

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA.

CBI

**✓ OPTICA NO LINEAL Y FENOMENOS CUASI-RESONANTES EN
SISTEMAS GASEOSOS.
ESTUDIO DE EMISION CONICA ANOMALA EN VAPOR DE CALCIO.**

Tesis que para obtener el grado de ✓ Maestro en Ciencias presenta:

✓ José Luis Hernández Pozos.

México D.F. Septiembre de 1993

OPTICA NO LINEAL Y FENOMENOS
CUASI-RESONANTES EN SISTEMAS GASEOSOS:
ESTUDIO DE EMISION CONICA ANOMALA EN VAPOR
DE CALCIO.

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Física

Presenta:

José Luis Hernández Pozos.

Septiembre de 1993.

RESUMEN.

Se presenta un estudio experimental de emisión cónica anómala (ECA) en vapor de calcio. Se usó un láser de Nd:YAG triplicado en frecuencia para bombear láseres de pigmento sintonizados cerca de la primera transición resonante $^1S_0-^1P_1$ (4226.7 Å) del calcio atómico.

Se muestran resultados experimentales tanto de un haz como de dos haces de bombeo. En los experimentos de un haz de bombeo se estudió la dependencia espacial y del espectro de ECA al variar la densidad del vapor, la frecuencia e intensidad del láser de pigmento y la presión del gas buffer (Argón) usado. Se comparan estos resultados con los obtenidos por otros autores y con algunos de los modelos que intentan explicar este fenómeno.

En los experimentos de dos haces de bombeo se presentan resultados tanto en el caso de haces degenerados como de no degenerados en frecuencia. En el caso de experimentos no degenerados en frecuencia los resultados muestran que la formación del cono no es el resultado de un proceso de "refracción en la frontera"¹ a menos de que dicho mecanismo pueda incorporar efectos de coherencia entre el haz de bombeo y el medio atómico. Se describe también la primera observación de desenfocamiento de un haz sintonizado del lado azul de una transición atómica.

¹ R.W. Boyd (1992) *Nonlinear Optics. Capítulo 6, Academic Press.*

A mis Padres:

José Luis Hernández P. Hermelinda Pozos de Hdez.

A mis Hermanos:

Víctor Hugo y Claudia

En sus diversas etapas, el presente trabajo ha sido presentado en los siguientes eventos:

i) VI Congreso Nacional de Instrumentación.
Guanajuato, Guanajuato. México. Octubre 1990.

ii) XXXIII Congreso Nacional de Física.
Ensenada, Baja California. México. Octubre 1990.

iii) XXXIV Congreso Nacional de Física.
México, D.F. México. Octubre 1991.

iv) XXXV Congreso Nacional de Física.
Puebla. Puebla. México. Octubre 1992.

v) IIIª Reunión de Optica y Iª Reunión Iberoamericana de Optica.
Barcelona, España. Septiembre 1992.

Además, dió lugar a dos artículos:

Anomalous Conical Emission in Calcium Vapour.
Enviado a Optics Communication.

Anomalous Conical Emmision: Two Beams Experiments.
Aceptado en Physical Review A.

..... . *Las atracciones de la gravedad, magnetismo y electricidad alcanzan distancias claramente perceptibles, por lo que han sido observadas por los ojos vulgares; sin embargo, puede haber otras que alcancen distancias lo suficientemente pequeñas como para haber escapado hasta ahora a la observación.*

Optica o tratado de las Reflexiones, Refracciones e

Inflexiones de la luz.

Libro tercero, cuestión 31.

Sir Isaac Newton (1642-1727)

CONTENIDO.

CAPITULO 1. INTRODUCCION.	2
1.1 Generalidades. Optica no lineal.	2
1.2 Emisión Cónica Anómala.	4
1.3 Estructura de esta tesis.	5
CAPITULO 2. OPTICA NO LINEAL Y SISTEMAS ATOMICOS DE DOS NIVELES.	7
2.1 La ecuación de onda no lineal.	7
2.2 Autoenfocamiento de un haz con perfil de intensidad variable.	9
2.3 Sistemas atómicos de dos niveles.	13
2.3.1 Matriz de densidad para un sistema de dos niveles.	14
2.3.2 Mecanismos de ensanchamiento para un sistema de dos niveles.	23
2.3.2.1 Ensanchamiento por colisiones atómicas.	23
2.3.2.2 Ensanchamiento debido al ancho de banda finito de láser de bombeo.	27
2.3.3 Desdoblamiento de niveles por efecto AC Stark.	28
2.4 Autoenfocamiento y autodesenfocamiento en un sistema de dos niveles.	28
2.5 Efecto Cherenkov producido por haces de luz.	29
2.5.1 Efecto Tamm-Cherenkov.	29
2.5.2 Una descripción cuántica del efecto Cherenkov.	29
2.5.3 Efecto Cherenkov producido por haces de luz.	33
CAPITULO 3. INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE EMISION CONICA ANOMALA.-	36
3.1 Primeras investigaciones sobre emisión cónica anómala.	36
3.2 Modelos que involucran modulación del índice de refracción.	37
3.3 Modelos que involucran dispersión electrónica Raman estimulada.	40
3.4 Modelos que involucran efectos transitorios.	41
3.5 Modelos que involucran efecto Cherenkov.	41
3.6 Modelos que involucran competencia de diversos efectos.	41
3.7 Investigaciones recientes sobre ECA.	42
CAPITULO 4. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.	44
4.1 EL calcio atómico como medio no lineal	44
4.2 Equipo experimental.	45
4.3 Láser de Bombeo.	46
4.4 Láseres de pigmento.	46
4.5 Horno de vapor atómico.	49
4.6 Espectrómetro.	51
4.7 Detección electrónica.	51
4.7.1 Tubo Fotomultiplicador.	51
4.7.2 Fotodiodos.	51
4.7.3 Integrador y promediador electrónico.	51
CAPITULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES.	52
5.1 Un haz de bombeo.	52
5.1.1 Propiedades generales de la emisión cónica anómala.	52
5.1.2 Angulo del cono <u>vs</u> densidad del calcio	53

5.1.3 Angulo del cono <u>vs</u> desintonia del laser.	54
5.1.4 Ancho espectral <u>vs</u> desintonia del láser.	56
5.1.5 Intensidad del cono <u>vs</u> intensidad de bombeo	58
5.1.6 Intensidad de cono <u>vs</u> presión de gas buffer	59
5.2 Dos haces de bombeo.	60
5.2.1 Experimentos degenerados en frecuencia.	60
5.2.2 Experimentos no degenerados en frecuencia.	61
CAPITULO 6. CONCLUSIONES.	65
6.1 Conclusiones al presente trabajo.	65
6.2 Sugerencias a trabajos posteriores.	66
APENDICE 1 OPTICA GEOMETRICA Y AUTOENFOCAMIENTO.	AI i
REFERENCIAS.	R1

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera muy especial al Dr. Manuel Fernández Guasti por haber dirigido el trabajo que dió origen a la presente tesis y por la confianza depositada en la elaboración del este reporte escrito. Deseo agradecer también el Dr. Emmanuel Haro Poniatowski sus consejos y ayuda para la elaboración del mismo.

Agradezco también al Sr. Carlos García Guerrero su auxilio durante el desarrollo de esta tesis.

Además, deseo reiterar mi gratitud a los arriba mencionados, ya que aunado al apoyo en la parte técnica y académica, he recibido su amistad durante el tiempo que he permanecido en el Laboratorio de Optica Cuántica.

Quiero también dar mi agradecimiento a mis compañeros de estudios tanto en la licenciatura como en la maestría, ya que cuando he requerido su ayuda la he recibido sin condiciones, ellos son Agustín Silva, Eugenio González A, José Luis Escamilla, Israel Wood, Augusto García, Santiago Camacho, Miguel Angel Olivares, David Iturbe, Alejandro Gil, Luis A. Julio Sánchez, Marco S. de la Cruz, Raúl Rangel, Mauricio Romero, Héctor González Torres y Alfredo Villalbazo.

En toda actividad se construye sobre el trabajo de otras personas, en Física (y sobre todo en Física experimental) esto no deja de ser cierto, en tal sentido este trabajo ha sido posible, en buena medida, a la labor de estudiantes cuya estancia en el Laboratorio de Optica Cuántica ha sido anterior a la mia, mi reconocimiento a la labor por ellos realizada.

Mi gratitud a todo el personal del Departamento de Física y a la UAM-Iztapalapa en general por haber satisfecho con creces mis aspiraciones académicas en estos (ya bastantes!) años. Al CONACyT mi agradecimiento por la beca otorgada.

También deseo agradecer al Dr. José Luis Jimenéz (UAM-Izt) y al Dr. Héctor Riveros (IFUNAM) el haber aceptado revisar este trabajo y ser sinodales en el examen de grado.

Y al final pero no al último a mis Padres y a mis Hermanos sin cuyo apoyo no me hubiera sido posible continuar estudios de posgrado.

CAPITULO 1.

INTRODUCCION.

1.1 Generalidades. Optica no lineal.

La óptica es el campo de la física que estudia la radiación electromagnética en la región visible de frecuencias y su interacción con la materia. En la óptica tradicional o lineal, en términos generales se desprecian los efectos que el campo electromagnético provoca sobre la materia y centra su atención en los efectos que esta (la materia) produce sobre la luz.

Por otra parte, la óptica no lineal comprende aquellos fenómenos en los cuales la intensidad de la radiación electromagnética involucrada provoca cambios en la materia y esta a su vez induce modificaciones en el campo electromagnético, en este régimen, estas interacciones no pueden ser despreciadas y al describir las interacciones radiación-materia es necesario considerar a la susceptibilidad eléctrica del medio material como una función no lineal del campo electromagnético.

Comunmente se toma como el inicio de la óptica no lineal, la generación de segundo armónico hecha por Franken *et al* [1961] poco tiempo después de la construcción y operación del primer láser en 1960. En su experimento, hicieron incidir un láser de rubí (6943.0 Å) sobre un cristal de cuarzo generando luz con una longitud de onda de 3471.5 Å, es decir, la mitad de la longitud de onda incidente (o el doble de la frecuencia).

Para explicar este fenómeno se recurrió a un modelo en el cual la polarización inducida por el láser sobre el medio (cuarzo) tiene términos cuadráticos en el campo eléctrico. Normalmente, al estudiar la respuesta de un material al aplicarse un campo electromagnético se escribe

$$\mathbf{P} = \vec{\chi} \mathbf{E} \quad (1.1) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \vec{\mu} \mathbf{H} \quad (1.2).$$

donde \mathbf{P} es la polarización del medio, \mathbf{E} es el campo eléctrico aplicado, \mathbf{B} es el vector de inducción magnética, \mathbf{H} es el vector de campo magnético, $\vec{\chi}$ y $\vec{\mu}$ son la susceptibilidad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente, en general estas cantidades son tensores, para el caso de medios eléctrica y magnéticamente homogéneos e isotrópicos se reducen a escalares. En lo que sigue limitaremos nuestro tratamiento a materiales donde la permeabilidad magnética es constante. También, frecuentemente en la región óptica del espectro electromagnético la contribución del campo eléctrico es mucho mayor que la contribución del campo magnético y por tanto se acostumbra trabajar solo con las ecuaciones para el campo eléctrico.

Bajo intensos campos electromagnéticos la polarización del medio puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} :: \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \\
 &= \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

es decir, hay contribuciones no lineales a la polarización. Suponiendo que sobre un medio cuya polarización esta descrita por la ecuación (1.3) incide un campo eléctrico de la forma:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-i\omega t} + c.c \tag{1.4}$$

sustituyendo esta ecuación en (1.3) estudiando el término que contiene a $\mathbf{P}^{(2)}$ tenemos:

$$\mathbf{P}^{(2)} = 2\chi^2 E_0 E_0^* + (\chi^2 E_0^2 e^{-i2\omega t} + c.c) \tag{1.5}$$

el primer término del lado derecho de esta ecuación corresponde a lo que se denomina rectificación óptica, es un campo constante proporcional a la intensidad del campo incidente, el segundo término tiene una contribución a una frecuencia de 2ω , este es el origen de la generación de segundo armónico. Naturalmente, si tomamos en cuenta los términos a orden mayor que dos en la ecuación (1.3) podemos tener contribuciones a armónicos superiores, o bien, si consideramos dos haces de luz incidiendo sobre el medio no lineal a frecuencias ω_1 y ω_2 podremos obtener (considerando los efectos no lineales) luz generada a una frecuencia de $\omega = \omega_1 + \omega_2$ así como otras combinaciones posibles debidas a los distintos términos no lineales.

Los efectos ópticos no lineales fueron observados hasta que se dispuso de fuentes de luz de alta intensidad debido a que las susceptibilidades no lineales de los medios materiales son varios ordenes de magnitud menores que la susceptibilidad lineal. Por tanto se requirió tener fuentes de intensos campos electromagnéticos para que estos fenómenos fueran observados. Además de la generación de armónicos ya citada, existen una gran cantidad de fenómenos no lineales; una clasificación posible para estos efectos es:

1) Autoefectos. Fenómenos que son producidos con un solo haz de bombeo. Ejemplo de esto son el autoenfocamiento y autodesenfocamiento de un haz así como la automodulación de fase entre otros.

2) Mezclado de ondas. En este tipo de fenómenos tenemos la mezcla de varios haces (dos o más) en el medio no lineal, como ejemplo de esto podemos citar la generación de sumas o diferencias de frecuencias al igual que la conjugación de fase.

3) Efectos en los cuales la variación de la susceptibilidad eléctrica (y por tanto del índice de refracción) del medio material es debida a campos externos diferentes al de la radiación electromagnética, como son el efecto acusto-óptico (campo externo de ondas sonoras), el efecto electro-óptico (campo externo eléctrico) ó efectos térmicos.

La anterior clasificación no es de ninguna manera exhaustiva y algunos fenómenos ópticos no lineales pueden ser explicados desde diversos puntos de vista, para una revisión más completa de óptica no lineal y efectos relacionados puede consultarse Yariv[1989]

En la actualidad, la óptica no lineal se ha convertido ya en una poderosa herramienta de

espectroscopía para investigar las propiedades de la materia, podemos citar las técnicas de espectroscopía por saturación así como la espectroscopía libre de efecto Doppler y la espectroscopía Raman coherente, por ejemplo.

Por otra parte, el estudio de la óptica no lineal en vapores atómicos o moleculares es importante debido a que un medio activo gaseoso es útil en ciertas circunstancias. Este tipo de medios resiste muy altas potencias de luz sin dañarse al contrario de los medios cristalinos o amorfos, esto los hace ideales en el estudio de interacción de la materia con altas intensidades de campos electromagnéticos.

Podemos también considerar que los átomos o moléculas que constituyen el vapor no interaccionan entre si (aproximación de gas ideal), por tanto pueden ser descritos con modelos relativamente sencillos y esto permite comparar con el experimento de manera más transparente. Por otro lado cuando se trabaja con frecuencias de bombeo cercanas a las frecuencias de resonancia, estos sistemas presentan valores altos en sus susceptibilidades no lineales (comparadas con el valor de estas cuando se trabaja alejado de una frecuencia de resonancia); en condiciones resonantes frecuentemente se puede hacer una aproximación adicional: podemos suponer al conjunto de átomos como un sistema de dos niveles de energía y aprovechar entonces todo el formalismo que tiene la mecánica cuántica para este tipo de sistemas.

Al hacer incidir en un vapor atómico un haz láser sintonizado del lado azul una de sus transiciones, se puede observar, en campo lejano (figura 1.1), un anillo que rodea al haz láser, este fenómeno se conoce como **emisión cónica anómala** (ECA). Este efecto, fue reportado por vez primera en 1980, desde entonces se han hecho estudios tanto teóricos como experimentales sobre él, sin embargo, los modelos existentes no logran explicar todas las características de esta emisión.

En esta tesis, se presenta un estudio experimental de emisión cónica anómala en vapor de calcio, en este sistema no se han reportado estudios de este fenómeno, se comparan estos resultados con los obtenidos por otros autores en otros sistemas y se comparan tales resultados con algunos de los modelos desarrollados para tratar de explicar esta emisión.

1.2 Emisión Cónica Anómala.

El primer reporte de estructuras anulares semejantes a la emisión cónica anómala fue hecho por Grischkowski[1970] mientras estudiaba autoenfocamiento en vapor de potasio, posteriormente, Skinner & Kleiber[1980] publicaron un estudio experimental acerca de este fenómeno; la mayoría de las publicaciones experimentales posteriores sobre ECA coinciden en términos generales con las características descritas en este artículo.

Esta emisión se encuentra del lado rojo de la transición atómica y su ancho de banda típicamente

es mayor que la del láser usado. Un espectro típico de este fenómeno se muestra en la figura 1.2.

Esta emisión se ha observado en vapores de Bario[Skinner & Kleiber 1980], Estroncio[Brechignac *et al* 1980] y Sodio[Boyd *et al* 1981, Harter *et al* 1984, Valley *et al* 1990]. Las densidades usadas al hacer los experimento han variado desde 0.04×10^{21} hasta $50 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Se han usado tanto sistemas láser pulsados como continuos para producirlo y las potencias de luz usadas varían desde 0.01 hasta 30 Mw cm^{-2} .

A la fecha existen varios modelos que intentan explicar tanto el origen de la radiación corrida en frecuencia, así como su estructura espacial.

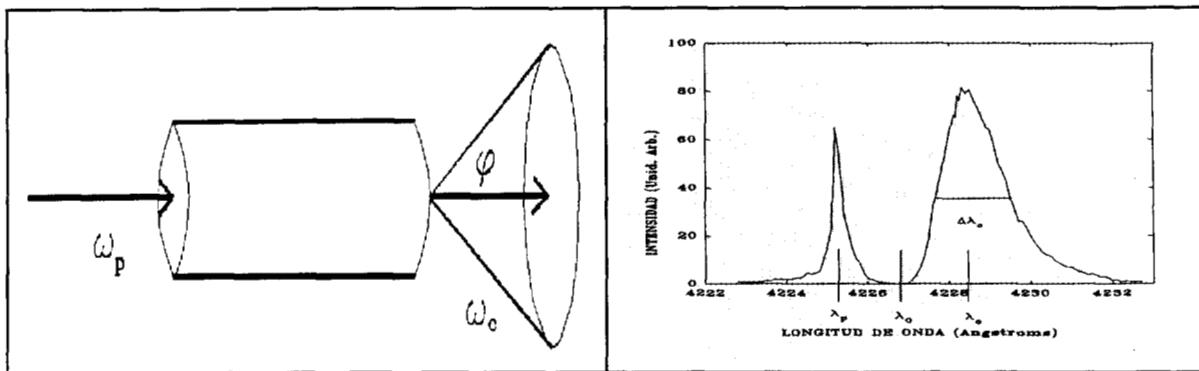


Fig 1.1. La ECA se obtiene al hacer pasar un haz láser ω_p (sintonizado del lado azul de una de las resonancias del sistema) a través de un vapor atómico, la frecuencia ω_c de la radiación en forma de anillo se encuentra centrada del lado rojo de la transición.

Fig 1.2 Espectro típico de emisión cónica anomala. la densidad del calcio es $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ y la longitud de onda de bombeo es 4225.2 \AA ($\Delta\lambda = 1.5 \text{ \AA}$).

A grandes rasgos, podemos mencionar la amplificación de bandas de Rabi acompañado de una modificación del índice de refracción en la región donde se propaga el haz láser, dispersión electrónica Raman estimulada, automodulación de fase, efecto Cêrenkov producido por haces de luz y diversos efectos transitorios.

Recientemente[Boyd *et al.* (1987), J.F Valley *et al.* (1990), L. You *et al.* (1991)], se ha especulado que la ECA es una combinación de diversos efectos no lineales actuando de manera competitiva entre sí. A pesar de este esfuerzo teórico, aún no se ha encontrado un modelo que logre describir de manera convincente todas las características de este fenómeno.

1.3 Estructura de esta tesis.

En el presente capítulo se ha presentado una breve explicación acerca del objeto de estudio de la óptica no lineal, de la relevancia de estudiar dentro de este campo los sistemas gaseosos, así como una

breve introducción a lo que será el objeto de estudio en esta tesis: la emisión cónica anómala.

En el siguiente capítulo se presentará una revisión de algunos procesos ópticos no lineales, la aproximación para átomos de dos niveles y algunas de sus propiedades ópticas. Este formalismo será aprovechado en el capítulo tres, al examinar los trabajos tanto teóricos como experimentales publicados a la fecha sobre ECA.

En el capítulo cuatro se hace una descripción del equipo experimental usado, de su funcionamiento y sus características.

En el capítulo cinco se muestran los resultados experimentales al estudiar la emisión cónica anómala en vapor de calcio (sistema no estudiado hasta ahora) con una haz de bombeo. Se muestran resultados experimentales al usar dos haces copropagándose en el medio con distinta frecuencia, uno sintonizado del lado azul de la transición atómica y otro del lado rojo de ella.

En particular se hace énfasis en un efecto encontrado en el cual en presencia de estos haces, uno sintonizado del lado rojo de la transición $1S_0 - 1P_1$ (4226.7 Å) del calcio atómico y otro situado del lado azul de la transición, se encuentra que bajo determinadas condiciones el láser sintonizado del lado azul se desenfoca; lo cual es sorprendente, debido a que el comportamiento esperado es que un láser sintonizado a mayor frecuencia que la frecuencia de una transición atómica sufrirá autodesenfocamiento. Además, se hace un análisis de estos resultados.

Finalmente en el capítulo seis se describen conclusiones del trabajo y se sugieren investigaciones posteriores.

CAPITULO 2.

OPTICA NO LINEAL Y SISTEMAS ATOMICOS DE DOS NIVELES.

En este capítulo se desarrollarán algunos aspectos teóricos de la óptica no lineal y de los sistemas atómicos de dos niveles usando el formalismo de matriz de densidad cuando el sistema es excitado por haces cuasi monocromáticos cerca de resonancia, asimismo se hará una revisión de algunas de las características del efecto Raman en sistemas atómicos. Finalmente se presentará una revisión del efecto Cherenkov en el caso cuántico y del efecto Cherenkov producido por haces de luz. El desarrollo de las secciones 2.1 a 2.5 siguen el tratamiento que se encuentra en las referencias [Wodkiewicz, 1979] y [Fernández, 1983].

2.1 La ecuación de onda no lineal.

Consideremos un medio material en el cual, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell de la forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

es decir, no existen cargas ni corrientes libres, escribiendo además el desplazamiento eléctrico como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) \quad (2.5)$$

suponiendo que la polarización tiene la forma:

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} = \epsilon_0 \vec{\chi}_L \cdot \vec{E} + \vec{P}_{NL} \quad (2.6)$$

donde $\vec{\chi}_L$ es el tensor lineal de susceptibilidad eléctrica, P_L y P_{NL} son la parte lineal y no lineal de la polarización respectivamente, si además restringimos nuestra discusión a medios isotrópicos y homogéneos entonces $\vec{\chi}_L$ es una cantidad escalar, usando la relación $\epsilon = 1 + \chi_L$, podemos escribir:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \vec{P}_{NL} \quad (2.7)$$

ahora, tomando el rotacional de (2.3), substituyendo en (2.4) y haciendo uso de la relación

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.8)$$

tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

sustituyendo (2.7) en (2.1) y usando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\phi \vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{u}$ obtenemos:

$$\vec{E} \cdot \nabla(\epsilon_0 \epsilon) + \epsilon_0 \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}_{NL} = 0 \quad (2.10)$$

como hemos supuesto que estamos en medio homogéneo, el primer término es igual a cero; si además despreciamos el segundo término (i.e suponemos que el campo eléctrico cambia lentamente en la escala de las fuentes de campo y por tanto podemos despreciar el término $\nabla \cdot \vec{E}$) y usando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$ en la ecuación (2.9) tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

esta es la llamada ecuación de onda no lineal. Los campos electromagnéticos (e.m) en la región óptica de frecuencias oscilan muy rápidamente, con el fin de simplificar un poco el tratamiento matemático consideremos un campo electromagnético cuasi-mocromático, y escribamos explícitamente la dependencia temporal que oscila rapidamente:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) A(t) e^{-i\omega t} \quad (2.12)$$

ω es la frecuencia angular, y $A(t)$ es una función que varía lentamente, esta variable toma en cuenta la longitud del pulso y la coherencia parcial de la fuente de campo electromagnético Haciendo uso de la aproximación:

$$\omega^2 A(t) \gg \left| 2\omega \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right| \quad (2.13)$$

sustituyendo (2.12) en (2.11) y usando la aproximación (2.13) tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) + 2\mu_0 A(t)^{-1} e^{i\omega t} \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

donde como es usual usamos $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ y $n^2 = \epsilon$. Ahora, para la dependencia espacial del campo electromagnético, usando la aproximación paraxial, tenemos:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} A(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c \quad (2.15)$$

Sustituyendo esto en (2.14) y usando la identidad vectorial $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f - 2(\nabla f \cdot \nabla g)$, tenemos:

$$\nabla^2 A(\vec{r}) - 2i\vec{k} \cdot \vec{r} \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial r} - k^2 A(\vec{r}) + \frac{\omega^2 n^2}{2c^2} A(\vec{r}) = 2\mu_0 A(t)^{-1} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

En la ecuación anterior el término $\nabla^2 A(\vec{r})$ es el responsable de obtener auto-enfocamiento, en la siguiente sección desarrollaremos explícitamente el formalismo para obtener autoenfocamiento.

2.2 Autoenfocamiento de un haz con perfil de intensidad variable.

Cuando un haz de luz con un perfil de intensidad no uniforme cruza un medio, este medio puede producir alteración en su perfil, el diámetro del haz puede reducirse (o aumentar), este fenómeno es conocido autoenfocamiento (o autodesenfocamiento).

Podemos reconocer dos etapas en el autoenfocamiento, en la primera, un haz con un diámetro de ≈ 1 mm o más se contrae suavemente hasta alcanzar un diámetro del orden de $100 \mu\text{m}$, en este punto el haz empieza a mostrar filamentación, se ha sugerido que esta filamentación se debe a fluctuaciones iniciales del perfil del haz. En la presente discusión nos restringiremos al autoenfocamiento suave.

Buscaremos una ecuación que nos de el tamaño transversal del haz al propagarse en el medio no lineal, para hacer esto se usará la analogía entre la óptica y la mecánica clásica convirtiendo la ecuación de propagación del haz en el medio no lineal en una ecuación para una partícula con un potencial mecánico equivalente. La analogía entre mecánica clásica y óptica es usada cuando podemos desprestigiar los efectos de difracción (es decir en la aproximación de óptica geométrica), sin embargo como veremos más adelante redefiniendo adecuadamente el índice de refracción podemos extender esta analogía para usarla en el caso de óptica no lineal.

Haremos dos suposiciones, primero, que la polarización no lineal varía a la misma frecuencia del campo incidente, i.e:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \vec{P}(\vec{r})_{NL} e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

y en segundo lugar que el campo incidente es monocromático, entonces tenemos (de la ecuación 2.12) $A(t) = 1$. Con estas suposiciones la ecuación (2.16) toma la forma:

$$\nabla^2 A(\vec{r}) + 2i\vec{k} \cdot \vec{r} \frac{\partial A}{\partial \vec{r}} - k^2 A(\vec{r}) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} A(\vec{r}) = -\omega^2 \mu_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{P}_{NL} \quad (2.18)$$

como se dijo en la introducción, nos restringiremos al autoenfocamiento suave, entonces en la aproximación de envolvente suave y la aproximación paraxial, la ecuación anterior se reduce a: \bullet

$$\nabla^2 A(\vec{r}) + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A(\vec{r}) + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} A(\vec{r}) = -\omega^2 \mu_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{P}_{NL} \quad (2.19)$$

Considerando que normalmente el haz de un láser tiene un perfil de intensidad de forma gaussiana, usaremos para la amplitud compleja $A(\vec{r})$ una función (un poco más general) con simetría cilíndrica²:

$$A(\vec{r}) = A(\rho, z) e^{i\phi(\rho, z)} \quad (2.20)$$

² En T. Wulle & S. Herminghaus[1993] puede encontrarse un estudio teórico y experimental de generación de segundo armónico para haces cuyo perfil de intensidad es una función de Bessel de orden 0.

en esta última ecuación ρ es la coordenada radial, A es una función real y ϕ es una fase. Dada la simetría usada al escribir A separamos el operador gradiente en sus componentes longitudinales y transversales i.e:

$$\nabla \equiv \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z$$

donde
$$\nabla_T = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta$$

entonces la ecuación (2.19) se transforma:

$$A \{ i \nabla_T^2 \phi - (\nabla_T \phi)^2 \} + \nabla_T^2 A + 2i(\nabla A \cdot \nabla \phi) + 2ik \left\{ \frac{\partial A}{\partial z} + iA \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{NL}(A) A \quad (2.21)$$

Al derivar la ecuación anterior se ha despreciado la segunda derivada de A y de ϕ con respecto a z , y hemos usado la identidad $k^2 = \omega^2 n^2 / c^2$ y la polarización del material se ha expresado en términos de la susceptibilidad como:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_{NL}(A) e^{i\phi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.22)$$

separando parte real y parte imaginaria en la ecuación (2.22), tenemos:

$$-A(\nabla_T \phi)^2 + \nabla_T^2 A - 2Ak \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Re\{\chi_{NL}\} A \quad (2.23)$$

$$A \nabla_T^2 \phi + 2(\nabla A \cdot \nabla \phi) + 2k \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Im\{\chi_{NL}\} A \quad (2.24)$$

notando que en la ecuación (2.24) hemos escrito $\nabla_T \cdot (A^2 \nabla_T \phi) = 2A \nabla_T A \cdot \nabla_T \phi + A^2 \nabla_T^2 \phi$, entonces reescribiendo la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{\nabla_T^2 A}{A} - (\nabla_T \phi)^2 - 2k \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{k^2}{\epsilon} \Re\{\chi_{NL}\} A \quad (2.25a)$$

$$y \quad 2k \frac{\partial A^2}{\partial z} + \nabla_T \cdot (A^2 \nabla_T \phi) = -\frac{k^2}{\epsilon} \Im\{\chi_{L+NL}(A)\} A^2 \quad (2.25b)$$

en la ecuación (2.25a) se ha omitido la dependencia de $A(\rho, z)$ y escribí χ en términos de la parte lineal y la parte no lineal. Integrando la última ecuación y usando el teorema de Gauss en el segundo término del lado izquierdo, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_v A^2 dv + \frac{1}{2k} \int_s (A^2 \nabla_T \phi) \cdot \hat{n} ds = -\frac{k}{2\epsilon} \int_v \Im\{\chi_{L+NL}(A)\} A^2 dv \quad (2.26)$$

aquí el segundo término es cero, el primer término contiene la amplitud al cuadrado y por tanto es proporcional a la intensidad del haz, esta intensidad cambia al propagarse la onda en la dirección de z , el término en el lado derecho representa la absorción del sistema (es la parte imaginaria del tensor de susceptibilidad eléctrica) y entonces (2.26) es una ecuación que representa balance de energía. Para obtener soluciones analíticas supondremos que $\Im\{\chi_{L+LN}\} = 0$, se debe hacer notar que esta no es una buena suposición si se esta cerca de resonancia donde la absorción del sistema es muy alta, en el caso en el que la potencia del haz no se conserva solo se ha desarrollado tratamiento numérico[Boshier & Sande 1982] y el tratamiento analítico se ha desarrollado muy recientemente solo con aproximaciones[Karlsson 1992].

Reescribiendo la ecuación (2.23) obtenemos:

$$-\frac{1}{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{(\nabla_T \phi)^2}{2k^2} + \left(\frac{\nabla_T^2 A}{2k^2 A} - \frac{\Re\{\chi_{NL}\}}{2\epsilon} \right) = 0$$

$$\text{o } \frac{\partial \phi}{\partial(kz)} + \frac{(\nabla_T \phi)^2}{2k^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla_T^2 A}{k^2 A} - \frac{\Re\{\chi_{NL}\}}{\epsilon} \right) = 0 \quad (2.27)$$

esta ecuación se puede ver como la ecuación de Hamilton-Jacobi³

$$2 \frac{\partial S}{\partial t} + (\nabla S)^2 + 2\mathcal{V}_{eff} = 0 \quad (2.28)$$

$$\text{donde } \mathcal{V}_{eff} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla_T^2 A}{A k^2} - \frac{\chi'_{NL}(A)}{\epsilon} \right\} \quad (2.29)$$

usando la analogía formal entre los sistemas mecánicos y la óptica en la aproximación paraxial, podemos construir una ecuación que describe el movimiento de una partícula bajo la acción de un potencial \mathcal{V} , y esto es equivalente a encontrar una ecuación para la evolución del ancho del haz a lo largo de la dirección de propagación:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon} \right) \quad (A1.6)$$

y tenemos en este caso un "índice de refracción efectivo" definido por $n = \sqrt{\epsilon_{eff}/\epsilon}$, donde ϵ_{eff} tiene la forma dada por (A1.1), reescribiendo la ecuación (A1.6) tenemos:

$$\frac{\partial \epsilon_{eff}}{\partial r \epsilon} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nabla_T^2 A}{k^2 A} + \frac{\chi_{NL}}{\epsilon} \right) \quad (2.30)$$

³ Un desarrollo de esto se puede encontrar en el apéndice 1.

se puede ver que, por la ecuación (2.30) que la forma espacial del haz a travez del medio depende de la competencia de dos factores; mientras el haz se contrae suavemente el término χ_{NL}/ϵ es mayor que el término de difracción $\nabla_T^2 A/k^2 A$, esta es la primera etapa del autoenfocamiento, despues de que el haz se contrae mas y mas el término de difracción es mayor que el término no lineal y el diámetro del haz se reduce fuertemente, este es probablemente el origen de la filamentación en la segunda etapa del fenómeno.

Ahora, usando un haz con forma gaussiana:

$$A = A_0(z) e^{-r^2/2b^2(z)} \quad (2.31)$$

sustituyendo en (2.8) y usando (A1.6) tenemos:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{r}{k^2 b^4} - \frac{r}{2b^2 \epsilon} A_0 e^{-r^2/2b^2} \frac{\partial \chi_{NL}}{\partial A_0} \quad (2.32)$$

el primer término del lado derecho es el término de difracción y el segundo es el término no lineal. Analizando esta ecuación en la aproximación paraxial, haciendo $r = \alpha b$ con $\alpha \ll 1$, por tanto la última ecuación es:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} \Big|_{\alpha b} \sim \frac{\alpha}{k^2 b^3} - \frac{\alpha A_0}{2b \epsilon} \left(\frac{\partial \chi_{NL}}{\partial A_0} \right)_{\alpha b} \quad (2.33)$$

Por otro lado, suponiendo que la potencia se conserva (i.e se desprecia la absorción) esto es:

$$d\mathcal{P} = \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a}$$

donde \mathcal{P} es la potencia y \vec{S} es el vector de pointing

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A^2 \hat{k}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^\infty A^2 da$$

y usando (2.31), tenemos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_0 b^2, \quad \mathcal{P} = cte$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathcal{P}}{b^2}$$

definiendo:

$$q^2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathcal{P}$$

entonces $A_0 = q/b$ y combinando esto con (2.33):

$$\frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{k^2 b^3} - \frac{q}{2\epsilon b} \left(\frac{\partial \chi_{NL}}{\partial A_0} \right)_{ab} \quad (2.34)$$

La última ecuación describe la evolución del tamaño transversal de un haz que se propaga en la dirección z , en la aproximación paraxial y para un perfil de intensidad gaussiano. Usando de nuevo la analogía mecánica, definiendo un potencial U :

$$\frac{d^2 b}{dz^2} = - \frac{\partial U}{\partial b}$$

$$\text{donde } - \frac{\partial U}{\partial b} = \frac{1}{k^2 b^3} - \frac{q}{2\epsilon b^2} \left(\frac{\partial \chi_{NL}}{\partial A_0} \right)_{ab}$$

resolviendo para U , tenemos⁴:

$$U(b) = \frac{1}{2k^2 b^2} - \frac{1}{2\epsilon} \chi_{NL}(q/b) \quad (2.35)$$

Si se conoce la susceptibilidad no lineal, se puede calcular el potencial asociado, y obtener el tamaño del haz como función de z . Por ejemplo, se puede calcular el radio mínimo de haz b_{\min} y la posición de este $z = z_f$

$$z_f = \int_{b_0}^{b_{\min}} \frac{db}{\sqrt{2[U(b_0) - U(b)] + \tilde{b}_0^2}} \quad (2.36)$$

En esta derivación se ha usado la analogía entre la óptica geométrica y la mecánica, esto se justifica debido a que podemos redefinir (en el autoenfocamiento suave) el "índice de refracción" del sistema, sin embargo cuando los efectos de difracción son importantes esta aproximación falla; se puede pensar que este fenómeno tiene una "transición de fase" entre una etapa "geométrica" y una etapa "ondulatoria" con un parámetro importante: la susceptibilidad no lineal.

2.3 Sistemas atómicos de dos niveles.

Conceptualmente un átomo de dos niveles es el mismo tipo de objeto que un sistema de dos espines, de hecho el formalismo usado para describir un sistema de dos estados de espín es formalmente equivalente al usado para describir un átomo de dos niveles.

Como no es posible describir de manera exacta la interacción de radiación con un sistema atómico (ni siquiera con un solo átomo), al suponer un átomo con solo dos niveles de energía podemos usar el formalismo que se tiene en la mecánica cuántica para estos sistemas. Una de las ventajas es que solo tenemos una frecuencia de resonancia en analogía al oscilador armónico, por tanto también es posible

⁴ Recuerdese que estamos en la aproximación paraxial y por tanto $\alpha \ll 1$.

pensar a un sistema de átomos de dos niveles de energía como un conjunto de osciladores.

Cuando hay interacción con otros niveles, por ejemplo decaimientos no radiativos o dos niveles muy próximos o incluso degeneración de niveles energéticos, podemos considerar que el sistema es abierto y suponer que hay fuentes o sumideros en la población de los niveles de energía. Por ejemplo, en el átomo de sodio tenemos dos niveles de energía muy próximos (líneas D), bajo ciertas circunstancias uno de estos niveles puede interpretarse como un sumidero para la población en los distintos niveles de energía y evitar así una descripción en términos de tres niveles de energía que, en general, solo puede ser tratada con soluciones numéricas.

El sistema estudiado en los experimentos de esta tesis (vapor de calcio) puede considerarse, bajo las condiciones experimentales que se usaron, como un sistema de dos niveles cerrado, por tanto en las secciones siguientes solo estudiaremos el formalismo para átomos de dos niveles sin fuentes o sumideros.

2.3.1 Matriz de densidad para un sistema de dos niveles.

En esta sección se describirá el comportamiento en estado estacionario de un sistema de dos niveles en el formalismo de matriz de densidad. La aproximación de estado estacionario es útil cuando la duración del campo electromagnético es más grande que el tiempo de relajación del sistema atómico.

A continuación se describirán los principales pasos en la derivación de las ecuaciones para la matriz de densidad para un sistema de dos niveles.

Considerese un sistema atómico cuyos átomos constan de solo dos niveles de energía, llamando $|b\rangle$ al nivel de energía superior y $|a\rangle$ al nivel de energía inferior (figura 2.1)

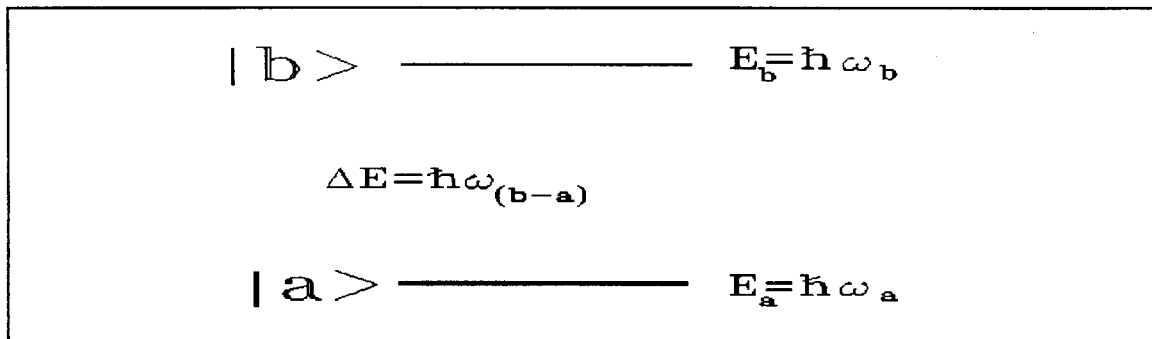


Figura 2.1. Sistema atómico de dos niveles. la diferencia de energía entre niveles es $\hbar \omega_b - \hbar (\omega_b - \omega_a)$

Un átomo de dos niveles está descrito por una función de onda que es la superposición de dos eigenfunciones ψ_b y ψ_a , estas eigenfunciones obedecen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con un Hamiltoniano H_0 tal que:

$$H_0 \psi_a = E_a \psi_a \quad (2.37)$$

y

$$H_0 \psi_b = E_b \psi_b \quad (2.38)$$

donde E_a y E_b son los eigenvalores asociados a las eigenfunciones ψ_a y ψ_b .

En teoría de perturbaciones se supone que al Hamiltoniano total del sistema átomo-radiación H se puede expresar como la suma del Hamiltoniano no perturbado H_0 más una perturbación V el cual representa la interacción del sistema con el campo electromagnético descrito este último como un campo clásico (tratamiento semi-clásico). Tenemos entonces:

$$H = H_0 + V \quad (2.39)$$

por tanto las eigenfunciones ψ del Hamiltoniano total son superposiciones lineales de las eigenfunciones ψ_a y ψ_b con los coeficientes $C_b(t)$ y $C_a(t)$ tal que:

$$\psi = C_b(t) \psi_b + C_a(t) \psi_a \quad (2.40)$$

usando esta última ecuación en la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$,

encontramos las ecuaciones que obedecen las amplitudes

$$\dot{C}_b \psi_b + \dot{C}_a \psi_a = -\frac{i}{\hbar} (C_b H \psi_b + C_a H \psi_a) \quad (2.41)$$

donde se ha suprimido la dependencia explícita en el tiempo de los coeficientes C y el punto sobre la variable indica derivación con respecto al tiempo. Usando ahora las relaciones de ortogonalidad de las funciones de onda $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$, obtenemos:

$$\dot{C}_b = -\frac{i}{\hbar} \{ C_b \langle b | H | a \rangle + C_a \langle b | H | a \rangle \} \quad (2.42)$$

y

$$\dot{C}_a = -\frac{i}{\hbar} \{ C_b \langle a | H | b \rangle + C_a \langle a | H | b \rangle \} \quad (2.43)$$

Ahora, para un conjunto representativo (ensemble) de átomos de dos niveles definamos

$$\rho = \overline{C_m C_n^*} \quad (2.44)$$

donde la barra denota promedio sobre el conjunto representativo. La matriz ρ queda entonces definida como:

$$\begin{pmatrix} \rho_{bb} & \rho_{ba} \\ \rho_{ab} & \rho_{aa} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Si cada sistema se caracteriza por una función del tipo de la ecuación (2.40) tenemos entonces

$$\psi^{(s)} = C_a^{(s)} \psi_a + C_b^{(s)} \psi_b \quad (2.46)$$

el promedio sobre el conjunto representativo será entonces

$$\rho_{mn}(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N C_m^{(s)}(t) C_n^{(s)*}(t) \quad (2.47)$$

este promedio toma en cuenta nuestro conocimiento acerca del estado macroscópico del sistema y la incertidumbre del estado individual de cada sistema. Esta incertidumbre es diferente a la incertidumbre debida a la interpretación probabilística de la función de onda ψ .

La derivada temporal de los elementos de la matriz de densidad estan dados por

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{mn} = \overline{\dot{C}_m C_n^*} + \overline{C_m \dot{C}_n^*} \quad (2.48)$$

substituyendo la ecuación (2.41) y su complejo conjugado y recordando que el Hamiltoniano es un operador hermitiano, se obtiene la ecuación para el elemento de matriz de densidad ρ_{ba} :

$$\dot{\rho}_{ba} = -\frac{i}{\hbar} \{ \rho_{ba} \langle b | H | b \rangle + \rho_{aa} \langle b | H | a \rangle \} + \frac{i}{\hbar} \{ \rho_{ba} \langle a | H | a \rangle + \rho_{bb} \langle b | H | a \rangle \} \quad (2.49)$$

solo los elementos diagonales de la matriz de densidad del Hamiltoniano no perturbado son diferentes de cero, dando

$$\langle n | H_0 | m \rangle = \delta_{mn} \hbar \omega_m \quad (2.50)$$

donde δ_{mn} es la delta de kronecker, \hbar es la constante de Planck dividida por 2π y ω_m es la energia en unidades de frecuencia angular del m-ésimo nivel. El Hamiltoniano V de interacción es el responsable de las transiciones entre los niveles, el elemento en la matriz de densidad esta dado por

$$\langle n | V | m \rangle = V_{nm} (1 - \delta_{nm}) \quad (2.51)$$

donde V_{nm} es el elemento de matriz de la perturbación que conecta los estados $\langle n |$ y $| m \rangle$. La ecuación (2.49) se reduce a:

$$\dot{\rho}_{ba} = -i \rho_{ba} (\omega_b - \omega_a) - \frac{i}{\hbar} V_{ba} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.52)$$

de manera similar se pueden obtener los restantes elementos de la matriz de densidad:

$$\dot{\rho}_{ab} = -i \rho_{ab} (\omega_b - \omega_a) - \frac{i}{\hbar} V_{ab} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.53)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} V_{ab} \rho_{ba} \quad (2.54)$$

$$\dot{\rho}_{aa} = \frac{i}{\hbar} V_{ba} \rho_{ab} - \frac{i}{\hbar} V_{ab} \rho_{ba} \quad (2.55)$$

ρ_{bb} y ρ_{aa} son las densidades de probabilidad de encontrar un átomo en el estado inferior o superior respectivamente. La población en estos niveles se obtiene tomando el producto de la población total (N) por la densidad de probabilidad ρ_{aa} ó ρ_{bb} , esto si se considera que el sistema de dos niveles es cerrado (es decir, no decae a otros niveles), como la probabilidad total siempre es 1, entonces:

$$\rho_{bb} + \rho_{aa} = 1 \quad (2.56)$$

Los elementos no diagonales ρ_{ba} y ρ_{ab} representan las relaciones de fase entre el nivel superior y el inferior, esta relación de fase comunmente se conoce como la coherencia entre estos estados.

Hasta ahora hemos despreciado cualquier proceso de decaimiento, en particular la vida media natural de los niveles involucrados; sin embargo si consideramos un conjunto de átomos de dos niveles (que no interactúan entre sí) preparados todos ellos en el nivel de energía superior $|b\rangle$ en ausencia de perturbaciones externas, este sistema decaerá exponencialmente con el tiempo. Sea τ_b la vida media natural es decir el tiempo que tarda una población inicialmente de N_0 átomos excitados en decaer hasta N_0/e . Entonces la razón de relajamiento del estado superior esta definido por

$$\gamma_b = \frac{1}{\tau_b} \quad (2.57)$$

de esta definición podemos ver que el coeficiente γ_b es equivalente al coeficiente A de Einstein de emisión espontánea.

A continuación modificaremos la ecuación (2.54) para incluir el decaimiento del estado superior

$$\dot{\rho}_{bb} = -\gamma_b \rho_{bb} - \frac{i}{\hbar} V_{ba} \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} V_{ab} \rho_{ba} \quad (2.58)$$

en ausencia de campos externos esta ecuación se integra para dar

$$\rho_{bb} = \rho_{bb}^0 e^{-\gamma_b t} \quad (2.59)$$

donde ρ_{bb}^0 es la población inicial en el nivel $|b\rangle$. De la ecuación de conservación de la población total (ecuación 2.56), encontramos que la población en el estado inferior debe incrementarse de forma exponencial a razón de γ_b . La ecuación (2.55) queda entonces:

$$\dot{\rho}_{aa} = \gamma_b \rho_{bb} + \frac{i}{\hbar} V_{ba} \rho_{ab} - \frac{i}{\hbar} V_{ab} \rho_{ba} \quad (2.60)$$

que en ausencia de campo externo se integra para obtener

$$\rho_{aa} = 1 - \rho_{bb}^0 e^{-\gamma_b t} \quad (2.60a)$$

Todo decaimiento espontáneo produce una transición que no esta relacionada en fase con el campo incidente o la fase de otros dipolos oscilantes. Debemos por tanto modificar los elementos no diagonales con una razón de decaimiento γ . En tal caso las ecuaciones 2.52 y 2.53 quedan:

$$\dot{\rho}_{ba} = -i\rho_{ba}\omega_0 - \gamma\rho_{ba} + \frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.61)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = i\rho_{ab}\omega_0 - \gamma\rho_{ab} - \frac{i}{\hbar}V_{ab}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.62)$$

donde $\omega_0 = \omega_b - \omega_a$. La relación entre γ y γ_b se puede obtener en el caso de decaimiento puramente radiativo imponiendo la condición de que cada *disrupción* de fase esta acompañada de un decaimiento del nivel $|b\rangle$ al nivel $|\alpha\rangle$. En ausencia de campo los elementos no diagonales de la matriz de densidad integran a:

$$\rho_{ba} = e^{-(\gamma+i\omega_0)t} \quad (2.63)$$

$$\rho_{ab} = e^{-(\gamma-i\omega_0)t} \quad (2.64)$$

La función de coherencia del sistema átomo-campo se define (en analogía a la función de coherencia parcial de ondas electromagnéticas) como $\rho_{ba}\rho_{ab}$. En ausencia de campo, la función de coherencia queda:

$$\rho_{ba}\rho_{ab} = e^{-2\gamma t} \quad (2.65)$$

como hay una correspondencia uno a uno entre el decaimiento de población del nivel inferior y las *disrupciones* de fase, la razón de decaimiento del nivel superior (ecuación 2.59) y la función de coherencia (2.65) deben ser iguales:

$$e^{-2\gamma t} = e^{-\gamma_b t} \Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_b}{2} \quad (2.66)$$

Una forma alternativa a la aqui presentada para incluir la emisión espontánea se ha desarrollado por Cohen-Tannouji[1977]. Una gran ventaja de este método es que los elementos no diagonales que representan las transiciones entre los estados incluyen de manera natural las razones de relajamiento. Este tratamiento hace uso de los métodos de segunda cuantización los cuales estan fuera del objetivo de este capítulo.

Ahora derivaremos el Hamiltoniano de interacción V_{ba} considerando que el campo eléctrico es constante en la escala atómica (aproximación dipolar) y que la contribución del campo magnético es despreciable. El sistema átomo-campo se puede entonces considerar como un dipolo con cargas $-q$ y $+q$ separadas por una distancia \vec{r} en un campo eléctrico uniforme \vec{E} , tal sistema posee una energía potencial U_p dada por

$$U_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(t) \quad (2.67)$$

donde $\vec{\mu}$ es el momento dipolar eléctrico

$$\vec{\mu} = q\vec{r} \quad (2.68)$$

el elemento de matriz de interacción entre los niveles $|b\rangle$ y $|a\rangle$ está dado entonces por

$$V_{ba} = -\langle b | e\vec{E} \cdot \vec{r} | a \rangle \quad (2.69)$$

donde e es la carga del electrón y \vec{r} es el vector de posición del electrón con respecto al núcleo atómico.

Por simplicidad tomemos un campo escalar monocromático de la forma:

$$E(t) = -\frac{1}{2}E_0(\vec{r})e^{-i\omega t} + c.c \quad (2.70)$$

supondremos también que los niveles atómicos no son degenerados. En tal caso el Hamiltoniano de perturbación queda

$$V_{ba} = -\frac{1}{2}\mu E_0(\vec{r})e^{i\omega t} + c.c \quad (2.71)$$

donde

$$\mu = \mu_x = \langle b | e r_x | a \rangle$$

es el elemento de matriz de la componente x del momento dipolar eléctrico, suponemos también que el campo eléctrico está en esta misma dirección. Las funciones propias $|b\rangle$ y $|a\rangle$ se toman si pérdida de generalidad tales que

$$\mu = \mu_{ba} = \mu_{ab} = \mu^*$$

La matriz dipolar eléctrica es definida como

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

los elementos diagonales de esta matriz son cero debido a la manera en que se ha definido el Hamiltoniano de interacción (ecuación 2.51)

Con las consideraciones hechas anteriormente reescribamos las ecuaciones de matriz de densidad para un sistema de átomos de dos niveles con razón de decaimiento $\gamma_1 (= \gamma_b)$ y razón de relajación no diagonal $\gamma_2 (= \gamma)$:

$$\dot{\rho}_{ba} = -i\omega_0\rho_{ba} - \gamma_2\rho_{ba} + \frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.73)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = i\omega_0\rho_{ab} - \gamma_2\rho_{ab} - \frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.74)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = -\gamma_1\rho_{bb} - \frac{i}{\hbar}(V_{ba}\rho_{ab} - V_{ab}\rho_{ba}) \quad (2.75)$$

$$\dot{\rho}_{aa} = \gamma_1\rho_{bb} + \frac{i}{\hbar}(V_{ba}\rho_{ab} - V_{ab}\rho_{ba}) \quad (2.76)$$

probando una solución para los elementos no diagonales de la matriz de densidad de la forma

$$\rho_{ba} = \sigma_{ba}e^{-i\omega t} \quad (2.77a) \quad \rho_{ab} = \sigma_{ab}e^{-i\omega t} \quad (2.77b)$$

donde σ_{ba} y σ_{ab} donotan envolventes suaves.

En el estado estacionario, esto es, un tiempo t largo despues de que a pasado la perturbación ($t \gg 1/\gamma_2, 1/\gamma_1$), la población tanto en el estado inferior como en el superior llegan a ser constantes, por tanto

$$\dot{\rho}_{bb} = \dot{\rho}_{aa} = 0 \quad (2.78)$$

las envolventes suaves σ_{ba} y σ_{ab} también llegan a ser constantes y en tal caso la derivada temporal de los elementos no diagonales de la matriz de densidad queda:

$$\dot{\rho}_{ba} = -i\omega\rho_{ba} \quad (2.79a) \quad \dot{\rho}_{ab} = i\omega\rho_{ab} \quad (2.79b)$$

y en el estado estacionario, los elementos de la matriz de densidad se reducen a:

$$\rho_{ba} = \frac{\frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{bb} - \rho_{aa})}{\gamma_2 - i\Delta} \quad (2.80)$$

$$\rho_{ab} = \frac{-\frac{i}{\hbar}V_{ab}(\rho_{bb} - \rho_{aa})}{\gamma_2 + i\Delta} \quad (2.81)$$

$$\rho_{aa} = \frac{i}{\hbar\gamma_1}(V_{ba}\rho_{ab} - V_{ab}\rho_{ba}) \quad (2.82)$$

$$\text{donde } \Delta \equiv \omega - \omega_0 \quad (2.83)$$

ω es la frecuencia del campo incidente y ω_0 es la frecuencia de resonancia atómica. Usando la condición de normalización para la población total $\rho_{ba} + \rho_{ab} = 1$, se obtiene

$$\rho_{bb} - \rho_{aa} = 2\rho_{bb} - 1 = \frac{-2i}{\hbar\gamma_1}(V_{ba}\rho_{ab} - V_{ab}\rho_{ba}) - 1 \quad (2.84)$$

sustituyendo las ecuaciones para ρ_{ba} y ρ_{ab} obtenemos

$$\rho_{bb} - \rho_{aa} = \frac{-2}{\hbar \gamma_1} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) V_{ba} V_{ab} \left(\frac{1}{\gamma_2 + i\Delta} + \frac{1}{\gamma_2 - i\Delta} \right) \quad (2.85)$$

el producto $V_{ba} V_{ab}$ nos da un término que oscila con el doble de la frecuencia original ($\pm 2\omega t$) así como campo d.c. (rectificación óptica). Si consideramos que el campo incidente oscila a una frecuencia ω que esta cercana a ω_0 entonces los términos no resonantes del doble de la frecuencia original se pueden despreciar, lo cual nos lleva a considerar el Hamiltoniano de perturbación como:

$$V_{ba} = -\frac{1}{2} \mu E_0 (\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.86)$$

esta última aproximación se conoce como la aproximación de onda rotante. Multiplicando la ecuación (2.85) por $\gamma^2 + \delta^2$ y reagrupando términos se tiene

$$(\rho_{bb} - \rho_{aa}) = \frac{-(\gamma_2^2 + \Delta^2)}{\gamma_2^2 + \Delta^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Omega^2} \quad (2.87)$$

donde $\Omega \equiv \frac{\mu E_0}{\hbar}$ (2.88)

Ω es conocida como la frecuencia de Rabi, $(\rho_{bb} - \rho_{aa})$ es la diferencia de población, en ausencia de campo esta diferencia es -1, esto es, toda la población se encuentra en el estado base. Cuando el campo es muy grande las poblaciones son iguales y su diferencia es igual a cero.

La suma de los elementos no diagonales de la matriz de densidad es (de 2.80 y 2.81) :

$$\rho_{ba} + \rho_{ab} = \frac{(\rho_{bb} - \rho_{aa})}{\hbar (\Delta^2 + \gamma_2^2)} \{ i(V_{ba} - V_{ab})\gamma_2 - (V_{ba} + V_{ab})\Delta \} \quad (2.89)$$

recordando que en la aproximación de onda rotante se tiene $V_{ba} = -\frac{1}{2} \mu E_0 e^{i\omega t}$ y usando la definición de $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$

$$\rho_{ba} + \rho_{ab} = \frac{(\rho_{bb} - \rho_{aa})}{\hbar (\Delta^2 + \gamma_2^2)} \{ -\gamma_2 \sin(\omega t) + \Delta \cos(\omega t) \} \mu^2 E_0 \quad (2.90)$$

susituyendo $(\rho_{bb} - \rho_{aa})$

de (2.87) obtenemos

$$\rho_{ba} + \rho_{ab} = \frac{\mu^2 E_0 \gamma_2 \sin(\omega t) - \Delta \cos(\omega t)}{\hbar \left(\gamma_2^2 + \Delta^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Omega^2 \right)} \quad (2.91)$$

El valor de expectación $\langle p \rangle$ del momento dipolar del átomo esta dado en términos del formalismo de matriz de densidad como:

$$\langle p \rangle = \text{traza} \begin{pmatrix} \rho_{bb} & \rho_{ba} \\ \rho_{ab} & \rho_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} = \mu(\rho_{ba} + \rho_{ab}) \quad (2.92)$$

y por tanto la polarización macroscópica es

$$P = N \langle p \rangle = \frac{N\mu^2 E_0}{\hbar} \left\{ \frac{\gamma_2 \sin(\omega t) - \Delta \cos(\omega t)}{\gamma_2^2 + \Delta^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \Omega^2} \right\} \quad (2.93)$$

El campo incidente oscila como $\cos(\omega t)$, la polarización tiene los dos términos usuales en el numerador, el primero oscilando 90° fuera de fase con respecto al campo incidente, el cual representa absorción, y el segundo término (que se encuentra en fase) es puramente dispersivo.

Usando la identidad $P = \Re \{ (\alpha + i\beta) e^{i\omega t} \} = \alpha \cos \omega t + i\beta \sin \omega t$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$P = \Re \left\{ \frac{N\mu^2 E_0 (i - \Delta/\gamma_2) e^{-i\omega t}}{\hbar \gamma_2 \left(1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_2^2} + \frac{\Omega^2}{\gamma_1 \gamma_2} \right)} \right\} \quad (2.94)$$

Definiendo la susceptibilidad dependiente del campo por la ecuación

$$P = \Re \{ \epsilon_0 \chi(E) E_0 e^{-i\omega t} \} \quad (2.95)$$

y comparando con (2.95) encontramos la susceptibilidad eléctrica dependiente del campo

$$\chi(E) = \frac{N\mu^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{\left(i - \frac{\Delta}{\gamma_2} \right)}{1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_2^2} + \frac{\Omega^2}{\gamma_1 \gamma_2}} \quad (2.96)$$

La parte real y la parte imaginaria de la susceptibilidad se puede separar explícitamente de manera similar a la forma lineal

$$\chi(E) = \chi'(E) + i\chi''(E) \quad (2.97)$$

En el caso de un solo haz de bombeo la parte real $\chi'(E)$ y la parte imaginaria $\chi''(E)$ representan (como en el caso lineal) absorción y dispersión respectivamente, debemos notar que en el denominador se encuentra el término $\Omega^2 / \gamma_1 \gamma_2$ que aumenta el ancho de banda de la transición.

En el límite de pequeñas intensidades de bombeo ($\Omega^2 \ll \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Delta^2$) se recupera la expresión para

la susceptibilidad lineal

$$\chi(E) = \frac{N\mu^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{\left(i - \frac{\Delta}{\gamma_2}\right)}{1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_2^2}} \quad (2.98)$$

En el caso de que exista más de un campo de bombeo la energía entre estos campos puede ser intercambiada a través de sus componentes reales e imaginarias y ya no es posible separar la susceptibilidad en parte absorbiva y parte dispersiva.

2.3.2 Mecanismos de ensanchamiento para un sistema de dos niveles.

Como se analizó en la sección anterior, toda transición en un sistema atómico tiene un ancho de banda natural, además de esto, estas transiciones pueden bajo ciertos mecanismos mostrar ensanchamientos mayores, en lo que sigue se analizarán algunos de estos mecanismos, como son el ensanchamiento producido por colisiones intratómicas así como por su interacción con el campo electromagnético que perturba el sistema atómico.

2.3.2.1 Ensanchamiento por colisiones atómicas.

El problema de incluir las colisiones en el caso más general es sumamente complicado, con el fin de hacer el problema más tratable se harán algunas aproximaciones, en la primera de ellas supondremos que las colisiones son elásticas es decir la transferencia de energía es despreciable con respecto a la energía $\hbar(\omega_b - \omega_a)$ radiada por los átomos. Estas colisiones elásticas pueden ser de dos tipos, el primero de ellos lleva solamente a *disrupciones* de fase la cual no altera la población en los niveles del sistema o bien colisiones que inducen transiciones que influyen tanto en la coherencia (*disrupciones de fase*) como en la población de uno o los dos niveles.

Consideremos primero colisiones que provocan *disrupciones* de fase, la ecuación de movimiento para los elementos diagonales de la matriz de densidad ρ_{bb} y ρ_{aa} las ecuaciones (2.75) y (2.76) permanecen sin cambio, debido a que este tipo de colisiones no altera la población en los niveles del sistema, por tanto debemos centrar nuestra atención en los elementos no diagonales de la matriz de densidad.

Consideremos los efectos de una colisión sobre un solo átomo; tomemos el producto de las amplitudes de la función de onda $C_b^{(s)}(t)C_a^{(s)*}(t)$ del átomo etiquetado como (s) a la frecuencia ω del campo en ausencia de colisiones. Supongamos que tal colisión modifica la fase del producto anterior por una cantidad igual a $\delta\omega(t)$, entonces tenemos

$$C_b^{(s)}(t)C_a^{(s)*}(t) = C_b^{(s)}C_a^{(s)*} e^{-i(\omega - \delta\omega(s,t))t} \quad (2.99)$$

donde (s) indica la s-ésima partícula y $C_b^{(s)}C_a^{(s)*}$ es una amplitud que varía lentamente con el tiempo. Para encontrar los elementos de la matriz de densidad ρ_{ba} es necesario tomar el promedio de la ecuación (2.99)

$$\rho_{n_1} = \langle C_b^{(-)} C_s^{(+)*} e^{-i(\omega + \delta\omega(s,t))t} \rangle \quad (2.100)$$

como la radiación incidente tiene frecuencia constante ω , el factor $e^{-i\omega t}$ es el mismo para todos los átomos de ensemble y permanece igual al calcular el promedio. Expandiendo el término $e^{-i\delta\omega(s,t)t}$ en series de potencias

$$\langle e^{-i\delta\omega(s,t)t} \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\delta\omega(s,t)t)^n}{n!} \right\rangle \quad (2.101)$$

el promedio para el m-ésimo término es

$$\left\langle \frac{(-i\delta\omega(s,t)t)^m}{m!} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \frac{(-i\delta\omega(s,t)t)^m}{m!} \quad (2.102)$$

donde N es el número de partículas en el ensemble. El corrimiento de fase $\delta\omega$ que la s-ésima partícula sufre debido a la no esta correlacionada con los corrimientos de fase de otras partículas con el resto del ensemble; $\delta\omega$ es una función estocástica de (s) y puede ser tanto positiva como negativa. El promedio sobre el ensemble de los corrimientos de fase individuales por unidad de tiempo es entonces cero:

$$\langle \delta\omega(s,t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \delta\omega(s,t) = 0 \quad (2.103)$$

y la función de correlación por unidad de tiempo esta dada por

$$\langle \delta\omega(s,t) \delta\omega(s',t) \rangle = 2\gamma_c t \delta_{ss'} \quad (2.104)$$

donde $\delta_{ss'}$ es la función delta de Kronecker y γ_c es una variable definida positiva cuyo valor en términos de variables conocidas daremos más adelante. Un sistema que obedece las ecuaciones (2.103) y (2.104) tiene una función de distribución normal (debido al teorema del límite central [Feller]) y además es un proceso Markoviano. Las correlaciones a mayor orden en un proceso tipo Markov se pueden obtener de la suma de todos los productos distinguibles como el dado por (2.104) La correlación a m-ésimo orden (2.102) es cero cuando m es impar debido a que el producto puede separarse en $\frac{1}{2}(m-1)$ pares multiplicados por $\langle \delta\omega \rangle$ lo cual es cero. Para m par podemos escribir $m = 2m'$ y entonces (2.102) se transforma en

$$2m' - \text{ésima correlación} = \left\langle \frac{(-1)^{m'} [\delta\omega(s,t)t]^{2m'}}{(2m')!} \right\rangle \quad (2.105)$$

el número de pares distinguibles de $2m'$ elementos es $\frac{(2m')!}{2^{m'} m'!}$, y la $2m'$ -ésima correlación esta dada por

$$2m' - \text{ésima correlación} = (-1)^{m'} \frac{\langle \delta\omega(s, t)\delta(s, t) \rangle^{m'} (2m')!}{(2m')! 2^{m'} m'!} \quad (2.106)$$

Sustituyendo (2.104) y (2.101) tenemos

$$\langle e^{-i\delta\omega(s, t)t} \rangle = \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^{m'} \frac{(\gamma_c t)^{m'}}{m'!} = e^{-\gamma_c t} \quad (2.107)$$

Este último resultado es el promedio de los efectos de las colisiones en el ensemble. La equivalencia entre promedios en el tiempo y promedios de realizados sobre ensembles es una propiedad de los sistemas ergódicos, portanto en el tratamiento anterior encontramos con nuestro sistema es ergódico.

Los elementos no diagonales ρ_{ba} de la matriz de densidad se obtienen de (2.100) y (2.107) obteniendose

$$\rho_{ba} = \sigma_{ba} e^{-(i\omega + \gamma_c)t} \quad (2.108)$$

La derivada temporal de ρ_{ba} en aproximación de envolvente suave es

$$\dot{\rho}_{ba} = -(i\omega + \gamma_c)\rho_{ba} \quad (2.109)$$

sustituyendo en la ecuación de la matriz de densidad (2.73) se obtiene una ecuación idéntica a (2.80)

$$\rho_{ba}(\gamma_2 - i\Delta) = \frac{i}{\hbar} V_{ba}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (2.110)$$

pero en este caso γ_2 ahora es la suma de la razón de relajación radiativa no diagonal y la razón de relajación debida a colisiones

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_b}{2} + \gamma_c \quad (2.111)$$

todos los resultados anteriores son válidos siempre que hagamos la identificación anterior para la razón de decaimiento no diagonal. Las colisiones atómicas tienen una probabilidad muy alta de generar corrimientos de fase positivos más que negativos. Si este es el caso al promedio sobre corrimientos de fase dado por la ecuación (2.103) es diferente de cero y por tanto se obtiene un corrimiento de frecuencia así como un amortiguamiento como veremos más adelante.

En los siguientes párrafos se presentarán los principales resultados del ensanchamiento producido por colisiones entre átomos de la misma especie y las producidas por colisiones con el buffer. Las suposiciones que se hacen para obtener los resultados que se presentarán a continuación son:

- i) Supondremos que la trayectoria de la partícula perturbadora es rectilínea.

ii) Supondremos que solo existen colisiones binarias, es decir consideraremos solamente choques entre dos partículas, interacciones entre tres o más partículas se despreciaran.

iii) Las colisiones son adiabáticas, es decir no causan transiciones entre distintos estados energéticos del átomo (colisión elástica)

iv) La duración de la colisión es mucho menor que el tiempo transcurrido entre impactos sucesivos. En tal caso podemos considerar que cuando un átomo sufre una colisión el tren de ondas emitido por el átomo a la frecuencia ω sufre un repentino cambio de fase $\Delta\phi$

Para colisiones de la misma especie se tiene que la razón de relajación (ancho medio a mitad de altura máxima - Half Width at Half Maximun [HWHM] -) esta dada por[Carrington et al(1973) y Corney(1977)]:

$$\gamma_r = \frac{1.54\pi}{8\epsilon_0\hbar} \mu^2 N \quad (2.112)$$

donde μ como se dijo antes, es el momento dipolar de la especie considerada.

En las colisiones con el gas buffer se supone que los átomos de calcio poseen momento dipolar y los átomos que pertuban a nuestro sistema no tiene momento dipolar (gases nobles). Usando el formalismo que se presenta en Corney(1977) se tiene la expresión para el ensanchamiento:

$$\gamma_E = N_p \pi v^{3/5} \left\{ \frac{3\alpha\mu^2}{32\pi\epsilon_0^2} \right\}^{2/5} \quad (2.113)$$

N_p es la densidad de átomos perturbadores (argón), v es la velocidad promedio de estos átomos y α es la polarizabilidad del argón. Esta razón de relajación ha sido medida por Smith(1972), el encontró un valor de

$$\gamma_E = 3.49 \pm 0.38 \times 10^{-15} \cdot N_p \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (2.114)$$

el cálculo bajo el cual se obtuvo la expresión (2.113) esta hecho bajo la llamada aproximación de impacto, esto significa que la desintonia del láser con respecto a la transición atómica es mucho más pequeña que la frecuencia angular del inverso de la duración de una colisión

$$|(\omega - \omega_0)| \ll \omega_{colisión} \quad (2.115)$$

para desintonias del láser mayores que $\omega_{colisión}$, la razón de relajación γ_E es función de la desintonia del láser(Corney & McGingley[1981]).

Otro mecanismo de ensanchamiento es el producido por efecto Doppler, el i-ésimo átomo en el vapor se mueve con una velocidad v_i , al incidir un haz con frecuencia ω el átomos "ve" una frecuencia dada por

$$\omega' = \frac{\omega}{1 \pm v_i/c} \quad (2.116)$$

en el gas los átomos tienen una distribución de velocidades que obedece la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzman, al encontrar el ensachamiento producido por este efecto es

$$\Delta\omega_0 = \sqrt{\ln 2} \frac{\omega_0}{c} \left(\frac{2k_B T}{M} \right)^{1/2} \quad (2.117)$$

en esta expresión ω_0 es la frecuencia de la transición libre de efecto Doppler, k_B es le constante de Boltzman, M es la masa del átomo y T es la temperatura del vapor. Más adelante veremos que en las condiciones experimentales en las se efectuó este trabajo, este mecanismo no es relevante.

2.3.2.2 Ensanchamiento debido al ancho de banda finito de láser de bombeo.

En todo el tratamiento que se ha hecho anteriormente se han considerado campos electromagnéticos monocromáticos, sin embargo, la influencia del ancho de banda finito del láser debe ser tomado en cuenta con el fin de describir adecuadamente la interacción del láser con el conjunto de átomos de dos niveles.

Una transición atómica puede cambiar debido al ancho de banda del láser siempre que la potencia de este sea suficiente para cambiar significativamente la población de los distintos niveles de energía.

En este límite se tiene que las razones de relajamiento diagonal γ_1 y no diagonal γ_2 cambian a [Wodkiewickz(1979) y Agarwal(1978)]:

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_a + \gamma_L$$

y

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma + 2\gamma_L$$

donde γ_L es el ancho de banda (*Half Width Half Maximun*) del láser de bombeo y γ es $\gamma_b/2 + \gamma_r + \gamma_E$, es decir es el ancho de banda de la transición mas los términos que representan ensanchamiento por colisiones.

Tenemos entonces:

$$\gamma_1 = \gamma_b + \gamma_L \quad (2.118)$$

y

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_b}{2} + \gamma_r + 2\gamma_L \quad (2.119)$$

y por tanto, para incluir los diversos mecanismos de ensanchamiento en nuestra expresión para la susceptibilidad no lineal de un sistema de dos niveles (ecuación (2.96)) debemos usar para las razones de relajamiento las ecuaciones (2.118) y (2.119).

2.3.3 Desdoblamiento de niveles por efecto AC Stark.

Bajo intensos campos electromagnéticos un sistema de dos niveles responde desdoblando sus niveles originales de energía. Al considerar la ecuación de Schrodinger dependiente del tiempo con la perturbación de un campo electromagnético el sistema responde separando sus niveles originales [Cohen-Tannoudji y Reynaud(1977)] (figura 2.2), donde la separación entre los niveles creados esta dada por Ω' que es la llamada frecuencia de Rabi generalizada y esta dada por:

$$\Omega' = (\Delta^2 + \Omega^2)^{1/2} \quad (2.120)$$

donde $\Delta = \omega - \omega_0$ es la desintonía y $\Omega = \frac{\mu E_0}{\hbar}$ es llamada la frecuencia de Rabi.

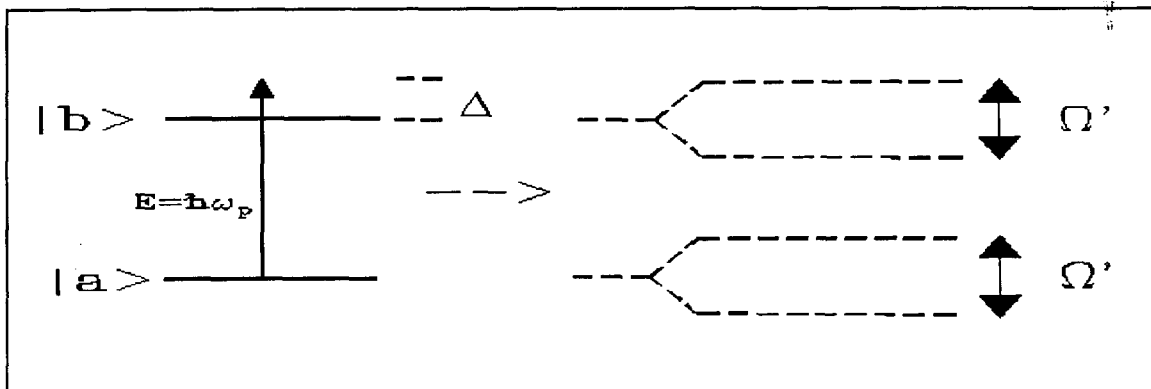


Figura 2.2 Desdoblamiento en un sistema de dos niveles al interactuar con un intenso campo monocromático.

En la literatura de habla inglesa se acostumbra llamar a estos estados *dressed states* que traduciremos como estados vestidos o estados arropados.

El mecanismo aquí citado puede encontrarse expuesto de manera sencilla y amplia en Boyd(1991).

2.4 Autoenfocamiento y autodesenfocamiento en un sistema de dos niveles.

En la sección 2.2 se describió desde el punto de vista de la ecuación de onda no lineal el proceso que lleva a autoenfocamiento de un haz con perfil de intensidad variable. El autoenfocamiento (o autodesenfocamiento) se debe a gradientes en la intensidad del haz de bombeo. Al excitar con un haz láser un sistema atómico debemos recordar que un haz láser tiene un perfil de intensidades no uniforme y si el modo de radiación de la cavidad láser es 0-0 el perfil de intensidades será de hecho un perfil gaussiano.

Recordando la expresión para la susceptibilidad (2.96) en un sistema de dos niveles tenemos:

$$\chi(E) = \frac{N\mu^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{\left(i - \frac{\Delta}{\gamma_2}\right)}{1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_2^2} + \frac{\Omega^2}{\gamma_1 \gamma_2}} \quad (2.96)$$

centrando la atención solo en la parte dispersiva de esta expresión:

$$\chi(E) = \frac{N\mu^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{\left(-\frac{\Delta}{\gamma_2}\right)}{1 + \frac{\Delta^2}{\gamma_2^2} + \frac{\Omega^2}{\gamma_1 \gamma_2}} \quad (2.121)$$

el denominador en la expresión anterior contiene la frecuencia de Rabi elevada al cuadrado, es decir es proporcional a la intensidad; además el valor de Δ puede ser negativo o positivo dependiendo del valor de ω_0 , entonces si el láser de bombeo está sintonizado de uno u otro lado de la transición el signo de la parte dispersiva de la susceptibilidad no lineal será positivo o negativo, como ya se dijo el valor de esta susceptibilidad no lineal es también proporcional a la intensidad del haz incidente.

De hecho si un haz con un perfil de intensidad variable sintonizado del lado azul de una transición atómica incide sobre un sistema de dos niveles este haz sufrirá autoenfocamiento de manera análoga si el láser está sintonizado del lado rojo de la transición este sufrirá autoendesenfocamiento.

2.5 Efecto Cherenkov producido por haces de luz.

2.5.1 Efecto Tamm-Cherenkov.

Cuando una partícula cargada viaja a través de un medio material con una velocidad que excede la velocidad de la luz en tal medio se produce radiación de Cherenkov. Esta radiación se debe a que la partícula que viaja a través del medio cambia la polarización del medio en el cual se traslada. Esta radiación es emitida con un ángulo con respecto a la dirección de propagación de la partícula dado por

$$\alpha = \text{Cos}\left(\frac{c}{n}\right) \quad (2.122)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción del medio material a la longitud de onda en que es emitida la radiación.

2.5.2 Una descripción cuántica del efecto Cherenkov.

El propósito de esta sección es desarrollar un tratamiento cuántico del efecto Cherenkov y comparar el resultado con el obtenido por la electrodinámica clásica, como veremos más adelante, en el caso cuántico hay un término adicional en la expresión para el ángulo de la radiación emitida, sin embargo a frecuencias ópticas este término adicional es despreciable, el formalismo desarrollado

aquí se encuentra en D. Marcuse(1987).

Necesitamos en primer lugar un Hamiltoniano relativista para una partícula cargada, considerando entonces una partícula cuya masa en reposo es m_0 tenemos:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2.123)$$

y el momento lineal relativista:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \vec{v} \quad (2.124)$$

elevando al cuadrado la ecuación (2.123) y sumando $m_0^2 c^2 (v^2 - v^2) = 0$

tenemos:

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4 [1 - (v^2/c^2)] + m_0^2 c^2 v^2}{1 - (v^2/c^2)} \quad (2.125)$$

y usando (2.124):

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.126)$$

y ahora, como es usual, tomando $\vec{p} = -i\hbar \nabla$ y $E = i\hbar(\partial/\partial t)$, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{m_0 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (2.127)$$

Se debe hacer incapie en el hecho de que la ecuación de Klein-Gordon no incluye el espín de la partícula, sin embargo en este caso no es relevante y lo podemos despreciar.

La ecuación relativista de la energía es entonces:

$$(c^2 p^2 + m_0^2 c^4) |\Psi\rangle = E^2 |\Psi\rangle \quad (2.128)$$

y si el electrón se encuentra en un campo electromagnético transversal la última ecuación se debe modificar a:

$$[c^2 (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^4] |\Psi\rangle = E^2 |\Psi\rangle \quad (2.129)$$

El operador que aparece en la última ecuación tiene como eigenvalores al cuadrado de la energía, para construir un Hamiltoniano que contenga a eigenvalores de la energía hagamos:

$$H_0^{(2)} = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.130)$$

y

$$H_{eff}^{(2)} = c^2 (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.131)$$

Definiendo el Hamiltoniano del electrón en ausencia del campo electromagnético como:

$$H_0^{(1)} = (H_0^{(2)})^{1/2} \quad (2.132)$$

de manera similar se obtiene el Hamiltoniano en presencia del campo electromagnético:

$$H_{eff}^{(1)} = H_{eff}^{(2)1/2} \approx \{H_0^{(2)} - 2ec^2 \vec{p} \cdot \vec{A}\}^{1/2} \quad (2.133)$$

El término proporcional a \vec{A}^2 ha sido despreciado debido a que se usará teoría de perturbaciones primer orden. Definiendo el Hamiltoniano de interacción como:

$$\{H_0^{(2)} - 2ec^2 \vec{p} \cdot \vec{A}\}^{1/2} = H_0^{(1)} + H_{int} \quad (2.134)$$

Multiplicando cada lado de la ecuación consigo mismo y despreciando $H_{int}^{(2)}$

$$H_0^{(2)} - 2ec^2 \vec{p} \cdot \vec{A} = H_0^{(1)} H_0^{(1)} + H_0^{(1)} H_{int} + H_{int} H_0^{(2)}$$

Usando ahora la ecuación (2.132) obtenemos una ecuación implícita que define a H_{int} ,

$$H_0^{(1)} H_{int} + H_{int} H_0^{(1)} H = -2ec^2 \vec{p} \cdot \vec{A} \quad (3.2.13)$$

Es imposible obtener una expresión explícita para el operador H_{int} de la ecuación anterior.

Sin embargo, no necesitamos tal expresión, solo necesitamos los elementos de matriz H_{int} entre el estado final $|\Phi_f\rangle$ y el estado inicial $|\Phi_i\rangle$, estos estados son eigenestados del operador de electrón libre $H_0^{(1)}$. Definiendo la energía inicial E_i y la energía final del electrón E_f obtenemos de la ecuación (2.134)

$$\langle \Phi_f | \{H_0^{(1)} H_{int} + H_{int} H_0^{(1)}\} | \Phi_i \rangle = -2ec^2 \langle \Phi_f | \vec{p} \cdot \vec{A} | \Phi_i \rangle$$

en términos de la ecuación de eigenvalores para $|\Phi_i\rangle$ and $|\Phi_f\rangle$, tenemos:

$$H_0^{(1)} |\Phi_i\rangle = E_i |\Phi_i\rangle$$

$$\text{and } H_0^{(1)} |\Phi_f\rangle = E_f |\Phi_f\rangle$$

y obtenemos entonces los elementos de matriz para el Hamiltoniano de interacción:

$$\langle \Phi_f | H_{int} | \Phi_i \rangle = \frac{-2ec^2}{E_i + E_f} \langle \Phi_f | \vec{p} \cdot \vec{A} | \Phi_i \rangle \quad (2.136)$$

la última ecuación define entonces los elementos de matriz del Hamiltoniano de interacción entre un electrón y el campo electromagnético.

Para evaluar estas expresiones tenemos (en la representación de Schrodinger):

$$-c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi + m_0^2 c^4 \Psi = E^2 \Psi \quad (2.137)$$

y sean Ψ ondas planas:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.138)$$

Substituyendo en la ecuación (2.136) se tiene:

$$E^2 = c^2 \hbar^2 k^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.139)$$

y la ecuación de eigenvalores para $\vec{p}, \vec{p} | \Psi \rangle = \vec{p} | \Psi \rangle$, escrita en la representación de Schrodinger:

$$-i \hbar \nabla \Psi = \vec{p} \Psi \quad (2.140)$$

muestra que Ψ de la ecuación (3.2.16) es eigenfunción del operador de momento con eigenvalores:

$$\hbar \vec{k} = \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2.141)$$

ahora, usando para el vector potencial \vec{A} [Marcuse(1987)] la forma:

$$\vec{A} = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_n \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon\omega_n V}} \mathbf{e}_{n\sigma} \left(\bar{\alpha}_{n\sigma}^* e^{-i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} + \bar{\alpha}_{n\sigma} e^{i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.142)$$

donde σ es el estado de polarización, $\bar{\alpha}^*$ y $\bar{\alpha}$ son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, ω_n es la frecuencia del modo n creado, al calcular los elementos de matriz supondremos que el estado inicial tiene un vector de propagación \vec{k}_i y el estado final tiene un vector \vec{k}_f . Los estados $|\Phi_i\rangle$ y $|\Phi_f\rangle$ son productos de los estados inicial y final del campo y del electrón. La energía total del sistema es:

$$\text{al principio } \mathcal{E}_i = E_i \quad (2.143)$$

$$\text{y al final } \mathcal{E}_f = E_f + \hbar \omega_n \quad (2.144)$$

el índice n en la última ecuación indica el modo en el cual el fotón es emitido. La probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada por:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Phi_f | H_{\text{int}} | \Phi_i \rangle|^2 \rho_f \quad (2.143)$$

usando la representación para el potencial \vec{A} (2.142) obtenemos:

$$\langle \Phi_f | H_{\text{int}} | \Phi_i \rangle = -\frac{2ec^2}{\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_f} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon\omega_n V}} \langle \Phi_f | \left\{ \mathbf{e}_{n\sigma} \cdot \vec{p} \left(\bar{\alpha}_{n\sigma}^* e^{-i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} + \bar{\alpha}_{n\sigma} e^{i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} \right) \right\} | \Phi_i \rangle \quad (2.146)$$

el único término que sobrevive es aquel con índice n y el modo σ en el cual se asume que ha sido emitido el electrón. Los vectores de estado $|\Phi_i\rangle$ y $|\Phi_f\rangle$ son (como se dijo antes) productos de un vector de estado del fotón y de un vector de estado del electrón, se asume además que inicialmente no hay fotones, entonces escribimos:

$$|\Phi_i\rangle = |0\rangle |\Psi_i\rangle$$

y para el estado final:

$$|\Phi_f\rangle = |1\rangle |\Psi_f\rangle$$

i.e, este estado contiene un fotón. Aquí los vectores $|\Psi_i\rangle$ y $|\Psi_f\rangle$ son los estados inicial y final del electrón relativista en la representación de Schrodinger. Los elementos de matriz en el lado derecho de la ecuación (3.2.24), cuando se ha emitido un fotón, son:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_f | \left\{ \mathbf{e}_{n\sigma} \cdot \vec{p} \left(a_{n\sigma}^* e^{-i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} + a_{n\sigma} e^{i\vec{\beta}_n \cdot \vec{r}} \right) \right\} | \Phi_i \rangle &= i\hbar \frac{1}{V} \int_V e^{-i(\vec{k}_f + \vec{\beta}) \cdot \vec{r}} \mathbf{e}_{n\sigma} \cdot \nabla e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} dV = \\ &= \hbar (\mathbf{e}_{n\sigma} \cdot \vec{k}_i) \frac{1}{V} \int_V e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f - \vec{\beta}) \cdot \vec{r}} dV \end{aligned} \quad (2.147)$$

la integral en la última ecuación representa la conservación del momento y podemos expresar:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_{ph} \quad (2.148)$$

i es el momento inicial del electrón, f el momento final del electrón y ph el momento del fotón. Si resolvemos y encontramos una expresión para el ángulo θ entre el momento del electrón después de la emisión del fotón y la dirección del tal fotón ($\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$) tenemos:

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} v} \left\{ 1 + \frac{(\epsilon_r - 1)\hbar\omega}{2m_0 c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} v} + \frac{(\epsilon_r - 1)\hbar\beta}{2\epsilon_r p_i} \quad (2.149)$$

esta ecuación concuerda con la electrodinámica clásica si $\hbar \rightarrow 0$ y el último término del lado derecho es un efecto puramente cuántico, tomando como ejemplo, para $\lambda = 422.6$ nm, tenemos:

$$\frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} \approx 10^{-4}$$

y entonces, este término es despreciable a esta longitud de onda.

2.5.3 Efecto Cherenkov producido por haces de luz.

Usualmente se piensa que el efecto Cherenkov es producido solamente por partículas relativistas viajando en un medio con una velocidad que supera a la velocidad de la luz en tal medio. Sin embargo se descubrió que un haz de luz bajo ciertas consideraciones puede producir radiación Cherenkov [Askar'yan 1962], esbozaremos aquí las razones para esto.

Supongamos un gas de electrones gas bajo la influencia de un campo externo A.C, la polarización inducida tiene la forma [Marion]:

$$\mathbf{p} = \frac{e^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \quad (2.150)$$

donde Γ es un factor que toma en cuenta el amortiguamiento electrónico, ω_0 es la frecuencia angular del campo A.C y ω es la frecuencia de resonancia del sistema:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} N f_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \vec{E} \sum_{\alpha} \frac{N f_{\alpha} e^2 / m}{(\omega_{\alpha 0}^2 - \omega^2) - 2i\Gamma} \quad (2.151)$$

donde f_{α} es la fracción de electrones con momento \vec{p}_{α} desde el punto de vista clásico, o un operador desde el punto de vista cuántico. La fuerza que actúa sobre un dipolo es

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot \nabla \vec{E} \quad (2.152)$$

y entonces tenemos:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{N f_{\alpha} e^2}{2m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2} \nabla \langle \vec{E}^2 \rangle \quad (2.153)$$

donde la barra indica promedio, el punto importante es que en la expresión anterior tenemos dependencia en $\nabla \langle \vec{E}^2 \rangle$ i.e, sobre gradientes de intensidad, entonces cuando un pulso laser con un perfil de intensidades no uniforme viaja en un medio podemos generar una polarización no uniforme, y si suponemos, que la polarización viaja con la velocidad del campo incidente esta polarización puede jugar el papel de una partícula, y bajo ciertas circunstancias puede producir emisión Cherenkov.

Como se vio en las secciones anteriores, el ángulo en el cual es dispersada la radiación de Cherenkov esta dada (en el caso cuántico, más general) por la ecuación:

$$\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} v} \left\{ 1 + \frac{(\epsilon_r - 1) \hbar \omega}{2m_0 c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} v} + \frac{(\epsilon_r - 1) \hbar \beta}{2\epsilon_r p_i} \quad (2.154)$$

Ahora bien, en el caso de un haz propagandose en un medio la condición anterior cambia a [Askar'yan 1962]

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{V_f}{V_g} \right\}$$

donde V_f indica velocidad de fase y V_g velocidad de grupo de la onda. La velocidad v_{gr} de una onda esta dada por:

$$V_f = \frac{c/n}{1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)} \Big|_{\omega = \omega_L}$$

donde c representa la velocidad de la luz en el vacío n es el índice de refracción del sistema, ω_L es la frecuencia de la luz incidente. Por otra parte, la parte real de la susceptibilidad eléctrica para un sistema de dos niveles en el límite de estado estacionario y bajas intensidades esta dado por la parte real de la ecuación (2.98)

$$\Re\{\chi(E)\} = \frac{N p^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{-\frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma_2}}{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_2^2}} \quad (2.155)$$

y por tanto el índice de refracción queda:

$$n = (1 + \Re\{\chi(E)\})^{1/2} = 1 + \frac{N p^2}{E_0 \hbar \gamma_2} \frac{-\frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma_2}}{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_2^2}} \quad (2.156)$$

en la región de dispersión anómala, es decir, cuando $\omega \approx \omega_0$ la velocidad de grupo puede ser mayor que la velocidad de fase [Brillouin(1960)] y por tanto se tienen las condiciones para tener radiación de tipo Cherenkov.

CAPITULO 3.

INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE EMISION CONICA ANOMALA:-

3.1 Primeras investigaciones sobre emisión cónica anómala.

La primera observación de un anillo rodeando un haz láser sintonizado en el lado azul de una transición atómica fue realizada por Grischkowsky[1970] en vapor de potasio al estudiar autoenfocamiento en este sistema. En efecto, al estudiar la transición $2P_{3/2}$ (7665 Å) al excitar con la emisión Raman proveniente de n-fluoronitrobenzoceno (corrimiento Raman $1\ 353\ \text{cm}^{-1}$) o nitrobenzoceno (corrimiento Raman $1345\ \text{cm}^{-1}$) reporta que en el intervalo de temperaturas de 170 a 200°C el haz de bombeo al salir contiene un núcleo central y además esta rodeado por una estructura difusa en forma de anillo, reporta también que algunas veces aparece más de un núcleo (probablemente debido a filamentación del haz, proceso discutido el capítulo anterior).

En 1979 A.C. Tam[1979] reporta amplificación de bandas laterales en vapor de sodio, usando un láser CW. En su experimento el láser se sintonizó del lado azul de la línea D_2 del sodio (en un intervalo de 2-6 GHz). El laser usado contiene bandas laterales a ± 1 GHz de la frecuencia principal y con una intensidad 1000 veces menor. Tales bandas fueron amplificadas hasta 100 veces dependiendo de las condiciones de densidad de Na, potencia del láser y frecuencia del haz de bombeo.

A una intensidad láser de $\sim 500\ \text{W}/\text{cm}^2$, con desintonía de +1.6 a + 5.6 GHz y a una temperatura de $\sim 250^\circ\text{C}$ se encontraron estructuras anulares rodeando el haz de salida. El diámetro de tales anillos *no* es función de la frecuencia del haz incidente, en cambio, depende de la densidad del vapor, con los datos experimentales se ajusta una curva de la forma:

$$\phi = 23(N \times 10^{-13})^{0.40 \pm 0.05} \quad (3.1)$$

donde ϕ es el ángulo del cono y N es la densidad del vapor en átomos/ cm^3 . El espectro del halo es también insensitivo a la frecuencia del haz de bombeo. El autor especula que debido al hecho de que esta emisión anular no es función de la frecuencia del láser incidente, no es razonable un mecanismo de mezclado de ondas, tal vez sea adecuado un mecanismo tipo Raman, aunque los niveles de energía del potasio no son los adecuados para explicar las frecuencias generadas. Es importante hacer notar que en el resto de los trabajos experimentales sobre ECA la emisión en forma de anillo *siempre* es función de la frecuencia del haz de bombeo.

El primer estudio sistemático de ECA fue realizado por C.H. Skinner y P.D. Kleiber[1980], ellos usaron vapor de Bario en la transición $6s^2\ 1S - 6s6p\ 1P$ (5521 Å).

Al observar el espectro de la emisión se encuentra que esta situado en posición simétrica y del

lado opuesto (con respecto a la transición atómica) de la frecuencia del haz incidente. El ángulo del cono aumenta con la densidad del calcio, aumenta también al acercarse la frecuencia del haz de bombeo a la transición atómica, la eficiencia en la generación del cono es de $\sim 1\%$.

Se encuentra también que la polarización de la luz del cono es la misma que la polarización del haz incidente, por otra parte, al aumentar la desintonía del láser el ancho (FWHM) del espectro del cono también aumenta, además de que se encuentra una emisión a la misma longitud de onda del láser pero ensanchada varias veces. Al mismo tiempo se observa que el haz láser sufre autoenfocamiento lo cual lleva a que la densidad de energía en el filamento del láser de bombeo aumente significativamente.

Sobre el posible origen de esta emisión, se especula que podría ser algún tipo de mezclado paramétrico de ondas en el cual ω_L se combina con otras dos ondas ω_2 y ω_3 las cuales generan ω_c , sin embargo, experimentalmente no se encuentran estas frecuencias ni se hacen comentarios acerca de su posible origen.

3.2 Modelos que involucran modulación del índice de refracción.

En el capítulo anterior se mencionó que al propagarse un intenso haz en un medio no lineal este medio genera nuevas frecuencias debido al efecto A.C. Stark, este mecanismo se ha usado para intentar explicar el origen de la emisión cónica anómala [Boyd *et al.* (1981), y Harter *et al.* (1981)]. Al propagarse el haz de bombeo se generan nuevas ondas cuyas frecuencias son de $\omega_p - \Omega'$ y $\omega_p + \Omega'$ que se encuentran del lado rojo y del lado azul de la transición atómica respectivamente (figura 3.1). En las expresiones anteriores ω_p es la frecuencia del haz de bombeo y Ω' es la frecuencia de Rabi generalizada.

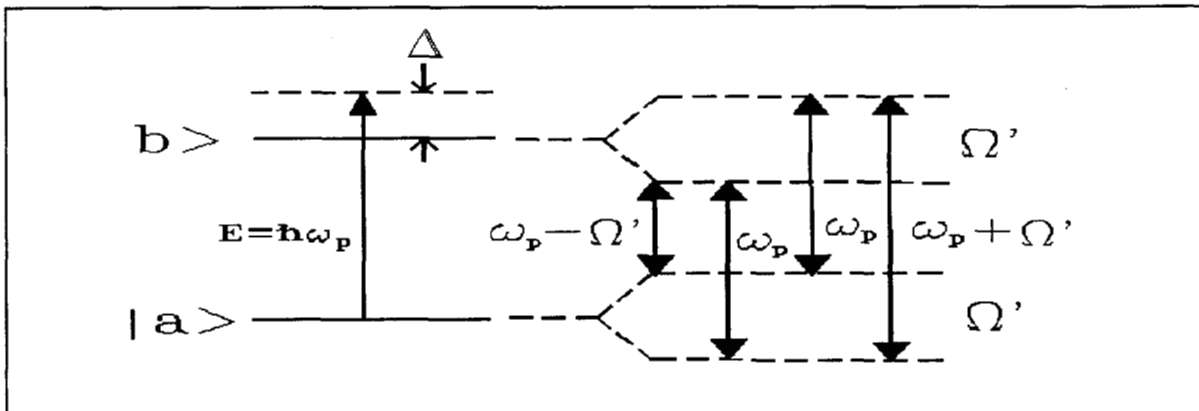


Fig. 3.1 Modelo propuesto por Harter *et al.* (1981) sobre el origen de la emisión cónica anómala. En la parte izquierda un sistema atómico de dos niveles es forzado por un campo electromagnético con frecuencia ω_p cercana a la resonancia del sistema, en la parte derecha como consecuencia de la interacción con el campo electromagnético y por efecto AC Stark, los niveles energéticos del sistema se desdoblan generando nuevas frecuencias, se tiene entonces un proceso de mezclado de estas ondas.

Por otra parte, el haz de bombeo por encontrarse muy cerca de la transición sufre autoenfocamiento, debido a esto, la potencia de este haz aumenta significativamente en la región en la cual se propaga y produce saturación. Al saturarse esta región, su índice de refracción es 1, mientras que en el resto del vapor el índice de refracción esta dado por la expresión (2.98), es decir, el índice de refracción para bajas intensidades.

Las bandas de Rabi generadas, por tener distinta frecuencia "sienten" distinto índice de refracción. La banda de Rabi con frecuencia mayor que la frecuencia de resonancia queda confinada en la dirección de propagación del haz de bombeo mientras que la banda de Rabi con menor frecuencia que la frecuencia de resonancia se difracta debido al gradiente de índice de refracción entre la región de propagación del bombeo y el resto del gas (figura 3.2). El ángulo del cono en este caso se calcula usando la ley de Snell, este calculo se desarrollara a continuación:

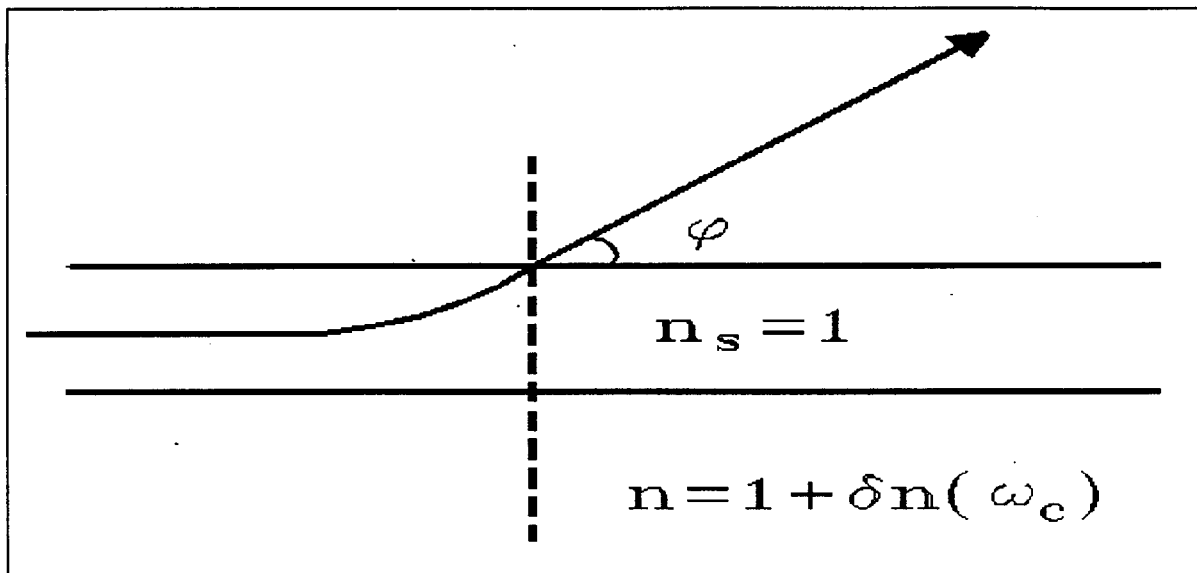


Figura 3.2 Refracción debido a diferentes índices de refracción. El haz de bombeo provoca una región saturada cuyo índice de refracción es 1, fuera de esta región el índice de refracción esta dado por la expresión (). Por otra parte es generada la frecuencia correspondiente al cono (del lado azul de la transición), este haz "ve" índice de refracción distinto al de bombeo; por consiguiente este haz se refracta.

Usando la ley de Snell para la figura 3.2, tenemos:

$$n_s \text{ Sen } \theta_i = n_o \text{ Sen } \theta_t \tag{3.2}$$

como suponemos que la región donde se propaga el haz esta saturada, i.e, $n_s = 1$, y escribiendo al índice de refracción fuera de la región saturada como $n_o = 1 - \delta n$, la ecuación 1 queda:

$$\text{Sen } \theta_i = (1 - \delta n) \text{Sen } \theta_t \quad (3.3)$$

o en términos del ángulo ϕ la ecuación anterior es:

$$\text{Sen } \theta_i = \text{Sen}(\pi/2 - \phi) = \text{Cos } \phi \quad (3.4)$$

y de manera análoga

$$\text{Sen } \theta_i = \text{Cos } \theta_0 \quad (3.5)$$

tenemos entonces

$$\text{Cos } \theta_0 = (1 - \delta n) \text{Cos } \phi \quad (3.6)$$

usando para el Seno y Coseno su desarrollo en serie, se tiene:

$$1 + \frac{\theta_0^2}{2} + \dots = (1 - \delta n) \left(1 + \frac{\phi^2}{2} + \dots \right) \quad (3.7)$$

y aproximando hasta términos cuadráticos

$$\frac{\theta_0^2}{2} = \frac{\phi^2}{2} (1 - \delta n) - \delta n \quad (3.8)$$

despejando ϕ^2 obtenemos

$$\phi^2 = \frac{\theta_0^2 + 2\delta n}{(1 - \delta n)} \quad (3.9)$$

finalmente se tiene:

$$\phi = \left[\frac{\theta_0^2 + 2\delta n}{1 - \delta n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

en aproximación paraxial ($\theta_0 \approx 0$) y suponiendo que $\delta n \ll 1$ la ecuación anterior es:

$$\phi = (2\delta n)^{1/2}$$

recordando que el índice de refracción en términos de la susceptibilidad eléctrica es:

$$n^2 = 1 + \chi_L$$

desarrollando en serie para χ_L :

$$n = (1 + \chi_L)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\chi_L - \frac{1}{8}\chi_L^2 + \dots \quad (3.11)$$

y a primer orden

$$n = 1 + \frac{1}{2}\chi_L$$

por otra parte, por ecuación (2.98) se tiene:

$$\delta n = \frac{1}{2} \chi_L \quad (3.12)$$

o bien

$$\delta n = \frac{1}{2} \left[\frac{N \mu^2}{\epsilon_0 \hbar \gamma_2} \frac{\frac{-(\omega - \omega_0)}{\gamma_2}}{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_2^2}} \right] \quad (3.13)$$

y por tanto

$$\phi = (2\delta n)^{1/2} = \left[\frac{N \mu^2}{\epsilon_0 \hbar \gamma_2} \frac{\frac{-(\omega - \omega_0)}{\gamma_2}}{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_2^2}} \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

donde podemos ver que:

$$\phi \propto \sqrt{N} \quad (3.15)$$

y

$$\phi \propto \left[\frac{-\Delta}{\gamma_2^2 + \Delta^2} \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

donde $\Delta = (\omega - \omega_0)$; por otra parte, si tenemos que $\gamma_2^2 \ll \Delta^2$ entonces la ecuación anterior nos queda:

$$\phi \propto \frac{1}{\Delta^{1/2}} \quad (3.17)$$

En los primeros trabajos donde se usó este formalismo, se dijo que este modelo explicaba adecuadamente los resultados experimentales (tanto los datos de Skinner & Kleiber[1980] como los datos generados por los propios autores[Boyd *et al.*(1981), y Harter *et al.*(1981)]), sin embargo, en un artículo posterior Skinner(1982) demuestra que no es así, mas aún Burdge & Lee(1982) reportan un estudio en vapor de sodio en donde se encuentra que las bandas de Rabi se observan *además* del espectro de ECA.

3.3 Modelos que involucran dispersión electrónica Raman estimulada.

Algunos autores han desarrollado modelos de la emisión cónica anómala en términos de efecto Raman entre distintos niveles de energía del sistema atómico[Shevy *et al.*(1986), Shevy y Rosenbluh(1987)] en analogía al efecto Raman en sólidos donde hay un acoplamiento entre la radiación incidente y los niveles vibracionales del sólido. Este trabajo se ha efectuado considerando como medio no lineal al sodio y usando el hecho de que este sistema tiene dos niveles energéticos muy próximos (líneas D). Se ha considerado incluso este sistema de tres niveles incluyendo también el efecto A.C Stark[Shevy & Rosenbluh(1988)].

No nos extenderemos más en este esquema ya que una característica primordial de los modelos que hacen uso de un formalismo tipo Raman es que necesariamente son sistemas de más de dos niveles, sin embargo, como ya se ha mencionado en varias ocasiones, la ECA se observó en Bario y en este trabajo reportan observaciones en vapor de calcio, estos dos sistemas se pueden considerar con solo dos niveles de energía.

3.4 Modelos que involucran efectos transitorios.

Se han desarrollado también modelos que hacen uso de efectos transitorios [LeBerre *et al.*(1981), Crenshaw y Cantrell(1988) y (1989)], sin embargo, este efecto se ha observado también con láseres continuos[Valley *et al.*(1990)] por lo que no se hará mayor énfasis en estos trabajos como posibles generadores de ECA.

3.5 Modelos que involucran efecto Cherenkov.

Como ya se ha mencionó en el capítulo 2, bajo ciertas circunstancias se puede obtener radiación de Cherenkov, de un haz con perfil de intensidad variable, se ha sugerido[Goulub *et al.* (1986), You *et al.* 1991] que un mecanismo de este tipo podría ser el responsable de generar ECA.

En efecto, la ECA se observa cuando el haz de bombeo se encuentra cerca y del lado azul de la resonancia del sistema, en los primeros trabajos sobre ECA, en el espectro de emisión cónica solo se observa una banda del lado rojo de la transición atómica. Esto hizo pensar en un mecanismo tipo Cherenkov producido por haces de luz como el generador de esta emisión ya que, un mecanismo de este tipo solo produce radiación de menor frecuencia que la frecuencia incidente. Por otra parte, las condiciones experimentales en que se observa la ECA son las adecuadas para producir efecto Cherenkov. Con este mecanismo como responsable de ECA se obtiene que la relación entre el ángulo del cono y la densidad del vapor es del tipo

$$\phi \propto N^{1/2}$$

como en efecto se observa en los datos experimentales, sin embargo, en otros trabajos[Chauchard and Meyer(1984)] se ha observado que también se generan haces del lado azul de la transición atómica. Estos haces se propagan en la misma dirección que el haz de bombeo y por esto no habían sido observados.

3.6 Modelos que involucran competencia de diversos efectos.

Boyd *et al.*(1987) y Shevy *et al.*(1988) sugieren que la ECA puede ser producida debido a la competencia de diversos efectos no lineales que.

Boyd *et al.* encuentran que bajo ciertas condiciones un proceso de mezclado de cuatro ondas puede suprimir la emisión espontánea del sistema. En su trabajo, mediante un proceso de dos fotones bombean el estado base del sodio 3s con un láser sintonizado a aproximadamente 1 Å del estado 3d, al bombear electrones a este estado estos decaen al estado 3p, emitiendo en esta transición la radiación en forma de anillo, del estado 3p decae nuevamente al estado 3s. Este mecanismo proporciona las cuatro

ondas necesarias para el proceso de mezclado de cuatro ondas, aqui nuevamente, es necesario un esquema de átomo de tres niveles, cuando la emisión cónica puede obtenerse en un sistema de solo dos niveles.

Por otra parte, Shevy *et al.* (1988) estudian un mecanismo donde compiten un esquema de dispersión de tres fotones y un proceso de mezclado de cuatro ondas. Se le llama dispersión de tres fotones al proceso en el cual un átomo que es bombeado con un intenso campo electromagnético desdobla sus niveles (efecto A.C. Stark) y absorbe dos fotones a frecuencia ω_p , mientras que emite un foton a la frecuencia $\omega_p + \Omega$, donde Ω es la frecuencia generalizada de Rabi.

Shevy *et al.* encuentran que cuando el proceso de mezclado de ondas suprime al proceso de dispersión de tres fotones, la banda de Rabi con frecuencia $\omega_p - \Omega$ es emitida en dirección diferente a la dirección de propagación del haz de bombeo formando un anillo. En el tratamiento que ellos presentan, no calculan este ángulo, por tanto no se pueden hacer comparaciones cualitativas con los datos experimentales accesibles.

3.7 Investigaciones recientes sobre ECA.

Valley *et al.* (1990) en un complejo trabajo teórico y experimental, modelan la emisión cónica anómala en un sistema de dos niveles donde compiten varios efectos no lineales al mismo tiempo. En este trabajo ellos consideran los siguientes mecanismos: efecto Raman, mezclado de cuatro ondas, efecto A.C. Stark, transferencia de energía entre los varios haces generados por efecto A.C Stark y propagación de los distintos haces generados en un medio con gradientes de índices de refracción. A pesar de la complejidad del modelo las soluciones numéricas que encuentran concuerdan con los datos experimentales solo de manera cualitativa y reportan diferencias de 30 a 40% entre sus valores numéricos y los datos experimentales.

En los trabajos más recientes publicados a la fecha sobre ECA, L. You *et al.* (1991), (1992a) y (1992b), desarrollan nuevamente la idea del efecto Cherenkov como responsable de este fenómeno. Ellos consideran un sistema de dos niveles cuyo nivel superior ha sido desdoblado por efecto A.C. Stark, las bandas de Rabi son amplificadas al propagarse a travez del medio y son ahora estas bandas las que sirven como fuente para el efecto Cherenkov y no el haz de bombeo como habia sido propuesto por Goulub *et al.* (1986). Este trabajo trata tanto al sistema atómico como a los campos generados a las frecuencias de Rabi con los métodos de segunda cuantización y solo al campo electromagnético de bombeo como un campo clásico. En este modelo, no se toman en cuenta los efectos que las colosiones producen en el gas y por tal motivo una comparación exhaustiva con los datos experiemetales que se tenian en esa fecha.

Es conveniente recordar aquí que en el trabajo de Burdge y Lee, se reporta que las bandas de Rabi y la emisión cónica tienen diferente frecuencia, lo cual si es correcto, anularía todos los modelos que usan este mecanismo como parte de la explicación de la generación de la Emisión Cónica Anómala.

A continuación se resume en la siguiente tabla algunas de las principales características de la emisión cónica anómala.

		Desintonía de láser Lado azul (Å)	Angulo de cono (mrad)	Densidad $10^{21}m^{-3}$	Potencia del Laser $MWcm^{-2}$	Longitud de onda de Transición. (Å)	Presión de Buffer. (torr)	Eficiencia de conversión
Grishkowsky [1970]	K	7		0.04 - 0.1	0.0015	7665.0		
Skinner/Kleiber [1982]	Ba	16 - 5	30 - 46	2 - 7	0.01 - 1	5535.0	0.1 - 0.8 Ar	1 %
Harter/Boyd [1982]	Na	4 - 0.5	38 - 68	0.1 - 10	30	5892.9	1.0 Ar	
Chauchard/Meyer [1984]	Na	3 - 0.25 (También lado rojo)			$10\mu\text{Joules}$	5892.9	1 - 30	
Plekhnainov [1985]	Na	7 - 0.7	7 - 10	0.4	0.3	5892.9		1 %
Shevy/Rosen [1987]	Na	1.5		1	0.2		10 He	
Krasinski (dos fotones) [1985]	Na		40 - 90	1 - 50	10^3	5892.9		
Brec et al. [1980]	Sr	1.5 - 0.5	28 - 70	9 - 50	0.1 - 1	4607.0	7.0 Kr	
Hernández, Fernández, Julio, Haro.	Ca Ca	2.5 - 0.8 0.8 - 0.15	25 - 55 10 - 30	2 0.31 - 1.15 $\pm 16\%$		4226.7	7.5 Ar	

CAPITULO 4.

DISPOSITIVO EXPERIMENTAL.**4.1 EL calcio atómico como medio no lineal**

El vapor de calcio es un sistema atractivo para ser usado como medio no lineal, la transición $1S_0-1P_1$ tiene una separación en energía de $4.458 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}e$ que corresponde a una longitud de onda en el vacío de 4226.7 \AA .

En este sistema podemos utilizar la aproximación de dos niveles ya que el estado base $4s^2 1S_0$ esta muy débilmente acoplado con el triplete $4s4p 3P_1$ (6572.7 \AA), por otra parte $\Delta\lambda$ máxima fue de $\approx 3 \text{ \AA}$ y el nivel mas próximo para excitar es $4s5p 1P_1$ que está 1505 \AA por arriba del estado $4s4p 1P_1$ (figura 4.1).

El momento angular del Ca I es cero, por tanto no muestra estructura hiperfina, por otra parte, el estado excitado es tres veces degenerado (con $m = 1, 0, -1$), esta degeneración se hace evidente al hacer experimentos de mezclado de ondas con distinta polarización cada una de ellas, si se utiliza solo un estado de polarización para todas ellas entonces solo se excita el estado con número cuántico $m=0$.

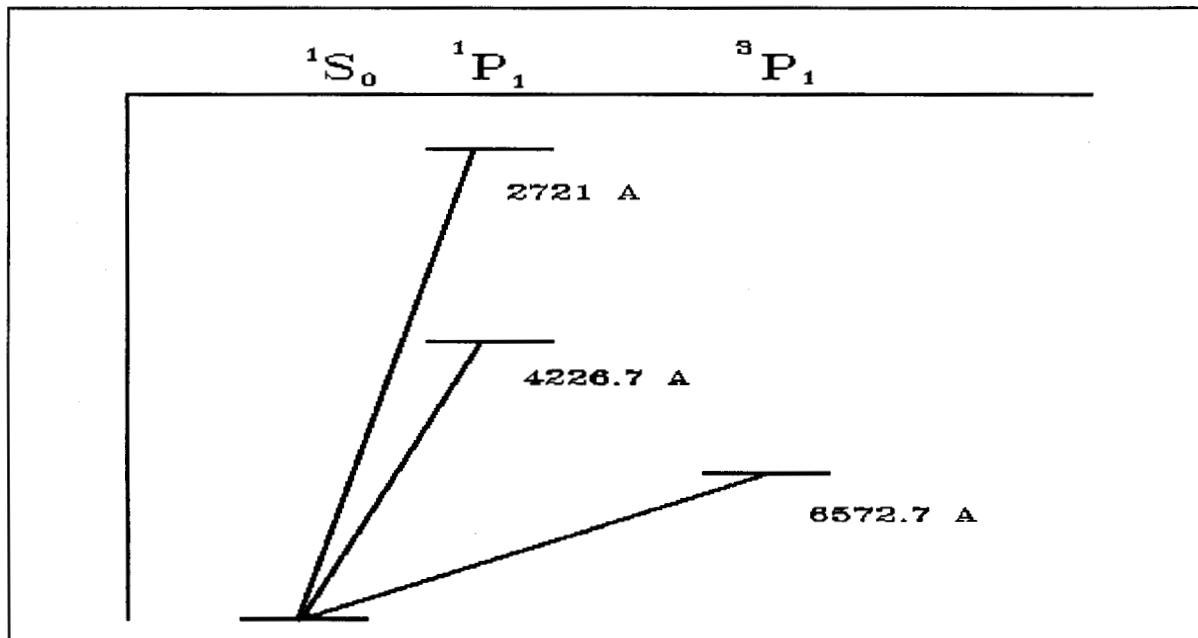


Figura 4.1. Diagrama parcial de los niveles energéticos del Ca I (Herzberg 1944).

La transición atómica del calcio se ve ensachada tanto por las colisiones con otros átomos de la misma especie así como con el gas buffer, la transición también se ve ensanchada por el láser de bombeo y por efecto Doppler, como ya se vio en el capítulo 2.

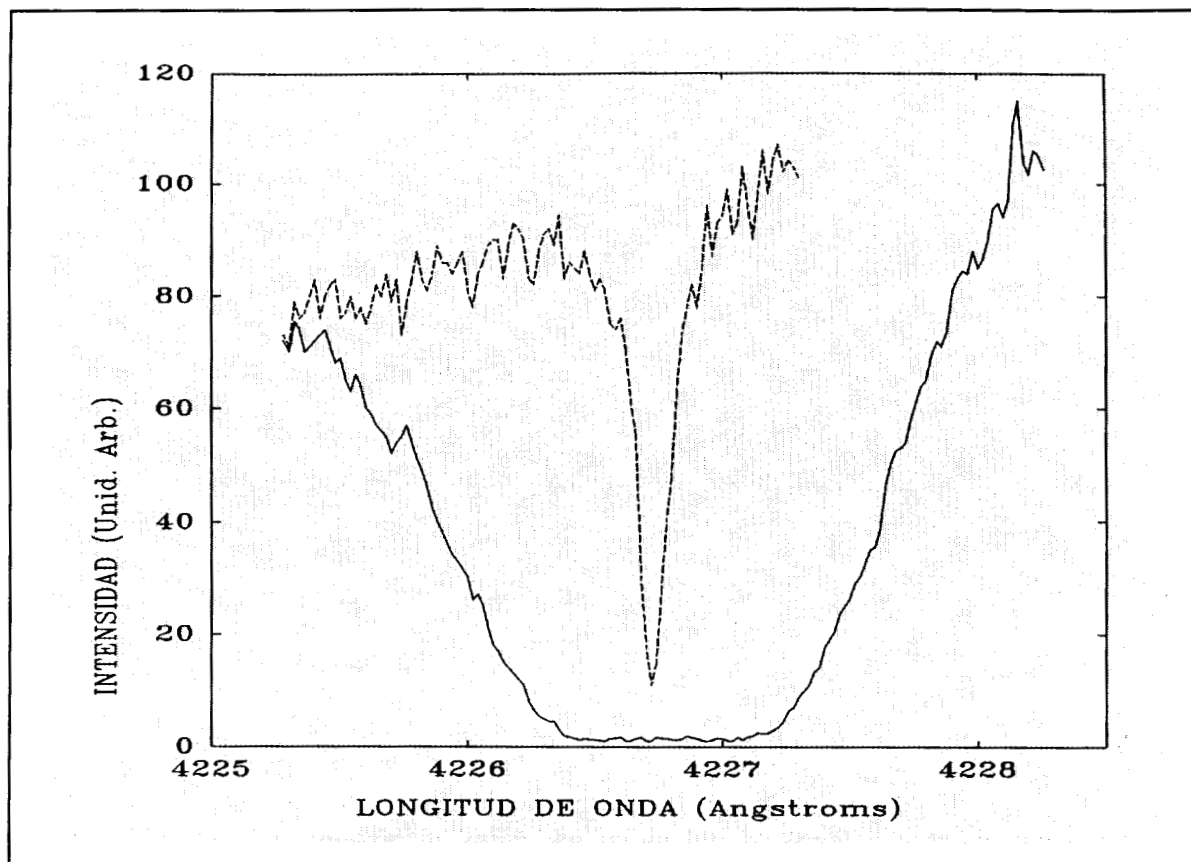


Figura 4.2. Ensanchamiento de la transición de calcio atómico. La línea continua corresponde a una temperatura de 450°C y la línea punteada corresponde a 700°C, ambos espectros obtenidos a una presión de Argón de 10 mbar.

En la figura 4.2 se puede observar el efecto colisional y Doppler sobre el ancho de banda de la transición, la línea punteada representa la absorción del calcio atómico a la fluorescencia del pigmento (Stilbine 420) cuando la temperatura del calcio era de 450° C y la línea continua es la absorción cuando la temperatura del calcio era de 700° C, ambos a una presión de gas buffer de 10 mbar.

4.2 Equipo experimental.

El equipo experimental usado normalmente en los estudios aquí presentados fue el horno de vapor para obtener calcio en forma gaseosa cuya temperatura máxima de trabajo es de aproximadamente 930° C, el láser de bombeo usado fue un láser de Nd:YAG triplicado en frecuencia y láseres de pigmento con cavidad tipo Litman-Metcalf fabricados en el laboratorio. Para los experimentos resueltos en frecuencia

se usó un espectrómetro tipo Czerny-Turner con una resolución de 0.1 \AA , para medir el ángulo del cono se colocó una pantalla frente al horno y el ángulo se midió por métodos geométricos. A continuación se detallan las características del equipo usado.

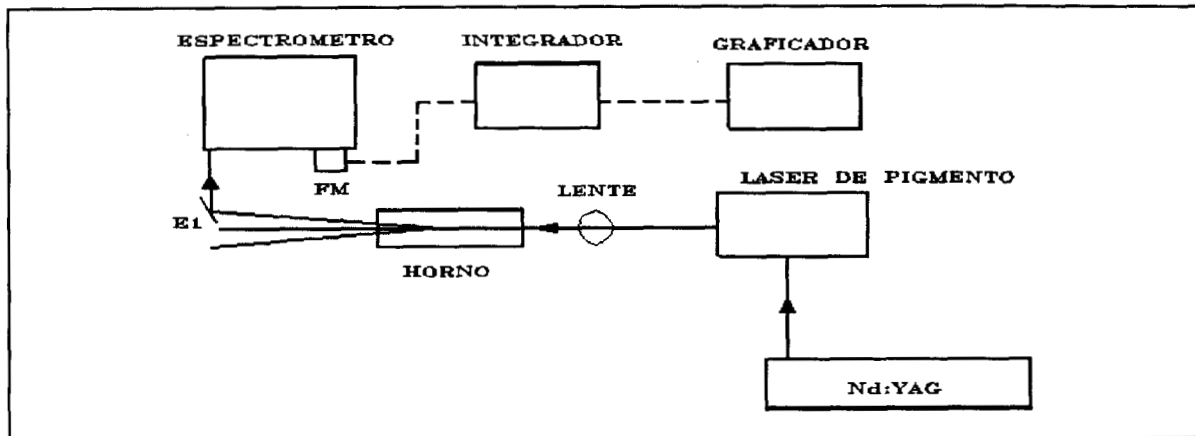


Figura 4.3 Equipo experimental básico para observar emisión cónica anómala, se usó el tercer armónico de un láser de Nd:Yag para bombear un láser de pigmento que se encuentra sintonizado al lado azul de la frecuencia $^1S_0-^1P_1$ del calcio atómico (4226.7 \AA).

4.3 Láser de Bombeo.

El láser de bombeo usado fue un láser comercial de Nd:Yag, cuya emisión es de 10640 \AA , el cual está equipado con doblador, triplicador y cuadruplicador de frecuencia. En la longitud de onda fundamental tiene una potencia máxima de 1.2 Joules por pulso a una repetición de 10 Hz. En el tercer armónico la potencia máxima es de 250 mJ y el ancho temporal del pulso es de 8 ns.

En esta serie de experimentos se usó el tercer armónico para bombear el láser de pigmento, correspondiente a 364 nm, la energía típica del haz fue de 50 mJ a una repetición de entre 1 y 10 Hz,

4.4 Láseres de pigmento.

Los pigmentos son moléculas orgánicas con enlaces dobles conjugados, los enlaces sencillos son enlaces σ y los enlaces dobles constan de un enlace σ y un enlace π , estas moléculas son planas, los enlaces π se encuentran por arriba y por abajo de la molécula a lo largo de la cadena de esta, en primera aproximación los electrones se mueven en un pozo de potencial cuya longitud es igual a la longitud de la molécula[1]. Además de esto, al considerar los estados vibracionales y rotacionales de las moléculas se tiene que los espectros de emisión y absorción son prácticamente continuos con un ancho de banda (en promedio) de alrededor de 50 - 75 nm, bombeando estos pigmentos con una lámpara de destello o con un láser y colocándolos en una cavidad adecuada selectiva a distintas longitudes de onda se puede provocar emisión láser en estos medios.

Los láseres de pigmento usados en este trabajo fueron construidos en el laboratorio [Fernández *et al.* 1990], la cavidad es del tipo Litman-Metcalf. A grandes rasgos esta configuración esta formada por el recipiente del pigmento que es una celda con volumen de 5 cm^3 capacidad de cuarzo marca Heltman, para enfocar el haz de bombeo sobre esta celda se usa una lente cilíndrica. La parte posterior de la cavidad tiene un espejo de 1' de diámetro, el cual refleja la fluorescencia proveniente del pigmento (ver figura 4.5) en la parte anterior de la cavidad se tiene una rejilla de difracción, en particular, el láser que se usó para los experimentos de un solo haz de bombeo, esta equipado con una rejilla de difracción de 2000 líneas/mm, frente a esta rejilla se encuentra un espejo que refleja el primer orden de difracción por la misma trayectoria de incidencia, variando el ángulo que forma la rejilla con el espejo se obtiene la sintonización de láser para La longitud de coherencia de este láser medida con interferómetro Michelson fue de $\sim 3 \text{ cm}$ lo cual da un ancho de banda de $5.6 \times 10^{-2} \text{ \AA}$. A campo lejano el perfil transversal de intensidades del haz es gaussiano (figura 4.5), esto se midió con un fotodiodo de respuesta rápida el cual se conectó a un integrador y promediador.

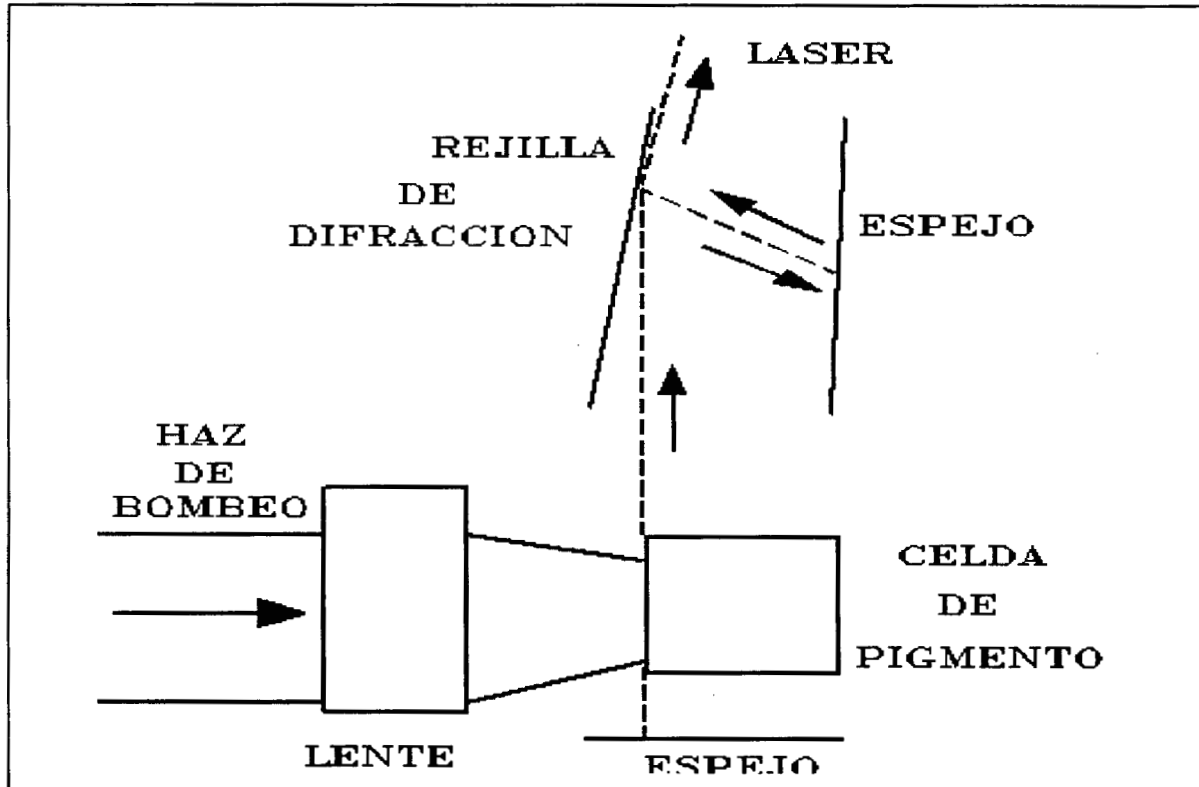


Figura 4.4. Esquema del láser de pigmento.

La divergencia del haz es de 3 mrad, en tanto que la energía típica del pulso láser fue de $0.75 \mu\text{J}$ y la duración del pulso es de 9 ns. Al realizar los experimentos se enfocaba el haz sobre el horno con una lente de 40 cm produciendo una cintura de haz de $10 \mu\text{m}$.

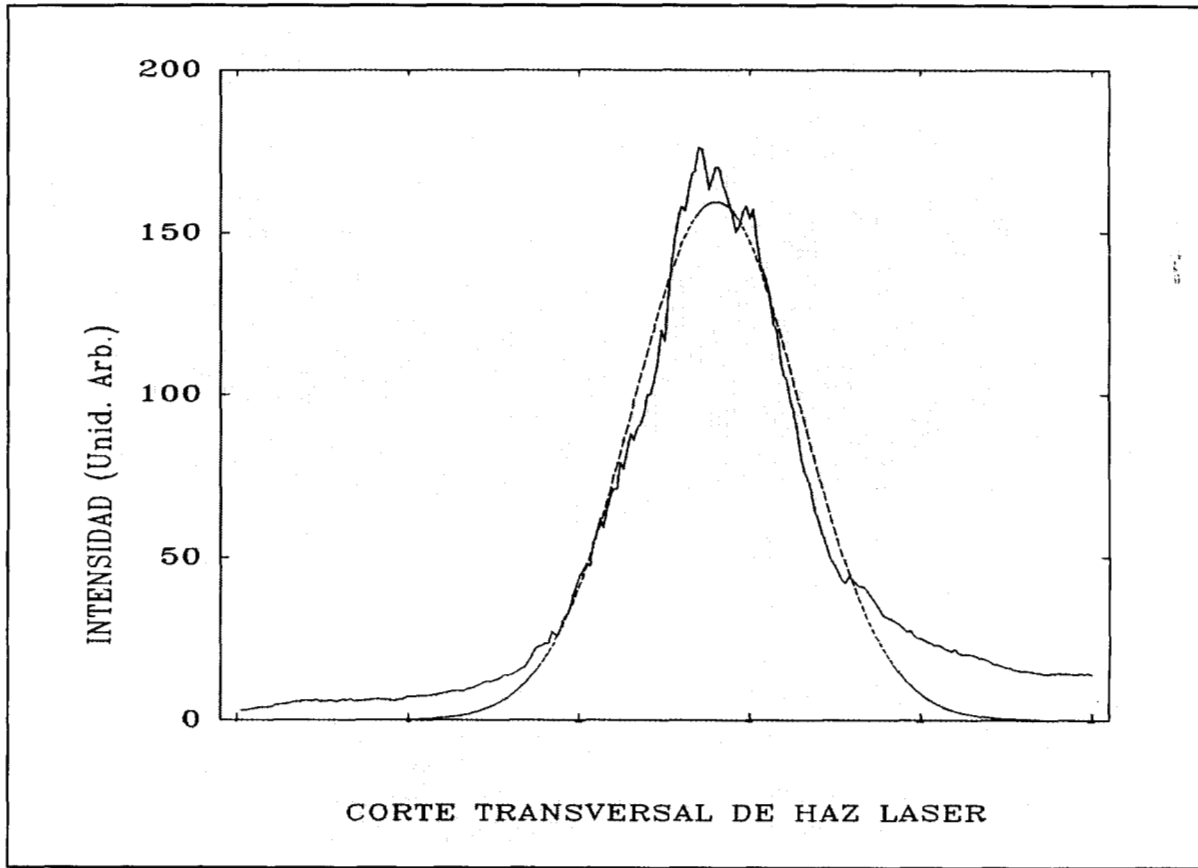


Figura 4.5. Perfil transversal de láser de pigmento, la línea punteada representa ajuste a una gaussiana.

El pigmento que se ha usado es Stilbina 420, se trabajó a una concentración de 1.5×10^{-3} molar, con este valor y bombeando con Nd:Yag se ha reportado un intervalo de emisión láser de 300 \AA , sin embargo en este trabajo se ha observado láser un un rango de 550 \AA . Regularmente, el pigmento de la celda se degrada debido al calentamiento que sufre al ser excitado por el haz de bombeo, con el fin de evitar que siempre sea la misma región del pigmento la que se excita, dentro de la celda de cuarzo se coloca un agitador magnético.

4.5 Horno de vapor atómico.

Con el fin de obtener calcio en forma gaseosa se construyó un horno en cuyos extremos se colocaron ventanas de cuarzo para permitir la interacción del vapor con radiación electromagnética.

El horno consta de un tubo de acero inoxidable de 2.54 cm de diámetro externo y longitud 26 cm, en sus extremos tiene soldadas cejas también de acero inoxidable (figura 4.6), y en estas están colocadas ventanas de cuarzo (figura 4.7). Cerca del extremo del tubo se hicieron perforaciones y conexiones al exterior, el material de estas conexiones es tubo de cobre y conexiones comerciales de bronce del tipo usado en las instalaciones de gas doméstico. De las salidas al exterior una es usada para introducir un termopar al centro del horno por medio del cual se mantiene un monitoreo de la temperatura y a partir de este dato se infiere la presión de vapor del calcio según datos en referencia [Hultgren *et al*(1963)], la densidad del vapor se calcula via la aproximación del gas ideal, la segunda es usada para conectar un tanque de argón, este gas es usado como contenedor para la nube de calcio, de otra forma el vapor metálico se depositaría en las ventanas de cuarzo. La tercera conexión es usada para conectar una bomba de vacío.

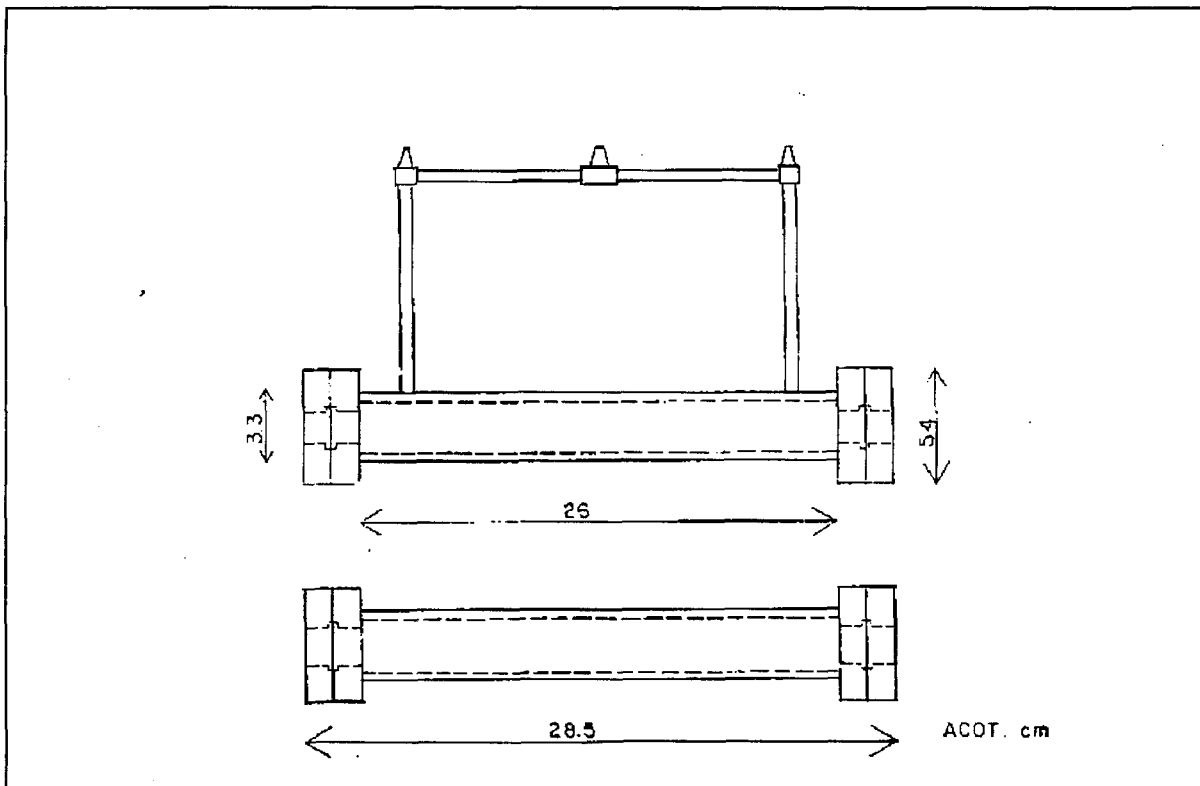


Figura 4.6. Esquema del horno de vapor de Ca.

El calentamiento del horno se realiza por medio de una resistencia, el centro del horno ha sido rodeado por 2 m de alambre nicromel. El alambre se encuentra a su vez dentro de cuentas de cerámica, con el fin de aislar al horno eléctricamente del alambre. Sobre estas cuentas se colocan varias capas de aislante térmico, sobre esto fibra de vidrio y al final todo envuelto en papel aluminio.

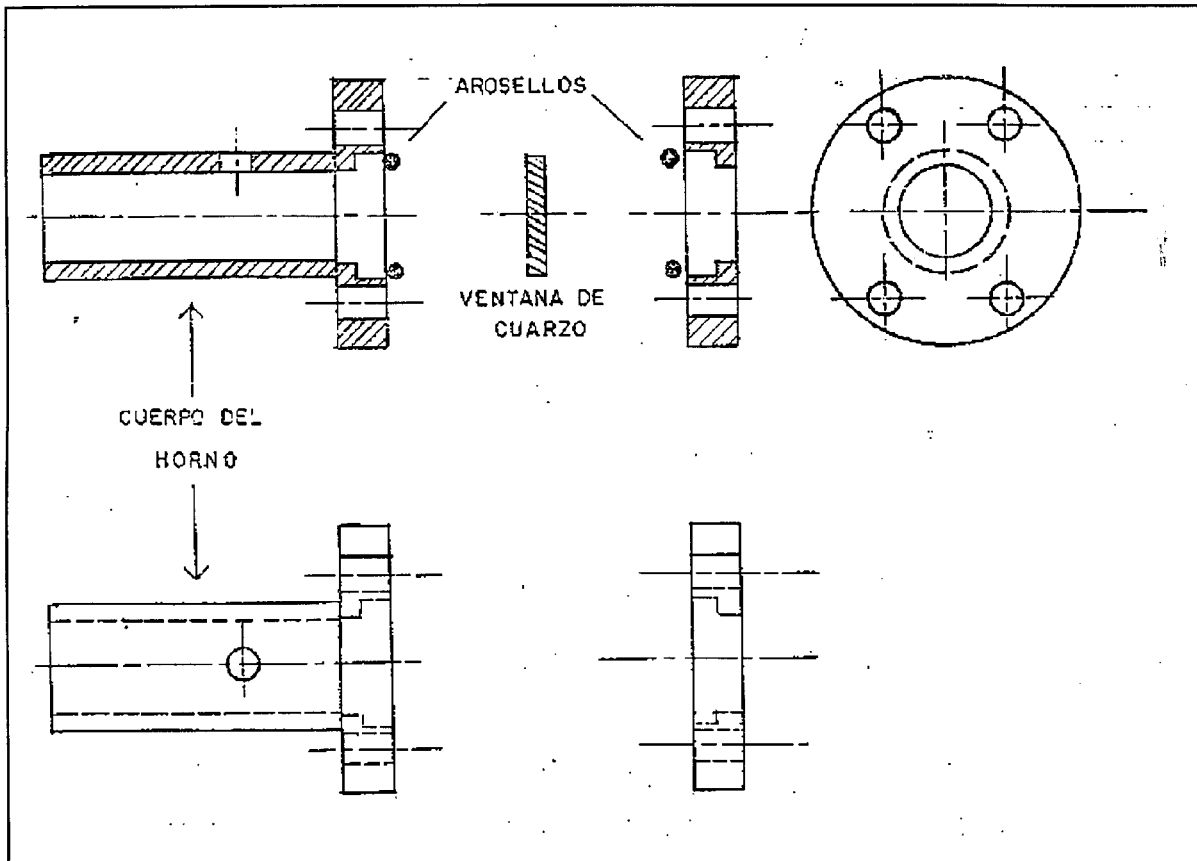


Figura 4.7. Detalle de los extremos del horno de vapor.

Con el fin de refrigerar los extremos del horno se ha soldado tubería de cobre por donde circula agua, la refrigeración es necesaria para evitar que los arosellos (O'rings), colocados para sellar la región donde se encuentran las ventanas de cuarzo, se fundan; así como para evitar que el vapor de calcio se deposite en las ventanas.

La temperatura máxima alcanzada es de aproximadamente 950 °C. Cuando el centro del horno se encuentra en un intervalo de temperaturas de 700 a 800°C, los extremos alcanzan una temperatura de $\approx 40^\circ$.

4.6 Espectrómetro.

Se usó un espectrómetro tipo Czerny-Turner de 0.75 m de distancia focal marca Spex modelo 1702/04 con límite de resolución de 0.1 Å (según fabricante)

4.7 Detección electrónica.

4.7.1 Tubo Fotomultiplicador.

El tubo fotomultiplicador usado fue Hamamatsu modelo R-943-02 la respuesta espectral es plana en el intervalo de los 300 a los 800 nm, el tiempo de subida (risetime) de la señal es de 3 ns y un tiempo de tránsito de la señal (de cátodo a ánodo) de 23 ns.

4.7.2 Fotodiodos.

Se usaron fotodiodos Hamamatsu modelo S-1722-02 con una respuesta espectral de 190 a 1090 nm con un tiempo de respuesta (risetime) de 3 ns.

4.7.3 Integrador y promediador electrónico.

Se usó un integrador y promediador electrónico Stanford Research Sys sincronizado al fotomultiplicador, normalmente se promedió sobre 10 pulsos con una ventana de conteo de 30 ns.

CAPITULO 5.

RESULTADOS EXPERIMENTALES.

5.1 Un haz de bombeo.

En esta primera sección se describen experimentos realizados excitando el vapor de calcio con un solo haz, al mismo tiempo se comparan estos resultados con los obtenidos por otros autores.

5.1.1 Propiedades generales de la emisión cónica anómala.

En la figura 5.1 tenemos un espectro típico de ECA, la banda que ha sido marcada con λ_p corresponde a la longitud de onda del láser de bombeo, mientras que el la banda ancha situada del lado izquierdo corresponde al espectro de ECA, la detección de este espectro se ha hecho fuera de la dirección de propagación del haz de bombeo tal como se ilustra en la figura 4.1.

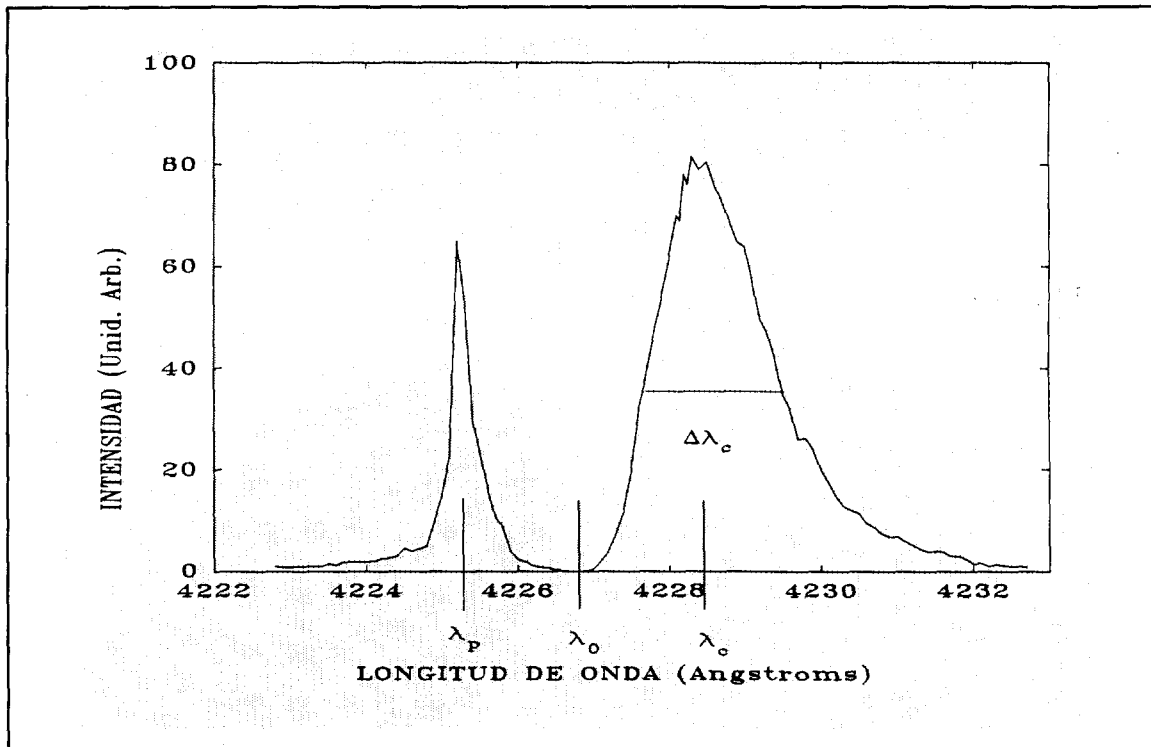


Fig 5.1 Espectro típico de emisión cónica anómala. La transición del calcio se ha marcado con la línea rotulada con λ_0 , λ_p indica la longitud de onda del láser de bombeo, λ_c representa el máximo del espectro de la emisión cónica, $\Delta\lambda_c$ es el ancho (FWHM) de la ECA.

Como se ha mencionado antes, bajo las condiciones en la cuales ocurre emisión cónica anómala es de esperarse que el haz de bombeo sufra autoenfocamiento, por esto es un tanto sorprendente tener una banda del lado azul de la transición. De hecho, además de este trabajo, solo se han observado contribuciones del lado azul del espectro de emisión cónica por Chauchard y Meyer [1984].

Además se obtuvo que el ángulo de ECA *no* es función de la potencia del láser incidente, este comportamiento se ha observado en todos los trabajos experimentales previos sobre este fenómeno.

Por otra parte, se observa que la banda que se encuentra del lado rojo de la transición atómica es mucho más ancha que el láser de bombeo.

5.1.2 Ángulo del cono vs densidad del calcio

Se estudio la dependencia del ángulo del cono contra la densidad de calcio, como se mencionó en el capítulo anterior, la densidad del vapor se controló mediante la temperatura del horno, los datos obtenidos se han reunido en la figura 5.2. Las líneas en la gráfica representan un ajuste de la forma de la ecuación $\phi \propto N^x$ con ($0.39 \leq x \leq 0.55$), la ecuación (3.15) predice un valor de $x = 0.5$.

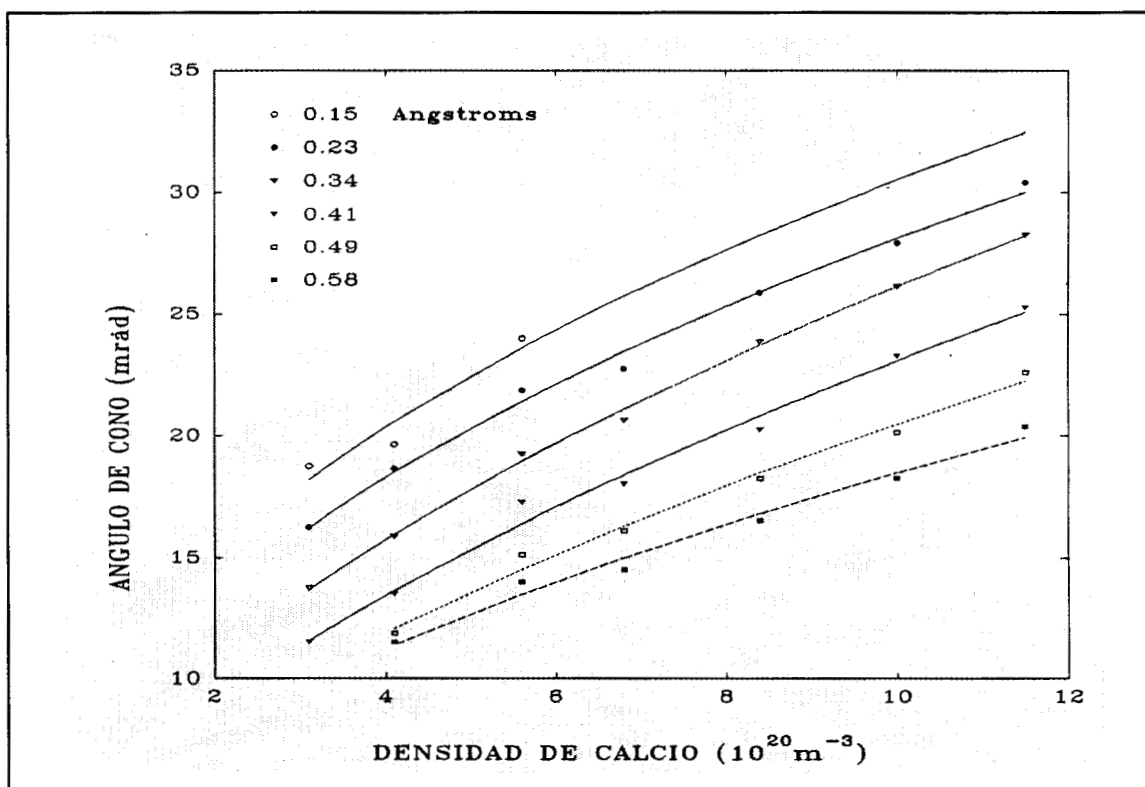


Figura 5.2 Variación del ángulo del cono con respecto a la densidad del calcio para $\Delta\lambda$ constantes.

5.1.3 Angulo del cono vs desintonia del laser.

Los datos anteriores pueden ser rearrglados para observar la dependencia del ángulo de ECA con respecto a la frecuencia del láser incidente, el resultado se puede observar (para diferentes densidades de vapor) en la figura 5.3. La linea continua en esta figura representa la ecuación (3.12) con una densidad de vapor de $11.5 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ y con un valor para γ_2 de $1.94 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ y un corrimiento de la linea de base de 21.1 mrad.

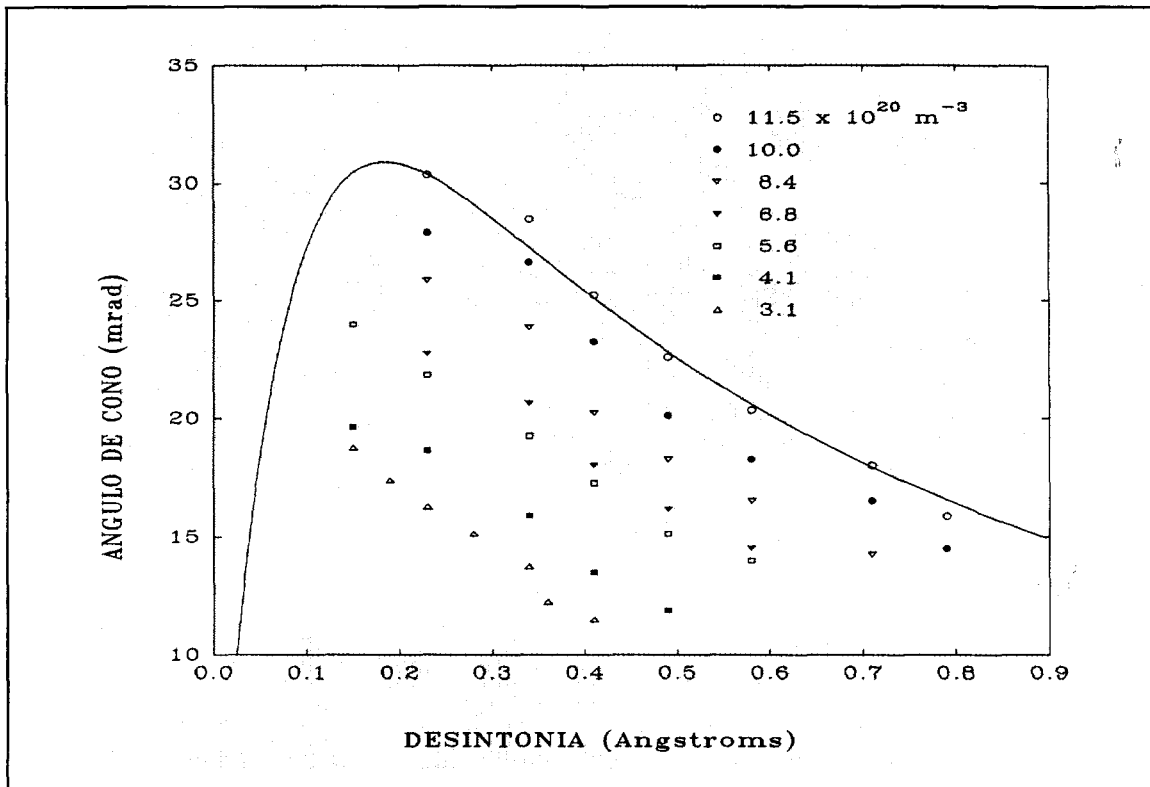


Figura 5.3 Angulo del cono vs desintonia del láser. La linea solida es la expresión (3.14) con un valor de γ_2 de $1.94 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$.

Sin embargo, de los datos experimentales se infiere un valor para γ_2 de $1.022 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$. Con este valor se ha graficado la ecuación (3.14), como puede verse, para este valor los puntos experimentales quedan muy lejos de la curva teórica, el excelente ajuste que se observa en la figura 5.3 puede deberse a que ha subestimado el ensanchamiento de la transición, o bien, puede ser solo una coincidencia.

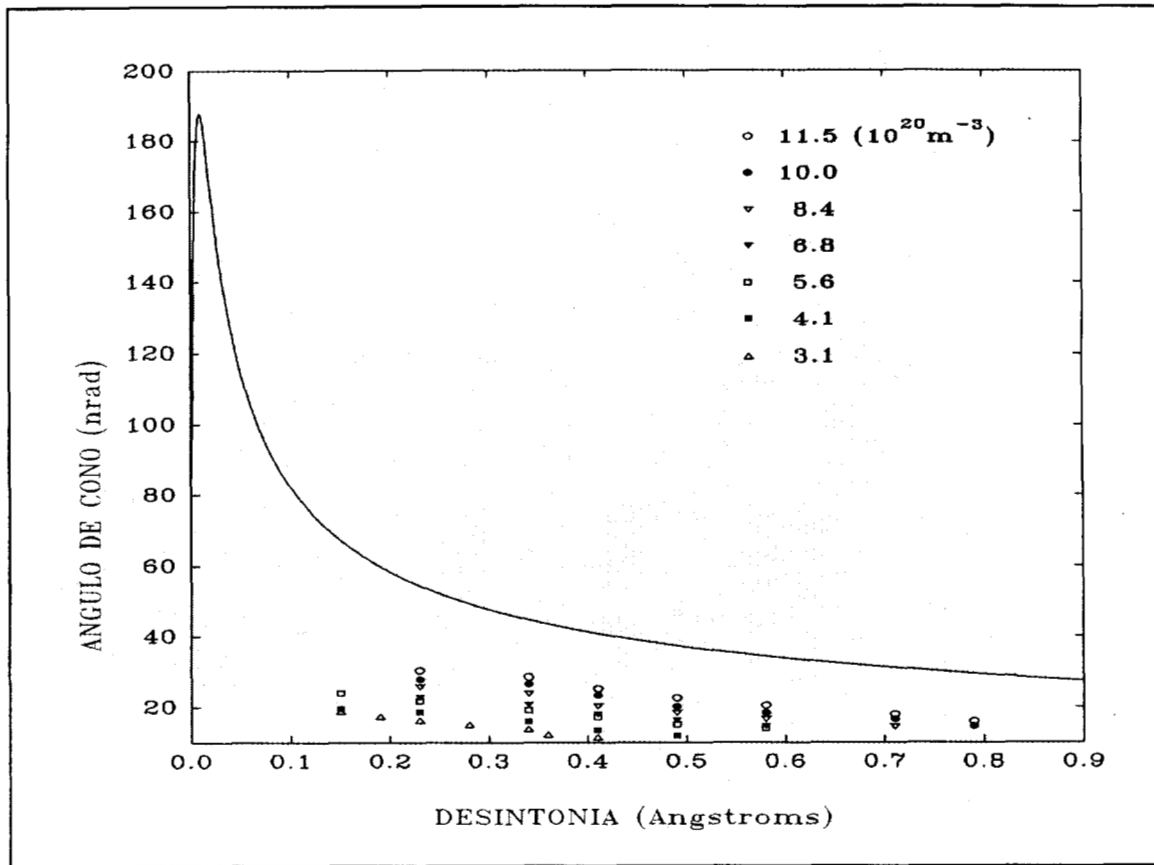


Figura 5.4. Ángulo del cono vs desintonía. La línea continua representa la ecuación (3.14) con un valor para γ_2 de $1.022 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$, dominado por el ancho de banda del láser de bombeo. Este valor es el inferido de los datos experimentales.

Ahora, para una densidad de $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ se ha graficado (figura 5.5) el ángulo del cono vs frecuencia del láser de bombeo, la curva representa la ecuación (3.14) con un valor para γ_2 de $1.94 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Como puede observarse, ahora los datos experimentales están por debajo de la curva teórica, situación inversa a la que se presenta en la gráfica 5.4.

Debe recordarse que la ecuación (3.14) se ha obtenido suponiendo que el ángulo del cono se debe a un proceso de "refracción a la frontera".

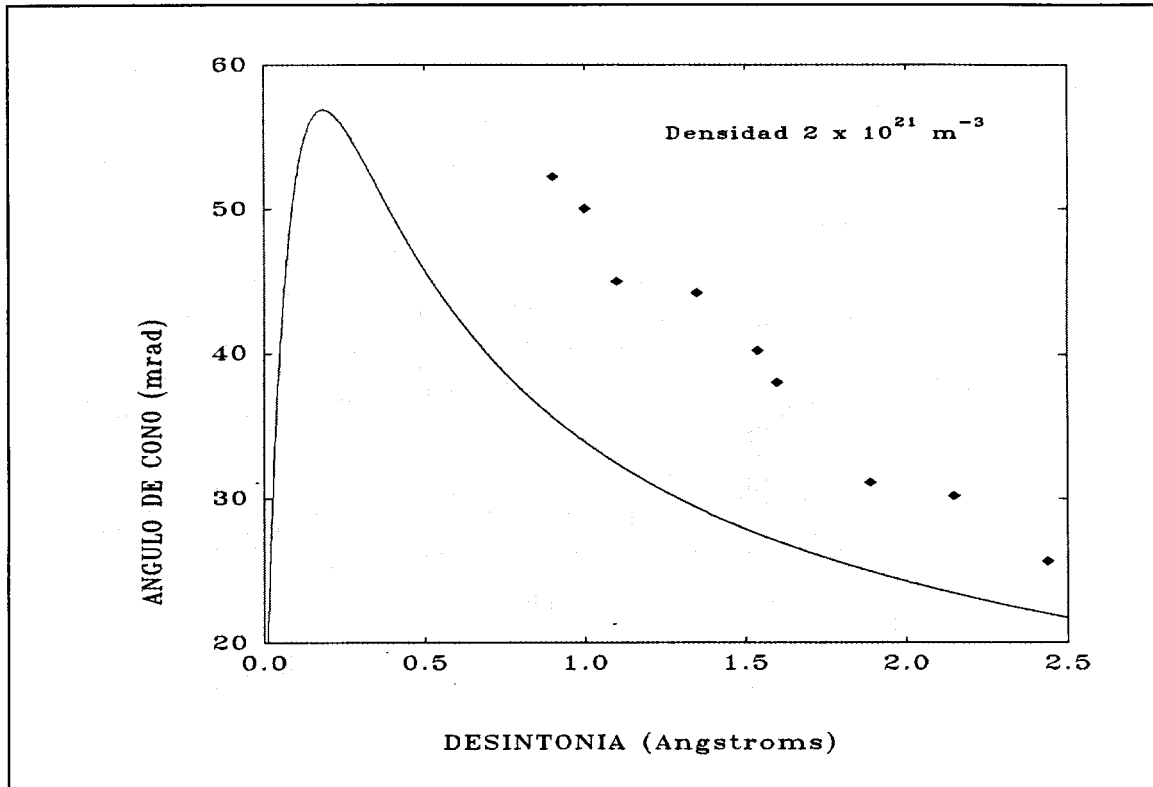


Fig 5.5. Angulo del cono para desintonia constante. Densidad de calcio $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. El valor de $\gamma = 1.94 \times 10^{11}$.

5.1.4 Ancho espectral vs desintonia del láser.

En la figura 5.6 se puede observar un espectro de ECA, cuando $\lambda_p = 0.7 \text{ \AA}$, la línea punteada es el ancho de banda del láser de bombeo visto por el espectrómetro (0.1 \AA de resolución), en este caso solo se ha obtenido el espectro del láser de pigmento, por el contrario, cuando se obtiene el espectro del cono (en la figura con línea continua) la banda situada en la misma longitud de onda del láser de bombeo se ha ensanchado. Probablemente este proceso de ensanchamiento se deba al mecanismo de "ensanchamiento por potencia". Aunque es necesario realizar mayores experimentos sobre este particular.

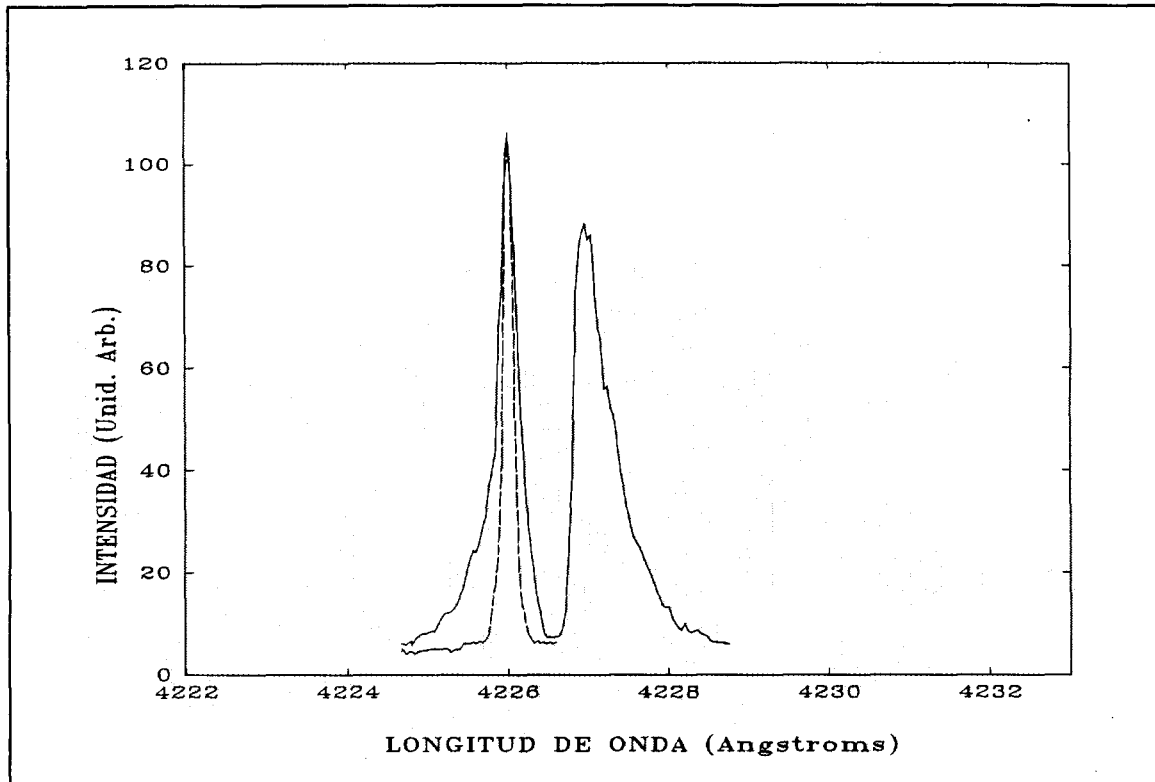


Figura 5.6 Espectro de ECA para una desintonía de 0.7 \AA . En línea punteada la señal del láser de bombeo (con la resolución del espectrometro), en la línea continua puede verse la banda del lado rojo de la ECA así como otra emisión centrada en la frecuencia del láser de bombeo pero con un ancho mayor.

Por otra parte, al comparar la banda situada del lado rojo de la transición en las figuras 5.1 y 5.6 puede observarse que el ancho de banda (FWHM) de esta emisión aumenta al aumentar la desintonía; tal como puede observarse en la figura 5.7. Otros trabajos sobre este fenómeno han reportado observaciones similares.

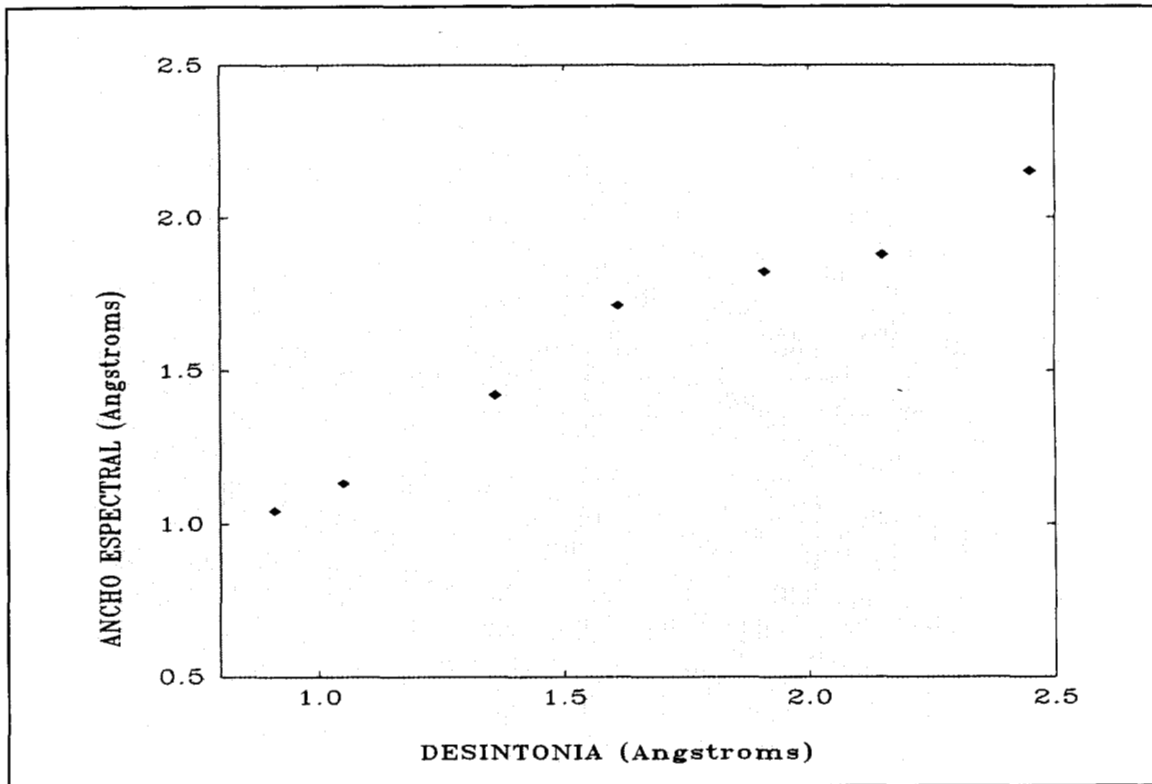


Fig 5.7 Ancho FWHM (*Full Width at Half Maximun*) de la banda roja del espectro de ECA en función de la longitud de onda de bombeo.

5.1.5 Intensidad del cono vs intensidad de bombeo

Al estudiar la dependencia de las características del cono al variar la intensidad del haz de bombeo se encuentra que la intensidad del cono es función de la intensidad del láser, los datos obtenidos se muestran en la figura 5.8. A bajas intensidades de bombeo al intensidad del cono es lineal, conforme la intensidad de bombeo aumenta, la intensidad del cono aumenta de manera más rápida que en la etapa anterior, finalmente, en altas intensidades se puede empezar a apreciar una etapa de saturación. Skinner & Kleiber[1980] reportó comportaminetos similares para Ba.

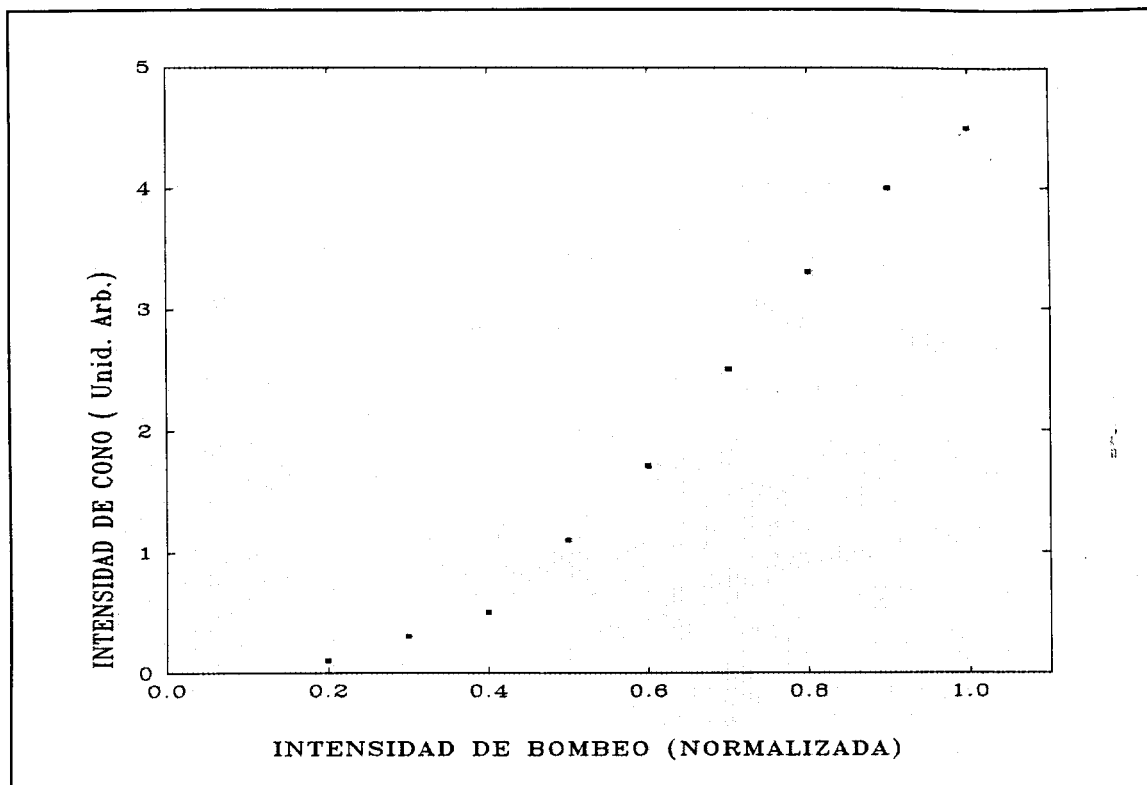


Fig 5.8 Intensidad de cono vs intensidad de bombeo. La intensidad de bombeo esta normalizada.

5.1.6 Intensidad de cono vs presión de gas buffer

Para prevenir la deposición de Ca en las ventanas de cuarzo del horno, se usó Argón como buffer (contenedor) en los experimentos, la cantidad de gas buffer modifica la intensidad de la emisión cónica al mantener todas las otras variables fijas.

La intensidad de la emisión del cono decrece al aumentar la presión del gas buffer, como puede observarse en la gráfica 5.9. Este propiedad sugiere que la emisión cónica anómala es un proceso coherente que disminuye su eficiencia al aumentar la cantidad de argón ya que aumentan las colisiones de Ca-Ar. Como se mencionó en el capítulo dos, el efecto que las colisiones producen sobre el medio es el de provocar *disrupciones* de fase. Por tanto, es de esperarse que un aumento en las colisiones atómicas provoque una disminución en la eficiencia de la ECA si esta (la ECA) es generada por un proceso coherente.

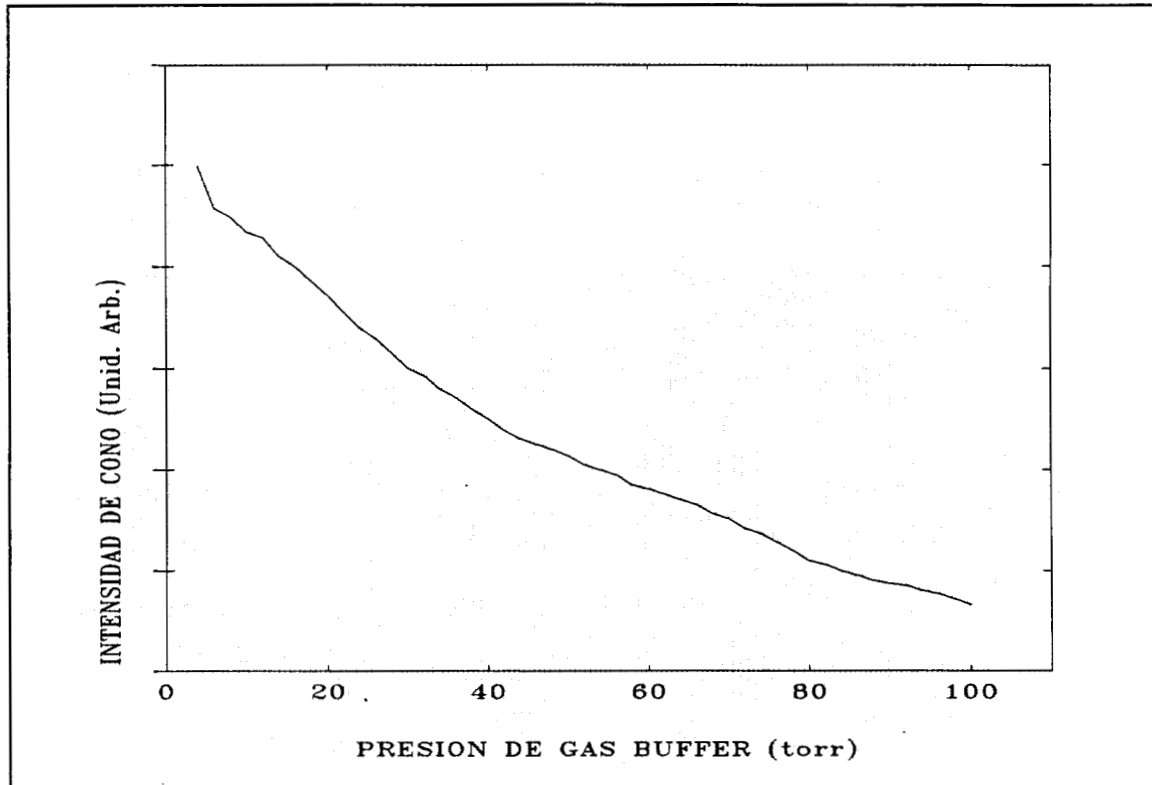


Figura 5.9 Intensidad de ECA en función de la presión de gas buffer (Argón).

5.2 Dos haces de bombeo.

En esta serie de experimentos se usaron dos haces

5.2.1 Experimentos degenerados en frecuencia.

En este experimento se dividió el haz de bombeo en dos haces de igual intensidad y se hicieron cruzar estos haces en el vapor a un ángulo pequeño, el arreglo experimental se muestra en la figura 6.1.

En la pantalla colocada frente al horno puede observarse que cada haz genera su propia emisión cónica, sin embargo cuando la separación angular entre los haces de bombeo es igual al ángulo del cono, se observa que parte del haz de bombeo se propaga siguiendo el radio de curvatura de la emisión cónica anómala. Hay que tomar en cuenta que la intensidad de la radiación de la ECA es alrededor de 100 veces menor que la radiación del haz de bombeo, sin embargo, en este caso parte del haz de bombeo sigue la trayectoria de la emisión cónica anómala.

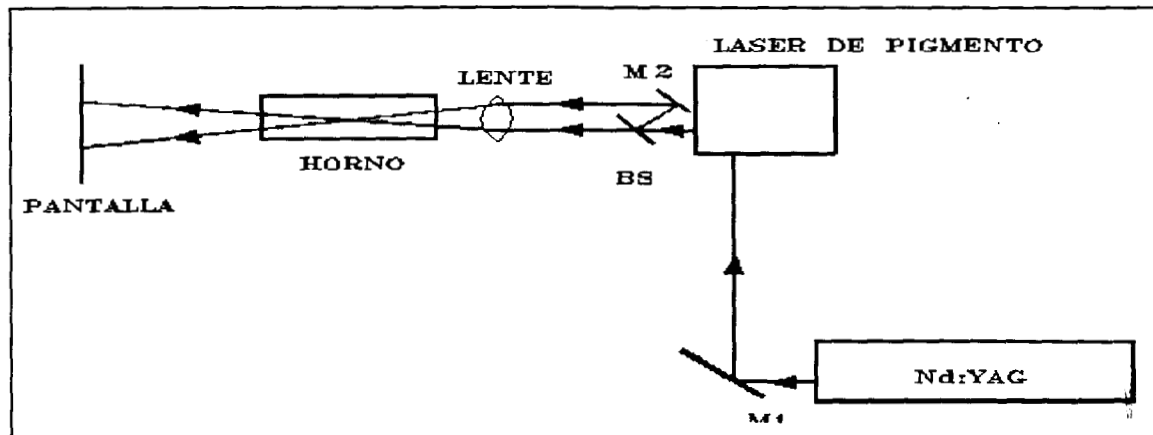


Figura 5.10. El haz láser proveniente del láser de pigmento es dividido por el divisor de haz, estos dos haces (de igual intensidad) se hacen cruzar en el centro del horno.

5.2.2 Experimentos no degenerados en frecuencia.

En esta serie de experimentos se usaron dos láseres de pigmento, el primero que llamaremos 1 se sintonizó en 4225.5 \AA , es decir este haz producía emisión cónica anómala cuyo pico de emisión se encuentra colocado en 4227.9 \AA . Por otra parte un segundo láser que llamaremos 2 fue sintonizado también en 4227.9 \AA , donde se espera el máximo de la emisión cónica anómala, la intensidad de este haz 100 veces menor que la de láser 1, de acuerdo al modelo de Harter *et al.* (1991) el mecanismo responsable del ángulo de ECA es un proceso de refracción a la frontera dado por la expresión 3.14, es entonces de esperarse que si este es el modelo adecuado para explicar el ángulo en ECA, entonces el segundo haz (sintonizado del lado rojo de la transición) fuese desviado con el mismo ángulo de la ECA. Este segundo haz fué 100 veces menor en intensidad para evitar que una alta intensidad provocara efectos no lineales. El resultado de este experimento fué negativo, el haz sintonizado del lado rojo de la transición no se desvió en la presencia de ECA.

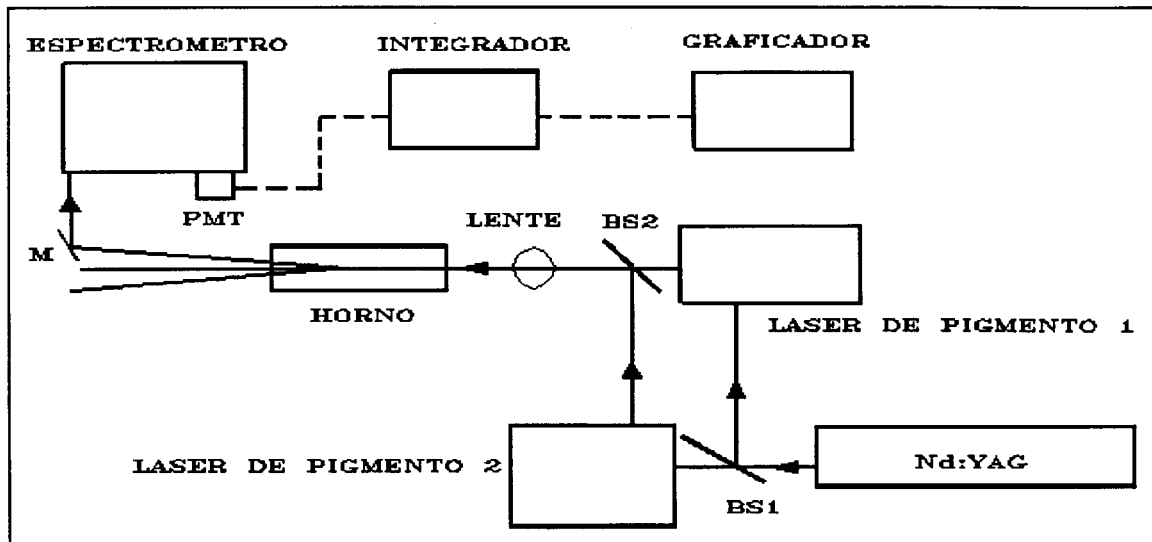


Figura 5.11. El láser 1 se sintonizó del lado azul de la transición del calcio, en tanto que el láser 2 se sintonizó del lado rojo de dicha transición.

Por otra parte, durante la ejecución de este experimento el haz sintonizado del lado rojo de la transición, sintonizado a una longitud de onda de 4226.9 \AA sufrió desenfocamiento. Al realizar el experimento la detección se hacía con un espejo de 1 pulgada en la posición marcada con M en la figura 5.11. En presencia solo del haz sintonizado del lado azul de la transición se obtiene el espectro común de emisión cónica, en la figura 5.12 corresponde al espectro de menor intensidad, cuando solo el haz sintonizado del lado rojo está presente se obtiene el espectro que tiene una banda intensa del lado rojo y una banda pequeña del lado azul, cuando, por otra parte, se tienen ambos láseres se obtiene el haz con un pico muy intenso del lado azul, como este haz se ha desenfocado, ahora se es posible detectarlo con el espejo colocado para detectar la emisión cónica.

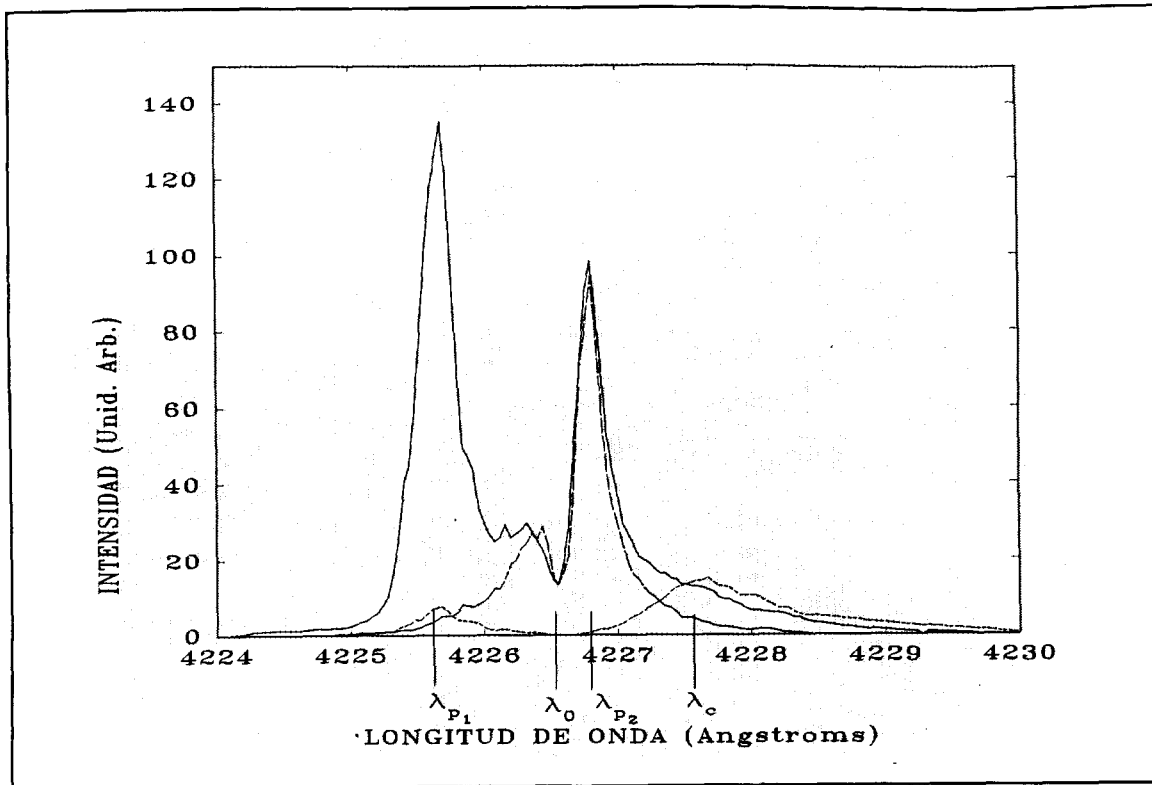


Figura 5.12 Espectro obtenido con la configuración experimental de la figura 5.12

Esto es inesperado debido a que según el formalismo desarrollado en el capítulo 2, si un haz se propaga a través de sistema atómico de dos niveles, con una frecuencia mayor que la frecuencia de transición del sistema, este haz sufre autoenfocamiento.

Como se puede observar en la figura 5.12 con la presente resolución experimental no se observa un intercambio de energía entre los haces, la intensidad del haz sintonizado a λ_{p2} es la misma tanto si esta solo o si se encuentra presente el haz sintonizado del lado azul de la transición, esto parece indicar que se el haz del lado azul se desenfoca debido a un gradiente en índice de refracción pero no hay intercambio de energía entre estos haces.

Esta es la primera observación de desenfocamiento inducido de un haz sintonizado del lado azul de una transición atómica. Agrawal(1990) predijo enfocamiento de un haz sintonizado del lado rojo de una transición atómica, poco despues Stentz *et al.* (1992) confirmaron experimentalmente esta predicción usando vapor de Sodio, la configuración experimental usada por ellos es semejante a la que se puede observar en la figura 5.10. Además, en su experimento ambos haces tienen la misma

frecuencia y se cruzan cerca de la salida del horno que contiene al sodio.

En nuestro caso los haces de bombeo tienen frecuencias distintas y su propagación es colineal. A nuestro conocimiento no existe un modelo que logre describir este resultado experimental.

CAPITULO 6.

CONCLUSIONES.

6.1 Conclusiones al presente trabajo.

Se ha realizado un estudio experimental de la Emisión Cónica Anómala (ECA) en vapor de calcio, tal sistema no había sido estudiado hasta ahora. Se hicieron estudios bombeando el vapor con un haz de así (sección 5.1) como con dos haces de bombeo (sección 5.2).

En los experimentos con un solo haz de bombeo, se investigaron las propiedades de la emisión cónica variando parámetros que afectan alguna de sus características. En términos generales el espectro de emisión cónica anómala muestra una forma similar a la obtenida por otros autores, sin embargo en nuestro caso se observa una fuerte contribución del lado rojo de la transición del calcio situada a la misma longitud de onda que la del láser de bombeo. Este comportamiento solo ha sido observado por Chauchard & Meyer[1984] en vapor de sodio.

También se ha hallado que el pico de la emisión cónica anómala y el pico de la emisión situada a la misma longitud de onda del láser de bombeo están situadas simétricamente con respecto a la transición atómica, en los trabajos hecho por otros autores en vapor de sodio no se encuentra esta simetría, es posible que esto se deba a que en realidad en dicho sistema tenemos dos líneas de resonancia (líneas D) separadas por unos cuantos angstroms y realmente es necesario describir dicho sistema como un sistema de tres niveles.

En cuanto a la característica espacial de ECA hemos encontrado que con respecto a la variación del diámetro del anillo en función de la densidad de vapor nuestros datos ajustan bien a una relación de la forma $\phi \propto N^x$ con $x = 0.5$ como la mayoría de los modelos lo predicen. En cuanto al cambio del ángulo del anillo al variar la frecuencia de bombeo se encuentra que nuestros datos (en el caso de un haz de bombeo) obedecen a un modelo de "refracción en la frontera" siempre que supongamos que se ha subestimado el valor del ensanchamiento producido tanto por colisiones interatómicas como por el ancho de banda del láser de bombeo inferidos de los datos experimentales.

El ancho (FWHM) de la banda del lado rojo en el espectro de ECA aumenta al alejar la frecuencia de bombeo de la frecuencia de resonancia del sistema esta característica no había sido reportada antes. En cuanto a la intensidad de emisión del cono en función de la intensidad de bombeo se encuentra que a intensidades bajas al aumentar la intensidad de bombeo aumenta de forma lineal la intensidad de bombeo, al seguir aumentando la intensidad de bombeo aumenta de manera mucho más rápida la intensidad del cono, hasta que la intensidad de ECA comienza a exhibir saturación.

Una característica interesante encontrada en este trabajo es el hecho de que al aumentar la presión del gas usado como buffer (Argón) la intensidad del cono disminuye, esto sugiere que el proceso de

generación de ECA es coherente debido a que las colisiones con el gas inhiben la formación del cono.

En cuanto a los experimentos con dos haces de bombeo, se observa, usando una configuración de haces degenerados en frecuencia un efecto de propagación cuando el diámetro del anillo es igual a la separación angular entre los haces de bombeo (ver figura 6.1). En tal situación se puede observar que los haces de bombeo se curva siguiendo el radio de curvatura de la emisión cónica anómala.

En cuanto a los experimentos no degenerados en frecuencia sugieren que por una parte el ángulo de la ECA no se debe a un proceso de "refracción en la frontera" como sugieren los experimentos de un haz de bombeo con la salvedad de que el mecanismo generador sea un proceso coherente ya que en los dos láseres de pigmento usados en este experimento no tienen relación de coherencia. Por otra parte, al realizar este experimento se ha observado por vez primera desenfoque de un haz cuya frecuencia es mayor que la frecuencia de transición atómica.

En términos generales, los resultados experimentales reportados en este trabajo no corroboran ninguno de los modelos más usados para explicar ECA

6.2 Sugerencias a trabajos posteriores.

Los experimentos de dos haces de bombeo presentados aquí, sugieren varias direcciones para realizar trabajos posteriores, por ejemplo, en el experimento de dos haces no degenerados en frecuencia, es necesario investigar más detalladamente el efecto de desenfoque inducido sobre un haz sintonizado del lado azul de una transición atómica. Este es el primer reporte que se encuentra sobre una observación de este tipo.

Además, para el experimento de dos haces degenerados en frecuencia se debe estudiar el la desviación de los haces de bombeo que siguen el arco descrito por la emisión cónica anómala.

Por supuesto, hay mucho trabajo por hacer desde el punto de vista teórico sobre los efectos mencionados en los párrafos anteriores así como en la propia emisión cónica anómala que sigue siendo un problema abierto. En este sentido, es posible estudiar la ECA usando como haz de bombeo un láser de pulsos cortos. Esto da la posibilidad de estudiar este fenómeno desde el punto de vista adiabático, es decir, cuando la duración del pulso del haz de bombeo es mucho menor que la vida media de la transición atómica,

El estudio de los efectos de propagación en diversos medios no lineales aumenta cada vez más debido al uso de fibra óptica para comunicaciones, para algunas de estas aplicaciones estas fibras se fabrican con índices de refracción dependiente de la coordenada radial y por tanto los efectos de propagación se vuelven importantes, en tal sentido, la investigación de este tipo de procesos tanto a nivel básico como aplicado aumentará en el futuro.

El estudio de sistemas atómicos bombeados por intensos campos electromagnéticos también es importante, ya que cada vez se construyen láseres de mayor potencia en donde los efectos resonantes juega un papel preponderante. De hecho se ha observado emisión laser en un sistema de *dressed*

states[Lezama *et al.*(1990)] bombeando con un láser CW. Esta es otra posibilidad de investigación, es decir, obtener emisión láser en *dressed states* bombeando con láseres pulsados, donde la potencia del bombeo puede ser mucho mayor que con sistemas CW.

APENDICE 1

OPTICA GEOMETRICA Y AUTOENFOCAMIENTO.

Empezaremos con la ecuación (2.27):

$$\frac{\partial \phi}{\partial(kz)} + \frac{(\nabla_T \phi)^2}{2k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla_T^2 A}{k^2 A} - \frac{\Re\{X_{NL}\}}{\epsilon} \right) = 0$$

y (2.29)
$$\mathcal{V}_{eff} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla_T^2 A}{A k^2} - \frac{X'_{NL}(A)}{\epsilon} \right\}$$

donde $X'_{NL}(A) = \Re\{X_{NL}\}$

haciendo las identificaciones⁵:

kz ----- t (tiempo)

ϕ ----- acción S

$k r$ ---- coordenada espacial q

tenemos la ecuación:

$$2 \frac{\partial S}{\partial t} + (\nabla S)^2 + 2\mathcal{V}_{eff} = 0 \tag{2.3.12}$$

esta ecuación representa una partícula moviéndose bajo la influencia de un potencial \mathcal{V}_{eff}

haciendo
$$\epsilon_{eff} = \frac{\nabla_T^2 A}{k^2 A} \epsilon - X'_{NL} \tag{AI.1}$$

el primer término de la última ecuación representa la difracción del haz ya que describe variaciones de la amplitud A . Ahora, si queremos usar la aproximación geométrica⁶ (límite en el cual podemos usar la analogía mecánica), necesitamos despreciar este término. Por supuesto, si $\nabla^2(A)/A$ es finito entonces (debido a que $k \rightarrow \infty$) $\nabla^2(A)/A \rightarrow 0$. Sin embargo en nuestro caso esto no es cierto pero, cuando se considera

$$\frac{X'_{NL}(A)}{\epsilon} \approx \frac{\nabla_T^2(A)}{A k^2}$$

entonces podemos extender la analogía entre la óptica clásica y la mecánica clásica aún cuando la longitud de onda es comparable al tamaño del sistema.

Usando (2.3.11) y (AI.1) podemos escribir
$$\frac{\partial \phi}{\partial(kz)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla_T \phi}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon} \tag{AI.2}$$

⁵ *The Classical Theory of Fields*. L.Landau & M. Lifshitz. Capítulo 7, Pergamon Press and *Mechanics* L. Landau & M Lifshitz. Capítulo 7, Pergamon Press.

⁶ Esto significa que debemos hacer $\lambda \rightarrow 0$ y $k \rightarrow \infty$

en coordenadas cilíndricas, y usando la simetría axial:

$$\nabla_{\perp} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r = k \frac{\partial \phi}{\partial(kr)} \hat{e}_r$$

$$\text{y } \frac{\nabla_{\perp} \phi}{k} = \frac{\partial \phi}{\partial(kr)} \hat{e}_r$$

nos queda:

$$\left(\frac{\nabla_{\perp} \phi}{k} \right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = (\nabla S)^2 \quad (\text{A1.3})$$

$$\text{y el potencial } V(r) = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon} \quad (\text{A1.4})$$

re-escribiendo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla S)^2 + V = 0 \quad (\text{A1.5})$$

Si recordamos que $\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\nabla S)^2 + V$ es el Hamiltoniano para una partícula con masa = 1, y $\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ es la ecuación de Hamilton-Jacobi, podemos encontrar una ecuación de movimiento en términos de la mecánica clásica a este problema de óptica no lineal, usando la 2da ley de Newton

$$F = a = -\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{d^2(kr)}{d(kz)^2} = \frac{1}{k} \frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$\text{y } \frac{\partial V}{\partial q} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(kr)} \frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon}$$

y entonces tenemos:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon} \right) \quad (\text{A1.6})$$

REFERENCIAS.

- L. Allen, J. H. Eberly, (1975) *Optical Resonance and Two Level Atoms* (Wiley, New York).
- G. P. Agrawal, (1990) *Induced focusing of Optical beams in self-defocusing nonlinear media*. Phys. Rev. Lett. 64, 2487.
- G. S. Agarwal (1978) *Quantum Statistical Theory of optical resonance phenomena in fluctuating laser fields*. Phys. Rev. A 18, 1490.
- G.A. Askar'yan, (1962) *Cêrenkov radiation and transition radiation from electromagnetic waves*. Sov Phys JETP, 15, 943 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 42, 1360, (1962)].
- G. Brechignac, Ph. Cahuzac, A. Debarre, (1980) *Anomalous off-axis emissions on the resonance strontium line, illuminated by a quasi-resonant pulsed laser light*. Opt. Commun. 35, 87.
- R. W. Boyd, M. G. Raymer, P. Narum, D. J. Harter, (1981) *Four-wave parametric interactions in a strongly driven two level atoms*. Phys. Rev. A 24, 411.
- R. W. Boyd, M. S. Malcuit, D. J. Gauthier, K. Rzazewski. (1987) *Competition between amplified spontaneous emission and the four wave-mixing process*. Phys. Rev. A 35, 1648.
- M. G. Boshier, W.J. Sandle. (1982). *Self-focusing in a vapour of two-state atoms*. Opt. Comm. 42, 371.
- R. W. Boyd (1991). *Nonlinear Optics*. Academic Press.
- L. Brillouin, (1960) *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic Press).
- G. L. Burdge, C. H. Lee, (1982) *Characterization of sideband emission generated by near resonant radiation in sodium vapour*. Appl. Phys. B, 28, 197.
- Carrington. C et al. (1973). *Multipole relaxation and transfer rates in the impact approximation*. J. Phys. B. 6, 470.
- Cohen-Tannoudji. (1977). *Frontiers in Laser Spectroscopy. Vol 1*. North Holland Publishers Co.
- M. E. Crenshaw, C. D. Cantrell. (1988) *Temporal and spatial modulation in laser-pulse propagation*. Opt. Lett. 13, 386.
- M. E. Crenshaw, C. D. Cantrell. (1989) *Conical emission as a result of pulse breakup into solitary waves*. Phys. Rev. A 39, 126.

- E. A. Chauchard, Y. H. Meyer, **(1984)** *On the origin of the so called conical emission in laser pulse propagation in atomic vapour.* Opt. Commun. 52, 141.

- Corney, A, **(1977)**. *Atomic and laser spectroscopy.* Clarendon Press, 1ra edición. NY.
- Corney, A, McGinley, J. **(1981)**. *Tunable laser spectroscopy of atomic calcium.* J. Phys. B. 14, 3047.

- Fernández Guasti, Manuel, **(1983)** *Non-Linear Optical Phenomena: Phase Conjugation in Calcium Vapour*, PhD Thesis. Oxford, U.K.
- M. Fernández Guasti, R. Rangel Rojo, **(1990)** *Diseño y construcción de láseres de pigmento.* Rev. Mex. Fís. 36, 118.

- P.A. Franken , A.E Hill, C.W. Peters, G. Weinreich. **(1961)** *Generation of optical harmonics.* Phys. Rev. Lett. 7, 118.

- D. Grischkowsky, **(1970)** *Self-focusing of light by potassium vapor.* Phys. Rev. Lett. 24, 866.

- I. Goulib, G. Erez, R. Shuker, **(1986)** *Cêrenkov emission due to laser induced moving polarization in sodium.* J. Phys. B 19, L-115.

- D.J. Harter, P.Narum, M.G. Raymer, R. W. Boyd, **(1981)** *Four-wave parametric amplification of Rabi sidebands in Sodium.* Phys. Rev. Lett. 46, 1192.
- D. J. Harter, R. W. Boyd, **(1982)** *Conical emission due to four wave mixing enhanced by the ac Stark effect in self-trapped filaments of light.* Opt. Lett. 7, 491.
- D. J. Harter, R. W. Boyd, **(1984)** *Four-wave mixing resonantly enhanced by ac-Stark-Split levels in self-trapped filaments of light.* Phys. Rev. A 29, 739.

- G. Herzberg. **(1944)**. *Atomic Spectra and atomic structure.* Dover.

- R. Hultgren *et al.* **(1963)** *Selected values of thermodynamics properties of metals and alloys.* (J. Wiley & Sons.

- M. Karlsson. **(1992)**. *Optical beams in saturable self-focusing media.* Phys. Rev. A. 47, 2726.

- J. Krasinski, D. J. Gauthier, M. S. Malcuit, R. W. Boyd, **(1985)** *Two-photon conical emission.* Opt. Commun. 54, 241.

- L. Landau, M. Lifshitz, **(1975)**. *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press.

- M. LeBerre-Rousseau, E. Ressayre, A. Tallet. **(1981)**. *Self-induced generation of an off-axis frequency shifted radiation from atoms.* Opt. Commun. 36, 31.

- A. Lezama, Y. Zhu, M. Kanskar, T.W. Mossberg, **(1990)**. *Radiative emission of driven two level atoms into the modes of an enclosing optical cavity: The transition from fluorescence to lasing*. Phys. Rev A. 41, 1576.
- M. S. Malcuit, D. J. Gauthier, R. W. Boyd, **(1985)**. *Suppression of amplified spontaneous emission by the four-wave mixing process*. Phys. Rev. Lett. 55, 1086.
- J.B. Marion, *Classical Electromagnetic Theory*.
- D. Marcuse. *Quantum Electronics*. John Wiley & Sons.
- Y. H. Meyer, **(1980)**. *Multiple conical emission from near resonant laser propagation in dense sodium vapour*. Opt. Commun. 34, 439.
- J. Pender, L. Hesselink. **(1989)**. *Conical emission and phase conjugation in atomic sodium vapour*. IEEE Journ. of Quant. Electr. 25, 395.
- A. I. Plekhanov, S. G. Rautian, V. P. Safonov, B. M. Chernobrod, **(1985)** *The nature of frequency-angular diffusion of powerful quasiresonant radiation*. Sov. Phys. JETP. 61, 249. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **88**, 426 (1985)].
- Y. Shevy, M. Rosenbluh, H. Friedmann, **(1986)**. *Stimulated excited-state Raman scattering and three-photon scattering in sodium*. Opt. Lett. 11, 85.
- Y. Shevy, M. Rosenbluh, **(1987)**. *Parametric four-wave mixing processes in sodium vapour*. Opt. Lett. 12, 257.
- Y. Shevy, M. Rosenbluh, **(1988)a**. *Multiple conical emission from a strongly driven atomic system*. J. Opt. Soc. Am. B 5, 116.
- Y. Shevy, S. Hochman, M. Rosenbluh, **(1988)b**. *Competition between stimulated three-photon scattering and parametric four wave-mixing*. Opt. Lett. 13, 215.
- C. H. Skinner, P. D. Kleiber, **(1980)** *Observation of anomalous conical emission from laser-excited barium vapour*. Phys. Rev. A. 21, 151.
- C. H. Skinner, **(1982)**. *Conical emission from atomic excited by nearly resonant laser beams*. Opt. Commun. 41, 255.
- G. Smith. **(1972)**. *Collision broadening and shift in the resonance line of calcium*. 5, diciembre.
- F.P. Schafer -Editor- **(1977)**. *Dye Lasers*. Capítulo 1. Springer Verlag.
- A. J. Stentz, M. Kauranen, J. J. Maki, G. P. Agrawal, R. W. Boyd, **(1992)** *Induced focusing and spatial wave breaking from cross-phase modulation in a self-defocusing medium*. Opt. Lett. 17, 19.

-- A. C. Tam, **(1979)** *Strong amplification of sidebands in self-focused laser beams in an atomic vapour.* Phys. Rev. A 19, 1971.

-- V. Vaichaitis, M. Ignatavichyus, V. A. Kudryashov, Y. U. Pimenov, R. **(1987)** *Yakite, Sov. J. Quantum Electron.* 14, 478. [*Kvantovaya Elektron.* 14, 762 (1987)].

-- J. F. Valley, G. Khitrova, H. M. Gibbs, J. W. Grantham, X. Jiajin. **(1990)** *cw Conical emission: first comparison and agreement between theory and experiment.* Phys. Rev Lett. 64, 2362.

-- W.G Wagner, H.A.Haus, J.H. Marburger, **(1968)** *Large Scale Self-Trapping of Optical Beams in the Paraxial Ray Approximation.* Phys. Rev. 173, 1.

-- K. Wodkiewicz, **(1979)** *Stochastic incoherence of optical Bloch equations.* Phys. Rev. A 19, 1686.

-- T. Wulle, S. Hermingahus. **(1993).** *Nonlinear Optics of Bessel Beams.* Phys Rev. Lett. 70. 1401.

-- L. You, J. Mostowski, J. Cooper, R. Shuker, **(1991)** *Cone emission from laser-pumped two-level atoms.* Phys. Rev. A 44, R6988.

-- L. You, J. Mostowski, J. Cooper, **(1992)a** *Cone emission from laser-pumped two-level atoms. I. Quantum Theory of resonant Light propagation.* Phys, Rev. A. 46, 2903 (1992).

-- L. You, J. Mostowski, J. Cooper, **(1992)b** *Cone emission from laser-pumped two-level atoms. II. Analytical Model Studies.* Phys, Rev. A. 46, 2925.

-- A. Yariv, **(1989)**, *Quantum Electronics.* John Wiley & Sons.