



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

**ANALISIS Y DISEÑO DE ESQUEMAS
DE CONTROL PARA COLUMNAS
DE DESTILACION BINARIA**

Tesis que presenta:
M. en C. Jesús Isidro González Trejo

Para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias


Asesor:
Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

México, D. F. Junio de 1998

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

DENOMINACION DE LA TESIS
ANALISIS Y DISEÑO DE
ESQUEMAS DE CONTROL
PARA COLUMNAS DE
DESTILACION BINARIA.

En México, D. F. se presentaron a las 11:00 horas del
 día 24 del mes de JUNIO del año 1998
 en la Unidad IZTAPALAPA de la Universidad Autónoma
 Metropolitana, los suscritos miembros del Jurado.
DR. GERARDO ESPINOSA PEREZ;
DR. JESUS ALVAREZ CALDERON;
DR. RUBEN GARRIDO MOCTEZUMA;
DR. RODOLFO SUAREZ CORTEZ Y



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
 Dirección de Sistemas Escolares

JESUS ISIDRO GONZALEZ TREJO
 FIRMA DEL INTERESADO

SE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ
 bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario
 se reunieron para proceder al examen de grado de
 Doctor en: CIENCIAS

REVISO

DR. ANTONIO AGUILAR AGUILAR
 DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES

de JESUS ISIDRO GONZALEZ TREJO
 quien presentó una comunicación de resultados, cuya deno-
 minación aparece al margen y de acuerdo con el artículo 78
 fracciones I, II, IV y V del Reglamento de Estudios Superiores
 de esta Universidad, los miembros del Jurado resolvieron:
aprobarlo

El suscrito Director de División de
CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
 hace constar que las firmas que apare-
 cen son auténticas y corresponden a
 los señores Miembros del Jurado cu-
 yos nombres aparecen en esta acta.

DRA. MARIA JOSE ARROYO P.
 FIRMA

Acto continuo, el Presidente del Jurado comunicó al interesa-
 do el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue
 tomada la protesta.

DR. GERARDO ESPINOSA P.
 PRESIDENTE

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ R.
 SECRETARIO

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON
 VOCAL

DR. RUBEN GARRIDO MOCTEZUMA
 VOCAL

DR. RODOLFO SUAREZ CORTEZ
 VOCAL

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento por el apoyo que me brindaron las siguientes instituciones para la realización del presente proyecto:

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Instituto Mexicano del Petróleo (FIES 95-93-II)

Agradezco también la paciencia y los consejos de los profesores Dr. Jesús Alvarez Calderón, Dr. Gerardo Espinosa Pérez, Dr. Rubén Garrido Moctezuma y Dr. Rodolfo Suárez Cortés, los cuales ayudaron a mejorar notablemente el contenido y la presentación de esta tesis.

Así mismo, deseo agradecer el apoyo que me brindó el Dr. José de Jesús Alvarez Ramírez durante la dirección de esta tesis. Al Dr. Guillermo Fernández Anaya, le agradezco su confianza y el entusiasmo con el que colaboramos. Pero ante todo, deseo agradecer la amistad de ambos.

Y hablando de amistad, deseo hacer patente mi eterno agradecimiento a mis mejores amigos: Dr. Ricardo Aguilar López, Dr. Miguel Barrón Meza, M. en C. Antonio Colín Luna y M. en C. Carlos Tapia Medina.

DEDICATORIA

A mis padres, Eulalia y Rafael, a mis hermanos, Teresita, Juan Luis, Rafael, Verónica y Guadalupe, los cuales me apoyaron de manera incondicional a iniciar una aventura que nunca tendrá fin.

Índice General

1	Introducción	7
1.1	Justificación y Objetivos	9
1.2	Revisión del estado del arte	12
1.3	Estructura de la tesis	14
1.4	Trabajos publicados	15
2	Principios de la destilación	17
2.1	Introducción	19
2.2	Descripción general	19
2.3	Forma de operación y terminología	20
2.4	Modelado matemático	22
2.4.1	Relaciones de equilibrio	23
2.4.2	Balances de materia	26
2.4.3	Balance de energía	28
2.4.4	Hipótesis para modelar columnas de destilación binaria	30
2.5	Factores que afectan la destilación	30
2.5.1	Condiciones de la alimentación	31
2.5.2	Flujo de recirculado	31
2.5.3	Flujo de vapor	31
2.5.4	Diámetro de la columna	33
2.5.5	Condiciones de los platos	33
2.5.6	Condiciones ambientales	34

2.6	Comentarios finales	34
3	Control en un punto	35
3.1	Introducción	37
3.2	Método de linealización entrada-salidas	41
3.3	Representación implícita de estados	43
3.4	Un esquema de control robusto	46
3.4.1	Análisis de estabilidad	48
3.5	Aplicación al control de columnas de destilación	51
3.5.1	Sistema de primer orden	53
3.5.2	Sistema de segundo orden	58
3.6	Comparación entre los controladores de grado uno y dos	67
3.7	Conclusiones	68
4	Consideraciones para el diseño de un controlador multivariable	71
4.1	Introducción	73
4.2	Selección del Modelo de la Planta	78
4.2.1	Modelos lineales con uno y dos tiempos característicos	79
4.2.2	Comportamiento dinámico de alta y baja frecuencia	81
4.2.3	Comparación del RGA para modelos con uno y dos tiempos característicos	83
4.3	Selección del Esquema de Control	85
4.3.1	Propiedades de la matriz de ganancias en estado estacionario	85
4.3.2	Esquemas de control	87
4.3.3	Controlador PI diagonal	88
4.3.4	Controlador PI con desacopladores	91
4.4	Conclusiones	100
5	Controladores diagonales	103
5.1	Introducción	105
5.2	Control por compensación del error de modelado	105
5.2.1	Diseño MEC basado en un modelo OTC	106

5.2.2	Diseño MEC basado en un modelo TTC	111
5.2.3	Función de transferencia del controlador	113
5.2.4	Condiciones de estabilidad para la matriz H	114
5.2.5	Comparación entre controladores MEC derivados a partir de modelos OTC y TTC	116
5.2.6	Ejemplo numérico y discusión de resultados	117
5.3	Control con un enfoque numérico	125
5.3.1	Definición del Esquema de Control	126
5.3.2	Ley de control recursiva	127
5.3.3	Evaluación de la ley de control	129
5.3.4	Función de transferencia del controlador	131
5.3.5	Ejemplo numérico y discusión de resultados	132
5.4	Conclusiones	139
5.5	Apéndice A	141
5.5.1	Cálculo de $\phi(y, e, t) \in \mathbb{R}^2$	141
5.5.2	Cálculo de la dinámica del error $\dot{e} = \mathcal{L}He + \psi(y, e, t)$	141
5.5.3	Prueba de la Proposición 1	141
5.5.4	Prueba de la Proposición 2	143
5.6	Apéndice B	143
5.7	Apéndice C	144
6	Controladores PI con desacopladores	145
6.1	Introducción	147
6.2	Planteamiento del problema	151
6.3	Condiciones para alcanzar controlabilidad integral	154
6.4	Estabilidad de matrices intervalo	156
6.5	Evaluación de la estabilidad de Q'_I para una $W(0)$ dada	159
6.6	Obtención de una $W(0)$ que garantice la estabilidad de Q'_I	162
6.7	Conclusiones	165

7 Conclusiones y trabajo futuro	167
7.1 Conclusiones generales	169
7.2 Trabajo futuro	170

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta la justificación y los objetivos que se pretenden alcanzar en esta tesis. También se realiza una breve revisión bibliográfica relacionada con los problemas que tiene diseñar un esquema de control para columnas de destilación, así como las alternativas que se han propuesto para resolver dicho problema. Finalmente se describe la organización de esta tesis y se listan las publicaciones que han resultado del trabajo realizado.

1.1 Justificación y Objetivos

La destilación es un proceso muy antiguo que ha sido practicado ampliamente durante cientos de años. Las primeras referencias sobre la destilación se atribuyen a la alquimista egipcia "María La Judía", la cual inventó diversos tipos de condensadores de reflujo y alambiques. Durante la edad media y el renacimiento se usó la destilación para producir brandy y algunos otros derivados del vino. En Francia, Cellier y Blumenthal desarrollaron en 1813 el primer alambique para destilación continua con la forma de una columna vertical. Durante la primera cuarta parte del siglo XX, el proceso de destilación no solo era utilizado para incrementar el contenido de alcohol en ciertas bebidas, sino que se convirtió en la técnica de separación más importante de la industria química. Este avance se vio acelerado cuando se reconoció que la destilación era un medio efectivo de separar el petróleo crudo en varios productos. Desde entonces a la fecha, se han multiplicado las aplicaciones de la destilación en la industria química, farmacéutica, de alimentos, de la pulpa y el papel.

En un proceso de destilación, una mezcla líquida es calentada en la parte inferior (fondo) de un tanque cilíndrico o columna. El componente con el punto de ebullición más bajo empieza a vaporizar y sale por la parte superior de la columna (domo), dejando el resto de la mezcla dentro. El proceso puede ser repetido tantas veces como sea necesario para separar todos los componentes de la mezcla.

Las razones por las cuales la destilación se ha convertido en el proceso más importante de separación de mezclas líquidas en la industria química no son accidentales, sino fundamentales (Kister, 1992). Las razones se pueden clasificar como cinéticas y termodinámicas:

- Desde un punto de vista cinético, cuando no hay inertes, la transferencia de masa por unidad de volumen en la destilación está limitada sólo por resistencias difusionales. En la mayor parte de los otros procesos de separación existen ya sea inertes o matrices sólidas, los cuales disminuyen el flux de masa. Es por este motivo que se reconoce que la destilación puede manejar las más altas velocidades de transferencia de masa, lo cual significa costos de capital más bajos.
- Desde un punto de vista termodinámico, la eficiencia termodinámica típica de un proceso de destilación es de un 10% aproximadamente. Esta eficiencia se puede aumentar si se

usan intercondensadores e interrehervidores. A pesar de que este valor puede parecer pequeño, existen pocos procesos de separación con una eficiencia superior.

Este último aspecto es muy importante. Si bien es cierto que la eficiencia termodinámica de la destilación es superior a la eficiencia de la mayor parte de los procesos de separación, podemos concluir que los requerimientos de energía térmica de una destilación son enormes. Para estudiar el impacto que tiene la destilación sobre la demanda de energía, analicemos la situación de la industria química en los Estados Unidos. A pesar de que esta información corresponde a un país en específico, si tomamos las debidas proporciones, nos permite entender el problema a nivel nacional en particular y a nivel mundial en general.

De acuerdo con las estadísticas de 1996 de la Oficina de Tecnologías Industriales y el Centro Nacional de Información sobre Energía, ambos dependientes del Departamento de Energía de los Estados Unidos, el 95% de las separaciones que se llevan a cabo en las industrias químicas, petroquímicas, de pulpa y papel y de alimentos se realizan mediante destilación. Considerando que éstas industrias consumen el 75% de la energía que consume el ramo industrial, se ha calculado que el proceso de destilación usa el 5% del total de energía que se consume en los Estados Unidos, la cual alcanza 2.4 cuatrillones de Btu de energía anualmente.

Por otro lado, es común que los procesos de destilación determinen la calidad de los productos finales así como las tasas máximas de producción. Con el fin de asegurar que la pureza de los productos se encuentra dentro de las especificaciones, la mayor parte de las columnas de destilación son sobre-reflujadas. Se estima que por este motivo, las industrias consumen entre un 30% y un 50% más de la energía necesaria para producir sus productos. Como resultado de un proyecto realizado en 1996, el cual fue financiado por la Oficina de Tecnologías Industriales del Departamento de Energía de los Estados Unidos, se concluyó que si se usan mejores esquemas de control, se puede reducir en un 15% el consumo de energía en el proceso de destilación. Este estimado concuerda con un resultado previamente reportado (Skogestad and Morari, 1987).

Tomando como base de cálculo un combustible con la siguiente proporción: 10% petróleo, 70% gas y 20% carbón, para el año 2010, una disminución del 15% en el consumo de energía en el proceso de destilación tendría los siguientes beneficios anuales:

- Una disminución en el consumo de energía de 288 trillones de Btu

- Se evitaría la emisión de 19 millones de toneladas de CO₂.

De acuerdo con la información anterior, los beneficios económicos y sociales de usar mejores esquemas de control para las columnas de destilación son muy grandes. Cabe entonces hacernos la siguiente pregunta, ¿porqué no se han instalado desde hace tiempo mejores esquemas de control en las columnas de destilación?. La respuesta a esta pregunta ha sido ampliamente discutida en la literatura y está relacionada con las propiedades que tienen este tipo sistemas.

La mayor parte de las columnas de destilación cuentan con un esquema de control automático de uno de los productos, usualmente la composición en el domo. A este esquema de control se le conoce como *control en un punto*. En este caso, uno de los flujos (flujo de recirculado o flujo de vapor que sube por la columna) se fija de manera manual. Sin embargo, para satisfacer especificaciones de control más severas, es evidente que se debe tener control sobre ambos productos. Este esquema de control es conocido como *control dual* o *control en dos puntos*.

En columnas de destilación es frecuente que cuando se sintoniza un controlador dual para obtener una respuesta más rápida, se presentan algunos problemas de estabilidad. Las razones por las cuales el diseño de esquemas de control para columnas de destilación no es un tarea sencilla, se asocian con las siguientes propiedades del sistema:

- (i) Comportamiento altamente no lineal.
- (ii) Respuesta dinámica dependiente de las combinaciones en los valores de los flujos.
- (iii) Sistema altamente interactivo.
- (iv) En general, existe ruido en las mediciones así como un tiempo de retardo en las mediciones de composición y en las acciones de control.

Desde un punto de vista de control, cada uno de los aspectos antes mencionados representa un problema difícil de resolver. Con respecto al primer punto, en general, las relaciones no lineales entre las variables involucradas no se conocen con precisión. Por otro lado, a pesar de que existen esquemas de control para sistemas no lineales, el diseño de esquemas de control no lineal robusto sigue siendo un problema abierto (Kravaris and Palanki, 1988; Alvarez-Ramírez, et al., 1996). Los puntos (ii) y (iii) indican que la columna de destilación es un sistema *mal*

condicionado con alto grado de *direccionalidad* (Waller and Waller, 1995). Finalmente, con respecto al último punto, es bien sabido que el desempeño en lazo cerrado de un controlador se degrada e incluso se puede volver inestable, cuando existe ruido en las mediciones y/o hay un tiempo de retardo en las mediciones de las salidas y de las entradas de control (Hale, 1976).

Tomando como base la discusión anterior, se fijaron los siguientes objetivos para este trabajo:

1. **Diseñar un esquema de control robusto para el control en un punto de una columna de destilación binaria.**
2. **Diseñar esquemas de control robusto para el control dual de una columna de destilación binaria.**
3. **Evaluar la influencia del ruido en las mediciones y del tiempo de retardo en las entradas y salidas de control.**

1.2 Revisión del estado del arte

La destilación es una de las operaciones unitarias más importantes en la industria de proceso. Casi todas las plantas químicas usan columnas de destilación para la separación de sustancias y, por otro lado, la destilación es uno de los procesos que más energía consumen. El control estricto de las composiciones de los productos es fundamental para lograr la operación rentable de la planta en su conjunto, así como para satisfacer los requerimientos ambientales que se imponen a las industrias. Sin embargo, es bien sabido que las columnas de destilación son procesos difíciles de controlar, especialmente cuando la columna opera en condiciones de alta pureza. Esto se debe a que el comportamiento de la columna de destilación es altamente no lineal. El problema de control se vuelve más difícil debido a que en la industria, la mayor parte de las columnas de destilación deben operar en una gama muy amplia de condiciones de alimentación y las referencias de las composiciones se modifican constantemente.

Para resolver este problema de control, se han aplicado diversas técnicas de control robusto (Ganguly and Saraf, 1995; Haggblom, 1996; Stromborg et al., 1995). En primera instancia podría pensarse que el problema ha sido resuelto, sin embargo, un análisis de cada uno de los esquemas propuestos en la literatura muestran una serie de inconvenientes (Christen et al.,

1997). La mayor parte de los esquemas de control para columnas de destilación se basan en aproximaciones linealizadas de modelos no lineales de la columna de destilación. Para una columna de destilación típica, el número de platos es grande, del orden de 40 o 50. El número de ecuaciones diferenciales que hay que resolver es 82 o 102 según sea el caso. Debido a su tamaño y a que en general el sistema es mal condicionado, un controlador por inversión basado en este modelo es muy sensible a incertidumbres en las entradas de control (Skogestad et al., 1988). Apoyándose en este hecho, diversos autores han llegado a la conclusión que no se deben usar esquemas de control por inversión en el caso de columnas de destilación (Skogestad and Morari, 1988b; Christen et al., 1997).

El principal objetivo de un sistema de control es mantener las concentraciones cerca de los valores de referencia a pesar de la presencia de perturbaciones. Las perturbaciones más importantes son cambios en los flujos y las concentraciones de alimentación. El segundo objetivo de diseño es seguir suficientemente rápido los cambios en los valores de referencia.

Para el caso específico de control en un punto, la mayor parte de los esquemas de control que se usan a nivel industrial son controladores PID, cuyo desempeño no es muy bueno. Jacobsen and Skogestad (1994) mostraron que usar modelos de bajo orden obtenidos mediante la identificación de la respuesta entrada-salida para diseñar esquemas de control en un punto, puede conducir a inconsistencias, esto es, se subestima el efecto de la entrada de control sobre las variables que no son controladas. El resultado de esta inconsistencia es que el sistema alcanza muy lentamente la referencia cuando entra una perturbación al sistema.

Para el caso de control en dos puntos, se ha mostrado en diversas investigaciones teóricas y experimentales que la respuesta dinámica de la columna de destilación se puede aproximar adecuadamente usando modelos lineales con uno y dos tiempos característicos (Skogestad and Morari, 1987; Skogestad and Morari, 1988b; Mush and Steiner, 1995). Sin embargo, el diseñar un esquema de control por inversión usando este tipo de modelos no es recomendable, puesto que la matriz de transferencia obtenida es mal condicionada.

Para evitar el problema de inversión de matrices mal condicionadas, se ha propuesto el uso de técnicas de control robusto como controladores μ y controladores H_∞ . La principal desventaja de este tipo de técnicas es que ambas requieren un procedimiento iterativo de cálculo muy elaborado cuya convergencia no se puede asegurar en general (Christen et al., 1997). Por otro

lado, los controladores μ requieren un profundo conocimiento de la dinámica de la planta. Para los controladores H_∞ es necesario conocer una cota máxima de todas las incertidumbres que afectan a la columna de destilación, lo cual no es una tarea sencilla. Otro inconveniente de este tipo de esquemas de control es que el orden del controlador resultante es similar al orden del sistema; esto es, 40 o 50.

1.3 Estructura de la tesis

En el capítulo dos de esta tesis se presentan los fundamentos del proceso de destilación y se discuten las hipótesis más importantes que se realizan cuando se modela una columna de destilación binaria.

En el capítulo tres se presenta un nuevo esquema para estudiar el problema del control en un punto. Este esquema de control retroalimentado usa un modelo de referencia nominal y, mediante un observador de estados, se obtiene un estimado de los errores de modelado y las perturbaciones que entran al sistema. El modelo nominal se obtiene a partir de un modelo físico de la planta y se aprovecha la propiedad de fase mínima demostrada por Levine and Rouchon (1991), con lo cual es posible obtener modelos de bajo orden (grado relativo uno y dos). Se prueba que el sistema planta+observador+controlador es estable en lazo cerrado. Se muestra también que el esquema de control tiene una realización en el dominio de la frecuencia que es similar a un controlador **PID** con un postfiltro. A través de esta comparación, se describen algunas guías para sintonizar este tipo de controladores.

Antes de diseñar esquemas de control en dos puntos, en el capítulo cuatro se discuten los aspectos más importantes que hay que tener en cuenta cuando se desea diseñar un esquema de control retroalimentado multivariable. Aprovechando ciertas propiedades de la columna de destilación binaria, se muestra que un controlador **PI** y **PID** desacoplado son robustamente estables en lazo cerrado. Este resultado concuerda con evidencias teóricas y experimentales reportadas en la literatura (Skogestad and Morari, 1988b).

A pesar de que un controlador **PI** desacoplado es robustamente estable en lazo cerrado, ante la entrada de una perturbación al sistema, la salida de control alcanza muy lentamente el valor de referencia. En el capítulo cinco de esta tesis se desarrollan dos esquemas de control robusto

multivariable cuya realización en el dominio de la frecuencia es similar a un **PID** desacoplado. El primer esquema de control es una extensión del esquema de control presentado en el capítulo tres. El segundo esquema de control se basa en las metodologías de mapeos de contracción. En ambos casos se muestra que, tomando en cuenta la equivalencia con controladores **PID**, también es posible proponer guías para sintonizar este tipo de controladores. Es importante señalar que el sintonizado de estos controladores se basa en información física del proceso.

El principal inconveniente de los esquemas presentados en el capítulo cinco es que para su implantación es necesario conocer una cota máxima de las incertidumbres en el modelo (para asignar los valores de la matriz B en el primer esquema, y para satisfacer la condición 2 de convergencia del segundo esquema). Obtener esta cota a nivel experimental puede llegar a ser una tarea muy compleja. Considerando que es posible identificar con cierto grado de certidumbre los elementos de la matriz de ganancias en estado estacionario, en el capítulo seis se presenta la forma de evaluar si un esquema de control **PID** con desacopladores basado en un modelo nominal, será robustamente estable. Para llevar a cabo esta prueba se estudia el problema de analizar la estabilidad Hurwitz de una familia de plantas. Además, se muestra que es posible dar una parametrización del modelo de referencia que se usa para construir un controlador por inversión. La ventaja que tiene esta parametrización es que permite recuperar al menos en parte, la direccionalidad de la planta.

1.4 Trabajos publicados

Una buena parte del material que se encuentra contenido en esta tesis ya ha sido publicado anteriormente. A continuación se listan dichas publicaciones:

1. Alvarez-Ramírez, J.; Femat, R. and Gonzalez., J. "Robust control of uncertain first-order systems with least prior knowledge". *Chemical Engineering Science*. **Aceptado para publicación**, 1998.
2. González-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernandez-Anaya, G. "Robust control with uncertainty estimation for feedback linearizable systems: Application to control of distillation columns". *Journal of Process Control*. **Aceptado para publicación**, 1998.

3. González, J.; Aguilar, R.; Alvarez-Ramírez, J. and Barrón, M. "Nonlinear regulation for a continuous bioreactor via numerical uncertainty observer". *Chemical Engineering Journal*. **Aceptado para publicación**, 1998.
4. González, J.; Femat, R.; Alvarez-Ramírez, J.; Aguilar, R. and Barrón, M. "A discrete approach to the control and synchronization of a class of chaotic oscillators". *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*. **Aceptado para publicación**, 1998.
5. González, J., Alvarez, R., Aguilar, R., Barrón, M.A. and Fernández, G. "Control of a binary Distillation Column using a Neural-Network". *Proceedings of The Second Joint Mexico-US International Workshop on Neural Networks and Neurocontrol*. August, 1997, 1997.
6. Gonzalez-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernández-Anaya, G. "Robust dual composition control of binary distillation columns". *Proceedings of the IASTED International Conference. CONTROL'97, México*, 1997.
7. Gonzalez-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernández-Anaya, G. "An input-output linearizing control strategy with uncertainty estimation and its application to distillation columns control". *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications, USA*, 1997.

Capítulo 2

Principios de la destilación

El contenido de este capítulo es un resumen de la información que se encuentra en la literatura con respecto a la destilación y puede ser omitido por aquellos lectores que posean los conocimientos básicos de la destilación. Considerando que la destilación es un proceso extremadamente complejo de separación de mezclas líquidas, en este capítulo se presentan los principios fundamentales de la destilación así como la forma de operación y la terminología que comúnmente se emplea. Se discuten además cuáles son los factores más importantes que afectan el desempeño de una columna de destilación y que pueden disminuir la eficiencia del proceso. A partir de primeros básicos, se presenta el modelado matemático de una columna de destilación binaria. También se describen las suposiciones más frecuentes que se realizan con el fin de obtener un modelo matemático simple.

2.1 Introducción

La destilación es un proceso de separación de mezclas líquidas muy importante que además representa un problema de control difícil de resolver. El proceso se basa en el hecho de que dos o más sustancias pueden ser separadas aprovechando la diferencia que hay entre sus puntos de ebullición. Aunque en términos generales se puede tener una idea clara de lo que significa "destilación", desde un punto de vista industrial, existen varios aspectos del proceso que lo vuelven extremadamente importante:

- La destilación es el proceso de separación más usado.
- Consume enormes cantidades de energía, ya sea para el enfriamiento del destilado o para el calentamiento de los fondos.
- Puede constituir más del 50% de los costos de operación de una planta.

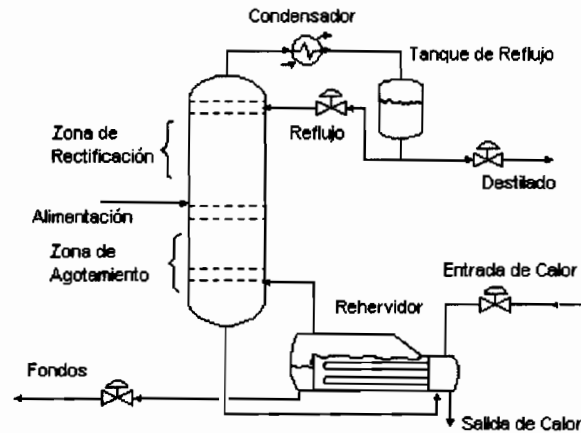
La mejor manera para reducir costos de operación de los equipos de destilación es incrementar su eficiencia mediante la optimización de las condiciones de operación y el control del proceso. Para lograr esta mejora es esencial contar con un buen entendimiento de los principios fundamentales de la destilación y conocer las consideraciones que se hacen al diseñar una columna de destilación. En este capítulo se describen los principios básicos de la destilación binaria, la cual es la separación de una mezcla de dos componentes. Usando los mismos principios, ésta descripción se puede ampliar para el caso de una destilación multicomponente.

2.2 Descripción general

Las columnas de destilación están constituidas por varios componentes, cada uno de ellos se usa ya sea para intercambiar calor o para mejorar la transferencia de masa. Los componentes más importantes que contiene una columna de destilación típica son:

- Una *coraza* vertical donde se efectúa la separación de componentes líquidos.
- Componentes internos de la columna, como *bandejas o platos* y/o los *empaques*, los cuales se usan para mejorar la separación de los componentes.

- Un *rehervidor* que se usa para vaporizar el líquido que llega al fondo de la columna.
- Un *condensador* que se usa para enfriar el vapor que llega al domo de la columna.
- Un *tambor de reflujo* que se usa para acumular el vapor condensado en el domo de la columna, de tal forma que parte del líquido (reflujo) se puede recircular nuevamente a la columna.



2.3 Forma de operación y terminología

La mezcla líquida a destilar es conocida como *alimentación*, la cual, comúnmente, es introducida al sistema en algún punto cerca de la parte media de la columna en un plato que se denomina como *plato de alimentación*. El plato de alimentación divide a la columna en dos secciones: la sección superior es conocida como zona de *enriquecimiento* o *rectificación* y la sección inferior es conocida como zona de *agotamiento*. La alimentación fluye hacia la parte inferior de la columna donde es recolectada en el rehervidor.

Para vaporizar el líquido que se encuentra en el rehervidor es necesario proporcionar calor. Se puede usar como fuente de calor cualquier fluido que tenga una temperatura adecuada, aunque en la mayor parte de las plantas químicas se usa vapor. En la mayor parte de las refinerías, la fuente de calor puede ser una corriente que proviene de algún otro proceso de destilación. El vapor generado en el rehervidor es introducido al sistema en el fondo de la columna. El líquido que se obtiene del rehervidor es conocido como *producto de fondos* o *fondos* sencillamente.

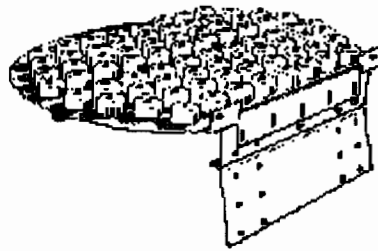
El vapor generado en el rehervidor asciende por la columna hasta alcanzar el domo, donde posteriormente es enfriado en el condensador. El líquido condensado es almacenado en un tanque acumulador conocido como tambor de reflujo. Una parte de este líquido es alimentado nuevamente a la columna por el domo. A esta corriente de líquido se le conoce como reflujo. Al líquido restante que se saca del sistema se le conoce como *destilado* o *producto de punta*.

De esta forma, en un proceso de destilación existen corrientes internas y externas. Las corrientes internas corresponden con los flujos de vapor y de líquido fluyendo hacia arriba y hacia abajo respectivamente. Las corrientes externas corresponden a la alimentación que entra a la columna y las corrientes de productos que salen de la columna.

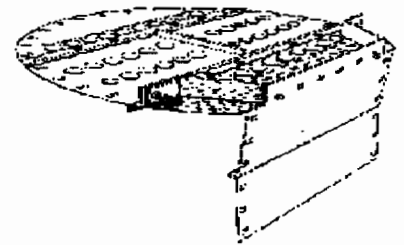
En cada uno de los platos que constituyen la columna, el líquido y el vapor entran en contacto uno con el otro en condiciones de temperatura y presión constantes. Cada plato contiene un cierto número de orificios, los cuales tiene una cubierta (*burbujeador*). El vapor producido por el rehervidor entra en el fondo de la columna y asciende a lo largo de ella, pasando a través de cada plato, donde burbujea en el líquido retenido.



Burbujeador



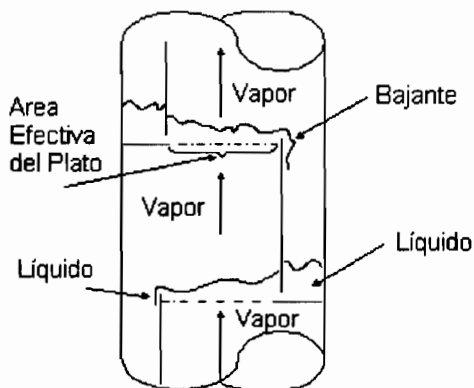
Plato de burbujeadores



Plato perforado

El líquido fluye hacia la parte inferior de la columna sólo a través de un espacio en la parte lateral del plato (*bajante*); esto es, el vapor actúa como un tapón que impide que el líquido descienda por los orificios. El líquido sale de cada plato pasando sobre una barrera (*vertedero*) que, combinada con las condiciones hidrodinámicas en la cámara de sello, determina el nivel líquido sobre el plato (*retenido*). Los orificios en los platos se distribuyen de tal forma que se obtenga un buen contacto entre el vapor y el líquido. La resistencia que presenta el líquido para que el flujo de vapor ascienda, da lugar al gradiente de presiones en la columna. El gradiente de presiones es tal que la presión absoluta más grande se encuentra en el fondo y la presión absoluta más pequeña está en el domo de la columna. De igual forma, existe un gradiente de

temperaturas a lo largo de la columna. La temperatura más alta se encuentra en el fondo y la temperatura más pequeña está en el domo de la columna.



Representación esquemática del contacto entre los flujos de vapor y líquido

El flujo en contracorriente del líquido descendente y del vapor ascendente permite que exista un buen contacto entre ambas fases. Cuando este contacto es suficientemente bueno, la temperatura, la presión y las concentraciones en cada plato estarán en el equilibrio termodinámico (o al menos muy cerca de él).

El componente más volátil de la mezcla binaria ebulle a una temperatura más baja que el otro componente, por tanto, la concentración del componente más volátil será mayor en la fase vapor que en la fase líquida. Por el contrario, el componente más pesado tendrá una composición más alta en la fase líquida comparada con la fase vapor. El resultado global es que la fase vapor será cada vez más rica en el componente ligero conforme el vapor asciende por la columna, y la fase líquida será más rica en el componente más pesado conforme el líquido desciende por la columna.

2.4 Modelado matemático

Para calcular las composiciones de los productos que se obtienen al realizar la destilación de una mezcla específica para un conjunto de condiciones de operación previamente determinadas, es necesario obtener la solución del siguiente conjunto de ecuaciones:

1. Relaciones de equilibrio
2. Balances de materia por componente

3. Balance de materia total

4. Balance de energía

Para una columna de destilación, los detalles de cada uno de estos puntos son muy complicados, incluso en el caso de destilación binaria. Cualquier intento de describirlos en detalle conduciría a un modelo muy complejo y difícil de manejar. Con el fin de obtener un modelo más manejable, es frecuente realizar algunas suposiciones. A continuación se describen las suposiciones más comunes que se usan para simplificar las relaciones de equilibrio, los balances de materia y el balance de energía.

2.4.1 Relaciones de equilibrio

Las columnas de destilación se diseñan tomando como base la diferencia que existe entre los puntos de ebullición de los componentes de la mezcla a separar. Entonces, el tamaño de la columna y en particular la altura, estará determinado por el *equilibrio líquido-vapor* (VLE) de la mezcla.

Resulta complicado e incluso hasta imposible hacer una descripción completa del VLE en un pequeño espacio. Es imposible también entender la destilación sin discutir las implicaciones que tiene el VLE sobre el diseño de las columnas de destilación. Por esta razón, sólo se presentarán algunos conceptos básicos sobre el VLE. Para una descripción más amplia sobre la teoría del VLE se recomienda la lectura de libros de termodinámica, como el el libro de Palmer (1987) o el libro de Prusnitz et al. (1980), por ejemplo.

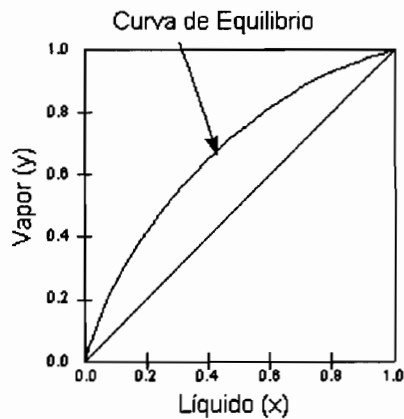
Curvas de equilibrio líquido-vapor (VLE)

Se dice que una mezcla multicomponente de dos fases está en equilibrio si se satisfacen las siguientes condiciones

1. La temperatura de la fase vapor es igual a la temperatura de la fase líquida
2. La presión total a través de la fase vapor es igual a la presión total a través de la fase líquida.

3. La tendencia de cada componente a escapar de la fase líquida a la fase vapor es exactamente igual a su tendencia a escapar de la fase vapor a la fase líquida.

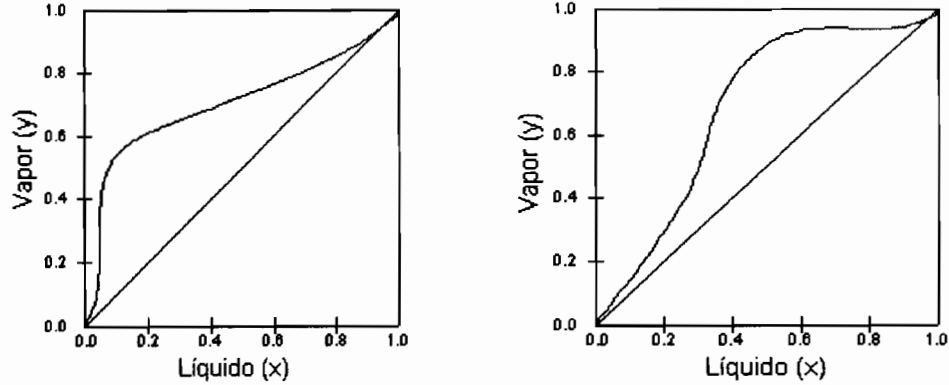
En condiciones de presión constante, la información relacionada con el VLE se obtiene usando los diagramas de punto de ebullición. Con el fin de visualizar más fácilmente el comportamiento de las fases, se acostumbra presentar los datos correspondientes con el VLE mediante un diagrama como el que se muestra a continuación.



Curva de equilibrio típica para una mezcla ideal

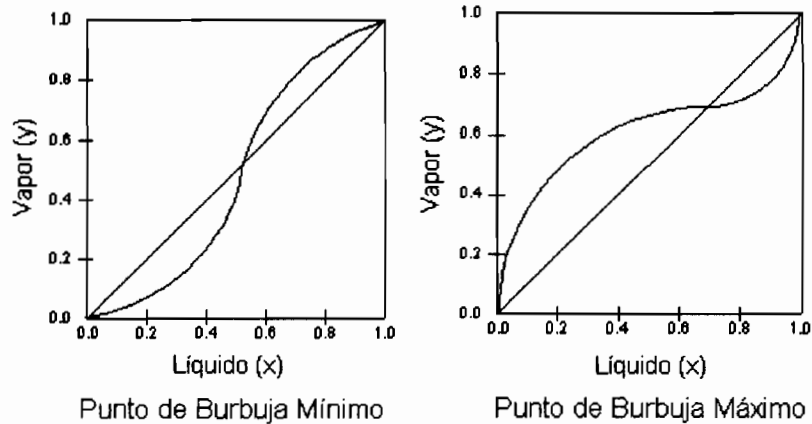
El diagrama de VLE contiene información sobre el punto de rocío y el punto de burbuja para la mezcla binaria en condiciones de presión constante. La línea curva es conocida como *curva de equilibrio* y describe las composiciones que tienen la fase líquida y la fase vapor cuando están en equilibrio termodinámico para una cierta presión. En éste diagrama en particular se muestra el VLE de una mezcla binaria que es relativamente fácil de separar.

A continuación se muestran dos diagramas de VLE correspondientes a dos mezclas no ideales. En general, la separación de este tipo de mezclas es mucho más complicada. Las implicaciones que tiene la forma de las curvas de equilibrio sobre la operación y el control de columnas de destilación se discutirá en Capítulos posteriores



Curvas de equilibrio típicas para mezclas no ideales

Las curvas de VLE más intrigantes son aquellas generadas por sistemas azeotrópicos. Un azeótropo es una mezcla líquida que al ebullición, produce un vapor que tiene la misma composición que la fase líquida. Las dos gráficas de VLE que se presentan a continuación muestran los dos tipos de azeótropos que se pueden encontrar: azeótropos con punto de ebullición mínimo y azeótropos con punto de ebullición máximo. Observe que en ambos diagramas las curvas de equilibrio cruzan la línea diagonal. El punto de cruce es conocido como el punto azeotrópico. De acuerdo con la descripción anterior, en un diagrama VLE para un sistema azeotrópico, la curva de equilibrio intersectará la línea diagonal en algún punto. La forma de la curva de equilibrio determinará si el azeótropo es de punto de ebullición máximo o mínimo.



Curvas de equilibrio típicas para una mezcla azeotrópica

Los dos diagramas de VLE mostrados en la figura anterior fueron obtenidos considerando una mezcla azeotrópica homogénea. Un azeótropo que contiene una fase líquida en contacto

con un vapor se dice que es un azeótropo homogéneo. Un azeótropo homogéneo no puede ser separado por destilación convencional. Sin embargo, disminuyendo la presión, se puede alcanzar una condición de operación en el cual el punto azeotrópico desaparece. De esta forma, para separar una mezcla azeotrópica se puede usar destilación al vacío.

Volatilidad relativa

Una alternativa para describir el VLE de una mezcla binaria es mediante la definición de la *volatilidad relativa* α_{AB} de los componentes A y B, la cual está dada como:

$$\alpha_{AB} = \frac{y_A/x_A}{y_B/x_B} = \frac{y_A(1-x_A)}{x_A(1-y_A)} \quad (2.1)$$

donde x_A y x_B representan las fracciones molares en la fase líquida de los componentes A y B respectivamente. y_A y y_B representan las fracciones molares en la fase vapor de los componentes A y B respectivamente.

En muchos procesos de destilación, la volatilidad relativa se puede considerar que es aproximadamente constante a lo largo de toda la columna. Es claro que una mezcla cuya volatilidad relativa sea grande será muy fácil de separar. Por el contrario, una mezcla cuya volatilidad relativa sea pequeña será muy difícil de separar.

2.4.2 Balances de materia

Dado que las composiciones del componente A y del componente B en la fase vapor y en la fase líquida están relacionadas de la siguiente forma:

$$x_B = 1 - x_A \quad (2.2a)$$

$$y_B = 1 - y_A \quad (2.2b)$$

para describir el comportamiento dinámico de la mezcla basta con plantear, para cada plato, el balance de materia para un componente y el balance de materia total. Se acostumbra tomar como referencia al componente más volátil. Con esta convención, la fracción mol en la fase líquida del componente más volátil en el plato j se denota como x_j , mientras que la fracción

mol en la fase vapor del componente más volátil en el plato j se denota como y_j .

Numerando los platos en forma ascendente, el balance de materia para el componente más volátil para un plato j en la zona de rectificación es:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_j x_j) = L_{j+1} x_{j+1} + V_{j-1} y_{j-1} - L_j x_j - V_j y_j \quad (2.3)$$

donde \mathcal{H}_j es el retenido molar de líquido en el plato j . L_j y V_j son, respectivamente, los flujos molares de líquido y vapor que abandonan el plato j . Los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad representan la entrada de masa al plato j debido al líquido que cae del plato superior y del vapor que sube del plato inferior respectivamente. De manera similar, los dos últimos términos representan la salida de masa del plato j debido al líquido y al vapor que abandonan dicho plato.

Considerando que el flujo de alimentación a la columna es un líquido saturado, el balance de materia para el componente más volátil para un plato i en la zona de agotamiento es:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_i x_i) = L'_{i+1} x_{i+1} + V'_{i-1} y_{i-1} - L'_i x_i - V'_i y_i \quad (2.4)$$

donde el apóstrofe significa que los flujos corresponden a la zona de agotamiento. La interpretación de cada uno de los términos es equivalente a la que se describió en la ecuación (2.3).

Tomando en cuenta la ecuación (2.2), a continuación se presenta el balance de materia total para un plato j y un plato i en las zonas de rectificación y agotamiento respectivamente

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_j) = L_{j+1} - L_j + V_{j-1} - V_j \quad (2.5a)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_i) = L'_{i+1} - L'_i + V'_{i-1} - V'_i \quad (2.5b)$$

En este punto es conveniente hacer algunos comentarios con respecto a las ecuaciones anteriores.

1. La dinámica de la composición en la fase líquida es afectada directamente por la composición de la fase vapor. Por tanto, el balance de materia por componente dependerá de la forma funcional del VLE. Consideremos el caso más sencillo, esto es, supongamos que la

volatilidad relativa es constante a lo largo de toda la columna. Entonces, la composición de la fase vapor en el plato j estará dada como

$$y_j = \frac{\alpha_{AB}x_j}{1 + (\alpha_{AB} - 1)x_j} \quad (2.6)$$

Es claro que aún en este caso, la funcionalidad que relaciona las composiciones en la fase líquida y en la fase vapor es no lineal.

2. Tanto el balance de materia por componente así como el balance de materia total en cada plato dependen del flujo de líquido que abandona dicho plato. Tal y como se describió previamente, el flujo de líquido que sale de cada plato depende del retenido de líquido en dicho plato y de las condiciones hidrodinámicas. En general, para describir exactamente las condiciones hidrodinámicas que ocurren en un plato en particular es necesario usar una relación funcional extremadamente compleja, la cual depende incluso del flujo de vapor que atraviesa el plato (este punto se discute más adelante). Con el fin de obtener una descripción sencilla de las condiciones hidrodinámicas en el plato, es común emplear una aproximación lineal.

A partir de la discusión anterior resulta evidente que el balance de materia por componente así como el balance de materia total en cada plato estarán determinados por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias altamente no lineal.

2.4.3 Balance de energía

Las ecuaciones que describen el balance de energía para un plato j y un plato i en la zonas de rectificación y agotamiento respectivamente son

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_j h_j) = L_{j+1}h_{j+1} - L_j h_j + V_{j-1}H_{j-1} - V_j H_j \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_i h_i) = L'_{i+1}h_{i+1} - L'_i h_i + V'_{i-1}H_{i-1} - V'_i H_i \quad (2.7b)$$

donde h_j y H_j representan, respectivamente, las entalpías molares del líquido y del vapor en el plato j . En general, las relaciones funcionales para las entalpías molares del líquido y del vapor

son extremadamente complejas. Los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad representan la entrada de energía al plato j debido al líquido que cae del plato superior y del vapor que sube del plato inferior respectivamente. De manera similar, los dos últimos términos representan la salida de energía del plato j debido al líquido y al vapor que abandonan dicho plato.

Una alternativa para evitar resolver el balance de energía es suponer que en cada plato, la mezcla tiene un calor latente de vaporización constante y que los efectos relacionados con el calor sensible así como con el calor de mezclado son despreciables. A esta suposición se le conoce como *suposición de flujos molares constantes*. En términos generales, la suposición anterior es válida para sistemas donde los componentes son químicamente similares, tienen pesos moleculares cercanos y los efectos relacionados con el calor de solución son despreciables. Cuando los efectos del calor de solución son pequeños, se puede obtener información sobre la validez de la suposición analizando el cociente de los calores molares latentes de los componentes puros.

Matemáticamente, la suposición anterior implica que

$$V' - V = (L' - L) - F \quad (2.8)$$

donde F es el flujo molar de alimentación. V y L son los flujos de vapor y de líquido en la zona de rectificación (iguales para todos los platos en esta zona). V' y L' son los flujos de vapor y de líquido en la zona de agotamiento (iguales para todos los platos en esta zona).

Las columnas de destilación que satisfacen esta suposición se conocen como *columnas de destilación ideales*. En una columna de destilación ideal se satisface la siguiente relación:

$$\Delta D = -\Delta L + \Delta V \quad (2.9a)$$

$$\Delta B = \Delta L - \Delta V \quad (2.9b)$$

donde Δ representa un cambio con respecto al valor nominal, D y B son los flujos molares del destilado y de los fondos respectivamente.

2.4.4 Hipótesis para modelar columnas de destilación binaria

A lo largo de esta sección se presentaron y discutieron las hipótesis más importantes que se hacen para simplificar el modelo matemático de una columna de destilación. A continuación se presenta un resumen con las hipótesis que se tomarán a lo largo de esta tesis:

1. En cada plato, las fases líquida y vapor están perfectamente mezcladas y en equilibrio termodinámico.
2. El retenido molar en cada plato es constante ($\frac{dH_i}{dt} = 0$). La presión es constante y uniforme a lo largo de la columna. El retenido molar de vapor en cada plato es despreciable.
3. El flujo molar de líquido que entra a un plato es igual al flujo molar de líquido que sale de dicho plato. El flujo molar de vapor que entra a un plato es igual al flujo molar de vapor que sale de dicho plato.
4. La alimentación es un líquido saturado.

2.5 Factores que afectan la destilación

El comportamiento dinámico de una columna de destilación es afectado por una gran cantidad de factores, por ejemplo:

- Condiciones de la alimentación (estado y composición)
- Trazas de impurezas que pueden afectar fuertemente el equilibrio líquido vapor de la mezcla líquida
- Condiciones internas de los flujos de líquido y vapor
- Condiciones de los platos (o del empaque)
- Condiciones ambientales

A continuación discutiremos algunas de estos factores para mostrar lo compleja que puede llegar a ser la operación de una columna de destilación.

2.5.1 Condiciones de la alimentación

Las condiciones del flujo de alimentación así como su composición, afectan las líneas de operación y por tanto el número de etapas requeridas para alcanzar las purezas especificadas para los productos. También afecta la localización del punto de alimentación. Si durante la operación de la columna, las desviaciones con respecto a los valores en las condiciones de la alimentación son muy grandes, es posible que la columna no sea capaz de alcanzar la pureza especificada para los productos. Para evitar este tipo de problemas, algunas columnas se construyen de tal forma que cuenten con varios puntos de alimentación, previendo la posibilidad de que la composición de la corriente de alimentación tenga fluctuaciones severas.

2.5.2 Flujo de recirculado

Conforme la relación de reflujo se incrementa, la pendiente de la línea de operación para la sección de rectificación se desplaza hacia un valor máximo de 1. Esto significa que se está recirculando un líquido que cada vez es más y más rico en el componente más volátil. La separación por tanto es cada vez mejor y se necesitan menos platos para alcanzar el grado de separación que se haya especificado. El *número mínimo de platos* para alcanzar un cierto grado de separación se obtiene bajo condiciones de *reflujo total*. En el caso contrario, cuando se disminuye la relación de reflujo, la línea de operación para la sección de rectificación se mueve hacia la línea de equilibrio. Conforme la línea de operación se acerca a la curva de equilibrio se requieren más y más etapas para lograr la separación deseada. A la condición límite se le conoce como *relación de reflujo mínima*, en la cual es necesario un número infinito de etapas. La mayor parte de las columnas de destilación operan usando entre 1.2 y 1.5 veces la relación de reflujo mínima debido a que alrededor de estas condiciones se obtienen los costos mínimos de operación.

2.5.3 Flujo de vapor

Cuando se usan valores incorrectos en el flujo de vapor se presentan los siguientes fenómenos

1. Formación de espuma (*foaming*)
2. Arrastre (*entrainment*)

3. Goteo (*weeping/dumping*)

4. Inundación (*flooding*)

A continuación se describirá cada uno de estos fenómenos y su efecto sobre el proceso.

Formación de espuma

La formación de espuma se refiere a la expansión del líquido cuando pasa un vapor o un gas a través de él. Aunque la formación de espuma permite que exista un elevado contacto interfacial entre el líquido y el vapor, con la formación excesiva de espuma el líquido es arrastrado por el gas hacia el plato superior. Por otra parte, la espuma puede arrastrar vapor hacia el plato inferior. En casos extremos, los tubos de bajada (que conducen el flujo de líquido entre las etapas) se pueden llenar totalmente de espuma. Las causas que originan la formación de espuma se atribuyen, principalmente, a las propiedades físicas de la mezcla, aunque en algunas ocasiones es debida al diseño de los platos. La formación de espuma se agrava cuando hay impurezas en la alimentación, cuando la presión dentro de la columna es muy baja y cuando la velocidad del vapor es muy alta. Independientemente de cual sea la causa, la formación de espuma disminuye la eficiencia del plato, llegando a reducirla en un 50%.

Arrastre

El arrastre se refiere al hecho de que el líquido es arrastrado por el vapor hacia el plato superior. El arrastre es originado por velocidades de flujo de vapor demasiado elevadas, aunque con frecuencia se debe a un tamaño inadecuado de los tubos de descenso o del espaciado entre los platos. Cuando una columna de destilación opera correctamente, la mayor parte de la transferencia de masa tiene lugar en una capa de espuma o niebla turbulenta con una elevada área interfacial que se forma sobre el líquido del plato. Cuando hay arrastre, la eficiencia del plato se reduce drásticamente. Cuando el arrastre es excesivo se puede producir inundación.

Goteo

Este fenómeno es causado por velocidades de flujo de vapor muy pequeñas. Cuando la presión que ejerce el vapor para mantener el líquido sobre el plato es muy pequeña, se presenta el

fenómeno de goteo. Cuando el goteo es excesivo, todo el líquido que hay en los platos cae hasta el fondo de la columna (*vaciado*), por lo que la columna tiene que ser arrancada nuevamente. El goteo puede detectarse por una pronunciada caída de presión en la columna y una disminución en la eficiencia de la separación.

Inundación

Esta condición ocurre cuando las velocidades del vapor y/o del líquido son tan grandes que la caída de presión del gas es superior a la carga neta de gravedad del líquido, lo que ocasiona que el líquido sea arrastrado hacia arriba en la columna.

2.5.4 Diámetro de la columna

La mayor parte de los factores que afectan la operación de la columna se deben a las condiciones de flujo del vapor, ya sea por una velocidad demasiado alta o demasiado pequeña. La velocidad de flujo del vapor está determinada por el diámetro de la columna. El goteo determina las condiciones de flujo mínimo de vapor requerido, mientras que la inundación fija la velocidad máxima de flujo de vapor permitida y por tanto, la capacidad de la columna. De esta forma, si el diámetro de la columna no es determinado apropiadamente, el desempeño de la columna no será el esperado. Esto es, no solo se pueden presentar problemas de operación, sino que se puede dar el caso de que no se puedan alcanzar las especificaciones de pureza para los productos.

2.5.5 Condiciones de los platos

Si se toma en cuenta que el número de platos para alcanzar las especificaciones de pureza para los productos está determinada por la eficiencia del plato, es claro que cualquier factor que disminuya la eficiencia del plato afectará el desempeño de la columna. La eficiencia del plato es afectada por el ensuciamiento, por la corrosión y por el desgaste que sufren los platos. La velocidad con la cual ocurren estos fenómenos depende de las propiedades químicas de las mezclas procesadas. Es por ello que es muy importante seleccionar cuidadosamente el material con el cual serán construidos los platos.

2.5.6 Condiciones ambientales

La mayor parte de las columnas de destilación están abiertas a la atmósfera. No obstante que muchas de las columnas emplean aislamiento, los cambios en las condiciones ambientales afectan la operación de la columna. Es por esto que los rehervidores deben ser diseñados de tal forma que sean capaces de generar suficiente vapor durante las temporadas con frío intenso y que en temporada de calor, la generación de vapor pueda disminuirse fácilmente.

2.6 Comentarios finales

En este capítulo se presentaron los fundamentos de la destilación así como los conceptos básicos de la operación de columnas de destilación. Se discutieron también algunos de los factores más importantes que pueden ocasionar un pobre desempeño de la columna de destilación. Además, se presentaron y justificaron las hipótesis más importantes que se proponen para simplificar el modelado matemático de columnas de destilación binaria. Existen algunos otros factores que afectan la operación de una columna de destilación, como son cambios en la demanda de productos y modificaciones en las especificaciones para la pureza de los productos. Ambos factores dependen de las políticas de operación de la planta en su conjunto. Todos éstos aspectos deben ser considerados en la etapa de diseño puesto que, una vez que la columna ha sido construida e instalada, son pocas las modificaciones que se pueden hacer sin necesitar de elevadas inversiones.

En los siguientes capítulos de esta tesis se utilizarán las hipótesis y los conocimientos presentados en este capítulo para analizar y diseñar esquemas de control robusto para los problemas de control en uno y en dos puntos.

Capítulo 3

Control en un punto

El objetivo de este capítulo es presentar el diseño de un esquema de control robusto para regular la composición de la fase líquida en el domo de una columna de destilación binaria. Este esquema de control representa una de las contribuciones de esta tesis al área de control robusto para columnas de destilación. El esquema de control resultante consta de tres elementos: (i) Un compensador nominal linealizante entradas-salidas; (ii) Un observador de estados y (iii) Un estimador de incertidumbres, el cual constituye la parte adaptable del controlador. Con esta configuración, la ley de control retroalimentada basada en el observador compensa las incertidumbres y las perturbaciones externas. Mediante simulaciones numéricas se muestra y analiza el desempeño del controlador en lazo cerrado.

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se mostró que para representar adecuadamente el comportamiento dinámico de una columna de destilación es necesario resolver un modelo no lineal muy complejo (Kooijman and Taylor, 1995). La complejidad estriba en la gran cantidad de ecuaciones diferenciales no lineales que se deben resolver para estudiar la respuesta dinámica de cada una de las variables importantes del proceso (temperaturas y composiciones en cada plato, caída de presión a lo largo de la columna, etc.). Además, se deben establecer las relaciones de equilibrio de fase así como las relaciones hidráulicas para cada componente en cada una de las etapas de la columna. En la mayoría de los casos, éstas relaciones son funciones no lineales de la temperatura, la presión y la composición.

Para diseñar esquemas de control para este tipo de sistemas, una alternativa es aplicar técnicas de control robusto usando modelos linealizados de alto orden. Por ejemplo, en el caso de una columna de destilación binaria con 50 platos, el número de ecuaciones diferenciales a resolver es 102 (52 representan dinámica de las composiciones y 50 corresponden con la dinámica del retenido de líquido). Usando técnicas de reducción de modelo, el orden puede ser reducido de 102 a 10 o 15 sin una pérdida significativa de precisión (Christen et al., 1997).

Por otro lado, la teoría de control no lineal basada en herramientas de geometría diferencial proporciona metodologías que permiten que una cierta clase de sistemas puedan ser linealizados usando una transformación de coordenadas y una retroalimentación de estados. La descripción general de la teoría de control no lineal se puede consultar en libros clásicos como el de Isidori (1989) y el de Marino y Tomei (1995). Así mismo, Kravaris and Kantor (1990) presentaron una excelente revisión sobre control no lineal basado en geometría diferencial y sus aplicaciones al control de procesos químicos. Este tipo de metodologías ha mostrado su aplicación para controlar reactores continuos de tanque agitado y reactores de lecho fluidizado (Henson, et al., 1994; Kosanovich, et al., 1995).

Entre los principales inconvenientes de las metodologías de control basadas en geometría diferencial es que se requiere del conocimiento exacto de los parámetros del sistema y se deben satisfacer ciertas condiciones de tipo estructural (Henson and Seborg, 1991a). Es necesario conocer los valores exactos de los parámetros debido a que estas metodologías cancelan las no linealidades del sistema mediante una transformación de coordenadas y una retroalimentación

de estados. Por lo tanto, si existe una diferencia entre la planta y el modelo identificado, la retroalimentación de estados estará basada en una transformación de coordenadas incorrecta, y las no linealidades no podrán ser canceladas. Bajo estas condiciones, no se puede asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Por otro lado, aunque se pueda garantizar la estabilidad del sistema, es bien sabido que el desempeño de los esquemas de control linealizantes puede degradarse considerablemente cuando hay incertidumbres no lineales. Aunque existen intentos de incrementar la robustez de esquemas de control linealizantes por retroalimentación de estados, el diseño de esquemas de control robusto sigue siendo un problema abierto (Kravaris and Palanki, 1988; Alvarez-Ramírez, et al., 1996).

El creciente interés en el diseño de esquemas de control robusto para sistemas no lineales ha producido nuevos resultados. Algunos de éstos han sido derivados del uso de estrategias del tipo de control de modelo interno (**IMC** por sus siglas en inglés). Henson and Seborg (1991b) propusieron un esquema de control basado en estrategias **IMC** para procesos no lineales con una entrada y una salida (**SISO**). En este esquema se diseña un controlador que satisface un desempeño nominal y se usa un filtro no lineal que toma en cuenta las diferencias entre el modelo y la planta. La desventaja de este esquema de control es que está restringido a sistemas estables a lazo abierto con inversa estable. Aunque Henson and Seborg afirmaron que su esquema podía tener propiedades de robustez, no presentaron ninguna prueba formal de robustez del controlador en lazo cerrado. Por otro lado, Kravaris and Chung (1987) propusieron un esquema de control para sistemas no lineales de fase mínima que es una combinación de retroalimentación de estados junto con un observador estable a lazo abierto. En un trabajo posterior, Daoutidis and Kravaris (1992) propusieron una solución general al problema de diseñar esquemas de control retroalimentado para procesos no lineales de fase no mínima. En el trabajo de Kravaris and Daoutidis se realiza la estimación de estados usando al modelo de la planta como un observador a lazo abierto, el cual se puede interpretar como un modelo interno. Cuando no hay diferencias entre el modelo y la planta, se puede asegurar que el controlador en lazo cerrado será globalmente asintóticamente estable. Un inconveniente del esquema de Kravaris and Daoutidis es que el controlador resultante hace uso de mediciones de la salida y de sus derivadas temporales hasta de orden $\rho - 1$, donde ρ es el *grado relativo* del sistema. El controlador resultante es no causal, por lo que en su implementación se pueden presentar problemas asociados con el

muestreo y el ruido en las mediciones. A pesar de los problemas antes descritos, el trabajo de Kravaris and Daoutidis es muy importante para el diseño de controladores para sistemas no lineales porque marca una guía sobre la estructura de un controlador general. Esta versión de controlador **IMC** no lineal se utilizó para controlar un reactor de polimerización de laboratorio (Soroush and Kravaris, 1992). Se observó que el controlador era robusto ante errores en el modelo y valores de inicialización del observador. Se usó un modelo muy preciso para estimar las concentraciones de monómero y de iniciador.

Una alternativa para hacer robusto un controlador linealizante por retroalimentación es incluir en el lazo de retroalimentación una clase de procedimientos adaptables. Existen reportados en la literatura una gran cantidad de trabajos que han estudiado el diseño de controladores adaptables para plantas con parámetros inciertos. De acuerdo con Kokotovic (1991), se pueden identificar dos líneas principales de investigación. En el primer caso se diseñan esquemas de control adaptable para sistemas no lineales con una estructura muy específica, o que bajo ciertas condiciones geométricas, se pueden llevar a una forma canónica. En la otra línea de investigación se encuentran los esquemas de control basados en el método de Lyapunov, los cuales suponen que existe una función de Lyapunov para el sistema. El trabajo de Dochain (1994) se puede catalogar dentro de la primera línea de investigación, en donde se propone un controlador linealizante entrada-salida. En general, para poder usar esquemas de control adaptable es necesario que los parámetros inciertos aparezcan de manera lineal en el modelo. Este tipo de esquemas de control se ha aplicado al control de un reactor químico no isotérmico, en donde se utilizó un esquema adaptable para estimar la energía de activación. Dentro de los esquemas de control adaptable basados en el método de Lyapunov, están los trabajos de Fradkov (1979) y Seron (1995). Estos trabajos presentan controladores adaptables basados en el método de gradiente. El objetivo es cambiar el valor del parámetro ajustable de acuerdo con la tasa de cambio del gradiente de una cierta funcional. El método requiere que la funcional sea convexa con respecto al parámetro desconocido, lo cual, en la mayoría de los casos, es una restricción muy severa. Por otro lado, Chen (1992) propuso un controlador no lineal robusto basado en la teoría min-max. En este esquema se supone que la incertidumbre está acotada en un cono (cota funcional), y que los parámetros de la funcional (lineales también), son desconocidos. Se propone entonces estimar los parámetros desconocidos de la cota funcional usando métodos de gradiente acele-

rados. Es importante señalar que para el caso de procesos químicos, no es fácil parametrizar linealmente la cota funcional de la incertidumbre. En el caso de reactores continuos de tanque agitado por ejemplo, la mayor parte de las incertidumbres están relacionadas con la cinética de la reacción, cuya funcionalidad en general, es poco conocida.

En un trabajo reciente, Sun et al. (1994) propusieron un esquema de control robusto para plantas lineales de fase mínima con una sola entrada y una sola salida. El controlador está basado en la compensación de los errores de modelado (**MEC**). El controlador **MEC** se diseña en dos etapas. En la primera etapa se propone una ley de control retroalimentado nominal. En la segunda etapa, se compensan las incertidumbres generadas por los errores de modelado. La determinación de los errores de modelado se realiza usando información de las señales de entrada y de salida del proceso. Además de la retroalimentación nominal, se introduce un lazo retroalimentado adicional usando el error de modelado.

El objetivo de esta sección es presentar un controlador robusto por retroalimentación de salida para sistemas linealizables con una sola entrada y una sola salida (**SISO** por sus siglas en inglés). Bajo la hipótesis de que existe una transformación de coordenadas, la idea es agrupar las incertidumbres en un nuevo estado cuya dinámica puede ser reconstruida a partir de mediciones de la salida de control. De esta forma, el controlador está compuesto por una retroalimentación linealizante entrada-salida, un observador de estados y un estimador de incertidumbres. En este controlador se estima una señal que representa los efectos de las incertidumbres mediante el uso de un observador tipo Luenberger. La información obtenida con este estimador se usa para cancelar, simultáneamente, la dinámica desconocida y las perturbaciones externas. Cuando la incertidumbre estimada se acerca a la incertidumbre real y no hay perturbaciones persistentes, asintóticamente se alcanza la cancelación de las no linealidades. En términos generales se puede decir que el controlador resultante es una extensión de controladores **MEC** a sistemas no lineales.

Alvarez et al. (1996) y Aguilar et al. (1997a) usaron esta técnica para controlar sistemas **SISO** de grado relativo uno. Posteriormente, Femat et al. (1997) extendieron esta metodología a sistemas de grado relativo dos. Finalmente, Gonzalez-Trejo et al. (1997b) y Gonzalez-Trejo et al. (1998c) mostraron que era posible usar esta metodología para controlar sistemas linealizables entrada-salida de grado relativo ρ . Este resultado constituye una de las contribuciones de esta

tesis al estado del arte. Es este capítulo se presenta la metodología desarrollada en Gonzalez-Trejo et al. (1997b) y Gonzalez-Trejo et al. (1998c), así como su aplicación al control en un punto de columnas de destilación binaria.

Comparado con los controladores antes analizados, el esquema de control para sistemas no lineales propuesto en este capítulo tiene las siguientes ventajas:

- (i) No es necesario que los parámetros desconocidos aparezcan de manera lineal ni que se conozcan los términos no lineales.
- (ii) No se requiere que las incertidumbres estén acotadas por una funcional explícita.
- (iii) El método es aplicable a sistemas estables e inestables a lazo abierto.
- (iv) Al igual que en el trabajo de Daoutidis and Kravaris (1992), el controlador resultante emplea información de la salida exclusivamente. Sin embargo, nuestro controlador se hace causal mediante un observador de estados. Además, este observador proporciona un estimado de las incertidumbres en el modelo.
- (v) Dado que la prueba de estabilidad del controlador a lazo cerrado se basa en los resultados previamente reportados sobre el control por retroalimentación de salidas de sistemas linealizables por retroalimentación (Esfandiari and Khalil, 1992; Teel and Praly, 1994), se puede obtener información adicional sobre el sintonizado del controlador resultante.

3.2 Método de linealización entrada-salidas

En esta sección se presenta un breve resumen sobre el método de linealización entrada-salida de sistemas no lineales usando herramientas de geometría diferencial. Para tener una información más amplia se recomienda la lectura del libro de Isidori (1989).

Considere una planta no lineal con una sola entrada y una sola salida (SISO). Suponga que la planta no lineal se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y \in \mathbb{R}$ es la salida, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $F(x)$ es la dinámica de la planta y $G(x)$ es el vector de distribución asociado al control. $F(x)$ y $G(x)$ son funciones suaves e inciertas. En la técnica de linealización entrada-salida se busca una transformación de estados $z(w, x) = T(x)$ con la cual el sistema (3.1) se pueda representar en la forma normal de Byrnes-Isidori:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i < \rho \\ \dot{z}_\rho &= f(z, w) + g(z, w)u \\ \dot{w} &= H(z, w; u) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde a ρ se le conoce como el grado relativo de la salida y con respecto a la entrada de control u , el cual corresponde con el mínimo orden de la derivada temporal de la salida y que está directamente relacionada a la entrada de control u de la siguiente forma:

$$\dot{z}_i = T_i(x) = L_F^{i-1}h(x), \quad 1 \leq i < \rho \tag{3.3a}$$

$$\begin{aligned} f(z, w) &= L_F^\rho h(T^{-1}(z, w)) \\ g(z, w) &= L_G L_F^{\rho-1} h(T^{-1}(z, w)) \end{aligned} \tag{3.3b}$$

donde $L_F^i h(x)$ es la i -ésima derivada de Lie de $h(x)$ en la dirección $F(x)$. Una interpretación similar aplica para $L_G L_F^{\rho-1} h(T^{-1}z, w)$. $w \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ es un vector de variables de estado adicionales, las cuales describen la dinámica interna (no observable) del sistema transformado (3.2).

Definamos a $y_r(t)$ como la trayectoria de referencia. Supongamos que el desempeño en lazo cerrado está definido por el siguiente modelo de referencia invariante en tiempo:

$$e_r^{(\rho)} + K_\rho e_r^{(\rho-1)} + \dots + K_2 e_r^{(1)} + K_1 e_r = 0 \tag{3.4}$$

donde $e_r = y - y_r$, $e_r^{(i)}$ es la i -ésima derivada temporal de e_r , y los valores de K_i 's se eligen de tal forma que el polinomio

$$s^\rho + K_\rho s^{\rho-1} + \dots + K_2 s + K_1 = 0$$

es Hurwitz. Si $g(z, w) = L_G L_F^{\rho-1} h(T^{-1}z, w) \neq 0$, la *ley de control retroalimentado ideal* que produce el desempeño antes especificado es

$$\begin{aligned} u^I(z, w) &= -f(z, w) - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{K_i e_r^{(i-1)}}{g(z, w)} \\ &= \frac{1}{L_G L_F^{\rho-1} h(T^{-1}z, w)} \left(-L_F^{\rho} h(T^{-1}z, w) - \sum_{i=1}^{\rho} K_i \left(L_F^{i-1} h(x) - y_r^{(i-1)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

La ley de control (3.5) anula el efecto de los términos no lineales $f(z, w)$ y $g(z, w)$ que aparecen en la dinámica del sistema, logrando de esta forma el desempeño deseado en lazo cerrado (3.4). Además, la ley de control retroalimentado (3.5) linealiza la relación entrada-salida. Hagamos la siguiente definición $\mathbf{y}_r = (y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho-1)})$. Si el comportamiento de la dinámica interna dado por $\dot{w} = H(\mathbf{y}_r, w; u^I(z, w))$ es estable (esto es, todas las trayectorias del sistema $\dot{w} = H(\mathbf{y}_r, w; u^I(z, w))$ están acotadas para todo $t > 0$), entonces el sistema a lazo cerrado (3.2), (3.5) será asintóticamente estable alrededor de la trayectoria de referencia \mathbf{y}_r y todos los estados internos estarán acotados (Henson and Seborg, 1991). Además, dado que la transformación de coordenadas $z(w, x) = T(x)$ es globalmente invertible, el sistema en lazo cerrado (3.1),(3.5) será también asintóticamente estable alrededor de la trayectoria de referencia \mathbf{y}_r y sus estados internos estarán acotados. A la ley de control (3.5) se le conoce como *Ley de Control Ideal (IFC)* debido a que mediante una cancelación *exacta* de las no linealidades, conduce a un comportamiento lineal a lazo cerrado entrada-salida.

3.3 Representación implícita de estados

Si se supone que los campos vectoriales $F(x)$ y $G(x)$ en (3.1) no se conocen exactamente, el cambio de coordenadas $z(w, x) = T(x)$ que transforma el sistema (3.1) en el sistema (3.2) depende también de incertidumbres y posiblemente de estados y perturbaciones no medidas. Por tanto, $z(w, x) = T(x)$ puede ser vista como un *cambio incierto de coordenadas*. Esto trae como consecuencia que la IFC (3.5) no se pueda implementar, puesto que las funciones $f(w, z)$ y $g(z, w)$ son inciertas también y el estado interno w no es reconstruible a partir de mediciones de la salida y . En las siguientes secciones se desarrollará una metodología que permite estimar y compensar las incertidumbres.

Para solucionar el problema de compensar términos inciertos, se propone una representación alternativa del sistema (3.2). Para esto se hacen las siguientes suposiciones:

Supuesto 1: Se pueden obtener mediciones de la salida $y = h(x)$.

Supuesto 2: El sistema (3.1) es estable con entradas acotadas y salidas acotadas, esto es, para cualquier entrada acotada $u(t)$, las trayectorias de la dinámica interna $\dot{w} = H(y_r, w; u(t))$ estarán acotadas también. La dinámica interna $\dot{w} = H(y_r, w; \bar{u})$ con y_r constante es de fase mínima. \bar{u} es la entrada de control en el punto nominal de operación.

Supuesto 3: La función $g(z, w)$ es acotada, diferente de cero y su signo es conocido. Se dispone de $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$ los cuales son estimados de $f(z, w)$ y $g(z, w)$ respectivamente, donde $\text{sign}(\gamma_2(z)) = \text{sign}(g(z, w))$.

Supuesto 4: El cambio de coordenadas que transforma el sistema (3.1) en el sistema (3.2) existe.

Los supuestos 1 y 2 son comunes en teoría de control no lineal. En ingeniería química existen diversos procesos que satisfacen estos supuestos, por ejemplo, algunos reactores químicos, las columnas de destilación, etc.

Con respecto al supuesto 3, observe que los estimados γ_i 's no dependen del estado interno w . Se impone este requerimiento debido a que en muchos casos el estado interno w no es medido ni se puede reconstruir a partir de las mediciones de la salida y . Una forma sencilla de elegir los estimados γ_i 's es evaluar de manera experimental la cota máxima que pueden alcanzar las funciones $f(z, w)$ y $g(z, w)$ y tomar éstos valores.

A pesar de que el cambio de coordenadas depende de los campos vectoriales inciertos $F(x)$ y $G(x)$, su conocimiento en realidad no es necesario debido a que en el diseño propuesto solo se requiere que la transformación $z(w, x) = T(x)$ exista.

En la metodología propuesta, los estados $z_i = T_i(x) = L_F^{i-1}h(x)$, $1 \leq i \leq \rho$ del sistema (3.2) se interpretarán como estados no medidos pero observables. Por lo antes expuesto, en principio es posible diseñar un controlador retroalimentado que use un observador de estados que estime los estados inciertos z_i 's. Posteriormente será necesario probar que sistema planta+controlador+observador es estable.

Aún permanece el problema de compensar las incertidumbres asociadas con las funciones transformadas $f(z, w)$ y $g(z, w)$. Definamos las incertidumbres $\delta_1(z, w) = f(z, w) - \gamma_1(z)$ y $\delta_2(z, w) = g(z, w) - \gamma_2(z)$. Si definimos además $\eta(t) = \delta_1(z(t), w(t)) + \delta_2(z(t), w(t))u$, el sistema (3.2) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i < \rho \\
\dot{z}_\rho &= \gamma_1(z) + \gamma_2(z)u + \eta \\
\dot{\eta} &= \Gamma(z, w, \eta; \mathcal{U}) \\
\dot{w} &= H(z, w; u) \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde \mathcal{U} contiene la entrada de control y su derivada temporal \dot{u}

$$\begin{aligned}
\Gamma(z, w, \eta; \mathcal{U}) &= \sum_{i=1}^{\rho-1} \partial_1 \delta_1(z, w) z_{i+1} + \partial_\rho \delta_1(z, w) (\gamma_1(z) + \gamma_2(z)u + \eta) + \\
&\quad \left(\sum_{i=1}^{\rho-1} \partial_i \delta_2(z, w) z_{i+1} + \partial_\rho \delta_2(z, w) (\gamma_1(z) + \gamma_2(z)u + \eta) \right) u + \\
&\quad (\partial_w \delta_1(z, w) + \partial_w \delta_2(z, w)) H(z, w; u) + \delta_2(z, w) \dot{u}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que todas las incertidumbres hasta de grado relativo ρ han sido agrupadas en el nuevo estado η . Por otro lado, dado que $\delta_1(z, w)$ y $\delta_2(z, w)$ son funciones inciertas, $\Gamma(z, w, \eta; \mathcal{U})$ es también incierta.

Una propiedad importante del sistema (3.6) es que la variedad $\Phi(z, w, \eta; u) = \eta - \delta_1(z, w) - \delta_2(z, w)u = 0$ es invariante bajo las trayectorias generadas por el sistema (3.6) (Alvarez-Ramírez et al., 1996; González-Trejo et al., 1997b, 1998c). Esto es, si se elige la condición inicial η_0 tal que $\Phi(z_0, w_0, \eta_0; u_0) = 0$, entonces $\Phi(z(t), w(t), \eta(t); u(t)) = 0$ y por tanto $\eta(t) = \delta_1(z(t), w(t)) + \delta_2(z(t), w(t))u(t)$ para todo $t \geq 0$. A partir de las observaciones anteriores se puede concluir que la representación de estados (3.1),(3.2) es externamente (entrada-salida) equivalente al sistema (3.6) siempre y cuando $\Phi(z_0, w_0, \eta_0; u_0) = 0$.

Una propiedad interesante de la representación de estados (3.6) es que si el sistema (3.1) es de fase mínima, el sistema implícito (3.6) también es de fase mínima. No es difícil probar que este resultado es una consecuencia de la invarianza de $\Phi(z(t), w(t), \eta(t); u(t)) = 0$.

Partiendo de la representación de estados (3.6), la siguiente propiedad es evidente.

Proposición 1 (González-Trejo et al., 1998c) *Los estados (z, η) son observables a partir de mediciones de la salida $y = h(x) = z_1$.*

Esta propiedad implica que la dinámica de los estados transformados z y la dinámica de la incertidumbre $\eta(t)$ pueden ser reconstruidas a partir de mediciones de la salida $y(t)$.

Prueba Dado que $y = h(x) = z_1$, del sistema (3.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} z_1(t) &= y(t) \\ z_i(t) &= \dot{z}_{i-1}(t) \quad i = 2, \dots, \rho \\ \eta(t) &= \dot{z}_\rho(t) - \gamma_1(z) - \gamma_2(z)u(t) \end{aligned}$$

■

3.4 Un esquema de control robusto

Sin pérdida de generalidad se supondrá que el origen es un punto de equilibrio del sistema (3.2), el cual corresponde con $y = 0$. Las propiedades de estabilidad en lazo cerrado del sistema resultante se establecerán para el *problema de regulación*. Las condiciones de estabilidad para el problema de seguimiento se pueden derivar de manera análoga siguiendo la misma metodología. La **IFC** para el sistema (3.6) es

$$u^I(z, \eta) = \frac{1}{\gamma_2(z)} \left[-\gamma_1(z) - \eta - \sum_{i=1}^{\rho} K_i z_i \right] \quad (3.8)$$

Por hipótesis, $\gamma_2(z)$ se elige acotada y es diferente de cero, lo cual implica que la ley de control anterior está bien definida. La **IFC** (3.8) conduce a la cancelación exacta de las incertidumbres $\eta(t)$ y de las no linealidades $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$. Sin embargo, la ley de control (3.8) no se puede usar debido a que no se dispone de mediciones de los estados z_i 's ni del valor de la incertidumbre η . Para construir una ley de control realizable se aprovechará la propiedad de que la dinámica de los estados z_i 's y de la incertidumbre η puede ser reconstruida a partir de la dinámica de la salida $y = z_1$. La idea es construir un observador de estados para obtener estimados de los

estados \bar{z} y $\bar{\eta}$. De esta forma, la entrada de control físicamente realizable es

$$u = u^p(\bar{z}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\gamma_2(\bar{z})} \left[-\gamma_1(\bar{z}) - \bar{\eta} - \sum_{i=1}^{\rho} K_i \bar{z}_i \right] \quad (3.9)$$

donde los estimados \bar{z} y $\bar{\eta}$ se obtienen mediante un estimador de estados (Esfandiari and Khalil, 1992). Siguiendo las ideas de Esfandiari and Khalil (1992), se propone el siguiente observador:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_i &= \bar{z}_{i+1} + \mathcal{L}^i \beta_i (y - \bar{z}_1), & 1 \leq i < \rho \\ \dot{\bar{z}}_\rho &= \gamma_1(\bar{z}) + \gamma_2(\bar{z})u + \bar{\eta} + \mathcal{L}^\rho \beta_\rho (y - \bar{z}_1) \\ \dot{\bar{\eta}} &= + \mathcal{L}^{\rho+1} \beta_{\rho+1} (y - \bar{z}_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde \mathcal{L} es un parámetro ajustable $\mathcal{L} > 0$ y los valores de β_i 's se eligen de tal forma que el polinomio $s^\rho + \beta_1 s^{\rho-1} + \dots + \beta_\rho s + \beta_{\rho+1} = 0$ sea Hurwitz. El estimador de estados (3.10) depende exclusivamente de las mediciones de la salida y y de los estimados $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$. El sistema (3.10) es un observador tipo Luenberger puesto que se construye como una copia de la parte conocida del sistema (3.6) corregido por un término de gradiente ($y - \bar{z}_1$).

Observe que en la construcción del observador (3.10) no se consideró la dinámica interna (w). La razón es que dicha dinámica no es observable a lazo cerrado. Note además que no se tomó al término del lado derecho de la dinámica de la incertidumbre $\dot{\eta}$. La razón es que este término es incierto.

En general, para reconstruir la dinámica de z y η , el parámetro \mathcal{L} debe tomar valores grandes. En muchos casos esto origina un fenómeno llamado "peaking" (Sussman and Kokotovic, 1989), el cual puede conducir a la desestabilización del sistema a lazo cerrado, interpretado como sobredisparos en los estimados $(\bar{z}, \bar{\eta})$. Para reducir los sobredisparos en los estimados $(\bar{z}, \bar{\eta})$, Esfandiari and Khalil (1992) proponen acotar la entrada de control mediante una función de saturación de la siguiente forma:

$$u^s = \text{Sat}[u^p(\bar{z}, \bar{\eta}); (u_{\min}, u_{\max})] \quad (3.11)$$

donde u_{\min} y u_{\max} son, respectivamente, los límites inferior y superior de la función de saturación. La ley de control resultante (3.9)-(3.11) es un controlador por retroalimentación de

salida (esto es, para su implementación se requiere exclusivamente de mediciones de la salida $y = h(x) = z_1$).

3.4.1 Análisis de estabilidad

La novedad del controlador propuesto es tomar a las incertidumbres como un nuevo estado cuya dinámica puede ser reconstruida a partir de mediciones de la salida. Posteriormente, se construye un estimador de estados (3.10) para estimar los estados transformados desconocidos $z \in \mathbb{R}^\rho$ y la incertidumbre η . En otras palabras, *el problema original de estabilización bajo campos vectoriales inciertos se transformó a un problema de observación robusta*. Afortunadamente, existen resultados teóricos sobre la estabilización robusta por retroalimentación de salidas de sistemas linealizables. Por ejemplo, usando los resultados del trabajo de Esfandiari and Khalil (1992) se pueden establecer las propiedades de estabilidad del sistema a lazo cerrado (3.2),(3.9)-(3.11). También se pueden usar los resultados de Teel and Praly (1994).

Siguiendo las ideas de Esfandiari and Khalil (1992), se define el error de observación como:

$$e_i = \mathcal{L}^{\rho-i+1}(z_i - \bar{z}_i) \text{ para } 1 \leq i \leq \rho \text{ y } e_{\rho+1} = \eta - \bar{\eta}$$

Haciendo uso del hecho de que $\eta = \delta_1(z, w) + \delta_2(z, w)u$, la ley de control (3.9) se puede escribir en términos de las coordenadas (z, w, e) como

$$u^p(z, w, e) = \frac{\left[-f(x, w) - \gamma_1(z - M(\mathcal{L})\varepsilon) + \gamma_1(z) - e_{\rho+1} - \eta - \sum_{i=1}^{\rho} K_i (z_i + \mathcal{L}^{-\rho+i-1}e_i) \right]}{(g(z, w) - \gamma_2(z) + \gamma_2(z - M(\mathcal{L})\varepsilon))}$$

donde $\varepsilon = (e_1, \dots, e_\rho)$ y $M(\mathcal{L}) = \text{diag} [\mathcal{L}^{-\rho}, \dots, \mathcal{L}^{-1}]$. De esta forma $\lim_{e \rightarrow 0} u^p(z, w, e) = u^I(z, w)$. Esto es, el controlador (3.9)-(3.11) se aproxima a la ley de control ideal (3.5) conforme $e \rightarrow 0$. El cálculo de la dinámica de los errores e_i 's para $1 \leq i \leq \rho$ es directo. Por otro lado, $\dot{e}_{\rho+1} = \Gamma(z, e, \eta, \mathcal{U}) - \mathcal{L}\beta_{\rho+1}e_1$, donde $\Gamma(z, e, \eta, \mathcal{U})$ está dada en la ecuación (3.7). Para calcular $\dot{e}_{\rho+1}$, se requiere del cálculo de la derivada temporal de la entrada de control u . Como en el caso anterior, usando (3.9) y (3.11) y el hecho de que $\eta = \delta_1(z, w) + \delta_2(z, w)u$ se puede obtener

la siguiente expresión

$$\dot{u} = \mathcal{L}\beta_{\rho+1}\mathfrak{Sat}'(\delta_2(z, w)e_1/\gamma_2(z) + \mathcal{V}(z, w, N(\mathcal{L})e)) \quad (3.12)$$

donde $\mathfrak{Sat}'()$ representa la derivada temporal de la función de saturación en (3.12), $N(\mathcal{L}) = \text{diag}[\mathcal{L}^{-\rho}, \dots, \mathcal{L}^{-1}, 1]$ y $\mathcal{V}(z, w, N(\mathcal{L})e)$ es una función no lineal la cual es del orden de \mathcal{L}^q , $q \leq 0$, con respecto al error de observación e . Esto es, solo se amplifica el primer término del lado derecho de la ecuación (3.12) cuando la ganancia de observación \mathcal{L} toma valores grandes. De esta forma, la dinámica del error de observación está gobernada por:

$$\dot{e} = \mathcal{L}A_0(\kappa(t))e + \phi(z, w, N(\mathcal{L})e) \quad (3.13)$$

donde $\phi(z, w, N(\mathcal{L})e)$ es una función no lineal de sus argumentos,

$$\kappa(t) = [\gamma_2(z(t)) + \mathfrak{Sat}'(g(z(t), w(t)) - \gamma_2(z(t)))] / \gamma_2(z(t))$$

y $A_0(\kappa(t))$ es la matriz compañera de observación con coeficientes $\{-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_\rho, -\kappa(t)\beta_{\rho+1}\}$:

$$A_0(\kappa(t)) = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\kappa(t)\beta_{\rho+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que si $\kappa(t) = 1$ (esto es, $g(z, w) = \gamma_2(z)$), entonces la matriz $A_0(1)$ es Hurwitz dado que su polinomio característico es $s^\rho + \beta_1 s^{\rho-1} + \dots + \beta_\rho s + \beta_{\rho+1} = 0$. Tomando el valor de \mathcal{L} como un número suficientemente grande, el primer término de la ecuación (3.13) mayoriza al segundo término de dicha ecuación, de tal forma que la dinámica del error de observación se comporta como $\dot{e} = \mathcal{L}A_0(\kappa(t))e$ (Alvarez-Ramírez et al., 1998). Consecuentemente, se debe garantizar la estabilidad exponencial de $\dot{e} = \mathcal{L}A_0(\kappa)e$. Tomando el resultado de Su et al. (1994) sobre el cálculo de márgenes de estabilidad se puede concluir que si todos los valores propios de la matriz $A_0(1)$ están localizados en -1 y $0 < \kappa(t) < 2$, el sistema $\dot{e} = \mathcal{L}A_0(\kappa)e$ es globalmente asintóticamente estable. Esto es, existe una matriz positiva definida P tal

que $A_0^T(\kappa(t))P + PA_0(\kappa(t)) = -I$, para $0 < \kappa(t) < 2$, esto significa estabilidad absoluta con respecto al valor $\kappa(t)$. La función de saturación se puede elegir de tal forma que cumpla con $-1 \leq \text{Sat}'(\cdot) \leq 1$, lo que implica que las desigualdades $0 < \kappa(t) < 2$ se cumplen si $|\gamma_2(z)| \geq |g(z, w)|$ y $\text{sign}(\gamma_2(z)) = \text{sign}(g(z, w))$. Esto es, se debe conocer el signo de la "ganancia de alta frecuencia" $g(z, w)$ y debe ser la cota superior de $g(z, w)$; esto es, $|\gamma_2(z)| \geq |g(z, w)|$ para todo $t \geq 0$. Un enfoque similar ha sido utilizado para la construcción de observadores no lineales mediante la linealización aproximada del error (Lynch and Bortoff, 1997).

Por otro lado, el sistema controlado se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i < \rho \\
\dot{z}_\rho &= f(z, w) + g(z, w)\text{Sat}(u^p(z, w, 0)) + g(z, w) \\
&\quad + g(z, w) \{ \text{Sat}(u^p(z, w, e)) - \text{Sat}(u^p(z, w, 0)) \} \\
\dot{w} &= H(z, w; \text{Sat}(u^p(z, w, e)))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Observe que $u^I(z, w) = u^p(z, w, e = 0)$. De esta forma, cuando el error de estimación $e = 0$, el sistema (3.2) es gobernado por una versión saturada de la **IFC** (3.8). Por hipótesis, la **IFC** conduce a estabilidad asintótica global alrededor del origen, entonces el sistema a lazo cerrado (3.14) con error de observación cero y una retroalimentación saturada es *semiglobalmente asintóticamente estable* alrededor del origen (Esfandiari and Khalil, 1992; Teel and Praly, 1994). Esto es, dado un conjunto compacto de condiciones iniciales $W \subset \mathbb{R}^n$, entonces existen límites de la función de saturación (u_{\min}, u_{\max}) tales que W está contenida en la región de atracción del sistema. Sin embargo, el error de estimación e introduce ciertos efectos perturbativos en el lazo de control retroalimentado. Suponiendo que $g(z, w)$ es suave, el término de perturbación en (3.14) satisface la siguiente desigualdad

$$|g(z, w) \{ \text{Sat}(u^p(z, w, e)) - \text{Sat}(u^p(z, w, 0)) \}| \leq \alpha_1 + \alpha_2 \|(z, w)\|$$

para todo $(z, w) \in W \subset \mathbb{R}^n$ y $e \in \mathbb{R}^{p+1}$. Esto es, el término de perturbación anterior es semiglobalmente Lipchitz y globalmente acotado con respecto a los estados (z, w) y al error de estimación e respectivamente. Por otro lado, si el término de perturbación en (3.13) $\phi(z, w, N(\mathcal{L})e)$ es suave de tal forma que es semiglobalmente Lipchitz (con respecto a los conjuntos compactos), en-

tonces existen las constantes positivas α_3 y α_4 tales que $|\phi(z, w, N(\mathcal{L})e)| \leq \alpha_3 \|(z, w)\| + \alpha_4 \|e\|$. La estabilidad del sistema a lazo cerrado (3.13),(3.14) se puede establecer mediante una aplicación directa del resultado de Esfandiari and Khalil (1992) (ver también Teel and Praly, 1994) sobre estabilización por retroalimentación de salidas de sistemas linealizables por retroalimentación. El Teorema 4 de Esfandiari and Khalil (1992) nos permite concluir que si se eligen apropiadamente los valores de los parámetros del controlador $\{u_{\min}, u_{\max}, \mathcal{L}\}$, entonces el sistema (3.13),(3.14) será semiglobalmente asintóticamente estable alrededor del origen. Estabilidad asintótica semiglobal significa que, dada una región compacta $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{n+\rho+1}$ conteniendo al origen (punto de referencia), entonces existe un conjunto de parámetros $\{u_{\min}, u_{\max}, \mathcal{L}^*\}$ tales que para todo $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$, todas las trayectorias que inicien en \mathcal{R} permanecen en dicho conjunto y convergen asintóticamente al origen. Se puede obtener una versión débil de este resultado en el caso de que existan perturbaciones externas o que el problema de control sea el de seguimiento. En ese caso es posible concluir que el sistema a lazo cerrado (3.13),(3.14) es semiglobalmente prácticamente estable (esto es, todas las trayectorias que inicien en \mathcal{R} permanecen en dicho conjunto y convergen a una vecindad del origen \mathcal{R}_0 , la cual se puede hacer tan pequeña como se desee (estabilidad práctica) haciendo el valor del parámetro \mathcal{L} más grande que cierto umbral \mathcal{L}^*).

Cuando existe ruido en las mediciones, hay una limitación en el valor que se puede usar para el parámetro \mathcal{L} . Si se usa $y_m = y + v(t)$ en el último término de (3.10) implica que el ruido de medición $v(t)$ es amplificado con una ganancia del orden de \mathcal{L} . En implementaciones prácticas, se puede usar un prefiltrado de la señal de salida así como un sintonizado óptimo de \mathcal{L} (como en el caso de filtros Kalman), para disminuir los efectos del ruido y/o el muestreo en las mediciones.

3.5 Aplicación al control de columnas de destilación

En el capítulo 2 se discutieron algunos de los problemas relacionados con el control de la composición en columnas de destilación. En esta sección se utilizará la metodología desarrollada en las secciones anteriores para controlar la composición en el domo de una columna de destilación binaria. El propósito es mantener la calidad del producto dentro de las especificaciones, a pesar

de que existan variaciones en el flujo y la composición de alimentación.

Para lograr esto se propone una ley de control robusto considerando una columna de destilación binaria con condensador total y control de nivel perfecto. Tomando las suposiciones descritas en el capítulo anterior, es decir, la fase líquida y la fase vapor están perfectamente mezcladas y en equilibrio termodinámico, etc, la dinámica de la composición de la fase líquida en cada etapa de la columna está dada como:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_D &= \frac{V}{\mathcal{H}_c} (E(x_1) - x_D) \\
\dot{x}_i &= \frac{1}{\mathcal{H}_i} \left(V (E(x_{i+1}) - E(x_i)) + L(x_{i-1} - x_i) - x_i \dot{\mathcal{H}}_i \right) & i = 1, \dots, f - 1 \\
\dot{x}_f &= \frac{1}{\mathcal{H}_f} \left(V (E(x_{f+1}) - E(x_f)) + Lx_{f-1} + (L + F)x_f + Fz_f - x_f \dot{\mathcal{H}}_f \right) \\
\dot{x}_j &= \frac{1}{\mathcal{H}_j} \left(V (E(x_{j+1}) - E(x_j)) + (L + F)(x_{j-1} - x_j) - x_j \dot{\mathcal{H}}_j \right) & j = f + 1, \dots, N - 1 \\
\dot{x}_B &= \frac{1}{\mathcal{H}_j} \left((L + F)x_{N-1} - (L + F - V)x_N - VE(x_N) - x_j \dot{\mathcal{H}}_N \right) \\
\dot{\mathcal{H}}_l &= L - L_l & l = 1, \dots, N - 1 \\
L_l &= \bar{L} + \frac{1}{\beta} (\mathcal{H}_l - \bar{\mathcal{H}}_l) & l = 1, \dots, N - 1
\end{aligned}$$

en donde los platos se cuentan desde el domo hacia el fondo, x_j es la fracción mol de la fase líquida en el plato j , x_D es la fracción mol de la fase líquida en el domo, $E(x_j)$ es la fracción mol de la fase vapor en el plato j , β es una constante de tiempo hidráulica, L es el flujo molar de recirculado, L_i es el flujo molar de líquido que baja del plato i , V es el flujo molar de vapor que sube por la columna, \mathcal{H}_c y \mathcal{H}_i son los retenidos de líquido en el condensador y en el plato i respectivamente, F es el flujo de alimentación a la columna y z_f es la composición de alimentación.

Levine and Rouchon (1991) mostraron que usando las mismas hipótesis que se hicieron en este capítulo, la columna de destilación binaria es de fase mínima (Teorema 2 en Levine and Rouchon, 1991). Esto es, si la composición en el domo converge asintóticamente a un punto de operación, el resto de las composiciones converge también a un punto de equilibrio. Este resultado es razonable si se parte del hecho que las composiciones de la fase líquida y vapor en cualquier etapa están contenidas en el intervalo $[0,1]$.

Dado que el objetivo de control es mantener la composición del destilado x_D en un cierto valor de referencia x_D^{ref} manipulando el flujo de recirculado L , y considerando el resultado anterior, es razonable realizar el diseño del controlador analizando el comportamiento dinámico

de las composiciones en el domo y en el primer plato exclusivamente

$$\begin{aligned}
\dot{x}_D &= \frac{V}{\mathcal{H}_c}(E(x_1) - x_D) \\
\dot{x}_1 &= \frac{1}{\mathcal{H}_1} \left(V(E(x_2) - E(x_1)) + L(x_D - x_1) - x_1 \dot{\mathcal{H}}_1 \right) \\
\dot{\mathcal{H}}_1 &= L - L_1 \\
L_1 &= \bar{L} + \frac{1}{\beta} (\mathcal{H}_1 - \bar{\mathcal{H}}_1)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Estrictamente hablando, el grado relativo de la salida de control $y = x_D - x_D^{ref}$ con respecto a la entrada de control $u = L$ es constante e igual a dos (Isidori, 1989). Esto es, la dinámica de y puede ser representada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variantes en tiempo:

$$\ddot{y} = -\frac{V}{\mathcal{H}_c} \dot{y} + \frac{VE'(x_1)L}{\mathcal{H}_c\mathcal{H}_1} (y - x_1) + \frac{V^2E'(x_1)}{\mathcal{H}_c\mathcal{H}_1} (E(x_2) - E(x_1)) - \frac{x_1VE'(x_1)\dot{\mathcal{H}}_1}{\mathcal{H}_c\mathcal{H}_1} \tag{3.16}$$

donde $E'(x)$ representa la derivada de $E(x)$.

3.5.1 Sistema de primer orden

Levine and Rouchon (1991) obtuvieron un modelo de parámetro agregado para fines de control usando técnicas de perturbación singular en un modelo físico de una columna de destilación binaria. También mostraron que el modelo agregado es equivalente, con una desviación del orden de $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_c$, a la solución del modelo físico. Dado que para la mayor parte de las columnas industriales, los retenidos molares del condensador y del rehervidor son mucho más grandes que los retenidos en cualquier otra etapa: $\mathcal{H}_c \gg \mathcal{H}_i$, con la propuesta de Levine and Rouchon es posible obtener un modelo adecuado para fines de control, puesto que el error es pequeño ($\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_c \ll 1$).

Tomado como base la ecuación (3.15), los resultados de Levine and Rouchon implican cuando el retenido molar en todas las etapas es constante y el retenido en el condensador es mucho mayor que el retenido del primer plato, entonces la dinámica de la composición en el primer plato es mucho más rápida que la composición en el condensador. De esta forma, aplicando el Teorema de Tikhonov (ver Levine and Rouchon, 1991) al sistema (3.16), la dinámica de la

composición en el destilado se puede aproximar como

$$\dot{x}_D = \frac{VE'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (E(x_2) - E(x_1)) + \mathfrak{v}(x_D, E(x_2), E(x_1), t) + \frac{LE'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (x_D - x_1) \quad (3.17)$$

donde $\mathfrak{v}(x_D, E(x_2), E(x_1), t)$ es un término incierto de orden $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_c$. La dinámica de la composición del destilado dada por (3.16) es de grado relativo uno ($\rho = 1$). Para diseñar un esquema de control basado en (3.17) haremos las siguientes suposiciones:

1. Solo se dispone de la composición en el destilado x_D para construir la retroalimentación. En aplicaciones prácticas, x_D se estima a partir de variables fáciles de medir, tales como temperatura, presión, etc.
2. Existe un número positivo conocido σ tal que $\frac{LE'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (x_D - x_1) \leq \sigma$, para todo $t \geq 0$. El término $\frac{LE'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (x_D - x_1)$ está relacionado con el grado de separación que se puede obtener para la mezcla que se esta destilando. Para una operación de alta pureza, $x_D - x_1 \approx 0$, por lo que $\sigma \approx 0$.

Observacion 1 *Para columnas de destilación binarias, es claro que $x_D - x_1 < z_f$, dónde es la composición del flujo de alimentación. Además, si $L(t) > L_{\min} > 0$, entonces $\mathcal{H}_1 > \mathcal{H}_{1,\min}$. Por otra parte, es fácil mostrar que $E'(x) < \alpha$, donde α es la volatilidad relativa de la mezcla. De esta forma, se puede tomar el valor de σ como $\sigma \leq \alpha z_f / \mathcal{H}_{1,\min}$. El valor de σ se puede estimar también a partir de datos de planta y/o simulaciones numéricas a lazo abierto.*

Tomando a $\omega(t)$ como el vector $(x_1, E(x_1), E(x_2))$, la dinámica de $z_1 = x_D - x_D^{ref}$ se puede llevar a la forma del sistema (3.2) donde

$$\begin{aligned} f(z, \omega, t) &= \frac{VE'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (E(x_2) - E(x_1)) + \mathfrak{v}(x_D, E(x_2), E(x_1), t) \\ g(z, \omega, t) &= \frac{E'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (x_D - x_1) \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que en $f(z, \omega, t)$ sólo aparecen términos desconocidos, el estimado $\gamma_1(z)$ de $f(z, \omega, t)$ se tomará como $\gamma_1(z) = 0$. El estimado $\gamma_2(z)$ de $g(z, \omega, t)$ se seleccionará como $\gamma_2(z) = \sigma$. Con éstos estimados, el observador de estados (3.10) y la ley de control (3.9) toman

la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_1 &= \sigma u + \bar{\eta} + 2\mathcal{L}(y - \bar{z}_1) \\ \dot{\bar{\eta}} &= + \mathcal{L}^2(y - \bar{z}_1) \\ u &= \frac{1}{\sigma} (-\bar{\eta} + Ky)\end{aligned}\tag{3.18}$$

donde $K < 0$. Dado que x_D toma valores solo en el intervalo $[0,1]$, se puede concluir que existe un valor \mathcal{L}^* tal que para todo $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$ el sistema a lazo cerrado con el controlador (3.18) presenta estabilidad práctica global.

Observacion 2 *Se puede obtener un mejor desempeño del controlador (3.18) si además de contar con mediciones de la composición en el destilado x_D , se dispone de mediciones de la composición de la fase líquida en el primer plato x_1 . En este caso $\sigma \leq \alpha(x_D - x_1)/\mathcal{H}_{1,\min}$. Sin embargo, si se toma $\sigma = \alpha(x_D - x_1)/\mathcal{H}_{1,\min}$, el desempeño del controlador (3.18) estará limitado por el ruido en las mediciones. Por ejemplo, en columnas de destilación de alta pureza, x_D es muy cercano a x_1 , de tal forma que la diferencia $x_D - x_1$ puede estar en el rango del ruido en las mediciones. Por el contrario, cuando se toma $\sigma = \alpha x_{f,\max}/\mathcal{H}_{1,\min}$, donde $x_{f,\max}$ es una cota límite de $x_f(t)$, el problema antes mencionado no se presenta.*

Observacion 3 *Si se hace la realización en el dominio de la frecuencia del compensador (3.18), se obtiene la siguiente función de transferencia para el controlador*

$$u(s) = \frac{1}{\sigma} \left(\left(K - \frac{\mathcal{L}}{2} \right) + \frac{\mathcal{L}K}{2} \frac{1}{s} + \frac{K}{2\mathcal{L}} s \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{2\mathcal{L}}s + 1} \right) y(s)$$

la cual es equivalente a la función de transferencia de un controlador **PID** con un post-filtro. Observe que conforme $\mathcal{L} \rightarrow \infty$, el tiempo de filtrado así como el tiempo derivativo tienden a cero, recuperando la estructura **PI**. Este resultado es muy interesante puesto que significa que es posible controlar una columna de destilación usando un controlador **PID** convencional, cuyo sintonizado está de acuerdo con la función de transferencia anterior.

Tabla 3.1

Valores de los parámetros y de las variables para el simulador
de la columna de destilación binaria (Luyben, 1990)

Volatilidad Relativa (α)	1.6
Número de platos	40
Plato de alimentación	19 (contado a partir del domo)
Composición de alimentación (z_f)	50 % mol
Flujo de alimentación (F)	100 kmol/min
Flujo de vapor del rehervidor (V/F_0)	0.50
Composición en el destilado (x_D)	0.99
Composición en el fondo (x_B)	0.01
Retenido en el condensador (\mathcal{H}_c)	100 kmol
Retenido en los platos (\mathcal{H}_i)	2 kmol
Retenido en el rehervidor (\mathcal{H}_B)	80 kmol

Ejemplo numérico y discusión de resultados.

Para mostrar el desempeño del sistema a lazo cerrado se realizaron algunas simulaciones numéricas para una columna de destilación binaria empleando el modelo descrito por Luyben (1990). Para llevar a cabo las simulaciones se hicieron las siguientes suposiciones: (i) La presión a lo largo de toda la columna es constante y uniforme, (ii) El retenido molar de vapor en cada etapa es despreciable y (iii) El equilibrio líquido vapor está dado por la ecuación $E(x_j) = \alpha x_j / (1 - (1 - \alpha)x_j)$, donde x_j y $E(x_j)$ son, respectivamente, las composiciones de la fase líquida y vapor en el plato j y α es la volatilidad relativa.

Los valores nominales para los parámetros de la columna de destilación se reportan en la Tabla 3.1. Observe que la relación $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_c \simeq 0.02$, de tal forma que se cumple la suposición planteada en el trabajo de Levine y Rouchon (1991). Los valores de los parámetros del controlador (3.18) se seleccionaron como: $\mathcal{L} = 1 \text{ min}^{-1}$, $K = 0.05 \text{ min}^{-1}$ y $\sigma = 0.005$. Las condiciones iniciales para el controlador (3.18) fueron $\bar{z}_1(0) = x_D(0) - x_D^{ref}(0)$ y $\bar{\eta}(0) = 0$. Antes de activar la ley de control, se permitió que la columna de destilación alcanzara el estado de equilibrio correspondiente al caso de reflujo total ($L = V$). En $t = 0$, se activó la ley de control $u(t)$ para

regular la composición en el domo $x_D(t)$ de acuerdo con el siguiente conjunto de perturbaciones en escalón: (i) en $t = 300$ min, se aumentó la composición de alimentación x_f en un 20% con respecto a su valor nominal; (ii) en $t = 450$ min, se disminuyó la composición de alimentación x_f en un 20% con respecto a su valor nominal y (iii) en $t = 580$ min, la composición de alimentación x_f toma su valor nominal y se cambio el valor de referencia de la composición en el domo x_D^{ref} a $x_D^{ref} = 0.97$.

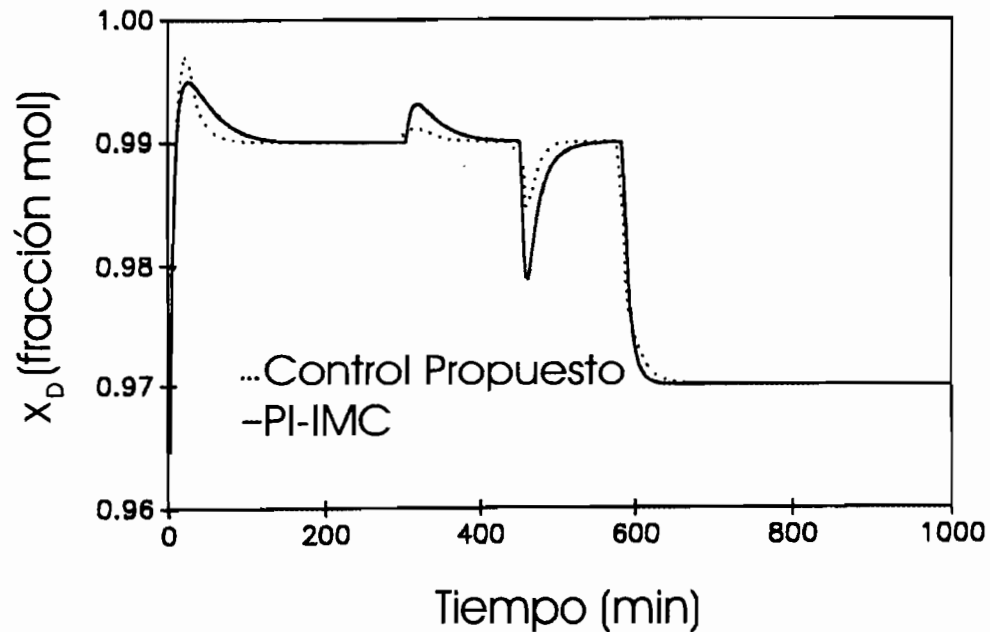


Figura 3.1

En la figura 3.1 se presenta el comportamiento dinámico de $x_D(t)$. Observe que $x_D(t)$ se mantiene alrededor del valor de referencia a pesar de las perturbaciones y las incertidumbres en el modelo. En la figura 3.2 se presenta la evolución de la entrada de control correspondiente a la secuencia de perturbaciones descritas anteriormente. A pesar de los cambios en escalón en la concentración de alimentación y en el valor de referencia para la salida de control, observe $L(t)$ que no presenta sobredisparos muy pronunciados. Esto se debe a que la estructura del controlador (3.9) permite la cancelación casi exacta de las perturbaciones y las no linealidades mediante el estimador de incertidumbres. Por otro lado, con el fin de comparar el desempeño del controlador propuesto, en las figuras 3.1 y 3.2 se muestran también las simulaciones numéricas

de un controlador **PI** sintonizado con técnicas de modelo interno (Chien and Fruehauf, 1990). Observe que la respuesta del controlador **PI** es más lenta que la respuesta del controlador propuesto, esto se debe a que el controlador **PI** fue sintonizado basado en un modelo lineal de primer orden $K_p/(\tau s + 1)$, donde K_p y τ son, respectivamente, los valores identificados de la ganancia y el tiempo característicos de la planta en el punto nominal de operación $x_D = 0.97$.

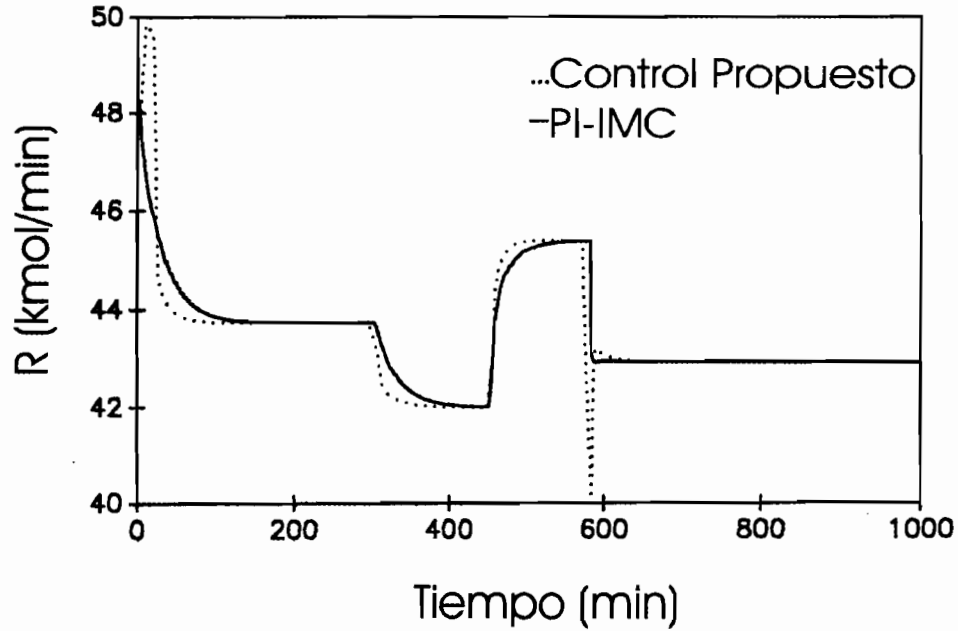


Figura 3.2

3.5.2 Sistema de segundo orden

Recordemos que, formalmente, el grado relativo ρ de la salida de control $y = x_D - x_D^{ref}$ con respecto a la entrada de control $u = L$ es constante e igual a dos. Si retomamos la estructura del sistema dada por (3.15) y hacemos las siguientes definiciones $z_1 = y$ y $z_2 = \dot{y}$, el sistema se puede expresar en la forma canónica (3.2) como:

$$\begin{aligned} f(T(x), w) &= -\frac{V}{\mathcal{H}_c} \dot{y} + \frac{VE'(x_1)}{\mathcal{H}_c \mathcal{H}_1} \left[(E(x_2) - E(x_1)) - x_1 \dot{\mathcal{H}}_1 \right] \\ g(T(x), w) &= \frac{VE'(x_1)}{\mathcal{H}_c \mathcal{H}_1} (y - x_1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $w = x_2$ (composición de la fase líquida en la segunda etapa). Levine and Rouchon (1991) mostraron que si la composición en el domo tiende asintóticamente a un punto de operación, las composiciones desde la segunda etapa hasta el rehervidor tienden asintóticamente a un estado de equilibrio.

Para implementar el controlador (3.9)-(3.11) se requieren los valores de los estimados $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$. Dado que el conocimiento exacto de las relaciones termodinámicas e hidráulicas es muy difícil de obtener, también es difícil contar con estimados confiables de $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$. Una alternativa es obtener estos estimados mediante datos de planta o a través de simulaciones numéricas a lazo abierto (recuerde que la mayor parte de las columnas de destilación son estables a lazo abierto). Por otro lado, recordando que el grado relativo del sistema es igual a dos, se puede obtener un estimado de $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$ mediante el ajuste de los parámetros de la función de transferencia de un sistema de segundo orden

$$Y(s)/U(s) = K_p/(s^2 + a_1s + a_2)$$

Haciendo la realización en espacio de estados de la función de transferencia anterior, se concluye que

$$\begin{aligned}\gamma_1(z) &= -a_1z_2 - a_2z_1 = -a_1\dot{y} - a_2y \\ \gamma_2(z) &= K_p\end{aligned}\tag{3.20}$$

Aunque los estimados anteriores se obtienen alrededor de un cierto punto de operación nominal, de acuerdo con las simulaciones numéricas que se muestran más adelante, el desempeño del controlador (3.9)-(3.11) es aceptable incluso cuando las condiciones de operación están muy alejadas del punto de operación nominal. Es importante señalar que para un punto de operación fijo, los valores de a_1 , a_2 y K_p son constantes.

De acuerdo con (3.9)-(3.11), un controlador que semiglobalmente estabiliza la columna de destilación (3.15) alrededor de un punto de operación está dado como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_1 &= \bar{z}_2 + \beta_1\mathcal{L}(y - \bar{z}_1) \\ \dot{\bar{z}}_2 &= \gamma_1(\bar{z}) + \gamma_2(\bar{z})u + \bar{\eta} + \beta_2\mathcal{L}^2(y - \bar{z}_1) \\ \dot{\bar{\eta}} &= \beta_3\mathcal{L}^3(y - \bar{z}_1) \\ u &= \text{Sat} \left[\frac{1}{\gamma_2(\bar{z})} (-\gamma_1(\bar{z}) - \bar{\eta} - K_1y - K_2\bar{z}_2); (L_{\min}, L_{\max}) \right]\end{aligned}\tag{3.21}$$

donde $\gamma_1(z)$ y $\gamma_2(z)$ se calculan usando (3.20). Se pueden hacer algunas observaciones con respecto a la ecuación anterior. En primer lugar, observe que \bar{z}_1 es una versión filtrada de la salida medida x_D y \bar{z}_2 es un estimado de $\dot{x}_D = \frac{V}{\mathcal{H}_c}(E(x_1) - x_D)$. Por otro lado, recuerde que $\bar{\eta}$ es un estimado de la incertidumbre $\eta = F(z, w) - \gamma_1(z) + (G(z, w) - \gamma_2(z))L$. Los valores de los β_i 's se eligen de tal forma que las raíces de polinomio $s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3 = 0$ se localizan en -1. De esta forma, el esquema de control de la composición del destilado está compuesto por una retroalimentación de estados linealizante saturada y un estimador de estados, los cuales dependen sólo de funciones conocidas ($\gamma_1(z), \gamma_2(z)$) y de señales medidas ($x_D(t), L(t)$).

Observacion 3 *Supongamos que los estimados ($\gamma_1(z), \gamma_2(z)$) son constantes. Entonces, la realización en el dominio de Laplace del controlador (3.21) sin saturación da como resultado la siguiente funcionalidad*

$$L(s) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \left(\frac{\mathcal{L}^3 K_1 + 3\mathcal{L}s^2 K_1 + 3\mathcal{L}^2 s K_1 + 3\mathcal{L}^2 K_2 s^2 + \mathcal{L}^3 s K_2 + \mathcal{L}^3 s^2 + s^3 K_1}{s\gamma_2 (s^2 + 3K_2\mathcal{L} + K_2s + 3s\mathcal{L} + 3\mathcal{L}^2)} \right) y(s)$$

la cual se puede reescribir como

$$L(s) = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - K_p \left(1 + \frac{\tau_I^{-1}}{s} + \varsigma(s, s^2; \mathcal{L}, K_1, K_2) \right) y(s) \quad (3.22)$$

donde $\varsigma = - \left(\frac{-\frac{K_2^2}{K_1} \mathcal{L}^3 - \frac{K_2}{K_1} \mathcal{L}^4 + \frac{10}{3} K_2 \mathcal{L}^2 + 3K_2^2 \mathcal{L} + \mathcal{L}^3 - 4\mathcal{L}^3 s \frac{K_2}{K_1} - s\mathcal{L}^4 \frac{1}{K_1} + sK_2\mathcal{L} - s\frac{K_2^2}{K_1} \mathcal{L}^2 + sK_2^2 + \frac{1}{3} \mathcal{L}^2 s}{(\mathcal{L} + K_2)(s^2 + 3K_2\mathcal{L} + K_2s + 3s\mathcal{L} + 3\mathcal{L}^2)} \right)$, $K_p = \frac{K_1}{\gamma_2}$ y $\tau_I^{-1} = \frac{\mathcal{L}^2}{3(\mathcal{L} + K_2)}$. Note que el controlador (3.22) se puede ver como un controlador **PI** modificado, donde el valor nominal de la entrada de control es disminuido por el término $-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. De manera similar al caso de primer orden, observe el término $\varsigma(s, s^2; \mathcal{L}, K_1, K_2)$ es también un componente de segundo orden. La función de este término es compensar por los errores de modelado.

Ejemplo numérico y discusión de resultados.

Para mostrar el desempeño del controlador (3.21) a lazo cerrado se realizaron algunas simulaciones numéricas para una columna de destilación binaria empleando el modelo descrito por Luyben (1990). Para llevar a cabo las simulaciones se hicieron las siguientes suposiciones: (i)

La presión a lo largo de toda la columna es constante y uniforme, (ii) El retenido molar de vapor en cada etapa es despreciable y (iii) El equilibrio líquido vapor está dado por la ecuación $E(x_j) = \alpha x_j / (1 - (1 - \alpha)x_j)$, donde x_j y $E(x_j)$ son, respectivamente, las composiciones de la fase líquida y vapor en el plato j y α es la volatilidad relativa.

Tabla 3.2.

Valores de los parámetros y de las variables para el simulador
de la columna de destilación binaria (Luyben, 1990)

Volatilidad Relativa (α)	2.0
Número de platos	21
Plato de alimentación	10 (contado a partir del domo)
Composición de alimentación (z_f)	55 % mol
Flujo de alimentación (F)	100 kmol/min
Flujo de vapor del rehvador (V/F_0)	1.78
Composición en el destilado (x_D)	0.99
Composición en el fondo (x_B)	0.01
Retenido en el condensador (\mathcal{H}_c)	100 kmol
Retenido en los platos (\mathcal{H}_i)	10 kmol
Retenido en el rehvador (\mathcal{H}_B)	100 kmol

Los valores nominales para los parámetros de la columna de destilación se reportan en la Tabla 3.2. Para obtener los valores nominales de los parámetros de la función de transferencia de segundo orden se utilizaron métodos de ajuste por mínimos cuadrados, obteniendo: $a_1 = 0.33 \text{ min}^{-1}$ y $a_2 = 0.027 \text{ min}^{-2}$. Con estos valores, los estimados de las constantes de tiempo a lazo abierto son $\tau_1 = 6.5 \text{ min}$ y $\tau_2 = 5.4$. Cuando la composición en el domo x_D toma valores entre 95% y 99%, la ganancia de la planta se encontró que la ganancia de la planta K_p toma valores en el intervalo $[0.0005, 0.0012] \text{ min/kmol}$.

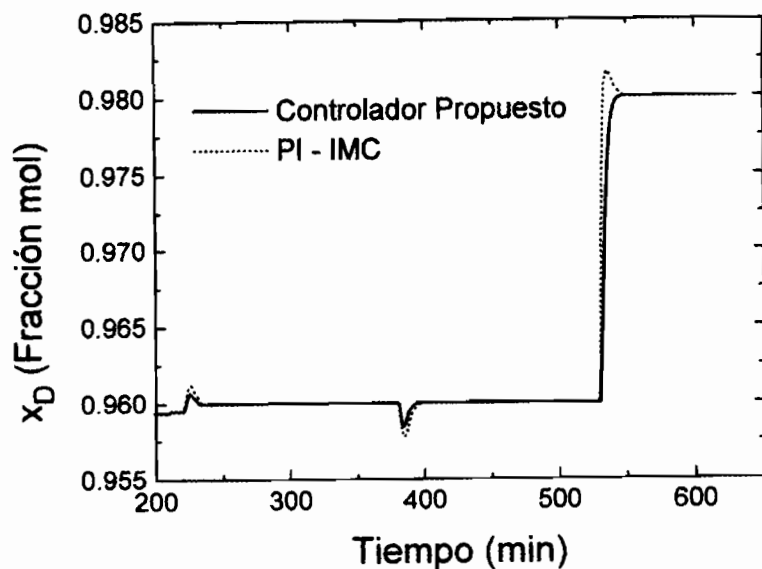


Figura 3.3

Para seleccionar los valores de los parámetros del controlador (3.21) se hicieron las siguientes consideraciones. El parámetro \mathcal{L}^{-1} se puede interpretar como el tiempo dominante del estimador de incertidumbres. Además, dado que el estimador de incertidumbres constituye la parte integral del controlador retroalimentado (3.21), \mathcal{L}^{-1} se puede interpretar como una constante de tiempo integral. Siguiendo las reglas de sintonizado IMC (Chien and Fruehauf, 1990) para fijar el valor de la constante de tiempo integral de un controlador PID, el parámetro \mathcal{L}^{-1} se puede elegir del orden de $\mathcal{O}(\tau_o^*)$, donde τ_o^* es la constante de tiempo dominante a lazo abierto. Tomado los valores de las constantes de tiempo a lazo abierto antes reportados, para las simulaciones que se describen a continuación se seleccionó $\mathcal{L} = 0.2 \text{ min}^{-1}$. Los valores de las ganancias del controlador K_1 y K_2 se seleccionaron como $K_1 = 0.25 \text{ min}^{-2}$ y $K_2 = 1.0 \text{ min}^{-1}$, de tal forma que la constante de tiempo a lazo cerrado es $\tau_c = 2 \text{ min}$. Con respecto a la saturación, la cota máxima para el flujo de recirculado corresponde con el flujo nominal de vapor $L_{\max} = V = 178 \text{ kmol/min}$, mientras la cota mínima corresponde con el valor del reflujo mínimo $L_{\min} = 100 \text{ kmol/min}$. Las condiciones iniciales para el controlador (3.21) fueron $\bar{z}_1(0) = x_D(0) - x_D^{ref}(0)$, $\bar{z}_2(0) = 0$ y $\bar{\eta}(0) = 0$.

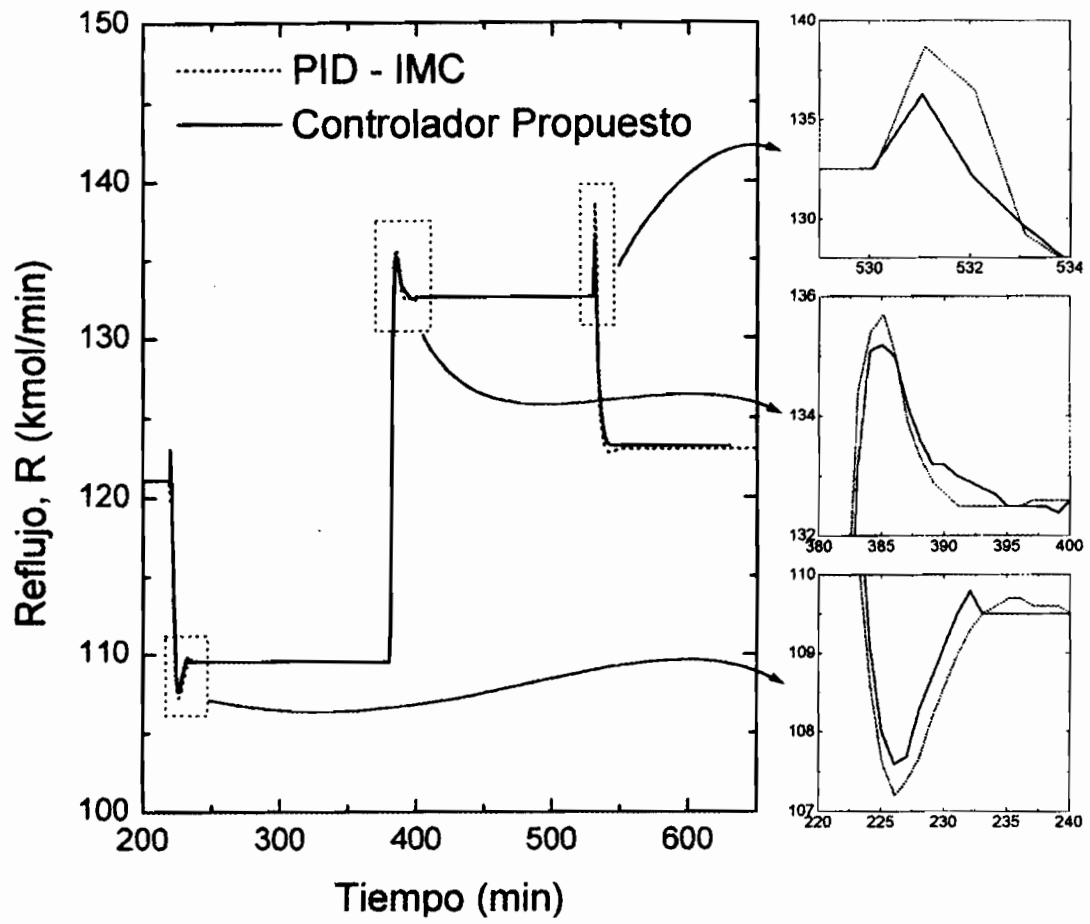


Figura 3.4

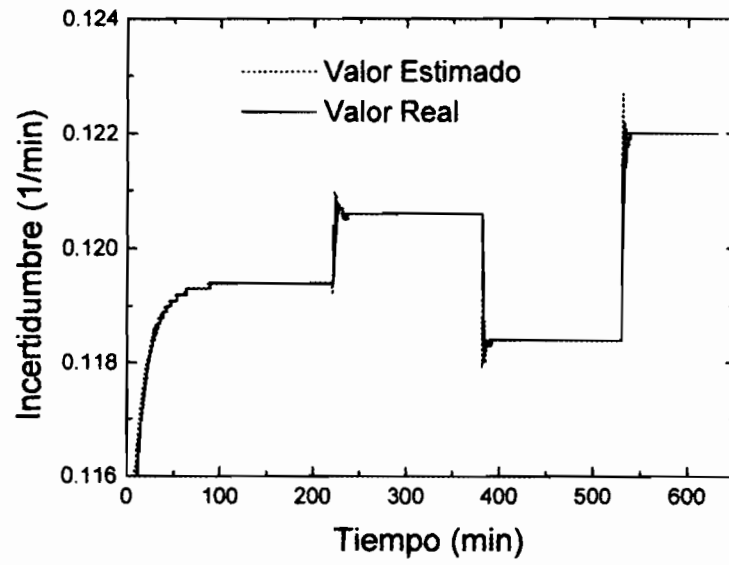


Figura 3.5

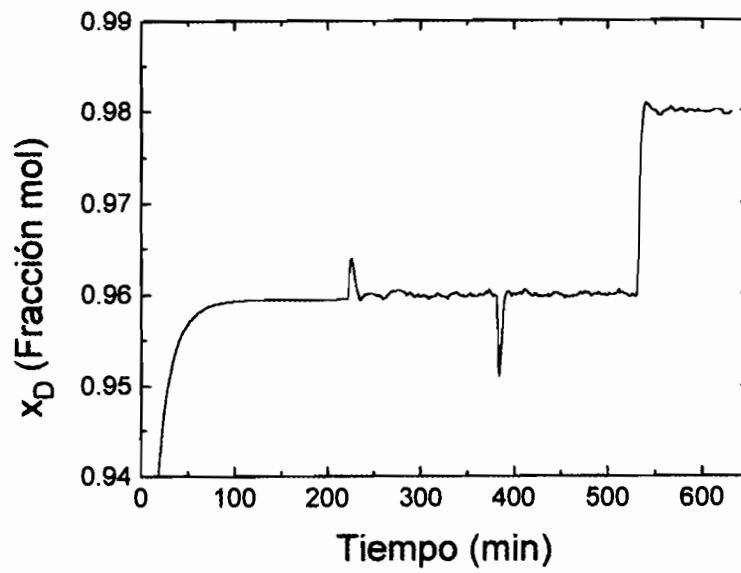


Figura 3.6

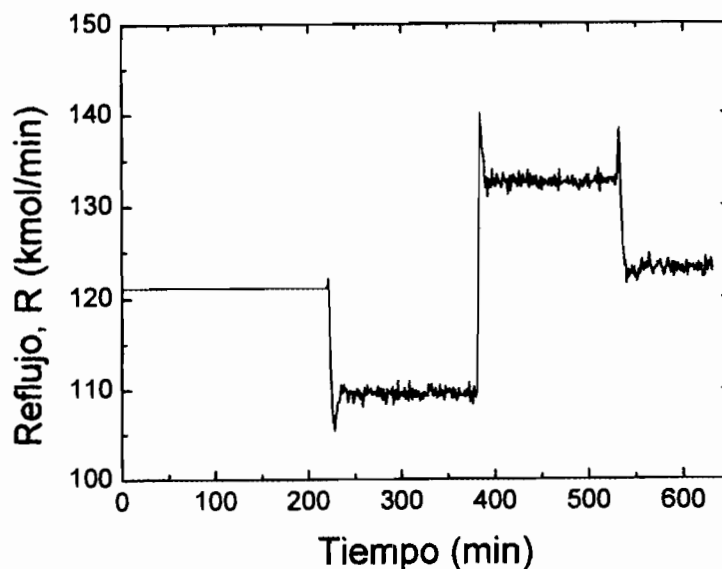


Figura 3.7

Antes de activar la ley de control, se permitió que la columna de destilación alcanzara el estado de equilibrio correspondiente al caso de reflujo total ($L = V$). En $t = 0$, se activó la ley de control $u(t)$ para regular la composición en el domo $x_D(t)$ de acuerdo con el siguiente conjunto de perturbaciones en escalón: (i) en $t = 220$ min, se aumentó la composición de alimentación x_f en un 20% con respecto a su valor nominal; (ii) en $t = 380$ min, se disminuyó la composición de alimentación x_f en un 20% con respecto a su valor nominal y (iii) en $t = 530$ min, la composición de alimentación x_f toma su valor nominal y se cambió el valor de referencia de la composición en el domo x_D^{ref} a $x_D^{ref} = 0.98$.

En la figura 3.3 se presenta el comportamiento dinámico de $x_D(t)$. Observe que $x_D(t)$ se mantiene alrededor del valor de referencia a pesar de las perturbaciones y las incertidumbres en el modelo. En la figura 3.4 se presenta la evolución de la entrada de control correspondiente a la secuencia de perturbaciones descritas anteriormente. Con el fin de comparar el desempeño del controlador propuesto, en las figuras 3.3 y 3.4 se muestran también las simulaciones numéricas de un controlador **PI** sintonizado con técnicas de modelo interno (Chien and Fruehauf, 1990) basado en un modelo lineal de la columna de destilación $Y(s)/U(s) = K_p/(s^2 + a_1s + a_2)$, donde K_p , a_1 y a_2 fueron identificados alrededor del punto nominal de operación. Al contrario del controlador **PI** sintonizado con técnicas **IMC**, el controlador (3.21) no induce sobredisparos ni

en la salida (x_D) ni en la entrada de control (L) ante cambios en escalón el valor de referencia. Este comportamiento dinámico se debe a que la estructura del controlador (3.21) permite la cancelación casi exacta de las perturbaciones y las no linealidades mediante el estimador de incertidumbres. Observe además que la respuesta del controlador **PI** es más lenta que la respuesta del controlador propuesto. En la figura 3.5 se presentan los valores de la incertidumbre real η y de la estimada $\bar{\eta}$. Tal y como se esperaba del análisis de estabilidad, la dinámica de $\bar{\eta}$ converge asintóticamente a la dinámica de la incertidumbre real η .

Consideremos ahora el efecto que tiene el ruido en las mediciones sobre el desempeño del controlador (3.21). Suponga que la salida medida y_m es $y_m + v$, donde v es una señal aleatoria Gaussiana con una amplitud del 2%. En la figura 3.6 se presenta el comportamiento transitorio de la composición del destilado $y = x_D$ cuando la columna de destilación es sometida al conjunto de perturbaciones en escalón antes descritas. Observe que el desempeño del controlador es aceptable a pesar del ruido en las mediciones. En la figura 3.7 se presenta la señal de control que se usó para regular la salida presentada en la figura 3.6.

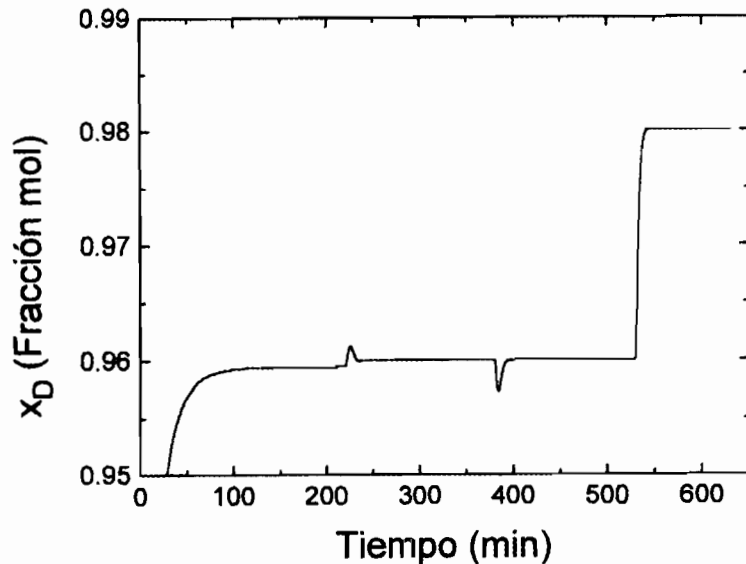


Figura 3.8

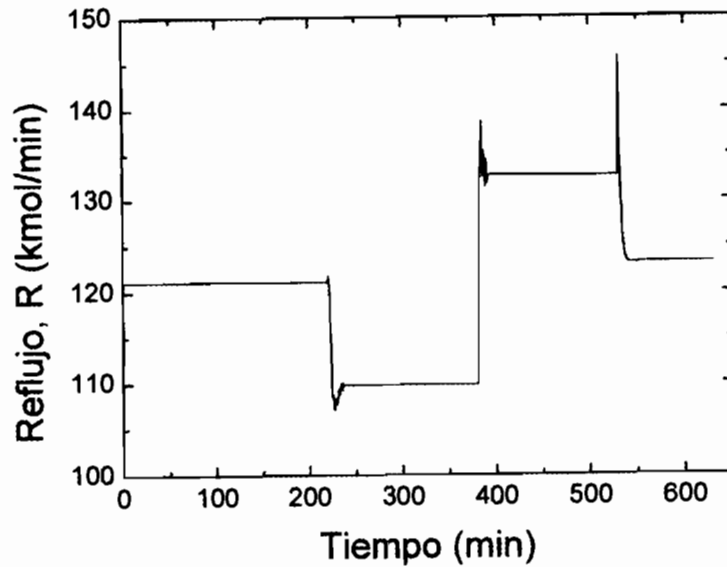


Figura 3.9

Finalmente, consideremos el caso de que exista un tiempo de retardo D en la acción de control. En la figura 3.8 se muestra la respuesta dinámica de la salida de control cuando el tiempo de retardo es igual a $D = 0.5$ min. El controlador (3.21) presenta un buen desempeño a pesar de que existe un tiempo de retardo moderado en la entrada de control. Sin embargo, para valores más grandes del retardo, el sistema a lazo cerrado presenta inestabilidades inducidas por una entrada de control retardada. En la figura 3.9 se presenta la acción de control $L(t)$ usada para regular la salida de control $x_D(t)$ mostrada en la figura 3.8.

3.6 Comparación entre los controladores de grado uno y dos

A través de las simulaciones anteriores se mostró que es posible controlar en un punto (control de la composición de la fase líquida en el domo) una columna de destilación considerándola como un sistema de grado relativo uno y dos ($\rho = 1, 2$). Para diseñar el esquema de control para el sistema de grado relativo uno, es necesario conocer una cota límite de la "ganancia de alta frecuencia" $\frac{E'(x_1)}{\mathcal{H}_1}(x_D - x_1) \leq \sigma$. Este resultado concuerda con resultados anteriores (Skogestad and Morari, 1988a), los cuales afirman que si se cuenta con un modelo lineal de la planta que describa correctamente el comportamiento de alta frecuencia del sistema, es

posible diseñar un esquema de control cuyo desempeño es aceptable para cualquier punto de operación. En este caso, al tomar a σ como estimado de $\frac{E'(x_1)}{\mathcal{H}_1} (x_D - x_1)$, se está sobreestimando la respuesta de alta frecuencia de la planta. En otras palabras, el controlador espera que la entrada L produzca grandes cambios en la salida x_D . De esta forma, el controlador (3.18) regula la concentración en el domo x_D sin grandes esfuerzos de control. Por otro lado, para diseñar el esquema de control para el sistema de grado relativo $\rho = 2$, es necesario hacer el ajuste de los parámetros de la función de transferencia de un sistema de segundo orden

$$Y(s)/U(s) = K_p/(s^2 + a_1s + a_2)$$

Como se esperaba, ante la entrada de una perturbación, ambos esquemas de control regresan más rápido al estado estacionario que un controlador **PI**. La ventaja que tiene el esquema de control de primer orden sobre el de segundo, es que se requiere de menor información para poder implantarlo. Sin embargo, el desempeño del controlador de segundo orden es mejor que el de primero. Por ejemplo, de la figura 3.2 es posible observar que ante un cambio en el valor de la referencia, existe un sobredisparo en la entrada de control. De hecho, este sobredisparo no es observado en el controlador **PI**. En la figura 3.4 se puede observar que los sobredisparos para el controlador propuesto siempre son menores que los de un controlador **PI**.

En resumen, si no se cuenta con mucha información acerca del proceso, basta con implantar un esquema de control basado en un modelo de grado relativo uno. Sin embargo, cuando se desean satisfacer requerimientos de control más estrictos, será necesario implantar un esquema de control basado en un modelo de grado relativo dos.

3.7 Conclusiones

En este capítulo se presentó un esquema para el control robusto de la concentración en el domo (control en un punto) en una columna de destilación binaria. El esquema de control resultante está compuesto por una retroalimentación linealizante entrada-salida y por un controlador adaptable. Cuando no existe ruido en las mediciones, el esquema de control permite realizar el seguimiento de trayectorias de referencia para la salida de control (x_D) y, simultáneamente, proporciona un estimado de las incertidumbres asociadas con los errores de modelado. A través

de simulaciones numéricas se mostró que el desempeño global del controlador a lazo cerrado es satisfactorio y que el estimado de la incertidumbre converge asintóticamente al valor real.

Antes de presentar la extensión de la técnica desarrollada en este capítulo al control en dos puntos de columnas de destilación (control de las composiciones en el domo y en el rehervidor), en el siguiente capítulo se discuten algunas de las características más importantes de los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas.

Capítulo 4

Consideraciones para el diseño de un controlador multivariable

*El objetivo de este capítulo es presentar y discutir las características más importantes de un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (**MIMO** por sus siglas en inglés) y en particular las características de modelos **MIMO** lineales para columnas de destilación binaria. La mayor parte del material de este capítulo es un resumen de la información que se encuentra en la literatura con respecto al modelado de columnas de destilación; sin embargo, como una contribución de esta tesis al estado del arte, se demuestra que tomando adecuadamente un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario, es posible diseñar esquemas de control **PI** y **PID** que serán robustamente estables a lazo cerrado. Este resultado será aprovechado en los capítulos 5 y 6 de esta tesis para diseñar esquemas de control, cuya realización a lazo cerrado es similar a controladores **PI** y **PID** desacoplados.*

4.1 Introducción

El control de la composición en dos puntos (control dual) para una columna de destilación de alta pureza es considerado como uno de los problemas que presentan mayor dificultad en el control de procesos. El uso de un buen esquema de control además de lograr satisfacer los requerimientos de calidad sobre los productos, puede minimizar los requerimientos de energía para la operación de la columna. A pesar de que existe una gran cantidad de estudios sobre el control en dos puntos de la composición en una columna de destilación (Strömborg *et al.*, 1995; Häggblom, *et al.*, 1996; por ejemplo), esto no es una tarea sencilla (Lévine and Rouchon, 1991; Lundstrom *et al.*, 1995). Las razones principales por las cuales el control dual es un problema difícil están relacionadas con las propiedades del proceso: comportamiento dinámico altamente no lineal e interacción entre los lazos de control. En general, conforme se incrementa la pureza de los productos, el comportamiento no lineal de la columna se vuelve más severo (Mountziaris and Georgiou, 1988). Este hecho impone fuertes limitaciones en el desempeño a lazo cerrado que se puede alcanzar cuando se usan esquemas de control **PI** convencionales (Skogestad and Morari, 1988a).

En el capítulo anterior se mostró que la dinámica de la composición en el domo de una columna de destilación binaria se puede describir usando un modelo no lineal de grado relativo uno o dos. Es fácil mostrar que la dinámica de la composición en el fondo de la columna puede ser expresada usando un modelo no lineal de grado relativo uno. Por otro lado, suponiendo que el equilibrio entre las fases líquido y vapor se puede describir usando un modelo de volatilidad relativa constante y que el retenido molar en cada plato (\mathcal{H}_i) es constante, el balance de materia linealizado usando variables de desviación para cada plato está dado como

$$\mathcal{H}_i \frac{d}{dt} (\Delta x_i) = L_{i+1} \Delta x_{i+1} - (L_i - K_i V_i) \Delta x_i + K_{i-1} V_{i-1} \Delta x_{i-1} + (x_{i+1} - x_i) \Delta L - (y_i - y_{i-1}) \Delta V$$

donde K_i es la función de equilibrio líquido-vapor linealizada y x_i , y_i , L_i , V_i son, respectivamente, los valores en estado estacionario en el punto nominal de operación de la composición en la fase líquida y vapor y los flujos molares de líquido y vapor en el plato i . El sistema anterior

se puede escribir en la forma de variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$ son las composiciones en cada plato, $\mathbf{u} = (\Delta L, \Delta V)^T$ son las variables manipuladas y $\mathbf{y} = (\Delta x_D, \Delta x_B)^T$ son las variables controladas. La matriz $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ es tridiagonal:

$$\begin{aligned}a_{i,i+1} &= L_{i+1}/\mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\ a_{i,i} &= -(L_i + K_i V_i) / \mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\ a_{i,i-1} &= K_{i-1} V_{i-1} / \mathcal{H}_i & i \neq 1\end{aligned}$$

La matriz de entradas $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ está dada como

$$\begin{aligned}b_{i,1} &= (x_{i+1} - x_i) / \mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\ b_{N+1,1} &= 0 & i \neq N+1 \\ b_{i,2} &= -(y_i - y_{i-1}) / \mathcal{H}_i & i \neq N+1, i \neq 1 \\ b_{N+1,2} &= 0 & i \neq N+1, i \neq 1 \\ b_{1,2} &= (y_1 - x_1) / \mathcal{H}_1\end{aligned}$$

La matriz de salidas \mathbf{C} es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que para un punto de operación fijo, las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son constantes. El modelo anterior se puede escribir en el dominio de Laplace como

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

Dado que en diversas investigaciones experimentales (Musch and Steiner, 1995; Christen et al., 1997) se ha mostrado que el comportamiento dinámico de una columna de destilación binaria alrededor de un punto de operación fijo puede ser descrito adecuadamente usando modelo lineales, en el resto de esta tesis se realizará el análisis y diseño de esquemas de control multivariable para columnas de destilación usando modelos de referencia lineales.

Considerando que $\mathbf{G}(s)$ depende de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , las cuales a su vez dependen del punto nominal de operación, un controlador que sea estable en un cierto punto de operación fijo, no necesariamente será estable en otro punto de operación, dado que existe una diferencia entre la planta y el modelo identificado. En los esquemas de control para sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (**MIMO** por sus siglas en ingles), las diferencias entre el modelo de referencia y la planta tienen una gran importancia sobre la estabilidad y el desempeño del sistema a lazo cerrado. Recientemente se ha propuesto que una forma de incrementar la robustez de los esquemas de control basados en modelo, es incluir explícitamente la descripción de las incertidumbres en el diseño del controlador (Koung and MacGregor, 1993). Sin embargo, la imposibilidad de obtener una caracterización exacta de las incertidumbres conduce a la obtención de esquemas demasiado conservadores.

El problema de estabilización robusta consiste en diseñar una ley de control que asegure que el sistema en lazo cerrado será estable en cualquier punto de operación que pueda alcanzar la columna de destilación. Entre las causas más importantes que originan las diferencias entre el modelo y la planta se pueden mencionar las siguientes: relaciones no lineales entre las entradas y las salidas del proceso, incertidumbres en las entradas de control, una mala identificación de los parámetros del modelo, parámetros variantes con el tiempo, uso de modelos de orden reducido, etc. Una buena parte de estas fuentes de diferencias en el modelo son de naturaleza estocástica, por lo que su caracterización sólo se puede llevar a cabo suponiendo que son incertidumbres no estructuradas y de norma acotada; esto es, la matriz de transferencia se expresa como

$$\mathbf{G}(s) = \tilde{\mathbf{G}}(s) + \Delta\mathbf{G}_A(s)$$

$$\mathbf{G}(s) = \tilde{\mathbf{G}}(s) (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}_I(s))$$

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}_O(s)) \tilde{\mathbf{G}}(s)$$

donde $\Delta G_A(s)$, $\Delta G_A(s)$ y $\Delta G_A(s)$ son, respectivamente, incertidumbres aditiva, multiplicativa de entradas y multiplicativa de salidas. Este enfoque ha conducido al desarrollo de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales multivariados (Morari and Zafriou, 1989). Para sistemas mal condicionados como las columnas de destilación por ejemplo, el considerar que todas las incertidumbres son de naturaleza no estructurada lleva a la conclusión de que virtualmente no se deben utilizar controladores por inversión de modelo, dado que la magnitud del error que puede desestabilizar al proceso es extremadamente pequeña (Skogestad and Morari, 1988b). Por ejemplo, suponiendo que los elementos de la matriz de transferencia son independientes, Skogestad et al. (1988) reportaron que un error relativo mayor al 0.7% puede volver singular la matriz de transferencia. A pesar de esto, en la práctica se ha encontrado que este tipo de controladores son bastante robustos.

Por otro lado, la relación no lineal entre las entradas y las salidas del proceso es de naturaleza determinística, la cual depende casi exclusivamente de factores físico-químicos característicos del proceso. Por lo tanto, este tipo de diferencias se deben estudiar como incertidumbres altamente estructuradas (Koung and MacGregor, 1991; Skogestad et al., 1988). En este enfoque se asume que las incertidumbres en el modelado son de tipo estructurado y se parte del hecho que el comportamiento en estado estacionario de la mayor parte de los sistemas **MIMO** se puede modelar, usando variables de desviación, de la siguiente forma

$$y_i = f_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Haciendo un desarrollo en series de Taylor del modelo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} u_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial (\partial f_i / \partial u_k)}{\partial u_j} u_k \right) u_j + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_{ij} u_j) + \sum_{j=1}^n (\Delta_{ij}(u_1, \dots, u_2) u_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_{ij} + \Delta_{ij}) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\partial f_i / \partial u_k)}{\partial u_j} u_k + \mathcal{O}(h^2)$$

El sistema anterior se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + \Delta g_{11} & \dots & g_{1n} + \Delta g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} + \Delta g_{n1} & \dots & g_{nn} + \Delta g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [\tilde{G} + \Delta G] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Observe que aunque la descripción de las incertidumbres usando un enfoque estructurado y no estructurado son similares, la forma de determinar las condiciones que garantizan la estabilidad de un esquema de control basado en un modelo de referencia no es la misma para ambos enfoques.

En general, las propiedades de estabilidad y robustez de un esquema de control lineal están determinadas tanto por el modelo identificado como por el esquema de diseño del controlador. La única excepción es cuando las propiedades de robustez dependen exclusivamente las condiciones en estado estacionario del sistema a lazo cerrado, puesto que las condiciones en estado estacionario son las mismas para todos los esquemas de control que posean acción integral (Garcia and Morari, 1982). Como una consecuencia de esto, Garcia and Morari (1985) mostraron que cualquier planta lineal con un esquema de control con acción integral es controlable si y solo si

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(G(0)W^{-1}(0))) > 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

donde $G(0)$ y $W(0)$ son las matrices de ganancias en estado estacionario del sistema y del modelo identificado respectivamente. λ_i es el i -ésimo valor propio de la matriz $(G(0)W^{-1}(0))$. A la condición (4.1) se le conoce como *controlabilidad integral* (Morari and Zafiriou, 1989) o *estabilizabilidad*.

La interpretación física de la condición de *controlabilidad integral* es muy sencilla para sistemas **SISO**, puesto que corresponde al caso en el cual la planta y el modelo identificado tienen el mismo signo en la ganancia en estado estacionario. De tal forma que si no se cumple esta condición, el sistema en lazo cerrado será inestable. Tomado en cuenta este resultado, es

fácil darse cuenta que si la condición de controlabilidad integral no es satisfecha, ningún esquema de control basado en modelo funcionará, independientemente del diseño y del sintonizado del controlador.

El objetivo de este capítulo es determinar las condiciones para las cuales un esquema de control para una columna de destilación con función de transferencia $G(s)$ basado en un modelo $W(s)$, será estable en lazo cerrado, esto es, bajo que condiciones se satisface la condición de *controlabilidad integral*. En la literatura existen básicamente dos tipos de modelos lineales que representan el comportamiento dinámico de una columna de destilación binaria: modelos con uno y dos tiempos característicos. En la primera parte de este capítulo se describen y analizan las características de ambos modelos. Se muestra que para evaluar la condición de *controlabilidad integral* es suficiente con emplear un modelo con un tiempo característico.

En la segunda parte de este capítulo se demuestra que un esquema de control **PI** desacoplado será robustamente estable. Un esquema de control **PI** desacoplado es equivalente a diseñar un controlador por inversión de un modelo de referencia con matriz de ganancias en estado estacionario diagonal. Se demuestra también que no es posible establecer condiciones generales que garanticen que un esquema de control **PID** con desacopladores será estable. Un esquema de control **PID** con desacopladores es equivalente a diseñar un controlador por inversión de un modelo de referencia con matriz de ganancias en estado estacionario completa.

4.2 Selección del Modelo de la Planta

A nivel industrial, la mayor parte de los esquemas de control dual para una columna de destilación binaria se diseñan tomando como variables manipuladas al flujo molar de recirculado (L) y al flujo molar de vapor que sube por la columna (V), y como variables a controlar a la fracción mol del componente ligero en el destilado (x_D) y a la fracción mol del componente ligero en el fondo (x_B).

La respuesta dinámica en lazo abierto de cualquiera de las salidas de control ante un cambio en el valor de alguna de las entradas se puede dividir en dos etapas: una respuesta inicial rápida seguida de un asentamiento lento hacia el nuevo estado estacionario. Cuando se utiliza un controlador retroalimentado y entra una perturbación al sistema, la respuesta inicial es muy

similar a la que se presenta a lazo abierto, pero en la segunda etapa, el controlador actúa y lleva la salida de control hacia su valor de referencia. A la parte inicial de la respuesta en tiempo se le conoce como respuesta de alta frecuencia ($\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)$) y al asentamiento lento hacia el nuevo estado estacionario se le conoce como respuesta de baja frecuencia ($\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$). Para fines de control, es necesario contar con un modelo que represente adecuadamente la respuesta de alta frecuencia porque su efecto sobre el desempeño del controlador, es decir, la presencia de sobredisparos se hace más importante conforme se hacen más estrictas las especificaciones del controlador, esto es, cuando el tiempo característico a lazo cerrado se hace más pequeño. Por otro lado, la respuesta de baja frecuencia es importante puesto que la condición de controlabilidad integral (4.2) se debe satisfacer para que un controlador basado en este modelo sea estable.

4.2.1 Modelos lineales con uno y dos tiempos característicos

Para diseñar un esquema de control retroalimentado se requiere de un modelo global que describa el efecto que tienen las variables manipuladas sobre las variables a controlar. Usualmente no es necesario contar con un modelo exacto de la planta, sino con un modelo que incluya las características más importantes para el controlador (respuestas inversa, efectos multivariados y sensibilidad a incertidumbres en el modelo). Comúnmente, la respuesta dinámica a lazo abierto de columnas de destilación se representa usando modelos de bajo orden, conteniendo uno o dos tiempos característicos. Un modelo con un solo tiempo característico correspondería con un sistema de primer orden para procesos **SISO**, ya visto en el capítulo 3 de esta tesis, mientras que un modelo con dos tiempos característicos correspondería con un sistema de segundo orden para procesos **SISO**.

A través de evidencias experimentales se ha encontrado que la respuesta dinámica de la mayor parte de las columnas de destilación está dominada por una constante de tiempo muy grande, τ , la cual es casi constante, independientemente del punto donde se midan las composiciones y de las perturbaciones que entran al sistema. Este resultado se explica considerando que alrededor de un punto de operación fijo, la columna de destilación se asemeja a un enorme tanque de mezclado con un tiempo característico igual a τ (Skogestad and Morari, 1988a). A pesar de que este modelo es una aproximación muy elemental, su aplicabilidad ha sido de-

mostrada a través de resultados experimentales (Musch and Steiner, 1995; por ejemplo) y en investigaciones teóricas (Skogestad and Morari, 1987).

Usando variables de desviación, el modelo de la columna de destilación con un tiempo característico (**OTC**) está dado como:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{1+\tau_1 s} & \frac{k_{12}}{1+\tau_2 s} \\ \frac{k_{21}}{1+\tau_1 s} & \frac{k_{22}}{1+\tau_2 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde k_{ij} , $i, j = 1, 2$ son las ganancias en estado estacionario. Con respecto a este modelo se puede mencionar que debido a su sencillez y a que la identificación de los parámetros del modelo se puede realizar con relativa "exactitud", es el que más frecuentemente se usa para diseñar esquemas de control (Jacobsen y Skogestad, 1994). Sin embargo, es un hecho bien conocido que los valores de las ganancias en estado estacionario que aparecen en (4.2) cambian drásticamente aún para desviaciones moderadas en el punto de operación (Skogestad and Morari, 1988b). Además, el transitorio rápido debido a cambios en los flujos internos (L, V) no es representado correctamente.

Tomando esto en cuenta, algunos investigadores han propuesto modelos lineales con dos tiempos característicos (**TTC**), los cuales retienen las diferencias fundamentales entre los tiempos de respuesta para cambios en los flujos internos y externos. Skogestad and Morari (1988a) propusieron el siguiente modelo:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{k_{11}}{1+\tau_1 s} \right) & \left(\frac{k_{11}+k_{12}}{1+\tau_2 s} - \frac{k_{11}}{1+\tau_1 s} \right) \\ \left(\frac{k_{21}}{1+\tau_1 s} \right) & \left(\frac{k_{21}+k_{22}}{1+\tau_2 s} - \frac{k_{21}}{1+\tau_1 s} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde τ_1 y τ_2 son las constantes de tiempo. Experimentalmente se ha encontrado que para la mayor parte de las columnas de destilación τ_1 es al menos un orden de magnitud más grande que τ_2 . Sagfors and Waller (1995) probaron que el modelo anterior es adecuado para describir columnas de destilación ideales. Estos autores probaron también que para describir una columna de destilación no ideal se puede usar un modelo con la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}(z_{11}s+1)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} & \frac{k_{12}(z_{12}s+1)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \\ \frac{k_{21}(z_{21}s+1)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} & \frac{k_{22}(z_{22}s+1)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde $z_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2$ son los ceros de la matriz de transferencia dada por (4.4). Con respecto a los modelos (4.3) y (4.4) se puede señalar que en diversas investigaciones se ha mostrado que alrededor de un punto de operación fijo, se pueden diseñar controladores por inversión que tengan alto desempeño a lazo cerrado y muy buenas propiedades de rechazo a perturbaciones (Jacobsen y Skogestad, 1994; Skogestad y Morari, 1988c).

Para evaluar la condición de controlabilidad integral, es necesario elegir uno de los modelos presentados anteriormente (4.2) y (4.4). Para tomar la decisión se analizarán el comportamiento de ambos modelos en condiciones de alta y baja frecuencia.

4.2.2 Comportamiento dinámico de alta y baja frecuencia

Desde un punto de vista de control, un sistema como las columnas de destilación se dice que es altamente acoplado. Este término significa que un cambio en cualquiera de las entradas de control (L o V), afectara ambas salidas (x_D, x_B). Más aún, algunos sistemas **MIMO** tienen la propiedad de ser muy sensibles a ciertas combinaciones de las entradas. En las columnas de destilación de alta pureza, las composiciones en el domo y en el fondo (x_D, x_B) son más sensibles a cambios en los flujos internos que a cambios en los flujos externos. A un sistema que presenta esta propiedad se le conoce como *mal condicionado* o con alto grado de *direccionalidad*. Para sistemas **MIMO**, obtener un modelo que capture la direccionalidad y el mal condicionamiento de la planta no es una tarea sencilla. Se dice que un sistema es mal condicionado cuando la matriz de transferencia del modelo (evaluada en una cierta frecuencia) tiene un número de condición muy grande. El número de condición se define como el cociente del valor singular más grande (σ_{\max}) entre el valor singular más pequeño (σ_{\min}).

En teoría de control se acepta que en la mayoría de los casos, una planta que tenga números de condición muy grandes será difícil de controlar. De (4.2) es claro que el número de condición para este modelo es el mismo para cualquier frecuencia. En la figura 4.1 se muestran los valores singulares más grandes y más pequeños como función de la frecuencia para una columna de destilación de alta pureza típica modelada con uno y dos tiempos característicos (Sagfors and Waller, 1995). En esta figura se puede observar que ambos modelos tienen el mismo σ_{\max} para todas las frecuencias. Por lo que respecta a σ_{\min} , en condiciones de baja frecuencia ambos modelos tienen el mismo valor, sin embargo, conforme aumenta la frecuencia, el σ_{\min} del modelo

con dos tiempos característicos es un orden de magnitud mayor que el σ_{\min} del modelo con un tiempo característico. Esto implica que en condiciones de alta frecuencia, el número de condición para el modelo con dos tiempos característicos será un orden de magnitud menor que el número de condición del modelo con un tiempo característico.

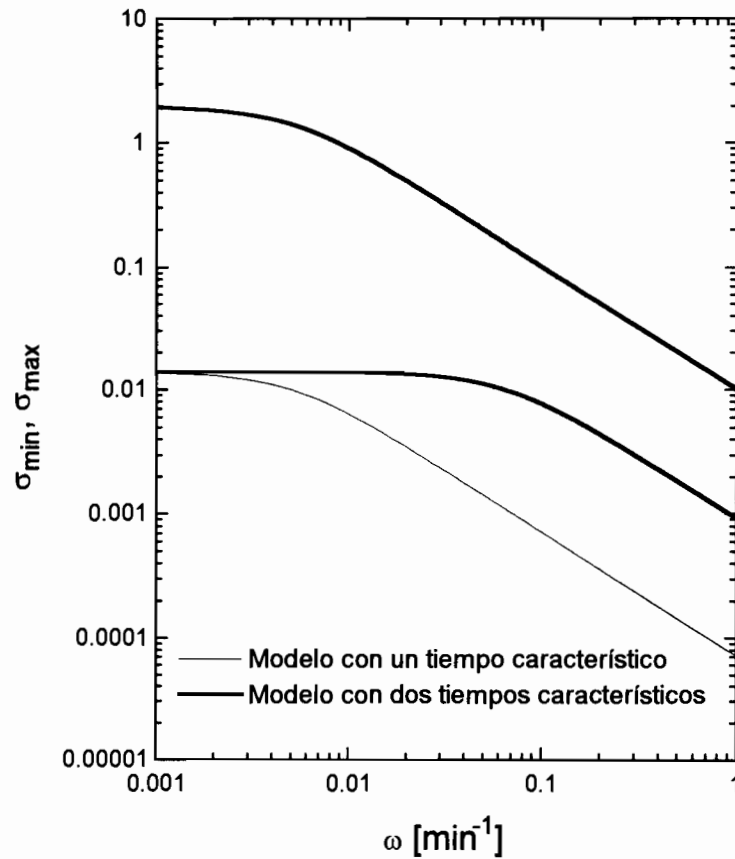


Figura 4.1

Por otro lado, para algunos autores el hecho de que un sistema **MIMO** tenga un número de condición grande no implica que el sistema sea difícil de controlar (Waller y Waller, 1995). Un ejemplo sencillo que confirma esta aseveración es una planta con la siguiente matriz de

transferencia:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{10s + 1} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El número de condición de esta matriz de transferencia es constante e igual a $\gamma(G) = 100$. A pesar de que el número de condición es muy grande, diseñar un controlador para este sistema no representa ninguna dificultad puesto que el sistema es desacoplado. Esto ha ocasionado que se estudien otras formas de medir el grado de direccionalidad de un sistema **MIMO**.

Algunos autores han mostrado el *arreglo de ganancias relativas* (**RGA** por sus siglas en inglés) es una variable que aporta más información sobre la direccionalidad y el mal condicionamiento de un sistema. Al igual que en el caso del número de condición, es un resultado bien conocido que una planta con valores grandes del **RGA** será difícil de controlar, dado que el controlador será extremadamente sensible a incertidumbres en las entradas. De hecho, la planta será más difícil de controlar si alrededor de la frecuencia de cruce (la frecuencia correspondiente con el tiempo característico a lazo cerrado), los elementos del **RGA** son muy grandes. Por tanto, el análisis de los elementos del **RGA** para altas y bajas frecuencias será importante para evaluar posibles problemas de control.

4.2.3 Comparación del RGA para modelos con uno y dos tiempos característicos

Para una planta **MIMO** con dos entradas y dos salidas, el **RGA** para un sistema con una matriz de transferencia $G(j\omega) = [g_{i,j}(j\omega)]$, $i, j = 1, 2$ está definido como:

$$\mathbf{RGA}(j\omega) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(j\omega) & \lambda_{12}(j\omega) \\ \lambda_{21}(j\omega) & \lambda_{22}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(j\omega) & 1 - \lambda_{11}(j\omega) \\ 1 - \lambda_{11}(j\omega) & \lambda_{11}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde

$$\lambda_{11}(j\omega) = \frac{1}{1 - \kappa(j\omega)} \quad \text{y} \quad \kappa(j\omega) = \frac{g_{12}(j\omega)g_{21}(j\omega)}{g_{11}(j\omega)g_{22}(j\omega)}$$

Es claro que para el modelo con un tiempo característico (4.2), el **RGA** es independiente de la frecuencia:

$$\lambda_{11}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}}} \quad (4.6)$$

Esto es, si la columna de destilación a controlar se puede modelar correctamente usando (4.2), la planta tendrá el mismo grado de direccionalidad en condiciones de alta y baja frecuencia. Por otro lado, el primer elemento del **RGA** para una columna de destilación cuyo comportamiento dinámico corresponde a un modelo con dos tiempos característicos es:

$$\lambda_{11}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{k_{12}(z_{12}j\omega+1)k_{21}(z_{21}j\omega+1)}{k_{11}(z_{11}j\omega+1)k_{22}(z_{22}j\omega+1)}} \quad (4.7)$$

De la ecuación (4.7) se puede concluir que para condiciones de baja frecuencia ($\omega \rightarrow 0$), el primer elemento del **RGA** es el mismo para modelos con uno y dos tiempos característicos:

$$\lambda_{11}(0) = \frac{1}{1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}}}$$

Este resultado nuevamente confirma que a baja frecuencia, la planta tendrá el mismo grado de direccionalidad independientemente del modelo que la represente (al igual que el caso del número de condición). En condiciones de alta frecuencia ($\omega \rightarrow \infty$), el primer elemento del **RGA** para el modelo con dos tiempos característicos es:

$$\lambda_{11}(\infty) = \frac{1}{1 - \frac{k_{12}k_{21} z_{12}z_{21}}{k_{11}k_{22} z_{11}z_{22}}} \quad (4.8)$$

En diversas investigaciones (Skogestad y Morari, 1988a; por ejemplo) se ha encontrado que $\lambda_{11}(\infty) < \lambda_{11}(0)$. Una condición suficiente para que se verifique la condición anterior es que el determinante de la matriz

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

sea positivo. A pesar de que el modelo con dos tiempos característicos reproduce con más precisión el comportamiento dinámico de la planta, la identificación de la constante de tiempo más pequeña no es una tarea sencilla (Sagfors and Waller, 1995). Una alternativa para la identificación es usar control retroalimentado con "reelevadores" (Koung and MacGregor, 1993).

4.3 Selección del Esquema de Control

El objetivo de implementar un esquema de control retroalimentado es mantener las salidas de control (x_D, x_B) lo más cerca que sea posible del valor de referencia. La distancia entre el valor real de las salidas y el valor de referencia define los requerimientos de desempeño del controlador. Estos requerimientos de desempeño deben ser satisfechos a pesar de que exista ruido en las mediciones, incertidumbres en el modelo, etc. La forma de obtener un esquema de control multivariable que satisfaga requerimientos de desempeño más estrictos es a través de un controlador que invierta el comportamiento dinámico de la planta. Sin embargo, la estabilidad a lazo cerrado de un esquema de control basado en modelo depende no solo de las diferencias entre la planta y el modelo identificado, sino también de la estructura del controlador y de su sintonizado.

Una forma de obtener información general sobre la estabilidad de un controlador basado en modelo es mediante la evaluación de la condición de *controlabilidad integral* (4.1), la cual se evalúa a baja frecuencia y es independiente del diseño del controlador. En la sección anterior se mostró que los modelos con uno y dos tiempos característicos tienen el mismo comportamiento dinámico a baja frecuencia, es decir, cerca del estado estacionario. Esto implica que las condiciones que garantizan que en lazo cerrado el sistema será asintóticamente estable serán las mismas para un controlador con acción integral basado en un modelo con uno o con dos tiempos característicos. Dado que el análisis es más sencillo empleando el modelo con un tiempo característico, en lo que resta de esta sección se utilizará únicamente el modelo con un tiempo característico.

4.3.1 Propiedades de la matriz de ganancias en estado estacionario

Para realizar el análisis del comportamiento en lazo cerrado para diferentes esquemas de control, enunciaremos algunas características de la columna de destilación. Supongamos que la matriz de transferencia de la columna en estado estacionario se puede representar de la siguiente forma:

$$G(0) = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde $k_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$. A través de diversas investigaciones experimentales y teóricas (Skogestad and Morari, 1988b; Musch and Steiner, 1995) se ha encontrado que para la mayor parte de las columnas de destilación, la matriz (4.9) presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1. $\det(G(0)) < 0$

Propiedad 2. $G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} t_{11} & -t_{12} \\ t_{21} & -t_{22} \end{bmatrix}$ donde $t_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$.

Propiedad 3. $\det(G^{-1}(0)) < 0$

Las Propiedades 1 y 3 están relacionadas íntimamente. Por ejemplo, si el signo de los determinantes de $G(0)$ y $G^{-1}(0)$ son diferentes para algún punto de operación se podría presentar el caso en el que $\det(G(0)) = 0$. Usando un enfoque no estructurado para estudiar el efecto de las incertidumbres en la matriz de transferencia, Skogestad et al. (1988) mostraron que con un error relativo mayor al 0.7% sobre los elementos de la matriz de transferencia, ésta se volvería singular. Sin embargo, se ha encontrado que en la práctica este problema no se presenta. La propiedad dos está relacionada con el efecto que tienen las variables manipuladas sobre la distribución de composiciones en la columna de destilación.

Supongamos que $W(0)$ es un estimado de la matriz de transferencia de la columna de destilación en estado estacionario. La descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés) de $W(0)$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$W(0) = \sigma_{\max} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}(W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde σ_{\max} es el máximo valor singular de $W(0)$, $\gamma(W)$ es el número de condición de $W(0)$, $\theta, \phi \in (0, 90^\circ)$. Definamos ahora el parámetro v como:

$$v(\theta, \phi) = \frac{\tan \theta}{\tan \phi} \quad (4.11)$$

El siguiente Teorema define las condiciones para que W posea las mismas propiedades que G .

Teorema 1 *Sea $W(0)$ una matriz de transferencia en estado estacionario cuya descomposición en valores singulares esta dada por (4.10). Las condiciones suficientes para que la matriz $W(0)$*

tenga las propiedades 1 y 2 son:

$$\begin{aligned} \text{Si } v(\theta, \phi) \neq 1 \text{ entonces } \gamma^{-1} < v < \gamma; \\ \text{Si } v(\theta, \phi) = 1 \text{ entonces } \gamma^{-1} < 1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

La prueba del Teorema anterior no es complicada, pero si laboriosa. La prueba se realiza analizando las combinaciones que se obtienen para los diferentes valores que pueden tomar θ y ϕ . En la figura 4.2 se muestran los valores posibles de θ y ϕ para diferentes valores de γ^{-1} . Los valores de θ y ϕ están definidos por el área sombreada. Como se puede observar, conforme el número de condición se hace más grande, el número de combinaciones (θ, ϕ, γ) que satisfacen la condición (4.12) también crece.

4.3.2 Esquemas de control

Antes de analizar el comportamiento a lazo cerrado del controlador, es necesario definir los posibles esquemas de control. Debido a su simplicidad, robustez y facilidad de implantación, los esquemas de control **PID** siguen siendo los controladores más utilizados en la industria. Para garantizar el buen desempeño del sistema a lazo cerrado, los parámetros del controlador, dos para esquemas **PI** y tres para **PID**, deben ser sintonizados tomando en cuenta la dinámica del sistema en lazo abierto. Tradicionalmente se han utilizado esquemas **PID** desacoplados para el control de sistemas **MIMO**, sin embargo, para sistemas mal condicionados, como las columnas de destilación por ejemplo, la direccionalidad de las ganancias disminuye notablemente el desempeño del controlador (Skogestad y Morari, 1988). Con el fin de superar este tipo de inconvenientes, diversos autores han reportado metodologías para el sintonizado de controladores **PID** multivariable (Ho et al., 1997; Hwang and Hsu, 1997).

El objetivo de esta sección es determinar las condiciones para las cuales la columna de destilación en estado estacionario será estable con un controlador **PI** diagonal y con un controlador compuesto por un desacoplador en estado estacionario con dos controladores **PI**. Este último esquema es equivalente a usar la inversa del modelo con un solo tiempo característico.

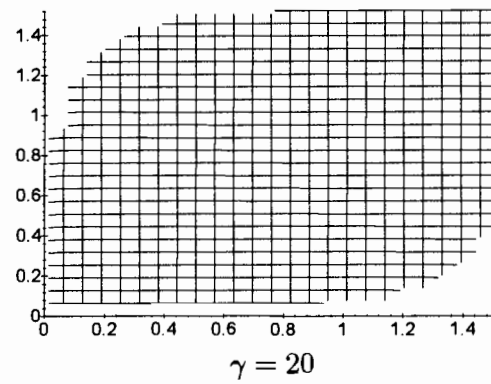
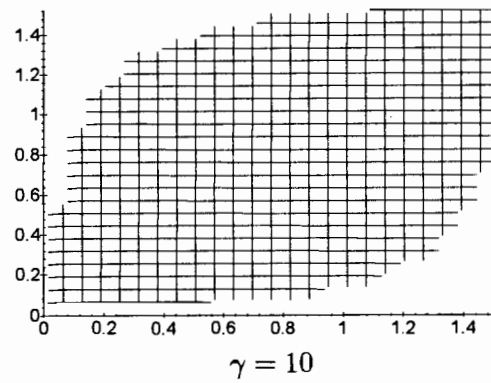
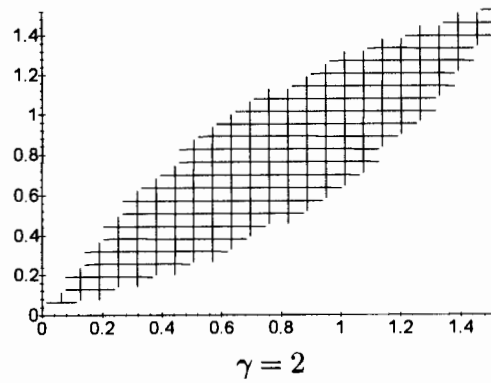


Figura 4.2

4.3.3 Controlador PI diagonal

La estructura de control **PI** diagonal es probablemente la más empleada para controlar las composiciones en el domo y en fondo en columnas de destilación industriales. La función de

transferencia para un controlador **PI** diagonal es:

$$C(s) = \frac{k_1}{s} (\tau_1 s + 1) \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & -w_{22} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde $k_1, w_{11}, w_{22} > 0$. Este esquema de control es equivalente a diseñar un controlador por inversión del siguiente modelo de la columna (Skogestad et al., 1988):

$$W(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \begin{bmatrix} w_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -w_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

En diversas investigaciones teóricas y experimentales (Mush and Steiner, 1995; Skogestad y Morari, 1988b; Waller and Waller, 1995) se ha encontrado que el controlador **PI** diagonal es estable para cualquier rango de frecuencia y es poco sensible a perturbaciones e incertidumbres en el modelo. Este resultado se puede explicar evaluando la condición de *controlabilidad integral* usando (4.14) y (4.9):

$$G(0)W^{-1}(0) = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -w_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{w_{11}} & \frac{k_{12}}{w_{22}} \\ \frac{k_{21}}{w_{11}} & \frac{k_{22}}{w_{22}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Se puede mostrar fácilmente que la matriz $G(0)W^{-1}(0)$ es positiva definida puesto que:

- (a) todos sus elementos son positivos y
- (b) tiene determinante positivo: $\det(G(0)W^{-1}(0)) = \det(G(0)) \det(W^{-1}(0))$. De la propiedad 1 se tiene que $\det(G(0)) < 0$. De (4.14) se sabe que $\det(W^{-1}(0)) < 0$. Por lo tanto, $\det(G(0)W^{-1}(0)) > 0$.

Dado que la matriz $G(0)W^{-1}(0)$ es positiva definida, la condición de *controlabilidad integral* para el controlador **PI** diagonal se satisface trivialmente y

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(GW^{-1})) > 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.16)$$

El resultado anterior es muy importante puesto que asegura que un controlador **PI** diagonal será estable incluso cuando se trabaja en diferentes puntos de operación (Skogestad and Morari,

1988b). Sin embargo, la principal desventaja de este esquema de control es que no toma en cuenta las fuertes interacciones entre los dos lazos de control. Esto trae como consecuencia que el controlador alcance muy lentamente el estado estacionario cuando hay perturbaciones que entran al sistema, lo cual ha sido confirmado de manera experimental (Mush and Steiner, 1995).

En general, la forma de hacer más rápida la respuesta a lazo cerrado de una planta es incluir una acción derivativa en el esquema de control. Los controladores comerciales aproximan la acción derivativa mediante un término "traso/adelanto" (Ogunaike and Ray, 1994), de tal forma la función de transferencia de un controlador **PID** diagonal es

$$C(s) = \frac{k_1}{s} (\tau_1 s + 1) \left(\frac{1 + k_2 s}{1 + \alpha k_2 s} \right) \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & -w_{22} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde $k_2, \alpha > 0$ y α es un número pequeño, usualmente menor que 0.1. A la ley de control anterior se le conoce también como controlador **PID** con filtro. Este esquema de control es equivalente a invertir el siguiente modelo de la columna

$$W(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \left(\frac{1 + \alpha k_2 s}{1 + k_2 s} \right) \begin{bmatrix} w_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -w_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Es fácil darse cuenta que la evaluación de la condición de *controlabilidad integral* para el controlador **PID** diagonal es la misma que para el controlador **PI**, esto es, un esquema de control **PID** diagonal (4.17) será estable en cualquier rango de frecuencias y en cualquier punto de operación. Además, si los valores de α y k_2 se fijan adecuadamente, el regreso al estado estacionario ante la entrada de una perturbación será más rápido para un controlador **PID** diagonal que para un **PI**. Sin embargo, el principal inconveniente de usar un controlador con acción derivativa es que el sintonizado no es una tarea sencilla. Una alternativa para obtener un controlador con buen desempeño a lazo cerrado es usar reglas de sintonizado basadas en la técnica de control de modelo interno (**IMC** por sus siglas en inglés). No obstante, de acuerdo con Chien and Fruehauf (1990), para una planta cuya función de transferencia es (4.2), el valor de k_2 obtenido usando reglas **IMC** es $k_2 = 0$, de tal suerte que se recupera la estructura **PI** y no hay forma de incluir el término derivativo.

Tomando como base que un controlador **PID** diagonal es robustamente estable (es estable para cualquier rango de frecuencias, en cualquier punto de operación y es poco sensible a incertidumbres en las entradas), en el siguiente capítulo de esta tesis se presentarán algunos esquemas de control cuya estructura es similar a la de un **PID** diagonal. Se mostrará que el término derivativo surge de manera natural y que el sintonizado del controlador está en función de parámetros físicos de la columna.

4.3.4 Controlador PI con desacopladores

Con el fin de mejorar la respuesta a lazo cerrado del controlador **PI** diagonal se ha propuesto el uso de desacopladores (Lau et al., 1985; Musch and Steiner, 1995). Este esquema es equivalente a diseñar un controlador por inversión del modelo con un solo tiempo característico (4.2). La función de transferencia para este controlador es:

$$C(s) = \frac{k_1}{s} (\tau_1 s + 1) G^{-1}(0) \quad (4.19)$$

la cual, de acuerdo con la propiedad 2 de $G(0)$, tendrá la siguiente estructura general:

$$C(s) = \frac{k_1}{s} (\tau_1 s + 1) \begin{bmatrix} t_{11} & -t_{12} \\ t_{21} & -t_{22} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

donde $t_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$.

Sobre este esquema de control se han realizado una gran cantidad de investigaciones teóricas y experimentales (Mountziaris and Geourgiou, 1988; Skogestad and Morari, 1988b; Koung and MacGregor, 1991; Koung and MacGregor, 1993; Mush and Steiner, 1995; Li and Lee, 1996). Entre las razones principales por las cuales este esquema ha sido tan estudiado está el supuesto de que la forma de obtener un controlador que satisfaga requerimientos de control más estrictos es diseñar el controlador mediante la inversión del modelo identificado.

En general se ha encontrado que el controlador **PI** con desacopladores muestra un excelente desempeño si no hay incertidumbres en el modelo y se trabaja en el punto de operación donde el sistema fue identificado. Sin embargo, también se ha encontrado que el controlador es muy sensible a incertidumbres en el modelo y en las entradas de control. De hecho, en algunos casos

el sistema puede ser inestable a lazo cerrado. Tomemos el siguiente ejemplo (Li and Lee, 1996):

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0.8747 & -0.8610 \\ 1.0853 & -1.0990 \end{bmatrix}; \quad W(0) = \begin{bmatrix} 0.8591 & -0.8668 \\ 1.1059 & -1.0862 \end{bmatrix}$$

No obstante que la diferencia entre cada uno de los elementos es menor del 2%, los valores propios de la matriz $G(0)W^{-1}(0)$ son:

$$\begin{aligned} \lambda_1(G(0)W^{-1}(0)) &= 1.0015 \\ \lambda_2(G(0)W^{-1}(0)) &= -1.0539 \end{aligned}$$

con lo que se viola la condición de *controlabilidad integral*, de tal forma que cualquier controlador con acción integral que se diseñe usando a W como modelo será inestable a lazo cerrado. Note que $W(0)$ no cumple con ninguna de las propiedades de $G(0)$, esto es, $\det(W(0)), \det(W^{-1}(0)) > 0$ y

$$W^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -42.697 & 34.073 \\ -43.471 & 33.77 \end{bmatrix}$$

El ejemplo anterior muestra de manera muy simple que obtener un modelo que retenga la *direccionalidad* de la planta es un problema difícil de resolver. Durante la última década se han realizado un gran número de investigaciones encaminadas a caracterizar la *direccionalidad* de la función de transferencia de la columna de destilación. Para algunos investigadores (Skogestad and Morari, 1988; Andersen and Kumel, 1992), la direccionalidad en el comportamiento dinámico de la columna de destilación está relacionada con las diferencias entre los flujos internos y externos de la siguiente forma:

- (a) Cambios en los flujos internos (L, V) tales que los flujos externos (D, B) permanezcan constantes dan como resultado un cambio rápido en el perfil de composiciones pero sin modificar la pureza de los productos (x_D, x_B). Se dice que este tipo de cambios actúan en la dirección de baja ganancia.
- (b) Cambios en los flujos externos (D, B) mueven todo el perfil de concentraciones hacia arriba o hacia abajo según sea el caso. La respuesta es muy lenta y pequeños cambios en los

flujos externos pueden modificar enormemente la pureza de los productos (x_D, x_B). Se dice que estos cambios actúan en la dirección de alta ganancia.

Las suposiciones que se hacen al modelar una columna de destilación (flujos molares constantes, despreciar el balance de energía, reflujo y alimentación no subenfriadas, no hay intercambio de calor con el medio ambiente, etc) conducen a una situación idealizada en donde la relación entre los flujos internos y externos está dada como:

$$\begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

sin embargo, en la práctica esta relación no se cumple (Sagfors and Waller, 1995). En general, se puede usar la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{DL} & k_{DV} \\ k_{BL} & k_{BV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donde las ganancias que aparecen en la ecuación anterior son conocidas como *ganancias de flujo*. De manera experimental se ha encontrado que los valores reales de las *ganancias de flujo* son muy distintos de los que aparecen en (4.21).

Por otro lado, una de las formas más aceptadas de caracterizar cuantitativamente la *direccionalidad* de la columna de destilación es a través de la **SVD** de la función de transferencia en estado estacionario:

$$G(0) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (4.23)$$

donde \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$, \mathbf{V}^T son matrices de tamaño 2×2 . \mathbf{U} y \mathbf{V}^T son matrices ortogonales que se pueden expresar mediante funciones trigonométricas:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\max} & 0 \\ 0 & \sigma_{\min} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

en las matrices anteriores, σ_{\max} y σ_{\min} son los valores singulares máximo y mínimo de $G(0)$ respectivamente y $\theta, \phi \in (0, 90^\circ)$. La **SVD** de la función de transferencia (4.23) se puede

reescribir como:

$$G(0) = \frac{\sigma_{\max}}{\gamma} \begin{bmatrix} \gamma \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta & -\gamma \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta \\ \gamma \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta & -\gamma \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

De acuerdo con Sagfors and Waller (1995), es posible obtener un estimado experimental de \mathbf{V}^T empleando los valores de las *ganancias de flujo*:

$$\widehat{\mathbf{V}}^T = \frac{1}{\| \begin{bmatrix} k_{DL} & k_{DV} \end{bmatrix} \|_2} \begin{bmatrix} -k_{DL} & -k_{DV} \\ -k_{DV} & k_{DV} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

En un trabajo previo, Koung and MacGregor (1992) encontraron que para una sistema de componentes específico, una columna de destilación binaria tiene en cualquier punto de operación los mismos valores de \mathbf{V}^T ; esto es, un cambio en el punto de operación modifica exclusivamente los valores singulares ($\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$) y la matriz \mathbf{U} . Tomando como base este resultado es fácil mostrar que si la columna de destilación tiene la siguiente estructura

$$G(0) = \sigma_{1 \max} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1^{-1}(G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

y se toma un modelo de referencia con el mismo valor de $\phi_2 = \phi_1 = \phi$

$$W(0) = \sigma_{2 \max} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1}(G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

la condición de *controlabilidad integral* se satisface para cualquier conjunto $(\theta_1, \gamma_1, \theta_2, \gamma_2)$.

El principal problema con las columnas de destilación es que el valor de ϕ no puede ser identificado con suficiente exactitud. Tomemos el siguiente ejemplo (Koung and MacGregor, 1992):

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0.169 & -0.168 \\ 0.795 & -0.796 \end{bmatrix}; \quad W(0) = \begin{bmatrix} 0.484 & -0.495 \\ 0.473 & -0.503 \end{bmatrix}$$

los valores de (θ, γ, ϕ) para la matriz de transferencia de la columna $G(0)$ y la matriz identificada

$W(0)$ son:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 1.3621 & \gamma_1 &= 1371.9 & \phi_1 &= 0.78587 \\ \theta_2 &= 0.7840 & \gamma_2 &= 102.61 & \phi_2 &= 0.80636\end{aligned}$$

la evaluación de la condición de *controlabilidad integral* es:

$$\begin{aligned}\lambda_1(G(0)W^{-1}(0)) &= -0.14586 + 0.28669i \\ \lambda_2(G(0)W^{-1}(0)) &= -0.14586 - 0.28669i\end{aligned}$$

lo cual implica que ningún controlador con acción integral basado en $W(0)$ será estable a lazo cerrado. Note que la diferencia entre ϕ_1 y ϕ_2 es del 2.6%. Tomemos ahora una matriz de referencia con los mismos ángulos pero con un número de condición diez veces menor, esto es, $\gamma(W(0)) = 10.261$

$$W(0) = \begin{bmatrix} .529 & -.45191 \\ .42787 & -.54622 \end{bmatrix}$$

la condición de *controlabilidad integral* con esta matriz de referencia es:

$$\begin{aligned}\lambda_1(G(0)W^{-1}(0)) &= 0.011885 \\ \lambda_2(G(0)W^{-1}(0)) &= 0.84849\end{aligned}$$

lo que implica que es posible diseñar un controlador con acción integral basado en $W(0)$ que será estable.

El ejemplo anterior muestra que a pesar de que existan incertidumbres en el modelo, es posible obtener una matriz de referencia que permite diseñar un controlador con acción integral que sea estable a lazo cerrado. Sin embargo, para una columna de destilación operando en un punto de operación fijo ($\theta_1, \gamma_1, \phi_1$ constantes), el número de combinaciones de ($\theta_2, \gamma_2, \phi_2$) que generan una matriz de referencia que satisfaga la condición de controlabilidad integral es muy grande. De hecho, Koung and MacGregor (1992) concluyeron que no existe una condición suficiente que asegure que la condición de *controlabilidad integral* se cumplirá cuando existen diferencias significativas entre los ángulos de la matriz de la columna (θ_1, ϕ_1) y los ángulos de

la matriz de referencia (θ_2, ϕ_2) .

Supongamos que seleccionamos una matriz de referencia $W(0)$ que cumpla con las condiciones del Teorema 1. Su inversa estará dada como:

$$W^{-1}(0) = \frac{\gamma_2}{\sigma_{2\max}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \phi_2) & \sin(\frac{\pi}{2} - \phi_2) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \phi_2) & -\cos(\frac{\pi}{2} - \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) & -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_2) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_2) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) \end{bmatrix}$$

la cual se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} W^{-1}(0) &= \frac{1}{\sigma_{2\max}} \begin{bmatrix} r_{11}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) & -r_{12}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) \\ r_{21}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) & -r_{22}(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_{2\max}} \begin{bmatrix} \gamma_2 \sin \phi_2 \sin \theta_2 + \cos \phi_2 \cos \theta_2 & -\gamma_2 \sin \phi_2 \cos \theta_2 + \cos \phi_2 \sin \theta_2 \\ \gamma_2 \cos \phi_2 \sin \theta_2 - \sin \phi_2 \cos \theta_2 & -\gamma_2 \cos \phi_2 \cos \theta_2 - \sin \phi_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

De igual forma, la matriz de transferencia en estado estacionario para la columna de destilación (23) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} G(0) &= \frac{\sigma_{\max}}{\gamma} \begin{bmatrix} g_{11}(\theta, \phi, \gamma) & -g_{12}(\theta, \phi, \gamma) \\ g_{21}(\theta, \phi, \gamma) & -g_{22}(\theta, \phi, \gamma) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sigma_{\max}}{\gamma} \begin{bmatrix} \gamma \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta & -\gamma \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta \\ \gamma \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta & -\gamma \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dado que $\det(G(0)W^{-1}(0)) > 0$, para que se cumpla la condición de *controlabilidad integral* es suficiente que $Tr(G(0)W^{-1}(0)) > 0$:

$$(g_{11}r_{11} - g_{12}r_{21}) + (-g_{21}r_{12} + g_{22}r_{22}) > 0 \quad (4.30)$$

En general, esta condición es muy difícil evaluar (Koung and MacGregor, 1992), por lo que para su análisis será dividida en dos condiciones:

$$(-g_{21}r_{12} + g_{22}r_{22}) > 0 \quad (4.31)$$

$$(g_{11}r_{11} - g_{12}r_{21}) > 0 \quad (4.32)$$

Las condiciones anteriores se pueden expresar como funciones que dependen de $(\theta_1, \gamma_1, \phi_1)$ y $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2)$

$$\Omega_1(\theta, \phi, \gamma) - \Omega_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) > 0 \quad (4.34a)$$

$$-\Gamma_1(\theta, \phi, \gamma) + \Gamma_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) > 0 \quad (4.34b)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_1(\theta, \phi, \gamma) &= \frac{\gamma + \tan \theta \tan \phi}{-\tan \theta + \gamma \tan \phi} \\ \Omega_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) &= \frac{-\tan \phi_2 + \gamma_2 \tan \theta_2}{1 + \gamma_2 \tan \phi_2 \tan \theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\theta, \phi, \gamma) &= \frac{\gamma \tan \theta - \tan \phi}{\gamma \tan \phi \tan \theta + 1} \\ \Gamma_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) &= \frac{\gamma_2 + \tan \phi_2 \tan \theta_2}{\gamma_2 \tan \phi_2 - \tan \theta_2} \end{aligned}$$

De acuerdo con (4.12), $\Gamma_1(\theta, \phi, \gamma), \Gamma_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2), \Omega_1(\theta, \phi, \gamma), \Omega_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2) > 0$. En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran las superficies definidas por cada una de las funciones anteriores para diferentes valores de $\gamma(G(0))$ y $\gamma_2(W(0))$ respectivamente. Para que se cumpla la condición de *controlabilidad integral* es necesario que la superficie $\Omega_1(\theta, \phi, \gamma)$ esté por encima de la superficie $\Omega_2(\theta_2, \phi_2, \gamma_2)$ y que la superficie $\Gamma_2(\theta, \phi, \gamma)$ esté por encima de la superficie $\Gamma_1(\theta_2, \phi_2, \gamma_2)$.

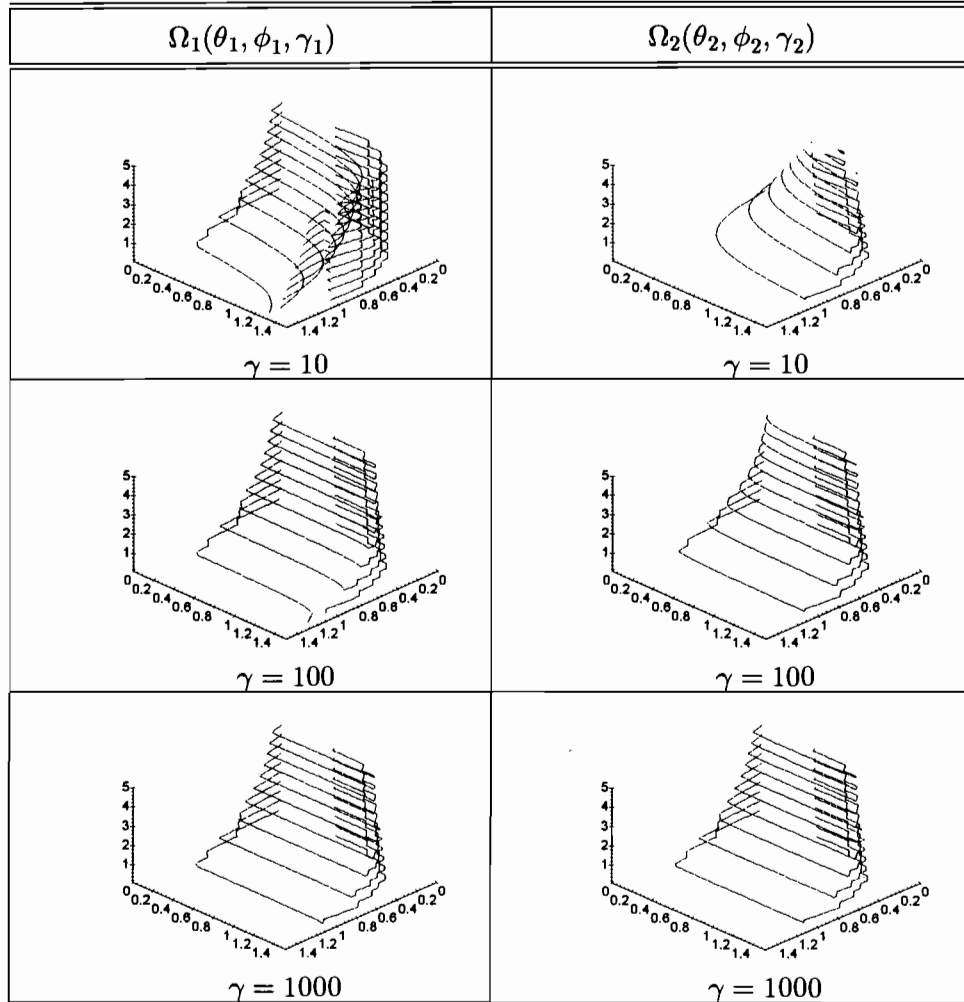


Figura 4.3

Tomando en cuenta que una columna de destilación de alta pureza tiene en general un número de condición grande ($\gamma(G(0)) > 100$), de las figuras 4.3 y 4.4 se puede observar que la condición (4.34) se cumplirá usando una matriz de referencia con un número de condición pequeño. Sin embargo, de estas figuras es fácil darse cuenta que no es sencillo definir *a priori* el conjunto de valores de $(\theta_2, \phi_2, \gamma_2)$ que definan una matriz de referencia $W(0)$ con la cual se pueda diseñar un controlador con acción integral que a lazo cerrado establezca la columna de destilación definida por $G(0)$.

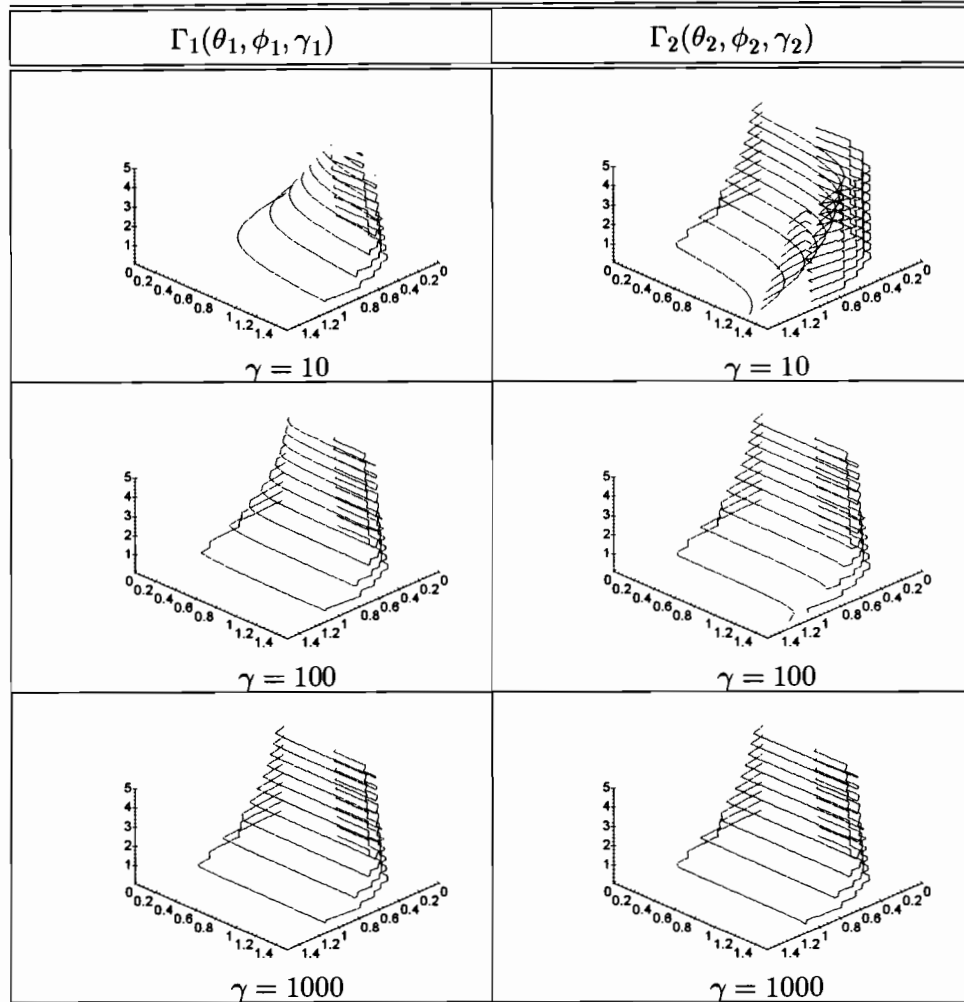


Figura 4.4

Tomemos los valores del ejemplo anterior. En la figura 4.5 se muestra el conjunto de valores (zona sombreada) de θ_2 y ϕ_2 para diferentes valores de γ_2 tales que $W(0)$ satisface la condición de *controlabilidad integral*. Conforme se incrementa el número de condición de la matriz de referencia $\gamma(W(0))$, la región de valores de (θ_2, ϕ_2) que satisfacen (4.34) disminuye considerablemente. Note que para $\gamma(W(0)) > 100$ la región de valores de (θ_2, ϕ_2) que satisfacen (4.34) permanece casi constante.

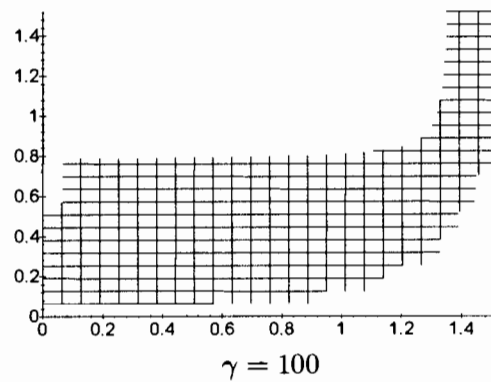
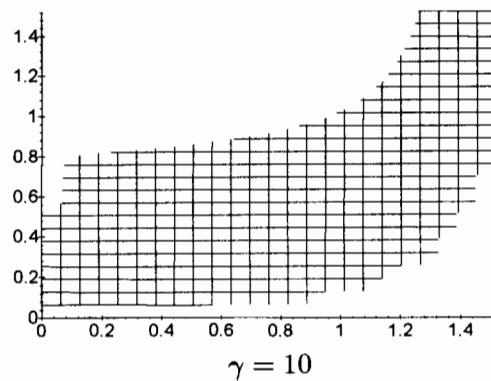
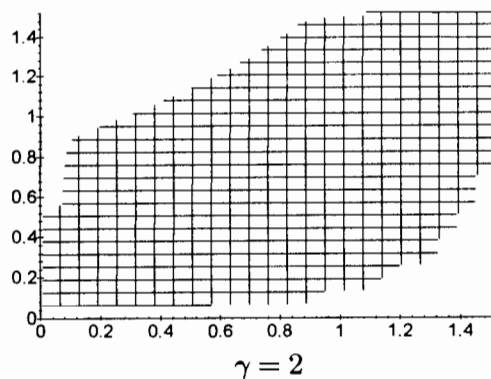


Figura 4.5

4.4 Conclusiones

En este capítulo se presentaron las características más importantes de los modelos MIMO (múltiples entradas y múltiples salidas) para columnas de destilación binaria. Para diseñar un controlador linealizante por retroalimentación, es necesario evaluar la inversa de la función de

transferencia, de tal forma que sólo un sistema **MIMO** puede ser mal condicionado (se debe calcular la inversa de una matriz). En este capítulo se presentaron diferentes formas de evaluar el grado de mal condicionamiento de los modelos **MIMO** para columnas de destilación binaria. Como una contribución de esta tesis al estado del arte, en este capítulo se demostró que tomando adecuadamente un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario, es posible diseñar esquemas de control **PI** y **PID** desacoplados que serán robustamente estables en lazo cerrado. Dado que el desempeño de los controladores **PI** y **PID** desacoplados lejos del punto nominal de operación es pobre, en los capítulos 5 y 6 de esta tesis se desarrollarán metodologías que permiten diseñar esquemas de control cuya realización es similar a los controladores **PI** y **PID** desacoplados, pero que tienen un mejor desempeño.

Capítulo 5

Controladores diagonales

*En el capítulo anterior se demostró que para columnas de destilación binarias, un controlador **PI** desacoplado es robustamente estable. Con el fin de mejorar el desempeño del controlador **PI** diagonal, en este capítulo se presentan dos nuevos esquemas de control robusto para el problema de control dual en columnas de destilación. Ambos esquemas constituyen una contribución de esta tesis al estado del arte. Se demuestra que la realización en el dominio de Laplace de ambos esquemas de control es equivalente a un controlador **PID** diagonal. El primer esquema de control es una extensión a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (**MIMO**) del controlador por compensación del error de modelado (**MEC**) presentado en el capítulo 3. En el segundo esquema, la ley de control se obtiene usando un proceso iterativo que se basa en las metodologías de mapeos de contracción. El desempeño de ambos esquemas de control se muestra mediante simulaciones numéricas.*

5.1 Introducción

En el capítulo anterior se mostró que para el controlador **PI** diagonal, la condición de *controlabilidad integral* se satisface trivialmente. El resultado anterior es muy importante puesto que asegura que un controlador **PI** diagonal será estable incluso cuando se trabaja en diferentes puntos de operación (Skogestad and Morari, 1988b). Sin embargo, la principal desventaja de este esquema de control es que no toma en cuenta las fuertes interacciones entre los dos lazos de control. Esto trae como consecuencia que el controlador alcance muy lentamente el estado estacionario cuando hay perturbaciones externas, lo cual ha sido confirmado de manera experimental (Musch and Steiner, 1995).

En este capítulo se presenta el diseño de dos nuevos tipos de esquemas de control basados en modelo. La realización de ambos esquemas es equivalente a un controlador **PI** diagonal. El primer esquema de control es una extensión a sistemas multivariables del controlador desarrollado en el capítulo 3 de esta tesis. El segundo esquema de control se basa en la construcción de una ley de control recursiva. En este caso, la ley de control se diseña empleando un enfoque numérico.

5.2 Control por compensación del error de modelado

En esta sección se tomarán las ideas centrales de Sun et al. (1994) que se utilizaron en el capítulo 3 de esta tesis para diseñar un esquema de control por compensación de errores de modelado (controladores **MEC**) para el control dual de una columna de destilación binaria. En esta sección se describe la metodología reportada previamente en González-Trejo et al. (1997a).

Como se recordará, en la primera etapa de diseño del controlador **MEC** se propone una ley de retroalimentación nominal que se construye como un controlador por inversión de un cierto modelo de referencia nominal. Sin embargo, como es bien sabido, los controladores obtenidos por inversión de modelo son sensibles a incertidumbres en las entradas, las cuales pueden ocasionar que el sistema a lazo cerrado sea inestable (Morari and Zafiriou, 1989). En la segunda etapa del diseño de un controlador **MEC**, se propone un nuevo lazo de control retroalimentado usando un estimado del error de modelado. El objetivo de este segundo lazo de control es hacer robusto al controlador retroalimentado nominal.

El controlador **MEC** será diseñado para los dos tipos de modelo multivariable de la columna de destilación binaria que se estudiaron en el capítulo 4. En primer lugar se diseñará el controlador **MEC** suponiendo que la planta se puede describir usando el modelo con un tiempo característico (**OTC**):

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{1+\tau_1 s} & \frac{K_{12}}{1+\tau_1 s} \\ \frac{K_{21}}{1+\tau_1 s} & \frac{K_{22}}{1+\tau_1 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde k_{ij} , $i, j = 1, 2$ son las ganancias en estado estacionario. Se presentará también el diseño del controlador **MEC** usando el modelo con dos tiempos característicos (**TTC**):

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}(\zeta_{11}s+1)}{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)} & \frac{K_{12}(\zeta_{12}s+1)}{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)} \\ \frac{K_{21}(\zeta_{21}s+1)}{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)} & \frac{K_{22}(\zeta_{22}s+1)}{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

En esta sección se mostrará que es posible usar un modelo de referencia diagonal para diseñar el controlador **MEC** para ambos modelos. Posteriormente se discutirán las ventajas y desventajas de usar cada uno de los controladores **MEC** obtenidos.

Es importante señalar que en el trabajo original de Sun et al. (1994) solo se estudió el caso de plantas **SISO** en el dominio de Laplace. En esta sección se desarrollará un controlador **MEC** multivariable en el dominio del tiempo.

5.2.1 Diseño MEC basado en un modelo OTC

Haciendo las siguientes definiciones $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta x_D & \Delta x_B \end{bmatrix}^T$, $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta L & \Delta V \end{bmatrix}^T$, la representación mínima en espacios de estados de un modelo **OTC** dado por (5.1) es la siguiente:

$$\dot{y}_i = -\frac{y_i}{\tau_1} + k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2, \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.3)$$

donde $k_{ij} = K_{ij}/\tau_1$, $i, j = 1, 2$. En notación vectorial, el sistema (5.3) puede ser escrito de manera equivalente como

$$\dot{y} = Ty + \mathcal{K}u$$

donde $T = \text{diag}(-\tau_1^{-1}, -\tau_1^{-1})$ y $\mathcal{K} = [k_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la *matriz de acoplamiento de entradas*. Para diseñar el controlador se supondrá que se cuenta con mediciones de las variables controladas

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta x_D & \Delta x_B \end{bmatrix}^T.$$

Suponga también que se cuenta con un modelo de referencia $\dot{y}_r = A_r y_r$, $y_r \in \mathbb{R}^2$, donde A_r es una matriz Hurwitz. La matriz A_r se puede diseñar tomando en cuenta los objetivos de desempeño previamente especificados. Por ejemplo, si se desea obtener un esquema de control desacoplado, A_r se puede elegir como $A_r = \text{diag}(-\tau_{CL,1}^{-1}, -\tau_{CL,2}^{-1})$, donde $\tau_{CL,1}$ y $\tau_{CL,2}$ son las constantes de tiempo en lazo cerrado que se desea obtener para cada lazo de control. Supongamos que $\bar{\Pi}_1 = \{\bar{\tau}_1, \bar{K}_{11}, \bar{K}_{12}, \bar{K}_{21}, \bar{K}_{22}\}$ son los estimados de los parámetros de la planta. Con estos estimados, se construyen los estimados $\bar{\mathcal{K}}$ y \bar{T} de \mathcal{K} y T respectivamente.

El controlador que impone el comportamiento a lazo cerrado $\dot{y}_r = A_r y_r$ es el controlador por inversión:

$$u(y, t) = \bar{\mathcal{K}}^{-1}(A_r - \bar{T})y$$

Dado que los estimados $\bar{\mathcal{K}}$ y \bar{T} del modelo no son iguales a los verdaderos y que la planta puede estar sujeta a perturbaciones externas $d(t)$, no se puede lograr la cancelación exacta de la dinámica en lazo abierto, y por tanto, no es posible obtener el comportamiento dinámico deseado $\dot{y}_r = A_r y_r$. Más aún, si la distancia $\|\Pi_1 - \bar{\Pi}_1\|$ es muy grande, el sistema en lazo cerrado $\dot{y} = \bar{T}y + \mathcal{K}\bar{\mathcal{K}}^{-1}(A_r - \bar{T})y$ puede ser inestable. Por otro lado, si la matriz $\bar{\mathcal{K}}$ es mal condicionada y los elementos de su **RGA** son grandes, los errores por redondeo y las incertidumbres en las entradas pueden hacer que el sistema a lazo cerrado sea inestable o presente un pobre desempeño, aún y cuando $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ (Skogestad et al., 1988c).

Una alternativa al uso de controladores por inversión $u(y, t) = \bar{\mathcal{K}}^{-1}(A_r - \bar{T})y$ es emplear el siguiente esquema. Supongamos que en lugar de usar a $\bar{\mathcal{K}}$, se usa la matriz invertible $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Esta matriz se puede seleccionar como la matriz de acoplamiento estimada o alguna otra matriz con ciertas propiedades predefinidas (número de condición pequeño, elementos de la **RGA** pequeños, etc). *El objetivo de introducir una matriz bien condicionada B en lugar de usar el estimado de la matriz de acoplamiento $\bar{\mathcal{K}}$ es: (i) Reducir los efectos adversos debidos a la inversión de matrices mal condicionadas, por otro lado y (ii) Seleccionar a B con una estructura específica tal que se asegure la estabilidad del sistema en lazo cerrado.*

Si se definen $\eta_i(y, u, d_i(t)) = -\Delta\tau_1^{-1}y_i + \Delta k_{i1}u_1 + \Delta k_{i2}u_2 + d_i(t)$, $1 \leq i \leq 2$, donde $\Delta\tau_1^{-1} =$

$\tau_1^{-1} - \bar{\tau}_1^{-1}$, $\Delta k_{ij} = k_{ij} - b_{ij}$, el sistema (5.3) se puede expresar como

$$\dot{y}_i = -\frac{y_i}{\bar{\tau}_1} + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \eta_i(y, u, d_i(t)), \quad 1 \leq i \leq 2$$

donde $d(t) = [d_1(t), d_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ es una perturbación acotada actuando en la planta. De forma compacta, el sistema anterior se puede expresar como

$$\dot{y} = \bar{T}y + Bu + \eta(y, u, d(t)) \quad (5.4)$$

El vector $\eta(y, u, d(t)) = [\eta_1(y_1, u, d_1(t)), \eta_2(y_2, u, d_2(t))]^T$ contiene las incertidumbres asociadas con los parámetros de la planta y las perturbaciones. A la función $\eta(y, u, d(t))$ se le conoce como *error de modelado*.

Si se toma la i -ésima entrada del sistema representado por (5.4), entonces $\eta_i(y, u, d_i(t))$ puede ser interpretado como un estado aumentado, de tal forma que la dinámica de la i -ésima salida puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -\frac{y_i}{\bar{\tau}_1} + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \eta_i, & 1 \leq i \leq 2 \\ \dot{\eta}_i &= \varphi_i(y_i, u, t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde

$$\varphi_i(y_i, u, t) = -\Delta\tau_1^{-1}\left(-\frac{y_i}{\bar{\tau}_1} + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \eta_i\right) + \Delta k_{i1}u_1^{(1)} + \Delta k_{i2}u_2^{(1)} + d_i^{(1)}$$

para $1 \leq i \leq 2$. $\varphi_i(y_i, u, t)$ es una función que define la dinámica del nuevo estado η_i , y $u_i^{(1)}$ denota du_i/dt . Dado que $\eta_i(y, u, d_i(t))$ es desconocida, $\varphi_i(y_i, u, t)$ es *desconocida también*.

Por otro lado, recordando que por hipótesis las salidas de control son medibles, si la ley de control se define como $u(y, t)$, de (5.4) es fácil concluir que los nuevos estados η_i son observables. La prueba es evidente a partir del siguiente hecho:

$$\eta_i = \dot{y}_i(t) + \frac{y_i(t)}{\bar{\tau}_1} - b_{i1}u_1(t) - b_{i2}u_2(t), \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.6)$$

esto es, la dinámica de los estados η_i se puede reconstruir usando la dinámica de las salidas

medidas y de la entrada de control.

Dado un modelo de referencia $\dot{y}_r = A_r y_r$, el controlador por inversión para la planta (5.4) es

$$u(y, \eta) = B^{-1} [(A_r - \bar{T}) y - \eta(y, u, d(t))] \quad (5.7)$$

Observe que esta ley de control retroalimentado compensa el error de modelado $\eta(y, u, d(t))$. La idea del lazo de control adicional $-B^{-1}\eta(y, u, d(t))$ es contrarrestar el efecto que tiene el error de modelado sobre la salida regulada $y = [y_1, y_2]^T$.

Dado que el error de modelado $\eta(y, u, d(t))$ es desconocido, para implantar la ley de control (5.6) es necesario contar con un estimado del error de modelado, $\bar{\eta}(t)$. Considerando que los nuevos estados η_i son observables a partir de medidas de las salidas de control, de manera similar al procedimiento que se siguió en el capítulo 3, se propone usar un observador tipo gradiente para obtener un estimado de η :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\frac{y_i}{\bar{\tau}_1} + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \bar{\eta}_i + 2\mathcal{L}(y_i - z_i), & 1 \leq i \leq 2 \\ \dot{\bar{\eta}}_i &= \mathcal{L}^2(y_i - z_i) \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde \mathcal{L} es un parametro positivo, z_1 y z_2 son estados internos del estimador, $\bar{\eta}_1$ y $\bar{\eta}_2$ son estimados de η_1 y η_2 respectivamente. Es importante señalar que para obtener la dinámica del estimado de la incertidumbre dada por (5.8), solo es necesario contar con medidas de la salida de control, puesto que la dinámica de los estados internos del observador se obtiene también a partir de mediciones de la salida de control. De esta forma, el sistema (5.8) puede ser visto como un estimador de estados tipo Luenberger para el sistema (5.5) (Sasthy and Bodson, 1989). Observe que la función desconocida $\varphi_i(y_i, u, t)$ no fue incluida en la construcción del estimador de estados (5.8).

Si se emplean los estimados $\bar{\eta}_1$ y $\bar{\eta}_2$ en la ley de control retroalimentado nominal, se obtiene que

$$u(y, \bar{\eta}) = B^{-1} [(A_r - \bar{T}) y - \bar{\eta}] \quad (5.9)$$

El esquema de control resultante está compuesto por una retroalimentación nominal dada por (5.9) y un estimador de incertidumbres de cuarto orden dado por (5.8). Observe que el controlador (5.8),(5.9) tiene un solo parametro de sintonizado $\mathcal{L} > 0$. El estimador de incertidumbres

(5.8) junto con el lazo de control adicional $-B^{-1}\bar{\eta}$ constituyen la estructura básica de un esquema MEC (Sun, et al., 1994). Una diferencia importante entre el esquema propuesto por Sun et al. (1994) y el esquema propuesto en esta tesis es que en el trabajo de Sun et al., el controlador se obtiene al resolver una ecuación polinomial.

Estabilidad del sistema resultante a lazo cerrado

El siguiente paso es estudiar la estabilidad del sistema resultante a lazo cerrado. Para analizar la estabilidad del sistema a lazo cerrado, es necesario probar en primer lugar que los estimados de las incertidumbres convergen a los valores reales. Con este fin, definamos los errores de estimación $e_1 = \mathcal{L}(y - z)$ y $e_2 = \eta - \bar{\eta}$. Cuando se aplica el control retroalimentado (5.9) al sistema (5.4), éste último toma la siguiente forma

$$\dot{y} = A_r y + e_2 \quad (5.10)$$

el cual, por construcción, es asintóticamente estable cuando $e_2 = 0$. Definamos $\Delta T = T - \bar{T}$ y $\Delta \mathcal{K} = \mathcal{K} - \bar{\mathcal{K}}$. Después de realizar las sustituciones pertinentes (ver Apéndice A), la dinámica del error de reconstrucción está gobernada por

$$\dot{e} = \mathcal{L}He + \psi(y, e, t) \quad (5.11)$$

donde $\psi(y, e, t) = (0, 0, \phi(y, e, t)) \in \mathbb{R}^4$, $\phi(y, e, t) \in \mathbb{R}^2$ están definidas en el Apéndice A y la matriz H está dada por

$$H = \begin{bmatrix} -2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -\mathcal{K}B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Si $B = \mathcal{K}$, entonces H es una matriz Hurwitz cuyos valores propios son $\{-1, -1, -1, -1\}$. Sin embargo, en general se tiene que $B \neq \mathcal{K}$, aún y cuando B se tome igual a $\bar{\mathcal{K}}$. El siguiente resultado establece las propiedades de estabilidad del sistema a lazo cerrado (5.10),(5.11).

Proposición 1 *Suponga que la matriz H es Hurwitz y que $d(t)$ así como su tasa de cambio $d^{(1)}(t)$ son acotadas. Entonces, existe un número positivo \mathcal{L}^* , denominado como ganancia mínima de estimación de incertidumbres, tal que para $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$, $y(t)$ y $e(t)$ están acotadas. Si*

además, $d(t) \rightarrow cte$ conforme $t \rightarrow \infty$, entonces $y(t), e(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Prueba Ver Apéndice A. ■

5.2.2 Diseño MEC basado en un modelo TTC

Una realización mínima (observable y controlable) del modelo **TTC** (5.2) es

$$\begin{aligned} y_i &= \mathfrak{z}_{i1} \\ \dot{\mathfrak{z}}_{i1} &= \mathfrak{z}_{i2} - a_1 y_i + k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 \quad 1 \leq i \leq 2 \\ \dot{\mathfrak{z}}_{i2} &= -a_0 y_i + \mathfrak{b}_{i1} u_1 + \mathfrak{b}_{i2} u_2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde \mathfrak{z}_{ij} , $i, j = 1, 2$, son estados internos, $a_1 = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2$, $a_0 = 1/\tau_1\tau_2$ y $\mathfrak{b}_{ij} = K_{ij}/\tau_1\tau_2$, $i, j = 1, 2$. En este caso, la matriz de acoplamiento es $\mathcal{K} = [k_{ij}] = [K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Para el diseño del esquema de control se supondrá que la planta es de *fase mínima* (ver Apéndice B). Como en la sección anterior, supongamos que se tiene un modelo de referencia $\dot{y}_r = A_r y_r$, $y_r \in \mathbb{R}^2$, donde A_r es una matriz Hurwitz. Dado un estimado $\bar{\Pi}_2$ de los valores del conjunto de parámetros $\Pi_2 = \{\tau_1, \tau_2, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{21}, \zeta_{22}\}$, el controlador que impone el comportamiento de salida deseado $\dot{y}_r = A_r y_r$ es $u(y, \mathfrak{z}) = \bar{\mathcal{K}}^{-1} [-\mathfrak{z}_2 + (A_r - \bar{T}) y]$, donde $\bar{T} = \text{diag}(-\bar{a}_1, -\bar{a}_1)$. Si no existen incertidumbres en el modelo, la suposición de fase mínima implica que el controlador anterior producirá un sistema que en lazo cerrado es internamente estable (Sastry and Bodson, 1989). Como en el caso del modelo **OTC**, el objetivo del controlador es cancelar exactamente la dinámica en lazo abierto. Sin embargo, dado que las matrices \mathcal{K} y T son inciertas y que la planta puede estar sujeta a perturbaciones externas $d(t)$, no se puede lograr la cancelación exacta de la dinámica en lazo abierto y por tanto no es posible obtener el comportamiento dinámico deseado $\dot{y}_r = A_r y_r$. Por otro lado, la implementación del controlador anterior $u(y, \mathfrak{z}) = \bar{\mathcal{K}}^{-1} [-\mathfrak{z}_2 + (A_r - \bar{T}) y]$ requiere mediciones del estado interno \mathfrak{z}_2 . Dado que el estado \mathfrak{z}_2 no es medible, una alternativa es emplear un estimador de estados, lo cual implica usar un controlador de alto orden que además es muy difícil de sintonizar (Sastry and Bodson, 1989).

Para diseñar un controlador **MEC** basado en el modelo (5.12) sin tener que contar con mediciones del estado interno $\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{R}^2$, se recurrirá a la propiedad de fase mínima del sistema.

Como en el caso del controlador MEC para modelos OTC, supondremos que $d(t) \in \mathbb{R}^2$ es una perturbación externa. Dado que $y_i = \mathfrak{z}_{i1}$, se puede reescribir el primer componente en (5.12) como sigue:

$$\dot{y}_i = -\bar{a}_1 y_i + b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2 + \eta_i(y_i, \mathfrak{z}_{i2}, u, d_i(t)), \quad 1 \leq i \leq 2$$

donde $\eta_i(y_i, \mathfrak{z}_{i2}, u, d_i(t)) = -\Delta a_1 y_i + \Delta k_{i1} u_1 + \Delta k_{i2} u_2 + \mathfrak{z}_{i2} + d_1(t)$, $1 \leq i \leq 2$, y $\Delta a_1 = a_1 - \bar{a}_1$. La ecuación anterior se puede escribir en notación compacta como

$$\dot{y} = \bar{\mathcal{A}}_1 y + B u + \eta(y, \mathfrak{z}_2, u, d(t)) \quad (5.13)$$

donde $\bar{\mathcal{A}}_1 = \text{diag}(-\bar{a}_1, -\bar{a}_1)$. Observe que el estado no medido \mathfrak{z}_2 fue incluido en el término del error de modelado $\eta(y, \mathfrak{z}_2, u, d(t))$. El fundamento de incluir el estado no medido \mathfrak{z}_2 en el término del error de modelado es que si la salida $y(t)$ y la entrada $u(t)$ están acotadas, \mathfrak{z}_2 también lo estará, como consecuencia de la suposición de fase mínima.

Tomado en cuenta la analogía entre el modelo del sistema dado por (5.13) y el modelo del sistema dado por (5.4), se propone el siguiente controlador:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\bar{\mathcal{A}}_1 z + B u + \bar{\eta} + 2\mathcal{L}(y - z) \\ \dot{\bar{\eta}} &= \mathcal{L}^2(y - z) \\ u(y, \bar{\eta}) &= B^{-1} [(A_r - \bar{\mathcal{A}}_1) y - \bar{\eta}] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Observe que para reconstruir la dinámica del término incierto $\bar{\eta}$ sólo es necesario contar con mediciones de las salidas de control, puesto que la dinámica de los estados internos de observador se obtiene también a través de mediciones de las salidas de control.

Considerando los mismos argumentos que para el caso de modelos OTC, los resultados de la Proposición 1 también se aplican en este caso. Esto es, si la matriz $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ con $\mathcal{K} = [k_{ij}] = [K_{ij} \zeta_{ij} / \tau_1 \tau_2]$ es Hurwitz, entonces existe un número positivo \mathcal{L}^* tal que para $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$, $y(t)$ y $e(t)$ están acotadas. Si además, $d(t) \rightarrow \text{cte}$ conforme $t \rightarrow \infty$, entonces $y(t), e(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

5.2.3 Función de transferencia del controlador

El estimador de incertidumbres (5.8) puede ser escrito en forma compacta como

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -\bar{T}_1 y + Bu + \bar{\eta} + 2\mathcal{L}(y - z) \\ \dot{\bar{\eta}} &= \mathcal{L}^2(y - z)\end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace del sistema anterior, es posible obtener la siguiente función de transferencia para el compensador (5.8),(5.9):

$$C(s) = P_1 \left\{ I_{2 \times 2} + \frac{P_2}{s} + \frac{P_3}{s(s + 2\mathcal{L})} \right\}$$

donde $P_1 = B^{-1}(A_r - \bar{T})$, $P_2 = -(A_r - \bar{T})/\mathcal{L}^2$ y $P_3 = \mathcal{L}^2(A_r - \bar{T})^{-1}(A_r + 2\mathcal{L}I_{2 \times 2})$. Se puede obtener una expresión similar para el controlador (5.14) si se toma $\bar{\mathcal{A}}_1$ en lugar de \bar{T} . El controlador anterior se puede llevar a una forma **PID** con filtro

$$C(s) = K_c \left\{ I_{2 \times 2} + \frac{\mathcal{T}_I^{-1}}{s} + s\mathcal{T}_D \right\} \left(\frac{1}{\tau_f s + 1} \right) \quad (5.15)$$

donde $K_c = \frac{1}{2}B^{-1}(2(A_r - \bar{T}) + \mathcal{L}I_{2 \times 2})$, $\mathcal{T}_I = \mathcal{L}(2I_{2 \times 2} - \mathcal{L}(A_r - \bar{T})^{-1})(A_r - \bar{T})^{-1}A_r$, $\mathcal{T}_D = \mathcal{L}(2I_{2 \times 2} - \mathcal{L}(A_r - \bar{T})^{-1})$ y $\tau_f = \frac{1}{2\mathcal{L}}$. A continuación se presentan algunos comentarios acerca de la estructura del compensador (5.15):

- (a) El controlador está compuesto por cuatro partes: (i) Una parte proporcional con ganancia de control K_c , (ii) Una parte integral con *tiempo integral* \mathcal{T}_I , (iii) Una parte derivativa con *tiempo derivativo* \mathcal{T}_D , y (iv) Un post-filtro con una *constante de tiempo* τ_f . Conforme se incrementa el valor de \mathcal{L} la importancia de las contribuciones proporcional, integral y derivativa se incrementan, pero el tiempo de filtrado τ_f disminuye. Observe que para valores muy grandes de \mathcal{L} , el controlador (5.15) es un controlador **PID** de alta ganancia sin filtro. Esto implica que se pueden presentar sobredisparos en la entrada de control. Para evitar este efecto adverso, se pueden acotar las entradas de control.
- (b) La única forma en que la acción derivativa en el controlador (5.15) sea cero es que $A_r = -2\mathcal{L}I_{2 \times 2}$, obteniendo un controlador **PI**.

- (c) Supongamos que A_r y B se eligen como matrices diagonales, entonces K_c , T_I y T_D también serán matrices diagonales. De esta forma, si A_r y B son matrices diagonales, el controlador (5.15) será un controlador **PID** diagonal con filtro.
- (d) En el capítulo anterior se mostró que un controlador **PI** diagonal es robustamente estable y poco sensible a incertidumbres en las entradas de control en una columna de destilación. Sin embargo, el controlador **PI** diagonal es incapaz de tomar en cuenta la fuerte direccionalidad de la planta. En otras palabras, para una planta mal condicionada, un controlador **PI** diagonal tiene buen desempeño a bajas frecuencias porque reduce los efectos de acoplamiento, pero tiene mal desempeño a altas frecuencias porque pierde la interacción entre los lazos de control. Esto trae como consecuencia que el regreso al estado estacionario cuando se usa un controlador **PI** diagonal sea muy lento. Para mejorar su desempeño se sugirió incluir una acción derivativa. En el capítulo anterior se mostró que un controlador **PID** diagonal satisface también la condición de controlabilidad integral. Tomando como base el compensador (5.15), se puede concluir que la función del término

$$\frac{P_3}{s(s + 2\mathcal{L})}$$

es compensar por los errores de modelado. Este término mejora el desempeño del sistema a lazo cerrado para altas frecuencias, en donde la tasa de cambio del error de seguimiento es muy grande.

5.2.4 Condiciones de estabilidad para la matriz H

Analizando el controlador **MEC** (5.8),(5.9) o (5.14), se puede observar que la estructura de inversión del controlador es inducida por B^{-1} . En principio, B se puede tomar como el estimado correspondiente de la matriz de acoplamiento \bar{K} en el punto nominal de operación, ya sea $[\bar{K}_{ij}/\tau_1]$ o $[\bar{K}_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2]$. Sin embargo, si \bar{K} es mal condicionada, los errores por redondeo debido a la inversión de la matriz pueden ser muy importantes. En este caso, el controlador puede ser muy sensible a ruido en las mediciones e incertidumbres en las entradas. Por otro lado, la estabilidad a lazo cerrado del sistema resultante depende fuertemente de la estabilidad de la matriz H (ver Proposición 1). De hecho, para asegurar estabilidad a lazo cerrado, H debe

ser una matriz Hurwitz. Sin embargo, H depende de la matriz $\mathcal{K}B^{-1}$, la cual es una matriz incierta. Por tanto, es necesario definir las condiciones para que la matriz H sea Hurwitz. Tomando en cuenta las propiedades que en general tiene la función de transferencia en estado estacionario de una columna de destilación binaria (sección 4.3), el siguiente resultado muestra que si se elige $B = \text{diag}(w, -w)$, $w > 0$ (control descentralizado), la matriz H es Hurwitz.

Proposición 2 Definamos la matriz $\mathcal{G} = [g_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ donde $g_{ij} = |k_{ij}|$, $1 \leq i, j \leq 2$. Suponga que \mathcal{G} es positiva definida (esto es, $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0$). Entonces, la matriz H es Hurwitz si $B = \text{diag}(w, -w)$, $w > 0$. Además, la matriz H tendrá la siguiente estructura de valores propios:

- (i) $\{-1 \pm m_1i, -1 \pm m_2i\}$ donde $m_1, m_2 \rightarrow \infty$ conforme $w \rightarrow 0$, si $0 < w < \lambda_{\min}(\mathcal{G})$
- (ii) $\{n_1, n_2, -1 \pm m_1i\}$ donde $-2 < n_1 < n_2 < 0$, si $\lambda_{\min}(\mathcal{G}) < w < \lambda_{\max}(\mathcal{G})$
- (iii) $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ donde $-2 < n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < 0$, y $n_1, n_2 \rightarrow -2$, $n_3, n_4 \rightarrow 0$, si $w > \lambda_{\max}(\mathcal{G})$.

Prueba Ver Apéndice A. ■

El elegir a B como una matriz diagonal tiene diversas ventajas:

- (a) El controlador MEC tiene una estructura de desacoplamiento. De hecho, para cada uno de los lazos de control, la acción del otro lazo es considerada como una perturbación externa la cual es detectada por el estimador del error de modelado.
- (b) El número de condición de B es uno, con lo que se reduce al mínimo los errores por redondeo y los efectos que tienen las incertidumbres en las entradas cuando se hace la inversión de la matriz B .
- (c) Los resultados de la Proposición 2 pueden ser extendidos al caso $\bar{\mathcal{K}} = \text{diag}(w_1, -w_2)$, $w_1, w_2 > 0$. Esta es una situación muy interesante puesto que se pueden tomar como valores para w_1 y w_2 los elementos de la diagonal de la matriz $\bar{\mathcal{K}}$.

5.2.5 Comparación entre controladores MEC derivados a partir de modelos OTC y TTC

Los controladores MEC derivados a partir de modelos OTC o TTC muestran la misma estructura. De hecho, ambos controladores poseen, para cada canal de entrada, un controlador por inversión retroalimentado nominal más un estimador del error de modelado. De la Proposición 2, se puede asegurar la estabilidad de la matriz H y por tanto del sistema a lazo cerrado si la matriz B se elige como $B = \text{diag}(w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $w_1, w_2 > 0$. De esta forma, *la estabilidad del sistema a lazo cerrado puede ser asegurada aún si la direccionalidad de la matriz B^{-1} no coincide con la direccionalidad de la matriz de transferencia de la planta \mathcal{K}^{-1}* . Esto implica que los controladores MEC inducen ciertas propiedades de robustez ante incertidumbres en las entradas (Morari and Zafiriou, 1989).

Por otro lado, si un controlador MEC derivado a partir de modelos OTC o TTC muestra la misma estructura, ¿cuál es la ventaja de usar un modelo TTC en lugar de un modelo OTC?. La principal diferencia entre el controlador (5.8),(5.9) y el controlador (5.14) es la estructura de la matriz de acoplamiento de las entradas \mathcal{K} . En el primer caso, $\mathcal{K} = [K_{ij}/\tau_1]$, la cual contiene información exclusivamente de la constante de tiempo dominante τ_1 . En el segundo caso, $\mathcal{K} = [K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2]$, la cual, a través de la matriz $\zeta = [\zeta_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, contiene información de la dinámica de los flujos internos y externos. La estructura de $\mathcal{K} = [K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2]$ proporciona mayor información al controlador sobre los acoplamientos entre los lazos de control. Este punto se puede ilustrar con un modelo tomado de Jacobsen and Skogestad (1994) (Eq. 16). El número de condición de la matriz de acoplamiento \mathcal{K} para los modelos OTC y TTC son 134.62 y 10.88 respectivamente. Un número de condición más pequeño significa que el sistema a lazo cerrado será menos sensible a errores por redondeo. Dado que el número de condición de la matriz $[K_{ij}/\tau_1]$ es mayor que el número de condición de la matriz $[K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2]$, se puede concluir que el controlador (5.14) será menos sensible a incertidumbres en las entradas que el controlador (5.8),(5.9). De hecho, se ha mostrado en diversas investigaciones (Skogestad et al., 1988a) que las plantas mal condicionadas pueden presentar severos problemas de robustez. De esta forma, la siguiente conclusión es muy interesante: *La matriz $\zeta = [\zeta_{ij}]$ es un preconditionador de entradas (Lau et al., 1985) para la matriz de ganancias en estado estacionario $K = [K_{ij}]$ en la forma $K \cdot \ast \zeta$, donde " \ast " denota multiplicación elemento por elemento o producto Hadamard.*

5.2.6 Ejemplo numérico y discusión de resultados

Para mostrar el desempeño a lazo cerrado del controlador MEC, se empleará un simulador no lineal de una columna de destilación binaria.

Tabla 5.1

Valores de los parámetros y de las variables para el simulador no lineal en el estado estacionario estudiado

Mezcla	Acetona-tolueno
Número de platos	40
Plato de alimentación	21 (contado a partir del domo)
Composición de alimentación (z_f)	50 % mol
Flujo de vapor del rehervidor (V/F_0)	3.34
Flujo de recirculado (L/F_0)	2.74
Composición en el destilado (x_D)	0.99
Composición en el fondo (x_B)	0.01

Simulador no lineal

El simulador está diseñado para describir el comportamiento dinámico del proceso de destilación de una mezcla binaria. Se tomaron como componentes de la mezcla acetona y tolueno. Los parámetros físicos del proceso, tales como número de platos, composiciones en el estado estacionario, etc., se muestran en la Tabla 5.1. Para describir el equilibrio termodinámico se empleó un modelo UNIQUAC (Gmehling et al., 1982). El algoritmo de solución está basado en el método de Naphtali-Sandholm (Naphtali and Sandholm, 1971), el cual es simple, robusto y consume poco tiempo de cálculo. Las variables manipuladas son el flujo molar de reflujo (L) y el flujo molar de vapor del rehervidor (V). Dado que la estimación de los parámetros de la planta se realizará con el método de respuesta al escalón, con el fin de lograr una estimación más simple, en el simulador no se consideró la dinámica del intercambiador de calor en el rehervidor. Información adicional sobre el simulador se encuentra en el Apéndice C.

Estimación de los parámetros de la matriz de ganancias

La identificación de los parámetros de la matriz de ganancias en estado estacionario de la columna de destilación se realizó imponiendo, de manera independiente, cambios del 5% con respecto a los valores nominales que aparecen en la Tabla 5.1, en los flujos molares de reflujo y de vapor. Los resultados de la identificación son:

$$K = \begin{bmatrix} 0.5058 & -0.3463 \\ 1.4520 & -1.0569 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

y las constantes de tiempo son $\tau_1 = 193$ min, $\tau_2 = 15.3$ min. El número de condición de la matriz K es $\gamma(K) = 113.4$, lo cual indica que la planta es mal condicionada.

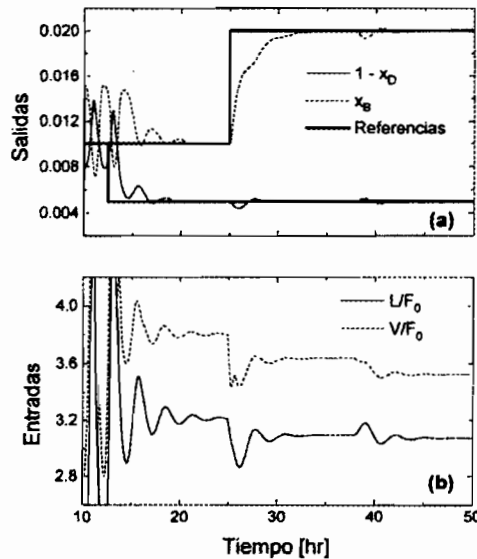


Figura 5.1

Sintonizado del controlador

Como se recordará, los controladores (5.14) y (5.6),(5.7) presentan la misma estructura. En ambos casos, los parámetros de sintonizado son la matriz de referencia A_r y la ganancia de estimación del error de modelado \mathcal{L} . Siguiendo las reglas de sintonizado con técnicas IMC para controladores PI (Morari and Zafiriou, 1989), tomaremos $A_r = \text{diag}(-1/\tau_{CL,1}, -1/\tau_{CL,2})$,

donde $\tau_{CL,1} < \tau_1$ y $\tau_{CL,2} < \tau_1$ son las constantes de tiempo a lazo cerrado que se desean obtener para cada uno de los lazos de la composición en el domo y en el fondo respectivamente. Observe que si A_r se elige de esta forma, la respuesta nominal a lazo cerrado será desacoplada. Para fijar el valor de \mathcal{L} recordaremos que $P_2 = -(A_r - \bar{T})/\mathcal{L}^2$. Dado que $A_r = \text{diag}(-1/\tau_{CL,1}, -1/\tau_{CL,2})$, tenemos que $P_{2,i} = (1/\tau_1 - 1/\tau_{CL,i})/\mathcal{L}^2$, $1 \leq i \leq 2$. De acuerdo con las reglas de sintonizado IMC, $P_{2,i} = \tau_1 + \theta$ donde θ es el tiempo de retardo del proceso. Siguiendo estas ideas, para obtener un sintonizado similar al menos para la parte integral, se propone elegir el valor de \mathcal{L} del orden de $[(\tau_1 - \tau_{CL}) / (\tau_1 + \theta)]^{1/2}$.

Para fijar los valores de los elementos de la matriz $B = \text{diag}(w_1, -w_2)$ tenemos dos opciones: (i) Fijar $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$ o (ii) De acuerdo con los resultados de la Proposición 2, fijar $w_1 = w_2 = w > 0$ donde $\lambda_{\min}(\bar{\mathcal{G}}) < w < \lambda_{\max}(\bar{\mathcal{G}})$ con el fin de no obtener un comportamiento dinámico a lazo cerrado demasiado oscilatorio. En las simulaciones que se describen a continuación se tomó $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$.

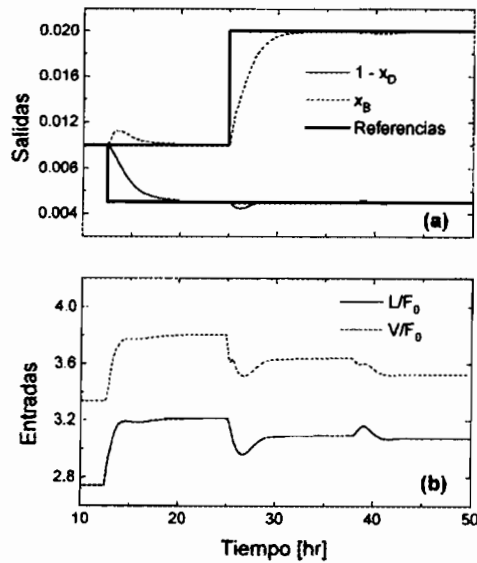


Figura 5.2

Desempeño del controlador

En esta sección se analizará el comportamiento dinámico del controlador MEC alrededor del punto de operación nominal cuando la planta es sometida a las siguientes perturbaciones y

cambios en los valores de referencia: $x_{D,ref}$ es cambiada de 0.99 a 0.995 para un tiempo $t = 750$ min, $x_{B,ref}$ es cambiada de 0.01 a 0.02 para un tiempo $t = 1500$ min, la composición de alimentación x_f se modifica de 0.5 a 0.4 para un tiempo $t = 2250$ min. Los cambios en los valores del punto de referencia se implementaron usando un filtro de primer orden con un tiempo característico de 10min. Las figuras 5.1 y 5.2 presentan, respectivamente, la respuesta a lazo cerrado para un controlador MEC cuando el estimado de la matriz de acoplamiento de entradas B se toma como el estimado de la matriz de acoplamiento \bar{K} dada por (5.16) y cuando B se toma como $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$. Debido a que \bar{K} tiene un número de condición muy grande, el controlador con $B = \bar{K}$ es muy sensible a errores de redondeo (figura 5.1). De hecho, el controlador induce sobredisparos excesivos, los cuales pueden ser vistos como inestabilidades prácticas. Como era de esperarse, el controlador con $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$ presenta un mejor desempeño que el controlador con $B = \bar{K}$. A partir de estos resultados podemos concluir que para columnas de destilación mal condicionadas, la elección $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$ conduce a un controlador MEC donde se han minimizado los efectos adversos ocasionados por una matriz de acoplamiento con alto número de condición. De hecho, el tomar a B como una matriz diagonal disminuye drásticamente los errores por redondeo. Para mostrar que la elección $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$ conduce a un controlador que puede satisfacer requerimiento de control muy estrictos, en la figura 5.3 se presentan los resultados de una simulación numérica para $\tau_{CL,1} = \tau_{CL,2} = 0.6\tau_1$ y $\tau_{CL,1} = \tau_{CL,2} = 0.2\tau_1$. En esta figuras se muestra que cuando una perturbación entra al sistema, es detectada por el estimador del error de modelado, la cual es compensada por el lazo de control retroalimentado, de tal forma que la desviación con respecto al valor de referencia es pequeña.

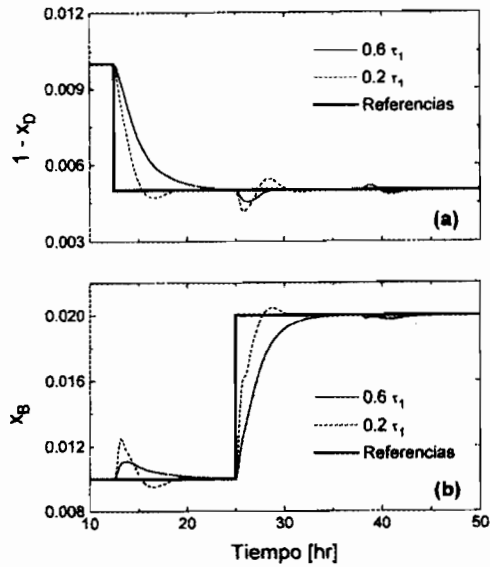


Figura 5.3

En las simulaciones anteriores, el estimado de la matriz de acoplamiento se tomó como $B = \text{diag}[K_{ii}\zeta_{ii}/\tau_1\tau_2]$. En la sección anterior se mostró que un controlador **MEC** basado en un modelo **TTC** tendrá un mejor desempeño debido a que la matriz de acoplamiento $\bar{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene un número de condición pequeño debido a la matriz de preconditionamiento $\zeta = [\zeta_{ij}]$. En general, este resultado coincide con resultados previamente reportados (Sagfors and Waller, 1995) donde se usaron controladores **PI** descentralizados para regular la operación de una columna de destilación.

En las secciones anteriores se afirmó que la respuesta a lazo cerrado es casi desacoplada. Esto es, si se hace un cambio en el valor de referencia en alguno de los lazos de control, la entrada de control manipulada actúa de tal forma que el otro lazo de control permanece casi sin cambio. En la figura 5.4 se muestra la respuesta del sistema a lazo cerrado cuando el valor de referencia para la composición en el destilado $x_{D,ref}$ se modifica de su valor nominal a $x_{D,ref} = 0.995$. Observe que la composición en el fondo x_B casi no se afecta por este cambio en el valor de referencia.

Efecto del tiempo de retardo en las entradas de control

Analicemos ahora el desempeño del controlador MEC cuando existen retardos en las entradas de control. Se supondrá que el tiempo de retardo θ para cada una de las entradas de control es igual a $\theta = 30$ min. En la figura 5.5 se presentan los resultados de una simulación cuando B se toma como $B = \text{diag}(\bar{k}_{11}, -\bar{k}_{22})$ y los valores k_{ij} se obtienen a partir de un modelo TTC. Observe que conforme se incrementa el valor de \mathcal{L} , se acentúa el comportamiento oscilatorio del sistema. Este es un comportamiento típico de sistemas con retardos en las entradas (Hale, 1968), puesto que cuando se usa una acción integral de alta ganancia, se excitan las dinámicas de alta frecuencia. Estas simulaciones apoyan la afirmación hecha en las secciones anteriores acerca de que el desempeño alcanzable por el estimador del error de modelado está limitado por los retardos en las entradas de control y las dinámicas no modeladas. Sin embargo, para valores moderados de \mathcal{L} , el desempeño del sistema a lazo cerrado sigue siendo aceptable.

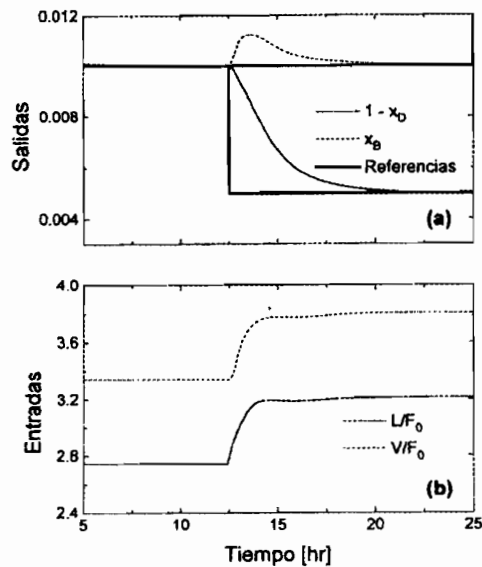


Figura 5.4

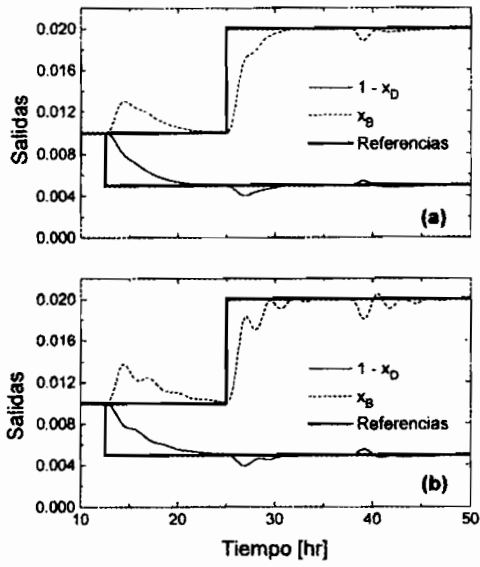


Figura 5.5

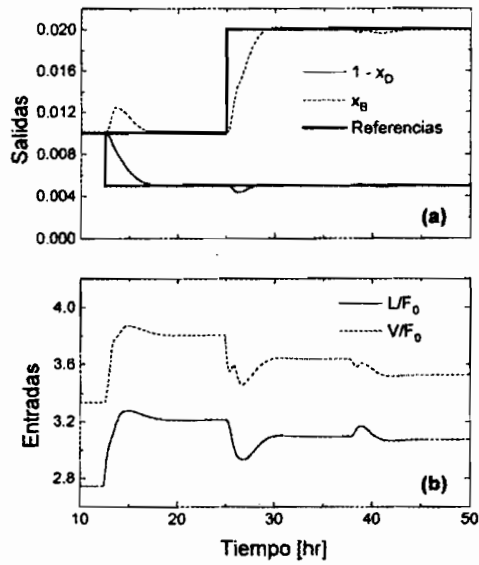


Figura 5.6

Efecto de incertidumbres en las variables manipuladas (L, V)

En la práctica, las acciones de control aliementadas al sistema ($\Delta L, \Delta V$) son diferentes a las calculadas por el controlador ($\Delta L_c, \Delta V_c$). Para mostrar el desempeño del controlador MEC cuando existen incertidumbres en las entradas, supondremos que los flujos molares de vapor y de líquido tienen un comportamiento (no modelado) de primer orden:

$$\Delta L = \Delta L_c / (5s + 1), \quad \Delta V = \Delta V_c / (10s + 1)$$

donde los retardos considerados son 5min y 10 min respectivamente. En la figura 5.6 se presentan los resultados de una simulación numérica para un controlador MEC basado en un modelo TTC. Como se puede observar, el desempeño del controlador es satisfactorio a pesar de las incertidumbres en las entradas descritas anteriormente.

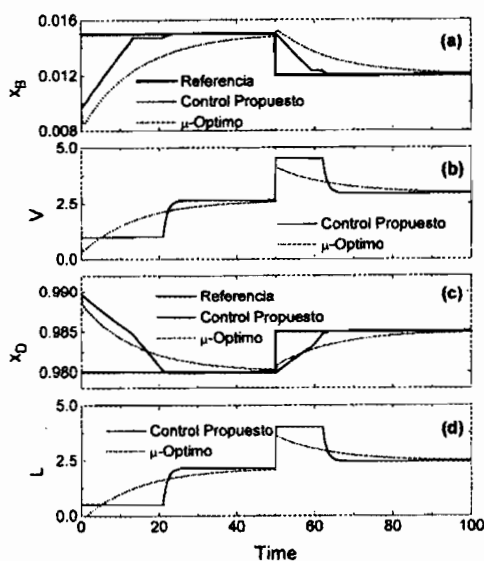


Figura 5.7

Comparación con otros esquemas de control

Usando el modelo TTC se diseñó un controlador μ -óptimo (Morari and Zafiriou, 1989). En la figura 5.7 se presenta la respuesta del sistema a lazo cerrado. La principal ventaja de un controlador MEC sobre un controlador μ -óptimo es que el primero regresa más rápidamente

al estado estacionario. En términos generales, ambos controladores presentan un desempeño similar. De hecho, los parámetros de controlador MEC, en particular $\tau_{CL,i}$ y \mathcal{L} , pueden ser sintonizados de tal forma que se obtenga un desempeño similar al de controlador μ -óptimo.

5.3 Control con un enfoque numérico

En la mayor parte de los esquemas de control basados en modelo, la ley de control se obtiene de la inversión exacta o aproximada del modelo de referencia, lo cual trae como consecuencia que para sistemas cuyo modelado no es preciso, el desempeño del sistema a lazo cerrado no sea satisfactorio. Para superar este problema se han propuesto diversos enfoques, que van desde el control adaptable (Stromborg et al., 1995) hasta el uso de redes neuronales (González et al., 1996, González et al., 1997c; Aguilar et al., 1997b).

Tomando un enfoque distinto, Ostojic (1996) propuso una metodología para construir una ley de control retroalimentado que solo usa información de tipo estructural sobre el modelo de referencia. Esta metodología ya ha sido utilizada para controlar sistemas químicos y eléctricos que tienen incertidumbres en el modelado (Gonzalez et al., 1998a; Gonzalez et al., 1998b). En este esquema de control sólo es necesario contar con un modelo que muestre la relación explícita entre la dinámica de la salida de control y la entrada de control. En la sección anterior se mostró que el modelo OTC (5.4) se puede expresar de la siguiente forma

$$\dot{y} = \bar{T}y + Bu + \eta(y, u, d(t)) \quad (5.17)$$

donde $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta x_D & \Delta x_B \end{bmatrix}^T$, $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta L & \Delta V \end{bmatrix}^T$. La matriz de acoplamiento de entradas es $\mathcal{K} = [k_{ij}] = [K_{ij}/\tau_1] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Las matrices T y B se definen como $T = \text{diag}(-\tau_1^{-1}, -\tau_1^{-1})$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. La incertidumbre es $\eta_i(y, u, d_i(t)) = -\Delta\tau_1^{-1}y_i + \Delta k_{i1}u_1 + \Delta k_{i2}u_2 + d_i(t)$, $1 \leq i \leq 2$, donde $\Delta\tau_1^{-1} = \tau_1^{-1} - \bar{\tau}_1^{-1}$ y $\Delta k_{ij} = k_{ij} - b_{ij}$.

Por otro lado, el modelo TTC (5.13) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\dot{y} = \bar{\mathcal{A}}_1 y + Bu + \eta(y, \mathfrak{z}_2, u, d(t)) \quad (5.18)$$

donde $\bar{\mathcal{A}}_1 = \text{diag}(-\bar{a}_1, -\bar{a}_1)$. En este caso, la incertidumbre es $\eta_i(y_i, \mathfrak{z}_{i2}, u, d_i(t)) = -\Delta a_1 y_i +$

$\Delta k_{i1}u_1 + \Delta k_{i2}u_2 + \mathfrak{z}_{i2} + d_1(t)$, $1 \leq i \leq 2$, y $\Delta a_1 = a_1 - \bar{a}_1$. \mathfrak{z}_2 es un vector de estados internos y $a_1 = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2$, $a_0 = 1/\tau_1\tau_2$. La matriz de acoplamiento de entradas es $\mathcal{K} = [k_{ij}] = [K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Es claro que en ambos casos, los modelos del sistema (5.17) o (5.18) se pueden escribir como:

$$\dot{y}_i = \varsigma_i(y_i, u_i, t), \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.19)$$

donde la estructura de $\varsigma_i(y_i, u_i, t)$ depende del modelo que se use. Observe que $\varsigma_i(y_i, u_i, t)$ no se expresó como una funcionalidad explícita de u_j donde $i \neq j$. Esto se debe a que la ley de control retroalimentado resultante u_i será función de la salida medida y_i y del tiempo exclusivamente.

5.3.1 Definición del Esquema de Control

Para desarrollar la ley de control, definamos el error de seguimiento como:

$$e_i = y_i^{ref} - y_i, \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.20)$$

Lo que se desea es obtener una ley de control que imponga a la planta un comportamiento lineal (de primer orden) sobre el error de seguimiento:

$$\frac{de_i}{dt} + ce_i = 0 \quad (5.21)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un coeficiente de diseño constante que se elige como $c > 0$.

Empleando la definición del error de seguimiento (5.20) y el modelo del sistema (5.19), la dinámica deseada sobre el error de seguimiento (5.21) se puede reescribir como:

$$\omega_i(u_i, t) = \frac{d}{dt} (y_i^{ref}) - \varsigma_i(y_i, u_i, t) + \lambda_i e_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.22)$$

donde $\omega_i(u_i, t)$ es una función que depende explícitamente de u_i , lo cual indica que es posible encontrar una ley de control $u_i(t)$ tal que se alcance el objetivo de control (5.21) mediante la solución de la ecuación algebraica no lineal variante en tiempo (5.22).

Desde un punto de vista matemático, $\omega_i(u_i, t) = 0$ se puede resolver de manera analítica o

numérica. La solución analítica define un mapeo no lineal del tipo:

$$u_i(t) = \mathfrak{g} \left(y_i^{ref}(t), y_i(t), e_i(t), t \right) \quad (5.23)$$

Desafortunadamente, esta fórmula depende del modelo del proceso (5.19), por lo cual, sólo se obtendrá una solución correcta a (5.22) si el modelo del proceso se conoce de manera exacta.

Por otro lado, la solución numérica de la ecuación (5.22) presenta algunas ventajas. En primer lugar está la robustez de los métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales. Esto es, los métodos numéricos obtienen una solución aproximada para cualquier conjunto de parámetros que satisfagan las condiciones de convergencia del método en particular. La segunda ventaja es que el método numérico puede generar una solución correcta empleando evaluaciones discretas de la función de iteración. Además, como se demostrará más adelante, no es necesario conocer los valores exactos de los parámetros de la planta, puesto que el esquema no hace una inversión explícita de la dinámica del sistema. En la siguiente subsección se diseñará una ley de control retroalimentado que emplea mediciones discretas de las concentraciones a regular.

5.3.2 Ley de control recursiva

Existen diferentes métodos para obtener la solución de una ecuación algebraica no lineal (Nakamura, 1992). Cada uno de estos métodos presenta ventajas bajo ciertas condiciones. Dentro de estos métodos se encuentran aquellos que emplean el Teorema del punto fijo, el cual genera un ley de control recursiva como la siguiente:

$$\begin{aligned} u_i(t_{k+1}) &= \mathfrak{F} (u_i(t_k), t_k) \\ u_i(t_{k+1}) &\in [u_i^{\min}, u_i^{\max}] \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde $u_i(t_{k+1})$ representa el valor de la entrada al tiempo $t_k = t_0 + k\delta$, δ es el tiempo de muestreo. k toma los valores $k = 1, 2, \dots, k_\infty$ y $[u_i^{\min}, u_i^{\max}]$ representa el intervalo dentro del cual están contenidos los valores que puede tomar la ley de control. Esta es una restricción que además de permitir encontrar la ley de control, corresponde con una situación real. Esto es, si recordamos que las entradas de control son flujos cuya velocidad está controlada en forma directa o indirecta por una válvula, físicamente no se puede abrir ni cerrar la válvula de manera

ilimitada.

Se puede llegar a una ley de control recursiva como (5.24) partiendo de encontrar una solución a (5.22) de varias formas. Una alternativa es el método de *Substituciones Sucesivas* dónde el mapeo $\mathfrak{F}(u_i(t_k), t_k)$ que aparece en (5.24) se calcula de la siguiente forma:

$$\mathfrak{F}(u_i(t_k), t_k) = u_i(t_k) + \lambda_i \omega_i(u_i(t_k), t_k) \quad (5.25)$$

donde λ_i es un parámetro constante. Empleando (5.25), la ley de control recursiva se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} u_i(t_{k+1}) &= u_i(t_k) + \lambda_i \omega_i(u_i(t_k), t_k) \\ u_i(t_{k+1}) &\in [u_i^{\min}, u_i^{\max}] \end{aligned} \quad (5.26)$$

El valor del parámetro λ_i se elige de tal forma que la ley de control (5.26) sea convergente. El que la ley de control recursiva (5.26) sea convergente significa que conforme $t_k \rightarrow \infty$, la dinámica a lazo cerrado del error de seguimiento se comportará como la dinámica deseada

$$\frac{de_i}{dt} = -ce_i, \quad 1 \leq i \leq 2$$

Ostojic (1996) demostró que (5.26) es convergente si se cumplen las siguientes dos condiciones (ver Teorema 1 en Ostojic, 1996):

Condición 1. El signo de $\frac{\partial}{\partial u_i}(\varsigma_i(y_i, u_i, t))$ es constante para cualquier valor de $u_i(t_{k+1}) \in [u_i^{\min}, u_i^{\max}]$.

Condición 2. $0 < \lambda_i \frac{\partial}{\partial u_i}(\varsigma_i(y_i, u_i, t)) < 2$

De acuerdo con las representaciones del sistema (5.17) y (5.18), es fácil concluir que ambas condiciones se cumplen trivialmente para ambos modelos, **OTC** y **TTC**; esto es:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\varsigma_i(y_i, u_i, t)) = k_{ii} \quad (5.27)$$

donde k_{ii} es el elemento de la matriz de acoplamiento. Para el modelo **OTC** (5.17), $k_{ij} = K_{ij}/\tau_1$, $1 \leq i, j \leq 2$, mientras que para el modelo **TTC** (5.18), $k_{ij} = K_{ij}\zeta_{ij}/\tau_1\tau_2$, $1 \leq i, j \leq 2$.

Es evidente que si k_{ii} nunca cambia de signo, el signo de $\frac{\partial}{\partial u_i} (\zeta_i(y_i, u_i, t))$ será constante.

Por otro lado, la segunda condición se cumple si:

$$0 < \lambda_i < \frac{2}{k_{ii}} \quad (5.28)$$

Para utilizar la desigualdad (5.28) no es necesario conocer los valores exactos de los parámetros del sistema. De hecho, basta con tener una cota máxima de los valores que pueden tomar k_{ii} , $1 \leq i \leq 2$.

Además, la desigualdad (5.28) es muy útil pues se pueden obtener algunos resultados interesantes de su análisis. En la desigualdad (5.28), la única diferencia entre un modelo **OTC** y un modelo **TTC** es el valor que toma el elemento ii de la matriz de acoplamiento $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Para el modelo **OTC**, $k_{ii} = K_{ii}/\tau_1$, $1 \leq i \leq 2$; mientras que para el modelo **TTC**, $k_{ii} = K_{ii}\zeta_{ii}/\tau_1\tau_2$, $1 \leq i \leq 2$. En la mayor parte de los casos prácticos, ζ_{ii} y τ_2 son del mismo orden de magnitud, esto es, $\mathcal{O}(\zeta_{ii}) = \mathcal{O}(\tau_2)$. Bajo estas condiciones, la evaluación de la desigualdad (5.28) es igual para un modelo **OTC** y para un modelo **TTC**.

Un punto importante que resta discutir es la estabilidad del sistema en lazo cerrado empleando la ley de control (5.27). Ostojic (1996) demostró que el sistema a lazo cerrado es globalmente estable si se satisfacen las dos condiciones para que la ley de control sea convergente y el valor del parámetro c se elige suficientemente pequeño, es decir, se pide que el modelo de referencia posea una dinámica lenta (ver Teorema 2 en Ostojic, 1996).

5.3.3 Evaluación de la ley de control

Para implantar la ley de control recursiva como se expresa en (5.26), es necesario conocer exactamente el valor de $\zeta_i(y_i, u_i, t)$ para poder evaluar a $\omega_i(u_i(t), t)$. Sin embargo, es posible obtener un estimado de $\omega_i(u_i(t), t)$ tomando en cuenta que la dinámica del error de seguimiento se define mediante la ecuación (5.21):

$$\omega_i(u_i, t) = \frac{de_i}{dt} + ce_i, \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (5.29)$$

donde el valor del error de seguimiento se obtiene como la resta de dos variables medidas $e_i = y_i^{ref} - y_i$.

Puesto que la ley de control recursiva que se propone en este trabajo es de tipo discreto, una forma de evaluar (5.29) es aproximar numéricamente la derivada temporal del error de seguimiento como sigue:

$$\frac{de_i(t_k)}{dt} \approx \frac{e_i(t_k) - e_i(t_{k-1})}{\delta} \quad (5.30)$$

de tal forma que la ley de control (5.26) se expresa como:

$$\begin{aligned} u_i(t_{k+1}) &= u_i(t_k) + \lambda_i \left(\frac{e_i(t_{k-1}) - e_i(t_k)}{\delta} + ce_i(t_k) \right), & 1 \leq i \leq 2 \\ u_i(t_{k+1}) &\in [u_i^{\min}, u_i^{\max}] \end{aligned} \quad (5.31)$$

La inicialización de la ley de control recursiva (5.31) se realiza tomando $u_i(t_0) = u_i^*$, donde es u_i^* el valor de la entrada de control i en el punto nominal de operación. Usando coordenadas de retardo, Alvarez-Ramírez et al. (1996) llegaron a una expresión similar para controlar una clase de osciladores caóticos. En este trabajo se señaló que el principal problema del esquema de control resultante, es la propagación del ruido de medición debido a la aproximación de las derivadas de la salida de control mediante esquemas de diferencias finitas. Por otro lado, usando balances calorimétricos, Aguilar et al. (1996) y Barrón et al. (1998) obtuvieron un esquema de control discreto similar al controlador (5.31). Estos autores mostraron que el problema de la propagación del ruido de medición afecta notablemente el desempeño del controlador. Observe que de acuerdo con el controlador (5.31), este problema se puede reducir tomando un valor de λ_i suficientemente pequeño.

Supongamos que se eligen los valores de λ_i y c como $\lambda_i = k_{ii}$ y $c = \tau_{CL,1}^{-1}$. Si el tiempo de muestreo se hace tender a cero ($\delta \rightarrow 0$), entonces la aproximación (5.30) tiende a la igualdad. Haciendo algunas manipulaciones sobre la ley de control (5.26), es fácil concluir que conforme $\delta \rightarrow 0$, entonces la ley de control (5.26) tenderá a la ley de control ideal:

$$u(t) \rightarrow u^I(t) = \bar{\mathcal{K}}^{-1}(A_r - \bar{T})y \quad (5.32)$$

donde $T = \text{diag}(-\tau_1^{-1}, -\tau_1^{-1})$, $\mathcal{K} = [k_{ij}] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $A_r = \text{diag}(-\tau_{CL,1}^{-1}, -\tau_{CL,1}^{-1})$. En otras palabras, tomando $\lambda_i = k_{ii}$ y $c = \tau_{CL,1}^{-1}$, conforme $\delta \rightarrow 0$, se recupera el comportamiento del control linealizante ideal por retroalimentación de estados.

El problema de tomar un tiempo de muestreo muy pequeño es que al aproximar la derivada

temporal del error de seguimiento, se magnifica el error asociado con el ruido de las mediciones de las composiciones. Por otro lado, dado que λ_i es un parámetro ajustable, su valor se puede fijar tan pequeño como sea necesario para obtener un desempeño satisfactorio a lazo cerrado.

5.3.4 Función de transferencia del controlador

En el Capítulo 4 se mostró que un controlador **PI** diagonal será estable incluso cuando se trabaja en diferentes puntos de operación (Skogestad and Morari, 1988b). Sin embargo, la principal desventaja de este esquema de control es que no toma en cuenta las fuertes interacciones entre los dos lazos de control. El objetivo de esta sección es comparar la estructura del controlador recursivo (5.31) con la de un controlador **PID** diagonal. Existen diferentes formas de obtener aproximaciones digitales de controladores analógicos. El método más común es aproximar el término integral mediante una regla cuadrada y el término derivativo con diferencias finitas. Empleando este método, la forma de velocidad para la versión digital de un controlador **PID** desacoplado es:

$$u_i(t_{k+1}) = u_i(t_k) + k_{p,i} \left(\left(1 + \frac{\delta}{\tau_{I,i}} + \frac{\tau_{D,i}}{\delta} \right) e_i(t_k) - \left(1 + \frac{2\tau_{D,i}}{\delta} \right) e_i(t_{k-1}) + \frac{\tau_{D,i}}{\delta} e_i(t_{k-2}) \right) \quad (5.33)$$

donde $k_{p,i}$, $\tau_{I,i}$ y $\tau_{D,i}$ son, respectivamente, la ganancia proporcional, la constante de tiempo integral y la constante de tiempo derivativo para el lazo de control i .

La ley de control (5.31) puede ser expresado como:

$$u_i(t_{k+1}) = u_i(t_k) + \lambda_i c \left(\left(1 + \frac{c^{-1}}{\delta} \right) e_i(t_k) - \frac{c^{-1}}{\delta} e_i(t_{k-1}) \right) \quad (5.34)$$

Si comparamos la ley de control (5.33) con la ley de control recursiva (5.34), obtenemos una guía que nos permite sintonizar los valores de $k_{p,i}$, $\tau_{I,i}$ y $\tau_{D,i}$ como:

$$\begin{aligned} k_{p,i} &= \lambda_i c \\ \tau_{I,i} &= \frac{1}{2} (c^{-1} - \delta) \\ \tau_{D,i} &= \frac{2\delta^2}{\delta + c^{-1}} \end{aligned}$$

Es interesante analizar el sintonizado anterior. Si el tiempo de muestreo se hace tender a cero ($\delta \rightarrow 0$), entonces la aproximación (5.30) tiende a la igualdad. En este caso, la constante de tiempo derivativo desaparece, esto es $\tau_{D,i} \rightarrow 0$, con lo que se recupera la estructura de controlador **PI** diagonal.

Supongamos ahora que la derivada temporal del error de seguimiento es aproximada como sigue:

$$\frac{de_i(t_k)}{dt} \approx \frac{e_i(t_k) - 2e_i(t_{k-1}) + e_i(t_{k-2})}{2\delta} \quad (5.35)$$

entonces, la ley de control recursiva toma la siguiente estructura

$$u_i(t_{k+1}) = u_i(t_k) + \lambda_i c \left(\left(1 + \frac{c^{-1}}{2\delta} \right) e_i(t_k) - \frac{c^{-1}}{\delta} e_i(t_{k-1}) + \frac{c^{-1}}{2\delta} e_i(t_{k-2}) \right) \quad (5.36)$$

En este caso, es claro que la constante de tiempo derivativo no es cero bajo ninguna circunstancia. De hecho, $\tau_{D,i} = c^{-1}/2$.

5.3.5 Ejemplo numérico y discusión de resultados

Para mostrar el desempeño a lazo cerrado del controlador **MEC**, se empleará un simulador no lineal de una columna de destilación binaria.

Para realizar las simulaciones de la columna de destilación se empleó el mismo simulador que se usó para evaluar el desempeño del controlador **MEC**. Los parámetros físicos del proceso, tales como número de platos, composiciones en el estado estacionario, etc., se muestran en la Tabla 5.1. En el Apéndice C se puede consultar información adicional sobre el simulador.

Sintonizado del controlador

Los parámetros de sintonizado del controlador (5.31) son λ_i , $1 \leq i \leq 2$ y c . Para sintonizar estos parámetros Usaremos los argumentos de la discusión anterior. Si consideramos que el tiempo de muestreo es pequeño (en general se recomienda usar $\delta < 0.2\tau_1$), entonces c^{-1} es del orden de la constante de tiempo integral, esto es, $\mathcal{O}(c^{-1}) = \mathcal{O}(\tau_I)$. De acuerdo con las reglas de sintonizado con técnicas **IMC** para controladores **PI** (Morari and Zafiriou, 1989), el valor de la constante de tiempo integral es igual al tiempo característico dominante del sistema. Para las simulaciones que se presentan a continuación se seleccionó el valor de c como $c = \tau_1^{-1}$.

La identificación de los parámetros de la matriz de ganancias en estado estacionario de la columna de destilación se realizó imponiendo, de manera independiente, cambios del 5% con respecto a los valores nominales que aparecen en la Tabla I, en los flujos molares de reflujo y de vapor. Los resultados de la identificación son:

$$K = \begin{bmatrix} 0.5058 & -0.3463 \\ 1.4520 & -1.0569 \end{bmatrix}$$

y las constantes de tiempo son $\tau_1 = 193$ min, $\tau_2 = 15.3$ min. Para estas condiciones, el sintonizado del controlador (5.31) es

$$c = 0.0052$$

$$0 < \lambda_1 < 763.2$$

$$-365.3 > \lambda_2 > 0$$

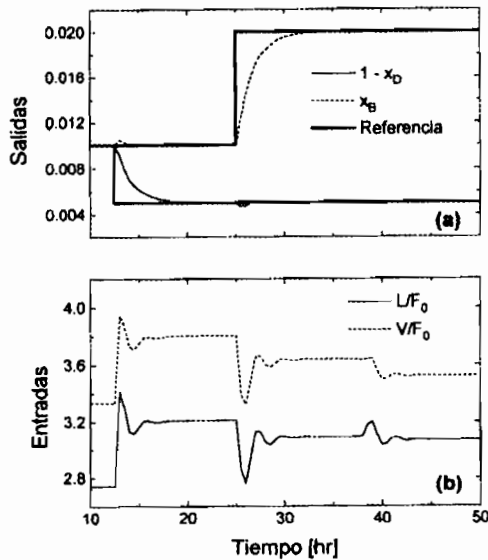


Figura 5.8

Desempeño del controlador

En esta sección se analizará el comportamiento dinámico del controlador recursivo (5.31) alrededor del punto de operación nominal cuando la planta es sometida a las siguientes perturbaciones y cambios en los valores de referencia: $x_{D,ref}$ es cambiada de 0.99 a 0.995 para un tiempo $t = 750$ min, $x_{B,ref}$ es cambiada de 0.01 a 0.02 para un tiempo $t = 1500$ min, la composición de alimentación x_f se modifica de 0.5 a 0.4 para un tiempo $t = 2250$ min. Los cambios en los valores del punto de referencia se implementaron usando un filtro de primer orden con un tiempo característico de 10min.

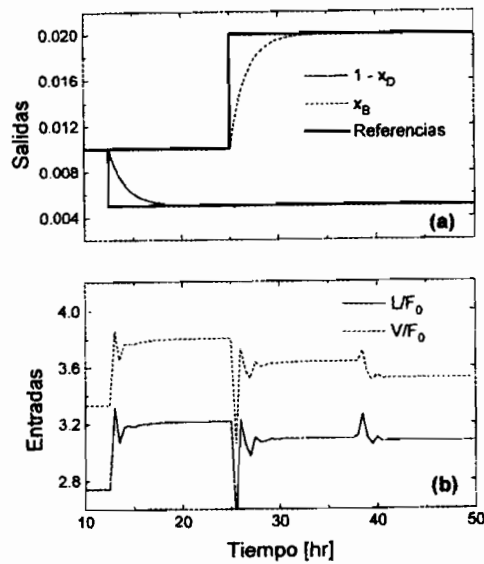


Figura 5.9

Las figuras 5.8 y 5.9 presentan la respuesta a lazo cerrado para el controlador recursivo (5.31) usando dos valores diferentes de los parámetros ajustables λ_i . Para generar la figura 5.8 se tomo $\lambda_1 = 350.0$ y $\lambda_2 = -180.0$, mientras que en la figura 5.9 $\lambda_1 = 500.0$ y $\lambda_2 = -250.0$. Como era de esperarse, el controlador con $\lambda_1 = 500.0$ y $\lambda_2 = -250.0$, es capaz de regular con más precisión ambas salidas de control que el controlador que usa $\lambda_1 = 350.0$ y $\lambda_2 = -180.0$. Sin embargo, las acciones de control son más severas en el primer caso. Este resultado coincide con Nakamura (1995), el cual señala que para el método de substituciones sucesivas, la velocidad de convergencia es casi óptima cuando

$$\lambda_i \approx \frac{k_{ii}}{\frac{\partial}{\partial u_i} (\varsigma_i(y_i, u_i, t))} = 1.0.$$

Para mostrar que el controlador recursivo (5.31) puede satisfacer requerimientos de control muy estrictos, en la figura 5.10 se presentan la comparación entre los resultados de las simulación numéricas a lazo cerrado para $c^{-1} = 0.5\tau_1$, $c^{-1} = 2.0\tau_1$ y $c^{-1} = 4.0\tau_1$. En esta figuras se muestra que cuando el valor de c es grande ($c^{-1} = 0.5\tau_1$), los sobredisparos son más pronunciados, aunque el estado estacionario se alcanza con mayor rapidez.

En todas estas figuras se muestra que cuando una perturbación entra al sistema, el controlador actúa de tal forma que es contrarrestada y la desviación con respecto al valor de referencia es pequeña.

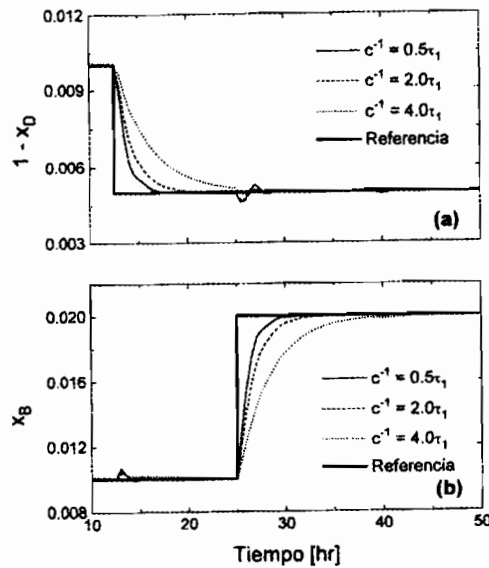


Figura 5.10

En las secciones anteriores se afirmó que la respuesta a lazo cerrado es casi desacoplada. Esto es, si se hace un cambio en el valor de referencia en alguno de los lazos de control, la entrada de control manipulada actúa de tal forma que el otro lazo de control permanece casi si cambio. En la figura 5.11 se muestra la respuesta del sistema a lazo cerrado cuando el valor de referencia para la composición en el destilado $x_{D,ref}$ se modifica de su valor nomina a $x_{D,ref} = 0.995$.

Observe que la composición en el fondo x_B casi no se afecta por este cambio en el valor de referencia.

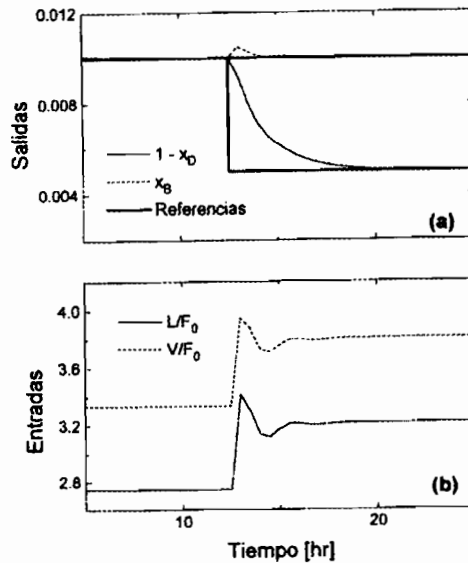


Figura 5.11

Efecto del tiempo de retardo en las entradas de control

Analicemos ahora el desempeño del controlador MEC cuando existen retardos en las entradas de control. Supondremos que el tiempo de retardo θ para cada una de las entradas de control es igual a $\theta = 50$ min. En la figura 5.12 se presentan los resultados de unas simulaciones para diferentes valores de λ_1 y λ_2 . En la figura 5.12a se tomaron $\lambda_1 = 700.0$ y $\lambda_2 = -350.0$, mientras que en la figura 5.12b se tomaron $\lambda_1 = 350.0$ y $\lambda_2 = -180.0$. Observe que conforme se incrementa los valores de $|\lambda_i|$, se acentúa el comportamiento oscilatorio del sistema. Este es un comportamiento típico de sistemas con retardos en las entradas (Hale, 1968). Como se puede observar, el desempeño del controlador es satisfactorio a pesar de los retardos en las entradas de control.

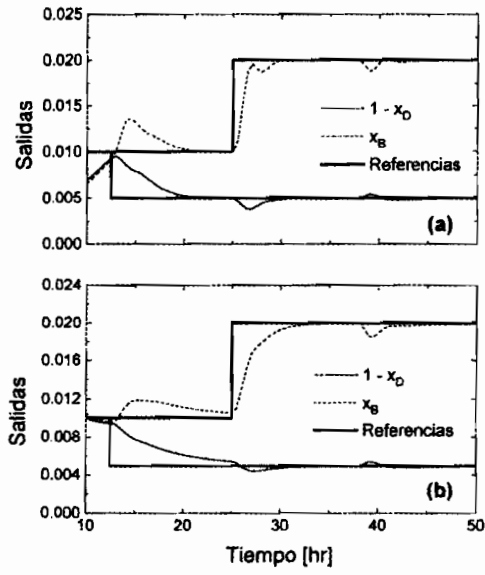


Figura 5.12

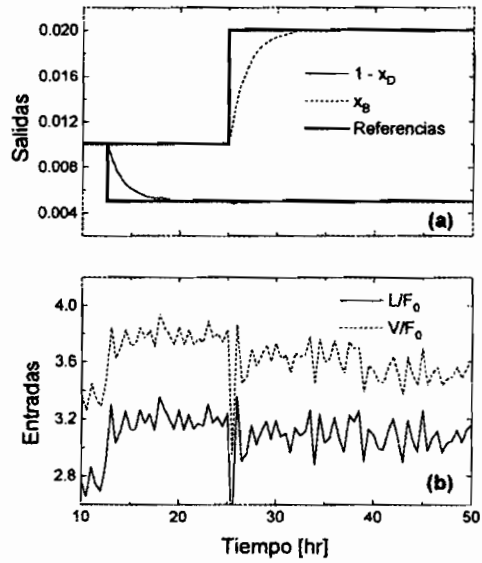


Figura 5.13

Efecto del ruido en las mediciones

Consideremos ahora el efecto que tiene el ruido en las mediciones sobre el desempeño del controlador recursivo (5.31). Suponga que la salida medida y_m es $= y_m + v$, donde v es una señal aleatoria Gaussiana con una amplitud del 4%. En la figuras 5.13 y 5.14 se presenta el comportamiento del sistema ante mediciones ruidosas para diferentes valores de λ_1 y λ_2 . En la figura 5.13 se $\lambda_1 = 700.0$ y $\lambda_2 = -350.0$, mientras que en la figura 5.14 se tomaron $\lambda_1 = 350.0$ y $\lambda_2 = -180.0$. Observe que conforme se incrementa los valores de $|\lambda_i|$, las salidas de control se regulan con mayor precisión pero las entradas de control tienen variaciones muy fuertes. Una forma de eliminar este efecto es filtrar las entradas de control. Como es sabido, si se filtran las entradas de control se induce un tiempo de retardo en los controladores. Sin embargo, en el punto anterior se mostró que el esquema de control recursivo es robusto ante retardo en las entradas de control. Por lo tanto, se puede esperar que si se filtra la entrada de control cuando existen mediciones ruidosas de la salida de control, el esquema de control ser estable y tendrá un buen desempeño.

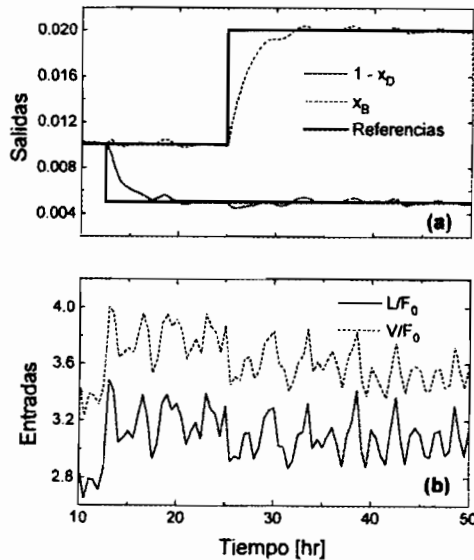


Figura 5.14

5.4 Conclusiones

El principal resultado del capítulo anterior es que para el controlador **PI** diagonal, la condición de *controlabilidad integral* se satisface trivialmente. Esto implica que un controlador **PI** diagonal será estable incluso cuando se trabaja en diferentes puntos de operación (Skogestad and Morari, 1988b). Sin embargo, la principal desventaja de este esquema de control es que no toma en cuenta las fuertes interacciones entre los dos lazos de control. Partiendo del hecho que la estructura de control **PI** diagonal es probablemente la más empleada a nivel industrial, con el fin de mejorar el desempeño del controlador **PI** diagonal, en este capítulo se presentaron dos esquemas de control robusto para regular las composiciones en el domo y en el fondo de una columna de destilación, usando como entradas de control los flujos molares de recirculado y de vapor. Ambos esquemas constituyen una contribución de esta tesis al estado del arte. Se demostró también que la realización en el dominio de Laplace de ambos esquemas de control es similar a un controlador **PID** diagonal. El desempeño de ambos esquemas de control se mostró mediante simulaciones numéricas.

El primer esquema de control es una extensión a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (**MIMO**) del controlador por compensación del error de modelado (**MEC**) presentado en el capítulo 3. El esquema de control resultante está constituido por una retroalimentación nominal y un estimador de incertidumbres de cuarto orden. Como una característica importante del esquema de control resultante, es que el número de parámetros es pequeño y su sintonizado se puede realizar usando información física del proceso.

En el segundo esquema, la ley de control se obtiene usando un proceso iterativo que se basa en las metodologías de mapeos de contracción. A pesar de que su implantación se realiza utilizando mediciones discretas de las salidas de control, este esquema tiene como ventaja que, ante mediciones ruidosas, su desempeño no se degrada tan fuertemente como en el caso de los esquemas de control de alta ganancia.

Por otro lado, ambos esquemas de control tienen el inconveniente de que para su implantación, es necesario conocer una cota máxima de las incertidumbres en el modelo (para asignar los valores de la matriz B en el primer esquema, y para satisfacer la condición 2 de convergencia del segundo esquema). Obtener esta cota a nivel experimental puede llegar a ser una tarea muy compleja.

Considerando que es posible identificar con cierto grado de certidumbre los elementos de la matriz de ganancias en estado estacionario, en el siguiente capítulo se presenta la forma de evaluar si un esquema de control **PID** con desacopladores basado en un modelo nominal, será robustamente estable.

5.5 Apéndice A

5.5.1 Cálculo de $\phi(y, e, t) \in \mathbb{R}^2$.

Recordando que

$$\begin{aligned}\varphi(y, u, t) &= \Delta T(\bar{T}y + Bu + \eta) + \Delta \mathcal{K}u^{(1)} + d^{(1)} \\ &= \Delta T(A_r y + e_2) + \Delta \mathcal{K}u^{(1)} + d^{(1)}\end{aligned}$$

Por otro lado, $u(y, \eta) = B^{-1} [(A_r - \bar{T}) - \bar{\eta}]$. Usando la Regla de la Cadena, obtenemos la derivada temporal de la entrada de control:

$$u^{(1)} = B^{-1} [(A_r - \bar{T})(A_r y + e_2) - \mathcal{L}e_1]$$

Por tanto

$$\varphi(y, e, t) = \Delta T(A_r y + e_2) + \Delta \mathcal{K} \{ B^{-1} [(A_r - \bar{T})(A_r y + e_2) - \mathcal{L}e_1] \} + d^{(1)} \quad (5.A.1)$$

5.5.2 Cálculo de la dinámica del error $\dot{e} = \mathcal{L}He + \psi(y, e, t)$

Partiendo de las definiciones de los errores $e_1 = \mathcal{L}(y - z)$ y $e_2 = \eta - \bar{\eta}$ y las ecuaciones (5.6), obtenemos $\dot{e}_1 = \mathcal{L}(-2e_1 + e_2)$ y $\dot{e}_2 = -\mathcal{L}e_1 + \varphi(y, u, t)$. Tomando $\varphi(y, u, t)$ en términos de las coordenadas obtenemos $\dot{e}_2 = -\mathcal{L}KB^{-1}e_1 + \Phi(e, y, t)$, donde

$$\Phi(e, y, t) = \Delta T(A_r y + e_2) + \Delta \mathcal{K} \{ B^{-1} [(A_r - \bar{T})(A_r y + e_2) + e_2] \} + d^{(1)} \quad (5.A.2)$$

En notación vectorial, $\dot{e} = \mathcal{L}He + \psi(y, e, t)$ donde $\psi(y, e, t) = (0, 0, \phi(y, e, t)) \in \mathbb{R}^4$.

5.5.3 Prueba de la Proposición 1

Por hipótesis, las matrices A_r y H son Hurwitz. Entonces, existen las matrices positivas definidas P_y y P_e que satisfacen, respectivamente, las ecuaciones de Lyapunov $A_r^T P_y + P_y A_r = -I_{2 \times 2}$ y $H^T P_e + P_e H = -I_{4 \times 4}$. Tomemos la siguiente función candidato de Lyapunov $W(y, e) =$

$(y^T P_y y + e^T P_e e) / 2$. La derivada temporal de $W(y, e)$ es

$$\dot{W} = -y^T y - \mathcal{L} e^T e + y^T P_y e_2 / 2 + e^T P_e \psi(y, e, t) / 2$$

Dado que la variación de $d(t)$ se supuso acotada, tenemos que $\|d^{(1)}\| < \gamma_3$. Por otra parte, $\phi(y, e, t)$ es una función lineal de y y e . Por lo tanto existe dos constantes positivas γ_1 y γ_2 tales que

$$\|\psi(y, e, t)\| \leq \gamma_1 \|y\| + \gamma_2 \|e\| + \gamma_3$$

La desigualdad anterior puede ser usada para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -\|y\|^2 - \mathcal{L} \|e\|^2 + \lambda_{\max}(P_y) \|y\| \|e\| + \gamma_1 \lambda_{\max}(P_e) \|e\|^2 + \\ & \gamma_2 \lambda_{\max}(P_e) \|y\| \|e\| + \gamma_3 \lambda_{\max}(P_e) \|e\| \end{aligned} \quad (5.A.3)$$

donde $\lambda_{\max}(P_y)$ y $\lambda_{\max}(P_e)$ denotan los máximos valores propios de las matrices P_y y P_e respectivamente. Tomemos ahora la parte cuadrática de (5.A.3):

$$\begin{aligned} Q(\|y\|, \|e\|; \mathcal{L}^2) = & -\|y\|^2 - (\mathcal{L} - \gamma_1 \lambda_{\max}(P_e)) \|e\|^2 + \\ & (\lambda_{\max}(P_y) + \gamma_2 \lambda_{\max}(P_e)) \|y\| \|e\| \end{aligned}$$

la cual tiene asociada la siguiente matriz simétrica

$$- \begin{bmatrix} 1 & -(\lambda_{\max}(P_y) + \gamma_2 \lambda_{\max}(P_e)) / 2 \\ -(\lambda_{\max}(P_y) + \gamma_2 \lambda_{\max}(P_e)) / 2 & \mathcal{L} - \gamma_1 \lambda_{\max}(P_e) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es negativa definida para $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$ donde

$$\mathcal{L}^* = \gamma_1 \lambda_{\max}(P_e) + (\lambda_{\max}(P_y) + \gamma_2 \lambda_{\max}(P_e)) / 4$$

con lo que $Q(\|y\|, \|e\|; \mathcal{L}^2)$ es negativa para todo (y, e) .

Por otro lado, dado que $0 \leq \gamma_3 \lambda_{\max}(P_e) \leq \infty$, esto muestra que $y(t)$, $e(t)$ y por tanto todos los estados internos, estarán acotados para $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$. Con esto se prueba la primera parte de la Proposición 1. La segunda parte (estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado) es una

consecuencia del hecho de que si $\tau_3 = 0$, la derivada temporal de $W(y, e)$ es negativa para todo $y \in \mathbb{R}^2$ y $e \in \mathbb{R}^4$.

5.5.4 Prueba de la Proposición 2

Usando MATHEMATICA[®], los valores propios de la matriz H son

$$-1 \pm \sqrt{2(2w - g_{22} - g_{11}) \pm \frac{1}{4w} \sqrt{g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22} + g_{22}^2 + 4g_{12}g_{21}}}$$

Los cuatro valores propios se obtienen tomando las combinaciones $\{+, -\}$ en la expresión anterior. Las condiciones suficientes para que la matriz H sea Hurwitz es que $w > 0$ y

$$2(2w - g_{22} - g_{11}) \pm \frac{1}{4w} \sqrt{g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22} + g_{22}^2 + 4g_{12}g_{21}} < 0 \quad (5.A.4)$$

Si las condiciones anteriores se satisfacen, los cuatro valores propios de la matriz H tendrán parte real negativa igual a -1. Los valores propios de la matriz \mathcal{G} son

$$\frac{1}{2} \left(g_{22} + g_{11} \pm \sqrt{g_{11}^2 - 2g_{11}g_{22} + g_{22}^2 + 4g_{12}g_{21}} \right) \quad (5.A.5)$$

Por hipótesis $g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} > 0$. También $g_{ij} > 0$, $1 \leq i, j \leq 2$. Entonces los valores propios de \mathcal{G} tienen parte real positiva y $\lambda_{\min}(\mathcal{G})$ se obtiene al tomar la opción negativa de la ecuación (5.A.5). Combinando (5.A.4) y (5.A.5), obtenemos que la condición suficiente para que la matriz H sea Hurwitz es tomar $W > 0$.

5.6 Apéndice B

Se dice que la función de transferencia $G_2(s)$ es de fase mínima si todos sus ceros tienen parte real negativa (Sastry and Bodson, 1989). Es fácil verificar que $G_2(s)$ es de fase mínima si el polinomio $\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 = 0$ es Hurwitz, donde $\beta_0 = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}$, $\beta_1 = K_{11}K_{22}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) - K_{12}K_{21}(\zeta_{12} + \zeta_{21})$ y $\beta_2 = K_{11}K_{22}\zeta_{11}\zeta_{22} - K_{12}K_{21}\zeta_{12}\zeta_{21}$. Una condición necesaria y suficiente para que el polinomio $\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 = 0$ sea Hurwitz es que $sign(\beta_0) = sign(\beta_1) = sign(\beta_2)$. Por ejemplo, tomando los valores de los parámetros del modelo de segundo orden reportado por

Sagfors and Waller (1995) (Ec. 32 en el artículo), obtenemos los siguientes valores $\beta_0 = -0.0274$, $\beta_1 = -5.75$ y $\beta_2 = -79.89$, lo que implica que la columna de destilación es de fase mínima.

5.7 Apéndice C

La técnica para simular la columna de destilación está basada en el método presentado por Naphtali and Sanholm (1971), donde las ecuaciones de balance por componente, las condiciones de equilibrio de fase y el perfil para la ecuación de balance de energía se reformulan para usar una fórmula de integración trapezoidal y resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante mediante el método de Newton-Raphson. El hecho de que el Jacobiano resulte una matriz tridiagonal simplifica enormemente la inversión de la matriz.

Capítulo 6

Controladores PI con desacopladores

La mayor parte de la información acerca de las propiedades más importantes para fines de control de un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (MI-MO) y en particular la evaluación de la condición de controlabilidad integral para sistemas de control descentralizados, dependen de la matriz de ganancias en estado estacionario. Es un hecho bien conocido que los valores de los elementos de la matriz de ganancias en estado estacionario se modifican considerablemente cuando se cambia el punto de operación. En este capítulo se muestra que las condiciones suficientes que garantizan que para un estimado $W(0)$ de la matriz de ganancias en estado estacionario $G(0)$ se satisface la condición de controlabilidad integral, son equivalentes a las condiciones suficientes que garantizan que la matriz $-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable. Dado que en general, $G(0)$ se puede expresar como una matriz de intervalos, en este Capítulo se presentan las condiciones suficientes que garantizan que la matriz de intervalos $-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable.

6.1 Introducción

En el capítulo anterior se estudió el comportamiento de controladores **PI** diagonales. Con el fin de mejorar la respuesta a lazo cerrado del controlador **PI** diagonal, se ha propuesto el uso de desacopladores (Lau et al., 1985; Musch and Steiner, 1995). Se ha encontrado que en general, el controlador **PI** con desacopladores muestra un excelente desempeño si no hay incertidumbres en el modelo y se trabaja en el punto de operación donde el sistema fue identificado. Este esquema es equivalente a diseñar un controlador por inversión del modelo con un tiempo característico (**OTC**):

$$\begin{bmatrix} \Delta x_D \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \tau s} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \tau s} G(0) \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

donde $G(0) = [k_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ es la matriz de ganancias en estado estacionario y τ es el tiempo característico dominante. Con respecto a este modelo se puede mencionar que debido a su sencillez y a que la identificación de los parámetros del modelo se puede realizar con relativa "exactitud", es el que más frecuentemente se usa para diseñar esquemas de control (Jacobsen y Skogestad, 1994). Sin embargo, es un hecho bien conocido que los valores de las ganancias en estado estacionario cambian drásticamente aún para desviaciones moderadas en el punto de operación (Skogestad and Morari, 1988b). Por otro lado, también se ha encontrado que el controlador **PI** con desacopladores es muy sensible a incertidumbres en el modelo y en las entradas de control. De hecho, en algunos casos el sistema puede ser inestable en lazo cerrado. Este hecho se puede entender fácilmente se se recuerda que el sistema (6.1) es una realización en el dominio de la Laplace del modelo linealizado de la columna de destilación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$ son las composiciones en cada plato, $\mathbf{u} = (\Delta L, \Delta V)^T$ son las variables manipuladas y $\mathbf{y} = (\Delta x_D, \Delta x_B)^T$ son las variables controladas. La matriz $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$

es tridiagonal:

$$\begin{aligned}
 a_{i,i+1} &= L_{i+1}/\mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\
 a_{i,i} &= -(L_i + K_i V_i)/\mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\
 a_{i,i-1} &= K_{i-1} V_{i-1}/\mathcal{H}_i & i \neq 1
 \end{aligned}$$

La matriz de entradas $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ está dada como

$$\begin{aligned}
 b_{i,1} &= (x_{i+1} - x_i)/\mathcal{H}_i & i \neq N+1 \\
 b_{N+1,1} &= 0 & i \neq N+1 \\
 b_{i,2} &= -(y_i - y_{i-1})/\mathcal{H}_i & i \neq N+1, i \neq 1 \\
 b_{N+1,2} &= 0 & i \neq N+1, i \neq 1 \\
 b_{1,2} &= (y_1 - x_1)/\mathcal{H}_1
 \end{aligned}$$

La matriz de salidas \mathbf{C} es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando este modelo es fácil darse cuenta que $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Considerando que $\mathbf{G}(s)$ depende de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , las cuales a su vez dependen del punto nominal de operación, un controlador que sea estable en un cierto punto de operación fijo, no necesariamente será estable en otro punto de operación, dado que existe una diferencia entre la planta y el modelo identificado. El problema de estabilización robusta consiste en diseñar una ley de control que asegure que el sistema en lazo cerrado será estable en cualquier punto de operación que pueda alcanzar la columna de destilación.

En los esquemas de control para sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (**MIMO** por sus siglas en inglés), las diferencias entre el modelo de referencia y la planta tienen una gran importancia sobre la estabilidad y el desempeño del sistema en lazo cerrado. Recientemente se ha propuesto que una forma de incrementar la robustez de los esquemas de control basados en modelo, es incluir explícitamente la descripción de las incertidumbres en el diseño del controlador (Koung and MacGregor, 1993). Sin embargo, la imposibilidad de obtener una

caracterización exacta de las incertidumbres conduce a la obtención de esquemas demasiado conservadores.

Entre las causas más importantes que originan las diferencias entre el modelo y la planta se pueden mencionar las siguientes: relaciones no lineales entre las entradas y las salidas del proceso, incertidumbres en las entradas de control, una mala identificación de los parámetros del modelo, parámetros variantes con el tiempo, uso de modelos de orden reducido, etc. Una buena parte de estas fuentes de diferencias en el modelo son de naturaleza estocástica, por lo que su caracterización sólo se puede llevar a cabo suponiendo que son incertidumbres no estructuradas y de norma acotada; esto es, la matriz de transferencia se expresa como

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s) &= \tilde{\mathbf{G}}(s) + \Delta G_A(s) \\ \mathbf{G}(s) &= \tilde{\mathbf{G}}(s) (\mathbf{I} + \Delta G_I(s)) \\ \mathbf{G}(s) &= (\mathbf{I} + \Delta G_O(s)) \tilde{\mathbf{G}}(s)\end{aligned}$$

donde $\Delta G_A(s)$, $\Delta G_I(s)$ y $\Delta G_O(s)$ son, respectivamente, incertidumbres aditiva, multiplicativa de entradas y multiplicativa de salidas. Este enfoque ha conducido al desarrollo de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales multivariables (Morari and Zafriou, 1989). Algunos investigadores (Doyle et al., 1992; Skogestad et al., 1988c) han encontrado que las incertidumbres en la entrada imponen restricciones mucho más severas que las incertidumbres en las salidas. De acuerdo con Morari and Zafriou (1989), una condición necesaria y suficiente para que el esquema de control sea robustamente estable es que la norma de la incertidumbre multiplicativa de entrada sea menor que uno.

Para sistemas mal condicionados como las columnas de destilación por ejemplo, el considerar que todas las incertidumbres son de naturaleza no estructurada lleva a la conclusión de que virtualmente no se deben utilizar controladores por inversión de modelo, dado que la magnitud del error que puede desestabilizar al proceso es extremadamente pequeña (Skogestad and Morari, 1988b). Por ejemplo, suponiendo que los elementos de la matriz de transferencia son independientes, Skogestad et al. (1988c) reportaron que un error relativo mayor al 0.7% puede volver singular la matriz de transferencia. A pesar de esto, en la práctica se ha encontrado que este tipo de controladores son bastante robustos.

Por otro lado, la relación no lineal entre las entradas y las salidas del proceso es de naturaleza determinística, la cual depende casi exclusivamente de factores físico-químicos característicos del proceso. Por lo tanto, este tipo de diferencias se deben estudiar como incertidumbres altamente estructuradas (Koung and MacGregor, 1991; Skogestad et al., 1988b). En este enfoque se asume que las incertidumbres en el modelado son de tipo estructurado y se parte del hecho que el comportamiento en estado estacionario de la mayor parte de los sistemas **MIMO** se puede modelar usando variables de desviación como

$$y_i = f_i(u_1, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Haciendo un desarrollo en series de Taylor del modelo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} u_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial (\partial f_i / \partial u_k)}{\partial u_j} u_k \right) u_j + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_{ij} u_j) + \sum_{j=1}^n (\Delta_{ij}(u_1, \dots, u_2) u_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_{ij} + \Delta_{ij}) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial (\partial f_i / \partial u_k)}{\partial u_j} u_k + \mathcal{O}(h^2)$$

El sistema anterior se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + \Delta g_{11} & \dots & g_{1n} + \Delta g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} + \Delta g_{n1} & \dots & g_{nn} + \Delta g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \tilde{G} [I + \Delta G_I] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Observe que aunque la descripción de las incertidumbres usando un enfoque estructurado y no estructurado son similares, la forma de determinar las condiciones que garantizan la estabilidad de un esquema de control basado en un modelo de referencia no es la misma para ambos enfoques.

Koung and Macgregor (1992) encontraron que una condición suficiente para que el sistema

anterior sea robustamente estable es que la norma de la incertidumbre multiplicativa de entrada sea menor que uno. Este resultado fue obtenido usando un enfoque estructurado y es similar al obtenido por Morari and Zafiriou (1989), los cuales usaron un enfoque no estructurado. Sin embargo, existe una diferencia fundamental. En el enfoque no estructurado, la condición anterior es necesaria y suficiente, mientras que en el enfoque estructurado es sólo suficiente. Esto implica que los resultados obtenidos con el enfoque no estructurado serán más conservadores que los resultados obtenidos con el enfoque estructurado. Por tanto, en este capítulo se usará un enfoque estructurado para describir las incertidumbres asociadas con la función de transferencia.

El objetivo de este capítulo es presentar una metodología que permita determinar las condiciones para las cuales un esquema de control retroalimentado con acción integral basado en un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$, será estable a lazo cerrado cuando se aplica a una columna de destilación operando en un cierto conjunto de condiciones de operación. Esto es, el problema a resolver es determinar las condiciones para las cuales, dado un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$, la condición de controlabilidad integral se satisface para cualquier condición de operación. Posteriormente, se estudia el problema de obtener un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$ que satisfaga la condición de controlabilidad integral a partir de la identificación de las matrices de ganancias en estado estacionario para el conjunto de condiciones de operación que puede alcanzar la columna de destilación.

6.2 Planteamiento del problema

El problema más importante al diseñar un controlador basado en modelo para una columna de destilación es obtener un modelo que retenga la *direccionalidad* de la planta. Durante la última década se han realizado un gran número de investigaciones encaminadas a caracterizar la *direccionalidad* de la función de transferencia de la columna de destilación.

Una de las formas más aceptadas de caracterizar cuantitativamente la *direccionalidad* de la columna de destilación es a través de la descomposición en valores singulares (SVD) de la función de transferencia en estado estacionario:

$$G(0) = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (6.2)$$

donde \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$, \mathbf{V}^T son matrices de tamaño 2×2 . \mathbf{U} y \mathbf{V}^T son matrices ortogonales que se pueden expresar mediante funciones trigonométricas:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\max} & 0 \\ 0 & \sigma_{\min} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

en las matrices anteriores, σ_{\max} y σ_{\min} son los valores singulares máximo y mínimo de $G(0)$ respectivamente y $\theta, \phi \in (0, 90^\circ)$.

Koung and MacGregor (1992) encontraron que para una mezcla de componentes específica, una columna de destilación binaria tiene en cualquier punto de operación los mismos valores de \mathbf{V}^T ; esto es, un cambio en el punto de operación modifica exclusivamente los valores singulares ($\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$) y la matriz \mathbf{U} .

Tomando como base este resultado es fácil mostrar que si la columna de destilación tiene la siguiente estructura

$$G(0) = \sigma_{1 \max} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1^{-1}(G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

y se toma un modelo de referencia con el mismo valor de $\phi_2 = \phi_1$

$$W(0) = \sigma_{2 \max} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1}(W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

la condición de *controlabilidad integral* se satisface para cualquier conjunto $(\theta_1, \gamma_1, \theta_2, \gamma_2)$:

$$\text{Re}(\lambda_i(G(0)W^{-1}(0))) > 0 \quad i = 1, 2$$

El principal problema con las columnas de destilación es que el valor de ϕ no puede ser estimado con suficiente exactitud. Por otro lado, en el capítulo 4 se mostró que a pesar de que existan incertidumbres en el modelo, es posible obtener una matriz de referencia que permite diseñar un controlador con acción integral que sea estable a lazo cerrado. Sin embargo, para una columna de destilación operando en un punto de operación fijo $(\theta_1, \gamma_1, \phi_1)$ constantes, el número de combinaciones de $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2)$ que generan una matriz de referencia que satisface la condición de

controlabilidad integral es muy grande. De hecho, Koung and MacGregor (1992) concluyeron que no existe una condición suficiente que asegure que la condición de *controlabilidad integral* se cumplirá cuando existen diferencias significativas entre los ángulos de la matriz de la columna (θ_1, ϕ_1) y los ángulos de la matriz de referencia (θ_2, ϕ_2) .

Supongamos que mediante alguna metodología como la propuesta por Koung y MacGregor (1993) o por Li and Lee (1996) se pueden identificar los elementos de la matriz de ganancias en estado estacionario en el rango de condiciones de operación que puede alcanzar la columna de destilación. Recuerde que este rango de condiciones de operación quedará determinado por la pureza de los productos que se desea obtener. Entonces, la matriz de ganancias en estado estacionario $G(0)$ para cualquier condición de operación estará contenida en una matriz de intervalos $G^I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Esto es, una matriz en la cual lo único que se sabe es que cada uno de sus elementos están contenidos en un cierto intervalo cerrado (Moore, 1966). Comúnmente la matriz G^I se expresa como

$$G^I = [\underline{G} \quad \overline{G}] = \left\{ |g_{ij}^I| \mid \underline{g}_{ij} \leq g_{ij}^I \leq \overline{g}_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \right\} \quad (6.5)$$

donde $\underline{G} = [\underline{g}_{ij}]$ y $\overline{G} = [\overline{g}_{ij}]$.

En resumen, los problemas que se estudian en este capítulo son:

1. Dado un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$, determinar si satisface la condición de controlabilidad integral

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(G(0)W^{-1}(0))) > 0 \quad i = 1, 2$$

en cualquier punto de operación; esto es, determinar si satisface la condición de controlabilidad integral para cualquier $G(0) \in G^I$.

2. Dada la matriz de intervalos de ganancias en estado estacionario G^I , obtener un estimado $W(0)$ que satisfaga la condición de controlabilidad integral para cualquier $G(0) \in G^I$.

6.3 Condiciones para alcanzar controlabilidad integral

Definamos a $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ como

$$Q = G(0)W^{-1}(0) \quad (6.6)$$

Los valores propios de la matriz Q son

$$\lambda_{1,2}(Q) = \frac{Tr(Q) \pm \sqrt{Tr^2(Q) - 4 \det(Q)}}{2} \quad (6.7)$$

Supongamos que la matriz en estado estacionario de la planta $G(0)$ y la matriz de referencia $W(0)$ presentan las siguientes propiedades:

Propiedad 1. $\det(G(0)) < 0$; $\det(W(0)) < 0$

Propiedad 2. $\det(G^{-1}(0)) < 0$; $\det(W^{-1}(0)) < 0$

La mayor parte de las columnas de destilación cumplen con la propiedad 1 (Skogestad et al, 1988). La segunda propiedad se verifica trivialmente. Si $G(0)$ tiene la siguiente estructura

$$G(0) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

su determinante es $\det(G(0)) = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$. La estructura de $G^{-1}(0)$ es

$$G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} & -\frac{k_{12}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \\ -\frac{k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} & \frac{k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \end{bmatrix}$$

su determinante es $\det(G^{-1}(0)) = \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$, por lo tanto $sign(\det(G^{-1}(0))) = sign(\det(G(0)))$.

Con estas dos propiedades, es claro que $\det(Q) > 0$. Entonces, una condición suficiente para que los valores propios de Q tengan parte real positiva es que $Tr(Q) > 0$. De acuerdo con la discusión presentada en el capítulo 4, no es posible dar condiciones suficientes sobre $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2)$ de tal forma que $Tr(Q) > 0$.

Planteemos el problema de manera diferente. Definamos ahora a $Q' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ como

$$Q' = -Q = -G(0)W^{-1}(0) \quad (6.8)$$

Los valores propios de la matriz Q' son

$$\lambda_{1,2}(Q') = \frac{Tr(Q') \pm \sqrt{Tr^2(Q') - 4 \det(Q')}}{2} \quad (6.9)$$

Usando las propiedades de G y de W , es claro que el determinante de Q' no se altera, esto es, $\det(Q') > 0$.

Se dice que una matriz es Hurwitz estable si la parte real de todos sus valores propios es negativa. Una condición suficiente para que los valores propios de Q' tengan parte real negativa es que $Tr(Q') < 0$. Pero como $Q' = -Q$, se concluye entonces que las condiciones que garantizan que la parte real de los valores propios de la matriz Q será positiva son las mismas que garantizan que la parte real de los valores propios de la matriz Q' será negativa.

En otras palabras, si las matrices $G(0)$ y $W(0)$ cumplen con $sign(G(0)) = sign(W(0))$, las condiciones que garantizan que la matriz $Q' = -G(0)W^{-1}(0)$ sea Hurwitz, son equivalentes a las condiciones que garantizan que la matriz $Q = -Q'$ cumpla la condición de controlabilidad integral $Re(\lambda_i(Q)) > 0$, $i = 1, 2$.

Por lo tanto, el problema de determinar si una ley de control retroalimentado con acción integral basado en $W(0)$ será estable a lazo cerrado en cualquier punto de operación es equivalente a determinar las condiciones que garanticen que la matriz $Q' = -G(0)W^{-1}(0)$ sea Hurwitz para toda $G(0) \in G^I$.

Si consideramos que las matrices $G(0)$ y $W^{-1}(0)$ tienen la siguiente estructura de signos

- $G(0) = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ g_{21} & -g_{22} \end{bmatrix}$ donde $g_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$.
- $W^{-1}(0) = \begin{bmatrix} t_{11} & -t_{12} \\ t_{21} & -t_{22} \end{bmatrix}$ donde $t_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2$.

Entonces la matriz Q' tendrá la siguiente estructura

$$Q' = \begin{bmatrix} -g_{11}t_{11} + g_{12}t_{21} & g_{11}t_{12} - g_{12}t_{22} \\ -g_{21}t_{11} + g_{22}t_{21} & g_{21}t_{12} - g_{22}t_{22} \end{bmatrix}$$

Para la mayor parte de las columnas de destilación se cumple que (Li and Lee, 1996):

$$t_{11} > t_{12}$$

$$t_{22} > t_{21}$$

de tal forma que la matriz de intervalos Q'_I se define como

$$Q'_I = [\underline{Q}' \quad \overline{Q}'] = \left\{ |q'_{ij}| \mid \underline{q}'_{ij} \leq q'_{ij} \leq \overline{q}'_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\} \quad (6.10)$$

donde

$$\underline{Q}' = - \begin{bmatrix} \overline{g}_{11} & -\overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & -\overline{g}_{22} \end{bmatrix} W^{-1}(0)$$

$$\overline{Q}' = - \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & -\underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & -\underline{g}_{22} \end{bmatrix} W^{-1}(0)$$

Finalmente, el problema de determinar si una ley de control retroalimentado con acción integral basado en $W(0)$ será estable a lazo cerrado en cualquier punto de operación es equivalente a determinar si la matriz Q'_I es Hurwitz estable.

6.4 Estabilidad de matrices intervalo

Recientemente ha existido un gran interés en analizar la estabilidad Hurwitz de matrices de intervalos (Heiner, 1984; Daoyi, 1985; Yedavalli, 1993; Barmish et al., 1988; Jiang, 1988; Mansour, 1989; Horng, et al., 1993). Los métodos para analizar la robustez de sistemas inciertos representados en el espacio de estados se pueden clasificar como métodos directos y métodos indirectos (Xu et al., 1998). Los métodos directos estudian la estimación de valores propios o usan la teoría generalizada de Lyapunov. Por otro lado, los métodos indirectos transfieren el proble-

ma de estudiar la estabilidad de un sistema incierto al análisis de una familia de polinomios, por lo cual deben probar la estabilidad de familias de polinomios y politopos de polinomios. Por limitaciones de espacio no se presentará un análisis de cada una de éstas técnicas, sino que se describirán algunos de los resultados más importantes. Para una revisión más amplia de cada una de éstas técnicas se recomienda la lectura de libros como el de Ackermann (1994).

Horng et al. (1993) establecieron algunas condiciones suficientes para la aglomeración de valores propios en varias subregiones en el plano complejo para matrices de intervalos mediante la teoría generalizada de Lyapunov presentada por Gutman and Jury (1981) para una matriz nominal. Usando la misma teoría generalizada de Lyapunov, Yedavalli (1993) estudió la aglomeración de raíces de matrices en una subregión general en el plano complejo para matrices inciertas, la cual puede ser extendida al caso de matrices de intervalos. Por otro lado, Zhou and Khargonekar (1987) presentaron las condiciones que garantizan la estabilidad Hurwitz para sistemas con incertidumbres estructuradas, la cual también puede ser extendida al caso de matrices de intervalos. Mansour (1989a) presentó una excelente revisión de los diferentes tipos de condiciones suficientes para la estabilidad robusta de matrices de intervalos. Wang and Shieh (1994) presentó una teoría general para la aglomeración robusta de polos en subregiones muy generales en el plano complejo.

En este trabajo usaremos las condiciones suficientes que presentaron Wang et al. (1997) para determinar si la matriz Q_I' es Hurwitz estable. Las condiciones suficientes presentadas por Wang et al. se basan en el principio de Rayleigh y en estimados de los valores propios. En su trabajo, Wang et al. representan la matriz de intervalos como una matriz incierta equivalente. Esta matriz incierta consiste de una matriz central y una matriz de perturbación. Los elementos de la matriz de perturbación están normalizados.

La ventaja de las condiciones presentadas por Wang et al. (1997) es que su complejidad computacional es menor que la complejidad de los métodos que emplean la teoría generalizada de Lyapunov, los que usan sumas de Kronecker y métodos de productos, los métodos en el dominio de la frecuencia y los métodos que evalúan las esquinas de una matriz los cuales están descritos en Mansour (1989b).

Seguendo la metodología de Wang et al., reescribiremos la matriz de intervalos Q'_I como

$$Q'_I = Q'_0 + \Delta Q' \quad (6.11)$$

donde Q'_0 es la matriz central y $\Delta Q'$ es la matriz de perturbación. Estas matrices se pueden expresar como

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (\underline{Q}' + \overline{Q}') \quad (6.12)$$

$$\Delta Q' = \sum_{i,j=1}^2 \nu_{ij} E_{ij} \quad (6.13)$$

donde $E_{ij} = \frac{q_{ij} + \bar{q}_{ij}}{2} U_{ij}$ y $U_{ij} = e_i^T e_j$. ν_{ij} son parámetros inciertos que cumplen $|\nu_{ij}| \leq 1$. e_i y e_j son vectores unitarios cuyos elementos i -ésimo y j -ésimo respectivamente, son iguales a uno. U_{ij} es una matriz con todos sus elementos iguales a cero exceptuado el elemento (i, j) , el cual es igual a uno.

La matriz E se puede expresar como

$$E = \sum_{i,j=1}^2 E_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{Q}' - \underline{Q}') \quad (6.14)$$

Usando el principio de Rayleigh, conocido como método directo, Wang et al. (1997) enunciaron el siguiente Teorema:

Teorema 1 *La matriz de intervalos Q'_I definida en (6.10) será Hurwitz estable si la matriz $(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2$ es Hurwitz estable y se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- (i) $4\bar{\sigma}(H_e) < c$,
- (ii) $\sum_{i,j=1}^2 \bar{\sigma}(H_{ij}) < c$,
- (iii) $\bar{\sigma} \left(\sum_{i,j=1}^2 |H_{ij}| \right) < c$

donde

$$\begin{aligned} c &= -\bar{\lambda} \left((Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2 \right) \\ H_{ij} &= (E_{ij} + E_{ij}^T) / 2, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$H_e = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

A partir de este Teorema, Wang et al. derivaron el siguiente Corolario:

Corolario 2 *La matriz de intervalos Q'_I definida en (6.10) será Hurwitz estable si la matriz $(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2$ es Hurwitz estable y se cumple que*

$$\bar{\sigma} [(E + E^T) / 2] < c \quad (6.16)$$

donde c se define en el Teorema anterior y E se define en (6.14).

Note que para evaluar las condiciones del Corolario 2 sólo se necesitan matrices conocidas. Esto es, a pesar de que la matriz de intervalos Q'_I se expresó como una matriz incierta, para evaluar un condición suficiente que garantice que la matriz Q'_I es Hurwitz estable, solo se requiere utilizar los extremos que definen la matriz de intervalos $(\underline{Q}', \overline{Q}')$, puesto que Q'_0 y E dependen de éstas matrices.

6.5 Evaluación de la estabilidad de Q'_I para una $W(0)$ dada

Para mostrar los resultados estudiaremos el ejemplo presentado por Koung and MacGregor (1992) que se muestra en la Tabla 6.1. Los puntos de operación 1 y 2 corresponden a condiciones de alta pureza en el domo y en el fondo respectivamente. El punto de operación 3 corresponde a una alta pureza en el domo y en el fondo simultáneamente. Finalmente, el punto de operación 4 corresponde a una operación con baja pureza en ambos productos. En esta tabla se presentan los números de condición $\gamma(G(0))$ para cada uno de los puntos de operación. También se muestra el número de condición mínimo $\gamma_{\min}(G(0))$. Como se puede observar, el trabajar en condiciones de alta pureza implica tener una matriz de ganancias en estado estacionario con un número de condición alto. Observe también que el número de condición mínimo para alta pureza en sólo uno de los productos es dos ordenes de magnitud menor que el número de condición normal. Por lo que respecta al punto de operación con alta pureza en ambos productos, el número de condición mínimo no disminuye considerablemente comparado con el número de condición mínimo.

Tabla 6.1

Matrices de ganancias en estado estacionario (Koung and MacGregor, 1992)

Punto de operación	X	G	$\gamma(G)$	$\gamma_{\min}(G)$
1	$\begin{bmatrix} 0.9083 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.813 & -0.812 \\ 0.015 & -0.016 \end{bmatrix}$	1595.2	60.8
2	$\begin{bmatrix} 0.9989 \\ 0.0918 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.018 & -0.017 \\ 0.810 & -0.811 \end{bmatrix}$	1587.5	68.5
3	$\begin{bmatrix} 0.9948 \\ 0.0052 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.494 & -0.493 \\ 0.494 & -0.495 \end{bmatrix}$	988.0	487.9
4	$\begin{bmatrix} 0.9457 \\ 0.0543 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.446 & -0.394 \\ 0.446 & -0.498 \end{bmatrix}$	17.212	17.1

Con los valores mostrados en la Tabla 6.1, los extremos $(\underline{Q}', \overline{Q}')$ de la matriz de intervalos Q'_I son:

$$\underline{Q}' = - \begin{bmatrix} 0.813 & -0.812 \\ 0.810 & -0.811 \end{bmatrix} W^{-1}(0)$$

$$\overline{Q}' = - \begin{bmatrix} 0.018 & -0.017 \\ 0.015 & -0.016 \end{bmatrix} W^{-1}(0)$$

Si tomamos como modelo la siguiente matriz

$$W(0) = \begin{bmatrix} 0.486 & -0.481 \\ 0.486 & -0.492 \end{bmatrix}$$

los extremos de la matriz de intervalos son

$$\underline{Q}' = \begin{bmatrix} -1.0034 & -0.66947 \\ -0.8182 & -0.84848 \end{bmatrix}$$

$$\overline{Q'} = \begin{bmatrix} -4.86 \times 10^{-4} & 2.94 \times 10^{-4} \\ 4.86 \times 10^{-4} & -6.57 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz E y la matriz Q'_0 son

$$E = \frac{1}{2} (\overline{Q'} - \underline{Q'}) = \begin{bmatrix} 0.50145 & 0.33488 \\ 0.40935 & 0.42391 \end{bmatrix}$$

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (\underline{Q'} + \overline{Q'}) = \begin{bmatrix} -0.50195 & -0.33459 \\ -0.40886 & -0.42457 \end{bmatrix}$$

Evaluemos ahora las condiciones del Corolario 2

$$(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2 = \begin{bmatrix} -0.50195 & -0.37173 \\ -0.37173 & -0.42457 \end{bmatrix}$$

Los valores singulares de esta matriz son $\lambda_{1,2} [(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2] = \{-0.837, -0.0895\}$, por lo tanto, $c = 0.837$. Como los dos valores propios de $(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2$ tienen parte real negativa, la matriz $(Q'_0 + (Q'_0)^T) / 2$ es Hurwitz estable. Para evaluar la segunda parte del Corolario 2, necesitamos calcular la siguiente matriz

$$(E + E^T) / 2 = \begin{bmatrix} 0.50145 & 0.37212 \\ 0.37212 & 0.42391 \end{bmatrix}$$

Calculemos ahora los valores singulares de esta matriz $\sigma_{1,2} [(E + E^T) / 2] = \{0.83681, 0.0885\}$. Como $\bar{\sigma} [(E + E^T) / 2] < c$, entonces la matriz Q'_I es Hurwitz estable y por tanto se puede diseñar un controlador por retroalimentación con acción integral basado en $W(0)$ que será estable para cualquier condición de operación comprendida entre las condiciones reportadas en la Tabla 6.1

6.6 Obtención de una $W(0)$ que garantice la estabilidad de Q'_I

Es importante señalar que aunque en este caso

$$\bar{\sigma} [(E + E^T) / 2] < c$$

la diferencia entre $\bar{\sigma} [(E + E^T) / 2]$ y c no es muy grande. La razón principal es que se utilizó una matriz de referencia con un número de condición grande $\gamma(W(0)) = 177$. De hecho, recordemos que una matriz $W(0)$ con número de condición igual a uno que cumpla con las propiedades previamente señaladas

$$W(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

satisface trivialmente la condición de controlabilidad integral. El mismo resultado aplica a una matriz diagonal con la siguiente estructura

$$W(0) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & -w_{22} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

donde $w_{11}, w_{22} > 0$. Es claro que se puede obtener una matriz con la estructura anterior a partir de una matriz llena como la que sigue

$$W(0) = \begin{bmatrix} w_{11} & -w_{12}\varepsilon \\ w_{21}\varepsilon & -w_{22} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

donde $w_{i,j} > 0$, $i, j = 1, 2$. ε es un parámetro ajustable tal que $\varepsilon \in [0, 1]$. Si el valor de ε se toma como $\varepsilon = 0$, $W(0)$ toma la forma de (6.18), mientras que si toma el valor , $W(0)$ toma la forma de (6.4).

En la figura 6.1 se muestra la forma en que típicamente se modifican los valores de los parámetros $(\theta_2, \gamma_2, \phi_2)$ que definen la estructura del estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$. Como se puede observar, para valores de $\varepsilon > 0.5$, los valores de θ_2 y ϕ_2 permanecen casi constantes. Por el contrario, el valor del número de condición $\gamma_2(W(0))$ no se modifica considerablemente para valore de ε menores de 0.8. Sin embargo, el valor del número

de condición $\gamma_2(W(0))$ se incrementa en un orden de magnitud para valores de ε mayores de 0.8.

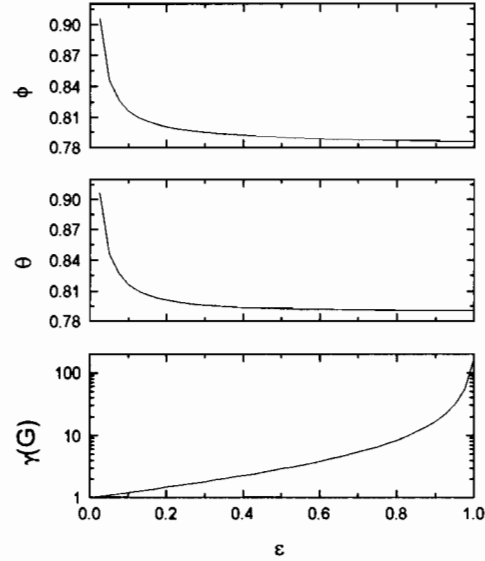


Figura 6.1

Si recordamos que Koung and MacGregor (1992) encontraron que para una mezcla de componentes específica, una columna de destilación binaria tiene en cualquier punto de operación los mismos valores de \mathbf{V}^T ; esto es, un cambio en el punto de operación modifica exclusivamente los valores singulares ($\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$) y la matriz \mathbf{U} , la parametrización (6.19), entonces

$$W(0) = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12}\varepsilon \\ g_{21}\varepsilon & -g_{22} \end{bmatrix}$$

nos permite obtener un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$ empleando alguno de los elementos de la matriz de intervalos G^I :

$$G^I = [\underline{G} \quad \overline{G}] = \left\{ |g_{ij}^I| \mid \underline{g}_{ij} \leq g_{ij}^I \leq \overline{g}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

la cual contiene las matrices de ganancias en estado estacionario identificadas en todo el rango de condiciones de operación que puede alcanzar la columna de operación. Recuerde que este

rango de condiciones de operación quedará determinado por la pureza de los productos que se desea obtener.

La principal ventaja de la parametrización (6.19) es que modificando el valor del parámetro ajustable ε , se puede obtener una matriz $W(0)$ cuyos valores de θ_2 y ϕ_2 son muy parecidos a los valores de θ_1 y ϕ_1 de una matriz $G(0) \in G^I$, pero con la propiedad de que $\gamma_2(W(0)) \ll \gamma_1(G(0))$.

Recuerde que usar un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario con un número de condición $\gamma_2(W(0))$ pequeño no garantiza que la matriz Q'_I

$$Q'_I = [\underline{Q}' \quad \overline{Q}'] = \left\{ |q'_{ij}| \mid \underline{q}_{ij} \leq q'_{ij} \leq \bar{q}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

será Hurwitz estable. Sin embargo, el que $W(0)$ tenga un número de condición pequeño implica que los problemas numéricos relacionados con la inversión de $W(0)$ se reducirán al mínimo.

Tomamos como modelo la misma matriz empleada en la sección anterior con la parametrización (6.19)

$$W(0) = \begin{bmatrix} 0.486 & -0.481\varepsilon \\ 0.486\varepsilon & -0.492 \end{bmatrix}$$

El número de condición de la matriz anterior para un valor de $\varepsilon = 0.9$ es $\gamma(W(0)) = 17.163$. Note que el número de condición de la matriz parametrizada es un orden de magnitud menor que el número de condición de la matriz sin parametrizar.

La prueba de que la matriz Q'_I

$$Q'_I = [\underline{Q}' \quad \overline{Q}'] = \left\{ |q'_{ij}| \mid \underline{q}_{ij} \leq q'_{ij} \leq \bar{q}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

usando este estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario será Hurwitz estable, se realiza de la misma manera que se presentó en la sección anterior. Dado que la metodología ya fue presentada, se omite en este paso, sin embargo, en la Tabla 6.2 se muestran los valores propios de la matriz $G(0)W^{-1}(0)$ en los cuatro puntos de operación descritos en la Tabla 6.1 Como era de esperarse, los dos valores propios en cada una de los puntos de operación tienen parte real positiva, lo cual implica que usando como modelo al estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$, es posible diseñar un controlador por retroalimentación con acción integral que será estable a lazo cerrado para cualquier punto de operación comprendido entre

los puntos de operación reportados en la Tabla 6.1.

Tabla 6.2

Valores propios cuando ε es igual 0.9

Punto de operación	$\lambda_1(G(0)W^{-1}(0))$	$\lambda_2(G(0)W^{-1}(0))$
1	0.90829	0.018319
2	0.018827	0.88382
3	1.0692	0.01857
4	$0.96511 + 0.026129i$	$0.96511 - 0.026129i$

6.7 Conclusiones

En este Capítulo se mostró que las condiciones suficientes que garantizan que para un estimado $W(0)$ de la matriz de ganancias en estado estacionario $G(0)$ se satisface la condición de controlabilidad integral, son equivalentes a las condiciones suficientes que garantizan que la matriz $-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable.

Dado que en general, $G(0)$ se puede expresar como una matriz de intervalos, en este Capítulo se presentaron las condiciones suficientes que garantizan que la matriz de intervalos $-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable.

Se mostró también que la parametrización (6.19)

$$W(0) = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12}\varepsilon \\ g_{21}\varepsilon & -g_{22} \end{bmatrix}$$

nos permite obtener un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$ empleando alguno de los elementos de la matriz de intervalos G^I :

$$G^I = [\underline{G} \quad \overline{G}] = \left\{ |g_{ij}^I| \mid \underline{g}_{ij} \leq g_{ij}^I \leq \overline{g}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

con el cual es posible diseñar un controlador por retroalimentación con acción integral que será estable a lazo cerrado para cualquier punto de operación que puede alcanzar la columna de destilación.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1 Conclusiones generales

Los principales resultados de esta tesis son

1. Se presentó un esquema para el control robusto de la concentración en el domo (control en un punto) en una columna de destilación binaria. El esquema de control resultante está compuesto por una retroalimentación linealizante entradas-salidas y por un controlador adaptable. Cuando no existe ruido en las mediciones, el esquema de control permite realizar el seguimiento de trayectorias de referencia para la salida de control (x_D) y, simultáneamente, proporciona un estimado de las incertidumbres asociadas con los errores de modelado. A través de simulaciones numéricas se mostró que el desempeño global del controlador a lazo cerrado es satisfactorio y que el estimado de la incertidumbre converge asintóticamente al valor real.
2. Se mostró que tomando adecuadamente un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario, es posible diseñar esquemas de control **PI** y **PID** que serán robustamente estables a lazo cerrado puesto que ambos esquemas satisfacen la condición de *controlabilidad integral*.
3. Con el fin de mejorar el desempeño del controlador **PI** diagonal, se presentaron dos esquemas de control robusto para regular las composiciones en el domo y en el fondo de una columna de destilación usando como entradas de control a los flujos molares de recirculado y de vapor. Se demostró que la realización en el dominio de Laplace de ambos esquemas de control es equivalente a un controlador **PID** diagonal. El primer esquema de control está comprendido por una retroalimentación nominal y un estimador de incertidumbres de cuarto orden. En el segundo esquema, la ley de control se obtiene usando un proceso iterativo que se basa en las metodologías de mapeos de contracción. Se establecieron también las condiciones de estabilidad y algunas reglas de sintonizado para ambos esquemas de control.
4. Se mostró que las condiciones suficientes que garantizan que para un estimado $W(0)$ de la matriz de ganancias en estado estacionario $G(0)$ se satisface la condición de controlabilidad integral, son equivalentes a las condiciones suficientes que garantizan que la matriz

$-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable.

Dado que en general, $G(0)$ se puede expresar como una matriz de intervalos, se presentaron las condiciones suficientes que garantizan que la matriz de intervalos $-G(0)W^{-1}(0)$ es Hurwitz estable.

Se mostró también que la parametrización del estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario

$$W(0) = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12}\varepsilon \\ g_{21}\varepsilon & -g_{22} \end{bmatrix}$$

nos permite obtener un estimado de la matriz de ganancias en estado estacionario $W(0)$ empleando alguno de los elementos de la matriz de intervalos G^I :

$$G^I = [\underline{G} \quad \overline{G}] = \left\{ |g_{ij}^I| \mid \underline{g}_{ij} \leq g_{ij}^I \leq \overline{g}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

con el cual es posible diseñar un controlador por retroalimentación con acción integral que será estable a lazo cerrado para cualquier punto de operación que puede alcanzar la columna de destilación.

7.2 Trabajo futuro

Dado que el desempeño de los esquemas de control presentados en esta tesis depende de la exactitud de los estimados de la matriz de ganancias en estado estacionario (y por tanto de la matriz de acoplamiento de las entradas de control), un punto importante a seguir trabajando en esta tesis es estudiar métodos de identificación para sistemas mal condicionados.

También es importante hacer una comparación mas completa del desempeño a lazo cerrado de los esquemas de control propuestos en esta tesis contra otros esquemas de control reportados en la literatura para sistemas mal condicionados.

Sobre este mismo punto, los resultados sobre el análisis de la matriz de Intervalos presentada en el Capítulo 6 de esta tesis se refieren a estabilidad robusta exclusivamente (estabilidad Hurwitz). Sin embargo, es importante extender este análisis a desempeño robusto. Esto es, determinar si los polos de cualquier matriz que pertenece a la matriz de intervalos están contenidos en una cierta región del lado izquierdo del plano complejo.

Bibliografía

- [1] Ackermann, J. *Robust Control. Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, 1994
- [2] Aguilar, R.; Alvarez, J.; González, J. and Barrón, M. "A strategy to regulate continuous fermentation process with unknown reaction rates". *Journal of Chemical Technology and Biotechnology* **37**, 357-361, 1996.
- [3] Aguilar, R.; González, J.; Alvarez, J. and Barrón, M. "Temperature regulation of a class of continuous chemical reactor based on a nonlinear Luenberger-like observer". *Journal of Chemical Technology and Biotechnology* **70**, 209-216, 1997.
- [4] Aguilar, R.; González, J. and Barrón, M. "Regulation of a Fluid Catalytic Cracking Unit based on a Neuro-Estimator". *Proceedings of The Second Joint Mexico-US International Workshop on Neural Networks and Neurocontrol. August, 1997*, 1997.
- [5] Alvarez-Ramírez, J.; Suárez, R. and Femat, R. "Control of continuous stirred tank reactors: stabilization with unknown reaction rates", *Chem. Engng. Sci.* **51**, 4183-4190, 1996.
- [6] Alvarez-Ramírez, J.; Femat, R. and Gonzalez, J. "A time delay coordinates strategy to control a class of chaotic oscillators". *Physics Letters A* **211**, 41-45, 1996.
- [7] Alvarez-Ramírez, J.; Femat, R. and Gonzalez, J. "Robust control of uncertain first-order systems with least prior knowledge". *Chemical Engineering Science*. **Aceptado para publicación**, 1998.
- [8] Andersen, H. W. and Kumel, M. "Evaluating estimation of gain directionality. Part 2: A case study of binary distillation". *J. Proc. Control.* **2**, 66-86, 1992.

- [9] Barmish, B. R; Fu, M. and Saleh, S. "Stability of a polytope of matrices: Counterexamples". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **33**, 569-571, 1988.
- [10] Barrón, M.; Aguilar, R.; González, J. and Meléndez, E. "Model-based control of mold level in a steel continuous caster under model uncertainties". *Control Engineering Practice Journal*. **Aceptado para publicación**, 1998.
- [11] Brambilla, A. and D'Elia, L. "Multivariable controller for distillation columns in the presence of strong directionality and model errors", *Ind. Eng. Chem. Res.* **31**, 536-543, 1992.
- [12] Castro, R.; Alvarez, J. and Alvarez, J. "Nonlinear disturbance decoupling control of a binary distillation column". *Automatica* **26**, 567-574, 1990.
- [13] Chen, Y. H. "Adaptive robust control of uncertain systems with measurement noise". *Automatica* **28**, 715-723, 1992.
- [14] Chien, I. L. and Fruehauf, P. S. "Consider IMC tuning to improve controller performance", *Chemical Engineering Progress* **October**, 33-41, 1990.
- [15] Christen, U.; Musch, H. E. and Steiner, M. "Robust control of distillation columns: μ - vs H_∞ -synthesis". *J. Proc. Control.* **7**, 19-30, 1997.
- [16] Daoutidis, P. and Kravaris, C. "Dynamic output feedback control of minimum-phase nonlinear processes", *Chem. Engng. Sci.* **47**, 837-845, 1992.
- [17] Daoyi, X. "Simple criteria for stability of interval matrices". *Int. J. Contr.* **41**, 289-295, 1985.
- [18] Dochain, D. "Design of adaptive linearizing controllers for non-isothermal reactors". *Int. J. Contr.* **59**, 689-697, 1994.
- [19] Doyle, J. C.; Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R. *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [20] Esfandiari, F. and Khalil, H. K. "Output feedback stabilization of fully linearizable systems". *Int. J. Contr.* **56**, 1007-1015, 1992.

- [21] Femat, R.; Alvarez-Ramírez, J. and Gonzalez, J. "A strategy to control chaos in nonlinear driven oscillators with least prior knowledge". *Physics Letters A* **224**, 271-276, 1997.
- [22] Fradkov, A. "Speed-gradient scheme and its application in adaptive control problems". *Automation Re. Control* **40**, 1333-1341, 1979.
- [23] Ganguly, S. and Saraf, D. N. "On-line optimization and dual composition control of distillation column using a nonlinear controller", *Ind. Eng. Chem. Res.* **34**, 209-215, 1995.
- [24] Gmehling, J.; Onken, U. and Grenzheuer, P. *Vapor-liquid equilibrium data collection*, Chemistry Data Series; DECHEMA, Frankfurt, Vol. I/3+4, 1982.
- [25] González, J.; Barrón, M.; Aguilar, R. and Arce, E. "Neural network control of mold level under tundish nozzle clogging conditions". *Proceedings of the IASTED International Conference. Artificial Intelligence, Expert Systems and Neural-Networks, USA. 1996.* 271-273, 1996.
- [26] González-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernandez-Anaya, G. "Robust control with uncertainty estimation for feedback linearizable systems: Application to control of distillation columns". *Journal of Process Control.* **Acceptado para publicación**, 1998.
- [27] González, J.; Aguilar, R.; Alvarez-Ramírez, J. and Barrón, M. "Nonlinear regulation for a continuous bioreactor via numerical uncertainty observer". *Chemical Engineering Journal.* **Acceptado para publicación**, 1998.
- [28] González, J.; Femat, R.; Alvarez-Ramírez, J.; Aguilar, R. and Barrón, M. "A discrete approach to the control and synchronization of a class of chaotic oscillators". *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I.* **Acceptado para publicación**, 1998.
- [29] González, J., Alvarez, R., Aguilar, R., Barrón, M.A. and Fernández, G. "Control of a binary Distillation Column using a Neural-Network". *Proceedings of The Second Joint Mexico-US International Workshop on Neural Networks and Neurocontrol. August, 1997,* 1997.
- [30] Gonzalez-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernández-Anaya, G. "Robust dual composition control of binary distillation columns". *Proceedings of the IASTED International Conference. CONTROL'97, México,* 1997.

- [31] Gonzalez-Trejo, J.; Alvarez-Ramírez, J. and Fernández-Anaya, G. "An input-output linearizing control strategy with uncertainty estimation and its application to distillation columns control". *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications, USA*, 1997.
- [32] Gutman, S. and Jury, E. I. "A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plane". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **26**, 853-863, 1981.
- [33] Häggblom, K. E. "Combined internal model and inferential control of a distillation column via closed-loop identification". *J. Proc. Control.* **6**, 223-232, 1996.
- [34] Heiner, J. A. "Sufficient conditions for stability of interval matrices". *Int. J. Contr.* **39**, 1323-1328, 1984.
- [35] Henson, M. and Seborg, D. E. "Critique of exact linearization strategies for process control". *J. Proc. Control.* **1**, 122-130, 1991a.
- [36] Henson, M. and Seborg, D. E. "An internal model control strategy for nonlinear systems". *AIChE Journal*, **37**, 1065-1072, 1991.
- [37] Henson, M. and Seborg, D. E. "Adaptive control of pH neutralization process". *IEEE Trans. Contr. Syst.* **2**, 169-178, 1994.
- [38] Horng, I. R.; Horng, H. Y. and Chou, J. H. "Eigenvalue clustering in subregions of the complex plane for interval dynamic systems". *Int. J. Systems Sci.* **24**, 901-914, 1993.
- [39] Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [40] Isidori, A. and Tarn, T. J. "Robust regulation for nonlinear systems with gain-bounded uncertainties". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **40**, 1744-1754, 1995.
- [41] Jacobsen, E. W. and Skogestad, S. "Inconsistencies in dynamic models for ill-conditioned plants: Application to low-order models of distillation columns". *Ind. Eng. Chem. Res.* **33**, 631-640, 1994.
- [42] Jiang, C. L. "Another sufficient condition for the stability of interval matrices". *Int. J. Contr.* **47**, 181-186, 1988.

- [43] Khalil, H. K. "Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **41**, 177-188, 1996.
- [44] Kister, H. Z. *Distillation Design*, McGraw-Hill, 1992.
- [45] Kokotovic, P. *Foundations of Adaptive Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [46] Kooijman, H. A. and Taylor, R. "A nonequilibrium model for dynamic simulation of tray distillation columns". *AIChE Journal*, **41**, 1852-1863, 1995.
- [47] Kosanovich, K. L.; Piovoso, M. J.; Rokhlenko, V. and Guez, A. "Nonlinear adaptive control with parameter estimation of a CSTR". *J. Proc. Control.* **5**, 137-145, 1995.
- [48] Koung, C. W. and MacGregor, J. F. "Geometric analysis of the global stability of linear inverse-based controllers for bivariate nonlinear processes". *Ind. Eng. Chem. Res.* **30**, 1171-1181, 1991.
- [49] Koung, C. W. and MacGregor, J. F. "Robustness of multivariable linear controllers to process nonlinearities". *Ind. Eng. Chem. Res.* **31**, 1082-1096, 1992.
- [50] Koung, C. W. and MacGregor, J. F. "Design of identification experiments for robust control: A geometric approach for bivariate processes". *Ind. Eng. Chem. Res.* **32**, 1658-1666, 1993.
- [51] Kravaris, C. and Chung, C. B. "Nonlinear state feedback synthesis by global input/output linearization". *AIChE Journal*, **33**, 592-601, 1987.
- [52] Kravaris, C. and Kantor, J. C. "Geometric methods for nonlinear process control". *Ind. Eng. Chem. Res.* **29**, 2295-2304, 1990
- [53] Kravaris, C. and Palanki, S. "Robust nonlinear state feedback under structured uncertainty". *AIChE Journal*, **34**, 1119-1127, 1988.
- [54] Lau, H.; Alvarez, J. and Jensen, K. F. "Synthesis of control structures by singular value analysis: Dynamic measures of sensitivity and interaction". *AIChE Journal*, **31**, 427-439, 1985.

- [55] Lévine, J. and Rouchon, P. "Quality control of binary distillation columns via nonlinear aggregated models". *Automatica* **27**, 463-480, 1991.
- [56] Li, W. and Lee, J. H. "Control relevant identification of ill-conditioned systems: Estimation of gain directionality". *Computers Chem. Engng.* **20**, 1023-1142, 1996.
- [57] Lundstrom, P.; Lee, J. H.; Morari, M. and Skogestad, S. "Limitations of dynamic matrix control". *Computers Chem. Engng.* **19**, 409-421, 1995.
- [58] Luyben, W. L., *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, Second Edition*, McGraw-Hill, 1990.
- [59] Lynch, A. F. and Bortoff, S. A. "Non-linear observer design by approximate error linearization". *Systems & Control Letters* **32**, 161-172, 1997.
- [60] Mansour, M. "Simplified sufficient conditions for the asymptotic stability of interval matrices". *Int. J. Contr.* **50**, 443-444, 1989a.
- [61] Mansour, M. "Robust stability of interval matrices". *Proc. of the 28th Conf. on Decision and Control*, Tampa, Florida, Dec. 1989, 46-51, 1989b.
- [62] Marino, R. and Tomei, P. *Nonlinear Control Design*, Prentice-Hall, New York, 1995.
- [63] Moore, R. E. *Interval Analysis*, Englewood Cliffs. N.J., Prentice Hall, 1966.
- [64] Morari, M. and Zafiriou, E., *Robust Process Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
- [65] Mountziaris, T. J. and Georgiou, A. "Design of robust noninteracting controllers for high-purity binary distillation columns". *Ind. Eng. Chem. Res.* **27**, 1450-1460, 1988.
- [66] Musch, H. E. and Steiner, M. "Robust PID control for an industrial distillation column". *IEEE Control Systems* **August**, 46-55, 1995.
- [67] Nakamura, S. *Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB*, Prentice Hall Inc., N. Y. 1995.
- [68] Naphtali, M. A. and Sandholm, D. P. "Multicomponent separation calculations by linearization". *AIChE J.*, **17**, 148-153, 1971.

- [69] Ogunnaike, B. A. and Ray, W. H. *Process Dynamics, Modeling and Control*. Oxford University Press, 1994.
- [70] Ostojic, M. "Numerical approach to nonlinear control design", *Trans. of the ASME*, **118**, 332 (1996).
- [71] Palmer, D. A., *Handbook of Applied Thermodynamics*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1987.
- [72] Prausnitz, J.M.; Anderson, T.; Grens, E.; Eckert, C.; Hsieh R. and O'Connell, J. *Computer Calculations for Multicomponent Vapor-Liquid and Liquid-Liquid Equilibria*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1980.
- [73] Sagfors, M. F. and Waller, K. V. "Dynamic low-order models for capturing directionality in nonideal distillation". *Ind. Eng. Chem. Res.* **34**, 2038-2050, 1995.
- [74] Sastry, S. S. and Bodson, M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1989.
- [75] Seron, M. M.; Hill, D. J. and Fradkov, A. L. "Nonlinear adaptive control of feedback passive systems". *Automatica* **31**, 1053-1062, 1995.
- [76] Skogestad, S. and Morari, M. "Control configuration selection for distillation columns". *AIChE J.* **33**, 1620-1635, 1987.
- [77] Skogestad, S. and Morari, M. "Understanding the dynamic behavior of distillation columns". *Ind. Eng. Chem. Res.* **27**, 1848-1862, 1988a.
- [78] Skogestad, S. and Morari, M. "LV-Control of a high-purity distillation column". *Chem. Engng. Sci.* **43**, 33-48, 1988b.
- [79] Skogestad, S.; Morari, M. and Doyle, J. C. "Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation". *IEEE Trans. Automatic Control* **33**, 1092-1105, 1988c.
- [80] Soroush, M. and Kravaris, C. "Nonlinear control of a batch polymerization reactor: an experimental study". *AIChE J.* **38**, 1429-1441, 1992.

- [81] Strömberg, K. B.; Toivonen, H. T.; Häggblom, K. E. and Waller, K. V. "Multivariable nonlinear and adaptive control of a distillation column". *AIChE Journal*, **41**, 195-199, 1995.
- [82] Su, J. H. "Comments on 'Stability margin evaluation of uncertain linear systems'". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **39**, 2523-2527, 1994.
- [83] Sun, J.; Olbrot, A. W. and Polis, M. P. "Robust stabilization and robust performance using model reference control and modeling error compensation". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **39**, 630-635, 1994.
- [84] Sussman, H. J. and Kokotovic, P. V. "Peaking and stabilization". *Proc. of the 28th Conf. on Decision and Control*, Tampa, Florida, Dec. 1989, 1379-1381, 1989.
- [85] Teel, A. and Praly, L. "Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback". *Systems & Control Letters* **22**, 313-322, 1994.
- [86] Teel, A. and Praly, L. "Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback". *SIAM J. Control Optim.* **33**, 1143-1188, 1995.
- [87] van Winkle, M. *Distillation*. McGraw-Hill, 1967.
- [88] Wang, S. G.; Lin, S. B. and Shieh, L. S. "Several simple sufficient conditions for Hurwitz and Shur stability of interval matrices" *Proc. of the IASTED International Conference CONTROL'97*, Cancun, Mexico, May 1997, 31-34, 1997.
- [89] Wang, S. G. and Shieh, L. "A general theory for analysis and design of robust pole clustering in subregions of the complex plane". *Proc. of the 1994 American Control Conference*, Baltimore, USA, June 1994, 627-631, 1994.
- [90] Waller, J. B. and Waller, K. V. "Defining directionality: Use of directionality measures with respect to scaling". *Ind. Eng. Chem. Res.* **34**, 1244-1252, 1995.
- [91] Xu, S. J; Rachid, A. and Darouach, M. "Robustness analysis of interval matrices based on Kharitonov's Theorem". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **43**, 273-278, 1998.

- [92] Yedevalli, R. K. "Robust root clustering for linear uncertain systems using generalized Lyapunov theory". *Automatica* **29**, 237-240, 1993.
- [93] Zhou, K. and Khargonekar, P. P. "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty". *IEEE Trans. Autom. Contr.* **32**, 621-623, 1987.