Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

UNA APLICACIÓN DE FAMILIAS MAD A LA TOPOLOGÍA

Tesis que presenta
Edgar Migueles Pérez
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. Richard G. Wilson

Jurado Calificador:

Presidente:	Dr. Ángel Tamariz Mascarúa	UNAM-FC
Secretario:	Dr. Constancio Hernández García	UAM-I
Vocal:	Dr. Richard G. Wilson	UAM-I

México, D. F. Septiembre 2012

Índice general

Introducción

El estudio de las familias casi disjuntas no es reciente, posiblemente el primero que habló de ellas fué S. Mrówka cuando costruyó un espacio no compacto, completamente regular y pseudocompacto alrededor de los años 60's.

El objetivo de este trabajo es usar el concepto de las familias casi disjuntas para construir un espacio topológico con determinadas caracteristicas las cuales aludiremos mas adelante. Cabe mencionar que el hacer uso de este tipo de familias uno se imagina que el espacio a construir podría no ser trivial.

Para hacer un recuento sobre la historia de este tipo de espacios, primero veremos las definiciones principales concernientes al espacio que se va a construir:

Definición 1 *Un espacio topológico se llama anti-Hausdorff si es T_1 y además cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos tienen intersección no vacía.*

Es fácil ver que un espacio es anti-Hausdorff si y sólo si cada subconjunto abierto no vacío es denso.

Definición 2 *Un espacio topológico X se llama Fréchet si X es T_1 y además para cada $A \subset X$ y cada $x \in \overline{A}$, existe una sucesión en A que converge a x.*

Definición 3 *Un espacio topológico X se dice LSU (Límite Secuencial Único) si X es T_1 y para toda sucesión $S = \{x_n\}$ que converge a algún punto $x \in X$, $S \cup \{x\}$ es cerrado.*

Sea X un espacio topológico T_1 y A un subconjunto de X. Entonces definimos $\overline{A}^s = \{x \in X : \text{existe una sucesión en A que converge a x}\}$, a este conjunto se llama la cerradura secuencial de A. Decimos que $U \subseteq X$ es una s-vecindad de $x \in X$ si $x \in \overline{(X \setminus U)}^s$.

Definición 4 *Un espacio topológico X se dice s-Hausdorff si X es T_1 y cualesquiera dos puntos distintos tienen s-vecindades disjuntas. X es s-anti-Hausdorff si cualesquiera dos puntos distintos no tienen s-vecindades disjuntas*

La historia del problema que vamos a tratar en esta tesis es la siguiente:

1) En un seminario de Topología en el año 1939, Čech se cuestiona sobre la existencia de un espacio topológico que además de ser LSU sea s-anti-Hausdorff. En el año de 1939 Novák presenta un ejemplo de este espacio.

2) Tiempo después el mismo Novák se cuestiona sobre la existencia de un espacio topológico que además de ser anti-Hausdorff y LSU sea de Fréchet.

3) En 1971, S. P. Franklin y M. Rajagapalan presentan un ejemplo de un espacio topológico s-anti-Hausdorff y LSU pero no-Fréchet. Cabe mencionar que estos dos matematicos no conocían el ejemplo dado por Novák.

4) Finalmente Eric K. van Douwen logra responder la pregunta de Novák y lo hace construyendo un espacio topológico en ZFC que además de ser un espacio anti-Hausdorff, LSU y Fréchet, era compacto y numerable. Este espacio fué publicado en un artículo póstumo en el año 1993.

Veamos algunos ejemplos sencillos de espacios que tienen algunas propiedades mencionadas arriba pero no todas.

Ejemplo 1: Sea X un conjunto infinito numerable. Definimos sobre este conjunto la topología de los complementos finitos. Este espacio topológico es Fréchet y anti-Hausdorff. Sin embargo, observemos que cada sucesión inyectiva converge a todos los puntos del espacio. Esto demuestra que el espacio no es LSU.

Ejemplo 2: Sea X no numerable y $\tau = \{U : X \setminus U \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces el espacio (X, τ) es anti-Hausdorff, LSU pero no es Fréchet

Por tanto, lo que se hace en este trabajo es presentar la ingeniosa construcción del espacio dada por van Douwen. Es por eso que se hace énfasis en la importancia de los teoremas del capítulo 2.

Veamos ahora la estructura de la tesis:

En el Capítulo 1 se demuestran varios resultado sobre familias AD en $[\omega]^\omega$, entre los cuales podríamos decir que el mas importante es el que asegura la existencia de familias AD maximales en $[\omega]^\omega$.

En el Capítulo 2, se podría pensar que es la parte fuerte de esta tesis, se desarrollan resultados los cuales garantizan la existencia de familias MAD-cortables. Este concepto se define en este capítulo y es fundamental en el desarrollo de la construcción de nuestro espacio que tendrá las propiedades de ser LSU, Fréchet y anti-Hausdorff.

En el Capítulo 3 aplicaremos los resultados de los dos capítulos anteriores para finalmente construir el espacio topológico que será anti-Hausdorff, LSU y Fréchet. Encontrar un espacio topológico que cumpla estas tres condiciones simultaneamente es en realidad difícil. Sin embargo van Douwen construyó un espacio que además de cumplir estas tres condiciones, también es compacto y numerable.

Capítulo 1

Resultados sobre familias AD

Sea κ un cardinal infinito, recordemos que:

$$[X]^{\kappa} = \{A \in P(X) \,:\, |A| = \kappa\}$$
$$[X]^{<\kappa} = \{A \in P(X) \,:\, |A| < \kappa\}$$

Definición 5 *Una colección $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ se llama familia AD (casi disjunta) si $\forall A, B \in \mathcal{A}$ con $A \neq B$, se cumple que $|A \cap B| < \omega$.*

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{A} = \{\omega\}$. Claramente $\mathcal{A}$ es una familia AD en $[\omega]^{\omega}$. Observe que $|\mathcal{A}| = 1$

Ejemplo 2. Denotemos como $\mathbb{P}$ al conjunto de los números primos. Ahora formemos los siguientes conjuntos de números naturales:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{2^k \,:\, k \in \mathbb{N}\} \\
A_3 &= \{3^k \,:\, k \in \mathbb{N}\} \\
A_5 &= \{5^k \,:\, k \in \mathbb{N}\} \\
&\vdots \\
A_{p_i} &= \{p_i^k \,:\, k \in \mathbb{N} \text{ y } p_i \text{ es el i-ésimo número primo}\}
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{C} = \{A_{p_i} : p_i \in \mathbb{P}\}$. Demostraremos que $\mathcal{C}$ es una familia AD en $[\omega]^{\omega}$. Como cada elemento de $\mathcal{C}$ es infinito, entonces solo basta probar que la intersección de dos elemetos distintos de $\mathcal{C}$ es finita. Pero si $p_i \neq p_j$, entonces $p_i^k \neq p_j^l$ $\forall k, l \in \mathbb{N}$. Observe que $|\mathcal{C}| = \omega$.

Ejemplo 3. Denotemos como $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales. Sabemos que para cualquier $p \in \mathbb{I}$, existe una sucesión $\{x_{(p,i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de números racionales que converge a p. Sea $D_p = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_{(p,i)}\}$ donde $\{x_{(p,i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión, elegida previamente, de racionales que converge a p. Finalmente sea $\mathcal{D} = \{D_p \ : \ p \in \mathbb{I}\}$. Claramente $\mathcal{D}$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$ ya que para cada $p \in \mathbb{I}$, $|D_p| = \omega$ y si p y q son dos números irracionales distintos, $|D_p \cap D_q| < \omega$. Observe que $|\mathcal{D}| = \mathfrak{c}$.

Puesto que $|\mathbb{Q}| = \omega$, $\mathcal{D}$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$. Naturalmente $\mathcal{D}$ no es numerable.

Con estos tres ejemplos observamos que existen familias AD en $[\omega]^\omega$ finitas, infinitas numerables y no numerables, sin embargo en este trabajo, cuando hablemos de familias AD entenderemos que estas familias son infinitas a menos que se especifique lo contrario.

El siguiente Teorema, el cual requiere el uso del Lema de Zorn para demostrarse, es un resultado muy importante en el estudio de las familias AD ya que a partir de este, se puede garantizar que cualquier familia AD en $[\omega]^\omega$ está contenida en alguna familia AD maximal de $[\omega]^\omega$. Mas aún, el resultado garantiza la existencia de familias AD maximales en $[\omega]^\omega$.

Teorema 1.1 *Toda familia AD en $[\omega]^\omega$ está contenida en una familia AD maximal en $[\omega]^\omega$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una familia AD en $[\omega]^\omega$. Consideremos

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es una familia AD en } [\omega]^\omega \text{ y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$$

Como haremos uso del Lema de Zorn, tomaremos una cadena $\mathfrak{M} = \{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{F}$ y demostraremos que $\bigcup \mathfrak{M} \in \mathfrak{F}$. Se tienen que demostrar dos cosas:

1) $\mathcal{C} \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$. Esto es inmediato ya que $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ y por tanto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_i$ para cualquier i en I.

2) $\bigcup \mathfrak{M}$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$. En efecto, para esto tomemos dos elementos A, B en $\bigcup \mathfrak{M}$, esto quiere decir que $A \in \mathcal{M}_i$ y $B \in \mathcal{M}_j$ para algunos $i, j \in I$. Por ser $\mathfrak{M}$ una cadena podemos suponer que $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$. Por lo anterior concluimos que $A, B \in \mathcal{M}_j$. Ahora, por ser $\mathcal{M}_j$ una familia AD en $[\omega]^\omega$, se tiene que

$|A \cap B| < \omega$.

Por 1) y 2) concluimos que $\bigcup \mathfrak{M} \in \mathfrak{F}$. Habiendo demostrado esto, podemos hacer uso del Lema de Zorn y garantizar la existencia de un elemento maximal en $\mathfrak{F}$, o sea que se garantiza la existencia de una familia AD maximal en $[\omega]^\omega$ que contiene a $\mathcal{C}$. ◀

Definición 6 *Si una colección $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia AD maximal en $[\omega]^\omega$, diremos que la familia $\mathcal{A}$ es una familia MAD.*

Aclaremos que estas definiciones de familias AD y MAD se pueden generalizar a cardinales mas grandes que ω, o sea que podemos hablar de familias AD ó MAD en $[\kappa]^\kappa$ donde κ es cualquier cardinal infinito. Sin embargo, en este trabajo nos basta con resultados en los cuales el cardinal es ω.

Teorema 1.2 *Si $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son familias MAD en $[X_1]^\omega$ y $[X_2]^\omega$ respectivamente donde $X_1, X_2 \subseteq \omega$ son tales que $|X_1 \cap X_2| < \omega$ y $\forall A \in \mathcal{M}_1$ y $\forall B \in \mathcal{M}_2$ se tiene que $|A \cap B| < \omega$, entonces $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es una famila MAD en $[X_1 \cup X_2]^\omega$.*

Demostración.

a) $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es AD. En efecto, sean $A \in \mathcal{M}_1$ y $B \in \mathcal{M}_2$ tales que $A \neq B$. Por hipótesis se tiene que $|A \cap B| < \omega$, por lo tanto $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es una familia AD.

b) $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es maximal. En efecto, sea $S \subseteq [X_1 \cup X_2]^\omega$. Sin perder generalidad, supongamos que $|S \cap X_1| < \omega$ y que $|S \cap X_2| = \omega$. Como $|S \cap X_2| = \omega$, entonces $\exists K \in \mathcal{M}_2$ tal que $|(S \cap X_2) \cap K| = \omega$, por lo tanto $|S \cap K| = \omega$ y $K \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

Por tanto se concluye que $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ es maximal en $X_1 \cup X_2$. ◀

Teorema 1.3 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD infinita, entonces $\mathcal{A}$ es no numerable.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $\mathcal{A}$ es numerable, es decir que $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$.

Observación: Si $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$, entonces $|A \cap B| < \omega$ por ser $\mathcal{A}$

una familia AD. Además esto implica que $|A \setminus B| = \omega$. Mas aún, siguiendo el mismo argumento, si $A \in \mathcal{A}$ y $A \notin \{B_1, B_2, \dots B_n\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i| = \omega \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Hagamos las siguientes elecciones:

1) $x_1 \in A_1$

2) $x_2 \in (A_2 \setminus A_1)$. Podemos hacer la elección de este x_2 con $x_2 \neq x_1$ ya que $|A_2 \setminus A_1| = \omega$ por observación anterior.

$\vdots$

n) $x_n \in A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$. Podemos hacer la elección de este x_n con $x_n \notin \{x_1, x_2, \dots x_{n-1}\}$ ya que $\left| A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \right| = \omega$ por la observación anterior.

$\vdots$

Definimos:

$$\mathbb{X} = \left\{ x_m : \; x_m \in A_m \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \right) \; \text{ con } m \in \mathbb{N} \right\}$$

Claramente $\mathbb{X}$ es un conjunto infinito. Además observe que

$$(\forall\, A_i \in \mathcal{A})(\mathbb{X} \cap A_i \subseteq \{x_1, \dots, x_i\}) \;\; \forall i \in \mathbb{N}$$

es decir, no existe ningún elemento de $\mathcal{A}$ que intersecte a $\mathbb{X}$ en un conjunto infinito lo que contradice el hecho de que $\mathcal{A}$ es una familia MAD. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es no numerable. ◄

Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ y $X \in [\omega]^\omega$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\#X &= \{A \in \mathcal{A} : \; |A \cap X| = \omega\} \\ \mathcal{A}^+ &= \{X \subseteq \omega : \; |\mathcal{A}\#X| \geq \omega\} \\ tk(\mathcal{A}) &= min\{|\mathcal{A}\#X| : \; X \in \mathcal{A}^+\} \end{aligned}$$

Teorema 1.4 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces para cada $Y \in \mathcal{A}^+$, la colección $\mathcal{A} \upharpoonright Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\#Y\}$ es una familia infinita MAD en $[Y]^\omega$. Además, $(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \cup \{\omega \setminus Y\}$ es una familia MAD.*

Demostración. Consideremos $Y \in \mathcal{A}^+$. Demostremos que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia MAD en $[Y]^\omega$.

a) Veamos que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia AD.

En efecto, tomemos $P, Q \in \mathcal{A} \upharpoonright Y$ con $P \neq Q$. Entonces $P = A \cap Y$ y $Q = B \cap Y$ para algunos $A, B \in \mathcal{A}$. Como $P \neq Q$, entonces $A \neq B$ y como estos conjuntos son elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces $|A \cap B| < \omega$, así $|P \cap Q| < \omega$. Por lo tanto $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una famila AD.

b)Veamos que $\omega \leq |\mathcal{A} \upharpoonright Y|$

En efecto, como $Y \in \mathcal{A}^+$, entonces $|\mathcal{A}\#Y| \geq \omega$, esto es

$$|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap Y| = \omega\}| \geq \omega$$

de esto último se deduce:

$$|\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\#Y\}| \geq \omega$$

por lo tanto $|\mathcal{A} \upharpoonright Y| \geq \omega$.

c) Por último veamos que $\mathcal{A} \upharpoonright Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\#Y\}$ es una familia MAD en $[Y]^\omega$.

En efecto, sea $B \in [Y]^\omega$. Como $\mathcal{A}$ es una familia MAD, entonces $\exists A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|A_0 \cap B| = \omega$, esto implica que $|A_0 \cap Y \cap B| = \omega$. Observemos que $|A_0 \cap Y| = \omega$ por la definición de $\mathcal{A} \upharpoonright Y$, por lo tanto, $\exists C = A_0 \cap Y \in \mathcal{A}$ tal que $|C \cap B| = \omega$.

Concluimos que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia MAD infinita en $[Y]^\omega$.

Demostremos ahora que $(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \cup \{\omega \setminus Y\}$ es una familia MAD.

Si $\omega \setminus Y$ fuera finito, entonces $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ seria una familia MAD en $[\omega]^\omega$.

Si $\omega \setminus Y$ es infinito, $\{\omega \setminus Y\}$ es una familia MAD en $[\omega \setminus Y]^\omega$, y como $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia MAD en $[Y]^\omega$, entonces por el teorema anterior $\mathcal{A} \upharpoonright Y \cup \{\omega \setminus Y\}$ es una familia infinita MAD en $[\omega]^\omega$. ◀

Denotemos como $\mathfrak{a}$ al mínimo número cardinal $|\mathcal{A}|$ dónde $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$.

Teorema 1.5 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces $\mathfrak{a} \leq tk(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{A}^+$. Definimos la función $f : \mathcal{A}\#X \to \mathcal{A} \upharpoonright X$ como $f(A) = A \cap X$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Claramente f es una biyección ya que por hipótesis $\mathcal{A}$ es una familia MAD y $X \in \mathcal{A}^+$.

Observemos que por el Teorema 1.4, $\mathcal{A} \upharpoonright X$ es una familia MAD en $[X]^\omega$, así que

$$|\mathcal{A}\#X| = |\mathcal{A} \upharpoonright X| \geq \mathfrak{a}$$

para cualquier $X \in \mathcal{A}^+$, en particular $tk(\mathcal{A}) \geq \mathfrak{a}$. ◀

Introduciremos un nuevo concepto que es muy importante en el estudio de las familias AD.

Definición 7 *Decimos que una familia $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ es una $\mathbb{P}$-colección si para cada sucesión $\langle Q_n : n \in \omega\rangle$ en $\mathcal{D}$ tal que $(\forall n \in \omega)(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $(\forall n \in \omega)(|D - Q_n| < \omega)$.*

En [4, Capítulo 3] se estudian 6 cardinales importantes en Topología, uno de ellos es: $\mathfrak{p}$:=min$\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F}$ es una subfamilia de $[\omega]^\omega$ con la piff (la propiedad de la intersección finita fuerte; o sea que cada subfamilia finita no vacía tiene intersección infinita) y que $\nexists\, A$ en $[\omega]^\omega$ tal que $\forall\, F \in \mathcal{F}$, $|A \setminus F| < \omega$ (no tiene la propiedad de la pseudo intersección infinita)$\}$. Se menciona este cardinal por que tiene cierta relación con la definición de una $\mathbb{P}$-colección.

Teorema 1.6 *$\omega < \mathfrak{p}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{p} = |\mathcal{F}|$ y supongamos también que $\mathcal{F}$ es numerable o sea que $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \omega\}$.

Observemos que como $\mathcal{F}$ tiene la piff, entonces

$$*) \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i \setminus B\right) \neq \emptyset \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

donde cada $F_i \in \mathcal{F}$ y B es cualquier conjunto finito.

Tomando en cuenta $*$) hagamos las siguientes elecciones:

1) $x_1 \in F_1$

2) $x_2 \in (F_2 \cap F_1) \setminus \{x_1\}$. Podemos hacer la elección de este x_2 con $x_2 \neq x_1$ por $*$)

$\vdots$

n) $x_n \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \setminus \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$. Podemos hacer la elección de este x_n con $x_n \notin \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$ por $*$).

$\vdots$

Definimos:

$$\mathbb{F} = \{x_m : \ x_m \in \left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \setminus \{x_1, x_2, \ldots x_{m-1}\} \ \text{con } m \in \mathbb{N}\}$$

Claramente $\mathbb{F}$ es un conjunto infinito. Además observe que

$$(\forall\, F \in \mathcal{F})(|\mathbb{F} \setminus F| < \omega)$$

pero esto contradice el hecho de que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de la pseudo intersección infinita. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es no numerable. ◀

De hecho se tiene que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{a}$, la demostración también se encuentra en [4, Capítulo 3].

Observe que a causa del teorema anterior, $[\omega]^\omega$ es una $\mathbb{P}$-colección, ya que si no, existiría una sucesión $\langle Q_n : \ n \in \omega \rangle$ en $[\omega]^\omega$ tal que $(\forall n \in \omega)(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$ para la cual no existe $D \in [\omega]^\omega$ que cumpla que $(\forall n \in \omega)(|D - Q_n| < \omega)$. Pero claramente el conjunto $\mathcal{Q} = \{Q_n : \ n \in \omega\}$ es una subfamilia de $[\omega]^\omega$ con la piff que no tiene la propiedad de la pseudo intersección infinita así que por teorema anterior se tendría que $\omega < \mathfrak{p} \leq |\mathcal{Q}| = \omega$ lo cual es una contradicción.

Capítulo 2

Condiciones para obtener una familia MAD cortable en $[\omega]^\omega$

En este capítulo se definirá el concepto de familias cortables en $[\omega]^\omega$.

Con seguridad, podemos decir que este capítulo es la parte central de esta tesis, aquí se demuestran varios lemas y teoremas que relacionan los conceptos de familias MAD, familias cortables y $\mathbb{P}$-colecciónes y estos a su vez son un preámbulo para demostrar un teorema (el principal de este capítulo y quizá de todo el trabajo) que muestra las condiciones para poder construir una familia MAD cortable en $[\omega]^\omega$.

Estos resultados se deben a Eric K. van Douwen los cuales fueron publicados póstumamente en *Topology and Applications* en 1993.

2.1. Exhibiendo condiciones para la obtención de una familia MAD cortable en $[\omega]^\omega$

Definición 8 *Decimos que una función $L : \mathcal{A} \to \omega$ es una cortadura de la familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ si satisface*

$$\forall X \subseteq \omega \left(X \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A} \# X} L(A) = \omega \right)$$

Diremos que una familia $\mathcal{A}$ es cortable si admite una cortadura.

El siguiente lema nos será de gran utilidad para demostrar algunos resultados que a su vez sirven para demostrar el importante teorema que asegura la existencia de una familia MAD cortable. Su demostración requiere de una argumento diagonal similar al usado por G. Cantor cuando demostró la no numerabilidad de $\mathbb{R}$.

Lema 2.1 *Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ subcolecciones no vacías a lo más numerables en $[\omega]^\omega$ tales que:*

$$(\forall K \in \mathcal{K})(\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}) \left[1 \leq |\mathcal{F}| < \omega \Rightarrow |K \cap \bigcap \mathcal{F}| = \omega\right]$$

Entonces existe un subconjunto Q de ω con las siguientes propiedades:

1) $\forall K \in \mathcal{K}, \quad |K \cap Q| = \omega$
2) $\forall L \in \mathcal{L}, \quad |Q - L| < \omega$

Demostración. Como $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son subcolecciones no vacías a lo más numerables de $[\omega]^\omega$, podemos enumerar los elementos de cada familia, digamos $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots\}$ y $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots\}$.

Construyamos la siguiente lista de conjuntos:

1) $\{K_1 \cap L_1\}$

2) $\{K_1 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{2} L_i,\ K_2 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{2} L_i\}$

3) $\{K_1 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{3} L_i,\ K_2 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{3} L_i,\ K_3 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{3} L_i\}$

$\vdots$

n) $\{K_1 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i,\ K_2 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i,\ K_3 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i,\ K_4 \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i, \ldots,\ K_n \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i\}$

$\vdots$

Reescribiendo cada conjunto de cada renglón de la lista anterior se tiene:

1) $\{K_1 \cap L_1\}$

2) $\{K_m \cap \bigcap\limits_{i=1}^{2} L_i :\ m \leq 2\}$

3) $\{K_m \cap \bigcap\limits_{i=1}^{3} L_i :\ m \leq 3\}$

$\vdots$

n) $\{K_m \cap \bigcap_{i=1}^{n} L_i : \ m \leq n\}$

$\vdots$

Sabemos que $|K_1 \cap L_1| = \omega$, elegimos un elemento $x_{1,1} \in K_1 \cap L_1$.
Por hipótesis $|K_1 \cap \bigcap_{i=1}^{2} L_i| = \omega$, asi que podemos elegir $x_{1,2} \neq x_{1,1}$ en $K_1 \cap \bigcap_{i=1}^{2} L_i$.

También por hipotesis se tiene que $|K_2 \cap \bigcap_{i=1}^{2} L_i| = \omega$, sea $x_{2,2} \notin \{x_{1,1}, x_{1,2}\}$ en $K_2 \cap \bigcap_{i=1}^{2} L_i$.

$\vdots$

En general observemos que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(|K_m \cap \bigcap_{i=1}^{n} L_i| = \omega)$ por hipótesis, entonces podemos elegir $x_{m,n} \notin \{x_{p,q} : \ 1 \leq p < m, \, 1 \leq q < n\}$ en $K_m \cap \bigcap_{i=1}^{n} L_i$.

Elegidos estos elementos, sea $Q = \{x_{m,n} : \ m \leq n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que Q cumple 1) y 2). En efecto:

El conjunto Q cumple con la condición 1) pues si $K_j \in \mathcal{K}$, entonces tenemos que $\{x_{j,n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Q \cap K_j$; pero por la construcción de Q, $|\{x_{j,n} : n \in \mathbb{N}\}| = \omega$ y por lo tanto $|Q \cap K_j| = \omega$.

El conjunto Q cumple la condición 2) pues si $L_j \in \mathcal{L}$, entonces tenemos que $Q - L_j \subseteq \{x_{p,q} : 1 \leq \ p, q < \ j\}$ por la construcción de Q. Pero claramente $\{x_{p,q} : 1 \leq \ p, q < j\}$ es finito, por lo tanto $|Q - L_j| < \omega$. ◀

Lema 2.2 *Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD en $[\omega]^\omega$. Si $\langle Q_n : \ n \in \omega \rangle$ es una sucesión de elementos en $\mathcal{A}^+$ tal que $(\forall n \in \omega)(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$, entonces $\bigcap_{n \in \omega} (\mathcal{A} \# Q_n)$ es infinito.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{F} = \bigcap_{n \in \omega} (\mathcal{A} \# Q_n)$ y supongamos que $\mathcal{F}$ es finito. Entonces podemos decir por ejemplo que $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$ donde cada elemento

$A_i \in \mathcal{F}$ cumple que $(\forall n \in \omega)(|A_i \cap Q_n| = \omega)$.

Sea $Q_m \in \langle Q_n : n \in \omega \rangle$ arbitrario, por hipótesis se tiene que $Q_m \in \mathcal{A}^+$, es decir $|\mathcal{A}\#Q_m| \geq \omega$. Por esto último, podemos elegir un elemento $A \in \mathcal{A}\#Q_m$ distinto de todos los elementos de $\mathcal{F}$, este A cumple que $|A \cap Q_m| = \omega$ y además $|A \cap A_i| < \omega$ para toda $1 \leq i \leq s$ por ser $\mathcal{A}$ una familia AD. Por otro lado, como $(A \cap Q_m) - \bigcup \mathcal{F}$ es infinito y $(A \cap Q_m) - \bigcup \mathcal{F} \subseteq (Q_m - \bigcup \mathcal{F})$, entonces se tiene que $(Q_m - \bigcup \mathcal{F})$ es infinito.

En resumen, lo que hemos demostrado con el razonamiento anterior es

$$(\forall n \in \omega)(Q_n - \bigcup \mathcal{F} \in [\omega]^\omega) \tag{2.1}$$

Además, como $Q_{n+1} \subseteq Q_n$ se tiene que

$$(Q_{n+1} - \bigcup \mathcal{F}) \subseteq (Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \tag{2.2}$$

Estas observaciones las utilizaremos cuando apliquemos el Lema 2.1 a las siguientes subcolecciones.

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{Q_n : n \in \omega\} \\ \mathcal{L} &= \{Q_n - \bigcup \mathcal{F} : n \in \omega\} \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ son subcolecciones a lo más numerables de $[\omega]^\omega$. Como haremos uso del Lema 2.1 anterior, tenemos que verificar que estas subcolecciones cumplen la hipótesis del lema, es decir, tenemos que verificar:

$$(\forall K \in \mathcal{K})(\forall \mathcal{T} \subseteq \mathcal{L})[1 \leq |\mathcal{T}| < \omega \Rightarrow |K \cap \bigcap \mathcal{T}| = \omega]$$

Sean $Q_n \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{T} = \{Q_s - \bigcup \mathcal{F} : s \in W, |W| < \omega\} \subset \mathcal{L}$. Como $\mathcal{T}$ es finito, entonces de 2.2) se deduce que $\bigcap \mathcal{T} = Q_j - \bigcup \mathcal{F}$ para alguna $j \in W$.

Así, $Q_n \cap \bigcap \mathcal{T} = Q_n \cap (Q_j - \bigcup \mathcal{F})$. Hay dos casos:

i) Si $Q_n \subseteq Q_j$. Como $(Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \subseteq Q_n$ y $(Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \subseteq (Q_j - \bigcup \mathcal{F})$, entonces se tiene que $(Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \subseteq Q_n \cap (Q_j - \bigcup \mathcal{F})$. Pero por 2.1), $Q_n - \bigcup \mathcal{F}$ es infinito, asi que $|Q_n \cap (Q_j - \bigcup \mathcal{F})| = \omega$. Por lo tanto $|Q_n \cap \bigcap \mathcal{T}| = \omega$.

ii) Si $Q_j \subseteq Q_n$. Se tiene que $Q_n \cap (Q_j - \bigcup \mathcal{F}) = (Q_j - \bigcup \mathcal{F})$, por 2.1) se concluye que $|Q_n \cap (Q_j - \bigcup \mathcal{F})| = \omega$. Por lo tanto $|Q_n \cap \bigcap \mathcal{T}| = \omega$.

Como $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ cumplen la hipótesis del Lema 2.1, entonces existe $P \subseteq \omega$ tal que:

a) $\forall\, Q_n \in \mathcal{K}$, $|P \cap Q_n| = \omega$.

b) $\forall (Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \in \mathcal{L}$, $|P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})| < \omega$.

Observemos que como $P \subseteq \omega$ y $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces existe $A^* \in \mathcal{A}$ tal que $|P \cap A^*| = \omega$.

Afirmamos que $A^* \notin \mathcal{F}$.

En efecto, sea $(Q_n - \bigcup \mathcal{F}) \in \mathcal{L}$, esto implica que $|P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})| < \omega$ por b). Por otro lado tenemos $((P \cap A^*) - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})) \subseteq (P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F}))$, pero

$$((P \cap A^*) - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})) = [(P \cap A^*) - Q_n] \cup [P \cap A^* \cap \bigcup \mathcal{F}]$$

Si $A^* \in \mathcal{F}$, entonces $|P \cap A^* \cap \bigcup \mathcal{F}| = \omega$, lo cual es una contradicción ya que $((P \cap A^*) - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})) \subseteq (P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F}))$ y $|P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})| < \omega$, por lo tanto $A^* \notin \mathcal{F}$.

Pero afirmamos también que $A^* \in \mathcal{F}$.

En efecto, si $\exists\, Q_n \in \mathcal{K}$ tal que $|A^* \cap Q_n| < \omega$, entonces como $|P \cap A^*| = \omega$ se tendría que $|P - Q_n| = \omega$ lo cual contradice el hecho de que $|P - (Q_n - \bigcup \mathcal{F})| < \omega$ que es una consecuencia de b), por lo tanto $(\forall n \in \omega)(|A^* \cap Q_n| = \omega)$, es decir $A^* \in \mathcal{F}$.

Por los dos razonamientos anteriores se tiene $A^* \in \mathcal{F}$ y $A^* \notin \mathcal{F}$, lo cual genera una contradicción, así que $|\mathcal{F}| \geq \omega$. ◄

Teorema 2.3 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección.*

Demostración. Consideremos $\langle Q_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de elementos en $\mathcal{A}^+$ tal que $(\forall n \in \omega)(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$. Por Lema 2.2 se tiene que $\mathcal{F} = \bigcap_{n \in \omega} (\mathcal{A} \# Q_n)$ es infinito. No olvidemos que tenemos que encontrar un Q en $\mathcal{A}^+$ que cumpla que $(\forall n \in \omega)(|Q - Q_n| < \omega)$.

Usemos el Lema 2.1 para las siguientes familias:

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}, \text{ una subfamilia numerable (existe ya que } |\mathcal{F}| \geq \omega)$$
$$\text{y } \ \mathcal{L} = \{Q_n : n \in \omega\}$$

así que tenemos que probar que estas familias cumplen

$$(\forall K \in \mathcal{K})(\forall \mathcal{T} \subseteq \mathcal{L})[1 \leq |\mathcal{T}| < \omega \Rightarrow |K \cap \bigcap \mathcal{T}| = \omega]$$

En efecto, sean $K \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ tal que $|\mathcal{T}| < \omega$. Como $\mathcal{T}$ es finito y por hipótesis se tiene que $(\forall n \in \omega)(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$, entonces $\bigcap \mathcal{T} = Q_p$ para alguna $p \in \omega$, así $K \cap \bigcap \mathcal{T} = K \cap Q_p$, pero $K \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$, esto implica, por definición de $\mathcal{F}$, que $(\forall n \in \omega)(|K \cap Q_n| = \omega)$, por lo tanto $|K \cap \bigcap \mathcal{T}| = \omega$.

Hemos demostrado que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ cumplen la hipótesis del Lema 2.1, así que $\exists\, Q \subseteq \omega$ tal que

a) $\forall\, K \in \mathcal{K},\ |Q \cap K| = \omega$.

b) $\forall\, Q_n \in \mathcal{L},\ |Q - Q_n| < \omega$.

Este conjunto Q es el candidato para cumplir lo deseado. Como cumple b), solo falta cerciorarnos de que $Q \in \mathcal{A}^+$. Pero observemos que por a), $|\mathcal{K}| = \omega$ y además $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, entonces existe un número infinito de elementos de $\mathcal{A}$ que intersectan a Q en un conjunto infinito, es decir $|\mathcal{A}\#Q| \geq \omega$, por lo tanto $Q \in \mathcal{A}^+$. Con esto terminamos la prueba de que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. ◄

Lema 2.4 *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}^+ \subseteq \mathcal{D}^+$ si y sólo si $\mathcal{C}^+ = \mathcal{D}^+$.*

Demostración. Es suficiente probar que $\mathcal{D}^+ \subseteq \mathcal{C}^+$. Si $X \in \mathcal{D}^+$ por definición, existe un número infinito de elementos de $\mathcal{D}$ que intersectan a X en un conjunto infinito, pero por hipótesis, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, así que hay un número infinito de elementos de $\mathcal{C}$ que intersectan a X en un conjunto infinito, por lo tanto $X \in \mathcal{C}^+$. ◄

Lema 2.5 *Sean $\mathcal{A}$ una familia AD en $[\omega]^\omega$, $Y \in \mathcal{A}^+$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$. Si $Y \notin \mathcal{U}^+$, entonces $\exists\, T \in \mathcal{A}^+$ tal que:*

1) $T \subseteq Y$

2) $\mathcal{U}\#T = \emptyset$

Demostración. Sean $Y \in \mathcal{A}^+$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $Y \notin \mathcal{U}^+$.

Como $Y \notin \mathcal{U}^+$ por definición sabemos que $|\mathcal{U}\#Y| < \omega$, entonces podemos suponer que $\mathcal{U}\#Y = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Definimos
$$T = Y \setminus \bigcup(\mathcal{U}\#Y) = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
Afirmamos que este T es el conjunto buscado.

a) Veamos primero que T no es finito.

En efecto, como $Y \in \mathcal{A}^+$ entonces $|\mathcal{A}\#Y| \geq \omega$ y esto asegura la elección de un elemento, digamos A, que no está en $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tal que $|A \cap Y| = \omega$.

Como $A \cap Y \subseteq Y$, entonces $(A \cap Y) \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \subseteq Y \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = T$ pero $|A \cap Y| = \omega$ y $|A \cap A_i| < \omega$ para $i = 1, 2, \ldots n$ por ser $\mathcal{A}$ una familia AD. De estas dos ultimas observaciones se deduce que $|(A \cap Y) \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)| = \omega$ y por tanto $|T| \geq \omega$.

b) Demostremos que $T \in \mathcal{A}^+$.

Observemos que para la A del argumento anterior, como $|A \cap Y| = \omega$ y además $|A \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| < \omega$ (esto último por ser $\mathcal{A}$ una famlia AD), se tiene que $A \cap T = [A \cap (Y \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n))]$ es infinito.

Sin embargo, este argumento funciona para demostrar que $|A \cap T| = \omega$ para cualquier $A \in \mathcal{A} \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ con $|A \cap Y| = \omega$, pero $|\mathcal{A}\#Y| \geq \omega$ así que $|\mathcal{A}\#T| \geq \omega$ y por tanto $T \in \mathcal{A}^+$.

c) Claramente
$$T = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq Y.$$

d) Finalmente demostraremos que $\mathcal{U}\#T = \emptyset$.

Supongamos que $\mathcal{U}\#T \neq \emptyset$. Esto implica que $\exists A \in \mathcal{U}$ tal que $|A \cap T| = \omega$. Como $T \subseteq Y$, deducimos que $|A \cap Y| = \omega$, es decir $A \in \mathcal{U}\#Y = \{A_1, \ldots, A_n\}$, pero $A \cap T = A \cap (Y \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) = (A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) \setminus (A \setminus Y)$. Sin embargo como $A \in \{A_1, \ldots, A_n\}$, entonces $A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \emptyset$. Así tenemos que $A \cap T = \emptyset$, es decir $|A \cap T| = 0$ lo cual contradice el hecho de que $|A \cap T| = \omega$. Por lo tanto $\mathcal{U} \# T = \emptyset$. ◀

Lema 2.6 *Sean $\mathcal{A}$ una familia AD en $[\omega]^\omega$ y $X, Y \subseteq \omega$. Entonces*

$$X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+ \text{ si y sólo si } X \cap Y \in \mathcal{A}^+$$

Demostración. Sean $X, Y \subseteq \omega$.

El conjunto $X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$ si y sólo si $|(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \# X| \geq \omega$, si y sólo si existe un número infinito de elementos de $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ que intersectan a X en un conjunto infinito, si y sólo si existe un número infinito de elementos de la forma $A \cap Y$ donde $A \in \mathcal{A}$ que intersectan a X en un conjunto infinito, si y sólo si existe un número infinito de elementos de $\mathcal{A}$ que intersectan a $X \cap Y$ en un conjunto infinito, si y sólo si $X \cap Y \in \mathcal{A}^+$ por definición. ◀

Lema 2.7 *Sean $\mathcal{M}$ una familia AD en $[\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{M}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}^+ = \mathcal{B}^+$, entonces $(\forall\, S \in \mathcal{M}^+)(\exists\, R \in \mathcal{M}^+)(\exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B})$ tales que:*

1) $R \subseteq S$

2) $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ = (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+ = ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$

Demostración. En vez de demostrar 2), lo que probaremos primeramente será:

$$2') \quad (\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+ \cap ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$$

Por hipótesis se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, lo que significa que $|\mathcal{B}| \leq |\mathbb{R}|$. Así que en $\mathcal{B}$ existe una colección indexada de conjuntos, digamos $\langle \mathcal{B}_{(n,i)} : \ n \in \omega \text{ y } i \in 2 \rangle$ tal que:

a) $(\forall\, n \in \omega)(\mathcal{B}_{(n,1)} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{(n,0)})$,

b) $(\forall\, C \neq D \in \mathcal{B})(\exists\, n \in \omega)(C \in \mathcal{B}_{(n,0)} \text{ y } D \in \mathcal{B}_{(n,1)})$.

Comencemos la demostración del Lema. Sea $M \in \mathcal{M}^+$. Lo que se pretende es construir una sucesión $\langle R_n \ : \ n \in \omega \rangle$ y una función $s : \omega \to 2$ tales que:

c) $(\forall\, n \in \omega)(R_{n+1} \subseteq R_n \subseteq S \text{ donde } R_n \in \mathcal{M}^+)$,

d) $(\forall\, n \in \omega)(\mathcal{B}_{(n,s(n))} \,\#\, R_{n+1} = \emptyset)$.

Sea $R_0 = S$. Siguiendo, sea $n \in \omega$ y supongamos que R_n ya está construido.

Si

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_n)^+ \subseteq (\mathcal{B}_{(n,0)} \upharpoonright R_n)^+ \cap (\mathcal{B}_{(n,1)} \upharpoonright R_n)^+ \tag{2.3}$$

nuestra construcción termina y se establece el Lema (es decir 1) y 2') se cumplen). Veamos porqué:

A partir de (2.4) y a) tenemos

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_n)^+ \subseteq (\mathcal{B}_{(n,0)} \upharpoonright R_n)^+ \cap ((\mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_{(n,0)}) \upharpoonright R_n)^+$$

Llamemos $R = R_n$ y $\mathcal{U} = \mathcal{B}_{(n,0)}$, estos conjuntos claramente cumplen las condiciones requeridas por el teorema y así habríamos demostrado el resultado.

Pero si

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_n)^+ \nsubseteq (\mathcal{B}_{(n,0)} \upharpoonright R_n)^+ \cap (\mathcal{B}_{(n,1)} \upharpoonright R_n)^+$$

existe un conjunto Y tal que $Y \in (\mathcal{M} \upharpoonright R_n)^+$ y $Y \notin (\mathcal{B}_{(n,s(n))} \upharpoonright R_n)^+$ para algún $s(n) \in 2$. Esto último junto con Lema 2.6 aseguran que $(Y \cap R_n) \in \mathcal{M}^+$ y $(Y \cap R_n) \notin \mathcal{B}^+_{(n,s(n))}$.

Notemos que como $\mathcal{M}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección, $(Y \cap R_n) \in \mathcal{M}^+$, $\mathcal{B}_{(n,s(n))} \subseteq \mathcal{B}$ y $(Y \cap R_n) \notin \mathcal{B}^+_{(n,s(n))}$, podemos aplicar Lema 2.5 y así asegurar la existencia de un $T = R_{n+1} \in \mathcal{M}^+$ tal que

e) $R_{n+1} \subseteq (Y \cap R_n)$ y

f) $\mathcal{B}_{(n,s(n))} \,\#\, R_{n+1} = \emptyset$

Observe que $S \supseteq R_n \supseteq (Y \cap R_n) \supseteq R_{n+1}$.

Si

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_{n+1})^+ \subseteq (\mathcal{B}_{(n+1,0)} \upharpoonright R_{n+1})^+ \cap (\mathcal{B}_{(n+1,1)} \upharpoonright R_{n+1})^+ \tag{2.4}$$

nuestra construcción termina y se establece el Lema (es decir 1) y 2') se cumplen). Veamos porqué:

A partir de (2.4) y a) tenemos

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_{n+1})^+ \subseteq (\mathcal{B}_{(n+1,0)} \upharpoonright R_{n+1})^+ \cap ((\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}_{(n+1,0)}) \upharpoonright R_{n+1})^+$$

Llamemos $R = R_{n+1}$ y $\mathcal{U} = \mathcal{B}_{(n+1,0)}$; estos conjuntos claramente cumplen las condiciones requeridas por el Lema y así habríamos demostrado el resultado.

Pero si

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_{n+1})^+ \nsubseteq (\mathcal{B}_{(n+1,0)} \upharpoonright R_{n+1})^+ \cap (\mathcal{B}_{(n+1,1)} \upharpoonright R_{n+1})^+$$

existe un conjunto X tal que $X \in (\mathcal{M} \upharpoonright R_{n+1})^+$ y $X \notin (\mathcal{B}_{(n+1,s(n+1))} \upharpoonright R_{n+1})^+$ para algún $s(n+1) \in 2$. Esto junto con Lema 2.6 aseguran que $(X \cap R_{n+1}) \in \mathcal{M}^+$ y $(X \cap R_{n+1}) \notin \mathcal{B}^+_{(n+1,s(n+1))}$.

Notemos que como $\mathcal{M}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección, $(X \cap R_{n+1}) \in \mathcal{M}^+$, $\mathcal{B}_{(n,s(n))} \subseteq \mathcal{B}$ y $(Y \cap R_n) \notin \mathcal{B}^+_{(n,s(n))}$, podemos aplicar Lema 2.5 y así asegurar la existencia de un $T = R_{n+2} \in \mathcal{M}^+$ tal que

g) $R_{n+2} \subseteq (X \cap R_{n+1})$ y

h) $\mathcal{B}_{(n+1,s(n+1))} \# R_{n+2} = \emptyset$

Observe que $S \supseteq R_n \supseteq (Y \cap R_n) \supseteq R_{n+1} \supseteq (X \cap R_{n+1}) \supseteq R_{n+2}$ y por tanto $S \supseteq R_n \supseteq R_{n+1} \supseteq R_{n+2}$

Si

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R_{n+2})^+ \subseteq (\mathcal{B}_{(n+2,0)} \upharpoonright R_{n+2})^+ \cap (\mathcal{B}_{(n+2,1)} \upharpoonright R_{n+2})^+$$

nuestra construcción termina y se establece el Lema (es decir 1) y 2') se cumplirían). Pero si no sucede esto, entonces aplicando el razonamiento anterior construimos R_{n+3} y seguimos con el procedimiento.

Afirmamos que el procedimiento es finito, ya que si no lo fuera, entonces se podría construir una sucesión $\langle R_n : n \in \omega \rangle$ en $\mathcal{M}^+$ tal que $R_{n+1} \subseteq R_n$. Pero como $\mathcal{M}^+$ es, por hipótesis, una $\mathbb{P}$-colección, entonces $\exists\, Q \in \mathcal{M}^+$ tal que

$$(\forall n \in \omega)(|Q \setminus R_n| < \omega). \tag{2.5}$$

Ahora vamos a demostrar que

$$(\forall\, w \in \omega)(\mathcal{B}_{(w,s(w))} \# Q = \emptyset) \quad \text{con} \quad s(w) \in 2. \tag{2.6}$$

Si (2.6) no se cumple, entonces $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_{(m,s(m))} \# Q \neq \emptyset$. Y esto a su vez garantiza la existencia de un $S \in \mathcal{B}_{(m,s(m))}$ con

$$|S \cap Q| = \omega \tag{2.7}$$

Recordemos que c) asegura que $(\forall n \in \omega)(\mathcal{B}_{(n,s(n))} \# R_{n+1} = \emptyset)$, por cumplirse para todo número natural se puede particularzar a m y así tendríamos que

$$\mathcal{B}_{(m,s(m))} \# R_{m+1} = \emptyset. \tag{2.8}$$

De la misma manera, si particularizamos (2.5) a $m+1$ obtendríamos

$$|Q \setminus R_{m+1}| < \omega. \tag{2.9}$$

Afirmamos que $|S \cap R_{m+1}| = \omega$. En efecto, veamos qué pasa si suponemos que $|S \cap R_{m+1}| < \omega$. Por (2.7) y (2.9) se infiere $|((S \cap Q) \setminus R_{m+1}| = \omega$; pero $(S \cap Q) \setminus R_{m+1} \subseteq Q \setminus R_{m+1}$ lo que significa que $|Q \setminus R_{m+1}| = \omega$ y esto claramente se contradice con (2.9).

En resúmen, lo que hemos demostrado hasta este momento es que $|S \cap R_{m+1}| = \omega$. Sin embargo como $S \in \mathcal{B}_{(m,s(m))}$, se tendría que $\mathcal{B}_{(m,s(m))} \# R_{m+1} \neq \emptyset$ y esto es precisamente una contradicción con (2.8). Por lo tanto (2.6) es válida.

Por otro lado, como $Q \in \mathcal{M}^+$ y $\mathcal{M}^+ \subseteq \mathcal{B}^+$, entonces $Q \in \mathcal{B}^+$, y esto quiere decir por definición que $|\mathcal{B} \# Q| \geq \omega$; entonces podemos elegir dos elementos distintos, digamos H y J en $\mathcal{B}$ tales que $|H \cap Q| = \omega = |J \cap Q|$. Como H y J son conjuntos distintos de $\mathcal{B}$, b) garantiza la existencia de algún número natural n tal que $H \in \mathcal{B}_{(n,0)}$ y $J \in \mathcal{B}_{(n,1)}$.

Ahora, como $|H \cap Q| = \omega$ y $H \in \mathcal{B}_{(n,0)}$, entonces $\mathcal{B}_{(n,0)} \# Q \neq \emptyset$. De manera similar, al tener que $|J \cap Q| = \omega$ y $J \in \mathcal{B}_{(n,1)}$, entonces $\mathcal{B}_{(n,1)} \# Q \neq \emptyset$; y esto precisamente se contradice con (2.6). Por lo tanto el procedimiento es finito y así el teorema (es de decir 1) y 2')) queda demostrado.

Recordemos que sólo hemos demostrado

$$2') \quad (\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+ \cap ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$$

Sin embargo, a partir de esto tenemos que $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+$ y también que $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$.

Por otro lado, como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ y $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}$, entonces $(\mathcal{U} \upharpoonright R) \subseteq (\mathcal{M} \upharpoonright R)$ y $((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R) \subseteq (\mathcal{M} \upharpoonright R)$.

Ahora, como $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+$ y $(\mathcal{U} \upharpoonright R) \subseteq (\mathcal{M} \upharpoonright R)$, entonces otra vez por Lema 2.4 se tiene que $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ = (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+$.

Y como $((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R) \subseteq (\mathcal{M} \upharpoonright R)$ y $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ \subseteq ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$, entonces por Lema 2.4 se tiene que $(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ = ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$.

Con lo anterior se concluye que:

$$(\mathcal{M} \upharpoonright R)^+ = (\mathcal{U} \upharpoonright R)^+ = ((\mathcal{B} \setminus \mathcal{U}) \upharpoonright R)^+$$

. Es decir 2) es probado y por tanto el Lema original también. ◀

Lema 2.8 *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD en $[\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. Entonces, para todo $Y \in \mathcal{A}^+$, $(\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$ también es una $\mathbb{P}$-colección.*

Demostración. Sea $Y \in \mathcal{A}^+$ y consideremos una sucesión $\langle Q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ en $(\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(Q_{n+1} \subseteq Q_n)$.

Como $(\forall n \in \omega)(Q_n \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+)$, entonces $(\forall n \in \omega)((Q_n \cap Y) \in \mathcal{A}^+)$ por Lema 2.6. Construimos la sucesión $S = \langle Q_n \cap Y : n \in \omega \rangle$ y observe que cumple $(\forall n \in \mathbb{N})((Q_{n+1} \cap Y) \subseteq (Q_n \cap Y))$. Por tanto, S es una sucesión anidada en $\mathcal{A}^+$ y por ser $\mathcal{A}^+$ una $\mathbb{P}$-colección, existe $Q \in \mathcal{A}^+$ tal que

$$(\forall n \in \omega)(|Q \setminus (Q_n \cap Y)| < \omega) \tag{2.10}$$

Afirmamos que Q es el conjunto buscado. Para esto es preciso demostrar que $(\forall n \in \omega)(|Q \setminus Q_n| < \omega)$ y que $Q \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$.

a) Veamos que $(\forall n \in \omega)(|Q \setminus Q_n| < \omega)$. En efecto, como $(\forall n \in \omega)((Q_n \cap Y) \subseteq Q_n)$, entonces $(\forall n \in \omega)((Q \setminus Q_n) \subseteq Q \setminus (Q_n \cap Y))$ por lo tanto $(\forall n \in \omega)(|Q \setminus Q_n| < \omega)$ por (2.10).

b) Veamos ahora que $Q \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$. Sea $A \in \mathcal{A}\#Q$, por definición se tiene que $|A \cap Q| = \omega$. Además notemos que $[(A \cap Q) \setminus (Q_n \cap Y)] \subseteq [Q \setminus (Q_n \cap Y)]$ para cualquier $n \in \omega$, así que por (2.10) obtenemos $(\forall n \in \omega)(|(A \cap Q) \setminus (Q_n \cap Y)| < \omega)$, es decir $(\forall n \in \omega)(|A \cap Q \cap Q_n \cap Y| = \omega)$. Sin embargo, $(A \cap Q \cap Q_n \cap Y) \subseteq (A \cap Q \cap Y)$, lo que significa que $|A \cap (Q \cap Y)| = \omega$ por lo expuesto en renglones anteriores.

Lo que hemos demostrado con el argumento anterior es que si $A \in \mathcal{A}\#Q$, entonces $|A \cap (Q \cap Y)| = \omega$. Pero $Q \in \mathcal{A}^+$, es decir $|\mathcal{A}\#Q| \geq \omega$ y esto significa que existe una cantidad infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$ que intersectan a $Q \cap Y$ en un conjunto infinito y esto es precisamente la definición de que $(Q \cap Y) \in \mathcal{A}^+$ y por Lema 2.6 $Q \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$.

Por a) y b) se concluye que $(\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. ◀

Lema 2.9 *Sea $\mathcal{A}$ una familia infinita AD de $[\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. Entonces existe una sucesión, digamos $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de subfamilias de $\mathcal{A}$ donde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ y otra sucesión $\langle Y_n : n \in \omega \rangle$ tales que $\forall n \in \omega$:*

a) $Y_n \in \mathcal{A}^+$

b) $Y_{n+1} \subseteq Y_n$

c) $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$

d) $(\mathcal{A} \restriction Y_n)^+ = (\mathcal{A}_{n+1} \restriction Y_n)^+ = ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \restriction Y_n)^+$

Demostración. Sabemos por hipótesis que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección y que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, esto es suficiente para poder aplicar en varias ocasiones el Lema 2.1.

Primera aplicación: En el Lema 2.1, sea $\mathcal{M} = \mathcal{A}_0 = \mathcal{B}$ y $S = \omega$, claramente $\omega \in \mathcal{A}_0^+$. Entonces por el Lema 2.1, $\exists\, R \in \mathcal{A}_0^+$ y $\exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} = \mathcal{A}_0$ tales que:

1-1) $R \subseteq \omega$

1-2') $(\mathcal{A}_0 \restriction R)^+ = (\mathcal{U} \restriction R)^+ = ((\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{U}) \restriction R)^+$

Sea $T = Y_0$, así que $Y_0 \in \mathcal{A}_0^+$. También sea $\mathcal{U} = \mathcal{A}_1$. Con esta nomenclatura, 1-2') se convierte en:

$$\text{1-2)} \quad (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+ = (\mathcal{A}_1 \restriction Y_0)^+ = ((\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_1) \restriction Y_0)^+$$

Observaciones:

i) Como $\mathcal{A}_0$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$, entonces también lo es $(\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)$.

ii) Como $Y_0 \in \mathcal{A}_0^+$, entonces $(\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$ es una $\mathbb{P}$-colección por el Lema 2.8.

iii) Claramente $Y_0 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$

iv) Como $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_1 \restriction Y_0 \subseteq \mathcal{A}_0 \restriction Y_0$. Por 1-2) tenemos que $(\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+ \subseteq (\mathcal{A}_1 \restriction Y_0)^+$.

Estas observaciones son fundamentales para poder aplicar el Lema 2.1 nuevamente.

Segunda aplicación: En el Lema 2.1, sea $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{A}_1 \restriction Y_0)$ y

$S = Y_0$ donde por lo anterior $Y_0 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$. Entonces por las observaciones anteriores podemos usar el Lema 2.1, y garantizar que $\exists T \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$ y $\exists \mathcal{U} \subseteq (\mathcal{A}_1 \restriction Y_0)$ tales que:

2-1) $T \subseteq Y_0$

2-2') $((\mathcal{A}_0 \restriction Y_0) \restriction T)^+ = (\mathcal{U} \restriction T)^+ = (((\mathcal{A}_1 \restriction Y_0) \setminus \mathcal{U}) \restriction T)^+$

Sea $T = Y_1$, así que $Y_1 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$. También sea $\mathcal{U} = (\mathcal{A}_2 \restriction Y_0)$. Con esta nomenclatura, 2-2') se convierte en:

$$* \ ((\mathcal{A}_0 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+ = ((\mathcal{A}_2 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+ = ((\mathcal{A}_1 \restriction Y_0 \setminus \mathcal{A}_2 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+$$

Observemos que

2.3) $((\mathcal{A}_0 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+ = (\mathcal{A}_0 \restriction Y_1)^+$. En efecto, $X \in ((\mathcal{A}_0 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+$ si y sólo si $X \cap Y_1 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$ por el Lema 2.6, si y sólo si $X \cap Y_1 \cap Y_0 \in \mathcal{A}_0^+$ por el Lema 2.6, si y sólo si $X \cap Y_1 \in \mathcal{A}_0^+$ ya que $Y_1 \subseteq Y_0$, si y sólo si $X \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_1)^+$ por el Lema 2.6.

2.4) $((\mathcal{A}_2 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+ = (\mathcal{A}_2 \restriction Y_1)^+$. En efecto, $X \in ((\mathcal{A}_2 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+$ si y sólo si $X \cap Y_1 \in (\mathcal{A}_2 \restriction Y_0)^+$ por el Lema 2.6, si y sólo si $X \cap Y_1 \cap Y_0 \in \mathcal{A}_2^+$ por el Lema 2.6, si y sólo si $X \cap Y_1 \in \mathcal{A}_2^+$ ya que $Y_1 \subseteq Y_0$, si y sólo si $X \in (\mathcal{A}_2 \restriction Y_1)^+$ por el Lema 2.6.

2.5) $((\mathcal{A}_1 \restriction Y_0 \setminus \mathcal{A}_2 \restriction Y_0) \restriction Y_1)^+ = ((\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2) \restriction Y_1)^+$. En efecto, solo basta notar que la igualdad $(\mathcal{A}_1 \restriction Y_0 \setminus \mathcal{A}_2 \restriction Y_0) = ((\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2) \restriction Y_0)$ se cumple.

Tomando en cuenta $*$), 2.3), 2.4) y 2.5), 2.2') se convierte finalmente en:

$$\text{2-2)} \quad (\mathcal{A}_0 \restriction Y_1)^+ = (\mathcal{A}_2 \restriction Y_1)^+ = ((\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2) \restriction Y_1)^+$$

. Observaciones:

i) Como $\mathcal{A}_0$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$, entonces también lo es $\mathcal{A}_0 \restriction Y_1$.

ii) Como $Y_1 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_0)^+$, entonces $Y_1 \cap Y_0 \in \mathcal{A}_0^+$. Pero $Y_1 \subseteq Y_0$ por lo tanto $Y_1 \in \mathcal{A}_0^+$. De esto último deducimos que $(\mathcal{A}_0 \restriction Y_1)^+$ es una $\mathbb{P}$-colección por el Lema 2.8.

iii) Claramente $Y_1 \in (\mathcal{A}_0 \restriction Y_1)^+$.

iv) Como $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_2 \restriction Y_1 \subseteq \mathcal{A}_0 \restriction Y_1$. Por 2-2) tenemos que

$(\mathcal{A}_0 \upharpoonright Y_1)^+ \subseteq (\mathcal{A}_2 \upharpoonright Y_1)^+$.

Estas observaciones son fundamentales para aplicar nuevamente el Lema 2.1.

$\vdots$

Continuando con este procedimiento obtenemos la sucesión $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de subfamilias de $\mathcal{A}$ donde sabemos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ y otra sucesión $\langle Y_n : n \in \omega \rangle$ tales que $\forall n \in \omega$:

a) $Y_n \in \mathcal{A}^+$
b) $Y_{n+1} \subseteq Y_n$
c) $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$
d) $(\mathcal{A} \upharpoonright Y_n)^+ = (\mathcal{A}_{n+1} \upharpoonright Y_n)^+ = ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y_n)^+$

requeridas por el Lema. ◀

Teorema 2.10 *Sea $\mathcal{A}$ una subfamilia AD de $[\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. Entonces existe un conjunto $Y \in \mathcal{A}^+$ tal que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia cortable.*

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es una familia AD en $[\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección, entonces por el Lema 2.9 podemos garantizar la existencia de una sucesión, digamos $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de subfamilias de $\mathcal{A}$ donde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ y otra sucesión $\langle Y_n : n \in \omega \rangle$ tales que $\forall n \in \omega$:

a) $Y_n \in \mathcal{A}^+$,

b) $Y_{n+1} \subseteq Y_n$,

c) $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$,

d) $(\mathcal{A} \upharpoonright Y_n)^+ = (\mathcal{A}_{n+1} \upharpoonright Y_n)^+ = ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y_n)^+$.

Dado que por hipótesis $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección y $\langle Y_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{A}^+$ por a) y b), existe un $Y \in \mathcal{A}^+$ tal que $\forall\, n \in \omega$,

$$|Y \setminus Y_n| < \omega \tag{2.11}$$

Afirmamos que $\forall\, n \in \omega$,

$$(\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+ = ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y)^+ \tag{2.12}$$

En efecto, solo basta probar que $(\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+ \subseteq ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y)^+$. Entonces veamos la siguiente cadena de implicaciones:

El conjunto $Z \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$ implica que

el conjunto $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos A de $\mathcal{A}$ en un conjunto infinito, lo cual implica que

el conjunto $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ en un conjunto infinito, esto implica

por 2.11), que $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{A} \upharpoonright Y_n$ en un conjunto infinito, y esto implica que

el conjunto $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{A} \upharpoonright Y_n$ en un conjunto infinito (para cada $n \in \omega$), por lo tanto

el conjunto $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de $(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y_n$ en un conjunto infinito (para cada $n \in \omega$), entonces

por 2.11), $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de la familia $(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y$ en un conjunto infinito (para cada $n \in \omega$), entonces

el conjunto $Z \cap Y$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de la familia $\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}$ en un conjunto infinito (para cada $n \in \omega$), por lo tanto,

por definición, se concluye que $Z \in ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y)^+$ para cada $n \in \omega$.

Teniendo en cuenta este resultado, definimos la función $L : \mathcal{A} \upharpoonright Y \to \omega$ de la siguiente manera:

$$L(A \cap Y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } A \in \bigcap_{k\in\omega} A_k \\ \\ n & \text{si } A \in A_n \setminus A_{n+1} \end{cases}$$

Afirmamos que L es una cortadura. En efecto:

veamos primero que L está bien definida. Supongamos que $A \cap Y = B \cap Y$ con $A \cap Y$ y $B \cap Y$ en $\mathcal{A} \upharpoonright Y$. Si $A \neq B$, entonces por ser $\mathcal{A}$ una familia AD, se tiene que $|A \cap B| < \omega$. Así $A \cap B \cap Y = B \cap Y$. Pero $|B \cap Y| = \omega$ y $|A \cap B \cap Y| < \omega$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto L esta bien definida.

Ahora veamos que L es una cortadura de $\mathcal{A} \upharpoonright Y$. Así que en realidad lo que queremos probar es que para cualquier $X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$:

$$\bigcup_{A \in ((\mathcal{A} \upharpoonright Y) \# X)} L(A) = \omega$$

Basta ver que

$$\bigcup_{A \in ((\mathcal{A} \upharpoonright Y) \# X)} L(A) \supseteq \omega$$

Sea $n \in \omega$. Como $X \in (\mathcal{A} \upharpoonright Y)^+$, entonces por 2.12) se tiene que X es un elemento de $((\mathcal{A}_m \setminus \mathcal{A}_{m+1}) \upharpoonright Y)^+ \ \forall\, m \in \omega$, en particular para n, así $X \in ((\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}) \upharpoonright Y)^+$. Pero esto significa que $X \cap Y \in (\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1})^+$.

Como $X \cap Y \in (\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1})^+$, entonces por lo menos hay un $A \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}$ tal que $|X \cap Y \cap A| = \omega$ y esto finalmente significa que $A \in ((\mathcal{A} \upharpoonright Y) \# X)$ y $L(A) = \omega$. Por lo tanto L es una cortadura de $\mathcal{A} \upharpoonright Y$. ◄

Corolario 2.1 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$, entonces existe un $Y \in \mathcal{A}^+$ tal que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia cortable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$. Por el Teorema 2.3 sabemos que $\mathcal{A}^+$ es una $\mathbb{P}$-colección. Más aún, por el Teorema 2.10 sabemos que se garantiza la existencia de un $Y \in \mathcal{A}^+$ tal que $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una familia cortable. ◄

Corolario 2.2 *Existe una familia MAD cortable en $[\omega]^\omega$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una familia MAD en $[\omega]^\omega$. Por el Corolario 2.1, sabemos que $\exists Y \in \mathcal{B}^+$ tal que $\mathcal{B} \upharpoonright Y$ es una familia cortable.

Notemos que $Y \notin \mathcal{B}$ ya que $\mathcal{B}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$ y $Y \in \mathcal{B}^+$. A partir de esto aseguramos que el conjunto $\omega \setminus Y$ es infinito, ya que si no, entonces para todo $B \in \mathcal{B}$ se tendría que $|Y \cap B| = \omega$.

Por otro lado, al tener que $\mathcal{B}$ es una familia MAD en $[\omega^\omega]$ y que $Y \in \mathcal{B}^+$, entonces del Teorema 1.4 se sigue que $\mathcal{B} \restriction Y \cup \{\omega \setminus Y\}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$.

Claramente, si se tiene una familia cortable y le unimos un punto, esta nueva familia seguirá siendo una familia cortable. Siguiendo este razonamiento, ya tenemos que $\mathcal{B} \restriction Y$ es una familia cortable y por lo tanto tendríamos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \restriction Y \cup \{\omega \setminus Y\}$$

es una familia cortable, además también sería una familia MAD en $[\omega]^\omega$ por lo visto en el parrafo anterior. ◀

Capítulo 3

Construyendo un espacio Fréchet, anti-Hausdorff y LSU

Por el Corolario 2.2 del Capítulo 2 sabemos que existe una familia MAD cortable $\mathcal{A}$ en $[\omega]^\omega$. Vamos a emplear a la familia $\mathcal{A}$ en la construcción de una topología τ en ω que posea las siguientes propiedades:

- (ω, τ) sea anti-Hausdorff,
- (ω, τ) sea LSU,
- (ω, τ) sea Fréchet.

3.1. Topologizando a ω

Recordemos que $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia MAD cortable. Esto último quiere decir que existe una función $L : \mathcal{A} \longrightarrow \omega$ tal que:

$$(\forall X \subseteq \omega) \left[\text{Si } X \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A} \# X} L(A) = \omega \right] \tag{3.1}$$

Ahora lo que vamos a hacer es definir una topología τ en ω para que (ω, τ) sea anti-Hausdorff, Fréchet y LSU.

Vamos a requerir que cada elemento $A \in \mathcal{A}$ considerado como sucesión, converja al punto $L(A)$ y que $A \cup \{L(A)\}$ sea cerrado. Pero si $B \subseteq A$ y B es infinito, B también debe converger a $L(A)$ y por tanto $B \cup \{L(A)\}$ también debe ser cerrado. Además, como queremos que el nuevo espacio sea T_1, entonces se va a requerir que para todo $A \in \mathcal{A}$, $B \cup \{L(A)\}$ sea cerrado para todo $B \subseteq A$. Pero esto se logra haciendo que

$$*) \quad \mathcal{B} = \{B \cup \{L(A)\} : B \subseteq A \text{ y } A \in \mathcal{A}\}$$

sea una sub-base para los conjuntos cerrados de ω. A partir de esto se pueden caracterizar los conjuntos cerrados en ω:

Como $\mathcal{B}$ es una sub-base para los cerrados, $\mathcal{B}' = \{\bigcup \mathcal{D} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} \text{ y } |\mathcal{D}| < \omega\}$ es una base para los cerrados, es decir todo cerrado, digamos C de ω, se puede escribir como una intersección de elementos de $\mathcal{B}'$, en símbolos:

$$C = \bigcap_{i \in I} \{\mathcal{M}_i \ : \ \mathcal{M}_i = \bigcup \mathcal{D}_i, \ \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{B} \text{ y } |\mathcal{D}_i| < \omega\}$$

Por lo tanto, un subconjunto $C \subseteq \omega$ va a ser cerrado en ω si y sólo si

$$(\forall x \notin C)(\exists\, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}) \left[|\mathcal{F}| < \omega, \ C \subseteq \bigcup \mathcal{F} \text{ y } x \notin \bigcup \mathcal{F}\right] \tag{3.2}$$

Un resultado adicional inmediato de (3.2) es el siguiente: $\forall\, D \subseteq \omega$,

$$\left[\text{si } D \text{ no es denso } \Rightarrow (\exists\, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \text{ finito}) \left(D \subseteq \bigcup \mathcal{F}\right)\right] \tag{3.3}$$

Sea τ la topología que tiene a $\mathcal{B}$ como sub-base de los conjuntos cerrados. Finalmente sea $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$, este espacio será el espacio topológico anti-Hausdorff, Frechet y LSU buscado.

3.2. Propiedades de $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$

Teorema 3.1 *El espacio topológico* $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ *es* T_1*.*

Demostración. Como $\emptyset \subseteq A$, entonces por $*$) el conjunto $\emptyset \cup \{L(A)\}$ es cerrado. Así que $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $\{L(A)\}$ es cerrado. Observe además que si en (3.1) sustituimos $X = \omega$ obtenemos:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} L(A) = \omega \tag{3.4}$$

Por las dos observaciones anteriores resulta que en ω todo punto considerado como conjunto es cerrado. Por lo tanto, $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es T_1. ◀

Lema 3.2 *En $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ se cumple lo siguiente:*

$$(\forall A, B \in \mathcal{A})\,(\textit{Si } L(A) \neq L(B),\ \textit{ entonces } |A \cap B| < \omega)\,.$$

Demostración. Supongamos que existen dos elementos digamos A y B en $\mathcal{A}$ tales que $L(A) = L(B)$ y $|A \cap B| = \omega$. Como $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una familia AD, entonces $A = B$ y por tanto $L(A) = L(B)$ lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $|A \cap B| < \omega$. ◀

Lema 3.3 *En $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$, todo A en $\mathcal{A}$ converge de manera única a $L(A)$.*

Demostración.

a) Veamos primero que cualquier $A \in \mathcal{A}$ no puede converger a otro punto distinto de $L(A)$. Pero esto se sigue de que $(\forall a \in \omega)((A \setminus \{a\}) \cup L(A))$ es cerrado.

b) Veamos ahora que $(\forall A \in \mathcal{A})(A \longrightarrow L(A))$. Sean $A \in \mathcal{A}$ y U un abierto básico tales que $L(A) \in U$. Por la caracterización de los cerrados en $\mathbb{X}$ se tiene que:

$$U = \omega \setminus \bigcup \{B \cup L(C) :\ B \subseteq C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |\mathcal{F}| < \omega\}$$

Como $L(A) \in U$, entonces $A \neq C\ \forall C \in \mathcal{F}$; pero $\mathcal{A}$ es una familia MAD, entonces se tiene que $(\forall F \in \mathcal{F})(|F \cap A| < \omega)$.

Así

$$\begin{aligned}
A \setminus U &= A \setminus \Big[\omega \setminus \bigcup \{B \cup L(C) :\ B \subseteq C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |\mathcal{F}| < \omega\}\Big] \\
&= A \bigcap \Big[\bigcup \{B \cup L(C) :\ B \subseteq C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |\mathcal{F}| < \omega\}\Big] \\
&= \bigcup \{(A \cap B) \cup (A \cap L(C)) :\ B \subseteq C \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |\mathcal{F}| < \omega\}
\end{aligned}$$

pero como $\mathcal{F}$ es finito, entonces $A \setminus U$ es un conjunto finito por ser una unión finita de conjuntos finitos. Esto prueba que cualquier vecindad U de $L(A)$ satisface $|A \setminus U| < \omega$, es decir, $A \longrightarrow L(A)$. ◀

Teorema 3.4 *El espacio topológico* $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ *es compacto.*

Demostración. Por (3.3), solo basta observar que cualquier abierto básico es el complemento de una unión finita de compactos, así $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es compacto ◀

Lema 3.5 *Sea X un espacio topológico. El espacio X no es la unión de dos subconjuntos propios cerrados si y sólo si cualesquiera dos subconjuntos abiertos no vacíos de X tienen intersección no vacía.*

Demostración.

Suponga que en X existen dos abiertos no vacíos, digamos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$. Como A y B son abiertos disjuntos en X, $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son subconjuntos propios cerrados de ω y $X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$, lo cual contradice la hipótesis. Note que este argumento es invertible, así que el resultado queda demostrado. ◀

Teorema 3.6 *El espacio topológico* $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ *es anti-Hausdorff.*

Demostración. Recordemos que nuestra función L y nuestra familia $\mathcal{A}$ cumplen, entre otras cosas que $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} L(A) = \omega$. De esta observación resulta que

$$(\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \text{ finita}) \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (F \cup \{L(F)\}) \neq \omega \right) \tag{3.5}$$

Ya que si existiera una familia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} (F \cup \{L(F)\}) = \omega$$

tendríamos

$$|\omega \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F| < \omega \tag{3.6}$$

no obstante, al ser $\mathcal{F}$ finita, podemos elegir un $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$; para esta A se tiene que $|A \cap F| < \omega$ para todo $F \in \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{A}$ una familia AD, así

$$|A \cap \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F| < \omega$$

pero esto contradice a (3.6). Por lo tanto (3.5) se cumple.

Afirmamos que ω no es la unión de dos subconjuntos propios cerrados. En efecto, supongamos que $\omega = C \cup D$ con C y D subconjunos propios cerrados en ω. Ya que C y D son subconjuntos propios cerrados podemos usar (3.3) y tener que

$$C \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (M \cup \{L(M)\}) \text{ con } |\mathcal{M}| < \omega \text{ y } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \tag{3.7}$$

$$D \subseteq \bigcup_{N \in \mathcal{N}} (N \cup \{L(N)\}) \text{ con } |\mathcal{N}| < \omega \text{ y } \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}. \tag{3.8}$$

Sea $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. A partir de (3.7) y (3.8) deducimos que

$$\omega = (C \cup D) \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (F \cup \{L(F)\}) \text{ con } |\mathcal{F}| < \omega \text{ y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$$

lo cual se contradice con (3.5). Por lo tanto $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ no es la unión de dos subconjuntos propios cerrados, es decir cualesquiera dos abiertos no vacíos en $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ tienen intersección no vacía por el Lema 3.5. Esto junto con el Teorema 3.1 da como resultado que $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es un espacio anti-Hausdorff. ◀

Lema 3.7 *En el espacio topológico $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$, cualquier sucesión $S \subseteq \omega$ convergente tiene límite único.*

Demostración. Como S es infinito, entonces por ser $\mathcal{A}$ una familia MAD en $[\omega]^\omega$, existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $|S \cap A| = \omega$.

Si $|S \setminus A| < \omega$, entonces S converge a $L(A)$ de manera única, pues sabemos que $(S \setminus A) \cup (S \cap A) \cup L(A)$ es cerrado.

Suponga ahora que $|S \setminus A| = \omega$ y que S converge a z con $z \neq L(A)$. Como $S \setminus A$ es un subconjunto infinito de S, entonces $S \setminus A$ también converge a z. No obstante, sabemos que $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$ y por tanto existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $|(S \setminus A) \cap B| = \omega$; además $(S \setminus A) \cap B$ también converge a z ya que $(S \setminus A) \cap B$ es un subconjunto infinito de $S \setminus A$. Pero como $(S \setminus A) \cap B$ converge a $L(B)$ de manera única, entonces $L(B) = z$.

Por otro lado, $[S \setminus (A \cup L(A))] \cap B$ es un subconjunto infinito de B, así que $M = [(S \setminus (A \cup L(A))) \cap B] \cup L(B)$ es cerrado. Luego tenemos que $\omega \setminus M$ es un abierto que contiene a $L(A)$, sin embargo S no esta finalmente en $\omega \setminus M$ lo cual es una contradicción. ◀

Lema 3.8 *En el espacio topológico $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$, sean $S \subseteq \omega$ y $x \in \overline{S} \setminus S$; entonces $\exists A \in \mathcal{A}$ tal que $|S \cap A| = \omega$ y $L(A) = x$.*

Demostración. Definimos $\mathcal{A}_S = \{A \in \mathcal{A} : |S \cap A| = \omega\}$; observemos que $|S \setminus (\bigcup \mathcal{A}_S)| < \omega$. En efecto, si $|S \setminus (\bigcup \mathcal{A}_S)| = \omega$, entonces $Q = S \setminus (\bigcup \mathcal{A}_s)$ sería un conjunto infinito que no intersecta a ningún elemento de $\mathcal{A}$ en un conjunto infinito, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\mathcal{A}$ es una familia MAD en $[\omega]^\omega$. Por tanto $S \setminus (\bigcup \mathcal{A}_S)$ es finito y $S \bigcap (\bigcup \mathcal{A}_S)$ es infinito.

Caso 1) $\mathcal{A}_S$ es finito.

Supongamos que $\mathcal{A}_S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Por la observación anterior $S \bigcap (\bigcup_{i=1}^n A_i)$ es infinito.

Por otro lado, puesto que $x \in \overline{S}$, se sigue que $x \in \overline{S \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i}$ ó $x \in \overline{S \cap \bigcup_{i=1}^n A_i}$; sin embargo no puede suceder lo primero ya que $S \setminus (\bigcup A_i)$ es finito por la observación anterior. Por lo tanto tenemos que

$$x \in \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S \cap A_i)\right)} \tag{3.9}$$

Sin embargo

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S \cap A_i)\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{S \cap A_i}$$

Entonces por lo anterior y por (3.9), $\exists\, A \in \mathcal{A}_S$ tal que $x \in \overline{(S \cap A)}$; no obstante $\overline{S \cap A} \subseteq \overline{A} \subseteq A \cup L(A)$, por lo tanto se sigue que $L(A) = x$.

Caso 2) $\mathcal{A}_S$ es infinito.

Como $\mathcal{A}_S$ es infinito entonces por definición tenemos que $S \in \mathcal{A}^+$ y por (3.1) llegamos a

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A} \# S} L(A) = \omega$$

Sin embargo, como $x \in \omega$ existe un $A \in \mathcal{A}\#S$ tal que $L(A) = x$. Además $A \in \mathcal{A}\#S$ significa que $|A \cap S| = \omega$. Por tanto hemos encontrado el $A \in \mathcal{A}$ que cumple las condiciones que pedía el lema para este caso. ◀

Teorema 3.9 *El espacio $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es un espacio Fréchet.*

Demostración. Sea $B \subseteq \omega$ no cerrado. Basta tomar un $x \in \overline{B} \setminus B$ y demostrar que existe una sucesión $C \subseteq B$ tal que $C \longrightarrow x$.

Como $x \in \overline{B} \setminus B$, significa que x es un punto de acumulación de B, es decir $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$. Por el Lema 3.8, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$ y además $L(A) = x$. Observemos que $A \cap B$ es un subconjunto infinito de A y como $A \longrightarrow L(A)$ de manera única por el Lema 3.3, entonces $C = A \cap B$ también converge de manera única a $L(A) = x$. Así $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es un espacio Fréchet. ◀

Teorema 3.10 *El espacio $\mathbb{X} = (\omega, \tau)$ es un espacio LSU.*

Demostración. Sea $C = \{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a x, tenemos que demostrar que $C \cup \{x\}$ es cerrado.

Por ser $\mathcal{A}$ una familia MAD, $\exists A \in \mathcal{A}$ tal que $|C \cap A| = \omega$. Además como $A \to L(A)$ y $C \cap A \subseteq A$, entonces $C \cap A \to L(A)$. Por hipótesis también tenemos que $C \cap A \to x$ ya que $C \to x$, entonces por la unicidad de los límite concluimos que $x = L(A)$.

Si $C \cup \{x\}$ no fuera cerrado, entonces existiría una subsucesión $T \subseteq C$ y un punto de acumulacioón de C, digamos y, con $y \neq x$ tal que $T \to y$. Como T es infinito, entonces $\exists B \in \mathcal{A}$ tal que $|T \cap B| = \omega$ usando nuevamente que $\mathcal{A}$ es una familia MAD. Como $B \to L(B)$ y $T \cap B$ es un subconjunto infinito de B, entonces $T \cap B \to L(B)$, por lo tanto $y = L(B)$.

Pero sabemos que $B \cup \{L(B)\}$ es cerrado, asi que $M = \omega \setminus B \cup \{L(B)\}$ es una vecindad de $L(A)$; entonces

$$\begin{aligned} |C \setminus M| &= |C \setminus (\omega \setminus B \cup \{L(B)\})| \\ &= |(C \cap B) \cup (C \cap \{L(B)\})| \\ &= \omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

la última igualdad es por que $|T \cap B| = \omega$ y $B \cap T \subseteq C$. Pero esto contradice el hecho de que $L(A)$ sea el punto de convergencia de C. ◀

Conclusión

El concepto de familias MAD es frecuentemente usado para construir espacios topológicos que poseen determinadas propiedades. En particular encontrar un espacio topológico que cumpla ser LSU y anti-Hausdorff ó LSU y Fréchet ó Fréchet y anti-Hausdorff es relativamente sencillo, sin embargo es difícil encontrar espacios que cumplan estas tres propiedades simultaneamente. En esta tesis se demostró la existencia de una familia MAD cortable y ésta a su vez se usó para construir un espacio topológico con las tres propiedades mencionadas anteriormente.

Bibliografía

[1] **van Dowen E. K.**, *An anti-Hausdorff Fréchet space in which convergent sequences have unique limits*, Topology and its Applications, **51** (1993), 147–158.

[2] **H. B. Enderton**. *Elements of Set Theory*. Academic Prees, 1977.

[3] **Engelking, R.**, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] **K. Kunen, J. Vaughan**. *Handbook of Set-Theoretic Topology*. North Holland, Amsterdam. 1984

[5] **Mrówka S.** *On completely regular spaces*, Fund. Math., **41** (1954), 105–106, 1954.

[6] **Mrówka S.** *Some set-theoretic constructions in topology*, Fund. Math., **4** (1974), 83–92.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00081
Matrícula: 209381900

UNA APLICACION DE FAMILIAS MAD A LA TOPOLOGIA

En México, D.F., se presentaron a las 15:00 horas del día 27 del mes de septiembre del año 2012 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR MIGUELES PEREZ

EDGAR MIGUELES PEREZ
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

VOCAL

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

SECRETARIO

DR. CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA