

De los Arboles Generadores de una Gráfica

Tesis que presenta

Eduardo Rivera Campo

Para la obtención del grado de Doctor en Ciencias

Enero de 1993

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

Agradecimientos

La realización de este trabajo ha sido posible gracias a la dirección y el apoyo del Profesor Victor Neumann Lara, Investigador del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Agradezco a Victor las sesiones informales de trabajo, en las cuales aprendí mas del quehacer matemático de lo que es posible en las aulas de clase.

Contenido

1.- Introducción	1
2.- Condiciones Necesarias	4
3.- Condiciones Suficientes Relacionadas con el Número de Independencia	8
4.- Condiciones Suficientes Relacionadas con los Grados	14
5.- Gráficas Planas	36
5.1.- Triangulaciones.	
5.2.- Gráficas Planas 3-Conexas.	
6.- Árboles Generadores con Diámetros Congruentes con r Módulo k	55
7.- Referencias	65

Capítulo 1

Introducción

Una subgráfica T de una gráfica G es *generadora* si T contiene a todos los vértices de G . Un resultado básico de Teoría de Gráficas afirma que toda gráfica conexa contiene un árbol generador.

En esta tesis, estudiamos condiciones suficientes y condiciones necesarias para que una gráfica conexa contenga árboles generadores con determinadas características.

Condiciones suficientes y condiciones necesarias para que una gráfica tenga ciclos o trayectorias generadoras han sido estudiadas ampliamente. Por ejemplo, Whitney [W] y Tutte [T] dan condiciones para gráficas planas y Dirac [D], Ore [O], Chvátal y Erdős [ChE] y Bondy y Chvátal [BCh] dan condiciones para gráficas generales.

Un r -árbol es un árbol cuyos grados son menores o iguales que r y un (r, c) -árbol es un r -árbol con a lo mas c vértices con grado r . En [Wi1] y [Wi2], Win da condiciones suficientes para que una gráfica tenga r -árboles generadores.

En el Capítulo 2 estudiamos condiciones necesarias para que una gráfica tenga (r, c) -árboles generadores y mostramos una gráfica que cumple estas condiciones y que no tiene (r, c) -árboles generadores.

En el Capítulo 3 damos condiciones, relacionadas con el número de independencia, suficientes para que una gráfica k -conexa tenga un (r, c) -árbol generador. El caso $r = 3$ y $c = 0$ es el teorema clásico de Chvátal y Erdős que afirma que toda gráfica k -conexa con número de independencia $\alpha \leq 1 + k$ tiene una trayectoria generadora.

En el Capítulo 4 estudiamos condiciones, relacionadas con los grados, suficientes para que una gráfica k -conexa G tenga un (r, c) -árbol generador. También damos condiciones suficientes para

que G tenga un r -árbol generador con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales.

En el Capítulo 5 demostramos que toda gráfica plana 3-conexa tiene un 3-árbol generador y analizamos por separado el caso particular de las triangulaciones.

En el Capítulo 6 estudiamos condiciones, suficientes para que una gráfica tenga árboles generadores con diámetros congruentes con todos los residuos módulo un entero n .

La mayor parte de los conceptos y resultados básicos de Teoría de Gráficas, usados en este trabajo, se pueden consultar en los siguientes textos: "Graph Theory with Applications" por J. A. Bondy y U. S. R. Murty [BM], "Graph Theory: An Introductory Course" por B. Bollobás [Bol] y "Graph Theory" por F. Harary [H]. La notación suele variar considerablemente con los diferentes autores; dentro de lo posible seguiremos la notación usada en [BM].

Dada una gráfica G , denotamos por $V(G)$ y $A(G)$ a los conjuntos de vértices y aristas de G , respectivamente. Todas las gráficas consideradas en este trabajo son simples y finitas.

El *grado* $g_G(u)$ de un vértice u en una gráfica G es el número de aristas de G que inciden en u . La *vecindad* de u en G , denotada por $\Gamma_G(u)$ es el conjunto de vértices adyacentes a u en G . Un vértice v es terminal de G si $g_G(v) = 1$. El *grado máximo* $\Delta(G)$ y el *grado mínimo* $\delta(G)$ de una gráfica G son, respectivamente, el máximo y el mínimo de los grados de los vértices de G .

Sea U un conjunto no vacío de vértices de una gráfica G ; la subgráfica $G[U]$ de G , *inducida* por U es la gráfica cuyo conjunto de vértices es U y cuyo conjunto de aristas es el conjunto de aristas de G con ambos extremos en U .

Dada una gráfica G , un vértice w de G y una arista e de G , denotamos por $G - w$ a la gráfica obtenida de G al quitar el vértice w y todas las aristas de G que inciden en w y por $G - e$ a la gráfica obtenida de G eliminando unicamente la arista e . Si $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es un conjunto de vértices o un conjunto de aristas de G , entonces $G - X$ denota a la gráfica $(\dots ((G - x_1) - x_2) - \dots - x_k)$.

Si u y v son vértices, no adyacentes, de una gráfica G , entonces $G + uv$ es la gráfica obtenida de G al añadir la arista uv .

Para cualesquiera gráficas G y F , denotamos por $G \cup F$ a la gráfica cuyos conjunto de vértices y aristas son $V(G) \cup V(F)$ y $A(G) \cup A(F)$, respectivamente.

Una *orientación* D de una gráfica G consiste en considerar a cada arista de G como pareja ordenada. Una *gráfica dirigida* G^D es una gráfica G junto con una orientación D ; una arista $e = uv$ de una gráfica dirigida es llamada *arco*, u es el *vértice inicial* de e y v es el *vértice final* de e .

El *grado interior* de un vértice u en una gráfica dirigida G^D es el número de arcos de G^D para los cuales u es vértice final; de manera analoga se define el *grado exterior* de u como el número de arcos de G^D para los cuales u es vértice inicial.

Dado un árbol T , para cualesquiera vértices u y v de T , denotamos por T_{uv} a la única u - v trayectoria contenida en T .

Un árbol *dirigido hacia afuera con raíz* u es un árbol T con una orientación D tal que para cualquier vértice v de T , la trayectoria T_{uv} esta dirigida de u a v en T^D .

Un conjunto U de vértices de una gráfica G es *independiente* si no hay aristas de G con ambos extremos en U . El *número de independencia* de G es el máximo número de vértices en un conjunto independiente.

Un conjunto E de aristas de una gráfica G es un *apareamiento* si ninguna pareja de elementos de E inciden en un mismo vértice. Los apareamientos son también llamados *conjuntos de aristas independientes*.

Capítulo 2

Condiciones Necesarias

En este capítulo presentamos condiciones necesarias para que una gráfica tenga (r, c) -árboles generadores.

Dada una gráfica G , denotamos por $\omega(G)$ al número de componentes conexas de G .

Proposición 2.1.- Si B es un bosque y $u \in V(B)$, entonces $\omega(B - u) = \omega(B) + g_B(u) - 1$. ♦

Teorema 2.2.- Si una gráfica G tiene un (r, c) -árbol generador, entonces

$$\omega(G - U) \leq 1 + (r - 2)|U| + c$$

para cualquier subconjunto propio U de $V(G)$.

Demostración.- Sean T un (r, c) -árbol generador de G y $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un subconjunto propio de $V(G)$. Para $i = 1, 2, \dots, n$, sea $T_i = T - \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_n\}$; claramente $g_{T_i}(u_{i-1}) \leq g_T(u_{i-1})$.

Por lo tanto, por la Proposición 2.1

$$\omega(T - U) \leq \omega(T) + (g_T(u_1) - 1) + (g_T(u_2) - 1) + \dots + (g_T(u_n) - 1)$$

Como $\Delta(T) \leq r$ entonces $g_T(u_i) \leq r$ para $i = 1, 2, \dots, n$; sin perder generalidad supongamos $g_T(u_1) \geq g_T(u_2) \geq \dots \geq g_T(u_n)$.

Caso 1.- $c \leq n$.

Como T tiene a lo mas c vértices con grado r , entonces $g_T(u_i) \leq r - 1$ para $i = c+1, c+2, \dots, n$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega(T - U) &\leq \omega(T) + (r - 1)c + (r - 2)(n - c) \\ &= 1 + (r - 2)n + c \\ &= 1 + (r - 2)|U| + c. \end{aligned}$$

Caso 2.- $n < c$.

$$\begin{aligned}\omega(T - U) &\leq \omega(T) + (r - 1)n \\ &= 1 + (r - 2)n + n \\ &\leq 1 + (r - 2)n + c \\ &= 1 + (r - 2)|U| + c.\end{aligned}$$

En ambos casos $\omega(T - U) \leq 1 + (r - 2)|U| + c$. Como T es árbol generador de G , entonces cada componente conexa de $G - U$ es generada por una componente conexa de $T - U$. Por lo tanto $\omega(G - U) \leq 1 + (r - 2)|U| + c$. ♦

Un s -árbol generador de una gráfica G puede ser considerado como un $(s + 1, 0)$ -árbol generador de G . Como corolario obtenemos una condición necesaria para que una gráfica tenga s -árboles generadores.

Corolario 2.3.- Si una gráfica G tiene un s -árbol generador, entonces

$$\omega(G - U) \leq 1 + (s - 1)|U|$$

para cualquier subconjunto propio U de $V(G)$.

Demostración.- Sean $r = s + 1$ y $c = 0$. Por el Teorema 2.2, para cualquier subconjunto propio U de $V(G)$, $\omega(G - U) \leq 1 + (r - 2)|U| + c = 1 + (s - 1)|U|$. ♦

La gráfica bipartita completa K_{mn} esta formada por dos conjuntos de vértices independientes Y y X ajenos con $|Y| = m$ y $|X| = n$ y todas las aristas con un extremo en Y y el otro en X .

Claramente $\omega(K_{mn} - Y) = n$, por lo tanto si $n \geq 2 + m(r - 1)$, entonces K_{mn} no tiene r -árboles generadores y si $n \geq 2 + m(r - 2) + c$, entonces K_{mn} no tiene (r, c) -árboles generadores.

Este ejemplo ilustra como el Corolario 2.3 y el Teorema 2.2 pueden ser usados para probar que determinada gráfica no tiene r -árboles generadores o (r, c) -árboles generadores.

Dada una gráfica G , sea G_r la gráfica obtenida de G añadiendo a cada vértice u de G , $r - 2$ aristas $e_1(u), e_2(u), \dots, e_{r-2}(u)$ como en la figura 2.1.

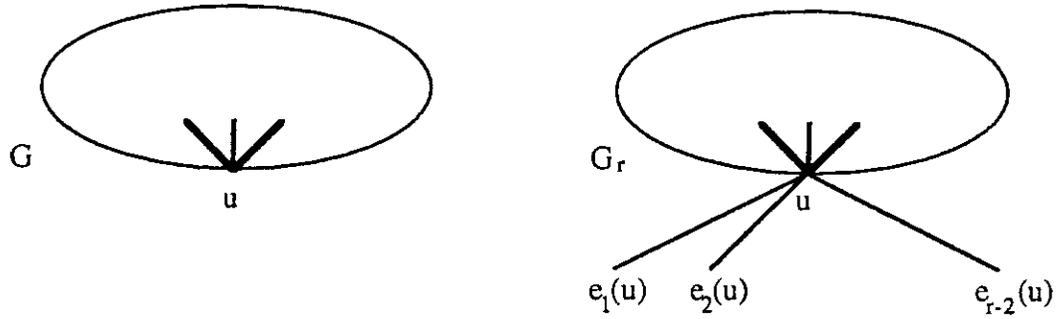


Fig. 2.1

Sea G una gráfica tal que G_r tiene un r -árbol generador T . Como T es conexo, entonces para cada $u \in V(G)$, las aristas $e_1(u)$, $e_2(u)$, ..., $e_{r-2}(u)$ necesariamente son aristas de T ; como $\Delta(T) \leq r$, entonces la subgráfica de G contenida en T es una trayectoria generadora de G .

Por otro lado si G es una gráfica con una trayectoria generadora H , entonces el árbol H_r que se obtiene de H añadiendo las aristas $e_1(u)$, $e_2(u)$, ..., $e_{r-2}(u)$ para cada $u \in V(H)$, es un r -árbol generador de G_r .

Por lo tanto una gráfica G tiene una trayectoria generadora si y sólo si la gráfica G_r tiene un r -árbol generador. En la figura 2.2 damos un ejemplo con $r = 3$.

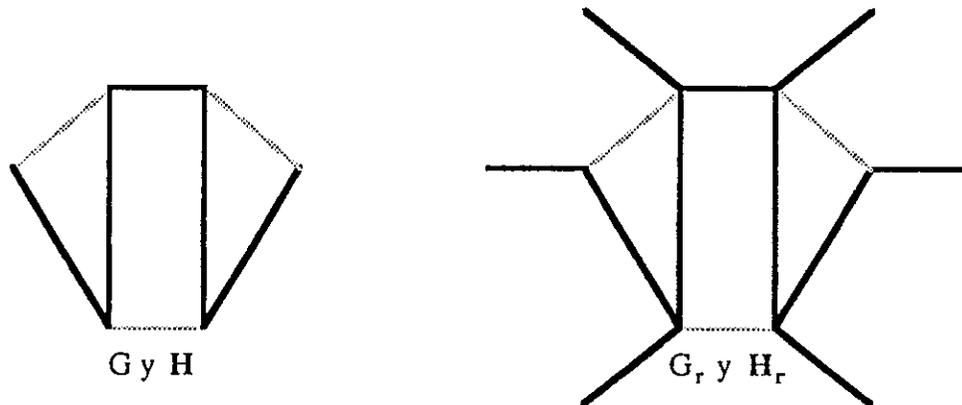


Fig. 2.2

Denotemos por P a la gráfica de Petersen y por x a un vértice cualquiera de P (Fig. 2.3). Sea Q la gráfica con conjunto de vértices $V(Q) = V(P) \cup \{u, v, w\}$ y conjunto de aristas $A(Q) = A(P) \cup \{uv, wx\} \cup \{vy : xy \in A(P)\}$ (Fig. 2.3).

Supongamos que Q tiene una trayectoria generadora T , como $g_Q(u) = g_Q(w) = 1$, entonces uv y xw son las aristas terminales de T . Por construcción el vértice z de P adyacente a v en T , necesariamente es adyacente a x en P . Por lo tanto la subtrayectoria de T contenida en P junto con la arista zx forma un ciclo generador de la gráfica de Petersen lo cual no es posible.

Por lo tanto Q no tiene trayectorias generadoras y por lo anterior, la gráfica Q_r no tiene r -árboles generadores; sin embargo $\omega(Q_r - U) \leq 1 + (r - 1)|U|$ para cada subconjunto propio U de $V(Q_r)$. Esto muestra que la condición necesaria, dada en el Corolario 2.2, no es suficiente para que una gráfica tenga r -árboles generadores.

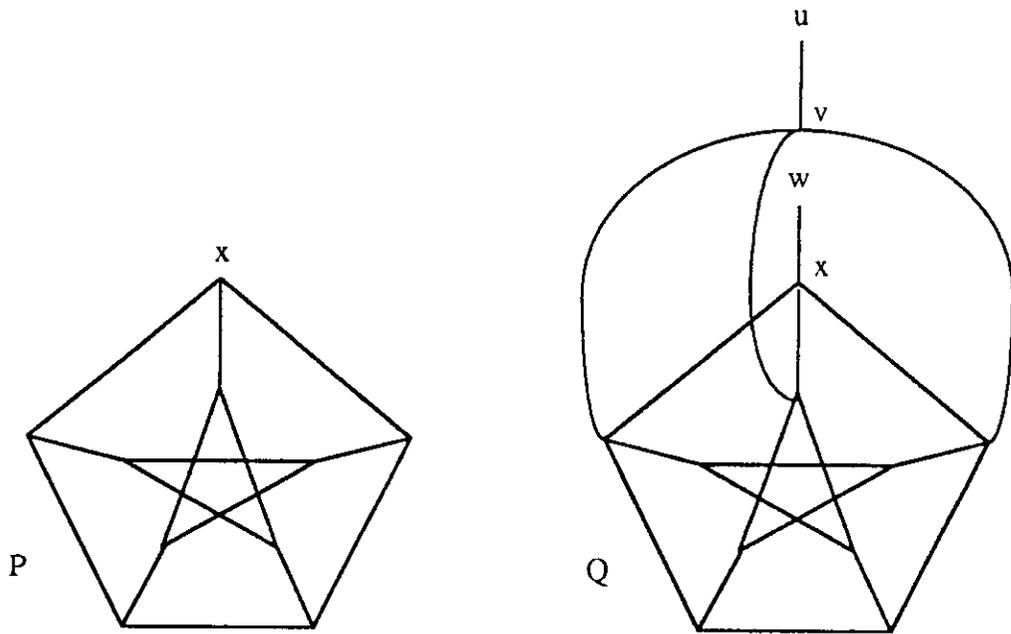


Fig. 2.3

Capítulo 3

Condiciones Suficientes Relacionadas con el Número de Independencia

Un resultado clásico de Chvátal y Erdős [ChE] sostiene que toda gráfica k -conexa con número de independencia $\alpha \leq 1 + k$ tiene una trayectoria generadora. En este capítulo generalizamos este resultado dando condiciones suficientes para que una gráfica G tenga un (r, c) -árbol generador.

Teorema 3.1 (Neumann-Lara y Rivera-Campo [NR1]).- Sean G una gráfica k -conexa con número de independencia α y r y c enteros con $r \geq 4$ y $0 \leq c \leq k$. Si $\alpha \leq 1 + k(r - 2) + c$, entonces G tiene un (r, c) -árbol generador.

Demostración.- Sea T un (r, c) -subárbol de G con el mayor número posible de vértices. Si T no es árbol generador de G , entonces hay un vértice $w \in V(G) \setminus V(T)$. Por el teorema de Menger, la gráfica G contiene k trayectorias $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$, ajenas dos a dos, exepcto en w , que unen a w con T . Denotemos por X al conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, en donde x_i es el único vértice de T en π_i .

Como $\Delta(T) \leq r$, entonces $g_T(x_i) \leq r$ para $i = 1, 2, \dots, k$, además $r - 1 \leq g_T(x_i)$ pues de lo contrario $T \cup \pi_i$ es un (r, c) -subárbol de G con mas vértices que G lo cual no es posible. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $g_T(x_1) \leq g_T(x_2) \leq \dots \leq g_T(x_k)$.

Sea n el número de vértices en X con grado $r - 1$. Si $n \geq 1$, entonces $g_T(x_i) = r - 1$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y T contiene $c + n - k$ vértices $b_1, b_2, \dots, b_{c+n-k}$ con grado r que no pertenecen a X , pues de lo contrario $T \cup \pi_i$ es un (r, c) -subárbol de G con mas vértices que T . Denotemos por B al conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_{c+n-k}\}$. Si $n = 0$, entonces $c = k$ y todos los vértices de T con grado r estan en X ; en este caso B es vacío.

Sea D la orientación de las aristas de T tal que T^D es un árbol dirigido hacia fuera con raíz x_1 . Notemos que T^D no tiene arcos con vértice inicial en $X \cup B$ y vértice final en X ya que si $x_i x_j \in A(T^D)$, entonces $(T - x_i x_j) \cup \pi_i \cup \pi_j$ es un (r, c) -subárbol de G con más vértices que T (Fig. 3.1) y si $b_i x_j \in A(T^D)$, entonces $(T - b_i x_j) \cup \pi_i \cup \pi_j$ es un (r, c) -subárbol de G mayor que T (Fig. 3.1).



Fig. 3.1

Sea $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{c+n-k}\}$, en donde e_i es cualquier arco de T^D con vértice inicial b_i . Como T^D no contiene arcos con vértice inicial en $X \cup B$ y vértice final en X y $g_T(x_i) = r - 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, $g_T(x_i) = r$ para $i = n+1, n+2, \dots, k$ y $|E| = c + n - k$, entonces la gráfica $H = (T - X) - E$ es un bosque con $1 + k(r - 2) + c$ componentes $H_1, H_2, \dots, H_{1+k(r-2)+c}$.

Para cada $j = 1, 2, \dots, 1+k(r-2)+c$, sea y_j un vértice con grado exterior cero en la gráfica dirigida H_j^D y denotemos por Y al conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_{1+k(r-2)+c}\}$. Cada vértice y_j es terminal en T o hay un arco en T^D con vértice inicial y_j y vértice final en X ; cuando este es el caso, denotamos por $x^+(y_j)$ al vértice en X tal que $y_j x^+(y_j) \in A(T^D)$. Como T^D es dirigido hacia afuera con raíz x_1 , entonces cada gráfica H_j^D contiene un único vértice z_j con grado interior cero; denotemos por $z^-(z_j)$ el vértice en $X \cup B$ tal que $z^-(z_j) z_j \in A(T^D)$.

Supongamos que $w y_j \in A(G)$. Si y_j es un vértice terminal de T sea $T' = T \cup w y_j$ y si y_j no es un vértice terminal de T sea $T' = (T - y_j x^+(y_j)) \cup w y_j \cup \pi_\theta$ en donde θ es tal que $x^+(y_j) = x_\theta$ (Fig. 3.2). En ambos casos T' es un (r, c) -subárbol de G mayor que T lo cual no es posible, por lo tanto w no es adyacente a ningún vértice y_j .

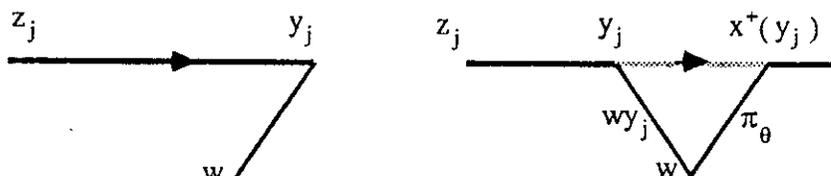


Fig. 3.2

Supongamos ahora que $y_s y_t \in A(G)$; como y_s y y_t pertenecen a componentes distintas de H , entonces al menos uno de los vértices $z^-(z_s)$ o $z^-(z_t)$ pertenece a $T_{y_s y_t}$; denotemos por ρ ese vértice y por τ cualquier vértice adyacente a ρ en $T_{y_s y_t}$. Notemos que $y_s y_t \notin A(T)$ y que $\rho \in X \cup B$.

Caso 1.- y_s y y_t son vértices terminales en T .

Si $\rho \in X$ sea

$$T' = ((T - \rho\tau) + y_s y_t) \cup \pi_\alpha$$

en donde α es tal que $\rho = x_\alpha$ (Fig. 3.3).

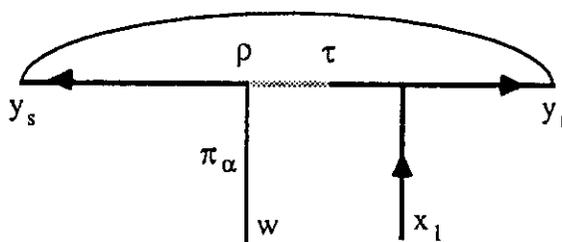


Fig. 3.3

Y si $\rho \in B$ sea

$$T' = ((T - \rho\tau) + y_s y_t) \cup \pi_l$$

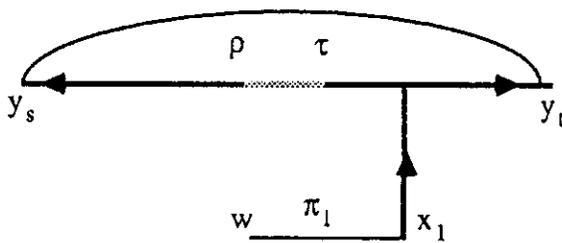


Fig. 3.4

Caso 2.- y_s es vértice terminal en T y y_t no es vértice terminal en T .

Si $x^+(y_t) \in V(T_{y_s y_t})$ sea

$$T' = ((T - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\gamma$$

en donde γ es tal que $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 3.5).

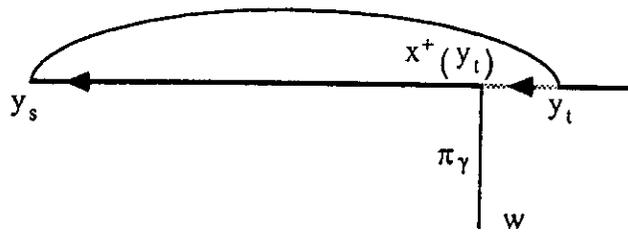


Fig. 3.5

Si $x^+(y_t) \notin V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in X$ sea

$$T' = (((T - \rho\tau) - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\gamma \cup \pi_\alpha$$

en donde α y γ son tales que $\rho = x_\alpha$ y $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 3.6).

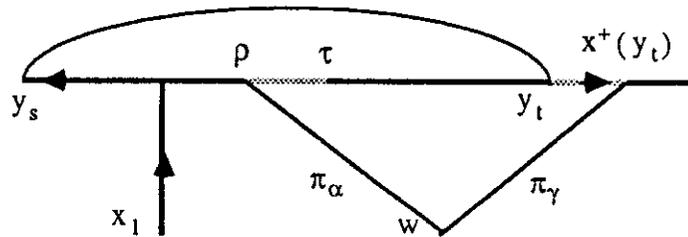


Fig. 3.6

Y si $x^+(y_t) \notin V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in B$ sea

$$T' = (((T - \rho\tau) - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\gamma \cup \pi_l$$

en donde γ es tal que $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 3.7).

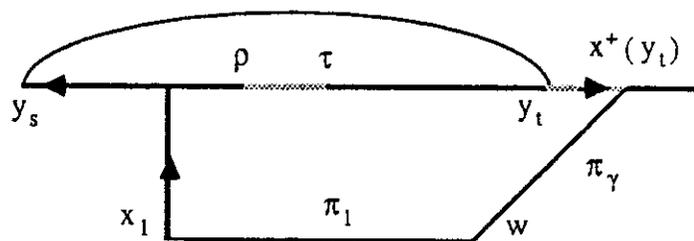


Fig. 3.7

Caso 3.- y_s no es vértice terminal en T y y_t es vértice terminal en T .

En este caso T' se construye intercambiando y_s y y_t en el caso 2.

Caso 4.- y_s y y_t no son vértices terminales en T .

Si $x^+(y_s) \in V(T_{y_s y_t})$ o $x^+(y_t) \in V(T_{y_s y_t})$ sea

$$T' = (((T - y_s x^+(y_s)) - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$ y $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 3.8).

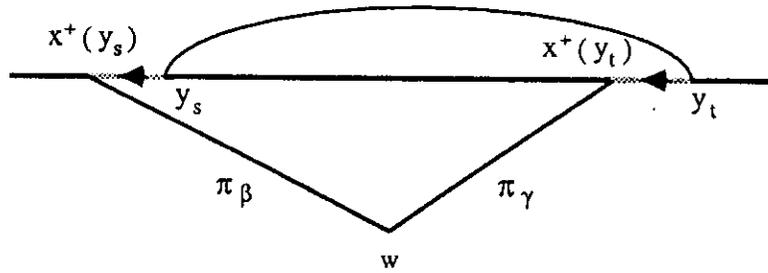


Fig. 3.8

Si $x^+(y_s) \notin V(T_{y_s y_t})$, $x^+(y_t) \notin V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in X$ sea

$$T' = (((((T - \rho\tau) - y_s x^+(y_s)) - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_\alpha$$

en donde β , γ y α son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$, $x^+(y_t) = x_\gamma$ y $\rho = x_\alpha$ (Fig. 3.9).

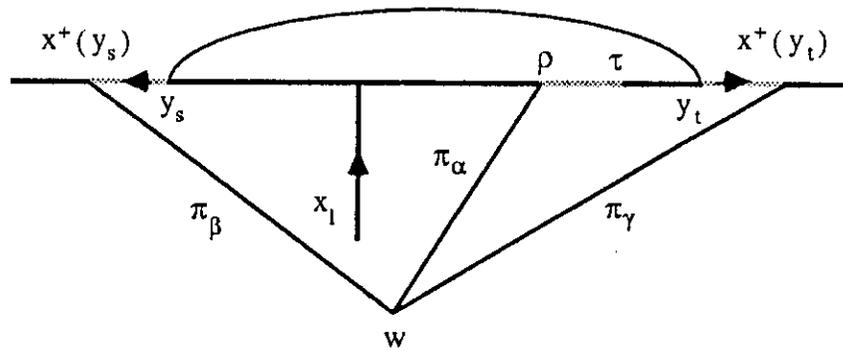


Fig. 3.9

Y si $x^+(y_s) \notin V(T_{y_s y_t})$, $x^+(y_t) \notin V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in B$ sea

$$T' = (((((T - \rho\tau) - y_s x^+(y_s)) - y_t x^+(y_t)) + y_s y_t) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_1$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$ y $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 3.10).

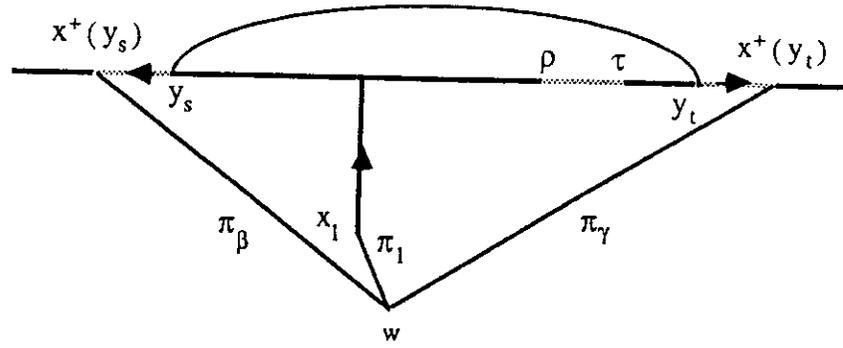


Fig. 3.10

En cada caso T' es un (r, c) -subárbol de G con más vértices que T . Como esto no es posible, entonces $y_s, y_t \notin A(G)$ y por lo tanto $U = Y \cup \{w\}$ es un subconjunto de $V(G)$ con $2 + k(r - 2)$ vértices independientes lo cual es una contradicción. ♦

Como corolario obtenemos el siguiente resultado que generaliza el teorema de Chvátal y Erdős.

Teorema 3.2 (Neumann-Lara y Rivera-Campo [NR1]).- Sean G una gráfica k -conexa con número de independencia α y $s \geq 2$ un entero. Si $\alpha \leq 1 + k(s - 1)$, entonces G tiene un s -árbol.

Demostración.- El caso $s = 2$ es el teorema de Chvátal y Erdős y el caso $s \geq 3$ está cubierto por el Teorema 3.1 con $r = s + 1$ y $c = 0$ pues un $(s+1, 0)$ -árbol es un s -árbol. ♦

Sea G la gráfica bipartita completa $K_{k, 2+k(r-2)+c}$. Si $r \geq 3$, entonces G es k conexa y tiene número de independencia $2 + k(r - 2) + c$. Por otra parte, en el Capítulo 2 observamos que G no tiene (r, c) -árboles generadores; esto muestra que la condición del Teorema 3.1 es estrecha. Análogamente, las gráficas bipartitas completas $K_{k, 2+k(s-1)}$ muestran que la condición del Teorema 3.2 también es estrecha.

Capítulo 4

Condiciones Suficientes Relacionadas con los Grados

Ore [O] demostró que si G es una gráfica con $p \geq 3$ vértices tal que $g_G(u) + g_G(v) \geq p$ para cualquier par de vértices de G , no adyacentes, entonces G tiene un ciclo generador. Como corolario se puede probar que toda gráfica G con p vértices tal que $g_G(u) + g_G(v) \geq p - 1$ para cualquier par de vértices no adyacentes tiene una trayectoria generadora.

Estos resultados han sido generalizados de muchas maneras; por ejemplo Bondy [B] considera gráficas k -conexas y da condiciones en la suma de los grados de cualquier conjunto con $k + 1$ vértices independientes.

Dada una gráfica G y un conjunto U de vértices de G , denotaremos por $g(U)$ a la suma de los grados de los elementos de U .

Teorema 4.1 (Bondy [B]).- Si G es una gráfica k -conexa con p vértices tal que

$$g(U) \geq \left(\frac{1 + (k + 1)(p - 1)}{2} \right)$$

para todo subconjunto U de $V(G)$ con $k + 1$ vértices independientes, entonces G tiene un ciclo generador. ♦

Corolario 4.2.- Si H es una gráfica k -conexa con p vértices tal que

$$g(U) \geq \left(\frac{1 + (k + 1)(p - 2)}{2} \right)$$

para todo subconjunto U de $V(H)$ con $k + 1$ vértices independientes, entonces H tiene una trayectoria generadora. ♦

Por otro lado Win [Wi1] da condiciones en la suma de los grados de cualquier conjunto con r vértices independientes, suficientes para que una gráfica tenga r -árboles generadores .

Teorema 4.3 (Win [Wi1]).- Si G es una gráfica conexa con p vértices y $r \geq 2$ es un entero tal que $g(U) \geq p - 1$ para cualquier subconjunto U de $V(G)$ con r vértices independientes, entonces G tiene un r -árbol generador. ♦

A continuación damos condiciones, de este tipo, suficientes para que una gráfica k -conexa tenga (r, c) -árboles generadores.

Teorema 4.4 (Rivera-Campo [R]).- Sea G una gráfica k -conexa con p vértices. Si r y c son enteros, con $k \geq 2$, $r \geq 4$ y $0 \leq c \leq k$, tales que

$$g(U) \geq 1 + 2k + \left(\frac{k(r-2) + c}{r-2} \right) (p - k - c - 2)$$

para cualquier subconjunto U de $V(G)$ con $2 + k(r - 2) + c$ vértices independientes, entonces G tiene un (r, c) -árbol generador.

Demostración.- Sea T un (r, c) -subárbol de G con el mayor número posible de vértices. Si T no es generador, sean $w, \pi_i, X, B, E, D, H, H_j, Y, x^+(y_j), z_j$ y $z^-(z_j)$ como en la demostración del Teorema 3.1.

Al igual que en la demostración del Teorema 3.1, $U = Y \cup \{w\}$ es un subconjunto de $V(G)$ con $2 + k(r - 2)$ vértices independientes. Los siguientes lemas serán utilizados para obtener una contradicción.

Lema 4.5.- La gráfica G contiene a lo mas $2(p - 1 - |V(T)|)$ aristas con un extremo en U y el otro en $V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})$.

Demostración.- Si $v \in V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})$ es adyacente a $y_s \in Y$, entonces y_s no es vértice terminal de T pues de lo contrario $T \cup vy_s$ es un (r, c) -subárbol de G con un vértice más que T lo cual no es posible; por lo tanto hay un vértice $x_\beta \in X$ tal que $y_s x_\beta \in A(T^D)$. Además no hay w - v trayectorias en $G - V(T)$ ya que si π es una w - v trayectoria en $G - V(T)$, entonces $\pi \cup \pi_\beta$ contiene una trayectoria π' de v a x_β que solo intersecta a T en x_β y por lo tanto $(T - y_s x_\beta) \cup vy_s \cup \pi'$ es un (r, c) -subárbol de G con más vértices que T (Fig 4.1).

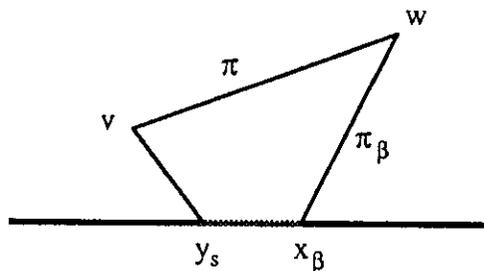


Fig 4.1

Supongamos que $v \in V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})$ es adyacente a dos vértices y_s y y_t en Y . Al igual que en la prueba del Teorema 3.1, al menos uno de los vértices $z^+(z_s)$ o $z^+(z_t)$ pertenece a $V(T_{y_s y_t})$; de nuevo llamamos ρ a ese vértice y τ a cualquier vértice adyacente a ρ en $T_{y_s y_t}$.

Si $x^+(y_s) \in V(T_{y_s y_t})$ o $x^+(y_t) \in V(T_{y_s y_t})$ sea

$$T' = (T - y_s x^+(y_s) - y_t x^+(y_t)) \cup vy_s \cup vy_t \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$ y $x^+(y_t) = x_\gamma$. En la Figura 4.2 ilustramos el caso $x^+(y_t) \in V(T_{y_s y_t})$.

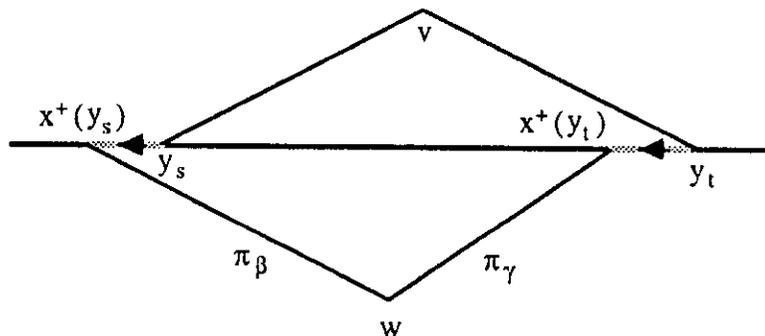


Fig. 4.2

Si $x^+(y_s) \notin V(T_{y_s y_t})$, $x^+(y_t) \in V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in X$ sea

$$T' = (((T - \rho\tau) - y_s x^+(y_s)) - y_t x^+(y_t)) \cup v y_s \cup v y_t \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_\alpha$$

en donde β , γ y α son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$, $x^+(y_t) = x_\gamma$ y $\rho = x_\alpha$ (Fig. 4.3).

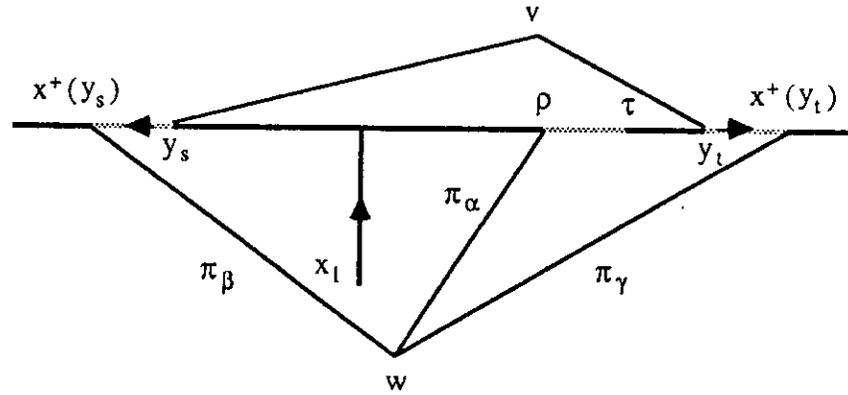


Fig. 4.3

Y si $x^+(y_s) \in V(T_{y_s y_t})$, $x^+(y_t) \notin V(T_{y_s y_t})$ y $\rho \in B$ sea

$$T' = (((T - \rho\tau) - y_s x^+(y_s)) - y_t x^+(y_t)) \cup v y_s \cup v y_t \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_1$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_s) = x_\beta$ y $x^+(y_t) = x_\gamma$ (Fig. 4.4).

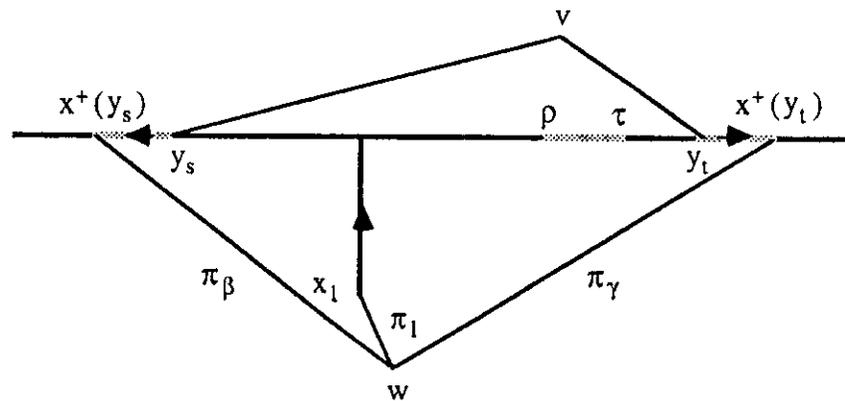


Fig. 4.4

En cada caso T' es un (r, c) -subárbol de G con mas vértices que T . Como esto no es posible, entonces cada $v \in V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})$ es adyacente a lo mas a un vértice en Y y por lo tanto a lo mas a dos vértices en U . Como $|V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})| = p - 1 - |V(T)|$, entonces G contiene a lo mas $2(p - 1 - |V(T)|)$ aristas con un extremo en U y el otro en $V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})$. ♦

Para $j = 1, 2, \dots, 1+k(r-2)+c$ sea $S_j = \{v \in V(H_j) : vy_h \in A(G) \text{ con } h \neq j\}$.

Lema 4.6.- Si $v \in S_j$, entonces $g_T(v) \geq r - 1$.

Demostración.- Sea $h \neq j$ tal que $vy_h \in A(G)$. Supongamos $g_T(v) \leq r - 2$; en particular $v \notin B$ y por lo tanto $vy_h \notin A(T)$.

Como $v \in V(H_j)$, $y_h \in V(H_h)$ y $h \neq j$, entonces al menos uno de los vértices $z^-(z_j)$ o $z^-(z_h)$ esta en T_{vy_h} ; denotamos por η ese vértice y por μ cualquier vértice adyacente a η en T_{vy_h} .

Caso 1.- y_h es terminal en T .

Si $\eta \in X$, sea

$$T' = ((T - \eta\mu) + vy_h) \cup \pi_\alpha$$

en donde α es tal que $\eta = x_\alpha$ (Fig. 4.5).

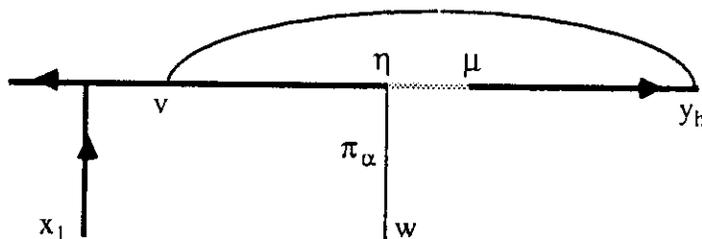


Fig. 4.5

Y si $\eta \in B$, sea

$$T' = ((T - \eta\mu) + vy_h) \cup \pi_1 \text{ (Fig. 4.6).}$$

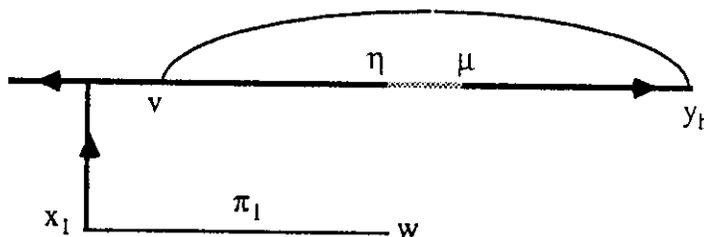


Fig. 4.6

Caso 2.- y_h no es terminal en T .

Si $x^+(y_h) \in V(Tv_{y_h})$, sea

$$T' = (T - y_h x^+(y_h)) \cup \pi_\beta$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$ (Fig. 4.7).

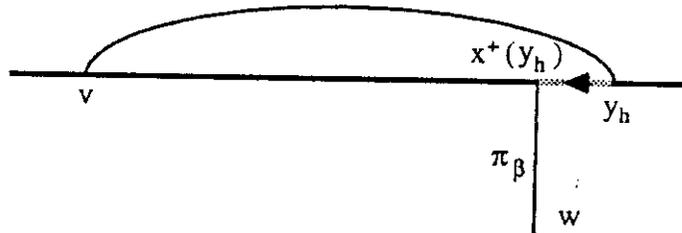


Fig. 4.7

Si $x^+(y_h) \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in X$, sea

$$T' = (((T - \eta\mu) - y_h x^+(y_h)) + v y_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_\alpha$$

en donde α y β son tales que $\eta = x_\alpha$ y $x^+(y_h) = x_\beta$ (Fig. 4.8).

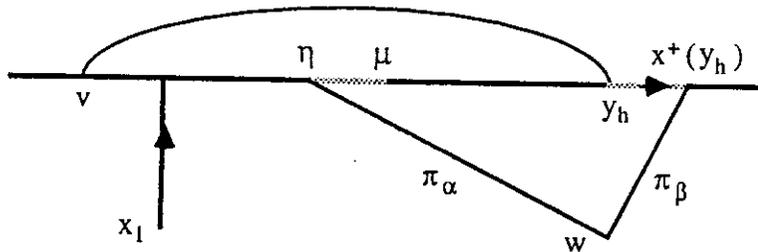


Fig. 4.8

Y si $x^+(y_h) \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in B$, sea

$$T' = (((T - \eta\mu) - y_h x^+(y_h)) + v y_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_1$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$ (Fig. 4.9).

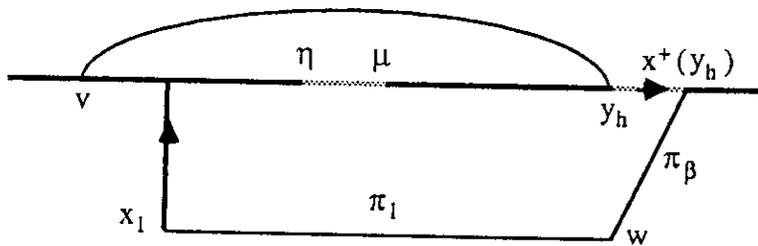


Fig. 4.9

En cada caso T' es un (r, c) -subárbol de G con mas vértices que T . Como esto no es posible entonces $g_T(v) \geq r - 1$. ♦

Para $j = 1, 2, \dots, 1+k(r-2)+c$, sea H_j^* la gráfica obtenida de H_j añadiendo el vértice $z^-(z_j)$ junto con la arista $z^-(z_j)z_j$.

Lema 4.7.- Para cada $v \in S_j$ hay $r - 2$ vértices en $V(H_j^*)$ que no son adyacentes a y_j en G .

Demostración.- Sean $v \in S_j$ y $h \neq j$ tales que $vy_h \in A(G)$. Si $v \in B$, entonces $g_{H_j^*}(v) = g_T(v) - 1$ y si $v \notin B$, entonces $g_{H_j^*}(v) = g_T(v)$; en ambos casos $g_{H_j^*}(v) = r - 1$.

Sean u_1, u_2, \dots, u_{r-1} los vértices adyacentes a v en H_j^* . Como a lo mas uno de estos vértices pertenece a T_{vy_j} entonces, sin perder generalidad, podemos suponer $u_1, u_2, \dots, u_{r-2} \notin V(T_{vy_j})$ y en particular $u_i \neq y_j$ para $i = 1, 2, \dots, r-2$.

Supongamos $u_m y_j \in A(G)$ con $m \leq r - 2$; como $u_m \notin V(T_{vy_j})$ y $u_m v \in A(T)$, entonces $v \in V(T_{u_m y_j})$. Sean η y μ como en la demostración del Lema 4.6.

Caso 1.- $v \in B$ y y_j es terminal en T . Sea

$$T' = ((T - vu_m) + u_m y_j) \cup \pi_1 \text{ (Fig. 4.10).}$$

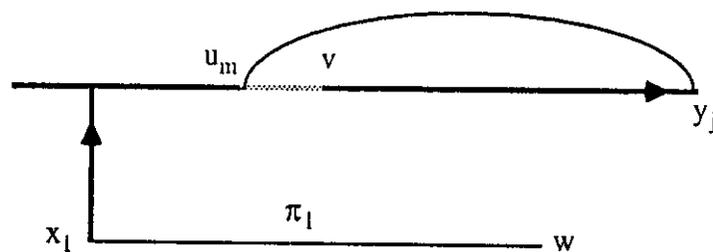


Fig. 4.10

Caso 2.- $v \in B$ y y_j no es terminal en T . Sea

$$T' = (((T - vu_m) - y_j x^+(y_j)) + u_m y_j) \cup \pi_1 \cup \pi_\gamma$$

en donde γ es tal que $x^+(y_j) = x_\gamma$ (Fig. 4.11).

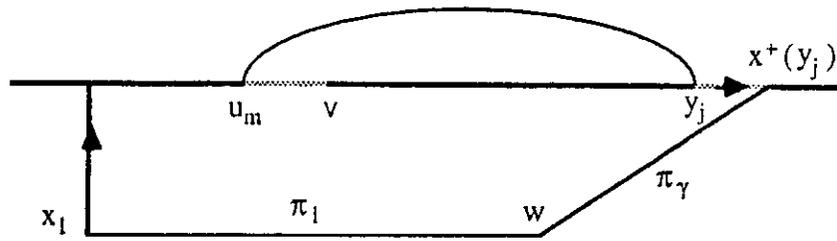


Fig. 4.11

Caso 3.- $v \notin B$ y los vértices y_h and y_j son terminales en T .

Si $\eta \in X$ sea

$$T' = (((T - vu_m) - \eta\mu) + u_my_j) + vy_h) \cup \pi_\alpha$$

en donde α es tal que $\eta = x_\alpha$ (Fig. 4.12).

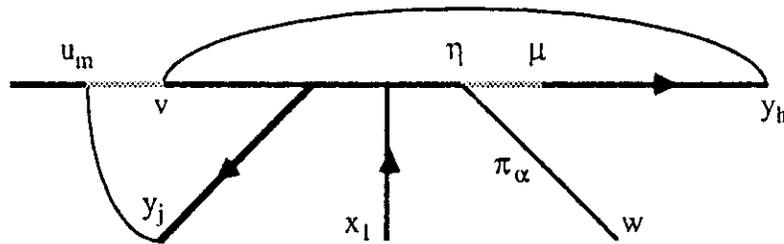


Fig. 4.12

Y si $\eta \in B$ sea

$$T' = (((T - vu_m) - \eta\mu) + u_my_j) + vy_h) \cup \pi_l \text{ (Fig. 4.13).}$$

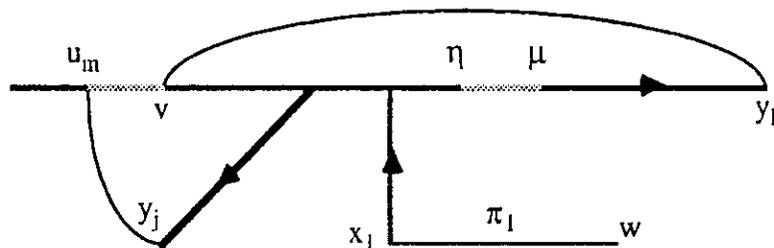


Fig. 4.13

Caso 4.- $v \notin B$, y_h es terminal en T y y_j no es terminal en T .

Si $x^+(y_j) \in V(Tvy_h)$, sea

$$T' = (((T - vu_m) - y_jx^+(y_j)) + u_my_j) + vy_h) \cup \pi_\gamma$$

en donde γ es tal que $x^+(y_j) = x_\gamma$ (Fig. 4.14).

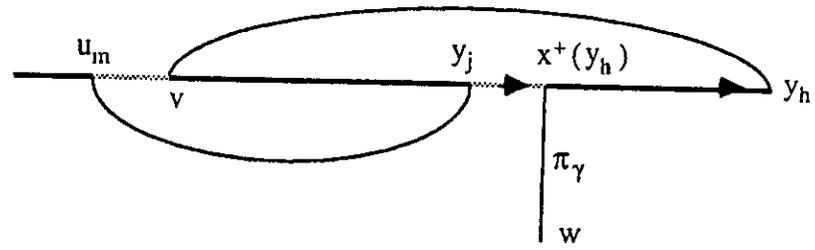


Fig. 4.14

Si $x^+(y_j) \notin V(Tvy_h)$ y $\eta \in X$ sea

$$T' = (((((T - vu_m) - y_j x^+(y_j)) - \eta\mu) + u_m y_j) + v y_h) \cup \pi_\gamma \cup \pi_\alpha$$

en donde α y γ son tales que $\eta = x_\alpha$ y $x^+(y_j) = x_\gamma$ (Fig. 4.15).

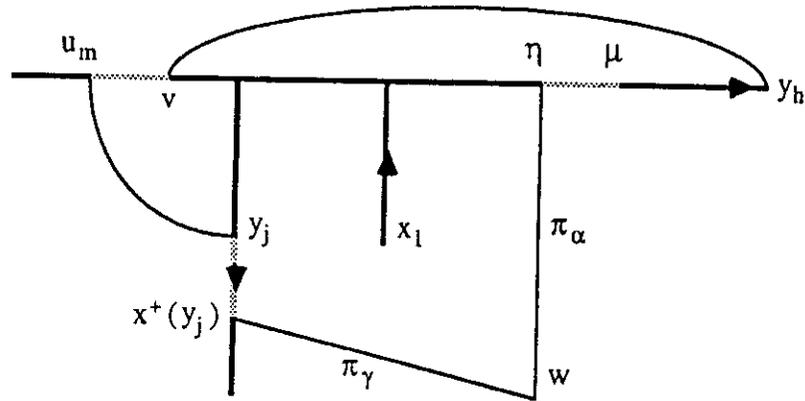


Fig. 4.15

Y si $x^+(y_j) \notin V(Tvy_h)$ y $\eta \in B$ sea

$$T' = (((((T - vu_m) - y_j x^+(y_j)) - \eta\mu) + u_m y_j) + v y_h) \cup \pi_\gamma \cup \pi_1$$

en donde γ es tal que $x^+(y_j) = x_\gamma$ (Fig. 4.16).

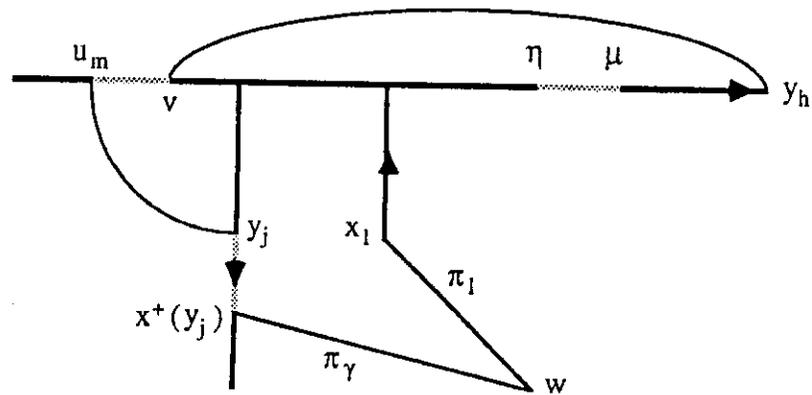


Fig. 4.16

Caso 5.- $v \notin B$, y_j es terminal en T y y_h no es terminal en T .

Si $x^+(y_h) \in V(Tv_{y_h})$ sea

$$T' = (((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) + u_m y_j) + v y_h) \cup \pi_\beta$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$ (Fig. 4.17).

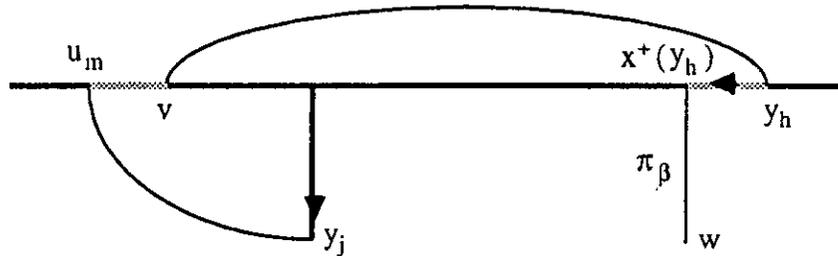


Fig. 4.17

Si $x^+(y_h) \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in X$ sea

$$T' = ((((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) - \eta \mu) + u_m y_j) + v y_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_\alpha$$

en donde β y α son tales que $x^+(y_h) = x_\beta$ y $\eta = x_\alpha$ (Fig. 4.18).

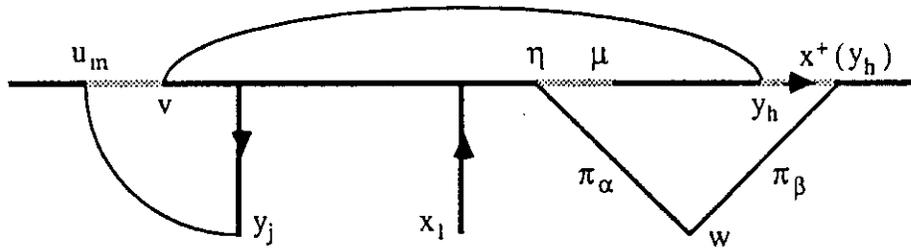


Fig. 4.18

Y si $x^+(y_h) \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in B$ sea

$$T' = ((((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) - \eta \mu) + u_m y_j) + v y_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_1$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$ (Fig. 4.19).

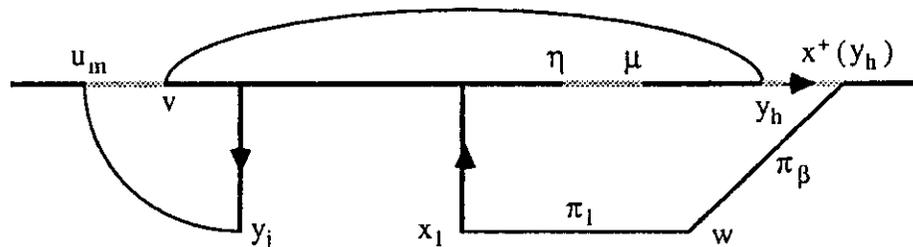


Fig. 4.19

Caso 6.- $v \notin B$ y los vértices y_h and y_j no son terminales en T .

Si $x^+(y_j) \in V(T_{vy_h})$ o $x^+(y_h) \in V(T_{vy_h})$ sea

$$T' = ((((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) - y_j x^+(y_j)) + u_m y_j) + vy_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_h) = x_\beta$ and $x^+(y_j) = x_\gamma$. (Figs. 4.20 y 4.21).

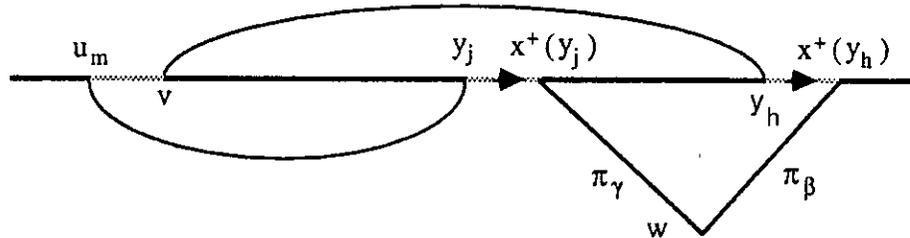


Fig 4.20

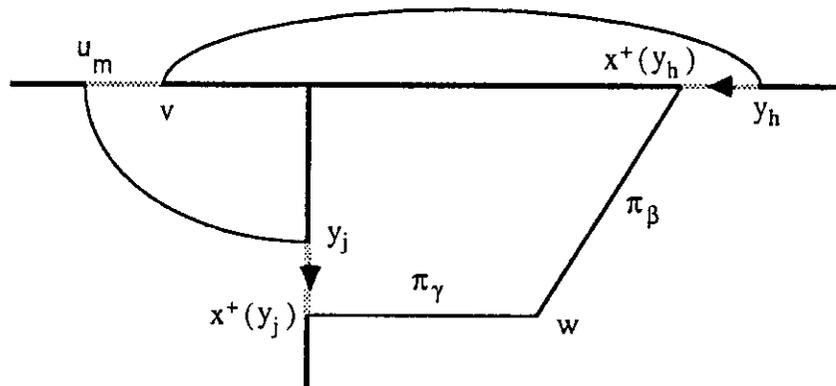


Fig. 4.21

Si $x^+(y_j) \notin V(T_{vy_h})$, $x^+(y_h) \notin V(T_{vy_h})$ y $\eta \in X$ sea

$$T' = (((((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) - y_j x^+(y_j)) - \eta \mu) + u_m y_j) + vy_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_\alpha$$

en donde β , γ y α son tales que $x^+(y_h) = x_\beta$, $x^+(y_j) = x_\gamma$ y $\eta = x_\alpha$ (Fig. 4.22).

Y si $x^+(y_j) \notin V(T_{vy_h})$, $x^+(y_h) \notin V(T_{vy_h})$ y $\eta \in B$ sea

$$T' = (((((((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) - y_j x^+(y_j)) - \eta \mu) + u_m y_j) + vy_h) \cup \pi_\beta \cup \pi_\gamma \cup \pi_1$$

en donde β y γ son tales que $x^+(y_h) = x_\beta$ and $x^+(y_j) = x_\gamma$ (Fig. 4.23).

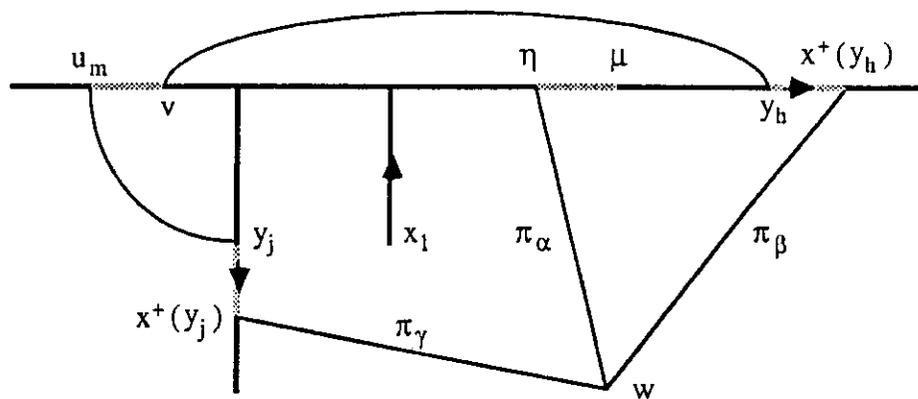


Fig. 4.22

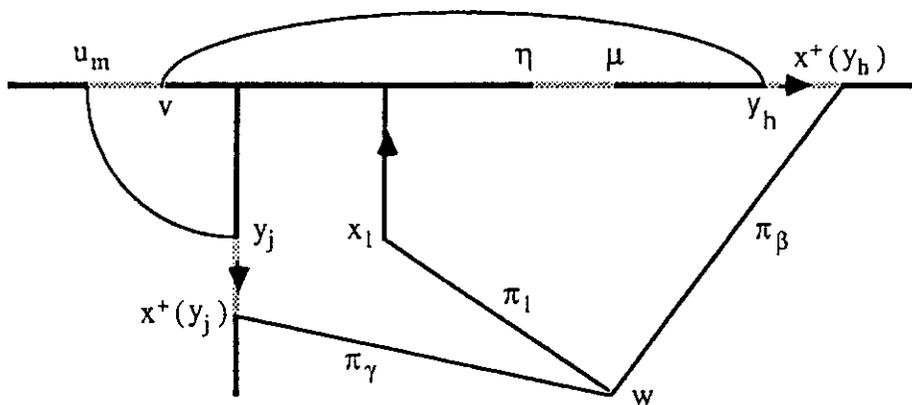


Fig. 4.23

En cada caso T' es un (r, c) -subárbol de G con más vértices que T . Como esto no es posible, entonces $u_m y_j \notin A(G)$ para $m = 1, 2, \dots, r-2$. ♦

Lema 4.8.- Para cada $v \in S_j$ hay $r - 2$ vértices en $V(H_j^*)$ que no son adyacentes a w en G .

Demostración.- Sean $v \in S_j$ y $h \neq j$ tales que $vy_h \in A(G)$. Como se probó en el Lema 4.7, el vértice v tiene grado $r - 1$ en H_j^* . Sean u_1, u_2, \dots, u_{r-2} los vértices de G adyacentes a v en H_j^* . Como exactamente uno de estos vértices pertenece a la trayectoria $T_{x_1 v}$, entonces, sin perder generalidad, podemos suponer $u_1, u_2, \dots, u_{r-2} \notin V(T_{x_1 v})$.

Supongamos $u_m w \in A(G)$ con $m \leq r - 2$. Sean η y μ como en las demostraciones de los lemas 4.6 y 4.7.

Caso 1. y_h es terminal en T .

Si $u_m \in V(Tv_{y_h})$ sea

$$T' = ((T - vu_m) + vy_h) \cup u_m w \quad (\text{Fig. 4.24})$$

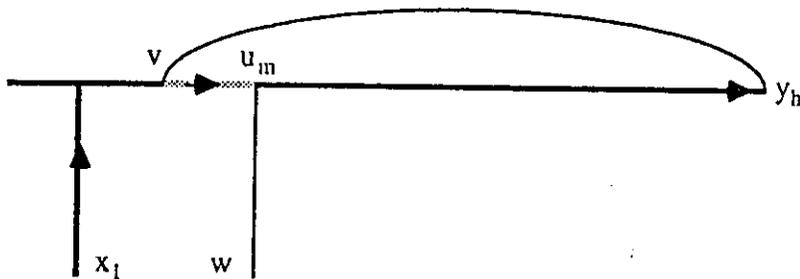


Fig. 4.24

Si $u_m \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in X$ sea

$$T' = (((T - vu_m) - \eta\mu) + vy_h) \cup u_m w \cup \pi_\alpha$$

en donde α es tal que $\eta = x_\alpha$. (Fig. 4.25).

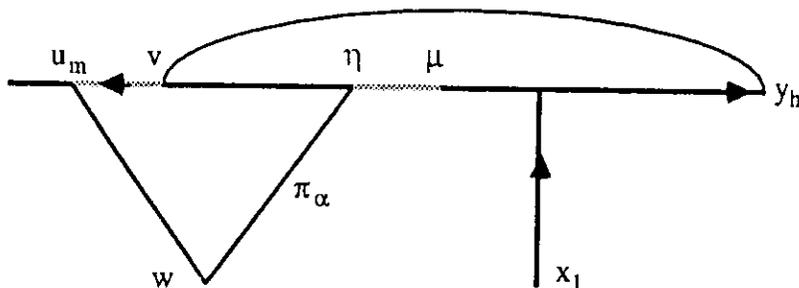


Fig. 4.25

Y si $u_m \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in B$ sea

$$T' = (((T - vu_m) - \eta\mu) + vy_h) \cup u_m w \cup \pi_l \quad (\text{Fig. 4.26})$$

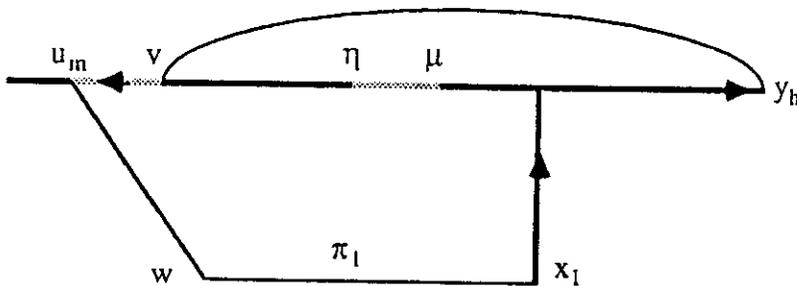


Fig. 4.26

Caso 2.- y_h no es terminal en T .

Si $x^+(y_h) \in V(Tv_{y_h})$ o $u_m \in V(Tv_{y_h})$. Sea

$$T' = (((T - vu_m) - y_h x^+(y_h)) + vy_h) \cup u_m w \cup \pi_\beta$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$. (Fig. 4.27).

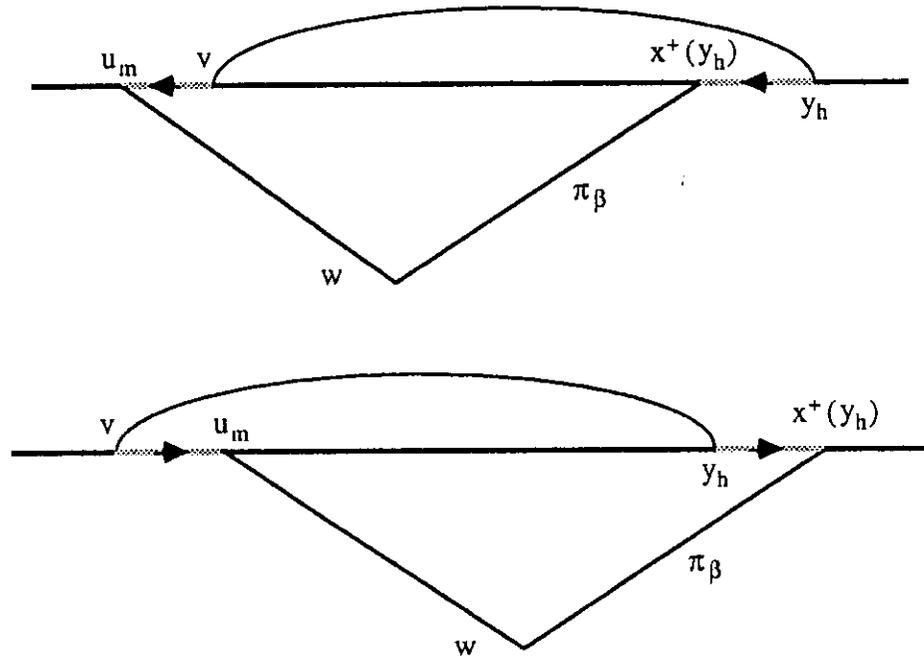


Fig. 4.27

Si $x^+(y_h) \notin V(Tv_{y_h})$, $u_m \notin V(Tv_{y_h})$ y $\eta \in X$ sea

$$T' = ((((T - vu_m) - \eta\mu) - y_h x^+(y_h)) + vy_h) \cup u_m w \cup \pi_\beta \cup \pi_\alpha$$

en donde α y β son tales que $\eta = x_\alpha$ y $x^+(y_h) = x_\beta$. (Fig. 4.28).

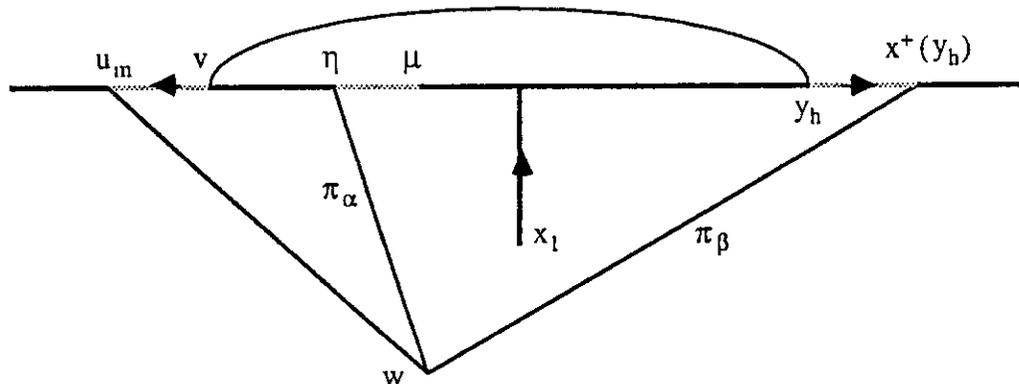


Fig. 4.28

Y si $x^+(y_h) \notin V(Tv y_h)$, $u_m \notin V(Tv y_h)$ y $\eta \in B$ sea

$$T' = (((T - vu_m) - \eta\mu) - y_h x^+(y_h) + v y_h) \cup u_m w \cup \pi_\beta \cup \pi_1$$

en donde β es tal que $x^+(y_h) = x_\beta$. (Fig. 4.29).

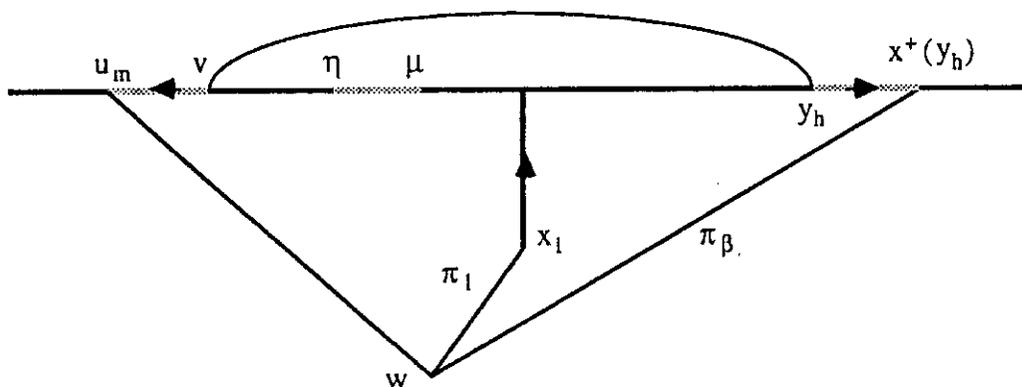


Fig. 4.29

En cada caso T' es un (r, c) -subárbol de G con al menos un vértice mas que G ; como esto no es posible, entonces u_1, u_2, \dots, u_{r-2} no son adyacentes a w en G . \blacklozenge

Para cada $v \in V(H)$ sea $j(v)$ tal que $v \in V(H_{j(v)})$. Denotemos por S al conjunto $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{1+k(r-2)+c}$ y por s al número de elementos de S .

Lema 4.9.- G contiene a lo mas $(k + s)((k - 2)(r - 2) + c) + 2(|V(T)| - 1 - c)$ aristas con un extremo en U y el otro en $V(T) \setminus Y$.

Demostración.- Como $|X \cup S| = k + s$ y $|U| = 2 + k(r - 2) + c$, entonces hay

$$(k + s)(2 + k(r - 2) + c) \tag{4.9.1}$$

posibles aristas en G con un extremo en $X \cup S$ y el otro en U .

Sea $v \in V(T) \setminus (X \cup S \cup Y)$; como $v \notin S$, entonces el único vértice de Y adyacente a v es $y_{j(v)}$ y por lo tanto v solo puede ser adyacente a dos vértices en U . Como

$$|V(T) \setminus (X \cup Y \cup S)| = |V(T)| - k - (1 + k(r - 2) + c) - s$$

entonces hay a lo mas

$$2(|V(T)| - k - (1 + k(r - 2) + c) - s) \tag{4.9.2}$$

aristas en G con un extremo en $V(T) \setminus (X \cup S \cup Y)$ y el otro en U .

Por (4.8.1) y (4.8.2), la gráfica G contiene a lo mas

$$\begin{aligned} (k+s)(2+k(r-2)+c) + 2(|V(T)| - k - (1+k(r-2)+c) - s) = \\ (k+s)(k(r-2)+c) + 2(|V(T)| - 1 - c) - 2k(r-2) \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

aristas con un extremo en U y el otro en $V(T) \setminus Y$.

Por los lemas 4.7 y 4.8, hay al menos $2s(r-2)$ aristas contadas en (4.9.1) o en (4.9.2) que no estan en G . Por lo tanto G contiene a lo mas

$$\begin{aligned} (k+s)(k(r-2)+c) + 2(|V(T)| - 1 - c) - 2k(r-2) - 2s(r-2) = \\ (k+s)((k-2)(r-2)+c) + 2(|V(T)| - 1 - c) \end{aligned}$$

aristas con un extremo en U y el otro en $V(T) \setminus Y$. ♦

Lema 4.10.- $|V(T)| \geq (k+s)(r-2) + k + c + 1$.

Demostración.- Sea H_j^* como en el Lema 4.7. Cada vértice $v \in S_j$ tiene grado $r-1$ en H_j^* , por lo tanto H_j^* es un árbol con al menos $2 + (r-3)|S_j|$ vértices terminales incluyendo y_j y z_j .

Si u es un vértice terminal de H_j^* distinto de y_j y z_j , entonces $u \notin S_j$, de lo contrario u sería adyacente en G a un vértice y_h de T con $h \neq j = j(u)$; en este caso se puede encontrar, como en la prueba del Teorema 3.1, un (r, c) -subárbol de G con mas vértices que T . Esto implica que cada árbol H_j^* contiene al menos $(r-3)|S_j|$ vértices que no pertenecen a $X \cup S \cup Y$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |V(T)| &\geq (r-3)(|S_1| + |S_2| + \dots + |S_{1+k(r-2)+c}|) + |X| + |S| + |Y| \\ &= (r-3)(s) + k + (1+k(r-2)+c) + s \\ &= s(r-2) + k(r-2) + k + c + 1 \\ &= (k+s)(r-2) + k + c + 1 \end{aligned} \quad \diamond$$

Procedemos ahora a terminar la demostración del Teorema 4.4. Como U es independiente, entonces cada arista incidente en U tiene el otro extremo en

$$(V(G) \setminus U) = (V(G) \setminus (V(T) \cup \{w\})) \cup (V(T) \setminus Y)$$

Por los lemas 4.5, 4.9 y 4.10

$$\begin{aligned}
g(U) &\leq 2(p - 1 - |V(T)|) + (k + s)((k - 2)(r - 2) + c) + 2(|V(T)| - 1 - c) \\
&= 2p - 4 - 2c + (k + s)(k(r - 2) + c - 2(r - 2)) \\
&\leq 2p - 4 - 2c + ((|V(T)| - k - c - 1)/(r - 2))(k(r - 2) + c - 2(r - 2)) \\
&\leq 2p - 4 - 2c + ((p - k - c - 2)/(r - 2))(k(r - 2) + c - 2(r - 2)) \\
&= 2p - 4 - 2c + ((p - k - c - 2)/(r - 2))(k(r - 2) + c) - ((p - k - c - 2)/(r - 2))(2(r - 2)) \\
&= 2k + [(k(r - 2) + c)/(r - 2)][p - k - c - 2]
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ♦

Corolario 4.11.- Sean G una gráfica k -conexa con p vértices y s un entero. Si $k \geq 2$, $s \geq 3$ y $g(U) \geq 1 + k(p - k)$ para cada conjunto U con $2 + k(s - 1)$ vértices independientes de G , entonces G tiene un s -árbol generador.

Demostración.- Si $r = s + 1$ y $c = 0$; entonces $2 + k(s - 1) = 2 + k(r - 2) + c$ y

$$1 + k(p - k) = 1 + 2k + \left(\frac{k(r - 2) + c}{r - 2} \right) (p - k - c - 2)$$

Como $s \geq 3$, entonces $r \geq 4$; por el Teorema 4.4, G tiene un $(r, 0)$ -árbol generador; es decir un árbol generador con grado máximo menor o igual a $r - 1 = s$. ♦

Sea G la gráfica bipartita completa $K_{k, 2+k(r-2)+c}$. Si $r \geq 3$, entonces G es k -conexa y

$$\begin{aligned}
g(U) &= k(2 + k(r - 2) + c) \\
&= 2k + [(k(r - 2) + c) / (r - 2)][(2 + k(r - 1) + c) - k - c - 2] \\
&= 2k + [(k(r - 2) + c) / (r - 2)][|V(G)| - k - c - 2]
\end{aligned}$$

para todo subconjunto U de $V(G)$ con $2 + k(r - 2) + c$ vértices independientes. Como observamos en el Capítulo 2, G no tiene (r, c) -árboles generadores; esto muestra que la condición sobre los grados en el Teorema 4.4 es estrecha.

Para cada entero $t \geq 2$, sea F_t una gráfica cuyo conjunto de vértices $V(F_t)$ es la unión de seis conjuntos ajenos X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z y W con $|X_1| = t, |X_2| = t + 1, |Y_1| = |Y_2| = 3 + 2t(t - 1), |Z| = t - 1$ y $|W| = (t - 1)(r - 1)$, en donde $r = 2t$ y cuyo conjunto de aristas $A(F_t)$ es la unión de los

conjuntos $E(X_1, Y_1)$, $E(X_2, Y_2)$, $E(X_1, Z)$, $E(X_2, Z)$, $E(W, Z)$, $E(Y_1)$, $E(Y_2)$ y $E(Z)$, en donde $E(U, V) = \{uv : u \in U \text{ y } v \in V\}$ y $E(U) = \{u_1u_2 : u_1, u_2 \in U\}$.

La gráfica F_t no tiene r -árboles generadores pues $\omega(F_t - Z) = 2 + (r - 1)(t - 1) = 2 + (r - 1)|Z|$; sin embargo:

(a) F_t es $(t - 1)$ -conexa.

(b) $|V(F_t)| = t + (t + 1) + 2(3 + 2t(t - 1)) + (t - 1) + (t - 1)(r - 1) = 6t^2 - 4t + 7$.

(c) $1 + t(|V(F_t)| - t) = 1 + t(6t^2 - 4t + 7 - t) = 6t^3 - 5t^2 + 7t + 1$.

(d) $U = X_1 \cup X_2 \cup W$ es el único subconjunto de $V(F_t)$ con $2 + t(r - 1)$ vértices independientes.

(e) $g(U) = |X_1|(|Y_1| + |Z|) + |X_2|(|Y_2| + |Z|) + |W||Z| = 6t^3 - 5t^2 + 7t + 1 = 1 + t(|V(F_t)| - t)$.

Esto muestra que la condición de conexidad en el Corolario 4.10 también es estrecha.

Terminamos este capítulo con una condición suficiente para que una gráfica k -conexa tenga un árbol generador en el que el grado máximo y el número de vértices terminales sean relativamente pequeños.

Teorema 4.12.- Si G es una gráfica k -conexa con p vértices y $r \geq 2$ es un entero tal que

$$g_G(u) + g_G(v) \geq p - 1 - k(r - 2)$$

para cualquier par de vértices de G no adyacentes, entonces G tiene un r -árbol generador T con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales.

Demostracion.- Por el corolario del teorema de Ore, basta con probar el resultado para $r \geq 3$. Sea T un r -subárbol de G con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con el mayor número posible de vértices. Si T no es generador sean w , π_i y X como en la demostración del Teorema 3.1.

Supongamos que T tiene menos de $2 + k(r - 2)$ vértices terminales; entonces T tiene menos de k vértices con grado r y en particular $g_T(x_i) \leq r - 1$ para alguna $i = 1, 2, \dots, k$. Por lo tanto $T' = T \cup \pi_i$ es un r -subárbol de G con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con al menos un vértices mas que T . Como esto no es posible, entonces T tiene exactamente $2 + k(r - 2)$ vértices terminales; denotemos por $V_1(T)$ al conjunto de vértices terminales de T .

Sean u cualquier vértice en $V_1(T)$ y D la orientación de las aristas de T tal que T^D es un árbol dirigido hacia fuera con raíz u . Para cada $z \in V(T) \setminus \{u\}$ denotamos por z^- el vértice de T tal que $z^-z \in A(T^D)$.

Sea $z \in \Gamma_G(u)$; si $z \in V(G) \setminus V(T)$, entonces $T' = T \cup uz$ es un r -subárbol de G , con $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con un vértice más que T lo cual es una contradicción, por lo tanto $\Gamma_G(u)$ está contenido en $V(T)$.

Sea v un vértice terminal de T tal que la trayectoria T_{uv} contiene al menos un vértice en X . Como en el caso del vértice u , $\Gamma_G(v)$ también está contenido en $V(T)$. Supongamos que hay un vértice $z \in \Gamma_G(v) \cap V_1(T)$; como $r \geq 3$, entonces hay una arista ab en la trayectoria T_{vz} tal que $g_T(a) \geq 3$. Por lo tanto $T' = (T - ab) + vz$ es un r -subárbol de G con menos de $2 + k(r - 2)$ vértices terminales (Fig. 4.30).

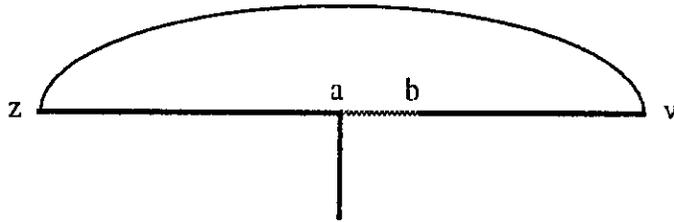


Fig 4.30

Como T' tiene menos de k vértices con grado r , entonces $g_{T'}(x_i) \leq r - 1$ para alguna $i = 1, 2, \dots, k$. Por lo tanto $T'' = T' \cup \pi_i$ es un r -subárbol de G más grande que T con a lo más $2 + k(r - 2)$ vértices terminales. Como esto no es posible, entonces $\Gamma_G(v) \cap V_1(T) = \emptyset$.

Sea $\Gamma^-(u) = \{z^- : z \in \Gamma_G(u)\}$; como u es la raíz de T^D , entonces $\Gamma^-(u) \cap V_1(T) = \{u\}$; por lo tanto $\Gamma^-(u) \cup \Gamma_G(v)$ está contenido en $(V(T) \setminus V_1(T)) \cup \{u\}$, de donde

$$\begin{aligned} |\Gamma^-(u) \cup \Gamma_G(v)| &\leq |V(T)| - |V_1(T)| + 1 \\ &\leq (p - 1) - (2 + k(r - 2)) + 1 \\ &= p - 2 - k(r - 2) \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

Sean z_1 y z_2 dos vértices en $\Gamma_G(u)$; si $z_1^- = z_2^-$, en particular $g_T(z_1^-) \geq 3$ y por lo tanto $T' = (T - z_1^-z_1) + uz_1$ es un r -subárbol de G con un vértice terminal menos que T (Fig 4.31).

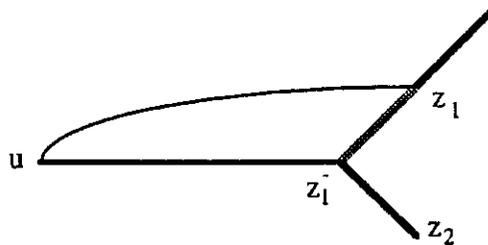


Fig 4.31

Como T' tiene menos de $2 + k(r - 2)$ vértices terminales, entonces tiene menos de k vértices con grado r y en particular $g_{T'}(x_i) \leq r - 1$ para alguna $i = 1, 2, \dots, k$. Por lo tanto $T'' = T' \cup \pi_i$ es un subárbol de G con $\Delta(T'') = \Delta(T') = \Delta(T) \leq r$, con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con al menos un vértices mas que T . Como esto no es posible, entonces $z_1^- \neq z_2^-$ de donde $|\Gamma^-(u)| = |\Gamma_G(u)| = g_G(u)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Gamma^-(u) \cup \Gamma_G(v)| &= |\Gamma^-(u)| + |\Gamma_G(v)| - |\Gamma^-(u) \cap \Gamma_G(v)| \\ &= g_G(u) + g_G(v) - |\Gamma^-(u) \cap \Gamma_G(v)| \\ &\geq p - 1 - k(r - 2) - |\Gamma^-(u) \cap \Gamma_G(v)| \end{aligned} \quad (4.12.2)$$

De (4.12.1) y (4.12.2) se tiene $|\Gamma^-(u) \cap \Gamma_G(v)| \geq 1$; sea $z \in \Gamma_G(u)$ tal que $z^- \in \Gamma_G(v)$.

Caso 1.- $z \in V(T_{uv})$

Por la elección de v , existe α tal que $x_\alpha \in V(T_{uv})$; denotemos por x_α^+ al único vértice de T_{uv} tal que $x_\alpha x_\alpha^+ \in A(T^D)$.

Si $z = x_\alpha$ sea

$$T' = (((T - z^-z) - x_\alpha x_\alpha^+) + uz) + z^-v) \cup \pi_\alpha \text{ (Fig. 4.32).}$$

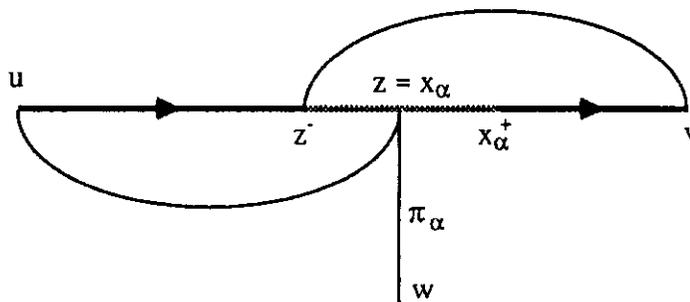


Fig. 4.32

Y si $z \neq x_\alpha$ sea $T' = (((T - z^-z) - x_\alpha^-x_\alpha) + uz) + z^-v \cup \pi_\alpha$ (Fig. 4.33).

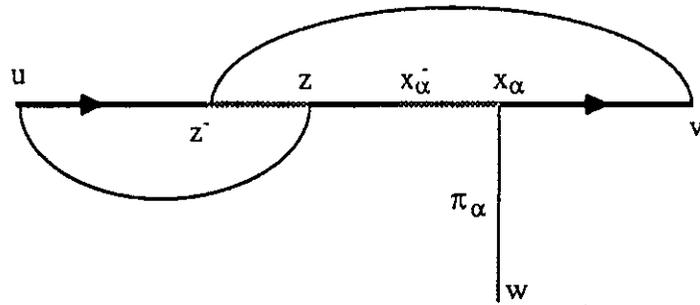


Fig. 4.33

En ambos casos T' es un subárbol de G con $\Delta(T') = \Delta(T) \leq r$, con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con mas vértices que T lo cual no es posible.

Caso 2.- $z \notin V(T_{uv})$

Como T es un árbol entonces hay un único vértice $\rho \in V(T_{uv}) \cap V(T_{uz}) \cap V(T_{zv})$ (Fig. 4.34); denotemos por ρ^+ al único vertice de T_{uv} tal que $\rho\rho^+ \in A(T^D)$ (Fig. 4.34).

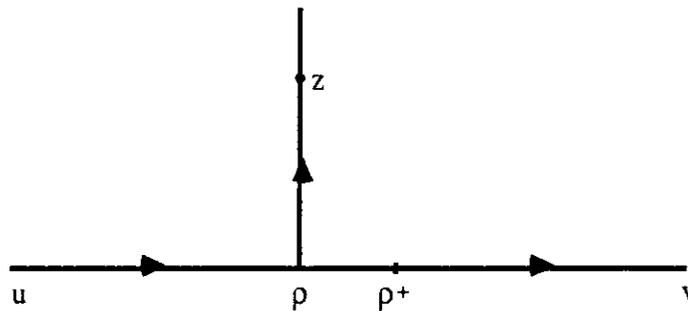


Fig. 4.34

Sea $T' = (((T - z^-z) - \rho\rho^+) + uz) + z^-v$ (Fig. 4.35)

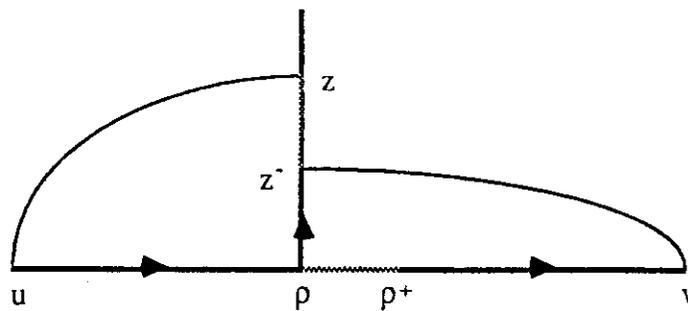


Fig. 4.35

Como $g_T(\rho) \geq 3$, entonces T' tiene a lo mas $1 + k(r - 2)$ vértices terminales, lo cual implica que T' tiene menos de k vértices con grado r y en particular $g_{T'}(x_i) \leq r - 1$ para alguna $i = 1, 2, \dots, k$. Por lo tanto $T'' = T' \cup \pi_i$ es un subárbol de G con a lo mas $2 + k(r - 2)$ vértices terminales y con al menos un vértices mas que T . Como $\Delta(T'') = \Delta(T') = \Delta(T) \leq r$, entonces este caso tampoco es posible. \blacklozenge

Sea G la gráfica bipartita completa $K_{k, 2+k(r-1)}$. Si $r \geq 2$, entonces G es k -conexa y

$$\begin{aligned} g_G(u) + g_G(v) &\geq 2k \\ &= (2 + kr) - 2 - k(r - 2) \\ &= |V(G)| - 2 - k(r - 2) \end{aligned}$$

para cualquier par de vértices de G no adyacentes; sin embargo G no tiene r -árboles generadores. Esto muestra que la condición del Teorema 4.12 es estrecha.

Capítulo 5

Gráficas Planas

Whitney [W] demostró que si G es una gráfica máxima plana sin ciclos separadores de longitud tres, entonces G tiene un ciclo generador. A su vez Tutte [T] probó que toda gráfica plana 4-conexa tiene un ciclo generador. Naturalmente las condiciones en estos dos resultados implican la existencia de trayectorias generadoras, es decir de árboles generadores con grado máximo dos.

En este capítulo damos condiciones suficientes para que una gráfica plana tenga un árbol generador con grado máximo a lo mas tres.

5.1 Triangulaciones.

Una gráfica plana 2-conexa es una *triangulación* si la frontera de cada cara interior esta formada por tres aristas.

Lema 5.1.1.- Sean G una triangulación con cara exterior S y $u \in V(G)$. Si $u \in V(S)$, entonces la subgráfica $G[\Gamma_G(u)]$ de G , inducida por $\Gamma_G(u)$, tiene una trayectoria generadora y si $u \notin V(S)$, entonces $G[\Gamma_G(u)]$ tiene un ciclo generador.

Demostración.- Sea $\Gamma_G(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; sin perder generalidad podemos suponer que las aristas uv_1, uv_2, \dots, uv_n aparecen en ese orden en G con $uv_1, uv_n \in A(S)$ en el caso $u \in V(S)$ (Fig. 5.1).

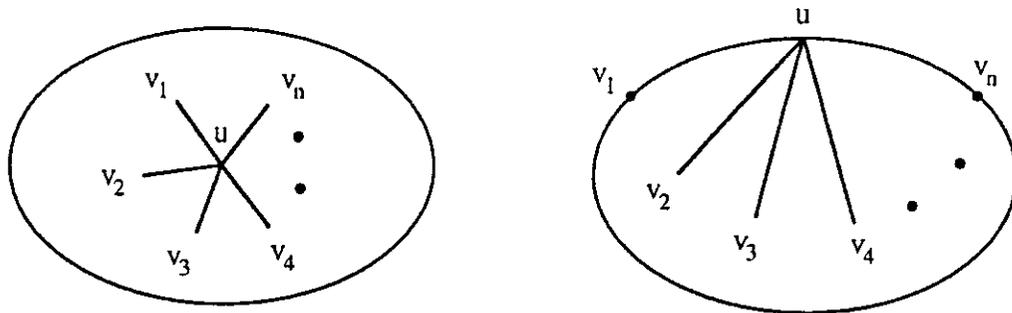


Fig 5.1

Para $i = 1, 2, \dots, n-1$, las aristas uv_i y uv_{i+1} están en una misma cara interior de G . Como la frontera de cada cara interior de G esta formada por tres aristas entonces $v_i v_{i+1} \in A(G)$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Por lo tanto las aristas $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ definen una trayectoria T generadora de $G[\Gamma_G(u)]$. Si $u \notin V(S)$, entonces uv_n y uv_1 también están en una misma cara interior de G y por lo tanto, en este caso, $T \cup v_n v_1$ es un ciclo generador de $G[\Gamma_G(u)]$. ♦

Sea G una triangulación con cara exterior S . Una arista uv de G es *diagonal* si $u, v \in V(S)$ y $uv \notin A(S)$.

Lema 5.1.2.- Sea G una triangulación con cara exterior S . Dos vértices a y b de G forman un 2-corte de G si y sólo si ab es una arista diagonal de G .

Demostración.- Si $\{a, b\}$ es un corte de G , entonces $G - \{a, b\}$ consta de dos gráficas G_1 y G_2 de tal manera que no hay aristas de G con un extremo en G_1 y el otro en G_2 . Como G es 2-conexa, entonces $\Gamma_G(a) \cap V(G_i) \neq \Phi$ y $\Gamma_G(b) \cap V(G_i) \neq \Phi$ para $i = 1, 2$.

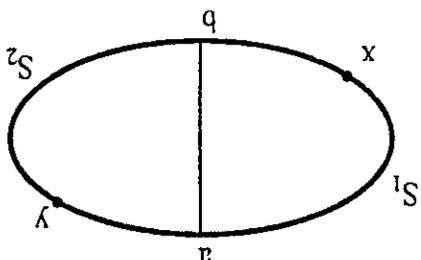
Si $a \notin V(S)$, entonces por el Lema 5.1.1, $G[\Gamma_G(a)]$ tiene un ciclo generador C . Como $\Gamma_G(a) \cap V(G_i) \neq \Phi$ para $i = 1, 2$, entonces C tiene al menos un vértice de G_1 y al menos un vértice de G_2 . Como G no tiene aristas con un extremo en G_1 y el otro en G_2 , entonces $V(C) \supset \{a, b\}$ lo cual no es posible pues $a \notin \Gamma_G(a) = V(C)$; por lo tanto $a \in V(S)$. Análogamente $b \in V(S)$.

Por el Lema 5.1.1, $G[\Gamma_G(a)]$ tiene una trayectoria generador T . Al igual que C , T tiene al menos un vértice de G_1 y al menos un vértice de G_2 . Por lo tanto $V(T) \cap \{a, b\} \neq \Phi$; como $a \in \Gamma_G(a) = V(T)$, entonces $b \in \Gamma_G(a)$ de donde $ab \in A(G)$.

$\{a, b\}$ es un corte de G .

Claramente toda x - y trayectoria en G contiene al menos uno de los vértices a o b , por lo tanto

Fig. 5.3



$x \in V(S_1) \setminus \{a, b\}$ e $y \in V(S_2) \setminus \{a, b\}$ (Fig. 5.3).

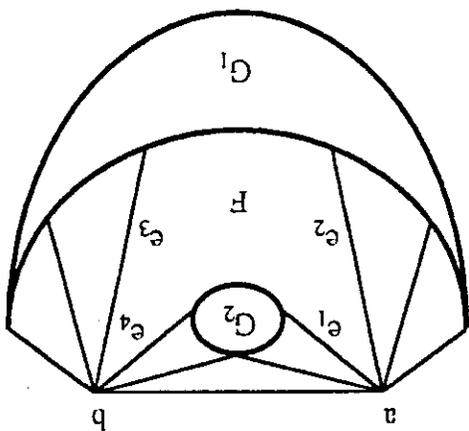
formada por dos trayectorias S_1 y S_2 , ambas con longitud al menos dos y con extremos a y b . Sean

Por otro lado si ab es una diagonal de G , entonces $a, b \in V(S)$ y $ab \notin A(S)$; por lo tanto S esta

$ab \notin A(S)$ y por lo tanto ab es una arista diagonal de G .

Como G es triangulación y F es una cara interior de G , entonces esto no es posible; de donde

Fig. 5.2



y dos aristas e_3 y e_4 incidentes en b (Fig. 5.2).

entonces la frontera de una cara interior F de G contiene al menos dos aristas e_1 y e_2 incidentes en a

interior de la curva dada por $A(S)$; como G no tiene aristas con un extremo en G_1 y el otro en G_2 ,

Sin perder generalidad supongamos $V(G_1) \supset V(S) \setminus \{a, b\}$. Por otra parte G_2 esta contenida en el

Si $ab \in A(S)$ entonces $V(S) \setminus \{a, b\}$ esta contenido en una componente conexa de $G - \{a, b\}$.

Lema 5.1.3.- Si G es una triangulación con cara exterior S y $|V(S)| \geq 4$, entonces hay al menos dos vértices u y v en S , no adyacentes en G , que no pertenecen a ningún 2-corte de G .

Demostración.- Sea G una triangulación cuya cara exterior S es un ciclo u_1, u_2, u_3, u_4 de longitud cuatro. Por el Lema 5.1.2, los únicos 2-cortes posibles de G son $\{u_1, u_3\}$ y $\{u_2, u_4\}$.

Si $u_1 u_3 \in A(G)$, entonces $u_2 u_4 \notin A(G)$ pues G es plana; por lo tanto u_1 y u_3 o u_2 y u_4 son dos vértices no adyacentes y no pertenecen a ningún 2-corte de G .

Procedemos por inducción suponiendo que el resultado es cierto para toda triangulación tal que su cara exterior tiene menos de n vértices. Sea G una triangulación cuya cara exterior S tiene $n \geq 5$ vértices.

Si G no tiene aristas diagonales, por el Lema 5.1.2, G no tiene ningún 2-corte y entonces cualesquiera u y v en $V(S)$, no adyacentes en G , satisfacen el teorema. Como G es plana y $|V(S)| \geq 5$, entonces al menos dos vértices de S no son adyacentes en G .

Supongamos que G tiene una arista diagonal ab ; por el Lema 5.1.2, los vértices a y b forman un 2-corte de G y por lo tanto $G - \{a, b\}$ consta de dos gráficas G_1 y G_2 de tal manera que no hay aristas de G con un extremo en G_1 y el otro en G_2 .

Para $i = 1, 2$ sea H_i la gráfica obtenida de G_i añadiendo la arista ab y las aristas de G incidentes en a o en b con el otro extremo en G_i . Como cada cara interior de H_i es cara interior de G , entonces H_i es una triangulación. Para $i = 1, 2$ denotemos por S_i a la cara exterior de H_i .

Si $|V(S_i)| = 3$ sea $u_i \in V(S_i)$ con $a \neq u_i \neq b$; claramente u_i no pertenece a ningún 2-corte de H_i . Si $|V(S_i)| \geq 4$, por hipótesis de inducción hay dos vértices u_i y v_i en S_i no adyacentes en H_i y que no pertenecen a ningún 2-corte de H_i . Sin perder generalidad podemos suponer $a \neq u_i \neq b$ para $i = 1, 2$.

Como no hay aristas de G con un extremo en G_1 y el otro en G_2 y u_i no pertenece a ningún 2-corte de H_i , entonces u_i no pertenece a ningún 2-corte de G . Sean $u = u_1$ y $v = u_2$; claramente u y v no son adyacentes en G y por lo anterior no pertenecen a ningún 2-corte de G . ♦

Lema 5.1.4.- Sean G una triangulación con cara exterior S y u un vértice de S . Si u no pertenece a ningún 2-corte de G , entonces $G - u$ es triangulación.

Demostración.- Como u no pertenece a ningún 2-corte de G , entonces $G - \{u, v\}$ es conexa para todo $v \in V(G)$; en particular $G - u$ es 2-conexa y como $u \in V(S)$, entonces cada cara interior de $G - u$ es cara interior de G y por lo tanto esta formada por tres aristas. ♦

Teorema 5.1.5.- Si G es una triangulación con cara exterior S , entonces hay una subgráfica H de G conexa y generadora, con $\Delta(H) \leq 3$ y tal que cada arista de S es arista de H .

Demostración.- La única triangulación con tres vértices es la gráfica completa para la cual el resultado es claramente cierto. Supongamos que el resultado es válido para cualquier triangulación con $p \geq 3$ vértices.

Sea G una triangulación con cara exterior S y con $p + 1 \geq 4$ vértices. Si $|V(S)| = 3$, entonces $G - u$ es triangulación para cualquier $u \in V(S)$. Y si $|V(S)| \geq 4$, por los lemas 5.1.3 y 5.1.4, hay un vértice u en S tal que $G - u$ es triangulación. Como $G - u$ tiene p vértices, entonces hay una subgráfica H' de $G - u$ conexa, con $\Delta(H') \leq 3$ y tal que todas las aristas de la cara exterior S' de $G - u$ son aristas de H' .

Como en el Lema 5.1.1, los vértices de G adyacentes a u forman una trayectoria v_1, v_2, \dots, v_n contenida en S' .

Si $n = 2$ sea $H = (H' - v_1v_2) \cup uv_1 \cup uv_2$ (Fig. 5.4)

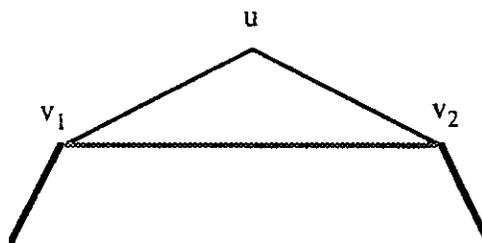


Fig. 5.4

y si $n \geq 3$ sea $H = ((H' - v_1v_2) - v_{n-1}v_n) \cup uv_1 \cup uv_2 \cup uv_n$ (Fig. 5.5)

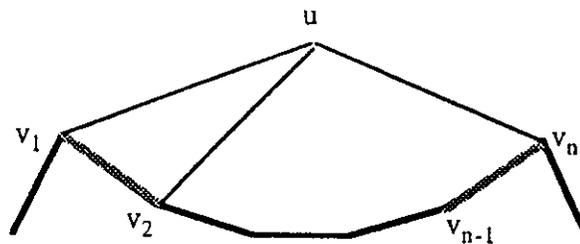


Fig. 5.5

En ambos casos H es una subgráfica de G conexa, con $\Delta(H) \leq 3$ y tal que todas las aristas de S son aristas de H . ♦

Toda gráfica conexa H tiene un árbol generador T con $\Delta(T) \leq \Delta(H)$, por lo tanto tenemos el siguiente corolario

Corolario 5.1.6 (Rivera-Campo y Urrutia [RU]).- Toda triangulación 2-conexa tiene un árbol generador con grado máximo a lo mas tres. ♦

5.2 Gráficas planas 3-conexas.

Una gráfica plana 2-conexa G con cara exterior S es *internamente 3-conexa* si para cada $u \in V(G) \setminus V(S)$ hay al menos tres trayectorias en G ajenas, excepto en u , que unen u con S .

Lema 5.2.1.- Sea G una gráfica plana internamente 3-conexa con cara exterior S . Si $\{a, b\}$ es un corte de G , entonces $a, b \in V(S)$ y $ab \notin A(S)$.

Demostración.- Sean C_1 y C_2 dos componentes conexas de $G - \{a, b\}$. Si $a \notin V(S)$, $b \notin V(S)$ o $ab \in A(S)$ entonces $V(S) \setminus \{a, b\}$ está contenido en una componente conexa de $G - \{a, b\}$; sin perder generalidad supongamos $V(C_1) \supset V(S) \setminus \{a, b\}$. Sea $w \in V(C_2)$; como no hay aristas de G con un extremo en C_1 y el otro en C_2 entonces toda trayectoria de w a $V(S)$ intersecta a $\{a, b\}$ lo cual no es posible pues G es internamente 3-conexa y $w \notin V(S)$. Por lo tanto $a, b \in V(S)$ y $ab \notin A(S)$. ♦

Lema 5.2.2.- Si G es una gráfica plana 3-conexa y S es una cara de G , entonces $G - V(S)$ es conexa.

Demostración.- Sin perder generalidad supongamos que S es la cara exterior de G ; llamemos R a la región del plano limitada por S que contiene a $G - V(S)$.

Sea C_1 una componente conexa de $G - V(S)$; como G es 3-conexa, entonces hay al menos tres aristas e_1, e_2 y e_3 de G que unen C_1 con tres vértices distintos v_1, v_2, v_3 de S . Las aristas e_1, e_2 y e_3 junto con la frontera de C_1 y las aristas de S definen tres regiones R_1, R_2 y R_3 contenidas en R (Fig. 5.6).

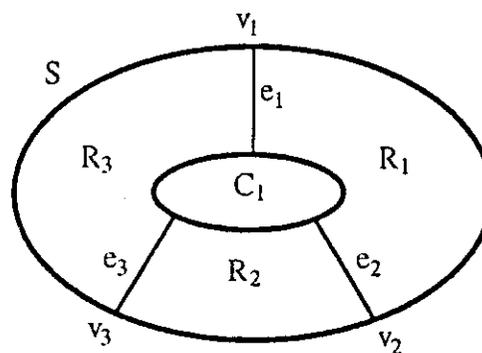


Fig. 5.6

Si $G - V(S)$ tiene otra componente conexa C_2 , ésta debe estar contenida en alguna de las regiones R_1, R_2 o R_3 . Como no hay aristas de G que unan C_2 con otra componente de $G - V(S)$, entonces dos de los vértices v_1, v_2 y v_3 forman un 2-corte de G lo cual es una contradicción. ♦

Lema 5.2.3.- Sean G una gráfica plana 3-conexa y S una cara de G . Si B_1, B_2, \dots, B_n son los bloques terminales de $G - V(S)$, entonces existe un conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de aristas de G independientes tales que para $i = 1, 2, \dots, n$, la arista e_i tiene un extremo en $V(B_i) \setminus \{z_i\}$ y el otro en S , en donde z_i es el vértice de corte de $G - V(S)$ que pertenece al bloque B_i .

Demostración.- Como en el Lema 5.2.2, suponemos que S es la cara exterior de G y R es la región del plano limitada por S que contiene a $G - V(S)$.

Para $i = 1, 2, \dots, n$ sea x_i un vértice de B_i distinto de z_i . Como G es 3-conexa, entonces hay al menos tres trayectorias de x_i a S y a lo mas una de ellas contiene a z_i ; por lo tanto podemos escoger dos aristas f_i y g_i , no incidentes en z_i , que unen al bloque B_i con dos vértices u_i y v_i de S con $u_i \neq v_i$ (Fig. 5.7).

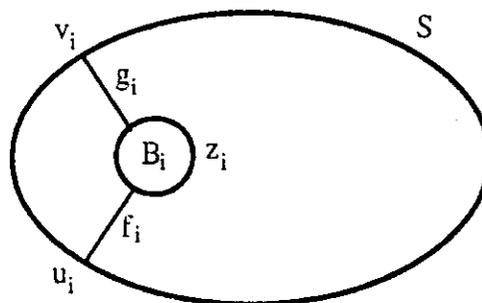


Fig. 5.7

Las aristas f_i y g_i , junto con las aristas de S y la frontera de B_i , definen dos regiones P_i y Q_i contenidas en R . Como $G - V(S)$ es conexa, entonces el interior de una de las regiones P_i o Q_i no contiene vértices de G ; sin perder generalidad suponemos que para toda $i = 1, 2, \dots, n$, el interior de P_i no contiene vértices de G (Fig. 5.8).

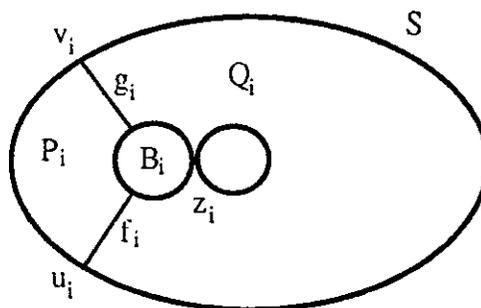


Fig. 5.8

Sea D una orientación de las aristas de S de tal forma que la frontera de S es un ciclo dirigido. Sin perder generalidad podemos suponer que para $i = 1, 2, \dots, n$, la trayectoria de u_i a v_i contenida en la frontera de P_i esta dirigida de u_i a v_i (Fig. 5.9)

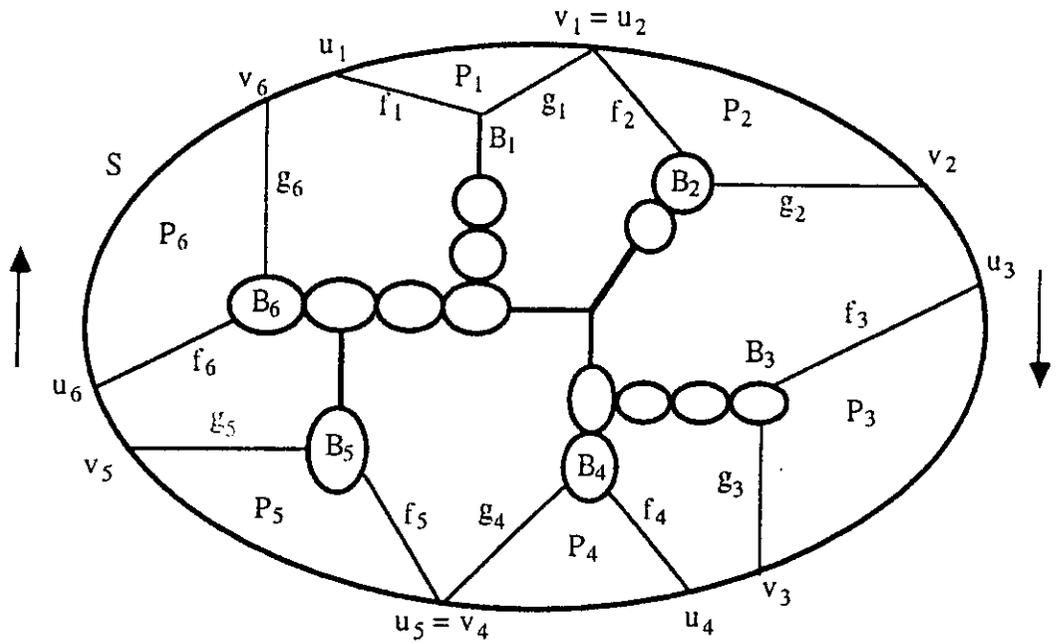


Fig. 5.9

Si $u_i = u_j$, entonces B_i esta contenido en P_j o B_j esta contenido en P_i ; como esto no es posible entonces f_1, f_2, \dots, f_n son independientes. ♦

Teorema 5.2.4.- Sea G una gráfica plana internamente 3-conexa con cara exterior S . Para cualesquiera vértices $u, v \in V(S)$ hay una subgráfica H de G conexa, generadora y tal que $\Delta(H) \leq 3$, $g_H(u) = g_H(v) = 2$ y $A(H) \supset A(S)$.

Demostración.- La única gráfica plana internamente 3-conexa con tres vértices es K_3 para la cual el resultado es claramente cierto. Procedemos por inducción suponiendo el resultado válido para cualquier gráfica plana internamente 3-conexa con menos de p vértices.

Sea G una gráfica plana internamente 3-conexa con $p \geq 4$ vértices y cara exterior S y sean u y v vértices de G en S .

Si G tiene un corte $\{a, b\}$, entonces $a, b \in V(S)$ y $ab \notin A(S)$ y por lo tanto S esta formada por dos trayectorias T_1 y T_2 ambas con longitud al menos dos y con extremos a y b .

Por otro lado $G - \{a, b\}$ consta de dos gráficas F_1 y F_2 de tal manera que no hay aristas de G con un extremo en F_1 y el otro en F_2 . Para $i = 1, 2$ sea G_i la gráfica obtenida de F_i añadiendo la

arista ab y las aristas de G incidentes en a o en b con el otro extremo en F_i ; sin perder generalidad podemos suponer que la cara exterior S_i de G_i esta dada por $T_i + ab$ (Fig. 5.10).

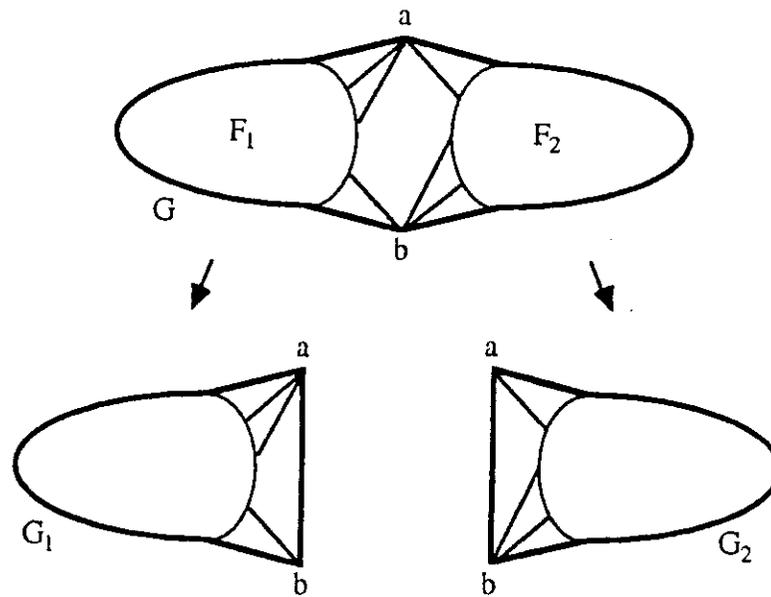


Fig. 5.10

G_1 y G_2 son gráficas internamente 3-conexas con menos de p vértices. Por hipótesis de inducción para $i = 1, 2$ hay una subgráfica conexa H_i de G_i tal que $\Delta(H_i) \leq 3$, $g_{H_i}(u_i) = g_{H_i}(v_i) = 2$ y $A(H_i) \supset A(S_i)$. En donde $u_i, v_i \in V(S_i)$ se escogen de acuerdo a los siguientes casos.

Caso 1.- Si $\{u, v\} = \{a, b\}$, entonces $u_1 = u_2 = u$ y $v_1 = v_2 = v$.

Caso 2.- Si $|\{u, v\} \cap \{a, b\}| = 1$, sin perder generalidad suponemos $u = a$ y $v \in V(G_1) \setminus \{a, b\}$.

En este caso $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v$ y $v_2 = b$.

Caso 3.- Si $u \in V(G_1) \setminus \{a, b\}$ y $v \in V(G_2) \setminus \{a, b\}$ sean $u_1 = u$, $v_1 = a$, $u_2 = b$ y $v_2 = v$.

Caso 4.- Si $u, v \in V(G_i) \setminus \{a, b\}$, sin perder generalidad suponemos $i = 1$.

En este caso $u_1 = u$, $v_1 = v$, $u_2 = a$ y $v_2 = b$.

Para cada caso la gráfica $H = (H_1 - ab) \cup (H_2 - ab)$ es conexa y tal que $\Delta(H) \leq 3$, $g_H(u) = g_H(v) = 2$ y $A(H) \supset A(S)$.

En la Figura 5.11 ilustramos el caso 3.

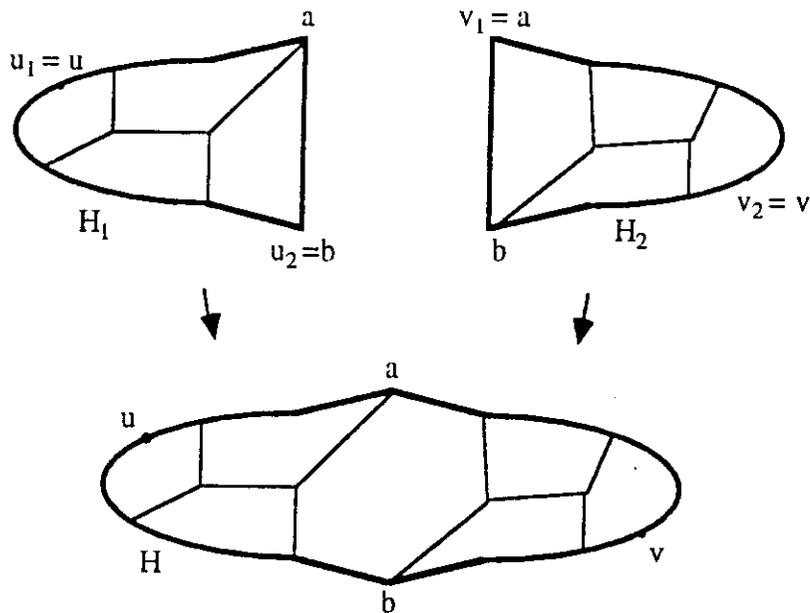


Fig. 5.11

En el resto de la demostración supondremos que G no tiene 2-cortes y por lo tanto es 3-conexa. Por el Lema 5.2.2, la gráfica $G - V(S)$ es conexa.

Sean B_1, B_2, \dots, B_m los bloques de $G - V(S)$; como G es internamente 3-conexa, entonces todo bloque 2-conexo de $G - V(S)$ es internamente 3-conexo y tiene menos de p vértices. Para cada bloque 2-conexo B_i sea S_i su cara exterior.

Supongamos que $G - V(S)$ tiene a lo mas dos bloques terminales; en otras palabras $G - V(S)$ es una cadena C de bloques B_1, B_2, \dots, B_m (Fig 5.12).

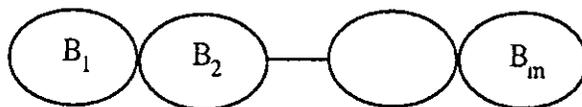


Fig 5.12

Sin perder generalidad, pues $\{u, v\}$ no es corte de G , podemos suponer que hay una arista $e \in A(G)$ con un extremo en $B_1 \setminus \{v_1\}$ y el otro en un vértice $z \in V(S) \setminus \{u, v\}$, en donde v_1 es el único vértice de corte de C que pertenece a B_1 . Para $i = 2, 3, \dots, m-1$, sean u_i y v_i los vértices de corte de $G - V(S)$ que pertenecen a B_i , de tal forma que $v_i = u_{i+1}$. También sean u_1 el extremo de e en B_1 , u_m el vértice de corte de $G - V(S)$ que pertenece a B_m y v_m cualquier otro vértice de B_m .

Por hipótesis de inducción, para cada bloque 2-conexo B_i de $G - V(S)$ existe una subgráfica H_i de B_i conexa, generadora y tal que $\Delta(H_i) \leq 3$, $g_{H_i}(u_i) = g_{H_i}(v_i) = 2$ y $A(H_i) \supset A(S_i)$. Sean $x_i \in V(S_i)$ tal que $x_i v_i \in A(S_i)$ y $H'_i = H_i - x_i v_i$ (Fig. 5.13).

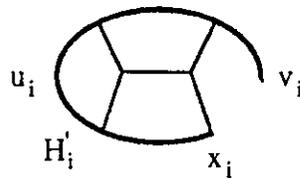


Fig 5.13

Para cada bloque B_i de $G - V(S)$ formado por una sola arista sea $H'_i = B_i$.

Sea H la subgráfica de G formada por S , la arista e y la unión de las gráficas H'_i , $i = 1, 2, \dots, m$ (Fig 5.14).

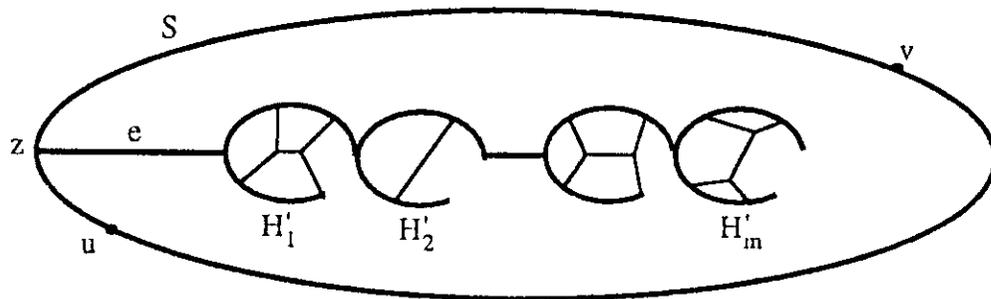


Fig. 5.14

Claramente H es una subgráfica conexa y generadora de G con $A(H) \supset A(S)$. Como $u \neq z \neq v$, entonces $g_H(u) = g_H(v) = 2$ y como $\Delta(H'_i) \leq 3$, $g_{H'_i}(u_i) \leq 2$ y $g_{H'_i}(v_i) = 1$ para $i = 1, 2, \dots, m$, entonces $\Delta(H) \leq 3$.

Supongamos ahora que $G - V(S)$ tiene $d \geq 3$ bloques terminales. Por el Lema 5.2.3, existe un conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ de aristas independientes de G tal que para cada bloque terminal B_i de $G - V(S)$ hay una arista $e(B_i)$ en E con un extremo en $V(B_i) \setminus \{z_i\}$ y el otro en S , en donde z_i es el único vértice de corte de $G - V(S)$ que pertenece al bloque B_i .

Sea F la gráfica obtenida de $G - V(S)$ añadiendo las aristas e_1, e_2, \dots, e_d ; notemos que F es una gráfica conexa y que los bloques terminales de F estan dados por las aristas e_1, e_2, \dots, e_d (Fig. 5.15).

Como E es un conjunto de aristas independientes, podemos suponer, sin perder generalidad que u y v no son extremos de las aristas e_3, e_4, \dots, e_d .

La gráfica F puede ser partida inductivamente en cadenas de bloques C_2, C_3, \dots, C_d , de la siguiente forma:

- 1.- C_2 es una cadena de bloques de F , iniciando en e_1 , terminando en e_2 (Fig. 5.15).
- 2.- Para $i = 3, 4, \dots, d$, C_i es una cadena de bloques de F que une al bloque e_i con la unión de las cadenas C_j con $j = 2, 3, \dots, i-1$ (Fig. 5.15).

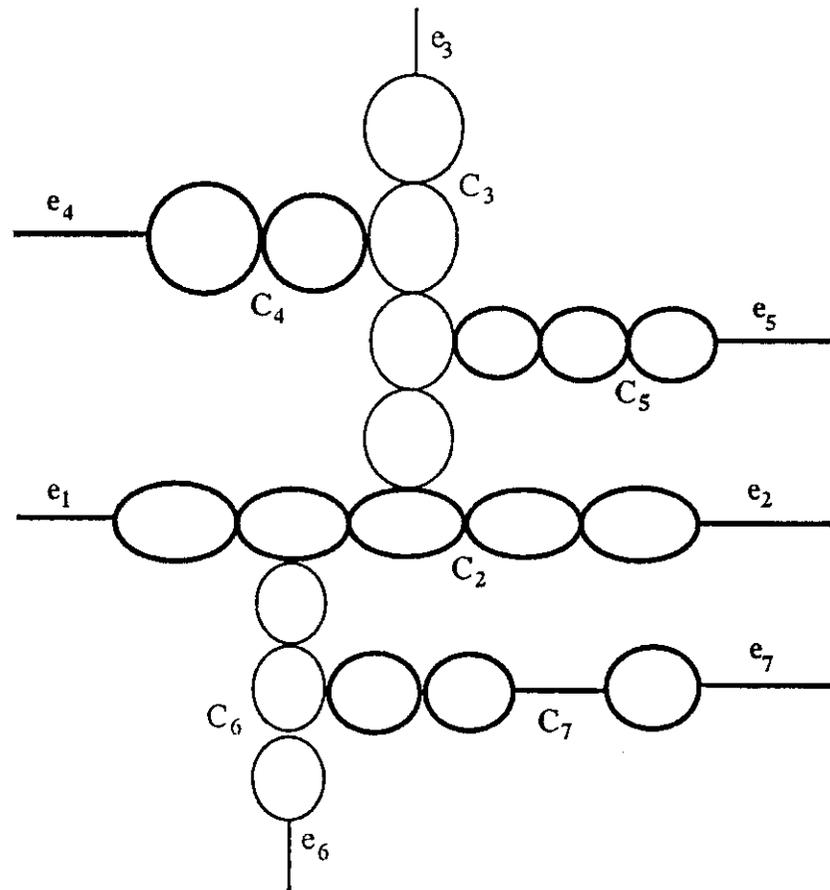


Fig. 5.15

Sea $i \geq 3$; sin perder generalidad podemos suponer que la cadena C_i es de la forma $e_i, B_1, B_2, \dots, B_r$ en donde $e_i = e(B_1)$ (Fig 5.16). Para $k = 1, 2, \dots, r-1$, sean u_k y v_k los vértices de corte de C_i que pertenecen a B_k de tal manera que $v_k = u_{k+1}$ para $k = 1, 2, \dots, r-2$ (Fig 5.16). También denotemos por u_r al vértice de corte de C_i que pertenece a B_r y por v_r al vértice w_i que tiene en común C_i con la unión de las cadenas C_j con $j = 1, 2, \dots, i-1$ (Fig. 5.16).

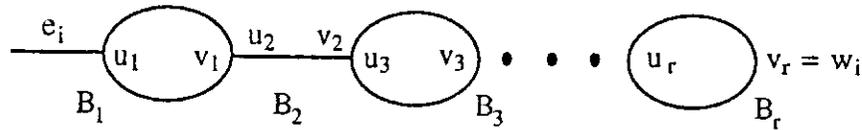


Fig. 5.16

Por hipótesis de inducción, cada bloque 2-conexo B_k de C_i tiene una subgráfica conexa y generadora H_k tal que $\Delta(H_k) \leq 3$, $g_{H_k}(u_k) = g_{H_k}(v_k) = 2$ y $A(H_k) \supset A(S_k)$ (Fig. 5.17).

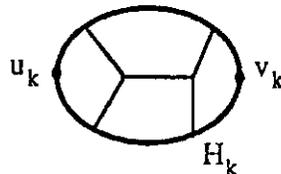


Fig. 5.17

Para cada bloque 2-conexo B_k de C_i sea $x_k \in V(S_k)$ tal que $x_k v_k \in A(S_k)$ y sea $H'_k = H_k - x_k v_k$; para cada bloque B_k formado por una sola arista sea $H'_k = B_k$.

Sea J_i la subgráfica generadora de C_i formada por la arista e_i junto con la unión de las gráficas H'_1, H'_2, \dots, H'_r (Fig. 5.18).

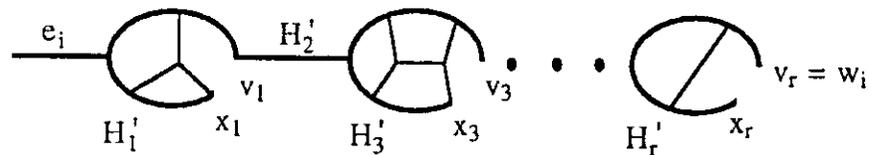


Fig. 5.18

Como $\Delta(H_k) \leq 3$, $g_{H'_k}(u_k) \leq 2$ y $g_{H'_k}(v_k) = 1$ para $k = 1, 2, \dots, r$, entonces $\Delta(J_i) \leq 3$.

Una vez definidas las gráficas J_3, J_4, \dots, J_d , podemos reenumerar los bloques de F de tal manera que C_2 sea de la forma $e_1, B_1, B_2, \dots, B_r, e_2$ con $e_1 = e(B_1)$ y $e_2 = e(B_r)$ (Fig. 5.19). Para $k = 1, 2, \dots, r$, sean u_k y v_k los vértices de corte de C_2 que pertenecen a B_k de tal manera que $v_k = u_{k+1}$ para $k = 1, 2, \dots, r-1$ (Fig. 5.19).

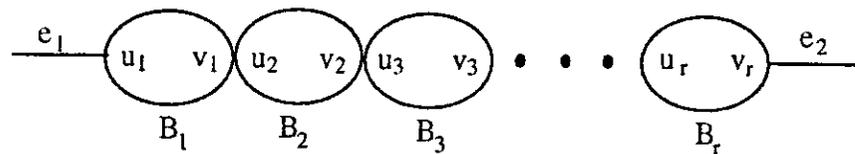


Fig. 5.19

Por hipótesis de inducción, cada bloque 2-conexo B_k de C_2 tiene una subgráfica conexa y generadora H_k tal que $\Delta(H_k) \leq 3$, $g_{H_k}(u_k) = g_{H_k}(v_k) = 2$ y $A(H_k) \supset A(S_k)$. Sea t tal que w_3 es un vértice del bloque B_t de C_2 , en donde w_3 es el vértice que tienen en común C_2 y C_3 .

Caso a.- w_3 no es vértice de corte de C_2 .

Sean $y_t \in V(S_t)$ tal que $y_t w_3 \in A(S_t)$ y $H_t' = H_t - y_t w_3$ (Fig. 5.20).

Para cada bloque 2-conexo B_k de C_2 con $k = 1, 2, \dots, t-1$, sean $x_k \in V(S_t)$ tal que $x_k v_k \in A(S_k)$ y $H_k' = H_k - x_k v_k$ (Fig. 5.20); para cada bloque 2-conexo B_k de C_2 con $k = t+1, t+2, \dots, r$, sean $x_k \in V(S_t)$ tal que $x_k u_k \in A(S_k)$ y $H_k' = H_k - x_k u_k$ (Fig. 5.20) y para cada bloque B_k de C_2 formado por una sola arista sea $H_k' = B_k$.

Sea J_2 la unión de las gráficas H_1', H_2', \dots, H_r' (Fig. 5.20).

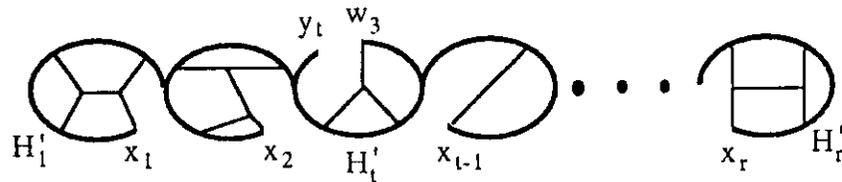


Fig. 5.20

Como $\Delta(H_k) \leq 3$; $g_{H_k}(u_k) \leq 2$ y $g_{H_k}(v_k) = 1$ para $k = 1, 2, \dots, t-1$; $g_{H_k}(u_k) = 1$ y $g_{H_k}(v_k) \leq 2$ para $k = t+1, t+2, \dots, r$; entonces $\Delta(J_2) \leq 3$.

Caso b.- w_3 es vértice de corte de C_1 . Sin perder generalidad suponemos que $w_3 = v_t$.

Para cada bloque 2-conexo B_k de C_2 con $k = 1, 2, \dots, t$, sean $x_k \in V(S_t)$ tal que $x_k v_k \in A(S_k)$ y $H_k' = H_k - x_k v_k$ (Fig. 5.21); para cada bloque 2-conexo B_k de C_2 con $k = t+1, t+2, \dots, r$, sean $x_k \in V(S_t)$ tal que $x_k u_k \in A(S_k)$ y $H_k' = H_k - x_k u_k$ (Fig. 5.21) y para cada bloque B_k de C_2 formado por una sola arista sea $H_k' = B_k$.

Sea J_2 la unión de las gráficas H_1', H_2', \dots, H_r' (Fig. 5.21).

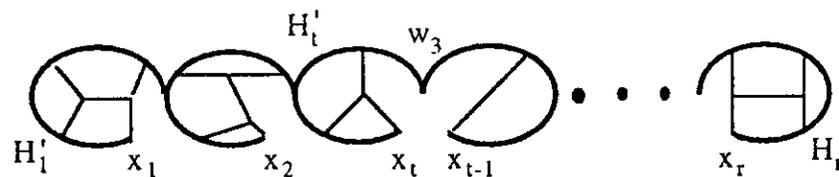


Fig. 5.21

Como $\Delta(H_k) \leq 3$; $g_{Hk}(u_k) \leq 2$ y $g_{Hk}(v_k) = 1$ para $k = 1, 2, \dots, t$; $g_{Hk}(u_k) = 1$ y $g_{Hk}(v_k) \leq 2$ para $k = t+1, t+2, \dots, r$; entonces $\Delta(J_2) \leq 3$.

En ambos casos $g_{J_2}(w_3) = 2$; como $g_{J_3}(w_3) = 1$, entonces $J_2 \cup J_3$ es una gráfica conexa con grado máximo a lo mas tres (Fig. 5.22 y Fig. 5.23)

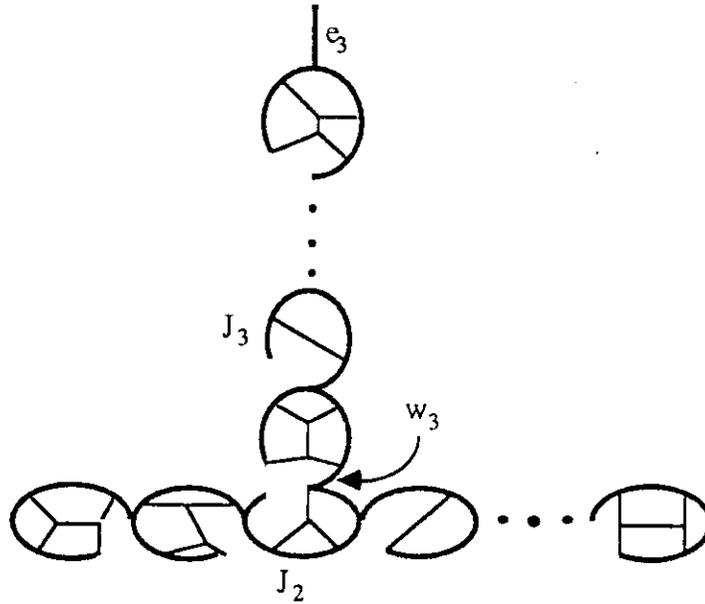


Fig. 5.22

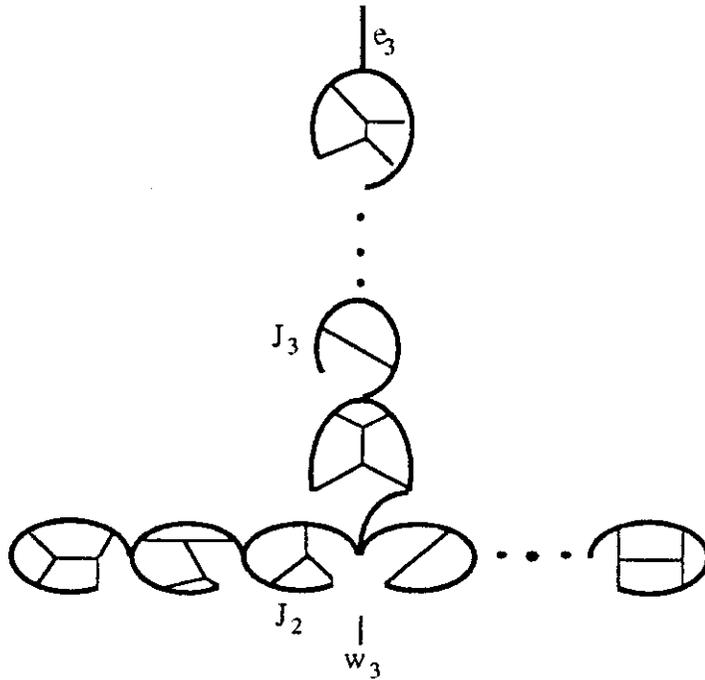


Fig. 5.23

Finalmente sea $H = S \cup (J_2 \cup J_3) \cup (J_4 - w_4) \cup \dots \cup (J_d - w_d)$ (Fig. 5.24)

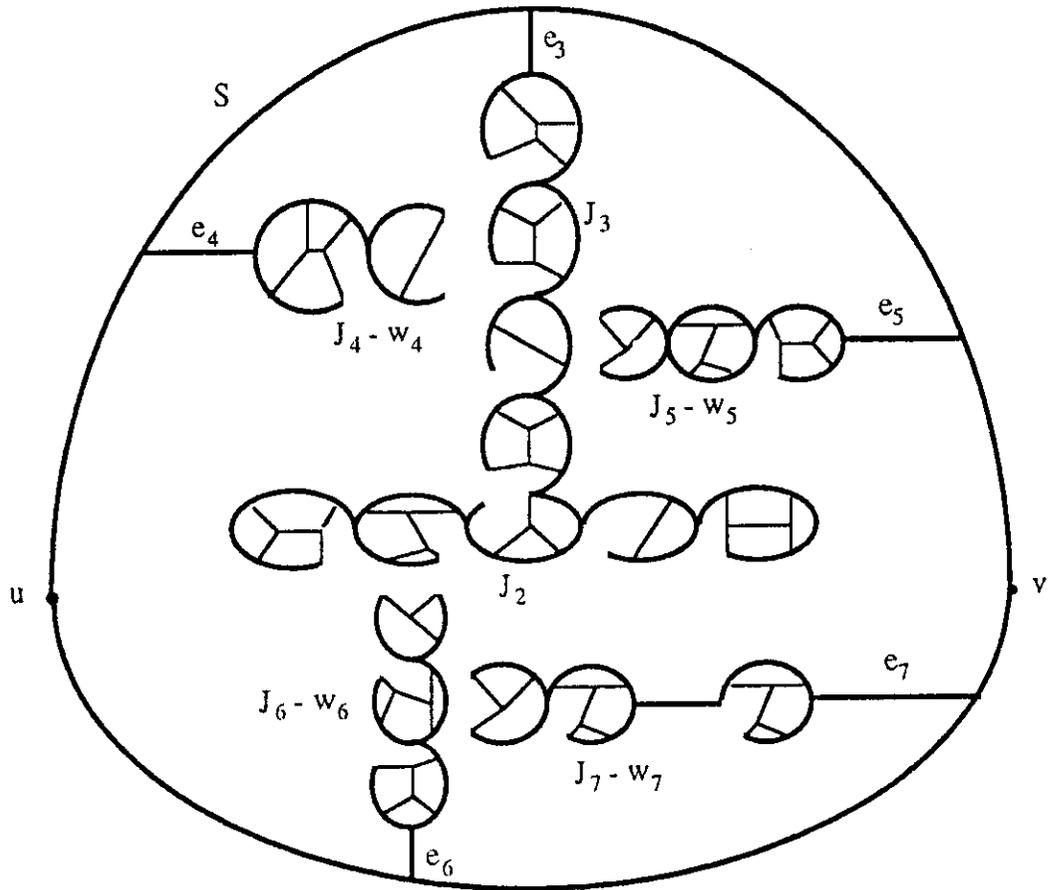


Fig. 5.24

La gráfica H es conexa pues la arista e_3 une $J_2 \cup J_3$ con S y para $k = 4, 5, \dots, d$, la arista e_k une $J_k - w_k$ con S . Claramente $A(H) \supset A(S)$.

Para $i = 2, 3, \dots, d$, J_i genera a C_i y para $i = 3, 4, \dots, d$, w_i es un vértice de $(J_2 \cup J_3) \cup (J_4 - w_4) \cup \dots \cup (J_{i-1} - w_{i-1})$; por lo tanto H genera a G .

Como $\Delta(S) = 2$, $\Delta(J_2 \cup J_3) \leq 3$, $\Delta(J_k - w_k) \leq 3$ para $k = 4, 5, \dots, d$ y e_3, e_4, \dots, e_d son aristas independientes, entonces $\Delta(H) \leq 3$.

Ya que u y v no son extremos de las aristas e_3, e_4, \dots, e_d , entonces $g_H(u) = g_H(v) = 2$. ♦

Como toda gráfica conexa H tiene un árbol generador T con $\Delta(T) \leq \Delta(H)$, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.2.5.(Rivera-Campo y Urrutia [RU]).- Toda gráfica plana internamente 3-conexa tiene un árbol generador con grado máximo a lo mas tres. ♦

Terminamos este capítulo con un ejemplo clásico de una familia de triangulaciones 3-conexas que no contienen trayectorias generadoras.

Sea T_1 la gráfica completa con cuatro vértices. Para $i \geq 2$, sea T_i la gráfica obtenida de T_{i-1} insertando en cada cara C de T_{i-1} un vértice adyacente a los tres vértices de C (Fig 5.25).

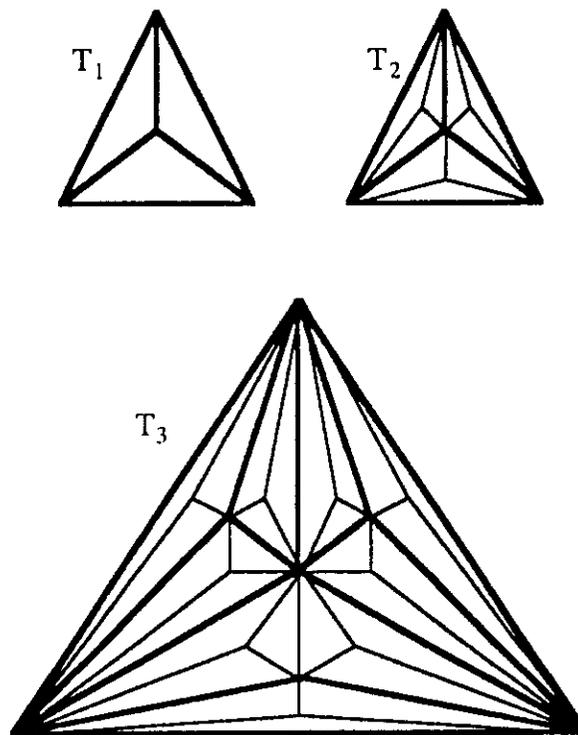


Fig 5.25

Sean v_n y c_n el número de vértices y caras interiores de T_n , respectivamente; por definición

$$v_{i+1} = v_i + c_i \text{ y } c_{i+1} = 3c_i$$

por lo tanto

$$v_n = (3^n + 5) / 2.$$

Los $v_n - v_{n-1} = 3^{n-1}$ vértices insertados en las caras de T_{n-1} para obtener T_n son independientes en T_n ; por lo tanto $T_n - V(T_{n-1})$ tiene 3^{n-1} componentes conexas.

Si $n \geq 3$, entonces

$$3^{n-1} > 1 + (3^{n-1} + 5) / 2 = 1 + |V(T_{n-1})|$$

y por el Corolario 2.3, la gráfica T_n ($n \geq 3$) no tiene trayectorias generadoras.

Capítulo 6

Arboles Generadores con Diámetros Congruentes con r Módulo k

El *diámetro* de una gráfica G es la máxima distancia entre los vértices de G ; en particular el diámetro de un árbol T es la longitud de la trayectoria mas larga de T . En este capítulo estudiamos condiciones suficientes para que una gráfica tenga árboles generadores con determinados diámetros.

Sean G una gráfica conexa, L la máxima longitud entre las trayectorias de G y P una trayectoria $x_0, x_1, \dots, x_s, y_s, \dots, y_1, y_0$ en G con longitud L , en donde $s = \lfloor L / 2 \rfloor$ y $x_s = y_s$ si L es par.

Sean N_s, N_{s-1}, \dots, N_0 subconjuntos de $V(G)$ definidos como sigue:

- 1.- $N_s = \{x_s, y_s\}$
- 2.- Para $k = 1, 2, \dots, s$, sea

$$N_{s-k} = \{x_s, y_s\} \cup \{v \in V(G) \setminus (V(P) \cup N_s \cup \dots \cup N_{s-k+1}) : uv \in E(G) \text{ con } u \in N_{s-k+1}\}$$
 (Fig. 6.1)

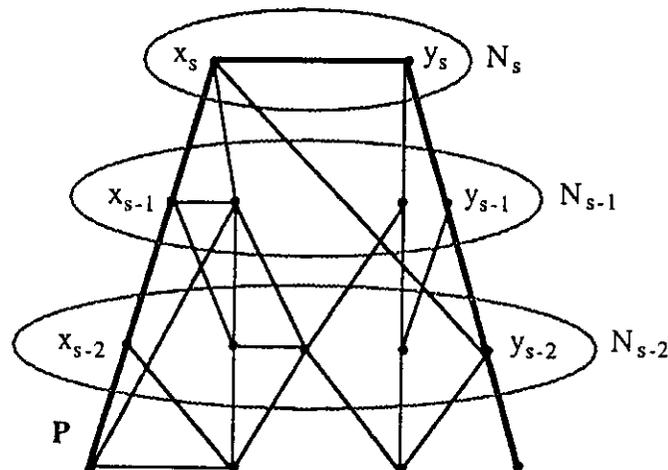


Fig. 6.1

Los conjuntos N_s, N_{s-1}, \dots, N_0 forman una partición de $V(G)$ pues G es conexa y no contiene trayectorias de longitud mayor que L . Por construcción, N_s, N_{s-1}, \dots, N_0 satisfacen la siguiente propiedad:

Propiedad 6.1.- Si $uv \in A(G)$ con $u \in N_a \setminus V(P)$, $b \in N_b$ y $a \leq b$, entonces $a = b$ o $a = b - 1$.

♦

Sea T un árbol generador de G que contenga a la trayectoria P y tal que para cada vértice u de G , $D_T(u, N_s) = k$ si y sólo si $u \in N_{s-k}$ (Fig. 6.2). Para cada vértice $w \in N_t$, denotemos por $p(w)$ el único vértice en N_{t+1} que es adyacente a w en T (Fig. 6.2) y para cada par de vértices u, v de T denotemos por T_{uv} la única trayectoria de T que une u con v .

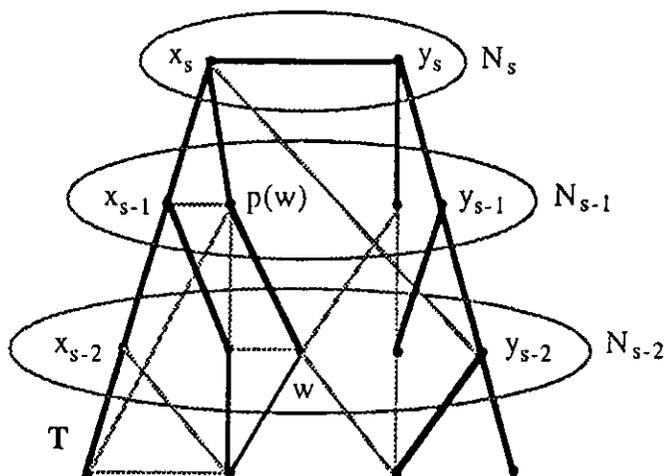


Fig. 6.2

Lema 6.2.- Sean $G, L, P, N_s, N_{s-1}, \dots, N_0$ y T como antes y $n \geq 2$ un entero. Si $\delta(G) \geq n + 1$ y $N_t = \{x_t, y_t\}$ para cada $t \leq n/2$, entonces G tiene un árbol generador con diámetro $L - n + 1$.

Demostración.- Sea $m = \lfloor n/2 \rfloor$; como $|N_t| = 2$ for $t = 0, 1, \dots, m$, entonces cada vértice $u \in N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{m-1}$ es adyacente a lo mas a $2m + 1$ vértices en $N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_m$.

Caso 1.- $n = 2m + 1$.

Como $\delta(G) \geq n + 1 = 2m + 2$, entonces para cada v\u00e9rtice $u \in N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{m-1}$ existe un v\u00e9rtice $z(u) \in N_{m+1} \cup N_{m+2} \cup \dots \cup N_s$ tal que $uz(u) \in A(G)$.

Sea T' el \u00e1rbol generador de G obtenido de T de la siguiente manera: para cada v\u00e9rtice $u \in N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{m-1}$, quitamos la arista $up(u)$ de T y a\u00f1adimos la arista $uz(u)$. El di\u00e1metro de T' esta dado por la longitud de la trayectoria $T'x_my_m = Tx_my_m$ que es $L - 2m = L - (n - 1) = L - n + 1$.

Caso 2.- $n = 2m$.

Sea $u \in N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{m-1}$, como $g_G(u) \geq \delta(G) \geq n + 1 = 2m + 1$, entonces o existe un v\u00e9rtice $z(u) \in N_{m+1} \cup N_{m+2} \cup \dots \cup N_s$ tal que $uz(u) \in A(G)$ o u es adyacente a cada v\u00e9rtice en $N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_m$ y en particular a x_m ; en este \u00faltimo caso sea $z(u) = x_m$.

Sea T' el \u00e1rbol generador de G obtenido de T de la siguiente manera: para cada v\u00e9rtice $u \in N_0 \cup N_1 \cup \dots \cup N_{m-1}$, con excepci\u00f3n de x_{m-1} , quitamos la arista $up(u)$ de T y a\u00f1adimos la arista $uz(u)$. En este caso, el di\u00e1metro de T' esta dado por la longitud de la trayectoria $T'x_{m-1}y_m = Tx_{m-1}y_m$ que es $L - (2m - 1) = L - n + 1$. \u2666

Lema 6.3.- Sean $G, P, L, N_s, N_{s-1}, \dots, N_0$ y T como en lo anterior y $n \geq 3$ un entero. Si $\delta(G) \geq n + 2$, entonces $N_t = \{x_t, y_t\}$ para cada $t \leq n / 2$.

Demostraci\u00f3n.- Sean $i = \min \{t : N_t \neq \{x_t, y_t\}\}$ y $v \in N_i$ con $x_i \neq v \neq y_i$. Sin perder generalidad podemos suponer $y_s \in Tx_s v$ (Fig. 6.3).

Sea $q = \min \{t : y_{i+t} \in V(Tx_s v)\}$; como $v \in N_i$ y por lo tanto $y_i \notin V(Tx_s v)$, entonces $q \geq 1$. Sea Q una trayectoria v, v_1, v_2, \dots, v_j contenida en $G - (Ty_{i+q}p(v) \cup P)$ y m\u00e1xima con v como v\u00e9rtice inicial (Fig 6.3)

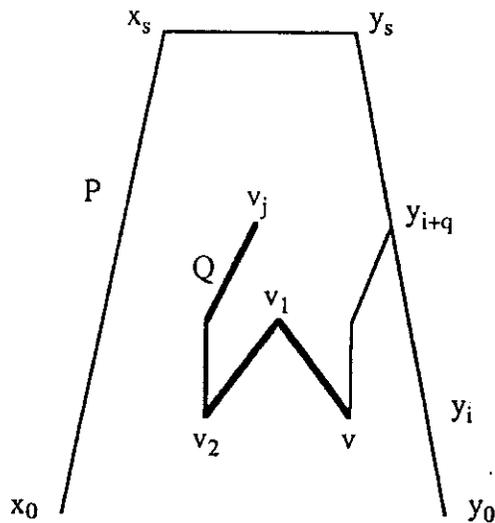


Fig. 6.3

Sea j la longitud de Q ; claramente la trayectoria $T_{x_0v} \cup Q$ tiene longitud $L - i + j$. Como G no contiene trayectorias de longitud mayor que L , entonces $j \leq i$.

Como $v_j \notin V(P)$ y P es una trayectoria G con la mayor longitud posible, entonces v_j no es adyacente a vértices consecutivos de P . A continuación probaremos que v_j es adyacente a lo mas a $(3i+5)/2$ vértices de G .

Sea $\Gamma(v_j)$ el conjunto de vértices adyacentes a v_j en G . Como Q no puede ser extendida en $G - (T_{y_{i+q}v} \cup P)$, entonces $\Gamma(v_j)$ esta contenido en $V(Q) \cup V(T_{y_{i+q}v}) \cup V(P)$ que es la unión ajena de los conjuntos $V(Q) \setminus \{v\}$, $V(T_{y_s v})$, $V(T_{x_0 x_s})$ y $V(T_{y_{i+q-1} y_0})$; por lo tanto

$$|\Gamma(v_j)| = |\Gamma(v_j) \cap (V(Q) \setminus \{v\})| + |\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_s v})| + |\Gamma(v_j) \cap V(T_{x_0 x_s})| + |\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q-1} y_0})|$$

Para cada termino en la suma anterior encontramos una cota superior de la siguiente forma:

i) El conjunto $V(Q) \setminus \{v\}$ contiene j vertices, incluyendo v_j . Por lo tanto

$$|\Gamma(v_j) \cap (V(Q) \setminus \{v\})| \leq \max \{j - 1, 0\}$$

ii) Sea $u \in \Gamma(v_j) \cap V(T_{y_s v})$; si $u = y_r$ con $r \geq i + q + 1$, entonces

$$P_1 = T_{x_0 y_r} \cup y_r v_j \cup Q \cup T_{v y_0}$$

es una trayectoria de G con longitud

$$(L - r) + 1 + j + (i + 2q) \quad (\text{Fig. 6.4})$$

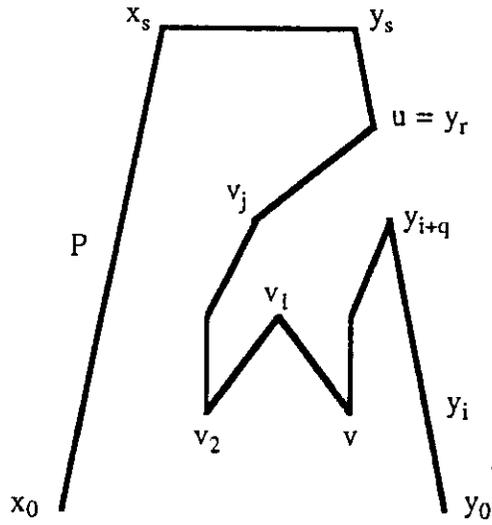


Fig. 6.4

Como $v_j \in N_{i+t} \setminus V(P)$ con $t \leq j$, entonces por la Propiedad 6.1, $r \leq i + t + 1 \leq i + j + 1$ y por lo tanto la longitud de P_1 es por lo menos

$$(L - (i + j + 1)) + 1 + j + (i + 2q) = L + 2q > L$$

lo cual no es posible pues L es la máxima longitud de las trayectorias de G . Por lo tanto

$$\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_s v}) \subset V(T_{y_{i+q} v})$$

De donde

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_s v})| = |\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q} v})|$$

Por la Propiedad 2, en general

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q} v})| \leq 3$$

Si $q = 1$, entonces $T_{y_{i+q} v}$ esta formada por la arista $y_{i+q} v$ pues $v \in N_i$. Por lo tanto, en este caso

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q} v})| \leq 2$$

Y si $j = 0$, entonces $v_j = v$, $\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q} v}) = \{p(v)\}$. En este caso

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q} v})| = 1$$

iii) Si $x_r \in \Gamma(v_j)$, entonces

$$P_2 = T_{y_0 y_{i+q}} \cup T_{y_{i+q} v} \cup Q \cup v_j x_r \cup T_{x_r y_{i+q+1}}$$

es una trayectoria de G con longitud

$$(i + q) + q + j + 1 + (L - r - i - q - 1) = L - r + j + q \text{ (Fig. 6.5)}$$

en donde $y_{i+q+1} = x_s$ si $i + q = s$.

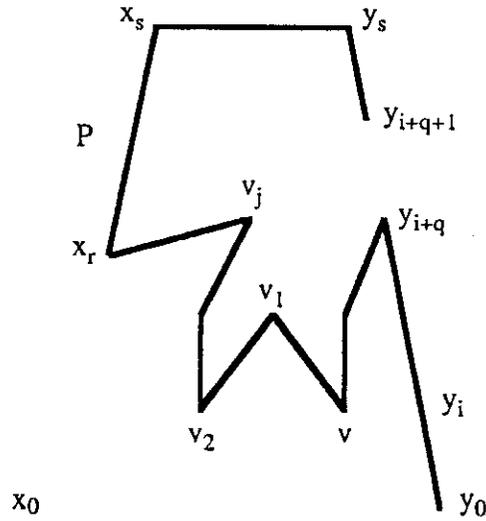


Fig. 6.5

Como L es la máxima longitud de las trayectorias de G , entonces $q + j \leq r$. Y como $x_r \in N_r$ y $v_j \in N_{i+t} \setminus V(P)$ con $t \leq j$, entonces, por la Propiedad 2, $r \leq i + j + 1$. Por lo tanto

$$\Gamma(v_j) \cap V(T_{x_0 x_s}) \subset V(T_{x_{q+j} x_{i+j+1}})$$

Como v_j no es adyacente a vértices consecutivos de P , entonces

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{x_0 x_s})| \leq \max \{ \lceil |V(T_{x_{q+j} x_{i+j+1}})| / 2 \rceil, 0 \} = \max \{ \lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0 \}$$

iv) Si $y_r \in \Gamma(v_j)$ con $r \leq i + q - 1$, entonces

$$P_3 = T_{x_0 v} \cup Q \cup v_j y_r \cup T_{y_r y_{i+q-1}} \text{ y } P_4 = T_{x_0 v} \cup Q \cup v_j y \cup T_{y_r y_0}$$

son trayectorias de G con longitudes

$$(L - i) + j + 1 + (i + q - 1 - r) = L - r + q + j \text{ y } (L - i) + j + 1 + r = L + r - i + j + 1$$

respectivamente (Fig. 6.6).

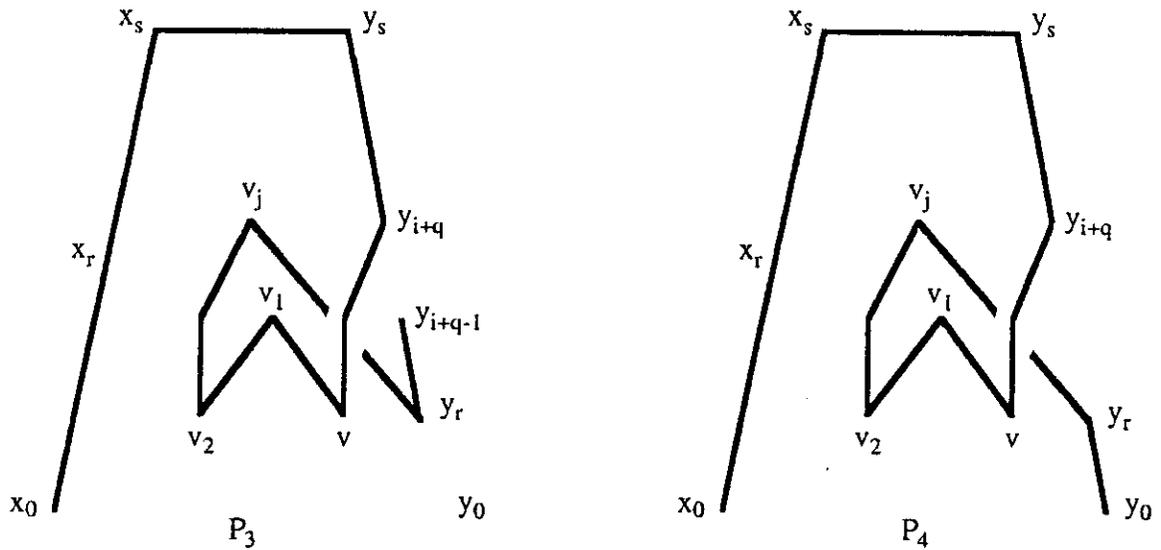


Fig. 6.6

Como G es la máxima longitud de las trayectorias de G , entonces $q + j \leq r \leq i - j - 1$ y por lo tanto

$$\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q-1}y_0}) \subset V(T_{y_{q+j}y_{i-j-1}})$$

Como v_j no es adyacente a vértices consecutivos de G , entonces

$$|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q-1}y_0})| \leq \max \{ \lceil |V(T_{y_{q+j}y_{i-j-1}})| / 2 \rceil, 0 \} = \max \{ \lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0 \}$$

Por i, ii, iii y iv

$$|\Gamma(v_j)| \leq \max \{ j - 1, 0 \} + |\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q}v})| + \max \{ \lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0 \} + \max \{ \lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0 \}$$

A continuación analizamos los casos posibles

Caso 1.- $j = 0$,

a) $\max \{ j - 1, 0 \} = 0$.

b) $|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q}v})| = 1$.

c) $\max \{ \lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0 \} + \max \{ \lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0 \} = 0$ si $i < q - 1$;

$\max \{ \lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0 \} + \max \{ \lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0 \} = 1$ si $q - 1 \leq i \leq q$ and

$\max \{ \lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0 \} + \max \{ \lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0 \} \leq i - q + 2 \leq i + 1$ si $q < i$.

Por lo tanto, en este caso

$$|\Gamma(v_j)| \leq i + 2$$

Caso 2.- $j \geq 1$ y $q = 1$

- a) $\max \{j - 1, 0\} = j - 1$;
- b) $|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q}v})| \leq 2$.
- c) $\max \{\lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0\} + \max \{\lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0\} \leq (i + 2) / 2$ if $i \leq 2j + 1$ and
 $\max \{\lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0\} + \max \{\lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0\} \leq i - j + 1$ if $2j + 1 < i$.

Por lo tanto, en este caso

$$\begin{aligned} |\Gamma(v_j)| &\leq (j - 1) + 2 + \max \{(i + 2) / 2, i - j + 1\} \\ &= \max \{(j + 1) + (i + 2) / 2, (j + 1) + (i - j + 1)\} \\ &= \max \{(2j + i + 4) / 2, i + 2\} \\ &\leq (3i + 4) / 2 \end{aligned}$$

Caso 3.- $j \geq 1$ y $q \geq 2$

- a) $\max \{j - 1, 0\} = j - 1$;
- b) $|\Gamma(v_j) \cap V(T_{y_{i+q}v})| \leq 3$
- c) $\max \{\lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0\} + \max \{\lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0\} = 0$ if $i < q - 2$;
 $\max \{\lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0\} + \max \{\lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0\} \leq (i + 1) / 2$ if $q - 2 \leq i \leq q + 2j$ and
 $\max \{\lceil (i - q + 2) / 2 \rceil, 0\} + \max \{\lceil (i - 2j - q) / 2 \rceil, 0\} \leq i - j$ if $q + 2j < i$.

Por lo tanto, en este caso

$$\begin{aligned} |\Gamma(v_j)| &\leq (j - 1) + 3 + \max \{(i + 2) / 2, i - j\} \\ &= \max \{(j + 2) + (i + 2) / 2, (j + 2) + (i - j)\} \\ &= \max \{(i + 2j + 5) / 2, i + 2\} \\ &\leq (3i + 5) / 2. \end{aligned}$$

Claramente en cada caso

$$|\Gamma(v_j)| \leq (3i + 5) / 2$$

Procedemos ahora a terminar la prueba del Lema 6.3: como $|\Gamma(v_j)| = g_G(v_j) \geq \delta(G) \geq n + 2$, entonces $n + 2 \leq (3i + 5) / 2$, de donde $i \geq (2n - 1) / 3$ y como $n \geq 3$, entonces $(2n - 1) / 3 > n / 2$.

Por lo tanto $i > \lfloor n / 2 \rfloor$ y $N_t = \{x_t, y_t\}$ para toda $t \leq n / 2$. ♦

Teorema 6.4 (Neumann-Lara y Rivera-Campo [NR2]).- Sean G una gráfica conexa, L la máxima longitud entre las trayectorias de G y $n \geq 2$ un entero. Si $\delta(G) \geq n + 2$, entonces G contiene un árbol generador con diámetro $L - n + 1$.

Demostración.- Sean $P, N_s, N_{s-1}, \dots, N_0$ y T como antes. Si $n \geq 3$, entonces por el Lema 6.3, $N_t = \{x_t, y_t\}$ para $t \leq n/2$ y por el Lema 6.2, G tiene un árbol generador con diámetro $L - n + 1$.

Para el caso $n = 2$ seguimos la demostración del Lema 6.3 hasta obtener

$$|\Gamma(v_j)| \leq (3i + 5) / 2$$

como $|\Gamma(v_j)| \geq \delta(G) \geq n + 2 = 4$, entonces $i \geq 1$.

Si $i > 1$, entonces $N_t = \{x_t, y_t\}$ para $t = 0, 1$ y por el Lema 6.2, G contiene un árbol generador con diámetro $L - 1$.

Si $i = 1$, en particular $N_0 = \{x_0, y_0\}$. Como $g_G(x_0) \geq n + 2 = 4$, entonces existe un vértice $z(x_0) \in V(G) \setminus \{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ tal que $z(x_0)x_0 \in A(G)$.

Si $z(x_0) \in N_1$, entonces $P \cup x_0z(x_0)$ es una trayectoria de G con longitud $L + 1$; como esto no es posible, entonces $z(x_0) \in N_t$ con $t \geq 2$, en cuyo caso

$$(T - x_0x_1) + z(x_0)x_0$$

es un árbol generador de G con diámetro $L - 1$. ♦

Como corolario del Teorema 6.4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.5 (Neumann-Lara y Rivera-Campo [NR2]).- Si G es una gráfica conexa y $k \geq 2$ es un entero tal que $\delta(G) \geq k + 2$, entonces para cada entero r , G contiene un árbol generador con diámetro congruente con r módulo k .

Demostración.- Sean L la máxima longitud de las trayectorias de G y T_1 un árbol generador de G con diámetro L . Como $\delta(G) \geq t + 2$ si $t \leq k$, entonces, por el Teorema 6.4, para cada entero t con $2 \leq t \leq k$, G contiene un árbol generador T_t con diámetro $L - t - 1$. Claramente T_1, T_2, \dots, T_k , satisfacen la conclusión del teorema. ♦

Terminamos este capítulo indicando que la condición $\delta(G) \geq n + 2$ del Teorema 6.4 no puede ser cambiada por $\delta(G) \geq n$ pues, por ejemplo:

La gráfica completa K_{n+1} tiene grado mínimo n , la máxima longitud de sus trayectorias es n y si $n \geq 2$, K_{n+1} no contiene árboles generadores con diámetro $1 = n - n + 1$.

El ciclo C_{n+1} con $n + 1$ vértices tiene grado mínimo 2 y todos sus árboles generadores son trayectorias de longitud n .

Referencias

- [B] J. A. Bondy, *Longest paths and cycles in graphs of high degree*, research report CORR 80-16, Dept. of Combinatorics and Optimization, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, (1980)
- [BCh] J. A. Bondy y V. Chvátal, *A method in graph theory*, *Discrete Math.*, **15** (1976), 111-135
- [BM] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North Holland (1976).
- [Bol] B. Bollobás, *Graph Theory*, An introductory course, Graduate Texts in Mathematics 63, Springer-Verlag (1979).
- [ChE] V. Chvátal y P. Erdős, *A note on hamiltonian circuits*, *Discrete Math.*, **2** (1972), 111-113.
- [D] G. A. Dirac, *Some theorems on abstract graphs*, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1952), 69-81.
- [H] F. Harary, *Graph Theory*, Addison Wesley (1969).
- [NR1] V. Neumann-Lara y E. Rivera-Campo, *Spanning trees with bounded degrees*, *Combinatorica*, **11** (1991), 55-61.
- [NR2] V. Neumann-Lara y E. Rivera-Campo, *Arboles generadores con todos los diámetros módulo k* , manuscrito, (1992).
- [O] O. Ore, *Note on hamiltonian circuits*, *Amer. Math. Monthly*, **67** (1960), 55.
- [R] E. Rivera-Campo, *An Ore-type condition for the existence of spanning trees with bounded degrees*, por aparecer en *Congressus Numerantium*.
- [RU] E. Rivera-Campo y J. Urrutia, *Arboles generador con grado máximo tres en gráficas planas*, manuscrito (1992).

- [T] W. T. Tutte, *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 99-116.
- [W] H. Whitney, *A theorem on graphs*, Ann. Math., **32** (1931), 378-390.
- [Wi1] S. Win, *Existenz von gerusten mit vorgeschriebenem maximalgrad in graphen*,
Abhandlungen aus dem Mathematischen seminar der Universitat Hamburg, **43** (1975),
263-267.
- [Wi2] S. Win, *On a connection between the existence of k -trees and the toughness of a graph*,
Graphs and Combinatorics, **5** (1989), 201-205.