97

El Semigrupo Cuántico de Exclusión Asimétrica.

Tesis que Presenta:

Leopoldo Pantaleón Martínez

Para Obtener el Grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

El Semigrupo Cuántico de Exclusión Asimétrica.

Tesis que Presenta:

Leopoldo Pantaleón Martínez

Para Obtener el Grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Posgrado en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa

Asesor: Dr. Roberto Quezada Batalla.
Co-asesor: Dr. Franco Fagnola.

8 de diciembre de 2008

Índice general

Reconocimientos

Agradezco a mi asesor, el profesor Roberto Quezada Batalla por su invaluable guía para la realización de este trabajo y su apoyo incondicional a lo largo de mis estudios de posgrado. Agradecemos al profesor Luigi Accardi por habernos propuesto los problemas discutidos en los capítulos 3 y 4. Gracias a los profesores Juan Héctor Arredondo Ruiz, Julio César García Corte, Franco Fagnola, Stephen Sontz y Antoni Wawrzyñczyk, quienes en su calidad de sinodales hicieron una revisión cuidadosa de esta tesis. Especialmente agradezco a Stephen Sontz por varias y valiosas sugerencias para mejorar la estructura y el contenido de este trabajo y por algunas referencias bibliográficas, a Franco Fagnola por varias discusiones y por indicarnos un error en la demostración de la Proposición 4.5.2 de la versión preliminar de esta tesis, a Julio César García Corte por varias discusiones y observaciones esclarecedoras en diversos temas de este trabajo y por habernos comunicado un resultado suyo (Proposición 4.5.8) que usamos en el último capítulo.

Agradezco a la UAM-I las facilidades para llevar a cabo mis estudios de Doctorado y para la realización de esta tesis. Por último, agrego que mis estudios de Doctorado fueron apoyados por el CONACYT mediante una beca-crédito, el proyecto de investigación número 49510-F, y el proyecto México-Italia "Dinámica Estocástica con Aplicaciones en Física y Finanzas".

Resumen

Usando el enfoque de Chebotarev [6], construimos el semigrupo mínimo en un álgebra de von Neumann arbitraria $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$, y discutimos condiciones necesarias y suficientes para su conservatividad. Nuestro Teorema 2.5.3 generaliza, al caso de un álgebra de von Neumann arbitraria, condiciones necesarias y suficientes de *conservatividad* bien conocidas en el caso $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, vea [14], [6]. En el Teorema 2.4.7 hemos generalizado el criterio de E. B. Davies [11] y una condición necesaria y suficiente para conservatividad obtenida no hace mucho por Fagnola-Rebolledo [16] y García-Quezada [24].

Con dos hipótesis menos restrictivas que la condición utilizada por Accardi y Kozyrev en [2], a las cuales llamamos *decaimiento polinomial* y *decaimiento exponencial,* (3.4) y (3.5) respectivamente, probamos que se siguen obteniendo generadores de semigrupos dinámicos cuánticos de Markov para la clase de sistemas cuánticos cuasi-genéricos deducida por Accardi-Kozyrev en [2].

En la parte final de este trabajo empleamos otro modelo de los últimos investigadores [2], para construir el *semigrupo dinámico cuántico de exclusión asimétrica* asociado a un modelo de conductividad eléctrica en un retículo. Obtuvimos estados diagonales (o clásicos) invariantes bajo la acción de este semigrupo y mostramos que corresponden con medidas invariantes de un proceso de exclusión clásico, de una clase más general que los procesos de exclusión estudiados por Liggett [30]. También demostramos que el semigrupo cuántico de exclusión asimétrica satisface una condición de balance detallado cuántico para cualquier estado invariante fiel y que todo estado inicial es conducido por el semigrupo a un estado de equilibrio.

Introducción

La estructura del generador de un semigrupo dinámico cuántico (*sdc*), uniformemente continuo en un álgebra de von Neumann de operadores fue caracterizada completamente por Christensen-Evans [8] y Lindblad [31] (también véase el Teorema 2.2.9 de este trabajo) pero, si el semigrupo sólo es continuo con respecto a una topología más débil, todavía no se encuentra una caracterización similar.

En cambio se conocen varios métodos para construir un *sdc* cuando se inicia con un generador formal no acotado con la *estructura de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan,* y el álgebra de von Neumann subyacente es conmutativa o toda el álgebra $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ para algún espacio de Hilbert separable (Davies [11], Chebotarev [6] y Mohari-Sinha [34]).

Cuando el álgebra de von Neumann de operadores $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es arbitraria, Goswami y Sinha [25] lograron construir un *sdc* siguiendo el enfoque de Davies. En el caso $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$ se sabe (p. 3 de [22]), que el *sdc* construido por Chebotarev es el dual del construido por Davies, de ahí que sea interesante la discusión de la construcción a la Chebotarev para el caso general.

Nosotros suponemos dado un generador formal con la estructura de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan (sección 2.4.1) y construimos a partir de éste un *sdc* mínimo en un álgebra arbitraria de von Neumann de operadores $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$, donde h es un espacio de Hilbert separable. Para realizar la construcción siguiendo el enfoque de Chebotarev, a las hipótesis usadas en [6] y [14] añadimos condiciones adecuadas sobre el *generador formal* (*2.2*): la primera de ellas (hipótesis A.1) es que G es un operador afiliado al álgebra $\mathcal{A}$ y la segunda (hipótesis A.2.4) es una condición de afiliación para la transformación completamente positiva Φ. Sumado a lo anterior discutimos las condiciones correspondientes para que el *sdc* sea conservativo o de Markov.

La parte central de este trabajo la presentamos en los dos últimos capítulos, donde tratamos con clases de generadores de semigrupos dinámicos cuánticos deducidos por L. Accardi y S. Kozyrev en [2] usando el método del límite estocástico.

Así en el tercer capítulo presentamos dos nuevas condiciones sobre los coeficientes de generadores de semigrupos cuánticos de Markov asociados con sistemas de espines. Estas hipótesis, a las que hemos nombrado *decaimiento polinomial y exponencial*, respectivamente, son condiciones suficientes para la existencia del semigrupo cuántico correspondiente y cualquiera de ellas reemplaza a la condición más restrictiva *de rango finito* de Accardi y Kozyrev [2].

En el cuarto capítulo consideramos un modelo de conductividad eléctrica en un retículo, deducido también, usando el método del límite estocástico. Construimos el *sdc* asociado con dicho modelo y lo nombramos *semigrupo dinámico cuántico de exclusión asimétrica.* Mostramos que la restricción del generador de este semigrupo a la subálgebra conmutativa de operadores diagonales tiene una forma que coincide con la del generador de un proceso de exclusión clásico, que no está incluido en la clase de estos procesos estudiada por T. M. Liggett [30]. Después encontramos una infinidad de estados diagonales estacionarios de este semigrupo y mostramos que corresponden con medidas invariantes del correspondiente proceso de exclusión clásico. Además mostramos que la envolvente convexa cerrada de dichos estados está contenida en el conjunto de estados invariantes de este semigrupo y más aún, que cualquier elemento de la envolvente convexa satisface una condición de balance detallado cuántico. Luego con base en la existencia de un estado invariante fiel mostramos que el *sdc de exclusión asimétrica* es de *Markov*, y por último vemos que este semigrupo tiene la propiedad, interesante desde el punto de vista físico, de conducir al equilibrio a todo estado inicial.

Cerramos la introducción describiendo brevemente el contenido de la tesis. En el primer capítulo tenemos la terminología básica y los resultados que usamos a lo largo del trabajo. En el segundo discutimos la construcción del *sdc* mínimo en un álgebra de von Neumann arbitraria así como condiciones necesarias y suficientes para que dicho semigrupo sea conservativo. En el tercer capítulo presentamos las nuevas condiciones *decaimiento polinomial y exponencial,* para la existencia de semigrupos cuánticos de Markov con generadores asociados con sistemas de espines cuánticos. En el cuarto construimos el *sdc de exclusión asimétrica,* damos estados diagonales estacionarios de él, discutimos la convergencia al equilibrio bajo este semigrupo y una condición de balance detallado cuántico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los resultados y la terminología básica (todos ampliamente conocidos), que usaremos en la tesis como son (véase [4]), el concepto de C^*-álgebra, álgebra de von Neumann, el ideal de la clase de traza, el predual y el dual de un álgebra de von Neumann, el teorema de la dualidad fundamental, así como la noción de producto tensorial infinito de espacios de Hilbert [43].

1.1. C^*-Álgebras

Un *álgebra* de Banach es un espacio de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ con un producto con respecto al cual es un anillo y si $a, b \in \mathcal{B}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $(\alpha\beta)\, ab = (\alpha a)\,(\beta b)$ y $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.
Una C^*-*álgebra* es un álgebra de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ con una involución $*: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, i.e. una isometría aditiva antilineal que invierte productos: $\forall\, a, b \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|a^*\| = \|a\|,\ \ (a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*,\ \ (a^*)^* = a,\ \ (ab)^* = b^* a^*$$

con la propiedad $\|aa^*\| = \|a\|^2,\ \forall a \in \mathcal{B}$.

Algunas clases de elementos en una C^*-álgebra: $a \in \mathcal{B}$ es *auto-adjunto* si $a^* = a$, es *normal* si $a^*a = aa^*$, es *unitario* si $a^*a = aa^* = 1_{\mathcal{B}}$ y es *positivo* si $a = b^*b$ para algún $b \in \mathcal{B}$.

Elementos positivos de una C^*-álgebra $\mathcal{B}$

El conjunto $\mathcal{B}_+ := \{b^*b : b \in \mathcal{B}\}$ de los elementos positivos de una C^*-álgebra tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.1.1 *Si $\mathcal{B}$ es una C^*-álgebra entonces,*

a) $\mathcal{B}_+$ es un cono convexo cerrado con la topología de la norma en $\mathcal{B}$: $ta + (1-t)\,b \in \mathcal{B}_+$, $\forall a,\ b \in \mathcal{B}$, $\forall t \in [0,1]$.

b) Cada elemento auto-adjunto $a \in \mathcal{B}$ se puede expresar como una combinación lineal de elementos positivos de $\mathcal{B}$: $a = a_+ - a_-$, con $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.

c) Todo elemento de $\mathcal{B}$ se puede expresar como una combinación lineal de cuatro elementos positivos, o sea, $\mathcal{B}_+$ genera linealmente a $\mathcal{B}$.

d) Para todo $a \in \mathcal{B}_+$ existe un único $b \in \mathcal{B}_+$ tal que $b^2 = a$. Dicho elemento se simboliza $b = \sqrt{a}$ ó con $a^{\frac{1}{2}}$.

Demostración. Véase la Proposición 2.2.11 y el Lema 2.2.14 de [4] ■

Definición (Orden). En una C^*-álgebra $\mathcal{B}$, se define

$$b \geq a \iff b - a \in \mathcal{B}_+.$$

1.2. La dualidad fundamental

En todo lo que sigue $(\mathsf{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, es un espacio de Hilbert separable, donde el producto interno es lineal en la segunda variable y sesqui-lineal en la primera variable.

Un ejemplo importante de una C^*- álgebra es el espacio $(\mathcal{B}(\mathsf{h}), \|\cdot\|_\infty)$ de todos los operadores acotados en h con la norma uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup_{u \in \mathsf{h},\ \|u\|=1} \|xu\| .$$

El ideal de la clase de traza $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$

La *traza* de $T \in \mathcal{B}(\mathsf{h})_+$ se define como $trT = \sum_{i \in I} \langle e_i, Te_i \rangle$ donde $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base ortonormal de h. Se prueba que $trT \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ y que su valor no depende de la base ortonormal elegida ([37], Teorema VI.18).

La clase de traza de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ se define como el conjunto

$$\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_1(\mathsf{h}) := \left\{ \rho \in \mathcal{B}(\mathsf{h}) : \, tr\left[(\rho^* \rho)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty \right\}.$$

Se puede probar ([37], Teorema VI.24), que para $\rho \in \mathscr{T}_1$ la serie $\sum_{i\in I} \langle e_i, \rho e_i \rangle$ converge absolutamente y no depende de la base ortonormal elegida, por lo que se define la traza de ρ como

$$tr\rho = \sum_{i\in I} \langle e_i, \rho e_i \rangle .$$

Lema 1.2.1 *$\mathscr{T}_1$ es un espacio vectorial con las siguientes propiedades.*

a) Es un ideal bilateral de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$: Si $\rho \in \mathscr{T}_1$ y $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$, entonces ρx, $\rho x \in \mathscr{T}_1$; además

$$tr\rho x = trx\rho$$

es decir, la traza es cíclica.

b) $(\mathscr{T}_1 \, , \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\rho\|_1 := tr|\rho|$, donde $|\rho| = \sqrt{\rho^* \rho}$; más aún si $\rho \in \mathscr{T}_1$ y $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$, entonces

$$\|\rho\|_\infty \leq \|\rho\|_1 \qquad y \qquad |trx\rho| \leq \|x\|_\infty \|\rho\|_1 , \tag{1.1}$$

por ende al fijar $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$, la función $\rho \longrightarrow tr\rho x$ es una funcional lineal acotada en el espacio de Banach $\mathscr{T}_1$ con norma menor o igual que $\|x\|_\infty$.

Demostración. Véase [37] o [40], o los ejercicios en la p. 267 de [10] ∎

Topologías en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$

Las topologías que usaremos se pueden definir a través de redes.
Sea $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ una red en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$. Diremos que la red converge a x:

-Uniformemente, o en la topología de la norma, si $\lim_\alpha \|x_\alpha - x\|_\infty = 0$.

-Fuertemente, o en la topología fuerte, si $\lim_\alpha \|x_\alpha u - xu\| = 0$, $\forall u \in \mathsf{h}$.

-Converge débilmente, o en la topología débil, si

$$\lim_\alpha \langle u, x_\alpha v\rangle = \langle u, xv\rangle, \quad \forall u, v \in \mathsf{h}.$$

-Converge $\sigma-$débilmente, o en la topología $\sigma-$débil ó ultra débil ó débil, si*

$$\lim_{\alpha} tr\,(\rho x_\alpha) = tr\,(\rho x)\,, \quad \forall \rho \in \mathscr{T}_1.$$

Algunas relaciones entre estas topologías son las siguientes ([4], capítulo 2, sección 2.4).
a) La convergencia en la topología de la norma implica todos los demás modos de convergencia.
b) La convergencia fuerte ó $\sigma-$débil implican convergencia débil.
c) Las topologías fuerte y $\sigma-$débil no son comparables.
d) Las topologías débil y $\sigma-$débil son equivalentes sobre subconjuntos $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathsf{h})$ que son acotados en la norma, i.e., tales que $\sup\{\|x\|_\infty : x \in \mathcal{C}\} < \infty$.

Teorema 1.2.2 *(De la dualidad fundamental o de Schatten). $\mathscr{T}_1\,(\mathsf{h})^* \cong \mathcal{B}(\mathsf{h})$, es decir, el espacio de Banach $(\mathcal{B}(\mathsf{h}), \|\cdot\|_\infty)$ es el dual del espacio de Banach $(\mathscr{T}_1\,, \|\cdot\|_1)$. La dualidad está dada explícitamente por la asociación*

$$(\rho, x) \longmapsto tr\,(\rho x)\,, \quad \rho \in \mathscr{T}_1,\ x \in \mathcal{B}(\mathsf{h}),$$

más aún la topología $\sigma(\mathcal{B}(\mathsf{h}), \mathscr{T}_1\,)$ que esta dualidad genera en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, coincide con la topología $\sigma-$débil.

Demostración. Véase [4], Proposición 2.4.3 p. 68 ∎

1.2.1. Álgebras de von Neumann

Definición. El *conmutante* de un subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\,(\mathsf{h})$ es el conjunto

$$\mathcal{S}' = \{y \in \mathcal{B}\,(\mathsf{h}) : \ ys = sy,\ \forall s \in \mathcal{S}\}$$

y $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')'$.

Teorema 1.2.3 *Si $\mathcal{M}$ es una subálgebra involutiva de $\mathcal{B}\,(\mathsf{h})$ que contiene al operador identidad 1_{h}, entonces las siguientes álgebras involutivas son iguales:*

a) La cerradura fuerte de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{B}\,(\mathsf{h})$,
b) La cerradura $\sigma-$débil de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{B}\,(\mathsf{h})$,
c) La cerradura débil de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{B}\,(\mathsf{h})$,
d) El biconmutante $\mathcal{M}''$ de $\mathcal{M}$.

Demostración. Véase la Proposición 2.4.11, p. 72 de [4] y el Teorema 0.4.2, p. 12 de [41]. También vea [40]. ■

Definición 1.2.4 *Un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ es una subálgebra involutiva de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ que satisface una de las siguientes condiciones equivalentes*

a) $\mathcal{A}$ es fuertemente cerrado y contiene a 1_{h}.

b) $\mathcal{A}$ es $\sigma-$débilmente cerrado y contiene a 1_{h}.

c) $\mathcal{A}$ es débilmente cerrado y contiene a 1_{h}.

d) $\mathcal{A}$ es igual a su biconmutante $\mathcal{A}''$.

Usando el hecho de que toda C^*-álgebra se genera linealmente por elementos unitarios ([4], Lema 2.2.14 p. 38), se puede demostrar el siguiente resultado que es bastante útil para decidir cuando $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ pertenece a un álgebra de von Neumann.

Lema 1.2.5 *Sea $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ y $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann de operadores en h. Una condición necesaria y suficiente para que $x \in \mathcal{A}$ es que $u'xu'^* = x$ para todo operador unitario $u' \in \mathcal{A}'$.*

1.2.2. Predual de un álgebra de von Neumann

Dualidad fundamental, versión general

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$ un álgebra de von Neumann. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathscr{T}_1$ tal que $\rho \sim \gamma$ si y sólo si,

$$tr\rho x = tr\gamma x, \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Denotaremos con $\mathcal{A}^{\perp}$ al subespacio cerrado $\{\rho \in \mathscr{T}_1 \mid \rho \sim 0\}$ y con $\widehat{\rho}$ a la clase de equivalencia de ρ con respecto a la relación $\sim$.
Como se sabe, $\mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\widehat{\rho}\|_{\widehat{1}} = \inf_{\gamma \sim \rho} \|\gamma\|_1$$

donde $\|\gamma\|_1$ denota la norma de la clase de traza.

Teorema 1.2.6 *(De la dualidad fundamental, versión general).*

a) $(\mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp})^* \cong \mathcal{A}$, es decir, el espacio de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$ es el dual del espacio de Banach $(\mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}, \|\cdot\|_{\widehat{1}})$.

La identificación canónica entre $\mathcal{A}$ y $\left(\mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}\right)^*$ está dada por el isomorfismo isométrico tal que $\forall\, a \in \mathcal{A}$, $a \longrightarrow \omega_a$, donde

$$\omega_a(\,\widehat{\rho}\,) = tr\,(\rho a)\,.$$

b) Si $\Omega_{\mathcal{A}}$ denota el espacio de todas las funcionales lineales normales en $\mathcal{A}$, (i.e. continuas con la topología $\sigma-$débil), entonces $\mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp} \cong \Omega_{\mathcal{A}}$ vía el isomorfismo isométrico que a todo $\widehat{\rho} \in \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ asocia canónicamente con $\omega_{\,\widehat{\rho}}$ donde $\omega_{\,\widehat{\rho}}(a) = tr\,(\rho a)$.

Demostración. La prueba está contenida en la Proposición 2.4.18 p. 75 de [4] ■

Definición. El *predual* de un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ es $\Omega_{\mathcal{A}}$ ó $\mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ y se denota con $\mathcal{A}_*$.

Observación: De acuerdo al teorema anterior se cumple que

$$\mathcal{A}_* \cong \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp} \cong \{tr\,[\rho\,(\cdot)] : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \rho \in \mathcal{T}_1\}$$

y

$$\mathcal{A} \cong \{tr\,[a\,(\cdot)] : \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp} \longrightarrow \mathbb{C} \mid a \in \mathcal{A}\} \cong (\mathcal{A}_*)^*.$$

Transformación predual

Sea $S : \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ una transformación lineal continua en la norma de la traza $\|\cdot\|_{\widehat{1}}$. A cada $x \in \mathcal{A}$ le asociamos la funcional lineal $\Lambda_x : \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\Lambda_x(\widehat{\rho}) = tr\,[xS\,(\widehat{\rho})]\,.$$

Como $\Lambda_x \in \left(\mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}\right)^*$, debido al teorema de la dualidad fundamental existe un único $T\,(x) \in \mathcal{A}$ tal que

$$tr\,[xS\,(\widehat{\rho})] = tr\,[T\,(x)\,\rho]\,. \tag{Du}$$

La transformación T definida a través de la ecuación (Du) es lineal y continua en la topología $\sigma-$débil y se dice que es la *transformación dual* de S, o bien que S es la *transformación predual* de T. Recíprocamente, si $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un operador lineal continuo en la topología $\sigma-$débil, para cada $\widehat{\rho} \in \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ la funcional

$$\lambda_{\widehat{\rho}}(x) = tr\,[T\,(x)\,\rho]\,,$$

es continua en la topología $\sigma-$débil de $\mathcal{A}$, entonces existe un único $S(\widehat{\rho}) \in \mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}$ tal que se cumple (Du) (ver subsección anterior). Se puede demostrar que S es un operador lineal acotado en $\left(\mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}, \|\cdot\|_{\widehat{1}}\right)$ por lo que S es la transformación predual de T.

Para terminar este capítulo discutimos una estructura que emplearemos sobre todo en los dos últimos capítulos.

1.3. Productos tensoriales infinitos de espacios de Hilbert

Sea $\{\mathsf{h}_l, \langle\cdot,\cdot\rangle_l\}_{l\geq 1}$ una familia de espacios de Hilbert complejos y separables con $\{e_{n_l}\}_{n_l\geq 1}$ una base ortonormal para cada h_l y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones $\bar{n} = \{n_l\}$ de enteros positivos. Para cada $\bar{n} \in S$ sea $e_{\bar{n}} = e_{n_1}^{(1)} \otimes e_{n_2}^{(2)} \otimes \cdots = \otimes_{l\geq 1} e_{n_l}^{(l)}$. Si W es el espacio vectorial de todas las combinaciones lineales finitas de elementos del conjunto $W_0 = \{e_{\bar{n}} : \bar{n} \in \mathcal{S}\}$, un vector típico $u \in W$ tiene la forma $u = \sum_{\bar{n}\in\mathcal{S}} c(\bar{n})e_{\bar{n}}$, donde $c : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es una función tal que $c(\bar{n}) = 0$ salvo para un número finito de $\bar{n} \in \mathcal{S}$ y el vector cero corresponde a la función cero. Para $u = \sum_{\bar{n}\in\mathcal{S}} c(\bar{n})e_{\bar{n}}$ y $v = \sum_{\bar{n}\in\mathcal{S}} d(\bar{n})e_{\bar{n}} \in W$, definimos un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ por

$$\langle u, v\rangle = \sum_{\bar{n}\in\mathcal{S}} \overline{c(\bar{n})} d(\bar{n}). \tag{1.2}$$

La completez del espacio $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es (J. von Neumann, [43]) el *producto tensorial infinito* de la familia de espacios de Hilbert $\{\mathsf{h}_l\}$, que se denota por $\otimes_{l\geq 1}\mathsf{h}_l$ y por definición tiene a $W_0 = \{e_{\bar{n}} : \bar{n} \in \mathcal{S}\}$ como base ortonormal.

Una variante de este tipo de productos es la siguiente. Dada una sucesión de vectores unitarios $\varphi = \{u^{(l)}\}_{l\geq 1}$, $u^{(l)} \in \mathsf{h}_l$, consideremos una base ortonormal $\{e_{n_l}^{(l)}\}_{n_l\geq 1}$ para cada h_l tal que $e_1^{(l)} = u^{(l)}$. La cerradura del subespacio lineal generado por los vectores ortonormales $e_{\bar{n}} \in \otimes_{l\geq 1}\mathsf{h}_l$ tales que $n_l = 1$, i.e. $e_{n_l}^{(l)} = u^{(l)}$ para todos excepto un número finito de $l \geq 1$, es llamado el producto tensorial de la familia de los espacios de Hilbert $\{\mathsf{h}_l\}$ con respecto al vector estabilizador φ y se denota por $\otimes_{l\geq 1}^{\varphi}\mathsf{h}_l$.

Algunas diferencias y relaciones entre los dos tipos mencionados de productos tensoriales infinitos son las siguientes: Si cada factor h_l es separable entonces el producto tensorial estabilizado es separable, mientras que el producto completo no lo es en general, (Teorema V y Lema 6.4.1 de [43]). Se sabe que dadas dos sucesiones de vectores unitarios $u = \{u^{(l)}\}_{l\geq 1}$ y $v = \{v^{(l)}\}_{l\geq 1}$ con $u^{(l)}, v^{(l)} \in \mathsf{h}_l$, los productos tensoriales infinitos estabilizados con respecto a u y v son isomorfos si u y v satisfacen la relación de equivalencia $\sum_l |1 - \langle u_l, v_l\rangle| < \infty$, (Proposición 1.3 de [26]). Cada producto tensorial infinito estabilizado es un subspacio del producto tensorial completo, más aún, estos subespacios descomponen al producto tensorial completo en subespacios mutuamente ortogonales, (Teorema I y Lema 4.1.1 de [43]). Para abundar en el tema consulte también [26].

Para terminar esta sección presentamos otra forma de construir el producto tensorial infinito de espacios de Hilbert, iniciamos con algunas definiciones.

Definición 1.3.1 *Sean I un conjunto y $z_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in I$. Decimos que $\sum_{\alpha\in I} z_\alpha$, respectivamente $\prod\limits_{\alpha\in I} z_\alpha$, converge a $z \in \mathbb{C}$ si para cada $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito $I_\epsilon \subset I$, tal que para cada conjunto finito J, con $I_\epsilon \subset J \subset I$, se cumple*

$$|\sum_{j\in J} z_j - z| < \epsilon, \text{ respectivamente } |\prod_{j\in J} z_j - z| < \epsilon.$$

Definición 1.3.2 $\prod\limits_{\alpha\in I} z_\alpha$ *es cuasi-convergente en el sentido de von Neumann, si $\prod\limits_{\alpha\in I} |z_\alpha|$ es convergente. Si $\prod\limits_{\alpha\in I} z_\alpha$ es cuasi-convergente pero no convergente definimos $\prod\limits_{\alpha\in I} z_\alpha = 0$.*

Sea $(\mathsf{h}_n, \langle\cdot,\cdot\rangle_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios de Hilbert complejos separables. El producto tensorial finito $\otimes_{n=1}^p \mathsf{h}_n$, $p \geq 1$ se define de manera usual como la completez con respecto al producto interno

$$\left\langle \sum_k \bigotimes_{n=1}^p y_n^k, \sum_l \bigotimes_{n=1}^p z_n^l \right\rangle = \sum_{k,l} \prod_{n=1}^p \left\langle y_n^k, z_n^l \right\rangle_n$$

del espacio vectorial generado por las funcionales

$$\left(\bigotimes_{n=1}^p y_n\right)(x) = \prod_{n=1}^p \langle x_n, y_n\rangle_n,$$

donde $x = (x_1, ..., x_p)$.

Para definir el producto tensorial infinito de von Neumann ([43], [26]), sea $\Delta = \{x \in \times_{n\in\mathbf{N}} \mathsf{h}_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\|x_n\|_n - 1| < \infty\}$. Para $(y_n) \in \Delta$, definimos una funcional acotada $\otimes_{n=1}^{\infty} y_n$ en Δ por

$$\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} y_n\right)(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle_n \, ,$$

donde el producto infinito es cuasi-convergente en el sentido de von Neumann (Lemas 2.5.1 y 2.5.2 de [43]).

Definición 1.3.3 $\otimes_{n=1}^{\infty} \mathsf{h}_n$ *es la completez del espacio vectorial generado por todas las funcionales lineales acotadas de la forma* $\otimes_{n=1}^{\infty} y_n$ *con respecto al producto interno*

$$\left\langle \sum_k \bigotimes_{n=1}^{\infty} y_n^k, \sum_l \bigotimes_{n=1}^{\infty} z_n^l \right\rangle = \sum_{k,l} \prod_{n=1}^{\infty} \langle y_n^k, z_n^l \rangle_n \, .$$

Definición 1.3.4 *Sea* $\varphi = \{e_n^0\}$ *una sucesión de vectores unitarios con* $e_n^0 \in \mathsf{h}_n$. *Sea* $\Delta_\varphi = \{x \in \times_{n\in\mathbf{N}} \mathsf{h}_n : x_n \neq e_n^0$ *para un número finito de n's*$\}$. *El espacio de Hilbert obtenido completando el espacio lineal generado por las funcionales lineales* $\otimes_{n=1}^{\infty} y_n$ *con* $y \in \Delta_\varphi$ *con respecto al producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *se llama el producto tensorial infinito de los espacios* h_n *con respecto al vector estabilizante* φ *y se denota por* $\otimes_{n\geq 1}^{\varphi} \mathsf{h}_n$.

Capítulo 2

Semigrupos cuánticos de Markov

En este capítulo siguiendo la referencia [14], recordamos las nociones de operador completamente positivo, semigrupo fuertemente continuo, semigrupo dinámico cuántico (*sdc*), el predual de un *sdc* y el concepto de *sdc* de Markov o conservativo.

Postulamos hipótesis adecuadas (2.4.1), sobre el generador formal, para hacer una construcción nueva de un *sdc mínimo* en un álgebra de von Neumann arbitraria $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathsf{h})$, en esta tarea seguimos el enfoque usado por Chebotarev [6], en el caso $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$. También generalizamos varias condiciones conocidas ([6], [14]), para la conservatividad de dicho semigrupo. Por último discutimos el ejemplo (2.6), aparecido en [25] de un generador formal de Lindblad que actúa en un álgebra de von Neumann que no coincide con $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ y que no es conmutativa.

2.1. Transformaciones completamente positivas y normales

Definición. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos C^*-álgebras y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una transformación lineal, entonces

a) T es *positiva,* si manda elementos positivos a elementos positivos, es decir, si

$$T(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+.$$

b) T es *completamente positiva (CP)*, si $\forall n \in \mathbb{N}$ y toda colección $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i^* T(a_i^* a_j) b_j \geq 0.$$

Observemos que la condición de ser *CP* implica la positividad.

Definición. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras de von Neumann. Se dice que una transformación lineal positiva $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *normal* si para toda red creciente $(x_\alpha)_\alpha$ de elementos en $\mathcal{A}_+$ con mínima cota superior $x \in \mathcal{A}_+$ se tiene que

$$\sup_\alpha T(x_\alpha) = T(x),$$

es decir la red creciente $(Tx_\alpha)_\alpha$ de elementos en $\mathcal{B}_+$ converge $\sigma-$débilmente a $T(x)$.

Si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un operador lineal positivo, ser normal equivale a ser continuo en la topología $\sigma-$débil, (vea [12], cap. 4, Teorema 2, p. 59).

2.2. Semigrupos dinámicos cuánticos

En esta parte recordamos algunas definiciones sobre familias de operadores que usaremos en lo que resta de la tesis.

Definición 2.2.1 *Un semigrupo de operadores en un espacio de Banach* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *es una familia* $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ *de operadores acotados en* $\mathcal{X}$ *que satisface las dos siguientes condiciones:*

$$\mathcal{S}_s\mathcal{S}_t(x) = \mathcal{S}_{s+t}(x), \quad \mathcal{S}_0(x) = x, \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Si $\|\mathcal{S}_t(x)\| \leq \|x\| \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall t \geq 0$, *nos referiremos a* $\mathcal{S}$ *como un semigrupo de contracciones.*

Definición 2.2.2 *Un semigrupo fuertemente continuo o* C_0-*semigrupo en un espacio de Banach* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *es un semigrupo* $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ *de operadores acotados en* $\mathcal{X}$ *tal que*

$$\lim_{t\to 0} \|\mathcal{S}_t(x) - x\| = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Definición 2.2.3 *Un semigrupo dinámico cuántico (sdc) en una C^*-álgebra $\mathcal{B}$, es un semigrupo fuertemente continuo $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ de operadores CP y acotados en $\mathcal{B}$.*

Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es un álgebra de von Neumann y h es un espacio de Hilbert, un sdc $\mathcal{T}$ es un semigrupo de operadores CP en $\mathcal{A}$ tales que

1. Para cada $t \geq 0$, $\mathcal{T}_t$ es $\sigma-$débil continuo o normal: para toda red creciente $(a_\alpha)_\alpha$ de elementos en $\mathcal{A}_+$ con mínima cota superior $a \in \mathcal{A}_+$,

$$\sup_\alpha \mathcal{T}_t(a_\alpha) = \mathcal{T}_t(a),$$

2. Para cada $a \in \mathcal{A}$, el mapeo $t \longrightarrow \mathcal{T}_t(a)$ es continuo con respecto a la topología $\sigma-$débil en $\mathcal{A}$, es decir

$$\lim_{t\to 0} tr(\mathcal{T}_t(a)\rho) = tr(a\rho), \quad \forall \rho \in \mathscr{I}_1.$$

Un *sdc* en $\mathcal{A}$ se puede ver como dual de un semigrupo fuertemente continuo en el espacio (de Banach) predual $\mathcal{A}_*$ de la siguiente manera.

Definición 2.2.4 *El semigrupo predual de un sdc $\mathcal{T}$ en un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$, es el semigrupo de operadores en su predual $\mathcal{A}_*$ definido por*

$$(\mathcal{T}_{*t}(\omega))(a) = \omega(\mathcal{T}_t(a)), \quad \forall \omega \in \mathcal{A}_* \; \forall a \in \mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{T}$ es continuo con respecto a la topología $\sigma-$débil en $\mathcal{A}$ el semigrupo $\mathcal{T}_*$ es continuo también con respecto a la topología débil del espacio de Banach $\mathcal{A}_*$. Por lo tanto ([4], Corolario 3.18, p. 168), $\mathcal{T}_*$ es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach predual $\mathcal{A}_*$.

Definición 2.2.5 *Un sdc es de Markov o conservativo si*

$$\mathcal{T}_t(I) = I, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2.2.6 *El generador (infinitesimal) de un semigrupo dinámico cuántico $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ en una C^*-álgebra $\mathcal{B}$ (respectivamente un álgebra de von Neumann) es el operador $\mathcal{L}$ definido por $\mathcal{L}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}_t(x)-x}{t}$ en el conjunto*

$$dom(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{B} : \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}_t(x) - x}{t} \text{ existe}\}$$

donde el límite se considera con la norma de $\mathcal{B}$ (respectivamente con la topología $\sigma-$débil).

Proposición 2.2.7 *Si $\mathcal{T}$ es un sdc en un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ y $\mathcal{L}$ es su generador infinitesimal, entonces*

1. Existen dos números reales M, β tales que $\|\mathcal{T}_t\| \leq Me^{\beta t}$, $t \geq 0$.

2. $\mathcal{L}$ está densamente definido y es cerrado con la topología $\sigma-$débil.

3. Si $\Re e\lambda > \beta$ entonces el rango de $\lambda - \mathcal{L}$ coincide con $\mathcal{A}$ y se cumple la desigualdad

$$\left\|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(a)\right\| \leq \frac{M}{\Re e\lambda - \beta}\|a\|.$$

4. El operador resolvente está dado por la transformada de Laplace

$$(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(a) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}_t(a)\,dt$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\Re e\lambda > \beta$.

Demostración. Véase [4], Proposición 3.1.16 p. 166. ∎

Observación 2.2.8 *La Proposición 2.2.7 vale también si $\mathcal{T}$ es un sdc en una C^*-álgebra, en cuyo caso en el inciso 2 se usa la topología de la norma.*

Para finalizar esta sección comentamos que un caso ampliamente estudiado es cuando un *sdc* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ es conservativo y además *uniformemente continuo,* es decir $\lim_{t\to 0}\|\mathcal{T}_t - I\|_\infty = 0$, entonces su generador infinitesimal $\mathcal{L}$ tiene la siguiente caracterización.

Teorema 2.2.9 *(Lindblad, Gorini, Kossakowski, Sudarshan). Si $\mathcal{T}$ es un sdc de Markov uniformemente continuo en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, entonces su generador $\mathcal{L}$: $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \to \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es acotado y existen un operador CP $\Phi : \mathcal{B}(\mathsf{h}) \to \mathcal{B}(\mathsf{h})$ y un elemento auto-adjunto $H \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tales que*

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(x) - G^*x - xG \tag{2.1}$$

donde

$$G = \frac{1}{2}\Phi(I) - iH.$$

Recíprocamente, todo operador $\mathcal{L}$ de la forma (2.1) con $\Phi : \mathcal{B}(\mathsf{h}) \to \mathcal{B}(\mathsf{h})$, $H \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ (CP y auto-adjunto, respectivamente) es acotado y genera un sdc de Markov uniformemente continuo.

Demostración. Véase [31] ó [22] ∎

2.3. Estados Invariantes

Definición 2.3.1 *Un operador ρ de la clase de traza $\mathcal{T}_1$, es un* estado *si es positivo y $tr\rho = 1$. El estado es llamado* fiel *si es inyectivo.*
Un estado ρ es invariante *o* estacionario *bajo un sdc $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$, si*

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \rho, \quad \forall t \geq 0,$$

o equivalentemente si

$$\mathcal{L}_*(\rho) = 0.$$

La equivalencia se demuestra como sigue: derivando la primera ecuación obtenemos $0 = \frac{d}{dt}\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \mathcal{L}_*\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \mathcal{L}_*(\rho)$. Recíprocamente, si $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$, usando que $\mathcal{T}_{*t}$ deja invariante a $dom(\mathcal{L}_*)$ y que el semigrupo conmuta con su generador obtenemos

$$0 = \mathcal{T}_{*t}\mathcal{L}_*(\rho) = \mathcal{L}_*\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \frac{d}{dt}\mathcal{T}_{*t}(\rho),$$

y por tanto $\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \rho \quad \forall t \geq 0$. Lo anterior demuestra que los estados invariantes de un *sdc* son los ceros del generador del semigrupo predual.

Observación 2.3.2 *Frecuentemente en vez de escribir sdc de Markov (semigrupo dinámico cuántico de Markov) usaremos el acrónimo SCM (Semigrupo Cuántico de Markov).*

Definición 2.3.3 *Sea σ un estado. Se dice que el SCM $(\mathcal{T}_{*t})_{t\geq 0}$* conduce al equilibrio *a σ, si existe otro estado ρ tal que*

$$w^* - \lim_{t\to\infty} \mathcal{T}_{*t}(\sigma) = \rho.$$

Observemos que en este caso ρ es un estado invariante.

2.4. Construcción del semigrupo dinámico cuántico mínimo

En esta sección presentamos hipótesis adecuadas sobre el generador formal para construir el semigrupo mínimo cuántico *sdc* (Definición 2.2.3) ligado a él.

En lo que sigue $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es un álgebra de von Neumann y $\mathcal{A}'$ es su conmutante (ver subsección 1.2.1).
Iniciamos con una definición ([12] y [41]) que resulta central en lo que resta del capítulo.

Definición 2.4.1 *Sea T un operador lineal no necesariamente continuo, definido en un subespacio de h. Se dice que T es* ***afiliado*** *a $\mathcal{A}$ y se escribe $T\eta\mathcal{A}$, si $a' domT \subseteq domT$ y $a'Ta'^{-1} = T$ para todo operador unitario $a' \in \mathcal{A}'$.*

Además supondremos las siguientes condiciones:

2.4.1. Hipótesis A

A.1. Existe un operador G con dominio $domG$ denso en h que es el *generador infinitesimal* de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $(P_t)_{t\geq 0}$ en h, (véanse Definiciones 2.2.2 y 2.2.1). Además pedimos que G sea afiliado a $\mathcal{A}$.

A.2 Existe una transformación $\Phi : \mathcal{A} \times domG \times domG \to \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:
A.2.1 Φ es lineal en la variable operador, sesqui-lineal en las variables vectoriales y es *completamente positiva*, es decir, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Phi(x_i^* x_j)[u_i, u_j] \geq 0 \quad u_i \in domG \text{ y } x_i \in \mathcal{A}.$$

A.2.2 Para $u \in domG$ fijo, la función $\Phi(x)[u]$, $x \in \mathcal{A}$ es una funcional lineal *normal* en $\mathcal{A}$, i.e. para cualquier red $(x_\alpha)_\alpha$ no decreciente y acotada en norma de elementos en $\mathcal{A}_+$,

$$x = \sup_\alpha x_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \sup_\alpha \Phi(x_\alpha)[u] = \Phi(x)[u]$$

A.2.3 Para todo $u \in domG$

$$\Phi(I)[u] \leq -2Re\langle u, Gu\rangle,$$

A.2.4 La trasformación Φ satisface la siguiente condición de *afiliación*:
Para todo elemento unitario $a' \in \mathcal{A}'$, $a' domG \subseteq domG$ y $\forall x \in \mathcal{A}$

$$\Phi\,(x)\,[a'u, a'v] = \Phi\,(x)\,[u, v]\,, \quad \forall\; u, v \in domG.$$

Conviene resaltar que esta condición de afiliación es una versión para formas sesqui-lineales de la condición (2.4.1) que aparece al inicio de esta sección.

Generador formal

Para cada $x \in \mathcal{A}$, asociada a la trasformación Φ consideraremos la forma sesqui-lineal $\pounds(x)$, definida en $domG \times domG$ por

$$\pounds(x)[u, v] = \langle u, xGv\rangle + \langle Gu, xv\rangle + \Phi(x)[u, v]. \tag{2.2}$$

$\pounds(x)$ se conoce como *generador formal o forma de Lindblad* (y Gorini-Kossakowski-Sudarshan); a $\Phi(\cdot)$ se le llama la parte *completamente positiva* de $\pounds(x)$.

Observemos que en términos del generador formal, la condición **A.2.3** equivale a pedir que

$$\pounds(I)[u] \leq 0 \quad \forall\, u \in domG.$$

Al espacio $domG$ le daremos la topología que induce la norma de la gráfica de G, es decir

$$\|u\|_G = \|u\| + \|Gu\|,$$

que se sabe es equivalente a la norma

$$(\|u\|^2 + \|Gu\|^2)^{1/2}$$

y que proviene del producto interno

$$\langle u, v\rangle + \langle Gu, Gv\rangle.$$

Por las hipótesis A.2.1 y A.2.3 tenemos $-Re\langle u, Gu\rangle \geq 0$, lo que hace que

$$\|u\|_{domG} := \|u - Gu\|, \tag{2.3}$$

defina una norma que es equivalente a la norma de la gráfica. De hecho,

$$\|u\|_{domG} \leq \|u\|_G \leq \sqrt{2}\|u\|_{domG}. \tag{2.4}$$

Antes de enunciar el siguiente resultado recordamos una definición.

Definición 2.4.2 *Para $u, v \in \mathsf{h}$, se define el operador $|u\rangle\langle v| \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ por*

$$|u\rangle\langle v|x = \langle v, x\rangle u, \quad x \in \mathsf{h}.$$

Lema 2.4.3 *Si se satisface la hipótesis* $\mathbf{A}$, *entonces* $\mathcal{L}$ *y* Φ *tienen las siguientes propiedades:*
a) Para cada $x \in \mathcal{A}$,

$$|\Phi(x)[u]| \leq \|x\|_\infty \Phi(I)[u] \quad \forall u \in domG.$$

b) $\mathcal{L}(x)[\cdot,\cdot]$ *y* $\Phi(x)[\cdot,\cdot]$ *son formas sesqui-lineales continuas en* $domG \times domG$.
c) Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ *un conjunto acotado en la norma. Si consideramos en* $\mathcal{C}$ *la topología* $\sigma-$*débil, entonces*

$$\Phi : \mathcal{C} \times domG \times domG \to \mathbb{C}$$

es conjuntamente continua.

Demostración. a) Sea $u \in domG$. Como $\Phi(\cdot)[u]$ es una funcional normal, es continua en la topología $\sigma-$débil por lo que existe (ver subsección 1.2.2) $\Phi^\dagger(u) \in \mathscr{T}_1$ tal que $\Phi(x)[u] = tr(x\Phi^\dagger(u)), \forall x \in \mathcal{A}$ y

$$\begin{aligned}|\Phi(x)[u]| &\leq \|x\|_\infty \|\Phi^\dagger(u)\|_1 \\ &\leq \|x\|_\infty tr\Phi^\dagger(u) = \|x\|_\infty \Phi(I)[u]\end{aligned}$$

la última desigualdad vale porque $\Phi^\dagger(u)$ es positivo definido pues

$$\langle v, \Phi^\dagger(u)v\rangle = tr(|v\rangle\langle v|\Phi^\dagger(u)) = \Phi(|v\rangle\langle v|)[u] \geq 0.$$

b) A partir de A.2.3, a) y usando (2.3) tenemos

$$|\Phi(x)[u]| \leq \|x\|_\infty \Phi(I)[u] \leq -2\|x\|_\infty Re\langle u, Gu\rangle \leq \|x\|_\infty \|u\|^2{}_{domG}$$

lo que prueba la continuidad de $\Phi(x)[\cdot,\cdot]$ en $(domG, \|\cdot\|_{domG})$; luego por (2.2) se sigue la continuidad de $\mathcal{L}(x)[\cdot,\cdot]$ en $domG$.

c) Sea $\mathcal{D} = domG$, debido a b) y a la identidad de polarización, existe una constante positiva M tal que

$$|\Phi(x)[u,v]| \leq M\|x\|_\infty \|u\|_\mathcal{D} \|v\|_\mathcal{D}. \tag{2.5}$$

Si $x, x_0 \in \mathcal{C}$, $v, v_0 \in \mathcal{D}$ y $K = \sup\{\|x\|_\infty : x \in \mathcal{C}\}$ entonces

$$\begin{aligned}|\Phi(x)[v]-\Phi(x_0)[v_0]| &\leq |\Phi(x)[v]-\Phi(x)[v,v_0]|+|\Phi(x)[v,v_0]-\Phi(x)[v_0]| \\ &+ |\Phi(x)[v_0]-\Phi(x_0)[v_0]| \\ &\leq \Phi(x)[v,v-v_0]+\Phi(x)[v-v_0,v_0] \\ &+ |\Phi(x)[v_0]-\Phi(x_0)[v_0]| \\ &\leq 2MK\|v\|_{\mathcal{D}}\|v-v_0\|_{\mathcal{D}}+|\Phi(x)[v_0]-\Phi(x_0)[v_0]|,\end{aligned}$$

y vemos que los términos de la última desigualdad tienden a cero si $v \longrightarrow v_0$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ y $x \longrightarrow x_0$ en la topología $\sigma-$débil. ∎

Corolario 2.4.4 *Bajo las condiciones del Lema anterior, si $t \mapsto x_t$ es una curva en el álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$, acotada en norma y $\sigma-$débil continua, entonces para cualesquiera $u, v \in domG$*

$$\int_0^t \Phi(x_s)[P_{t-s}u, P_{t-s}v]ds$$

está bien definida y es la forma sesqui-lineal de un operador acotado en $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el rango de la curva $t \mapsto x_t$. El integrando es una función continua por la parte (c) del Lema 2.4.3 y es acotada debido a la desigualdad 2.5. ∎

2.4.2. La ecuación de Lindblad

Ahora nuestro propósito es encontrar un *sdc* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{T}_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ que satisfaga para cada $x \in \mathcal{A}$, la siguiente ecuación conocida como la *ecuación de Lindblad*

$$\frac{d}{dt}\langle u, \mathcal{T}_t(x)\, v\rangle = \pounds(\mathcal{T}_t(x))\,[u,v], \quad \langle u, \mathcal{T}_0(x)\, v\rangle = \langle u, xv\rangle \quad u, v \in domG. \quad (2.6)$$

Una condición necesaria para que exista un *sdc* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ de *contracciones* que satisfaga la ecuación de Lindblad es que $\forall u \in domG$,

$$\pounds(I)\,[u] \leq 0.$$

En efecto, como $\mathcal{T}_t(I) \leq I$ $\forall t \geq 0$, de la ecuación de Lindblad (2.6) tenemos que

$$\pounds(I)\,[u] = \frac{d}{dt}\langle u, \mathcal{T}_t(I)\, u\rangle\Big|_{t=0} \leq 0.$$

Para buscar resolver la ecuación de Lindblad (2.6) en vez de proceder directamente, primero se observa que equivale a la ecuación

$$\langle u, \mathcal{T}_t(x)\, v\rangle = \langle u, xv\rangle + \int_0^t \pounds(\mathcal{T}_s(x))[u,v]ds \quad u, v \in domG \qquad (2.7)$$

y luego se demuestra (véase [22]), que esta última es equivalente a la ecuación 2.8 que aparecerá abajo, también con una "forma integral" y que es finalmente la que se resuelve. Pero antes de esta discusión requerimos el siguiente lema (véase [25]).

Lema 2.4.5 *Si la hipótesis* $\boldsymbol{A}$ *es válida, entonces*
a) $(\lambda - G)^{-1} \in \mathcal{A}$ *para todo real positivo* λ.
b) Para todo $t \geq 0$, $P_t \in \mathcal{A}$; *además* $P_t^* x P_t \in \mathcal{A}$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración. Para $\lambda > 0$, $a' \in \mathcal{A}'$ y $u \in \mathsf{h}$ por la condición (A.1) se tiene $(\lambda - G)\, a' (\lambda - G)^{-1} u = a' (\lambda - G)(\lambda - G)^{-1} u = a'u$ y por tanto $a' (\lambda - G)^{-1} = (\lambda - G)^{-1} a'$ para todo $a' \in \mathcal{A}'$, es decir $(\lambda - G)^{-1} \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Por tanto $P_t = s - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - G\right)^{-1}\right)^n \in \mathcal{A}$; la segunda parte de b) ahora es inmediata. ■

Lema 2.4.6 *Supongamos que se cumple la hipótesis* $\boldsymbol{A}$ *y que* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *es una familia de contracciones continuas en* $\mathcal{A}$ *con la topología* $\sigma-$*débil, entonces para todos* $u, v \in domG$ *la ecuación 2.7 equivale a la ecuación*

$$\langle u, \mathcal{T}_t(x)\, v\rangle = \langle u, P_t^* x P_t v\rangle + \int_0^t \Phi(\mathcal{T}_s(x))[P_{t-s}u, P_{t-s}v]ds. \qquad (2.8)$$

Demostración. La integral de (2.8) está bien definida pues el integrando es una función continua debido al Corolario 2.4.4. Una demostración de la equivalencia se hizo en [22] p. 86, dicha demostración también nos sirve para el caso general pues la hipótesis principal es que el integrando de (2.8) sea Borel medible. ■

Como ya mencionamos, en vez de buscar directamente una solución de la ecuación de *Lindblad* 2.6, se soluciona la ecuación 2.8, lo cual se logra mediante un procedimiento iterativo definiendo para $u, v \in domG$, $x \in \mathcal{A}$, $t \geq 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la siguiente sucesión de operadores:

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{T}_t^{(1)}(x)v\rangle &= \langle u, P_t^* x P_t v\rangle, \\ \langle u, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)v\rangle &= \langle u, P_t^* x P_t v\rangle + \int_0^t \Phi(\mathcal{T}_s^{(n)}(x))[P_{t-s}u, P_{t-s}v]ds \end{aligned} \tag{2.9}$$

que tiene las siguientes propiedades.

Teorema 2.4.7 *Supongamos que se cumple la hipótesis* $\boldsymbol{A}$. *Entonces la sucesión* $(\mathcal{T}_t^n)_{n\geq 1}$ *es una familia de contracciones lineales en* $\mathcal{A}$ *que satisfacen:*
a) Para $x \in \mathcal{A}_+$, $0 \leq \mathcal{T}_t^{(n)}(x) \leq \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x) \leq \|x\|_\infty I$.
b) $\mathcal{T}_t^{(n)} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *es un operador completamente positivo* $\forall t \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
c) Si definimos

$$\mathcal{T}_t(x) = \sup_n \mathcal{T}_t^{(n)}(x) \quad x \in \mathcal{A}_+ \tag{2.10}$$

y extendemos la definición de $\mathcal{T}_t$ *a todo* $x \in \mathcal{A}$ *por linealidad, entonces la convergencia en (2.10) es con las topologías fuerte y* $\sigma-$*débil.*
d) Para cada $x \in \mathcal{A}$ *la curva* $t \mapsto \mathcal{T}_t(x)$ *es solución de la ecuación de Lindblad en forma integral 2.8.*
e) $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *es un sdc de contracciones.*
f) Si $(S_t(x))_{t\geq 0}$ *es otra solución, no necesariamente sdc, de (2.8)entonces* $\mathcal{T}_t(x) \leq S_t(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}_+$.

Demostración. Usamos la demostración conocida del caso $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$, ver [6] y [22]. Para el caso general es suficiente verificar que los operadores $(\mathcal{T}_t^n)_{n\geq 1}$ están definidos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ lo que se hace usando inducción matemática, la condición de afiliación A.2.4, el Lema 1.2.5 y el Lema 2.4.5: Sean un unitario $a \in \mathcal{A}'$, $x \in \mathcal{A}$ y $u, v \in domG$, luego

$$\begin{aligned} \langle u, a\mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)a^* v\rangle &= \langle a^* u, a^* P_t^* x P_t v\rangle + \int_0^t \Phi(\mathcal{T}_s^{(n)}(x))[a^* P_{t-s}u, a^* P_{t-s}v]ds \\ &= \langle u, P_t^* x P_t v\rangle + \int_0^t \Phi(\mathcal{T}_s^{(n)}(x))[P_{t-s}u, P_{t-s}v]ds \\ &= \langle u, \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)v\rangle \end{aligned}$$

es decir, $a\mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)a^* = \mathcal{T}_t^{(n+1)}(x)$ y por ende $\mathcal{T}_t^{(n+1)}(x) \in \mathcal{A}$; como un álgebra de von Neumann es cerrada con las topologías fuerte y $\sigma-$débil, si $x \in \mathcal{A}_+$, entonces $\sup_n \mathcal{T}_t^{(n)}(x) = \mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{A}$, lo que implica que cada $\mathcal{T}_t$ es un operador en $\mathcal{A}$. ■

Observación 2.4.8 *Debido a f) del Teorema 2.4.7, el sdc $\mathcal{T}$ construido mediante (2.10), recibe el nombre de solución mínima de la ecuación 2.8 y se denota con $\mathcal{T}^{\min}$.*

Relación entre el generador infinitesimal de $\mathcal{T}^{\min}$ y el generador formal.

Si denotemos por $\mathcal{L}^{\min}$ al generador infinitesimal de $\left(\mathcal{T}_t^{\min}\right)_{t\geq 0}$, su dominio es el subespacio de todos los $x \in \mathcal{A}$ tales que $\lim_{t\to 0} t^{-1}(\mathcal{T}_t^{\min}(x) - x)$ existe en la topología $\sigma-$débil y

$$\mathcal{L}^{\min}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}_t^{\min}(x) - x}{t}. \tag{2.11}$$

El generador formal $\pounds$ de la ecuación de Lindblad 2.2, es una extensión de $\mathcal{L}^{\min}$ en el siguiente sentido: Si $x \in \mathcal{A}$, entonces $\pounds(x)$ es una forma sesquilineal densamente definida en h y si $x \in dom\mathcal{L}^{\min} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{L}^{\min}(x)$ es un elemento de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, de hecho $\mathcal{L}^{\min}(x) \in \mathcal{A}$ y

$$\langle u, \mathcal{L}^{\min}(x)v\rangle = \pounds(x)[u, v] \quad \forall\ u, v \in domG. \tag{2.12}$$

2.4.3. El resolvente del semigrupo mínimo

Para $x \in \mathcal{A}$ y $\lambda > 0$ definimos sobre $domG \times domG$ las siguientes formas sesqui-lineales

$$\langle u, \mathcal{Q}_\lambda(x)v\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\Phi(x)[P_s u, P_s v]ds \tag{2.13}$$

$$\langle u, \mathcal{P}_\lambda(x)v\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle P_s u, xP_s v\rangle ds \tag{2.14}$$

Lema 2.4.9 *Si se cumple la hipótesis* $\boldsymbol{A}$, *entonces $\langle u, \mathcal{Q}_\lambda(x)v\rangle$ y $\langle v, \mathcal{P}_\lambda(x)v\rangle$ son formas sesqui-lineales de operadores acotados en h completamente positivos que denotaremos, también por $\mathcal{Q}_\lambda(x)$ y $\mathcal{P}_\lambda(x)$.*

Demostración. Usamos la prueba que se conoce ([22], p. 34), del caso $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$. Para el caso general es suficiente verificar que los operadores

$\mathcal{Q}_\lambda$ y $\mathcal{P}_\lambda$ están definidos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, para lo cual usamos la condición de afiliación A.2.4, el Lema 1.2.5 y el Lema 2.4.5 (c), por ejemplo: Sean un unitario $a' \in \mathcal{A}'$, $x \in \mathcal{A}$ y $u, v \in domG$, luego

$$\begin{aligned} \langle u, a\mathcal{Q}_\lambda(x)a^* v\rangle &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(x)[P_t a^* u, P_t a^* v]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(x)[P_t u, P_t v]dt \\ &= \langle u, \mathcal{Q}_\lambda(x)v\rangle, \end{aligned}$$

es decir, $a\mathcal{Q}_\lambda(x)a^* = \mathcal{Q}_\lambda(x)$ y por tanto $\mathcal{Q}_\lambda(x) \in \mathcal{A}$. ■

El *resolvente* $\left(R_\lambda^{\min}\right)_{\lambda>0}$ del *sdc* mínimo $\mathcal{T}_t^{\min}$ está caracterizado [14], por la forma sesqui-lineal

$$\langle u, R_\lambda^{\min}(x)v\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle u, \mathcal{T}_s^{\min}(x)v\rangle ds, \quad u, v \in \mathsf{h} \tag{2.15}$$

y tiene la representación que aparece en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.10 *Si se cumple la hipótesis* **A***, entonces para cada* $\lambda > 0$ *y* $x \in \mathcal{A}$*, tenemos*

$$R_\lambda^{\min}(x) = \sum_{n=0}^\infty \mathcal{Q}_\lambda^n(\mathcal{P}_\lambda(x)) \tag{2.16}$$

donde la serie converge en la topología fuerte de operadores.

Demostración. Es la misma para el caso particular $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$, vea p. 34 de [22] ó p. 55 de [14]. ■

2.5. Conservatividad

En esta sección se introduce la condición **AA** que no es más que la condición **A** (subsección 2.4.1) con una "ligera" modificación y se enuncian algunos criterios para que un *sdc* sea de Markov o conservativo, (Definición 2.2.5).

2.5.1. Conservatividad y semigrupo predual

Teorema 2.5.1 *Si la hipótesis **A** vale, entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

1. $\mathcal{T}_t^{\min}(I) = I$, es decir el semigrupo $\mathcal{T}^{\min}$ es de Markov.

2. $tr\left(\mathcal{T}_{*t}^{\min}(\widehat{\rho})\right) = tr(\rho)$ para todo operador ρ de la clase de traza, donde $\widehat{\rho}$ es su clase de equivalencia en el cociente $\mathscr{T}_1 \,/\mathcal{A}^{\perp}$.

Demostración. Se sigue de

$$tr\left(\mathcal{T}_{*t}^{\min}(\widehat{\rho})\right) = tr\left(\mathcal{T}_{*t}^{\min}(\widehat{\rho})I\right) = tr\left(\rho\mathcal{T}_t^{\min}(I)\right).$$

■

Una condición necesaria para que $\mathcal{T}_t^{\min}$ sea conservativo es que se cumpla

$$\forall u \in domG, \quad \mathcal{L}(I)[u] = \frac{d}{dt}\langle u, \mathcal{T}_t(I)\, u\rangle\bigg|_{t=0} = 0.$$

Desafortunadamente esta hipótesis no es suficiente para que el *sdc* mínimo sea conservativo (vea [14], p. 57). Pero cuando se asume como válida se pueden dar varias caracterizaciones de la conservatividad.

2.5.2. Hipótesis AA

Si en la hipótesis **A** de la subsección 2.4.1 en vez de A.2.3 se pone la condición **A.2.3′**: Para todo $u \in domG$

$$\Phi(I)[u] = -2Re\langle u, Gu\rangle, \tag{A.2.3′}$$

ó equivalentemente

$$\mathcal{L}(I)[u] = 0 \tag{2.17}$$

tenemos la hipótesis **AA**.

Teorema 2.5.2 *Supongamos válida la hipótesis **AA** y sea $\lambda > 0$ fijo. Entonces*

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_\lambda^k(\mathcal{P}_\lambda(I)) + \lambda^{-1}\mathcal{Q}_\lambda^{n+1}(I) = \lambda^{-1}I. \tag{2.18}$$

b) Existe un operador positivo acotado $y \in \mathcal{A}$ tal que

$$R_\lambda^{\min}(I) + \lambda^{-1} y = \lambda^{-1} I. \tag{2.19}$$

c) Para todo $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $\mathcal{L}(x) = \lambda x$, si y sólo si, $\mathcal{Q}_\lambda(x) = x$.

Demostración. Para a) y b) es la misma prueba que se conoce cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathsf{h})$, vea p. 34 de [22] ó p. 57 de [14], pues en el caso general basta observar que $\mathcal{P}_\lambda$ y $\mathcal{Q}_\lambda$ son mapeos en $\mathcal{A}$ y que $I \in \mathcal{A}$.

Para la demostración del inciso c) seguiremos a [14]. Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{L}(x) = \lambda x$, entonces $\forall u, v \in domG$ y $\forall t \geq 0$ tenemos

$$\Phi(x)[P_t u, P_t v] = \lambda \langle P_t u, x P_t v \rangle - \langle P_t u, x G P_t v \rangle - \langle G P_t u, x P_t v \rangle,$$

de donde $e^{-\lambda t}\Phi(x)[P_t u, P_t v] = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\langle P_t u, x P_t v\rangle\right)$ y al tomar la transformada de Laplace,

$$\langle u, \mathcal{Q}_\lambda(x) v \rangle = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\langle P_t u, x P_t v\rangle\right) dt = \langle u, xv \rangle,$$

esta igualdad se extiende a h porque $domG$ es subconjunto denso de h y por ende $\mathcal{Q}_\lambda(x) = x$.

Antes de continuar con la demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema auxiliar *Si vale la hipótesis* **A**, *entonces para todos $u, v \in dom(G^2)$ y todo $x \in \mathcal{A}$ el mapeo $t \longmapsto \Phi(x)[P_t u, P_t v]$ es diferenciable y*

$$\frac{d}{dt}\Phi(x)[P_t u, P_t v] = \Phi(x)[P_t G u, P_t v] + \Phi(x)[P_t u, P_t G v].$$

Demostración. Se sigue de que $\forall u \in dom(G^2)$, $\left\| \frac{P_{t+h}u - P_t u}{h} - G P_t u \right\|_{domG} \longrightarrow 0$, cuando $h \longrightarrow 0$, del Lema 2.4.3 y de la igualdad siguiente:

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi(x)[P_{t+h}u, P_{t+h}v] - \Phi(x)[P_t u, P_t v]}{h} \\ &= \Phi(x)[\frac{P_{t+h}u - P_t u}{h}, P_{t+h}v] + \Phi(x)[P_t u, \frac{P_{t+h}v - P_t v}{h}]. \end{aligned}$$

Continuemos con la demostración de c). Falta ver que si $\mathcal{Q}_\lambda(x) = x$, entonces $\mathcal{L}(x) = \lambda x$. Por el lema auxiliar para $u, v \in dom(G^2)$ tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} e^{-\lambda t}\Phi(x)[P_t u, P_t v] &= \\ e^{-\lambda t}\left\{\lambda\Phi(x)[P_t u, P_t v] - \Phi(x)[P_t G u, P_t v] - \Phi(x)[P_t u, P_t G v]\right\} &= \\ e^{-\lambda t}\left(\Phi(x)[P_t\left(\frac{\lambda}{2} - G\right)u, P_t v] + \Phi(x)[P_t u, P_t\left(\frac{\lambda}{2} - G\right)v]\right); \end{aligned}$$

además se puede verificar que

$$\Phi(x)[u,v] = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} \Phi(x)[P_t u, P_t v]\, dt;$$

al combinar y desarrollar estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(x)[u,v] &= \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt} e^{-\lambda t} \Phi(x)[P_t u, P_t v]\, dt \\
&= \langle \left(\frac{\lambda}{2} - G\right) u, \mathcal{Q}_\lambda (x)\, v\rangle + \langle u, \mathcal{Q}_\lambda (x) \left(\frac{\lambda}{2} - G\right) v\rangle \\
&= \langle u, \lambda x v\rangle - \langle Gu, xv\rangle - \langle u, xGv\rangle,
\end{aligned}$$

esta igualdad se extiende a todo h debido a que *dom* (G^2) un subespacio denso en h, (véase teorema 2.7 de [35]). ■

Teorema 2.5.3 ***(Criterios de conservatividad)*** *Si la hipótesis* ***AA*** *se cumple, las siguientes condiciones son equivalentes:*
a) El sdc mínimo $\mathcal{T}^{\min}$ *es conservativo.*
b) $s - \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_\lambda^n (I) = 0$ *para algún* $\lambda > 0$.
c) $I \in dom\mathcal{L}^{\min}$ *y* $\mathcal{L}^{\min}(I) = 0$, *donde* $\mathcal{L}^{\min}$ *es el generador infinitesimal de* $\mathcal{T}^{\min}$.
d) No existe $x \in \mathcal{A}$, *distinto de cero que solucione la ecuación*

$$\mathcal{Q}_\lambda (x) = x.$$

e) No existe $x \in \mathcal{A}$, *distinto de cero que solucione la ecuación*

$$\mathcal{L}(x) = \lambda x.$$

Demostración. Equivalencia entre a) y b):
Usando (2.19) vemos que $\mathcal{T}_t^{\min}(I) = I\ \forall t \geq 0$, si y sólo si $R_\lambda^{\min}(I) = \lambda^{-1} I$, si y sólo si $y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_\lambda^n(I) = 0$.
Equivalencia entre a) y c):
La condición a) implica directamente la condición c). Recíprocamente, si c) es válida y usamos la definición de resolvente, se cumple

$$R_\lambda^{\min}(I) = \left(\lambda I - \mathcal{L}^{\min}(I)\right)^{-1} = \lambda^{-1} I.$$

Observe que la afirmación b) puede formularse sustituyendo la frase "*para algún* $\lambda > 0$" por "*para todo* $\lambda > 0$."

Equivalencia entre b) y d):

b) $\Longrightarrow$ d). Si $x \in \mathcal{A}$ es cualquier punto fijo de $\mathcal{Q}_\lambda$, entonces

$$\mathcal{Q}_\lambda (x^*) = \mathcal{Q}_\lambda (x)^* = x^*,$$

y $x + x^*$, $i(x - x^*)$ también son puntos fijos de $\mathcal{Q}_\lambda$. Al aplicar repetidamente $\mathcal{Q}_\lambda$ a las desigualdades

$$-2\|x\|_\infty I \leq x + x^* \leq 2\|x\|_\infty I, \quad -2\|x\|_\infty I \leq i(x - x^*) \leq 2\|x\|_\infty I$$

tenemos

$$-2\|x\|_\infty \mathcal{Q}_\lambda^n(I) \leq x + x^* \leq 2\|x\|_\infty \mathcal{Q}_\lambda^n(I),$$
$$-2\|x\|_\infty \mathcal{Q}_\lambda^n(I) \leq i(x - x^*) \leq 2\|x\|_\infty \mathcal{Q}_\lambda^n(I)$$

y haciendo tender n a infinito se obtiene que $x = 0$.

d) $\Longrightarrow$ b). Si la sucesión decreciente $(\mathcal{Q}_\lambda^n(I))_n$ converge fuertemente al operador x, entonces

$x = s - \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{Q}_\lambda^n(I) = w - \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{Q}_\lambda(\mathcal{Q}_\lambda^n(I)) = \mathcal{Q}_\lambda\left(w - \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{Q}_\lambda^n(I)\right) =$ $\mathcal{Q}_\lambda(x)$ y por tanto, $x = 0$.

Equivalencia entre d) y e): Es inmediata de la condición (c) del Teorema 2.5.2. ■

Continuamos con otras dos condiciones equivalentes para que un *sdc* sea de Markov. La primera se debe a Davies [11] y la otra es de García-Quezada [24] y Fagnola-Rebolledo [16].

Antes, recordemos que si T es un operador lineal cerrado, se dice que $\mathcal{E} \subseteq domT$ es una *esencia* ("core" en inglés), de T si para cada $u \in domT$ existe una sucesión $(u_n)_n$ en $\mathcal{E}$ tal que $u_n \longrightarrow u$ y $Tu_n \longrightarrow Tu$.

Proposición 2.5.4 *Supongamos válida la hipótesis* $\boldsymbol{AA}$. *Entonces el subespacio lineal* $\hat{\mathcal{V}}$ *de* $\mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^\perp$ *generado por las clases de equivalencia de los proyectores*

$$|u\rangle\langle v| + \mathcal{A}^\perp \quad u, v \in domG$$

está contenido en el dominio del generador infinitesimal $\mathcal{L}_*$ *del semigrupo predual*

$$\mathcal{S}_t^{\min} : \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^\perp \longrightarrow \mathcal{T}_1 / \mathcal{A}^\perp$$

de $\mathcal{T}_t^{\min} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *y las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) El sdc mínimo $\mathcal{T}_t^{\min}$ *es de Markov.*

2) El subespacio lineal $\hat{\mathcal{V}}$ *es una esencia de* $\mathcal{L}_*$.

Demostración. Para cada pareja $u, v \in domG$ la ecuación (2.7) se puede escribir como $tr\left(\mathcal{T}_t^{\min}(x)\,|v\rangle\langle u|\right) = tr\left(x\,|v\rangle\langle u|\right) + \int_0^t \pounds(\mathcal{T}_s^{\min}(x))[u,v]ds$ ó equivalentemente usando (Du) de la subsección 1.2.2, como

$$tr\left(x\mathcal{S}_t^{\min}\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right) - tr\left(x\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right) = \int_0^t \pounds(\mathcal{T}_s^{\min}(x))[u,v]ds;$$

el integrando es continuo por el Corolario 2.4.4 por lo que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}tr\left[x\left(\mathcal{S}_t^{\min}\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right) - \left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right)\right] = \pounds(x)[u,v],$$

pero los generadores fuerte y débil de $\mathcal{S}^{\min}$ coinciden ([35], Teo. 1.3), lo que nos permite concluir que $\forall u, v \in domG$, $\forall x \in \mathcal{A}$

$$|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp} \in dom\mathcal{L}_* \text{ y } tr\left[x\mathcal{L}_*\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right] = \pounds(x)[u,v].$$

Demostraremos ahora la equivalencia de *1)* y *2)*.

1) $\Longrightarrow$ **2)** Se sabe que el subespacio lineal generado por los proyectores

$$|u\rangle\langle v|, \quad u, v \in domG$$

es denso en el espacio de Banach $(\mathscr{T}_1, \|\cdot\|_1)$, de donde se sigue que $\hat{\mathcal{V}}$ es denso en el espacio $\left(\mathscr{T}_1/\mathcal{A}^{\perp}, \|\cdot\|_{\dot{1}}\right)$ luego, $\hat{\mathcal{V}}$ es una *esencia* de $\mathcal{L}_*$ si y sólo, si el anulador (en el sentido de espacios de Banach) $\left((\lambda - \mathcal{L}_*)\left(\hat{\mathcal{V}}\right)\right)^{\perp} = \left\{\Lambda \in \left(\mathscr{T}_1/\mathcal{A}^{\perp}\right)^* \mid \Lambda b = 0\ \forall b \in (\lambda - \mathcal{L}_*)\left(\hat{\mathcal{V}}\right)\right\}$ es trivial para algún $\lambda > 0$, vea [28] problema 5.19 p. 166. Pero $\Lambda \in \left((\lambda - \mathcal{L}_*)\left(\hat{\mathcal{V}}\right)\right)^{\perp}$ implica que $\Lambda(\hat{\rho}) = tr(\rho a)$ para algún $a \in \mathcal{A}$ (vea la subsección 1.2.2), por tanto

$$0 = \Lambda\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right) = tr\left[a(\lambda - \mathcal{L}_*)\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right]$$

equivale a $\pounds(a)[u,v] = \langle u, \lambda a v\rangle$. Dado que $\mathcal{T}^{\min}$ es de Markov, $a = 0$ y $\Lambda \equiv 0$.

2) $\Longrightarrow$ **1)** Debido a la hipótesis **AA**, $0 = \pounds(I)[u,v] = tr\left[I\mathcal{L}_*\left(|v\rangle\langle u| + \mathcal{A}^{\perp}\right)\right]$ y de aquí

$$tr\mathcal{L}_*(\hat{\rho}) = 0, \quad \forall\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{V}}.$$

Siendo $\hat{\mathcal{V}}$ una esencia de $\mathcal{L}_*$ la igualdad anterior se extiende $\forall\hat{\rho} \in dom\mathcal{L}_*$ y por tanto

$$\frac{d}{dt}tr\left(\mathcal{S}_t^{\min}(\hat{\rho})\right) = tr\mathcal{L}_*\left(\mathcal{S}_t^{\min}(\hat{\rho})\right) = 0,$$

de donde se deduce

$$tr\left(\mathcal{S}_t^{\min}(\hat{\rho})\right) = tr\hat{\rho}, \quad \forall \hat{\rho} \in \mathscr{T}_1/\mathcal{A}^{\perp}$$

debido a la densidad de $\hat{\mathcal{V}}$ en el espacio$\left(\mathscr{T}_1 / \mathcal{A}^{\perp}, \|\cdot\|_1\right)$. ■

Proposición 2.5.5 *Supongamos válida la hipótesis* ***AA****. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. El sdc mínimo $\mathcal{T}_t^{\min} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ es de Markov.

2. El dominio del generador infinitesimal $\mathcal{L}^{\min} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ del sdc $\mathcal{T}_t^{\min}$ está caracterizado por

$$dom\mathcal{L}^{\min} = \{x \in \mathcal{A} : \pounds(x) \text{ es acotada con la norma } \|\cdot\|\}.$$

Demostración. 1)$\Longrightarrow$2) Si $x \in dom\mathcal{L}^{\min}$, entonces $\mathcal{L}^{\min}(x)$ es un operador acotado y por (2.12),

$$|\pounds(x)[u,v]| = \left|\langle u, \mathcal{L}^{\min}(x)v\rangle\right| \leq \left\|\mathcal{L}^{\min}(x)\right\|_{\infty} \|u\| \|v\|,$$

es decir $dom\mathcal{L}^{\min} \subseteq \{x \in \mathcal{A} : \pounds(x)$ es acotada con la norma $\|\cdot\|\}$.

Para la contención opuesta, sea $\mathcal{L}_*^{\min}$ el generador del semigrupo predual $\mathcal{S}^{\min}$ y sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $\pounds(x)[\cdot,\cdot]$ es continua con la norma, entonces existe $y \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tal que

$$\pounds(x)[u,v] = \langle u, yv\rangle \quad \forall u, v \in domG.$$

Todo $\hat{\rho} \in \hat{\mathcal{V}}$ se puede escribir en la forma $\left(\sum_{j=1}^{n} |u_j\rangle\langle v_j|\right) + \mathcal{A}^{\perp}$ con $u_j, v_j \in domG$, por lo cual

$$\begin{aligned} tr\left[x\mathcal{L}_*^{\min}(\hat{\rho})\right] &= \sum_{j=1}^{n} \pounds(x)[v_j, u_j] = \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, yu_j\rangle \\ &= tr\left[y\left(\sum_{j=1}^{n} |u_j\rangle\langle v_j|\right)\right] = tr(y\hat{\rho}) \end{aligned}$$

de donde $\left|tr\left[x\mathcal{L}_*^{\min}(\hat{\rho})\right]\right| = |tr(y\hat{\rho})| \leq \|y\|_{\infty} \|\hat{\rho}\|_1$; desigualdad también válida para $\hat{\rho} \in dom\mathcal{L}_*^{\min}$ porque $\hat{\mathcal{V}}$ es una esencia de $\mathcal{L}_*^{\min}$. Entonces, por definición $x \in dom\left(\mathcal{L}_*^{\min}\right)^*$. Se puede demostrar que $\left(\mathcal{L}_*^{\min}\right)^* = \mathcal{L}^{\min}$ y de aquí concluimos que $x \in dom\mathcal{L}^{\min}$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Si $dom\mathcal{L}^{\min} = \{x \in \mathcal{A} : \pounds(x)$ es acotada con la norma $\|\cdot\|\}$, entonces $I \in dom\mathcal{L}^{\min}$ y **1)** se sigue del Teorema 2.5.3 ■

2.6. El álgebra de las rotaciones irracionales

Para aplicar nuestros resultados, en esta sección discutimos un ejemplo aparecido en [25], donde se trata con un álgebra de von Neumann que no es ni conmutativa ni todo $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, con $\mathsf{h}=L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Sea θ un irracional fijo. Consideremos los unitarios U, $V \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ definidos por $(Uf)(s) = f(s+1)$, $(Vf)(s) = e^{2\pi is\theta}f(s)$. Sea $\mathcal{A}_\theta$ la C^*–álgebra generada por U y V, esto es, $\mathcal{A}_\theta$ es la intersección de todas las C^*–álgebras que contienen a U y V. Se sabe [9] que el doble conmutante $\mathcal{A}_\theta''$ es una sub-álgebra propia de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ y no es conmutativa pues se cumple la igualdad $UV = e^{2\pi i\theta}VU \in \mathcal{A}_\theta \subseteq \mathcal{A}_\theta''$.

Sea R el operador auto-adjunto definido por $(Rf)(s) = -sf(s)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tal que $sf(s) \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Consideremos al operador densamente definido $G := -\frac{1}{2}R^*R = -\frac{1}{2}R^2$ con dominio $domG = domR^2$, (contiene a las funciones de soporte compacto).

Para cada $x \in \mathcal{A}_\theta''$, definimos la forma sesqui-lineal

$$\Phi(x)[u,v] = \langle Ru, xRv\rangle, \qquad u,v \in domG$$

y verificamos a continuación que satisface la hipótesis **AA**.

A.1. G es un operador densamente definido en h, afiliado a $\mathcal{A}_\theta''$ y es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $(P_t)_{t\geq 0}$ en h :

Lo último se justifica con el teorema de Hille-Yosida. Veamos que el operador G está afiliado con $\mathcal{A}_\theta''$. En primer término, $V^n = e^{2\pi in\theta s} \in \mathcal{A}_\theta \subseteq \mathcal{A}_\theta''$ y como θ es irracional se puede demostrar que para α, $s \in \mathbb{R}$, existe una subsucesión tal que $e^{2\pi in_k\theta s} \longrightarrow e^{i\alpha s}$ con la topología usual de $\mathbb{C}$, de donde se infiere que el operador de multiplicación $M_\alpha \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tal que $(M_\alpha f)(s) = e^{i\alpha s}f(s)$ está en la cerradura fuerte de $\mathcal{A}_\theta''$, es decir $M_\alpha \in \mathcal{A}_\theta''$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Después usando aproximaciones adecuadas se puede demostrar la contención

$$\mathcal{M} = \{M_f : \mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{h} \mid M_f g = fg,\ f \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\} \subseteq \mathcal{A}_\theta''$$

y por tanto $\mathcal{A}_\theta''' \subseteq \mathcal{M}'$, pero $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ (vea [12] ó [10]), y concluimos que $\mathcal{A}_\theta' \subseteq \mathcal{M}$ lo que permite verificar fácilmente la afiliación del operador G con el álgebra de von Neumann $\mathcal{A}_\theta''$.

A.2

A.2.1 Φ es lineal en la variable operador, sesqui-lineal en las variables vectoriales y es completamente positiva: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_i \in domG$, $x_i \in \mathcal{A}_\theta''$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Phi(x_i^* x_j)[u_i, u_j] = \sum_{i,j} \langle Ru_i, x_i^* x_j Ru_j \rangle = \left\langle \sum_i x_i Ru_i, \sum_j x_j Ru_j \right\rangle \geq 0$$

A.2.2 Para $u \in domG$ fijo, $\Phi(\cdot)[u]$ es una funcional lineal normal en $\mathcal{A}_\theta''$. En efecto, si $x \in \mathcal{A}$, $\Phi(x)[u] = \langle Ru, xRu \rangle = tr\ x(|Ru\rangle\langle Ru|)$ y por ende, $\Phi(\cdot)[u] \in (\mathcal{A}_\theta'')_*$ por lo que es normal (ver subsección 1.2.2).

A.2.3$'$ Para todo $u \in domG$, $\Phi(I)[u] = -2Re\langle u, Gu\rangle$:

$-2Re\langle u, Gu\rangle = -2Re\langle u, -\frac{1}{2}R^*Ru\rangle = Re\langle u, R^*Ru\rangle = \Phi(I)[u]$.

A.2.4 La trasformación Φ satisface la condición de afiliación: $\forall$ unitario $a' \in \mathcal{A}_\theta'$, $a' domG \subseteq domG$ y $\forall x \in \mathcal{A}_\theta''$

$$\Phi(x)[a'u, a'v] = \Phi(x)[u, v], \quad \forall\, u, v \in domG,$$

se deduce de que $\mathcal{A}_\theta' \subseteq \mathcal{M}$, también implica que R está afiliado a $\mathcal{A}_\theta''$. Con esto hemos terminado de verificar la hipótesis **AA**.

Capítulo 3

Semigrupos dinámicos cuánticos y sistemas de espines

3.1. Introducción

En [2], L. Accardi y S. Kozyrev obtuvieron una clase de generadores de semigrupos dinámicos cuánticos (*sdc*) para sistemas de espines usando el método del límite estocástico [3]. Suponiendo que los coeficientes de estos operadores satisfacen una *condición de rango finito*, demostraron que estos operadores satisfacen las hipótesis del teorema de Lumer-Philips y que son generadores de un *sdc* de Markov. El objetivo principal de este capítulo es probar que las condiciones necesarias y suficientes del Teorema de Lumer-Philips también se cumplen con alguna de nuestras dos hipótesis, menos restrictivas, expresadas en las condiciones (3.4) y (3.5) que llamamos *decaimiento polinomial* y *decaimiento exponencial*, respectivamente.

La clase de generadores que consideraremos actúan en una UHF C^*-álgebra (Uniformly hyperfinite C^*-algebra) que se define como la C^*-completez del producto tensorial infinito $\otimes_{j\in\mathbb{Z}^d} M_N(\mathbb{C})$, donde N y d son enteros positivos fijos, $M_N(\mathbb{C})$ denota al álgebra de las matrices complejas de $N \times N$. Más precisamente, para un subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, con $|\Lambda|$ denotamos su cardinalidad y para un elemento $j = (j_1, \cdots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$, sea $|j| = max\{|j_i| : i = 1, \cdots, d\}$. Para la sucesión creciente de subconjuntos finitos $\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$, $\Lambda_n = \{j : |j| \leq n\} \subset \mathbb{Z}^d$, sea $\mathcal{A}_n = \otimes_{j\in\Lambda_n} M_N(\mathbb{C})$ y $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}I$. Es claro que $\mathcal{A}_n = M_{k_n}(\mathbb{C})$, donde $k_n = N^{|\Lambda_n|}$, $|\Lambda_n| = (2n+1)^d$ y $\mathcal{A}_n$ está isométricamente encajado en $\mathcal{A}_{n+1}$ por medio de la aplicación $a \to a \otimes I$, $a \in \mathcal{A}_n$, donde

I es la identidad de $M_{N^{(2n+3)^d-(2n+1)^d}}(\mathbb{C})$. La sucesión $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 1}$ es una familia dirigida de C^*-álgebras, i.e. para cualquier $n < m$ existe un isomorfismo isométrico $i_{n,m}$ de $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{A}_m$ tal que $i_{n,m} = i_{k,m} \circ i_{n,k}$ cuando $n < k < m$. Existe una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ universal llamada el límite inductivo de la familia dirigida $(\mathcal{A}_n, i_{n,m})$ y una familia de isomorfismos isométricos i_n de $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{A}$ tales que $i_n = i_m \circ i_{n,m}$ y $\mathcal{A} = \cup_{n\geq 1} i_n(\mathcal{A}_n)$. Se tiene que $\mathcal{A} = \overline{\cup_{n\geq 1}\mathcal{A}_n}$, vea por ejemplo la Proposición 2.3 en [26], esta C^*-álgebra se llama la UHF C^*-álgebra asociada con la familia $(\mathcal{A}_n, i_{n,m})$.

3.2. Una condición de rango finito

En [2] L. Accardi y S. Kozyrev introdujeron una nueva caracterización infinitesimal de flujos completamente positivos no necesariamente de homomorfismos. Hablando sin mucha precisión, este nuevo enfoque asocia a cualquier flujo CP y fuertemente continuo en una UHF C^*-álgebra $\mathcal{A}$ un semigrupo CP y fuertemente continuo en $\mathcal{B} = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ no necesariamente conservativo o Markoviano. Esto nos da cuatro semigrupos fuertemente continuos en $\mathcal{A}$. Las características infinitesimales del flujo son los generadores de estos semigrupos. Así el estudio de flujos de Markov se reduce al estudio de cuatro semigrupos en $\mathcal{A}$. Para ver aplicaciones y más sobre esta técnica véase [32, 44, 33].

En particular ellos aplicaron este método para probar la existencia del flujo de volumen infinito asociado a una clase (cuasi-genérica) de sistemas de espines cuánticos en un retículo puntual (point lattice) de dimensión arbitraria. Siendo más precisos, en este caso el generador formal del semigrupo CP en la C^*-álgebra $\mathcal{B} = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ se expresa como

$$S = \begin{pmatrix} \theta_0 & \theta_0 + \theta_{-1} \\ \theta_0 + \theta_1 & \theta_0 + \theta_1 + \theta_{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde los mapeos infinitesimales θ_k, $k = -1, 0, 1$, son operadores en $\mathcal{A}$ y la matriz S actúa en $\mathcal{B}$ entrada a entrada es decir, para $x = (x_{ij})$, $S(x) = (S_{ij}(x_{ij}))$, $1 \leq i, j \leq 2$.

El operador S está densamente definido y genera un *sdc* de Markov en $\mathcal{B}$ si el rango de $I - \lambda S$ es denso en $\mathcal{B}$, (Teorema 1.82 de [2]); y esto último se cumple ([2], Teorema 1.92), cuando los coeficientes de S satisfacen una *condición de rango finito*.

El operador S también se puede escribir en la forma (Proposición 1.85 de [2]),

$$S(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha \delta_\alpha(x) b_\alpha, \quad x \in \mathcal{B} \tag{3.2}$$

con a_α, b_α, $d_\alpha \in \mathcal{B}$ y $\delta_\alpha(x) := [d_\alpha, x] = d_\alpha x - x d_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}^d$.

Diremos que S en la forma (3.2) satisface una *condición de rango finito* si

(i) Para toda $\alpha \in \mathcal{I}$ existe $\Omega_\alpha \subset \mathcal{I}$, tal que $\alpha \in \Omega_\alpha$ y $|\Omega_\alpha| \leq B_1$ $\forall \alpha$; además

$$\beta \in \Omega_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Omega_\beta.$$

(ii) Para toda $\beta \notin \Omega_\alpha$

$$[d_\alpha, d_\beta] = [d_\alpha, a_\beta] = [d_\alpha, b_\beta] = [a_\alpha, b_\beta] = 0,$$

adicionalmente pedimos que para algún real $C > 0$,

$$\sup_\alpha \|a_\alpha\|, \|b_\alpha\|, \|d_\alpha\| \leq C.$$

Luego usando el Teorema de Lumer-Phillips, Accardi y Kozyrev obtuvieron que S genera un *sdc* de Markov en $\mathcal{B}$. En la siguiente sección obtendremos la misma conclusión si los coeficientes de S satisfacen cualquiera de las dos condiciones menos restrictivas (3.4) y (3.5) que llamamos respectivamente, *decaimiento polinomial* y *decaimiento exponencial* de los coeficientes.

Con C y la notación de arriba tenemos

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta](x) := \delta_\alpha(\delta_\beta(x)) - \delta_\beta(\delta_\alpha(x)) = [d_\alpha, \delta_\beta(x)] - [d_\beta, \delta_\alpha(x)]$$

y en consecuencia $\|[\delta_\alpha, \delta_\beta](x)\| \leq 2C(\|\delta_\alpha(x)\| + \|\delta_\beta(x)\|)$. Usando χ_{Ω_α} para denotar a la función indicadora del conjunto Ω_α y la condición de rango finito tenemos para cada par $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$,

$$\|[\delta_\alpha, \delta_\beta](x)\| \leq 2C\chi_{\Omega_\alpha}(\beta)(\|\delta_\alpha(x)\| + \|\delta_\beta(x)\|). \tag{3.3}$$

3.3. Decaimientos polinomial y exponencial

La desigualdad 3.3 motiva nuestras siguiente condiciones de *decaimiento polinomial* y *decaimiento exponencial* de los coeficientes.

Definición 3.3.1 *El operador S en la forma (3.2) satisface una condición de decaimiento polinomial, si existe un entero positivo fijo n tal que para cada par $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$,*

$$\| [\delta_\alpha, \delta_\beta] (x) \| \leq \frac{1}{(1+|\alpha-\beta|)^n} (\|\delta_\alpha (x)\| + \|\delta_\beta (x)\|) . \tag{3.4}$$

Definición 3.3.2 *El operador S en la forma (3.2) satisface una condición de decaimiento exponencial, si existe una constante positiva k tal que para cada par $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$,*

$$\| [\delta_\alpha, \delta_\beta] (x) \| \leq e^{-k|\alpha-\beta|} (\|\delta_\alpha (x)\| + \|\delta_\beta (x)\|) . \tag{3.5}$$

Lema 3.3.3 *Si asumimos la condición (3.4) con $n > 2d$, entonces existe un operador $\Lambda = (\Lambda_{\alpha,\beta})$ tal que*

$$\sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|[\delta_\alpha, \delta_\beta](x)\| \leq \frac{1}{3} \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\beta} \|\delta_\beta(x)\|, \tag{3.6}$$

y para cada β,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\beta} < \zeta(p) + \frac{K}{p-1} \zeta(p-1) \tag{3.7}$$

donde $\zeta(p)$ es la función zeta de Riemann, $p-1 := n-2d+1$ y K es una constante que depende únicamente de la dimensión d.

Demostración. Usando (3.4), tenemos

$$\|[\delta_\alpha, \delta_\beta] (x)\| \leq \frac{1}{(1+|\alpha-\beta|)^n} \sum_{\{\gamma\in\mathcal{I}:|\alpha-\gamma|\leq|\alpha-\beta|\}} \|\delta_\gamma (x)\| ,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|[\delta_\alpha, \delta_\beta] (x)\| &\leq \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \sum_{\{\gamma\in\mathcal{I}:|\alpha-\gamma|\leq|\alpha-\beta|\}} \frac{1}{(1+|\alpha-\beta|)^n} \|\delta_\gamma (x)\| \\
&= \frac{1}{3} \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \sum_{\{\beta\in\mathcal{I}:|\alpha-\beta|\geq|\alpha-\gamma|\}} \frac{3}{(1+|\alpha-\beta|)^n} \|\delta_\gamma (x)\| \\
&= \frac{1}{3} \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\gamma} \|\delta_\gamma (x)\| ,
\end{aligned}$$

donde

$$\Lambda_{\alpha,\gamma} := \sum_{\{\beta\in\mathcal{I}:|\alpha-\beta|\geq|\alpha-\gamma|\}} \frac{3}{(1+|\alpha-\beta|)^n}. \tag{3.8}$$

Ahora tenemos que

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \sum_{\{\gamma\in\mathcal{I}:|\alpha-\gamma|\geq|\alpha-\beta|\}} \frac{3}{(1+|\alpha-\gamma|)^n} \leq \sum_{s\geq 0} |A_s| \frac{3}{(1+|\alpha-\beta|+s)^n}$$

donde para $s \geq 0$, $s \in \mathbb{Z}$,

$$A_s := \{\gamma \in \mathcal{I} : |\alpha-\beta| + s \leq |\alpha-\gamma| < |\alpha-\beta| + (s+1)\}.$$

Poniendo $|\alpha-\beta| = t$, obtenemos que

$$|A_s| \leq 2^d \left((t+s+1)^d - (t+s)^d\right) \leq d2^d(t+s+1)^{d-1}. \tag{3.9}$$

Por lo tanto

$$\Lambda_{\alpha,\beta} \leq \sum_{s\geq 0} d2^d(t+s+1)^{d-1} \frac{3}{(1+t+s)^n} = \sum_{s\geq 0} \frac{3\cdot d\cdot 2^d}{(1+t+s)^{n-d+1}}.$$

Fijando $\beta \in \mathcal{I}$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\beta} &\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{s\geq 0} \frac{3\cdot d\cdot 2^d}{(1+|\alpha-\beta|+s)^{n-d+1}} \leq \sum_t \sum_s d\cdot 2^d t^{d-1} \frac{3\cdot d\cdot 2^d}{(1+t+s)^{n-d+1}} \\
&\leq \sum_t \sum_s \frac{3\cdot (2d)^{2d}}{(1+t+s)^{n-d+1-(d-1)}} = K \sum_t \sum_{s\geq t+1} \frac{1}{s^{n-2d+2}} \\
&\leq K \sum_t \left(\frac{1}{(t+1)^p} + \sum_{s\geq t+2} \frac{1}{s^p} \right) \leq K \sum_t \frac{1}{(t+1)^p} + K \sum_t \frac{1}{(p-1)\,(t+1)^{p-1}} \\
&= \sum_{t\geq 1} \frac{1}{t^p} + \frac{K}{p-1} \sum_{t\geq 1} \frac{1}{t^{p-1}} = \zeta(p) + \frac{K}{p-1} \zeta(p-1),
\end{aligned}$$

donde $K = 3\cdot(2d)^{2d}$ y $p = n - 2d + 2$. Para garantizar la convergencia de las series en los cálculos anteriores requerimos que $p - 1 > 1$ ó equivalentemente $n > 2d$. ∎

Observación 3.3.4 *De manera similar podemos probar que la condición de decaimiento exponencial 3.5 también es suficiente para obtener el resultado del Lema 3.3.3. Más precisamente podemos probar que la estimación (3.6) es válida con*

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \sum_{\{\gamma \in \mathcal{I}: |\alpha-\gamma| \geq |\alpha-\beta|\}} 3e^{-k|\alpha-\gamma|} \leq \sum_{s \geq 0} 3|A_s| e^{-k(|\alpha-\beta|+s)} \tag{3.10}$$

donde A_s es como en (3.9). En el caso $d = 3$ tenemos,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\beta} \leq \frac{72}{1-e^{-k}} \sum_{m=2}^{4} F(-m, e^{-k}), \tag{3.11}$$

donde $F(m,z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^m}$ es la función polilogaritmo, véase la referencia [1]. Una estimación similar puede obtenerse para cualquier otro $d \geq 1$.

Observación 3.3.5 *Hablando informalmente, las condiciones (3.4) y (3.5) significan que el conmutador $[\delta_\alpha, \delta_\beta]$ es pequeño en la norma inducida por la gráfica de δ_α y δ_β.*

Las estimaciones (3.7) y (3.11) implican que el operador $\Lambda = (\Lambda_{\alpha,\beta})$ es un operador acotado en $l^1(\mathcal{I})$, al usar el siguiente resultado bien conocido (véase p. 169 de [2], ó p. 98 de [29] ó [27]).

Lema 3.3.6 *Un operador T es acotado en $l^1(\mathcal{I})$ y $\|T\| \leq M$, si para toda $\beta \in \mathcal{I}$ existe un real $M > 0$ tal que*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |T_{\alpha,\beta}| < M.$$

Demostración. Si $(y_\alpha)_\alpha \in l^1(\mathcal{I})$, entonces

$$\|Ty\|_1 = \sum_\alpha \left| \sum_\beta T_{\alpha,\beta} y_\beta \right| \leq \sum_\alpha \sum_\beta |T_{\alpha,\beta}| \, |y_\beta| = \sum_\beta |y_\beta| \sum_\alpha |T_{\alpha,\beta}| \leq \|y\|_1 M.$$

■

Estamos listos para enunciar nuestras nuevas aportaciones y principales resultados de este capítulo.

Teorema 3.3.7 *Sea* $S(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} a_\alpha \delta_\alpha(x) b_\alpha$ *con* $\delta_\alpha(x) := [d_\alpha, x]$, a_α, b_α, d_α *operadores acotados uniformemente en* $\mathcal{B}$. *Supongamos que para* $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ *son válidas las condiciones 3.4 (respectivamente 3.5) y que*

$$\|\delta_\alpha(a_\beta)\|, \|\delta_\beta(b_\alpha)\| \leq \frac{1}{3}\Lambda_{\alpha,\beta} \tag{3.12}$$

con $\Lambda_{\alpha,\beta}$ *como en (3.8) (respectivamente 3.10), entonces*

$$\|S\delta_\alpha(x) - \delta_\alpha S(x)\| \leq \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \Lambda_{\alpha,\beta} \|\delta_\beta(x)\|.$$

Demostración. Como vimos arriba, nuestras hipótesis implican que

$$\sum_\beta \|[\delta_\alpha, \delta_\beta](x)\| \leq \frac{1}{3}\sum_\beta \Lambda_{\alpha,\beta} \|\delta_\beta(x)\|;$$

esta desigualdad junto con (3.12) y el Lema 1.88 (p. 165, [2]) nos dan la conclusión. ■

Corolario 3.3.8 *Bajo los supuestos del último teorema, la clausura de* S *genera un sdc de Markov* P_t *en* $\mathcal{B}$.

Demostración. Siguiendo la demostración del Teorema 1.92, p. 169 en [2], se puede probar que el rango de $\lambda I - S$ es denso para $\lambda < \left(\zeta(p) + \frac{K}{p-1}\zeta(p-1)\right)^{-1}$ en el caso de decaimiento polinomial ó $\lambda < \left(\frac{72}{1-e^{-k}} \sum_{m=2}^{4} F(-m, e^{-k})\right)^{-1}$ con $d = 3$ en el caso de decaimiento exponencial. Se demostró en [2] que S es un operador disipativo densamente definido; consecuentemente por el Teorema de Lumer-Phillips, genera un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en $\mathcal{B}$.

La positividad completa de P_t se sigue del Teorema 1.82 de [2]. ■

Capítulo 4

El semigrupo cuántico de exclusión asimétrica

4.1. Introducción

En este capítulo discutimos el semigrupo cuántico de exclusión asimétrica que surge de un modelo físico de conductividad eléctrica en una retícula (lattice) deducido por L. Accardi y S. Kozyrev [2], a partir del límite estocástico de un sistema general de espines interactuando con un campo de bosones. Para detalles adicionales concernientes al límite estocástico vea [3].

Después de introducir una representación adecuada del generador infinitesimal, encontramos condiciones suficientes (Proposición 4.3.1) (4.6) para la existencia del SCM, damos una condición suficiente (4.20), para la existencia de estados diagonales (o clásicos) estacionarios del modelo y probamos la existencia de una infinidad de ellos parametrizados con los números reales positivos. También demostramos que la envolvente convexa cerrada de dichos estados está contenida en el conjunto de estados invariantes del SCM, y que cualquier elemento de la envolvente convexa satisface una condición de balance detallado cuántico. Además demostramos que cualquier estado inicial es conducido por el SCM de exclusión asimétrica a un estado de equilibrio.

El generador formal de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan del SCM asociado con el modelo actúa en una C^*-álgebra uniformemente hiperfinita (o UHF C^*-álgebra por sus siglas en inglés, vea [4]). Para simplificar los cálculos, introducimos una representación del generador (4.4) actuando en el álgebra de todos los operadores acotados en el producto tensorial infinito $\mathsf{h} = \otimes_{n\geq 1}^{\varphi}\mathbb{C}^2$, estabilizado con respecto a la sucesión $\varphi = (\varphi_n)_{n\geq 1}$, $\varphi_n = |0\rangle$, $\forall n \geq 1$, donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

La restricción del generador a la subálgebra diagonal (conmutativa) tiene la forma

$$\sum_{\eta_r=0,\eta_s=1} \gamma_{rs}\big(a_{rs}^{+}\rho(\eta_{rs}) - a_{rs}^{-}\rho(\eta)\big),$$

donde $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, η_{rs} están definidos abajo por (4.1), γ_{rs}, a_{rs}^{+} y a_{rs}^{-} son números positivos. En el caso $a_{rs}^{+} = a_{rs}^{-}$ (que corresponde a temperatura infinita, i.e., $\beta = 0$, ver Observación 4.5.5) el generador de arriba coincide con el generador de un proceso de exclusión clásico, cuyos estados invariantes fueron estudiados por T.M. Liggett [30]; para un estudio del correspondiente SCM vea el trabajo de R. Rebolledo [36]. En nuestro caso (temperatura finita, i.e., $\beta > 0$) la condición $a_{rs}^{+} = a_{rs}^{-}$ no se cumple, por esta razón el correspondiente generador clásico no está incluido en la clase estudiada por Liggett, y por lo mismo llamamos semigrupo cuántico de exclusión asimétrica al SCM construido a partir del generador formal de Lindblad de nuestro modelo.
Finalizamos describiendo las secciones destacadas del capítulo. En la sección 3 definimos el generador de Lindblad y Gorini-Kossakoswki-Sudarshan del SCM de exclusión asimétrica, que construimos en la sección 4, y la sección 5 está dedicada al cálculo de sus estados invariantes. En las últimas dos secciones discutimos la convergencia al equilibrio y la condición de balance detallado cuántico.

4.2. Preliminares

Sea $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y sea S el conjunto de las sucesiones $\eta : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ con $\eta_l = 0$ salvo para un número finito de $l \in \mathbb{Z}^d$. Puesto que $\mathbb{Z}^d$ es un conjunto numerable podemos escribir $\mathbb{Z}^d = \{l_1, l_2, \cdots\}$ siendo l_1 el vector cero. Si escribimos

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \bigotimes_{l\in\mathbb{Z}^d} |\eta_l\rangle = |\eta_{l_1}\eta_{l_2}\cdots\eta_{l_k}0\cdots 0\rangle \\ &= |\eta_{l_1}\rangle \otimes |\eta_{l_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\eta_{l_k}\rangle \bigotimes_{m\geq k} |0\rangle\,, \end{aligned}$$

el conjunto

$$\mathcal{O} := \{|\eta\rangle : \eta \in S\}$$

es una base ortonormal del producto tensorial estabilizado $\mathsf{h} = \bigotimes_{\mathsf{l}\in\mathbb{Z}^d} {}^{\varphi}\mathsf{h}_{\mathsf{l}}$, $\mathsf{h}_{\mathsf{l}} = \mathbb{C}^2$ con respecto a la sucesión $\varphi = (|0\rangle)_{\mathsf{l}\in\mathbb{Z}^d}$.

Notemos que podemos escribir $S = \cup_{n\geq 0} S_n$ con $S_n = \{\eta \in S : \eta_{\mathsf{l}_r} = 0 \ \forall \ r > n\}$. Como S_n es finito para cada $n \geq 0$, S es un conjunto numerable y el espacio de Hilbert h es separable. Todo elemento de h se representa en la forma $\xi = \sum_{\eta\in S}\langle \eta, \xi\rangle |\eta\rangle$.

Sean $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $n_+ := \sigma_+\sigma_-$, $n_- := \sigma_-\sigma_+$,

$$\sigma_{-r} := \cdots \otimes I \otimes \underbrace{\sigma_-}_{r} \otimes I \otimes \cdots, \quad \forall r \in \mathbb{Z}^d,$$

y σ_{+r}, n_{-r}, n_{+r} definidos de forma similar. Con esta notación es fácil ver que $\sigma_+ |0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^2$, $\sigma_+ |1\rangle = |0\rangle$, $\sigma_- |0\rangle = |1\rangle$ y $\sigma_- |1\rangle = 0$. Además, si $\mathbb{1}_s$ denota la función indicadora del subconjunto $\{s\}$, después de algunos cálculos para $\eta \in S$ y $r \in \mathbb{Z}^d$ se obtiene

$$\sigma_{+r}|\eta\rangle = \eta_r \left|\eta + (-1)^{\eta_r} \mathbb{1}_r\right\rangle \ \text{ y } \ \sigma_{-r}|\eta\rangle = (1-\eta_r)\left|\eta + (-1)^{\eta_r} \mathbb{1}_r\right\rangle.$$

Por consiguiente, si

$$C_{rs} := \sigma_{+r}\sigma_{-s}, \ C^*_{rs} := \sigma_{-r}\sigma_{+s},$$

para $r \neq s$, se tiene

$$\begin{aligned} C_{rs}|\eta\rangle &= \sigma_{+r}\sigma_{-s}|\eta\rangle \\ &= (1-\eta_s)\left(\eta + (-1)^{\eta_s}\mathbb{1}_s\right)_r \left|\eta + (-1)^{\eta_s}\mathbb{1}_s + (-1)^{\eta_r}\mathbb{1}_r\right\rangle \\ &= (1-\eta_s)\,\eta_r\,|\eta_{rs}\rangle \end{aligned}$$

y similarmente

$$C^*_{rs}|\eta\rangle = (1-\eta_r)\,\eta_s\,|\eta_{rs}\rangle,$$

donde

$$\eta_{rs} = \eta + (-1)^{\eta_r}\mathbb{1}_r + (-1)^{\eta_s}\mathbb{1}_s, \quad \eta \in S. \tag{4.1}$$

Ahora usando las relaciones

$$\begin{aligned} n_{+r}|\eta\rangle &= (1-\eta_r)|\eta\rangle, \quad n_{-r}|\eta\rangle = \eta_r|\eta\rangle, \\ C^*_{rs}C_{rs} &= n_{-r}n_{+s}, \quad C_{rs}C^*_{rs} = n_{+r}n_{-s} \end{aligned}$$

obtenemos

$$C_{rs}C_{rs}^{*}\,|\eta\rangle \;=\; (1-\eta_r)\,\eta_s\,|\eta\rangle \tag{4.2}$$
y
$$C_{rs}^{*}C_{rs}\,|\eta\rangle \;=\; (1-\eta_s)\,\eta_r\,|\eta\rangle\,. \tag{4.3}$$

4.3. El generador de Lindblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan

El generador formal de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan que consideraremos en este capítulo (véase la ecuación (1.3.40 en [2]) tiene la forma,

$$\mathcal{L}(x)[\eta,\xi] = \Phi(x)[\eta,\xi] + \langle G\eta, x\xi\rangle + \langle \eta, xG\xi\rangle, \tag{4.4}$$

donde $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ y

$$\Phi(x) = 2\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d} \gamma_{rs}\left(a_{rs}^{+}C_{rs}^{*}xC_{rs} + a_{rs}^{-}C_{rs}xC_{rs}^{*}\right), \quad \gamma_{rs},\, a_{rs}^{+}, a_{rs}^{-} \in \mathbb{R}^{+}. \tag{4.5}$$

El operador G se define por $G = -\frac{1}{2}\Phi\,(I) - iH$ y H es el operador auto-adjunto

$$H = \sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d} \gamma_{rs}\left(b_{rs}^{+}C_{rs}^{*}C_{rs} - b_{rs}^{-}C_{rs}C_{rs}^{*}\right), \quad b_{rs}^{+}, b_{rs}^{-} \in \mathbb{R}.$$

Al usar las relaciones básicas (4.2), (4.3) y haciendo algunos cálculos se puede ver que los operadores H y G actúan en h de acuerdo a

$$H = \sum_{\eta\in S}\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d} \gamma_{rs}\big(b_{rs}^{+}(1-\eta_s)\eta_r - b_{rs}^{-}(1-\eta_r)\eta_s\big)|\eta\rangle\langle\eta|,$$

y

$$G = -\sum_{\eta\in S} c\,(\eta)\,|\eta\rangle\langle\eta|, \quad \text{con } c\,(\eta) := \sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d} z_{rs}^{+}\,(1-\eta_s)\,\eta_r + \overline{z_{rs}^{-}}\,(1-\eta_r)\,\eta_s, \tag{4.6}$$

donde $z_{rs}^{+} = \gamma_{rs}\,(a_{rs}^{+} + ib_{rs}^{+})\,,\ z_{rs}^{-} = \gamma_{rs}\,(a_{rs}^{-} + ib_{rs}^{-})\,.$

Proposición 4.3.1 *Supongamos que para todos $r, s \in \mathbb{Z}^d$*

$$z_r^+ = \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} |z_{rs}^+| < \infty \text{ y } z_s^- = \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} |z_{rs}^-| < \infty.$$

Entonces $c(\eta)$ está bien definido para todo $\eta \in S$.

Demostración. Dado que para $\eta \in S$, existe n tal que $\eta \in S_n$ y notando que $r = s$ implica $(1-\eta_s)\,\eta_r = 0 = (1-\eta_r)\,\eta_s$, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d} \left|z_{rs}^+ (1-\eta_s)\,\eta_r + \overline{z_{rs}^-}\,(1-\eta_r)\,\eta_s\right| &\leq \sum_{r\leq l_n}\sum_{s\in\mathbb{Z}^d} |z_{rs}^+| + \sum_{s\leq l_n}\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} |\overline{z_{rs}^-}| \\ &= \sum_{r\leq l_n} z_r^+ + \sum_{s\leq l_n} z_s^- < \infty,\end{aligned}$$

de donde la serie que define a $c(\eta)$ converge. ■

En el caso del modelo de conductividad eléctrica deducido por Accardi y Kozyrev, los números reales positivos γ_{rs}, son libres y las suceptividades generalizadas (generalized susceptivities) (o coeficientes de transporte) $a_{rs}^{\pm}, b_{rs}^{\pm}$, están dados por las partes real e imaginaria de las integrales en las ecuaciones (1.3.31) y (1.3.32) en la p. 112 de [2]. Si $d = 3$ calculando dichas integrales obtenemos

$$a_{rs}^+ = 4\pi^2\rho\left|g(\rho^{\frac{1}{2}})\right|^2\left(\frac{1}{e^{\beta\rho}-1}\right) \text{ y } a_{rs}^- = a_{rs}^+ e^{\beta\rho}, \tag{4.7}$$

en caso de que $\rho = E_r^0 - E_s^0 + E\cdot(r-s) > 0$ y $a_{rs}^{\pm} = 0$ en el otro caso. Donde E_r^0 es la energía de un electrón en el sitio r, $E = (E_1, E_2, E_3)$ es un campo eléctrico constante, β es la temperatura inversa y $g(x) = g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d$ es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, el espacio de Schwartz de funciones C^∞ de valores complejos que decrecen a cero en infinito más rápido que el recíproco de cualquier polinomio, o más formalmente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\alpha\beta} < \infty$, para todos los multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$, donde $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$ infinitamente diferenciables, $\|f\|_{\alpha\beta} = \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$ ($\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo) y $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ donde $x = (x_1, \dots x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$.

Consideremos dos casos:

1.- (Campo eléctrico cero) Si el campo eléctrico E es cero, poniendo $g(x) = \frac{e^{-\beta|x|^2}}{(1+|x|^2)^{\theta/2}}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\theta > 0$ y $E_r^0 = |r|$ en (4.7), para $\rho = |r| - |s| > 0$ tenemos

$$a_{rs}^- = 4\pi^2(|r| - |s|)\frac{e^{-\beta(|r|-|s|)}}{(1+|r|-|s|)^\theta} \cdot \frac{1}{e^{\beta(|r|-|s|)} - 1},$$

luego para $|r|$ suficientemente grande se cumple $\left(e^{\beta(|r|-|s|)} - 1\right)^{-1} < 1$ y $a_{rs}^- \leq 4\pi^2 \frac{(|r|-|s|)}{(1+|r|-|s|)^\theta} e^{-\beta(|r|-|s|)}$.

Puesto que para $\theta > 1$ la función $f(x) = \frac{x}{(1+x)^\theta}$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, existe una constante $C > 0$ tal que para $|r|$ suficientemente grande,

$$a_{rs}^- \leq 4\pi^2 C e^{-\beta(|r|-|s|)}.$$

Usando esto concluimos que

$$a_s^- = \sum_r a_{rs}^- \leq 4\pi^2 C \sum_{|r|>|s|} e^{-\beta(|r|-|s|)} = \tag{4.8}$$

$$4\pi^2 C \sum_{k\geq 1} \sharp\{r \ : \ |r| = |s| + k\} e^{-\beta k} = 4\pi^2 C d 2^d \sum_{k\geq 1} (|s|+k)^{d-1} e^{-\beta k} < \infty.$$

La suma a_r^+ correspondiente para a_{rs}^+ es finita para cada r fijo ya que $\rho = |r| - |s| > 0$.

2.- (Invarianza bajo traslaciones) $E_r^0 = c$ para cada $r \in \mathbb{Z}^3$. Si $\theta \geq 1$, poniendo $g(x) = \frac{e^{-\beta x^2}}{(1+x^2)^{\theta/2}}$ en (4.7) para $\rho = E \cdot (r - s) > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} a_{rs}^+ &= 4\pi^2 E \cdot (r-s) \frac{e^{-2\beta E\cdot(r-s)}}{(1+E\cdot(r-s))^\theta} \cdot \frac{1}{e^{\beta E\cdot(r-s)} - 1} \\ &\leq 4\pi^2 e^{-2\beta E\cdot(r-s)} \cdot \frac{1}{e^{\beta E\cdot(r-s)} - 1} \\ &\leq 4\pi^2 \frac{1}{e^{\beta E\cdot(r-s)} - 1} \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} a_{rs}^- &= 4\pi^2 E \cdot (r-s) \frac{e^{-2\beta E\cdot(r-s)}}{(1+E\cdot(r-s))^\theta} \cdot \frac{e^{\beta E\cdot(r-s)}}{e^{\beta E\cdot(r-s)} - 1} \\ &\leq 4\pi^2 e^{-\beta E\cdot(r-s)} \frac{1}{e^{\beta E\cdot(r-s)} - 1} \end{aligned}$$

en particular cuando $E = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, la condición $E \cdot (r - s) \geq 0$ deviene en $E \cdot (r - s) = r_1 - s_1 > 0$ ó $r_1 \geq s_1 + 1$ y las últimas desigualdades se simplifican como

$$a_{rs}^{+} \leq \frac{4\pi^2}{e^{\beta(r_1 - s_1)} - 1}$$

y

$$a_{rs}^{-} \leq 4\pi^2 \frac{e^{-\beta(r_1 - s_1)}}{1} \cdot \frac{1}{e^{\beta(r_1 - s_1)} - 1}.$$

Ahora la función $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ tiende a 0 cuando $x \to +\infty$, así que existe una constante $C > 0$ tal que si $r_1 - s_1$ es suficientemente grande,

$$a_{rs}^{-} \leq 4\pi^2 C e^{-\beta(r_1 - s_1)},$$

y de ésta obtenemos

$$a_s^{-} = \sum_r a_{rs}^{-} \leq 4\pi^2 C \sum_{r_1 \geq s_1 + 1} e^{-\beta(r_1 - s_1)} = 4\pi^2 e^{\beta s_1} C \sum_{r_1 \geq s_1 + 1} e^{-\beta r_1} < \infty.$$

Con cálculos similares se obtiene que las funciones $b_{rs}^{\pm}$ son uniformente acotadas y podemos elegir las $\gamma' s$ de tal manera que

$$\Im(z_r^{+}) = \sum_s \gamma_{rs} b_{rs}^{+} < \infty \text{ y } \Im(z_s^{-}) = \sum_r \gamma_{rs} b_{rs}^{-} < \infty. \tag{4.9}$$

Por tanto los supuestos en la proposición anterior (4.3.1) son válidos en los dos casos considerados, si suponemos por ejemplo que las funciones γ_{rs} están uniformemente acotadas para controlar las partes reales y que satisfacen (4.9).

4.4. El semigrupo cuántico de Markov

En esta parte mostramos que el generador formal de Lindblad introducido en la sección anterior satisface condiciones suficientes para la existencia del semigrupo mínimo.

Proposición 4.4.1 *El operador G definido por 4.6 tiene las siguientes características:*

(i) Su dominio máximo es el conjunto

$$domG = \left\{ \xi \in \mathsf{h} : \sum_{\eta \in S} |c(\eta)|^2 \, |\langle \eta, \xi \rangle|^2 < \infty \right\},$$

y en cada elemento ξ de este dominio actúa como

$$G\xi = -\sum_{\eta \in S} c(\eta)\langle \eta, \xi \rangle |\eta\rangle. \tag{4.10}$$

(ii) Tenemos $\mathcal{O} \subset domG$ y por tanto G está densamente definido.

Demostración. Tenemos que $\xi \in \mathrm{dom}G$, si y sólo, si $G\xi \in \mathsf{h}$. Para cada $\xi = \sum_{\eta \in S} \langle \eta, \xi \rangle |\eta\rangle \in \mathrm{dom}G$, tenemos $G\xi = -\sum_{\eta \in S} c(\eta)\langle \eta, \xi \rangle |\eta\rangle$ y por la identidad de Parseval,

$$\sum_{\eta \in S} |c(\eta)|^2 \, |\langle \eta, \xi \rangle|^2 = \|G\xi\|^2 < \infty. \tag{4.11}$$

Recíprocamente, si ξ satisface (4.11), por el Lema de Riesz-Fischer $G\xi \in \mathsf{h}$. Esto prueba (i).

Como $\|G\eta\|^2 = |c(\eta)|^2 < \infty$ para cada $\eta \in S$ se tiene que $\mathcal{O} \subset \mathrm{dom}G$. Por tanto $\mathrm{dom}G$ también contiene al espacio lineal generado por $\mathcal{O}$, que es denso. ∎

Proposición 4.4.2 *El operador G es disipativo y es el generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo $W = (W_t)_{t \geq 0}$.*

Demostración. Para cada $\xi \in \mathrm{dom}G$ se tiene

$$\langle \xi, G\xi \rangle = -\sum_{\eta, \eta' \in S} \langle \eta, \xi \rangle \overline{\langle \eta', \xi \rangle} c(\eta') \langle \eta, \eta' \rangle = -\sum_{\eta \in S} |\langle \eta, \xi \rangle|^2 c(\eta)$$

y $\Re c(\eta) = \sum_{r \neq s \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{rs} a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r + \gamma_{rs} a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s \geq 0$, pues $\gamma_{rs}, a^+_{rs}, a^-_{rs} \geq 0$; de esto concluimos que

$$\Re\langle \xi, G\xi \rangle = -\sum_{\eta \in S} |\langle \eta, \xi \rangle|^2 \Re c(\eta) \leq 0.$$

Esto prueba que G es disipativo.

Por el Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 3.1.16 en [4]), G genera un semigrupo de contracciones fuertemente continuo si la imagen $\mathrm{R}(I-\alpha G)$ del operador $I-\alpha G$ es h para algún real $\alpha > 0$. Pero para $\theta \in \mathsf{h}$ tenemos que $\theta = (I-\alpha G)\xi$ si, y sólo si,

$$\theta = \sum_{\eta \in S} (1+\alpha c(\eta))\langle \eta, \xi\rangle |\eta\rangle$$

si, y sólo si, $\langle \eta, \xi\rangle = (1+\alpha c(\eta))^{-1}\langle \eta, \theta\rangle$ y $c(\eta) \neq -\alpha^{-1}$ para toda $\eta \in S$. Esta condición se cumple y $\xi \in \mathrm{dom}G$ si elegimos $\alpha \geq 1$ porque $|1+\alpha c(\eta)|^2 = 1+2\alpha\Re c(\eta)+\alpha^2|c(\eta)|^2 \geq 1+\alpha^2|c(\eta)|^2 \geq |c(\eta)|^2$ y

$$\sum_{\eta\in S} |c(\eta)|^2|\langle \eta, \xi\rangle|^2 = \sum_{\eta \in S}\frac{|c(\eta)|^2}{|1+\alpha c(\eta)|^2}|\langle \eta, \theta\rangle|^2 \leq \sum_{\eta\in S}|\langle \eta,\theta\rangle|^2 < \infty.$$

Por lo tanto tenemos $\mathrm{R}(I-\alpha G) = \mathsf{h}$ para todo $\alpha \geq 1$ y esto concluye la prueba. ∎

Observación 4.4.3 *Para cada $t \geq 0$ se tiene*

$$W_t = \sum_{\eta\in S} e^{tc(\eta)}|\eta\rangle\langle\eta| \ \ y \ \ W_t|\eta\rangle = e^{tc(\eta)}|\eta\rangle \tag{4.12}$$

por lo que span$\mathcal{O}$ es un subespacio invariante de W. Más aún usando (4.10), un cálculo directo con $\eta \in S$ y $n \geq 1$ muestra que

$$G^n|\eta\rangle = (c(\eta))^n\,|\eta\rangle \ \ y \ \ \|G^n\eta\| = |c(\eta)|^n < \infty, \tag{4.13}$$

es decir, $|\eta\rangle \in$ domG^n y span$\mathcal{O}$ también es invariante bajo G^n para toda $n \geq 1$, hecho que usamos en la siguiente proposición.

Proposición 4.4.4 *El subespacio vectorial span$\mathcal{O}$ de las combinaciones lineales finitas de elementos de la base ortonormal $\mathcal{O}$ es una esencia para G.*

Demostración. Como $G\,(\mathrm{span}\mathcal{O}) \subset \mathrm{span}\mathcal{O}$, por el Teorema de Nelson, ([38] pág. 202 ó Corolario 3.1.20 de [4]) es suficiente verificar que span$\mathcal{O}$ consiste de vectores analíticos.

Por (4.13) es inmediato que $\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\|G^n\eta\| = e^{t|c(\eta)|}$, i.e. cada $\eta \in \mathcal{O}$ es analítico. Mediante lo anterior y algunos cálculos se puede ver que los elementos de span $\mathcal{O}$ también son vectores analíticos. ∎

Usando las relaciones (4.2) y (4.3) después de algunos cálculos tenemos para cada par $\eta, \xi \in \mathcal{O}$ que

$$\begin{aligned}\Phi(x)[\eta,\xi] &= 2\sum_{r\neq s}\gamma_{rs}\big(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r + \\ &\quad a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s\big)\langle\eta_{rs}, x\xi_{rs}\rangle. \end{aligned}\tag{4.14}$$

El mapeo $\Phi : \mathcal{B}(\mathsf{h}) \times \mathrm{span}(\mathcal{O}) \times \mathrm{span}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ es normal, completamente positivo, lineal en x y sesquilineal en η, ξ. Además para cada $\eta \in \mathcal{O}$,

$$\Phi(I)[\eta] = 2\sum_{r\neq s}\gamma_{rs}\left(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r + a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s\right) = -2\Re\langle\eta, G\eta\rangle. \tag{4.15}$$

En resumen, los operadores Φ y G satisfacen las condiciones suficientes ([14], [7], Teorema 2.1.3 de [22] ó Teorema 2.4.7 de esta tesis) para la existencia del semigrupo mínimo $\mathcal{T} =(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ asociado con el generador formal (4.4). Este semigrupo $\mathcal{T}$ al cual llamaremos de exclusión asimétrica, tiene la propiedad de ser conservativo o de Markov, lo que será justificado al final de la siguiente sección (Corolario 4.5.7), donde daremos un argumento corto basado en que el semigrupo tiene un estado invariante fiel.

4.5. Estados Invariantes

Buscamos estados invariantes diagonales (o clásicos) del *sdc* de exclusión asimétrica. Para ello primero calculamos el predual $\mathcal{L}_*$ del generador $\mathcal{L}$. Usando las relaciones (4.2) y (4.3) se puede ver que para cualquier operador $\rho = \sum_{\eta,\xi\in S}\rho(\eta,\xi)|\eta\rangle\langle\xi|$ de la clase de traza $\mathscr{T}_1$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_*(\rho) = \\ &\sum_{\eta,\xi\in S}\Big(\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d}\gamma_{rs}(2a^+_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s + 2a^-_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r)\rho(\eta_{rs},\xi_{rs}) \\ &-\left(\overline{C}(\eta)+C(\xi)\right)\rho(\eta,\xi)\Big)|\eta\rangle\langle\xi|. \end{aligned}\tag{4.16}$$

Los siguientes cálculos son formales, pero sirven como guía para adivinar estados invariantes del semigrupo $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$. Un estado diagonal $\rho =$

$\sum_{\eta\in S}\rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ es una solución de la ecuación $\mathcal{L}_*(\rho)=0$ si, y sólo si, para toda $\eta\in S$

$$\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d}\gamma_{rs}\Big(\big(2a^+_{rs}(1-\eta_r)\eta_s+2a^-_{rs}(1-\eta_s)\eta_r\big)\rho(\eta_{rs})-$$
$$\big(2a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s+2a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r\big)\rho(\eta)\Big)=0. \tag{4.17}$$

Para cada $(r,s)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$, $r\neq s$ y $\eta\in S$, se cumple $(1-\eta_r)\eta_s=0$ o $(1-\eta_s)\eta_r=0$. Por tanto, para cada $\eta\in S$ fija, (4.17) se cumple si

$$\sum_{\eta_r=0,\eta_s=1}\gamma_{rs}\left(a^+_{rs}\rho(\eta_{rs})-a^-_{rs}\rho(\eta)\right)=0, \tag{4.18}$$

cuando $(1-\eta_s)\eta_r=0$; y

$$\sum_{\eta_r=1,\eta_s=0}\gamma_{rs}\left(a^-_{rs}\rho(\eta_{rs})-a^+_{rs}\rho(\eta)\right)=0 \tag{4.19}$$

en el caso $(1-\eta_r)\eta_s=0$.

Observación 4.5.1 *Si $a^+_{rs}=a^-_{rs}$, la ecuación (4.18) o (4.19) tiene la forma del generador del proceso de exclusión clásico introducido por T.M. Liggett, vea por ejemplo la ecuación (0.1) en el capítulo VIII de [30]. En nuestro caso la condición $a^+_{rs}=a^-_{rs}$ no se cumple, por lo que llamamos al* sdc *descrito en la sección anterior:* semigrupo cuántico de Markov de un proceso de exclusión asimétrica*; el correspondiente proceso clásico no está incluido en la clase de procesos de exclusión estudiada por Liggett.*

Proposición 4.5.2 *Un estado diagonal $\rho=\sum_{\eta\in S}\rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ es invariante para el sdc $(\mathcal{T}_t)_{t\geq0}$ de exclusión asimétrica si,*

$$\rho(\eta_{rs})=(a^-_{rs})^{(-1)^{\eta_r}}(a^+_{rs})^{(-1)^{\eta_s}}\rho(\eta),\quad\forall\ r,s\in\mathbb{Z}^d,|r|>|s| \tag{4.20}$$

y converge la serie doble

$$\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d}\gamma_{rs}\left(a^+_{rs}+a^-_{rs}\right). \tag{4.21}$$

Demostración. Podemos escribir $\rho = \text{lím}_n \rho_n$ en $(\mathscr{T}_1, \|\cdot\|_1)$ con $\rho_n = \sum_{\eta\in S_n} \rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$. Cada $\rho_n \in \text{dom}\mathcal{L}_*$ (ver Proposición 3.32 in Ref.[14]) y

$$\mathcal{L}_*(\rho_n) = \sum_{\eta\in S_n}\Big(\sum_{\{(r,s):\eta_r=0,\eta_s=1\}} \gamma_{rs}\big(2a^+_{rs}\rho(\eta+\mathbb{1}_r-\mathbb{1}_s) - 2a^-_{rs}\rho(\eta)\big)+ \tag{4.22}$$
$$\sum_{\{(r,s):\eta_r=1,\eta_s=0\}} \gamma_{rs}\big(2a^-_{rs}\rho(\eta-\mathbb{1}_r+\mathbb{1}_s) - 2a^+_{rs}\rho(\eta)\big)\Big)|\eta\rangle\langle\eta| + R(n) = R(n),$$

donde, con la notación $[\mathfrak{o}, \mathfrak{n}] = \{r = l_j \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq j \leq n\}$,

$$R(n) \;=\; 2\sum_{\{(r,s)\in([\mathfrak{o},\mathfrak{n}]\times[\mathfrak{o},\mathfrak{n}])^c:r\neq s\}} \rho(\eta)\gamma_{rs}\big((1-\eta_r)\eta_s a^-_{rs}+ \tag{4.23}$$
$$(1-\eta_s)\eta_r a^+_{rs}\big)\big(|\eta_{rs}\rangle\langle\eta_{rs}| - |\eta\rangle\langle\eta|\big). \tag{4.24}$$

Y tenemos la siguiente estimación para $\|R(n)\|_1$,

$$\begin{aligned}\|R(n)\|_1 &\leq 4\sum_{\eta\in S_n}\rho(\eta) \sum_{\{(r,s)\in([\mathfrak{o},\mathfrak{n}]\times[\mathfrak{o},\mathfrak{n}])^c:r\neq s\}} \gamma_{rs}\big((1-\eta_r)\eta_s a^-_{rs} + (1-\eta_s)\eta_r a^+_{rs}\big)\\ &\leq 4\sum_{\eta\in S_n}\rho(\eta) \sum_{\{(r,s)\in([\mathfrak{o},\mathfrak{n}]\times[\mathfrak{o},\mathfrak{n}])^c:r\neq s\}} \gamma_{rs}(a^+_{rs}+a^-_{rs})\\ &\leq 4\sum_{\{(r,s)\in([\mathfrak{o},\mathfrak{n}]\times[\mathfrak{o},\mathfrak{n}])^c:r\neq s\}} \gamma_{rs}(a^+_{rs}+a^-_{rs}) \to 0 \text{ cuando } n\to\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_*(\rho_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y de aquí $\rho \in \text{dom}\mathcal{L}_*$ y $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$, pues $\mathcal{L}_*$ es cerrado. ∎

Observación 4.5.3 *En el caso de campo eléctrico cero, las funciones $a^{\pm}_{rs}$ son uniformemente acotadas y lo mismo acurre con las $b^{\pm}_{rs}$. Entonces las hipótesis en la Proposición 4.3.1 se cumplen si suponemos que la serie doble $\sum_{r\neq s}\gamma_{rs}$ es convergente. Nótese que esta misma hipótesis y la acotación uniforme de las $a^{\pm}_{rs}$ son suficientes para que se cumpla la condición (4.21).*

Teorema 4.5.4 *Supongamos que la serie doble (4.21) converge y $\frac{a^-_{rs}}{a^+_{rs}} = \frac{q(r)}{q(s)}$, para todos $r, s \in \mathbb{Z}^d$, $|r| > |s|$, con q una función positiva en $\mathbb{Z}^d$ tal que $\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{1+q(r)} < \infty$, entonces:*

(i) Un estado $\sum_{\eta\in S}\rho(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ es fiel y satisface la condición (4.20) si $\rho(\eta) = \rho(\{\eta\})$ donde ρ es la medida producto en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ con distribuciones de probabilidad finito-dimensionales dadas por

$$\rho(\{\eta : \eta_{r_1} = x_1, \cdots, \eta_{r_k} = x_k\}) = \alpha_{r_1}(x_1)\cdots\alpha_{r_k}(x_k), \quad x_1, \cdots, x_k \in \{0,1\},$$

con α_r la medida de probabilidad en $\{0,1\}$ tal que

$$\alpha_r(x) = \alpha_r(\{x\}) = \frac{q(r)^{1-x}}{1+q(r)}, \quad x \in \{0,1\}. \tag{4.25}$$

(ii) Existe un número infinito de estados invariantes para el SCM de exclusión asimétrica asociados con cada función q.

Demostración. Un cálculo sencillo muestra que $\rho(\eta) = \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r(\eta_r)$.

Para $0 \leq u_n < 1$ tenemos $\Pi_{n\geq 1}(1-u_n) > 0$ si, y sólo si $\sum_{n\geq 1} u_n < \infty$ (vea Teorema 15.5 en [39]). Así $\rho(\eta) = \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r(\eta_r) > 0$ si, y sólo si $\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}(1-\alpha_r(\eta_r)) < \infty$. Si $\eta \in S$ entonces para $|r|$ suficientemente grande tenemos $1-\alpha_r(\eta_r) = \frac{1}{1+q(r)}$, y la serie $\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} 1-\alpha_r(\eta_r)$ converge si, y sólo si la serie $\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{1+q(r)}$ converge, esto prueba que $\rho(\eta) > 0$ para todo $\eta \in S$. Por tanto $0 < \rho(S) \leq 1$. Por consiguiente ρ tiene traza finita pues

$$tr(\rho) = \sum_{\eta\in S}\rho(\eta) = \rho(\bigcup_{\eta\in S}\{\eta\}) = \rho(S),$$

por ende ρ es un estado (después de normalizar si fuese necesario), que además es inyectivo (fiel) porque sus valores propios son estrictamente positivos.

Ahora veremos que ρ es invariante,

$$\begin{aligned} \rho(\eta + (-1)^{\eta_{r_0}}\mathbb{1}_{r_0}) &= \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r\left((\eta + (-1)^{\eta_{r_0}}\mathbb{1}_{r_0})_r\right) = \\ \Pi_{r_0\neq r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r(\eta_r)\cdot\alpha_{r_0}(\eta_{r_0} + (-1)^{\eta_{r_0}}\mathbb{1}_{r_0}) &= \begin{cases} \alpha_{r_0}(0)\alpha_{r_0}(1)^{-1}\rho(\eta), & \eta_{r_0} = 1 \\ \alpha_{r_0}(1)\alpha_{r_0}(0)^{-1}\rho(\eta), & \eta_{r_0} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces $\rho(\eta + (-1)^{\eta_{r_0}}\mathbb{1}_{r_0}) = q(r_0)^{(-1)^{\eta_{r_0}}}\rho(\eta)$ y de aquí

$$\rho(\eta + (-1)^{\eta_r}\mathbb{1}_r + (-1)^{\eta_s}\mathbb{1}_s) = q(r)^{(-1)^{\eta_r}}q(s)^{(-1)^{\eta_s}}\rho(\eta).$$

Esta relación y nuestros supuestos implican (4.20) y prueban (i).

El estado invariante ρ no es único. Si $p(r) = cq(r)$, con $c > 0$, entonces $\frac{p(r)}{p(s)} = \frac{a_{rs}^{-}}{a_{rs}^{+}}$, para $s \neq r \in \mathbb{Z}^d$ y a p le corresponde el estado invariante $\rho_c = \sum_{\eta \in S} \rho_c(\eta)|\eta\rangle\langle\eta|$ donde $\rho_c(\{\eta\}) = \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_{cr}(\eta_r)$ y α_{cr} es la medida de probabilidad en $\{0,1\}$ tal que

$$\alpha_{cr}(x) = \alpha_{cr}(\{x\}) = \frac{(cq(r))^{1-x}}{1+cq(r)}, \quad x \in \{0,1\}. \tag{4.26}$$

Por lo tanto por cada real positivo hay un estado invariante asociado a la función q. Esto termina la prueba. ∎

Observación 4.5.5 *En relación al Teorema 4.5.4 tenemos:*

(i) En el caso del campo eléctrico cero, de las relaciones (4.7) se sigue que

$$\frac{a_{rs}^{-}}{a_{rs}^{+}} = e^{\beta(E_r^0 - E_s^0)} = \frac{e^{\beta E_r^0}}{e^{\beta E_s^0}},$$

i.e., los supuestos del teorema se cumplen con $q(r) = e^{\beta E_r^0}$; en este caso vemos que elegir una función $q(r)$ equivale a elegir la función de energía E_r^0.

(ii) No sabemos si existen estados invariantes para el caso de invarianza bajo traslaciones.

En el caso $q(r) = e^{\beta|r|}$ podemos estimar la medida $\rho(\eta)$ como sigue. De la desigualdad en la prueba del Teorema 15.5 en [39] obtenemos

$$0 < \rho(\eta) = \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r(\eta_r) \leq e^{-\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}(1-\alpha_r(\eta_r))};$$

y si para cada $\eta \in S$ definimos $K_\eta := \min\{t > 0 : \eta_r = 0, \forall |r| > t\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} 1 - \alpha_r(\eta_r) &= \sum_{k\geq 0}\sum_{|r|=k} 1 - \frac{e^{\beta k(1-\eta_r)}}{1+e^{\beta k}} = \\
&\sum_{k=1}^{K_\eta}\sum_{|r|=k} 1 - \frac{e^{\beta k(1-\eta_r)}}{1+e^{\beta k}} + \sum_{k>K_\eta}\sum_{|r|=k}\frac{1}{1+e^{\beta k}} \geq \\
&\sum_{k=1}^{K_\eta}\sum_{|r|=k} 1 - \frac{e^{\beta k(1-\eta_r)}}{1+e^{\beta k}} \geq \sum_{k=1}^{K_\eta}\frac{e^{\beta k}}{1+e^{\beta k}} \geq \frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}K_\eta,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

porque $\{r \in \mathbb{Z}^d : \eta_r = 1 \text{ y } |r| = K_\eta\} \neq \emptyset$ y $f(x) = \frac{e^{\beta x}}{1+e^{\beta x}}$ es una función creciente para $x \geq 0$. Por lo tanto tenemos

$$0 < \rho(\eta) \leq e^{-\left(\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}\right)K_\eta}. \tag{4.28}$$

Una desigualdad similar es satisfecha por cada estado invariante ρ_c, $c > 0$, del *SCM* de exclusión asimétrica asociado con la función $p(r) = cq(r)$.

A partir de este punto, asumiremos que $q(r)$ es suficientemente regular para que el correspondiente estado ρ sea fiel.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario 4.5.6 *El conjunto de estados invariantes de $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ contiene a la envolvente convexa cerrada en $\mathscr{T}_1$ del subconjunto*

$$\mathcal{I}_q = \{\rho_c | \alpha_c : \mathbb{Z}^d \to \mathcal{P}(\{0,1\}) \text{ satisface (4.26) para } c \in (0,\infty)\},$$

donde $\mathcal{P}(\{0,1\})$ denota el conjunto de medidas de probabilidad en $\{0,1\}$.

Demostración. Claramente cada combinación convexa de elementos de $\mathcal{I}_q$ es un estado invariante bajo $\mathcal{T}_t$, $t \geq 0$. Además si $(\theta_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de combinaciones convexas finitas y $\lim_n \theta_n = \theta$ en $\mathscr{T}_1$, entonces $\theta_n \in \mathrm{dom}\mathcal{L}_*$ y $\mathcal{L}_*(\theta_n) = 0$ para toda $n \geq 1$, consecuentemente $\mathcal{L}_*(\theta) = 0$. Además θ es un estado por ser límite de una sucesión de estados. ■

Corolario 4.5.7 *El semigrupo mínimo de exclusión asimétrica es de Markov o conservativo.*

Demostración. Usamos que cada elemento de $\mathcal{I}_q$ es un estado fiel (o inyectivo) y la Proposición 4.5.8. ■

A continuación enunciamos un resultado general de J. C. García Corte [23]. También la prueba es de él.

Proposición 4.5.8 *Un semigrupo mínimo $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ que tiene un estado invariante fiel es Markoviano.*

Demostración. Si $(\mathcal{T}_{t*})_{t\geq 0}$ denota el semigrupo predual y ρ es un estado invariante fiel del semigrupo, entonces $\forall t \geq 0$, $\mathcal{T}_{t*}(\rho) = \rho$, $\mathcal{T}_t(I) \leq I$ y

$$tr(\rho\mathcal{T}_t(I)) = tr(\mathcal{T}_{t*}(\rho)I) = tr(\rho) = 1.$$

Por tanto $0 = tr(\rho(I - \mathcal{T}_t(I))) = tr(\rho^{\frac{1}{2}}(I - \mathcal{T}_t(I))\rho^{\frac{1}{2}})$. Siendo $I - \mathcal{T}_t(I)$ un operador positivo, esto prueba que $\rho^{\frac{1}{2}}(I - \mathcal{T}_t(I))\rho^{\frac{1}{2}} = 0$. Como ρ es fiel y tiene rango denso se sigue que $I - \mathcal{T}_t(I) = 0$. ■

4.6. Convergencia al equilibrio

En esta sección establecemos el comportamiento asintótico de $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$. Así en el resultado principal de esta sección (Proposición 4.6.3), demostramos que para cada estado $\sigma \in \mathscr{T}_1$, existe el $\lim_{t\to\infty} \mathcal{T}_{*t}(\sigma) = \rho$; en este caso ρ es un estado invariante del semigrupo (lo cual se ve fácilmente), y se dice que $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ conduce al equilibrio a todo estado inicial.
Con lo anterior en mente recordamos los siguientes resultados (vea Frigerio y Verri [19, 21])

Teorema 4.6.1 *Sea $\mathcal{S}$ un SCM en un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ con un estado invariante normal fiel ω y sean $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ las subálgebras de von Neumann de $\mathcal{A}$*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{S}) &= \{x \in \mathcal{A} \mid \mathcal{S}_t(x) = x,\ \forall t \geq 0\},\\ \mathcal{N}(\mathcal{S}) &= \{x \in \mathcal{A} \mid \mathcal{S}_t(x^*x) = \mathcal{S}_t(x^*)\mathcal{S}_t(x),\ \mathcal{S}_t(xx^*) = \mathcal{S}_t(x)\mathcal{S}_t(x^*), \forall t \geq 0\}.\end{aligned}$$

Entonces:

(i) $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ está contenido en $\mathcal{N}(\mathcal{S})$,

(ii) Si $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{N}(\mathcal{S})$, entonces $w^* - \lim_{t\to\infty} \mathcal{S}_{*t}(\sigma)$ existe para cada estado normal σ en $\mathcal{A}$.

Los siguientes resultados de F. Fagnola y R. Rebolledo [17, 18], nos permitirán determinar fácilmente $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ para aplicar el Teorema 4.6.1.

Teorema 4.6.2 *Supongamos que son de Markov los SDC mínimos $\mathcal{T}$ y $\widetilde{\mathcal{T}}$ asociados con los operadores G, L_ℓ y con G^*, L_ℓ respectivamente. Además supóngase que existe $D \subset \mathsf{h}$ denso y es una esencia común para G y G^* tal que la sucesión $(nG^*(n-G)^{-1})u)_{n\geq 1}$ converge para todo $u \in D$. Entonces $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \{L_k, L_k^* : k \geq 1\}'$ y $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{H, L_k, L_k^* : k \geq 1\}'$.*

Aquí $\{X_1, X_2 \dots\}'$ denota al *conmutador generalizado* de los operadores (posiblemente no acotados) $X_1, X_2, \dots$, esto es, a la subálgebra de todos los operadores $y \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tales que para todo $k \geq 1$, $yX_k \subseteq X_k y$ (i.e. $\mathrm{Dom}(X_k) \subseteq \mathrm{Dom}(X_k y)$ y $yX_k u = X_k y u$ para todo $u \in \mathrm{Dom}(X_k)$).

Estamos listos para demostrar que nuestro semigrupo conduce al equilibrio a todo estado inicial.

Proposición 4.6.3 *Para el SCM de exclusión asimétrica* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *tenemos que* $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}(\mathcal{T})$. *Por tanto* $w^* - \text{lím}_{t\to\infty} \mathcal{T}_{*t}(\sigma)$ *existe para todo estado* $\sigma \in \mathscr{T}_1$.

Demostración. Con $L^+_{rs} = \sqrt{\gamma_{rs} a^+_{rs}} C_{rs}$, $L^-_{rs} = \sqrt{\gamma_{rs} a^-_{rs}} C^*_{rs}$, tenemos $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \subset \{C_{rs}, C^*_{rs} : r, s \in \mathbb{Z}^d, r \neq s\}'$, luego un operador $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ también conmuta con $C^*_{rs}C_{rs}$ y $C_{rs}C^*_{rs}$. Por tanto para

$$\xi \in \text{dom}H = \{\xi \in \mathsf{h} : \sum_{r\neq s \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\eta \in S} \gamma_{rs}\big(b^+_{rs}(1-\eta_r)\eta_s - b^-_{rs}(1-\eta_s)\eta_r\big)\langle \eta, \xi\rangle |\eta\rangle \in \mathsf{h}\},$$

se cumple

$$\begin{aligned} Hx\xi &= \sum_{r\neq s \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{rs}\big(b^+_{rs}C^*_{rs}C_{rs} - b^-_{rs}C_{rs}C^*_{rs}\big)x\xi \\ &= \sum_{r\neq s \in \mathbb{Z}^d} x\gamma_{rs}\big(b^+_{rs}C^*_{rs}C_{rs} - b^-_{rs}C_{rs}C^*_{rs}\big)\xi \\ &= x \sum_{r\neq s \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\eta \in S} \gamma_{rs}\big(b^+_{rs}(1-\eta_r)\eta_s - b^-_{rs}(1-\eta_s)\eta_r\big)\langle \eta, \xi\rangle |\eta\rangle = xH\xi \in \mathsf{h}. \end{aligned}$$

Por consiguiente $H \subset \text{dom}Hx$ y $Hx\xi = xH\xi$. Esto y el Teorema 4.6.2 prueban la proposición. ■

4.7. Balance detallado

En esta sección supondremos que todas las funciones $a^{\pm}_{rs}$ tienen valores reales positivos para $|r| > |s|$ y satisfacen las hipótesis del Teorema 4.5.4. Nuestra meta es mostrar que cada estado invariante del SCM de exclusión asimétrica en la envolvente convexa cerrada de $\mathcal{I}_q$ satisface la fórmula de balance detallado (4.43).

Decimos que un Semigrupo Cuántico de Markov $\mathcal{T}_t$ con un estado fiel ρ satisface la condición de balance detallado cuántico (quantum detailed balance) (Frigerio, Gorini, Kossakowsky y Verri [20]) si existe otro SCM $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ tal que

$$tr\left(\rho y \mathcal{T}_t(x)\right) = tr\left(\rho \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)\, x\right), \ \forall x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h}). \tag{4.29}$$

En nuestro caso el SCM $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ tiene un generador de Lindblad $\widetilde{\mathcal{L}}$ asociado con el mismo $\Phi(x)$ y con G^*, i.e. $\mathcal{T}_t$ y $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ tienen el mismo generador salvo el signo de H, más precisamente

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x) = -2i\,[H, x]\,.$$

Proposición 4.7.1 *Para cada estado invariante $\rho = \sum_{\eta\in S} \rho(\eta)\, |\eta\rangle\langle\eta|$, con $\rho(\eta) = \Pi_{r\in\mathbb{Z}^d}\alpha_r(\eta_r)$ y α_r como en (4.25), tenemos que*

$$tr\left(\rho^{1-\theta}\Phi(y)\,\rho^{\theta}x\right) = tr\left(\rho^{1-\theta}y\rho^{\theta}\Phi(x)\right),\ \forall\, x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h}). \tag{4.30}$$

Demostración. Primero notemos que si $q(r)$ es suficientemente regular, entonces $\rho^{\theta} \in \mathscr{T}_1$ para toda $0 < \theta \leq 1$. Por ejemplo si $q(r) = e^{\beta|r|}$, usando (4.28) obtenemos

$$\begin{aligned} tr(\rho^{\theta}) = \sum_{\eta\in S}\rho(\eta)^{\theta} &\leq \sum_{\eta\in S} e^{-\theta\left(\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}\right)K_{\eta}} \leq \\ \sum_{n\geq 0}\sum_{\eta\in E_n} e^{-\theta\left(\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}\right)n} &\leq \sum_{n\geq 0}\sharp(E_n)e^{-\theta\left(\frac{e^{\beta}}{1+e^{\beta}}\right)K_{\eta}} < \infty, \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde $E_n = \{\eta \in S : K_{\eta} = n\}$, $n \geq 0$. Por tanto (4.30) tiene sentido.

Si $\Phi_{rs}(x) = L_{rs}^{+*}xL_{rs}^{+} + L_{rs}^{-*}xL_{rs}^{-}$ y $L_{rs}^{+} = \sqrt{\gamma_{rs}a_{rs}^{+}}C_{rs}$, $L_{rs}^{-} = \sqrt{\gamma_{rs}a_{rs}^{-}}C_{rs}^{*}$, podemos escribir

$$\Phi(x) = 2\sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d}\Phi_{rs}(x),\quad x \in \mathcal{B}(\mathsf{h}). \tag{4.32}$$

Inmediatamente vemos que para cualquier $\eta \in S$

$$L_{rs}^{+*}|\eta\rangle = \sqrt{\gamma_{rs}a_{rs}^{+}}C_{rs}^{*}|\eta\rangle = \sqrt{\gamma_{rs}a_{rs}^{+}}\,(1-\eta_r)\,\eta_s|\eta_{rs}\rangle,$$

y para un operador $\sigma = \sum_{\eta\in S}\sigma(\eta)\,|\eta\rangle\langle\eta|$ tenemos $\sigma|\eta\rangle = \sigma(\eta)\,|\eta\rangle$ y

$$\begin{aligned} \sigma L_{rs}^{+*}|\eta\rangle &= \sigma(\eta_{rs})\,L_{rs}^{+*}|\eta\rangle, \\ L_{rs}^{+*}\sigma|\eta\rangle &= \sigma(\eta)\,L_{rs}^{+*}|\eta\rangle. \end{aligned}$$

Con $\sigma = \rho^{(1-\theta)}$ de (4.20) se sigue que para $\eta \in S$ tal que $(1-\eta_r)\eta_s \neq 0$,

$$\rho^{(1-\theta)}L_{rs}^{+*}|\eta\rangle = \left(\frac{a_{rs}^{-}}{a_{rs}^{+}}\right)^{(1-\theta)}L_{rs}^{+*}\rho^{(1-\theta)}|\eta\rangle; \tag{4.33}$$

si $(1-\eta_r)\eta_s = 0$, se tiene $L_{rs}^{+*}|\eta\rangle = 0$ i.e. (4.33) se cumple para toda $\eta \in S$. Concluimos que

$$\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{+*} = \Big(\frac{a_{rs}^-}{a_{rs}^+}\Big)^{(1-\theta)} L_{rs}^{+*} \rho^{(1-\theta)}. \tag{4.34}$$

De manera similar

$$L_{rs}^{+} \rho^{\theta} = \Big(\frac{a_{rs}^-}{a_{rs}^+}\Big)^{\theta} \rho^{\theta} L_{rs}^{+}. \tag{4.35}$$

También usando (4.20), se ve que para cada $\eta \in S$ tal que $(1-\eta_s)\eta_r \neq 0$,

$$\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{-*}|\eta\rangle = \Big(\frac{a_{rs}^+}{a_{rs}^-}\Big)^{(1-\theta)} L_{rs}^{-*} \rho^{(1-\theta)}|\eta\rangle;$$

la igualdad se mantiene en el caso $(1-\eta_s)\eta_r = 0$ pues $L_{rs}^{-*}|\eta\rangle = 0$. Por lo tanto

$$\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{-*} = \Big(\frac{a_{rs}^+}{a_{rs}^-}\Big)^{(1-\theta)} L_{rs}^{-*} \rho^{(1-\theta)}, \tag{4.36}$$

y análogamente

$$L_{rs}^{-} \rho^{\theta} = \Big(\frac{a_{rs}^+}{a_{rs}^-}\Big)^{\theta} \rho^{\theta} L_{rs}^{-}. \tag{4.37}$$

Si ahora usamos (4.34), (4.35) y

$$L_{rs}^{+} = \sqrt{\gamma_{rs} a_{rs}^+} C_{rs} = \Big(\frac{a_{rs}^+}{a_{rs}^-}\Big)^{\frac{1}{2}} L_{rs}^{-*}, \tag{4.38}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} tr\Big(\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{+*} y L_{rs}^{+} \rho^{\theta} x\Big) &= \Big(\frac{a_{rs}^-}{a_{rs}^+}\Big)^{(1-\theta)} tr\Big(L_{rs}^{+*} \rho^{(1-\theta)} y L_{rs}^{+} \rho^{\theta} x\Big) \\ &= \Big(\frac{a_{rs}^-}{a_{rs}^+}\Big) tr\Big(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta} L_{rs}^{+} x L_{rs}^{+*}\Big) \\ &= tr\Big(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta} L_{rs}^{-*} x L_{rs}^{-}\Big), \end{aligned}$$

es decir

$$tr\Big(\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{+*} y L_{rs}^{+} \rho^{\theta} x\Big) = tr\Big(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta} L_{rs}^{-*} x L_{rs}^{-}\Big). \tag{4.39}$$

Cálculos similares usando (4.36), (4.37) y (4.38) muestran que

$$tr\Big(\rho^{(1-\theta)} L_{rs}^{-*} y L_{rs}^{-} \rho^{\theta} x\Big) = tr\Big(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta} L_{rs}^{+*} x L_{rs}^{+}\Big). \tag{4.40}$$

Ahora (4.39) y (4.40) implican

$$\begin{aligned} tr\left(\rho^{1-\theta}\Phi_{rs}(y)\,\rho^{\theta}x\right) &= tr\left(\rho^{1-\theta}L_{rs}^{+*}yL_{rs}^{+}\rho^{\theta}x+\rho^{1-\theta}L_{rs}^{-*}yL_{rs}^{-}\rho^{\theta}x\right)\\ &= tr\left(\rho^{1-\theta}y\rho^{\theta}L_{rs}^{-*}xL_{rs}^{-}+\rho^{1-\theta}y\rho^{\theta}L_{rs}^{+*}xL_{rs}^{+}\right)\\ &= tr\left(\rho^{1-\theta}y\rho^{\theta}\Phi_{rs}(x)\right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

El resultado se sigue de (4.32), (4.41) y de las propiedades de la traza. ■

Observación 4.7.2 *Se sigue de la prueba anterior que la Proposición 4.7.1 es válida para* $\rho=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\rho_j$ *si cada* ρ_j *tiene la forma* $\sigma=\sum_{\eta\in S}\sigma(\eta)\,|\eta\rangle\langle\eta|$, *pues en este caso,* ρ *mismo se puede escribir en esta forma.*

Antes de proseguir denotamos con $L_2(\mathsf{h})$ al espacio con el producto escalar $\langle y,x\rangle=\mathrm{tr}(y^*x)$ de los operadores de Hilbert-Schmidt en h. Para ver que nuestro SCM $\mathcal{T}_t$ satisface (4.29) siguiendo la idea de la prueba del Teorema 5.1 en [15], trasladaremos el problema a $L_2(\mathsf{h})$ mediante una transformación de $\mathcal{T}_t$ con ciertos semigrupos en $L_2(\mathsf{h})$. Para cada ρ se define un encaje ι de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ en $L_2(\mathsf{h})$ por

$$\iota:\mathcal{B}(\mathsf{h})\to L_2(\mathsf{h}),\qquad \iota(x)=\rho^{\frac{\theta}{2}}x\rho^{\frac{1-\theta}{2}}. \tag{4.42}$$

El mapeo ι es una contracción inyectiva con rango denso y es completamente positivo para $\theta=1/2$. Ahora definimos $T_t(\iota(x))=\iota(\mathcal{T}_t(x))$ para cada $t\geq 0$ y $x\in\mathcal{B}(\mathsf{h})$. Los operadores T_t pueden extenderse a todo $L_2(\mathsf{h})$ y definen un único semigrupo de contracciones fuertemente continuo $T=(T_t)_{t\geq 0}$ en $L_2(\mathsf{h})$ (véase [5], Teorema 2.0.3). Además, si L es el generador infinitesimal de T, entonces $\iota(dom\mathcal{L})\subset domL$ y para cada $x\in\mathrm{dom}\mathcal{L}$,

$$L\big(\rho^{\frac{\theta}{2}}x\rho^{\frac{1-\theta}{2}}\big)=\rho^{\frac{\theta}{2}}\mathcal{L}(x)\rho^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Proposición 4.7.3 *Sea* $M_n:=span\{|\eta\rangle\langle\xi|\,:\,\eta,\xi\in S_n\}\subset dom(\mathcal{L})$ *y supongamos que converge la serie doble (4.21). Entonces el conjunto* $\iota(\mathcal{M})=\cup_{n\in\mathbb{N}}\iota(M_n)$ *es una esencia para* L *y* $\tilde{L}$, *donde* $\mathcal{M}$ *es el subespacio de operadores de rango finito en* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$.

Demostración. Puesto que $\mathcal{M}\subset dom\mathcal{L}$, para $x\in\mathcal{M}$ existe el límite $w^*-\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\mathcal{T}_t(x)-x}{t}$; por ende también existe el límite débil $w-\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{T_t(\iota(x))-\iota(x)}{t}$, por tanto $\iota(\mathcal{M})\subset\mathrm{dom}L$.

Definamos $\mathcal{L}_n : M_n \to M_n$, por

$$\mathcal{L}_n(|\eta\rangle\langle\xi|) = \sum_{r\neq s\in\mathbb{Z}^d} 2(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r + a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s)|\eta^{(n)}_{rs}\rangle\langle\xi^{(n)}_{rs}|$$
$$-\left(\overline{C(\eta)} + C(\xi)\right)|\eta\rangle\langle\xi|,$$

para $|\eta\rangle\langle\xi| \in M_n$ y extendemos por linealidad; donde

$$\eta^{(n)}_{r,s} = \begin{cases} \eta + (-1)^{\eta_r}\mathbb{1}_r + (-1)^{\eta_s}\mathbb{1}_s \ , & \text{si } r = l_j, s = l_k, j,k \leq n \\ \eta, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

con $Z^d = \{l_1, l_2, \cdots\}$.

Con la misma notación de la Proposición 4.5.2 para $|\eta\rangle\langle\xi| \in M_n$ tenemos que

$$\left(L|_{\iota(M_n)} - L_n\right)(\iota(|\eta\rangle\langle\xi|)) =$$
$$\sum_{r\neq s} 2\gamma_{rs}\left(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r + a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s\right)\times$$
$$\rho^{\frac{\theta}{2}}(|\eta_{rs}\rangle\langle\xi_{rs}| - |\eta^{(n)}_{rs}\rangle\langle\xi^{(n)}_{rs}|)\rho^{\frac{1-\theta}{2}} = \sum_{(r,s)\in([0,n]\times[0,n])^c} 2\gamma_{rs}\left(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r +\right.$$
$$\left. a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s\right)\rho^{\frac{\theta}{2}}(|\eta_{rs}\rangle\langle\xi_{rs}| - |\eta\rangle\langle\xi|)\rho^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Después de algunos cálculos para cada $\eta,\ \xi \in S_n$ obtenemos la estimación

$$\sum_{(r,s)\in([0,n]\times[0,n])^c} \gamma_{rs}\left(a^+_{rs}(1-\eta_s)\eta_r(1-\xi_s)\xi_r + a^-_{rs}(1-\eta_r)\eta_s(1-\xi_r)\xi_s\right) =$$
$$\sum_{(r,s)\in[0,n]\times[0,n]^c} \gamma_{rs}a^+_{rs}\eta_r\xi_r + \sum_{(r,s)\in[0,n]^c\times[0,n]} \gamma_{rs}a^-_{rs}\eta_s\xi_s \leq \sum_{r\neq s}\gamma_{rs}(a^+_{rs} + a^-_{rs}).$$

No es difícil ver que cuando $\eta,\ \xi \in S_n$, los vectores $\eta_{rs},\ \xi$ son ortogonales para cada $(r,s) \in ([0,n] \times [0,n]^c) \cup ([0,n]^c \times [0,n])$. Usando este hecho y la estimación de arriba se sigue que para cada $x \in M_n$ tenemos

$$\|\left(L|_{\iota(M_n)} - L_n\right)(\iota(x))\|_2 \leq 4\ n\Big(\sum_{r\neq s}\gamma_{rs}(a^+_{rs} + a^-_{rs})\Big)\|\iota(x)\|_2.$$

Por lo tanto la sucesión creciente de subespacios $\iota(M_n)$ y la sucesión de operadores lineales L_n satisfacen las hipótesis del Teorema 3.1.34 de [4] con

$N = 4\left(\sup_r a_r^+ + \sup_s a_s^-\right)$, $L_{nm} = L_{n+m}|_{\iota(M_n)}$, $m = 0$, y cualquier $\alpha > 0$.

Esto prueba la proposición para L. La prueba para $\tilde{L}$ es similar.

■

En el próximo teorema probaremos que para cada $x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$,

$$tr\left(\rho^{1-\theta} y \rho^{\theta} \mathcal{T}_t(x)\right) = tr\left(\rho^{1-\theta} \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)\, \rho^{\theta} x\right), \ \forall\, \theta \in [0,1]. \tag{4.43}$$

La condición de balance detallado (4.29) se sigue de (4.43) poniendo $\theta = 0$.

Teorema 4.7.4 *El SCM de exclusión asimétrica $\mathcal{T}_t$ satisface (4.43) para cada estado invariante $\rho = \sum_{\eta \in S} \rho(\eta)\, |\eta\rangle\langle\eta|$, con $\rho(\eta) = \Pi_{r \in \mathbb{Z}^d} \alpha_r(\eta_r)$ y α_r como en (4.25).*

Demostración. Puesto que G y ρ son diagonales, ambos conmutan. Por tanto

$$\mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta}(G^* x + xG)) = \mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)}(Gy + yG^*)\rho^{\theta} x). \tag{4.44}$$

Las identidades (4.30) y (4.44) implican que

$$\mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)} y \rho^{\theta} \mathcal{L}(x)) = \mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)} \widetilde{\mathcal{L}}(y) \rho^{\theta} x)$$

para todas $x \in \mathrm{dom}\mathcal{L}$, $y \in \mathrm{dom}\tilde{\mathcal{L}}$. Por lo tanto para cada $r > 0$,

$$\mathrm{tr}\left((r - \tilde{L})(\iota(y))\iota(x) \right) = \mathrm{tr}\left(\iota(y)(r - L)(\iota(x)) \right).$$

Como $\iota(\mathcal{M})$ es una esencia para L y $\widetilde{L}$, se sigue que para cada $x\ \in$dom$L$ y toda $y\ \in$dom$\widetilde{L}$, tenemos

$$\mathrm{tr}\left((r - \widetilde{L})(y) x \right) = \mathrm{tr}\left(y(r - L)(x) \right),$$

y después de tomar resolventes

$$\mathrm{tr}\left(y(r - \widetilde{L})^{-1}(x) \right) = \mathrm{tr}\left((r - L)^{-1}(y) x \right), \quad \forall x, y \in L_2(\mathsf{h}).$$

Por ende, para toda $t > 0$ y $n \geq 1$ obtenemos

$$\mathrm{tr}\left(y(nt^{-1} - \widetilde{L})^{-n}(x) \right) = \mathrm{tr}\left((nt^{-1} - L)^{-n}(y) x \right).$$

Haciendo que n tienda a infinito, la fórmula de Trotter-Kato implica la relación de dualidad

$$tr\left(\widetilde{T}_t(y)\,x\right) = tr(y\,T_t(x)), \tag{4.45}$$

y al reemplazar en (4.45) los operadores $x, y \in \mathcal{M}$ por $\rho^{\theta/2}x\rho^{(1-\theta)/2}$, $\rho^{(1-\theta)/2}y\rho^{\theta/2}$ encontramos

$$\mathrm{tr}\left(\rho^{(1-\theta)}\widetilde{T}_t(y)\rho^{\theta}\,x\right) = \mathrm{tr}\left(\rho^{(1-\theta)}y\rho^{\theta}\,T_t(x)\right).$$

Luego (4.43) se sigue de la densidad débil* de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$. ■

Para terminar probaremos que la igualdad (4.43) es satisfecha por cada estado invariante en la envolvente convexa de $\mathcal{I}_q$.

Teorema 4.7.5 *La fórmula de balance detallado (4.43) se cumple para cada estado invariante ρ en la envolvente convexa cerrada de $\mathcal{I}_q$.*

Demostración. Sea $\rho = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_j$ con $\rho_j \in \mathcal{I}_q$ y $\sum_j \lambda_j = 1$, una combinación convexa de elementos en $\mathcal{I}_q$.

Primero notemos que $\rho^{\theta} \in \mathscr{T}_1$, si $q(r)$ es suficientemente regular. Por ejemplo para $q(r) = e^{\beta|r|}$ y $c > 0$ tenemos $\rho_c(\eta) \leq e^{-(\frac{ce^{\beta}}{1+ce^{\beta}})K_{\eta}}$, luego con $\tilde{c} = \min\{c_j : 1 \leq j \leq n\}$ se sigue que

$$\rho(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_{c_j}(\eta) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-(\frac{c_j e^{\beta}}{1+c_j e^{\beta}})K_{\eta}} \leq e^{-(\frac{\tilde{c}e^{\beta}}{1+\tilde{c}e^{\beta}})K_{\eta}},$$

usando esta desigualdad y los mismos argumentos para probar (4.31) se puede ver que $\rho^{\theta} \in \mathscr{T}_1$.

Por otro lado, los operadores ρ, G conmutan por ser diagonales respecto a una misma base por lo cual

$$\mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)}y\rho^{\theta}(G^*x + xG)) = \mathrm{tr}(\rho^{(1-\theta)}(Gy + yG^*)\rho^{\theta}x);$$

además gracias a la Observación 4.7.2,

$$tr\left(\rho^{1-\theta}\Phi\,(y)\,\rho^{\theta}x\right) = tr\left(\rho^{1-\theta}y\rho^{\theta}\Phi\,(x)\right),\ \forall\ x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h}),$$

es decir las relaciones (4.44) y (4.30) también valen para ρ, luego usando los argumentos de la prueba del Teorema 4.7.4 podemos concluir que la combinación lineal convexa ρ satisface (4.43).

Ahora supongamos que $\rho = \|\cdot\|_1 - \lim_n \rho_n$ donde cada ρ_n es una combinación convexa de elementos en $\mathcal{I}_q$. Debido a la desigualdad (1.1) obtenemos $\|\rho - \rho_n\| \leq \|\rho - \rho_n\|_1$ y $\rho = \lim_n \rho_n$, entonces por la continuidad de la función $f(x) = x^\theta$ y por cálculo funcional también se cumple $\rho^\theta = \lim_n \rho_n^\theta$; de esto y de la continuidad con la norma de operadores de una funcional de la forma $tr((\cdot)A)$ se tiene,

$$\begin{aligned} tr\left(\rho^{1-\theta} y \rho^\theta \mathcal{T}_t(x)\right) = \lim_n tr\left(\rho_n^{1-\theta} y \rho_n^\theta \mathcal{T}_t(x)\right) &= \\ \lim_n tr\left(\rho_n^{1-\theta} \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)\, \rho_n^\theta x\right) &= tr\left(\rho^{1-\theta} \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)\, \rho^\theta x\right), \end{aligned}$$

pues cada ρ_n satisface (4.43). Esto culmina la prueba. ■

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Siguiendo el enfoque de Chebotarev construimos el semigrupo mínimo en un álgebra de von Neumann arbitraria $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathsf{h})$, y hemos discutido condiciones necesarias y suficientes para su conservatividad. Nuestro Teorema 2.5.3 generaliza, al caso de un álgebra de von Neumann arbitraria, condiciones necesarias y suficientes de *conservatividad* bien conocidas en el caso $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, vea [14], [6]. También en el Teorema 2.4.7 hemos generalizado el criterio de E. B. Davies [11] y una condición necesaria y suficiente para conservatividad obtenida recientemente por Fagnola-Rebolledo [16] y García-Quezada [24].

Con nuestras dos hipótesis menos restrictivas que la condición de Accardi y Kozyrev, llamadas *decaimiento polinomial* y *decaimiento exponencial,* (3.4) y (3.5) respectivamente, probamos que se siguen obteniendo generadores de semigrupos dinámicos cuánticos de Markov de sistemas cuánticos cuasi-genéricos deducidos por Accardi-Kozyrev [2].

En la parte final de este trabajo empleamos otro modelo de los últimos investigadores (deducido también mediante el método del límite estocástico [2]), para construir el *semigrupo dinámico cuántico de exclusión asimétrica* asociado a un modelo de conductividad eléctrica en un retículo. Obtuvimos estados diagonales (o clásicos) invariantes para este semigrupo y mostramos que corresponden con medidas invariantes de procesos de exclusión clásicos diferentes de aquellos procesos de exclusión estudiados por Liggett [30]. También obtuvimos que el *sdc* de exclusión asimétrica satisface una condición de balance detallado cuántico para cualquier estado invariante fiel y que todo estado inicial es conducido al equilibrio por el semigrupo.

En el futuro quedan pendientes, entre otras, las siguientes tareas:

i) La caracterización completa de los estados estacionarios del SCM de exclusión asimétrica, es decir, quedan abiertas las preguntas: ¿existen otros estados invariantes diagonales? ¿existen estados invariantes no clásicos?
ii) La caracterización de los dominios de atracción del mismo semigrupo.
iii) La estimación o cálculo de la velocidad de convergencia al equilibrio (*gap* espectral).
iv) La búsqueda de espacios invariantes bajo el semigrupo.
v) La aplicación de nuestro método a otros generadores de la misma clase.
vi) El estudio de restricciones del generador infinitesimal a otras álgebras conmutativas, diferentes del álgebra diagonal.

Bibliografía

[1] Abramowitz M., Stegun I. A., (eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, (1972).

[2] Accardi L., Kozyrev S., *Lectures on Quantum Interacting Particle Systems.* In L. Accardi and F. Fagnola (Editors) *Quantum Interacting Particle Systems*, p. 1-195, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (2002).

[3] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I., *Quantum theory and its stochastic limit.* Springer-Verlag, Berlin, (2002).

[4] O. Bratteli and D. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* Vol I, Springer-Verlag, 1981; segunda edición (1997).

[5] R. Carbone, *Exponential Ergodicity of Some Quantum Markov Semigroups*, Ph.D Thesis, Università Degli Studi di Milano, Italia, (2000).

[6] A.M. Chebotarev, *The Theory of Conservative Dynamical Semigroups and its Applications.* Moscow Institute of Electronics and Mathematics March, (1990).

[7] A.M. Chebotarev, *Twelve lectures on quantum probability*, Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado), Sociedad Matemática Mexicana. México, (2000).

[8] E. Christensen and D. E. Evans, *Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups,* J. London Math. Soc., 20, No. 2, 358-368, (1979).

[9] A. Connes, *Noncommutative Geometry* , Academic Press, (1994).

[10] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990; cuarta impresión corregida (1997).

[11] E. B. Davies, *Quantum dynamical semigroups and the neutron-diffusion equation.* Rep. Math. Phys. 11, pp. 169-188, (1977).

[12] J. Dixmier, *Von Neumann Algebras* North Holland, Amsterdam (1981).

[13] Evans M., Hudson R.L., *Multidimensional quantum diffusions.* In: Quantum Probability and Applications III, Accardi L and von Waldenfels W. (Editors), Springer Lect. Notes Math. 1303, 69-88, (1998).

[14] F. Fagnola, *Quantum Markov Semigroups and Quantum Flows,* Proyecciones (Revista de Matemática), Vol. No. 3, Antofagasta-Chile (1999).

[15] F. Fagnola and R.Quezada, *Two photon absorption and emission process, Infinite Dimens. Anal.* Quantum *Probab. Rel.* Topics 8, 573-591, (2005).

[16] F. Fagnola and R. Rebolledo *Quantum Markov semigroups and their Stationary States.* Stochastic Analysis and Mathematical Physics II. 4th International ANESTOC Workshop in Santiago, Chile. R. Rebolledo Editor, Birkhäuser, (2002).

[17] F. Fagnola and R. Rebolledo, *The approach to equilibrium of a class of quantum dynamical semigroups,* Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. *Rel. Topics,* **1** n.4, 561–572, (1998).

[18] F. Fagnola and R. Rebolledo, *Lectures on the qualitative analysis of quantum Markov semigroups*, in *Quantum interacting particle systems (Trento, 2000)*, 197–239, *QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal.*, **14**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002).

[19] A. Frigerio, *Quantum dynamical semigroups and approach to equilibrium, Lett. in Math. Phys.*, **2**, 79–87, (1977).

[20] A. Frigerio, A. Kossakowski, V. Gorini and M. Verri, Quantum detailed balance and KMS condition, *Commun. Math. Phys.* **57**, 97–110, (1977).

[21] A. Frigerio and M. Verri, *Long-Time Asymptotic Properties of Dynamical Semigroups on W^*-Algebras, Math. Zeitschrift*, **180**, 275–286, (1982).

[22] J. C. García Corte, *Una clase de transformaciones completamente positivas no acotadas y conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra*, Tesis de doctorado, UAM-Iztapalapa, Mexico, (1998).

[23] J. C. García Corte, Comunicación personal, (2008).

[24] J. C. García and R. Quezada *Hille-Yosida estimate and nonconservativity criteria for quantum dynamical semigroups.* Infinite Dimens. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics, **7** n.3, 383-394, (2004).

[25] D. Goswami and K. B. Sinha, *Minimal quantum dynamical semigroups on a von Neumann Algebra,* Infinite Dim. Anal., Quant. and Rel. Topics. Vol. 2, No. 2, 221-239, (1999).

[26] Guichardet A., *Produits tensorieles infinis et represéntations des relations d'anticommutation*, Annales scientifiques de l'École Normal Superieur 3e série, 83, p. 1-52, (1966).

[27] K. Jörgens, *Linear Integral Operators*, Pitman Advanced Publishing Program, (1982).

[28] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators,* Springer-Verlag, New York, (1966).

[29] M.A. Krasnoselskii, et al., *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff International Pub., Leyden (Holanda), (1976).

[30] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer, New York, (1985).

[31] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups,* Commun. Math. Phys., 48, No. 2, 119-130, (1976).

[32] Lindsay J. M. and Wills S. J., *Quantum stochastic operator cocycles via associated semigroups*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 142, 535-556, (2007).

[33] Lindsay J. M. and Wills S. J., *Construction of some quantum stochastic operator cocycles by the semigroup method*, Proc. Math. Sci, Vol. 116, 519-529, (2006).

[34] K. Mohari and K. B. Sinha, *Stochastic dilations of minimal quantum dynamical semigroups,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **103** 159-173, (1992).

[35] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, (1983).

[36] R. Rebolledo, Decoherence of quantum Markov semigroups, Annalles Institut Henri Poincaré, vol.41, 349-373, 2005.

[37] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1 Functional Analysis*, Academic Press. New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, (1980).

[38] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2 Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press. New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, (1980).

[39] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (second edition), McGraw-Hill, (1974).

[40] J. L. Sauvageot *A survey of operator algebras,* Quantum Probability Communications, Vol. XII, S. Attal and J.M Lindsay editors, (Grenoble, 1998), 173-194, QP-PQ, XII, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2003).

[41] V. S. Sunder, *An invitation to von Neumann algebras*, Springer-Verlag, (1997).

[42] M. Takesaky, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, (1979).

[43] von Neumann J., *On infinite direct products*, Compositia Math. 6, 1-77, (1939).

[44] Wills S.J., *On the generators of quantum stochastic operator cocycles*, Markov Processes and Related Fields, Vol. 13, 191-211, (2007).