cambios de la densidad (ρ_β) y la viscosidad (μ_β) del fluido son despreciables en r_0 , a partir de esto último se tiene lo siguiente

$$\underbrace{\rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\langle \nabla p_\beta \rangle}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{Esfuerzos volumétricos}} + \underbrace{\langle \nabla \cdot (\mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta) \rangle}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \quad (\text{A.8})$$

Para comenzar a desarrollar la ecuación promedio en la fase- β , se busca que la velocidad promedio $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ sea expresada en términos de velocidad promedio intrínseca $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$, la cual es la representación preferida en la práctica y está definida por

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A.9})$$

Cuando se analiza el término de los **esfuerzos inerciales** se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) = (\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta) \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\beta \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \quad (\text{A.10})$$

Al usar la suposición de la ecuación de continuidad (A.3), se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) = \mathbf{v}_\beta \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \quad (\text{A.11})$$

Al aplicar el operador de promediado de (A.4) en la ecuación anterior se llega a

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (\text{A.12})$$

Al utilizar el teorema del de promediado espacial en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{A.13})$$

Al aplicar la descomposición de la ecuación (5.6) y la condición de frontera de (5.3), la ecuación (B.16) toma la siguiente forma

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\sigma \mathbf{v}_\sigma dA \quad (\text{A.14})$$

Juntando el término integral en la expresión anterior con el teorema general de transporte descrito en la ecuación (A.2) bajo la suposición de $\psi = \mathbf{v}_\sigma$, se obtiene que

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\sigma (\mathbf{v}_\sigma - \mathbf{w}) dA = 0 \quad (\text{A.15})$$

Recordando que no hay transferencia de masa entre el sólido y el fluido la ecuación (A.14) se puede escribir como sigue

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{A.16})$$

Realizando el análisis en los **esfuerzos superficiales** y aplicar el teorema del promediado espacial se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \nabla \langle p_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA \quad (\text{A.17})$$

Utilizando del mismo modo que para la velocidad, la presión intrínseca promedio definida de manera análoga a la ecuación (A.9), es decir,

$$\langle p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A.18})$$

se tiene que

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \langle p_\beta \rangle^\beta \nabla \varepsilon_\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA \quad (\text{A.19})$$

Recordando que la porosidad ε_β es constante en la posición, la expresión anterior queda como sigue

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA \quad (\text{A.20})$$

Al realizar el análisis para el término de los **esfuerzos viscosos** de la ecuación (A.8) y al aplicar el teorema del promediado espacial se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{A.21})$$

y al volver a aplicar el teorema de promediado espacial en la ecuación (A.21) se tiene que

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\beta dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{A.22})$$

paso seguido, se aplica la condición de frontera de la ecuación (5.3) y se utiliza la definición de la ecuación (A.9) para tener la velocidad promedio en términos de la velocidad promedio intrínseca

como sigue

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\sigma dA \right] \quad (\text{A.23})$$

al juntar los términos de las ecuaciones (A.16), (A.20) y (A.23), se tiene que la ecuación de cantidad de movimiento puede expresarse como sigue

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) &= -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} \\ -\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\sigma dA \right] & \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

cuando se juntan los términos semejantes, la expresión anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) &= -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} \\ + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-p_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\sigma dA \right] & \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A.2.1 Cerradura en la ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación (A.7), se desarrolla el promedio intrínseco y se obtiene una forma alternativa de la ecuación de continuidad, la cual, al restarla de la ecuación puntual obtenida en (A.3), se obtiene que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = - \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{Fuente}} \quad (\text{A.26})$$

recordando que la variación de la porosidad ε_β es constante en la posición, se puede concluir que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = 0 \quad (\text{A.27})$$

a partir de este punto se puede comenzar con la cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento.

A.2.2 Cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento

Partiendo de la ecuación (A.25), se divide entre ε_β y se utiliza la relación de la ecuación (A.7) para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-p_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\sigma dA \right] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

al aplicar la descomposición de la ecuación (5.6) a la ecuación (A.28) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(-\langle p_\beta \rangle^\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \\ + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{\mathbf{v}}_\sigma dA \right] + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle^\sigma dA \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

y bajo la restricción de escala obtenida y de acuerdo con Whitaker (1999) los términos asociados a la velocidad y la presión promedio $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ y $\langle p_\beta \rangle^\beta$ respectivamente, pueden extraerse de la integral como se ejemplifica a continuación

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \langle p_\beta \rangle^\beta dA = \left\{ \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \right\} \langle p_\beta \rangle^\beta = (\nabla \varepsilon_\beta) \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A.30})$$

lo cual resulta de aplicar el teorema del promediado espacial de la ecuación (A.4) para $\psi = 1$. Recordando que la porosidad ε_β es constante en la posición y al regresar el resultado a la ecuación (A.29) se tiene la expresión promedio para la fase- β como sigue

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{\mathbf{v}}_\sigma dA \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

para obtener la expresión de las desviaciones, se resta la ecuación promedio obtenida en (A.31) a la ecuación puntual descrita en (5.2) para obtener

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = & - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\
 - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} - \underbrace{\mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{\mathbf{v}}_\sigma dA \right]}_{\text{Esfuerzos viscosos}} & \quad (A.32)
 \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar la ecuación (A.32), es conveniente llevar a cabo un análisis de órdenes de magnitud. Para el término de las desviaciones en el término de **esfuerzos inerciales** se tiene lo siguiente

$$(\rho_\beta \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta)) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (A.33)$$

y para el término de las desviaciones espaciales promedio en los mismos esfuerzos se tiene que

$$(\rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta)) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L} \right) \quad (A.34)$$

al comparar los órdenes de magnitud entre el término de las desviaciones de la velocidad y las desviaciones promedio, de acuerdo con la restricción de escala se tiene la siguiente relación

$$\mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (A.35)$$

paso seguido, al realizar el análisis de orden de magnitud en el término de los **esfuerzos viscosos** se tiene que

$$(\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta^2} \right) \quad (A.36)$$

del mismo modo al analizar el término integral de los **esfuerzos viscosos** se tiene la siguiente relación

$$\left(\mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} (\mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{\mathbf{v}}_\sigma dA) \right] \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\sigma}{L\ell_\beta} \right) \quad (\text{A.37})$$

los cuales al compararlos de acuerdo con la restricción de escala y bajo la suposición de igualdad en las velocidades de la condición de frontera se obtiene

$$\mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\sigma}{L\ell_\beta} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta^2} \right) \quad (\text{A.38})$$

con el análisis anterior, la ecuación (A.32), se puede escribir como sigue

$$\underbrace{\rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \quad (\text{A.39})$$

$$- \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}}$$

al analizar los elementos del término de los **esfuerzos inerciales**, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right) &= \left(\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \\ \nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) &= \left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ \nabla \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right) &= \left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right) \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

donde al recordar las expresiones (A.7) y (A.27) obtenidas por la ecuación de continuidad, la ecuación (A.2.2) puede escribirse como sigue

$$\underbrace{\rho_\beta \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \quad (\text{A.41})$$

$$- \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}}$$

al realizar análisis de órdenes de magnitud en los siguientes términos

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{O} \left(\frac{\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{O} \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \quad (\text{A.42})$$

de donde se tiene la siguiente relación de acuerdo a la restricción de escala

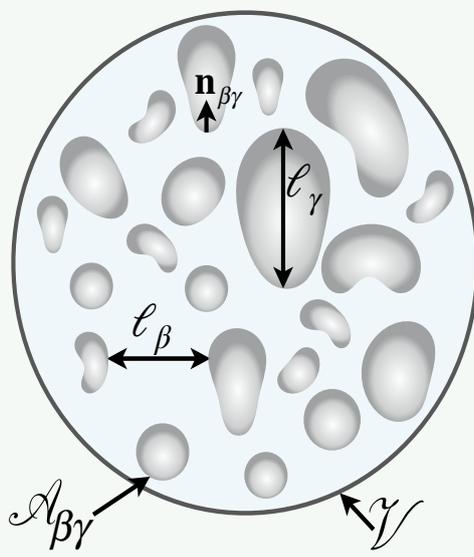
$$\mathbf{O} \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{A.43})$$

con el análisis anterior, la ecuación (A.41) toma la siguiente forma

$$\underbrace{\rho_\beta \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} \quad (\text{A.44})$$

y de acuerdo con la definición de las desviaciones espaciales, se tiene la siguiente expresión

$$\underbrace{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} \quad (\text{A.45})$$



Fase- β



Fase- γ



B. Promediado espacial para el sistema líquido-gas

B.1 Ecuación de continuidad

Se utiliza el teorema general del transporte para llevar a cabo el promediado de la ecuaciones, el cual está definido por la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi dV \right) = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \psi dA \quad (\text{B.1})$$

donde al suponer un valor de $\psi = 1$ la ecuación es la siguiente

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{w} dA = 0 \quad (\text{B.2})$$

aunado a lo anterior, se puede suponer que la densidad en ambas fases es constante, por lo tanto la ecuación de continuidad para la fase- β , se puede ver como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (\text{B.3})$$

a partir de ello y de acuerdo con Whitaker (1999), se define un operador de promediado superficial

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \psi dV \quad \text{donde } \psi = v_\beta, p_\beta \quad (\text{B.4})$$

el cual se aplica a la ecuación (B.3) y de acuerdo con Howes & Whitaker (1985), al utilizar el teorema de promediado espacial se obtiene que

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta dA = 0 \quad (\text{B.5})$$

cuando se igualan las ecuaciones (B.2) y (B.5), se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{w}) dA = 0 \quad (\text{B.6})$$

y bajo la suposición de que la velocidad del fluido \mathbf{v}_β en la frontera $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$ debe ser igual a la velocidad de transporte \mathbf{w} ,

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (\text{B.7})$$

se puede considerar que las variaciones de la fracción volumétrica de ambas fases no cambia con la posición en la región de promediado o se puede considerar constante, es decir, $\varepsilon_\beta = \text{constante}$, a partir de ello, la expresión anterior se puede expresar como sigue

$$\frac{d\varepsilon_\beta}{dt} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (\text{B.8})$$

B.2 Ecuación de cantidad de movimiento

Del mismo modo que en la ecuación de continuidad, se aplica el operador de promediado de la ecuación (B.4) a la ecuación de cantidad de movimiento de la fase- β (6.3), donde se supone que los cambios de la densidad (ρ_β) y la viscosidad (μ_β) del fluido son despreciables en r_0 , a partir de esto último se tiene lo siguiente

$$\left\langle \rho_\beta \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} \right\rangle + \rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = -\langle \nabla p_\beta \rangle + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \langle \nabla \cdot (\mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T) \rangle \quad (\text{B.9})$$

Para comenzar a desarrollar la ecuación promedio en la fase- β , se analiza el término de **acumulación**, y se aplica el teorema general de transporte para dejarlo expresado como sigue

$$\rho_{\beta} \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_{\beta}}{\partial t} \right\rangle = \rho_{\beta} \frac{\partial \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle}{\partial t} - \frac{\rho_{\beta}}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{w} dA \quad (\text{B.10})$$

se busca que la velocidad promedio $\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle$ sea expresada en términos de velocidad promedio intrínseca $\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}$, la cual es la representación preferida en la práctica y está definida por

$$\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle = \varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta} \quad (\text{B.11})$$

al utilizar esta definición en el término de acumulación, se tiene lo siguiente

$$\left\langle \rho_{\beta} \frac{\partial \mathbf{v}_{\beta}}{\partial t} \right\rangle = \rho_{\beta} \varepsilon_{\beta} \frac{\partial \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}}{\partial t} - \frac{\rho_{\beta}}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{w} dA \quad (\text{B.12})$$

cuando se analiza el término de los **esfuerzos inerciales** se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}_{\beta}) \mathbf{v}_{\beta} + \mathbf{v}_{\beta} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\beta} \quad (\text{B.13})$$

y al aplicar la suposición de la ecuación de continuidad (B.3), se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) = \mathbf{v}_{\beta} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\beta} \quad (\text{B.14})$$

y con el operador de promediado de (B.4) en la ecuación anterior se llega a

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) \rangle = \langle \mathbf{v}_{\beta} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\beta} \rangle \quad (\text{B.15})$$

al utilizar el teorema del de promediado espacial en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta}) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} dA \quad (\text{B.16})$$

De acuerdo con Gray (1975), existe una forma de expresar las cantidades puntuales en términos del promedio intrínseco y de las desviaciones espaciales como sigue

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad p_\beta = \langle p_\beta \rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \quad (\text{B.17})$$

y al aplicar la descomposición de la ecuación (B.17), la ecuación (B.16) toma la siguiente forma

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle = \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{B.18})$$

al realizar el análisis en los **esfuerzos superficiales** y aplicar el teorema del promediado espacial se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \nabla \langle p_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} p_\beta dA \quad (\text{B.19})$$

y utilizando del mismo modo que para la velocidad, la presión intrínseca promedio definida de manera análoga a la ecuación (B.11), es decir,

$$\langle p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.20})$$

se tiene que

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \langle p_\beta \rangle^\beta \nabla \varepsilon_\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} p_\beta dA \quad (\text{B.21})$$

recordando que la porosidad ε_β es constante en la posición, la expresión anterior queda como sigue

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} p_\beta dA \quad (\text{B.22})$$

Al realizar el análisis en el primer término de los **esfuerzos viscosos** de la ecuación (B.9) y al aplicar el teorema del promediado espacial se obtiene lo siguiente

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{B.23})$$

y al volver a aplicar el teorema de promediado espacial en la ecuación (B.23) se tiene que

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{B.24})$$

y para el segundo término de los **esfuerzos viscosos** en la ecuación (B.9) se tiene que

$$\langle \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \rangle = \nabla \cdot \langle (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T dA \quad (\text{B.25})$$

se aplica nuevamente el teorema de promediado espacial en la ecuación anterior para obtener

$$\langle \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \rangle = \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T dA \quad (\text{B.26})$$

se utiliza la definición de la ecuación (B.11) para tener la velocidad promedio en términos de la velocidad promedio intrínseca como sigue

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{B.27})$$

$$\langle \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T \rangle = \varepsilon_\beta \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T dA \quad (\text{B.28})$$

al juntar los términos de las ecuaciones , (B.12), (B.18), (B.22) y (B.28), se tiene que la ecuación de cantidad de movimiento puede expresarse como sigue

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \varepsilon_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{\partial t} - \frac{\rho_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{w} dA + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) \\ & + \frac{\rho_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta dA = -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} p_\beta dA + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} \\ & + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta dA \right] + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \\ & + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} dA \right] + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T dA \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

cuando se juntan los términos semejantes, la expresión anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \varepsilon_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{\partial t} - \frac{\rho_\beta}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{w}) dA + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) = \\ & -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) \\ & \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l} p_\beta + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

al aceptar que la velocidad del fluido es igual a la velocidad de transporte $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{w}$, y aunado a ello, se supone estado cuasi-estacionario, la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) = -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ & + \varepsilon_\beta \mu_\beta \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l} p_\beta + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T) dA \\ & + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

B.2.1 Cerradura en la ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación (B.8) donde se desarrolla el promedio intrínseco, se obtiene una forma alternativa de la ecuación de continuidad, la cual, al restarla de la ecuación puntual obtenida en (B.3), se obtiene que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = - \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \frac{d\varepsilon_\beta}{dt} \right)}_{\text{Fuente}} \quad (\text{B.32})$$

al imponer que la variación de la fracción volumétrica ε_β es constante en la posición, se puede concluir que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dt} \quad (\text{B.33})$$

a partir de este punto se puede comenzar con la cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento.

B.2.2 Cerradura en la ecuación de cantidad de movimiento

Partiendo de la ecuación (B.31), se divide entre ε_β para obtener

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l} p_\beta + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

al aplicar la descomposición de la ecuación (B.17), la ecuación (B.34) se escribe como sigue

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta)^T \right) dA \\ + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

bajo la restricción de escala de la ecuación (4.3) y de acuerdo con Whitaker (1999) los términos asociados a la velocidad y la presión promedio $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ y $\langle p_\beta \rangle^\beta$ respectivamente, pueden extraerse de la integral como se ejemplifica a continuación

$$\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \langle p_\beta \rangle^\beta dA = \left\{ \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \right\} \langle p_\beta \rangle^\beta = (\nabla \varepsilon_\beta) \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.36})$$

lo cual resulta de aplicar el teorema del promediado espacial de la ecuación (B.4) para $\psi = 1$. Recordando que la porosidad ε_β es constante en la posición y al regresar el resultado a la ecuación

(B.35) se tiene la expresión promedio para la fase- β como sigue

$$\begin{aligned} \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) + \rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta) &= -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

para obtener la expresión de las desviaciones, se resta la ecuación promedio obtenida en (B.37) a la ecuación puntual descrita en (6.3) para obtener

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} &= - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\ - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} &- \underbrace{\mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right]}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Con el fin de simplificar la ecuación (B.38), es conveniente llevar a cabo un análisis de órdenes de magnitud. Para el término de las desviaciones en el término de **esfuerzos inerciales** se tiene lo siguiente

$$(\rho_\beta \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta)) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{B.39})$$

y para el término de las desviaciones espaciales promedio en los mismos esfuerzos se tiene que

$$(\rho_\beta \nabla \cdot (\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta)) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L} \right) \quad (\text{B.40})$$

al comparar los órdenes de magnitud entre el término de las desviaciones de la velocidad y las desviaciones promedio, de acuerdo con la restricción de la ecuación (4.3) se tiene la siguiente relación

$$\mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad (\text{B.41})$$

con el análisis anterior, la ecuación (B.38), se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = & - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\
 - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-l \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} - \underbrace{\mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right]}_{\text{Esfuerzos viscosos}} &
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

al realizar el análisis de orden de magnitud en el término de los **esfuerzos viscosos** se tiene que

$$(\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta^2} \right) \tag{B.43}$$

del mismo modo al analizar el término integral de los **esfuerzos viscosos** se tiene la siguiente relación

$$\left(\mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L \ell_\beta} \right) \tag{B.44}$$

los cuales al compararlos de acuerdo con la restricción de escala de la ecuación (4.3) se obtiene

$$\mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{L \ell_\beta} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta^2} \right) \tag{B.45}$$

con ello la ecuación (B.42) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = & - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\
 - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-l \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} &
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

al analizar los elementos del término de los **esfuerzos inerciales**, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) &= (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \\
 \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) &= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\
 \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta) &= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta) \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

donde al recordar las expresiones (B.32) y (B.33) obtenidas por la ecuación de continuidad, la ecuación (B.46) puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} &= - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\
 - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-l \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} &
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

al realizar análisis de órdenes de magnitud en los siguientes términos

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{O} \left(\frac{\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \quad \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{O} \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \tag{B.49}$$

de donde se tiene la siguiente relación de acuerdo a la restricción de escala de la ecuación (4.3)

$$\mathbf{O} \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{L} \right) \ll \mathbf{O} \left(\frac{\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta}{\ell_\beta} \right) \tag{B.50}$$

con el análisis anterior, la ecuación (B.48) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_\beta (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)}_{\text{Esfuerzos inerciales}} &= - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} \\
 - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (-l \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} &
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

y de acuerdo con la definición de las desviaciones espaciales, finalmente se tiene la siguiente expresión que es una ecuación similar a la obtenida en (A.45).

$$\underbrace{\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos inerciales}} = - \underbrace{\nabla \tilde{p}_\beta}_{\text{Esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\text{Esfuerzos viscosos}} - \underbrace{\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) dA}_{\text{Esfuerzos superficiales}} \quad (\text{B.52})$$

Por otro lado, la condición de frontera siguiente, resulta de sustituir las descomposiciones espaciales de la ecuación (B.17), en la expresión 6.6, dando lugar a la siguiente ecuación válida en la interfase $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$ como sigue

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{I} (\tilde{p}_\gamma - \tilde{p}_\beta) - \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma)^T) + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) \right] = 2\sigma \mathbf{H} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad (\text{B.53})$$

$$- \underbrace{\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left\{ \mathbf{I} (\langle p_\gamma \rangle^\gamma - \langle p_\beta \rangle^\beta) - \mu_\gamma (\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + (\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)^T) + \mu_\beta (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta)^T) \right\}}_{\text{Fuente}}$$

Al utilizar la suposición de la ecuación (6.15) la condición de frontera anterior se reduce a

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{I} (\tilde{p}_\gamma - \tilde{p}_\beta) - \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma)^T) + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) \right] = \quad (\text{B.54})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left\{ \underbrace{\mu_\gamma (\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + (\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)^T) - \mu_\beta (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta)^T)}_{\text{Fuente}} \right\}$$

al realizar análisis de órdenes de magnitud

$$\mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta} \right) \quad \mu_\beta (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta)^T) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}{L_R} \right) \quad (\text{B.55})$$

bajo el estimado de órdenes de magnitud de la ecuación (4.3), se tiene que la condición de frontera queda expresada como sigue

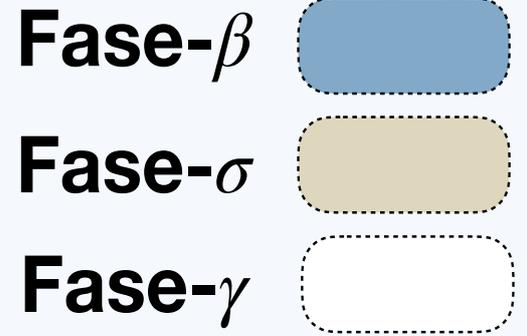
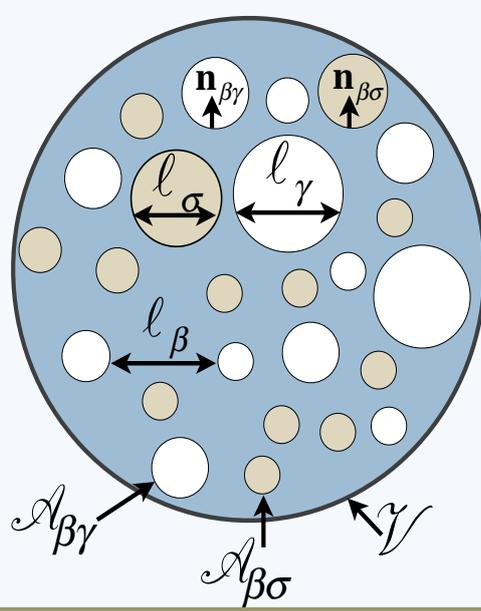
$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\mathbf{I} (\tilde{p}_\gamma - \tilde{p}_\beta) - \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma)^T) + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T) \right] = \mathbf{0} \quad (\text{B.56})$$

En este punto del apéndice, se tiene la ecuación diferencial del problema de cerradura (B.52) para la fase- β y de manera análoga se puede obtener una ecuación para la fase- γ ya que se trata

de la misma ecuación diferencial bajo las mismas suposiciones y restricciones de escala. Aunado a ello, se tiene la condición de frontera del mismo problema de cerradura en términos de las descomposiciones espaciales en (B.56), la cual, es una ecuación análoga a la obtenida por el método abreviado descrito en la expresión (6.16). Aparte de esta información, para resolver el problema de cerradura, se conocen las condiciones a la frontera en las entradas y en las salidas del dominio de solución. Del mismo modo que para el método *abreviado* descrito en el Capítulo 6. Por conveniencia, se elige resolver el problema en una celda periódica, lo cual es una aproximación del medio de estudio, que para muchos casos es razonable como se describe en las ecuaciones (6.17). En este punto del Apéndice, es necesario establecer la relación de los términos fuente en el método *abreviado* descritos en las ecuaciones (6.11) y (6.12) con la ecuación promedio (B.37) dando lugar a la siguiente expresión para la fuente en la fase- β

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\beta} \left(-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) &= \frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \nabla \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \nabla \cdot \left(\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta \right) - \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ &- \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{l}_{\tilde{p}_\beta} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta)^T \right) dA - \nabla \cdot \left[\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} (\mathbf{n}_{\beta\gamma} \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma}) dA \right] \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Del mismo modo, se puede realizar el análogo para la fase- γ y obtener una expresión similar en términos promedio. Siempre y cuando se cumpla esta relación, se puede resolver el problema ya sea por el método *clásico* o el método *abreviado*.



C. Análisis de las fuentes para el sistema líquido-sólido-gas

C.1 Fuente en γ

Al analizar la segunda fuente del problema, se obtiene el siguiente conjunto de expresiones

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.1a})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.1b})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\gamma}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right]_{t-t_0} \quad (\text{C.1c})$$

$$\cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0}$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} - \mathbf{l} \frac{d\mathcal{H}_{\gamma\gamma}}{dt} \right]_{t-t_0} \quad (\text{C.1d})$$

$$\cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0}$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.1e})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} - \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.1f})$$

Sujeto a la condición de frontera siguiente

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left\{ \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \left\{ \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right)^T \right\} \right) \right]_{t-t_0} - \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_{t-t_0} \right\} \cdot \left(-\nabla \langle p_\gamma \rangle^{\gamma} + \rho_\gamma \mathbf{g} \right)_{t_0} dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.2})$$

Al considerar que los términos de las fuentes son diferentes de cero y arbitrarios, las ecuaciones anteriores pueden quedar expresadas como sigue

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \qquad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \quad (\text{C.3})$$

$$\left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\gamma}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right]_{\tau} = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

$$\left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} - \mathbf{l} \frac{d\mathcal{H}_{\gamma\gamma}}{dt} \right]_{\tau} = \mathbf{0} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \Big|_{\tau} = \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \Big|_{\tau} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.7})$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \left\{ \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} \right)^T \right\} \right) \right]_{\tau} = \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_{\tau} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.8})$$

donde τ es el tiempo transcurrido que contiene el producto de convolución. El siguiente punto es integrar de $\tau = 0$ hasta $\tau = t$, con ello, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones, recordando

que el término Δ de la velocidad inercial ya no se considera al llevar a cabo dicha integración

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.9a})$$

$$\left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\beta\beta} - \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.9b})$$

$$\left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma} - \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma} - \mathbf{I} \mathcal{H}_{\gamma\gamma} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.9c})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.9d})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.9e})$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \{ \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma})^T \} \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma})^T \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.9f})$$

En este punto, se elige como condiciones iniciales para $\mathbf{D}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{d}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{D}_{\gamma\gamma}$ y $\mathbf{d}_{\gamma\gamma}$ que sean *cero*. Bajo la suposición anterior, las ecuaciones anteriores dan lugar al siguiente problema de cerradura.

Problema II

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (\text{C.10a})$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{C.10b})$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + \mathbf{I}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{C.10c})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.10d})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.10e})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \{ \nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\gamma})^T \} \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\gamma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.10f})$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\gamma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{C.10g})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{D}_{\gamma\gamma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (\text{C.10h})$$

$$\mathbf{d}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{d}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{D}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.10i})$$

C.2 Fuente en σ

Se analiza la tercer fuente correspondiente a la velocidad del sólido

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad \int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.11})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right] \Big|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.12})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right] \Big|_{t-t_0} \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad (\text{C.13})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} - \mathbf{l} \frac{d\mathcal{H}_{\beta\sigma}}{dt} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.14})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left(\frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} - \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \Big|_{t-t_0} \right) \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.15})$$

$$\int_{t_0=0}^{t_0=t} \left\{ \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right)^T \right) \right] \Big|_{t-t_0} - \left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right)^T \right) \right] \Big|_{t-t_0} \right\} \cdot \langle \mathbf{v}_\sigma \rangle_{t_0}^\sigma dt_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.16})$$

Si los términos fuente no son cero, las ecuaciones anteriores quedan expresadas como sigue

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_\tau = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \Big|_\tau = \mathbf{0} \quad (\text{C.17})$$

$$\left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\beta\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right] \Big|_\tau = \mathbf{0} \quad (\text{C.18})$$

$$\left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t^2} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \nabla \mathbf{d}_{\gamma\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right]_\tau = \mathbf{0} \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_\tau = \mu_\beta \mathbf{l} \frac{d\mathcal{H}_{\beta\sigma}}{dt} \Big|_\tau \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{1}{\mu_\beta} \frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \Big|_\tau = \frac{1}{\mu_\gamma} \frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \Big|_\tau \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.21})$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_\tau =$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{d}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} \right)^T \right) \right]_\tau \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.22})$$

Aquí τ es el tiempo transcurrido que contiene el producto de convolución. El siguiente punto es integrar de $\tau = 0$ hasta $\tau = t$, con ello, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.23a})$$

$$\left[\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\beta\sigma} - \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.23b})$$

$$\left[\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \right) + \nabla \mathbf{d}_{\gamma\sigma} - \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.23c})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \mu_\beta \mathbf{l} \mathcal{H}_{\beta\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.23d})$$

$$\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{D}_{\beta\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\mu_\gamma} \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.23e})$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \mathbf{d}_{\beta\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma})^T \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$\left[\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{l} \mathbf{d}_{\gamma\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma})^T \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.23f})$$

En este punto, se elige como condiciones iniciales para $\mathbf{D}_{\beta\sigma}$, $\mathbf{d}_{\beta\sigma}$, $\mathbf{D}_{\gamma\sigma}$ y $\mathbf{d}_{\gamma\sigma}$ que sean *cero*. Bajo la suposición anterior, las ecuaciones anteriores dan lugar al siguiente problema de cerradura.

Problema III

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\beta\sigma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{\gamma\sigma} = 0 \quad (\text{C.24a})$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\beta\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\beta\sigma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\beta\sigma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{C.24b})$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{\gamma\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \right) = -\nabla \mathbf{d}_{\gamma\sigma} + \nabla^2 \mathbf{D}_{\gamma\sigma}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{C.24c})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\sigma} = \mu_\beta \mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.24d})$$

$$\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{D}_{\beta\sigma} = \frac{1}{\mu_\gamma} \mathbf{D}_{\gamma\sigma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.24e})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\beta\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\beta\sigma})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\mathbf{I} \mathbf{d}_{\gamma\sigma} + \nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma} + (\nabla \mathbf{D}_{\gamma\sigma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.24f})$$

$$\langle \mathbf{d}_{\beta\sigma} \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad \langle \mathbf{d}_{\gamma\sigma} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{C.24g})$$

$$\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{D}_{\beta\sigma} = \frac{1}{\mu_\gamma} \mathbf{D}_{\gamma\sigma} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (\text{C.24h})$$

$$\mathbf{d}_{\beta\sigma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{d}_{\beta\sigma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_{\beta\sigma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{D}_{\beta\sigma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.24i})$$

C.3 Fuentes para las condiciones iniciales

Problema-IV

$$\nabla \cdot \mathbf{m}_{\beta\beta} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{m}_{\gamma\beta} = 0 \quad (\text{C.25a})$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\beta\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\beta\beta} \right) = -\nabla n_{\beta\beta} + \nabla^2 \mathbf{m}_{\beta\beta}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{C.25b})$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\gamma\beta}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta} \right) = -\nabla n_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \nabla^2 \mathbf{m}_{\gamma\beta}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{C.25c})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.25d})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mathbf{m}_{\gamma\beta} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.25e})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\beta\beta} + \nabla \mathbf{m}_{\beta\beta} + (\nabla \mathbf{m}_{\beta\beta})^T \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\gamma\beta} + \mu_{\gamma\beta} \{ \nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta} + (\nabla \mathbf{m}_{\gamma\beta})^T \} \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.25f})$$

$$\langle n_{\beta\beta} \rangle^\beta = 0 \quad \langle n_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = 0 \quad (\text{C.25g})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\beta} = \mu_\beta \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{m}_{\gamma\beta} = \mathbf{0}, \quad \text{en } t = 0 \quad (\text{C.25h})$$

$$n_{\beta\beta}(\mathbf{r} + \ell_j) = n_{\beta\beta}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{m}_{\beta\beta}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{m}_{\beta\beta}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.25i})$$

Problema-V

$$\nabla \cdot \mathbf{m}_{\beta\gamma} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{m}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (\text{C.26a})$$

$$\frac{\rho_\beta}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\beta\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma} \right) = -\nabla n_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \nabla^2 \mathbf{m}_{\beta\gamma}, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{C.26b})$$

$$\frac{\rho_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\gamma\gamma}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\gamma\Delta} \cdot \nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \right) = -\nabla n_{\gamma\gamma} + \nabla^2 \mathbf{m}_{\gamma\gamma}, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{C.26c})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{C.26d})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{m}_{\gamma\gamma} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.26e})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\beta\gamma} + \frac{1}{\mu_{\gamma\beta}} \{ \nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma} + (\nabla \mathbf{m}_{\beta\gamma})^T \} \right) = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left(-\ln_{\gamma\gamma} + \nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma} + (\nabla \mathbf{m}_{\gamma\gamma})^T \right) \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\gamma} \quad (\text{C.26f})$$

$$\langle n_{\beta\gamma} \rangle^\beta = 0 \quad \langle n_{\gamma\gamma} \rangle^\gamma = 0 \quad (\text{C.26g})$$

$$\mathbf{m}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \quad \mathbf{m}_{\gamma\gamma} = \mu_\gamma \mathbf{v}_1, \quad \text{en } t = 0 \quad (\text{C.26h})$$

$$n_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = n_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{m}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \ell_j) = \mathbf{m}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.26i})$$

