

Universidad Autónoma Metropolitana

UNIDAD IZTAPALAPA

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS
MÉTRICAS d_p EN LOS CONJUNTOS
DIFUSOS

Tesis para obtener el grado de
Doctora en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Kinrha Aguirre De la Luz

kinrha@gmail.com

matrícula 208381410

Director de tesis: Dr. Iván Sánchez Romero

Jurado:

Presidente: Dr. Roberto Quezada Batalla

Secretario: Dr. Iván Sánchez Romero

Vocal: Dr. Manuel Sanchís López

Vocal: Dr. Mikhail Tkatchenko

Vocal: Dr. Daniel Roberto Jardón Arcos

16 de mayo de 2023

*A mis padres
Romualdo Aguirre Flores y
Ma. Teresa De la Luz Rivas*

Agradecimientos

A mi familia y a mi pareja por su confianza.

A mi asesor y amigo Iván Sánchez Romero, por su paciencia y pericia.

Al Dr. Rogelio Fernández Alonso González, por su ayuda para la conclusión del presente trabajo.

A los Drs. Roberto Quezada, Manuel Sanchis, Daniel Roberto Jardón y Mikhail Tkatchenko por su atención.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías por el apoyo brindado.

Índice general

1. Introducción	2
2. Resumen	5
3. Preliminares	7
3.1. Espacios métricos	7
3.2. Espacios L^p	14
3.3. Conjuntos Difusos	23
4. Métricas d_p en $\mathcal{F}(X)$	31
5. Espacios $\mathcal{F}_p^*(X)$: la completación de $\mathcal{F}(X)$	42
6. Extensión de Zadeh	58
7. Conclusiones	64

Capítulo 1

Introducción

Los conjuntos están determinados por sus elementos, en otras palabras, la relación de pertenencia juega un papel de suma importancia en la caracterización de cualquier conjunto. Sea C un conjunto, tradicionalmente, cualquier elemento tiene dos posibilidades -con respecto a C -: pertenece o no pertenece. Verbigracia, en el conjunto A conformado por los números reales mayores que 1 se puede afirmar, sin lugar a dudas, que el número 0 no pertenece a A , al contrario del número 2 que sí pertenece. Mas, si agregamos el adverbio *mucho* al adjetivo *mayores* se obtendrá el “conjunto” $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es mucho mayor que } 1\}$, que aunque a simple vista se muestran similares con diferencias nimias, en el segundo la pertenencia se difumina, pierde claridad y se torna difusa. ¿Cuál es un número mucho mayor que 1: 10, 100 o 1,000,000? Ciertamente habrá más objeciones de incluir al número 10 que al número 1,000,000 en el “conjunto” B . En “conjuntos” como B los elementos no tienen completa certeza, pero algunos elementos son más susceptibles de pertenecer que otros, es decir, se puede hablar de una graduación para la pertenencia.

El concepto de *conjunto difuso* que fue introducido por Zadeh en 1965, a diferencia de los conjuntos tradicionales incorpora una pertenencia gradual. Esto es, un conjunto difuso u es una función $u : X \rightarrow [0, 1]$, en donde $u(x)$ puede interpretarse como el grado de pertenencia del elemento x , identificando al cero con la no pertenencia y al uno con la típica pertenencia. En el ejemplo del conjunto difuso B mencionado anteriormente, se tiene que $u_B(10) \leq u_B(100) \leq u_B(1,000,000)$. Naturalmente, surge la cuestión sobre la existencia de un número que sin lugar a dudas sea mucho mayor que uno, es decir, ¿existe x en los números reales tal que $u_B(x) = 1$? A propósito, el ejemplo es de la autoría del propio Zadeh [Za65].

Este trabajo se centrará en una clase particular de conjuntos difusos, que permita mirar a los conjuntos difusos desde la perspectiva de los espacios métricos, para lo cual es necesario precisar ciertos conjuntos, llamados los α -niveles de u . Sea $\alpha \in (0, 1]$, se define $u_\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$, mientras que:

$$u_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} u_\alpha}.$$

El primer paso es considerar al dominio de las funciones que determinan a los conjuntos de nuestro interés como un espacio métrico (X, d) , en segundo lugar discriminar a los

conjuntos difusos que en su imagen no incluyan al uno, pues entre otras cosas, se busca conservar a los conjuntos “tradicionales”. La clase $\mathcal{F}(X)$, eje de este trabajo, es la familia de conjuntos difusos semicontinuos superiormente, con soporte compacto tal que u_1 es no vacío (Definición 19), en otras palabras, los elementos de la clase $\mathcal{F}(X)$ de conjuntos difusos $u : X \rightarrow [0, 1]$ satisfacen las siguientes condiciones:

- a) u es semicontinua superiormente.
- b) Existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, es decir, u_1 es no vacío.
- c) u_0 es compacto.

A partir de d , se pueden encontrar en la literatura, varias opciones para dotar a $\mathcal{F}(X)$ con una métrica, tal como la endográfica, sendográfica o la métrica de Skorakhod, véase [Di90], [Joo00], [Kim01] y [JaSa20]. Sea $p \geq 1$, se construye la métrica d_p , para lo cual, por cierto, se utilizó mucha de la herramienta proporcionada en el Capítulo de Preliminares, sección Espacios L^p , con la finalidad de formar el espacio métrico $(\mathcal{F}(X), d_p)$, objeto de estudio de este trabajo. Sean $u, v \in \mathcal{F}(X)$, la métrica d_p (Definición 22), en cierto sentido compila las *distancias* de u_α a v_α , para $\alpha \in (0, 1]$, de la siguiente manera:

$$d_p(u, v) = \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}},$$

donde la integral anterior corresponde la integral de Lebesgue y d_H es la métrica de Hausdorff. La métrica d_1 (es decir cuando $p = 1$) fue introducida por Klement, Puri y Ralescu, en el caso particular de $X = \mathbb{R}^n$ [KIPuRa86]. El objetivo de estos autores era probar versiones apropiadas de la Ley fuerte de los grandes números y el Teorema del límite central para variables aleatorias difusas. Mientras que la definición general para d_p , considerando $X = \mathbb{R}^n$, fue dada por Diamond y Kloeden [DiKI90].

El primer resultado sobresaliente de este trabajo es la demostración de la monotonía en la familia de métricas $\{d_p\}_{p \geq 1}$ (Corolario 5). Esto es, que para cualesquiera $u, v \in \mathcal{F}(X)$, se cumple que $d_{p_1}(u, v) \leq d_{p_2}(u, v)$, siempre que $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Más aún, los Ejemplos 11 y 12 dan cuenta de la existencia de casos donde la desigualdad es estricta.

Empero, es el Teorema 18 el que establece la primera propiedad vinculatoria entre (X, d) y $(\mathcal{F}(X), d_p)$: el primero es separable si y sólo si, el segundo también lo es. En la demostración queda de manifiesto la importancia y la relación de la métrica d_H con $\mathcal{F}(X)$, para lograr tal cometido.

Por otra parte, el Ejemplo 13 muestra que aunque el espacio (X, d) sea completo, no necesariamente $(\mathcal{F}(X), d_p)$ resultará completo. La importancia de este ejemplo se debe no sólo a que desafía la propiedad de completitud, sino que ha sido tomado como modelo para la demostración de resultados de considerable importancia, tales como el Teorema 22 que concluye la compacidad y, por tanto la completitud, de (X, d) a partir de la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

Lo siguiente es atender el problema de la completitud de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, apelando a su completación $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$. Sin embargo, establecer la completitud de $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ requirió

un trabajo tenaz, que se benefició de conceptos, resultados y herramientas del Análisis Real, así como del trabajo realizado por Huang y Wu [HuWu18]. Esta demostración es importante porque, además del resultado en sí mismo, subyace una construcción metódica que revela la potencia de la métrica de Hausdorff d_H aplicada en los α -niveles. Y, como beneficio adicional, el Teorema 18 permite concluir la separabilidad de $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$, suponiendo la de (X, d) . Los mencionados resultados han sido plasmados en el artículo [AS22].

En el último capítulo se considera una función entre dos espacios métricos $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ con miras a construir una nueva función \hat{f} -la extensión de Zadeh- entre los respectivos espacios métricos $(\mathcal{F}(X), d_p)$ y $(\mathcal{F}(Y), d'_p)$ tal que \hat{f} se comporte bien con respecto a los α -niveles, es decir que $[\hat{f}(u)]_\alpha = f(u_\alpha)$. La extensión de Zadeh no logra por sí misma tal objetivo, tal fin necesita la presencia de la continuidad de f (Proposición 15). Teniendo en cuenta los beneficios de partir de una función f continua, surge la interrogante sobre si de la continuidad de \hat{f} , se puede deducir de la continuidad de f , en general la respuesta es negativa, como lo muestra el Ejemplo 15. Sin embargo, en el caso particular de espacios métricos compactos, se consigue la continuidad de \hat{f} (Teorema 24), con lo que se concluye la presente investigación.

Capítulo 2

Resumen

Sea (X, d) un espacio métrico. Un *conjunto difuso* es una función $u : X \rightarrow [0, 1]$. Se define para $\alpha \in (0, 1]$, $u_\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$, y

$$u_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} u_\alpha}.$$

La clase de los conjuntos difusos semicontinuos superiormente, con soporte compacto y normales, denotada por $\mathcal{F}(X)$ (Definición 19) se define como la clase de conjuntos difusos $u : X \rightarrow [0, 1]$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- a) u es semicontinua superiormente.
- b) Existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, es decir, u_1 es no vacío.
- c) u_0 es compacto.

Sean $p \geq 1$ y $u, v \in \mathcal{F}(X)$, se define la métrica (Definición 22) d_p , de la siguiente manera:

$$d_p(u, v) = \left[\int_0^1 d_H^p(u_\alpha, v_\alpha) d\alpha \right]^{\frac{1}{p}},$$

donde la integral anterior es la integral de Lebesgue y d_H es la distancia de Hausdorff.

En primer lugar, se prueba la monotonía en la familia de métricas $\{d_p\}_{p \geq 1}$ (Proposición 13) y con los Ejemplos 11 y 12 se deja en claro que existen casos donde la desigualdad es estricta.

En el Teorema 18 se establece que (X, d) es separable si y sólo si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es separable. Sin embargo, la propiedad de completitud no corre con la misma suerte, únicamente se consigue una dirección: si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo, entonces (X, d) también lo es, la otra implicación es refutada por el Ejemplo 13. Teniendo la certeza de que la completitud de (X, d) no garantiza la completitud del espacio métrico de los conjuntos difusos semicontinuos superiormente, con soporte compacto y normales, lo siguiente es investigar acerca de la completación de $\mathcal{F}(X)$, para semejante labor se propone (Definición 20) a la clase $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ compuesta por los conjuntos difusos que cumplen:

- a) u es semicontinua superiormente.
- b) Existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, es decir, u_1 es no vacío.
- c) u_α es compacto para toda $\alpha \in (0, 1]$.
- d) $\int_0^1 (d_H([u]_\alpha, \{x_0\}))^p d\alpha < \infty$, para algún $x_0 \in X$.

En el Teorema 20 se prueba que, efectivamente, $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es completo y que $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es un subconjunto denso. No sobra decir que, $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$, al igual que $(\mathcal{F}(X), d_p)$, hereda la separabilidad de (X, d) .

El Capítulo 5 finaliza con algunas propiedades menores sobre las propiedades que comparten $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ y (X, d) , verbigracia el Teorema 22 que establece la compacidad y por tanto la completitud de (X, d) , a partir de la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

En el último capítulo se presenta a la extensión de Zadeh, una función $\hat{f} : (\mathcal{F}(X), d_p) \rightarrow (\mathcal{F}(Y), d'_p)$ que se construye a partir de una función existente entre los espacios métricos $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ y cuya culminación es el Teorema 24 que establece la continuidad de $\hat{f} : (\mathcal{F}(X), d_p) \rightarrow (\mathcal{F}(X), d_p)$, a partir de la continuidad de $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$, considerando $p \geq 1$ y X compacto.

Capítulo 3

Preliminares

Este primer apartado se puede considerar como los prolegómenos del presente trabajo, en el sentido en que aquí se exponen los conceptos fundamentales, que son el cimiento para los capítulos posteriores. Empero, también pueden percibirse como redundantes para lectores familiarizados con el tema. En cualquier caso, los resultados de los capítulos subsiguientes apelarán de una u otra manera al contenido de este capítulo.

El Capítulo de Preliminares se encuentra organizado en tres secciones: Espacios métricos, Espacios L^p y Conjuntos difusos. En cada una de ellas se exponen definiciones y resultados relevantes para los propósitos de esta investigación.

3.1. Espacios métricos

En concordancia con el título de la sección, en este apartado se definirá el concepto de espacio métrico, teniendo como objetivo construir con cierto detalle la métrica de Hausdorff, misma que cobrará especial significación a lo largo de este trabajo. A la par, esta sección tiene la intención de definir y enunciar propiedades topológicas particularmente útiles en el estudio de espacios métricos, para tal propósito se ha consultado a [Iri08] y [En89].

Definición 1. Un *espacio métrico* (X, d) consiste en un conjunto X y una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, llamada *métrica*, que satisface los siguientes axiomas:

- i) Homogeneidad positiva: $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- ii) Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$, para toda $x, y \in X$.
- iii) Desigualdad del triángulo: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para toda $x, y, z \in X$.

Se dice que d es una *seudométrica*, si en lugar de i), la función d satisface lo siguiente:

- i') Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$.

A modo de ejemplo, se presentan a continuación algunos espacios métricos para ilustrar la definición anterior:

Ejemplo 1. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se define la función:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

La cual se puede generalizar a \mathbb{R}^n de la siguiente manera: sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n , entonces:

a) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$

b) $d_2(x, y) = [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}.$

Para comprobar que d_2 es, efectivamente, una métrica se emplea la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ejemplo 2. Si $d_i : X_i \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica en X_i para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces, es posible construir las siguientes métricas en $X = \prod_{i=1}^n X_i$ de la siguiente manera:

a)

$$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i).$$

b)

$$d_4(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p \geq 1.$$

Ejemplo 3. Sean $X = \{x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ y $p \geq 1$. Entonces, es posible construir la siguiente métrica en X :

$$d_5(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ejemplo 4 (Métrica discreta). Sea X un conjunto no vacío. Se define la función:

$$d_6 : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene lo siguiente:

$$d_6(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y. \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Si $d'_6(x, y) = 0$, para cualesquiera $x, y \in X$, entonces d'_6 es una seudométrica la cual es conocida como la *seudométrica indiscreta*.

Ejemplo 5 (Métrica del supremo). Sea X el conjunto de las funciones reales acotadas, definidas en el intervalo $[a, b]$. Se define la función:

$$d_7(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Ejemplo 6. Sea X el conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$. Se define la función:

$$d_8(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Sean (X, d) un espacio métrico, un punto $a \in X$ y un número real $r > 0$. Se define la *bola abierta* con centro en a y radio r como el conjunto:

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Un conjunto U es *abierto en X* , si es la unión de una familia de bolas abiertas. De forma equivalente, U es abierto si y sólo si para toda $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. En particular, toda bola abierta es un conjunto abierto. Por otro lado, un conjunto A es *cerrado en X* , si $X \setminus A$ es abierto.

Definición 2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A , si para toda $r > 0$ se cumple que $A \cap [B_r(x) \setminus \{x\}] \neq \emptyset$.

La definición de conjunto cerrado se puede describir en términos de sus puntos de acumulación: A es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 3. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $\mathcal{C} = \{U_\lambda \subseteq X : \lambda \in I\}$ es una *cubierta abierta* de A en X , si $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ con U_λ un conjunto abierto en X , para toda $\lambda \in I$.

Definición 4. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es *compacto*, si toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita.

Sea X un espacio métrico, $\mathcal{K}(X)$ denota a la familia de compactos no vacíos de X , el cual es llamado *el hiperespacio de compactos* de X . A continuación se define la métrica de Hausdorff, una métrica para los elementos de $\mathcal{K}(X)$ y que será el pilar del presente trabajo.

Definición 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Considérese $x_0 \in X$ y $A \subseteq X$ no vacío. Se define la distancia del punto x_0 al conjunto A , de la siguiente manera:

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Formalmente d , así definida, no puede considerarse una métrica, pues en primer lugar $d : X \times Pot(X) \rightarrow [0, \infty)$, donde $Pot(X) = \{A : A \subseteq X\}$ es el *conjunto potencia* de X .

Obsérvese que, si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$. Sin embargo, $d(x_0, A) = 0$ no implica que $x \in A$: el intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, tiene la propiedad de que $d(a, A) = d(b, A) = 0$, pero tanto a como b no pertenecen a (a, b) .

Proposición 1. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es distinto del vacío y $b, c \in X$. Entonces,

$$d(b, A) \leq d(b, c) + d(c, A).$$

Demostración. Sea $a \in A$. Debido a que d es una métrica en X , se tiene que $d(b, a) \leq d(b, c) + d(c, a)$. Por definición, $d(b, A) \leq d(b, a)$, de donde se sigue que $d(b, A) \leq d(b, c) + d(c, a)$. Por lo que $[d(b, A) - d(b, c)]$ es una cota inferior del conjunto $\{d(c, a) : a \in A\}$, i. e., $d(b, A) - d(b, c) \leq d(c, A)$. En consecuencia, $d(b, A) \leq d(b, c) + d(c, A)$. \square

En particular, si $A \in \mathcal{K}(X)$ y $x_0 \in X$, entonces la distancia de x_0 a A , se puede reescribir de la siguiente manera:

$$d(x_0, A) = \min\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Por lo que, cuando $A \in \mathcal{K}(X)$, si $d(x_0, A) = 0$, entonces $x_0 \in A$, pues como $A \in \mathcal{K}(X)$, se tiene que $\min\{d(x_0, a) : a \in A\} = 0$ es decir, existe $a \in A$, tal que $d(x_0, a) = 0$, usando el hecho de que d es una métrica, se tiene que $x_0 = a$, y por tanto $x_0 \in A$.

Definición 6 (Seudométrica de Hausdorff). Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Se define la función $d_\rho : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, \infty)$ como sigue:

$$d_\rho(A, B) = \max\{d(a, B) | a \in A\}.$$

Nótese que la función d_ρ no es simétrica. Considérese al espacio métrico \mathbb{R} con la métrica usual d . Sean $a < b < c < e \in \mathbb{R}$, $I_1 = [a, b]$ e $I_2 = [c, e]$. Entonces,

$$d_\rho(I_1, I_2) = c - a \text{ y } d_\rho(I_2, I_1) = e - b,$$

que no siempre coinciden. Verbigracia, si $I_1 = [2, 3]$ e $I_2 = [4, 8]$, se tiene lo siguiente:

$$d_\rho(I_1, I_2) = 2 \text{ y } d_\rho(I_2, I_1) = 5.$$

Proposición 2. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $d_\rho(A, A) = 0$.
- ii) $d_\rho(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subseteq B$.
- iii) Si $B \subseteq C$, entonces $d_\rho(A, C) \leq d_\rho(A, B)$.
- iv) $d_\rho(A \cup B, C) = \max\{d_\rho(A, C), d_\rho(B, C)\}$.
- v) Si $A \subseteq B$, entonces $d_\rho(A, C) \leq d_\rho(B, C)$.
- vi) $d_\rho(A, C) \leq d_\rho(A, B) + d_\rho(B, C)$.

Demostración. i) Es inmediato de la definición.

En ii), supóngase que $d_\rho(A, B) = 0$. Sea $a \in A$. Entonces, $d(a, B) \leq d_\rho(A, B) = 0$. Por lo que $d(a, B) = 0$, y como $B \in \mathcal{K}(X)$, se tiene que $a \in B$, lo que implica que $A \subseteq B$. Ahora, supóngase que $A \subseteq B$, entonces, por definición $d_\rho(A, B) = \max d(a, B) = 0$

Para iii) obsérvese que $d(a, C) \leq d(a, B) \leq d_\rho(A, B)$ para toda $a \in A$. Así que $\max\{d(a, C) : a \in A\} \leq d_\rho(A, B)$, i.e., $d_\rho(A, C) \leq d_\rho(A, B)$.

El inciso iv) se sigue de las propiedades del máximo. v) se sigue de iv).

En vi), por la Proposición 1, se tiene que:

$$d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, C) \text{ para cualesquiera } a \in A \text{ y } b \in B.$$

En consecuencia,

$$d(a, C) \leq \min\{d(a, b) : b \in B\} + \max\{d(b, C) : b \in B\} \leq$$

$$\min\{d(a, b) : b \in B\} + \min\{d(b, C) : b \in B\} \leq d(a, B) + d_\rho(B, C).$$

Por lo tanto,

$$\max\{d(a, C) : a \in A\} \leq \max\{d(a, B) : a \in A\} + d_\rho(B, C).$$

De donde,

$$d_\rho(A, C) \leq d_\rho(A, B) + d_\rho(B, C).$$

□

Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$, se define la *métrica de Hausdorff* entre A y B de la siguiente forma:

$$d_H(A, B) = \max\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\} = \max\{d_\rho(A, B), d_\rho(B, A)\}.$$

Obsérvese que $d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, \infty)$.

Proposición 3. La función $d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, \infty)$ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Demostración. i) Tenemos que $A = B$ si y sólo si $d_H(A, B) = 0$, por el inciso ii) de la Proposición 2.

ii) Se tiene que:

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{d_\rho(A, B), d_\rho(B, A)\} = \\ &= \max\{d_\rho(B, A), d_\rho(A, B)\} = d_H(B, A). \end{aligned}$$

iii) Sean $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$. El inciso vi) de la Proposición 2 implica lo siguiente:

$$d_\rho(A, C) \leq d_\rho(A, B) + d_\rho(B, C) \text{ y } d_\rho(C, A) \leq d_\rho(C, B) + d_\rho(B, A).$$

De donde se sigue que:

$$d_H(A, C) = \max\{d_\rho(A, C), d_\rho(C, A)\} \leq$$

$$\begin{aligned} & \text{máx}\{d_\rho(A, B) + d_\rho(B, C), d_\rho(C, B) + d_\rho(B, A)\} \leq \\ & \text{máx}\{d_\rho(A, B), d_\rho(B, A)\} + \text{máx}\{d_\rho(B, C), d_\rho(C, B)\}. \end{aligned}$$

Es decir, $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$. □

Los siguientes lemas enuncian propiedades técnicas de d_H que, en capítulos posteriores, serán auxiliares en la demostración de resultados significativos para el presente trabajo.

Lema 1. Sean $x \in X$ y $A, B \in \mathcal{K}(X)$, tales que $A \subseteq B$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$d_H(A, \{x\}) \leq d_H(B, \{x\}).$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \subseteq B \in \mathcal{K}(X)$, se sigue que:

$$\begin{aligned} d_H(A, \{x\}) &= \text{máx}\{d_\rho(A, \{x\}), d_\rho(\{x\}, A)\} = \\ &= \text{máx}\{\text{máx}_{a \in A}\{d(a, \{x\})\}, d(x, A)\} = \\ &= \text{máx}\{\text{máx}_{a \in A}\{d(a, x)\}, \text{mín}_{a \in A}\{d(x, a)\}\} = \\ &= \text{máx}_{a \in A} d(a, x) \leq \text{máx}_{b \in B} d(b, x) = \\ &= \text{máx}\{\sup_{b \in B}\{d(b, x)\}, \text{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}\} = \\ &= \text{máx}\{d_\rho(B, \{x\}), d_\rho(\{x\}, B)\} = d_H(B, \{x\}). \end{aligned}$$

□

Lema 2. Sean $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 \in \mathcal{K}(X)$ tales que $A_1 \subseteq B_1 \subseteq C_1$ y $A_2 \subseteq B_2 \subseteq C_2$. Entonces,

$$d_H(B_1, B_2) \leq \text{máx}\{d_H(A_1, C_2), d_H(A_2, C_1)\}.$$

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$d_H(B_1, B_2) = \text{máx}\{d_\rho(B_1, B_2), d_\rho(B_2, B_1)\}.$$

De acuerdo con los incisos iii) y v) de la Proposición 2, se tiene que

$$\begin{aligned} d_H(B_1, B_2) &= \text{máx}\{d_\rho(B_1, B_2), d_\rho(B_2, B_1)\} \leq \text{máx}\{d_\rho(B_1, A_2), d_\rho(B_2, A_1)\} \leq \\ & \text{máx}\{d_\rho(C_1, A_2), d_\rho(C_2, A_1)\} \leq \text{máx}\{d_\rho(C_1, A_2), d_\rho(A_2, C_1), d_\rho(C_2, A_1), d_\rho(A_1, C_2)\} = \\ & \text{máx}\{d_H(A_1, C_2), d_H(A_2, C_1)\}. \end{aligned}$$

□

Definición 7. Un espacio métrico (X, d) es *isométrico* al espacio métrico (X', d') , si existe una biyección $f : X \rightarrow X'$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$.

Es decir, los espacios isométricos tienen la misma estructura de espacio métrico. Nótese que la propiedad de isometría es simétrica.

Definición 8. La *cerradura* de A , en símbolos \bar{A} , es el conjunto de puntos $x \in X$ tales que para toda $r > 0$, la bola abierta con centro en x y radio r interseca a A .

Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Se dice que A es *acotado*, si existe un número positivo $M \in \mathbb{R}$, tal que para cualesquiera $x, y \in A$ se cumple que $d(x, y) \leq M$. Equivalentemente, se tiene que A es acotado, si el conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ es acotado en \mathbb{R} .

Definición 9. Sean (X, d) un espacio métrico y un conjunto acotado $A \subseteq X$. Se define el *diámetro* de A como $\text{Diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Obsérvese que, aunque el diámetro de A es un número real r , no necesariamente existen $x, y \in A$ tales que $d(x, y) = r$, por ejemplo, tómese cualquier intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica usual, el cual tendrá diámetro $b - a$. No obstante, no existen $x, y \in (a, b)$ tales que $d(x, y) = b - a$.

Teorema 1. [Iri08] Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado y acotado en X . Además, si X es compacto y A cerrado en X , se tiene que A también es compacto.

Definición 10. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *denso* en X si $\bar{A} = X$. Un espacio X se llama *separable* si contiene algún subconjunto denso numerable. Si (X, d) es separable, todo subconjunto de X es también separable.

Inmediatamente se sigue que todo conjunto numerable es separable. El conjunto de los números reales \mathbb{R} con la métrica usual, es el ejemplo clásico de un espacio separable, tomando como subconjunto denso a los números racionales \mathbb{Q} . Sin embargo, el subespacio de los números irracionales es también un espacio métrico separable.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_n$ en X *converge* al punto $x \in X$, en símbolos $\{x_n\} \rightarrow x$, si para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \text{ para toda } n \geq N.$$

Análogamente, se dice que una sucesión $\{x_n\}_n$ en X es de *Cauchy*, si para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \text{ para cualesquiera } n, m \geq N.$$

Obsérvese que si una sucesión $\{x_n\}_n$ es de Cauchy, o convergente, entonces su rango es un conjunto acotado.

Definición 11. Se dice que un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en él es convergente. Particularmente, si (X, d) es compacto entonces también es completo.

A continuación se enuncian algunas propiedades métricas/topológicas que comparten (X, d) y $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Teorema 2. [En89] Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se cumple lo siguiente:

- a) (X, d) es separable si y sólo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es separable.
- b) (X, d) es completo si y sólo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es completo.
- c) (X, d) es compacto si y sólo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es compacto.

3.2. Espacios L^p

La finalidad de esta sección es presentar a los espacios $L^p(X)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y mostrar algunas de sus propiedades que en lo posterior serán muy convenientes. La primera, es establecer una comparación entre los espacios $L^{p_1}(X)$ y $L^{p_2}(X)$, cuando $1 \leq p_1 < p_2$.

Una vez descritos los espacios $L^p(X)$, se define una norma apropiada para sus miembros, la llamada L^p -norma ($\|\cdot\|_p$), la aplicación de ésta facilitará varios cálculos posteriores. Cabe mencionar que el camino para corroborar que, efectivamente se trata de una norma no es trivial y requiere de varios resultados previos, en especial para corroborar la desigualdad del triángulo, con tal fin se consultó [Ro10] y [Jo15]. La desigualdad de Minkoski-Riez -como también se le conoce a la desigualdad del triángulo- es también una herramienta cuyas aplicaciones son imprescindibles a lo largo del presente.

Al final se enuncian, a modo de recordatorio, algunos teoremas por demás conocidos de la Teoría de la Medida.

Definición 12. Sea V un espacio vectorial real. Una *norma* en V se define como una función $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ que cumple lo siguiente:

- i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- ii) $\|rx\| = |r| \cdot \|x\|$, para todo $r \in \mathbb{R}$.
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

El inciso iii), al igual que su homólogo en la definición de métrica, es conocido como la desigualdad del triángulo. Al par $(V, \|\cdot\|)$, se le llama un *espacio vectorial normado*. Cuando i) es remplazado por el siguiente enunciado:

- i') Si $x = 0$, entonces $\|x\| = 0$.

Se dice que $\|\cdot\|$ es una *semi-norma*.

Ejemplo 7. Considérese el espacio vectorial \mathbb{R}^n , entonces las siguientes dos funciones definen una norma en \mathbb{R}^n :

- a) $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$.

b) $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, donde $p \geq 1$.

c) Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto y $X = \mathcal{C}[a, b]$ el conjunto de las funciones continuas real valuadas sobre $[a, b]$, se define la norma:

$$\|f\|_{\text{máx}} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

El siguiente ejemplo muestra como cualquier espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$, induce una métrica $d_{\|\cdot\|}$. Es decir, cualquier espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$, puede ser considerado como un espacio métrico $(V, d_{\|\cdot\|})$.

Ejemplo 8. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Se define la función:

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \rightarrow [0, \infty),$$

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|.$$

Sean $x, y, z \in V$. Obsérvese que $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, pues $\|x\| \geq 0$, para toda $x \in V$.

i) Supóngase que $x = y$, entonces $x - y = 0$. La definición de norma, inciso (i), implica $\|x - y\| = 0$. Análogamente, si $\|x - y\| = 0$, se tiene que $x - y = 0$, es decir, $x = y$.

ii) Con ayuda de la definición de norma, inciso (ii), se tiene lo siguiente:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\|\cdot\|}(y, x).$$

iii) Usando el inciso (iii) de la definición de norma, se sigue que

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|}(z, y).$$

Es decir, la función $d_{\|\cdot\|}$ es una métrica en V .

Definición 13. Sean (X, M, μ) un espacio de medida, donde M representa una σ -álgebra y μ una medida sobre M y $p \in [1, \infty)$, el símbolo $L^p(X, M, \mu)$ denota al conjunto de las clases de equivalencia $[f]$, que cumplen lo siguiente:

i) Los elementos de $L^p(X, M, \mu)$ son clases de equivalencia de funciones medibles cuyo dominio es X y sus imágenes son números reales, excepto -tal vez- en un conjunto de medida 0.

ii) Sean f, g dos funciones medibles, entonces $f \sim g$ si y sólo si $f = g$, μ -casi en cualquier parte.

iii) $\int_X |f|^p < \infty$.

Si no existe posibilidad de confusión, escribiremos $L^p(X, \mu) = L^p(X)$ o simplemente L^p .

La condición iii) de la definición anterior, implica que si $f \in L^p(X, M, \mu)$, entonces $f < \infty$ μ -casi en cualquier parte. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$, se define la L^p -norma o la p -norma como la integral $(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ y se denota mediante el símbolo $\|f\|_p$.

Evidentemente, la definición anterior debe ir acompañada de la demostración que atestigüe que efectivamente la p -norma está bien definida, es decir, que $\|f\|_p$ satisface los tres enunciados de la definición de norma, la demostración no es trivial y requerirá de varios resultados previos. A propósito, la desigualdad del triángulo correspondiente a la norma L^p es también conocida como la desigualdad de Minkowski-Riz. Así que por el momento, $\|f\|_p$ es tan sólo un símbolo con la promesa de ser una norma.

Por otro lado, hasta el momento se han considerado espacios L^p con $p \in [1, \infty)$, sin embargo, es posible extender esta definición a $p = +\infty$ y en esa dirección se ofrece la siguiente definición.

Definición 14. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Una función medible f es llamada *acotada esencialmente* si para alguna $0 \leq M < \infty$, se tiene que $|f| \leq M$ μ -casi en cualquier parte (de forma abreviada: μ -ccp). El conjunto de todas las funciones reales esencialmente acotadas está denotado por $L^\infty(X, M, \mu)$ o simplemente L^∞ , si el espacio de medida es claro. Además, se define $\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : |f| \leq M \text{ } \mu\text{-casi en cualquier parte}\}$ o equivalentemente $\|f\|_\infty := \inf\{M > 0 : \mu\{x : |f(x)| > M\} = 0\}$.

Si f es acotada esencialmente, para cualquier sucesión decreciente de números reales $\{M_n\}_n$ tal que $M_n \rightarrow \|f\|_\infty$, se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|f| \leq M_n$, excepto para algún A_n con $\mu(A_n) = 0$. Equivalentemente, $|f| \leq M_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, salvo en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ -que, por cierto también tiene medida cero-, lo que implica $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ -casi en cualquier parte.

Teorema 3. $\|f\|_\infty$ es una norma en $L^p(X)$.

Demostración. 1. Los incisos i) y ii) de la definición de norma se siguen de la definición de ínfimo y de la construcción de $L^p(X)$ como un conjunto de clases de equivalencia.

2. Desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \inf\{M : |f + g| \leq M, \mu - \text{casi en cualquier parte}\} \\ &\leq \inf\{M : |f| + |g| \leq M, \mu - \text{casi en cualquier parte}\} \\ &\leq \inf\{M + N : |f| \leq M \text{ y } |g| \leq N, \mu - \text{casi en cualquier parte}\} \\ &\leq \inf\{M : |f| \leq M, \mu - \text{ccp}\} + \inf\{N : |g| \leq N, \mu - \text{ccp}\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

□

A continuación, la atención se centra en demostrar que $\|\cdot\|_p$ es una norma. El Teorema de Young es el preludeo a la desigualdad de Minkowski-Riez, pues proporciona una herramienta indispensable para la demostración del mismo.

Definición 15. El *conjugado* de un número $p \in (1, \infty)$ es $q = p/(p-1)$, el cual es el único número $q \in (1, \infty)$ que satisface lo siguiente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

El conjugado del número 1 es definido como ∞ y viceversa.

Teorema 4 (Desigualdad de Young). Sean $1 < p < \infty$, q el conjugado de p , a y b dos números positivos. Entonces,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Sean $a, b \geq 0$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante $g(x) = (\frac{1}{p})x^p + \frac{1}{q} - x$, entonces $g'(x) = x^{p-1} - 1$, lo que significa, $g'(x)$ es positiva en el intervalo $(1, \infty)$, negativa en el intervalo $(0, 1)$ y cero cuando $x = 1$. Además $g(0) = \frac{1}{q}$, $g(1) = 0$ lo que implica que la función g no puede ser negativa en el intervalo $(0, \infty)$. En consecuencia,

$$x \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}, \text{ para todo } x > 0.$$

En particular, si $x = \frac{a}{b^{q-1}}$, que resulta ser un número positivo, pues a y b son positivos por hipótesis, tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{b^{q-1}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{a}{b^{q-1}} \right)^p + \frac{1}{q},$$

multiplicando por b^q :

$$\frac{b^q a}{b^{q-1}} \leq \frac{b^q}{p} \left(\frac{a}{b^{q-1}} \right)^p + \frac{b^q}{q},$$

es decir,

$$ab \leq \frac{b^q a^p}{p b^{p(q-1)}} + \frac{b^q}{q}.$$

Por último, utilizando la ecuación $p(q-1) = q$, se obtiene lo deseado. \square

El siguiente teorema, llamado también la desigualdad de Rogers-Hölder, es la piedra angular de esta sección, pues tanto la comparación entre los espacios L^{p_1} y L^{p_2} , para $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, como la desigualdad del triángulo en L^p , se desprenden de este resultado.

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se construye la *función signo* de f (denotada por $sgn(f)$) de la siguiente manera:

$$sgn(f(x)) = \begin{cases} -1, & \text{si } f(x) < 0. \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \\ 1, & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Teorema 5 (Desigualdad de Rogers-Hölder). Sean (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y q el conjugado de p . Si $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, entonces $fg \in L^1(X)$ y

$$\left| \int_X fg \right| \leq \int_X |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Más aún, si $f \neq 0$, μ -casi en cualquier parte, la *función conjugada* de f , $f^* = \|f\|_p^{1-p} \cdot \text{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1} \in L^q(X)$, $\|f^*\|_q = 1$ y

$$\int_X f \cdot f^* = \|f\|_p.$$

Demostración. Para la primera desigualdad, basta probar $|\int_X f| \leq \int_X |f|$, para cualquier función f en \mathbb{R} :

$$\left| \int_X f \right| = \left| \int_X f^+ - \int_X f^- \right| \leq \left| \int_X f^+ + \int_X f^- \right| = \int_X f^+ + \int_X f^- = \int_X |f|.$$

A modo de glosa, nótese que esta desigualdad se convierte en una igualdad, cuando f es no negativa.

Para la segunda desigualdad, obsérvese que si alguna de las funciones f o g es cero μ -ccp, no hay nada que probar, por lo que a lo largo de esta demostración, suponemos que $f \neq 0$ y $g \neq 0$ μ -ccp.

En el caso $p = 1$ y, por tanto, $q = \infty$, la desigualdad se obtiene recurriendo a la monotonicidad de la integral:

$$\int_X |f \cdot g| \leq \int_X |f| \|g\|_\infty = \|g\|_\infty \int_X |f| = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Además, aquí, $f^* = \text{sgn}(f)$, así que:

1. $f \cdot f^* = |f|$, por lo que $\int_X f \cdot f^* = \int |f| = \|f\|_1$, lo que implica que $f^* \in L^\infty$ y,
2. $\|f^*\|_\infty = 1$.

Ahora consideremos el caso $p > 1$. Para lograr la demostración, basta considerar funciones normalizadas. Por lo tanto asumimos que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, es decir,

$$\int_X |f|^p = 1 \text{ y } \int_X |g|^q = 1.$$

A causa de esta suposición, tan sólo se debe probar:

$$\int_X |f \cdot g| \leq 1.$$

La desigualdad de Young es aplicable a casi todos los valores funciones de $|f|$ y $|g|$:

$$|fg| = |f| \cdot |g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \quad \mu - \text{ccp}.$$

De la linealidad de la integral se infiere que $f \cdot g$ es integrable sobre X . Además,

$$\int_X |f \cdot g| \leq \int_X \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} = \frac{1}{p} \int_X |f|^p + \frac{1}{q} \int_X |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por otro lado, $f \cdot f^* = \|f\|_p^{1-p} \cdot |f|^p$ y $|f^*| = \|f\|_p^{1-p} \cdot |f|^{p-1}$, μ -casi en cualquier parte. Por lo tanto,

$$\|f^*\|_q^q = \int_X |f^*|^q = \|f\|_p^{(1-p)q} \int_X |f|^{(p-1)q} = \|f\|_p^{(1-p)p} \int_X |f|^p = \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^p = \|f\|_p = 1 \text{ y}$$

$$\int_X f \cdot f^* = \|f\|_p^{(1-p)} \int_X |f|^p = \|f\|_p^{1-p} \|f\|_p^p = \|f\|_p.$$

□

Las hipótesis de la desigualdad de Hölder, difícilmente pueden mejorarse, tal y como lo muestra el ejemplo en [Ba95], el cual se expone a continuación. Considérese $X = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue y sean $f(x) = x^{-r}$ y $g(x) = x^{-s}$ dos funciones con $r, s > 0$. Si $r + s = 1$, elegimos $p = 1/r$ y $q = 1/s$. Así que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tal cual se requiere en la desigualdad. Con estas suposiciones, tenemos que $fg \notin L^1(X)$, es decir, la desigualdad de Hölder es inaplicable a este caso. Sin embargo, $f \notin L^p(X)$ y $g \notin L^q(X)$. Por último, nótese que $f \in L^t(X)$ para cualquier $t < p$ y lo mismo sucede con la función g .

En lo sucesivo, m denotará la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Corolario 1 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz). Para cualquiera f y g en $L^2(X)$, tenemos que $fg \in L^1(X)$ y $\int_X |fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$, equivalentemente,

$$\int_X |fg| \leq \sqrt{\int_X f^2} \sqrt{\int_X g^2}.$$

Corolario 2. Sea X un conjunto de medida finita y $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$. Entonces $L^{p_2}(X) \subseteq L^{p_1}(X)$. Además,

$$\|f\|_{p_1} \leq c \|f\|_{p_2}, \text{ para toda } f \in L^{p_2}(X),$$

donde $c = [m(X)]^{\frac{p_2-p_1}{p_2 p_1}}$, si $p_2 < \infty$ y $c = [m(X)]^{\frac{1}{p_1}}$ cuando $p_2 = \infty$.

Demostración. Primero, veamos el caso $p_2 < \infty$. La contención se sigue de la monotonicidad de la integral. Para demostrar la desigualdad, tómesese $p = p_2/p_1$, el cual resulta ser mayor que uno. Tómesese $f \in L^{p_2}(X)$, obsérvese que $f^{p_1} \in L^p(X)$. Sea q el conjugado de p . Para poder aplicar el Teorema de Hölder, se toma $g = \chi_X$, la función característica de X , que resulta que ser un elemento de $L^q(X)$, pues $m(X) < \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1}^{p_1} &= \int_X |f^{p_1}| = \int_X |f^{p_1} \chi_X| \leq \|f^{p_1}\|_p \|\chi_X\|_q = \left(\int_X |f|^{p p_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|\chi_X\|_q = \\ &= \left(\int_X |f|^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \|\chi_X\|_q = \|f\|_{p_2}^{p_1} \left(\int_X |\chi_X|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{p_2}^{p_1} [m(X)]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores implican que:

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} [m(X)]^{\frac{1}{p_1 q}}.$$

Como p y q son conjugados, se tiene que $\frac{1}{q} = \frac{p_2 - p_1}{p_2}$. Sustituyendo el valor de $1/q$ en la desigualdad de arriba, se obtiene el valor deseado para c .

Ahora, supóngase que $p_2 = \infty$. Sea $f \in L^\infty$, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq M$ m -casi en cualquier parte. Así que

$$\int_X |f|^{p_1} \leq \int_X M = Mm(X).$$

Esto es, $f \in L^{p_1}$. Además,

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f|^{p_1} \leq \int_X \|f\|_\infty^{p_1} = \|f\|_\infty^{p_1} m(X),$$

lo que quiere decir que,

$$\|f\|_p \leq m(X)^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_\infty.$$

□

Teorema 6 (Desigualdad Minkowski-Riesz). Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L^p(X)$. Entonces, $f + g \in L^p(X)$ y $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Demostración. Primero obsérvese que $f + g$ es medible. Sabiendo que

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

basta considerar $f, g \geq 0$. Sin embargo, si $f = 0$ o $g = 0$ casi en cualquier parte, no hay nada que probar. Así que vamos a suponer que $f > 0$ y $g > 0$ ccp. Es fácil probar la desigualdad para $p = 1$:

$$\|f + g\| = \int_X |f + g| \leq \int_X |f| + |g| = \int_X |f| + \int_X |g| = \|f\| + \|g\|.$$

Sea $1 < p < \infty$. Con base en la desigualdad $(f + g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p(f^p + g^p)$ se asegura que $f + g \in L^p$. La intención es aplicar el resultado de Hölder para demostrar la desigualdad de Minkowski-Riesz, con este fin se verá que $(f + g)^{p-1} \in L^q$, donde q es el conjugado de p :

$$\int_X |(f + g)^{p-1}|^q = \int_X |f + g|^{q(p-1)} = \int_X |f + g|^p < \infty, \text{ pues } f + g \in L^p.$$

Reescribiendo $(f + g)^p$ como $f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$ y aplicando el Teorema de Hölder, tenemos que,

$$\|f + g\|_p^p = \int_X |f + g|^p \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} + \int_X |g| |f + g|^{p-1} \leq \quad (3.1)$$

$$\|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|(f+g)^{p-1}\|_q.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|(f+g)^{p-1}\|_q &= \left(\int_X |(f+g)^{p-1}|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X (f+g)^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_X (f+g)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

De (3.1) y (3.2) se sigue que

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p}.$$

Es decir,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

La desigualdad de Minkowski-Riesz implica, que para cualquier espacio de medida (X, M, m) y $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma en éste.

En otra dirección, se advierte que en la demostración de la desigualdad de Minkowski-Riesz se emplea, implícitamente la desigualdad de Young, la cual no es cierta para $p < 1$, lo que hace sospechar que la desigualdad del triángulo tampoco se cumple para valores de $p < 1$, lo que se corrobora con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9. Sean $g(x) = x$, $f(x) = 1$ y $p = \frac{1}{2}$. Por un lado,

$$\left[\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \left(\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \right)^2 \simeq 1.4448.$$

Por otro lado,

$$\left[\int_0^1 (x)^{\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[\int_0^1 (1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = 1.44.$$

Es decir, $\left[\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 > \left[\int_0^1 (x)^{\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[\int_0^1 (1)^{\frac{1}{2}} \right]^2$.

Definición 16. Sea $1 \leq p \leq \infty$.

i) Una sucesión $\{f_n\}_n$ en $L^p(X)$, se dice *que converge a f* en $L^p(X)$, siempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f|^p = 0.$$

En caso de que $\{f_n\}_n$ converja a f en $L^p(X)$, se denota como $\{f_n\} \rightarrow f$ en $L^p(X)$, o de la siguiente manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \text{ en } L^p(X).$$

ii) Una sucesión $\{f_n\}_n$ en $L^p(X)$, se dice que es de *Cauchy* en $L^p(X)$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces:

$$\|f_m - f_n\|_p = \left(\int_X |f_m - f_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones medibles real valuadas, se dice que converge en medida a la función medible real valuada f , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0, \text{ para cada } \alpha > 0.$$

Proposición 4. [Ro10] Si $\{f_n\}_n$ converge a f en L^p , entonces $\{f_n\}_n$ converge en medida a f .

Finalizamos la sección con algunos resultado, por demás conocidos, acerca de las integrales de Lebesgue.

Lema 3. [Ro10] [Lema de Borel-Cantelli] Sea $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos medibles en \mathbb{R} , para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$ es finita. Entonces casi todo $x \in \mathbb{R}$ pertenece a una cantidad finita de E_k 's.

Teorema 7. [Ro10] [Lema de Fatou] Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión acotada de funciones no-negativas e integrables que converge a f . Entonces, f es integrable. Más aún, $\int_X f dx \leq \liminf \int_X f_n dx$.

Teorema 8. [Ro10] [Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue] Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles en X , que converge casi en todas partes a la función f . Supóngase, además que $\{f_n\}_n$ es dominada por una función integrable g . Entonces, f es integrable sobre X , y se cumple que $\int_X f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx$.

Teorema 9. [Ro10] [Continuidad Absoluta de la Integral de Lebesgue] Suponga que f es integrable según Lebesgue sobre X , entonces para cada $\epsilon > 0$, existe δ tal que $\int_A f dx < \epsilon$, si $A \subseteq X$ y $m(A) < \delta$.

Teorema 10. [Ro10] [Teorema de Egoroff] Supongamos que E es un conjunto de medida finita. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles en E que converge puntualmente casi en cualquier parte a la función real valuada f . Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subseteq E$, tal que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f en F y $m(E \setminus F) < \epsilon$.

En efecto, el teorema posterior es, en general, bastante conocido. Sin embargo, al no contar con una referencia explícita dentro de la literatura, se ha incluido una breve demostración.

Teorema 11. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : (0, 1] \rightarrow (X, d)$ una función. Entonces el conjunto D_f de puntos en $(0, 1]$ donde f es discontinua por la izquierda es medible.

Demostración. Sea $J = (0, 1]$. Tómesese $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, se define el siguiente conjunto:

$$U(\epsilon, \delta) = \{x \in J : \exists y_1, y_2 \in (x - \delta, x) \cap J \text{ con } d(f(y_1), f(y_2)) \geq \epsilon\}.$$

Se mostrará que $U(\epsilon, \delta)$ es abierto en J . Tómesese $x \in U(\epsilon, \delta)$. Entonces existen $y_1, y_2 \in (x - \delta, x) \cap J$ tal que $d(f(y_1), f(y_2)) \geq \epsilon$. Supóngase que $y_2 < y_1$. Obsérvese que $y_1 < x$, $y_2 + \delta > x$. Entonces $O = (y_1, y_2 + \delta) \cap J$ es un conjunto abierto en J que contiene a x . Si $z \in O$, entonces $x - \delta < y_2 < y_1 < z < y_2 + \delta$. Así $0 < z - y_1 < z - y_2 < \delta$. Por lo que $y_1, y_2 \in (z - \delta, z) \cap J$ y $d(f(y_1), f(y_2)) \geq \epsilon$. Esto es $O \subseteq U(\epsilon, \delta)$, es decir $U(\epsilon, \delta)$ es abierto en J .

Por otro lado, es fácil ver que

$$D_f = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \left(\bigcap_{\delta \in \mathbb{Q}^+} U(\epsilon, \delta) \right).$$

Lo que implica que D_f es medible. □

3.3. Conjuntos Difusos

Con frecuencia, las clases de objetos encontrados en el *mundo real* no tienen un criterio preciso de *pertenencia*. Por ejemplo, la clase de los seres vivos claramente incluye entre sus miembros a perros, caballos, aves, helechos, entre otros, y sin lugar a dudas excluye a objetos como rocas, fluidos, etc. Sin embargo, la situación de los virus o de los priones es considerablemente más difícil de establecer, respecto a su pertenencia al conjunto de los seres vivos. Lo mismo ocurre con *el conjunto* “la clase de los hombres altos”, el cual no constituye una clase o un conjunto en el sentido matemático usual.

Al igual que en el *mundo real*, en las matemáticas también podemos encontrar conjuntos con definiciones ambiguas. Verbigracia, el conjunto de todos los números reales “mucho mayores” que 1, por su puesto el cero no pertenece al conjunto mencionado, sin embargo no podemos afirmar con la misma certeza, la pertenencia del número diez; o digamos la duda que suscita la afirmación *3.1415 es una buena aproximación de π* ; o tal vez la frase más famosa de los cursos de cálculo: *para ϵ suficientemente pequeño*. Mas, dichas ambigüedades (que algunos consideran del lenguaje) llamados *conjuntos difusos* juegan un papel importante en el pensamiento humano, particularmente en dominios de reconocimiento de patrones, comunicación de la información, y abstracción.

El propósito de esta sección es explorar de manera preliminar, algunas propiedades e implicaciones básicas de un concepto que puede ser útil para tratar con las “clases” del tipo citado anteriormente, tomando como referente [Di90]. El concepto en cuestión es el de un *conjunto difuso*, que es, un “conjunto” con grados de pertenencia.

Definición 17. Un *conjunto difuso* (o *una clase difusa*) A es una función de pertenencia f_A la cual asocia a cada punto en X un número en el intervalo $[0, 1]$.

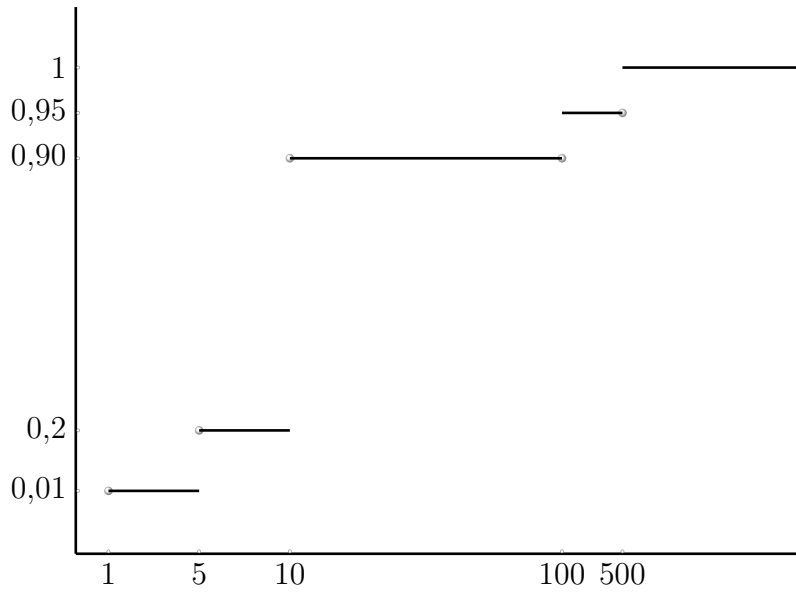


Figura 3.1: Gráfica de f_A

Esto es, mientras más “cerca” esté el valor $f_A(x)$ de la unidad, “mas pertenecerá” x a A . Si por el contrario, el valor de la función se encuentra “más cerca” del cero, habrá más dudas de su “pertenencia”. Obsérvese que cuando tratamos con conjuntos usuales, la imagen de la función de pertenencia es $\{0, 1\}$, es decir, pertenece o no pertenece. Esto es, la función de pertenencia no es, sino la función característica de un conjunto dado. A continuación se presenta un ejemplo con la finalidad de ilustrar el concepto de conjunto difuso, cuyo autor es el propio Zadeh [Za65].

Ejemplo 10. Considérese, la recta real y A el conjunto difuso de números “mucho mayores” que 1. Entonces, se puede dar una precisa, aunque subjetiva, caracterización de A especificando f_A (Figura 3.1) como una función en \mathbb{R} :

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1. \\ 0,01, & \text{si } 1 < x \leq 5. \\ 0,2, & \text{si } 5 < x \leq 10. \\ 0,9, & \text{si } 10 < x < 100. \\ 0,95, & \text{si } 100 \leq x < 500. \\ 1, & \text{si } 500 \leq x. \end{cases}$$

Definición 18. Sean X un conjunto no vacío y $u : X \rightarrow [0, 1]$ un conjunto difuso. Dado $\alpha \in (0, 1]$, definimos el α -nivel de u como el conjunto $u_\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$.

Por ejemplo, los α -niveles del conjunto difuso f_A correspondientes al ejemplo 10 son los siguientes:

$$[f_A]_\alpha = \begin{cases} (1, \infty), & \text{si } 0 < \alpha < 0.2, \\ (5, \infty), & \text{si } 0.2 \leq \alpha < 0.9, \\ (10, \infty), & \text{si } 0.9 \leq \alpha < 0.95, \\ [100, \infty), & \text{si } 0.95 \leq \alpha < 1, \\ [500, \infty), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Los niveles de f_A se pueden ver graficamente en la Figura 3.1, si se considera como dominio el eje vertical y codominio el horizontal.

Se sigue inmediatamente de la definición que si $\alpha \leq \beta$, entonces $u_\beta \subseteq u_\alpha$. En particular, $u_1 \subseteq u_\alpha$, para toda $\alpha \in (0, 1]$. Por otro lado, los α -niveles de cada conjunto difuso son exclusivos y, por tanto, determinan inequívocamente a un conjunto difuso.

Proposición 5. Sean u y v conjuntos difusos en un conjunto no vacío X . Si $u_\alpha = v_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$, si y sólo si $u = v$.

Demostración. Supóngase que $u_\alpha = v_\alpha$ para $\alpha \in (0, 1]$, basta demostrar que u y v tienen la misma regla de correspondencia. Supongamos que $u \neq v$. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $x_0 \in X$ tal que $u(x_0) < v(x_0)$. Sea $\alpha_1 = v(x_0)$, por lo que $x_0 \in v_{\alpha_1}$. Por hipótesis, se sabe que $v_{\alpha_1} = u_{\alpha_1}$. En consecuencia, $u(x_0) \geq \alpha_1 = v(x_0) > u(x_0)$, una contradicción. La otra implicación es trivial. \square

En particular los α -niveles de los conjuntos usuales, representados por su función característica, son trivialmente fáciles de obtener.

Proposición 6. Sea A un subconjunto de un conjunto X . Entonces, $[\chi_A]_\alpha = A$ para toda $\alpha \in (0, 1]$.

Obsérvese que como $[\chi_{\{x\}}]_\alpha = \{x\}$ para cualquier $x \in X$, entonces $d_H(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = d_H(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$, esto es, el espacio (X, d) es isométrico a $(\{\{x\} : x \in X\}, d_H)$. En consecuencia, (X, d) y $(\mathcal{K}(X), d_H)$ comparten ciertas propiedades, tal y como lo corrobora el Teorema 2.

Sea (X, d) un espacio métrico. Si u es un conjunto difuso en X , se define el *soporte* de u , el cual se denota por u_0 , como el conjunto $\overline{\{x \in X : u(x) > 0\}}$. La cerradura es tomada en el espacio métrico X .

Obsérvese que

$$u_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} u_\alpha}.$$

Sea X un espacio métrico, la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *semicontinua superiormente*, si $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es cerrado en X para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las siguientes familias de conjuntos difusos son el cimientto del presente trabajo, pues con la métrica adecuada se convertirán en espacios métricos con características muy interesantes.

Definición 19. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto difuso $u : X \rightarrow [0, 1]$ pertenece a $\mathcal{F}(X)$, si cumple las siguientes condiciones:

- a) u es semicontinua superiormente.
- b) Existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, es decir, u_1 es no vacío.
- c) u_0 es compacto.

Obsérvese que, en particular u_α es compacto para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, pues al ser u una función semicontinua superiormente, se tiene que u_α es un conjunto cerrado, el cual está contenido en el conjunto compacto u_0 y, por lo tanto, u_α también es compacto.

Sea (X, d) un espacio métrico. A manera de mención, se define, por su relevancia, la métrica $d_0 : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$, también llamada *métrica de Skorokhod*:

$$d_0(u, v) = \inf\{\epsilon : \exists t \in T \text{ tal que } \sup_{x \in [0,1]} |t(x) - x| \leq \epsilon \text{ y } d_\infty(u, t \circ v) \leq \epsilon\},$$

donde T es la familia de todos homeomorfismos crecientes de $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

Proposición 7. Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto no vacío de X . Entonces la función característica $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$ si y sólo si A es compacto.

Demostración. Supongamos que $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$. Por la Proposición 6, se tiene que $[\chi_A]_\alpha = A$, para toda $\alpha \in (0, 1]$. En particular, A es cerrado en X . Debido a que $A \subseteq u_0$, y sabiendo que u_0 es compacto, se tiene que A es compacto.

En la otra dirección, supongamos que A es compacto y no vacío. Primero, como A es no vacío, entonces existe x , tal que $\chi_A(x) = 1$. Ahora, debido a que para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, $[\chi_A]_\alpha = A$ es compacto y en particular A es cerrado en X , se cumple que la función χ_A es semicontinua superiormente. Además, $u_0 = A$, es decir, u_0 es compacto. Por lo tanto, $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$. \square

El siguiente resultado es bastante conocido y será utilizado constantemente a lo largo de este trabajo.

Lema 4. [DiKl94] Sea $\{K_n\}$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos en X , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Sea (X, d) un espacio métrico. Se define, para cualquier $u \in \mathcal{F}(X)$ la función $L : (0, 1] \rightarrow (\mathcal{K}(X), d_H)$, cuya regla de correspondencia es $L(\alpha) = u_\alpha$.

Lema 5. [JaSa20] Sea $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces L es continua por la izquierda en $(0, 1]$.

En 1975 se da la siguiente caracterización para los elementos de $\mathcal{F}(X)$, cuando X es un espacio métrico [Za74].

Teorema 12. [de Representación] Sea (X, d) un espacio métrico. Si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

i) Si $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión creciente que converge a $\alpha \in (0, 1]$, entonces se cumple la igualdad:

$$u_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}.$$

ii) Si $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión decreciente que converge a 0, entonces se cumple la igualdad:

$$u_0 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}}.$$

Recíprocamente, si $\{K_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ es una familia decreciente de compactos no vacíos en X que satisface i) y ii), entonces existe un único $u \in \mathcal{F}(X)$ tal que $u_\alpha = K_\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{F}(X)$.

i) Tómese $\alpha \in (0, 1]$ y supóngase que $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión creciente que converge a α . Debido a que $u \in \mathcal{F}(X)$, u es semicontinua superiormente, la función L es continua por la izquierda en $(0, 1]$ (Lema 5). Es decir que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\alpha_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n} = u_\alpha.$$

ii) Sea $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión decreciente que converge a 0. Se demostrará que $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} u_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}$. Si $x \in \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} u_\alpha$, entonces existe $\alpha \in (0, 1]$, tal que $x \in u_\alpha$. Como $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión decreciente que converge a 0, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \alpha_n \leq \alpha$, por lo que $u_\alpha \subseteq u_{\alpha_n}$, esto es $x \in u_{\alpha_n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}$. La otra contención es trivial, pues $\{\alpha_n\} \subseteq (0, 1]$.

Para el recíproco, considérese la sucesión decreciente $\{K_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ de compactos que satisfacen i) y ii). Se define $u(x) = \sup\{\alpha : x \in K_\alpha\}$, obsérvese que u es un conjunto difuso en X , pues $u : X \rightarrow [0, 1]$.

Sea $\alpha \in (0, 1]$, primero se mostrará que $u_\alpha = K_\alpha$. Si $x \in K_\alpha$, por definición de u , se tiene que $u(x) \geq \alpha$, lo que significa que $x \in u_\alpha$. Para la otra contención, supóngase que $x \in u_\alpha$, es decir que $u(x) \geq \alpha$. Tómese $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente que converge a α , por lo que $u(x) = \sup\{\beta : x \in K_\beta\} \geq \alpha > \alpha_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $x \in K_{\alpha_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente por i), se tiene que:

$$K_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\alpha_n}.$$

Así, $x \in K_\alpha$ y, por tanto, $u_\alpha = K_\alpha$, para toda $\alpha \in (0, 1]$.

Para el caso cuando $\alpha = 0$, tómesese una sucesión decreciente $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a 0, debido a que $u_\alpha = K_\alpha$, para toda $\alpha \in (0, 1]$, se sigue que:

$$K_0 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{\alpha_n}} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}} = \overline{\bigcup_{(0,1]} u_\alpha} = u_0.$$

Lo que muestra que $K_0 = u_0$.

A continuación se demostrará que $u \in \mathcal{F}(X)$. Sea $\alpha \in (0, 1]$, para verificar que u es semicontinua superiormente, se debe mostrar que $u^{-1}[\alpha, 1] = \{x \in X : u(x) \in [\alpha, 1]\}$ es cerrado en X , lo cual es consecuencia de que $u^{-1}[\alpha, 1] = u_\alpha = K_\alpha$.

Debido a que $K_\alpha = u_\alpha$ para $\alpha \in [0, 1]$, se tiene en particular, que $K_1 = u_1$ y $K_0 = u_0$. La primera igualdad implica que u_1 es distinto del vacío y la segunda que u_0 es compacto pues $\{K_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ es una familia de compactos no vacíos. \square

A lo largo del presente trabajo, se considerará:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{(0,1]} f(x)dx.$$

Definición 20. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Denotemos por $\mathcal{F}_p^*(X)$ a la familia de conjuntos difusos $u : X \rightarrow [0, 1]$ que cumplen las siguientes condiciones:

- a) u es semicontinua superiormente.
- b) Existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$, es decir, u_1 es no vacío.
- c) u_α es compacto para toda $\alpha \in (0, 1]$.
- d) $\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha < \infty$, para algún $x_0 \in X$.

Las definiciones 19 y 20 implican que:

1. la elección de $x_0 \in X$ en la definición de $\mathcal{F}_p^*(X)$ es arbitraria, pues por la desigualdad del triángulo en L^p , se tiene que si $\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha < \infty$ para algún $x_0 \in X$, entonces $\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x\})^p d\alpha < \infty$ para toda $x \in X$ y
2. $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}_p^*(X)$, para cualquier $p \geq 1$: sean $u \in \mathcal{F}(X)$, $x_0 \in X$ y $\alpha \in [0, 1]$. Por los Lemas 1 y 2, se tiene lo siguiente:

$$d_H([u]_\alpha, \{x_0\}) \leq \text{máx}\{d_H(u_1, \{x_0\}), d_H(u_0, \{x_0\})\} = d_H(u_0, \{x_0\}).$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \leq \int_0^1 d_H(u_0, \{x_0\})^p d\alpha = d_H(u_0, \{x_0\})^p < \infty.$$

El siguiente resultado se puede probar con un argumento similar al usado en la demostración del Teorema 12.

Teorema 13. [de Representación] Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $p \geq 1$. Si $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

i) Si $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión creciente que converge a $\alpha \in (0, 1]$, entonces se cumple la igualdad:

$$u_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}.$$

ii) Si $\{\alpha_n\}_n \subseteq [0, 1]$ es una sucesión decreciente que converge a 0, entonces se tiene lo siguiente:

$$u_0 = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}}.$$

iii) Se cumple que

$$\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha < \infty.$$

Recíprocamente, si $\{K_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ es una familia decreciente de compactos no vacíos en X que satisface i)-iii), entonces existe un único $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$ tal que $u_\alpha = K_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$.

Sea \mathbb{R} con la métrica usual. Un conjunto difuso u en \mathbb{R} se llama *convexo* si para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que u_α es un conjunto convexo. Esto es, si para toda $x, y \in u_\alpha$, se tiene que $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \alpha$, con $\lambda \in [0, 1]$.

Proposición 8. Sea \mathbb{R} con la métrica usual. Un conjunto difuso u en \mathbb{R} es convexo si sólo si, para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y cada $\lambda \in [0, 1]$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

Demostración. Si u es un conjunto difuso y $x_1, x_2 \in u_\alpha$, para algún $\alpha \in (0, 1]$, entonces $u(x_1) \geq \alpha$ y $u(x_2) \geq \alpha$. Si se supone que $u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{u(x_1), u(x_2)\} \geq \alpha$, es decir $u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha$, lo que significa que u_α es convexo.

En la otra dirección, considérese $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $u(x_1) = \alpha_0$ y $u(x_2) = \beta$, sin pérdida de generalidad supóngase que $\alpha_0 \leq \beta$, obsérvese que tanto x_1 como x_2 pertenecen a u_{α_0} . Suponiendo que todos α -niveles son conjuntos convexos, se tiene en particular que $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \alpha_0 = \min\{u(x_1), u(x_2)\}$. \square

Se denotará con $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ a los elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ que son convexos. La definición anterior asegura que los α -niveles de un conjunto difuso convexo son intervalos compactos. Así tenemos el siguiente resultado.

Proposición 9. Un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ pertenece a $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ si y sólo si u_α es un intervalo compacto y no vacío para cada $\alpha \in [0, 1]$.

La proposición anterior permite concluir que si u es un conjunto difuso convexo, los α -niveles de u se pueden escribir como intervalos cerrados, esto es para cada $\alpha \in (0, 1]$, se tiene que $u_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$, donde $u_\alpha^- = \min\{x \in X : x \in u_\alpha\}$ y $u_\alpha^+ = \max\{x \in X : x \in u_\alpha\}$. Así, para cada $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ se pueden definir las funciones $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue, $u^-(\alpha) = u_\alpha^-$ y $u^+(\alpha) = u_\alpha^+$ para cada $\alpha \in [0, 1]$. Las funciones u^- y u^+ aportan una caracterización de los elementos de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, como se explicita en el siguiente teorema.

Teorema 14. [GoVo86] Para cada $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ se tiene que las funciones u^- y u^+ cumplen lo siguiente:

- i) u^- es creciente y acotada en $[0, 1]$.
- ii) u^+ es decreciente y acotada en $[0, 1]$.
- iii) $u^- \leq u^+$.
- iv) u^- y u^+ son continuas por la izquierda en $(0, 1]$, y continuas por la derecha en $x = 0$.

Recíprocamente, si $u^-, u^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones que satisfacen las condiciones i)-iv), entonces existe un único $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, tal que $u^-(\alpha) = u^-_\alpha$ y $u^+(\alpha) = u^+_\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Capítulo 4

Métricas d_p en $\mathcal{F}(X)$

Este segundo capítulo se dedica a los espacios métricos $(\mathcal{F}(X), d_p)$. En primer lugar se definirá la familia de métricas d_p , considerando a $p \in [1, \infty)$ y enseguida se establecerá una comparación entre dos distintas métricas de la mencionada familia. Previamente a la métrica d_p , se define la métrica uniforme d_∞ que fungirá como auxiliar, no sólo en resultados inmediatos, sino a lo largo de todo este trabajo.

Sin embargo, las cuestiones más interesantes sobre los espacios $(\mathcal{F}(X), d_p)$ versan sobre las propiedades de separabilidad y completitud. En otras palabras, el objetivo de este capítulo es establecer un resultado similar al Teorema 2, que relaciona al espacio métrico (X, d) y el hiperespacio definido por este $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Definición 21 (Métrica uniforme). Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la función $d_\infty : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$, mediante:

$$d_\infty(u, v) = \sup\{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\}.$$

Teorema 15. La función d_∞ es una métrica en $\mathcal{F}(X)$.

Demostración. Obsérvese que la función d_∞ está bien definida, pues d_H es una métrica y por tanto $d_\infty \geq 0$.

i) $d_\infty(u, v) = \sup\{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} = \sup\{d_H(v_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} = d_\infty(v, u)$.

ii) Supóngase que $d_\infty(u, v) = 0$, por lo que $d_H(u_\alpha, v_\alpha) = 0$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Usando el hecho de que d_H es una métrica, se tiene que $u_\alpha = v_\alpha$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. En virtud de la Proposición 5, se tiene que $u = v$.

iii) $d_\infty(u, v) = \sup\{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} \leq \sup\{d_H(u_\alpha, w_\alpha) + d_H(w_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$ y así:

$$d_\infty(u, v) \leq \sup\{d_H(u_\alpha, w_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} + \sup\{d_H(w_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} = \\ d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v).$$

□

Proposición 10. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces para cada $u, v \in \mathcal{F}(X)$ se tiene lo siguiente:

$$d_\infty(u, v) = \sup\{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in (0, 1]\}$$

Demostración. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión decreciente en $(0, 1]$ tal que $\{\alpha_n\} \rightarrow 0$. Sean u, v conjuntos difusos, entonces $u_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_{\alpha_n}$ y $v_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v_{\alpha_n}$. Además, debido a que d_H es una función continua, se cumple que:

$$d_H(u_{\alpha_n}, v_{\alpha_n}) \rightarrow d_H(u_0, v_0).$$

□

El espacio $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ contiene copias de los espacios métricos (X, d) y $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Teorema 16. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se cumple lo siguiente:

- a) (X, d) es isométrico al subespacio $\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}$ de $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$.
- b) $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es isométrico al subespacio $\{\chi_A : A \in \mathcal{K}(X)\}$ de $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$.
- c) El conjunto $\{\chi_A : A \in \mathcal{K}(X)\}$ es cerrado en $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$.

Demostración. **a)** Sea $x \in X$, entonces $[\chi_{\{x\}}]_\alpha = \{x\}$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Por lo que para $x, y \in X$, se tiene:

$$d_\infty(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = \sup\{d_H([\chi_{\{x\}}]_\alpha, [\chi_{\{y\}}]_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} = d_H(\{x\}, \{y\}) = d(x, y).$$

b) Sea $A \in \mathcal{K}(X)$, entonces $[\chi_A]_\alpha = A$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Por lo que para $A, B \in \mathcal{K}(X)$, se tiene:

$$d_\infty(\chi_A, \chi_B) = \sup\{d_H([\chi_A]_\alpha, [\chi_B]_\alpha) : \alpha \in [0, 1]\} = d_H(A, B).$$

c) Sea $\{K_n\}_n$ una sucesión en $\mathcal{K}(X)$ tal que $\{\chi_{K_n}\}_n$ converge a $u \in \mathcal{F}(X)$ con respecto a d_∞ . Se mostrará que $u = \chi_K$ para algún $K \in \mathcal{K}(X)$. Tómese $\alpha \in [0, 1]$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(\chi_{K_n}, u) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, si $\alpha \in [0, 1]$

$$d_H(K_n, u_\alpha) = d_H([\chi_{K_n}]_\alpha, u_\alpha) \leq d_\infty(\chi_{K_n}, u) < \epsilon.$$

Lo anterior implica que $\{K_n\}_n$ converge a u_α respecto a d_H . Como esto ocurre para toda $\alpha \in [0, 1]$ y el límite de $\{K_n\}_n$ en $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es único, concluyendo que $u = \chi_K$ para algún $K \in \mathcal{K}(X)$. Se ha demostrado que $\{\chi_A : A \in \mathcal{K}(X)\}$ es cerrado en $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$. □

Corolario 3. Si $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ es separable, entonces (X, d) es separable.

Sin embargo, considérese el espacio métrico (X, d) con al menos dos elementos, digamos a y b con $a \neq b$ y el subespacio métrico $A = \{\chi_{\{a\}} + r\chi_{\{b\}} : r \in (0, 1)\}$ de $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$. Sea $\alpha \in (0, 1)$, si $r < \alpha$, sucede que $[\chi_{\{a\}} + r\chi_{\{b\}}]_\alpha = \{a\}$, en otro caso $[\chi_{\{a\}} + r\chi_{\{b\}}]_\alpha = \{a, b\}$. Obsérvese que A no es separable, pues de lo contrario, supóngase que el conjunto $\{a_n\}_n \subseteq A$, que resulta ser de la forma $\{\chi_{\{x\}} + r_n\chi_{\{b\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$, es denso en A . Sea $r \in (0, 1)$, tal que $r \neq r_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $0 < k < l < 1$, nótese que los α -niveles coinciden en los casos en que $0 < \alpha < k < l < 1$ o $k < l < \alpha < 1$ es decir, $d_H([\chi_{\{a\}} + k\chi_{\{b\}}]_\alpha, [\chi_{\{a\}} + l\chi_{\{b\}}]_\alpha) = 0$. En el caso restante, se tiene que $d_H([\chi_{\{a\}} + k\chi_{\{b\}}]_\alpha, [\chi_{\{a\}} + l\chi_{\{b\}}]_\alpha) = d(a, b)$, por lo que $d_\infty(a_n, \chi_{\{a\}} + r\chi_{\{b\}}) = d(a, b)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 4. Sea (X, d) un espacio métrico. $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ es separable si y sólo $X = \{a\}$.

Teorema 17. [JaSa20] Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{F}(X), d_\infty)$ es también un espacio métrico completo.

Sea (X, d) un espacio métrico, a continuación se presenta la métrica d_p , que convertirá a $\mathcal{F}_p^*(X)$, y por ende a $\mathcal{F}(X)$, en un espacio métrico. La mencionada métrica tiene como finalidad heredar las propiedades de completitud y separabilidad del espacio original (X, d) .

Definición 22. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces la función $d_p : \mathcal{F}_p^*(X) \times \mathcal{F}_p^*(X) \rightarrow [0, \infty)$ está definida de la siguiente manera:

$$d_p(u, v) = \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Para todo $(u, v) \in \mathcal{F}_p^*(X) \times \mathcal{F}_p^*(X)$, se define la función $g(u, v) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(u, v)(\alpha) = d_H(u_\alpha, v_\alpha)$.

Proposición 11. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces d_p es una métrica en $\mathcal{F}_p^*(X)$.

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{F}_p^*(X)$ y $p \geq 1$. Nótese que d_p está bien definida, pues la función $g(u, v)$, es una función medible, de donde $g^p(u, v)$ es una función medible también. Además, por la definición de $\mathcal{F}_p^*(X)$, se tiene que $d_p(u, v) < \infty$.

i) No negatividad: Supongamos que $d_p(u, v) = 0$, es decir que,

$$\left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Así que:

$$\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha = 0.$$

Por las propiedades de la integral, se tiene que $d_H(u_\alpha, v_\alpha) = 0$, para toda $\alpha \in [0, 1] \setminus A$, con $A \subset [0, 1]$ un conjunto de medida cero. Adviértase que $[0, 1] \setminus A$ es denso en $[0, 1]$, pues de no ser así, existiría $x \in (0, 1)$ y $\epsilon > 0$ tal que, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A$, pero $m(x - \epsilon, x + \epsilon) = 2\epsilon$, lo cual es una contradicción.

Sea $\alpha_0 \in A$, el hecho de que $[0, 1] \setminus A$ es denso en $[0, 1]$, asegura la existencia de una sucesión creciente $\{\alpha_n\} \subseteq (0, 1] \setminus A$ y $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$. En consecuencia,

$$u_{\alpha_0} = \bigcap u_{\alpha_n} \quad \text{y} \quad v_{\alpha_0} = \bigcap v_{\alpha_n}.$$

Por lo tanto, $u = v$, pues $u_{\alpha_n} = v_{\alpha_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La otra implicación es trivial.

ii) Simetría: como d_H es una métrica, se tiene que $d_H(u_\alpha, v_\alpha) = d_H(v_\alpha, u_\alpha)$ y, por tanto, $d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p = d_H(v_\alpha, u_\alpha)^p$.

iii) Desigualdad del triángulo: De las propiedades de la norma L^p y del hecho de que d_H es una métrica, se sigue que:

$$\begin{aligned} d_p(u, w) &= \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, w_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_0^1 [d_H(u_\alpha, v_\alpha) + d_H(v_\alpha, w_\alpha)]^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \\ & \|g(u, v) + g(v, w)\|_p \leq \|g(u, v)\|_p + \|g(v, w)\|_p = \\ & \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^1 d_H(v_\alpha, w_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = d_p(u, v) + d_p(v, w). \end{aligned}$$

□

Obsérvese que $d_p(u, v) = \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_0^1 d_\infty(u, v)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = d_\infty(u, v)$ para cada $u, v \in \mathcal{F}(X)$ y que $\chi_{\{x\}} \in (\mathcal{F}(X), d_p) \subseteq (\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ para cada $x \in X$.

Proposición 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) es isométrico al espacio $(\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}, d_p)$.

Demostración. Sea $f : \{\chi_{\{x\}} : x \in X\} \rightarrow X$, tal que $f(\chi_{\{x\}}) = x$. Considérese $\chi_{\{x\}}$ y $\chi_{\{y\}}$ en $\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}$. Obsérvese que $d_H([\chi_{\{x\}}]_\alpha, [\chi_{\{y\}}]_\alpha) = d(x, y)$, debido a que $[\chi_{\{x\}}]_\alpha = \{x\}$ y $[\chi_{\{y\}}]_\alpha = \{y\}$, para toda $\alpha \in [0, 1]$, de donde:

$$d_p(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = \left[\int_0^1 d_H([\chi_{\{x\}}]_\alpha, [\chi_{\{y\}}]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1 d(x, y)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = d(x, y).$$

□

Obsérvese que, si (X, d) es un espacio métrico, entonces el Corolario 2 implica que $\mathcal{F}_{p_2}^*(X) \subseteq \mathcal{F}_{p_1}^*(X)$, siempre que $1 \leq p_1 < p_2$, lo que nos permite comparar las métricas d_{p_1} y d_{p_2} en el espacio $\mathcal{F}_{p_2}^*(X)$, como se muestra en la Proposición 13. Además, la contención $\mathcal{F}_{p_2}^*(X) \subseteq \mathcal{F}_{p_1}^*(X)$ (con $p_1 < p_2$) puede ser propia como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11. Sean $p, q \in [1, \infty)$. Considérese a $X = [1, \infty)$ con su métrica usual y la funciones $f(x) = \frac{1}{x^p}$ y χ_1 . Entonces, tenemos lo siguiente:

A) La función $f : [1, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x) = \frac{1}{x^p}$ pertenece a $\mathcal{F}_q^*(X)$, para cualquier $q < p$, para lo cual basta verificar que la integral $\int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{1\})^q d\alpha$ es finita. Obsérvese que:

$$[f]_\alpha = \left\{ x \in [1, \infty) : \frac{1}{x^p} \geq \alpha \right\} = \left[1, \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \right].$$

Por lo tanto,

$$d_H([f]_\alpha, \{0\}) = \max \left\{ \sup_{x \in [f]_\alpha} d(x, \{0\}), d(0, [f]_\alpha) \right\} = \max \left\{ \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}}, 1 \right\} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}}.$$

Es claro que $0 \notin X$. Sin embargo, es más fácil calcular la siguiente integral:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \right)^q d\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \left(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \right)^q d\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{\frac{q}{p}}} = \frac{p}{p-q}.$$

Por otro lado:

$$\int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{1\})^q d\alpha \leq \int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{0\})^q d\alpha + \int_0^1 d_H(\{0\}, \{1\})^q d\alpha.$$

De donde,

$$\int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{1\})^q d\alpha < \infty.$$

Lo que comprueba que la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ pertenece al conjunto $\mathcal{F}_q^*(X)$.

B) La función $f : [1, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x) = \frac{1}{x^p}$ no pertenece a $\mathcal{F}_p^*(X)$, para lo cual basta ver que la integral $\int_0^1 (d_H([f]_\alpha, \{1\}))^p d\alpha$ no es finita. Como en el inciso anterior, se tiene que:

$$[f]_\alpha = \left[1, \frac{1}{\alpha^p} \right] \quad \text{y} \quad d_H([f]_\alpha, \{0\}) = \frac{1}{\alpha^p}, \quad \text{para toda } \alpha \in (0, 1].$$

Entonces,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha^p} \right)^p d\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \left(\frac{1}{\alpha^p} \right)^p d\alpha = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \frac{d\alpha}{\alpha} = \lim_{c \rightarrow 0} (\ln(1) - \ln(c)) = \infty.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{0\})^p d\alpha \leq \int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{1\})^p d\alpha + \int_0^1 d_H(\{1\}, \{0\})^p d\alpha.$$

De donde,

$$\int_0^1 d_H([f]_\alpha, \{1\})^p d\alpha = \infty.$$

Es decir, la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ no pertenece al espacio métrico $\mathcal{F}_p^*(X)$.

El ejemplo anterior hace sospechar sobre el comportamiento de los espacios $\{\mathcal{F}_p^*(X)\}_{p \geq 1}$ respecto a la contención: $\mathcal{F}_{p_2}^*(X) \subseteq \mathcal{F}_{p_1}^*(X)$, siempre que $p_1 \leq p_2$, lo que corrobora el Corolario 2.

Proposición 13. Sean (X, d) un espacio métrico y $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Si $u, v \in \mathcal{F}_{p_2}^*(X)$, entonces $d_{p_1}(u, v) \leq d_{p_2}(u, v)$.

Demostración. Primero, obsérvese que $g(u, v) \in L^p$, para todo $p \geq 1$. Sean $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, para concluir la demostración, sólo resta aplicar el Corolario 2 a la función $g(u, v)$:

$$d_p(u, v) = \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^{p_1} d\alpha \right]^{\frac{1}{p_1}} = \|g(u, v)\|_{p_1} \leq$$

$$c \|g(u, v)\|_{p_2} = \left[\int_0^1 d_H(u_\alpha, v_\alpha)^{p_2} d\alpha \right]^{\frac{1}{p_2}} = d_{p_2}(u, v),$$

donde $c = [m([0, 1])]^{\frac{p_2 - p_1}{p_2 p_1}}$, y sabiendo que $m([0, 1]) = 1$ se obtiene el resultado deseado. \square

Corolario 5. Sean (X, d) un espacio métrico, $u, v \in \mathcal{F}(X)$ y $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Entonces, $d_{p_1}(u, v) \leq d_{p_2}(u, v)$.

A continuación, se presenta un ejemplo que atestigua que la desigualdad puede ser estricta, aún cuando X es compacto.

Ejemplo 12. Considérese $X = [0, 1]$ con su métrica usual y las funciones identidad Id_X y $\chi_{\{1\}}$. Si $\alpha \in [0, 1]$, entonces:

a) $[\chi_{\{1\}}]_\alpha = \{1\}$ e $[Id_X]_\alpha = [\alpha, 1]$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

b) $d_H([\chi_{\{1\}}]_\alpha, [Id_X]_\alpha) = 1 - \alpha$.

Por lo tanto,

$$d_p(\chi_{\{1\}}, Id_X) = \left[\int_0^1 d_H([\chi_{\{1\}}]_\alpha, [Id_X]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1 (1 - \alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{1}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Considérese la función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}},$$

cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{-x \left(\frac{1}{x+1} \right)^{-1+\frac{1}{x}} + \ln(x+1) \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} (1+2x+x^2)}{x^2(x+1)^2} =$$

$$\frac{-x(x+1) \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} + \ln(x+1) \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} =$$

$$\frac{(x+1) \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}} [-x + (x+1) \ln(x+1)]}{x^2(x+1)^2}.$$

Se tiene que $f'(x) > 0$, para toda $x > 1$, esto es $f(x)$ es una función creciente en el intervalo $[1, \infty)$. Por lo tanto,

$$d_p(\chi_{\{1\}}, Id_X) < d_r(\chi_{\{1\}}, Id_X), \text{ si } p < r.$$

\square

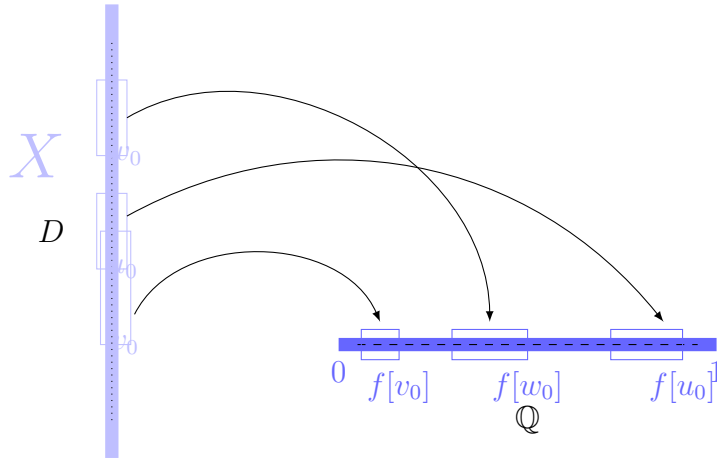


Figura 4.1: Representación de Φ

A continuación, como ya se ha advertido, se investiga sobre las condiciones de separabilidad y completitud de los espacios $(\mathcal{F}(X), d_p)$ con $p \geq 1$.

Teorema 18. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es separable si y sólo si (X, d) lo es también.

Demostración. Si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es separable, entonces (X, d) es separable por la Proposición 12.

Ahora supóngase que (X, d) es separable, para demostrar que $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es separable, se construirá en $(\mathcal{F}(X), d_p)$ un conjunto denso numerable Φ , es decir, para cada conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(X)$ y para todo $\epsilon > 0$ se debe encontrar $\varphi \in \Phi$, tal que $d_p(u, \varphi) < \epsilon$.

Como (X, d) es separable, existe un conjunto denso numerable D en (X, d) . Se define el siguiente conjunto numerable:

$$\Phi = \{\varphi \in \mathcal{F}(X) : |\varphi_0| < \infty, \varphi_0 \subseteq D \text{ y } \varphi(X) \subseteq \mathbb{Q}\}.$$

La figura 4.1 es una representación del conjunto Φ , donde las líneas punteadas simbolizan D y $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, respectivamente.

La prueba consiste en mostrar la densidad de Φ . Sean $u \in \mathcal{F}(X)$ y $\epsilon > 0$, entonces u_0 es compacto, por lo que existen $p_1, p_2, \dots, p_k \in D$, tales que $u_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i$, donde $S_i = \{x \in X : d(p_i, x) \leq \frac{\epsilon}{2}\}$ para $1 \leq i \leq k$. Se construye el conjunto difuso $\phi : X \rightarrow [0, 1]$, de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} \sup_{y \in S_i} u(y), & \text{si } x = p_i \text{ para algún } i = 1, \dots, k. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se define $\alpha_i = \phi(p_i)$. En particular, se sabe que existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_j = 1$, pues u pertenece a $\mathcal{F}(X)$. De ser necesario, se reordena a p_1, p_2, \dots, p_k , de tal suerte que $0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k = 1$.

Afirmación 1: $d_\infty(u, \phi) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Se fija $\alpha \in (0, 1]$. Entonces, existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_{i_0-1} < \alpha \leq \alpha_{i_0}$, por lo que $u_{\alpha_{i_0}} \subseteq u_\alpha$ y $\phi_\alpha = \phi_{\alpha_{i_0}} = \{p_{i_0}, p_{i_0+1}, \dots, p_k\}$.

Sea $x \in u_\alpha$, entonces $u(x) \geq \alpha > \alpha_{i_0-1}$ y sabiendo que $u_\alpha \subseteq u_0$, existe $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $x \in S_j$. Además,

$$\alpha_j = \phi(p_j) = \sup_{y \in S_j} u(y) \geq u(x) > \alpha_{i_0-1}.$$

Así $j \geq i_0$. Se concluye que para cada $x \in u_\alpha$, se cumple lo siguiente:

$$d(x, \phi_\alpha) = \min_{y \in \phi_\alpha} d(x, y) \leq d(x, p_j) \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.1)$$

Por otro lado, para cualquier $i \geq i_0$, tenemos $\phi(p_i) = \sup_{y \in S_i} u(y) = \alpha_i \geq \alpha_{i_0} \geq \alpha$ y sabiendo que u es semi-continua superiormente -pues $u \in \mathcal{F}(X)$ -, existe $x_0 \in S_i \cap u_\alpha$, en el cual la función alcanza su supremo, esto es $u(x_0) = \alpha_i$, de donde se sigue que para cualquier $p_i \in \phi_\alpha$, se tiene que:

$$d(p_i, u_\alpha) = \min_{y \in u_\alpha} d(p_i, y) \leq d(p_i, x_0) \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.2)$$

La última desigualdad se debe a que $x_0 \in S_i$. De (4.1) y (4.2), obtenemos lo siguiente:

$$d_\infty(u, \phi) = \sup_{\alpha \in (0,1]} d_H(u_\alpha, \phi_\alpha) = \sup_{\alpha \in (0,1]} d_H(u_\alpha, \{p_{i_0}, p_{i_0+1}, \dots, p_k\}) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Lo que concluye la prueba de la Afirmación 1.

Nuevamente reordenamos $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$, con miras a obtener una sucesión estrictamente creciente: $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_l = 1$ con $l \leq k$. Además, si existe $q < l$ tal que $\alpha_q \notin \mathbb{Q}$, elegimos $\beta_q \in \mathbb{Q}$, tal que $\max\{\alpha_{q-1}, \alpha_q - (\frac{\epsilon}{M})^p\} < \beta_q < \alpha_q$, donde $M \geq 2\sqrt[l]{l} [\text{Diam}(u_0) + \epsilon]$. Si $\alpha_q \in \mathbb{Q}$, entonces se elige $\beta_q = \alpha_q$. Se construye $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$, de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \beta_q, & \text{si } \phi(x) = \alpha_q. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que φ , al igual que ϕ , pertenece a $\mathcal{F}(X)$, pero además $\varphi \in \Phi$.

Afirmación 2: $d_p(\phi, \varphi) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sabemos que $d(p_i, p_j) \leq \text{Diam}(u_0)$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Entonces,

$$\int_{\beta_i}^{\alpha_i} d_H(\phi_\alpha, \varphi_\alpha)^p d\alpha \leq (\alpha_i - \beta_i) [\text{Diam}(u_0) + \epsilon]^p < \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^p \frac{M^p}{l \cdot 2^p} = \frac{\epsilon^p}{l \cdot 2^p}.$$

Por lo tanto,

$$d_p(\phi, \varphi) = \left[\int_0^1 d_H(\phi_\alpha, \varphi_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{l-1} \int_{\beta_i}^{\alpha_i} d_H(\phi_\alpha, \varphi_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} <$$

$$\left[(l-1) \frac{\epsilon^p}{l \cdot 2^p} \right]^{\frac{1}{p}} < \left[\frac{\epsilon^p}{2^p} \right]^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Con lo que queda probada la Afirmación 2.

Por último, utilizando la desigualdad del triángulo, la Afirmación 1 y la Afirmación 2, tenemos:

$$d_p(u, \varphi) \leq d_p(u, \phi) + d_p(\phi, \varphi) \leq d_\infty(u, \phi) + d_p(\phi, \varphi) < \epsilon,$$

con lo que se obtiene el resultado deseado. \square

Sea (X, d) un espacio métrico, obsérvese que:

1. $(\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}, d_p)$ es isométrico al espacio $(\{\{x\} : x \in X\}, d_H)$.
2. $(\{\chi_A : A \in \mathcal{K}(X)\}, d_p)$ es isométrico al espacio $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Por lo que, el inciso a) del Teorema 2 es un corolario del teorema anterior inmediato, pues si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es separable, entonces $(\{\{x\} : x \in X\}, d_H)$ es separable. Para la otra implicación, supóngase que (X, d) es separable, entonces $(\mathcal{F}(X), d_p)$, es separable y por tanto $(\{\chi_A : A \in \mathcal{K}(X)\}, d_p)$ lo es también.

Desafortunadamente no existen condiciones similares para la completitud de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, como lo atestigua el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Sea $X = [0, \infty)$ con la métrica usual d . Entonces $(\mathcal{F}(X), d_p)$ no es completo, para toda $p \geq 1$.

Demostración. Sea $p \geq 1$. Se Construye por recursión la siguiente sucesión $\{u_n\}_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$[u_1]_\alpha = \begin{cases} [0, 1], & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \\ \{0\}, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$$[u_{n+1}]_\alpha = \begin{cases} [0, n+1], & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right]. \\ [u_n]_\alpha, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

La Figura 4.2 es una representación de los α -niveles. Esta construcción será utilizada con frecuencia en lo siguiente.

Obsérvese que cada u_n , con $n \in \mathbb{N}$, es un elemento de $\mathcal{F}(X)$. Se mostrará que la sucesión $\{u_n\}_n$ es de Cauchy, y no convergente en $(\mathcal{F}(X), d_p)$. Por construcción se tiene lo siguiente:

$$d_H([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right]. \\ 0, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

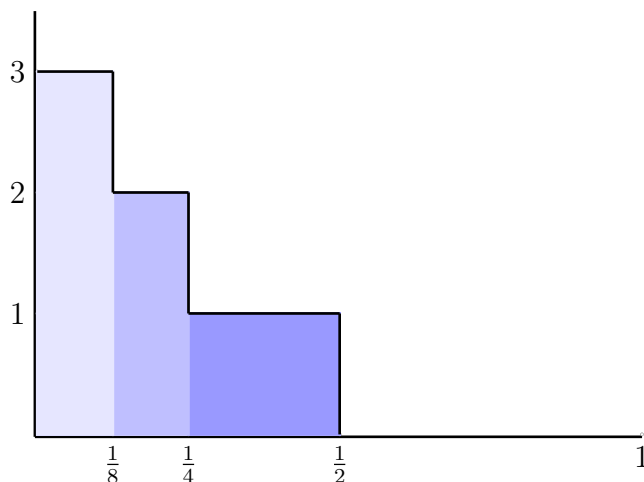


Figura 4.2: Representación de la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

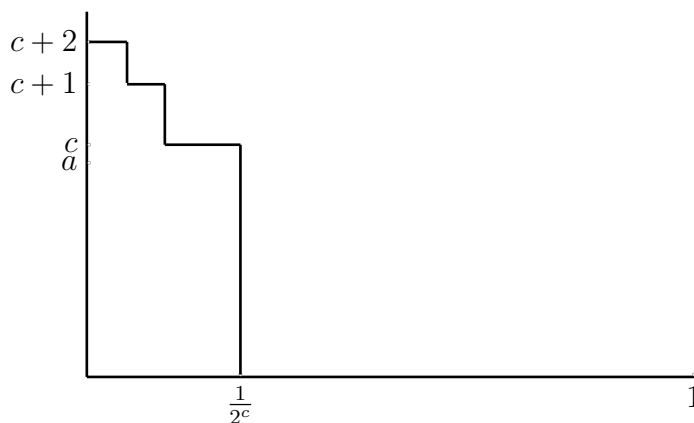


Figura 4.3: Representación del soporte de u

Entonces,

$$d_p(u_{n+1}, u_n) = \left[\int_0^1 d_H([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} 1 d\alpha + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^1 0 d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = 2^{(-\frac{n+1}{p})}.$$

Lo anterior implica que $\{u_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}(X), d_p)$. Resta probar que $\{u_n\}_n$ no converge con respecto a d_p . Sea $u \in \mathcal{F}(X)$. Entonces, u_0 es compacto y $u_0 \subseteq [0, \infty)$. Sea $a = \max u_0$, tómesese $c \in \mathbb{N}$, tal que $c > a$, por lo que, para cada $n \geq c$ y $\alpha \in [0, \frac{1}{2^c}]$, se tiene la inclusión $[0, c] \subseteq [u_n]_\alpha$ (Figura 4.3).

Como $u_\alpha \subseteq u_0$, se concluye que $d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha) \geq c - a$, para cada $n \geq c$ y $\alpha \in [0, \frac{1}{2^c}]$. Así que:

$$d_p(u_n, u) \geq \left[\int_0^{\frac{1}{2^c}} (c - a)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{-c}{p}} (c - a) > 0,$$

para cada $n \geq c$. Esto prueba que, si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\{u_n\}_n$ no converge a u , con respecto a d_p . Es decir, $(\mathcal{F}(X), d_p)$, no es completo. \square

Aún falta responder a la cuestión recíproca. La construcción anterior, además de servir como contra-ejemplo a la completitud de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, cuando se supone la completitud de (X, d) , provee un camino para obtener otros resultados.

Capítulo 5

Espacios $\mathcal{F}_p^*(X)$: la completación de $\mathcal{F}(X)$

En el capítulo anterior se mostró que no forzamente la completitud del espacio métrico (X, d) implica la completitud de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, para una $p \geq 1$ fija. Sin embargo, el recíproco quedó pendiente. Asimismo persisten las incógnitas sobre las propiedades que conserva $(\mathcal{F}(X), d_p)$ de (X, d_p) , exceptuando la propiedad de separabilidad, cuyo resultado fue establecido en el capítulo anterior. Este capítulo da cuenta de las interrogantes mencionadas. Más aún muestra que $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es la completación de $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

Lema 6. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Supóngase que U es acotado en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$, entonces $\{[u]_\alpha : u \in U\}$ es acotado en $(\mathcal{K}(X), d_H)$, para cada $\alpha \in (0, 1]$.

Demostración. Sea $p \geq 1$. Supóngase que no, esto es, existe $\alpha_0 \in (0, 1]$ tal que $\{[u]_{\alpha_0} : u \in U\}$ no es acotado en $(\mathcal{K}(X), d_H)$. Es decir, existen una sucesión $\{u_n\} \subseteq U$ y $x_0 \in X$ tales que $d_H([u_n]_{\alpha_0}, \{x_0\}) > n \left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{p}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $[u_n]_{\alpha_0} \subseteq [u_n]_\alpha$. Por el Lema 1, se concluye que $d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\}) > n \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{p}}$. Así que:

$$\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha = \int_0^{\alpha_0} d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha + \int_{\alpha_0}^1 d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \geq$$

$$\int_0^{\alpha_0} n^p \left(\frac{1}{\alpha_0}\right) d\alpha + \int_{\alpha_0}^1 d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \geq n^p + \int_{\alpha_0}^1 d_H([u_n]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \geq n^p.$$

De donde se sigue que U no es acotado en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$, una contradicción. □

Definiciones 1. Consideremos un espacio métrico (X, d) y $A \subseteq X$. Si f y $\{f_n\}$ son funciones con dominio X y codominio real, se dice que:

1. La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en A , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ para toda } x \in A.$$

2. La sucesión $\{f_n\}$ converge casi puntualmente ccp en A , siempre que f converja puntualmente sobre $A \setminus B$, donde $m(B) = 0$.
3. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en A , siempre que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para cada } x \in A \text{ y para toda } n \geq N.$$

Teorema 19. [Ro10] [Desigualdad de Chebychev] Sea f una función medible no negativa sobre X . Entonces para cualquier $\lambda > 0$, se sigue que:

$$m(\{x \in X | f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f dx.$$

Corolario 6. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones no negativas sobre X . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx = 0,$$

entonces $\{f_n\} \rightarrow 0$ en medida sobre X .

Demostración. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = 0$. Sea $\eta > 0$, por la desigualdad de Chebychev, para cada n , se tiene que:

$$m(\{x \in X | f_n \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta} \int_X f_n dx.$$

Así,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in X | f_n > \eta\}) \leq \frac{1}{\eta} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx = 0.$$

Por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in X | f_n \geq \eta\}) = 0$, para toda $\eta > 0$, es decir, $\{f_n\} \rightarrow 0$ en medida. \square

Lema 7. Sean $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$, $\alpha \in (0, 1]$ y $p \geq 1$. Entonces $d_H([u]_\alpha, [u]_\beta) \rightarrow 0$, cuando $\beta \rightarrow \alpha^-$.

Demostración. Es una consecuencia de que u es semicontinua superiormente. \square

Considérese un espacio métrico (X, d) . Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$. Si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta(u, \epsilon) > 0$ tal que para toda $0 \leq h < \delta$, se cumple que:

$$\left(\int_h^1 (d_H[u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

decimos que u es p -continua en promedio por la izquierda. Dado $U \subseteq \mathcal{F}_p^*(X)$, se dice que U es p -continua en promedio por la izquierda, si $U \neq \emptyset$ y la desigualdad anterior se satisface uniformemente para cada $u \in U$.

Lema 8. Sea $p \geq 1$. Si $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$, entonces u es p -continua en promedio por la izquierda.

Demostración. Sean $p \geq 1$ y $x_0 \in X$. Dada $\epsilon > 0$, como $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$ y usando la Continuidad Absoluta de la Integral de Lebesgue, sabemos que existe δ_1 , tal que:

$$\int_0^{h_1} d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha < \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^p, \text{ siempre que } 0 < h_1 < \delta_1,$$

es decir,

$$\left(\int_0^{h_1} d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}, \text{ siempre que } 0 < h_1 < \delta_1.$$

Por otro lado, como $[u]_{\frac{h_1}{2}} \in \mathcal{K}(X)$, se tiene que $d_H([u]_{\frac{h_1}{2}}, \{x_0\}) \in \mathbb{R}$. Tómesese un número $M > 0$ tal que $d_H([u]_{\frac{h_1}{2}}, \{x_0\}) < M$. Si $\alpha \geq h_1$ y $h \leq \frac{h_1}{2}$, entonces $\alpha - h \geq \frac{h_1}{2}$. En consecuencia, $u_\alpha \subseteq [u]_{\frac{h_1}{2}}$ y $u_{\alpha-h} \subseteq [u]_{\frac{h_1}{2}}$. Usando el Lema 1, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h}) &\leq d_H([u]_\alpha, \{x_0\}) + d_H([u]_{\alpha-h}, \{x_0\}) \leq \\ &d_H([u]_{\frac{h_1}{2}}, \{x_0\}) + d_H([u]_{\frac{h_1}{2}}, \{x_0\}) \leq 2M. \end{aligned}$$

Por el Lema 7, $d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h}) \rightarrow 0$, si $h \rightarrow 0^+$. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene:

$$\left(\int_{h_1}^1 d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

De esta forma, existe $h_2 > 0$ tal que:

$$\left(\int_{h_1}^1 d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}, \text{ cuando } h \leq h_2.$$

De esta manera, para toda $h \leq h_3 = \min\{\frac{h_1}{2}, h_2\}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\left(\int_h^1 d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(\int_h^{h_1} d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{h_1}^1 d_H([u]_\alpha, [u]_{\alpha-h})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(\int_h^{h_1} d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^{h_1} d_H([u]_{\alpha-h}, \{x_0\})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\epsilon}{3} \leq \\ &\left(\int_0^{h_1} d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{h_1} d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\epsilon}{3} < \\ &\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Corolario 7. Sean $p \geq 1$ y $U \subseteq \mathcal{F}_p^*(X)$ un conjunto finito. Entonces, U es p -continuo en promedio por la izquierda.

Demostración. Sea $p \geq 1$. Tómesese $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $\epsilon > 0$. Por el Lema 8, existen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ tales que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_k]_\alpha, [u_k]_{\alpha-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon,$$

si $h < \delta_k$ para $1 \leq k \leq n$. Para finalizar la demostración, basta tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$. \square

Corolario 8. Sean $p \geq 1$ y $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}_p^*(X)$. Entonces, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es p -continuo en promedio por la izquierda.

Demostración. Debido a que $\{u_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}_p^*(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $d_p(u_n, u_m) \leq \frac{\epsilon}{3}$, para cualesquiera $n, m \geq N$. Aplicando la desigualdad del triángulo y el Lema 7 para $k > N$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left(\int_h^1 d_H([u_k]_{\alpha-h}, [u_k]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left(\int_h^1 d_H([u_k]_{\alpha-h}, [u_N]_{\alpha-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_N]_{\alpha-h}, [u_N]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_N]_\alpha, [u_k]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado, el Corolario 7 implica que existe $\delta_N > 0$, tal que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_k]_{\alpha-h}, [u_k]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon,$$

para toda $1 \leq k \leq N$. Por lo tanto, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es p -continuo en promedio por la izquierda. \square

A continuación se presenta una caracterización de la completitud de $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$.

Teorema 20. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces (X, d) es completo, si y sólo si $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es completo.

Demostración. Supóngase que (X, d) es completo. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, definamos $g_{n,m} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g_{n,m}(\alpha) = d_H([u_n]_\alpha, [u_m]_\alpha)$. Entonces, para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número natural N , tal que para cualesquiera $n, m \geq N$, se cumple que:

$$d_p(u_n, u_m) = \left(\int_0^1 g_{n,m}^p(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Sea ϕ una biyección entre \mathbb{N} y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Debido a que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a d_p , existe N_1 tal que:

$$\int_0^1 [g_{\phi(k)}(\alpha)]^p d\alpha < \epsilon, \text{ para toda } k > N_1. \quad (5.1)$$

En consecuencia, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{\phi(k)}(\alpha) d\alpha = 0$. Por el Corolario 6, se tiene que $\{g_{\phi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ en medida en $(0, 1]$, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{\alpha \in (0, 1] : g_{\phi(k)}(\alpha) \geq \lambda\}) = 0, \text{ para cada } \lambda > 0.$$

Como $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una biyección, existe una sucesión creciente $\{N_k\} \subseteq \mathbb{N}$, para la cual:

$$m \left\{ \alpha \in (0, 1] : g_{n,m}(\alpha) \geq \frac{1}{2^k} \right\} < \frac{1}{2^k} \text{ para cualesquiera } m, n \geq N_k.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define el siguiente conjunto:

$$E_k = \left\{ \alpha \in (0, 1] : g_{N_k, N_{k+1}}(\alpha) \geq \frac{1}{2^k} \right\},$$

de donde $m(E_k) < \frac{1}{2^k}$ y, por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Aplicando el Lema de Borel-Cantelli, se tiene que para todo $\alpha \in I = (0, 1] \setminus A$, donde A tiene medida cero, existe $K(\alpha)$ tal que $\alpha \notin E_k$ para toda $k \geq K(\alpha)$, es decir,

$$g_{N_k, N_{k+1}}(\alpha) < \frac{1}{2^k} \text{ para toda } k \geq K(\alpha).$$

Por construcción, la sucesión $\{g_{N_k, N_{k+1}}\}_k$, define una subsucesión $\{u_{n_k}\}_k$ de $\{u_n\}_n$. Para $\alpha \in I$, se construye la sucesión $\{[u_{n_k}]_{\alpha}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por definición, cada $[u_{n_k}]_{\alpha} \in \mathcal{K}(X)$. Dicha sucesión resulta de Cauchy con la métrica de Hausdorff (d_H), pues para todo $k > K(\alpha)$ se tiene que:

$$d_H([u_{n_k}]_{\alpha}, [u_{n_{k+1}}]_{\alpha}) = g_{n_k, n_{k+1}}(\alpha) < \frac{1}{2^k}.$$

La completud de $\mathcal{K}(X)$ garantiza que $\{[u_{n_k}]_{\alpha}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $K_{\alpha} \in \mathcal{K}(X)$ en $(\mathcal{K}(X), d_H)$, para toda $\alpha \in I$.

El siguiente diagrama ilustra dicha situación.

$$\begin{array}{cccccccc}
 u & \cdots & K_{\alpha_1} & \cdots & K_{\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_k} & \cdots & K_{\alpha} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 u_N & \cdots & [u_N]_{\alpha_1} & \cdots & [u_N]_{\alpha_2} & \cdots & [u_N]_{\alpha_k} & \cdots & [u_N]_{\alpha} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 u_3 & \cdots & [u_3]_{\alpha_1} & \cdots & [u_3]_{\alpha_2} & \cdots & [u_3]_{\alpha_k} & \cdots & [u_3]_{\alpha} \\
 u_2 & \cdots & [u_2]_{\alpha_1} & \cdots & [u_2]_{\alpha_2} & \cdots & [u_2]_{\alpha_k} & \cdots & [u_2]_{\alpha} \\
 u_1 & \cdots & [u_1]_{\alpha_1} & \cdots & [u_1]_{\alpha_2} & \cdots & [u_1]_{\alpha_k} & \cdots & [u_1]_{\alpha}
 \end{array} \quad (5.2)$$

A continuación se mostrará que $\{u_{n_k}\}_k$ es convergente en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$. Con dicha motivación, se construye el conjunto difuso, el cual queda definido por sus α -niveles:

$$u_\alpha = \begin{cases} \overline{\bigcup_{\beta \in I} K_\beta}, & \text{si } \alpha = 0. \\ K_\alpha, & \text{si } \alpha \in I. \\ \bigcap_{\beta < \alpha} K_\beta, & \text{si } \alpha \notin I. \end{cases}$$

Se demostrará que $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$ y la convergencia de $\{u_n\}_N$ a u , según d_p . Para lo primero, se verificará que u satisface las condiciones del Teorema 13. Obsérvese que la condición ii) de dicho Teorema se cumple por la definición de u . En la demostración de los incisos i) y iii) se considerará únicamente el caso en que $\alpha, \beta \in I$, pues los otros casos se reducen a éste.

Afirmación 1: Si $\alpha, \beta \in [0, 1]$ satisfacen que $\alpha < \beta$, entonces $u_\beta \subseteq u_\alpha$.

Como ya se mencionó, es suficiente comprobar el enunciado de la afirmación cuando $\alpha, \beta \in I$. Sean $[u_{n_k}]_\beta \rightarrow u_\beta$ y $[u_{n_k}]_\alpha \rightarrow u_\alpha$, entonces para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:

$$d_\rho(u_\beta, u_\alpha) \leq d_\rho(u_\beta, [u_n]_\beta) + d_\rho([u_n]_\beta, [u_n]_\alpha) + d_\rho([u_n]_\alpha, u_\alpha),$$

donde d_ρ es la pseudométrica de Hausdorff expuesta en la Sección 3.1, aplicada a $\mathcal{K}(X)$. Sabiendo que $[u_n]_\alpha$ y $[u_n]_\beta$ son los α -niveles de u_n , se sigue que $[u_n]_\beta \subseteq [u_n]_\alpha$ y, por tanto, $d_\rho([u_n]_\beta, [u_n]_\alpha) = 0$. De la desigualdad anterior y, usando el hecho de que tanto $\{[u_n]_\alpha\}_N$ como $\{[u_n]_\beta\}_n$ convergen a u_α y u_β , respectivamente. Se deduce que para toda $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d_\rho(u_\beta, u_\alpha) \leq d_\rho(u_\beta, [u_n]_\beta) + d_\rho([u_n]_\alpha, u_\alpha) < \epsilon,$$

es decir, $d_\rho(u_\beta, u_\alpha) = 0$. Por las propiedades de d_ρ , se sigue que $u_\beta \subseteq u_\alpha$.

Afirmación 2: Sea $L : (0, 1] \rightarrow (\mathcal{K}(X), d_H)$, definida por $L(\alpha) = u_\alpha$. Entonces L es continua por la izquierda en $(0, 1]$.

Por el Teorema 11, el conjunto $D_L \subseteq [0, 1]$ de puntos donde L es discontinua por la izquierda es medible. Se mostrará que $m(D_L) = 0$. Supóngase lo contrario, i.e., $m(D_L) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ cuya regla de correspondencia es $f_n(\alpha) = d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha)$. Entonces $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a 0 casi en todas partes en el intervalo $(0, 1]$. El Teorema de Egoroff, aplicado al dominio D_L , garantiza la existencia de un conjunto cerrado $F \subseteq D_L$, tal que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en F a la función constante cero y $m(D_L \setminus F) < \frac{m(D_L)}{2}$. Por lo tanto, $m(F) > 0$. Se sigue que F es un conjunto acotado no numerable. Por lo que existe una sucesión creciente $\{\alpha_k\}_k$ en F la cual converge a $\alpha \in F$. Tómesese $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d_H([u_n]_{\alpha_k}, u_{\alpha_k}) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo que existe $M \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq M$, entonces $d_H([u_N]_{\alpha_k}, [u_N]_\alpha) < \frac{\epsilon}{3}$. Si $k > M$, se tiene que:

$$d_H(u_{\alpha_k}, u_\alpha) \leq d_H(u_{\alpha_k}, [u_N]_{\alpha_k}) + d_H([u_N]_{\alpha_k}, [u_N]_\alpha) + d_H([u_N]_\alpha, u_\alpha) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Lo anterior muestra que $\{u_{\alpha_k}\}_k$ converge a u_α , i.e., $u_\alpha = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} u_{\alpha_k}$.

Por otro lado, si $\{\beta_n\}_n$ es una sucesión creciente en $(0, 1]$, la cual converge a α . La Afirmación 1 implica que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_{\beta_n} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} u_{\alpha_k} = u_\alpha$. Lo que significa que L es continua por la izquierda en $\alpha \in D_L$, lo que es una contradicción y, por lo tanto, $m(D_L) = 0$.

Sea B el conjunto de puntos en $(0, 1]$ donde L es continua por la izquierda. Entonces $B \subseteq (0, 1]$ y $m(B) = 1$. La densidad de B en $(0, 1]$, la definición de u y la Afirmación 1 implican que $B = (0, 1]$, i.e., L es continua por la izquierda en $(0, 1]$.

Afirmación 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = 0$.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces, para toda $0 < h < 1$ se tiene lo siguiente:

$$\left(\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo, el primer sumando se puede acotar de la siguiente manera:

$$\left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u_n]_{\alpha+h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^h d_H([u_n]_{\alpha+h}, [u]_{\alpha+h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^h d_H([u]_{\alpha+h}, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

Haciendo el cambio de variable $\beta = \alpha + h$, se obtiene la expresión equivalente:

$$\left(\int_h^{2h} d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^{2h} d_H([u_n]_\beta, [u]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^{2h} d_H([u]_\beta, [u]_{\beta-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

Además, si $h < \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_n]_\beta, [u]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u]_\beta, [u]_{\beta-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En consecuencia,

$$\left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_h^1 d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_n]_\beta, [u]_\beta)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u]_\beta, [u]_{\beta-h})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.3)$$

Ahora bien, como $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es p -continuo por la izquierda en promedio, existe un $h \in (0, \frac{1}{2})$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta)^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Además, cuando $n \rightarrow \infty$, ocurre que $d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta) \rightarrow d_H([u]_{\beta-h}, [u]_\beta)$ casi en todas partes, para $\beta \in [h, 1]$. Aplicando el Lema de Fatou, se sigue que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u]_{\beta-h}, [u]_\beta)^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_n \left(\int_h^1 d_H([u_n]_{\beta-h}, [u_n]_\beta)^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{4}. \quad (5.5)$$

Por otro lado, el conjunto $C = \{[u_1]_h, [u_2]_h, \dots, [u_n]_h, \dots, u_h, [u_1]_1, [u_2]_1, \dots, [u_n]_1, \dots, u_1\}$ es acotado en $\mathcal{K}(X)$, pues la sucesión $\{u_n\}_n$ es de Cauchy y, en particular, acotada, y por el Lema 6, los conjuntos $\{[u_n]_h : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{[u_n]_1 : n \in \mathbb{N}\}$ son acotados en $\mathcal{K}(X)$. Adicionalmente, para $\beta \in (h, 1)$, $[u_n]_1 \subseteq [u_n]_\beta \subseteq [u_n]_h$ y $u_1 \subseteq u_\beta \subseteq u_h$, entonces aplicando el Lema 2 se tiene que, $d_H([u_n]_\beta, u_\beta) \leq \max\{d_H([u_n]_h, u_1), d_H([u_n]_1, u_h)\}$, así:

$$d_H([u_n]_\beta, u_\beta)^p \leq [\text{Diam}(C)]^p \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Del Teorema de Convergencia Dominada, se sigue que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_n]_\beta, [u]_\beta)^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Es decir, existe $N(h, \epsilon)$, tal que:

$$\left(\int_h^1 d_H([u_n]_\beta, [u]_\beta)^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4} \text{ cuando } n > N(h, \epsilon). \quad (5.6)$$

Las desigualdades 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 implican que:

$$\left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{3\epsilon}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^h d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_h^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

para toda $n > N(h, \epsilon)$. Lo que comprueba la Afirmación 3.

Afirmación 4: Sea $x_0 \in X$, entonces

$$\left(\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Considérese $\epsilon > 0$, por la Afirmación 3, existe N tal que para toda $n \geq N$, se cumple:

$$\left(\int_0^1 d_H([u]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

En particular, $u_N \in \mathcal{F}_p^*(X)$ y, por lo tanto,

$$\left(\int_0^1 d_H([u_N]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Así:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 (d_H([u]_\alpha, [u_N]_\alpha) + d_H([u_N]_\alpha, \{x_0\}))^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &\|g(u, u_N) + g(u_N, \chi_{\{x_0\}})\|_p \leq \|g(u, u_N)\|_p + \|g(u_N, \chi_{\{x_0\}})\|_p = \\ &\left(\int_0^1 d_H([u]_\alpha, [u_N]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 d_H([u_N]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \\ &\epsilon + \left(\int_0^1 d_H([u_N]_\alpha, \{x_0\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Lo que demuestra la Afirmación 4.

Usando las Afirmaciones 2 y 4, así como el Teorema 13, se concluye que $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$. Además, la Afirmación 3 implica que $\{u_n\}_n$ converge a u con respecto a d_p .

Para la otra implicación, supóngase que $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es completo. Por la Proposición 12, se sabe que (X, d) es isométrico al espacio $(\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}, d_p)$, por lo que sólo falta verificar que es un encaje cerrado.

Sea $\{\chi_{\{x_n\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(\{\chi_{\{x\}} : x \in X\}, d_p)$, la cual converge a $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$. Suponóngase que existen $y_1, y_2 \in X$ tales que $u(y_1) = \alpha_1 > 0$ y $u(y_2) = \alpha_2 > 0$, donde $\alpha_1 < \alpha_2$.

Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, se cumple que:

$$\int_0^1 d_H([\chi_{\{x_n\}}]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha < \epsilon$$

Entonces, -y con ayuda del Lema 1- por un lado, se tiene que para toda $n > N$:

$$\begin{aligned} \epsilon > \int_0^1 d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha &\geq \int_0^{\alpha_1} d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha + \int_{\alpha_1}^1 d_H(\{x_n\}, \{y_1\})^p d\alpha = \\ &\int_0^{\alpha_1} d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha + (1 - \alpha_1)d(x_n, y_1)^p > (1 - \alpha_1)d(x_n, y_1)^p > 0. \end{aligned}$$

Y por otro:

$$\begin{aligned} \epsilon > \int_0^1 d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha &\geq \int_0^{\alpha_1} d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha + \int_{\alpha_1}^1 d_H(\{x_n\}, \{y_2\})^p d\alpha = \\ &\int_0^{\alpha_1} d_H(\{x_n\}, [u]_\alpha)^p d\alpha + (1 - \alpha_1)d(x_n, y_2)^p > (1 - \alpha_1)d(x_n, y_2)^p > 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$d(x_n, y_1) < \left(\frac{\epsilon}{1 - \alpha_1} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad d(x_n, y_2) < \left(\frac{\epsilon}{1 - \alpha_1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

Sea $n > N$, entonces la desigualdad del triángulo aplicada a d , implica que:

$$d(y_1, y_2) < d(y_1, x_n) + d(y_2, x_n) < 2 \left(\frac{\epsilon}{1 - \alpha_1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

y por tanto $y_2 = y_1$, esto es $u = \chi_{\{y_1\}} \in \{\chi_{\{x\}} \mid x \in X\}$. □

Al igual que el inciso i) del Teorema 2, el inciso ii) del mismo, es un corolario del teorema predecesor. Nótese que existe un encaje cerrado de $(\mathcal{K}(X), d_H)$ en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$. La demostración es similar a la Afirmación 2 del Teorema 18.

Corolario 9. [HuWu18] $(\mathcal{F}_p^*(\mathbb{R}^n), d_p)$ es un espacio métrico completo para cualquier $p \geq 1$.

El siguiente resultado y el Teorema 20 permitirán concluir que $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es la completación de $(\mathcal{F}(X), d_p)$ cuando (X, d) es un espacio métrico completo.

Proposición 14. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es denso en $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$.

Demostración. Dado $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$, construimos $u_n \in \mathcal{F}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera:

$$[u_n]_\alpha = \begin{cases} [u]_\alpha, & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{n}. \\ [u]_{\frac{1}{n}}, & \text{si } \alpha < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$. Obsérvese que $[u_n]_\alpha = [u]_{\frac{1}{n}}$ para cualquier $\alpha < \frac{1}{n}$ y que $[u_n]_\alpha \subseteq [u_n]_{\frac{1}{n}}$, para toda $\alpha \geq \frac{1}{n}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tómesese $\beta \in (0, 1]$ y $\{\beta_m\}$ una sucesión creciente en $(0, 1]$ que converge a β . Si $\beta > \frac{1}{n}$, se tiene que:

$$[u_n]_\beta = u_\beta = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} u_{\beta_m} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [u_n]_{\beta_m}.$$

En caso de que $\beta \leq \frac{1}{n}$, sucede que:

$$[u_n]_\beta = [u]_{\frac{1}{n}} = [u_n]_{\beta_m}.$$

Es decir, para toda $\beta > 0$, se tiene que:

$$[u_n]_\beta = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [u_n]_{\beta_m}.$$

Ahora supóngase que $\{\beta_m\}$ es un sucesión decreciente que converge a 0. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$, tal que si $m \geq M$, entonces $\beta_m < \frac{1}{n}$. Así:

$$[u_n]_0 = \overline{\{x \in X : u_n(x) > 0\}} = \overline{[u]_{\frac{1}{n}}} = \overline{[u_n]_{\beta_m}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \overline{[u_n]_{\beta_m}}.$$

Entonces, aplicando el Teorema de Representación para $\mathcal{F}(X)$ (Teorema 12), $u_n \in \mathcal{F}(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, $\int_0^1 d_H([u]_\alpha, \{x\})^p d\alpha < \infty$, para algún $x \in X$, pues $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$ y usando la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue, se sigue que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que:

$$\left(\int_0^{\delta} d_H([u]_\alpha, \{x\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Obsérvese que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} d_p(u_n, u) &= \left(\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(\int_0^{\frac{1}{n}} d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 d_H([u_n]_\alpha, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} d_H([u]_{\frac{1}{n}}, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\left(\int_0^{\frac{1}{n}} d_H([u]_{\frac{1}{n}}, \{x\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\frac{1}{n}} d_H(\{x\}, [u]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left(\int_0^{\frac{1}{n}} d_H([u]_\alpha, \{x\})^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue, $d_p(u_n, u) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es, para cada $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$, se puede encontrar una sucesión $\{u_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$, tal que $\{u_n\}$ converge a u , o dicho en otras palabras $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{F}_p^*(X)$. \square

Corolario 10. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es separable si y sólo si (X, d) es separable.

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que el espacio (Y, d') es una completación de (X, d) , si satisface las siguientes condiciones:

- i) (Y, d') es un espacio métrico completo.
- ii) Existe un conjunto denso Y_0 en (Y, d') tal que (X, d) y (Y_0, d') son isométricos.

El ejemplo más conocido es \mathbb{Q} , el cual no es completo con la métrica usual, y su completación \mathbb{R} , con la misma métrica.

Corolario 11. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $p \geq 1$. Entonces $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es la completación de $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la completitud en los espacios métricos $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

Teorema 21. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \geq 1$. Entonces (X, d) es compacto, si y sólo si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo.

Demostración. Sea $p \geq 1$. Primero supóngase que (X, d) es compacto, entonces (X, d) es completo. Por el Teorema 20, $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es completo. Obsérvese que cuando (X, d) es compacto el soporte de $u \in \mathcal{F}_p^*(X)$ es compacto, pues es un cerrado contenido de un compacto. Es decir, cuando X es compacto, $\mathcal{F}_p^*(X) = \mathcal{F}(X)$ y, por tanto, $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo.

Para la otra implicación, supóngase que (X, d) no es compacto, entonces existe un subconjunto infinito $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subseteq X$, el cual no posee puntos de acumulación en X . El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, a su vez determina la sucesión $\{m_n\}_n$, donde $m_{n+1} = d(x_n, x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por recursión, se construye la sucesión de conjuntos difusos en $\mathcal{F}(X)$:

$$[u_1]_\alpha = \begin{cases} \{x_0, x_1\}, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_1}\right]. \\ \{x_0\}, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_1}, 1\right]. \end{cases}$$

$$[u_{n+1}]_\alpha = \begin{cases} \{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}\}, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_{n+1}}\right]. \\ [u_n]_\alpha, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

Donde $I_1 = 2m_1^p$ e $I_{n+1} = \max\{2I_n, 2^{(n+1)p}m_{n+1}^p\}$. Así que $2^{(n+1)p}m_{n+1}^p \leq I_{n+1}$, es decir,

$$\frac{m_{n+1}}{(I_{n+1})^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Obsérvese que $u_n \in \mathcal{F}(X)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y que la sucesión $\{I_n\}_n$ es una sucesión creciente. A continuación, se mostrará que la sucesión $\{u_n\}_n$ es de Cauchy en $(\mathcal{F}(X), d_p)$ y no es convergente.

Por construcción, se tiene lo siguiente:

$$d_H([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha) \leq \begin{cases} d(x_n, x_{n+1}) = m_{n+1}, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_{n+1}}\right]. \\ 0, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$d_p(u_{n+1}, u_n) = \left[\int_0^1 d_H([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\int_0^{\frac{1}{I_{n+1}}} d(x_n, x_{n+1})^p d\alpha + \int_{\frac{1}{I_{n+1}}}^1 0 d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_0^{\frac{1}{I_{n+1}}} m_{n+1}^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\frac{m_{n+1}^p}{I_{n+1}} \right]^{\frac{1}{p}} = \frac{m_{n+1}}{(I_{n+1})^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

De lo anterior, se deduce que $\{u_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}(X), d_p)$. Resta probar que $\{u_n\}_n$ no converge en $\mathcal{F}(X)$, con respecto a d_p . Tómesese cualquier conjunto $u \in \mathcal{F}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Como u_0 es compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x_{n_0} \notin u_0$. Entonces para todo $n > n_0$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha) &= \max\left\{ \max_{a \in [u_n]_\alpha} d(a, u_\alpha), \max_{b \in u_\alpha} d(b, [u_n]_\alpha) \right\} \\ &= \max\left\{ \max_{a \in [u_n]_\alpha} d(a, u_\alpha), \max_{b \in u_\alpha} d(b, [u_n]_\alpha) \right\} \geq \max\left\{ \max_{a \in [u_n]_\alpha} d(a, u_0), \max_{b \in u_\alpha} d(b, [u_n]_\alpha) \right\} \\ &\geq \max\left\{ d(x_{n_0}, u_0), \max_{b \in u_\alpha} d(b, [u_n]_\alpha) \right\} \geq d(x_{n_0}, u_0) > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$d_p(u, u_n) = \left[\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int_0^1 d(x_0, u_0)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \geq d(x_0, u_0) \text{ para } n > n_0.$$

Esto significa que, si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\{u_n\}$ no converge a u , lo que concluye la demostración. \square

Corolario 12. Sea $p \geq 1$ y (X, d) un espacio métrico. Supóngase que $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo, entonces (X, d) también lo es.

Un espacio métrico (X, d) es llamado localmente compacto, si para todo $x \in X$, existe una vecindad U tal que su cerradura \bar{U} es compacta.

Teorema 22. Si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es localmente compacto, entonces (X, d) es compacto.

Demostración. Supóngase que (X, d) no es compacto, entonces existe un subconjunto infinito $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de X sin puntos de acumulación. Como en el Teorema 21, con el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se construye la sucesión $\{m_n\}$, donde $m_{n+1} = d(x_n, x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $\chi_{\{x_0\}}$ la función característica de x_0 . Debido a que $\mathcal{F}(X)$ es localmente compacto, existe $\epsilon > 0$, tal que $\bar{B}(\chi_{\{x_0\}}, \epsilon) = \{u \in \mathcal{F}(X) : d_p(u, \chi_{\{x_0\}}) \leq \epsilon\}$ es una vecindad compacta de $\chi_{\{x_0\}}$. Nuevamente usamos la construcción recursiva de la sucesión de conjuntos difusos en $(\mathcal{F}(X), d_p)$ descrita en el Teorema 21, modificando ligeramente los intervalos I_n :

$$[u_1]_\alpha = \begin{cases} \{x_0, x_1\}, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_1}\right]. \\ \{x_0\}, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_1}, 1\right]. \end{cases}$$

$$[u_{n+1}]_\alpha = \begin{cases} \{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}\}, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_{n+1}}\right]. \\ [u_n]_\alpha, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

Donde $I_1 = \max\{2m_1^p, \frac{2^p}{\epsilon^p}\}$ e $I_{n+1} = \max\left\{2I_n, \frac{2^{(n+1)p}m_{n+1}^p}{\epsilon^p}\right\}$.

La prueba que de la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy es análoga a la presentada en el Teorema 21. Adicionalmente, si $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^1 d_H([\chi_{\{x_0\}}]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left[\int_{\frac{1}{I_1}}^1 d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\frac{1}{I_2}}^{\frac{1}{I_1}} d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \dots + \left[\int_0^{\frac{1}{I_n}} d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left[\int_0^1 d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{\frac{1}{I_1}} d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \dots + \left[\int_0^{\frac{1}{I_n}} d_H(\{x_0\}, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \dots + \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon, \end{aligned}$$

es decir, $u_n \in \overline{B}(\chi_{\{x_0\}}, \epsilon)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}$ converge a $u \in \overline{B}(\chi_{\{x_0\}}, \epsilon) \subset \mathcal{F}(X)$. Sin embargo, tal y como en el Teorema 21, $\{u_n\}$ converge a $u \notin \mathcal{F}(X)$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 13. Sean $p \geq 1$ y (X, d) un espacio métrico. Supóngase que $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es localmente compacto, entonces $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo.

El siguiente ejemplo muestra que la compacidad local de (X, d) , no garantiza la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$.

Ejemplo 14. Se define $E^n = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : u_\alpha \text{ es convexo, para } \alpha \in [0, 1]\}$. Sea $p \in [0, 1]$. Entonces, (E^n, d_p) no es localmente compacto.

Demostración. Supóngase que (E^n, d_p) es localmente compacto. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}(\chi_{\bar{0}}, \epsilon) = \{u \in E^n : d_p(u, \chi_{\bar{0}}) \leq \epsilon\}$ es una vecindad compacta de $\chi_{\bar{0}}$, donde $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. A continuación, se construye una sucesión de conjuntos difusos convexos, como sigue:

$$[u_1]_\alpha = \begin{cases} [0, 1], & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_1}\right]. \\ \{0\}, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_1}, 1\right]. \end{cases}$$

$$[u_{n+1}]_\alpha = \begin{cases} [0, n+1], & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_{n+1}}\right]. \\ [u_n]_\alpha, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

Donde $I_0 = 1$, $I_1 = \max\{2^p, \frac{2^p}{\epsilon^p}\}$ e $I_{n+1} = \max\left\{2I_n, (n+1)^p 2^{(n+1)p}, \frac{(n+1)^p 2^{(n+1)p}}{\epsilon^p}\right\}$. Obsérvese que cada u_α es convexo para $\alpha \in [0, 1]$. Como en ejemplos anteriores, se tiene:

$$d([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{I_{n+1}}\right]. \\ 0, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, 1\right]. \end{cases}$$

Por lo que:

$$d_p(u_{n+1}, u_n) = \left[\int_0^1 d_H([u_{n+1}]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{\frac{1}{I_{n+1}}} 1 d\alpha + \int_{\frac{1}{I_{n+1}}}^1 0 d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{I_{n+1}^{1/p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}},$$

lo que implica que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en (E^n, d_p) . Obsérvese que $I_n \geq \frac{n^p 2^{np}}{\epsilon^p}$, es decir $\frac{n}{I_n^{1/p}} \leq \frac{\epsilon}{2^n}$. Así, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\frac{n}{I_n^{1/p}} \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Fijese $m \in \mathbb{N}$, según la definición de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene:

$$d_p(\chi_{\bar{0}}, u_m) = \left[\int_0^1 d_H([\chi_{\bar{0}}]_\alpha, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\int_{\frac{1}{I_1}}^1 d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\frac{1}{I_2}}^{\frac{1}{I_1}} d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \dots + \left[\int_0^{\frac{1}{I_m}} d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left[\int_{\frac{1}{I_1}}^1 d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{\frac{1}{I_1}} d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \dots + \left[\int_0^{\frac{1}{I_m}} d_H(\{0\}, [u_m]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\int_{\frac{1}{I_1}}^1 d_H(\{0\}, \{0\})^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{\frac{1}{I_1}} d_H(\{0\}, [0, 1])^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} + \dots + \left[\int_0^{\frac{1}{I_m}} d_H(\{0\}, [0, m])^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$0 + \frac{1}{I_1^{1/p}} + \frac{2}{I_2^{1/p}} + \dots + \frac{m-1}{I_{m-1}^{1/p}} + \frac{m}{I_m^{1/p}} \leq$$

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{n-1}} + \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon,$$

es decir, $u_n \in \bar{B}(\chi_{\bar{0}}, \epsilon)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{B}(\chi_{\bar{0}}, \epsilon)$ es compacta, la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $u \in \bar{B}(\chi_{\bar{0}}, \epsilon) \subseteq E^n$. Se mostrará que $\{u_n\}$ converge a u , definida mediante sus α -niveles de la siguiente forma, $u_\alpha = [0, n]$, si $\alpha \in \left(\frac{1}{I_{n+1}}, \frac{1}{I_n}\right]$, para toda $n \in \omega$ y $u_0 = [0, \infty)$, lo que implica que $u \in \mathcal{F}_p^*(\mathbb{R}^n) \setminus E^n$. Tómesese $\delta > 0$, entonces, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \delta.$$

Si $n \geq N$, entonces:

$$d_p(u, u_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \left[\int_{\frac{1}{I_{i+1}}}^{\frac{1}{I_i}} d_H(u_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=n}^{\infty} \left[\int_{\frac{1}{I_{i+1}}}^{\frac{1}{I_i}} d_H([0, i], [0, n])^p d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} (1-n) \frac{1}{I_i^{1/p}} \leq \sum_{i=n}^{\infty} (1) \frac{1}{I_i^{1/p}}.$$

Como $I_i \geq (i)^p 2^{ip}$, se tiene que $\frac{i}{I_i^{1/p}} \leq \frac{1}{2^i}$, para toda $i \in \mathbb{N}$, de donde:

$$d_p(u, u_n) \geq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i}{I_i^{1/p}} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Lo anterior prueba que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $u \in \mathcal{F}_p^*(\mathbb{R}^n) \setminus E^n$. Es decir, (E^n, d_p) no es localmente compacto. El mismo ejemplo permite concluir, que en general la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$ no se sigue de la compacidad local de (X, d) . \square

Capítulo 6

Extensión de Zadeh

Este último capítulo se dedica a la construcción de una función \hat{f} entre los espacios $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{F}(Y)$ a partir de la función $f : X \rightarrow Y$, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

La función $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es nombrada la extensión de Zadeh de f y es definida como sigue:

$$\hat{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in f^{-1}(y)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset. \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

El propósito del presente capítulo es establecer la continuidad de \hat{f} , a partir de la f , para lo cual es menester, primero es constatar que la función \hat{f} está bien definida, esto es, que $\hat{f}(u)$ efectivamente pertenece a $\mathcal{F}(Y)$, lo que se apoya fuertemente en la continuidad de f y en algunos resultados conocidos acerca del comportamiento de las funciones continuas.

Con dicho fin se evoca la definición de función continua entre dos espacios métricos. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un función, se dice que f es *continua en el punto* $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $d(a, x) < \delta$, entonces $d'(f(a), f(x)) < \epsilon$. Equivalentemente, f es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\} \subseteq X$, tal que $x_n \rightarrow x$, implica que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Teorema 23. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, entonces $f(X)$ es compacto. En particular, si $v \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces $f(v) \subseteq Y$ también es cerrado, i.e., f es una función cerrada.

Para todo $u \in \mathcal{F}(X)$ y $y \in Y$, el supremo del conjunto no vacío $\{u(x) : x \in f^{-1}(y)\}$ siempre existe ya que $u : X \rightarrow [0, 1]$ y $[0, 1]$ es cerrado y acotado. Nótese que $\hat{f}(u) : Y \rightarrow [0, 1]$, es decir, $\hat{f}(u)$ es un conjunto difuso en Y . Más aún, la extensión de Zadeh respeta α -niveles, cuando f es continua:

Proposición 15. [JaSa20] Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces:

$$[\hat{f}(u)]_\alpha = f[u_\alpha], \text{ para cada } u \in \mathcal{F}(X) \text{ y cada } \alpha \in [0, 1].$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{F}(X)$. Primero se analizará el caso $\alpha > 0$. Supóngase que $y_0 \in f[u_\alpha]$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$ y $u(x_0) \geq \alpha$. Así que $f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$ y $\sup\{u(x) : x \in f^{-1}(y_0)\} \geq \alpha$, esto es, $\hat{f}(u)(y_0) \geq \alpha$ y, por lo tanto, $y_0 \in [\hat{f}(u)]_\alpha$.

Para la otra contención, supóngase que $y_0 \in [\hat{f}(u)]_\alpha = \{y \in Y : \hat{f}(u)(y) \geq \alpha\}$. Por lo tanto, $\hat{f}(u)(y_0) \geq \alpha$, esto quiere decir que $\sup\{u(x) : x \in f^{-1}(y_0)\} = \beta \geq \alpha$. Por otro lado, la continuidad de f implica que $f^{-1}(y_0)$ es un conjunto cerrado en X . Más aún, debido $f^{-1}(y_0) \cap u_0 \neq \emptyset$, $f^{-1}(y_0) \cap u_0$ es un conjunto compacto. La semicontinuidad superior de u garantiza que u alcanza el supremo en el compacto $f^{-1}(y_0) \cap u_0$, es decir, existe $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ tal que $u(x_0) = \beta \geq \alpha$. En consecuencia, $x_0 \in u_\alpha$ y $y_0 = f(x_0) \in f[u_\alpha]$.

En el caso $\alpha = 0$, se tiene que:

$$[\hat{f}(u)]_0 = \overline{\bigcup_{\alpha>0} [\hat{f}(u)]_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha>0} f(u_\alpha)} = f\left(\overline{\bigcup_{\alpha>0} u_\alpha}\right) = \overline{f(u_0)} = f(u_0).$$

□

La siguiente proposición garantiza que la extensión de Zadeh está bien definida.

Proposición 16. Sea f una función continua entre los espacios métricos X y Y , si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\hat{f}(u) \in \mathcal{F}(Y)$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{F}(X)$. Veamos que $\hat{f}(u) \in \mathcal{F}(Y)$.

a) $\hat{f}(u)$ es semicontinua superiormente: por hipótesis, u_0 es compacto. Además por definición, $u_\alpha \subseteq u_0$ para toda $\alpha > 0$. Debido a que u_α es cerrado, para toda $\alpha > 0$, el Teorema 23, afirma que $f(u_\alpha)$ es cerrado en Y . Por último, usando la Proposición 15, se tiene que $[\hat{f}(u)]_\alpha = f(u_\alpha)$, con lo cual se concluye que $[\hat{f}(u)]_\alpha$ es cerrado en Y , para toda $\alpha \in (0, 1]$.

b) Existe $y \in Y$ tal que $\hat{f}(u)(y) = 1$: por hipótesis, existe x_0 tal que $u(x_0) = 1$. Sea $y_0 = f(x_0)$, por lo que:

$$\hat{f}(u)(y_0) = \sup\{u(x) : x \in f^{-1}(y_0)\} = 1.$$

c) $[\hat{f}(u)]_0$ es compacto: Por el Teorema 23, se tiene que $f(u_0)$ es compacto. La demostración termina con el uso de la Proposición 15. □

Proposición 17. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua. Entonces $\hat{f}(\chi_K) = \chi_{f(K)}$, para cada $K \in \mathcal{K}(X)$.

Demostración. Sea K un compacto no vacío en X . La Proposición 6 implica que $[\chi_K]_\alpha = K$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Además, por la Proposición 15, se tiene lo siguiente:

$$[\hat{f}(\chi_K)]_\alpha = f([\chi_K]_\alpha) = f(K),$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$. Nuevamente, por la Proposición 6, se tiene que $[\chi_{f(K)}]_\alpha = f(K)$, para cada $\alpha \in [0, 1]$. Esto es,

$$[\hat{f}(\chi_K)]_\alpha = f(K) = [\chi_{f(K)}]_\alpha.$$

En otras palabras, $\hat{f}(\chi_K)$ y $\chi_{f(K)}$ tienen los mismos α -niveles y por la Proposición 5, se concluye que $\hat{f}(\chi_K) = \chi_{f(K)}$. \square

A diferencia de d_∞ y d_0 , la métrica de Skorokhod, donde se sabe que:

- [JaSa20] Si $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ es una función continua, entonces la extensión de Zadeh $\hat{f} : (\mathcal{F}, p_\infty) \rightarrow (\mathcal{F}(Y), q_\infty)$ es continua,
- [JaSa20] $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ es una función continua, si y sólo si la extensión de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ es continua con respecto a d_0 ,

la continuidad de f no basta para asegurar la continuidad de \hat{f} , se necesitan condiciones adicionales sobre el dominio de f , lo que se muestra con el siguiente ejemplo, o más precisamente un contra-ejemplo. Más aún, dicho contra-ejemplo también es aplicable cuando se considera un espacio localmente compacto.

Ejemplo 15. Sean $X = [0, \infty)$ con la métrica usual d y $p \geq 1$. Considérese $f : X \rightarrow X$, definida por $f(x) = x^2$. Entonces $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ no es continua respecto a d_p . Sea $u = \chi_{\{0\}}$, entonces $u_\alpha = \{0\}$, para $\alpha \in (0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define:

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0. \\ \frac{1}{n^{2p}}, & \text{si } 0 < x \leq n. \\ 0, & \text{si } n < x. \end{cases}$$

Entonces,

$$[u_n]_\alpha = \begin{cases} [0, n], & \text{si } \alpha \in [0, \frac{1}{n^{2p}}]. \\ \{0\}, & \text{si } \alpha \in (\frac{1}{n^{2p}}, 1]. \end{cases}$$

Por lo que:

$$d_H(u_\alpha, [u_n]_\alpha) = \begin{cases} n, & \text{si } \alpha \in [0, \frac{1}{n^{2p}}]. \\ 0, & \text{si } \alpha \in (\frac{1}{n^{2p}}, 1]. \end{cases}$$

Así:

$$d_p(u, u_n) = \left(\int_0^1 d_H(u_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{\frac{1}{n^{2p}}} d_H(u_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha + \int_{\frac{1}{n^{2p}}}^1 d_H(u_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\frac{1}{n^{2p}}} n^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&\quad \left[n^p \left(\frac{1}{n^{2p}} \right) \right]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Lo que muestra que $\{u_n\}_n$ converge a u respecto a d_p . Por otro lado, la Proposición 15 implica que $[\hat{f}(u)]_\alpha = f(u_\alpha) = \{0\}$, para cada $\alpha \in I$. Además,

$$[\hat{f}(u_n)]_\alpha = f([u_n]_\alpha) = [0, n^2], \text{ si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{n^{2p}}\right],$$

$$[\hat{f}(u_n)]_\alpha = f([u_n]_\alpha) = \{0\}, \text{ si } \alpha \in \left(\frac{1}{n^{2p}}, 1\right].$$

Por lo tanto,

$$d_H([\hat{f}(u)]_\alpha, [\hat{f}(u_n)]_\alpha) = \begin{cases} n^2, & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{1}{n^{2p}}\right], \\ 0, & \text{si } \alpha \in \left(\frac{1}{n^{2p}}, 1\right]. \end{cases}$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d_p(\hat{f}(u), \hat{f}(u_n)) &= \left(\int_0^1 d_H([\hat{f}(u)]_\alpha, [\hat{f}(u_n)]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&\left(\int_0^{\frac{1}{n^{2p}}} d_H([\hat{f}(u)]_\alpha, [u_n]_\alpha)^p d\alpha + \int_{\frac{1}{n^{2p}}}^1 d_H([\hat{f}(u)]_\alpha, [\hat{f}(u_n)]_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\frac{1}{n^{2p}}} n^{2p} d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&\quad \left[n^{2p} \left(\frac{1}{n^{2p}} \right) \right]^{\frac{1}{p}} = 1.
\end{aligned}$$

Es decir, $\{\hat{f}(u_n)\}_n$ no converge a $\hat{f}(u)$ respecto a d_p , por lo que la extensión de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ no es continua. \square

El espacio métrico $[0, \infty)$ con la métrica usual, es un espacio localmente compacto, por lo que el ejemplo anterior muestra, también que si se supone a (X, d) localmente compacto y $f : X \rightarrow X$, \hat{f} no será necesariamente continua.

Dados dos espacios métricos X y Y consideramos los hiperespacios $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ con sus respectivas métricas de Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, se construye la función $\bar{f} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ de la siguiente manera $\bar{f}(A) = f(A)$, para todo $A \in \mathcal{K}(X)$. Por el Teorema 23, \bar{f} está bien definida.

Lema 9. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{u_n\}_n$ una sucesión de conjuntos difusos en $\mathcal{F}(X)$ y $p \geq 1$. Si $\{u_n\}_n$ converge a u con respecto a d_p , para algún $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\{d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha)\}_n$ converge a cero en medida.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Se define $g_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ mediante $g_n(\alpha) = d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha)$, para cada $\alpha \in [0, 1]$. Considérese los siguientes conjuntos $E_n(\delta) = \{\alpha \in [0, 1] : g_n(\alpha) \geq \delta\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\delta > 0$ y tómesese $(\epsilon\delta)^{\frac{1}{p}} > 0$, debido a que $\{u_n\}_n$ converge a u , respecto de d_p , existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N$, se tiene que:

$$\epsilon^{\frac{1}{p}}\delta > d_p(u_n, u) = \left(\int_0^1 d_H([u_n]_\alpha, u_\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{E_n(\delta)} \delta^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = (\delta^p m(E_n(\delta)))^{\frac{1}{p}},$$

de donde $\epsilon > m(E_n(\delta))$. Es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in (0, 1] : g_n(\alpha) \geq \delta\}) = 0$. \square

Teorema 24. Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $p \geq 1$ y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Entonces $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ es continua con respecto a d_p .

Demostración. Considérese $\{u_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$, una sucesión que converge a $u \in \mathcal{F}(X)$ respecto a d_p . Se debe mostrar que $\{\hat{f}(u_n)\}$ converge a $\hat{f}(u)$ respecto a d_p , para tal fin se fija $\epsilon > 0$, a lo largo de la presente demostración.

Debido a que (X, d) es compacto, el espacio métrico $(\mathcal{K}(X), d_H)$ lo es también, por lo que $\bar{f} : (\mathcal{K}(X), d_H) \rightarrow (\mathcal{K}(X), d_H)$ es uniformemente continua. Por consiguiente, existe $\delta > 0$, tal que si $A, B \in \mathcal{K}(X)$ satisfacen:

$$d_H(A, B) < \delta, \text{ entonces } d_H(f(A), f(B)) = d_H(\bar{f}(A), \bar{f}(B)) < \left[\frac{\epsilon}{2} \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (6.1)$$

Se define $g_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, como en el lema anterior, por lo que $\{g_n\}_n$ converge en medida a 0, pues $\{u_n\}$ converge a u respecto a d_p . Así, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, se tiene lo siguiente:

$$m(\{x \in [0, 1] : g_n(x) \geq \delta\}) < \frac{\epsilon}{2K^p}, \quad (6.2)$$

donde K es el diámetro de X , lo que quiere decir que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{K}(X)$, se tiene que $d_H(A, B) \leq K$, en particular se tiene que $d_H(f([u_n]_\alpha), f(u_\alpha)) \leq K$, para $n \in \mathbb{N}$. Sea $E_n = \{\alpha \in [0, 1] : g_n(\alpha) \geq \delta\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fíjese $n_0 \geq N$, de acuerdo con 6.2, se tiene que:

$$\int_{E_{n_0}} d_H(f([u_{n_0}]_\alpha), f(u_\alpha))^p d\alpha \leq \int_{E_{n_0}} K^p d\alpha = m(E_{n_0})K^p < \frac{\epsilon}{2K^p}K^p = \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.3)$$

Por otro lado, si $\alpha \in [0, 1] \setminus E_{n_0}$, entonces $d_H([u_{n_0}]_\alpha, u_\alpha) < \delta$, lo que implica por (6.1), que $d_H(f([u_{n_0}]_\alpha), f(u_\alpha))^p < \frac{\epsilon}{2}$ y, por tanto,

$$\int_{[0,1] \setminus E_{n_0}} d_H(f([u_{n_0}]_\alpha), f(u_\alpha))^p d\alpha < \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.4)$$

De (6.3) y (6.4) tenemos que, $\int_{[0,1]} d_H(f([u_{n_0}]_\alpha), f(u_\alpha))^p d\alpha < \epsilon$. Por último, usando la Proposición 15, se tiene:

$$\int_{[0,1]} d_H([\hat{f}(u_n)]_\alpha, [\hat{f}(u)]_\alpha)^p d\alpha = \int_{[0,1]} d_H(f([u_n]_\alpha), f(u_\alpha))^p d\alpha < \epsilon,$$

lo que quiere decir que $\{\hat{f}(u_n)\}$ converge a $\hat{f}(u)$ respecto a d_p , esto es $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ es continua, según d_p . \square

El teorma anterior se puede generalizar de la sigiente forma: Si (X, d) un espacio métrico compacto, $p \geq 1$ y $f : X \rightarrow Y$ una función continua sobre. Entonces $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ es continua con respecto a d_p . La prueba es la misma que la del teorema anterior.

Capítulo 7

Conclusiones

Considérese un espacio métrico (X, d) . Entonces, tal y como se explicita en Capítulo Preliminares, se construye el espacio $\mathcal{F}(X)$, que con ayuda de la métrica d_p , se convertirá en el espacio métrico de conjuntos difusos cuyo dominio es X .

Las motivaciones originales para realizar el presente trabajo fue dar respuesta a las siguientes preguntas sobre el espacio métrico $(\mathcal{F}(X), d_p)$:

1. Sean (X, d) un espacio métrico. Si $1 \leq p < q$, ¿cuál es la relación entre d_p y d_q ?
2. Sean (X, d) un espacio métrico separable y p un número mayor o igual que 1. ¿Es $(\mathcal{F}(X), d_p)$ separable?
3. Sean (X, d) un espacio métrico completo y p un número mayor o igual que 1. ¿Es $(\mathcal{F}(X), d_p)$ completo?
4. Estudiar propiedades dinámicas como transitividad, densidad de puntos periódicos, sensibilidad a las condiciones iniciales, entre otras.

Respecto al primer problema, el Corolario 5 muestra que la relación que mantiene la familia $\{d_p\}_{p \geq 1}$ es de monotonía. Más aún, el Ejemplo 12 exhibe un caso donde la desigualdad es estricta.

El problema número dos tiene su solución en el Teorema 18, el cual afirma que $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es separable si y sólo si (X, d) también lo es. Mientras que para la tercera cuestión, el Ejemplo 13 provee una respuesta negativa y habrá que conformarse con una sólo dirección: si $(\mathcal{F}(X), d_p)$ es completo, entonces (X, d) es completo también. Partiendo de un espacio métrico (X, d) completo, el rumbo de la investigación se concentró en la completación de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, la cual se denotó con el símbolo $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ (Definición 20). La prueba de que efectivamente $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es la completación de $(\mathcal{F}(X), d_p)$ se conforma de, primero cerciorarse de que efectivamente $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ es completo, lo que requirió el uso de herramienta sofisticada, y particularmente la aplicación en reiteradas ocasiones de la caracterización de $(\mathcal{F}_p^*(X), d_p)$ (Teorema 13), resultados propios del análisis, así como las ideas, conceptos y demostraciones de H. Huang y C. Wu [HuWu18].

Adicionalmente, cabe mencionar la fructífera construcción del Ejemplo 13, pues su construcción suscitó el Teorema 22 que manifiesta la compacidad y completitud de (X, d) ,

a partir de la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, pero ¿qué sucede con la otra implicación: se puede establecer la compacidad local de $(\mathcal{F}(X), d_p)$ a partir de la compacidad de (X, d) ?, un problema para trabajos posteriores. Por otro lado, el Teorema 21 afirma la equivalencia entre la compacidad de (X, d) y la completitud de $(\mathcal{F}(X), d_p)$, entonces surge naturalmente la cuestión sobre qué se puede afirmar sobre la compacidad de $(\mathcal{F}(X), d_p)$ a partir de la compacidad de (X, d) .

Un sistema dinámico discreto es una pareja (X, f) , donde X es un espacio métrico y f es una función continua de X en X . Sea X un espacio métrico compacto, cuya métrica es d , el Teorema 24 muestra que se puede construir una función continua $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$, respecto a d_p , para algún $p \geq 1$, llamada extensión de Zadeh, suponiendo la existencia de una función continua $f : X \rightarrow X$. Dicho resultado abre la posibilidad de investigar las propiedades dinámicas que comparten los sistemas dinámicos (X, f) y $(\mathcal{F}(X), \hat{f})$, suponiendo sus respectivas métricas, así como la compacidad de X . El tema por supuesto no se ha agotado y aún quedan varias interrogantes por resolver.

Bibliografía

- [Za65] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets, Information and control 8, 1965.
- [Za74] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Process, Academic Press, 1974.
- [GoVo86] R. Goetschel and W. Voxman. Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems 18, 1986.
- [KIPuRa86] E. P. Klement, M. L. Puri, D. A. Ralescu. Limit theorems for fuzzy random variables, Proc. R. Soc. Lond. A 407,1986.
- [En89] R. Engelking, General Topology. Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [Di90] P. Diamond. A note on fuzzy starshaaped sets, Fuzzy Sets and Systems 37, 1990.
- [DiKl90] P. Diamond, P Kloeden. Metric spaces of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Sets and Systems 35, 1990.
- [DiKl94] P. Diamond, P Kloeden. Metric spaces of fuzzy Sets-Theory and Application, World Scientific, Singapore, 1994.
- [Ba95] R.G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Jhon Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [Joo00] S.Y. Joo, Y.K. Kim, The Skorokhod topology on space of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst. 111, 2000.
- [Kim01] Y.K. Kim, Compactness and convexity on the space of fuzzy sets, J. Math Anal. Appl, 2001.
- [Iri08] I.L. Iribarren. Topología de Espacios métricos, Limusa, 2008.
- [Ro10] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick. Real Analysis, Fourth Edition, Prentice Hall, 2010.
- [Jo15] W. Johnston, The Lebesgue Integral for Undergraduates, The Matematical Association of America, 2015.

- [Hu18] H. Huang. Characterizations of endograph metric and Γ -convergence on fuzzy, Fuzzy Sets and Systems 350, 2018.
- [HuWu18] H. Huang, C. Wu. Characterizations of compact sets in fuzzy set with L_p metric, Fuzzy Sets and Systems 330, 2018.
- [JaSa20] D. Jardón, I. Sánchez and M. Sanchis. Some questions about Zadeh's extension on metric spaces, Fuzzy Sets and System 379, (2020).
- [AS22] K. Aguirre, I. Sánchez Some properties of the d_p -metrics on fuzzy sets, Topology and its Applications. Appl. 322, 2022.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00083

Matrícula: 208381410

Algunas propiedades de las métricas d_p en los conjuntos difusos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 9:00 horas del día 16 del mes de mayo del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA
- DR. MANUEL SANCHIS LOPEZ
- DR. DANIEL ROBERTO JARDON ARCOS
- DR. MIKHAIL TKATCHENKO
- DR. IVAN SANCHEZ ROMERO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: KINRHA AGUIRRE DE LA LUZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



KINRHA AGUIRRE DE LA LUZ
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMÁN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA

VOCAL

DR. MANUEL SANCHIS LOPEZ

VOCAL

DR. DANIEL ROBERTO JARDÓN ARCOS

VOCAL

DR. MIKHAIL TKATCHENKO

SECRETARIO

DR. IVAN SANCHEZ ROMERO