



Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Posgrado en Física

**Propagación de ondas electromagnéticas  
en medios con índice de refracción estratificado,  
la representación de amplitud y fase**

Tesis que presenta:

M. en F. Ruth Diamant Adler

para la obtención del grado de: Doctor en Física.

Asesor: Dr. Manuel Fernández Guasti

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Roberto Alexander-Katz Kauffman

Secretario: Dr. Joaquín Delgado Fernández

Vocal: Dr. Wolf Luis Mochán Backal

Vocal: Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda

Vocal: Mtro. José Luis Jiménez Ramírez

México D.F., a 24 de septiembre de 2015



# Propagación de ondas electromagnéticas en medios con índice de refracción estratificado, la representación de amplitud y fase

## Objetivo de la investigación

El objetivo del presente trabajo es proponer un nuevo formalismo para tratar, en el entorno de la Electrodinámica Clásica, la propagación de la luz en medios con índice de refracción estratificado. Es decir, medios en los que el índice de refracción es función de una coordenada espacial. Mediante la representación de amplitud y fase se pretende plantear una forma más directa de abordar el tema, que permita procedimientos más eficientes para obtener soluciones numéricas y un mayor entendimiento de los fenómenos físicos involucrados.

## Resumen

La tesis está dividida en dos partes, la primera presenta la fundamentación teórica del trabajo y la segunda algunas de sus aplicaciones. La primera parte a su vez se divide en dos capítulos, en el primero (capítulo 2) se resume toda la teoría previa, desarrollada desde finales del siglo XIX hasta finales del XX, mientras que en el segundo capítulo (capítulo 3) se presenta la propuesta medular de este trabajo. El capítulo 2: “Marco teórico previo” es exclusivamente un trabajo de revisión, que se incluye para situar en el contexto histórico la propuesta, mientras que en el capítulo 3: “Representación de amplitud y fase” se exponen los fundamentos de ésta; es por lo tanto el capítulo 3 el que representa la esencia de la Tesis.

Los capítulos de la segunda parte, el 4, 5, 6, 7 y 8 corresponden a distintas aplicaciones específicas para la nueva metodología propuesta. Se procura incluir todos los estudios realizados para así exponer íntegramente el trabajo llevado a cabo. La mayor parte de lo contenido en estos capítulos se publicó en revistas especializadas durante el tiempo asignado a la realización del posgrado, las citas se encuentran incluidas en los números [75], [27], [58], [60] y [90] de la bibliografía. Además, se tuvo participación en dos congresos internacionales:

1. 22nd Congress of the International Commission for Optics: Light for the Development of the World. Organizadores: Ramón Rodríguez-Vera y Rufino Díaz-Uribe. Puebla, Mexico, 15-19 agosto, 2011.
2. Optical Interference Coatings 2013, Whistler Canada, 16-21 junio 2013.

Se publicaron trabajos en las memorias de estos encuentros, citados en [54], [56], [59], [88] y [89].



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Motivación . . . . .	7
1.2. Preámbulo . . . . .	7
1.3. Recursos informáticos . . . . .	9
<b>I Fundamentos</b>	<b>10</b>
<b>2. Marco teórico previo</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	11
2.2. Ondas planas y monocromáticas en medios estratificados . . . . .	13
2.2.1. Ecuaciones para los campos con polarización TE . . . . .	13
2.2.2. Ecuaciones para los campos con polarización TM . . . . .	15
2.2.3. La constante $\sigma$ y la relación de Snell generalizada . . . . .	16
2.2.4. Medio homogéneo . . . . .	16
2.2.5. Ecuaciones de Fresnel en la representación compleja de los campos . . . . .	16
2.2.5.1. Coeficientes de transmisión y reflexión TE . . . . .	17
2.2.5.2. Irradiancia y energía TE . . . . .	19
Propagación a ambos lados de la interfase . . . . .	20
Propagación solo a un lado de la interfase . . . . .	20
2.2.5.3. Coeficientes de transmisión y reflexión TM . . . . .	21
2.2.5.4. Irradiancia y energía TM . . . . .	24
Propagación a ambos lados de la interfase . . . . .	25
Propagación solo a un lado de la interfase . . . . .	25
2.2.5.5. Balance energético en general . . . . .	26
2.2.6. Método de las matrices de transferencia . . . . .	27
2.2.6.1. Aproximaciones relacionadas con el tamaño de $k_0$ . . . . .	31
Longitudes de onda grandes o variación abrupta de las propiedades ópticas .	31
Longitudes de onda pequeñas o variación gradual de las propiedades ópticas	31
2.2.6.2. Ventajas y desventajas del método de las matrices . . . . .	32
2.2.6.3. Multicapas homogéneas y los polinomios de Chebyshev . . . . .	33
2.2.7. La función de reflexión . . . . .	36
2.2.8. Soluciones exactas a la ecuación del campo con $n(z)$ continuo, para TE y medios no magnéticos . . . . .	37
2.2.8.1. Perfil de Rayleigh . . . . .	38
2.2.8.2. Perfil de Brekhovskikh . . . . .	41
2.2.8.3. Perfil de Epstein . . . . .	42

2.2.8.4.	Perfil de Morozov . . . . .	44
2.2.8.5.	Perfil de Shvartsburg-Maradudin . . . . .	46
2.2.8.6.	Más perfiles y algunos comentarios . . . . .	47
2.2.9.	Método de la transformada de Fourier inversa . . . . .	48
2.3.	Conclusiones . . . . .	50

**3. Representación de amplitud y fase 52**

3.1.	Planteamiento teórico . . . . .	52
3.1.1.	Ecuación de la amplitud para medios transparentes . . . . .	53
3.1.2.	Ecuación de la amplitud para medios que absorben . . . . .	54
3.1.3.	Ecuación de la amplitud en función del camino óptico . . . . .	54
3.1.4.	Campos eléctrico y magnético en términos de las amplitudes $A$ y $\mathcal{A}$ . . . . .	55
3.1.4.1.	Polarización TE . . . . .	55
3.1.4.2.	Polarización TM . . . . .	55
3.1.4.3.	Escalamiento de las soluciones . . . . .	55
3.2.	Soluciones a la ecuación de la amplitud y su interpretación . . . . .	56
3.2.1.	Medio homogéneo y transparente . . . . .	56
3.2.1.1.	Caso $\kappa^2 > 0$ . . . . .	57
3.2.1.2.	Caso $\kappa^2 < 0$ . . . . .	58
3.2.1.3.	Caso $\kappa^2 = 0$ . . . . .	58
3.2.2.	Una interfase en incidencia normal, medios transparentes y no magnéticos . . . . .	59
3.2.3.	Una interfase en incidencia oblicua TE, medios transparentes y no magnéticos . . . . .	62
3.2.3.1.	Caso $n_t > n_i$ . . . . .	62
3.2.3.2.	Caso $n_i > n_t$ . . . . .	64
3.2.4.	Una interfase en incidencia oblicua TM, medios transparentes y no magnéticos . . . . .	65
3.2.4.1.	Caso $n_t > n_i$ . . . . .	65
3.2.4.2.	Caso $n_i > n_t$ . . . . .	67
3.2.4.3.	Algunas particularidades en el caso de polarización TM . . . . .	69
3.2.5.	Coincidencias de la reflectividad TE y TM, una medida de la gradualidad . . . . .	71
3.3.	Conservación de la energía y el invariante $Q$ . . . . .	72
3.3.1.	Propagación a ambos lados de la región inhomogénea . . . . .	72
3.3.2.	Propagación solo a un lado de la región inhomogénea . . . . .	73
3.4.	La función de reflexión y el cuadrado de su módulo . . . . .	74
3.5.	Discusión y conclusiones . . . . .	75

**II Aplicaciones 78**

**4. Distintos perfiles modelando interfases y capas delgadas 79**

4.1.	El perfil de Epstein resuelto con diferencias finitas . . . . .	79
4.2.	Comparación entre distintos perfiles de interfase: infinitamente diferenciables y definidos por partes . . . . .	81
4.3.	Perfiles de capa delgada, de abruptos a graduales . . . . .	84
4.4.	Conclusiones . . . . .	86

<b>5. Reflexión por una discontinuidad en las derivadas de <math>n(z)</math></b>	<b>88</b>
5.1. Resultados con base en soluciones numéricas. . . . .	89
5.1.1. Interfase abrupta, perfil clase $C^{-1}$ . . . . .	89
5.1.2. Perfil clase $C^0$ . . . . .	90
5.1.3. Perfil clase $C^1$ . . . . .	94
5.1.4. Perfil clase $C^2$ . . . . .	95
5.1.5. Perfil clase $C^3$ . . . . .	96
5.1.6. Conclusiones de la sección 5.1 . . . . .	97
5.2. Solución analítica bajo la aproximación de variación suave del índice de refracción (SVRI)	98
5.2.1. La ecuación de la amplitud bajo la aproximación SVRI. . . . .	98
5.2.2. El término con la derivada de mayor orden . . . . .	100
5.2.3. Solución SVRI a la ecuación para el campo eléctrico con propagación en ambas direcciones. . . . .	101
5.2.4. Uniendo las soluciones . . . . .	102
5.2.5. Evaluación del coeficiente de reflexión a menor orden no nulo. . . . .	103
5.2.5.1. Perfil de clase $C^0$ . . . . .	104
5.2.5.2. Perfil de clase $C^1$ . . . . .	105
5.2.5.3. Perfil de clase $C^2$ . . . . .	105
5.2.5.4. Perfil de clase $C^{2j-1}$ y $C^{2j}$ . . . . .	105
5.2.6. Incremento en la reflexión. . . . .	106
5.2.7. Comparación de resultados para $r$ a menor orden no nulo. . . . .	107
5.2.8. Consistencia con otros resultados exactos y aplicaciones. . . . .	108
5.2.9. Conclusiones de la sección 5.2 . . . . .	109
5.3. Comparaciones entre los resultados numéricos y analíticos aproximados SVRI, con uno o varios órdenes de aproximación. . . . .	110
5.3.1. Comparando coeficientes de reflexión. . . . .	110
5.3.2. Más términos para el coeficiente de reflexión. . . . .	110
5.3.3. Comparación de las soluciones a la ecuación de la amplitud. . . . .	112
5.3.3.1. Perfil de clase $C^0$ . . . . .	112
5.3.3.2. Perfil de clase $C^1$ . . . . .	113
5.3.3.3. Perfil de clase $C^2$ . . . . .	113
5.3.3.4. Perfil de clase $C^3$ . . . . .	115
5.3.4. Conclusiones de la sección 5.3 . . . . .	115
<b>6. Comprobación de las relaciones de reversibilidad.</b>	<b>117</b>
6.1. Una definición más general para los coeficientes de reflexión y transmisión . . . . .	117
6.1.1. Polarización TE . . . . .	118
6.1.1.1. Luz incidiendo desde la izquierda . . . . .	118
6.1.1.2. Luz incidiendo desde la derecha . . . . .	119
6.1.2. Polarización TM . . . . .	119
6.1.2.1. Luz incidiendo desde la izquierda . . . . .	119
6.1.2.2. Luz incidiendo desde la derecha . . . . .	120
6.2. El wronskiano y las relaciones de reversibilidad . . . . .	120
6.2.1. Polarización TE . . . . .	120
6.2.2. Polarización TM . . . . .	123
6.3. Conclusiones . . . . .	125

<b>7. La reflectividad de una monocapa</b>	<b>126</b>
7.1. Monocapas y sus propiedades ópticas . . . . .	126
7.1.1. Los modelos de esparcimiento . . . . .	128
7.1.1.1. Un solo elemento aislado que esparce luz . . . . .	128
Esparcimiento de Rayleigh . . . . .	128
Esparcimiento de Rayleigh-Gans . . . . .	128
7.1.1.2. Fenómenos del colectivo . . . . .	129
Aproximación de esparcimiento simple (SSA) para una monocapa . . . . .	129
Esparcimiento múltiple (MSM) para una monocapa . . . . .	130
7.1.2. Reflectividad de una monocapa soportada por una superficie plana . . . . .	131
7.1.3. Reflectividad de la monocapa como película homogénea efectiva (THF) . . . . .	131
7.1.4. Reflectividad de una película gradual equivalente (EGL) . . . . .	132
7.2. Resultados para la reflectividad en la dirección especular . . . . .	133
7.2.1. Comparación con los modelos de esparcimiento usando la solución de Mie . . . . .	133
7.2.1.1. Monocapa aislada . . . . .	133
7.2.1.2. Monocapa soportada . . . . .	135
7.2.2. Comparación con los modelos de esparcimiento bajo la aproximación Rayleigh-Gans . . . . .	136
7.2.2.1. Monocapa aislada . . . . .	136
7.2.2.2. Monocapa suspendida . . . . .	139
7.3. Discusión y conclusiones . . . . .	139
7.3.1. Modelo de esparcimiento simple con la solución de Mie (SSA-M) . . . . .	140
7.3.2. Una película gradual equivalente (EGL) . . . . .	140
7.3.3. Modelos de esparcimiento bajo la aproximación Rayleigh-Gans (SSA-R&G y MSM-R&G) . . . . .	140
7.3.4. Una película homogénea efectiva (THF) . . . . .	140
<b>8. Diseño de multicapas y perfiles periódicos continuos</b>	<b>141</b>
8.1. Espejos de Bragg . . . . .	141
8.1.1. Multiplicación y potenciación de matrices . . . . .	145
8.1.2. Comparación de soluciones analíticas con numéricas . . . . .	147
8.1.3. Conclusiones de la sección 8.1 . . . . .	151
8.2. Perfiles periódicos con variación gradual del índice de refracción y otros “corrugados” . . . . .	151
8.2.1. Perfiles $n(z)$ continuos que se aproximan al de un DBR . . . . .	151
8.2.2. Perfil de triángulos . . . . .	153
8.2.2.1. Caso numérico . . . . .	155
8.2.2.2. Caso analítico exacto . . . . .	156
8.2.2.3. Caso analítico aproximado SVRI . . . . .	157
8.2.2.4. Comparación de reflectividades $R(\lambda)$ para el perfil de triángulos obtenidas con distintos métodos . . . . .	159
8.2.2.5. Comparación con la reflectividad de un DBR . . . . .	161
8.2.3. Perfil de dientes de sierra . . . . .	162
8.2.4. Perfiles apodizados . . . . .	167
8.2.5. Consecuencias de un coeficiente de reflexión complejo asociado a los planos que reflejan luz dentro de un perfil periódico . . . . .	168
8.2.6. Conclusiones de la sección 8.2 . . . . .	174
<b>Conclusiones generales y perspectivas</b>	<b>176</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	6
<b>Glosario</b>	<b>178</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>186</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>186</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Estudiar la propagación de la luz cuando hay una transición gradual de un índice de refracción a otro está motivado principalmente por el hecho de que, en la realidad física, las interfases entre distintos materiales no son discontinuidades perfectas, es decir no son superficies ideales de dos dimensiones [1]. Existe un intervalo de distancia finito en el que se da la transición, que aún siendo muy pequeño consta de varios átomos o moléculas. En ocasiones, el fenómeno de adsorción hace que estos intervalos de transición sean aún mayores.

Por otro lado, el cambio continuo del índice de refracción puede ser también una característica deseada, con tecnologías sofisticadas actualmente se fabrican filtros ópticos gradados [2, 3] que aprovechan las ventajas de una variación gradual del índice de refracción para conferir propiedades ventajosas. Recientemente se han propuesto perfiles  $n(z)$  graduales y periódicos en el diseño de meta-materiales gradados[4] y como cristales fotónicos en una dimensión [5].

Otras aplicaciones que motivan este estudio son el monitoreo remoto de perturbaciones atmosféricas, ya que éste se basa principalmente en la reflexión de la luz por fluctuaciones en el índice de refracción del aire [6] y la tomografía de coherencia óptica (OCT) [7]. La OCT es una técnica que emplea la información del perfil de reflectividad en medios continuos, en especial de tejidos oftálmicos, para generar imágenes en tres dimensiones. El hecho de que la componente especular del esparcimiento de luz producido por capas constituidas de partículas pequeñas, bajo ciertas circunstancias, se pueda modelar como un medio estratificado, expande las posibilidades de aplicación del presente trabajo al tema del esparcimiento de luz. Si bien la luz es un tipo especial de fenómeno ondulatorio muchos resultados para las ondas electromagnéticas se pueden generalizar a ondas de otra clase.

La representación de amplitud y fase lleva a plantear una ecuación tipo Ermakov-Pinney para la amplitud, que es un famoso ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria no lineal. Se ha mostrado que dicha ecuación es relevante para un buen número de fenómenos físicos [8]. La motivación matemática de este trabajo es poder contribuir al estudio de esta ecuación, sus soluciones y los invariantes asociados.

### 1.2. Preámbulo

En este trabajo, la propagación de la luz se describe en términos de las ecuaciones de Maxwell, se consideran medios isotrópicos y de respuesta lineal, aunque pueden ser inhomogéneos en una dirección espacial. Es decir, medios en los que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son escalares que dependen de la coordenada espacial  $z$ , pero no dependen del valor de los campos eléctrico ni magnético. No se considera de forma explícita la dispersión, es decir la dependencia del índice de refracción en la

frecuencia, ya sea temporal  $n(\omega)$  o espacial  $n(k)$ .

La teoría para tratar la propagación de la luz bajo este esquema ha sido estudiada desde hace ya mucho tiempo, hay material publicado desde la segunda mitad del siglo XIX [9–12]. La propuesta novedosa consiste en desacoplar las ecuaciones diferenciales correspondientes a la amplitud y a la fase del campo, ya sea el eléctrico o el magnético. Al conseguir este desacoplamiento se encuentra un invariante que relaciona la amplitud y la fase, de tal forma que sólo se requiere resolver la ecuación diferencial, ordinaria y no lineal para la amplitud ya que mediante ese invariante la fase queda determinada. Cabe resaltar que es la irradiancia, el promedio temporal de la potencia incidente por unidad de superficie, la cantidad física que se mide corrientemente en un laboratorio de óptica y ella está relacionada con la amplitud del campo. Lo anterior quiere decir que se propone plantear el problema de la propagación de luz escribiendo las ecuaciones en términos de la cantidad más directamente relacionada con lo que se mide en el laboratorio. La representación de amplitud y fase lleva a un tratamiento que tiene ventajas significativas sobre métodos tradicionales al hacer los cálculos más simples, adicionalmente se predicen nuevos fenómenos.

La propagación de ondas electromagnéticas a través de medios isotrópicos y de respuesta lineal, en los que el índice de refracción varíe a lo largo de una distancia mucho mayor o mucho menor que la longitud de onda, se ha descrito ya de forma bastante satisfactoria:

- En el primer caso, el gradual, se desprecian algunos términos de las ecuaciones usando el argumento de que las longitudes de onda son muy pequeñas y se llega a la ecuación de la Eikonal [13, Capítulo III, pag.119]. Esta ecuación se resuelve por distintos métodos dependiendo de la complejidad del índice de refracción como función de la posición, aunque las cáusticas y focos todavía representan un obstáculo.
- En el segundo caso, el abrupto, las ecuaciones de Maxwell se resuelven por separado para cada medio homogéneo, con índice de refracción constante. Luego, estas soluciones de la ecuación de onda se unen en las interfaces imponiendo condiciones de frontera, de la misma forma en que se obtienen los coeficientes de Fresnel [13, Sección 1.5].

Para el caso intermedio, cuando la variación del índice de refracción ocurre a lo largo de distancias del orden de la longitud de onda, hay menos material publicado. En el caso de ondas planas y monocromáticas, algunos perfiles de índice de refracción, siendo funciones  $n(z)$  muy particulares, permiten resolver analíticamente la ecuación diferencial para el campo eléctrico, pero en general no suele ser así. Lo que se ha hecho para poder tratar analíticamente el caso de manera más general es simular interfaces, en las que el índice de refracción varía de forma continua, con una secuencia de películas homogéneas muy delgadas [14]. También se han propuesto desarrollos en serie para escribir las soluciones, ya sea en serie de potencias en  $\omega$  (la frecuencia) o su inverso, según si el caso se aproxima al gradual o al abrupto [15, 16]. La mayor parte de esta teoría para los medios estratificados fue desarrollada antes del último tercio del siglo pasado.

En tiempos anteriores al último cuarto del siglo XX se eludía el uso de métodos numéricos ya que éstos consumían demasiado tiempo y esfuerzo. Con el desarrollo de la tecnología en el manejo digital de la información que se ha dado desde finales del siglo pasado, actualmente los cálculos numéricos se usan profusamente y ya no necesariamente representan un obstáculo, incluyendo muchos casos de ecuaciones diferenciales no lineales. El presente trabajo propone una nueva forma de describir la propagación de la luz en medios isotrópicos, estratificados y de respuesta lineal, con la intención de que se les pueda dar un tratamiento general, con particular énfasis en encontrar soluciones numéricas, sin obligadamente tener que hacer aproximaciones previas relacionadas con lo abrupto o gradual en la variación del índice de refracción. Más aún, se muestra en este trabajo (en la sección 5.2) que la representación de amplitud y fase puede ser incluso de mayor conveniencia para hacer aproximaciones relacionadas con lo gradual en el cambio del índice de refracción, obteniéndose resultados analíticos aproximados que mejoran el entendimiento del fenómeno físico de la reflexión sobre un plano donde la función  $n(z)$  no es suave.

### 1.3. Recursos informáticos

Para la escritura del documento correspondiente a esta Tesis se emplea *LyX* [17], un procesador de textos libre y multiplataforma que permite la edición de texto usando *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Se eligió a *Book* como la clase de documento apropiada para este trabajo. Las gráficas se elaboraron principalmente con *OriginPro* [18] de *OriginLab* y los dibujos con *CorelDRAW* de *Corel* [19], programas que funcionan con el sistema operativo *Windows*. Alternativamente se usaron también *QtiPlot* [20] y *GIMP* [21] de *GNU* con sistema operativo *Linux*.

En esta tesis se recurre con frecuencia a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante métodos numéricos. Para encontrar las soluciones se emplean dos paquetes de *software*, cada uno de ellos está cerca de un extremo en el espectro que abarca desde el más elemental al más sofisticado. En el segundo extremo mencionado está el programa *Mathematica* (versiones 8, 9 y 10) de *Wolfram* [22], para el que nuestra institución (UAM) adquirió licencia de uso. Su propaganda presume de “construir los más poderosos algoritmos sin precedente en todas las áreas” entre otras muchas bondades. Como referencia se menciona aquí que la versión más reciente de este programa ocupa  $\sim 3\text{GB}$  en el disco duro de la computadora. Ciertamente es una herramienta muy prestigiosa para la obtención de soluciones numéricas y su presentación gráfica, pero al utilizar la función construida *NDSolve* (solucionador numérico de ecuaciones diferenciales) no queda bien definido para el usuario que procedimiento se sigue para obtener los resultados. En el extremo de lo más elemental está *Just BASIC* de *Shoptalk Systems* [23] que es gratuito y consta de un lenguaje de programación muy simple, tan solo ocupa  $\sim 7\text{MB}$  en el disco duro, casi tres órdenes de magnitud menos que *Mathematica*. El usuario elabora el programa, de tal manera de que se tiene total certeza del procedimiento que sigue para hallar las soluciones. En la mayoría de los casos se usan ambos programas para obtener soluciones a los mismos problemas, siendo ésto una forma de redundancia, lo que permite confirmar la confiabilidad de los resultados. Si bien *Mathematica* goza de prestigio, el utilizar con éxito un programa tan modesto como *Just BASIC* demuestra que no se requiere gran sofisticación computacional para trabajar con la propuesta de esta tesis, aunque ésta se basa en una ecuación diferencial no lineal. En lo que se refiere al tema de esparcimiento de luz se recurre también al programa *Scatlab* [24], que realiza simulaciones basadas en la teoría de Mie.

Parte I

Fundamentos

## Capítulo 2

# Marco teórico previo

Aquí se recurre a la teoría electromagnética de Maxwell para describir la propagación de ondas electromagnéticas en medios estratificados, es decir inhomogéneos en una dirección del espacio. Se resumen los resultados conocidos e importantes, previos a la propuesta de la representación de amplitud y fase, con el objeto de sentar las bases teóricas y poder hacer posteriores comparaciones. Ésto también permite ubicar en contexto más amplio dicha propuesta. El estudio de ondas electromagnéticas en medios estratificados se viene dando desde finales del siglo XIX a la fecha, sin embargo, debido principalmente a las circunstancias políticas de las distintas etapas de la historia del siglo XX, no se dio una buena comunicación entre los grupos de investigadores en el tema. Actualmente, gracias a las nuevas tecnologías para guardar y distribuir la información en formatos digitales, se facilita enormemente el acceso a ella. Éste es un buen momento histórico para revisar lo hecho con el objetivo de poder continuar aportando sin repetir trabajos.

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell

Empezando con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

Aplicando el rotacional a (2.2)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Si el material involucrado tiene un comportamiento lineal  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  y se intercambia el orden de las derivadas espaciales y temporales se puede reescribir la ecuación anterior

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mu \mathbf{H}.$$

Si se usan las identidades  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  y  $\nabla \times U \mathbf{A} = \nabla U \times \mathbf{A} + U \nabla \times \mathbf{A}$ , la primera del lado izquierdo y la segunda del lado derecho de la ecuación, dejando que la permeabilidad magnética varíe en el espacio, de manera que se pueda incluir a los medios estratificados en este tratamiento, se obtiene

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mu \times \mathbf{H} + \mu \nabla \times \mathbf{H}).$$

Si además hay un comportamiento lineal del campo eléctrico  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  y se usa la ecuación (2.1) se llega a

$$\nabla(\nabla \cdot \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \mu \times \mathbf{H} + \mu \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right).$$

Sea también la permitividad eléctrica una función de las coordenadas espaciales. Asumiendo que el medio obedece la relación de Ohm  $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$  del lado derecho y usando la identidad  $\nabla \cdot (U \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla U + U \nabla \cdot \mathbf{A}$  del lado izquierdo

$$\nabla \left( \mathbf{D} \cdot \nabla \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \mu \times \mathbf{H} + \mu \left( g \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right).$$

Si del lado izquierdo, se aplica la ecuación (2.3) y se escribe todo en términos de  $\mathbf{E}$  en vez de  $\mathbf{D}$ , mientras que del lado derecho se considera que la permeabilidad magnética, la permitividad y la conductividad son independientes del tiempo se obtiene

$$\nabla \left( \varepsilon \mathbf{E} \cdot \nabla \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = - \left( \nabla \mu \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \left( g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \right).$$

Notando que  $\varepsilon \nabla \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon = -\nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ , la expresión anterior queda

$$-\nabla \left( \mathbf{E} \cdot \nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \mu \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Reescribiendo el primer término del lado derecho usando (2.2)

$$-\nabla \left( \mathbf{E} \cdot \nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \mu \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Como  $\frac{1}{\mu} \nabla \mu = \nabla \ln \frac{\mu}{\mu_0}$ , lo anterior se puede escribir así

$$-\nabla \left( \mathbf{E} \cdot \nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \ln \frac{\mu}{\mu_0} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Finalmente restringiendo el desarrollo a materiales aislantes y descargados de modo que  $g \approx 0$  y  $\rho \approx 0$

$$\nabla \left( \mathbf{E} \cdot \nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + \nabla \ln \frac{\mu}{\mu_0} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Siguiendo los mismos pasos para el campo magnético comenzando con (2.1), se llega a

$$\nabla \left( \mathbf{H} \cdot \nabla \ln \frac{\mu}{\mu_0} \right) + \nabla \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (2.6)$$

Si la permitividad y la permeabilidad fueran constantes en el espacio, las expresiones anteriores se convertirían en las muy conocidas ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético:  $0 = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E}$  y  $0 = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{H}$ .

A continuación se hace un recuento de todas las consideraciones que simplifican el tratamiento y permiten obtener las ecuaciones (2.5) y (2.6):

1. Se está dentro de los límites de la Teoría Clásica de Campo, dónde las ecuaciones de Maxwell son válidas. No se hace ninguna consideración de la naturaleza cuántica de los campos ni corpuscular de la materia.
2. Se intercambia el orden de las derivadas espaciales y temporales de manera libre, lo cual requiere que la función tenga derivadas continuas [25, pag. 921] según el teorema de Schwartz-Clairaut.
3. Se supone al material como isotrópico.
4. El material involucrado tiene un comportamiento magnético lineal.
5. La permeabilidad magnética es independiente del tiempo
6. Se obedece la ley de Ohm.
7. El material tiene respuesta lineal también al campo eléctrico.
8. La permitividad es independiente del tiempo.
9. La conductividad es independiente del tiempo y es finalmente despreciable.
10. No hay cargas libres.

## 2.2. Ondas planas y monocromáticas en medios estratificados

### 2.2.1. Ecuaciones para los campos con polarización TE

Se toma la ecuación (2.5), si se supone que el medio es estratificado, es decir  $\varepsilon = \varepsilon(z)$  y  $\mu = \mu(z)$ , siendo el eje  $z$  normal a las interfaces y se consideran ondas planas propagándose en el plano  $yz$  con el campo eléctrico paralelo al eje  $x$   $\mathbf{E} = E(y, z, t) \hat{\mathbf{i}}$ , o sea el caso de ondas planas con polarización TE (campo eléctrico transversal), queda

$$-\frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} \frac{\partial E}{\partial z} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right].$$

Luego se supone que una solución particular para el campo  $\mathbf{E}$  se puede escribir como el producto de dos funciones  $\mathbf{E} = E_{\text{tiempo}} \mathbf{E}_{\text{espacio}}$  y se aplica separación de variables

$$\frac{1}{\mu \varepsilon E_x} \left[ -\frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{E_t} \left[ \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} \right] = -\omega^2,$$

donde  $E_x$  es la función espacial,  $E_t$  la temporal y  $-\omega^2$  la constante de separación. Finalmente se propone como solución para la parte temporal  $E_t = e^{-i\omega t}$ , el caso monocromático. En resumen, si se supone que el medio está estratificado en la dirección  $z$  y que  $\mathbf{E} = E_x(y, z) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{i}}$ , la ecuación (2.5) se puede escribir así [13, Capítulo I, pag.56]

$$\frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} \frac{\partial E_x}{\partial z} = k_0^2 n^2 E_x + \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right], \quad (2.7)$$

donde  $n^2 = \varepsilon \mu c^2$  y  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ . Se supone nuevamente que la solución se puede escribir como el producto de dos funciones, en particular  $E_x(y, z) = U(z) Y(y)$  u, donde  $u$  es una constante que contiene las unidades del campo eléctrico (V/m en el S.I.) para permitir que  $U(z)$  y  $Y(y)$  sean adimensionales. La separación de variables lleva a (2.7)

$$\left(\frac{1}{U} \frac{dU}{dz}\right) \frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} - k_0^2 n^2 - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}.$$

Los términos de la izquierda solo dependen de  $z$  mientras que los términos de la derecha sólo dependen de  $y$ , eso es posible solo si ambos lados son iguales a una constante. Se propone a  $-k_0^2 \sigma^2$  como la constante, donde  $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{1}{U} \frac{dU}{dz}\right) \frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} - k_0^2 n^2 - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_0^2 \sigma^2, \quad (2.8)$$

por lo tanto la solución para  $Y$  es de la forma  $Y = [\text{constante}] e^{\pm i k_0 \sigma y}$  y  $\mathbf{E}$  se puede escribir

$$\mathbf{E} = U(z) e^{i(\pm k_0 \sigma y - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} u, \quad (2.9)$$

donde  $U$  debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{dU}{dz} \left( \frac{d \ln \frac{\mu}{\mu_0}}{dz} \right) + U k_0^2 (n^2 - \sigma^2) = 0. \quad (2.10)$$

Para obtener el campo magnético se sigue la ecuación (2.2). Aplicando el rotacional a (2.9) e integrando en el tiempo obtenemos el campo magnético  $\mathbf{B}$  en términos de  $U$ :

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} e^{i(\pm k_0 \sigma y - \omega t)} \left[ \frac{dU}{dz} \hat{\mathbf{j}} \mp U i k_0 \sigma \hat{\mathbf{k}} \right] u \quad (2.11)$$

Donde se ha escogido  $\sigma \geq 0$ , es decir la propagación en la dirección positiva del eje  $y$ . Cualquier constante agregada debido a la integración en el tiempo representaría la presencia de un campo magnetostático, que no se quiere introducir por ahora. El vector de Poynting se define como  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , pero cuando se usa la representación compleja de las ondas electromagnéticas se debe reescribir como  $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E}) \times \text{Re}(\mathbf{H}) = \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$ , dado que  $\mathbf{S}$  ya no es lineal en los campos [26, pag. 397]. El vector de Poynting en términos de  $U$  queda

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \left[ e^{2i(k_0 \sigma y - \omega t)} \left( U^2 k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} - iU \frac{dU}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + \left( UU^* k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + iU \frac{dU^*}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + \right. \\ & \left. + \left( UU^* k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} - iU^* \frac{dU}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + e^{-2i(k_0 \sigma y - \omega t)} \left( U^{*2} k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + iU^* \frac{dU^*}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) \right] \frac{u^2}{4\omega\mu} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dónde se ha escogido  $\sigma \geq 0$  y empleado  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ). Para obtener (2.9), (2.10) y (2.11) se han hecho las siguientes consideraciones:

1. Se trata de un medio estratificado.
2. El comportamiento de la luz es monocromático.
3. Se suponen ondas planas y polarizadas TE.

### 2.2.2. Ecuaciones para los campos con polarización TM

La ecuación (2.6) es muy similar a la (2.5),  $\mathbf{H}$  juega el papel de  $\mathbf{E}$  y se intercambian  $\mu$  y  $\varepsilon$ , entonces si se supone que el medio está estratificado en la dirección  $z$  y que  $\mathbf{H} = H_x(y, z)e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{i}}$  (campo magnético transversal), la ecuación (2.6) se puede escribir así [13]

$$\frac{d \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{dz} \frac{\partial H_x}{\partial z} = k_0^2 n^2 H_x + \left[ \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right]. \quad (2.13)$$

Suponiendo que una solución particular se puede escribir como el producto de dos funciones  $H_x(y, z) = \mathcal{U}(z) \mathcal{Y}(y) v$ , donde  $v$  es una constante que contiene las unidades del campo magnético (A/m en el S.I.) para permitir que  $\mathcal{U}(z)$  y  $\mathcal{Y}(y)$  sean adimensionales, lleva a

$$\left( \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{d\mathcal{U}}{dz} \right) \frac{d \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{dz} - k_0^2 n^2 - \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2} = \frac{1}{\mathcal{Y}} \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dy^2} = -k_0^2 \sigma^2, \quad (2.14)$$

por lo tanto la solución para  $\mathcal{Y}$  es de la forma  $\mathcal{Y} = [\text{constante}] e^{\pm i k_0 \sigma y}$ . Ahora  $\mathbf{H}$  se puede escribir

$$\mathbf{H} = \mathcal{U}(z) e^{i(\pm k_0 \sigma y - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} v, \quad (2.15)$$

donde  $\mathcal{U}$  debe satisfacer la ecuación

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2} - \frac{d\mathcal{U}}{dz} \left( \frac{d \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{dz} \right) + \mathcal{U} k_0^2 (n^2 - \sigma^2) = 0. \quad (2.16)$$

Para obtener el campo eléctrico se toma la ecuación (2.1) sin corrientes eléctricas, aplicando el rotacional a (2.15) e integrando en el tiempo obtenemos el campo de desplazamiento  $\mathbf{D}$  en términos de  $\mathcal{U}$

$$\mathbf{D} = \frac{i}{\omega} e^{i(\pm k_0 \sigma y - \omega t)} \left[ \frac{d\mathcal{U}}{dz} \hat{\mathbf{j}} \mp \mathcal{U} i k_0 \sigma \hat{\mathbf{k}} \right] v. \quad (2.17)$$

Para medios lineales  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}$  y por lo tanto

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon \omega} e^{i(\pm k_0 \sigma y - \omega t)} \left[ \frac{d\mathcal{U}}{dz} \hat{\mathbf{j}} \mp \mathcal{U} i k_0 \sigma \hat{\mathbf{k}} \right] v. \quad (2.18)$$

El vector de Poynting es  $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E}) \times \text{Re}(\mathbf{H}) = \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \left[ e^{2i(k_0 \sigma y - \omega t)} \left( \mathcal{U}^2 k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} - i \mathcal{U} \frac{d\mathcal{U}}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + \left( \mathcal{U} \mathcal{U}^* k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} - i \mathcal{U}^* \frac{d\mathcal{U}}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \mathcal{U} \mathcal{U}^* k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + i \mathcal{U} \frac{d\mathcal{U}^*}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) + e^{-2i(k_0 \sigma y - \omega t)} \left( \mathcal{U}^{*2} k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + i \mathcal{U}^* \frac{d\mathcal{U}^*}{dz} \hat{\mathbf{k}} \right) \right] \frac{v^2}{4\omega\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se ha escogido  $\sigma \geq 0$  y considerado que  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Para obtener (2.15), (2.16), (2.18) y (2.19) se han hecho las siguientes consideraciones: de la luz

1. Se trata de un medio estratificado
2. El comportamiento de la luz es monocromático
3. Se suponen ondas planas y polarizadas TM.

### 2.2.3. La constante $\sigma$ y la relación de Snell generalizada

La fase de los campos eléctrico y magnético es una función lineal en  $y$ , es decir la razón de cambio de la fase en la dirección  $y$  es constante. Para una onda plana propagándose en el espacio homogéneo la fase es:  $k_0 n(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \theta) - \omega t$ , donde los ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\theta$  son los que hace el vector normal a las superficies de fase constante con los respectivos ejes cartesianos. Se puede interpretar entonces a la constante  $\sigma$ , en la parte correspondiente a la fase de las ecuaciones (2.9), (2.11), (2.15) y (2.18) como  $\sigma = n \cos \beta = n \sin \theta$ . La expresión anterior se reconoce como la *ley de Snell*[27].

### 2.2.4. Medio homogéneo

En el caso de un medio homogéneo ( $\mu$  y  $\varepsilon$  constantes) las ecuaciones (2.10) y (2.16) se reducen a la ecuación de Helmholtz. Como no hay estratificación, dado que se trata de un medio homogéneo, no tiene sentido hablar de la dirección de polarización de la luz en relación a una superficie de discontinuidad que no existe. Sin embargo, se puede definir el plano de incidencia como el plano  $yz$ , siendo así, el caso TE se refiere a que el vector del campo eléctrico está en la dirección  $x$ , mientras que el magnético tiene componentes en las otras direcciones  $y$  y  $z$ . Así mismo, el caso TM se refiere a que el campo magnético está en la dirección  $x$  y es el eléctrico el que tiene componentes en las direcciones  $y$  y  $z$ . A continuación se estudia la propagación de ondas planas en un medio homogéneo, bajo el esquema TE, con una dirección de propagación  $\pm\theta$  respecto del eje  $z$ .

Si  $n^2 - \sigma^2 > 0$  y se quiere permitir la contra-propagación de ondas en la dirección  $z$ , la solución debe ser de la forma

$$U = \tilde{A}_i e^{ik_0 z \sqrt{n^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n^2 - \sigma^2}} = \tilde{A}_i e^{ik_0 n z \cos \theta} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 n z \cos \theta}, \quad (2.20)$$

dónde  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{A}_r$  son constantes pero pudieran ser complejas. Se pueden interpretar los módulos de  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{A}_r$  como las amplitudes de las ondas que van y vienen respectivamente. Dado que  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ , se permiten soluciones que impliquen ambas direcciones de propagación.

La derivada de la ecuación (2.20) es

$$\frac{dU}{dz} = ik_0 n \cos \theta \left( \tilde{A}_i e^{ik_0 n z \cos \theta} - \tilde{A}_r e^{-ik_0 n z \cos \theta} \right) \quad (2.21)$$

Combinando (2.20) y (2.21) se puede escribir la razón de los campos eléctricos, el reflejado y el transmitido, como:

$$\frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 n z \cos \theta}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 n z \cos \theta}} = \frac{iU k_0 n \cos \theta - \frac{dU}{dz}}{iU k_0 n \cos \theta + \frac{dU}{dz}} \quad (2.22)$$

El cociente anterior se puede relacionar con el coeficiente de reflexión si la contra-propagación es resultado de la reflexión de la luz sobre alguna interfase.

Si  $n^2 - \sigma^2 < 0$  la solución de la ecuación de Helmholtz es exponencial y si  $n^2 - \sigma^2 = 0$  la solución es una función constante (aunque de forma estricta también una función lineal es solución).

Bajo el esquema TM se obtienen resultados equivalentes para  $\mathcal{U}$ , pero éstos se relacionan directamente con el campo magnético.

### 2.2.5. Ecuaciones de Fresnel en la representación compleja de los campos

En esta sección se elige la propagación en la dirección positiva del eje  $y$ , es decir  $\sigma \geq 0$ . Se supone una onda plana electromagnética que atraviesa una interfase entre dos medios homogéneos, isotrópicos, lineales, de índice de refracción real  $n^2 = \varepsilon \mu c^2$ . Sea el plano de la interfase el plano  $x-y$ .

### 2.2.5.1. Coeficientes de transmisión y reflexión TE

La figura 2.1 muestra el caso para la polarización del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia (TE), el vector de campo eléctrico atraviesa el plano del papel.

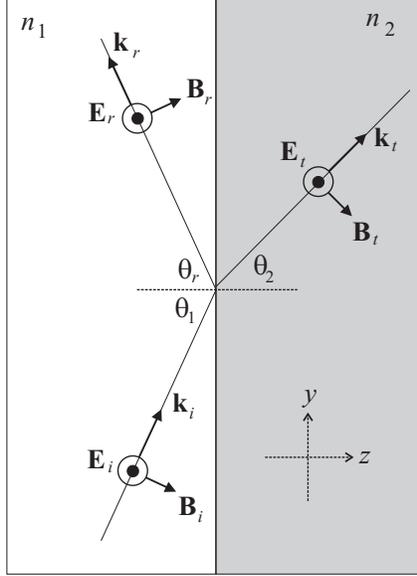


Figure 2.1: El campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, polarización TE. Los vectores  $\mathbf{k}$  indican a la dirección de propagación. El eje  $z$  apunta hacia la derecha, el  $y$  hacia arriba y el  $x$  entra a la página.

La solución general de (2.10) para un medio homogéneo es (2.20). Las condiciones a la frontera para los campos se deben cumplir sobre la interfase  $z = z_0$ . Las componentes paralelas al plano de la interfase de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , descritos en las ecuaciones deben ser continuas. Si se suponen ondas que se contra-propagan en un semiespacio ( $z < z_0$ ) y solo una onda que se transmite en el otro ( $z > z_0$ ):

$$\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = \tilde{A}_t e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}, \quad (2.23)$$

$$\tilde{A}_i \frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1} e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_r \frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1} e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = \tilde{A}_t \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2} e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (2.24)$$

Dividiendo la última ecuación (2.24) entre  $\frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1}$ , sumándola a (2.23) se halla el coeficiente de transmisión complejo  $t_{\perp}$

$$t_{\perp} = \frac{\tilde{A}_t e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}} = \frac{2\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} + \mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (2.25)$$

Similarmente, dividiendo (2.24) entre  $\frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2}$  y restándosela a (2.23) se halla el coeficiente de reflexión complejo  $r_{\perp}$

$$r_{\perp} = \frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}} = \frac{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} - \mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} + \mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (2.26)$$

Si las raíces presentes en (2.26) son reales se pueden sustituir  $\sqrt{n_1^2 - \sigma^2} = n_1 \cos \theta_1$  y  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2} = n_2 \cos \theta_2$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de propagación y la normal a la interfase. Si además se trata de medios no magnéticos  $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ , se llega a la conocida expresión

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \quad (2.27)$$

que es una cantidad real. Se puede graficar a  $r$  como función de  $\theta_1$ , reescribiéndola mediante la ley de Snell así

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}. \quad (2.28)$$

Su gráfica se muestra en la figura 2.2. Si  $n_1 > n_2$ , habrá ciertos valores de  $\theta_1$  que hagan imaginaria la raíz cuadrada presente tanto en el numerador como en el denominador. En ese caso  $r$  sería una cantidad compleja del tipo  $r = \frac{a-bi}{a+bi}$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales positivos, por lo tanto el módulo de  $r$  sería unitario.

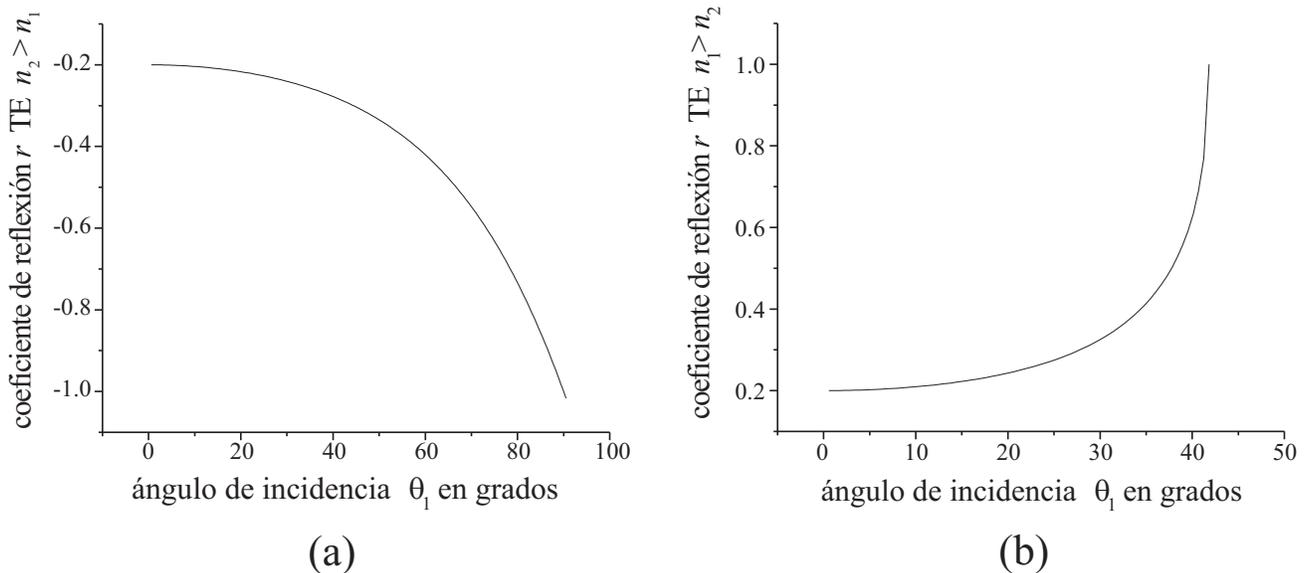


Figura 2.2: El coeficiente de reflexión  $r$  para polarización TE y medios no magnéticos. (a) Reflexión externa  $n_2 > n_1$ , en particular  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1.5$ . (b) Reflexión interna  $n_1 > n_2$ , en particular  $n_1 = 1.5$  y  $n_2 = 1$ . El ángulo crítico es de  $41.8^\circ$ , para ángulos mayores  $r_{\perp}$  es compleja.

Para incluir la  $r$  compleja en la gráfica se presentan el módulo y la fase por separado, como se muestra en la figura 2.3. En particular  $a = n_1 \cos \theta_1$  y  $b = \sqrt{|n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1|}$  de tal modo que la fase del coeficiente de reflexión  $\delta_r$  en el caso de reflexión total interna se puede escribir como

$$\delta_{r_{\perp}} = -2 \arctan \frac{\sqrt{|n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1|}}{n_1 \cos \theta_1}.$$

Similarmente con el coeficiente de transmisión

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}.$$

La gráfica de  $t_{\perp}$  como función de  $\theta_1$  se muestra en la figura 2.4. De las ecuaciones (2.25) y (2.26) se puede ver que se cumple  $t_{\perp} - r_{\perp} = 1$ .

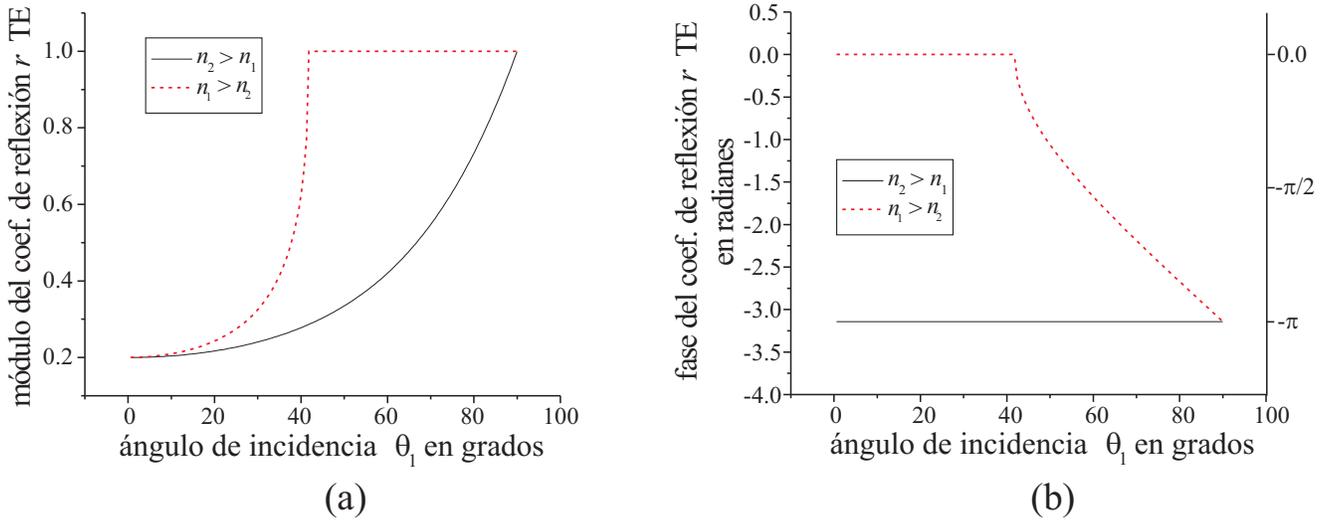


Figura 2.3: (a) Módulo y (b) fase del coeficiente de reflexión  $r$  para polarización TE y medios no magnéticos. Se presentan los dos casos  $n_2 > n_1$  y  $n_1 > n_2$ , los valores escogidos para los índices de refracción son  $n = 1, 1.5$ .

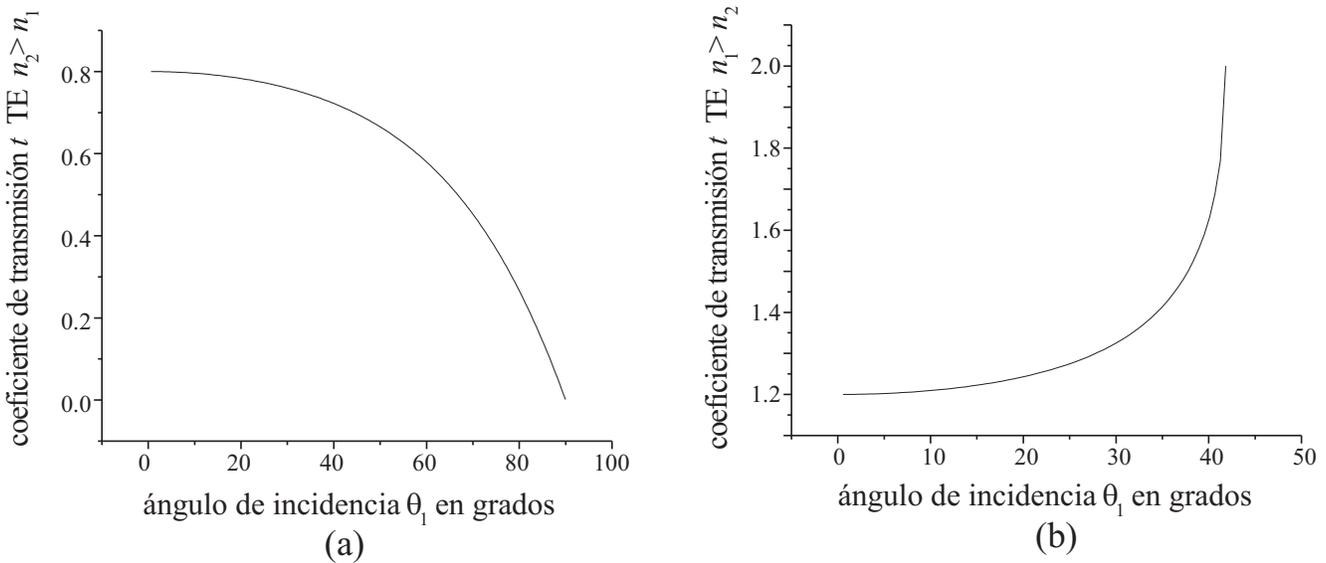


Figura 2.4: Coeficiente de transmisión  $t$  para polarización TE y medios no magnéticos. (a) El caso  $n_2 > n_1$ , en particular  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1.5$ . (b) El caso  $n_1 > n_2$ , en particular  $n_1 = 1.5$  y  $n_2 = 1$ .

### 2.2.5.2. Irradiancia y energía TE

El vector de Poynting representa la potencia por unidad de área que atraviesa una superficie normal a él. El promedio temporal de este flujo de energía, es la irradiancia  $I = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}} \rangle_t$ , donde  $\hat{\mathbf{a}}$  es un vector unitario normal a dicha superficie. Si la superficie de interés es la de la interfase misma, de (2.12) se encuentra que la irradiancia es

$$I = i \left( -U \frac{dU^*}{dz} + U^* \frac{dU}{dz} \right) \frac{u^2}{4\omega\mu} = \text{Re} \left[ iU^* \frac{dU}{dz} \left( \frac{u^2}{2\omega\mu} \right) \right], \quad (2.29)$$

de manera que la parte real del producto de (2.24) por el conjugado de (2.23) está relacionado con la irradiancia a ambos lados de la interfase. Este producto es

$$\frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1} \left( \tilde{A}_i \tilde{A}_i^* - \tilde{A}_i^* \tilde{A}_r e^{-2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_i \tilde{A}_r^* e^{2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_r \tilde{A}_r^* \right) = \tilde{A}_t \tilde{A}_t^* \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2}. \quad (2.30)$$

**Propagación a ambos lados de la interfase** Cuando  $\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}$  y  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}$  son reales, a ambos lados de la interfase hay ondas propagándose. Separando las partes real e imaginaria de (2.30) lleva a las siguientes dos ecuaciones

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_i^* - \tilde{A}_r \tilde{A}_r^* = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} \tilde{A}_t \tilde{A}_t^* \quad (2.31)$$

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_r^* e^{2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_i^* \tilde{A}_r e^{-2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = 0. \quad (2.32)$$

La ecuación (2.31) representa el balance de la irradiancia a ambos lados de la interfase. Se define la reflectividad como

$$R_{\perp} = \frac{\tilde{A}_r \tilde{A}_r^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = r_{\perp} r_{\perp}^*, \quad (2.33)$$

proporcional al promedio temporal del flujo de energía en la dirección  $-\hat{\mathbf{k}}$  y la transmitancia como

$$T_{\perp} = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} \frac{\tilde{A}_t \tilde{A}_t^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} t_{\perp} t_{\perp}^*, \quad (2.34)$$

proporcional al promedio temporal del flujo de energía en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  del lado derecho de la interfase  $z > z_0$ . Con estas definiciones se puede reescribir a (2.31)

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (2.35)$$

y también a (2.32)

$$r_{\perp}^* = r_{\perp}. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.35) se puede interpretar como una ley de conservación: el flujo de la energía incidente es igual a la suma del reflejado y el transmitido. La ecuación 2.36 no es un balance energético pero dice que el coeficiente de reflexión  $r$  es real.

**Propagación solo a un lado de la interfase** Cuando  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}$  es imaginaria solo se propagan ondas del lado izquierdo de la interfase  $z < z_0$ . La solución de la ecuación (2.10) es una exponencial decreciente

$$U = \tilde{A}_t e^{-k_0 z \sqrt{\sigma^2 - n_2^2}}.$$

La separación de la ecuación (2.30) en parte real e imaginaria lleva al siguiente par de ecuaciones

$$R_{\perp} = 1, \quad (2.37)$$

$$r_{\perp}^* - r_{\perp} = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} t_{\perp} t_{\perp}^*. \quad (2.38)$$

La expresión (2.37) dice que toda la energía que incide se refleja. La siguiente ecuación, (2.38), relaciona la parte imaginaria del coeficiente de reflexión  $r$  con lo que se había reconocido como la transmitancia, en el caso de propagación a ambos lados.

### 2.2.5.3. Coeficientes de transmisión y reflexión TM

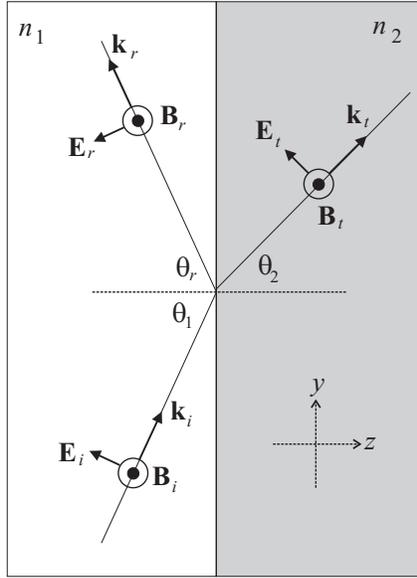


Figura 2.5: El campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, polarización TE. Los vectores  $\mathbf{k}$  indican a la dirección de propagación. El eje  $z$  apunta hacia la derecha, el  $y$  hacia arriba y el  $x$  entra a la página.

El caso de la polarización TM, el campo magnético perpendicular al plano de incidencia, se muestra en la figura 2.5. Como se puede interpretar de la ecuación (2.15), si se trata de polarización TM, es el campo magnético el que se puede escribir como un producto de tres partes, la que depende del tiempo, y las que dependen de las coordenada  $y$  y  $z$ . La ecuación diferencial que obedece  $\mathcal{U}$ , la parte del campo magnético que depende de  $z$ , es nuevamente la ecuación de Helmholtz

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dz^2} + \mathcal{U} k_0^2 (n^2 - \sigma^2) = 0, \quad (2.39)$$

para un medio homogéneo. La solución general de (2.39) es

$$\mathcal{U} = \tilde{A}_i e^{ik_0 z \sqrt{n^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n^2 - \sigma^2}}. \quad (2.40)$$

Insertando (2.40) en (2.18) se tiene que el campo eléctrico en la región donde hay contrapropagación es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{izq}} = e^{i(k_0 \sigma y - \omega t)} & \left[ \left( -\sqrt{n_1^2 - \sigma^2} \hat{\mathbf{j}} + \sigma \hat{\mathbf{k}} \right) \tilde{A}_i e^{ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} \hat{\mathbf{j}} + \sigma \hat{\mathbf{k}} \right) \tilde{A}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} \right] \frac{v k_0}{\omega \epsilon_1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

dónde el primer término de la suma representa el campo eléctrico de la onda que viaja a la derecha y el segundo al de la onda que viaja a la izquierda, ésto es lo que sucede del lado izquierdo de la interfase reflejante, del lado que incide la luz. Solo hay una onda que viaja a la derecha (sin contra-propagación) entonces se puede escribir

$$\mathbf{E}_{\text{der}} = e^{i(k_0 \sigma y - \omega t)} \left( -\sqrt{n_2^2 - \sigma^2} \hat{\mathbf{j}} + \sigma \hat{\mathbf{k}} \right) \tilde{A}_t e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}} \frac{vk_0}{\omega \varepsilon_2}.$$

Para encontrar el coeficiente de reflexión se quiere escribir el cociente del campo eléctrico de la onda reflejada, que viaja a la izquierda, entre el de la onda incidente, que viaja a la derecha, pero estos dos campos son cantidades vectoriales que no necesariamente apuntan en la misma dirección. Si, para escribir ese cociente, se toman las componentes en la dirección del eje  $y$  o las componentes en la dirección del eje  $z$ , se llega a resultados que difieren en el signo. Se define entonces el coeficiente de reflexión como

$$r_{\parallel} = \frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}},$$

de modo que corresponda al cociente de los campos magnéticos asociados a las ondas que se contra-propagan, pero ésto no es más que una convención. De hecho, si se hubiera elegido la otra opción (con signo “menos”) tendría la ventaja de que, en el caso de incidencia normal,  $r_{\perp}$  y  $r_{\parallel}$  serían coincidentes. En cambio, para la razón de las magnitudes de los campos eléctricos asociados a la onda que incide y a la que se transmite no hay ambigüedad y es

$$t_{\parallel} = \frac{\varepsilon_1 n_2 \tilde{A}_t e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}}{\varepsilon_2 n_1 \tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}},$$

que es un múltiplo de la razón de los campos magnéticos ( $\mathbf{H}$ ) asociados a esas ondas. Las condiciones a la frontera para los campos se deben cumplir sobre la interfase  $z = z_0$ , las componentes paralelas al plano de la interfase de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  deben ser continuas. Si se suponen ondas que se contrapropagan en un semiespacio ( $z < z_0$ ) y solo una onda que se transmite en el otro ( $z > z_0$ ):

$$\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = \tilde{A}_t e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}, \quad (2.42)$$

$$\tilde{A}_i \frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_1} e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_r \frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_1} e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = \tilde{A}_t \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2} e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (2.43)$$

De las dos expresiones anteriores se infiere

$$t_{\parallel} = \frac{2\varepsilon_1 n_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2 n_1 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} + \varepsilon_1 n_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}, \quad (2.44)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} - \varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} + \varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (2.45)$$

Si al menos la raíz  $\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}$  es real y se trata de medios no magnéticos se puede reescribir lo anterior

$$r_{\parallel} = \frac{n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}. \quad (2.46)$$

Como en el caso de la polarización TE, si  $n_1 > n_2$  habrá ciertos valores de  $\theta_1$  que hagan imaginaria la raíz cuadrada presente en la ecuación (2.46), cuando ésto sucede  $r$  vuelve a ser una cantidad compleja del tipo  $\frac{a-bi}{a+bi}$  y por lo tanto el módulo de  $r$  es unitario. Además existe un valor de  $\theta_1$  que anula a  $r_{\parallel}$ , el llamado ángulo de Brewster  $\theta_B$ . En la figura 2.6 se muestra la gráfica del coeficiente de reflexión en función de  $\theta_1$ .

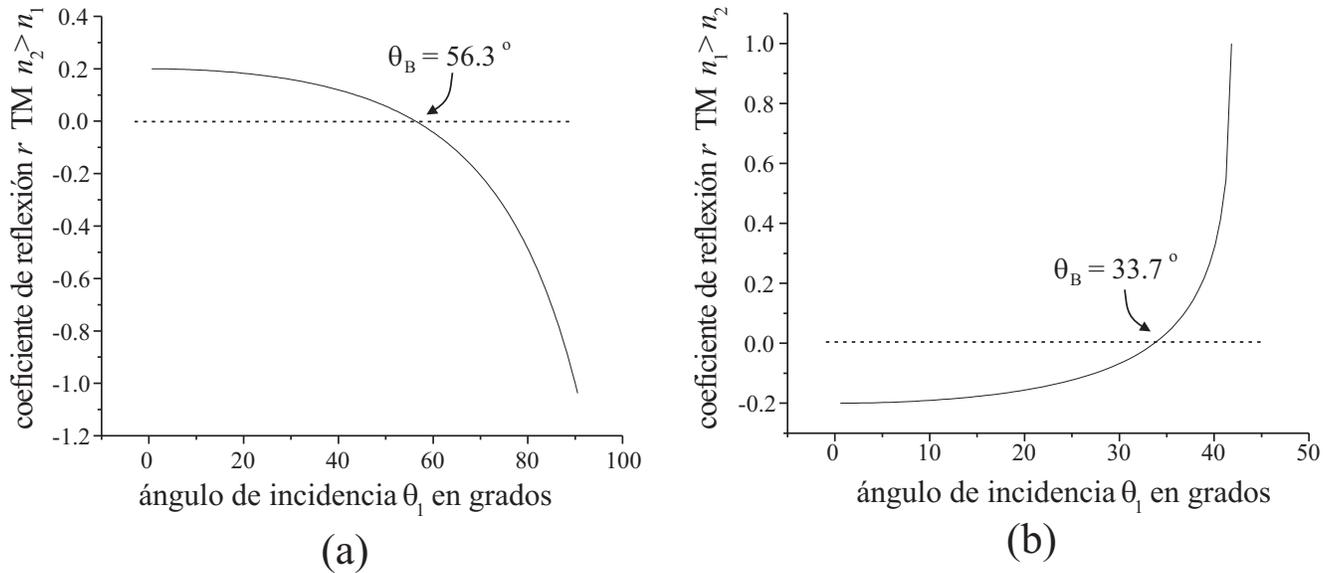


Figura 2.6: El coeficiente de reflexión  $r$  para polarización TM y medios no magnéticos. El símbolo  $\theta_B$  representa al ángulo de Brewster. (a) Reflexión externa  $n_2 > n_1$ , en particular  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1.5$ . (b) Reflexión interna  $n_1 > n_2$ , en particular  $n_1 = 1.5$  y  $n_2 = 1$ . El ángulo crítico también es de  $41.8^\circ$ , para ángulos mayores  $r_{\parallel}$  es compleja.

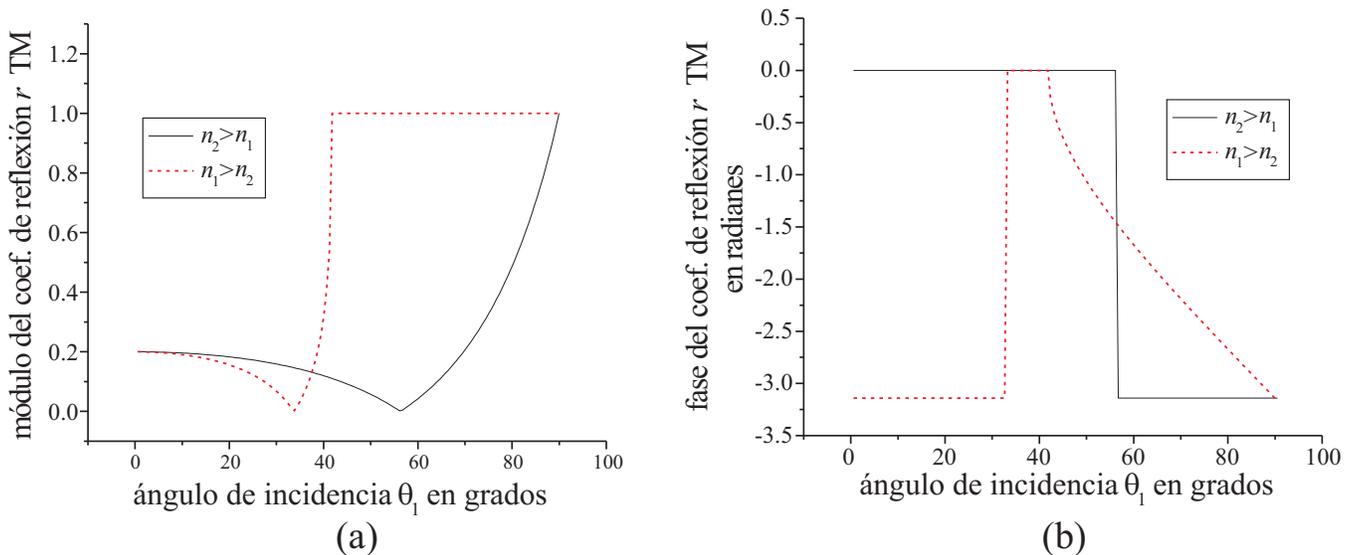


Figura 2.7: (a) Módulo y (b) fase del coeficiente de reflexión  $r$  para polarización TM y medios no magnéticos. Se presentan los dos casos  $n_2 > n_1$  y  $n_1 > n_2$ , los valores escogidos para los índices de refracción son  $n = 1, 1.5$ .

Cuando el coeficiente de reflexión no es puramente real, se puede escribir su fase como

$$\delta_{r\parallel} = -2 \arctan \frac{n_1 \sqrt{|n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1|}}{n_2^2 \cos \theta_1}.$$

Para incluir la  $r$  compleja se grafican su módulo y su fase en la figura 2.7. El ángulo de Brewster es aquél para el que la reflectividad se anula, se aprecia como una “muesca” en ambas gráficas de la figura 2.7(a). El coeficiente de transmisión para polarización TM y medios no magnéticos se muestra en la figura 2.8 y es

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_1}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}.$$

De las ecuaciones (2.44) y (2.45) se puede ver que se cumple  $\frac{n_2}{n_1} t_{\parallel} - r_{\parallel} = 1$ .

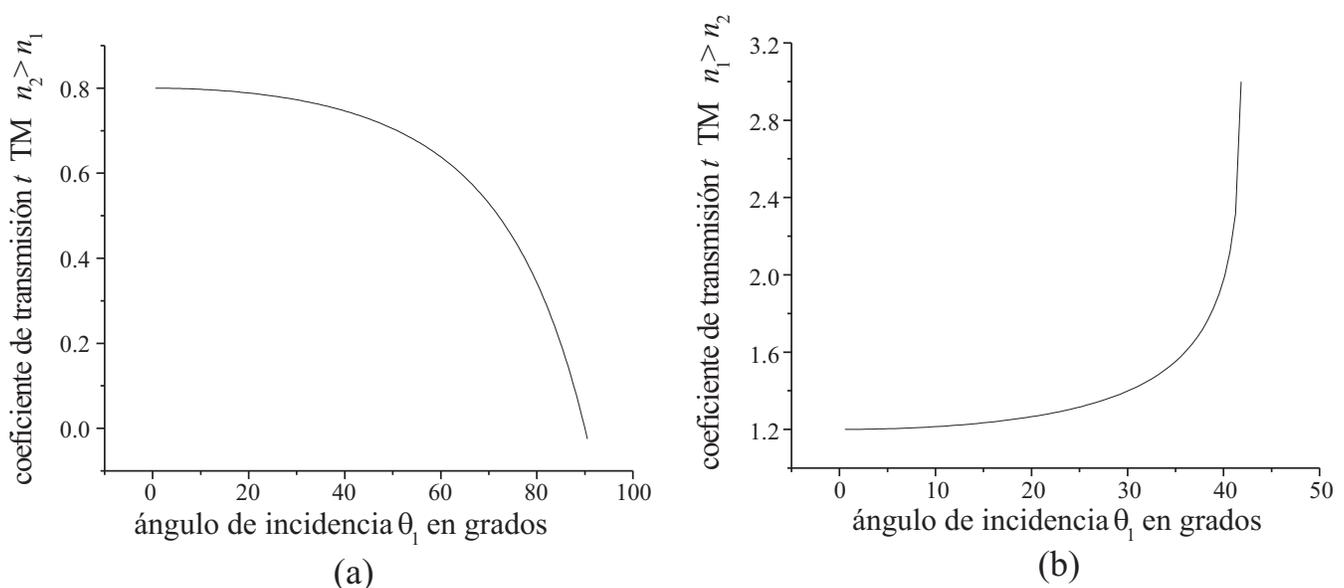


Figura 2.8: Coeficiente de transmisión  $t$  para polarización TM y medios no magnéticos. (a) El caso  $n_2 > n_1$ , en particular  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1.5$ . (b) El caso  $n_1 > n_2$ , en particular  $n_1 = 1.5$  y  $n_2 = 1$ .

#### 2.2.5.4. Irradiancia y energía TM

La irradiancia sobre la interfase es  $I = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}} \rangle_t$ , donde  $\hat{\mathbf{a}}$  es un vector unitario normal a la interfase. De la ecuación (2.19) se deduce que

$$I = i \left( \mathcal{U} \frac{d\mathcal{U}^*}{dz} - \mathcal{U}^* \frac{d\mathcal{U}}{dz} \right) \frac{v^2}{4\omega\varepsilon} = \text{Re} \left[ i\mathcal{U} \frac{d\mathcal{U}^*}{dz} \left( \frac{v^2}{2\omega\varepsilon} \right) \right], \quad (2.47)$$

de manera que la parte real del producto de (2.43) por el conjugado de (2.42) está relacionado con la irradiancia a ambos lados de la interfase. El producto de (2.43) por el conjugado de (2.42) es

$$\frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_1} \left( \tilde{A}_i \tilde{A}_i^* - \tilde{A}_i^* \tilde{A}_r e^{-2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_i \tilde{A}_r^* e^{2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_r \tilde{A}_r^* \right) = \tilde{A}_t \tilde{A}_t^* \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2}. \quad (2.48)$$

**Propagación a ambos lados de la interfase** Cuando  $\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}$  y  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}$  son reales, a ambos lados de la interfase hay ondas propagándose. Separando las partes real e imaginaria de (2.30) lleva a las siguientes dos ecuaciones

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_i^* - \tilde{A}_r \tilde{A}_r^* = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} \tilde{A}_t \tilde{A}_t^* \quad (2.49)$$

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_r^* e^{2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_i^* \tilde{A}_r e^{-2ik_0 z_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} = 0. \quad (2.50)$$

Similarmente al caso de polarización TE, la ecuación (2.49) representa el balance de la irradiancia a ambos lados de la interfase. La reflectividad es

$$R_{\parallel} = \frac{\tilde{A}_r \tilde{A}_r^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = r_{\parallel} r_{\parallel}^*, \quad (2.51)$$

proporcional al promedio temporal del flujo de energía en la dirección  $-\hat{\mathbf{k}}$  y la transmitancia es

$$T_{\parallel} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} \frac{\tilde{A}_t \tilde{A}_t^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = \frac{\varepsilon_2 n_1^2 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_1 n_2^2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} t_{\parallel} t_{\parallel}^* = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} t_{\parallel} t_{\parallel}^*, \quad (2.52)$$

proporcional al promedio temporal del flujo de energía en la dirección  $\hat{\mathbf{k}}$  del lado derecho de la interfase  $z > z_0$ . Se puede reescribir a (2.49)

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (2.53)$$

y también a (2.50)

$$r_{\parallel}^* = r_{\parallel}. \quad (2.54)$$

La ecuación (2.53) se puede interpretar como una ley de conservación: el flujo de la energía incidente es igual a la suma del reflejado y el transmitido. Aunque la ecuación (2.54) no es un balance energético, dice que el coeficiente de reflexión  $r$  es real.

**Propagación solo a un lado de la interfase** Cuando  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}$  es imaginaria solo se propagan ondas del lado izquierdo de la interfase  $z < z_0$ . La solución de la ecuación (2.39) es una exponencial decreciente

$$\mathcal{U} = \tilde{A}_t e^{-k_0 z \sqrt{\sigma^2 - n_2^2}}.$$

La separación de la ecuación (2.48) en parte real e imaginaria lleva al siguiente par de ecuaciones

$$R_{\parallel} = 1, \quad (2.55)$$

$$r_{\parallel}^* - r_{\parallel} = \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} t_{\parallel} t_{\parallel}^*. \quad (2.56)$$

La ecuación (2.55) expresa que toda la energía que incide se refleja. La siguiente ecuación, (2.56), relaciona la parte imaginaria del coeficiente de reflexión  $r$  con lo que se había reconocido como la transmitancia, en el caso de propagación a ambos lados.

### 2.2.5.5. Balance energético en general

Para medios no magnéticos, si se re-define la transmitancia como  $T = \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} tt^* \right]$ , se puede escribir  $R + T = 1$  para todos los casos, ya sea la cantidad  $\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}$  real o imaginaria y para polarización TE o TM. Las gráficas de las reflectividades y transmitancias se muestran en la figura 2.9.

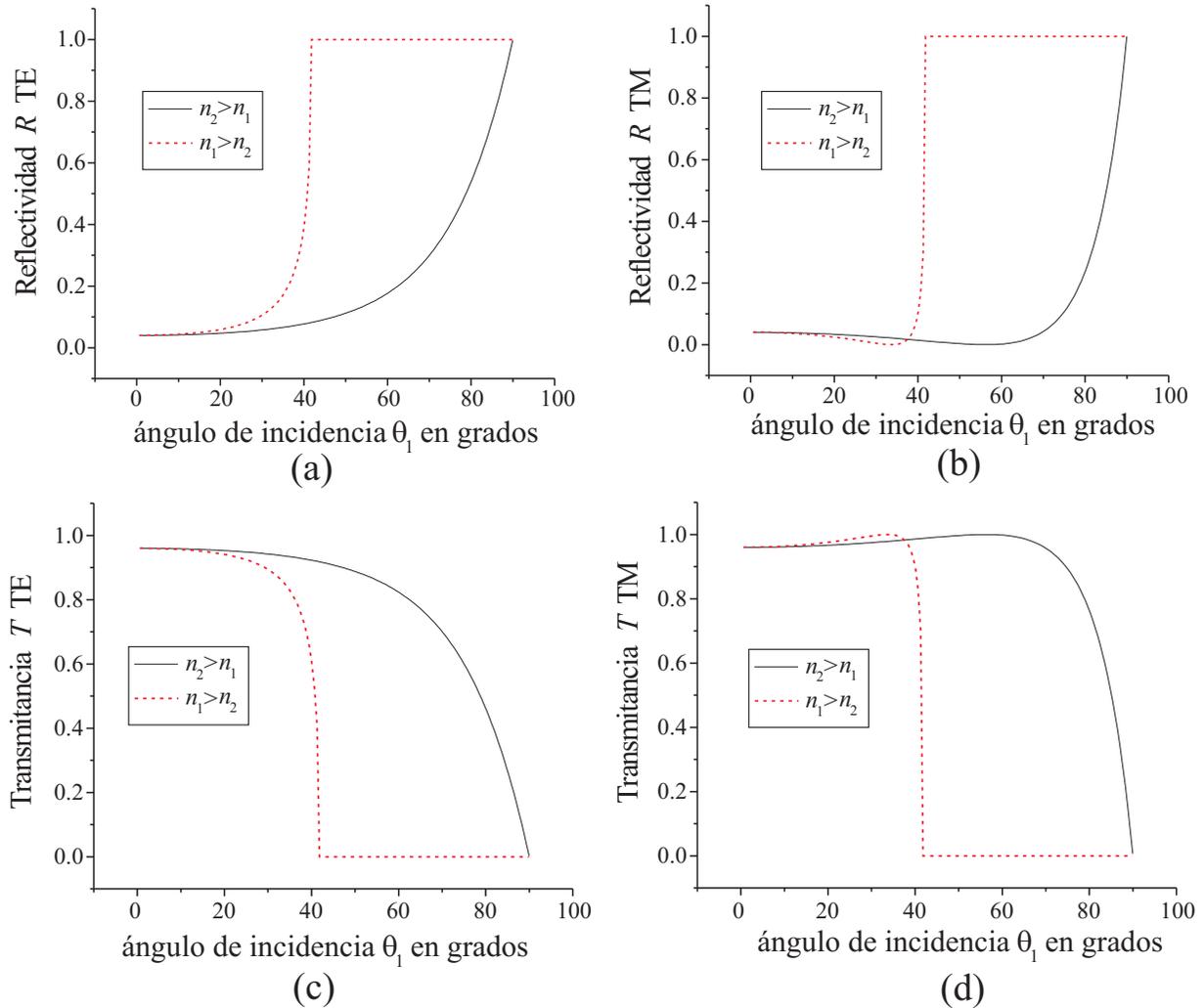


Figura 2.9: Reflectividad y transmitancia para medios no magnéticos, los valores escogidos para los índices de refracción son  $n = 1, 1.5$ . (a)  $R$  para polarización TE, (b)  $R$  para TM, (c)  $T$  para TE y (d)  $T$  para TM.

Los casos de reflexión interna y externa tienen semejanzas. En cada cuadro de la figura 2.9 la línea segmentada resulta ser una versión a escala, en la dirección horizontal, de la línea sólida. Lo anterior es consecuencia de que, excepto en el caso de la reflexión total interna,  $T$  y  $R$  no varían si intercambiamos  $n_1$  por  $n_2$  y  $\theta_1$  por  $\theta_2$ .

Para luz con combinación de ambas polarizaciones, la reflectividad y la transmitancia totales se calculan como el promedio de los dos casos  $\perp$  y  $\parallel$ .

### 2.2.6. Método de las matrices de transferencia

Hasta aquí, pareciera que resolviendo simplemente las ecuaciones (2.10) y (2.18) sujetas a las condiciones a la frontera apropiadas, se pueden conocer los campos eléctrico y magnético en todo el espacio. Sin embargo, son sólo algunos perfiles  $n(z)$  los que permiten una solución analítica simple. Las aproximaciones son útiles cuando  $n$  varía de forma abrupta o muy suave, para los casos intermedios generalmente no es así. Además, para resolver las citadas ecuaciones hay que introducir condiciones a la frontera complejas, que no tienen una interpretación física clara en la electrodinámica clásica. Se usa la representación compleja de las ondas pues es más simple su manejo y el módulo del campo complejo  $\sqrt{UU^*}$  está relacionado directamente con la cantidad física que se suele medir, la intensidad óptica, pero no se debe olvidar que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son campos reales. Aún si los cambios en  $n(z)$  son abruptos y existen soluciones analíticas, en particular para el caso de una sucesión de varias capas homogéneas, resolver las ecuaciones puede hacerse muy complicado. En 1950 Florin Abeles publicó un trabajo proponiendo un método matricial que facilita obtener soluciones para estas multicapas [14]. El método de Abeles ha sido muy socorrido a partir de su publicación, se le suele llamar también el método de las matrices de transferencia. Este método, permite tender a cero el grosor de estas capas homogéneas obteniéndose soluciones aproximadas para perfiles continuos del índice de refracción.

Por otro lado, los métodos numéricos se han vuelto rutinarios y de uso extensivo desde del último cuarto del siglo XX, principalmente debido al desarrollo en la tecnología de las computadoras y que cada vez es más fácil acceder a ellas. Con métodos numéricos e introduciendo condiciones a la frontera convenientes, aunque sean complejas, las ecuaciones (2.10) y (2.18) no son difíciles de resolver. Sin embargo las soluciones numéricas, si bien pueden ser muy buenas, nunca son exactas, tampoco permiten deducir y demostrar comportamientos generales tan claramente como las soluciones analíticas. Para usar el método de las matrices con variaciones graduales de  $n(z)$  se suelen hacer aproximaciones mediante series de potencias en  $k_0$  o su inverso [14, 15]. Más adelante, en los capítulos siguientes, se expondrá que no necesariamente es éste el método más apropiado si se quieren obtener soluciones numéricas con alto grado de precisión, en particular si no se quieren hacer aproximaciones previas relacionadas con lo abrupto o suave de los cambios en el índice de refracción.

A continuación se describe de forma resumida el método de las matrices. Para polarización TE, primero se propone una función  $V(z) = \frac{c\mu_0}{i\omega\mu} \frac{dU}{dz}$  que permite escribir la ecuación (2.10) como un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{dU}{dz} = ik_0 \frac{\mu}{\mu_0} V \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dz} = \frac{ik_0\mu_0(n^2 - \sigma^2)}{\mu} U, \quad (2.57)$$

donde  $V$  debe resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \frac{dV}{dz} \left( \frac{d \ln \left( \frac{n^2 - \sigma^2}{\mu/\mu_0} \right)}{dz} \right) + V k_0^2 (n^2 - \sigma^2) = 0. \quad (2.58)$$

Este sistema (2.57) parece volver al esquema de las ecuaciones de Maxwell (2.1) y (2.2), un sistema de dos ecuaciones acopladas de primer orden en vez de un par de ecuaciones desacopladas de segundo orden (2.10) y (2.58), pero ahora ya no son derivadas parciales porque la única variable independiente que queda es  $z$ . Tanto  $U$  como  $V$  deben satisfacer ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden así que se pueden expresar como una combinación lineal de dos soluciones particulares  $U_1(z)$ ,  $U_2(z)$  y  $V_1(z)$ ,  $V_2(z)$ . Al estar acopladas las soluciones por el sistema (2.57), se deben cumplir

$$V_1 U_2' - U_1' V_2 = 0 \quad \text{y} \quad U_1 V_2' - V_1' U_2 = 0,$$

donde la prima se usa para indicar la derivada. Lo anterior implica que  $\frac{d}{dz}(U_1V_2 - U_2V_1) = 0$  y esta relación implica a su vez un determinante constante

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{vmatrix} = \text{constante.}$$

Las condiciones a la frontera convenientes para este conjunto de soluciones particulares son

$$U_1(0) = V_2(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(0) = V_1(0) = 1. \quad (2.59)$$

Así, las soluciones  $U$  y  $V$  se pueden dar en términos de esa base:  $U(z) = U_0U_2 + V_0U_1$  y  $V(z) = U_0V_2 + V_0V_1$ , donde  $U_0$  y  $V_0$  son constantes y se refieren al valor de  $U$  y  $V$  cuando  $z = 0$ , es decir ya son las condiciones a la frontera correspondientes al caso físico que se quiere describir. Pero lo anterior también se puede escribir más elegantemente en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 & U_1 \\ V_2 & V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & -U_1 \\ -V_2 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Donde el determinante de las dos matrices formadas por  $U_1, U_2, V_1$  y  $V_2$  es constante e igual a la unidad, es decir que las matrices son unitarias,

$$\begin{vmatrix} U_2 & U_1 \\ V_2 & V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 & -U_1 \\ -V_2 & U_2 \end{vmatrix} = 1, \quad (2.62)$$

ésto se ve claramente evaluando el determinante en  $z = 0$ . La ecuación (2.61) toma a las funciones  $U$  y  $V$  desde alguna  $z$ , por ejemplo  $z = z_1$ , y entrega los valores de estas funciones en  $z = 0$ .

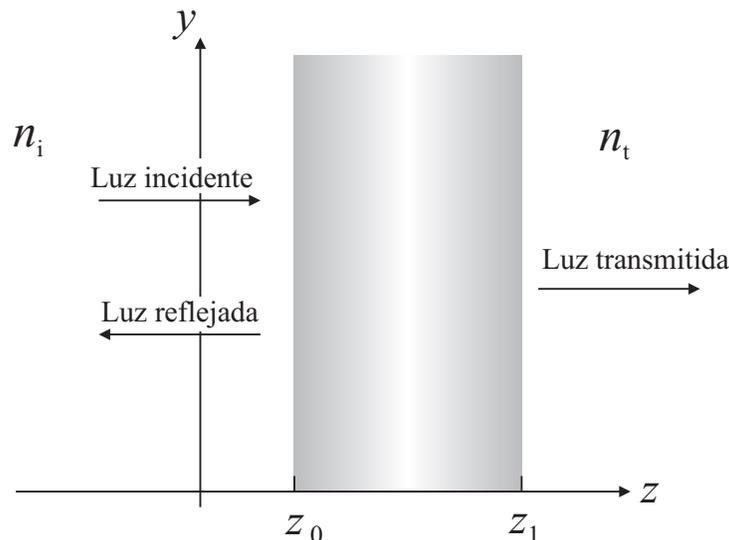


Figura 2.10: Medio estratificado en  $0 \leq z \leq z_1$ .

Si el medio estratificado está comprendido en ese intervalo  $0 \leq z \leq z_1$ , como se muestra en la figura 2.10, la matriz  $\mathbf{M}(z_1) = \begin{pmatrix} V_1 & -U_1 \\ -V_2 & U_2 \end{pmatrix}$  contiene toda la información de como actúa el medio sobre los

campos, se puede decir entonces que la matriz  $\mathbf{M}$  es característica del medio. Si el medio estratificado consiste de  $m$  capas, la matriz característica es el producto de las matrices correspondientes a cada capa

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^m \mathbf{M}_i(z_i - z_{i-1}). \quad (2.63)$$

Para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión para polarización TE con el formalismo de las matrices, se consideran un par de ondas contrapropagantes en el medio homogéneo a la izquierda de  $z = 0$ , que es donde está la frontera del medio estratificado:

$$U_0 = \tilde{A}_i e^{ik_0 z \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}, \quad (2.64)$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i / \mu_0} \left( \tilde{A}_i e^{ik_0 z \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} - \tilde{A}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} \right), \quad (2.65)$$

dónde, como en las secciones anteriores,  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{A}_r$  son amplitudes constantes que pudieran ser complejas,  $\tilde{A}_i$  es la amplitud de la onda incidente y  $\tilde{A}_r$  la de la reflejada. Además,  $n_i$  y  $\mu_i$  son el índice de refracción y la permeabilidad magnética del semiespacio a la izquierda del medio estratificado. A la derecha de  $z = z_1$  solo se considera una onda plana propagándose en la dirección que se aleja del medio estratificado

$$U_z = \tilde{A}_t e^{ik_0 z \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}, \quad (2.66)$$

$$V_z = \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} \tilde{A}_t e^{ik_0 z \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}. \quad (2.67)$$

Debido a que las componentes tangenciales de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{H}$  deben ser continuas en las interfaces, las ecuaciones (2.60) y (2.61) relacionan a  $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$  con  $\begin{pmatrix} U_z \\ V_z \end{pmatrix}$  en las fronteras. Los coeficientes de reflexión y transmisión quedan así

$$r_{\perp} = \frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i / \mu_0} \left( V_1 - \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_1 \right) - \left( \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_2 - V_2 \right)}{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i / \mu_0} \left( V_1 - \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_1 \right) + \left( \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_2 - V_2 \right)}, \quad (2.68)$$

$$t_{\perp} = \frac{\tilde{A}_t e^{ik_0 z_1 \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}} = \frac{2 \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i / \mu_0}}{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i / \mu_0} \left( V_1 - \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_1 \right) + \left( \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t / \mu_0} U_2 - V_2 \right)}. \quad (2.69)$$

El subíndice  $\perp$  indica polarización TE, los elementos de matriz  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  y  $V_2$  deben estar evaluados en  $z = z_1$ . Estos coeficientes complejos solo dependen de los elementos de la matriz característica del medio estratificado  $\mathbf{M}$  y de las constantes ópticas de los dos semiespacios que limitan ese medio, ya no dependen de los campos electromagnéticos incidentes o transmitidos. Lo anterior es una de las principales virtudes del método de las matrices. Se debe hacer notar que el coeficiente de transmisión complejo se define en (2.69) como la razón de los campos transmitido e incidente, evaluados en las fronteras posterior y anterior respectivamente. Ésto resulta conveniente cuando las fronteras del medio estratificado son superficies planas bien localizadas, pero es una definición desafortunada cuando no hay fronteras claras. La reflectividad y la

transmitancia son las cantidades que se pueden medir experimentalmente, en términos de los coeficientes de reflexión y transmisión son

$$T_{\perp} = \frac{\mu_i \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\mu_t \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} t_{\perp} t_{\perp}^*,$$

$$R_{\perp} = r_{\perp} r_{\perp}^*.$$

Para la polarización TM, debido a las condiciones a la frontera que deben cumplir los campos en las interfaces, se pueden escribir los coeficientes de reflexión y transmisión de manera similar. La matriz característica de medio es:  $\mathbf{M}(z_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & -\mathcal{U}_1 \\ -\mathcal{V}_2 & \mathcal{U}_2 \end{pmatrix}$ , donde las  $\mathcal{U}$ 's resuelven la ecuación (2.16) y las  $\mathcal{V}$ 's se definen como  $\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{ik_0 \varepsilon} \frac{d\mathcal{U}}{dz}$ , que a su vez resuelven la ecuación

$$\frac{d^2 \mathcal{V}}{dz^2} - \frac{d\mathcal{V}}{dz} \left( \frac{d \ln \left( \frac{n^2 - \sigma^2}{\varepsilon/\varepsilon_0} \right)}{dz} \right) + \mathcal{V} k_0^2 (n^2 - \sigma^2) = 0. \quad (2.70)$$

Para  $\mathcal{U}(z)$  y  $\mathcal{V}(z)$  se satisface el sistema

$$\frac{d\mathcal{U}}{dz} = ik_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathcal{V}}{dz} = \frac{ik_0 \varepsilon_0 (n^2 - \sigma^2)}{\varepsilon} \mathcal{U}. \quad (2.71)$$

Las condiciones a la frontera canónicas son  $\mathcal{U}_1(0) = \mathcal{V}_2(0) = 0$  y  $\mathcal{U}_2(0) = \mathcal{V}_1(0) = 1$ . Se vuelven a considerar una onda incidente, una reflejada y una transmitida

$$\mathcal{U}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_i e^{ik_0 n_i z \cos \theta_i} + \tilde{\mathcal{A}}_r e^{-ik_0 n_i z \cos \theta_i} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_0 = \frac{n_i \cos \theta_i}{\varepsilon_i / \varepsilon_0} \left( \tilde{\mathcal{A}}_i e^{ik_0 n_i z \cos \theta_i} - \tilde{\mathcal{A}}_r e^{-ik_0 n_i z \cos \theta_i} \right),$$

$$\mathcal{U}_z = \tilde{\mathcal{A}}_t e^{ik_0 n_t z \cos \theta_t} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_z = \frac{n_t \cos \theta_t}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \tilde{\mathcal{A}}_t e^{ik_0 n_t z \cos \theta_t}.$$

Pero ahora las  $\mathcal{U}$ 's son el factor del campo magnético  $\mathbf{H}$  que depende de  $z$ , como indica la ecuación (2.15). Aplicando la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & -\mathcal{U}_1 \\ -\mathcal{V}_2 & \mathcal{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_z \\ \mathcal{V}_z \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

se llega a los siguientes coeficientes de reflexión y transmisión:

$$r_{\parallel} = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_r e^{-ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}}{\tilde{\mathcal{A}}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_i / \varepsilon_0} \left( \mathcal{V}_1 - \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_1 \right) - \left( \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_2 - \mathcal{V}_2 \right)}{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_i / \varepsilon_0} \left( \mathcal{V}_1 - \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_1 \right) + \left( \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_2 - \mathcal{V}_2 \right)}, \quad (2.73)$$

$$t_{\parallel} = \frac{n_t \varepsilon_i \tilde{\mathcal{A}}_t e^{ik_0 z_1 \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}}{n_i \varepsilon_t \tilde{\mathcal{A}}_i e^{ik_0 z_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}} = \frac{2 \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_i / \varepsilon_0}}{\frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_i / \varepsilon_0} \left( \mathcal{V}_1 - \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_1 \right) + \left( \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_t / \varepsilon_0} \mathcal{U}_2 - \mathcal{V}_2 \right)}, \quad (2.74)$$

donde el subíndice  $\parallel$  indica polarización TM. En términos de los coeficientes de reflexión y transmisión, la reflectividad y la transmitancia quedan

$$R_{\parallel} = r_{\parallel} r_{\parallel}^* = |r_{\parallel}|^2 \quad \text{y} \quad T_{\parallel} = \frac{\mu_i \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_t \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} |t_{\parallel}|^2.$$

En cualquiera de las dos polarizaciones se cumple  $R + T = 1$  sólo si  $n(z)$  y  $\mu(z)$  son reales y además el ángulo de incidencia es igual o menor al crítico. Cabe mencionar que en la literatura [13, pg.60 (en el pie de página)] se afirma que la constancia del determinante de la matriz característica implica la conservación de la energía, sin embargo el determinante sigue siendo constante aunque el índice de refracción sea complejo. Un índice de refracción complejo se asocia a un medio en el que parte de la energía de la onda se absorbe [28, Cap. 7].

### 2.2.6.1. Aproximaciones relacionadas con el tamaño de $k_0$

**Longitudes de onda grandes o variación abrupta de las propiedades ópticas** Se pueden proponer soluciones a las ecuaciones (2.10) y (2.16) en series de potencias de  $k_0$  para cuando la variación de  $n(z)$  y/o  $\mu(z)$  es grande comparada con la longitud de onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$  [13–15]. A continuación se muestra el procedimiento para desarrollar las series con la polarización TE. La ecuación (2.10) se reescribe

$$\frac{d\left(\frac{U'\mu_0}{\mu}\right)}{dz} + Uk_0^2\mu_0\left(\frac{n^2 - \sigma^2}{\mu}\right) = 0. \quad (2.75)$$

Se propone la siguiente solución en series de  $k_0$  para  $U$

$$U = f_0 + f_1k_0^2 + f_2k_0^4 + \dots$$

Donde las  $f$ 's son funciones de  $z$ . Igualando coeficientes del mismo grado en  $k_0$  se concluye que  $f_0 = \frac{C_0}{\mu_0} \int \mu dz + C_1$  donde  $C_0$  y  $C_1$  son constantes. Para obtener los otros coeficientes se integra la ecuación (2.75) dos veces

$$U = -k_0^2 \int \mu \left[ \int \frac{n^2 - \sigma^2}{\mu} U dz \right] dz. \quad (2.76)$$

Se comparan términos del mismo grado en  $k_0$  y se obtiene la siguiente relación de recurrencia

$$f_{i+1} = - \int \mu \left[ \int \frac{n^2 - \sigma^2}{\mu} f_i dz \right] dz.$$

Para poder construir la matriz característica se deben encontrar dos soluciones particulares  $U_1$  y  $U_2$  sujetas a las siguientes condiciones a la frontera:  $U_1(0) = U_2'(0) = 0$ ,  $U_2(0) = 1$  y  $U_1'(0) = ik_0\mu/\mu_0$ . Si se propone  $f_0 = 1$  para  $U_2$  y  $f_0 = ik_0 \int_0^z (\mu/\mu_0) dz$  para  $U_1$  y las integrales en las relaciones de recurrencia se definen de 0 a  $z$ , se cumplen dichas condiciones a la frontera. La matriz característica del medio se puede aproximar al orden en  $k_0$  que sea conveniente. Para polarización TM el procedimiento es casi idéntico, sólo se substituyen permeabilidades  $\mu$  por permitividades  $\varepsilon$ .

**Longitudes de onda pequeñas o variación gradual de las propiedades ópticas** Si la variación de  $n(z)$  y  $\mu(z)$  es suave comparada con la longitud de onda convendría una serie de potencias en el inverso de  $k_0$ , pero el procedimiento anterior no arroja solución más allá de la trivial cuando se propone  $U = f_0 + f_1k_0^{-2} + f_2k_0^{-4} + \dots$

Para el caso en que la variación de  $n(z)$  y  $\mu(z)$  es suave comparada con la longitud de onda, se puede seguir otra ruta para encontrar un desarrollo en series del inverso de  $k_0$ . El tratamiento es equivalente a la llamada aproximación JWKB [14, 16, 29, 30]. Para polarización TE, primero se propone un cambio de

variable  $U(z) = e^{ik_0 \int h \mu dz}$  y se inserta en (2.10), quedando una ecuación diferencial de primer orden, una ecuación de Riccati

$$h^2 \mu - \frac{n^2 - \sigma^2}{\mu} - \frac{i}{k_0} h' = 0. \quad (2.77)$$

Se propone la siguiente serie para  $h$ :  $h(z) = h_0 + h_1 k_0^{-1} + h_2 k_0^{-2} + \dots$  y se inserta en (2.77). Igualando los términos del mismo grado en  $k_0$  se obtienen las siguientes relaciones para los tres primeros coeficientes:  $h_0 = \pm \frac{\sqrt{n^2 - \sigma^2}}{\mu}$ ,  $h_1 = \frac{ih'_0}{2\mu h_0}$ ,  $h_2 = \frac{3h_0'^2}{8h_0^3 \mu^2} + \frac{h_0' \mu'}{4h_0^2 \mu^3} - \frac{h_0''}{4h_0^2 \mu^2}$ . Esta suma de términos en potencias de  $k_0^{-1}$  para  $h$  se traduce en una sucesión de factores para  $U$ , cada vez más parecidos a la unidad. A orden uno la solución general para  $U$  se presenta así

$$U(z) = \left( \frac{h_0(z=0)}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( C_a e^{ik_0 \int \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz} + C_b e^{-ik_0 \int \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz} \right).$$

Sujetando la expresión anterior a las condiciones a la frontera convenientes para construir la matriz característica quedan

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_f \mu_i}{\sqrt{n_f^2 - \sigma^2} \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} \right)^{\frac{1}{2}} i \sin \left( k_0 \int_0^{z_f} \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz \right), \\ U_2 &= \left( \frac{\mu_f \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}{\mu_i \sqrt{n_f^2 - \sigma^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left( k_0 \int_0^{z_f} \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz \right), \\ V_1 &= \left( \frac{\mu_i \sqrt{n_f^2 - \sigma^2}}{\mu_f \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left( k_0 \int_0^{z_f} \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz \right), \\ V_2 &= \mu_0 \left( \frac{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2} \sqrt{n_f^2 - \sigma^2}}{\mu_f \mu_i} \right)^{\frac{1}{2}} i \sin \left( k_0 \int_0^{z_f} \sqrt{n^2 - \sigma^2} dz \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Estas últimas soluciones corresponden a tomar hasta el primer orden en la aproximación WKB. La película que representa esta matriz no tiene reflectividad por si misma, la reflexión solo se daría en las fronteras de la película con los medios circundantes, si hay discontinuidad en el índice de refracción allí. Eso se puede demostrar substituyendo los resultados anteriores en (2.68), si se hacen coincidir los índices de refracción inicial y final de la película con los de los medios que la limitan, la reflectividad se anula.

Para obtener los elementos de matriz en el caso de la polarización TM se sigue un procedimiento muy similar, el cambio de variable que se propone es  $\mathcal{U} = e^{ik_0 \int h \varepsilon dz}$ , el resultado final es muy parecido, solo se intercambian los papeles de  $\mu$  y  $\varepsilon$ .

### 2.2.6.2. Ventajas y desventajas del método de las matrices

La principal virtud del método de las matrices, es el poder escribir los coeficientes de reflexión y transmisión en términos de los elementos de la matriz característica del medio estratificado y las constantes ópticas de los medios que lo limitan. Ésto para una determinada frecuencia y ángulo de la luz incidente

pero de manera independiente a la intensidad y fase de los campos electromagnéticos. Este método también permite describir medios estratificados muy complicados y su comportamiento óptico, simplemente multiplicando las matrices características de los medios más simples que lo componen. En particular, si se trata de una sucesión de capas homogéneas, quizá lo más útil es describirlo con una matriz característica.

Sin embargo, si el perfil  $n(z)$  es gradual y la intención es resolver de forma directa y exacta la ecuación (2.10), con las condiciones a la frontera del problema particular, el método de las matrices puede resultar engorroso. Habría que resolver dos ecuaciones diferenciales para obtener  $U$  y  $V$ , parte real e imaginaria, haciéndolo dos veces para cada una e imponiendo las condiciones a la frontera adecuadas para obtener los elementos de matriz  $U_1, V_1, U_2$  y  $V_2$ , que son también complejos. Una vez así obtenidos los elementos de matriz, los coeficientes de reflexión y transmisión quedan definidos. Por otro lado, las matrices acotan al medio que describen, ese medio debe empezar en alguna  $z_i$  y terminar en otra  $z_f$ , si el medio inhomogéneo de interés se extiende a lo largo de todo el eje  $z$  no parece conveniente tratar de describirlo con una matriz.

### 2.2.6.3. Multicapas homogéneas y los polinomios de Chebyshev

Una gran ventaja del método de las matrices de transferencia es que se describe de manera muy simple la propagación de la luz a través de multicapas periódicas, si ellas consisten de muchas películas delgadas homogéneas. Si tenemos una matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

según la teoría de matrices, el producto de  $N$  de estas matrices  $\mathbf{M}$  es

$$\mathbf{M}^N = \begin{pmatrix} m_{11}U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) & m_{12}U_{N-1}(a) \\ m_{21}U_{N-1}(a) & m_{22}U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

donde  $a = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$  y  $U_N$  son los polinomios de Chebyshev de segundo tipo

$$U_N(a) = \frac{\sin[(N+1)\arccos a]}{1-a^2}$$

Si esta matriz  $\mathbf{M}$  describe un período de una multicapa periódica de  $N$  períodos, debido a la expresión (2.63) se puede decir que  $\mathbf{M}^N$  describe a la multicapa completa. La matriz TE característica  $\mathbf{M}_1$  de una película delgada homogénea de grosor  $\Delta z$  es

$$m_{12} = -U_1 = -\frac{\mu}{\mu_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}}i \sin(k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}\Delta z), \quad m_{22} = U_2 = \cos(k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}\Delta z),$$

$$m_{11} = V_1 = \cos(k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}\Delta z), \quad m_{21} = -V_2 = -\frac{\mu_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}}{\mu}i \sin(k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}\Delta z), \quad (2.80)$$

como se puede deducir de (2.78), si se considera al índice de refracción constante y  $n_i = n_f, \mu_i = \mu_f$ . Para la matriz de una película delgada homogénea en la polarización TM sólo se requiere hacer las siguientes substituciones

$$\frac{\mu}{\mu_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}} \rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\mu_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}}{\mu} \rightarrow \frac{\varepsilon_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}}{\varepsilon}.$$

Si se quiere representar una capa estratificada constituida de dos películas delgadas, homogéneas, de distinto índice de refracción, permeabilidad magnética y grosor, se multiplican dos matrices similares a (2.80). Los elementos de matriz son ahora

$$m_{11} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{p_2}{p_1} \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad m_{12} = -\frac{i}{p_2} \cos \beta_1 \sin \beta_2 - \frac{i}{p_1} \sin \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$m_{21} = -ip_1 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - ip_2 \sin \beta_2 \cos \beta_1, \quad m_{22} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{p_1}{p_2} \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad (2.81)$$

donde  $\beta_1 = k_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} \Delta z_1$ ,  $\beta_2 = k_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2} \Delta z_2$ ,  $p_1 = \frac{\mu_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1}$  y  $p_2 = \frac{\mu_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2}$ . Para polarización TM se sustituye

$$p_1 \rightarrow q_1 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_1} \quad \text{y} \quad p_2 \rightarrow q_2 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\varepsilon_2}.$$

Según el resultado (2.79), con esta pareja de películas homogéneas podemos conformar un período y repetirlo  $N$  veces, obteniéndose [13, 31]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \left( \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{p_2}{p_1} \sin \beta_1 \sin \beta_2 \right) U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a), \\ \mathcal{M}_{12} &= \left( -\frac{i}{p_2} \cos \beta_1 \sin \beta_2 - \frac{i}{p_1} \sin \beta_1 \cos \beta_2 \right) U_{N-1}(a), \\ \mathcal{M}_{21} &= (-ip_1 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - ip_2 \cos \beta_1 \sin \beta_2) U_{N-1}(a), \\ \mathcal{M}_{22} &= \left( \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{p_1}{p_2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 \right) U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a), \end{aligned}$$

donde  $a = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \right) \sin \beta_1 \sin \beta_2$ .

En particular para medios no magnéticos, incidencia normal y grosores de “cuarto de onda”,  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = n_1$  y  $p_2 = n_2$  los elementos de matriz se pueden escribir de manera muy simple. En este caso la matriz para un solo período (2.81) es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

y para  $N$  períodos

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N & 0 \\ 0 & \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^N \end{pmatrix}.$$

Según (2.68), en este caso el coeficiente de reflexión es

$$r = \frac{n_i \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N - n_t \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^N}{n_i \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N + n_t \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^N} = \frac{\frac{n_i}{n_1} \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N + \frac{n_t}{n_2} \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^{N-1}}{\frac{n_i}{n_1} \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N - \frac{n_t}{n_2} \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^{N-1}}.$$

donde para obtener el cociente de la derecha se ha dividido el numerador y el denominador entre  $n_1$ . Ahora se puede reescribir al coeficiente de reflexión de la multicapa en términos de los coeficientes individuales  $r_{ab}$  de cada interfase entre los medios  $a$  y  $b$  ya que que  $\frac{n_a}{n_b} = \frac{1-r_{ba}}{1+r_{ba}}$

$$r = \frac{\frac{1-r_{1i}}{1+r_{1i}} \left( -\frac{1-r_{12}}{1+r_{12}} \right)^N + \frac{1-r_{2t}}{1+r_{2t}} \left( -\frac{1-r_{21}}{1+r_{21}} \right)^{N-1}}{\frac{1-r_{1i}}{1+r_{1i}} \left( -\frac{1-r_{12}}{1+r_{12}} \right)^N - \frac{1-r_{2t}}{1+r_{2t}} \left( -\frac{1-r_{21}}{1+r_{21}} \right)^{N-1}}. \quad (2.82)$$

La forma en que se ha escrito al coeficiente de reflexión permite ver cuantas veces se ha repetido cada tipo de interfase en la multicapa al observar la potencia a la que se eleva cada cociente  $\frac{n_a}{n_b}$  o  $\frac{1-r_{ba}}{1+r_{ba}}$ .

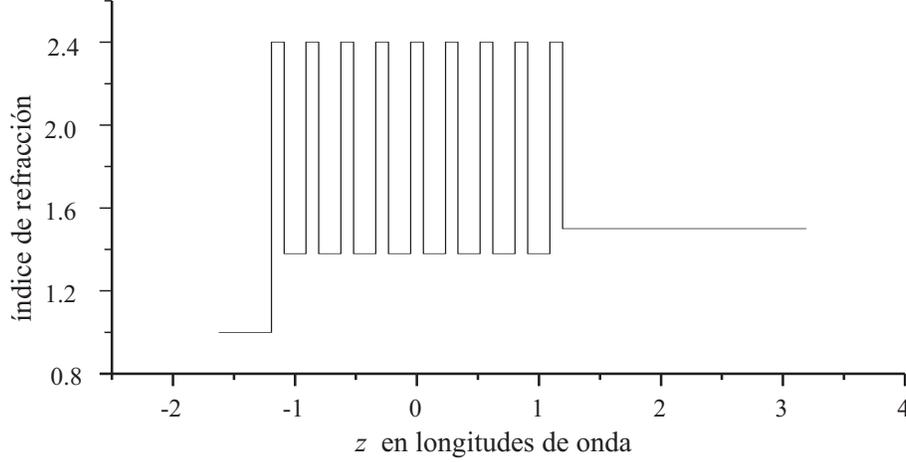


Figura 2.11: Perfil  $n(z)$  típico de un espejo dieléctrico de multicapas, un “Distributed Bragg Reflector” (DBR) .

Son comunes en la fabricación de espejos dieléctricos las multicapas que comienzan y terminan con el mismo material, con un perfil parecido al que indica la figura 2.11. Para representar un perfil así, se requiere multiplicar la matriz que corresponde a los  $N$  períodos por una última matriz de película delgada homogénea

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \left[ \cos 2\beta_1 \cos \beta_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) \sin 2\beta_1 \sin \beta_2 \right] U_{N-1}(a) - (\cos \beta_1) U_{N-2}(a), \\ \mathcal{M}_{12} &= \left[ -\frac{i}{p_1} \sin 2\beta_1 \cos \beta_2 + \left( \frac{p_2 \sin^2 \beta_1}{p_1^2} - \frac{\cos^2 \beta_1}{p_2} \right) i \sin \beta_2 \right] U_{N-1}(a) + \left( \frac{i}{p_1} \sin \beta_1 \right) U_{N-2}(a), \\ \mathcal{M}_{21} &= \left[ -ip_1 \sin 2\beta_1 \cos \beta_2 + i \sin \beta_2 \left( \frac{p_1^2}{p_2} \sin^2 \beta_1 - p_2 \cos^2 \beta_1 \right) \right] U_{N-1}(a) + (ip_1 \sin \beta_1) U_{N-2}(a), \\ \mathcal{M}_{22} &= \left[ \cos 2\beta_1 \cos \beta_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \right) \sin 2\beta_1 \sin \beta_2 \right] U_{N-1}(a) - (\cos \beta_1) U_{N-2}(a), \end{aligned} \quad (2.83)$$

Los cocientes  $\frac{p_1}{p_2}$  y  $\frac{p_2}{p_1}$  que forman parte de estos elementos de matriz también se pueden reescribir en términos de los coeficientes de reflexión asociados a la interfase entre los medios 1 y 2 ( los que define la ecuación (2.26))

$$\begin{aligned} r_{\perp 12} &= \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \Rightarrow \frac{p_2}{P_1} = \frac{1 - r_{\perp 12}}{1 + r_{\perp 12}}, \\ r_{\perp 21} &= \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \Rightarrow \frac{p_1}{P_2} = \frac{1 - r_{\perp 21}}{1 + r_{\perp 21}} \end{aligned}$$

Nuevamente, para polarización TM solo se substituyen  $p_1 \rightarrow q_1$  y  $p_2 \rightarrow q_2$ .

En particular para medios no magnéticos, incidencia normal y grosores de “cuarto de onda”,  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = n_1$  y  $p_2 = n_2$ , por lo que en este caso también los elementos de matriz se pueden escribir de manera muy simple. En este caso la matriz característica es

$$\mathbf{M}^N \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{n_1} \left( -\frac{n_2}{n_1} \right)^N \\ -in_1 \left( -\frac{n_1}{n_2} \right)^N & 0 \end{pmatrix}.$$

Según la ecuación (2.68) el coeficiente de reflexión de la multicapa es

$$r = \frac{\frac{n_t}{n_1} \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N - \frac{n_1}{n_i} \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N}{\frac{n_t}{n_1} \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N + \frac{n_1}{n_i} \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N}. \quad (2.84)$$

Si fuera conveniente, aquí también se puede reescribir al coeficiente de reflexión en términos de  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{1t}$  y  $r_{i1}$  dado que  $\frac{n_a}{n_b} = \frac{1-r_{ba}}{1+r_{ba}}$ . La reflectividad de la multicapa de “cuarto de onda” en incidencia normal es

$$R = \left( \frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_i}\right) \left(\frac{n_1}{n_t}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_1}{n_i}\right) \left(\frac{n_1}{n_t}\right) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \right)^2.$$

### 2.2.7. La función de reflexión

La ecuación (2.22) representa la razón de los campos eléctricos que se contra-propagan en un medio homogéneo cuando este campo está en la dirección  $x$ , es decir bajo el esquema de polarización TE. Si se le evalúa sobre la superficie de la frontera anterior del medio inhomogéneo (en el caso de que exista dicha frontera), la función de reflexión corresponde al coeficiente de reflexión complejo de ese medio. De forma más general, dicha ecuación también define una función  $r(z)$

$$r_{\perp}(z) = \frac{iUk_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{dU}{dz}}{iUk_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{dU}{dz}}, \quad (2.85)$$

a la que se le dará el nombre “función de reflexión” [32]. Si  $U(z)$  es la solución de la ecuación (2.10) correspondiente a una onda propagándose hacia la derecha de una región inhomogénea ( $z \gg 0$ ), mientras que del lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) hay contra-propagación, la función de reflexión tiene una interpretación física clara: el módulo de  $r(z)$  en la región  $z \ll 0$  corresponde al del coeficiente de reflexión. Por otro lado, la función  $V(z)$  que se emplea en el formalismo de las matrices de transferencia y definida en las ecuaciones (2.57), está relacionada con la derivada de  $U(z)$

$$V(z) = -i \frac{\mu_0}{\mu k_0} \frac{dU(z)}{dz}.$$

Sustituyendo lo anterior en (2.85)

$$r(z) = \frac{\frac{U}{V} \sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{\mu}{\mu_0}}{\frac{U}{V} \sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{\mu}{\mu_0}}$$

y despejando a  $U/V$  queda

$$\frac{U}{V} = \frac{\mu}{\mu_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2}} \frac{1 + r_{\perp}}{1 - r_{\perp}}. \quad (2.86)$$

Combinando el par de ecuaciones implicadas en la expresión matricial (2.61) se obtiene una relación de recurrencia para  $U/V$

$$\frac{U(z_0)}{V(z_0)} = \frac{V_1 \frac{U(z)}{V(z)} - U_1}{U_2 - V_2 \frac{U(z)}{V(z)}}.$$

El sistema de ecuaciones (2.57) implica también una ecuación diferencial para la razón  $U/V$  [15, 33]

$$\frac{d(U/V)}{dz} = \frac{ik_0\mu}{\mu_0} - \frac{ik_0\mu_0(n^2 - \sigma^2)}{\mu} \left(\frac{U}{V}\right)^2, \quad (2.87)$$

que es una ecuación de Riccati. Insertando (2.86) en (2.87) se obtiene

$$\left( \frac{\mu'}{\mu_0 (n^2 - \sigma^2)^{1/2}} - \frac{\mu n n'}{\mu_0 (n^2 - \sigma^2)^{3/2}} \right) (1 - r_{\perp}^2) = -\frac{2\mu}{\mu_0 (n^2 - \sigma^2)^{1/2}} r'_{\perp} - \frac{4ik_0\mu}{\mu_0} r_{\perp} \quad (2.88)$$

que es una ecuación diferencial para la función de reflexión y también es una ecuación de Riccati [15, 34, 35]. Si las condiciones a la frontera se escogen de manera conveniente,  $r = r' = 0$  para  $z \rightarrow \infty$ , la solución a esta ecuación diferencial evaluada en  $z_0$  se puede interpretar como el coeficiente de reflexión del medio que se extiende desde  $\infty$  hasta  $z_0$ .

De manera similar en el caso de polarización TM, el cociente de los campos magnéticos, el reflejado entre el incidente, lleva a definir una función de reflexión magnética. Esta función de reflexión magnética, en el límite de la incidencia normal ( $\theta_i \rightarrow 0$ ) difiere de la eléctrica sólo en la fase y en particular esa diferencia es de  $\pi$ . Como ejemplo de esa situación, propia de la incidencia normal, se resalta que si los campos eléctricos de las ondas que se contra-propagan apuntan en el mismo sentido los magnéticos apuntarán en sentido contrario. Sea para polarización TM

$$r_{\parallel}(z) = \frac{i\mathcal{U}k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{d\mathcal{U}}{dz}}{i\mathcal{U}k_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{d\mathcal{U}}{dz}}. \quad (2.89)$$

Dado que  $\mathcal{V} = \frac{\varepsilon_0}{ik_0\varepsilon} \frac{d\mathcal{U}}{dz}$ , (2.89) se puede reescribir como

$$r_{\parallel}(z) = \frac{\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}}\sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}}\sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}},$$

y despejando a  $\mathcal{U}/\mathcal{V}$  queda

$$\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}} \frac{1 + r_{\parallel}}{1 - r_{\parallel}}. \quad (2.90)$$

Combinando el par de ecuaciones implicadas en la expresión matricial (2.72) se obtiene una relación de recurrencia para  $\mathcal{U}/\mathcal{V}$

$$\frac{\mathcal{U}(z_0)}{\mathcal{V}(z_0)} = \frac{\mathcal{V}_1 \frac{\mathcal{U}(z)}{\mathcal{V}(z)} - \mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2 - \mathcal{V}_2 \frac{\mathcal{U}(z)}{\mathcal{V}(z)}}.$$

El sistema de ecuaciones (2.71) implica una ecuación diferencial para la razón  $\mathcal{U}/\mathcal{V}$

$$\frac{d(\mathcal{U}/\mathcal{V})}{dz} = ik_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{ik_0\varepsilon_0(n^2 - \sigma^2)}{\varepsilon} \left( \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}} \right)^2. \quad (2.91)$$

Insertando (2.90) en (2.91) se obtiene

$$\left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}} - \frac{\varepsilon n n'}{\varepsilon_0 (n^2 - \sigma^2)^{3/2}} \right) (1 - r_{\parallel}^2) + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}} r'_{\parallel} + \frac{4ik_0\varepsilon}{\varepsilon_0} r_{\parallel} = 0, \quad (2.92)$$

que es una ecuación diferencial tipo Riccati para la función de reflexión magnética.

### 2.2.8. Soluciones exactas a la ecuación del campo con $n(z)$ continuo, para TE y medios no magnéticos

Para medios no magnéticos, la ecuación (2.10) se simplifica

$$\frac{d^2U}{dz^2} + Uk_0^2(n^2 - \sigma^2) = 0. \quad (2.93)$$

Cuando el medio inhomogéneo, pero continuo y transparente (no dispersivo), se extiende a lo largo de todo el eje  $z$ , u ocupa el semiespacio espacio  $0 \leq z < \infty$ , se conocen algunas soluciones exactas de (2.93). Epstein [36] por ejemplo, la resolvió de forma exacta con un perfil completamente analítico de índice de refracción  $n(z)$ , que simula muy bien una interfase. Éste es un buen ejemplo para mostrar que no siempre el método de las matrices es el indicado para abordar el problema de los medios estratificados.

Conocer soluciones exactas a (2.93) con un determinado perfil  $n(z)$  analítico, permite también modelar una capa inhomogénea, con ese comportamiento del índice de refracción, pero de grosor finito, acotada por medios homogéneos. Es en estos casos que es más conveniente emplear el método de las matrices de transferencia. En su libro [37, Capítulo III], Brekhovskikh hace un buen trabajo de revisión de las soluciones exactas conocidas para la ecuación (2.93), con ciertos perfiles  $n(z)$  en particular. A continuación se enumeran algunos casos de interés.

### 2.2.8.1. Perfil de Rayleigh

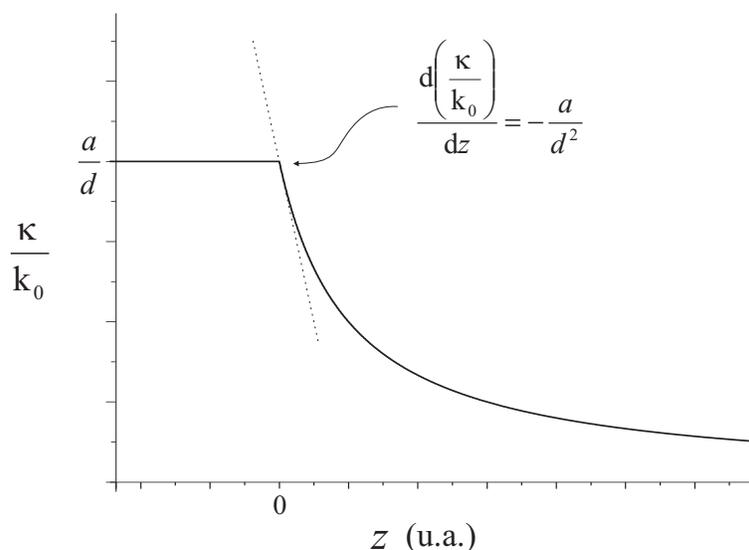


Figura 2.12: Perfil de Rayleigh.

Rayleigh [9] resolvió la ecuación para campo eléctrico (2.93) con

$$\frac{\kappa(z)}{k_0} = \sqrt{n^2(z) - \sigma^2} = \begin{cases} \frac{a}{d} & \text{para } z \leq 0 \\ \frac{a}{z+d} & \text{para } z > 0 \end{cases}, \quad (2.94)$$

donde  $a$  y  $d$  son constantes reales y se suponen mayores a cero. Este perfil, mostrado en 2.12, tiene un plano de discontinuidad en el gradiente de  $\frac{\kappa}{k_0}$ , el plano está en  $z = 0$ . La solución general para la región  $z > 0$  se puede escribir de forma notablemente simple

$$U(z) = C_1(z+d)^{\frac{1}{2}+i\sqrt{k_0^2 a^2 - \frac{1}{4}}} + C_2(z+d)^{\frac{1}{2}-i\sqrt{k_0^2 a^2 - \frac{1}{4}}}, \quad (2.95)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes, o equivalentemente y de manera más elegante

$$U(z) = C_1 \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \exp \left[ i \sqrt{1 - (k_0 2a)^{-2}} \int_0^z \kappa dz \right] + C_2 \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \exp \left[ -i \sqrt{1 - (k_0 2a)^{-2}} \int_0^z \kappa dz \right].$$

Para representar solo una onda propagándose a la derecha del plano, en la región  $z \gg 0$ , se debe cumplir  $C_2 = 0$ . En la frontera  $z = 0$ , las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  paralelas al plano deben ser continuas,

lo cual implica que allí  $U$  y  $U'$  deben ser continuas también. Lo anterior nos permite emplear la ecuación (2.22) para encontrar el coeficiente de reflexión si la evaluamos en  $z = 0$

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2ik_0a} - \sqrt{1 - \frac{1}{4k_0^2a^2}}}{1 + \frac{1}{2ik_0a} + \sqrt{1 - \frac{1}{4k_0^2a^2}}}. \quad (2.96)$$

Los medios dieléctricos transparentes se caracterizan por índices de refracción reales mayores a la unidad, por lo que si se trata de incidencia normal  $\sigma = 0$ , el perfil de Rayleigh (2.94) pierde el sentido físico cuando  $n(z) < 1$ . Si se trata de incidencia oblicua  $\sigma \neq 0$ , el perfil de Rayleigh puede representar una situación física válida, pero para que (2.95) sea solución, el ángulo de incidencia de la luz queda restringido a que se cumpla

$$\cos \theta_i = \frac{a^2}{d^2 n_i^2},$$

donde  $n_i = n(0)$ .

A mediados del siglo pasado Rytov y Yudevich propusieron el perfil siguiente

$$n_{\text{Rytov}}(z) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{a}{d}\right)^2 + b^2} & \text{para } z \leq 0 \\ \sqrt{\left(\frac{a}{z+d}\right)^2 + b^2} & \text{para } z > 0 \end{cases},$$

si  $b = 0$  se reduce al de Rayleigh, para dicho perfil encontraron soluciones a la ecuación (2.93) en términos de funciones de Hankel [37, Capítulo III]. Este perfil tiene interpretación clara para cualquier ángulo de incidencia.

Por otro lado, es posible construir un perfil continuo tomando un intervalo finito de la función  $n(z) = a/(z+d)$  y unirlo a dos funciones constantes en los extremos. Tal perfil puede representar una situación física válida en el caso de incidencia normal, pues el índice de refracción no tiende a cero cuando  $z \rightarrow \infty$ . Rayleigh [9] resolvió la ecuación (2.93) también con dicho perfil. Sea

$$n_{\text{Rayleigh}}(z) = \begin{cases} \frac{a}{d} & \text{para } z \leq 0 \\ \frac{a}{z+d} & \text{para } 0 < z < g \\ \frac{a}{g+d} & \text{para } g < z \end{cases}, \quad (2.97)$$

donde  $g$  representa el grosor de la capa inhomogénea. Suponiendo incidencia normal, medios transparentes y no magnéticos, las condiciones de continuidad de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en la frontera permiten encontrar el coeficiente de reflexión. En la figura 2.13 se muestra el perfil (2.97) y las soluciones de la ecuación (2.93) para cada uno de las tres regiones son

$$U_{\text{I}}(z) = \tilde{A}_i e^{ik_0 n_i z} + \tilde{A}_r e^{-ik_0 n_i z}$$

$$U_{\text{II}}(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ C_1 \exp \left( i \sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}} \int_0^z n \, dz \right) + C_2 \exp \left( -i \sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}} \int_0^z n \, dz \right) \right]$$

$$U_{\text{III}}(z) = \tilde{A}_t e^{ik_0 n_t z}$$

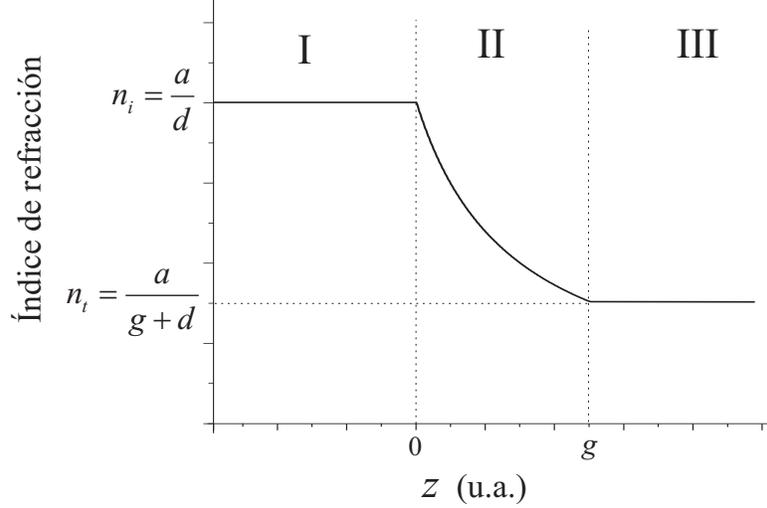


Figura 2.13: El perfil (2.97) con sus tres regiones I, II y III.

Tras imponer las condiciones a la frontera que garanticen la continuidad los campos, se encuentra que el coeficiente de reflexión  $r = \frac{\tilde{A}_r}{\tilde{A}_i}$  para el perfil (2.97) en incidencia normal es, para  $k_0^2 - (2a)^{-2} > 0$

$$r(\Lambda) = \frac{\sin\left(\sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}}\Lambda\right)}{2a \left[ \sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}} \cos\left(\sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}}\Lambda\right) - ik_0 \sin\left(\sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}}\Lambda\right) \right]},$$

donde  $\Lambda = \int_0^g n dz = a \ln\left(\frac{n_i}{n_t}\right)$  es el grosor óptico de la capa inhomogénea. Para  $k_0^2 - (2a)^{-2} < 0$

$$r(\Lambda) = \frac{\sinh\left(\sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2}\Lambda\right)}{2a \left[ \sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2} \cos\left(\sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2}\Lambda\right) - ik_0 \sinh\left(\sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2}\Lambda\right) \right]},$$

La reflectividad de este perfil es

$$R(\Lambda) = \frac{\sin^2\left(\sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}}\Lambda\right)}{4a^2k_0^2 - 1 + \sin^2\left(\sqrt{k_0^2 - (2a)^{-2}}\Lambda\right)} \quad \text{para } k_0^2 - (2a)^{-2} > 0,$$

$$R(\Lambda) = \frac{\sinh^2\left(\sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2}\Lambda\right)}{1 - 4a^2k_0^2 + \sinh^2\left(\sqrt{(2a)^{-2} - k_0^2}\Lambda\right)} \quad \text{para } k_0^2 - (2a)^{-2} < 0,$$

En el caso particular  $k_0^2 - (2a)^{-2} \rightarrow 0$ , el límite correspondiente de las cuatro ecuaciones anteriores existe, por lo que

$$r(\Lambda) = \frac{\Lambda}{2a - i\Lambda} \quad \text{y} \quad R(\Lambda) = \frac{\Lambda^2}{4a^2 + \Lambda^2}.$$

Jacobsson [15] también encontró el coeficiente de reflexión y la reflectividad de este perfil (2.97), pero con el método de las matrices de transferencia, como un ejemplo de la aplicación de dicho método.

### 2.2.8.2. Perfil de Brekhovskikh

La propuesta

$$n^2(z) - \sigma^2 = \begin{cases} 1 & \text{para } z \leq 0 \\ (1 + az)^m & \text{para } z > 0 \end{cases}, \quad (2.98)$$

donde  $a$  es una constante real y  $m$  un número natural, fue trabajada por Wallot y retomada por Försterling [33, 38]. El caso  $m = 1$  es tratado con detalle por Brekhovskikh [37, Capítulo III], en cuyo caso la solución de (2.93) se puede encontrar con base en las funciones de Airy [39] si se hace un cambio de variable. Sea

$$\zeta = - \left( \frac{k_0}{a} \right)^{2/3} - z (ak_0^2)^{1/3},$$

la ecuación (2.93) se transforma en

$$U'' = \zeta U, \quad (2.99)$$

donde la derivación es respecto de  $\zeta$ . Dos soluciones independientes de la ecuación de Airy (2.99) son [40]

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left( \frac{t^3}{3} + \zeta t \right) dt, \quad (2.100)$$

$$\text{Bi}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{t^3}{3} + \zeta t \right) \sin \left( \frac{t^3}{3} + \zeta t \right) dt. \quad (2.101)$$

Con combinaciones lineales de ellas podemos construir cualquier solución particular. Nos interesa hallar una solución que represente solo una onda transmitiéndose hacia la derecha, en la región  $z \gg 0$ . Las formas asintóticas de (2.100) y (2.101) para  $\zeta \ll 0$ , es decir  $z \gg 0$ , son [40]

$$\text{Ai}(\zeta) \rightarrow \frac{(-\zeta)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left( \frac{2}{3} (-\zeta)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (2.102)$$

$$\text{Bi}(\zeta) \rightarrow \frac{(-\zeta)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left( \frac{2}{3} (-\zeta)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.103)$$

La siguiente combinación de las soluciones anteriores

$$\text{Bi}(\zeta) + i\text{Ai}(\zeta) \rightarrow \frac{(-\zeta)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} e^{i \left( \frac{2}{3} (-\zeta)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

efectivamente representa una onda propagándose a la derecha del eje  $z$ , por lo que es la solución particular que buscamos para  $z > 0$ , es decir  $\zeta < - \left( \frac{k_0}{a} \right)^{2/3}$

$$U(\zeta) = \text{Bi}(\zeta) + i\text{Ai}(\zeta) \quad \text{para } \zeta < \zeta_0,$$

donde  $\zeta_0 = - \left( \frac{k_0}{a} \right)^{2/3}$ . En la frontera  $z = 0$ , las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  paralelas al plano deben ser continuas, lo cual implica que allí  $U$  y  $\frac{dU}{dz}$  deben ser continuas también. Se puede nuevamente emplear la ecuación (2.22) para encontrar el coeficiente de reflexión

$$r(\zeta) = \frac{iUk_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} + (ak_0^2)^{1/3} \frac{dU}{d\zeta}}{iUk_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} - (ak_0^2)^{1/3} \frac{dU}{d\zeta}},$$

si se evalúa en  $z = 0$ , es decir en  $\zeta = \zeta_0$ ,

$$r(\zeta_0) = \frac{(-\zeta_0)^{1/2} [\text{Bi}(\zeta_0) + i\text{Ai}(\zeta_0)] - i [\text{Bi}'(\zeta_0) + i\text{Ai}'(\zeta_0)]}{(-\zeta_0)^{1/2} [\text{Bi}(\zeta_0) + i\text{Ai}(\zeta_0)] + i [\text{Bi}'(\zeta_0) + i\text{Ai}'(\zeta_0)]}, \quad (2.104)$$

queda escrito el coeficiente de reflexión en términos de las funciones de Airy. El perfil de Brekhovskikh diverge cuando  $z \rightarrow \infty$ , pero se puede definir por partes otro perfil que quede acotado a ambos lados por medios homogéneos. Rauh *et al.* proponen una permitividad  $\varepsilon(z)$  que depende linealmente de la posición en intervalos finitos de  $z$  y con ello modelan cristales fotónicos <sup>1</sup>.

### 2.2.8.3. Perfil de Epstein

Epstein [36] trabajó con un perfil que se escribe en términos de exponenciales

$$n^2(z) = n_1^2 + \frac{e^{\frac{\alpha}{D}z} \left[ (n_2^2 - n_1^2) \left( e^{\frac{\alpha}{D}z} + 1 \right) + n_3^2 \right]}{\left( e^{\frac{\alpha}{D}z} + 1 \right)^2}, \quad (2.105)$$

donde  $\alpha$  y  $D$  son constantes. El caso que se expone aquí, pues es el que representa mejor una interfase gradual y monotónica es  $n_3 = 0$ . Suponiendo un material transparente, no magnético y un perfil para la permitividad relativa  $n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$$n^2 = \frac{n_2^2 + n_1^2}{2} + \frac{n_2^2 - n_1^2}{2} \tanh\left(\frac{\alpha}{2D}z\right), \quad (2.106)$$

donde  $\alpha$  es un factor constante tal que el parámetro  $D$  sea la distancia en la que el índice de refracción varía el 90 %, en particular desde  $n_1 + \frac{1}{20}(n_2 - n_1)$  hasta  $n_2 - \frac{1}{20}(n_2 - n_1)$ , es decir  $\alpha \approx 5.92$ . En 1930 Paul S. Epstein resolvió analíticamente la ecuación (2.93) con el perfil (2.106). Mediante un cambio de variable independiente  $\xi = -\exp\left(\frac{\alpha}{D}z\right)$ , la ecuación (2.93) se puede reescribir

$$\left(\frac{\alpha}{D}\right)^2 \xi^2 \frac{d^2U}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{D}\right)^2 \xi \frac{dU}{d\xi} - k_0^2 \left[ \frac{n_2^2 + n_1^2}{2} - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2} \left( \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \right] U = 0.$$

Haciendo otro cambio de variable, ahora la dependiente

$$U = W (1 - \xi) (-\xi)^{\frac{ik_0 D n_1}{\alpha}},$$

se llega a la siguiente expresión

$$(1 - \xi) \xi W'' + \left[ (2ik_0 D n_1 \alpha^{-1} + 1) - (2ik_0 D n_1 \alpha^{-1} + 3) \xi \right] W' - \left[ 1 + 2ik_0 D n_1 \alpha^{-1} + k_0^2 D^2 \alpha^{-2} (n_2^2 - n_1^2) \right] W = 0,$$

que tiene la forma de una ecuación diferencial hipergeométrica [40]

$$(1 - \xi) \xi W'' + [c - (a + b + 1) \xi] W' - abW = 0,$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 + n_2) + 1, \\ b &= ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 - n_2) + 1, \\ c &= 2ik_0 D \alpha^{-1} n_1 + 1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Un cristal fotónico es un material estructurado de manera que su función dieléctrica varíe periódicamente en el espacio

La ecuación hipergeométrica tiene soluciones conocidas, que se escriben como series de potencias, las series hipergeométricas

$${}_2F_1(a, b; c; \xi) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a+m-1)!(b+m-1)!(c-1)!}{(a-1)!(b-1)!(c+m-1)!m!} \xi^m.$$

Dos soluciones particulares independientes, obtenidas con el método de Frobenius, alrededor del punto singular  $\xi = 0$  son [40]

$$W_1 = {}_2F_1(a, b; c; \xi),$$

$$W_2 = \xi^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; \xi).$$

Reescribiendo ambas en términos de  $U$  y  $z$  para construir dos soluciones independientes de (2.93) quedan

$$U_1 = \left(1 + e^{\frac{\alpha}{D}z}\right) e^{ik_0n_1z} {}_2F_1\left(a, b; c; -e^{\frac{\alpha}{D}z}\right),$$

$$U_2 = \left(1 + e^{\frac{\alpha}{D}z}\right) e^{-ik_0n_1z} {}_2F_1\left(a^*, b^*; c^*; -e^{\frac{\alpha}{D}z}\right),$$

de modo que la solución general para (2.93) es  $U = \tilde{C}_1 U_1 + \tilde{C}_2 U_2$ , donde  $\tilde{C}_1$  y  $\tilde{C}_2$  son constantes complejas. Cabe resaltar que  $U_2 = U_1^*$ . El significado físico de  $U_1$  y  $U_2$  se puede ver fácilmente si consideramos lo siguiente: para  $z \rightarrow -\infty$  o equivalentemente  $\xi \rightarrow 0$ , muy lejos y a la izquierda de la interfase, ya cuando el medio es prácticamente homogéneo y  $n \approx n_1$ , resulta que  $U_1 \rightarrow e^{ik_0n_1z}$  y  $U_2 \rightarrow e^{-ik_0n_1z}$ , de modo que  $U_1$  y  $U_2$  representan las ondas que se contrapropagan en esa región, la incidente y la reflejada. Para  $z \rightarrow \infty$  ya no es simple visualizar a  $U_1$  y  $U_2$ , pero es allí donde queremos imponer condiciones a la frontera, pues nos interesa que solo haya una onda transmitiéndose a la derecha, en ese caso  $\frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1}$  sería el coeficiente de reflexión. Podemos recurrir a otro par de soluciones particulares e independientes [40], obtenidas para  $\xi \rightarrow \infty$

$$W_3 = \xi^{-a} {}_2F_1(a, a-c+1; a-b+1; \xi^{-1}),$$

$$W_4 = \xi^{-b} {}_2F_1(b, b-c+1; b-a+1; \xi^{-1}),$$

que corresponden a

$$U_3 = \left(e^{-\frac{\alpha}{D}z} + 1\right) e^{-ik_0n_2z} {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; -e^{-\frac{\alpha}{D}z}\right), \quad (2.107)$$

$$U_4 = \left(e^{-\frac{\alpha}{D}z} + 1\right) e^{ik_0n_2z} {}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; -e^{-\frac{\alpha}{D}z}\right). \quad (2.108)$$

Aquí también se puede ver que  $U_4 = U_3^*$ . Este nuevo par de soluciones se puede interpretar fácilmente: cuando  $\xi \rightarrow \infty$  y  $z \rightarrow \infty$  el medio es ya prácticamente homogéneo, siendo su índice de refracción  $n_2$ , en este caso  $U_3 \rightarrow e^{-ik_0n_2z}$  y  $U_4 \rightarrow e^{ik_0n_2z}$ , de modo que  $U_1$  y  $U_2$  representan las ondas que se contrapropagan en esa región. Para  $z \rightarrow \infty$  queremos solo la onda que viaja a la derecha, la transmitida, caso que corresponde a  $U_4$ , la luz incide solo desde la izquierda de la interfase. Una de las conocidas transformaciones lineales para las series hipergeométricas (continuación analítica) [40] nos permiten relacionar ambos pares de soluciones

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; \xi) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-\xi)^{-a} {}_2F_1(a, a-c+1; a-b+1; \xi^{-1}) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-\xi)^{-b} {}_2F_1(b, b-c+1; b-a+1; \xi^{-1}), \end{aligned}$$

pues si la multiplicamos por  $(1 + e^{\frac{\alpha}{D}z}) e^{ik_0 n_1 z}$  y luego la escribimos en términos de  $U_1$ ,  $U_3$  y  $U_4$  queda

$$U_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} U_3 + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} U_4. \quad (2.109)$$

Conjugando la expresión anterior se obtiene

$$U_2 = \frac{\Gamma(c^*) \Gamma(b^* - a^*)}{\Gamma(b^*) \Gamma(c^* - a^*)} U_4 + \frac{\Gamma(c^*) \Gamma(a^* - b^*)}{\Gamma(a^*) \Gamma(c^* - b^*)} U_3. \quad (2.110)$$

Combinando (2.109) y (2.110)

$$\left( \frac{\Gamma(a-b) \Gamma(b) \Gamma(c-a)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b) \Gamma(b-a)} - \frac{\Gamma(b^* - a^*) \Gamma(a^*) \Gamma(c^* - b^*)}{\Gamma(b^*) \Gamma(c^* - a^*) \Gamma(a^* - b^*)} \right) U_4 = \frac{\Gamma(b) \Gamma(c-a)}{\Gamma(c) \Gamma(b-a)} U_1 - \frac{\Gamma(a^*) \Gamma(c^* - b^*)}{\Gamma(c^*) \Gamma(a^* - b^*)} U_2. \quad (2.111)$$

Como ya se mencionó antes, la solución sujeta a las condiciones de frontera adecuadas es  $U_4$  y en (2.111) ella está dada como una combinación lineal de  $U_1$  y  $U_2$ , que en la región  $z \rightarrow -\infty$  son las ondas incidente y reflejada, de modo que la razón entre los coeficientes de  $U_1$  y  $U_2$  es el coeficiente de reflexión

$$\begin{aligned} r &= - \frac{\Gamma(a^*) \Gamma(c^* - b^*) \Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c^*) \Gamma(a^* - b^*) \Gamma(b) \Gamma(c-a)} = \\ &= - \frac{\Gamma[-ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 + n_2) + 1] \Gamma[-ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 + n_2)] \Gamma[2ik_0 D \alpha^{-1} n_1 + 1]}{\Gamma[-2ik_0 D \alpha^{-1} n_1 + 1] \Gamma[ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 - n_2) + 1] \Gamma[ik_0 D \alpha^{-1} (n_1 - n_2)]}. \end{aligned}$$

La reflectividad  $R = rr^*$ , haciendo uso de la relación  $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ , se puede escribir de forma más simple

$$R = \frac{\sinh^2 [\pi k_0 D \alpha^{-1} (n_2 - n_1)]}{\sinh^2 [\pi k_0 D \alpha^{-1} (n_2 + n_1)]}. \quad (2.112)$$

#### 2.2.8.4. Perfil de Morozov

Un perfil muy parecido al (2.98), para medios no magnéticos, incidencia normal y para  $m = 2$ , es tratado con detalle por Morozov et. al. en una publicación muy reciente [5]. Dicho perfil  $n(z)$ , que tiene la apariencia de un diente canino, está dado por

$$n_{\text{un diente}}(z) = \begin{cases} n_i & z < 0 \\ n_1 + (n_2 - n_1) \frac{z}{d} & 0 \leq z \leq d \\ n_t & z > d \end{cases}, \quad (2.113)$$

donde  $n_i$  y  $n_t$  son los índices de refracción constantes que limitan el medio inhomogéneo,  $d$  es una constante real que representa el grosor de la capa inhomogénea,  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción inicial y final de la capa inhomogénea. En el trabajo citado se escriben las soluciones a la ecuación del campo, (2.9) con el perfil  $n(z) = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{z}{d}$ , en términos de series de Bessel. Proponiendo lo siguiente

$$U = \xi^{\frac{1}{4}} J_m(\xi),$$

donde  $\xi(z) = \frac{k_0 d}{2(n_2 - n_1)} [n_1 + (n_2 - n_1) \frac{z}{d}]^2$  y sustituyendo en (2.9), se comprueba que  $J_m(\xi)$  resuelve la siguiente ecuación

$$(\xi^2 - m^2) J_m + \xi \frac{dJ_m}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2 J_m}{d\xi^2} = 0, \quad (2.114)$$

con  $m = \frac{1}{4}$ , que es la ecuación de Bessel de orden  $\frac{1}{4}$  [41, pag. 578]. La solución general de esta ecuación (2.114) se puede escribir como una combinación lineal de las funciones de Bessel  $J_{\frac{1}{4}}$  y  $J_{-\frac{1}{4}}$ , donde

$$J_{\pm\frac{1}{4}}(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l \pm \frac{1}{4} + 1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2l \pm \frac{1}{4}}.$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación del campo (2.9) con  $n(z) = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{z}{d}$ , se puede expresar como

$$U_{\text{general}} = \xi^{\frac{1}{4}} \left[ C_1 J_{\frac{1}{4}}(\xi) + C_2 J_{-\frac{1}{4}}(\xi) \right].$$

A continuación se buscan las soluciones particulares para construir la matriz de transferencia que caracteriza al medio en el intervalo  $0 \leq z \leq d$ . Las condiciones a la frontera apropiadas se especifican en (2.59), lo que lleva a

$$\begin{aligned} U_1(z) &= i\pi \sqrt{\frac{\xi \xi_0}{2nn_1}} \left( J_{-\frac{1}{4}}(\xi_0) J_{\frac{1}{4}}(\xi) - J_{\frac{1}{4}}(\xi_0) J_{-\frac{1}{4}}(\xi) \right), \\ U_2(z) &= \pi \sqrt{\frac{\xi_0 \xi n_1}{2n}} \left( J_{\frac{3}{4}}(\xi_0) J_{\frac{1}{4}}(\xi) + J_{-\frac{3}{4}}(\xi_0) J_{-\frac{1}{4}}(\xi) \right), \\ V_1(z) &= \pi \sqrt{\frac{\xi_0 \xi n}{2n_1}} \left( J_{-\frac{1}{4}}(\xi_0) J_{-\frac{3}{4}}(\xi) + J_{\frac{1}{4}}(\xi_0) J_{\frac{3}{4}}(\xi) \right), \\ V_2(z) &= -i\pi \sqrt{\frac{\xi \xi_0 n n_1}{2}} \left( J_{\frac{3}{4}}(\xi_0) J_{-\frac{3}{4}}(\xi) - J_{-\frac{3}{4}}(\xi_0) J_{\frac{3}{4}}(\xi) \right), \end{aligned} \quad (2.115)$$

donde  $n = n(z)$  y  $\xi = \xi(z)$ . Con el objeto de escribir de forma compacta las expresiones (2.115) se emplearon las siguientes relaciones estándar para las series de Bessel [40, Capítulo IX]

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^\nu J_\nu(\xi)] = \xi^\nu J_{\nu-1}(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} [\xi^\nu J_{-\nu}(\xi)] = -\xi^\nu J_{1-\nu}(\xi),$$

$$J_\nu(\xi) J_{1-\nu}(\xi) + J_{-\nu}(\xi) J_{\nu-1}(\xi) = \frac{2 \sin \nu \pi}{\pi \xi}.$$

Para obtener los elementos de la matriz de transferencia se deben evaluar estas soluciones (2.115) en  $z = d$

$$m_{11} = V_1(d), \quad m_{12} = -U_1(d), \quad m_{21} = -V_2(d) \quad m_{22} = U_2(d). \quad (2.116)$$

Aplicando (2.68), el coeficiente de reflexión es

$$r_{\text{un diente}} = \frac{n_i (m_{11} + n_t m_{12}) - (n_t m_{22} + m_{21})}{n_i (m_{11} + n_t m_{12}) + (n_t m_{22} + m_{21})}.$$

Multiplicando varias veces la misma matriz de transferencia asociada al perfil (2.113), se obtiene un perfil de dientes de sierra como el de la figura 2.14, que puede representar un cristal fotónico. El medio con  $N$  dientes está representado por una matriz como la de la ecuación (2.79), y su coeficiente de reflexión es

$$\begin{aligned} r_{N \text{ dientes}} &= \\ &= \frac{n_i (m_{11} U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) + n_t m_{12} U_{N-1}(a)) - (n_t (m_{22} U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a)) + m_{21} U_{N-1}(a))}{n_i (m_{11} U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) + n_t m_{12} U_{N-1}(a)) + (n_t (m_{22} U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a)) + m_{21} U_{N-1}(a))}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

donde nuevamente  $a = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22})$  y  $U_N$  son los polinomios de Chebyshev de segundo tipo.

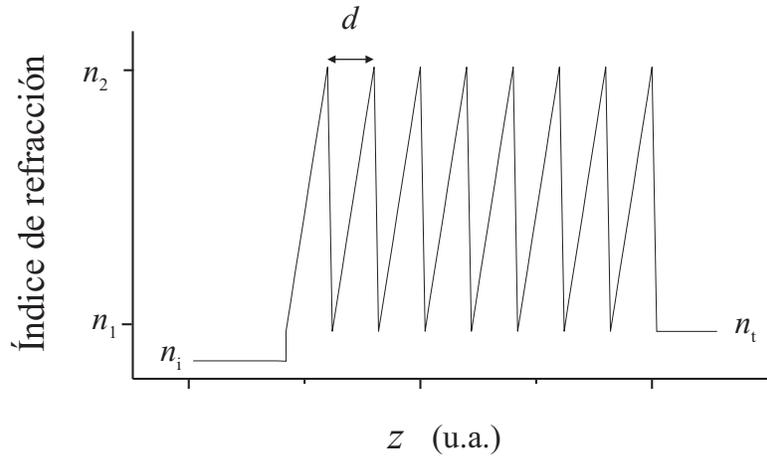


Figura 2.14: Perfil de índice de refracción tipo diente de sierra.

### 2.2.8.5. Perfil de Shvartsburg-Maradudin

Recientemente, en el libro [4, Capítulo II], los autores proponen un perfil  $n(z)$  que se puede interpretar como una generalización del perfil de Rayleigh y que también implica una solución muy simple para la ecuación (2.93). La ventaja que ofrece este perfil, en comparación con el de Rayleigh, es que, si se escoge un intervalo continuo de manera adecuada, el perfil no es necesariamente monótonico. El intervalo escogido puede contener un máximo o mínimo local y ser cóncavo o convexo, luego, yuxtaponiendo estos intervalos se puede construir un cristal fotónico.

$$n_{\text{Shvartsburg}}(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} \text{ para } z_1 < z < z_2. \quad (2.118)$$

El perfil de Rayleigh no es más que un caso particular del anterior, cuando  $a = 0$ . En la figura 2.15 se muestran varias de las formas que puede adquirir este perfil tomando distintas combinaciones de las constantes reales  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , en particular cuando  $a \neq 0$ . Para representar satisfactoriamente medios transparentes, se deben escoger sólo intervalos con valores acotados del índice de refracción y  $n > 1$ . Se resaltan con líneas punteadas intervalos que se pueden emplear para modelar estos medios inhomogéneos, sean monótonicos o no monótonicos.

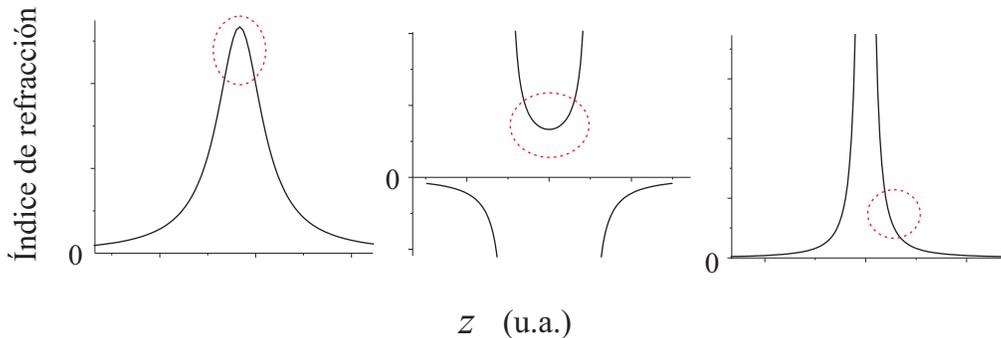


Figura 2.15: Distintas variedades del perfil de Shvartsburg-Maradudin.

Para el caso de incidencia normal la solución a la ecuación del campo (2.93) sorprende por su sencillez,

como en el caso del perfil de Rayleigh

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ C_1 \exp \left( i\sqrt{k_0^2 - p^2} \int_0^z n \, dz \right) + C_2 \exp \left( -i\sqrt{k_0^2 - p^2} \int_0^z n \, dz \right) \right],$$

donde  $p^2 = \frac{1}{4}b^2 - ac$ . Para encontrar el coeficiente de reflexión de este perfil, sencillo o repetido  $N$  veces, conviene recurrir al método de las matrices. Las soluciones  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  y  $V_2$  que prescribe el método son

$$\begin{aligned} U_1(z) &= i \frac{k_0}{\sqrt{n_i n (k_0^2 - p^2)}} \sin \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right), \\ V_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{n_i}} \left[ n_i^{\frac{1}{2}} \cos \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right) - \frac{n^{-\frac{3}{2}} n'}{2\sqrt{k_0^2 - p^2}} \sin \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right) \right], \\ U_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ n_i^{\frac{1}{2}} \cos \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right) + \frac{n_i^{-\frac{3}{2}} n'_i}{\sqrt{k_0^2 - p^2}} \sin \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right) \right], \\ V_2(z) &= \frac{i}{2k_0} \left( n^{-\frac{3}{2}} n_i^{\frac{1}{2}} n' - n^{\frac{1}{2}} n_i^{-\frac{3}{2}} n'_i \right) \cos \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right) + \\ &+ \frac{i}{2k_0} \left( \frac{n^{-\frac{3}{2}} n_i^{-\frac{3}{2}} n' n'_i}{2\sqrt{k_0^2 - p^2}} + 2n^{\frac{1}{2}} n_i^{\frac{1}{2}} \sqrt{k_0^2 - p^2} \right) \sin \left( \sqrt{k_0^2 - p^2} \Lambda \right), \end{aligned}$$

donde  $n'$  es la derivada del índice de refracción respecto de  $z$ ,  $n_i$  y  $n'_i$  son el índice de refracción y su derivada evaluadas en  $z = 0$  y  $\Lambda = \int_0^z n \, dz$ . Los elementos de matriz correspondientes son

$$m_{11} = V_1(g), \quad m_{12} = -U_1(g), \quad m_{21} = -V_2(g) \quad m_{22} = U_2(g),$$

donde  $g$  es el grosor de la capa. Aplicando (2.68), el coeficiente de reflexión para una capa es

$$r = \frac{n_i (m_{11} + n_t m_{12}) - (n_t m_{22} + m_{21})}{n_i (m_{11} + n_t m_{12}) + (n_t m_{22} + m_{21})}.$$

Para yuxtaponer  $N$  capas se emplean los polinomios de Chevyshev, como en la ecuación (2.117).

### 2.2.8.6. Más perfiles y algunos comentarios

Se conocen más funciones  $n(z)$  que admiten solución analítica para la ecuación (2.93), como son los casos de la exponencial simple y doble [37, Capítulo III]. Rostami & Motavali [42, 43] encuentran soluciones a las ecuaciones de los campos para algunas combinaciones de perfiles dieléctricos  $\varepsilon(z)$  y magnéticos  $\mu(z)$ .

Los autores más recientes (siglo XXI) de los citados en esta sección 2.2.8 no citan a su vez los trabajos de la primera mitad del siglo XX que tienen relación con su trabajo, ésto quizá se deba a la mayor dificultad relativa para conseguir las publicaciones más antiguas con las nuevas tecnologías de acceso a la información. El resultado es que se han publicado trabajos como si fueran originales por completo, cuando en realidad no lo son tanto. Un ejemplo muy claro es la primera parte del artículo de Mazharimousavi *et al.* [44], en el que se re-descubre el perfil de Epstein y la solución analítica a la ecuación del campo (2.93) con las series hipergeométricas. No es sino hasta la segunda parte que proponen un perfil nuevo, combinan dos tangentes hiperbólicas y luego mediante transformaciones de variables escriben la ecuación del campo como una ecuación diferencial de Heun.

Dado que el siglo XX se vio afectado por sendos conflictos mundiales que aislaron y reconfiguraron los grupos dedicados a la investigación científica, el problema de la comunicación entre ellos fue notorio. Por ejemplo, Florín Abelés ([14]), francés, en su publicación de más trascendencia cita a muy pocos autores alemanes, aunque sería pertinente; en su libro, Knittl (checo) no cita a Brekhovskikh (ruso-soviético). Algunos conflictos se han prolongado hasta el presente siglo, lo cual se refleja en que los iraníes y turcos evitan citar a los autores europeos o norteamericanos y viceversa, por mencionar un ejemplo.

### 2.2.9. Método de la transformada de Fourier inversa

Otro modelo aproximado, pero muy simple, que esclarece la propagación de luz en medios estratificados, es el que relaciona el coeficiente de reflexión del medio con la transformada de Fourier de cierta función del perfil  $n(z)$ .

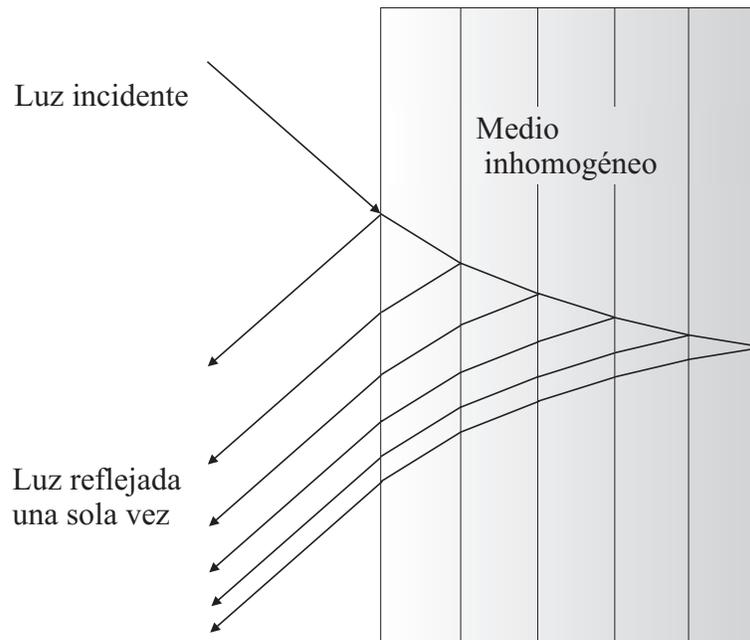


Figura 2.16: Modelo de capas muy delgadas y reflexiones simples para el método de la anti-transformada de Fourier.

Se comienza por modelar al perfil del medio inhomogéneo  $n(z)$ , ya sea continuo o discontinuo, como una secuencia de películas homogéneas muy delgadas. Luego, para construir la onda reflejada, se toma en cuenta la luz que se refleja una sola vez sobre las interfases, despreciándose las reflexiones múltiples y también el intercambio de energía debido a la transmisión. Se muestra una representación gráfica en la figura 2.16. Así, el campo reflejado del lado izquierdo de la estructura se escribe de forma muy simple, es la suma de todas las contribuciones de las reflexiones individuales

$$U_r = U_i \left( r_0 + r_1 e^{2ik_0 l_1 n_1 \cos \theta_1} + r_2 e^{2ik_0 (l_1 n_1 \cos \theta_1 + l_2 n_2 \cos \theta_2)} + \dots \right), \quad (2.119)$$

donde  $r_j$  es el coeficiente de reflexión de cada interfase,  $l_j n_j$  es el grosor óptico de cada capa y  $j = 1, 2, 3, \dots$ . En particular para el caso de incidencia normal

$$r_j = \frac{n_j - n_{j+1}}{n_j + n_{j+1}}.$$

Se puede subdividir el medio inhomogéneo en  $N$  capas homogéneas de un mismo grosor óptico  $l_j n_j = g$ , entonces en el caso de incidencia normal

$$\frac{U_r}{U_i} = r = \sum_{j=0}^N \frac{n_j - n_{j+1}}{n_j + n_{j+1}} e^{2ik_0 j g}.$$

Si el cambio de índice de refracción es muy pequeño entre las capas contiguas y éstas son lo suficientemente delgadas se puede escribir lo siguiente

$$\frac{n_j - n_{j+1}}{n_j + n_{j+1}} \rightarrow \frac{dn}{2n} \quad \text{y} \quad e^{2ik_0 j g} \rightarrow \exp \left[ 2ik_0 \int_0^z n d\xi \right],$$

donde  $\xi$  es una variable muda, de tal modo que se puede cambiar la sumatoria por una integral

$$r(k_0) = \int \frac{dn}{2n} \exp \left[ 2ik_0 \int_0^z n d\xi \right] = \int_{z_0}^{z_f} \frac{n'}{2n} \exp \left[ 2ik_0 \int_0^z n d\xi \right] dz.$$

Para generalizar a la incidencia oblicua, con ángulo  $\theta$  menor al crítico, dadas las relaciones (2.27) y (2.45) se pueden hacer las siguientes sustituciones

$$e^{2ik_0 j g} \rightarrow \exp \left[ 2ik_0 \int_0^z n \cos \theta d\xi \right]$$

$$r_{j\perp} = \frac{n_j \cos \theta_j - n_{j+1} \cos \theta_{j+1}}{n_j \cos \theta_j + n_{j+1} \cos \theta_{j+1}} \rightarrow \frac{d(n \cos \theta)}{2n \cos \theta}, \quad (2.120)$$

$$r_{j\parallel} = \frac{n_{j+1} \cos \theta_j - n_j \cos \theta_{j+1}}{n_{j+1} \cos \theta_j + n_j \cos \theta_{j+1}} \rightarrow \frac{d(n/\cos \theta)}{2n/\cos \theta}. \quad (2.121)$$

Se le llama impedancia (por su análogo en las líneas de transmisión) a la cantidad  $1/(n \cos \theta)$  en el caso de polarización TE y  $\cos \theta/n$  en el caso de polarización TM. Suele ser conveniente hacer el siguiente cambio de variable  $\Lambda = \int_0^z n \cos \theta d\xi$  y llevar los límites de la integración al infinito para poder escribir

$$r_{\perp}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Lambda} \frac{(n \cos \theta)}{2n \cos \theta} \exp [2ik_0 \Lambda] d\Lambda, \quad (2.122)$$

$$r_{\parallel}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Lambda} \frac{(n/\cos \theta)}{2n/\cos \theta} \exp [2ik_0 \Lambda] d\Lambda, \quad (2.123)$$

pues así ambas expresiones ya tienen el aspecto de transformadas de Fourier. Como en este modelo no se considera el intercambio de energía debido a la transmisión, es decir que el coeficiente de transmisión para cada interfase se aproxima a la unidad  $t_j \approx 1$ , para estructuras con una periodicidad grande se pueden obtener reflectividades mayores al 100%, lo cual no es físicamente posible. Sin embargo las expresiones (2.122) y (2.123) tienen una gran ventaja, al ser transformadas de Fourier y poderse invertir, se puede obtener una relación entre la impedancia y la transformada inversa del coeficiente de reflexión. Lo anterior representa una gran herramienta para el diseño de espejos y filtros dieléctricos, pues regularmente uno conoce el espectro de reflectividad que se necesita para una determinada tarea en el laboratorio y lo que se desea conocer es el perfil  $n(z)$  que produce dicho espectro, para poder fabricar el dispositivo óptico adecuado.

Con el objeto de mejorar la exactitud del modelo para estructuras inhomogéneas con altas reflectividades, sin sacrificar sus bondades, se define una función compleja  $\tilde{\mathcal{Q}}$  [45], que para el caso de polarización TE es

$$\tilde{\mathcal{Q}}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\Lambda} \left( \frac{1}{2} \ln [n \cos \theta] \right) \exp [2ik_0\Lambda] d\Lambda, \quad (2.124)$$

para TM sólo se sustituye  $n \cos \theta$  por  $n/\cos \theta$ . De manera *ad hoc*, la función  $\tilde{\mathcal{Q}}$  se puede relacionar de distintas formas con el coeficiente de reflexión y/o reflectividad. Por ejemplo

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+r}{1-r} \right),$$

permite que, aunque la integral en (2.124) tenga un módulo mucho mayor a uno, el módulo de  $r$  siempre se mantenga por debajo de la unidad y cuando los valores de esta integral son pequeños se cumple  $\tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow r$ . Hay otras propuestas para relacionar a  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , o su módulo, con la reflectividad [2, 46] que pueden resultar más convenientes según sea el tipo de filtro que se desea fabricar. Incluso se han desarrollado métodos iterativos para relacionar mejor el comportamiento de la función  $\tilde{\mathcal{Q}}$  a la reflectividad [47].

La transformada inversa de (2.124) es

$$\frac{d}{d\Lambda} \left( \frac{1}{2} \ln [n \cos \theta] \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{Q}}(k_0) \exp [2ik_0\Lambda] dk_0,$$

después de integrarse con respecto a  $\Lambda$

$$\ln [n \cos \theta] = -\frac{i}{k_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{Q}}(k_0) \exp [2ik_0\Lambda] dk_0,$$

lo que lleva a la forma que debe de tener el perfil  $n(\Lambda)$  para satisfacer una función dada  $\tilde{\mathcal{Q}}(k_0)$ .

Es posible obtener una expresión más precisa para el campo que la de (2.119) si se incluyen reflexiones múltiples, pero esto lleva a sumatorias de sumatorias y luego a integrales anidadas, perdiéndose la gran sencillez de las expresiones (2.122) y (2.123)[2]. En el caso de polarización TM se substituye  $\ln [n \cos \theta] \rightarrow \ln [n/\cos \theta]$ .

## 2.3. Conclusiones

El estudio clásico de las ondas electromagnéticas y su propagación a través de medios con respuesta lineal y estratificados, sin hacer referencia explícita a la naturaleza corpuscular de la materia, se puede hacer mediante las “ecuaciones de onda” (2.5) y (2.6), que son consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. Suponiendo una fuente de ondas planas, monocromáticas, un medio inhomogéneo en una dirección (o estratificación) y alguna dirección de polarización (TE o TM), dichas ecuaciones en derivadas parciales se reducen a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, (2.10) y (2.16). Estas ecuaciones diferenciales ordinarias recuerdan a la ecuación de Helmholtz, pero dado que el medio es inhomogéneo, no son autónomas. Quizá el resultado más importante de este tratamiento son las relaciones de Fresnel que describen el comportamiento de la luz al atravesar una interfase abrupta entre dos medios homogéneos mediante los coeficientes de reflexión y transmisión. Para obtener las relaciones de Fresnel se invocan las condiciones a la frontera para los campos eléctrico y magnético. Seguir este tratamiento para varias capas homogéneas lleva a un formalismo matricial para describir la propagación de la luz. Cuando el medio inhomogéneo tiene un perfil continuo de índice de refracción, pero se encuentra acotado entre medios homogéneos y corresponde a alguno de los dos casos aproximados en que la longitud de onda es muy grande o muy pequeña comparada con la distancia a lo largo de la cual varía el índice de refracción, se le puede sacar provecho al

formalismo matricial. Si el medio inhomogéneo no está limitado y/o la variación del índice de refracción ocurre a lo largo de longitudes comparables a  $\lambda$  el método de las matrices ya no resulta conveniente. Hay algunos perfiles  $n(z)$  para los que la ecuación (2.10) tiene solución analítica sin recurrir a aproximaciones. Estas soluciones pueden ser útiles para investigar lo que ocurre con la reflexión y transmisión de la luz en el caso “intermedio”, cuando no se puede considerar que la longitud de onda es muy pequeña o muy grande comparada con la variación de  $n(z)$ . Un tratamiento alternativo, pero aproximado, es modelar un medio con perfil  $n(z)$  continuo como una secuencia de interfaces de Fresnel muy cercanas y luego despreciar tanto las reflexiones múltiples como el intercambio de energía debido a la transmisión. El resultado se resume a una transformada de Fourier, lo cual permite relacionar la reflectividad con el perfil  $n(z)$  de forma muy simple, aunque el modelo no siempre califica como una buena aproximación.

## Capítulo 3

# Representación de amplitud y fase

En este capítulo se plantea la propuesta principal de esta tesis que es emplear la representación de amplitud y fase para describir la propagación de luz en medios estratificados, en los que el índice de refracción varía desde forma abrupta hasta muy gradual. Se muestra como llevar a cabo esta descripción con base en las soluciones a la ecuación de la amplitud. Se resuelve la ecuación de la amplitud primero para un medio homogéneo y luego para una interfase gradual de tangente hiperbólica. Interpretando las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud se elaboran gráficas de reflectividad como función de el grosor de la interfase. Se incluyen los casos de incidencia normal y oblicua.

### 3.1. Planteamiento teórico

Si se aplica un cambio de variable del tipo  $F = \frac{U}{\sqrt{\mu/\mu_0}}$  o  $\mathcal{F} = \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}}$  (transformación de Louiville) a las ecuaciones (2.10) y (2.16), el coeficiente del término de primer orden se anula y quedan

$$F'' + \left( \frac{\mu''}{2\mu} - \frac{3\mu'^2}{4\mu^2} + k_0^2 (n^2 - \sigma^2) \right) F = 0, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F}'' + \left( \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon} - \frac{3\varepsilon'^2}{4\varepsilon^2} + k_0^2 (n^2 - \sigma^2) \right) \mathcal{F} = 0. \quad (3.2)$$

Tomando en cuenta que las  $\sigma$ 's y  $k_0$  son constantes mientras que  $\mu$  y  $\varepsilon$  pueden depender de  $z$ , se nota que las ecuaciones (3.1) y (3.2) tienen un gran parecido con la ecuación de Shrödinger independiente del tiempo. La propuesta de este trabajo es separar la amplitud (módulo del número complejo) y la fase en estas ecuaciones, para luego resolverlas numéricamente, proponiendo condiciones a la frontera adecuadas y con significado físico claro. Este procedimiento es frecuente en Mecánica Cuántica, pero prácticamente no se usa en electrodinámica clásica.

Quizá sea interesante mencionar aquí algunos detalles históricos e inquietudes relacionadas. En 1904 bajo la tutela de Max Planck, Moritz Schlick presentó su tesis de grado doctoral “*Über die Reflexion des Lichts in einer inhomogenen Schicht*” [11] (Sobre la reflexión de la luz en un estrato no-homogéneo). Esto fue apenas cuatro años después de la presentación de famoso postulado de Planck ante la Sociedad Alemana de Física. Planck se había interesado en el problema de la emisión del cuerpo negro desde 1894 gracias a que lo habían comisionado las compañías eléctricas para hacer más eficiente el funcionamiento de las bombillas, en realidad su pasión era la Termodinámica. Planck era muy conservador y la idea de que los estados de energía de un sistema fueran discretos no le agradaba, sin embargo en 1900 como “un acto de desesperación” presentó su postulado. ¿Cuánto tiempo batalló contra si mismo antes de presentar públicamente sus resultados? ¿Porqué le propuso a Schlick trabajar en el tema de la reflexión de la luz

en medios estratificados? ¿Es una casualidad el parecido de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (1926) con las ecuaciones de los campos electromagnéticos en medios estratificados?

La tesis de Schlick presenta las bases para tratar el problema teórico de la reflexión de la luz en medios estratificados. Sin embargo, Schlick prefirió dedicarse a la filosofía después de concluir su tesis doctoral, fue promotor del Empirismo Lógico y fundador del famoso Círculo de Viena.

Regresando a la propuesta del presente trabajo, las ecuaciones (3.1) y (3.2) se pueden reescribir de forma más simple introduciendo lo siguiente

$$\kappa_{\text{TE}}^2(z) = \frac{\mu''}{2\mu} - \frac{3\mu'^2}{4\mu^2} + k_0^2(n^2 - \sigma^2), \quad (3.3)$$

$$\kappa_{\text{TM}}^2(z) = \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon} - \frac{3\varepsilon'^2}{4\varepsilon^2} + k_0^2(n^2 - \sigma^2), \quad (3.4)$$

así  $F'' + \kappa_{\text{TE}}^2 F = 0$  y  $\mathcal{F}'' + \kappa_{\text{TM}}^2 \mathcal{F} = 0$ . Las cantidades  $F(z)$  y  $\mathcal{F}(z)$  son funciones complejas de  $z$ , y se les puede escribir en términos de su módulo y su fase

$$F(z) = A(z)e^{iq(z)} \quad y \quad \mathcal{F}(z) = \mathcal{A}(z)e^{i\mathfrak{q}(z)} \quad (3.5)$$

siendo  $A$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $q$  y  $\mathfrak{q}$  funciones reales de  $z$ . Introduciendo esta propuesta en (2.10) y (2.16) obtenemos para polarización TE

$$A'' + 2iA'q' + iAq'' - Aq'^2 + \kappa_{\text{TE}}^2 A = 0. \quad (3.6)$$

### 3.1.1. Ecuación de la amplitud para medios transparentes

Si la cantidad  $\kappa$  es real, es decir si el medio es transparente y no se absorbe luz, se puede separar fácilmente a (3.6) en parte real y parte imaginaria

$$A'' - Aq'^2 = -\kappa_{\text{TE}}^2 A, \quad (3.7)$$

$$2A'q' + Aq'' = 0. \quad (3.8)$$

Si se multiplica (3.8) por  $A$  se obtiene  $2AA'q' + A^2q'' = 0$  que se puede integrar  $\frac{dA^2q'}{dz} = 0$ , por lo que se concluye

$$A^2q' = Q, \quad (3.9)$$

donde  $Q$  es una constante real y un invariante <sup>1</sup>. Introduciendo (3.9) en (3.7) queda

$$A'' - \frac{Q^2}{A^3} = -\kappa_{\text{TE}}^2 A. \quad (3.10)$$

La expresión anterior es una ecuación de Ermakov-Pinney [48–51]. Si se propone (estrictamente para  $Q \neq 0$ ) el siguiente cambio de variable  $A_d = A\sqrt{\frac{k_0}{Q}}$ , se obtiene

$$A_d'' - \frac{k_0^2}{A_d^3} = -\kappa_{\text{TE}}^2 A_d, \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup>No se debe confundir el símbolo  $Q$ , que representa un invariante en este trabajo, con el factor de calidad de una cavidad resonante

que es una forma aún más simple de la ecuación (3.10). Similarmente, en el caso de polarización TM se tiene

$$A'' - \frac{Q^2}{A^3} = -\kappa_{\text{TM}}^2 A, \quad (3.12)$$

y

$$A_d'' - \frac{k_0^2}{A_d^3} = -\kappa_{\text{TM}}^2 A_d. \quad (3.13)$$

Se destaca nuevamente que, por construcción, las amplitudes  $A(z)$  o  $\mathcal{A}(z)$  son funciones reales, ya que representan el módulo de  $F$  o  $\mathcal{F}$ . Las fases  $q(z)$  o  $\mathfrak{q}(z)$  son también un funciones reales. En lo que resta de este trabajo se prefiere que las amplitudes sean números reales no negativos y que la información del signo, o mejor dicho de la dirección en el plano complejo, quede atribuida a la fase.

### 3.1.2. Ecuación de la amplitud para medios que absorben

La absorción de luz en un medio semitransparente se puede modelar con un índice de refracción complejo [28, Cap. 7]. Aún cuando  $\kappa_{\text{TE}}$  o  $\kappa_{\text{TM}}$  sean complejas y tanto la parte real como la imaginaria sean no nulas, también es posible desacoplar a  $A$  y a  $q$ , aunque pierde sencillez el resultado. La parte real de (3.6) queda

$$A'' - Aq'^2 = -\text{Re}(\kappa_{\text{TE}}^2)A$$

y la parte imaginaria

$$2A'q' + Aq'' = -\text{Im}(\kappa_{\text{TE}}^2)A.$$

Multiplicando por  $A$  la parte imaginaria e integrando se obtiene

$$A^2q' = Q - \int \text{Im}(\kappa_{\text{TE}}^2)A^2 dz. \quad (3.14)$$

Introduciendo lo anterior en la parte real queda

$$A'' - \frac{(Q - \int \text{Im}(\kappa_{\text{TE}}^2)A^2 dz)^2}{A^3} = -\text{Re}(\kappa_{\text{TE}}^2)A. \quad (3.15)$$

Se tiene ahora una ecuación integro-diferencial para  $A$ . La ecuación anterior es válida para polarización TM si se substituye a  $A$  por  $\mathcal{A}$  y a  $\kappa_{\text{TE}}$  por  $\kappa_{\text{TM}}$ .

### 3.1.3. Ecuación de la amplitud en función del camino óptico

Puede ser conveniente expresar la ecuación de la amplitud, (3.10) o (3.12), también en función de  $\Lambda = \int \frac{\kappa}{k_0} dz$  en vez de  $z$ . Como  $d\Lambda = \frac{\kappa}{k_0} dz$ , se puede escribir

$$\frac{d^2 A}{dz^2} = \left(\frac{\kappa_{\text{TE}}}{k_0}\right)^2 \frac{d^2 A}{d\Lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\left(\frac{\kappa_{\text{TE}}}{k_0}\right)}{d\Lambda}\right)^2 \left(\frac{dA}{d\Lambda}\right).$$

En términos de la nueva variable  $\Lambda$  la ecuación (3.10) queda

$$\left(\frac{\kappa_{\text{TE}}}{k_0}\right)^2 \frac{d^2 A}{d\Lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\left(\frac{\kappa_{\text{TE}}}{k_0}\right)}{d\Lambda}\right)^2 \left(\frac{dA}{d\Lambda}\right) - \frac{Q^2}{A^3} = -\kappa_{\text{TE}}^2 A.$$

Multiplicando lo anterior por  $\left(\frac{k_0}{\kappa_{TE}}\right)^2$

$$A'' + \frac{\kappa'_{TE}}{\kappa_{TE}} A' - \frac{k_0^2 Q^2}{\kappa_{TE}^2 A^3} = -k_0^2 A, \quad (3.16)$$

donde la prima ahora indica derivación con respecto a  $\Lambda$ . Para la polarización TM se hacen las sustituciones  $A \leftrightarrow \mathcal{A}$  y  $\kappa_{TE} \leftrightarrow \kappa_{TM}$ .

### 3.1.4. Campos eléctrico y magnético en términos de las amplitudes $A$ y $\mathcal{A}$

#### 3.1.4.1. Polarización TE

En el caso de la polarización TE, los campos eléctrico, magnético y el vector de Poynting de las ecuaciones (2.9), (2.11) y (2.12) se pueden escribir en términos de la solución a la ecuación de la amplitud (3.10) de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = uA(z) \sqrt{\frac{\mu(z)}{\mu_0}} e^{i(q(z)+k_0\sigma y-\omega t)} \hat{\mathbf{i}}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{u}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} e^{i(q+k_0\sigma y-\omega t)} \left[ \left( \frac{i}{2} \frac{\mu'}{\mu} A + iA' - \frac{Q}{A} \right) \hat{\mathbf{j}} + Ak_0\sigma \hat{\mathbf{k}} \right], \quad (3.18)$$

$$\mathbf{S} = \frac{u^2}{2\omega\mu_0} \left\{ (1 + \cos[2(q+k_0\sigma y-\omega t)]) (A^2 k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + Q \hat{\mathbf{k}}) + \sin[2(q+k_0\sigma y-\omega t)] \left( AA' + \frac{\mu'}{2\mu} A^2 \right) \hat{\mathbf{k}} \right\}, \quad (3.19)$$

donde se se hace uso de la constante  $u$  que tiene las unidades del campo eléctrico.

#### 3.1.4.2. Polarización TM

En el caso de la polarización TM, los campos magnético, eléctrico y el vector de Poynting de las ecuaciones (2.15), (2.18) y (2.19) también se pueden escribir en términos de la solución a la ecuación de la amplitud (3.12)

$$\mathbf{B} = v\mathcal{A}(z) \mu(z) \sqrt{\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0}} e^{i(q(z)+k_0\sigma y-\omega t)} \hat{\mathbf{i}}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{E} = \frac{v}{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}} e^{i(q+k_0\sigma y-\omega t)} \left[ \left( \frac{i}{2} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \mathcal{A} + i\mathcal{A}' - \frac{Q}{\mathcal{A}} \right) \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{A}k_0\sigma \hat{\mathbf{k}} \right], \quad (3.21)$$

$$\mathbf{S} = \frac{v^2}{2\omega\varepsilon_0} \left\{ (1 + \cos[2(q+k_0\sigma y-\omega t)]) (\mathcal{A}^2 k_0 \sigma \hat{\mathbf{j}} + Q \hat{\mathbf{k}}) + \sin[2(q+k_0\sigma y-\omega t)] \left( \mathcal{A}\mathcal{A}' + \frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} \mathcal{A}^2 \right) \hat{\mathbf{k}} \right\}. \quad (3.22)$$

donde se se hace uso de la constante  $v$  que tiene las unidades del campo magnético  $\mathbf{H}$ .

#### 3.1.4.3. Escalamiento de las soluciones

Las ecuaciones diferenciales para los campos (2.10) y (2.16) son lineales, lo que permite decir que un múltiplo de una solución particular también resuelve la ecuación correspondiente. Debido a que la ecuación de la amplitud es un ecuación diferencial no lineal, un múltiplo de una solución particular no necesariamente resuelve esa ecuación, lo que pareciera limitar la generalidad de los resultados. Sin embargo,

es fácil encontrar una regla válida para escalar soluciones de la ecuación de la amplitud, aunque no sea la misma que se emplea para ecuaciones lineales:

Si se multiplica una solución  $A(z)$  de la ecuación de la amplitud, ya sea (3.10) o (3.12), por una constante real  $C$ , el resultado  $A_{\text{nueva}}(z) = CA(z)$  será solución de la ecuación

$$A''_{\text{nueva}} - \frac{C^4 Q^2}{A_{\text{nueva}}^3} = -\kappa_{\text{TE}}^2 A_{\text{nueva}},$$

pero  $Q_{\text{nueva}} = C^4 Q^2$  es una constante también, por lo que se puede volver a escribir una ecuación de Ermakov para la amplitud

$$A''_{\text{nueva}} - \frac{Q_{\text{nueva}}}{A_{\text{nueva}}^3} = -\kappa_{\text{TE}}^2 A_{\text{nueva}},$$

que difiere muy poco de la original.

Una vez construidas las soluciones a las ecuaciones del campo, con base en alguna solución a la ecuación de la amplitud, éstas vuelven a ser escalables de la manera tradicional dado que ellas sí resuelven ecuaciones diferenciales lineales.

## 3.2. Soluciones a la ecuación de la amplitud y su interpretación

### 3.2.1. Medio homogéneo y transparente

Para un medio homogéneo y transparente, cuando  $n$  y  $\mu$  son constantes reales, las soluciones  $U(z)$  y  $\mathcal{U}(z)$  quedan descritas por la ecuación (2.20), donde  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{A}_r$  son constantes que pueden ser complejas. Si

$$\tilde{A}_i = A_+ \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} e^{i\delta_+} \quad \text{y} \quad \tilde{A}_r = A_- \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} e^{i\delta_-} \quad (3.23)$$

de modo que  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $\delta_+$  y  $\delta_-$  sean reales, se puede escribir

$$\frac{U}{\sqrt{\mu/\mu_0}} = F = A_+ e^{i(k_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z + \delta_+)} + A_- e^{-i(k_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z - \delta_-)}. \quad (3.24)$$

De manera similar, si

$$\tilde{A}_i = A_+ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} e^{i\delta_+} \quad \text{y} \quad \tilde{A}_r = A_- \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} e^{i\delta_-} \quad (3.25)$$

se tiene

$$\frac{\mathcal{U}}{\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}} = \mathcal{F} = A_+ e^{i(k_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z + \delta_+)} + A_- e^{-i(k_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z - \delta_-)}.$$

Según la ecuación (2.22), que define a una función de reflexión, cuando el campo eléctrico está en la dirección  $x$ , el cociente de los campos eléctricos reflejado e incidente se puede escribir en términos de  $U(z)$  y su derivada  $\frac{dU}{dz}$ , pero también se puede en términos de  $A(z)$  y su derivada  $\frac{dA}{dz}$ . Se sustituye  $U(z) = \sqrt{\mu/\mu_0} A(z) e^{iq(z)}$ , en (2.22) y usando la condición del invariante (3.9)

$$r_{\perp}(z) = \frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sigma^2} A^2 k_0 - Q + iAA'}{\sqrt{n^2 - \sigma^2} A^2 k_0 + Q - iAA'}. \quad (3.26)$$

Equivalentemente, para el cociente de los campos magnéticos, cuando son éstos los que están en la dirección  $x$ ,

$$r_{\parallel}(z) = \frac{\tilde{A}_r e^{-ik_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z}}{\tilde{A}_i e^{ik_0 \sqrt{n^2 - \sigma^2} z}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sigma^2} A^2 k_0 - Q + iAA'}{\sqrt{n^2 - \sigma^2} A^2 k_0 + Q - iAA'} \quad (3.27)$$

Se exponen a continuación las soluciones a la ecuación de la amplitud (3.10) para los tres casos  $\kappa^2 > 0$ ,  $\kappa^2 < 0$  y  $\kappa^2 = 0$ . Estos resultados son igualmente válidos para la ecuación (3.12).

**3.2.1.1. Caso  $\kappa^2 > 0$** 

En este caso hay propagación de ondas planas y  $\sqrt{n^2 - \sigma^2} = n \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que hace la dirección de propagación con el eje  $z$ . El módulo de  $F$ , como se presenta en la ecuación (3.24), es

$$A(z) = \sqrt{A_+^2 + A_-^2 + 2A_+A_- \cos(2k_0nz \cos \theta + \Delta\delta)}. \quad (3.28)$$

Lo anterior debe ser solución de la ecuación (3.10). Introduciendo a (3.28) en dicha ecuación se confirma que es solución y se obtiene la siguiente condición

$$Q = (A_+^2 - A_-^2) k_0 n \cos \theta. \quad (3.29)$$

En la figura 3.1 se grafican varios casos para (3.28). Si solo hay una onda plana propagándose en una dirección,  $A(z) = A_1$  es una línea recta. Conforme mayor es la amplitud  $A_2$  de la onda que se propaga en dirección opuesta y ésta sea más parecida a  $A_1$ , las oscilaciones de la gráfica aumentan de tamaño. Cuando  $A_i = A_r$  las oscilaciones alcanzan el máximo tamaño. Las oscilaciones se deben a que los dos trenes de onda que se propagan en una dirección y la otra van cambiando de fase relativa, donde hay un máximo están en fase y donde hay un mínimo están en contrafase. También se puede introducir (3.28) en la ecuación (3.11) y la relación que se obtiene es

$$\frac{1}{n \cos \theta} = A_+^2 - A_-^2. \quad (3.30)$$

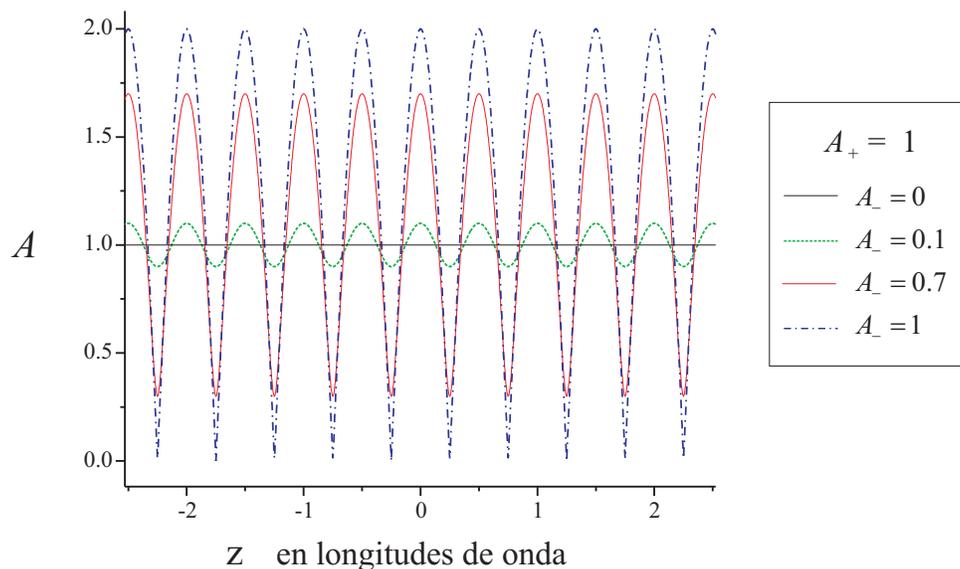


Figura 3.1: Soluciones la ecuación (3.10) suponiendo un medio homogéneo y transparente. Se toma  $n \cos \theta = 1$ ,  $\Delta\delta = 0$ ,  $A_+ = 1$  y  $k_0 = 2\pi$ . Se introducen varios valores de  $A_-$ .

El cociente  $\frac{A_-}{A_+}$  corresponde al módulo de la razón expresada en la ecuación (3.26) y está relacionado con tamaño de las oscilaciones, se puede escribir  $\frac{A_-}{A_+}$  en términos de  $A$  y  $A'$ , pero si  $Q \neq 0$  también en términos de  $A_d$  y  $A'_d$

$$\left(\frac{A_-}{A_+}\right)^2 = \frac{\left(Ak_0n \cos \theta - \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2}{\left(Ak_0n \cos \theta + \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2} = \frac{k_0^2 \left(A_d n \cos \theta - \frac{1}{A_d}\right)^2 + A_d'^2}{k_0^2 \left(A_d n \cos \theta + \frac{1}{A_d}\right)^2 + A_d'^2}. \quad (3.31)$$

Analizando a la ecuación (3.28) se concluye que se puede expresar esa misma razón  $\frac{A_-}{A_+}$  con los máximos y mínimos de  $A$

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}, \quad (3.32)$$

dado que  $A_{\max} = A_+ + A_-$  y que  $A_{\min} = A_+ - A_-$ . Las expresiones (3.32) y (3.29) permiten escribir también

$$A_+ = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2} \sqrt{\frac{Q}{k_0 n A_{\max} A_{\min}}} \quad \text{y} \quad A_- = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2} \sqrt{\frac{Q}{k_0 n A_{\max} A_{\min}}}.$$

### 3.2.1.2. Caso $\kappa^2 < 0$

En este caso no hay propagación y el módulo de  $F$ , como se presenta en la ecuación (3.24), es

$$A(z) = \sqrt{A_+^2 e^{-2k_0 \sqrt{\sigma^2 - n^2} z} + A_-^2 e^{2k_0 \sqrt{\sigma^2 - n^2} z} + 2A_+ A_- \cos(\Delta\delta)}. \quad (3.33)$$

La expresión anterior también debe ser solución de la ecuación (3.10). Introduciendo a (3.33) en dicha ecuación se confirma que es solución bajo la condición de que

$$Q = 2k_0 A_+ A_- \sqrt{(\sigma^2 - n^2)} \sin(\Delta\delta). \quad (3.34)$$

Introduciendo (3.33) en la ecuación (3.11) lo que se obtiene es

$$A_+ A_- = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma^2 - n^2)} \sin(\Delta\delta)}. \quad (3.35)$$

Claramente, si alguna de las dos constantes  $A_+$  o  $A_-$  es nula el valor de  $Q$  también se debe anular y consecuentemente no se puede emplear (3.11) ni (3.35).

### 3.2.1.3. Caso $\kappa^2 = 0$

En el caso  $\kappa^2 = 0$  la solución general de la ecuación (3.1) es una función lineal, no una constante, hecho que no queda incluido en la expresión (3.24). Para este caso

$$F(z) = A_+ z e^{i\delta_+} + A_- e^{i\delta_-},$$

cuya amplitud es

$$A = \sqrt{A_+^2 z^2 + A_-^2 + 2A_+ A_- z \cos(\Delta\delta)}, \quad (3.36)$$

expresión que debe ser solución de la ecuación (3.10), considerando  $\kappa = 0$ . Introduciendo a (3.36) en dicha ecuación se confirma que es solución bajo la condición

$$Q = 2A_+ A_- \sin(\Delta\delta).$$

Introduciendo (3.33) en la ecuación (3.11) lo que se obtiene es

$$A_+ A_- = \frac{k_0}{2 \sin(\Delta\delta)}.$$



$\theta = 0$ ,

$$A_d(z \gg 0) = \frac{1}{\sqrt{n_t}} \quad \text{y} \quad A'_d(z \gg 0) = 0. \quad (3.38)$$

Éstas son las condiciones a la frontera que se introducen para obtener la solución numérica de (3.11) con el método de diferencias finitas. En la figura 3.3 se muestra la gráfica de la solución para  $D = \frac{1}{2}\lambda$ .

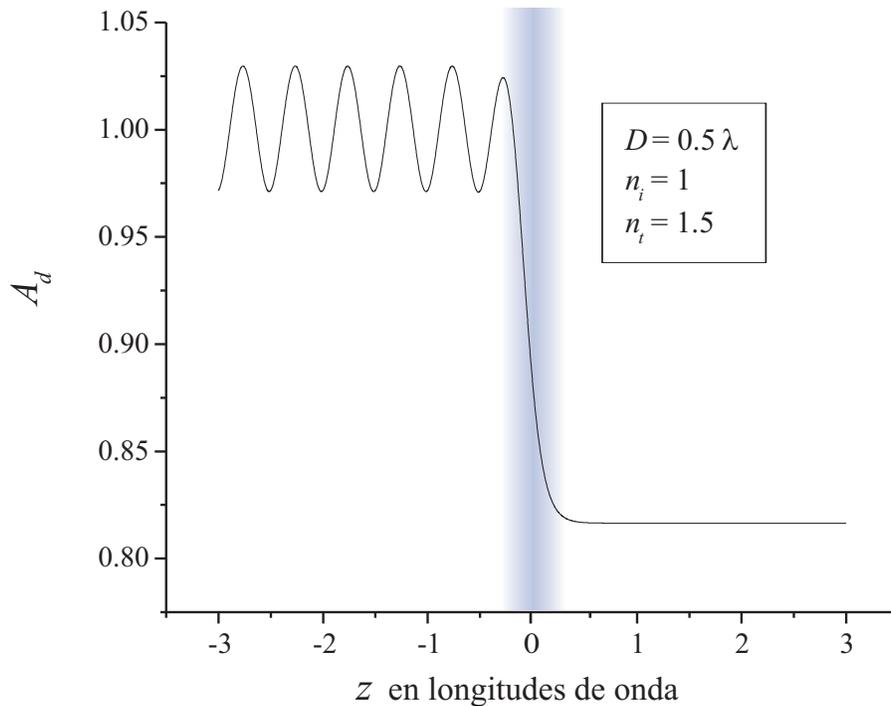


Figura 3.3: Suponiendo incidencia normal, introduciendo el perfil  $n(z)$  de la ecuación (3.37) con  $D = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$  y las condiciones a la frontera (3.38) en la ecuación diferencial (3.11), se obtiene la solución numérica que se muestra. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa.

Como es de esperarse, a la derecha de la interfase  $A_d$  es prácticamente constante. A la izquierda de la interfase, donde el medio ya es prácticamente homogéneo se observan oscilaciones, se puede calcular el cociente (3.32) con cualquier par de valores extremos, este cociente corresponde a la raíz cuadrada de la reflectividad

$$R = \left( \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \right)^2.$$

El resultado numérico de la reflectividad para  $D = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $n_i = 1$  y  $n_t = 1.5$  es  $R = (8.5570 \pm 0.0001) \times 10^{-2} \%$ , que es una reflectividad muy baja comparada con la que predicen las formulas de Fresnel para una interfase abrupta aire-vidrio (4%), pero es debido que se trata de una variación muy gradual del índice de refracción. Se puede repetir el procedimiento anterior para otros valores de  $D$ , que simulen interfases más abruptas o más graduales, por ejemplo  $D = 0.01\lambda$  y  $1\lambda$ , las soluciones se muestran en la figura 3.4. La liga de la referencia [53] lleva a un programa de la colección *Wolfram Demonstrations Project* que se basa en la información de esta sección para calcular la reflectividad de una interfase “suave”, en incidencia normal. La reflectividad para el caso  $D = 0.01\lambda$  es  $R = 3.9912 \%$  y para  $D = 1\lambda$  es  $R = 1.6560 \times 10^{-4} \%$ . Debe recordarse que aunque la función  $A(z)$  presente oscilaciones en  $z$ , sigue tratándose de una “amplitud”, pues si se fija un observador en el plano correspondiente una coordenada  $z_1$ , el valor  $A(z_1)$  es el máximo de las

oscilaciones del campo en función del tiempo en ese sitio. Además debe notarse que no toda variación de  $A(z)$  es consecuencia de la interferencia de ondas propagándose en sentido contrario, ya que también la amplitud es proporcional al inverso de la raíz cuadrada del índice de refracción.

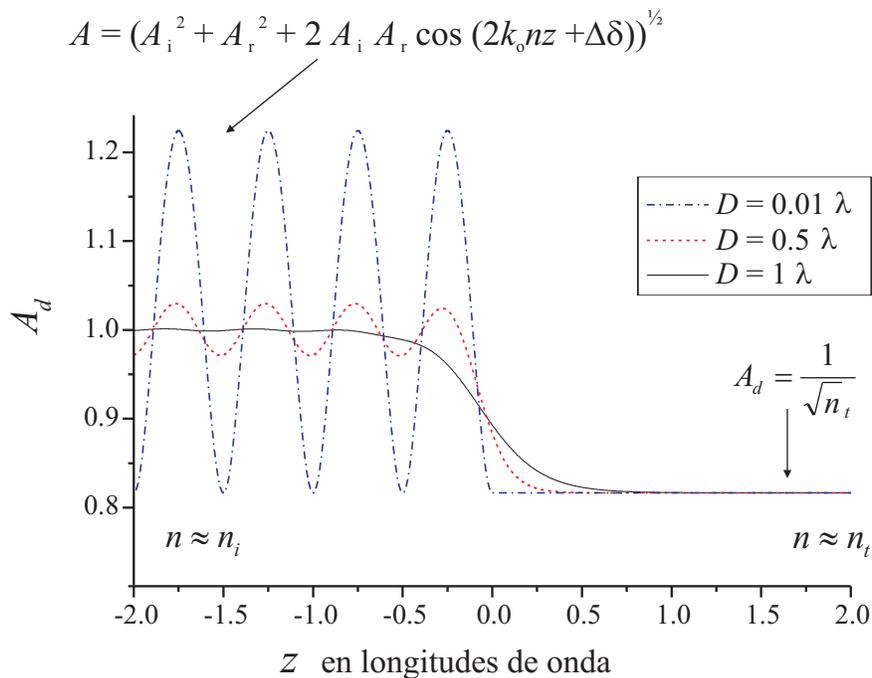


Figura 3.4: En incidencia normal  $\theta_i = \theta_t = 0$ , con  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$ , introduciendo el perfil de tangente hiperbólica de la ecuación (3.37) y las condiciones a la frontera (3.38) en la ecuación (3.11) se obtienen las soluciones numéricas que se muestran para tres valores de  $D$ .

Iterando el procedimiento 200 veces más para distintos valores de  $D$  es posible hacer una gráfica de reflectividad en función del parámetro  $D$ , ésta se muestra en la figura 3.5. Cuando  $D \rightarrow 0$  se recupera el resultado de Fresnel ( $R \rightarrow 4\%$  cuando  $n_t = 1.5$ ). Intercambiar  $n_i \leftrightarrow n_t$  produce gráficas  $R(D)$  idénticas. Aunque con la representación de amplitud y fase se está prefiriendo resolver una ecuación diferencial ordinaria no lineal (3.11) a una lineal (2.10), lograr los resultados anteriores con el método de las matrices sería mucho más laborioso[54]. Aplicando (3.30) a ambos lados de la interfase, ya lejos de ella, dónde el medio es aproximadamente homogéneo, se tiene

$$\frac{1}{n_i} = A_i^2 - A_r^2 \quad y \quad \frac{1}{n_t} = A_t^2, \quad (3.39)$$

donde  $A_i$  y  $A_r$  son las amplitudes  $A_+$  y  $A_-$  del lado izquierdo de la interfase ( $z \ll 0$ ), mientras que  $A_t$  corresponde a  $A_+$  del lado derecho ( $z \gg 0$ ). Combinando ambas expresiones se puede escribir

$$\frac{A_r^2}{A_i^2} + \frac{n_t}{n_i} \frac{A_t^2}{A_i^2} = 1, \quad (3.40)$$

lo cual representa la conservación de la energía  $R + T = 1$ .

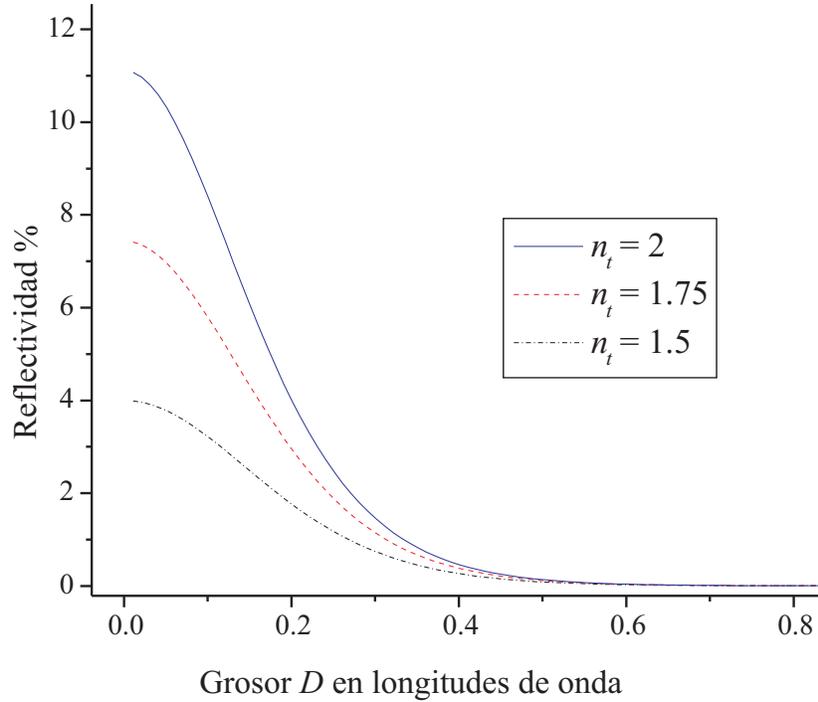


Figura 3.5: Reflectividad en función de  $D$  para el perfil de tangente hiperbólica 3.37. En incidencia normal, con  $n_i = 1$  y  $n_t = 1.5, 1.75, 2$ .

### 3.2.3. Una interfase en incidencia oblicua TE, medios transparentes y no magnéticos

#### 3.2.3.1. Caso $n_t > n_i$

Nuevamente se considera el perfil de la ecuación (3.37) pero ahora en incidencia oblicua y polarización TE. Se trata el caso particular  $n_t > n_i$ . Con este perfil se resuelve la ecuación diferencial para la amplitud (3.11), sujeta a las siguientes condiciones a la frontera

$$A_d(z \gg 0) = \frac{1}{\sqrt{(n_t^2 - \sigma^2)}} \quad \text{y} \quad A'_d(z \gg 0) = 0, \quad (3.41)$$

lo que garantiza solo luz transmitida en la dirección positiva del eje  $z$ , más allá de la región inhomogénea. Se encuentra la reflectividad con (3.31), evaluada en la región  $z \ll 0$ , donde el medio es prácticamente homogéneo. La gráfica de una solución, como ejemplo, se muestra en la figura 3.6. Se muestran en la figura 3.7 las gráficas de la reflectividad, obtenida como función de el ángulo de incidencia, para varios espesores  $D$  de la interfase. Se ve como, para un determinado valor del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , la reflectividad disminuye al aumentar el espesor  $D$ . Sin embargo al aproximarse  $\theta_i$  a  $90^\circ$  la reflectividad converge a 100% para todo valor de  $D$ .

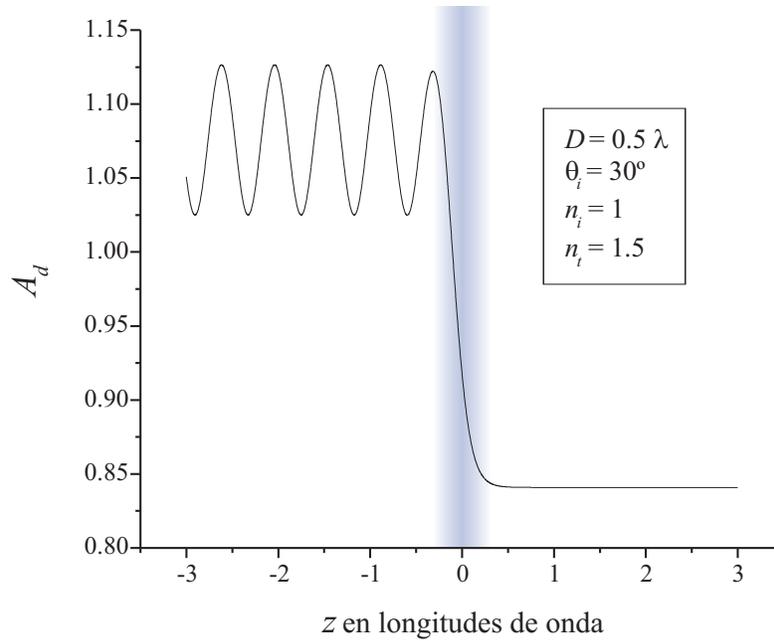


Figura 3.6: Con un ángulo de incidencia  $\theta_i = 30^\circ$ , polarización TE, introduciendo el perfil (3.37) con  $D = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$  y las condiciones a la frontera (3.41) en la ecuación (3.11), se obtiene la solución numérica  $A(z)$  que se muestra, ésta corresponde a la amplitud del campo eléctrico. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. La reflectividad en este ejemplo es de  $R = 0.22\%$ .

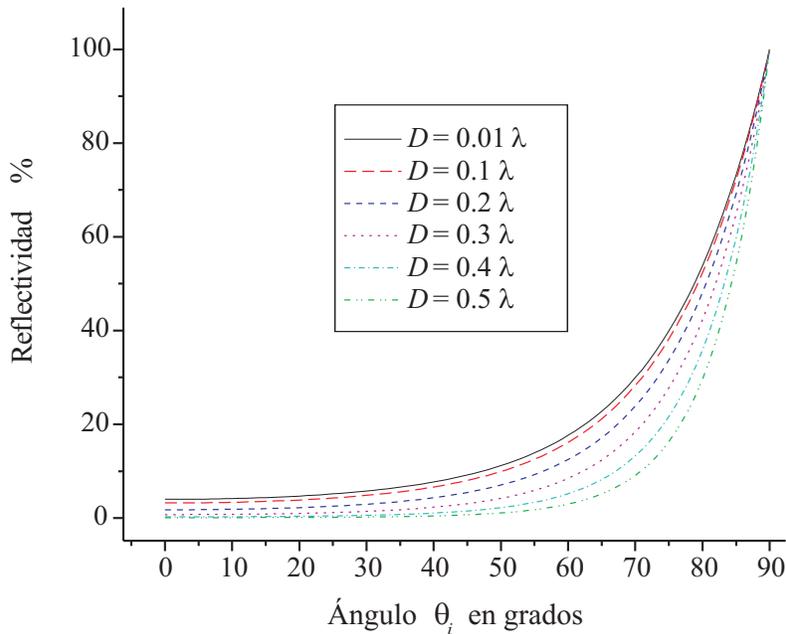


Figura 3.7: Reflectividad como función de  $\theta_i$  para varios valores del espesor  $D$  en el perfil (3.37), polarización TE, los índices de refracción en los extremos son  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$ .

### 3.2.3.2. Caso $n_i > n_t$

Con el mismo tipo de perfil (3.37) y considerando la polarización TE ahora se supone  $n_i > n_t$ . Bajo esta condición se da la reflexión total interna para ángulos de incidencia mayores o iguales al crítico, el ángulo crítico es aquel para el que  $\kappa_{\text{TE}}(z \gg 0) = 0$ , es decir  $\theta_c = \arcsin \frac{n_t}{n_i}$  ( $\theta_c = 41.8^\circ$  si  $n_i = 1.5$  y  $n_t = 1$ ). Para ángulos menores al crítico,  $\theta_i < \theta_c$ , se sigue el mismo procedimiento que en 3.2.3.1, se considera el perfil de la ecuación (3.37) en incidencia oblicua y polarización TE. Con este perfil se resuelve la ecuación diferencial para la amplitud (3.11), sujeta a las condiciones a la frontera expresadas en (3.41). Se encuentra la reflectividad con (3.31), evaluada en la región  $z \ll 0$ . Se muestra una solución  $A_d(z)$ , como ejemplo, en la figura 3.8(a).

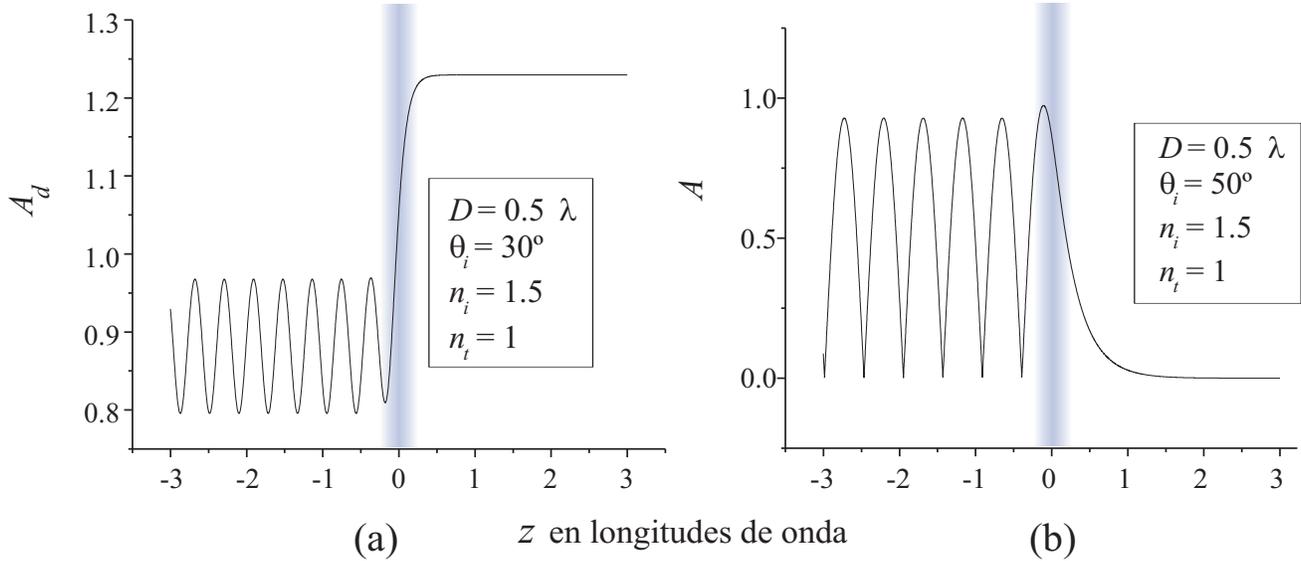


Figura 3.8: (a) Con un ángulo de incidencia  $\theta_i = 30^\circ$ , introduciendo el perfil (3.37) con  $D = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$  y las condiciones a la frontera (3.41) en la ecuación (3.11), se obtiene la solución numérica  $A(z)$  que se muestra, ésta corresponde a la amplitud del campo eléctrico. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. La reflectividad en este ejemplo es de  $\sim 1\%$ . (b) Introduciendo un ángulo de incidencia  $\theta_i = 50^\circ$ , con el perfil (3.37),  $D = \frac{1}{2}\lambda$ ,  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$  y las condiciones a la frontera (3.42), donde  $A_i = 1$ , en la ecuación (3.10), con  $Q = 0$ , se obtiene la solución numérica que se muestra. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. La reflectividad en este ejemplo es  $R = 100\%$ .

Se muestran en la figura 3.9 las gráficas de la reflectividad como función de el ángulo de incidencia, para varios espesores  $D$  de la interfase. Aquí también se ve como, para un determinado valor del ángulo de incidencia  $\theta_i$ , la reflectividad disminuye al aumentar el espesor  $D$ . Sin embargo al aproximarse  $\theta_i$  al ángulo crítico, la reflectividad converge a 100% para todo valor de  $D$ . Para ángulos mayores al crítico,  $\theta_i > \theta_c$ , se trata del caso  $\kappa^2 < 0$  3.2.1.2 y la solución debe ser de la forma (3.33). Si se quiere suponer que no hay fuentes de luz del lado derecho, en  $z \ll 0$ , la solución debe ser una exponencial negativa, es decir se debe tomar  $A_- = 0$ , por lo tanto se toman como condiciones a la frontera

$$A(z \gg 0) = A_t e^{-k_0 \sqrt{\sigma^2 - n^2} z} \quad \text{y} \quad A'(z \gg 0) = -k_0 \sqrt{\sigma^2 - n^2} A_t e^{-k_0 \sqrt{\sigma^2 - n^2} z}. \quad (3.42)$$

Lo anterior, según (3.34), exige que el valor del invariante  $Q$  sea nulo. La ecuación diferencial a resolver es entonces (3.10) con  $Q = 0$ , ya que no se puede emplear (3.11). Por otro lado, como  $Q = 0$ , se obtendrá

$R = 100\%$  al evaluar (3.31) del lado izquierdo,  $z \ll 0$ , previéndose reflexión total interna. Se muestra una solución de este tipo en la figura 3.8(b).

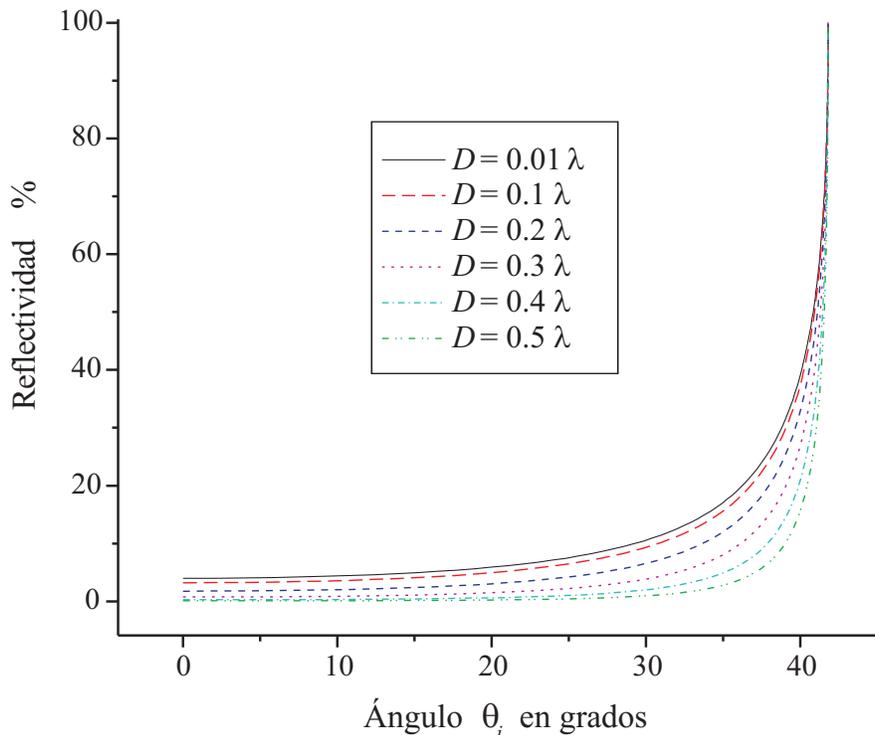


Figura 3.9: Reflectividad como función de  $\theta_i$  para varios valores del espesor  $D$  en el perfil (3.37), polarización TE, los índices de refracción en los extremos son  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$ . El ángulo crítico es  $\theta_c = 41.8^\circ$ .

Una observación interesante relacionada con los resultados de la figura 3.9 es que, al hacerse más gradual la interfase, la gráfica  $R(\theta_i)$  se acerca más a la de un escalón. A pesar de que, para un rango amplio de ángulos de incidencia, la reflectividad de una interfase disminuye con el espesor de ésta, en el ángulo crítico y valores mayores la reflectividad es muy cercana al 100%. Por más gradual que sea la interfase, la reflexión total interna no se puede evitar al llegar a  $\theta_c$ . Éste hecho puede aportar una explicación más amplia al conocido fenómeno de los espejismos en que, a pesar de que la diferencia de índice de refracción entre las capas de aire es muy pequeña y la interfase es gradual, la reflectividad puede llegar a ser muy grande si el ángulo de la vista es lo suficientemente rasante.

### 3.2.4. Una interfase en incidencia oblicua TM, medios transparentes y no magnéticos

El caso de la polarización TM es muy interesante, aunque se trate de medios no magnéticos. Debido a que  $\kappa_{\text{TM}}^2(z)$ , cuya definición está escrita en (3.4), es una expresión que contiene términos en las derivadas de la permitividad, ya no será una función tan simple como  $\kappa_{\text{TE}}^2(z)$ , de hecho ya no es necesariamente monotónica.

#### 3.2.4.1. Caso $n_t > n_i$

Se considera el perfil de la ecuación (3.37) pero ahora en incidencia oblicua y polarización TM. Se trata el caso particular  $n_t > n_i$ . Con este perfil se resuelve la ecuación diferencial para la amplitud (3.13) sujeta

a las siguientes condiciones a la frontera

$$\mathcal{A}_d(z \gg 0) = \frac{1}{\sqrt{(n_t^2 - \sigma^2)}} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}'_d(z \gg 0) = 0, \quad (3.43)$$

lo que garantiza solo luz transmitida en la dirección positiva del eje  $z$ , más allá de la región inhomogénea. Se encuentra la reflectividad con (3.31), evaluada en la región  $z \ll 0$ , donde el medio es prácticamente homogéneo. La gráfica de una solución, como ejemplo, se presenta en la figura 3.10(a). Se muestra una gráfica de  $\kappa_{\text{TM}}^2(z)$  en la figura 3.10(b), para hacer notar que no presenta una dependencia en  $z$  tan simple como la de  $\kappa_{\text{TE}}^2(z)$ , tiene una variación grande cerca de  $z = 0$ , una especie de “latigazo” que es más pronunciado entre más abrupta es la interfase.

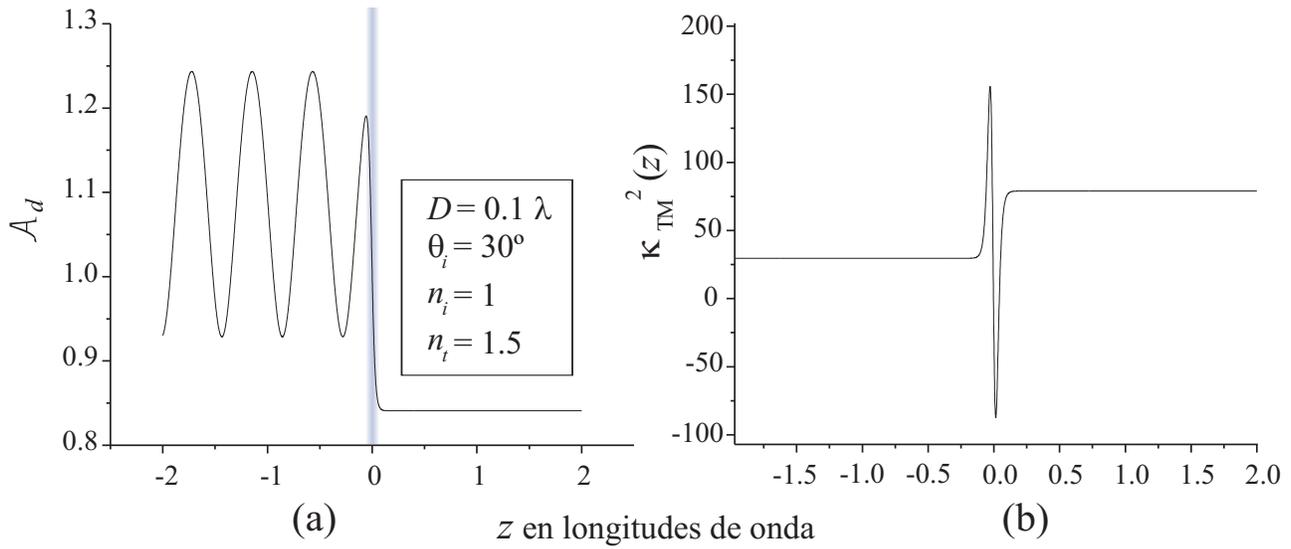


Figura 3.10: (a) Con un ángulo de incidencia  $\theta_i = 30^\circ$ , introduciendo el perfil (3.37) con  $D = \frac{1}{10}\lambda$ ,  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$  y las condiciones a la frontera (3.43) en la ecuación (3.13), se obtiene la solución numérica  $\mathcal{A}(z)$  que se muestra, ésta corresponde a la amplitud del campo magnético. La reflectividad en este ejemplo es  $\sim 2\%$ . El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. (b) La gráfica de  $\kappa_{\text{TM}}^2(z)$  para este mismo caso, no es una función monótona ni muy gradual, aunque  $n(z)$  si lo sea.

Se exponen en las figuras 3.11 (a) y (b) las gráficas de la reflectividad como función de el ángulo de incidencia, incluyendo varios espesores  $D$  de la interfase. El ángulo de Brewster  $\theta_B$  es aquel para el que la reflectividad se anula cuando la interfase es abrupta. Para ángulos menores a  $\theta_B$  la reflectividad disminuye al aumentar el espesor  $D$ , lo cual es de esperarse. Sin embargo al acercarse a dicho ángulo, las gráficas se entrecruzan. En la vecindad de  $\theta_B$  se presenta un mínimo local de la reflectividad evidente en las gráficas  $D = 0.01, 0.1$  y  $0.2\lambda$ . De hecho, si la interfase es estrictamente abrupta, el mínimo local coincide con  $\theta_B$  y la reflectividad para ese ángulo se anula por completo. Al aumentar  $D$ , este mínimo se suaviza y se corre hacia ángulos menores dejando una función aparentemente monótona. En la tabla 3.1 se listan los mínimos locales de reflexión. Más allá del ángulo  $\theta_B$ , al aproximarse  $\theta_i$  a  $90^\circ$  la reflectividad converge a  $100\%$  para todo valor de  $D$ .

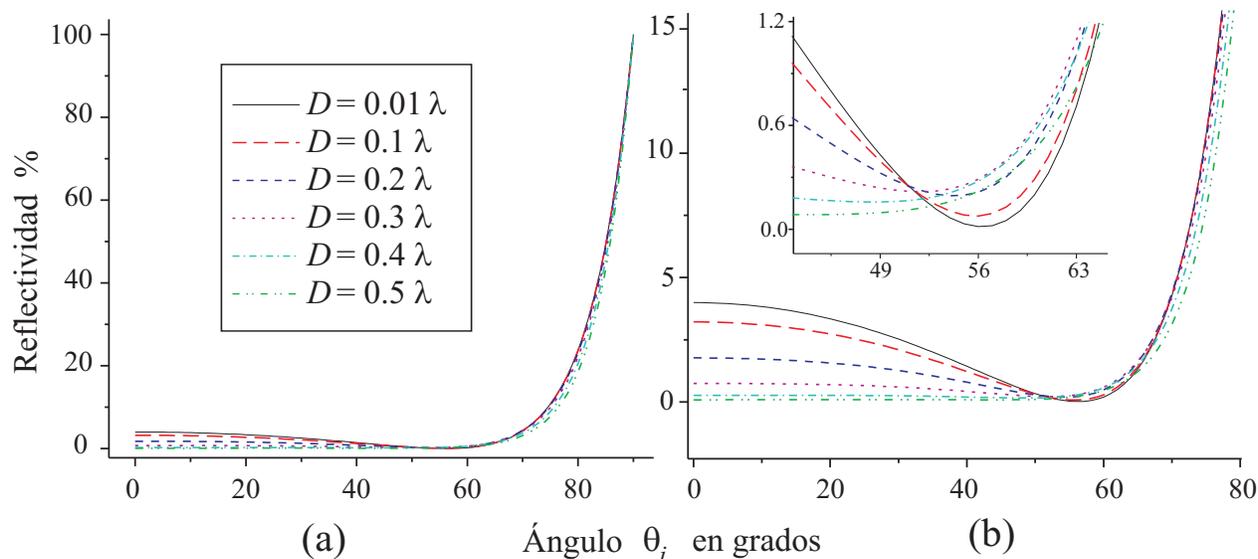


Figura 3.11: Reflectividad como función de  $\theta_i$  para varios valores del espesor  $D$  en el perfil (3.37), polarización TM, los índices de refracción en los extremos son  $n_i = 1$ ,  $n_t = 1.5$ . El ángulo de Brewster es  $\theta_B = 56.3^\circ$ , para este valor del ángulo la reflectividad se anula cuando la interfase es abrupta. (a) Una vista completa y (b) un par de acercamientos a  $\theta_B$ .

$D(\lambda)$	$\theta_{\min}$	$R(\%)$ mínima
0.01	$56.23^\circ$	0.02
0.1	$55.73^\circ$	0.08
0.2	$54.27^\circ$	0.19
0.3	$51.81^\circ$	0.22
0.4	$48.46^\circ$	0.16
0.5	$27.60^\circ$	0.08

Cuadro 3.1: Mínimos locales de reflexión.

### 3.2.4.2. Caso $n_i > n_t$

Con el perfil (3.37) y considerando la polarización TM ahora se supone  $n_i > n_t$ . Bajo esta condición se da la reflexión total interna para ángulos de incidencia mayores o iguales al crítico. El ángulo crítico es aquel para el que  $\kappa_{\text{TM}}(z \gg 0) = 0$ , que coincide con el ángulo crítico en el caso de la polarización TE, dado que cuando  $z \gg 0$  el medio es prácticamente homogéneo y por lo tanto  $\kappa_{\text{TM}}(z \gg 0) = \kappa_{\text{TE}}(z \gg 0)$ . Para ángulos menores al crítico,  $\theta_i < \theta_c$ , se considera el perfil de la ecuación (3.37) en incidencia oblicua, polarización TM y se resuelve la ecuación diferencial para la amplitud (3.13), sujeta a las condiciones a la frontera expresadas en (3.43). Se encuentra la reflectividad con (3.31), evaluada en la región  $z \ll 0$ . Se muestra una solución  $\mathcal{A}_d(z)$ , como ejemplo, en la figura 3.12(a). Se presentan en las figuras 3.9 (a) y (b) las gráficas de la reflectividad como función de el ángulo de incidencia, para varios espesores  $D$  de la interfase. Se ve un comportamiento muy similar al de la figura 3.11, pero el ángulo de Brewster es menor y la reflectividad tiende al 100% en el ángulo crítico. En la tabla 3.2 se listan los mínimos locales de reflexión, sorprendentemente los valores de la reflectividad para estos mínimos coinciden con los de la tabla 3.1.

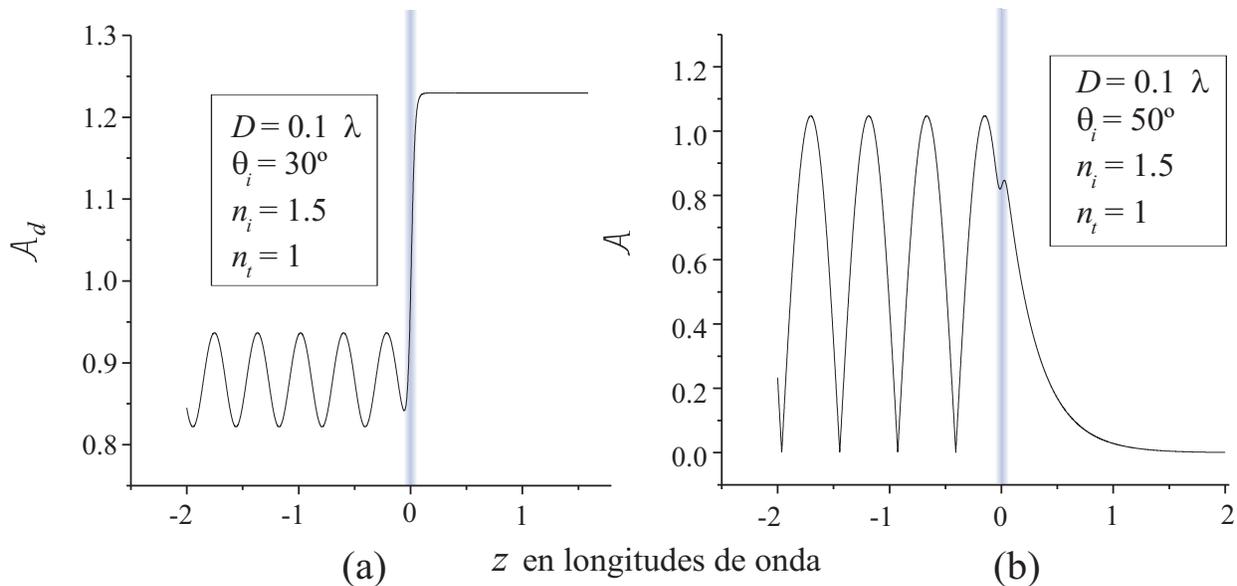


Figura 3.12: (a) Con un ángulo de incidencia  $\theta_i = 30^\circ$ , introduciendo el perfil (3.37) con  $D = \frac{1}{10}\lambda$ ,  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$  y las condiciones a la frontera (3.43) en la ecuación (3.13), se obtiene la solución numérica  $\mathcal{A}(z)$  que se muestra, ésta corresponde a la amplitud del campo magnético. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. La reflectividad en este ejemplo es de  $\sim 0.4\%$ . (b) Introduciendo un ángulo de incidencia  $\theta_i = 50^\circ$ , con el perfil (3.37),  $D = \frac{1}{10}\lambda$ ,  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$  y las condiciones a la frontera (3.42), donde  $A_i = 1$ , en la ecuación (3.12), con  $Q = 0$ , se obtiene la solución numérica  $\mathcal{A}(z)$  que se muestra, ésta corresponde a la amplitud del campo magnético. El sombreado representa la región donde la variación del índice de refracción es significativa. La reflectividad en este ejemplo es  $R = 100\%$ .

Para ángulos mayores al crítico,  $\theta_i > \theta_c$ , es decir cuando  $\kappa_{\text{TM}}^2(z \gg 0) < 0$  3.2.1.2, como en el caso de reflexión total interna con polarización TE, la solución debe ser de la forma (3.33) y las condiciones a la frontera como las de la expresión (3.42). La ecuación diferencial a resolver es (3.10), con  $Q = 0$ , ya que no se puede emplear (3.11) y la reflectividad es  $R = 100\%$ . Se muestra una solución de este tipo en la figura 3.12(b).

$D(\lambda)$	$\theta_{\text{min}}$	$R(\%)$ mínima
0.01	$33.72^\circ$	0.02
0.1	$33.40^\circ$	0.08
0.2	$32.72^\circ$	0.19
0.3	$31.57^\circ$	0.22
0.4	$29.97^\circ$	0.16
0.5	$27.27^\circ$	0.08

Cuadro 3.2: Mínimos locales de reflexión.

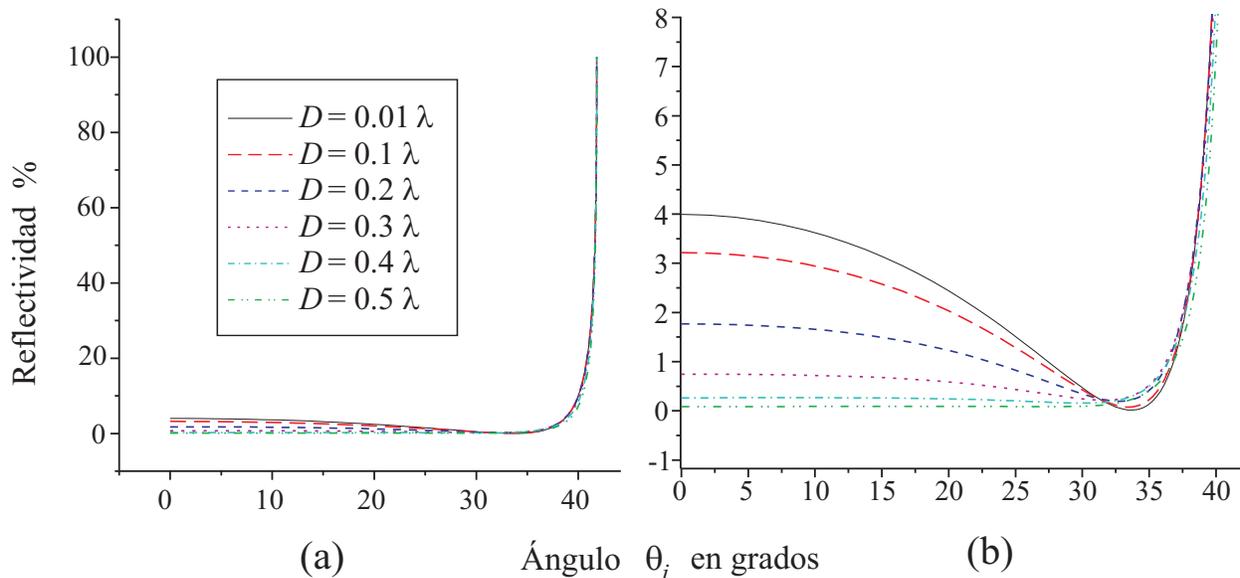


Figura 3.13: Reflectividad como función de  $\theta_i$  para varios valores del espesor  $D$  en el perfil (3.37), polarización TM, los índices de refracción en los extremos son  $n_i = 1.5$ ,  $n_t = 1$ . El ángulo crítico es  $\theta_c = 41.8^\circ$  y el de Brewster  $\theta_B = 33.7^\circ$ . Cerca de  $\theta_B$  se presenta un mínimo local de la reflectividad en las gráficas  $D = 0.01, 0.1$  y  $0.2\lambda$ . (a) Una vista completa y (b) un acercamiento a  $\theta_B$ .

### 3.2.4.3. Algunas particularidades en el caso de polarización TM

En medios no magnéticos la solución  $A(z)$  a la ecuación (3.10), que corresponde al caso de la polarización TE, es un múltiplo de la amplitud del campo eléctrico, por lo que ésta se interpreta rápidamente. En el caso de la polarización TM,  $\mathcal{A}(z)$  que es solución de (3.12), no es necesariamente un múltiplo de la amplitud del campo magnético, la ecuación (3.20) incluye también un factor  $\sqrt{\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0}}$  que se debe tomar en cuenta. Más aún, si se quiere encontrar la amplitud del campo eléctrico en términos de  $\mathcal{A}(z)$  la relación se enreda más, como se ve en la expresión (3.21). Incluso pudiera convenir graficar las amplitudes de ambas componentes de  $\mathbf{E}$ , por separado para visualizar mejor lo que ocurre con el campo eléctrico en la región inhomogénea. Otro detalle que se quiere resaltar aquí es que, en la región donde  $\varepsilon' \neq 0$ , la divergencia del campo eléctrico en (3.21) no se anula

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon^2} e^{i(q+k_0\sigma y-\omega t)} \mathcal{A} \frac{k_0\sigma V}{\omega\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.44)$$

Aunque no haya carga externa, si la divergencia del campo eléctrico no se anula, ésta se asocia a una densidad de carga de polarización [28, Capítulo IV, pag. 153], [26, Capítulo IV, pag. 84]. Para una interfase abrupta entre  $n_i$  y  $n_t$ , representada por un plano bidimensional, como el que se supone para inferir las relaciones de Fresnel, la divergencia en la expresión (3.44) diverge, lo que representa una situación física irreal. Estudiando las soluciones de la ecuación de la amplitud (3.12) cuando se consideran interfaces no tan abruptas, se puede modelar de manera más realista la acumulación de carga de polarización en la superficie de un dieléctrico cuando incide luz con polarización TM sobre él.

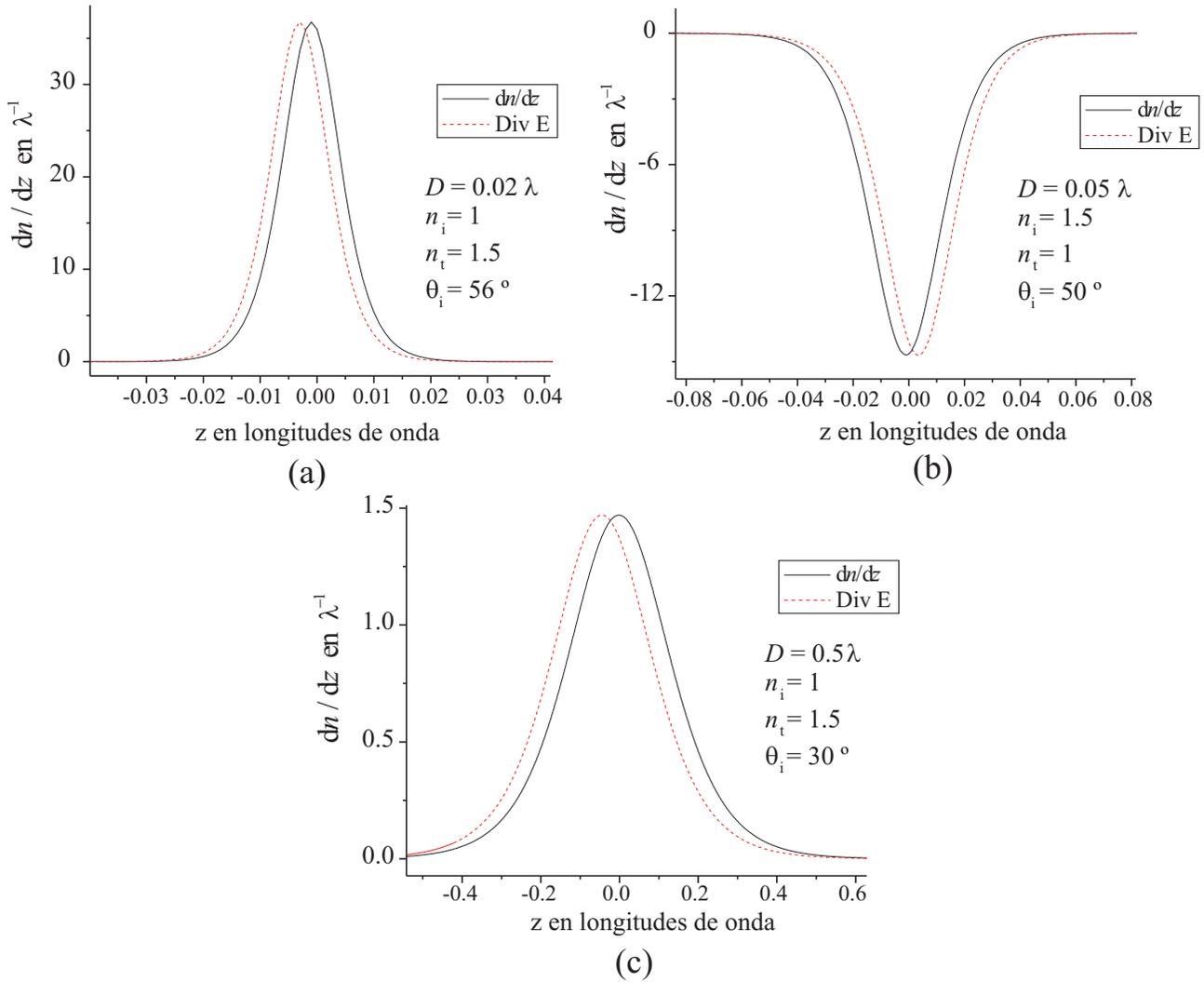


Figura 3.14: Tres ejemplos de gráficas de  $\frac{dn(z)}{dz}$  y  $\sigma \frac{dn}{dz} n^{-2} \mathcal{A}$  renormalizadas (Div E) para que su valor máximo sea el mismo que el de la derivada del índice de refracción. El perfil de índice de refracción que se emplea es de tangente hiperbólica 3.37. Se toman distintos valores de grosor  $D$ , ángulos de incidencia, reflexión interna y externa. (a) Con  $n_t > n_i$ , muy cerca del ángulo de Brewster, grosor de  $D = 0.02\lambda$ . (b) Con  $n_i > n_t$ , en reflexión total interna, grosor de  $D = 0.05\lambda$ . (c) Con  $n_t > n_i$ , ángulo de incidencia de  $30^\circ$ , grosor de  $D = 0.5\lambda$

Si se define a la densidad volumétrica de carga de polarización como

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

se puede relacionar la divergencia del campo eléctrico con dicha densidad de carga. Dado que  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ , donde  $\chi = \varepsilon - \varepsilon_0$  es la susceptibilidad dieléctrica, se puede escribir

$$\rho_p = -\nabla \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}.$$

Si además la carga externa  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$  se anula la expresión anterior queda

$$\rho_p = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$

de tal modo que la divergencia del campo eléctrico es proporcional a la carga de polarización. De esta manera, para medios no magnéticos ( $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0$ ), se puede decir que

$$\rho_p \propto \sigma \frac{dn}{dz} n^{-2} \mathcal{A} e^{i(q+k_0 \sigma y - \omega t)},$$

donde  $\mathcal{A}$ ,  $q$  y  $n$  dependen de  $z$ , mientras que  $\sigma$  es una constante que depende del ángulo incidencia de la luz  $\sigma = n_i \sin \theta_i$ . Por lo anterior se puede afirmar que la amplitud de  $\rho_p$  es proporcional a  $\sigma \frac{dn}{dz} n^{-2} \mathcal{A}$ . A continuación se calcula y luego se grafica dicha cantidad renormalizada para distintos casos: varios grosores  $D$  de la interfase, diferentes ángulos de incidencia, reflexión interna y externa. El perfil de índice de refracción que se emplea es de tangente hiperbólica 3.37. Algunos ejemplos de estos resultados se muestran las gráficas de la figura 3.14. La apariencia de las gráficas de  $\sigma \frac{dn}{dz} n^{-2} \mathcal{A}$  es muy similar en todos los casos, la función de  $z$  que domina su forma es la derivada del índice de refracción. Se presentan también las gráficas de  $\frac{dn}{dz}$  para constatarlo. La renormalización de  $\sigma \frac{dn}{dz} n^{-2} \mathcal{A}$  se hace de tal manera que el valor máximo coincida con el de  $\frac{dn}{dz}$ . En todos los casos hay un corrimiento respecto de  $\frac{dn}{dz}$  en el eje  $z$ , dicho corrimiento es siempre del orden de  $\frac{1}{10}D$  y hacia el “exterior”, es decir, la dirección hacia donde está el índice de refracción menor. La “muesca” de la gráfica de  $\mathcal{A}$  en la figura 3.12(b) (el caso de reflexión total interna) no produce ninguna estructura reconocible en el resultado para el módulo de la densidad de carga de polarización.

Si se toman en cuenta las variaciones debidas a la fase, es posible que para espesores grandes  $D > 0.25\lambda$  (medios muy graduales) se puedan apreciar fluctuaciones de la densidad de carga de polarización en la dirección  $z$ .

### 3.2.5. Coincidencias de la reflectividad TE y TM, una medida de la gradualidad

En el caso de una interfase abrupta entre dos medios transparentes, no magnéticos se presenta una situación interesante: si se comparan las expresiones (2.28) y (2.46) se puede comprobar que, en particular para  $\theta_1 = 45^\circ$  (cuando  $n_2 > n_1$ ) como ángulo de incidencia, se cumple la relación

$$r_{\parallel} = \pm r_{\perp}^2. \quad (3.45)$$

Hecho que también se cumple para  $\theta_1 = 90^\circ$  ya que el módulo de los coeficientes de reflexión es la unidad, pero ese es el caso trivial. Cuando la interfase es gradual, dicha relación ya no se cumple para el ángulo  $\theta_1 = 45^\circ$  de forma exacta, pero se puede satisfacer para otros ángulos cercanos. Medir el ángulo para el cual se cumple dicha condición puede indicar que tan gradual es la interfase aunque no se conozca con certeza el índice de refracción  $n_2$  del material. En la figura 3.15 se muestran cuatro gráficas de reflectividad en función del ángulo de incidencia en las que se destacan los ángulos para los que se cumple la condición (3.45). Inicialmente, conforme aumenta el valor de  $D$  (la “gradualidad”), el ángulo de la intersección se corre a valores mayores de  $45^\circ$ . En las gráficas en las que  $0.1\lambda \leq D \leq 0.3\lambda$  se observan dos ángulos en los que se intersectan las líneas de  $R_{\perp}^2$  y  $R_{\parallel}$ . A partir de  $D \approx 0.4\lambda$  ya no hay ángulo que cumpla la condición excepto  $\theta_1 = 90^\circ$  y la línea de  $R_{\perp}^2$  se mantiene hacia la derecha de  $R_{\parallel}$ , es decir que el cuadrado de la reflectividad TE siempre es menor que la reflectividad TM. Se destaca también que en el caso de una interfase abrupta, en la región de los ángulos rasantes  $\theta > 80^\circ$ , se cumple  $R_{\perp}^2 > R_{\parallel}$ . Sin embargo, cuando la interfase es lo suficientemente gradual ( $D \geq 0.2\lambda$ ) ocurre lo contrario.

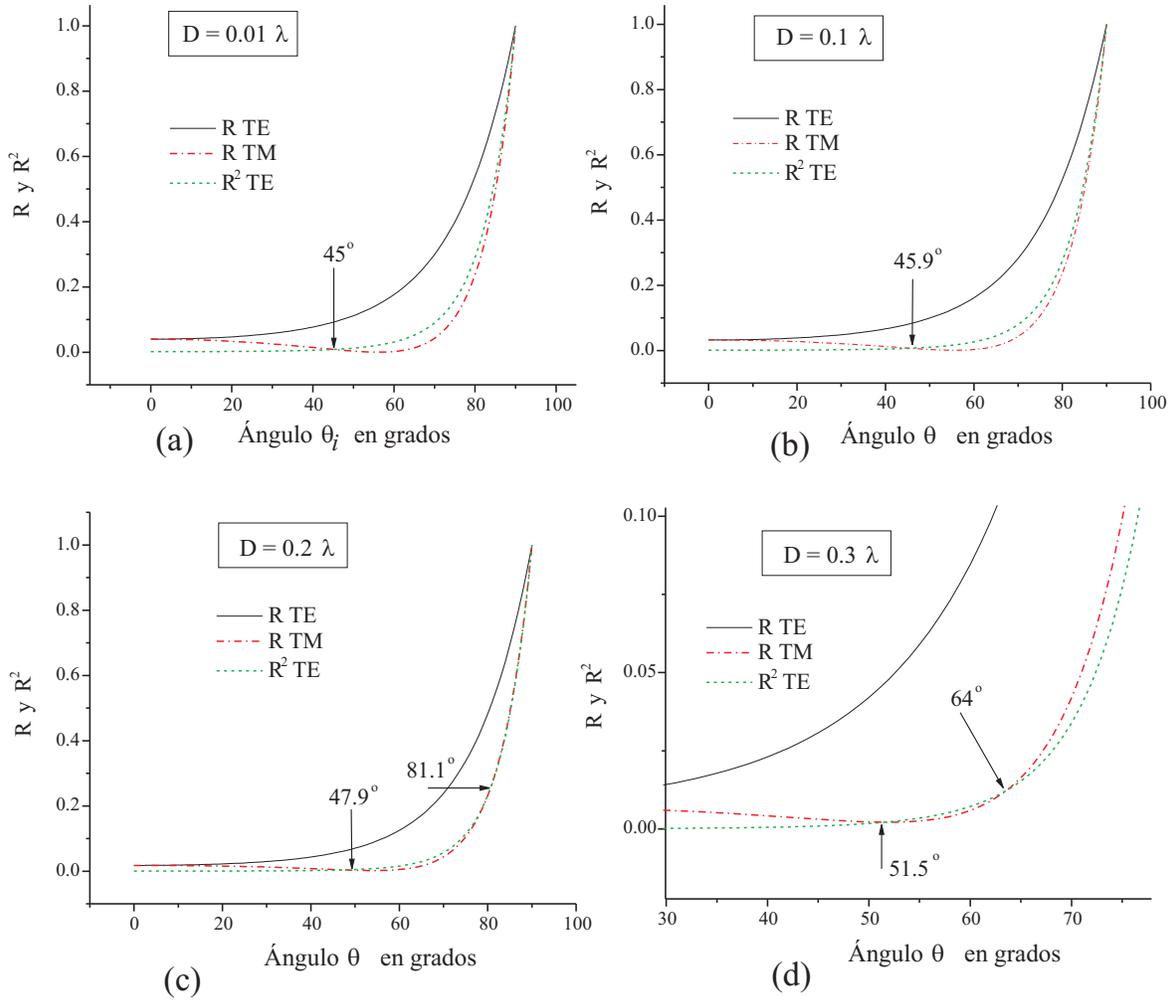


Figura 3.15: Gráficas de reflectividad en función del ángulo de incidencia en las que se destacan los ángulos para los que se cumple la condición (3.45). Cada una corresponde a un distinto grosor de la interfase: (a)  $D = 0.01\lambda$ , (b)  $D = 0.1\lambda$ , (c)  $D = 0.2\lambda$ , (d)  $D = 0.3\lambda$ .

### 3.3. Conservación de la energía y el invariante $Q$

#### 3.3.1. Propagación a ambos lados de la región inhomogénea

Nuevamente considérese un medio transparente que tenga una región inhomogénea acotada en un intervalo cercano a  $z = 0$ , de tal modo que en  $|z| \gg 0$  el medio sea, al menos aproximadamente homogéneo. Sea  $n_i$  el índice de refracción de la región a la izquierda del sector inhomogéneo,  $z \ll 0$ , y sea  $n_t$  el de la región a la derecha,  $z \gg 0$ . Considérese también luz incidente solo desde el lado izquierdo. Puede tratarse de incidencia oblicua y medios magnéticos. El índice de refracción de la región homogénea del lado derecho, debe ser tal que permita la transmisión de ondas en esa dirección, es decir  $n_t^2 - \sigma^2 > 0$ .

En el caso de polarización TE, aplicando la ecuación (3.29) a ambos lados tenemos

$$Q = (A_i^2 - A_r^2) k_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2} \quad \text{y} \quad Q = A_t^2 k_0 \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}, \quad (3.46)$$

donde  $n_i$  es el índice de refracción para  $z \ll 0$  y  $n_t$  para  $z \gg 0$ , además  $A_i$  y  $A_r$  son las amplitudes  $A_+$  y  $A_-$  del lado izquierdo de la interfase ( $z \ll 0$ ), mientras que  $A_t$  corresponde a  $A_+$  del lado derecho ( $z \gg 0$ ).

Ésto quiere decir que el invariante  $Q$  está relacionado con el flujo de energía en la dirección  $z$ . De hecho, en las ecuaciones (3.19) y (3.22), en las que se especifica al vector de Poynting en términos de la amplitud del campo,  $Q$  es proporcional a la componente  $z$  del promedio temporal ese vector. El invariante  $Q$  es entonces una medida de la irradiancia neta en la dirección  $z$ . Las expresiones (3.46) llevan a

$$1 - \frac{A_r^2}{A_i^2} = \frac{A_t^2}{A_i^2} \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}. \quad (3.47)$$

Debido a (3.23) se tiene que  $\tilde{A}_i \tilde{A}_i^* = A_i^2 \frac{\mu_i}{\mu_0}$ ,  $\tilde{A}_r \tilde{A}_r^* = A_r^2 \frac{\mu_i}{\mu_0}$  y  $\tilde{A}_t \tilde{A}_t^* = A_t^2 \frac{\mu_t}{\mu_0}$ , donde  $\mu_i$  y  $\mu_t$  son las permeabilidades magnéticas de los medios homogéneos lejos de  $z = 0$ , con lo anterior la ecuación (3.47) se puede reescribir

$$1 - \frac{\tilde{A}_r \tilde{A}_r^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = \frac{\tilde{A}_t \tilde{A}_t^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} \mu_i}{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2} \mu_t} \quad (3.48)$$

que es equivalente a (2.31). Para el caso de polarización TM, a ambos lados tenemos

$$Q = (A_i^2 - A_r^2) k_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2} \quad \text{y} \quad Q = A_t^2 k_0 \sqrt{n_t^2 - \sigma^2}. \quad (3.49)$$

Considerando a (3.25) se concluye que  $\tilde{A}_i \tilde{A}_i^* = A_i^2 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}$ ,  $\tilde{A}_r \tilde{A}_r^* = A_r^2 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}$  y  $\tilde{A}_t \tilde{A}_t^* = A_t^2 \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}$ , donde  $\varepsilon_i$  y  $\varepsilon_t$  son las permitividades de los medios homogéneos lejos de  $z = 0$ , se puede escribir

$$1 - \frac{\tilde{A}_r \tilde{A}_r^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} = \frac{\tilde{A}_t \tilde{A}_t^*}{\tilde{A}_i \tilde{A}_i^*} \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} \varepsilon_i}{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2} \varepsilon_t}, \quad (3.50)$$

que es equivalente a (2.49). El par de ecuaciones (3.48) y (3.50) llevan a  $R + T = 1$  para ambas polarizaciones, que a su vez implica la conservación de la energía.

### 3.3.2. Propagación solo a un lado de la región inhomogénea

Ahora se considera el caso en que el índice de refracción de la región homogénea del lado derecho no permite la propagación  $n_t^2 - \sigma^2 < 0$ . Para la polarización TE, aplicando la ecuación (3.29) del lado izquierdo

$$Q = (A_i^2 - A_r^2) k_0 \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}, \quad (3.51)$$

y aplicando (3.34) al otro

$$Q = 2k_0 A_{t1} A_{t2} \sqrt{(\sigma^2 - n^2)} \sin(\Delta\beta) = 0, \quad (3.52)$$

dado que  $A_{t2} = 0$ , pues siendo que solo hay luz incidente del lado izquierdo, el campo del lado derecho debe anularse cuando  $z \rightarrow \infty$  y por lo tanto el coeficiente de la exponencial negativa en (3.33) debe ser cero. Para que (3.51) y (3.52) sean consistentes se debe cumplir  $A_i^2 = A_r^2$ , lo que implica  $\tilde{A}_i \tilde{A}_i^* = \tilde{A}_r \tilde{A}_r^*$ , es decir  $R = 1$ .

Cuando  $n_t^2 - \sigma^2 = 0$ , ocurre algo muy similar. El valor de la solución  $A(z \gg 0)$  no debe crecer con  $z$  por lo que, examinando la expresión (3.36) se llega a la conclusión de que la amplitud de la onda que viaja a la derecha se debe anular. Nuevamente se debe cumplir  $A_i^2 = A_r^2$ , es decir  $R = 1$ .

### 3.4. La función de reflexión y el cuadrado de su módulo

Nuevamente considérese un medio en el que la región inhomogénea se encuentre cerca de  $z = 0$ , lejos de esa región el índice de refracción debe poder considerarse, al menos, aproximadamente constante. Del lado izquierdo,  $z < 0$ , desde donde incide la luz, el índice de refracción tiende a  $n_i$ , mientras que del lado derecho,  $z > 0$ , tiende a  $n_t$ . Con el objeto de encontrar la reflectividad de los perfiles incluidos en la sección 3.2, se empleó la expresión (3.32) que resulta muy conveniente en el caso de soluciones numéricas. Sin embargo la función de reflexión, (3.26) o (3.27), y el cuadrado de su módulo (3.31)

$$R_{\perp}(z) = \frac{\left(Ak_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2}{\left(Ak_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2} \quad \text{o} \quad R_{\parallel}(z) = \frac{\left(Ak_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} - \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2}{\left(Ak_0\sqrt{n^2 - \sigma^2} + \frac{Q}{A}\right)^2 + A'^2}, \quad (3.53)$$

resultan más interesantes desde el punto de vista teórico pues ofrecen más información. A la función  $r(z)$  representada en las ecuaciones (3.26) y (3.27) se le llama a la función de reflexión, pues evaluada en la región  $z \gg 0$  permite encontrar el módulo del coeficiente de reflexión [32]. Si se evalúa a (3.53) lejos de la región inhomogénea, del lado en que incide la luz, el cuadrado de su módulo corresponde a la reflectividad del medio. La reflectividad  $R$  puede variar entre cero y uno, dependiendo del medio estratificado que refleje la luz y el ángulo de incidencia. Considérese otra cantidad relacionada con la reflectividad, sea el caso de polarización TE o TM,  $\mathcal{G}$  y se sea su definición

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1 + R(z)}{1 - R(z)},$$

si  $R$  es nula el valor de  $\mathcal{G}$  es la unidad y si  $R = 1$ , entonces  $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ . La cantidad  $\mathcal{G}$  puede resultar útil para comparar medios estratificados de alta reflectividad. La relación entre  $R$  y  $\mathcal{G}$  es biunívoca y se puede escribir también

$$R(z) = \frac{\mathcal{G}(z) - 1}{\mathcal{G}(z) + 1}.$$

Mediante la expresión (3.53) para TE, se llega a

$$\mathcal{G}_{\perp}(z) = \frac{A^2 k_0^2 (n^2 - \sigma^2) + \frac{Q^2}{A^2} + A'^2}{2Qk_0\sqrt{n^2 - \sigma^2}}.$$

Si se propagan las ondas a lo largo de todo el eje  $z$ , es decir  $\kappa_{\text{TE}}^2 > 0$ , la función  $\mathcal{G}(z)$  también se puede expresar como el resultado de una integral, como se muestra a continuación. Se multiplica la ecuación de la amplitud (3.10) por  $A'$  y se integra de  $z_i$  a  $\infty$ , donde  $z_i \ll 0$ , de modo que  $z_i$  se encuentre del lado izquierdo y ya lejos de la región inhomogénea

$$\frac{1}{2}A'^2 \Big|_{z_i}^{\infty} + \frac{Q^2}{2A^2} \Big|_{z_i}^{\infty} = - \int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}^2 AA' dz. \quad (3.54)$$

En las regiones homogéneas la solución general a la ecuación de la amplitud (3.10) es (3.28), pero del lado derecho, en la región en la que ya no hay contra-propagación de ondas  $A_2 = 0$  y por lo tanto la solución es una constante

$$A^2(z \gg 0) = A_t^2 = \frac{Q}{k_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}$$

donde se ha tomado en cuenta a (3.29). Considerando ésto, se llevan a cabo las evaluaciones en (3.54)

$$0 - \frac{1}{2}A'^2(z_i) + \frac{Qk_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{2} - \frac{Q^2}{2A^2(z_i)} = - \int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}^2 AA' dz.$$

Ahora se integra por partes el miembro de la derecha

$$-\frac{1}{2}A'^2(z_i) + \frac{Qk_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{2} - \frac{Q^2}{2A^2(z_i)} = -\left[\frac{1}{2}\kappa_{\text{TE}}^2 A^2 \Big|_{z_i}^{\infty} - \int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz\right].$$

Dado que  $\kappa_{\text{TE}}(z \gg 0) = k_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}$  y  $\kappa_{\text{TE}}(z \ll 0) = k_0\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}$ ,

$$-\frac{1}{2}A'^2(z_i) + Qk_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} - \frac{Q^2}{2A^2(z_i)} - \frac{A^2(z_i)k_0^2(n_i^2 - \sigma^2)}{2} = \int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz.$$

Multiplicando todo por  $-\frac{1}{Qk_0\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}$

$$\frac{A'^2(z_i) + \frac{Q^2}{A^2(z_i)} + A^2(z_i)k_0^2(n_i^2 - \sigma^2) - 2Qk_0\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{2Qk_0\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} = \frac{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz}{Qk_0\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}}.$$

Pero los tres primeros términos del lado izquierdo son  $\mathcal{G}_{\perp}(z_i)$  de tal forma que

$$\mathcal{G}_{\perp}(z_i) = \frac{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz}{Qk_0\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}} + \frac{\sqrt{n_t^2 - \sigma^2}}{\sqrt{n_i^2 - \sigma^2}},$$

en consecuencia

$$R_{\perp}(z_i) = \frac{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz + Qk_0\left(\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} - \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}\right)}{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TE}}\kappa'_{\text{TE}} A^2 dz + Qk_0\left(\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} + \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}\right)}. \quad (3.55)$$

La reflectividad, para polarización TE, está relacionada entonces con la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 \kappa_{\text{TE}} \kappa'_{\text{TE}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{\mu} U U^* \kappa_{\text{TE}} \kappa'_{\text{TE}} dz$$

y de manera similar con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \mathcal{U} \mathcal{U}^* \kappa_{\text{TM}} \kappa'_{\text{TM}} dz$$

para TM, siendo la reflectividad correspondiente

$$R_{\parallel}(z_i) = \frac{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TM}} \kappa'_{\text{TM}} \mathcal{A}^2 dz + Qk_0\left(\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} - \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}\right)}{-\int_{z_i}^{\infty} \kappa_{\text{TM}} \kappa'_{\text{TM}} \mathcal{A}^2 dz + Qk_0\left(\sqrt{n_t^2 - \sigma^2} + \sqrt{n_i^2 - \sigma^2}\right)}. \quad (3.56)$$

### 3.5. Discusión y conclusiones

Resolviendo numéricamente la ecuación de la amplitud, ya sea (3.10), (3.11), (3.12) o (3.13), se puede tratar satisfactoriamente el problema de la propagación de la luz en medios inhomogéneos. Se puede manejar cualquier razón de variación para  $\kappa_{\text{TE}}$  o  $\kappa_{\text{TM}}$ , desde muy pequeña hasta muy grande, tomando como referencia la longitud de onda. Se logra abordar tanto incidencia normal como oblicua, polarización TE y TM, regiones donde la solución es propagatoria y regiones donde no lo es. Se elaboraron gráficas de reflectividad como función del ángulo de incidencia y de la “gradualidad” o grosor de la interfase. En este capítulo se ejemplificó principalmente el caso de medios transparentes y no magnéticos, pero no hay impedimento para incluir permeabilidades magnéticas variables y absorción de luz. Un resultado que destaca es que el fenómeno del ángulo crítico y la reflexión total interna persiste aunque la transición entre

los índices de refracción sea muy gradual. No sucede lo mismo para el ángulo de Brewster, que solo se presenta como tal para interfases relativamente abruptas. Algo que puede pasar inadvertido pero es un hecho importante, es que las ondas al propagarse oblicuamente a través de un medio estratificado dejan de ser estrictamente homogéneas. La dirección en la que la amplitud de la onda varía es  $z$ , sin embargo la dirección de propagación  $\theta$  está dada por la relación  $\sigma = n \sin \theta$ . El considerar medios graduales para el caso TM permite encontrar la densidad de carga de polarización en función de  $z$ , pudiéndose desechar entonces las suposiciones de densidad de carga infinitas que implicaría un tratamiento a la Fresnel. Medir el ángulo para los que se cumple la condición (3.45) puede indicar la “gradualidad” de la interfase, aunque también puede indicarla la relación entre las reflectividades TE y TM en ángulos rasantes.

Si se busca una solución numérica para el problema de los medios estratificados, resolver la ecuación de la amplitud es una mejor alternativa a emplear el método de las matrices, especialmente cuando se trata de un perfil  $n(z)$  continuo y analítico a todo lo largo del eje  $z$ . Para este caso, el método de las matrices puede resultar inconveniente pues supone que el medio está acotado por dos fronteras bien definidas con medios homogéneos. Además, en la representación de amplitud y fase sólo se requiere resolver una ecuación diferencial ordinaria, la de la amplitud, sujeta a las condiciones a la frontera específicas del caso físico en cuestión. En cambio, el método de las matrices requiere resolver la ecuación diferencial para  $U(z)$  dos veces, sujetándola a las condiciones a la frontera apropiadas para  $U_1(z)$  y  $U_2(z)$ . Esta ecuación diferencial para  $U$  es compleja, constando de sus partes real e imaginaria, si se ha de resolver mediante el método de las diferencias finitas, el algoritmo se debe aplicar por separado a ambas partes, lo que consume más recursos del sistema (CPU y disco). Después aún se requiere calcular las funciones  $V_1$  y  $V_2$ . En consecuencia, pese a que la representación de amplitud y fase implica resolver una ecuación diferencial ordinaria no lineal, se puede decir que resulta cuatro veces más eficiente que el método de las matrices para encontrar soluciones numéricas que describan la propagación de luz en medios estratificados.



Parte II

Aplicaciones

## Capítulo 4

# Distintos perfiles modelando interfases y capas delgadas

En este capítulo se prueban varios otros perfiles  $n(z)$ , además de la tangente hiperbólica del capítulo 3, que simulan interfases graduales. Se modelan también películas delgadas graduales con funciones  $n(z)$  de simetría par. Se analiza con detalle la reflexión de la luz en incidencia normal, suponiendo medios no magnéticos. El análisis se hace principalmente con base en las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud. Se comienza por escoger un perfil para el que se conoce la solución analítica de la ecuación del campo (2.93) y por lo tanto se puede inferir también una solución analítica para la ecuación de la amplitud. Lo anterior se aprovecha para hacer comparaciones entre los resultados numéricos y los analíticos. Un siguiente conjunto de perfiles se escoge tal que éstos modelen una interfase transicional, continua y monotónica, entre dos índices de refracción. Algunos perfiles son infinitamente diferenciables pero otros son definidos por partes. Se pone atención a la reflectividad como función del espesor de estas interfases. Se toma un último conjunto de perfiles que simulan capas delgadas, todos ellos infinitamente diferenciables. Las dos interfases que conforman la capa delgada pueden ser desde muy graduales hasta abruptas. Se comparan los casos de interferencia constructiva y destructiva en la reflexión. La mayor parte del contenido de la sección 4.2 se publicó en el artículo [55] y el de la la sección 4.3 en [56].

### 4.1. El perfil de Epstein resuelto con diferencias finitas

El perfil de Epstein (2.106) admite resolver analíticamente la ecuación (2.10) como se muestra en la sección 2.2.8.3. Lo anterior permite una comparación con las predicciones de la solución numérica de la ecuación de la amplitud (3.11) y calificar la exactitud de estos resultados numéricos, por lo que es un buen primer ejemplo. Este perfil es muy parecido al de tangente hiperbólica (3.37) pero  $n(z)$  no es una función simétrica respecto a un eje centrado en  $z = 0$ , en cambio si lo es  $\varepsilon(z)$ . Este perfil simula una interfase que evoluciona monotónicamente de  $n_i$  a  $n_t$ .

Para poder comparar las soluciones es conveniente normalizar a  $U_d$  de (2.108) para que su módulo sea  $\frac{1}{\sqrt{n_2}}$  en la región  $z \rightarrow \infty$ , de modo que coincida con el valor de  $A_d$  en el caso de la solución numérica a la ecuación (3.11). Sea  $U_d$  dicha solución normalizada

$$U_d = \frac{1}{\sqrt{n_2}} \left( e^{-\frac{\alpha}{D}z} + 1 \right) e^{ik_0 n_2 z} {}_2F_1 \left( b, b - c + 1; b - a + 1; -e^{-\frac{\alpha}{D}z} \right). \quad (4.1)$$

En la figura 4.1 se muestra la solución a la ecuación de la amplitud, obtenida con diferencias finitas, junto con la gráfica de  $|U_d|$ . En este ejemplo se toman los valores  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  y  $D = 0.5$ . Para  $z > -3.16$  la diferencia entre ambas gráficas es casi imperceptible. Las series hipergeométricas se evaluaron

con el programa *Mathematica* [22]. Para  $z < -3.16$  el programa fracasa y el resultado queda indeterminado, esto es debido a que la convergencia de la serie se dificulta para valores muy negativos de  $z$ , mediante la continuación analítica se puede obtener un mejor resultado para estos valores de  $z$ , pero la convergencia de la serie en  $z \sim 0$  empeora. Aunque obtener un resultado analítico riguroso puede ser muy satisfactorio y permitir un mayor entendimiento, si se necesita poner finalmente ese resultado en números o en una gráfica, éste puede resultar más engorroso que empear la solución numérica desde un principio. El mismo cálculo de series hipergeométricas puede ser más eficiente si se resuelve la ecuación diferencial con diferencias finitas que si se evalúa la serie de potencias.

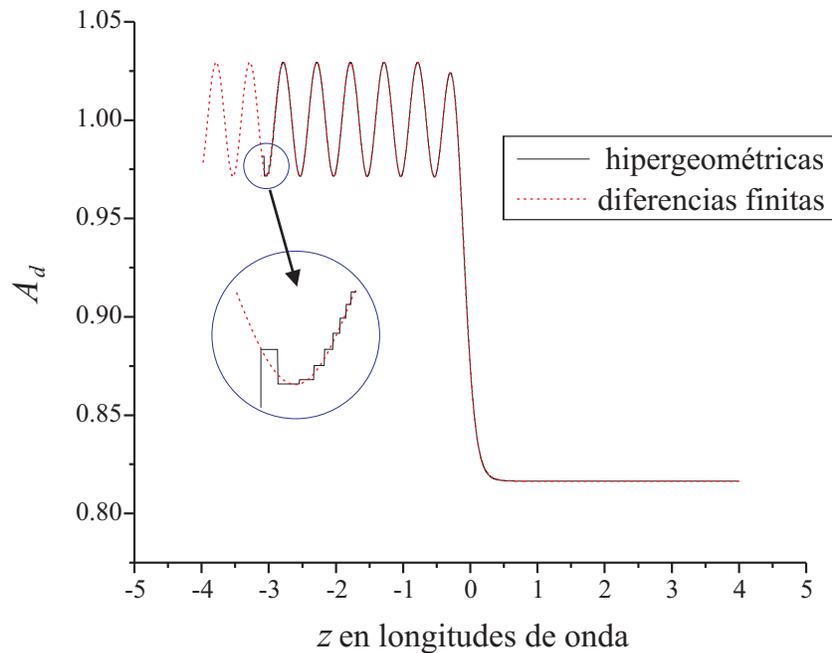


Figura 4.1: La línea punteada muestra la solución numérica a la ecuación de la amplitud (3.11) con el perfil de Epstein (2.106) para  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  y  $D = 0.5$ . La línea continua presenta a  $|U_d|$ , que es el módulo de la solución (4.1) obtenida con series hipergeométricas, para el mismo perfil y valores de  $n_1$ ,  $n_2$  y  $D$ . Las series hipergeométricas se evaluaron con *Mathematica* [22].

Para obtener gráficas de reflectividad como función del espesor  $D$  de la interfase (la distancia en la que sucede el 90% del cambio en el índice de refracción) se resuelve numéricamente la ecuación de la amplitud para 250 valores distintos del parámetro  $D$  y cuatro valores de  $n_2$ . Se encuentra la reflectividad con (3.31), evaluada en la región  $z \ll 0$ , donde el medio es prácticamente homogéneo. Estas gráficas de  $R(D)$  se muestran en la figura 4.2 y son indistinguibles de las obtenidas con la fórmula (2.112) a la escala que se presentan. Todas las gráficas de la figura recuperan el resultado de Fresnel cuando  $D \rightarrow 0$  y también, en todos los casos, la reflectividad tiende a cero monótonicamente al aumentar el valor de  $D$  en unidades de longitud de onda. En general se puede ver que para  $D > 0.5\lambda$  la reflectividad ya es muy reducida ( $< 1\%$ ). La desviación estándar de los resultados numéricos en relación a los analíticos es muy pequeña, lo cual se muestra en la tabla 4.1. Los resultados numéricos revelan una gran exactitud.

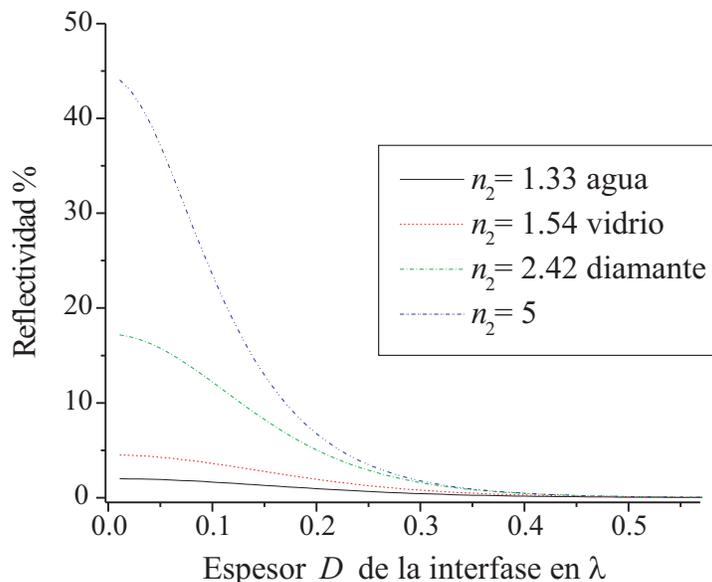


Figura 4.2: Reflectividad como función del parámetro  $D$  dado en unidades de longitud de onda. Se muestran los resultados numéricos (diferencias finitas) para cuatro elecciones distintas de  $n_2$ , en todos los casos  $n_1 = 1$ . Se escogen tres valores de  $n_2$  típicos: agua, vidrio y diamante, además de uno de mayor valor que no representa a ningún material conocido, pero puede resultar interesante como una predicción.

$n_2$	desviación estándar %
1.33	$2.72 \times 10^{-3}$
1.54	$5.91 \times 10^{-3}$
2.42	$2.00 \times 10^{-2}$
5.00	$4.24 \times 10^{-2}$

Cuadro 4.1: Desviación estándar de los resultados numéricos de la reflectividad en relación a los analíticos.

## 4.2. Comparación entre distintos perfiles de interfase: infinitamente diferenciables y definidos por partes

Se escogen distintos perfiles que modelan interfaces evolucionando monótonicamente de  $n_i$  a  $n_t$ . Estos perfiles  $n(z)$  son todos funciones simétricas en relación a un eje centrado en  $z = 0$ ,

$$n(z) - \frac{n_i + n_t}{2} = - \left[ n(-z) - \frac{n_i + n_t}{2} \right].$$

Algunos son infinitamente diferenciables y otros están definidos por partes. Con estos perfiles se resuelve numéricamente la ecuación de la amplitud (3.11) para varios valores de su espesor  $D$  y se reporta la reflectividad como función de este parámetro empleando a (3.31). Se escogen seis perfiles que se presentan en la tabla 4.2, donde  $\Delta n = n_t - n_i$  y  $n_{\text{avg}} = \frac{n_t + n_i}{2}$ . El valor del parámetro  $a$  se escoge tal que  $D$  sea la distancia en la que se da el 90% del cambio en el índice de refracción.

Nombre	$n(z)$	valor de $a$
tanh	$n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{2} \tanh\left(\frac{a_1}{D}z\right)$	$a_1 = 2.94$
arctan	$n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{\pi} \arctan\left(\frac{a_2}{D}z\right)$	$a_2 = 12.7$
erf	$n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a_3}{D}z\right)$	$a_3 = 2.33$
linear	$\begin{cases} n_i & \text{para } z \leq -\frac{D}{1.80} \\ n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{2} \left(\frac{a_4}{D}z\right) & \text{para } -\frac{D}{1.80} < z < \frac{D}{1.80} \\ n_t & \text{para } z \geq \frac{D}{1.80} \end{cases}$	$a_4 = 1.80$
cubic	$\begin{cases} n_i & \text{para } z \leq -\frac{D}{1.46} \\ n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{2} \left[-4\left(\frac{a_5}{D}z\right)^3 + 3\left(\frac{a_5}{D}z\right)\right] & \text{para } -\frac{D}{1.46} < z < \frac{D}{1.46} \\ n_t & \text{para } z \geq \frac{D}{1.46} \end{cases}$	$a_5 = 0.729$
quintic	$\begin{cases} n_i & \text{para } z \leq -\frac{D}{1.24} \\ n_{\text{avg}} + \frac{\Delta n}{2} \left[12\left(\frac{a_6}{D}z\right)^5 - 10\left(\frac{a_6}{D}z\right)^3 + \frac{15}{4}\left(\frac{a_6}{D}z\right)\right] & \text{para } -\frac{D}{1.24} < z < \frac{D}{1.24} \\ n_t & \text{para } z \geq \frac{D}{1.24} \end{cases}$	$a_6 = 0.622$

Cuadro 4.2: Seis distintos perfiles  $n(z)$  representando una interfase transicional de  $n_i$  a  $n_t$ . Los tres primeros son analíticos y los tres últimos son definidos por partes. El valor del parámetro  $a$  de la tercera columna se escoge tal que  $D$  sea la distancia en la que se da el 90% del cambio en el índice de refracción.

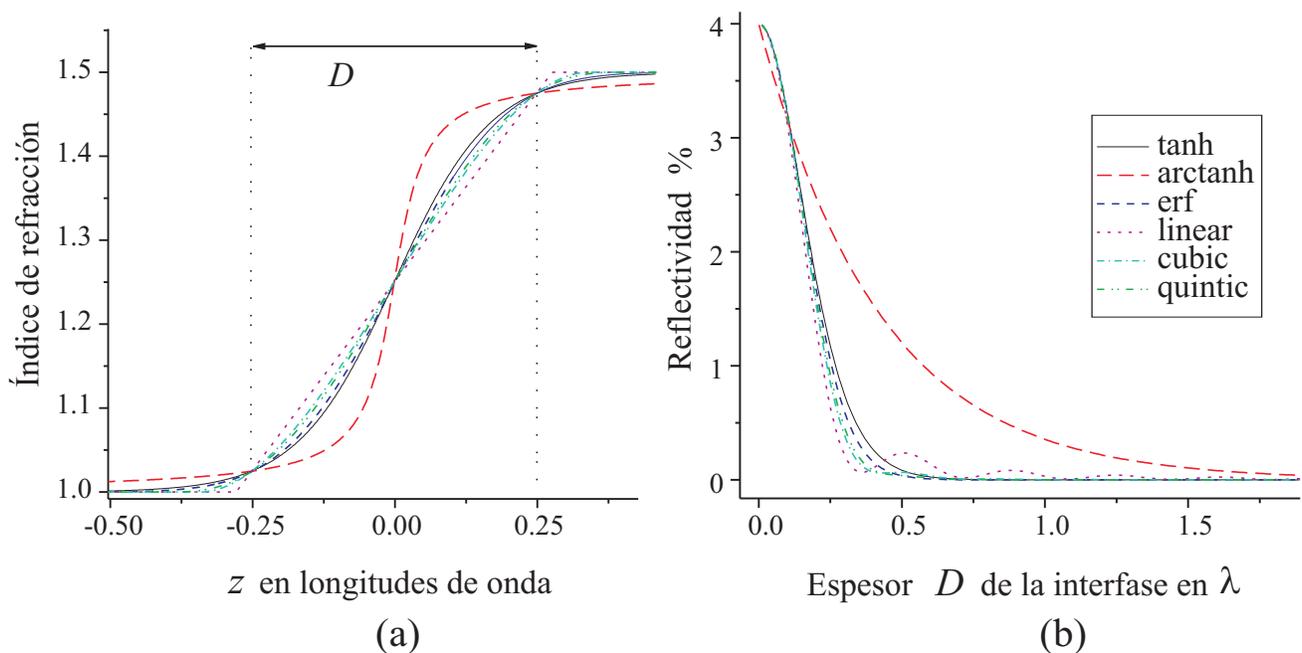


Figura 4.3: (a) Gráficas de los seis perfiles de la tabla 4.2, el parámetro  $D$  es la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción, centrada en  $z = 0$ , en unidades de longitud de onda. En esta gráfica  $D = 0.5$ . (b) La reflectividad como función de  $D$  para los seis casos, en incidencia normal.

Gráficas de estos perfiles y sus reflectividades en incidencia normal se muestran en la figura 4.3. En la figura 4.3(a) se puede ver que el parámetro  $D$  es siempre la distancia en la que se da el 90% del cambio en el índice de refracción, centrada en  $z = 0$ , aunque para los perfiles definidos por partes se puedan precisar fronteras de manera más concreta. Conviene más que el criterio siempre sea el mismo. La reflectividad como función de  $D$ , medida en longitudes de onda, en general disminuye, como se puede ver en la figura 4.3(b). No obstante, en el caso de “arctan” la disminución es mucho más paulatina, esto es debido a que la pendiente máxima de la función  $n(z)$  es mucho mayor que en los otros casos, para los mismos valores de  $D$ . En la figura 4.4 se muestran dos ampliaciones de las gráficas  $R(D)$ , se distinguen características sorprendentes para los casos de perfiles definidos por partes, las funciones  $R(D)$  no son monotónicas estrictamente. Para espesores grandes  $D \gtrsim 0.4$  se observan oscilaciones, como las que mostraría una película delgada con interfaces abruptas *à la Fresnel*, esas oscilaciones son de mayor tamaño entre menor sea el orden de la derivada discontinua de  $n(z)$  en el plano de unión. Aunque no hay discontinuidad en el índice de refracción, las derivadas discontinuas de éste actúan como planos de reflexión.

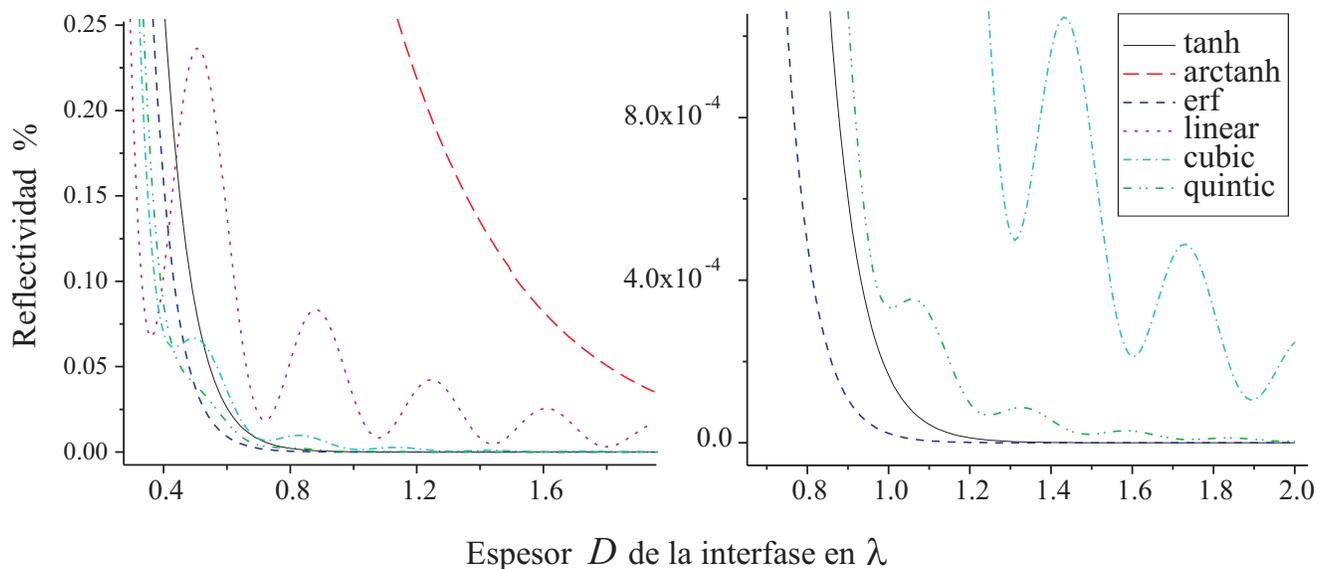


Figura 4.4: Ampliaciones de las gráficas de la figura 4.2(b), se observan oscilaciones en la reflectividad de los perfiles definidos por partes.

En la figura 4.5 se muestran las ubicaciones de los máximos y mínimos distinguibles de la reflectividad de los perfiles definidos por partes, en términos de la distancia óptica entre los planos de unión. Los perfiles cuya derivada discontinua (la de menor orden) es impar, muestran un comportamiento parecido al de una película delgada de índice de refracción intermedio entre el del ambiente y el sustrato. Mientras que el comportamiento de los perfiles cuya derivada discontinua es par, se parece al de una película delgada cuyo índice de refracción es mayor que ambos, el del ambiente y el sustrato. Esta diferencia de comportamiento se debe al cambio de fase ante la reflexión. En el caso en que la película es de índice intermedio, ambas superficies reflejantes producen el mismo cambio de fase a la luz reflejada:  $\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2 = \pi$ . Cuando la película es de índice mayor al ambiente y al sustrato, el cambio de fase en la luz reflejada es distinto en cada superficie  $\Delta\delta_1 = \pi$  y  $\Delta\delta_2 = 0$ . La discusión sobre el cambio de fase, cuando la reflexión no se da sobre un plano de discontinuidad en el índice de refracción sino en sus derivadas  $d^m n(z)/dz^m$  se retoma de manera detallada en el capítulo 5 de esta tesis.

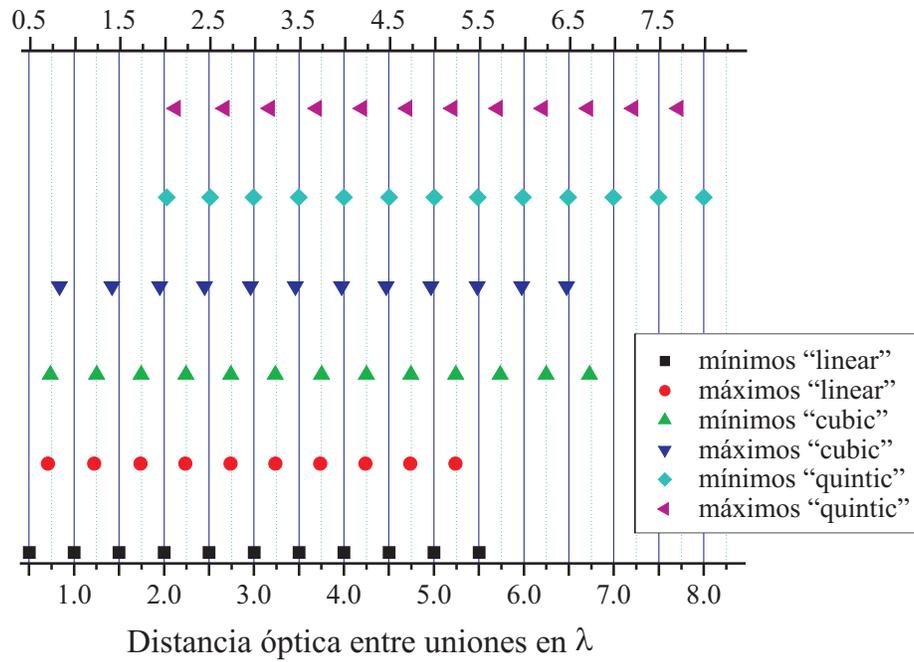


Figura 4.5: Las ubicaciones de los máximos y mínimos distinguibles de la reflectividad de los perfiles definidos por partes, en términos de la distancia óptica entre los planos de unión.

### 4.3. Perfiles de capa delgada, de abruptos a graduales

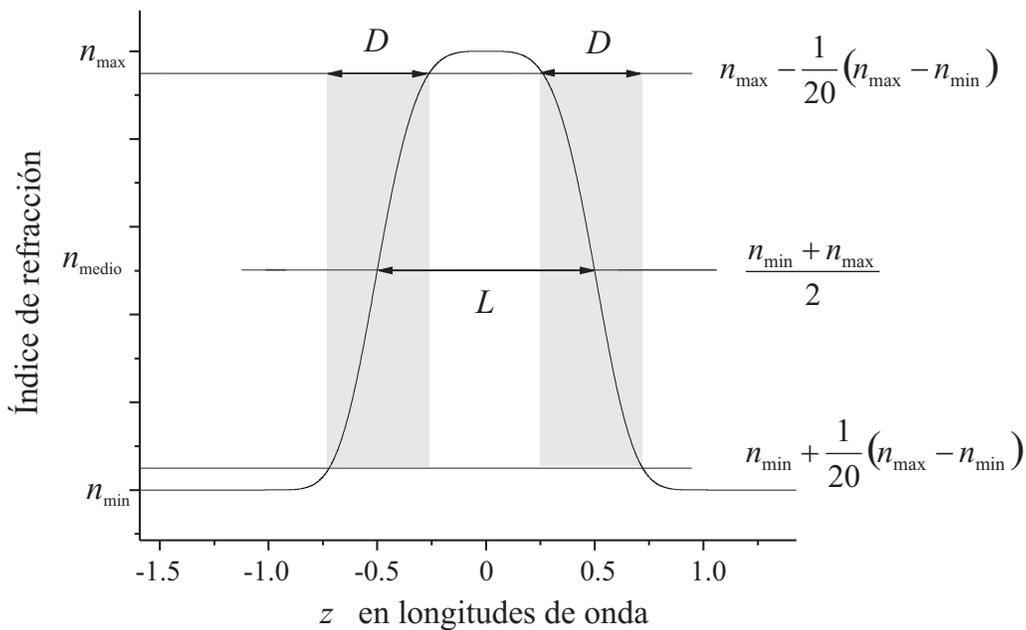


Figura 4.6: Un perfil  $n(z)$  como el de (4.2).

Se escoge una familia de perfiles que modelen una película delgada con índice de refracción mayor  $n_{\max}$  que el de los alrededores  $n_{\min}$ . Se desea poder variar el parámetro  $D$  de grosor de las dos interfases y la

distancia entre ellas  $L$ . La familia de perfiles seleccionada se puede resumir con la siguiente expresión

$$n(z) = n_{\min} + (n_{\max} - n_{\min}) e^{-(az)^{2m}}, \quad (4.2)$$

donde el parámetro  $m$  puede variar de 1 a 100. Estos perfiles  $n(z)$  tienen simetría par

$$n(z) = n(-z),$$

con ellos, suponiendo incidencia normal y medios no magnéticos, se resuelve la ecuación de la amplitud (3.11) y se calcula la reflectividad empleando a (3.31). Se comparan los casos de interferencia constructiva y destructiva.

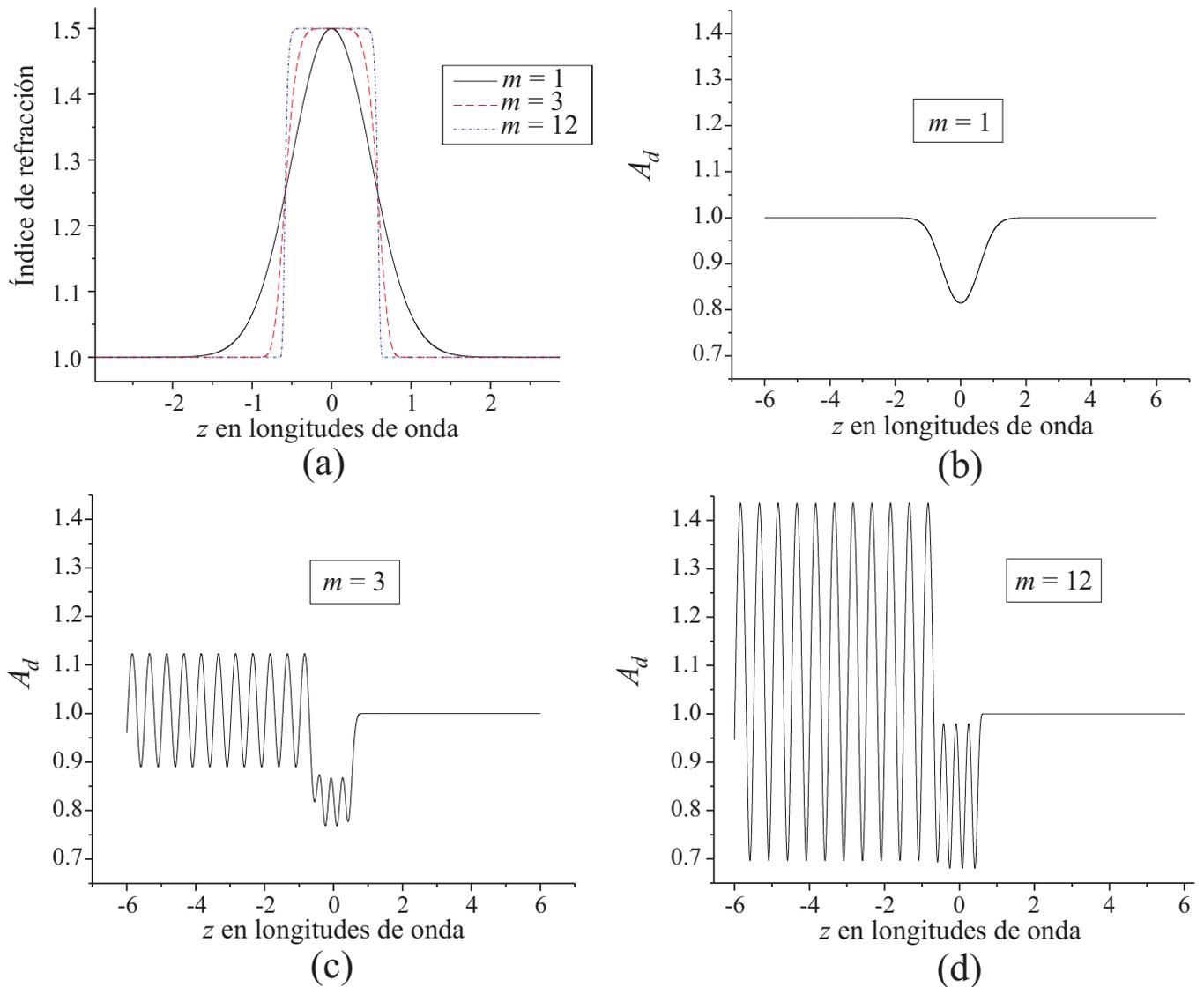


Figura 4.7: (a) Perfiles del tipo (4.2), con  $L = \frac{7\lambda}{4n_{\max}}$ ,  $n_{\min} = 1$ ,  $n_{\max} = 1.5$  y tres valores distintos para  $m$ . (b) Soluciones correspondientes de la ecuación de la amplitud (3.11) con  $m = 1$ , (c) con  $m = 3$  y (d)  $m = 12$ .

Una  $m$  pequeña está asociada a interfaces más graduales, mientras que una  $m$  grande a interfaces más

abruptas, en particular

$$D = \frac{1}{a} \left\{ [\ln(20)]^{\frac{1}{2m}} - \left[ \ln\left(\frac{20}{19}\right) \right]^{\frac{1}{2m}} \right\}.$$

El parámetro  $a$  está relacionado con la distancia entre interfases  $L$  y la cantidad  $m$  de la siguiente manera

$$a = \frac{2}{L} (\ln 2)^{\frac{1}{2m}}.$$

La figura 4.6 presenta un bosquejo de la forma que tiene un perfil como el de (4.2). Primero se escoge un valor de  $L$ , lo suficientemente grande para que  $D$ , el grosor de las interfases, pueda ser variado sin que la distancia entre las interfases  $L$  represente una cota restrictiva. Un valor interesante para  $L$  es  $\frac{7\lambda}{4n_{\max}}$ , ya que en el caso de interfases abruptas produce interferencia constructiva en la reflexión. Después se resuelve la ecuación de la amplitud (3.11) con el perfil (4.2) varias veces, para distintos valores de  $m$ , de modo que produzca un rango amplio de valores para  $D$ . En la figura 4.7 se muestran algunos perfiles y las soluciones correspondientes. La reflectividad como función de  $D$  se presenta en la figura 4.8, se consideran dos valores para  $L$ , uno que produce interferencia constructiva en el límite abrupto  $L_{\text{cons}} = \frac{7\lambda}{4n_{\max}}$  y otro destructiva  $L_{\text{dest}} = \frac{2\lambda}{n_{\max}}$ . En el primer caso, la reflectividad disminuye monótonicamente conforme el grosor de las interfases aumenta, de forma muy parecida a lo mostrado en la figura 4.2, lo que es de esperarse. En el segundo caso, se esperaría que al aumentar el grosor de las interfases la interferencia destructiva se fuera frustrando, aumentando ligeramente la reflectividad hasta que el cambio en el índice de refracción fuera tan gradual que nuevamente disminuyera, tendiendo a anularse finalmente. Sin embargo la reflectividad oscila dos veces antes de anularse para valores mayores de  $D$ . Esto indica que el grosor efectivo de la película sufre variaciones debido al cambio en el espesor de las interfases.

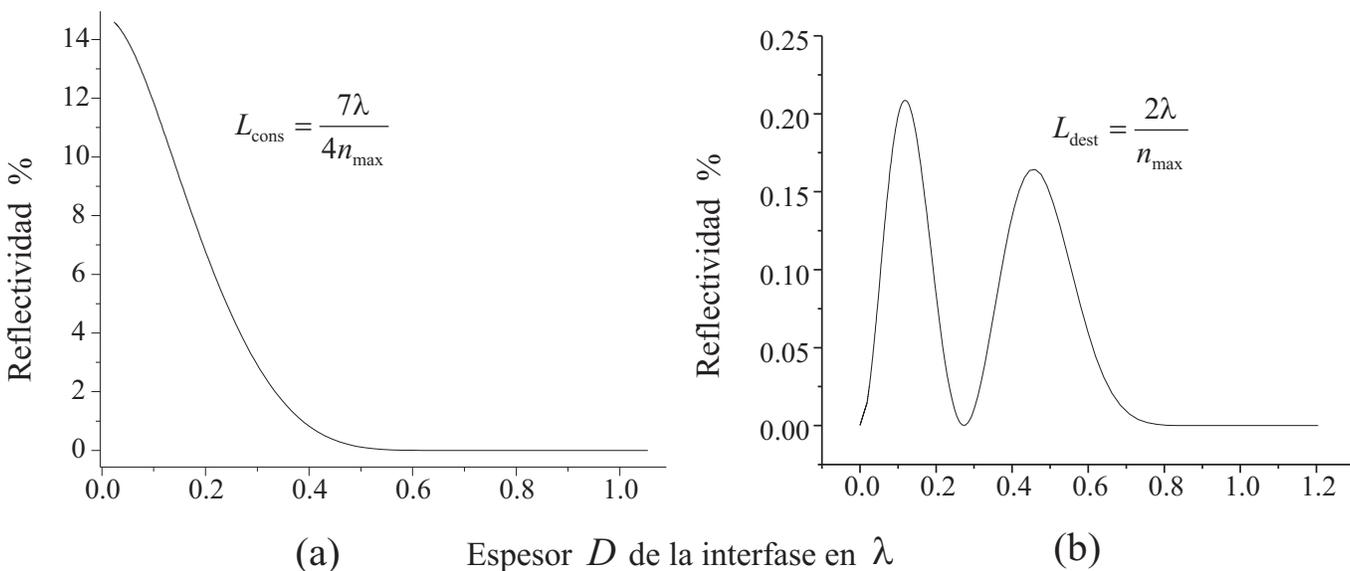


Figura 4.8: Reflectividad como función del espesor de las interfases  $D$ , con  $n_{\min} = 1$  y  $n_{\max} = 1.5$ . La distancia  $L$  entre interfases produce interferencia en la reflexión, (a) constructiva cuando  $L_{\text{cons}} = \frac{7\lambda}{4n_{\max}}$  y (b) destructiva cuando  $L_{\text{dest}} = \frac{2\lambda}{n_{\max}}$ .

#### 4.4. Conclusiones

Las soluciones numéricas de la ecuación de la amplitud son consistentes con las soluciones analíticas a la ecuación del campo en el caso del perfil de Epstein. Cuando no se conocen las soluciones analíticas a

la ecuación del campo y sí se cuenta con un buen programa informático (no necesariamente sofisticado), para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta más asequible resolver numéricamente la ecuación de la amplitud que encontrar la solución analítica a la ecuación del campo. Como se espera en incidencia normal, aunque las funciones que describen a  $n(z)$  pueden ser de distintos tipos, en general la reflectividad disminuye cuando estos perfiles  $n(z)$  se vuelven más graduales, empleando como unidad de medición la longitud de onda. Un fenómeno que vale la pena destacar es que las discontinuidades en las derivadas del índice de refracción pueden actuar como planos de reflexión, aunque la función  $n(z)$  sea continua. En el caso de capas delgadas modeladas por perfiles continuos e infinitamente diferenciables, en incidencia normal, la interferencia constructiva presenta una disminución al hacerse más graduales las interfaces, como es de esperarse. En cambio, al variar monotónicamente el espesor de las interfaces cuando se trata de interferencia destructiva, la reflectividad oscila un par de veces antes de anularse, revelando fluctuaciones en el grosor efectivo de la película.

## Capítulo 5

# Reflexión por una discontinuidad en las derivadas de $n(z)$

En este capítulo se analiza cómo se refleja la luz sobre un plano en que, aunque el índice de refracción  $n(z)$  es continuo, alguna o más de una de las derivadas  $\frac{d^j n}{dz^j}$  son discontinuas. Se consideran medios no magnéticos y transparentes. Para estudiar con detalle la reflexión de ondas electromagnéticas cuando inciden normalmente sobre un plano de este tipo, se proponen perfiles  $n(z)$  definidos por partes, uniendo dos funciones analíticas en  $z = 0$ . Cada parte consiste en alguna función infinitamente diferenciable que asintóticamente tienda a algún valor finito. De esa manera se consiguen perfiles suaves, excepto en  $z = 0$ , que modelan una interfase gradual pasando de un índice de refracción  $n_a$  a otro  $n_g$ . En  $z = 0$  se puede lograr que la derivada de orden  $j$  y las de órdenes menores sean continuas mientras que las de órdenes mayores sean discontinuas. Eso nos permite clasificar los perfiles  $n(z)$  de la siguiente manera: un perfil es de clase  $C^j$  significa que  $n(z)$  es continua así como sus derivadas, excepto por la derivada de orden  $j + 1$  y posiblemente derivadas de mayor orden [57], como se muestra en la tabla 5.1.

		Orden de la derivada				
		$n(z)$	$\frac{dn}{dz}$	$\frac{d^2 n}{dz^2}$	$\frac{d^3 n}{dz^3}$	$\frac{d^4 n}{dz^4}$
Tipo de Perfil	$C^{-1}$	discontinuo				
	$C^0$	continuo	discontinuo			
	$C^1$	continuo		discontinuo		
	$C^2$	continuo			discontinuo	
	$C^3$	continuo				discontinuo

Cuadro 5.1: Clasificación de los perfiles de índice de refracción.

Para que no haya ninguna otra fuente significativa de reflexión además del plano de unión  $z = 0$ , el grosor de la interfase debe ser grande. Por ejemplo, con un parámetro  $D \geq 2\lambda$ , la reflectividad debida al cambio gradual de  $n_a = 1$  a  $n_g = 1.5$  es suficientemente pequeña, como se puede inferir del el resultado (2.112) y de la figuras 4.2 y 4.3(b). Con estos perfiles así construidos y clasificados se resuelve la ecuación

de la amplitud (3.11) para luego inferir la reflectividad y el cambio de fase ante la reflexión. Se supone siempre que la luz incide por la izquierda, desde  $z \ll 0$ . En la sección 5.1 se resuelve la ecuación de la amplitud numéricamente para varios ejemplos específicos de estos perfiles mientras que en la sección 5.2 se resuelve de manera general y analíticamente bajo la aproximación de una variación gradual del índice de refracción (SVRI). Finalmente en la sección 5.3 se comparan los resultados obtenidos de ambas maneras. La mayor parte del contenido de la sección 5.1 se publicó en los artículos de las referencias [58, 59] y el de la la sección 5.2 en la [60].

## 5.1. Resultados con base en soluciones numéricas.

Se calcula numéricamente la reflectividad en incidencia normal y el cambio de fase debido a la reflexión sobre un plano de discontinuidad en la derivada del índice de refracción. Se revisa primero el caso en que el índice de refracción es discontinuo y luego se estudian los casos de discontinuidades en la derivada de primer, segundo y tercer orden. Se escogen ejemplos de los distintos tipos de perfiles que se presentan en la tabla 5.1, con ellos se resuelve la ecuación de la amplitud (3.11) numéricamente mediante el método de las diferencias finitas para posteriormente inferir la reflectividad y el cambio de fase ante la reflexión. Dado que se trata de incidencia normal y medios no magnéticos, la solución de (3.11) representa la amplitud del campo eléctrico en el medio. Se considera en todos los casos que la luz incide por la izquierda, desde  $z \ll 0$ , se toman ejemplos de funciones  $n(z)$  crecientes y decrecientes. La reflectividad tiende a disminuir con el orden de la derivada discontinua de más bajo orden. El cambio de fase ante la reflexión no es siempre 0 o  $\pi$  como indican las relaciones de Fresnel, también puede ser de  $\pm \frac{\pi}{2}$ . La mayor parte del contenido de esta sección se publicó en el artículo de la referencia [58]. Al tiempo que se escribió esta sección como parte de la tesis, se mejoró la precisión del método numérico y por lo tanto la incertidumbre de los resultados disminuyó en general.

### 5.1.1. Interfase abrupta, perfil clase $C^{-1}$

En este caso la función  $n(z)$  es discontinua. Sean los dos perfiles  $n_{\text{step}+}(z)$  y  $n_{\text{step}-}(z)$  los siguientes

$$n_{\text{step}+}(z) = \begin{cases} n_a & z < 0 \\ n_g & z \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$n_{\text{step}-}(z) = \begin{cases} n_g & z < 0 \\ n_a & z \geq 0 \end{cases}, \quad (5.2)$$

donde  $n_a = 1$  y  $n_g = 1.5$ , para ellos la solución a la ecuación del campo se conoce muy bien así como el coeficiente de reflexión correspondiente. Es precisamente el caso de las fórmulas de Fresnel [13, 61], que se revisan en el capítulo 2 del presente trabajo. El perfil  $n_{\text{step}+}(z)$  es creciente y  $n_{\text{step}-}(z)$  es decreciente. Veremos si la solución numérica coincide con los resultados que conocemos. Para este caso  $D \approx 0$ , pero eso no es problema pues es la barrera misma la única fuente de reflexión. Las soluciones a la ecuación de la amplitud se grafican en la figura 5.1. Las soluciones se grafican en función del camino óptico  $\Lambda = \int_0^z n dz$ , en vez de  $z$ , para facilitar la interpretación. Aplicando la ecuación (3.32) para  $z < 0$  y elevando el cociente  $\frac{A_2}{A_1}$  al cuadrado, se encuentra que las reflectividades son  $R_{\text{step}+} = 4.0000513\%$  y  $R_{\text{step}-} = 4.0001383\%$ . El resultado que predicen las fórmulas de Fresnel es  $R = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2 \times 100 = 4\%$ , comparando éste con los resultados anteriores podemos apreciar la exactitud del método numérico. El error relativo es de menos del 0.0013% y su desviación es  $\pm 0.00002\%$ . Los valores extremos en ambas gráficas 5.1 muestran dónde la onda incidente y reflejada están en fase o fuera de fase.

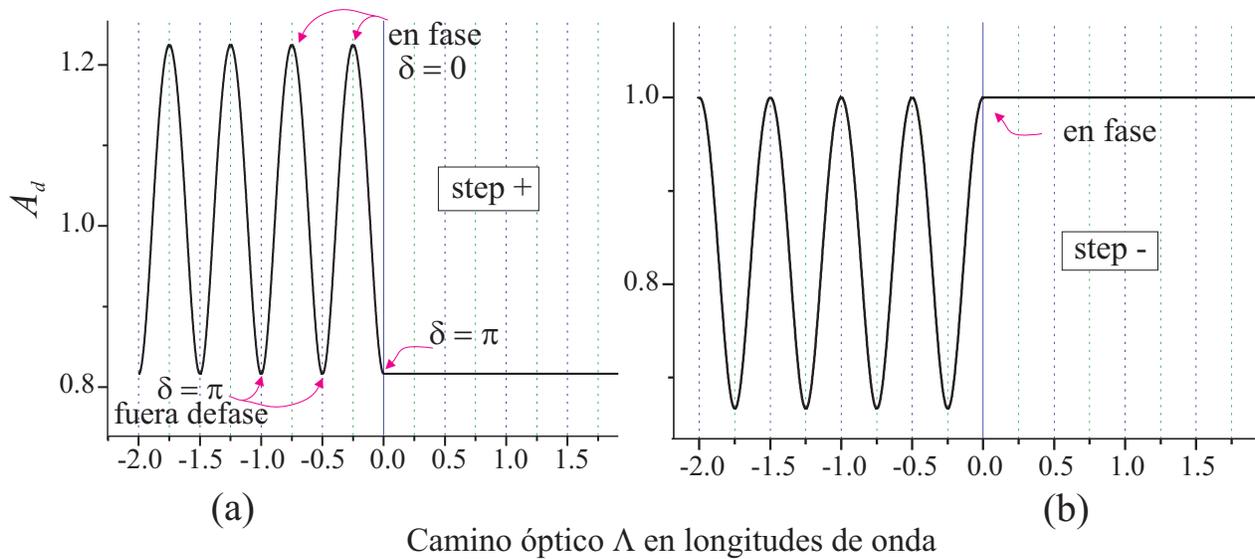


Figura 5.1: Soluciones a la ecuación de la amplitud para los perfiles (a) “step+” y (b) “step-”.

En un mínimo, los campos eléctricos de estas ondas apuntan en direcciones contrarias mientras que en un máximo los campos de ambas ondas apuntan en la misma dirección. Si los máximos ocurren en  $\Lambda_{\max} = (-\frac{1}{4} - \frac{m}{2})\lambda$  y los mínimos en  $\Lambda_{\min} = -\frac{m}{2}\lambda$ , para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , las ondas deben tener una diferencia de fase de  $\delta = \pi$  entre ellas en  $z = 0$  (el sitio de la discontinuidad), revelando un cambio de fase de  $\pi$  debido a la reflexión sobre el plano de discontinuidad. Si las posiciones de los máximos y mínimos se intercambian, las ondas deben estar en fase en  $z = 0$ , es decir que no hay cambio de fase debido a la reflexión sobre el plano de discontinuidad. Para que la interpretación anterior sea válida, el índice de refracción  $n(z)$  debe ser variar poco sobre el intervalo donde se encuentran los valores extremos. Las posiciones donde se encuentran los puntos críticos de la solución con el perfil “step+” muestran un cambio de fase ante la reflexión de  $\pi$  aproximadamente. Hay un desplazamiento promedio de  $(0.004)\pi$  con respecto al valor exacto de  $\delta = \pi$  con una desviación estándar muy pequeña  $\sigma < \frac{\pi}{1000}$ . Para el caso de “step-” las posiciones de los puntos críticos revelan un cambio de fase casi nulo debido a la reflexión. Hay un desplazamiento promedio de  $(0.004)\pi$  con respecto al valor exacto  $\delta = 0$  con una desviación estándar de  $\sigma = (0.002)\pi$ . Estos resultados encajan bien con las predicciones de las fórmulas de Fresnel.

### 5.1.2. Perfil clase $C^0$

Este tipo de perfil  $n(z)$  es continuo. Un ejemplo de perfil tipo  $C^0$  con un solo plano de unión en  $z = 0$  se puede construir con una función constante y una tangente hiperbólica:

$$n_{\text{lin}\&\text{tanh}+}(z) = \begin{cases} n_a & z < 0 \\ n_a + (n_g - n_a) \tanh\left(\frac{a_1}{D}z\right) & z \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Aquí  $a_1 = \frac{1}{2} (\ln(\frac{1.95}{0.05}) - \ln(\frac{1.05}{0.95}))$ , de manera que  $D$  es el grosor de la interfase, la distancia a lo largo de la cual el índice de refracción cambia el 90% del total  $\Delta n = n_g - n_a$ . La función  $n_{\text{lin}\&\text{tanh}+}(z)$  es continua y creciente, su primera derivada  $\frac{dn}{dz}$  es discontinua y creciente en  $z = 0$ . El grosor  $D = 2\lambda$  se escoge lo suficientemente grande como para descartar toda otra fuente de reflexión que no sea el plano de unión. La figura 5.2 (a) presenta una gráfica de este perfil, la solución numérica de la correspondiente ecuación de la amplitud también se muestra.

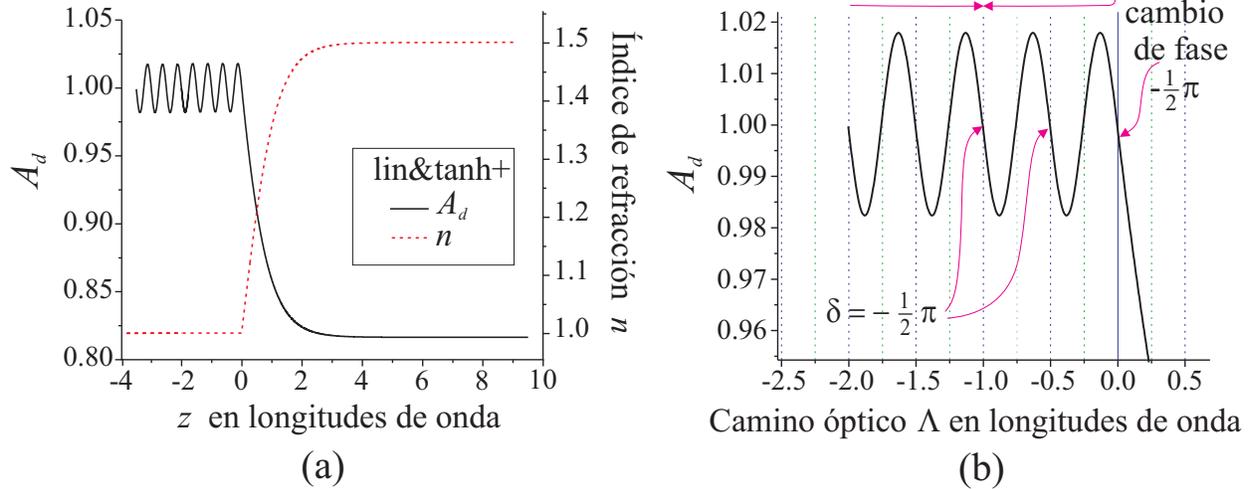


Figura 5.2: (a) Gráfica del perfil “lin&tanh+” expresado en la ecuación (5.3), construido al unir una función constante con una tangente hiperbólica. Modela una interfase creciente y gradual con  $D = 2\lambda$ , tiene una discontinuidad en la primera derivada en  $z = 0$ . La derivada pasa de un valor menor a uno mayor cuando atraviesa el plano de unión. La solución a la ecuación de la amplitud  $A_d$  para el perfil “lin&tanh+” también se muestra. (b) Una ampliación a la región oscilatoria de la solución.

Para el perfil “lin&tanh”, aplicando el cuadrado de (3.32) con los valores máximos en la región  $z < 0$ , se encuentra que la reflectividad es  $R_{\text{lin\&tanh+}} = (3.1560 \pm 0.0000) \times 10^{-2} \%$ . Esta reflectividad es mucho menor que la asociada a una interfase abrupta como la de “step+” dado que se trata de una interfase muy gradual ( $D = 2\lambda$ ). Sin embargo es bastante mayor que la reflectividad de un perfil similar pero completamente analítico, con los mismos valores de  $D$ ,  $n_a$  y  $n_g$ , como el perfil de Epstein:  $R_{\text{Epstein}} = 2.5954 \times 10^{-10} \%$  calculada con la ecuación (2.112). La discontinuidad en la primera derivada de  $n(z)$  claramente incrementa la reflectividad del perfil en varios órdenes de magnitud. Para analizar la relación entre las fases de la onda incidente y reflejada en el plano de unión  $z = 0$  debemos observar en que puntos del camino óptico se hallan los valores máximos y mínimos locales de la solución. En la región en la que el índice de refracción ya es constante estos puntos del camino óptico indican donde ambas ondas están en fase  $\delta = 0$  o fuera de fase  $\delta = \pi$ . Estos puntos están en  $\Lambda_{\text{crítica}} \approx (\frac{1}{4}m + \frac{1}{8})\lambda$ , donde  $m$  es un entero. En  $z = 0$  no hay un máximo o mínimo sino más bien un punto de inflexión implicando una inesperada diferencia de fase  $\delta \approx \pm \frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto, debe haber un cambio de fase de  $\sim \pm \frac{\pi}{2}$  ante la reflexión sobre un plano donde la primera derivada de  $n(z)$  es discontinua. Un análisis numérico detallado muestra que hay sólo un desplazamiento pequeño de  $(0.0460 \pm 0.0004) \frac{\pi}{2}$  respecto del valor exacto  $\frac{\pi}{2}$ .

La pregunta que se debe responder ahora es ¿qué signo asignarle al cambio? Si  $\delta = \pm\pi$  escoger cualquiera de los signos implica la misma orientación sobre el plano complejo y no hay ambigüedad. En cambio en el caso de  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  no es lo mismo escoger un signo que otro. La orientación de la onda incidente en el plano complejo gira en sentido antihorario al aumentar el valor de  $z$ , mientras que la orientación sobre el plano complejo de la onda reflejada gira en sentido horario al aumentar el valor de  $z$ , como indica la figura 5.3. Si se desea definir el valor de la diferencia de fase como positiva cuando las direcciones de las ondas incidente y reflejada se están separando y negativa cuando se están acercando en el plano complejo, al avanzar en el eje  $z$ , como en la referencia [58], para el caso del perfil “lin&tanh” el cambio de fase sería  $\delta \approx \frac{\pi}{2}$ . Se debe resaltar que, si de esta manera queremos denotar el cambio de fase ante la reflexión, el signo del coeficiente de reflexión complejo  $r$  será el contrario pues este coeficiente se define como la razón

del campo reflejado sobre el incidente

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{A_r \exp i\theta_r}{A_i \exp i\theta_i} = \frac{A_r}{A_i} \exp i(\theta_r - \theta_i),$$

es decir  $\delta = \theta_r - \theta_i$ , de modo que cuando las direcciones de ambas ondas en el plano complejo se están separando al avanzar en el eje  $z$ , el valor de esa diferencia de fase es negativo. Dado que en la sección 5.2 de esta tesis se calcula directamente el coeficiente de reflexión complejo, para facilitar comparaciones se reportan los resultados de esta sección 5.1 de la misma manera:  $r_{\text{lin}\&\text{tanh}+} = 1.7765 \times 10^{-2} \exp \left[ -i\frac{\pi}{2} (1.0460 \pm 0.0004) \right]$ .

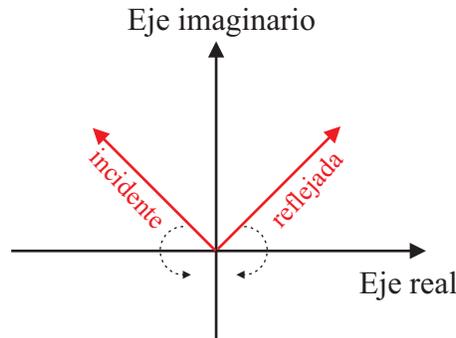


Figura 5.3: Este esquema representa las fases de las ondas incidente y reflejada sobre el plano complejo conforme el valor de  $z$  avanza. No representa el plano de configuración.

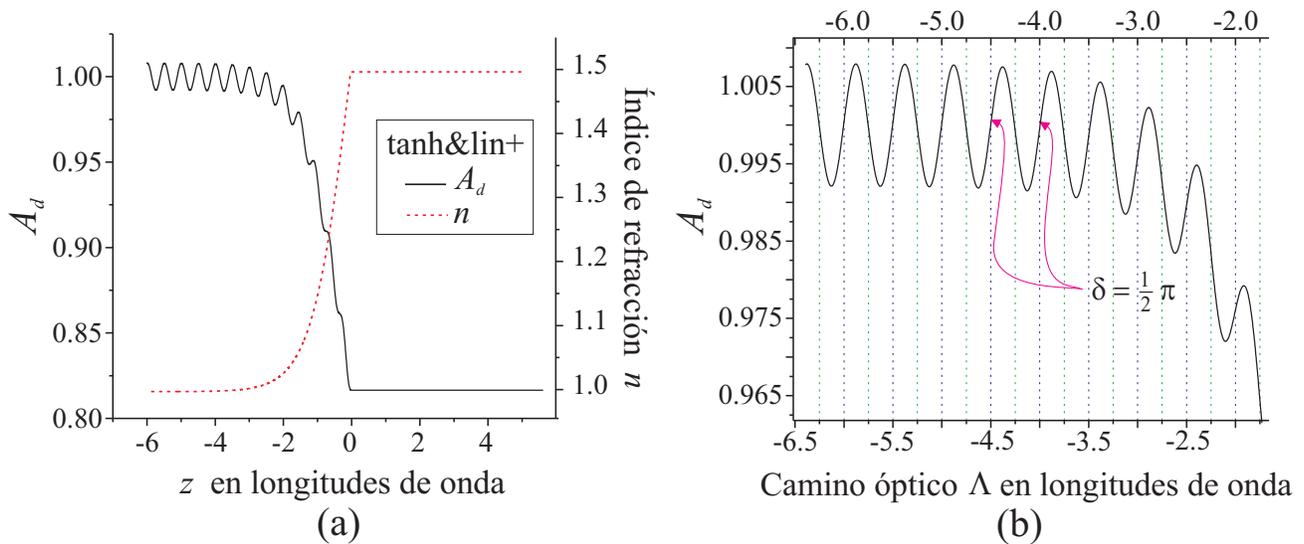


Figura 5.4: (a) Gráfica del perfil “tanh&lin+” expresado en la ecuación (5.4), construido al unir una tangente hiperbólica con una función constante. Modela una interfase creciente y gradual con  $D = 2\lambda$ , tiene una discontinuidad en la primera derivada en  $z = 0$ . La derivada pasa de un valor mayor a uno menor cuando atraviesa el plano de unión. La solución a la ecuación de la amplitud  $A_d$  para el perfil “tanh&lin+” también se muestra. (b) Una ampliación a la región oscilatoria de la solución.

El perfil “lin&tanh+” es creciente en  $z = 0$ , también la derivada  $\frac{dn}{dz}$  al pasar del lado izquierdo al derecho del plano de unión cambia de 0 a 0.45 aproximadamente, es decir es creciente. Par investigar

cual sería el caso para un perfil creciente pero una derivada decreciente en la vecindad de  $z = 0$  se puede construir otro perfil  $C^0$ , poniendo la función de tangente hiperbólica primero

$$n_{\text{tanh}\&\text{lin}+}(z) = \begin{cases} n_g + (n_g - n_a) \tanh\left(\frac{a_1}{D}z\right) & z < 0 \\ n_g & z \geq 0 \end{cases}. \quad (5.4)$$

En el caso de “tanh&lin+”, la ecuación (3.32) se debe aplicar a las oscilaciones que están más hacia la izquierda de la solución que presenta la figura 5.4,  $\Lambda \lesssim -4\lambda$ , ya que el medio no es suficientemente homogéneo cerca de  $\Lambda = 0$ . Las oscilaciones se deforman cuando el índice de refracción varía considerablemente como función de la posición. Los valores extremos locales se localizan nuevamente en  $\Lambda_{\text{crítica}} \approx \left(\frac{1}{4}m + \frac{1}{8}\right)\lambda$ , como en el caso anterior, pero ahora los máximos están en  $\Lambda_{\text{max}} \approx \left(\frac{1}{8} - \frac{m}{2}\right)\lambda$  y los mínimos en  $\Lambda_{\text{min}} \approx \left(-\frac{1}{8} - \frac{m}{2}\right)\lambda$ . Si se extrapola ésto a  $\Lambda = 0$ , se infiere una fase de  $\sim \frac{\pi}{2}$  para el coeficiente de reflexión. Un análisis detallado revela que  $r_{\text{tanh}\&\text{lin}+} = (7.9198 \pm 0.0136) \times 10^{-3} \exp\left[i\frac{\pi}{2}(1.0460 \pm 0.0004)\right]$ .

Intercambiando  $n_a$  y  $n_g$  para los perfiles “lin&tanh+” y “tanh&lin+” se construyen otros dos perfiles  $C^0$ , ahora decrecientes.

$$n_{\text{lin}\&\text{tanh-}}(z) = \begin{cases} n_g & z < 0 \\ n_g + (n_a - n_g) \tanh\left(\frac{a_1}{D}z\right) & z \geq 0 \end{cases}, \quad (5.5)$$

$$n_{\text{tanh}\&\text{lin-}}(z) = \begin{cases} n_a + (n_a - n_g) \tanh\left(\frac{a_1}{D}z\right) & z < 0 \\ n_a & z \geq 0 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Mientras  $n(z)$  es decreciente, la derivada  $\frac{dn}{dz}$  es decreciente en la vecindad de  $\Lambda = 0$  para  $n_{\text{lin}\&\text{tanh-}}$  y creciente para  $n_{\text{tanh}\&\text{lin-}}$ . Realizando el mismo análisis a las soluciones de la ecuación de la amplitud correspondientes se llega a resultados similares como se resume en la tabla 5.2. La fase del coeficiente de reflexión es  $\sim -\frac{\pi}{2}$  cuando la primera derivada  $\frac{dn}{dz}$  tiene un valor mayor del lado derecho del plano de unión que del lado izquierdo, la fase es  $\sim \frac{\pi}{2}$  en el caso contrario. El hecho de que el índice de refracción  $n(z)$  sea una función creciente o decreciente no influye en este último resultado.

Perfil $C^0$	$\frac{dn}{dz}$ en la vecindad de $z = 0$	Coeficiente de reflexión	
		módulo $ r $	fase $\frac{r}{2r^*}$
lin&tanh+	creciente	$(1.7765 \pm 0.0000) \times 10^{-2}$	$\frac{\pi}{2}(-1.0464 \pm 0.0004)$
tanh&lin+	decreciente	$(7.8954 \pm 0.0085) \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2}(0.9780 \pm 0.0007)$
lin&tanh-	decreciente	$(7.9006 \pm 0.0002) \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2}(1.0204 \pm 0.0003)$
tanh&lin-	creciente	$(1.7766 \pm 0.0005) \times 10^{-2}$	$\frac{\pi}{2}(-0.9561 \pm 0.0004)$

Cuadro 5.2: Se presentan los coeficientes de reflexión hallados mediante el análisis de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud para cuatro distintos perfiles  $C^0$ . Se incluyen las incertidumbres.

Las reflectividades  $R = rr^*$  correspondientes a “lin&tanh+” y a “tanh&lin-” son muy parecidas, aquí las incertidumbres no excluyen la posibilidad de que sean iguales. Lo mismo pasa para la pareja “tanh&lin+” y “lin&tanh-”. Se debe notar que  $n_{\text{lin}\&\text{tanh}+}(z) = n_{\text{tanh}\&\text{lin-}}(-z)$  así como  $n_{\text{tanh}\&\text{lin}+}(z) = n_{\text{lin}\&\text{tanh-}}(-z)$ , por lo que las parejas mencionadas se convierten en perfiles equivalentes si se hace incidir la luz desde el lado opuesto (incidencia normal). Si  $n_a(z) = n_b(-z)$ , se dice que  $n_a$  y  $n_b$  constituyen una pareja de

reversibilidad. El que la reflectividad sea igual para los dos miembros de una pareja de reversibilidad era de esperarse pues es un resultado conocido [62, 63].

### 5.1.3. Perfil clase $C^1$

Para obtener un conjunto similar al anterior de perfiles  $C^1$  una secante hiperbólica cuadrada se une a una función constante en su punto crítico de cuatro formas distintas, como se muestra en la tabla 5.3. El parámetro  $a_2$  se establece para que  $D$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción.

Perfil $C^1$	$n(z)$	$\frac{d^2n}{dz^2}$ en la vecindad de $z = 0$	Coeficiente de reflexión	
			módulo $ r $	fase $\frac{r}{2r^*}$
lin&sech+	$\begin{cases} n_a & z < 0 \\ n_g - (n_g - n_a)\text{sech}^2\left(\frac{a_2}{D}z\right) & z \geq 0 \end{cases}$	cre- ciente	$(3.3929 \pm 0.0000) \times 10^{-3}$	$(-0.0104 \pm 0.0000) \times \frac{\pi}{2}$
sech&lin+	$\begin{cases} n_a + (n_g - n_a)\text{sech}^2\left(\frac{a_2}{D}z\right) & z < 0 \\ n_g & z \geq 0 \end{cases}$	cre- ciente	$(8.9958 \pm 0.0046) \times 10^{-4}$	$(-0.0016 \pm 0.0003) \times \frac{\pi}{2}$
lin&sech-	$\begin{cases} n_g & z < 0 \\ n_a + (n_g - n_a)\text{sech}^2\left(\frac{a_2}{D}z\right) & z \geq 0 \end{cases}$	decre- ciente	$(9.0027 \pm 0.0009) \times 10^{-4}$	$(2.0000 \pm 0.0004) \times \frac{\pi}{2}$
sech&lin-	$\begin{cases} n_g - (n_g - n_a)\text{sech}^2\left(\frac{a_2}{D}z\right) & z < 0 \\ n_a & z \geq 0 \end{cases}$	decre- ciente	$(3.3920 \pm 0.0006) \times 10^{-3}$	$(2.0084 \pm 0.0003) \times \frac{\pi}{2}$

Cuadro 5.3: Perfiles tipo  $C^1$ , el plano de unión está en  $z = 0$ . El parámetro  $a_2 = \frac{1}{2} \ln(19) + \ln\left[\frac{1+\sqrt{0.95}}{1+\sqrt{0.05}}\right]$  se establece para que  $D = 2\lambda$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción  $\Delta n = n_g - n_a$ .

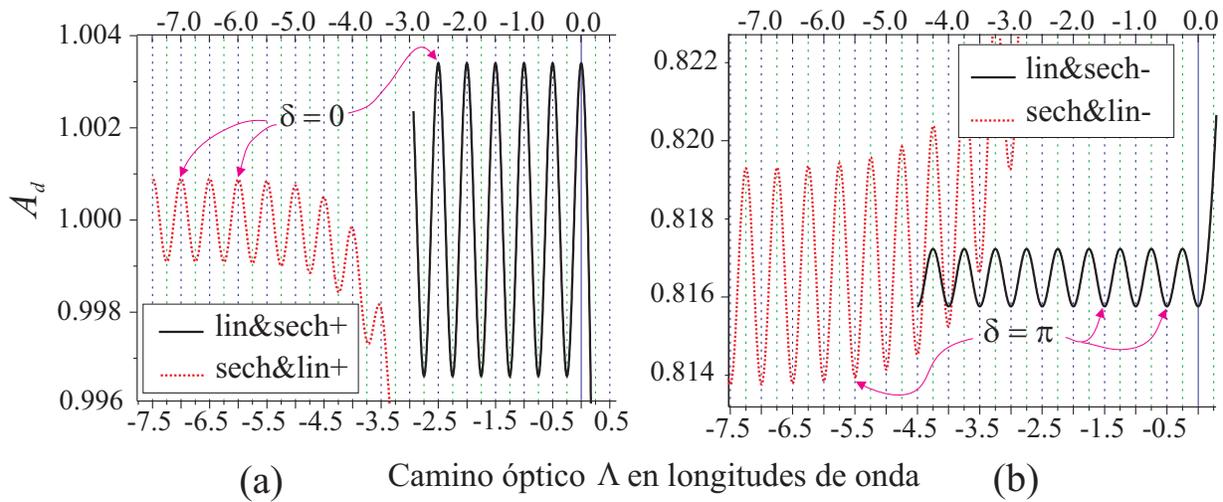


Figura 5.5: Las soluciones a la ecuación de la amplitud con perfiles tipo  $C^1$ , un acercamiento a las regiones oscilatorias. (a) Los casos “lin&sech+” y “sech&lin+” con  $\delta \approx 0$ , (b) “lin&sech-” y “sech&lin-” con  $\delta \approx \pi$ .

Las gráficas de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud se ilustran en la figura 5.5. Para “lin&sech+” y “sech&lin+” la fase del coeficiente de reflexión es casi nulo, mientras que para “lin&sech-” y “sech&lin-” es  $\delta \approx \pi$ , como también se puede ver en la tabla 5.3. La fase es  $\sim 0$  cuando la segunda derivada  $\frac{d^2n}{dz^2}$  tiene un valor mayor del lado derecho del plano de unión que del izquierdo, mientras que es  $\sim \pi$  en el caso contrario. Nuevamente el hecho de que el índice de refracción  $n(z)$  sea una función creciente o decreciente no influye en este último resultado. Todas las reflectividades son aún menores que en el caso de los perfiles  $C^0$ . Las reflectividades  $R = rr^*$  vuelven a ser muy parecidas entre las parejas de reversibilidad, sin embargo esta vez las incertidumbres excluyen la posibilidad de que sean exactamente iguales. Ésto podría interpretarse como una inexactitud del método numérico, pero quizá sea consecuencia de otro hecho. En el caso de la mitad de las soluciones a la ecuación de la amplitud que se presentan, la región donde seleccionamos los extremos locales para encontrar el módulo del coeficiente de reflexión no es perfectamente homogénea. Se debe recordar que la ecuación (3.32) es válida para regiones donde el índice de refracción es constante.

#### 5.1.4. Perfil clase $C^2$

Para obtener un conjunto similar a los anteriores pero de perfiles  $C^2$ , una exponencial cúbica se une a una función constante en su punto crítico (extremo local y punto de inflexión a la vez) de cuatro formas distintas, como se muestra en la tabla 5.4. El parámetro  $a_3$  se establece para que  $D$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción. Las gráficas de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud se ilustran en la figura 5.6. Para “lin&exp+” y “exp&lin-” la fase del coeficiente de reflexión es  $\delta \approx \frac{\pi}{2}$ , mientras que para “exp&lin+” y “lin&exp-” es  $\delta \approx -\frac{\pi}{2}$ , como también se puede ver en la tabla 5.4. La fase es  $\sim \frac{\pi}{2}$  cuando la tercera derivada  $\frac{d^3n}{dz^3}$  tiene un valor mayor del lado derecho del plano de unión que del izquierdo, en cambio la fase es  $\sim -\frac{\pi}{2}$  en el caso contrario. Nuevamente el hecho de que el índice de refracción  $n(z)$  sea una función creciente o decreciente no influye en este último resultado. Las reflectividades son aún menores que en los casos  $C^0$  y  $C^1$ . Las reflectividades vuelven a ser muy parecidas entre las parejas de reversibilidad, aunque no exactamente iguales.

Perfil $C^2$	$n(z)$	$\frac{d^3n}{dz^3}$ en la vecindad de $z = 0$	Coeficiente de reflexión	
			módulo $ r $	fase $\frac{r}{2r^*}$
lin&exp+	$\begin{cases} n_a & z < 0 \\ n_g - (n_g - n_a) \exp\left(-\frac{a_3}{D}z\right)^3 & z \geq 0 \end{cases}$	creciente	$(1.1570 \pm 0.0004) \times 10^{-4}$	$(1.0071 \pm 0.0003) \times \frac{\pi}{2}$
exp&lin+	$\begin{cases} n_a + (n_g - n_a) \exp\left(\frac{a_3}{D}z\right)^3 & z < 0 \\ n_g & z \geq 0 \end{cases}$	decreciente	$(2.2495 \pm 0.0073) \times 10^{-5}$	$(-0.9987 \pm 0.0006) \times \frac{\pi}{2}$
lin&exp-	$\begin{cases} n_g & z < 0 \\ n_a + (n_g - n_a) \exp\left(-\frac{a_3}{D}z\right)^3 & z \geq 0 \end{cases}$	decreciente	$(2.2756 \pm 0.0048) \times 10^{-5}$	$(-1.0001 \pm 0.0008) \times \frac{\pi}{2}$
exp&lin-	$\begin{cases} n_g - (n_g - n_a) \exp\left(\frac{a_3}{D}z\right)^3 & z < 0 \\ n_a & z \geq 0 \end{cases}$	creciente	$(1.1539 \pm 0.0009) \times 10^{-4}$	$(0.9926 \pm 0.0014) \times \frac{\pi}{2}$

Cuadro 5.4: Perfiles tipo  $C^2$ , el plano de unión está en  $z = 0$ . El parámetro  $a_3 = \sqrt[3]{\ln(0.95)} - \sqrt[3]{\ln(0.05)}$  se establece para que  $D = 2\lambda$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción  $\Delta n = n_g - n_a$ .

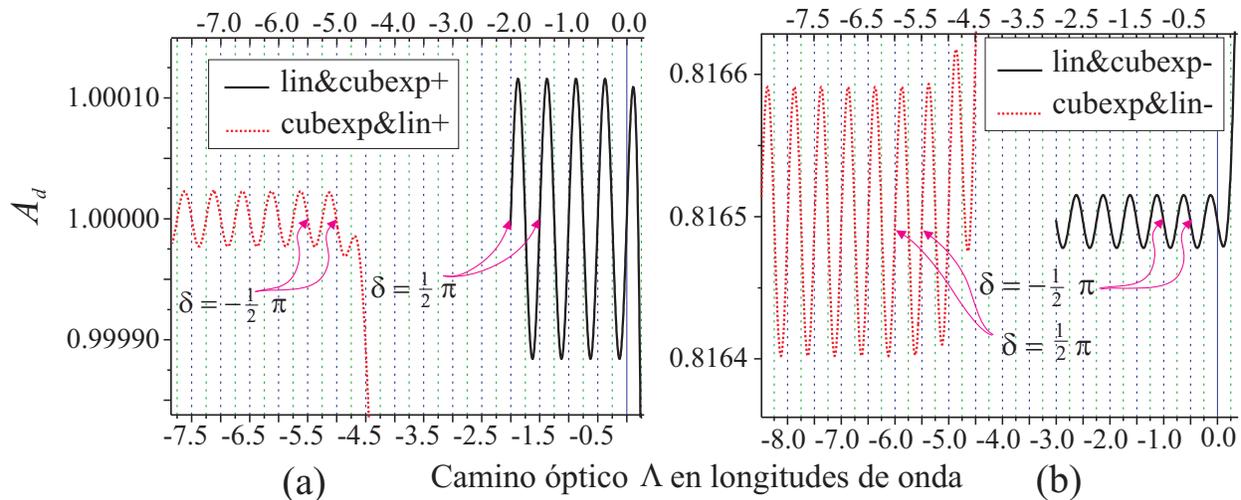


Figura 5.6: Las soluciones a la ecuación de la amplitud con perfiles tipo  $C^2$ , un acercamiento a las regiones oscilatorias. (a) Los casos “lin&cubexp+”, “cubexp&lin+” y (b) “lin&cubexp-”, “cubexp&lin-” .

### 5.1.5. Perfil clase $C^3$

Para obtener un conjunto similar a los anteriores pero de perfiles  $C^3$ , una exponencial cuártica se une a una función constante en su punto crítico de cuatro formas distintas, como se muestra en la tabla 5.5. El parámetro  $a_4$  se establece para que  $D$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción. Las gráficas de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud se ilustran en la figura 5.7. Para “lin&quartexp+” y “quartexp&lin+” la fase del coeficiente de reflexión es  $\delta \approx \pi$ , mientras que para “lin&quartexp-” y “quartexp&lin-” es  $\delta \approx 0$ , como también se puede ver en la tabla 5.4. La fase es  $\sim \pi$  cuando la cuarta derivada  $\frac{d^4 n}{dz^4}$  tiene un valor mayor del lado derecho del plano de unión que del izquierdo, en cambio la fase es  $\sim 0$  en el caso contrario. Nuevamente el hecho de que el índice de refracción  $n(z)$  sea una función creciente o decreciente no influye en este último resultado.

Perfil $C^3$	$n(z)$	$\frac{d^4 n}{dz^4}$ en la vecindad de $z = 0$	Coeficiente de reflexión	
			módulo $ r $	fase $\frac{r}{2r^*}$
lin&quartexp+	$\begin{cases} n_a & z < 0 \\ n_g - (n_g - n_a) \exp - \left(\frac{a_4}{D} z\right)^4 & z \geq 0 \end{cases}$	cre- ciente	$(7.4301 \pm 0.0285) \times 10^{-6}$	$(2.0035 \pm 0.0014) \times \frac{\pi}{2}$
quartexp&lin+	$\begin{cases} n_a + (n_g - n_a) \exp - \left(\frac{a_4}{D} z\right)^4 & z < 0 \\ n_g & z \geq 0 \end{cases}$	cre- ciente	$(1.3329 \pm 0.0223) \times 10^{-6}$	$(2.2527 \pm 0.0091) \times \frac{\pi}{2}$
lin&quartexp-	$\begin{cases} n_g & z < 0 \\ n_a + (n_g - n_a) \exp - \left(\frac{a_4}{D} z\right)^4 & z \geq 0 \end{cases}$	decre- ciente	$(1.3514 \pm 0.0217) \times 10^{-6}$	$(-0.2125 \pm 0.0077) \times \frac{\pi}{2}$
quartexp&lin-	$\begin{cases} n_g - (n_g - n_a) \exp - \left(\frac{a_4}{D} z\right)^4 & z < 0 \\ n_a & z \geq 0 \end{cases}$	decre- ciente	$(7.2999 \pm 0.0416) \times 10^{-6}$	$(0.0104 \pm 0.0023) \times \frac{\pi}{2}$

Cuadro 5.5: Perfiles tipo  $C^3$ , el plano de unión está en  $z = 0$ . El parámetro  $a_4 = \sqrt[4]{|\ln(0.05)|} - \sqrt[4]{|\ln(0.95)|}$  se establece para que  $D = 2\lambda$  nuevamente sea la distancia en la que ocurre el 90% del cambio en el índice de refracción  $\Delta n = n_g - n_a$ .

Las reflectividades van disminuyendo al ir cambiando el tipo de perfil  $C^0$ ,  $C^1$ ,  $C^2$  y  $C^3$ . En el caso de las reflectividades más pequeñas, las que corresponden al par de reversibilidad “quartexp&lin+” y “lin&quartexp-”,  $R \approx 1.8 \times 10^{-10} \%$ , ya se acercan a la reflectividad del caso analítico  $R_{\text{Epstein}} = 2.5954 \times 10^{-10} \%$ . La desviación de fase ya es significativa para estos perfiles, es de  $\sim \frac{\pi}{8}$  respecto de la fase exacta  $\pi$  o  $0$  del coeficiente de reflexión. Ésto debido a que la reflexión atribuida a todo el volumen de la interfase ya es comparable a la atribuida al plano de unión. Las reflectividades vuelven a ser muy parecidas entre las parejas de reversibilidad, aunque no exactamente iguales.

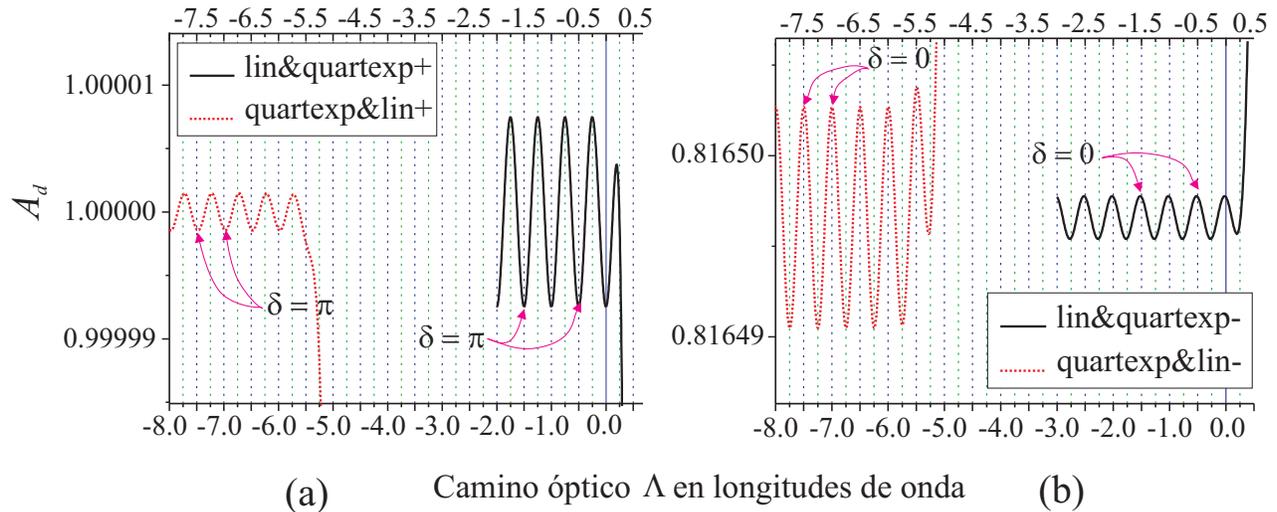


Figura 5.7: Las soluciones a la ecuación de la amplitud con perfiles tipo  $C^3$ , un acercamiento a las regiones oscilatorias. (a) Los casos “lin&quartexp+”, “quartexp&lin+” y (b) “lin&quartexp-”, “quartexp&lin-” .

### 5.1.6. Conclusiones de la sección 5.1

La reflectividad disminuye cuando aumenta el orden de la discontinuidad: si tenemos un perfil  $n(z)$  de grosor  $D$ , suave excepto por el plano de unión y de tipo  $C^{m+1}$ , su reflectividad será menor que un perfil similar de tipo  $C^m$ . Esta conclusión está basada en los resultados para los ejemplos que se exponen aquí, pero queda como conjetura para el caso general. Los perfiles seleccionados, con sus soluciones a la ecuación de la amplitud, también muestran cierto orden en relación a la fase del coeficiente de reflexión asociado al plano de unión. La tabla 5.6 muestra una generalización de este comportamiento. Los resultados de la tabla 5.6 sugieren la siguiente conjetura: *Para un perfil  $n(z)$  tipo  $C^m$  (con derivada discontinua de orden más bajo  $\frac{d^{m+1}n}{dz^{m+1}}$ ), la fase del coeficiente de reflexión asociado al plano de unión es  $(m-1)\frac{\pi}{2}$  si el valor de  $\frac{d^{m+1}n}{dz^{m+1}}$  es creciente al cruzar el plano de unión de izquierda a derecha. Si el valor de  $\frac{d^{m+1}n}{dz^{m+1}}$  es decreciente al cruzar el plano de unión de izquierda a derecha, entonces la fase del coeficiente de reflexión es  $(m+1)\frac{\pi}{2}$ .* Se resolvieron las ecuaciones de la amplitud para más perfiles, similares pero contruidos con otra selección de parejas de funciones, no necesariamente con una de ellas constante. Todos los casos se ajustan a la conjetura.

Tipo de perfil $n(z)$	derivada discontinua de menor orden	fase del coeficiente de reflexión	
		para una derivada discontinua de menor orden creciente	para una derivada discontinua de menor orden decreciente
$C^{-1}$	$n(z)$ discontinua	$\pi$	$0$
$C^0$	$\frac{dn}{dz}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$C^1$	$\frac{d^2n}{dz^2}$	$0$	$\pi$
$C^2$	$\frac{d^3n}{dz^3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$C^3$	$\frac{d^4n}{dz^4}$	$\pi$	$0$

Cuadro 5.6: Comportamiento en general de la fase del coeficiente de reflexión.

## 5.2. Solución analítica bajo la aproximación de variación suave del índice de refracción (SVRI)

Se calcula el coeficiente de reflexión complejo asociado a una discontinuidad en alguna de las derivadas del índice de refracción de forma analítica. Para lo cual, primero se muestra que la ecuación de la amplitud se puede resolver bajo la aproximación JWKB, que en nuestro caso corresponde a una variación gradual del índice de refracción (SVRI). Luego se escribe la solución en serie de potencias bajo dicha aproximación. Uniendo dos soluciones SVRI distintas y exigiendo que se cumplan las condiciones a la frontera para los campos, se puede obtener el coeficiente de reflexión para el plano de unión. Este coeficiente de reflexión complejo resulta ser un cociente en términos de los cuadrados de las soluciones SVRI y sus derivadas. Clasificando los perfiles  $n(z)$  de acuerdo a la derivada discontinua de más bajo orden en el plano de unión, se obtienen expresiones simples para el coeficiente de reflexión, a menor orden no nulo en la aproximación SVRI. Los resultados confirman las conjeturas de la sección anterior. Se establecen comparaciones entre los resultados obtenidos aquí y los ya conocidos para perfiles específicos. Finalmente se sugieren aplicaciones novedosas [60].

### 5.2.1. La ecuación de la amplitud bajo la aproximación SVRI.

Se puede reescribir la ecuación (3.11) como

$$\frac{1}{k_0^2} A^3 A'' = 1 - n^2 A^4, \quad (5.7)$$

para un medio no magnético y en incidencia normal. La aproximación JWKB (o simplemente WKB) se usa típicamente en Mecánica Cuántica para resolver la ecuación de Shrödinger independiente del tiempo cuando el potencial cambia a lo largo de una distancia grande comparada con la longitud de onda de de Broglie. De hecho es un método general para resolver de forma aproximada ecuaciones diferenciales con coeficientes que dependen de la posición [29]. Aunque se desarrolló por completo entre 1923 y 1926, el método se usó de forma simple en trabajos muy anteriores [64]. En nuestro caso la aproximación JWKB

es físicamente equivalente a la aproximación de variación paulatina del índice de refracción (SVRI, “slowly varying refractive index approximation”), la distancia a lo largo de la cual varía el índice de refracción es grande en comparación con la longitud de onda.

Si el parámetro  $\frac{1}{k_0}$  es pequeño como para que los términos de la ecuación (5.7) satisfagan  $\frac{1}{k_0^2} |A^3 A''| \ll n^2 |A^4|$ , o equivalentemente

$$\frac{1}{k_0^2} \ll n^2 \left| \frac{A}{A''} \right|,$$

se puede construir una solución aproximada de (5.7) en serie de potencias [65]

$$A_{\text{SVRI}} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left( \frac{1}{k_0} \right)^m, \quad (5.8)$$

donde cada término de la suma es una función de  $z$ ,  $A_m = A_m(z)$ . Substituyendo (5.8) en (5.7)

$$\frac{1}{k_0^2} \left( \sum_a \frac{A_a}{k_0^a} \right) \left( \sum_b \frac{A_b}{k_0^b} \right) \left( \sum_c \frac{A_c}{k_0^c} \right) \left( \sum_d \frac{A_d''}{k_0^d} \right) = 1 - n^2 \left( \sum_\alpha \frac{A_\alpha}{k_0^\alpha} \right) \left( \sum_\beta \frac{A_\beta}{k_0^\beta} \right) \left( \sum_\gamma \frac{A_\gamma}{k_0^\gamma} \right) \left( \sum_\delta \frac{A_\delta}{k_0^\delta} \right),$$

donde todos los índices de las sumatorias corren de 0 a  $\infty$ . Igualando términos con la misma potencia de  $k_0$ , se comienza por obtener el término a orden cero para la amplitud

$$A_0 = n^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.9)$$

luego a primer orden, para los términos en  $k_0^{-1}$ ,  $A_1 = 0$ . Todos los términos que incluyen el factor  $k_0^{-3}$  también tienen como factor a  $A_1$ , así que el valor de  $A_3$  se anula. De hecho, todas las  $A_m$  con  $m$  impar se anulan de igual manera. Para los términos a segundo orden

$$A_2 = -\frac{3}{16} n^{-\frac{9}{2}} \left( \frac{dn}{dz} \right)^2 + \frac{1}{8} n^{-\frac{7}{2}} \left( \frac{d^2 n}{dz^2} \right). \quad (5.10)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, uno puede todavía escribir fácilmente a  $A_4$

$$\begin{aligned} A_4 = & \frac{621}{512} n^{-\frac{17}{2}} \left( \frac{dn}{dz} \right)^4 - \frac{207}{128} n^{-\frac{15}{2}} \left( \frac{dn}{dz} \right)^2 \left( \frac{d^2 n}{dz^2} \right) + \frac{29}{128} n^{-\frac{13}{2}} \left( \frac{d^2 n}{dz^2} \right)^2 + \\ & + \frac{5}{16} n^{-\frac{13}{2}} \left( \frac{dn}{dz} \right) \left( \frac{d^3 n}{dz^3} \right) - \frac{1}{32} n^{-\frac{11}{2}} \left( \frac{d^4 n}{dz^4} \right). \end{aligned}$$

Al aumentar el valor de  $m$  par, escribir explícitamente a  $A_m$  se vuelve laborioso. Cada  $A_m$  involucra términos con combinaciones de las derivadas de  $n(z)$  hasta el orden  $m$ . De cualquier manera, se puede escribir una relación de recurrencia para  $m > 1$  [65], que en este caso es

$$\begin{aligned} A_m = & -\frac{1}{4A_0^3} \left( \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta}^{m-2} A_\alpha A_\beta A_\gamma A_\zeta \delta [m - (\alpha + \beta + \gamma + \zeta)] \right) + \\ & - \frac{1}{4A_0^3 n^2} \left( \sum_{a, b, c, d}^{m-2} A_a'' A_b A_c A_d \delta [(m-2) - (a + b + c + d)] \right), \quad (5.11) \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es una delta de Kronecker, que “prende” todas las combinaciones de índices que satisfacen  $\alpha + \beta + \gamma + \zeta = m$  y  $a + b + c + d = m - 2$ .

La serie (5.8) es una serie asintótica, este tipo de series en general no convergen, sin embargo al truncarlas antes de llegar al término de menor magnitud resultan en un muy buen acercamiento al valor exacto de la función que se desea aproximar [66, 67]. Un detalle interesante que merece resaltarse es que el valor de  $A_{\text{SVRI}}$ , en cualquier plano perpendicular al eje  $z$ , no cambia si el perfil  $n(z)$  se invierte de sentido sobre ese plano. En otras palabras, dado un perfil, si la onda electromagnética se propaga en una dirección del eje  $z$ , o en la contraria, la solución  $A_{\text{SVRI}}$  es la misma. Ésto se puede ver claramente si se consideran dos propiedades:

- Cuando se invierte de sentido a  $n(z)$  sobre un plano  $z = z_1$  las derivadas pares no cambian de signo mientras que las impares sí,

$$\frac{d^{2j}n_{\text{original}}(z_1)}{dz^{2j}} = \frac{d^{2j}n_{\text{invertida}}(z_1)}{dz^{2j}}$$

$$\frac{d^{2j-1}n_{\text{original}}(z_1)}{dz^{2j-1}} = -\frac{d^{2j-1}n_{\text{invertida}}(z_1)}{dz^{2j-1}}$$

- En general todos los términos de  $A_{\text{SVRI}}$ , excepto  $A_0$ , están conformados por productos de las derivadas del índice de refracción, además de un coeficiente, una potencia de  $k_0^{-2}$  y una potencia del índice de refracción mismo. Sin embargo, siempre hay un número par de factores que corresponden a derivadas impares, de modo que los signos que introduciría una inversión del perfil se anulan.

### 5.2.2. El término con la derivada de mayor orden

Será de utilidad poder escribir explícitamente al menos, el término que incluye la derivada de mayor orden para cada  $A_m$ . De (5.11) se puede resaltar el término con la derivada de mayor orden de  $n(z)$ , ésto es cuando  $a = m - 2, b = c = d = 0$

$$A_m = -\frac{1}{4}n^{-2}A''_{m-2} + \mathcal{O}(< m), \quad (5.12)$$

donde  $\mathcal{O}(< m)$  representa a todos los otros términos, involucrando derivadas del índice de refracción de menor orden que  $m$ . Similarmente para  $A_{m-2}$

$$A_{m-2} = -\frac{1}{4}n^{-2}A''_{m-4} + \mathcal{O}(< m - 2). \quad (5.13)$$

Insertando (5.13) en (5.12)

$$A_m = -\frac{1}{4}n^{-2} \left( -\frac{1}{4}n^{-2}A''_{m-4} + \mathcal{O}(< m - 2) \right)'' + \mathcal{O}(< m) = -\frac{1}{4}n^{-2} \left( -\frac{1}{4}n^{-2}A''''_{m-4} \right) + \mathcal{O}(< m).$$

Repitiendo el proceso  $m/2$  veces

$$A_m = \left( -\frac{1}{4}n^{-2} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m A_0}{dz^m} + \mathcal{O}(< m),$$

para  $m$  par. Debido a que  $A_0 = n^{-1/2}$ , el factor  $\frac{d^m A_0}{dz^m}$  tiene solo un término que incluye a la derivada de mayor orden. Para  $m > 0$ ,  $\frac{d^m A_0}{dz^m} = -\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}} \frac{d^m n}{dz^m} + \mathcal{O}(< m)$  y por lo tanto

$$A_m = \left( \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{n^{m+\frac{3}{2}} 2^{m+1}} \right) \frac{d^m n}{dz^m} + \mathcal{O}(< m). \quad (5.14)$$

La serie en (5.8) converge si, para toda  $m$ , el parámetro  $k_0^{-m}$  es pequeño comparado a todas las derivadas del índice de refracción hasta el orden  $m$ , suficientemente pequeño para asegurar la convergencia por el criterio de d'Alambert [68]. Ésto significa que, para una serie convergente,  $n(z)$  debe de ser analítica en el intervalo implicado y debe variar de forma gradual en la escala de la longitud de onda. Sin embargo la serie que resulta del desarrollo perturbativo WKB o SVRI rara vez converge y aún así posee validez, mientras no se rebase cierto orden de aproximación [69].

Si  $A_{\text{SVRI}}$  se puede escribir como una serie en potencias de  $k_0^{-2}$ , también su cuadrado  $A_{\text{SVRI}}^2$

$$A_{\text{SVRI}}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} k_0^{-2j} \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l} k_0^{-2l}. \quad (5.15)$$

Escribiendo los primeros términos de forma explícita

$$A_{\text{SVRI}}^2 = A_0^2 + 2A_0A_2k_0^{-2} + (2A_0A_4 + A_2A_2)k_0^{-4} + \dots + \left( \sum_{j=0}^m A_{2j}A_{m-2j} \right) k_0^{-m} + \dots, \quad (5.16)$$

donde  $m$  es un entero par mayor a cero. Cada orden de la serie involucra a un grupo de términos, se puede resaltar también al que tiene a la derivada de mayor orden de  $n(z)$

$$[A_{\text{SVRI}}^2]_m = \left( \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{n^{m+2}2^m} \right) \frac{d^m n}{dz^m} + \mathcal{O}(< m). \quad (5.17)$$

Similarmente, para su derivada

$$\frac{d[A_{\text{SVRI}}^2]_m}{dz} = \left( \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+1}}{n^{m+2}2^m} \right) \frac{d^{m+1}n}{dz^{m+1}} + \mathcal{O}(< m + 1). \quad (5.18)$$

Se debe recordar que esta solución aproximada SVRI de la ecuación para la amplitud (5.7) es solo una solución particular y no oscila cuando  $n$  es constante. Por ejemplo si se aplicara en el caso del perfil totalmente analítico de Epstein (2.106), la reflectividad sería nula para cualquier valor de  $D$ . Para obtener una reflectividad no nula, se introduce un único plano de unión con otra función  $n(z)$ , el coeficiente de reflexión así obtenido será consecuencia del plano de unión solamente.

### 5.2.3. Solución SVRI a la ecuación para el campo eléctrico con propagación en ambas direcciones.

Para construir una solución  $A(z)$  oscilatoria en una región homogénea, se puede recurrir al principio de superposición para las soluciones de la ecuación del campo (2.10)

$$U_{\text{SVRI}}(z) = A_{\text{SVRI}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{SVRI}}} + \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{SVRI}}} \right). \quad (5.19)$$

Nótese que la anterior expresión revela la existencia de un regla de superposición no lineal [50] para la ecuación de la amplitud (5.7), dado que el módulo  $A = |U_{\text{SVRI}}(z)|$  de (5.19) resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - \frac{k_0^2 (A_i^2 - A_r^2)^2}{A^3} = -k_0^2 n^2 A, \quad (5.20)$$

donde  $A_i^2 = \tilde{A}_i^* \tilde{A}_i$  y  $A_r^2 = \tilde{A}_r^* \tilde{A}_r$ . La ecuación (3.9) nos permite encontrar una expresión aproximada SVRI para la fase  $q$

$$q_{\text{SVRI}} = \int \frac{k_0}{A_{\text{SVRI}}^2} dz. \quad (5.21)$$

### 5.2.4. Uniendo las soluciones

Para obtener el coeficiente de reflexión del plano de unión, se considera un perfil  $n(z)$  continuo y monótonico que evoluciona de  $n_i$  a  $n_t$ . Se define este perfil por partes con dos funciones en  $z_0$ . A ambos lados del plano de unión,  $n(z)$  es analítica y varía gradualmente, de tal forma que la aproximación SVRI sea válida. La luz incide desde la izquierda, de manera que esta región tiene ondas planas que se propagan en ambas direcciones, la onda incidente y la reflejada. A la derecha del plano de unión, solo la onda transmitida se propaga, como se muestra en la figura 5.8. No se necesita suponer que alguna de las dos funciones que se unen para definir  $n(z)$  sea constante.

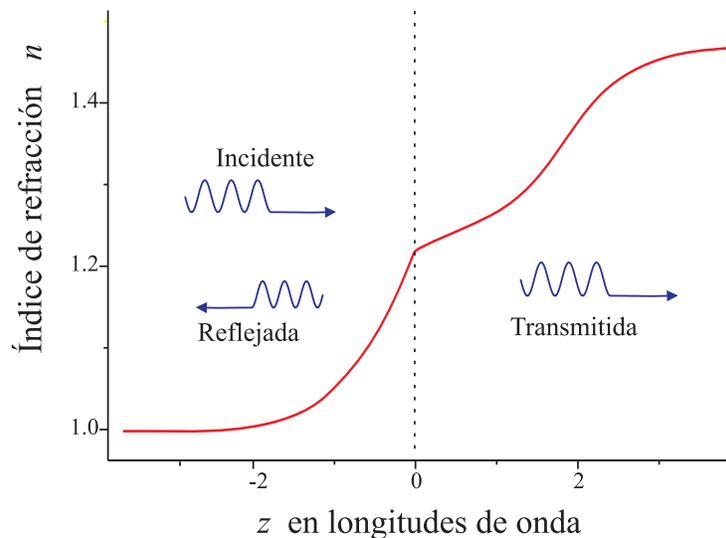


Figura 5.8: Un perfil  $n(z)$  continuo, monótonico que evoluciona de  $n_i$  a  $n_t$ . Dos funciones que varían gradualmente se unen en  $z = z_0 = 0$ . La luz incide desde la izquierda de modo que en esta región se contra-propagan ondas, la incidente y la reflejada. En la región a la derecha solo se propaga la onda transmitida.

La solución para la ecuación del campo en la región donde hay contra-propagación, a la izquierda del plano de unión  $z = z_0 = 0$ , es

$$U(z)_{\text{izq}} = A_{\text{izq}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}} + \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}} \right), \quad (5.22)$$

donde  $A_{\text{izq}}$  es la solución SVRI para la región izquierda de  $n(z)$ ,  $\tilde{A}_i$  y  $\tilde{A}_r$  son constantes complejas. Similarmente, a la derecha del plano de unión

$$U(z)_{\text{der}} = A_{\text{der}} \tilde{A}_t e^{iq_{\text{der}}},$$

donde  $A_{\text{der}}$  es la solución SVRI para la región derecha de  $n(z)$  y  $\tilde{A}_t$  es otra constante compleja. Para sujetarse a las condiciones a la frontera el campo eléctrico  $E$  y magnético  $H$  deben ser continuos sobre el plano de unión en  $z_0$ . Para el campo eléctrico

$$A_{\text{izq}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}} + \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}} \right) = A_{\text{der}} \tilde{A}_t e^{iq_{\text{der}}}. \quad (5.23)$$

Para el magnético

$$A'_{\text{izq}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}} + \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}} \right) + i A_{\text{izq}} q'_{\text{izq}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}} - \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}} \right) = (A'_{\text{der}} + i q'_{\text{der}} A_{\text{der}}) \tilde{A}_t e^{iq_{\text{der}}}.$$

La expresión anterior se puede reescribir simplificando algebraicamente y usando (5.21)

$$A_{\text{izq}} \left( \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}} - \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}} \right) = \left[ \frac{i}{k_0} \frac{A_{\text{izq}}}{A_{\text{der}}} (A'_{\text{izq}} A_{\text{der}} - A_{\text{izq}} A'_{\text{der}}) + \frac{A_{\text{izq}}^2}{A_{\text{der}}^2} \right] A_{\text{der}} \tilde{A}_t e^{iq_{\text{der}}}. \quad (5.24)$$

Sumando (5.23) y (5.24) se encuentra el coeficiente de transmisión

$$t = \frac{A_{\text{der}} \tilde{A}_t e^{iq_{\text{der}}}}{A_{\text{izq}} \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}}} = \frac{2A_{\text{der}}^2}{A_{\text{der}}^2 + A_{\text{izq}}^2 + \frac{i}{2k_0} \left( A_{\text{der}}^2 \frac{dA_{\text{izq}}^2}{dz} - A_{\text{izq}}^2 \frac{dA_{\text{der}}^2}{dz} \right)}. \quad (5.25)$$

Restando (5.23) y (5.24), junto con (5.25) llevan al coeficiente de reflexión

$$r = \frac{A_{\text{izq}} \tilde{A}_r e^{-iq_{\text{izq}}}}{A_{\text{izq}} \tilde{A}_i e^{iq_{\text{izq}}}} = \frac{A_{\text{der}}^2 - A_{\text{izq}}^2 - \frac{i}{2k_0} \left( A_{\text{der}}^2 \frac{dA_{\text{izq}}^2}{dz} - A_{\text{izq}}^2 \frac{dA_{\text{der}}^2}{dz} \right)}{A_{\text{der}}^2 + A_{\text{izq}}^2 + \frac{i}{2k_0} \left( A_{\text{der}}^2 \frac{dA_{\text{izq}}^2}{dz} - A_{\text{izq}}^2 \frac{dA_{\text{der}}^2}{dz} \right)}. \quad (5.26)$$

Se debe recordar que, en las ecuaciones (5.23), (5.24), (5.25) y (5.26), las cantidades  $A_{\text{der}}$ ,  $A_{\text{izq}}$  y sus derivadas se evalúan infinitesimalmente cerca de  $z_0$ . El coeficiente de reflexión en (5.26) es debido sólo al plano de unión en  $z_0$ , la reflectividad asociada al resto del perfil de índice de refracción se desprecia mientras la aproximación SVRI sea válida.

### 5.2.5. Evaluación del coeficiente de reflexión a menor orden no nulo.

En esta sección se evalúa el coeficiente de reflexión al menor orden no nulo, para diferentes tipos de perfiles. Nótese que  $r$  es un cociente de dos series de potencias en  $\frac{1}{k_0}$ . Este cociente también se puede expresar como una serie de potencias

$$r = \frac{a_0 + a_1 k_0^{-1} + a_2 k_0^{-2} + \dots}{b_0 + b_1 k_0^{-1} + b_2 k_0^{-2} + \dots} = r_0 + r_1 k_0^{-1} + r_2 k_0^{-2} + \dots, \quad (5.27)$$

donde las  $a$ 's y las  $b$ 's son los coeficientes del numerador y el denominador respectivamente. Llevando a cabo la división larga de polinomios, se puede escribir una relación de recurrencia para las  $r$ 's

$$r_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad r_1 = \frac{a_1 - r_0 b_1}{b_0}, \quad r_2 = \frac{a_2 - r_0 b_2 - r_1 b_1}{b_0}, \quad r_3 = \frac{a_3 - r_0 b_3 - r_1 b_2 - r_2 b_1}{b_0} \quad (5.28)$$

y para el término de orden  $j$

$$r_j = \frac{a_j}{b_0} - \sum_{l=0}^{j-1} \frac{r_l b_{j-l}}{b_0}. \quad (5.29)$$

Examinando (5.26) se puede ver que los dos primeros términos de ambos, numerador y denominador, producen los órdenes pares de las  $a$ 's y las  $b$ 's, ya que  $A_{\text{SVRI}}^2$  y su derivada solo incluyen términos de orden par. Las  $a$ 's y las  $b$ 's a orden par son

$$a_{2j} = [A_{\text{der}}^2]_{2j} - [A_{\text{izq}}^2]_{2j}, \quad b_{2j} = [A_{\text{der}}^2]_{2j} + [A_{\text{izq}}^2]_{2j}, \quad (5.30)$$

donde  $[A_{\text{der}}^2]_{2j}$  y  $[A_{\text{izq}}^2]_{2j}$  representan a los términos de orden  $2j$  de la serie (5.16). El factor  $\frac{i}{2k_0}$  de los dos últimos términos en ambos, el numerador y el denominador de (5.26), produce los órdenes impares de las  $a$ 's y las  $b$ 's. Los mencionados dos últimos términos son el resultado de la multiplicación de  $A_{\text{SVRI}}^2$  por su

derivada, permitiendo varias combinaciones para un determinado orden  $2j + 1$ . Por lo tanto, para orden impar  $2j + 1$

$$a_{2j+1} = -b_{2j+1} = -\frac{i}{2} \sum_{l=0}^j \left( [A_{\text{der}}^2]_{2l} \left[ \frac{dA_{\text{izq}}^2}{dz} \right]_{2(j-l)} - [A_{\text{izq}}^2]_{2l} \left[ \frac{dA_{\text{der}}^2}{dz} \right]_{2(j-l)} \right). \quad (5.31)$$

Considerando que  $n(z)$  es continua, ésto es  $n_{\text{izq}} = n_{\text{der}}$ , se pueden escribir explícitamente las primeras  $a$ 's y las  $b$ 's de forma breve

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{i}{2n^3} (n'_{\text{izq}} - n'_{\text{der}}), \quad a_2 = \frac{3}{8}n^{-5} (n_{\text{izq}}'^2 - n_{\text{der}}'^2) + \frac{1}{4}n^{-4} (n_{\text{der}}'' - n_{\text{izq}}''), \quad (5.32)$$

$$b_0 = 2n^{-1}, \quad b_1 = -\frac{i}{2n^3} (n'_{\text{izq}} - n'_{\text{der}}), \quad b_2 = -\frac{3}{8}n^{-5} (n_{\text{izq}}'^2 + n_{\text{der}}'^2) + \frac{1}{4}n^{-4} (n_{\text{der}}'' + n_{\text{izq}}''). \quad (5.33)$$

Los conjuntos completos de términos para órdenes superiores no se pueden escribir de forma tan breve, pero afortunadamente se puede escribir de forma simple el término que involucra a la derivada de mayor orden de  $n(z)$ . Siguiendo a (5.17), para las  $a$ 's de órdenes pares

$$a_{2j} = \left( \frac{i^{2j+2}}{n^{2j+2}2^{2j}} \right) \left( \frac{d^{2j}n_{\text{der}}}{dz^{2j}} - \frac{d^{2j}n_{\text{izq}}}{dz^{2j}} \right) + \mathcal{O}(< 2j). \quad (5.34)$$

Para los órdenes pares, se escoje solo a  $l = 0$  de la suma en (5.31), ya que ese es el conjunto de términos que contiene la derivada de mayor orden de  $n(z)$

$$a_{2j+1} = -\frac{i}{2} [A^2]_0 \left( \frac{i^{2j+2}}{n^{2j+2}2^{2j}} \right) \left( \frac{d^{2j+1}n_{\text{izq}}}{dz^{2j+1}} - \frac{d^{2j+1}n_{\text{der}}}{dz^{2j+1}} \right) + \mathcal{O}(< 2j + 1), \quad (5.35)$$

donde se ha empleado (5.18). Simplificando lo anterior

$$a_{2j+1} = \left( \frac{i^{2j+3}}{n^{2j+3}2^{2j+1}} \right) \left( \frac{d^{2j+1}n_{\text{der}}}{dz^{2j+1}} - \frac{d^{2j+1}n_{\text{izq}}}{dz^{2j+1}} \right) + \mathcal{O}(< 2j + 1), \quad (5.36)$$

substituyendo  $2j + 1$  por  $2j$  nos permite ver que (5.34) y (5.36) son equivalentes.

Si se clasifican los perfiles  $n(z)$  según su clase, dependiendo de la derivada discontinua de mas bajo orden, se obtienen expresiones simples para el coeficiente de reflexión hasta el menor orden no nulo. Ninguna de las funciones que se unen en  $z_0$  tiene que ser forzosamente una constante.

### 5.2.5.1. Perfil de clase $C^0$

El perfil de índice de refracción  $n(z)$  es continuo en en  $z_0$  pero no su primera derivada y posiblemente derivadas de orden superior. Debido a que  $a_0$  se anula y por lo tanto  $r_0$  también, el término de menor orden que no se nula del coeficiente de reflexión es de primer orden

$$r \approx r_1 k_0^{-1} = \frac{a_1}{b_0} k_0^{-1} = i \frac{n'_{\text{izq}} - n'_{\text{der}}}{4k_0 n^2}, \quad (5.37)$$

donde se empleó (5.28) y (5.32).

### 5.2.5.2. Perfil de clase $C^1$

El perfil de índice de refracción  $n(z)$  es continuo en en  $z_0$  y su primera derivada también, pero no la segunda ni posiblemente derivadas de orden superior. Ésto significa que  $a_0$  y  $a_1$  se anulan así como  $r_0$  y  $r_1$ . Esta vez el término de menor orden que no se nula es de segundo orden

$$r \approx r_2 k_0^{-2} = \frac{a_2}{b_0} k_0^{-2}, \quad (5.38)$$

donde se tomó en cuenta a (5.28). La cantidad  $a_2$  es la suma de dos pares de términos, un par que involucra a la primera derivada del índice de refracción y otro a la segunda. Los términos que contienen a la primera derivada de  $n(z)$  en (5.32) se cancelan. Solamente los términos del numerador que tienen a la derivada de mayor orden de  $n(z)$  no se cancelan, entonces

$$r \approx \frac{n''_{\text{der}} - n''_{\text{izq}}}{8k_0^2 n^3}. \quad (5.39)$$

### 5.2.5.3. Perfil de clase $C^2$

El perfil de índice de refracción  $n(z)$  es continuo en en  $z_0$ , su primera y segunda derivada también, pero no la tercera ni posiblemente derivadas de orden superior. Esta vez  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  se anulan así como  $r_0$ ,  $r_1$  y  $r_2$ . El término de menor orden que no se anula del coeficiente de reflexión es de tercer orden

$$r \approx r_3 k_0^{-3} = \frac{a_3}{b_0} k_0^{-3}. \quad (5.40)$$

Dado que  $n'_{\text{der}} = n'_{\text{izq}}$  y  $n''_{\text{der}} = n''_{\text{izq}}$  en  $z_0$ , los términos de  $a_3$  que contienen primeras y segundas derivadas de  $n(z)$  en (5.31) se cancelan. Eso deja solo a los términos que involucran a las derivadas de mayor orden de  $n(z)$ , los resaltados en (5.36)

$$r \approx i \frac{n'''_{\text{der}} - n'''_{\text{izq}}}{16k_0^3 n^4}. \quad (5.41)$$

### 5.2.5.4. Perfil de clase $C^{2j-1}$ y $C^{2j}$

En el caso de un perfil de clase  $C^{2j-1}$ ,  $n(z)$  es continuo en en  $z_0$  así como todas las derivadas hasta la de orden  $2j - 1$ , pero la de orden  $2j$  y posiblemente derivadas de orden superior no son continuas. En ese caso  $a_0$ ,  $a_1$ , ...,  $a_{2j-1}$  se anulan así como  $r_0$ ,  $r_1$ , ...,  $r_{2j-1}$ . El término de menor orden que no se anula es de orden  $2j$

$$r \approx r_{2j} k_0^{-2j} = \frac{a_{2j}}{b_0} k_0^{-2j}. \quad (5.42)$$

Como  $\frac{d^m n_{\text{der}}}{dz^m} = \frac{d^m n_{\text{izq}}}{dz^m}$  para  $m = 1, 2, 3, \dots, 2j - 1$  en  $z_0$ , los términos que tienen las derivadas de  $n(z)$  de orden  $2j - 1$  y de órdenes menores en la primera de las ecuaciones de (5.30), se cancelan. Eso deja sólo a los términos con las derivadas de orden  $2j$ , la ecuación (5.34) permite escribir estos términos

$$r \approx \frac{i^{2j+2}}{2^{2j+1} k_0^{2j} n^{2j+1}} \left( \frac{d^{2j} n_{\text{der}}}{dz^{2j}} - \frac{d^{2j} n_{\text{izq}}}{dz^{2j}} \right). \quad (5.43)$$

Similarmente para un perfil  $C^{2j}$ ,

$$r \approx r_{2j+1} k_0^{-2j+1} = \frac{a_{2j+1}}{b_0} k_0^{-2j-1}. \quad (5.44)$$

Como  $\frac{d^g n_{\text{der}}}{dz^g} = \frac{d^g n_{\text{izq}}}{dz^g}$  para  $g = 1, 2, 3, \dots, 2j$  en  $z_0$ , los términos que tienen las derivadas de  $n(z)$  de orden  $2j$  y de órdenes menores en (5.31), se cancelan. Eso deja sólo a los términos con las derivadas de orden  $2j + 1$ , la ecuación (5.36) permite escribir estos términos

$$r \approx \frac{i^{2j+3}}{n^{2j+2} k_0^{2j+1} 2^{2j+2}} \left[ \frac{d^{2j+1} n_{\text{der}}}{dz^{2j+1}} - \frac{d^{2j+1} n_{\text{izq}}}{dz^{2j+1}} \right]. \quad (5.45)$$

Nuevamente cambiando  $2j + 1$  por  $2j$  en esta última ecuación se puede ver que (5.43) y (5.45) son equivalentes. Para  $j$  par o impar en  $C^j$ , el término de menor orden que no se anula del coeficiente de reflexión se escribe

$$r \approx \frac{i^{j+3}}{n^{j+2} k_0^{j+1} 2^{j+2}} \left[ \frac{d^{j+1} n_{\text{der}}}{dz^{j+1}} - \frac{d^{j+1} n_{\text{izq}}}{dz^{j+1}} \right]. \quad (5.46)$$

### 5.2.6. Incremento en la reflexión.

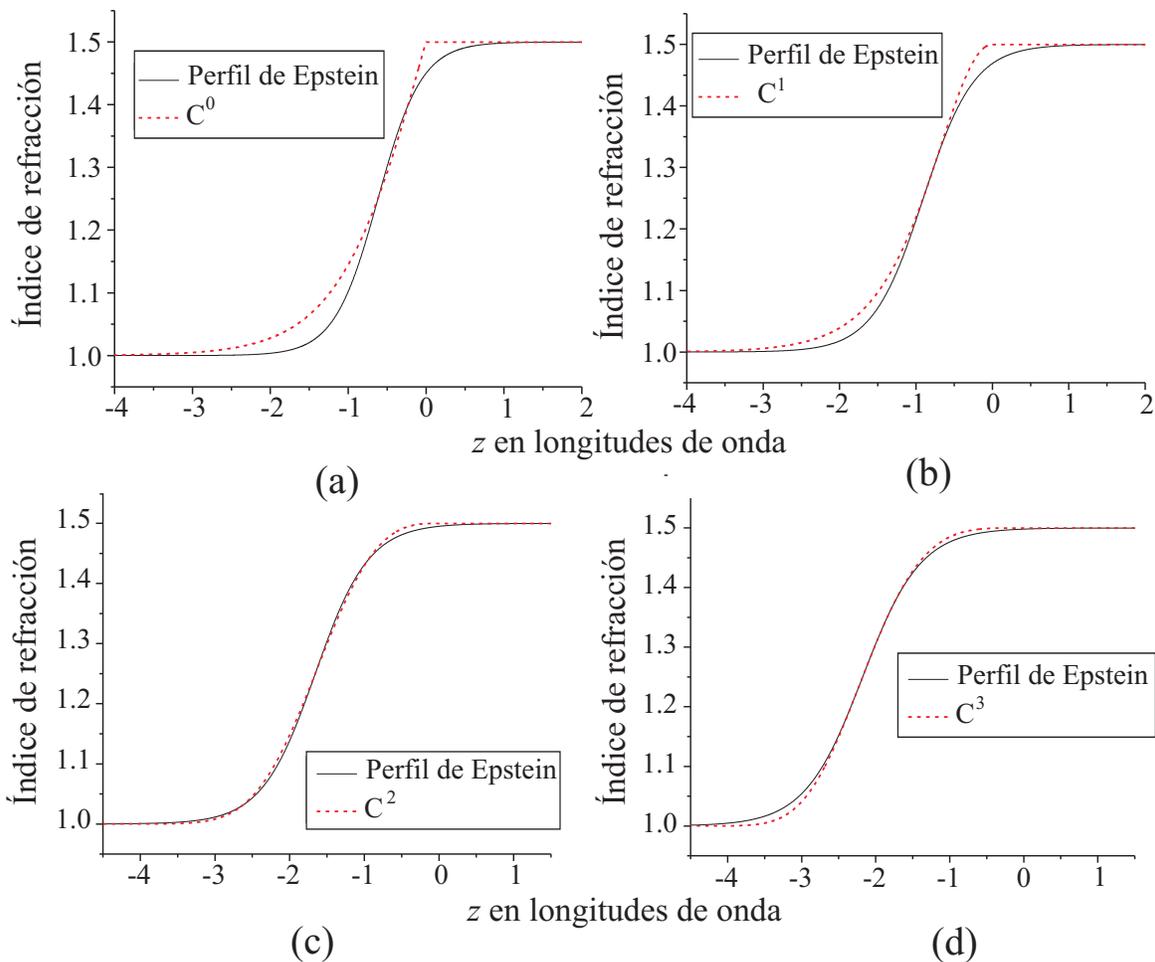


Figura 5.9: (a) Primera derivada discontinua, perfil de clase  $C^0$ . (b) Segunda derivada discontinua, perfil de clase  $C^1$ . (c) Tercera derivada discontinua, perfil de clase  $C^2$ . (d) Cuarta derivada discontinua, perfil de clase  $C^3$ . El perfil de analítico de Epstein (2.106) se grafica también como referencia.

Para investigar el incremento de la reflexión debido a las discontinuidades en las derivadas de  $n(z)$ , comparemos funciones completamente analíticas con sus contra partes que si tienen alguna discontinuidad.

Consideremos por un lado el perfil de Epstein (2.106) y por otro funciones continuas, definidas por partes al unir dos funciones originalmente analíticas, con alguna o algunas derivadas discontinuas en el plano de unión. En la figura 5.9, se muestran cuatro ejemplos diferentes de perfiles definidos por partes [58]:  $C^0$  se construye uniendo una tangente hiperbólica con una función constante,  $C^1$  es una secante hiperbólica cuadrada unida a una constante,  $C^2$  es una exponencial cúbica unida a una constante y  $C^3$  es una exponencial cuártica unida a una constante. Todos ellos se grafican junto al perfil de Epstein con  $D = 1.65$ ,  $D = 1.95$ ,  $D = 2.10$  y  $D = 2.30$  respectivamente. Para cada pareja se hace coincidir el gradiente máximo del índice de refracción. El plano de unión siempre se localiza en  $z = 0$ . Se calculan las reflectividades de los perfiles definidos por partes con el resultado (5.46). Para los perfiles de Epstein, se calculan las reflectividades con (2.112) y se comparan los resultados en la tabla 5.7. Aunque el perfil  $C^0$  exhibe un incremento más gradual que su contra parte analítica, su reflectividad es  $2.75 \times 10^5$  veces mayor debido al plano de unión y su discontinuidad en la primera derivada. Conforme la clase  $j$  en  $C^j$  aumenta, los dos perfiles de cada cuadro se parecen más y la diferencia en sus reflectividades también disminuye, de cualquier manera esa diferencia es significativa. Las discontinuidades en las derivadas de  $n(z)$  claramente incrementan la reflexión. Éstos son solo algunos ejemplos particulares, pero muestran el comportamiento general.

Reflectividad %				
	$C^0$ y $D = 1.65\lambda$	$C^1$ y $D = 1.95\lambda$	$C^2$ y $D = 2.10\lambda$	$C^3$ y $D = 2.30\lambda$
$n(z)$ definido por partes	$6.27 \times 10^{-3}$	$8.15 \times 10^{-5}$	$5.15 \times 10^{-8}$	$2.09 \times 10^{-10}$
Perfil de Epstein	$2.28 \times 10^{-8}$	$5.03 \times 10^{-10}$	$6.74 \times 10^{-11}$	$4.82 \times 10^{-12}$

Cuadro 5.7: Reflectividades para los perfiles analíticos y los definidos por partes. La clase de perfil  $C^j$  y el parámetro  $D$  están indicados.

### 5.2.7. Comparación de resultados para $r$ a menor orden no nulo.

Los coeficientes de reflexión complejos obtenidos analíticamente mediante la aproximación SVRI se evalúan para los ejemplos mostrados en la figura 5.9 y se exponen en la tabla 5.8. Junto a ellos se muestran los correspondientes resultados para  $r$  estimados con base en las soluciones numéricas de la ecuación de la amplitud, sin haber hecho ninguna aproximación relacionada con la gradualidad en el cambio del índice de refracción con respecto a  $z$ . Los resultados analíticos fueron estimados con (5.46), es decir a menor orden no nulo. Los coeficientes de reflexión obtenidos con ambos métodos son muy similares. En el caso del módulo la diferencia es menor del 1% para las clases  $C^0 - C^2$ . Cuando la reflectividad se hace más pequeña, las diferencias relativas se hacen algo mayores. En cuanto a la fase, para las clases  $C^0 - C^2$  también la diferencia relativa es de menos del 1%. Para la clase  $C^3$ , con una reflectividad muy pequeña, la diferencia relativa en la fase es del 3%.

En lo relacionado con los resultados analíticos, la inexactitud es debida a dos razones *i*) solo retuvimos el término de menor orden que no se anula bajo la aproximación SVRI y *ii*) la reflexión debida a la parte suave del perfil se despreció por completo. En el caso de las soluciones numéricas la inexactitud se debe a los intervalos pequeños pero finitos de discretización, la función original  $n(z)$  que es continua, se reemplaza por puntos discretos cuando se aplica el método de las diferencias finitas. La discontinuidad de la derivada en el plano de unión se puede ver simplemente como una discontinuidad más grande que las introducidas inherentemente por la discretización.

En general, al incrementarse  $j$  para la clase  $C^j$  del perfil  $n(z)$ , la reflectividad debida a la discontinuidad

decrece y ésta se acerca más a la que produce la parte suave del perfil. Matemáticamente y de forma correspondiente, al aumentar el valor de  $j$  y por lo tanto el orden de la aproximación SVRI que se necesita emplear, se debe tener cuidado de estar dentro de la región convergente de la serie asintótica (5.8). Una regla práctica para sondear la convergencia de la serie puede ser la siguiente

$$\left| \frac{d^m n}{dz^m} \right|_{z=z_{C_m}} > k_0^{-1} \left| \frac{d^{m+1} n}{dz^{m+1}} \right|_{z=z_{C_{m+1}}}, \quad (5.47)$$

donde  $z_{C_m}$  y  $z_{C_{m+1}}$  son los valores de  $z$  para los que la derivada correspondiente tiene el valor extremo absoluto. En el caso particular en que  $m = 0$ , la condición que corresponde es  $1 > k_0^{-1} \left| \frac{dn}{dz} \right|_{z=z_C}$ . Si la expresión (5.47) se cumple, se puede confiar en que el orden  $m$  de la aproximación SVRI aún es válido. Por otro lado si  $j$  es suficientemente grande, el tamaño de la discontinuidad del plano de unión se va pareciendo al de las discontinuidades que introduce la discretización del método numérico. Con ambos métodos, el numérico y el analítico, la exactitud para obtener el coeficiente de reflexión de todo el perfil se espera que disminuya conforme  $j$  se incrementa. La mayor diferencia relativa entre los resultados obtenidos con estos métodos para  $C^3$  puede ser consecuencia de esto.

Coeficiente de reflexión complejo $r$					
		Clase de perfil $n(z)$			
		$C^0$	$C^1$	$C^2$	$C^3$
Analítico	módulo	$7.88 \times 10^{-3}$	$8.93 \times 10^{-4}$	$2.29 \times 10^{-5}$	$9.85 \times 10^{-7}$
	fase	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
Numérico	módulo	$7.92 \times 10^{-3}$	$9.03 \times 10^{-4}$	$2.27 \times 10^{-5}$	$1.44 \times 10^{-6}$
	fase	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{224}$	$\frac{\pi}{1571}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{785}$	$-\pi - \frac{\pi}{31}$

Cuadro 5.8: El módulo y la fase del coeficiente de reflexión complejo  $r$ , evaluado para las funciones mostradas en la figura 5.9. Los resultados obtenidos por ambos métodos son muy similares.

### 5.2.8. Consistencia con otros resultados exactos y aplicaciones.

Es interesante comparar estos resultados obtenidos mediante la aproximación SVRI con los resultados exactos conocidos y revisados en la sección 2.2.8. Para el perfil de Rayleigh (Clase  $C^0$ ) el coeficiente de reflexión está dado por la ecuación (2.96). Si el parámetro  $\frac{1}{ak_0}$  es pequeño, es decir  $\frac{1}{ak_0} \ll 1$ , tenemos la aproximación de una longitud de onda pequeña comparada con la distancia de variación del índice de refracción, lo cual corresponde con la aproximación SVRI. En ese caso se pueden desarrollar en serie de Taylor las raíces cuadradas que hay tanto en el numerador como en el denominador. Siguiendo luego las mismas reglas para obtener una serie de potencias a partir de un cociente de series, las que se expusieron en la sección 5.2.5, obtenemos a primer orden

$$r \approx \frac{i}{4k_0 a}. \quad (5.48)$$

Examinando nuevamente el perfil de Rayleigh (2.94) suponiendo incidencia normal,  $\sigma = 0$ , podemos ver que

$$\frac{n'_{\text{der}}}{n_{\text{der}}^2} = -\frac{1}{a} \quad \text{y} \quad n'_{\text{izq}} = 0.$$

Introducimos lo anterior en (5.48) para eliminar al parámetro  $a$  y reescribimos el coeficiente de reflexión

$$r \approx i \frac{n'_{\text{izq}} - n'_{\text{der}}}{4k_0 n^2}.$$

Hemos obtenido nuevamente la expresión (5.37), ésto significa que para el caso del perfil de Rayleigh los resultados son consistentes

El perfil de Brekhovskikh es otro de clase  $C^0$ , su coeficiente de reflexión es (2.104). El considerar a  $\frac{a}{k_0}$  pequeña, es decir  $\frac{a}{k_0} \ll 1$ , equivale a una variación gradual del índice de refracción comparando con la longitud de onda, nuevamente la aproximación SVRI. Considerando  $\frac{a}{k_0} \ll 1$ , dado que  $\zeta_0 = -\left(\frac{k_0}{a}\right)^{2/3}$ , podemos decir que  $\zeta_0 \ll 0$ . La interpretación que se puede hacer de la expresión anterior es que el plano de unión se encuentra en la región muy negativa de  $\zeta$ . En esa región son válidas las formas asintóticas (2.102) y (2.103), que se pueden reescribir como

$$\text{Bi}(\zeta) + i\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{\pi (-\zeta)^{1/4}} \exp i \left[ \frac{2}{3} (-\zeta)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (5.49)$$

Introduciendo (5.49) en (2.104), evaluando en  $\zeta_0$  y simplificando

$$r = -\frac{i}{8(-\zeta_0)^{3/2} - i} = -\frac{i}{8\frac{k_0}{a} - i}.$$

Volviendo a desarrollar el coeficiente de reflexión en potencias de  $\frac{1}{k_0}$  y quedándonos con el menor orden que no se anula

$$r \approx -i \frac{a}{8k_0}. \quad (5.50)$$

Analizando el perfil de Brekhovskikh se puede confirmar que  $a = 2nn'_{\text{der}}$  y  $n'_{\text{izq}} = 0$ , se debe considerar también que cuando  $\zeta = \zeta_0$  el índice de refracción es  $n_0 = 1$ , sustituyendo lo anterior en (5.50)

$$r \approx i \frac{n'_{\text{der}} - n'_{\text{der}}}{4k_0 n^2}.$$

El resultado exacto para el perfil de Brekhovskikh es también consistente con nuestra aproximación SVRI.

Al aumentar el valor de  $j$  para la clase de perfil  $C^j$ , es decir, entre más se suaviza el plano de unión la reflectividad disminuye. Este hecho explica porqué las capas antireflejantes llamadas “quínticas” funcionan tan bien [70]. Uno pudiera pensar que una capa con perfil clase  $C^3$  funcionaría mejor, pero para mantener un índice de refracción que varíe suavemente, la capa tendría que ser más gruesa, una característica que no siempre es deseable.

### 5.2.9. Conclusiones de la sección 5.2

Se obtuvo el coeficiente de reflexión complejo al menor orden no nulo en la aproximación SVRI para discontinuidades en la derivada de orden  $m$  de forma analítica. La expresión es simple y depende de la derivada de menor orden que sea discontinua a ambos lados del plano de unión. Hemos mostrado que la reflectividad se incrementa con la presencia de derivadas discontinuas aunque el perfil mismo sea continuo.

La reflectividad asociada a estos planos de unión puede ser varios órdenes de magnitud superior a la reflectividad asociada a la parte suave del perfil. La reflectividad disminuye conforme aumenta el orden de la derivada discontinua. En cuanto a la fase, la proposición “Para un perfil  $n(z)$  clase  $C^j$ , el cambio de fase debido a la reflexión en el plano de unión es  $(1-j)\frac{\pi}{2}$  cuando la derivada discontinua de más bajo orden aumenta y  $(-1-j)\frac{\pi}{2}$  para el caso en que ésta decrece” se ha probado. No solo hay cambios de fase de  $\pm\pi$  para la reflexión como predicen las ecuaciones de Fresnel, sino que cambios de  $\pm\pi/2$  también pueden ocurrir cuando  $(d^{2m}n/dz^{2m})$  es discontinua. El signo del cambio depende si la derivada discontinua de menor orden se incrementa o disminuye en el plano de unión. La ecuación (5.46) puede verse como una generalización de las relaciones de Fresnel, para incidencia normal, cuando las derivadas de  $n(z)$  son discontinuas y no el índice de refracción mismo. Las predicciones analíticas obtenidas en esta sección 5.2 y los resultados numéricos obtenidos en la anterior 5.1 son consistentes. Otros resultados teóricos conocidos también son coincidentes con estas predicciones.

### 5.3. Comparaciones entre los resultados numéricos y analíticos aproximados SVRI, con uno o varios órdenes de aproximación.

En esta sección se comparan los coeficientes de reflexión obtenidos mediante la solución numérica de la ecuación de la amplitud (3.11) en la sección 5.1 con los resultados que predice la ecuación (5.46), deducida en la sección 5.2 mediante la aproximación SVRI a menor orden no nulo. También se comparan algunas de las soluciones a la ecuación de la amplitud obtenidas numéricamente en sección 5.1 con las soluciones analíticas construidas por partes mediante la aproximación SVRI, a varios órdenes: primero, segundo, tercero y cuarto.

#### 5.3.1. Comparando coeficientes de reflexión.

En la tabla 5.9 se presentan los resultados de los coeficientes de reflexión para los perfiles de la sección 5.1, los obtenidos mediante las soluciones numéricas de la ecuación de la amplitud y los que nos da la ecuación (5.46), bajo la aproximación SVRI a menor orden no nulo. En el caso especial de los perfiles discontinuos “step+” y “step-” se usan las ecuaciones de Frsenel como expresiones analíticas para encontrar  $r$ . Los resultados son muy parecidos, la diferencia comienza a ser significativa cuando el módulo de  $r$  se acerca a  $10^{-7}$ .

#### 5.3.2. Más términos para el coeficiente de reflexión.

Con el objeto de hacer comparaciones más interesantes entre los resultados de las secciones 6.1 y 6.2 es conveniente calcular algunos términos más del coeficiente de reflexión, de mayor orden en  $\frac{1}{k_0}$ . Para ello, se puede escribir explícitamente y de forma completa a  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  y  $r_4$ , basándose en las ecuaciones de (5.27) a (5.33).

$$r_1 = i \frac{n'_{izq} - n'_{der}}{4n^2},$$

$$r_2 = \frac{1}{8} \left( \frac{n_{izq}^{\prime 2} - n'_{izq} n'_{der} - 2n_{der}^{\prime 2}}{n^4} + \frac{n_{der}'' - n_{izq}''}{n^3} \right),$$

$$r_3 = \frac{i}{16} \left( \frac{31n_{der}^{\prime 3} - 9n_{der}^{\prime 2} n'_{izq} + 3n'_{der} n_{izq}^{\prime 2} - 25n_{izq}^{\prime 3}}{4n^6} + \frac{6n_{izq}'' n'_{izq} + n_{der}'' n'_{izq} - 7n_{der}'' n'_{der}}{n^5} + \frac{n_{der}''' - n_{izq}'''}{n^4} \right),$$

Perfil $n(z)$	Coeficiente de reflexión			
	módulo		fase	
	numérico	analítico	numérico	analítico
step+	$0.200000088 \pm 3.1 \times 10^{-8}$	0.2	$\frac{\pi}{2} (2.0000 \pm 0.0000)$	$\pi$
step-	$0.200000063 \pm 45 \times 10^{-8}$	0.2	$\frac{\pi}{2} (0.0000 \pm 0.0000)$	0
lin&tanh+	$(1.7765 \pm 0.0000) \times 10^{-2}$	$1.7723 \times 10^{-2}$	$\frac{\pi}{2} (-1.0464 \pm 0.0004)$	$-\frac{\pi}{2}$
tanh&lin+	$(7.8954 \pm 0.0085) \times 10^{-3}$	$7.8770 \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2} (0.9780 \pm 0.0007)$	$\frac{\pi}{2}$
lin&tanh-	$(7.9006 \pm 0.0002) \times 10^{-3}$	$7.8770 \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2} (1.0204 \pm 0.0003)$	$\frac{\pi}{2}$
tanh&lin-	$(1.7766 \pm 0.0005) \times 10^{-2}$	$1.7723 \times 10^{-2}$	$\frac{\pi}{2} (-0.9561 \pm 0.0004)$	$-\frac{\pi}{2}$
lin&sech+	$(3.0929 \pm 0.0000) \times 10^{-3}$	$3.0125 \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2} (-0.0104 \pm 0.0000)$	0
sech&lin+	$(8.9958 \pm 0.0046) \times 10^{-4}$	$8.9259 \times 10^{-4}$	$\frac{\pi}{2} (-0.0016 \pm 0.0003)$	0
lin&sech-	$(9.0027 \pm 0.0009) \times 10^{-4}$	$8.9259 \times 10^{-4}$	$\frac{\pi}{2} (2.0000 \pm 0.0004)$	$\pi$
sech&lin-	$(3.0920 \pm 0.0006) \times 10^{-3}$	$3.0125 \times 10^{-3}$	$\frac{\pi}{2} (2.0084 \pm 0.0003)$	$\pi$
lin&cubexp+	$(1.1570 \pm 0.0004) \times 10^{-4}$	$1.1575 \times 10^{-4}$	$\frac{\pi}{2} (1.0071 \pm 0.0003)$	$\frac{\pi}{2}$
cubexp&lin+	$(2.2495 \pm 0.0073) \times 10^{-5}$	$2.2865 \times 10^{-5}$	$\frac{\pi}{2} (-0.9987 \pm 0.0006)$	$-\frac{\pi}{2}$
lin&cubexp-	$(2.2756 \pm 0.0048) \times 10^{-5}$	$2.2865 \times 10^{-5}$	$\frac{\pi}{2} (-1.0001 \pm 0.0008)$	$-\frac{\pi}{2}$
cubexp&lin-	$(1.1539 \pm 0.0009) \times 10^{-4}$	$1.1575 \times 10^{-4}$	$\frac{\pi}{2} (0.9926 \pm 0.0014)$	$\frac{\pi}{2}$
lin&quartexp+	$(7.4301 \pm 0.0285) \times 10^{-6}$	$7.4765 \times 10^{-6}$	$\frac{\pi}{2} (2.0035 \pm 0.0014)$	$\pi$
quartexp&lin+	$(1.3329 \pm 0.0223) \times 10^{-6}$	$9.8456 \times 10^{-7}$	$\frac{\pi}{2} (2.2527 \pm 0.0091)$	$\pi$
lin&quartexp-	$(1.3514 \pm 0.0217) \times 10^{-6}$	$9.8456 \times 10^{-7}$	$\frac{\pi}{2} (-0.2125 \pm 0.0077)$	0
quartexp&lin-	$(7.2999 \pm 0.0416) \times 10^{-6}$	$7.4765 \times 10^{-6}$	$\frac{\pi}{2} (0.0104 \pm 0.0023)$	0

Cuadro 5.9: Comparación de coeficientes de reflexión obtenidos mediante las soluciones numéricas de la ecuación de la amplitud y los que nos da la ecuación (5.46), bajo la aproximación SVRI a menor orden no nulo. En el caso especial de los perfiles discontinuos “step+” y “step-” se usan las ecuaciones de Fresnel como expresiones analíticas para encontrar  $r$ .

$$\begin{aligned}
 r_4 = & \frac{182n_{\text{der}}'^4 - 35n_{\text{der}}'^3 n_{\text{izq}}' + 9n_{\text{der}}'^2 n_{\text{izq}}'^2 - 29n_{\text{der}}' n_{\text{izq}}'^3 - 127n_{\text{izq}}'^4}{128n^8} + \\
 & + \frac{-3n_{\text{der}}'' \left( 77n_{\text{der}}'^2 - 10n_{\text{der}}' n_{\text{izq}}' + n_{\text{izq}}'^2 \right) + n_{\text{izq}}'' \left( -n_{\text{der}}'^2 + 26n_{\text{der}}' n_{\text{izq}}' + 179n_{\text{izq}}'^2 \right)}{128n^7} + \\
 & + \frac{1}{32} \left( \frac{n_{\text{der}}''' \left( 11n_{\text{der}}' - n_{\text{izq}}' \right) - n_{\text{izq}}''' \left( n_{\text{der}}' + 9n_{\text{izq}}' \right) + 7 \left( n_{\text{der}}'' - n_{\text{izq}}'' \right)}{n^6} + \frac{n_{\text{izq}}'''' - n_{\text{der}}''''}{n^5} \right)
 \end{aligned}$$

Por simplicidad, no se involucra más allá de la cuarta derivada de  $n(z)$  en esta sección 5.3.

### 5.3.3. Comparación de las soluciones a la ecuación de la amplitud.

Se toman varios ejemplos significativos de entre los perfiles estudiados en la sección 5.1 para hacer las comparaciones. En el caso de aquellos perfiles en los que la luz incide desde el lado homogéneo, desde dónde el índice de refracción es constante, la solución a la ecuación adimensional de la amplitud en esa región es (3.28), sujeta a la condición (3.30). El cociente  $\frac{A_2}{A_1} = \left| \frac{\tilde{A}_r}{\tilde{A}_i} \right|$  es el módulo de  $r$  y  $\Delta\beta$  es la diferencia entre las fases de la onda incidente y reflejada en  $z_0 = 0$ , el plano de unión, es decir que es la fase del coeficiente de reflexión complejo, entonces se puede escribir

$$\frac{1}{n} = \tilde{A}_i \tilde{A}_i^* - \tilde{A}_r \tilde{A}_r^*, \quad r = \frac{\tilde{A}_r}{\tilde{A}_i}, \quad \Delta\beta = \frac{r}{2r^*}.$$

A la derecha del plano de unión, en la región inhomogénea, en la que el índice de refracción varía gradualmente la solución a la ecuación de la amplitud se puede aproximar como  $A \approx A_{\text{SVRI}}$ . Tomando en cuenta lo anterior se puede reescribir la solución como

$$A = \begin{cases} (n_a (1 - rr^*))^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + rr^* + 2 (rr^*)^{\frac{1}{2}} \cos \left( 2k_0 n_a z + \frac{r}{2r^*} \right)} & z < 0 \\ A_{\text{SVRI}} & z \geq 0 \end{cases}. \quad (5.51)$$

Cuando la luz incide desde la región inhomogénea, la solución también se puede aproximar empleando  $A_{\text{SVRI}}$ , como lo sugiere la expresión (5.22)

$$A = \begin{cases} A_{\text{SVRI}} (1 - rr^*)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + rr^* + 2 (rr^*)^{\frac{1}{2}} \cos \left( 2q_{\text{SVRI}} + \frac{r}{2r^*} \right)} & z < 0 \\ n_g^{-\frac{1}{2}} & z \geq 0 \end{cases}, \quad (5.52)$$

donde  $q_{\text{SVRI}} = k_0 \int_z^0 \frac{1}{A_{\text{SVRI}}^2} dz \approx k_0 \int_z^0 n dz$ .

#### 5.3.3.1. Perfil de clase $C^0$

Se toma como ejemplo el perfil de índice de refracción “tanh&lin” descrito en (5.4). En la figura 5.10 se grafica nuevamente la solución numérica a la ecuación de la amplitud para dicho perfil, pero ahora acompañada de soluciones analíticas aproximadas dada por (5.51). se muestra la solución analítica, en los alrededores de  $z = 0$ , con tres grados de aproximación *i*) el coeficiente de reflexión y la amplitud a menor orden:  $r \approx r_1 k_0^{-1}$  y  $A_{\text{SVRI}} \approx A_0$ , *ii*) con un término más cada uno:  $r \approx r_1 k_0^{-1} + r_2 k_0^{-2}$  y  $A_{\text{SVRI}} \approx A_0 + A_2 k_0^{-2}$ , *iii*) con todos los términos que se puedan adicionar sin ir más allá de la cuarta derivada del índice de refracción:  $r \approx r_1 k_0^{-1} + r_2 k_0^{-2} + r_3 k_0^{-3} + r_4 k_0^{-4}$  y  $A_{\text{SVRI}} \approx A_0 + A_2 k_0^{-2} + A_4 k_0^{-4}$ . A la

escala de la figura principal, prácticamente no se distingue una línea de otra, sin embargo ampliando por secciones ya se aprecia la diferencia entre soluciones. En el punto de unión, en  $z = 0$ , se alcanza a ver un pequeño “salto” en el caso  $i$ , ésto es porque es una solución aproximada construida por partes, en los casos  $ii$  e  $iii$  ese salto ya es muy pequeño para notarlo. De hecho, la gráfica de (5.51) con mayor aproximación es casi idéntica a la solución numérica.

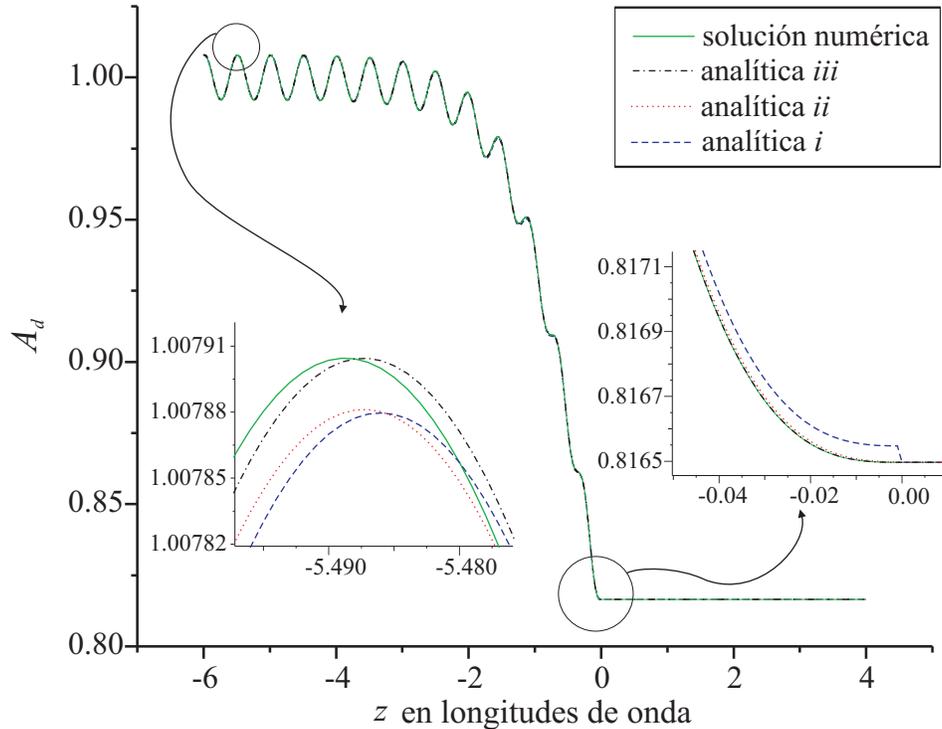


Figura 5.10: Para un perfil clase  $C^0$ , la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “tanh&lin+” descrito en (5.4) acompañada de la solución analítica, con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  que se exponen en la sección 5.3.3.1. Acercamientos a un máximo local y a la región  $z \sim 0$ .

### 5.3.3.2. Perfil de clase $C^1$

La figura 5.11 muestra a la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “lin&sech+” descrito en 5.3 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  descritos en la sección 5.3.3.1. El caso  $i$  no presenta oscilaciones en la región  $z < 0$  pues  $r_1 = 0$ . En el plano de unión de las soluciones construidas por partes no hay saltos conspicuos, ésto pasa en general para los perfiles en los que la luz incide desde la región homogénea. Nuevamente el caso  $iii$ , el de mayor grado de aproximación, es el que se acerca más a la solución numérica.

### 5.3.3.3. Perfil de clase $C^2$

La figura 5.12 muestra la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “cubexp&lin+” descrito en 5.4 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$ . Los casos  $i$  y  $ii$  no presentan oscilaciones en la región  $z < 0$  pues  $r_1 = r_2 = 0$ . Nuevamente el caso  $iii$ , es el que más se parece a la solución numérica, no solo porque reproduce las oscilaciones, también se acerca más en la región  $z \approx 0$ . En esta región los casos  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  no se aproximan de forma monótonica sino de forma alternada.

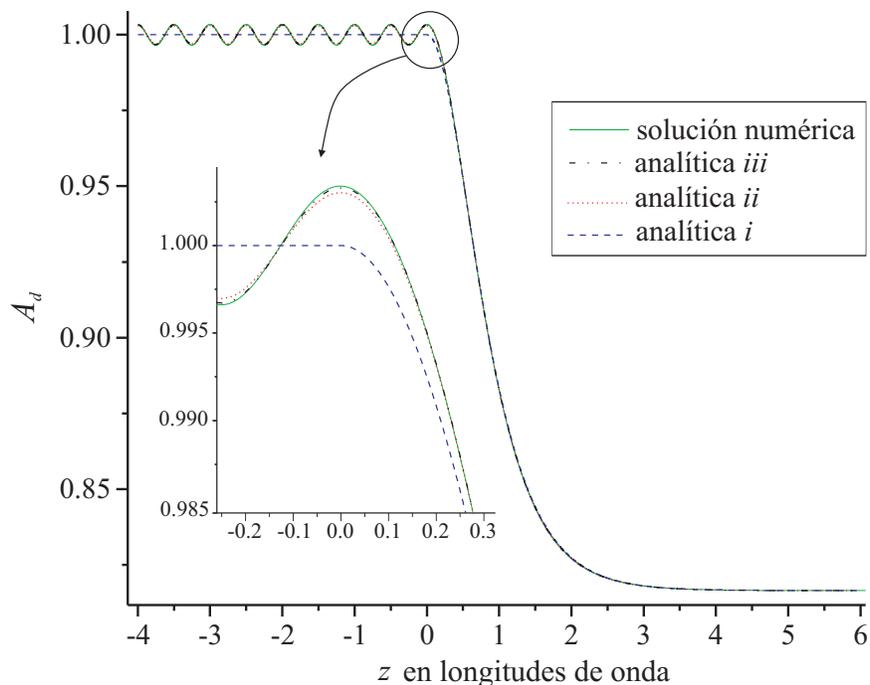


Figura 5.11: Para un perfil clase  $C^1$ , la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “lin&sech+” descrito en 5.3 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  que se exponen en la sección 5.3.3.1. Acercamiento a la región  $z \sim 0$ .

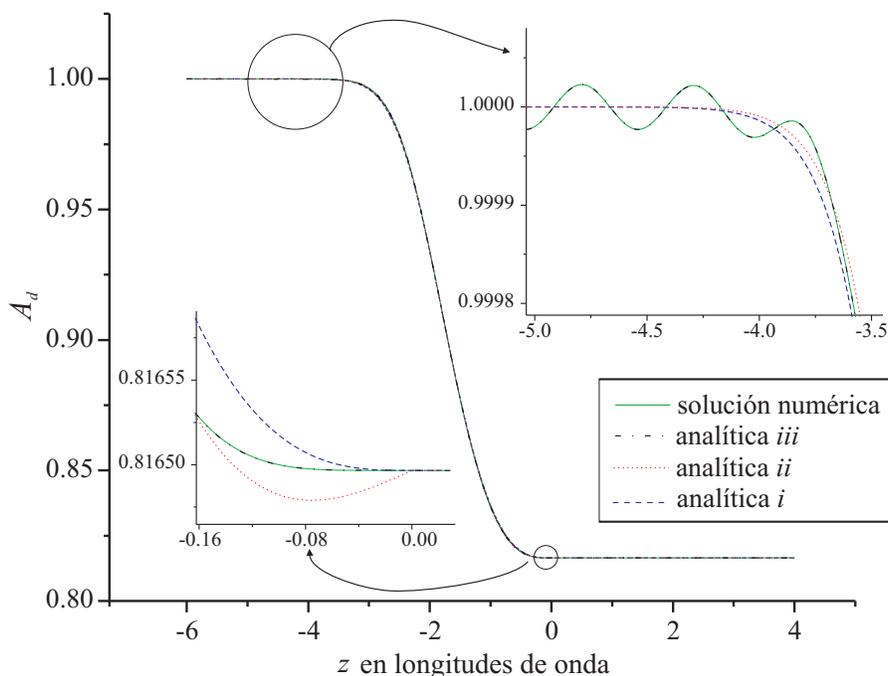


Figura 5.12: Para un perfil clase  $C^2$ , la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “cubexp&lin+” descrito en 5.4 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  que se exponen en la sección 5.3.3.1. Ampliación de dos regiones, la transición a un medio aproximadamente homogéneo en  $z < 0$  y cerca del plano de unión en  $z \approx 0$ .

5.3.3.4. Perfil de clase  $C^3$

La figura 5.13 muestra la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “quartexp&lin+” descrito en 5.5 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$ . Los casos  $i$  y  $ii$  no presentan oscilaciones en la región  $z < 0$  pues  $r_1 = r_2 = 0$ , (y también  $r_3 = 0$ ). Nuevamente el caso  $iii$ , es el que más se parece a la solución numérica, aunque en la región oscilatoria ya se percibe una diferencia clara. Ésto es porque la reflectividad debida al plano de unión ya es del orden de la reflectividad de la región inhomogénea del perfil y ambas contribuciones son consideradas en la solución numérica. Como en el ejemplo de perfil clase  $C^2$ , se vuelve a ver que en esta región los casos  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  no se aproximan de forma monótonica sino de forma alternada.

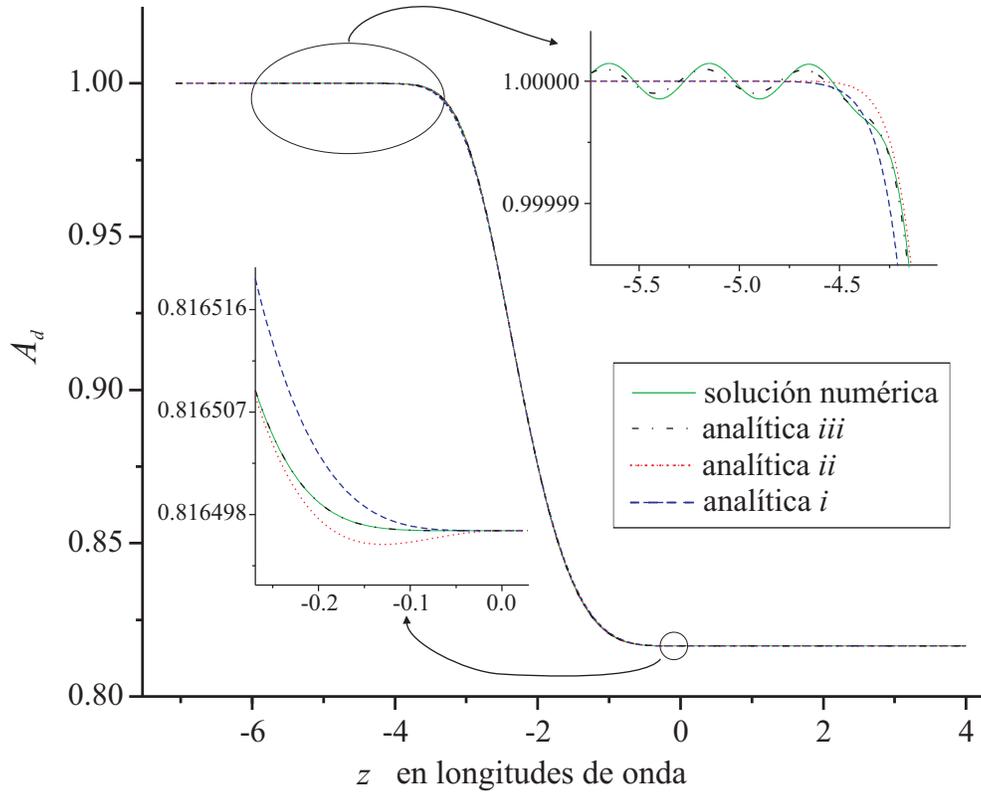


Figura 5.13: Para un perfil clase  $C^3$ , la solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil “quartexp&lin+” descrito en la tabla 5.5 acompañada de la solución analítica con los tres grados de aproximación  $i$ ,  $ii$  e  $iii$  que se exponen en la sección 5.3.3.1. Ampliación de dos regiones, la transición a un medio aproximadamente homogéneo en  $z < 0$  y cerca del plano de unión en  $z \sim 0$ .

5.3.4. Conclusiones de la sección 5.3

Los resultados de los coeficientes de reflexión obtenidos mediante las soluciones numéricas de la ecuación de la amplitud y los que nos da la ecuación (5.46), bajo la aproximación SVRI a menor orden no nulo son muy parecidos. La diferencia comienza a ser significativa cuando el módulo de  $r$  se acerca a  $10^{-7}$ .

Para que la solución analítica aproximada a la ecuación de la amplitud presente las oscilaciones debido a la reflexión, se debe incluir el menor orden no nulo del coeficiente de reflexión en el cálculo de la reflectividad. Habiendo tomado en cuenta lo anterior, si se quiere que la solución analítica definida por partes no presente “saltos” o “quebres”, para combinar los máximos órdenes involucrados  $j$  y  $m$  de  $r_j$  y  $A_m$ , es conveniente seguir el siguiente criterio:  $m \geq j$ . De esta manera el mínimo orden de la derivada del índice

de refracción que se requiere para que la reflectividad no se anule se ve incluida en las expresiones tanto de  $R$  como de  $A$ . Siguiendo el criterio anterior la solución numérica y la analítica son muy parecidas, hasta que la reflectividad de todo el volumen de la región inhomogénea sea comparable a la del plano de unión, entonces la diferencia comienza a ser significativa. Los resultados de esta sección pudieran arrojar luz en la discusión relacionada con el tema de la convergencia de la serie WKB [69, 71].

## Capítulo 6

# Comprobación de las relaciones de reversibilidad.

Hay cierta simetría en los coeficientes de reflexión y transmisión de un medio estratificado, sea que la luz incida desde un lado o del otro. A las relaciones entre dichos coeficientes para uno u otro caso se les llama relaciones de reversibilidad [62, 63, Capítulo VI], ya que Stokes mostró su correspondencia con la reversión en el tiempo [61, Capítulo III].

Es posible deducir estas relaciones para medios transparentes de manera muy rápida y general usando la representación de amplitud y fase, en particular empleando el invariante  $Q$ , lo cual se demuestra en este capítulo. La forma tradicional de obtener las relaciones de reversibilidad es mediante el método de las matrices de transferencia. Las expresiones que se proponen deducir en este capítulo son consecuencia de la simetría de las ecuaciones de Maxwell ante la inversión temporal, sin embargo en última instancia corresponden a las relaciones de reversibilidad espacial en la dirección  $z$ .

### 6.1. Una definición más general para los coeficientes de reflexión y transmisión

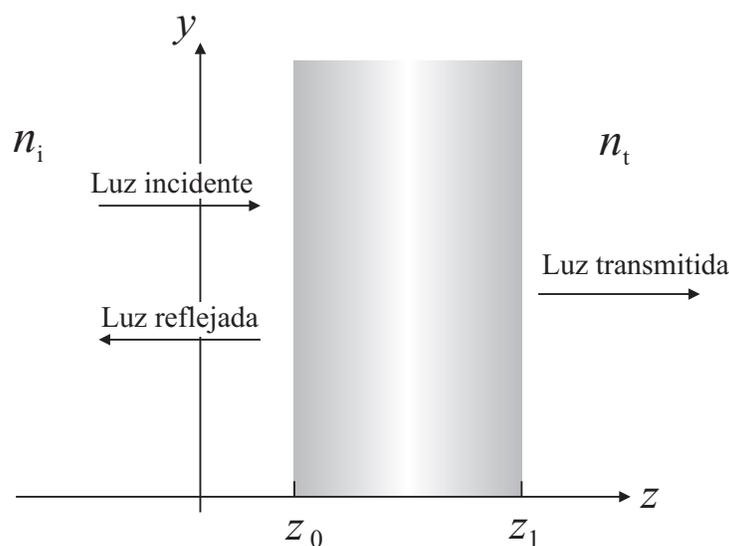


Figura 6.1: Medio estratificado en  $z_0 \leq z \leq z_1$ . El sombreado indica la región inhomogénea.

Cuando hay fronteras definidas para una región inhomogénea como se representa en la figura 6.1, las definiciones para los coeficientes de reflexión y transmisión que se emplean son las descritas en el método de las matrices 2.2.6. El coeficiente de reflexión complejo se define como la razón del campo reflejado entre el incidente justo sobre la frontera izquierda  $z_0$ , desde donde incide la luz, pero por fuera del medio estratificado, como se puede ver en las expresiones (2.68) y (2.73) que están escritas en términos de los elementos de matriz del medio estratificado y los índices de refracción que lo limitan. En el caso de polarización TE, este coeficiente es el cociente de los campos eléctricos, que son los que están en la misma dirección  $x$ , en cambio en el caso TM es la razón de los campos magnéticos. El coeficiente de transmisión complejo en el caso TE es la razón del campo eléctrico transmitido, evaluado justo detrás de la frontera  $z_1$ , entre el campo incidente, evaluado justo a la izquierda de  $z_0$  (2.69). Si es el caso de polarización TM, el coeficiente de transmisión es un múltiplo del cociente de los campos magnéticos, el transmitido entre el incidente, sobre las fronteras  $z_1$  y  $z_0$  respectivamente (2.74). Se trata de un múltiplo y no del cociente mismo ya que se desea que el coeficiente de transmisión coincida con la razón de las magnitudes vectoriales ( no el módulo del número complejo) de los campos eléctricos. El formalismo de las matrices de transferencia también permite escribir los coeficientes complejos  $r$  y  $t$  si la luz incide desde la derecha, sólo se requiere invertir los papeles de (2.64) y (2.65) con (2.66) y (2.67).

Cuando los medios inhomogéneos considerados no tienen fronteras definidas, como el perfil de tangente hiperbólica (3.37) o el de Epstein (2.106) , las definiciones anteriores de los coeficientes no se pueden interpretar claramente. Se adoptan a continuación definiciones más apropiadas para incluir estos casos. En las figuras 6.2 (a) y (b) se presenta un ejemplo de un medio inhomogéneo sin fronteras definidas. Considérese un medio estratificado cuya región significativamente inhomogénea esté relativamente cerca de  $z = 0$ , mientras que en las regiones apartadas  $|z| \gg 0$  sea aproximadamente homogéneo y transparente. Considérese también que hay propagación en esas regiones apartadas.

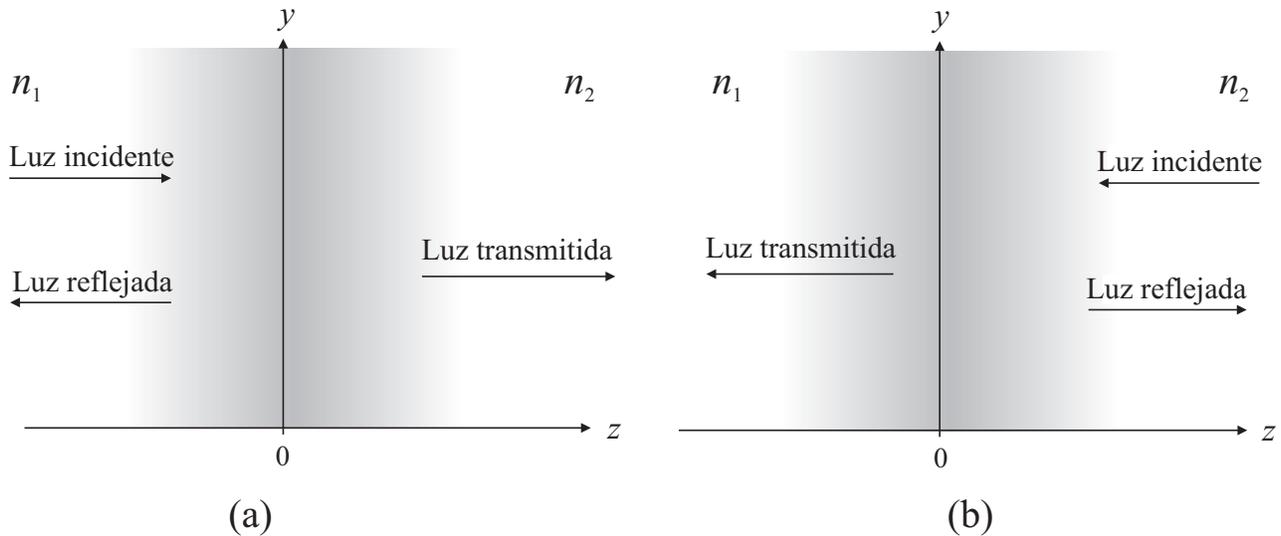


Figura 6.2: Medio estratificado sin fronteras definidas. El sombreado señala la región donde la inhomogeneidad es significativa. (a) Con la luz incidiendo desde la izquierda. (b) La luz incide desde la derecha.

### 6.1.1. Polarización TE

#### 6.1.1.1. Luz incidiendo desde la izquierda

El campo eléctrico en la región  $z \ll 0$  es aproximadamente el de un medio homogéneo con índice de refracción  $n_1$

$$\underline{U}_{\text{izq}} = \tilde{\underline{A}}_i e^{ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{\underline{A}}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}, \quad (6.1)$$

en la región  $z \gg 0$  también el índice de refracción es casi constante  $n_2$  y el campo se puede escribir como

$$\underline{U}_{\text{der}} = \tilde{\underline{A}}_t e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (6.2)$$

Sean los coeficientes de reflexión y transmisión los siguientes

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\tilde{\underline{A}}_r}{\tilde{\underline{A}}_i} \quad \text{y} \quad \underline{t}_{\perp} = \frac{\tilde{\underline{A}}_t}{\tilde{\underline{A}}_i}. \quad (6.3)$$

Su interpretación es:

El coeficiente  $\underline{r}_{\perp}$  es el cociente de los campos eléctricos, el reflejado sobre el incidente, tal como son en la región  $z \ll 0$  pero extrapolados hasta  $z = 0$ . De manera similar  $\underline{t}_{\perp}$  es el cociente de los campos, el transmitido sobre el incidente, tal como son en las regiones  $z \gg 0$  y  $z \ll 0$  respectivamente, extrapolando su valor en  $z = 0$ .

### 6.1.1.2. Luz incidiendo desde la derecha

El campo eléctrico en la región  $z \ll 0$  es aproximadamente el de un medio homogéneo con índice de refracción  $n_1$

$$\underline{U}_{\text{izq}} = \tilde{\underline{A}}_t e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}, \quad (6.4)$$

en la región  $z \gg 0$  también el índice de refracción es casi constante  $n_2$  y el campo se puede escribir como

$$\underline{U}_{\text{der}} = \tilde{\underline{A}}_i e^{-ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}} + \tilde{\underline{A}}_r e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (6.5)$$

Sean los coeficientes de reflexión y transmisión los siguientes

$$\underline{r}_{\perp} = \frac{\tilde{\underline{A}}_r}{\tilde{\underline{A}}_i} \quad \text{y} \quad \underline{t}_{\perp} = \frac{\tilde{\underline{A}}_t}{\tilde{\underline{A}}_i}. \quad (6.6)$$

Su interpretación es similar a la de los coeficientes complejos cuando la luz incide desde la izquierda, únicamente se invierten los papeles de las dos regiones homogéneas de los extremos.

## 6.1.2. Polarización TM

### 6.1.2.1. Luz incidiendo desde la izquierda

El campo magnético en la región  $z \ll 0$  es aproximadamente el de un medio homogéneo con índice de refracción  $n_1$

$$\underline{U}_{\text{izq}} = \tilde{\underline{A}}_i e^{ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \tilde{\underline{A}}_r e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}, \quad (6.7)$$

en la región  $z \gg 0$  también el índice de refracción es casi constante  $n_2$  y el campo se puede escribir como

$$\underline{U}_{\text{der}} = \tilde{\underline{A}}_t e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (6.8)$$

Sean los coeficientes de reflexión y transmisión los siguientes

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{\tilde{\underline{A}}_r}{\tilde{\underline{A}}_i} \quad \text{y} \quad \underline{t}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_1 n_2 \tilde{\underline{A}}_t}{\varepsilon_2 n_1 \tilde{\underline{A}}_i}. \quad (6.9)$$

Su interpretación es:

El coeficiente  $\underline{r}_{\parallel}$  es el cociente de los campos magnéticos, el reflejado sobre el incidente, tal como son en la región  $z \ll 0$  pero extrapolados hasta  $z = 0$ . El coeficiente de transmisión  $\underline{t}_{\parallel}$  es el cociente de los campos magnéticos  $\mathbf{H}$ , el transmitido sobre el incidente, tal como son en las regiones  $z \gg 0$  y  $z \ll 0$  respectivamente, extrapolando su valor en  $z = 0$  y luego multiplicado por el factor  $\frac{\varepsilon_1 n_2}{\varepsilon_2 n_1}$ . La intención al introducir dicho factor, es que el coeficiente se pueda asociar al cociente de las magnitudes vectoriales de los campos eléctricos.

### 6.1.2.2. Luz incidiendo desde la derecha

El campo magnético en la región  $z \ll 0$  es aproximadamente el de un medio homogéneo con índice de refracción  $n_1$

$$\underline{\mathcal{U}}_{\text{izq}} = \underline{\tilde{A}}_t e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}, \quad (6.10)$$

en la región  $z \gg 0$  también el índice de refracción es casi constante  $n_2$  y el campo se puede escribir como

$$\underline{\mathcal{U}}_{\text{der}} = \underline{\tilde{A}}_i e^{-ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}} + \underline{\tilde{A}}_r e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}. \quad (6.11)$$

Sean los coeficientes de reflexión y transmisión los siguientes

$$\underline{r}_{\parallel} = \frac{\underline{\tilde{A}}_r}{\underline{\tilde{A}}_i} \quad \text{y} \quad \underline{t}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_2 n_1 \underline{\tilde{A}}_t}{\varepsilon_1 n_2 \underline{\tilde{A}}_i}. \quad (6.12)$$

Su interpretación es similar a la de los coeficientes complejos cuando la luz incide desde la izquierda, pero se invierten los papeles de las dos regiones homogéneas de los extremos.

## 6.2. El wronskiano y las relaciones de reversibilidad

### 6.2.1. Polarización TE

Considérense dos soluciones particulares de la ecuación del campo (3.1), con un perfil inhomogéneo  $\kappa_{\text{TE}}^2(z)$  dado y con cada una de las soluciones asociada a las dos situaciones, (a) y (b), presentadas en la figura 6.2. Una de las soluciones corresponde a que la luz sea incidente por la izquierda  $\underline{F}_{\rightarrow}$  y la otra por la derecha  $\underline{F}_{\leftarrow}$ , sean pues

$$\underline{F}_{\rightarrow}'' = \kappa_{\text{TE}}^2(z) \underline{F}_{\rightarrow} \quad \text{y} \quad \underline{F}_{\leftarrow}'' = \kappa_{\text{TE}}^2(z) \underline{F}_{\leftarrow},$$

de modo que

$$\underline{F}_{\rightarrow} \underline{F}_{\leftarrow}'' = \underline{F}_{\leftarrow}'' \underline{F}_{\rightarrow}.$$

Sumando a ambos lados  $\underline{F}'_{\rightarrow} \underline{F}'_{\leftarrow}$  e integrando se obtiene

$$\underline{F}_{\rightarrow} \underline{F}'_{\leftarrow} - \underline{F}'_{\rightarrow} \underline{F}_{\leftarrow} = w, \quad (6.13)$$

donde  $w$  es el llamado wronskiano de esas dos soluciones y es constante. Evaluando a  $w$  del lado izquierdo, para  $z \ll 0$ , empleando (6.1) y (6.4) se obtiene

$$\underline{\tilde{A}}_i \underline{\tilde{A}}_t \left( -2ik_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} \right) = \left( \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) w \quad (6.14)$$

dado que  $F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} U$  3.1. Evaluando a  $w$  ahora del lado derecho,  $z \gg 0$ , empleando (6.1) y (6.4) se obtiene

$$\tilde{A}_t \tilde{A}_i \left( -2ik_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2} \right) = \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) w. \quad (6.15)$$

Combinando (6.14) y (6.15)

$$\frac{t_{\rightarrow\perp} \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2} = \frac{t_{\leftarrow\perp} \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1} \quad (6.16)$$

se obtiene una expresión que relaciona los coeficientes de transmisión TE para ambas direcciones de la luz incidente. Es sorprendente que para llegar a la expresión (6.16) no fue necesario suponer que el medio fuera totalmente transparente, es decir que  $\kappa_{\text{TE}}^2(z)$  pertenezca a los reales en todo el eje  $z$ , aún que haya absorción de luz en la región central e inhomogénea (6.16) sigue siendo válida [72, Sección 2.9]. Dada la definición para la transmitancia presentada en la ecuación (2.34) y aplicándola a los dos casos en la dirección de incidencia de la luz, la expresión (6.16) lleva a concluir que las transmitancias en ambas direcciones son iguales  $T_{\rightarrow\perp} = T_{\leftarrow\perp}$ .

Dividiendo (6.13) entre  $\underline{F}_{\rightarrow}^2$  y luego integrando a ambos lados queda

$$\frac{d\left(\frac{\underline{F}}{\underline{F}_{\rightarrow}}\right)}{dz} = \frac{w}{\underline{F}_{\rightarrow}^2} \Rightarrow \underline{F} = w \underline{F}_{\rightarrow} \int \underline{F}_{\rightarrow}^{-2} dz. \quad (6.17)$$

El resultado de la integral  $\int \underline{F}_{\rightarrow}^{-2} dz$  que aparece del lado derecho de la expresión anterior, se puede encontrar fácilmente si se supone a todo el medio transparente y se recurre a la representación de amplitud y fase. Recordando la propuesta (3.5) se puede reescribir dicha integral

$$\int \underline{F}_{\rightarrow}^{-2} dz = \int \frac{e^{-2iq}}{A^2} dz,$$

que invocando al invariante en (3.9) queda

$$\int \underline{F}_{\rightarrow}^{-2} dz = \int \frac{q' e^{-2iq}}{Q} dz = \frac{e^{-2iq}}{-2iQ} + C,$$

donde  $C$  es una constante que puede ser compleja. Finalmente se obtiene

$$\int \underline{F}_{\rightarrow}^{-2} dz = \frac{\underline{F}_{\rightarrow}^* / \underline{F}_{\rightarrow}}{-2iQ} + C,$$

que insertada en (6.17) permite escribir

$$\underline{F} = w \left( i \frac{\underline{F}_{\rightarrow}^*}{2Q} + C \underline{F}_{\rightarrow} \right). \quad (6.18)$$

Evaluando la expresión anterior para  $z \ll 0$  y agrupando en las exponenciales queda

$$0 = \left( i \frac{\tilde{A}_i^*}{2Q} + C \tilde{A}_r - \frac{\tilde{A}_t}{w} \right) e^{-ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}} + \left( i \frac{\tilde{A}_r^*}{2Q} + C \tilde{A}_i \right) e^{ik_0 z \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}},$$

Si bien lo anterior no requiere ser válido para todos los valores reales de  $z$ , sí para un subconjunto muy grande de ellos, por lo que se deben cumplir las siguientes condiciones

$$0 = i \frac{\tilde{A}_i^*}{2Q} + C \tilde{A}_r - \frac{\tilde{A}_t}{w}, \quad (6.19)$$

$$0 = i \frac{\tilde{A}_r^*}{2Q} + C \tilde{A}_i \quad (6.20)$$

Se evalúa ahora a (6.18) en la región  $z \gg 0$

$$0 = \left( \tilde{A}_i - i \frac{w \tilde{A}_t^*}{2Q} \right) e^{-ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}} + \left( \tilde{A}_r - wC \tilde{A}_t \right) e^{ik_0 z \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}},$$

lo que lleva a otras dos ecuaciones más

$$0 = \tilde{A}_i - i \frac{w \tilde{A}_t^*}{2Q}, \quad (6.21)$$

$$0 = \tilde{A}_r - wC \tilde{A}_t. \quad (6.22)$$

Si se despeja  $Q$  de (6.20) y se inserta en (6.21) se obtiene

$$wC = - \frac{\tilde{A}_i \tilde{A}_r^*}{\tilde{A}_t^* \tilde{A}_i}, \quad (6.23)$$

ecuación que combinada con (6.22) lleva a

$$0 = 1 + \frac{\tilde{A}_r \tilde{A}_t^* \tilde{A}_i}{\tilde{A}_t \tilde{A}_r^* \tilde{A}_i}.$$

Tomando en cuenta las definiciones (6.3) y (6.6) se puede reescribir la ecuación anterior en términos de los coeficientes de reflexión y transmisión

$$\underline{t}_\perp r_\perp^* + \underline{r}_\perp t_\perp^* = 0. \quad (6.24)$$

Si se utiliza a (6.16) para intercambiar a  $\underline{t}_\perp$  por  $\underline{t}_\perp$

$$\underline{t}_\perp r_\perp^* + \underline{r}_\perp \underline{t}_\perp^* = 0. \quad (6.25)$$

Ahora, multiplicando a (6.25) por su conjugada se obtiene  $\underline{t}_\perp r_\perp^* \underline{t}_\perp^* r_\perp + \underline{r}_\perp \underline{t}_\perp^* \underline{r}_\perp^* \underline{t}_\perp = 0$ , luego dividiendo entre los coeficientes de transmisión queda

$$r_\perp^* r_\perp = \underline{r}_\perp \underline{r}_\perp^*, \quad (6.26)$$

cuya interpretación física es muy importante, la reflectividad de un medio estratificado es la misma en las dos direcciones  $\underline{R}_\perp = \underline{R}_\perp$ .

Despejando nuevamente a  $Q$  de (6.20) e insertando en (6.19) se obtiene  $0 = wC \left[ \tilde{A}_r - \frac{\tilde{A}_i^* \tilde{A}_i}{\tilde{A}_r^*} \right] - \tilde{A}_t$ , combinando luego con (6.23) para eliminar el producto  $wC$  resulta

$$0 = \frac{\tilde{A}_i^*}{\tilde{A}_t^*} + - \frac{\tilde{A}_r^* \tilde{A}_r}{\tilde{A}_i^* \tilde{A}_i} - \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior en términos de los coeficientes de reflexión y transmisión deja

$$1 = \underline{r}_\perp^* r_\perp + \underline{t}_\perp^* \underline{t}_\perp. \quad (6.27)$$

Empleando (6.26) también se puede escribir a (6.27) como

$$1 = \underline{r}_{\perp} \underline{r}_{\perp}^* + \underline{t}_{\perp}^* \underline{t}_{\perp}. \quad (6.28)$$

Si se utiliza a (6.16) y (6.26) para que las flechas en (6.27) estén todas en la misma dirección se recuperan las expresiones que representan la conservación de la energía  $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$ , ya sea que incida la luz por la izquierda o la derecha

$$1 = \underline{r}_{\rightarrow\perp}^* \underline{r}_{\rightarrow\perp} + \underline{t}_{\rightarrow\perp}^* \underline{t}_{\rightarrow\perp} \frac{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}},$$

$$1 = \underline{r}_{\leftarrow\perp} \underline{r}_{\leftarrow\perp}^* + \underline{t}_{\leftarrow\perp} \underline{t}_{\leftarrow\perp}^* \frac{\mu_2 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}.$$

Un resumen de las relaciones de reversibilidad para polarización TE se muestran en la tabla 6.2. Todas las expresiones incluidas en la tabla son válidas para medios transparentes a todo lo largo del eje  $z$ . Incluso, puede darse el caso de que  $n(z)^2 - \sigma^2 < 0$  en algún intervalo de la región inhomogénea (cercana a  $z = 0$ ), es decir se puede incluir “reflexión interna frustrada” y no se invalidan dichas relaciones. Para el caso particular de las ecuaciones I y VI de la tabla 6.2, éstas siguen siendo válidas aún habiendo absorción de luz en algún intervalo de la región inhomogénea. No todas las relaciones de esta tabla son independientes entre sí, son sólo siete el número de ecuaciones que se necesitan para resumir toda la información, pero se presentan todas las expresiones que pudieran ser relevantes.

Relaciones de reversibilidad, polarización TE	
I	$\underline{t}_{\rightarrow\perp} \frac{\sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{\mu_2} = \underline{t}_{\leftarrow\perp} \frac{\sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{\mu_1}$
II	$\underline{t}_{\rightarrow\perp} \underline{r}_{\rightarrow\perp}^* + \underline{r}_{\leftarrow\perp} \underline{t}_{\rightarrow\perp}^* = 0$
III	$\underline{t}_{\leftarrow\perp} \underline{r}_{\rightarrow\perp}^* + \underline{r}_{\leftarrow\perp} \underline{t}_{\leftarrow\perp}^* = 0$
IV	$\underline{r}_{\rightarrow\perp}^* \underline{r}_{\rightarrow\perp} + \underline{t}_{\rightarrow\perp}^* \underline{t}_{\leftarrow\perp} = 1$
V	$\underline{r}_{\leftarrow\perp} \underline{r}_{\leftarrow\perp}^* + \underline{t}_{\rightarrow\perp}^* \underline{t}_{\leftarrow\perp} = 1$
VI	$\underline{T}_{\rightarrow\perp} = \underline{T}_{\leftarrow\perp}$
VII	$\underline{R}_{\rightarrow\perp} = \underline{R}_{\leftarrow\perp}$
VIII	$\underline{R}_{\rightarrow\perp} + \underline{T}_{\rightarrow\perp} = \underline{R}_{\leftarrow\perp} + \underline{T}_{\leftarrow\perp} = 1$

Cuadro 6.1: Relaciones de reversibilidad para polarización TE.

### 6.2.2. Polarización TM

Siguiendo un análisis similar al de la sección 6.2.1, con dos soluciones particulares de la ecuación del campo (3.2), una correspondiendo a que la luz incida por la izquierda y la otra por la derecha, se llega al resultado

$$\underline{\mathcal{F}}_{\rightarrow\perp} \underline{\mathcal{F}}' - \underline{\mathcal{F}}' \underline{\mathcal{F}}_{\leftarrow\perp} = w, \quad (6.29)$$

donde nuevamente  $w$  es el wronskiano de esas dos soluciones y es constante. Evaluando a  $w$  del lado izquierdo, para  $z \ll 0$ , empleando (6.7) y (6.10) se obtiene

$$\tilde{A}_i \tilde{A}_t \left( -2ik_0 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2} \right) = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) w \quad (6.30)$$

dado que  $\mathcal{F} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \mathcal{U}$  3.1. Evaluando a  $w$  ahora del lado derecho,  $z \gg 0$ , empleando (6.8) y (6.11) se obtiene

$$\tilde{A}_t \tilde{A}_i \left( -2ik_0 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2} \right) = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) w. \quad (6.31)$$

Combinando (6.30) y (6.31), escribiendo luego el resultado en términos de los coeficientes de transmisión

$$\underline{t}_{\rightarrow\parallel} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{n_2^2} = \underline{t}_{\leftarrow\parallel} \frac{\varepsilon_1 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{n_1^2} \quad (6.32)$$

se obtiene una expresión que relaciona los coeficientes de transmisión TM para ambas direcciones de la luz incidente. Vuelve a sorprender que para llegar (6.32) no fue necesario suponer que el medio fuera totalmente transparente, es decir que  $\kappa_{\text{TM}}^2(z)$  pertenezca a los reales en todo el eje  $z$ , ya que aún permitiendo absorción de luz en la región central e inhomogénea (6.32) sigue siendo válida. Dada la definición para la transmitancia presentada en la ecuación (2.52) y aplicándola a los dos casos en la dirección de incidencia de la luz, la expresión (6.32) lleva a concluir que las transmitancias en ambas direcciones son iguales  $\underline{T}_{\rightarrow\parallel} = \underline{T}_{\leftarrow\parallel}$ .

Relaciones de reversibilidad, polarización TM	
I	$\underline{t}_{\rightarrow\parallel} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{n_2^2 - \sigma^2}}{n_2^2} = \underline{t}_{\leftarrow\parallel} \frac{\varepsilon_1 \sqrt{n_1^2 - \sigma^2}}{n_1^2}$
II	$\underline{t}_{\rightarrow\parallel} \underline{r}_{\rightarrow\parallel}^* + \underline{r}_{\leftarrow\parallel} \underline{t}_{\rightarrow\parallel}^* = 0$
III	$\underline{t}_{\leftarrow\parallel} \underline{r}_{\rightarrow\parallel}^* + \underline{r}_{\leftarrow\parallel} \underline{t}_{\leftarrow\parallel}^* = 0$
IV	$\underline{r}_{\rightarrow\parallel}^* \underline{r}_{\rightarrow\parallel} + \underline{t}_{\rightarrow\parallel} \underline{t}_{\leftarrow\parallel} = 1$
V	$\underline{r}_{\leftarrow\parallel} \underline{r}_{\leftarrow\parallel}^* + \underline{t}_{\rightarrow\parallel} \underline{t}_{\leftarrow\parallel} = 1$
VI	$\underline{T}_{\rightarrow\parallel} = \underline{T}_{\leftarrow\parallel}$
VII	$\underline{R}_{\rightarrow\parallel} = \underline{R}_{\leftarrow\parallel}$
VIII	$\underline{R}_{\rightarrow\parallel} + \underline{T}_{\rightarrow\parallel} = \underline{R}_{\leftarrow\parallel} + \underline{T}_{\leftarrow\parallel} = 1$

Cuadro 6.2: Relaciones de reversibilidad para polarización TM.

Integrando a (6.29), empleando a la representación de amplitud y fase y suponiendo medios transparentes a todo lo largo del eje  $z$ , se llega a relaciones de reversibilidad equivalentes a (6.24), (6.25), (6.27) y (6.28). Así también se pueden demostrar la conservación de la energía y que las reflectividades son iguales ya sea que la luz incida por la izquierda o la derecha. Un resumen de las relaciones de reversibilidad para polarización TM se muestran en la tabla 6.2. También para la polarización TM, todas las expresiones

incluidas en la tabla son válidas para medios transparentes a todo lo largo del eje  $z$  y se puede incluir el caso de la “reflexión interna frustrada”. Para el caso particular de las ecuaciones I y VI de la tabla 6.2, éstas siguen siendo válidas aún habiendo absorción de luz en algún intervalo de la región inhomogénea. Aunque se presentan en la tabla todas las expresiones que pudieran ser relevantes, se pueden reducir el número de ecuaciones independientes.

### 6.3. Conclusiones

Se pueden obtener las relaciones de reversibilidad para medios estratificados que no están limitados por fronteras definidas. El perfil  $n(z)$  de estos medios puede ser incluso analíticos a todo lo largo del eje  $z$ , siempre y cuando tienda asintóticamente a ser homogéneo, transparente y permita una solución propagatoria en los extremos ( $|z| \gg 0$ ). Las definiciones de los coeficientes de transmisión y reflexión se deben replantear de manera más general, de modo que no involucren las superficies  $z_0$  y  $z_1$  que delimitan el medio inhomogéneo, como en el caso del método de las matrices de transferencia. Una vez definidos así los coeficientes, la representación de amplitud y fase permite llevar a cabo las integrales para llegar rápidamente a las expresiones que se buscan: las relaciones de reversibilidad. Algunas de estas relaciones son válidas aunque haya absorción de luz en la región central inhomogénea.

## Capítulo 7

# La reflectividad de una monocapa

Se estima la reflectividad de una monocapa desordenada, que consiste de partículas esféricas transparentes, representándola mediante cuatro distintos modelos:

- Medio efectivo homogéneo (película delgada)
- Perfil continuo de índice de refracción (en la representación de amplitud y fase)
- Esparcimiento simple (basado en los resultados de Mie sin considerar interacciones entre partículas) [73, 74]
- Esparcimiento múltiple (basado en los resultados de Mie considerando interacciones entre partículas de manera aproximada) [73, 74]

Se incluyen dos casos, una monocapa aislada y una con substrato, el substrato y el medio circundante también son medios transparentes. Se obtienen resultados para la reflectividad en incidencia normal y se analizan éstos variando el radio, la porción de cubierta y el índice de refracción de las esferas. El propósito es comparar y concluir bajo que condiciones la reflectividad de una monocapa se comporta como la de un medio estratificado con perfil continuo de índice de refracción. La mayor parte del contenido de este capítulo se publicó en el artículo [75].

### 7.1. Monocapas y sus propiedades ópticas

Las propiedades ópticas de las monocapas constituidas por partículas pequeñas han sido de interés por muchos años ya. En muchos trabajos se ha explorado la manera de extraer información sobre la estructura de estas capas a partir de la medición de su reflectividad y/o transmitancia [76, 77]. Cuando las partículas son muy pequeñas en comparación a la longitud de onda y el esparcimiento de luz es muy poco, tradicionalmente la reflectividad se modela usando un planteamiento de “capa efectiva” [76–82]. En estos trabajos se infieren la permitividad y el grosor efectivos para una película delgada ficticia equivalente, o bien se formula la susceptibilidad superficial del plano equivalente que simula la reflectividad de una monocapa desordenada. La capa efectiva y/o el plano equivalente son ópticamente anisotrópicos por lo que la permitividad y/o la susceptibilidad son representadas por tensores. En este capítulo se propone algo distinto, se plantea una “capa inhomogénea equivalente” para modelar la reflexión de la luz sobre una monocapa, tratándose el caso particular de la incidencia normal. Se comparan los resultados con dos modelos de esparcimiento y uno de capa homogénea efectiva.

Para los modelos de esparcimiento se usan la solución de Mie y la aproximación Rayleigh-Gans. El primer modelo de esparcimiento es uno de esparcimiento simple, no se considera interacción entre las

partículas individuales que esparcen la luz, el segundo modelo es uno de esparcimiento múltiple que se ha desarrollado recientemente que sí incluye algo de esa interacción [83]. El planteamiento de la capa efectiva sencillamente reemplaza las partículas que esparcen la luz con una película homogénea de índice de refracción constante, un índice promedio para toda la monocapa. En cambio, la capa inhomogénea reemplaza las partículas con una película estratificada promediando el índice de refracción sobre las superficies paralelas a la monocapa, para describir el comportamiento de esta película estratificada se emplea la representación de amplitud y fase.

Una monocapa aislada consiste de un ensamble de  $N$  partículas embebidas en un medio homogéneo de índice de refracción  $n_1$ , puestas de manera aleatoria en un plano como se muestra en la figura 7.1(a). Por simplicidad aquí se consideran sólo monocapas de partículas esféricas idénticas de radio  $p$  e índice de refracción  $n_2$ . Se supone que los centros de las partículas están sobre el plano, en  $z = -p$ . El área total, así como el número de partículas  $N$ , de una monocapa de extensión infinita tienden también a infinito, pero el cociente, la llamada densidad superficial de partículas  $\rho = N/\text{área}$  permanece constante. La porción de cubierta es  $\Theta = N\pi p^2/\text{área}$ , la fracción del plano que cubren las partículas cuando se le ve en dirección perpendicular a él. Además de una monocapa aislada se considera el caso de una monocapa con sustrato, de índice de refracción  $n_3$ , el cual se coloca en  $z = 0$  como se muestra en la figura 7.1(b). La luz incidente consiste de ondas planas, monocromáticas, de longitud de onda  $\lambda$  (medida en el vacío) y que llegan desde el lado negativo del eje  $z$ .

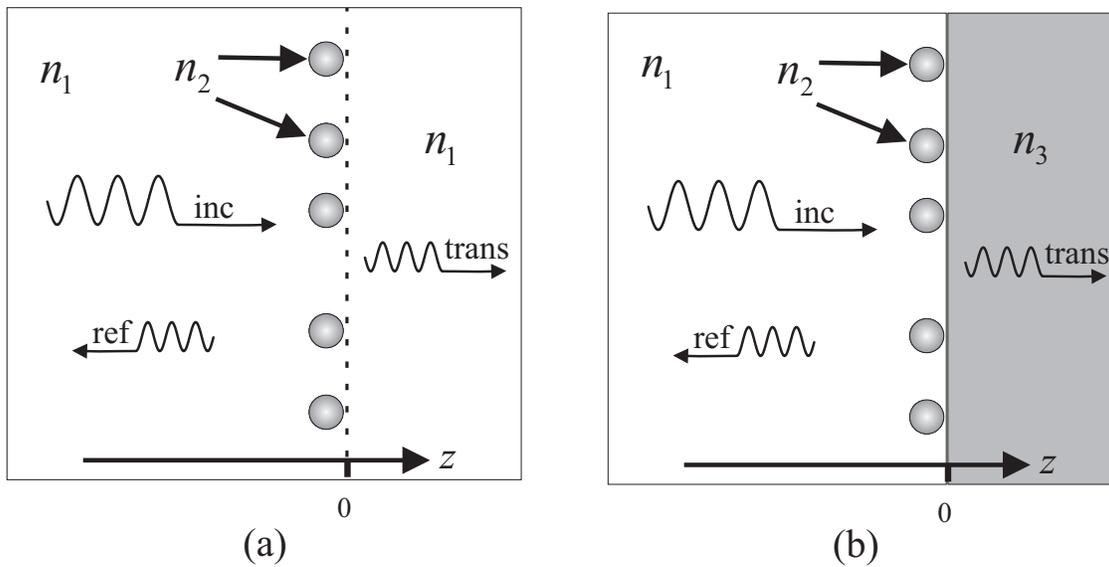


Figura 7.1: Monocapas (a) aislada y (b) con sustrato. Las flechas onduladas representan la luz incidente, transmitida y reflejada. No se muestra la luz esparcida en otras direcciones que no sea la normal al plano.

Se espera que el modelo de capa inhomogénea equivalente arroje resultados más exactos para partículas pequeñas y de bajo contraste  $|n_2 - n_1| \approx 0$ , por otro lado los modelos de esparcimiento son confiables para bajas porciones de cubierta. En la tabla 7.1 se presentan los rangos que se emplean en este trabajo para las cantidades  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $\Theta$  y  $p$ .

Parámetro	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\Theta$	$a$
Rango	1	de 1.1 a 1.5	1.5	de 0.1 a 0.3	de 0 a $1\lambda$

Cuadro 7.1: Los rangos que se emplean para el radio, los índices de refracción y porción de cubierta.

### 7.1.1. Los modelos de esparcimiento

#### 7.1.1.1. Un solo elemento aislado que esparce luz

Cualquiera que sea la aproximación que se escoja, la amplitud del campo esparcido por una partícula es una función lineal de la amplitud del campo incidente. La relación entre el los campos incidente y esparcido se escribe de forma matricial [73, 74]

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel}^S \\ E_{\perp}^S \end{pmatrix} = \frac{e^{ik_0(|\mathbf{r}|-z)}}{-ik_0|\mathbf{r}|} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel}^i \\ E_{\perp}^i \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

donde  $E_{\parallel}$  y  $E_{\perp}$  se refieren a la polarización relativa al plano  $z = -p$ . El vector  $\mathbf{r}$  indica la posición del punto de observación en relación al elemento que esparce luz y  $z$  su componente a lo largo de la dirección de propagación de las ondas planas incidentes. Las  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) son los elementos de la matriz de la amplitud del esparcimiento que en general son funciones de  $\theta$  y  $\phi$ , los ángulos axial y azimutal del vector  $\mathbf{r}$ . En particular para una esfera los elementos de matriz  $S_1$  y  $S_2$  dependen sólo de  $\theta$ , mientras que  $S_3 = S_4 = 0$ . Estos elementos de matriz se pueden calcular usando la solución de Mie, la aproximación de Rayleigh o la de Rayleigh-Gans.

**Esparcimiento de Mie** La solución de Mie para el esparcimiento de luz por una esfera se obtiene resolviendo las ecuaciones de Maxwell sujetas a condiciones a la frontera correspondientes a dicha forma esférica, se expresa en términos de series infinitas. Escribir los elementos de matriz  $S_j$  en términos de la solución de Mie no es una tarea sencilla, involucra los polinomios de Legendre, las funciones esféricas de Bessel y de Henkel. Un reto mucho más difícil es encontrar las soluciones analíticas para el caso de partículas de forma arbitraria [84]. La solución de Mie es válida para esferas de cualquier tamaño, sin embargo el cálculo de los campos esparcidos por esferas grandes necesita una gran cantidad de términos para converger, en cuyo caso suele ser más conveniente la aproximación de la difracción anómala de Van de Hulst [73] o el uso de la óptica geométrica. En el otro caso límite, el de las partículas pequeñas comparadas con la longitud de onda, hay aproximaciones simples como la de Rayleigh o la llamada Rayleigh-Gans. Actualmente se puede encontrar *software* en la red del Internet para realizar simulaciones basadas en la solución de Mie [?].

**Esparcimiento de Rayleigh** La aproximación de Rayleigh supone que el esparcimiento de luz es provocado por partículas muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la luz incidente. La partícula que esparce luz se considera como una fuente puntual puesta en un campo eléctrico homogéneo y que radía como un dipolo sencillo.

**Esparcimiento de Rayleigh-Gans** La aproximación Rayleigh-Gans incluye un rango más amplio de tamaños, tal que  $\left| \frac{n_2}{n_1} - 1 \right| \ll 1$  y  $2pk_0 \left| \frac{n_2}{n_1} - 1 \right| \ll 1$  [73, 74]. Se pueden interpretar estas condiciones de la siguiente manera: la onda incidente no debe sufrir cambios significativos de amplitud o fase cuando entra en la partícula. La base de la aproximación de Rayleigh-Gans es el esparcimiento de Rayleigh mismo, cada elemento de volumen de la partícula que esparce luz se considera como un esparcidor de

Rayleigh independiente. Los elementos de volumen son polarizados por la onda incidente que viaja casi sin perturbarse al atravesar la partícula. La interferencia en el campo lejano producida por todos estos elementos de volumen determina la cantidad de esparcimiento en esa dirección. La aproximación Rayleigh-Gans supone que la luz que excita los dipolos de la esfera es la onda plana incidente, es decir, no toma en cuenta la interacción entre estos dipolos. Por esta razón sólo es válida la aproximación si el contraste y el tamaño de la esfera son pequeños, si fueran demasiado grandes el rezago de la fase debido a la interacción sería significativo, situación que se muestra en la figura 7.2.

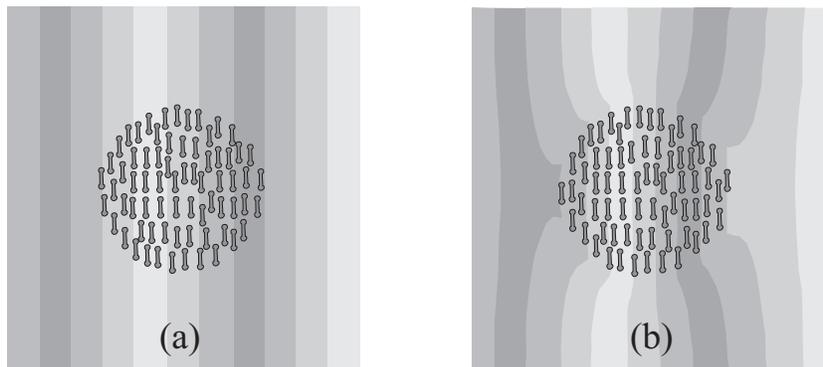


Figura 7.2: Un par de bosquejos mostrando la onda que polariza a los elementos de volumen que conforman la esfera, (a) según la aproximación Rayleigh-Gans y (b) según modelos que sí toman en cuenta la interacción entre los dipolos, como la solución de Mie por ejemplo, las bandas verticales que representan la fase de la onda se estrechan en el interior de la esfera.

Escribir los elementos de matriz  $S_j$  con la aproximación de Rayleigh-Gans es sencillo,

$$S_1 = -ix_m^3 \left( \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + 2n_1^2} \right) f(\theta), \quad (7.2)$$

$$S_2 = -ix_m^3 \left( \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + 2n_1^2} \right) f(\theta) \cos \theta, \quad (7.3)$$

donde  $x_m \equiv n_1 k_0 p$  es el parámetro de tamaño de la partícula,  $f(\theta) = \frac{3}{u^3} (\sin u - u \cos u)$  es el factor de forma y  $u = 2x_m \sin \frac{\theta}{2}$ . Si el factor de forma se substituye por la unidad, los elementos de matriz corresponden a los del esparcimiento de Rayleigh. Cuando el contraste es bajo  $n_2 \approx n_1$  se suele emplear la siguiente expresión

$$\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 + 2n_1^2} \approx \frac{2}{3} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right).$$

Aún que se trate de partículas con forma arbitraria, esta aproximación puede conducir a expresiones convenientemente simples.

### 7.1.1.2. Fenómenos del colectivo

El esparcimiento de luz por una colección de partículas se basa en lo que se sabe sobre el esparcimiento por una partícula.

**Aproximación de esparcimiento simple (SSA) para una monocapa** El modelo más sencillo de esparcimiento por una colección de partículas es el SSA (por sus siglas del inglés “single scattering approximation”), se usa con frecuencia para calcular la reflectividad de una monocapa con baja densidad

de partículas repartidas de forma aleatoria (desordenada). En esta aproximación se supone que la onda electromagnética incidente es la que excita a las partículas y se desprecia la interacción entre ellas. Se debe recordar que la reflectividad de una superficie se mide experimentalmente dividiendo la intensidad de la luz reflejada especularmente <sup>1</sup> entre la intensidad de la luz incidente. Desde el punto de vista teórico, la reflectividad de una monocapa desordenada se representa muy bien por el cuadrado del módulo del coeficiente de reflexión de la onda promedio. El promedio se toma sobre todas las posibles configuraciones del sistema de partículas, ponderando con la probabilidad de cada configuración. Se hace referencia a la potencia de la onda promedio como la componente coherente de la luz esparcida. En el caso de una monocapa plana de partículas, la componente coherente de la luz reflejada viaja solo en la dirección especular [83]. Cuando el tamaño de las partículas es comparable a la longitud de onda de la luz, además de la componente coherente hay una componente difusa importante que consta de luz propagándose en todas direcciones. Si las partículas son pequeñas comparadas con  $\lambda$ , la mayor parte de la energía corresponde a la componente coherente y la componente difusa se puede despreciar. Los coeficientes de reflexión y transmisión coherentes se obtienen promediando los campos esparcidos por las partículas en los hemisferios de reflexión y transmisión, estos están dados por [85]

$$r_{\text{coh}}^{\text{SSA}} = -\alpha S_j(\pi - \theta_i), \quad (7.4)$$

$$t_{\text{coh}}^{\text{SSA}} = 1 - \alpha S_j(0). \quad (7.5)$$

Aquí,  $\alpha = 2\Theta/x_m^2 \cos \theta_i$ , donde  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia. La función  $S_j(\theta)$  es el elemento de matriz para una partícula esférica de radio  $p$  e índice de refracción  $n_2$  embebida en un medio homogéneo de índice de refracción  $n_1$ . En particular, para incidencia normal  $\theta_i = 0$  y es suficiente con tomar en cuenta la polarización TE, además en el caso de partículas esféricas  $S_3 = S_4 = 0$ , por lo tanto basta con tomar en cuenta a  $S_1$ . La principal ventaja de la SSA es su sencillez, sin embargo puede incurrir en errores relativos demasiado grandes para la transmitancia coherente de una monocapa de baja densidad y de partículas muy pequeñas [83, 85], aunque puede dar resultados más exactos para la reflectividad coherente. El factor  $\alpha$  contiene a  $\cos \theta_i$  en el denominador de modo que los coeficientes de las ecuaciones 7.4 y 7.5 divergen cuando  $\theta_i \rightarrow \pi/2$ , esto significa que la SSA está limitada a bajos ángulos de incidencia.

**Esparcimiento múltiple (MSM) para una monocapa** Para poder mejorar las limitaciones que presenta la SSA es necesario incorporar los efectos del esparcimiento múltiple, es decir la interacción entre las partículas. Cuando las partículas no son suficientemente pequeñas y el esparcimiento producido por ellas las afecta de manera considerable, una estrategia adecuada es usar modelos de esparcimiento coherente [83, 86]. Usar un modelo de esparcimiento coherente implica resolver el problema de esparcimiento múltiple y calcular la onda esparcida promedio, pero se debe de incurrir en algún tipo de aproximación para que sea de uso práctico. En la referencia [86] se desarrolla un nuevo modelo que considera algo de esparcimiento múltiple. Sin embargo, la deducción del modelo fue hasta cierto punto heurística, por lo que la validez de éste puede ser un tanto incierta. Recientemente, un modelo de esparcimiento múltiple (MSM) se derivó usando un formalismo riguroso [83]. Este MSM provee expresiones de forma cerrada para los coeficientes de reflexión y transmisión de una monocapa de partículas esféricas. Básicamente, una ecuación integral para el campo que excita a las partículas de la monocapa se obtiene bajo la aproximación “cuasi-cristalina” (QCA). Luego, esta ecuación se resuelve aproximadamente asumiendo que el campo que excita a las partículas está dado por dos ondas planas que viajan en las direcciones incidente y especular. Una vez que se conoce el campo de excitación, se calculan las ondas electromagnéticas promedio esparcidas en las direcciones de

<sup>1</sup>La dirección especular es la de propagación de la luz reflejada, tal que su ángulo respecto del eje  $z$  sea el mismo que el ángulo de incidencia:  $\cos \theta_r = \cos \theta_i$

la reflexión y la transmisión, de su amplitud se obtienen los coeficientes correspondientes

$$r_{\text{coh}}^{\text{MSM}} = \frac{-\alpha S_j(\pi - \theta_i)}{1 + \alpha S_j(0) + \frac{\alpha^2}{4} [S_j^2(0) - S_j^2(\pi - 2\theta_i)]}, \quad (7.6)$$

$$t_{\text{coh}}^{\text{MSM}} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{4} [S_j^2(0) - S_j^2(\pi - 2\theta_i)]}{1 + \alpha S_j(0) + \frac{\alpha^2}{4} [S_j^2(0) - S_j^2(\pi - 2\theta_i)]}. \quad (7.7)$$

Se espera que los coeficientes de 7.6 y 7.7 sean válidos para monocapas con una porción de cubierta moderadamente pequeña pero, si las  $S_j$  se basan en las soluciones de Mie, el radio de las partículas, su índice de refracción y ángulo de incidencia no tienen restricción. En el caso de incidencia normal y de partículas esféricas el elemento de matriz a considerar para los cálculos es  $S_1$ .

### 7.1.2. Reflectividad de una monocapa soportada por una superficie plana

Supóngase una monocapa de partículas esféricas puestas sobre la superficie de un substrato y una onda plana incidente a un ángulo  $\theta_i$ . Al incidir la onda sobre la monocapa parte de la onda coherente promedio se refleja y parte se transmite. Luego, parte de la onda transmitida se refleja nuevamente sobre la superficie del substrato y alguna porción se transmite de regreso atravesando la monocapa. Cada vez que la onda incide sobre la monocapa o el substrato, parte se refleja y parte se transmite. El resultado es un escenario de reflexiones múltiples. Sumando las ondas reflejadas se obtiene el coeficiente de reflexión coherente para la monocapa sobre el substrato ( $r_{\text{sop}}$ )

$$r_{\text{sop}}(\theta_i) = r_{\text{coh}}(\theta_i) + \frac{r_s(\theta_i)t_{\text{coh}}^2(\theta_i)e^{i\beta}}{1 - r_s(\theta_i)r_{\text{coh}}(\theta_i)e^{i\beta}}, \quad (7.8)$$

donde  $r_s$  es el coeficiente de reflexión de la superficie del substrato,  $\beta = 2x_m \cos \theta_i$  es la diferencia de fase entre reflexiones sucesivas de la onda coherente,  $r_{\text{coh}}$  y  $t_{\text{coh}}$  son los coeficientes de reflexión y transmisión coherentes de la monocapa aislada. Se supone que la monocapa actúa como una superficie efectiva puesta a una distancia  $p$  del substrato, por lo que se trata de una aproximación. La expresión (7.8) está basada en el resultado de Airy [87] para las reflexiones múltiples entre dos superficies y se han tomado en cuenta las relaciones de reversibilidad para un medio simétrico  $n(z-p) = n(p-z)$  sin asumir explícitamente la conservación de la energía.

### 7.1.3. Reflectividad de la monocapa como película homogénea efectiva (THF)

El modelo más simple que se puede formular para una monocapa es sustituirla con una capa homogénea equivalente. Tradicionalmente la ecuación de Maxwell-Garnett se usa para determinar el índice de refracción efectivo de un medio que consiste de inclusiones esféricas de índice  $n_2$  embebidas en una matriz de índice  $n_1 = 1$  [74]

$$n_{\text{efe}}^2 = 1 + \frac{3f \left( \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \right)}{1 - f \left( \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \right)}, \quad (7.9)$$

donde  $f$  es la fracción de volumen ocupada por las esferas y se ha hecho la substitución  $\varepsilon = n^2$ . Usando la ecuación 7.9 y desarrollando en serie de Taylor como función de  $n_2$  alrededor de la unidad

$$n_{\text{efe}} \approx f(n_2 - 1) + 1, \quad (7.10)$$

que corresponde con el promedio volumétrico del índice de refracción. Para el rango de porciones de cubierta e índices de refracción considerados en este trabajo (7.1), la ecuación (7.10) lleva a valores muy similares a los de (7.9), la diferencia nunca excede el 3%. Por su sencillez, se emplea el promedio del índice de refracción de la mezcla  $n_{\text{pro}} = f(n_2 - 1) + 1$  como el efectivo. Se destaca que la relación entre la fracción de volumen y la porción de cubierta es  $f = \frac{2}{3}\Theta$ .

La misma relación en la que se basa la expresión (7.8) conduce a la fórmula para la reflectividad de una capa homogénea [13, Sección 1.6.4]

$$R = 1 - \frac{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - (r_{12} + r_{23})^2}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2(k_0 n_{\text{pro}} 2p)}, \quad (7.11)$$

donde

$$r_{12} = \frac{n_{\text{pro}} - n_1}{n_{\text{pro}} + n_1} \quad \text{y} \quad r_{23} = \frac{n_3 - n_{\text{pro}}}{n_3 + n_{\text{pro}}}.$$

Si no hay un substrato  $n_3 = n_1 = 1$ .

#### 7.1.4. Reflectividad de una película gradual equivalente (EGL)

El proceso de reflexión, transmisión y refracción son manifestaciones macroscópicas de el esparcimiento que ocurre a nivel microscópico [61]. Las moléculas que conforman un material sólido transparente se comportan como dipolos que generan esparcimiento de Rayleigh y que interfieren fuertemente entre ellos, tan cercanos entre ellos y tan pequeños en comparación con la longitud de onda que los podemos tratar como un continuo. Considérese una diferencial de volumen lo suficientemente grande para ver a la materia como un continuo pero suficientemente pequeña para poder considerar los cambios en la permitividad en función de  $z$ .

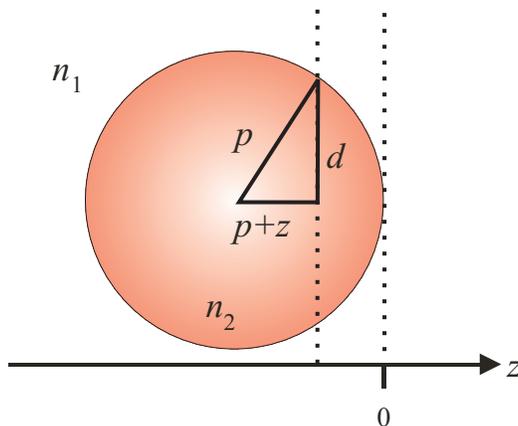


Figura 7.3: Una partícula esférica y un plano que la intersecciona en el rango  $-2p < z < 0$ .

Como en el caso THF 7.1.3, se promedia el índice de refracción  $n(\mathbf{r})$ , pero esta vez sobre los planos perpendiculares al eje  $z$ . Se toma un plano paralelo al  $xy$  en el rango  $-2p < z < 0$ , sea  $\zeta$  la porción de la superficie de este plano con un índice de refracción  $n_2$ . Para dicho rango  $n(z) = \zeta n_2 + (1 - \zeta) n_1$ . Considérese una partícula como en la figura 7.3, el plano intersecciona a la partícula en una rebanada circular de radio  $d(z)$ , entonces  $\zeta(z) = \pi d^2 \rho$ , donde  $d^2 = p^2 - (z + p)^2$  y  $\rho = \frac{\Theta}{\pi p^2}$ . Por lo tanto el índice de refracción

como función de  $z$  queda

$$n(z) = \begin{cases} n_1 & \text{para } z \leq -2p \\ n_1 + \Theta(n_2 - n_1) \left[ 1 - \left( \frac{z}{p} + 1 \right)^2 \right] & \text{para } -2p < z < 0 \\ n_3 & \text{para } z \geq 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

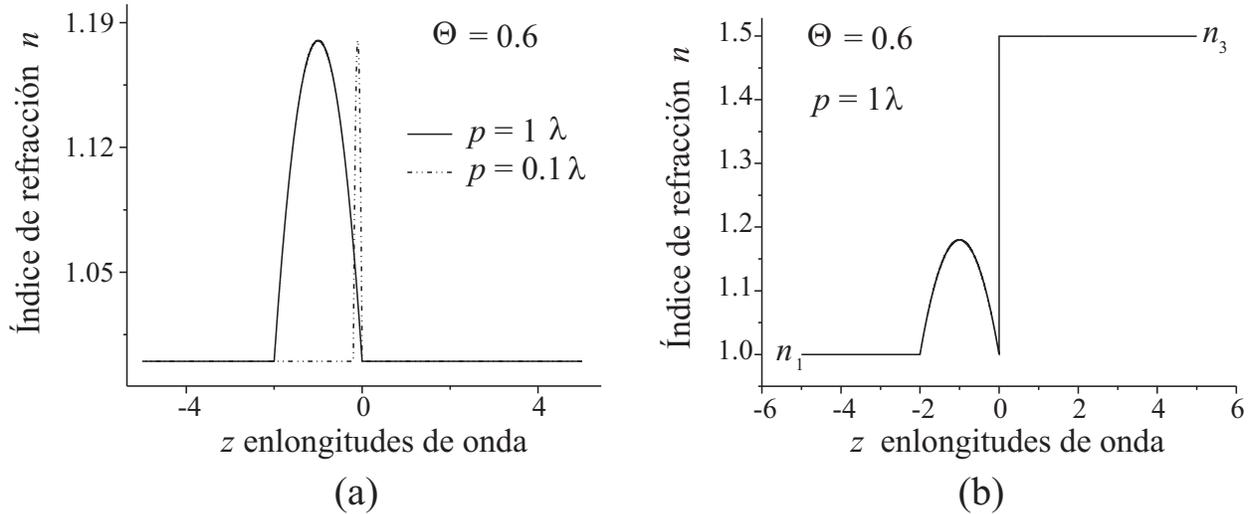


Figura 7.4: El perfil  $n(z)$  gradado en los dos casos (a) sin y (b) con un sustrato. Los ejemplos que muestran aquí tienen una porción de cubierta de 0.6, radios de 1 y 0.1 en unidades de longitud de onda en el vacío de la luz incidente,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.3$  y cuando hay sustrato  $n_3 = 1.5$ .

Si no hay sustrato, entonces  $n_3 = n_1$ . Algunos ejemplos de perfiles  $n(z)$  se muestran en la figura 7.4. Se emplea la representación de amplitud y fase para evaluar la reflectividad de la película gradual equivalente. Primero se resuelve la ecuación de la amplitud (3.11) sujeta a las condiciones iniciales apropiadas, y luego mediante (3.32) se encuentra la reflectividad.

## 7.2. Resultados para la reflectividad en la dirección especular

### 7.2.1. Comparación con los modelos de esparcimiento usando la solución de Mie

#### 7.2.1.1. Monocapa aislada

Se calcula la reflectividad bajo incidencia normal para monocapas con diferentes radios  $p$ , índices de refracción  $n_2$  y porciones de cubierta  $\Theta$ , empleando los modelos SSA, MSM, EGL y THF.

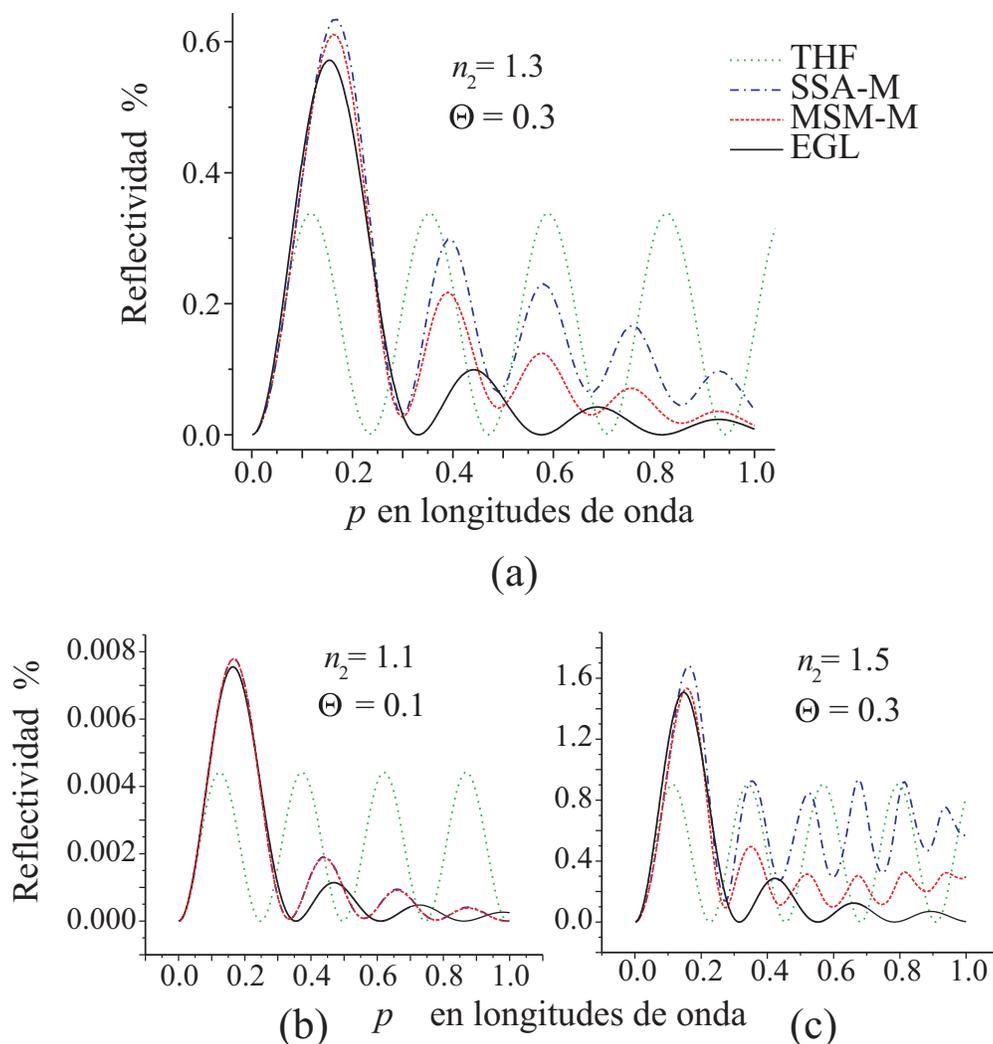


Figura 7.5: Reflectividad en función del radio para una monocapa aislada y  $n_1 = 1$ : (a) con índice de refracción  $n_2 = 1.3$  y porción de cubierta  $\Theta = 0.3$ , (b)  $n_2 = 1.1$  y  $\Theta = 0.1$ , (c)  $n_2 = 1.5$  y  $\Theta = 0.3$ . La siglas MSM-M se refieren al modelo de esparcimiento múltiple, SSA-M a la aproximación de esparcimiento simple, ambos basados en la solución de Mie. Por otro lado, EGL se refiere a la película gradual equivalente y THF a la película delgada homogénea.

En esta sección, los modelos de esparcimiento se basan en las soluciones de Mie para expresar los elementos de matriz  $S_j$ . El índice de refracción de el medio circundante es siempre  $n_1 = 1$ . Las gráficas de la reflectividad como función de el radio son en las que más claramente el rango de coincidencia entre modelos. En la figura 7.5(a) se muestran los predicciones para  $n_2 = 1.3$  y  $\Theta = 0.3$ . Dentro del intervalo  $p < 0.1\lambda$  los cuatro modelos predicen resultados similares. Para  $p > 0.1\lambda$  la solución THF tiene un comportamiento distinto, oscila periódicamente entre valores máximos y mínimos constantes. La diferencia entre las abscisas de puntos críticos consecutivos es de  $\Delta p = \frac{1}{8n_{\text{pro}}}\lambda$ . En cambio, la reflectividad para los modelos de esparcimiento y el EGL aumenta cuando  $p$  rebasa el valor  $0.1\lambda$ , alcanzando un máximo

más alto en  $p \approx 0.16\lambda$ . El valor de este máximo es ligeramente distinto para cada modelo, pero los tres se comportan de manera muy semejante hasta  $p \approx 0.3\lambda$ , ésto es por más de media longitud de onda de diámetro. Para radios mayores, todas las soluciones oscilan pero la altura y/o el ancho de estas oscilaciones varía según el modelo. El SSA-M presenta mayor reflectividad que el MSM-M pero los valores extremos coinciden en la abscisa (mismo radio), el período de las oscilaciones es algo menor en comparación con el THF. La reflectividad del EGL es menor aún y en general las abscisas de los puntos críticos no caen en los mismos valores que los otros modelos, pero el período de las oscilaciones se parece al predicho por el THF. La altura de las oscilaciones del EGL decrece, lo que también sucede para los modelos de esparcimiento, mientras que para el THF se mantiene constante.

Desde el punto de vista cualitativo, las predicciones para otros valores de  $n_2$  y  $\Theta$  muestran un comportamiento similar. Para un bajo contraste  $n_2 = 1.1$  y porción de cobertura  $\Theta = 0.1$ , las gráficas de las predicciones de los SSE-M, MSM-M y EGL se parecen aún más, como se muestra en la figura 7.5(b). Los resultados para SSA-M y MSM-M son casi indistinguibles, además se alejan más del THF y se acercan al EGL. Nuevamente la coincidencia entre los cuatro modelos es grande en el intervalo  $p < 0.1\lambda$ , los SSA-M, MSM-M y EGL se mantienen cerca por un rango un poco más amplio  $p < 0.34\lambda$ . En el caso de contrastes más altos  $n_2 = 1.5$ , como se muestra en la figura 7.5(c), la coincidencia entre los SSA-M, MSM-M y EGL se mantiene solo hasta  $p < 0.28\lambda$ , para mayores valores de  $a$  el comportamiento difiere claramente.

### 7.2.1.2. Monocapa soportada

Se calcula también la reflectividad para monocapas soportadas por un substrato transparente, el índice de refracción circundante es  $n_1 = 1$  mientras que el del substrato es  $n_3 = 1.5$ . Se presentan las predicciones de los cuatro modelos. En la figura 7.6(a) se muestra una gráfica típica de reflectividad contra radio, se trata de un índice de refracción  $n_2 = 1.3$  y una porción de cubierta  $\Theta = 0.3$ , combinación de valores que se toma en este trabajo como referencia. Todos los modelos coinciden para valores del radio  $p < 0.09\lambda$ , el THF se separa primero de los demás, el EGL se mantiene cerca de SSA en el rango  $p < 0.17\lambda$  y para valores mayores del radio todos muestran un comportamiento distinto. En general la reflectividad para los modelos de esparcimiento disminuye de manera consistente al aumentar  $p$ , debido a la extinción (luz esparcida en otras direcciones), no es así en el caso de THF y EGL, la reflectividad oscila alrededor de un valor constante. Ese valor constante es  $100 \times \left(\frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1}\right)^2$  para EGL y corresponde a la reflectividad de una superficie aire-substrato, para THF es el determinado por la ecuación (7.11). Cuando son menores las porciones de cubierta, en el caso que se muestra en la figura 7.6(b),  $n_2 = 1.1$  y  $\Theta = 0.1$ , el rango en que se mantienen en coincidencia los cuatro modelos es un poco más grande  $p < 0.1\lambda$ , pero SSA-M, MSM-M y EGL siguen coincidiendo más allá  $p < 0.2\lambda$ . Los resultados para mayor contraste y porción de cubierta, en particular  $n_2 = 1.5$  y  $\Theta = 0.3$  se ven muy distintos uno del otro cuando  $p > 0.125\lambda$ , como se aprecia en la figura 7.6(c).

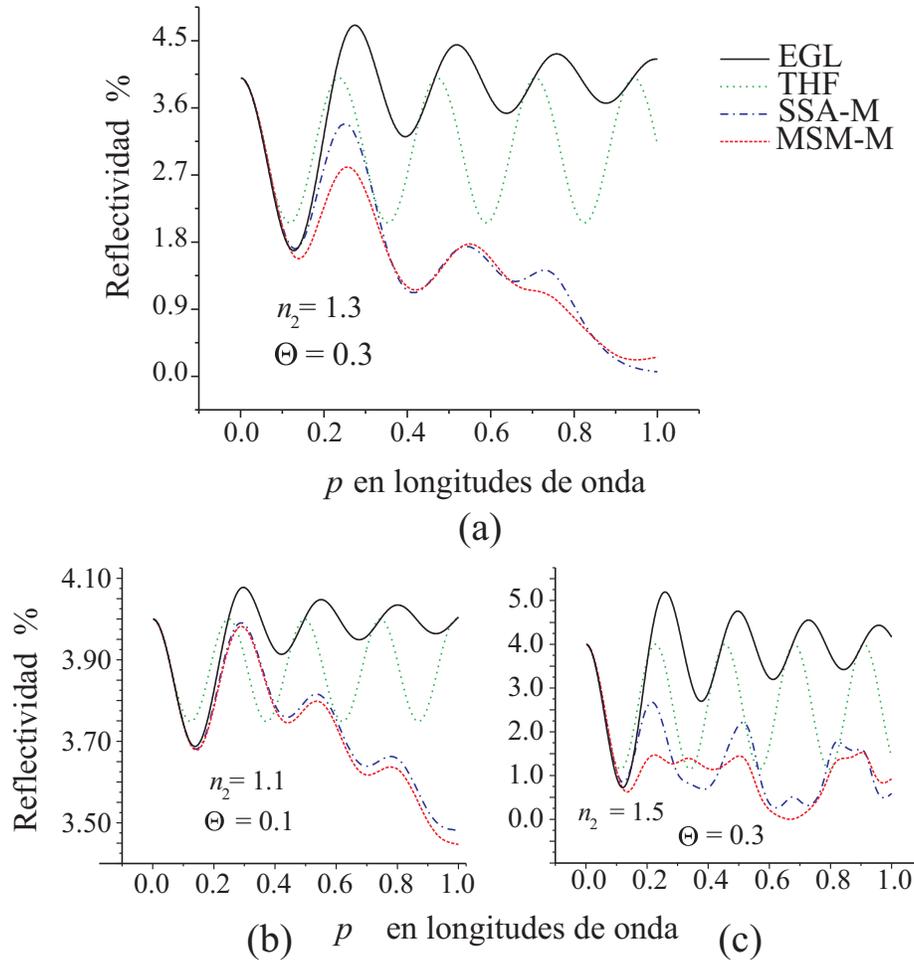


Figura 7.6: Reflectividad en función del radio para una monocapa soportada con  $n_1 = 1$  y  $n_3 = 1.5$ : (a) con índice de refracción  $n_2 = 1.3$  y porción de cubierta  $\Theta = 0.3$ , (b)  $n_2 = 1.1$  y  $\Theta = 0.1$ , (c)  $n_2 = 1.5$  y  $\Theta = 0.3$ . La siglas MSM-M se refieren al modelo de esparcimiento múltiple, SSA-M a la aproximación de esparcimiento simple, ambos basados en la solución de Mie. Por otro lado, EGL se refiere a la película gradual equivalente y THF a la película delgada homogénea.

## 7.2.2. Comparación con los modelos de esparcimiento bajo la aproximación Rayleigh-Gans

### 7.2.2.1. Monocapa aislada

Se calcula la reflectividad para monocapas con diferentes radios  $p$ , índices de refracción  $n_2$  y porciones de cubierta  $\Theta$ , empleando los cuatro modelos, en esta sección, los modelos de esparcimiento se basan en la aproximación de Rayleigh-Gans para expresar los elementos de matriz  $S_j$ . El índice de refracción de el medio circundante es siempre  $n_1 = 1$ . En la figura 7.7 se muestran las gráficas de la reflectividad como función de el radio, donde  $n_2 = 1.3$  y  $\Theta = 0.3$ . En este caso el comportamiento del EGL y el de los modelos de esparcimiento se ven muy parecidos, las gráficas de éstos últimos, SSA-R&G y MSM-R&G son casi idénticas. Las diferencias entre los modelos de esparcimiento y el EGL son menores bajo la aproximación Rayleigh-Gans.

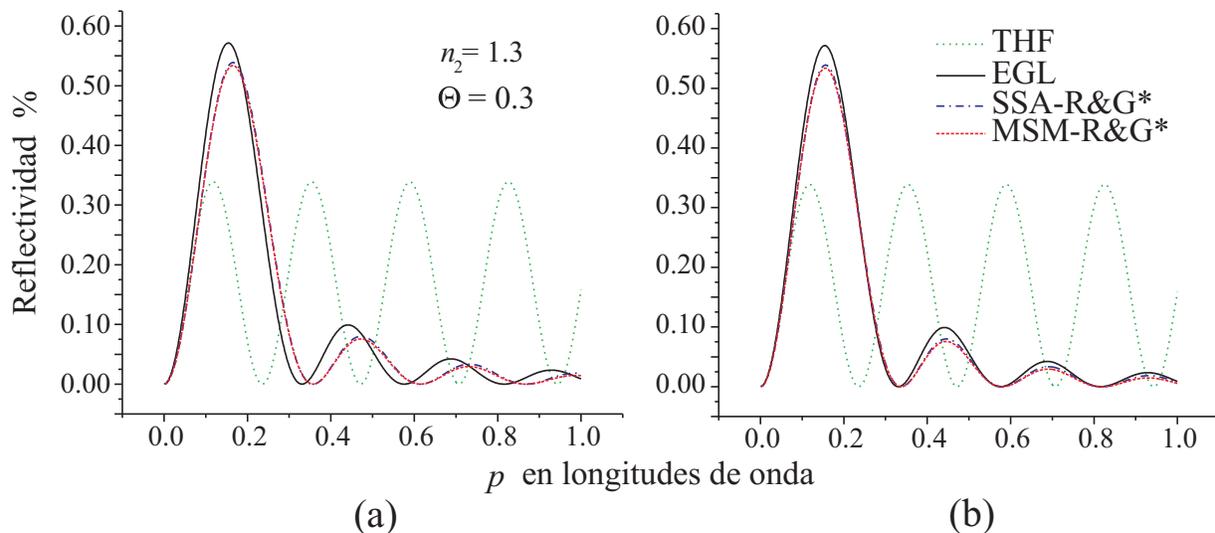


Figura 7.7: Reflectividad en función del radio para una monocapa aislada, con  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.3$  y  $\Theta = 0.3$ . La siglas MSM-R&G se refieren al modelo de esparcimiento múltiple, SSA-R&G a la aproximación de esparcimiento simple, ambos basados en la aproximación de Rayleigh-Gans. EGL se refiere a la película gradual equivalente y THF a la película delgada homogénea. (a) Se emplea la definición tradicional del parámetro de tamaño  $x_m \equiv n_1 k_0 p$ . (b) Se hacen los cálculos definiendo al parámetro de tamaño de forma distinta  $x_m^{\text{nueva}} \equiv n_{\text{pro}} k_0 p$ .

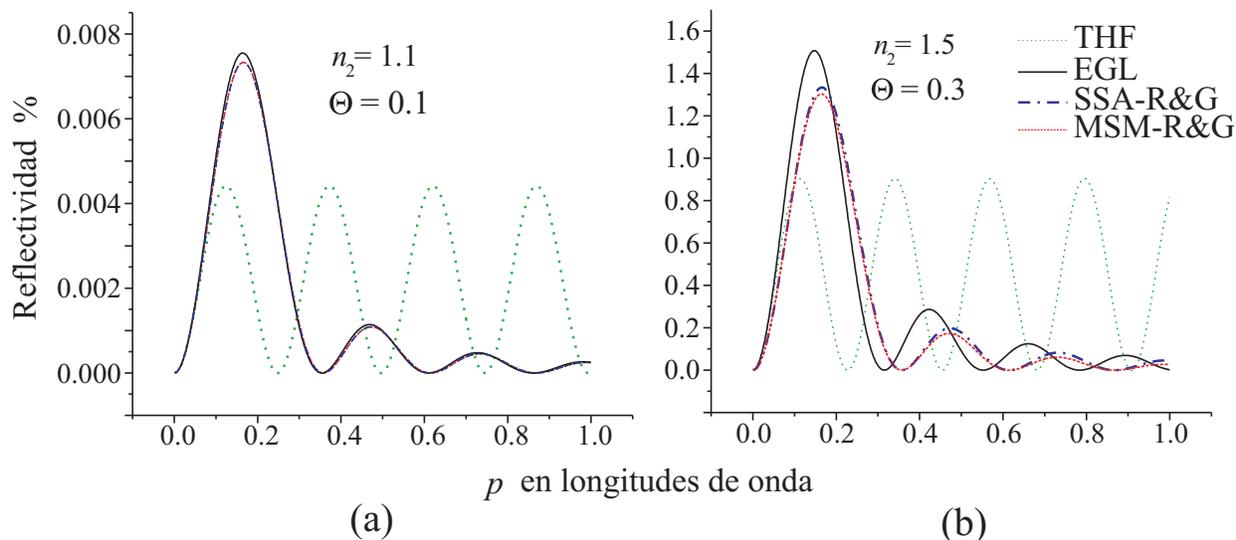


Figura 7.8: Reflectividad en función del radio para una monocapa aislada, con  $n_1 = 1$ , (a)  $n_2 = 1.1$  y  $\Theta = 0.1$ , (b)  $n_2 = 1.5$  y  $\Theta = 0.3$ . La siglas MSM-R&G se refieren al modelo de esparcimiento múltiple, SSA-R&G a la aproximación de esparcimiento simple, ambos basados en la aproximación de Rayleigh-Gans. EGL se refiere a la película gradual equivalente y THF a la película delgada homogénea. Se emplea la definición tradicional del parámetro de tamaño  $x_m \equiv n_1 k_0 p$ .

El ancho de las oscilaciones de la reflectividad es mayor para los modelos de esparcimiento que para el

EGL, pero si se hace un cambio sutil en la definición del parámetro de tamaño de la partícula

$$x_m^{\text{nueva}} \equiv n_{\text{pro}} k_0 p \quad \text{en vez de} \quad x_m \equiv n_1 k_0 p,$$

las diferencias se reducen mucho, como se hace evidente en la figura 7.7(b). Este cambio en la definición del parámetro de tamaño significa tomar en cuenta, aunque de forma burda, el rezago de fase que muestra la figura 7.2(b) debido a interacción entre los elementos de volumen de la esfera.

El comportamiento en general de los resultados al cambiar los valores de  $n_2$  y  $\Theta$  (con cualquiera de las dos definiciones de  $x_m$ ) es el siguiente: a menores valores de  $n_2$  y  $\Theta$  las predicciones del EGL se parecen más a las de los modelos de esparcimiento, en cambio, si estos valores aumentan todas las diferencias se acentúan, como se muestra en la figura 7.8. De cualquier manera, las diferencias entre los dos modelos de esparcimiento no llegan a ser significativas. Cambiar a  $x_m$  por  $x_m^{\text{nueva}}$  hace que coincidan las abscisas de los puntos críticos de las oscilaciones.

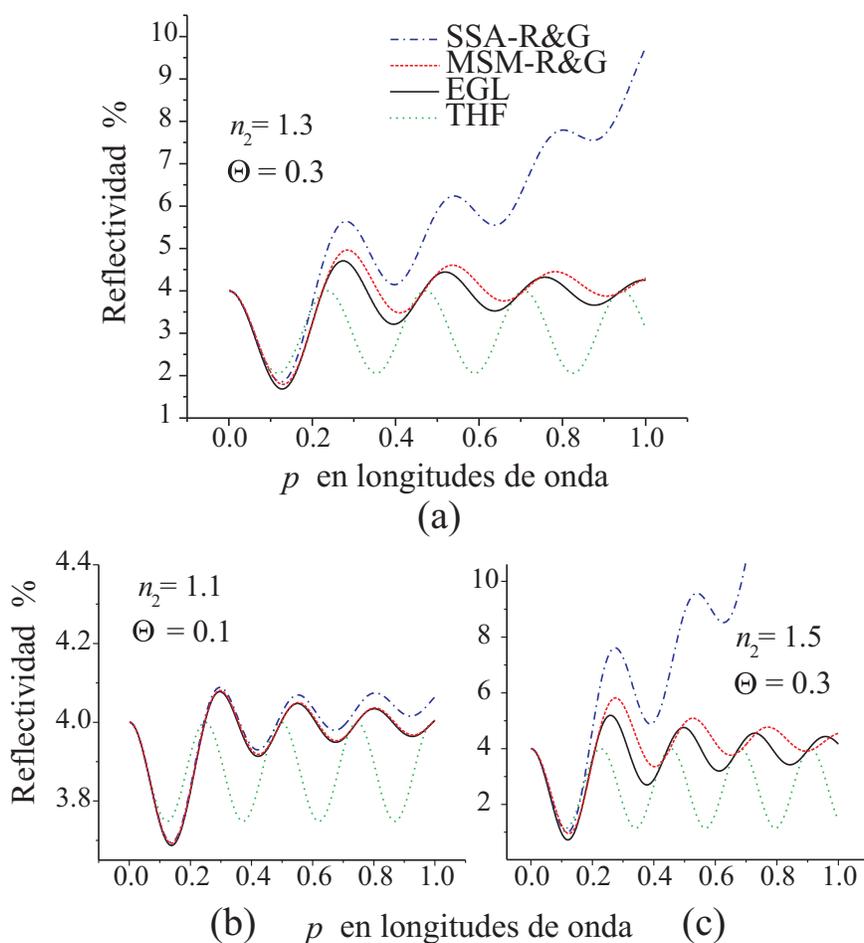


Figura 7.9: Reflectividad en función del radio para una monocapa soportada, con  $n_1 = 1$  y  $n_3 = 1.5$ , (a)  $n_2 = 1.1$  y  $\Theta = 0.1$ , (b)  $n_2 = 1.5$  y  $\Theta = 0.3$ . La siglas MSM-R&G se refieren al modelo de esparcimiento múltiple, SSA-R&G a la aproximación de esparcimiento simple, ambos basados en la aproximación de Rayleigh-Gans. EGL se refiere a la película gradual equivalente y THF a la película delgada homogénea. Se emplea la definición tradicional del parámetro de tamaño  $x_m \equiv n_1 k_0 p$ .

### 7.2.2.2. Monocapa suspendida

Se encuentra la reflectividad para monocapas soportadas por un sustrato transparente, el índice de refracción circundante es  $n_1 = 1$  mientras que el del sustrato es  $n_3 = 1.5$ . En la figura 7.9(a) se presenta una gráfica típica, con  $n_2 = 1.3$  y  $\Theta = 0.3$ . La reflectividad del SSA-R&G se dispara a aumentar el valor de  $p$ , mientras que MSM-R&G no se separa mucho de EGL, se comportan de manera muy similar pero el ancho de las oscilaciones es ligeramente menor para EGL. El esparcimiento bajo la aproximación de Rayleigh-Gans es muy débil, de modo que la extinción es despreciable, consecuentemente la reflectividad no decae de forma sostenida al aumentar el tamaño de las partículas como sucede al considerar la solución de Mie. El hecho de que el coeficiente de transmisión  $t_{\text{coh}}^{\text{SSA}}$  de la ecuación (7.5) conduce a transmitancias mayores a la unidad, bajo la aproximación de Rayleigh-Gans, causa que la reflectividad aumente. Nuevamente, aumentar las cantidades  $n_2$  y  $\Theta$  pronuncia las diferencias entre las predicciones de los modelos como se deduce de observar las figuras 7.9(b) y (c).

## 7.3. Discusión y conclusiones

En general todos los modelos tienden a coincidir en resultados para la reflectividad cuando los radios son pequeños, con o sin sustrato. Todos los modelos predicen oscilaciones en la reflectividad como función del radio. En el caso de la película delgada homogénea esto es por la interferencia entre las ondas reflejadas en ambas superficies, la amplitud de estas oscilaciones se preserva al variar el radio, pues el coeficiente de reflexión de las superficies individuales no cambia si se mantiene  $\Theta$  y todos los índices de refracción constantes. Cuando la película es gradual también se presenta interferencia entre las ondas reflejadas sobre distintas regiones del perfil  $n(z)$ , pero la altura de las oscilaciones disminuye al aumentar el radio, pues con ello se “suaviza” todo el perfil de índice de refracción de la monocapa disminuyendo así la capacidad de reflejar luz. En los modelos de esparcimiento también se predice interferencia y a las oscilaciones en el espectro de reflectividad se les llama “resonancias”. La altura de las resonancias disminuye con el radio debido a la extinción, que es consecuencia del esparcimiento de la luz en todas las otras direcciones que no son la especular. Cuando se emplea la solución de Mie con los modelos de esparcimiento, la extinción aumenta de forma muy significativa cuando hay un sustrato presente. Es sorprendente como, en términos generales, las gráficas de reflectividad para MSM-M y SSA-M están por debajo de todas las otras cuando la monocapa está soportada, mientras que en el caso de la monocapa aislada están por encima de la EGL y para radios pequeños también sobre la THF.

El modelo de esparcimiento múltiple basado en la solución de Mie (MSM-M), es el que toma en cuenta más detalles de la situación física real. Sin embargo, las expresiones analíticas están dadas en términos de series infinitas y si el radio es grande se requieren muchos términos para que la serie converja. Además las soluciones del tipo de la de Mie sólo se conocen para determinadas formas: esferas, elipsoides y cilindros infinitos. Por otro lado, los modelos de esparcimiento no son apropiados para grandes porciones de cubierta. Los modelos de película homogénea o estratificada debieran ser más confiables mientras mayor sea la porción de cubierta, dado que el caso hipotético de un 100 % de cobertura corresponde a una película.

Emplear la aproximación de Rayleigh-Gans con los modelos de esparcimiento o recurrir a una película delgada efectiva, ya sea homogénea o gradual, resulta menos complicado y no se limita sólo a ciertas formas de las partículas. Aquí también, para grandes porciones de cubierta, puede ser más apropiado modelar la monocapa con una película delgada, THF o EGL. Dado que en este trabajo las porciones de cubierta consideradas no son mayores a  $0.3\lambda$ , con el objeto de mantenerse dentro del rango de validez de los modelos de esparcimiento, el MSM-M se puede tomar como una referencia más confiable para comparar con él a los otros modelos. Desde luego hace falta comprobación experimental.

### 7.3.1. Modelo de esparcimiento simple con la solución de Mie (SSA-M)

El SSA-M es el modelo que arroja resultados, en general, más parecidos al MSM-M, pero tiende a predecir reflectividades más altas cuando la porción de cubierta es mayor. De hecho, en la figura 7.5(c) el EGL es más cercano al MSM-M que el SSA-M.

### 7.3.2. Una película gradual equivalente (EGL)

En segundo lugar, después del SSA-M, es el EGL el modelo que difiere menos de la referencia que marca el MSM-M. Las predicciones del modelo de película gradual son muy cercanas a las de los modelos de esparcimiento bajo la aproximación Rayleigh-Gans, pero como toma en cuenta el rezago de fase es más exacto, aunque es claro que se trata de un resultado numérico. Quizá sea posible mejorar el desempeño de este modelo en presencia de un sustrato si se simula la extinción agregándole parte imaginaria al perfil  $n(z)$ . Mientras que los modelos de esparcimiento están limitados a una porción de cubierta pequeña, el modelo de película gradual no.

### 7.3.3. Modelos de esparcimiento bajo la aproximación Rayleigh-Gans (SSA-R&G y MSM-R&G)

Como se mencionó antes, los resultados de los SSA-R&G, MSM-R&G y EGL son muy similares en el caso de la monocapa aislada. La aproximación Rayleigh-Gans supone que cada elemento de volumen de la partícula oscila al ritmo de la onda incidente, que es una onda plana. De manera coincidente la propagación de la luz en un medio estratificado, bajo incidencia normal, también es en forma de ondas planas. Lo anterior quiere decir que efectivamente son modelos casi equivalentes, la diferencia principal estriba en que, para el medio estratificado, el modelo incluye el rezago de fase. Por construcción EGL garantiza la conservación de la energía mientras que los modelos de esparcimiento no, en particular SSA-R&G tiende a predecir reflectividades muy altas en el caso de una monocapa soportada. La ventaja de la aproximación Rayleigh-Gans es que produce un resultado analítico muy simple.

### 7.3.4. Una película homogénea efectiva (THF)

Aunque el THF es la formulación más simple del problema y la reflectividad se expresa mediante una expresión analítica muy sencilla, es apropiado solo para radios muy pequeños. A juzgar por la comparación con el MSM-M, en particular para monocapas de partículas esféricas distribuidas de manera aleatoria e incidencia normal, el THF es apropiado para radios no mayores que  $\sim 0.08\lambda$  si se trata de una capa aislada o  $\sim 0.09\lambda$  si es soportada por un sustrato.

## Capítulo 8

# Diseño de multicapas y perfiles periódicos continuos

Las multicapas y/o los perfiles periódicos de índice de refracción se usan con frecuencia para fabricar espejos de alta reflectividad o filtros de frecuencias específicas. Resolver numéricamente la ecuación (3.10) de la amplitud permite describir el comportamiento de la luz al atravesar multicapas con perfil  $n(z)$  continuo o discontinuo, aunque las reflectividades sean altas, como suele suceder en el caso de índices de refracción periódicos. En este capítulo se muestra como la solución numérica de (3.10) puede representar satisfactoriamente la intensidad óptica en multicapas dieléctricas de varios tipos, bajo incidencia normal. Las multicapas que se consideran aquí consisten en perfiles periódicos, con discontinuidades en  $n(z)$  o en sus derivadas, se incluyen casos con apodización<sup>1</sup>. Se muestra también que, cuando la variación del índice de refracción es gradual excepto por discontinuidades en sus derivadas, las soluciones analíticas bajo la aproximación SVRI 5.2 pueden resultar útiles. Una gran parte del contenido de este capítulo se presentó en el simposio “Optical Interference Coatings”, que tuvo lugar del 16 al 21 de junio de 2013 en Whistler, B.C., Canadá. Se publicaron los resúmenes en las memorias [88, 89]. Además, lo relacionado con el perfil de triángulos 8.2.2 se publicó recientemente en [90].

### 8.1. Espejos de Bragg

Esta sección es una breve introducción al tema de los espejos dieléctricos. Se expone de manera sencilla el funcionamiento de los espejos DBR, dichos dispositivos ópticos tienen hoy en día múltiples aplicaciones, por ejemplo, se usan con frecuencia como espejos de muy alta reflectividad en la construcción de láseres. Un espejo de Bragg o DBR, del inglés “Distributed Bragg Reflector”, es una estructura formada por capas alternadas de materiales homogéneos con diferente índice de refracción, un ejemplo típico se muestra en la figura 8.1(a). Las interfases entre un material y otro funcionan como superficies reflejantes, la distancia entre estas superficies es tal que produce interferencia entre las ondas reflejadas, constructiva para algunas frecuencias y destructiva para otras. El grosor óptico  $\Lambda_d$  de las capas suele ser el mismo para todas  $\Lambda_d = \frac{\lambda_p}{4}$ , donde  $\lambda_p$  es la longitud de onda principal, para la que se quiere reflejar el mayor porcentaje de luz posible. La reflectividad para el rango de frecuencias en que la interferencia es constructiva puede llegar a ser muy alta  $\sim 100\%$ , más que la de un espejo de superficie metálica. Un espectro de reflectividad típico de un DBR se muestra en la figura 8.1(b), para obtener gráficas como la de esta figura se emplea el método de las matrices como se explica en la sección 2.2.6.3. Esta gráfica representa el resultado de soluciones exactas

---

<sup>1</sup>La palabra “apodización” se usa en la jerga de diseño óptico cuando se modula una función periódica para que en los extremos se aproxime a cero

a la ecuación del campo eléctrico (2.10), sin embargo la expresión algebraica que resulta de escribir a la reflectividad con base en los elementos de matriz de (2.83) es extensa y no es fácil de interpretar. Otro

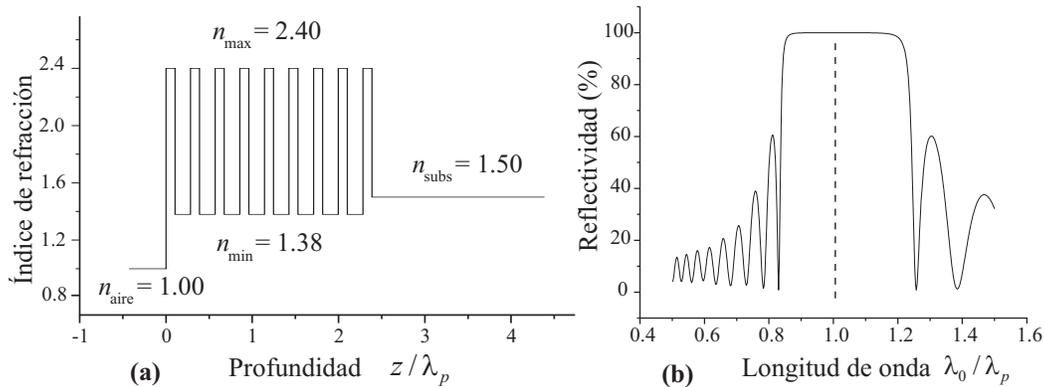


Figura 8.1: (a) Perfil  $n(z)$  típico de un espejo dieléctrico de multicapas, un “DBR”,  $\lambda_p$  es la longitud de onda principal, para la que se quiere la máxima reflexión. (b) El correspondiente espectro de reflectividad.

detalle que puede resultar inconveniente de la expresión algebraica es que se escribe en términos de los índices de refracción de los materiales involucrados y no directamente de los coeficientes de reflexión de las interfaces.

A continuación se presenta otro modelo mucho más sencillo, uno que se podría calificar como “modelo de juguete”, aunque es algo burdo permite mayor comprensión del fenómeno que resulta de la reflexión de la luz en las distintas interfaces. Una explicación cualitativa más clara de la forma que tiene el espectro de reflectividad 8.1(b) se puede dar haciendo un par aproximaciones. La primera es tomar en cuenta sólo las primeras reflexiones sobre las interfaces, ya que son éstas las más significativas, despreciando las reflexiones múltiples. La segunda es suponer que la transmitancia de las interfaces es muy cercana al 100 %, de hecho aún para los contrastes más grandes la transmitancia rara vez es menor al 90 %. En la figura 8.2 se representa la interferencia producida por las primeras reflexiones. Las capas más delgadas representan las de índice de refracción mayor, las más gruesas representan a las del índice menor.

Si bien los grosores de las capas son distintos, el grosor óptico es el mismo  $\Lambda_d = d_1 n_{\max} = d_2 n_{\min} = \frac{\lambda_p}{4}$ . Cuando la interfase marca una transición de un medio de menor a otro de mayor índice de refracción (reflexión externa), el cambio de fase ante la reflexión es de  $\pi$ , si la transición es contraria (reflexión interna) no hay cambio de fase, como se deduce de la expresión (2.27). En la figura 8.3 se representa con detalle lo que ocurre con la fase en los dos casos de reflexión, externa e interna. El rango de longitudes de onda que se desea reflejar está centrado en  $\lambda_p$ , para ella ocurre interferencia constructiva como se muestra en 8.2(a). Para la longitud de onda  $\lambda_0 = \frac{\lambda_p}{2}$  ocurre interferencia destructiva como se muestra en 8.2(b), esta interferencia no es tan “perfecta” como la constructiva pues las reflexiones se “anulan” por pares. Si además de despreciar reflexiones múltiples y suponer transmitancias muy cercanas a la unidad, consideramos  $n_i = n_t = n_{\min}$  para simplificar el álgebra aún más, el campo reflejado  $U_r$  sobre la primera superficie será la suma de las primeras reflexiones

$$U_r \approx U_i \left( r_{21} + r_{12} e^{i\pi\lambda_p/\lambda_0} + r_{21} e^{i2\pi\lambda_p/\lambda_0} + r_{12} e^{i3\pi\lambda_p/\lambda_0} + \dots + r_{12} e^{i(2m-1)\pi\lambda_p/\lambda_0} \right), \quad (8.1)$$

donde  $m$  es el número de capas con índice de refracción mayor,  $r_{12}$  es el coeficiente de reflexión asociado a la interfase que marca la transición del medio de mayor a menor índice de refracción y  $r_{21}$  a la transición contraria. Las exponenciales incluyen la información de la evolución de la fase de la onda en su recorrido.

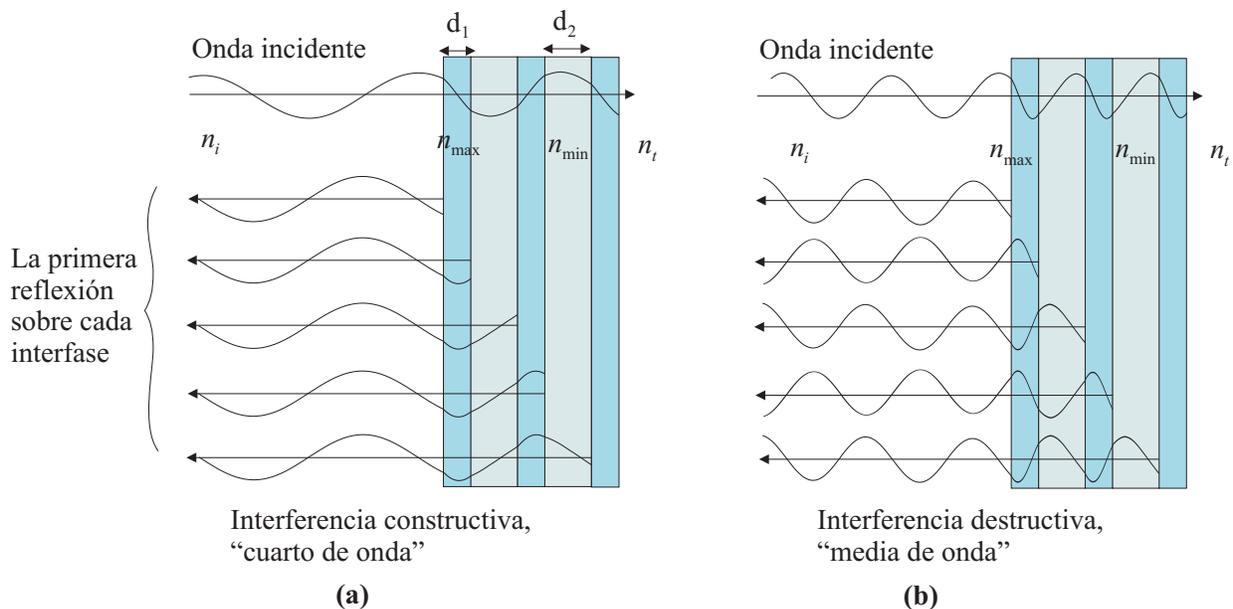


Figura 8.2: Representación gráfica de la parte real del campo eléctrico, incidencia normal y polarización lineal. (a) Interferencia constructiva para  $\lambda_0 = \lambda_p$  en una multicapa debido a la primera reflexión sobre las interfases. (b) La interferencia destructiva para  $\lambda_0 = \frac{\lambda_p}{2}$ .

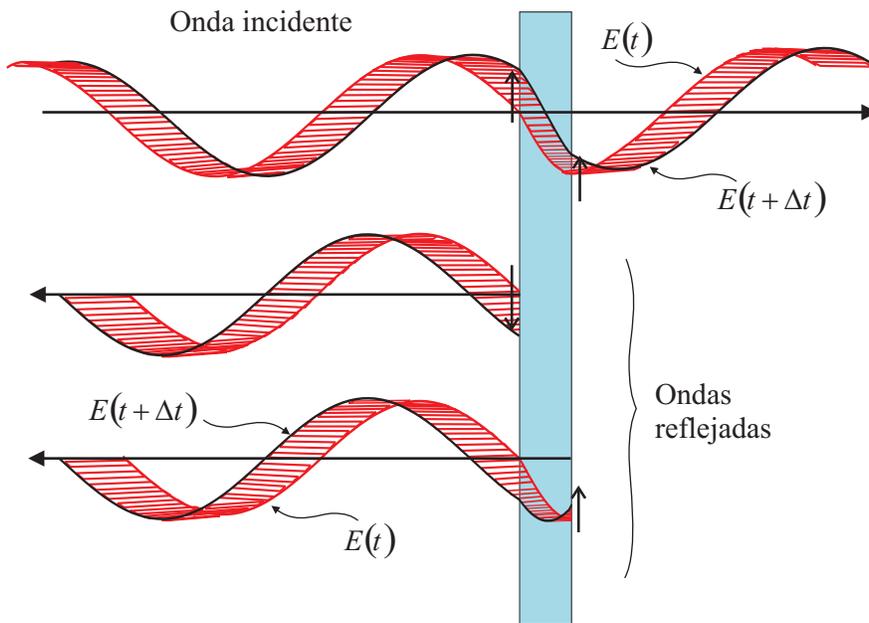


Figura 8.3: Dado que puede resultar un poco confuso interpretar el cambio de fase ante la reflexión representando al campo eléctrico sobre una gráfica estática y en dos dimensiones, se intenta plasmar algo de la evolución temporal con una "cauda" que indica como era el campo eléctrico en instantes anteriores al que representa la línea sólida. Así, las flechas verticales indican la dirección del cambio del campo sobre las interfases. En el caso de la reflexión externa, el sentido de las flechas verticales es opuesto para las ondas incidente y reflejada. En el caso de la reflexión interna tienen el mismo sentido.

Tomando en cuenta que el coeficiente de reflexión de toda la multicapa es  $r = U_r/U_i$  y la reflectividad  $R = rr^*$ , realizando algunas operaciones se llega a la siguiente expresión para la reflectividad

$$R(\lambda_0) \approx r_{12}^2 \left[ 2m + \sum_{j=1}^{2m-1} (-1)^j 2(2m-j) \cos \frac{j\pi\lambda_p}{\lambda_0} \right], \quad (8.2)$$

donde se ha incluido que  $r_{12} = -r_{21}$ . La sumatoria que está dentro del paréntesis cuadrado tiene la forma de una suma de Fourier en cosenos, cada término va agregando un armónico más. En la figura 8.4 se grafican varios espectros de reflectividad empleando la expresión (8.2), en particular para una, dos, tres y cuatro capas de material de índice alto, con un coeficiente de reflexión para las interfases de  $r_{12} = -r_{21} = 0.2$ . Como no se está considerando en este modelo simple que cada reflexión resta energía a la onda transmitida, la reflectividad máxima supera al 100% cuando  $m > 2$ . Aún así, la forma de las gráficas, sobre todo en las regiones de baja reflectividad es muy parecida al resultado exacto, como el que se ve en la figura 8.1(b). Los llamados “lóbulos laterales”, que aparecen a los lados de los principales máximos de reflexión, obtenidos aquí con algunos términos de una serie de Fourier (8.2), reproducen con bastante exactitud a los que predice el método de las matrices con los polinomios de Chebysev. Se aprecian claramente cuales son las longitudes de onda para las que consistentemente hay interferencia constructiva o destructiva, sin importar el número de capas  $m$ .

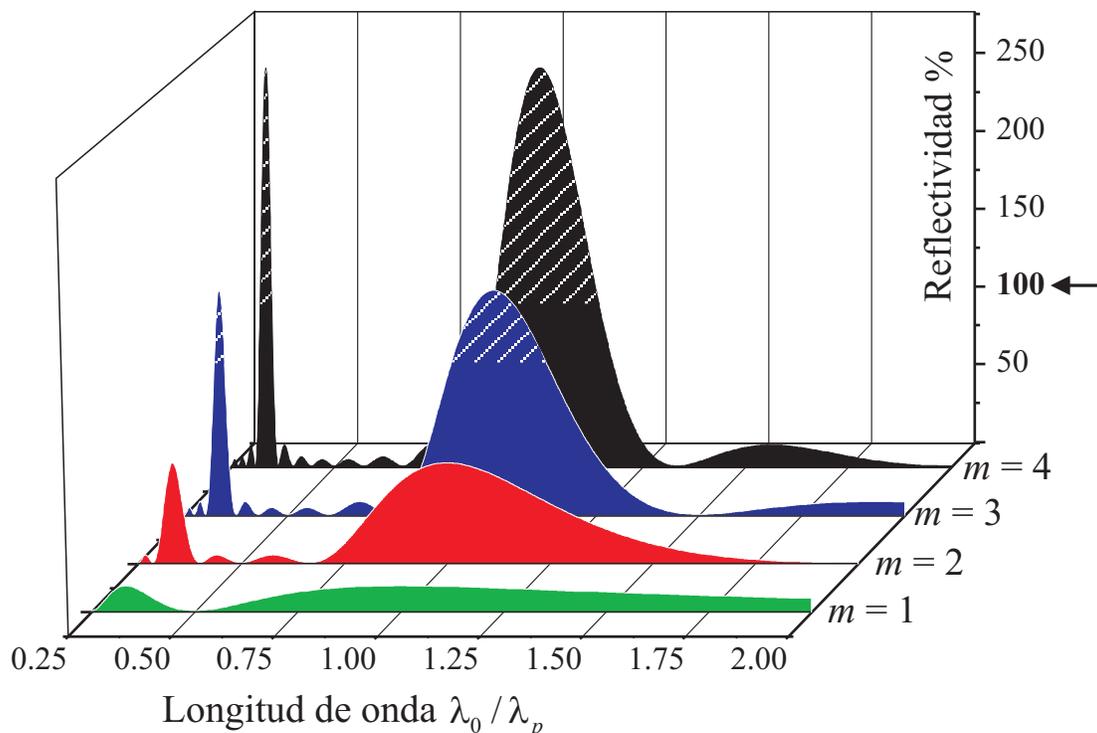


Figura 8.4: Varios espectros de reflectividad obtenidos mediante la expresión (8.2). En particular se presentan los espectros para una, dos, tres y cuatro capas de material de índice alto, con un coeficiente de reflexión para las interfases de  $r_{12} = -r_{21} = 0.2$ . Se resalta el hecho de que, al no tomar en cuenta la energía que se resta con cada reflexión, la reflectividad calculada de esta manera puede rebasar el 100%

Dentro del rango de frecuencias de la figura 8.4 se alcanzan a ver dos de estos máximos que corresponden a interferencia constructiva  $\frac{\lambda_0}{\lambda_p} = \frac{1}{3}, 1$  y un mínimo que revela interferencia destructiva en  $\frac{\lambda_0}{\lambda_p} = \frac{1}{2}$ . Entre

estos extremos locales persistentes aparecen los lóbulos laterales cuyo número y posiciones sí dependen del número de capas  $m$ . Hay  $m - 1$  lóbulos entre cada máximo y mínimo persistente de reflectividad [62]. Con este modelo sencillo se entiende a grandes rasgos porqué, entre más capas constituyen al DBR, mayor es la reflectividad máxima de la “meseta” de interferencia constructiva cercana a  $\lambda_p$ , como la que aparece al centro de la figura 8.1(b). A su vez se observa que, con el incremento en el número de capas, disminuye el ancho de la base de la meseta.

Si los coeficientes de reflexión no cambiaran de signo para interfases consecutivas, es decir  $r_{12} = r_{21}$ , como sucedería para un perfil de índice de refracción en forma de escalera, se tendría un escenario similar, pero quedarían intercambiados los máximos y los mínimos persistentes en el espectro de reflectividad. Ocurre que, en el espacio de los números de onda  $k_0$ , se recorrería horizontalmente todo el espectro de reflectividad en  $2\pi$

$$R_{++}(k_0) = R_{-+}(k_0 - 2\pi), \quad (8.3)$$

donde  $R_{++}(k_0)$  representa el espectro de reflectividad cuando no hay cambio de signo en los coeficientes ( $r_{12} = r_{21}$ ) y  $R_{-+}$  cuando si lo hay ( $r_{12} = -r_{21}$ ). Lo anterior se puede demostrar escribiendo primero ambos espectros de reflectividad en términos de  $k_0$ , nuevamente de la expresión (8.1)

$$R_{-+}(k_0) \approx r_{12}^2 \left[ 2m + \sum_{j=1}^{2m-1} 2(2m-j)(-1)^j \cos\left(j \frac{\lambda_p k_0}{2}\right) \right], \quad (8.4)$$

$$R_{++}(k_0) \approx r_{12}^2 \left[ 2m + \sum_{j=1}^{2m-1} 2(2m-j)(-1)^{2j} \cos\left(j \frac{\lambda_p k_0}{2}\right) \right]. \quad (8.5)$$

Tomando en cuenta que  $(-1)^j = \cos(j\pi)$ ,  $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$  y la identidad trigonométrica para el producto de dos cosenos

$$R_{-+}(k_0) \approx r_{12}^2 \left[ 2m + \sum_{j=1}^{2m-1} (2m-j) \left\{ \cos\left[j \left(\frac{\lambda_p k_0}{2} + \pi\right)\right] + \cos\left[j \left(\frac{\lambda_p k_0}{2} - \pi\right)\right] \right\} \right],$$

$$R_{++}(k_0) \approx r_{12}^2 \left[ 2m + \sum_{j=1}^{2m-1} (2m-j) \left\{ \cos\left[j \left(\frac{\lambda_p k_0}{2}\right)\right] + \cos\left[j \left(\frac{\lambda_p k_0}{2} - 2\pi\right)\right] \right\} \right],$$

observando estas dos últimas expresiones queda claro que se cumple (8.3).

### 8.1.1. Multiplicación y potenciación de matrices

Para modelar la luz propagándose por estas estructuras de forma exacta usualmente se recurre al método de las matrices de transferencia, como se explica en la sección 2.2.6.3. Este formalismo a veces involucra la multiplicación de un gran número de matrices, si no se maneja con cuidado estos cálculos pueden introducir errores grandes. Resolver la ecuación de la amplitud presenta una buena alternativa para los cálculos numéricos.

A continuación se presenta un ejemplo en el que la multiplicación repetitiva de matrices introduce un error que puede llegar a ser muy grande. Considérese la siguiente matriz unitaria  $2 \times 2$ , definida con base en números irracionales y complejos

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \pi & ie \\ \frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{1-e/\sqrt{5}}{\pi} \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Con 16 cifras significativas de precisión		Con 30 cifras significativas de precisión	
potencia de $\mathbf{m}$	$ \det [\mathbf{m}^{\text{potencia}}] $	potencia de $\mathbf{m}$	$ \det [\mathbf{m}^{\text{potencia}}] $
10	1.00000000614052	22	0.999999999338847
11	1.000000083165758	23	1.00000000070643
12	1.000000767531712	24	1.000000000181445
13	0.9999977529133372	25	1.000000044834839
14	0.9999756667675772	26	0.999996893062393
15	0.9999127032684054	27	0.9999904369657623
16	1.001601226270662	28	0.9995192462227915
17	0.9833746328468815	29	1.009116203212740
18	1.050093470629110	30	1.122433177734139
19	1.419194632795857	31	0.2151977448817349
20	0.000000000000000	32	2605.600734413129
21	41.47533920871550	33	95.55312440685059
22	0.000000000000000	34	0.000000000000000
23	2424.197108312282	35	0.000000000000000
24	26210.29553031983	36	973284.8007142732
25	0.000000000000000		

Cuadro 8.1: Módulo del determinante de las potencias de la matriz unitaria (8.6). A la izquierda se muestran los resultados habiendo introducido las entradas de la matriz con 16 cifras significativas. A la derecha con 30, aunque se despliegan los resultados finales redondeados hasta 16 cifras. En el primer caso el error desborda a partir de la potencia 19, en el segundo a partir de la potencia 31.

Ésta se introduce en algún programa capaz de multiplicar matrices numéricamente, aquí se usa *Mathematica* [22]. Se comienza por escribir cada entrada de  $\mathbf{m}$  con 16 cifras significativas, en números decimales. Siendo una matriz unitaria, teóricamente el módulo del determinante debe ser la unidad, pero dado a que se introdujo de forma numérica, el módulo del determinante resulta no ser exactamente uno. De acuerdo al número de cifras significativas que se eligió para trabajar el determinante resulta  $|\det [\mathbf{m}]| = 0.9999999999999999$ . A continuación se eleva la matriz  $\mathbf{m}$  a distintas potencias enteras, en la tabla 8.1 se muestran algunos resultados para el módulo del determinante. En teoría, el módulo del determinante del producto de matrices unitarias debiera ser la unidad, si este resultado numérico difiere demasiado indica que el error es grande. Los resultados de la izquierda en la tabla 8.1, muestran como el algoritmo que usa el programa para potenciar va acarreando un error que se vuelve significativo a partir de la potencia 19. Si se repite el ejercicio, pero introduciendo las entradas de la matriz  $\mathbf{m}$  con 30 cifras significativas, el error se desborda a partir de la potencia 31. Se muestran estos resultados también en la tabla 8.1, del lado derecho. Aunque las compañías que proveen de *software* comercialmente no suelen revelar sus algoritmos, con el objeto de proteger sus intereses, *Mathematica* seguramente emplea los polinomios de Chebyshev en el caso de la potenciación de matrices, pues los resultados son muy similares a los que se obtienen si el usuario introduce directamente la ecuación (2.79). Cuando se efectúa la potenciación multiplicando explícitamente la matriz por si misma un cierto número de veces, el error desborda a potencias aún menores.

Está claro que hay matrices numéricas más estables ante la potenciación que otras, pero ya que las multicapas periódicas de recubrimientos ópticos pueden estar constituidas de más de 20 períodos este desbordamiento del error llega a presentar un problema. En el caso de que se pudieran representar las matrices de multicapas de manera simbólica el panorama mejora, pero aún así existen limitaciones. El

programa *Mathematica* también puede manejar operaciones simbólicas. Introduciendo la matriz  $\mathbf{m}$  de forma simbólica, tal cual aparece en la ecuación (8.6), al elevarla a potencias mayores a 56 se rebasa el límite de interno de precisión máxima durante la evaluación.

### 8.1.2. Comparación de soluciones analíticas con numéricas

En esta sección se comparara la reflectividad obtenida con base en la solución numérica de la ecuación de la amplitud y los resultados analíticos conocidos para la reflectividad de un DBR. Se toma como ejemplo una multicapa con películas delgadas alternadas, nueve capas con un índice de refracción  $n_{\max} = 2.40$  (dióxido de titanio) y ocho con  $n_{\min} = 1.38$  (fluoruro de magnesio), como la de la figura 8.1. Los materiales de la multicapa se suponen transparentes y no magnéticos. El índice de refracción del medio desde donde incide la luz es  $n_i = 1$  y el del sustrato  $n_t = 1.5$ .

El coeficiente de reflexión se obtiene analíticamente con los elementos de matriz (2.83) y la ecuación (2.68) para medios no magnéticos e incidencia normal

$$r_{\perp} = \frac{n_i (\mathcal{M}_{11} + n_t \mathcal{M}_{12}) - (n_t \mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{21})}{n_i (\mathcal{M}_{11} + n_t \mathcal{M}_{12}) + (n_t \mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{21})}. \quad (8.7)$$

El resultado analítico para la reflectividad de la multicapa es el producto de este coeficiente de reflexión por su conjugado. Teóricamente el determinante de la matriz característica siempre debe ser la unidad, ya que dicha matriz es unitaria, como se explica en la sección 2.2.6. Sin embargo, al evaluar los elementos de matriz y asignarles un número, ya sea en el sistema decimal, binario o cualquier otro, el redondeo introduce un pequeño error. El módulo del determinante de la matriz de esta multicapa, al ser evaluada, es siempre muy cercano a uno  $||\det \mathbf{M}| - 1| < 4.0 \times 10^{-11}$ , como se puede ver en la figura 8.5, lo que asegura resultados confiables.

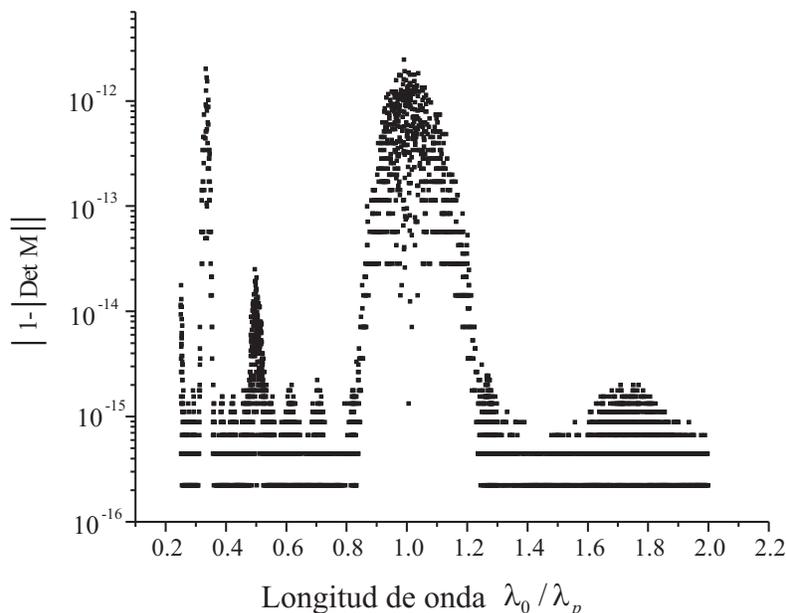


Figura 8.5: Gráfica de  $|1 - |\det(\mathbf{M})||$  como función de la longitud de onda. Son gráficas de puntos y la escala del eje vertical es logarítmica. La forma en que se distribuyen los puntos de la gráfica, más que estar relacionada con información física, es consecuencia del algoritmo que usa el programa *Mathematica* [22] para efectuar las operaciones.

El resultado numérico se obtiene resolviendo la ecuación de la amplitud (3.11), con el perfil representado en la figura 8.1(a) y por la siguiente expresión

$$n_{\text{DBR}}(z) = \begin{cases} n_i & \text{para } z < 0 \\ n_{\text{max}} & \text{para } \frac{j}{n_{\text{max}}} + \frac{j}{n_{\text{min}}} < 4z < \frac{j+1}{n_{\text{max}}} + \frac{j}{n_{\text{min}}} \\ n_{\text{min}} & \text{para } \frac{j+1}{n_{\text{max}}} + \frac{j}{n_{\text{min}}} < 4z < \frac{j+1}{n_{\text{max}}} + \frac{j+1}{n_{\text{min}}} \\ n_{\text{max}} & \text{para } \frac{8}{n_{\text{max}}} + \frac{8}{n_{\text{min}}} < 4z < \frac{9}{n_{\text{max}}} + \frac{8}{n_{\text{min}}} \\ n_t & \text{para } 4z > \frac{9}{n_{\text{max}}} + \frac{8}{n_{\text{min}}} \end{cases}, \quad (8.8)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots, 7$ . La ecuación de la amplitud se resuelve iteradamente mediante el método de las diferencias finitas para varias longitudes de onda incidentes. Se sujeta a las condiciones a la frontera adecuadas para representar físicamente solo una onda transmitida del lado derecho del medio estratificado

$$A = \sqrt{\frac{Q}{k_0 n}}, \quad A' = 0. \quad (8.9)$$

Si, para cada solución, la ecuación (3.31) se evalúa del lado donde incide la luz sobre la multicapa, la cantidad  $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$  corresponde a la reflectividad. Las gráficas de reflectividad contra longitud de onda se presentan en la figura 8.6. La longitud de onda central  $\lambda_p$  es tal que el grosor óptico de cada capa corresponde a un cuarto de esa longitud.

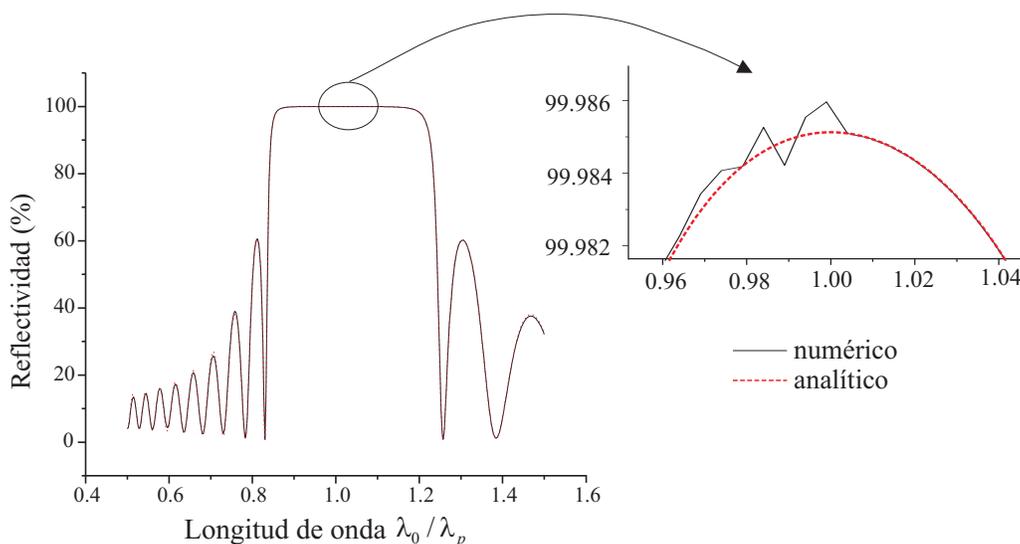


Figura 8.6: Reflectividad como función de la longitud de onda incidente, el resultado numérico (línea negra sólida) y analítico (línea roja y segmentada). Se incluye un acercamiento a la región de más alta reflectividad.

En la gráfica completa,  $0.5 < \lambda < 1.6$ , los dos resultados se ven muy similares, pareciera una sola línea. Hay que hacer un acercamiento para poder apreciar las diferencias, que son del orden de milésimas en la reflectividad dada en unidades de porcentaje. Con números de precisión simple la diferencia es de tan solo  $8.361 \times 10^{-4} \%$  en la longitud de onda central, donde el resultado de la reflectividad según (8.7) es  $R = 99.9851276 \%$ , escrito con nueve cifras significativas. Resolver la ecuación de la amplitud con diferencias finitas cuando se esperan reflectividades muy altas  $\sim 100 \%$  requiere un manejo delicado. En el caso de reflectividades altas, las oscilaciones de  $A(z)$  se vuelven muy amplias y el valor de  $A$  se aproxima

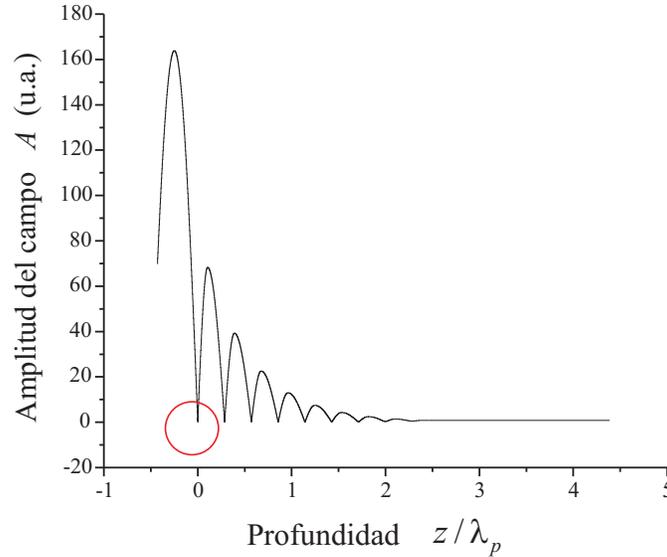


Figura 8.7: Una solución numérica a la ecuación de la amplitud con el perfil  $n(z)$  de la figura 8.1(b) y la expresión (8.8). Se resalta una de las regiones en las que la amplitud  $A$  se aproxima a cero, al acercarse a estos valores mínimos, la distancia de discretización se debe hacer más pequeña.

mucho a cero en algunos puntos. En esos puntos el término  $\frac{k_0^2}{A_d^3}$  de la ecuación (3.11) toma valores muy grandes, en regiones cercanas a estos puntos la distancia de discretización se debe hacer más pequeña. La distancia de discretización  $\Delta$  es el valor absoluto de la diferencia entre un valor numérico de  $z$  y el contiguo. Una solución numérica a la ecuación de la amplitud se presenta en la figura 8.7, se resalta una región donde  $A$  se aproxima a cero. Experimentando con varios valores de  $\Delta$  para amplitudes pequeñas ( $A < 0.2$ ), se puede escribir una “regla de pulgar” para asignar una  $\delta$  adecuada: Si  $A > 3^{-(m+2)}$ , basta con emplear una distancia de discretización de  $\Delta = 10^{-(m+2)}$ , donde  $m$  es un número natural.

El cuadrado de  $A(z)$  es proporcional a la intensidad óptica dentro de la multicapa por lo que, un vez obtenidas las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.10), se puede hacer un mapa de intensidad óptica como función de la penetración  $z$  y la longitud de onda  $\lambda_0$ , como el que se muestra en la figura 8.8. El método de las matrices no permite hacer estos mapas de forma tan directa. Para elaborar el mapa de la figura 8.8 se tomaron 200 soluciones  $A(z)$  para el intervalo  $0.5 < \lambda_0 < 1.5$  y se incluyeron 335 puntos por solución, ésto implica un total de  $67 \times 10^3$  píxeles. El procedimiento no toma más de algunos minutos con una computadora personal. Si el mapa de intensidad óptica ha de tener una interpretación clara, es conveniente renormalizar antes las soluciones de tal manera que la intensidad del campo incidente sea siempre la misma. Ésto es porque, experimentalmente, lo que se suele controlar es la intensidad de la luz incidente. El valor del invariante  $Q$  en la ecuación (3.10) está relacionado con el flujo total de energía en la dirección  $z$ , según (3.46). Si se usa el mismo valor de  $Q$  para todas las longitudes de onda, lo que permanecería constante para todas las soluciones es el flujo de energía en la dirección  $z$  por el número de onda  $k_0$ , dado que  $Q = (A_i^2 - A_r^2) k_0 n_i$  y no la amplitud del campo incidente  $A_i$ . Si se deja fija  $A_i = 1$  para todo el espectro y se toma en cuenta que  $R = \frac{A_r^2}{A_i^2}$  se obtiene un valor del invariante  $Q$  que depende de la longitud de onda incidente  $\lambda_0$ . Sea entonces el valor de  $Q(\lambda_0)$  el siguiente

$$Q(\lambda_0) = (1 - R(\lambda_0)) k_0 n_i, \quad (8.10)$$

donde  $R(\lambda_0)$  es la reflectividad del DBR como función de la longitud de onda de la luz incidente.

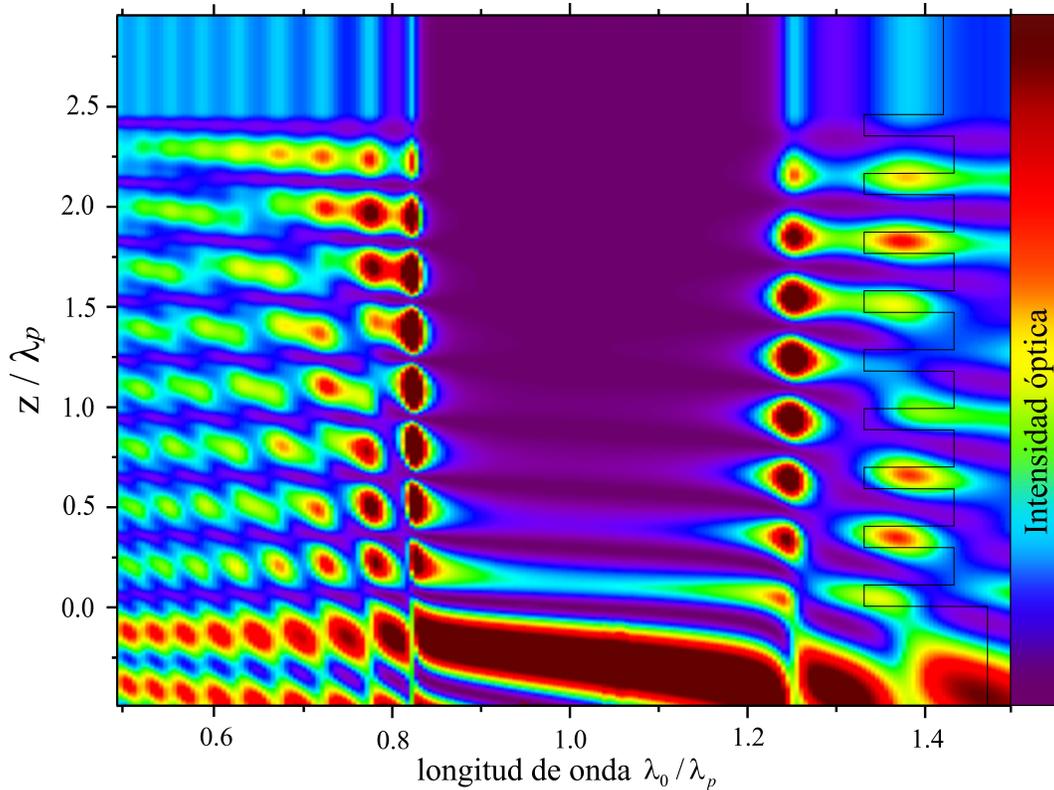


Figura 8.8: Mapa de intensidad óptica para un DBR como el que describe la figura 8.1(b) y la expresión (8.8). Se muestra un bosquejo del perfil  $n(z)$  como referencia del lado izquierdo. El mapa está construido con los datos de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.10). La unidad de distancia para el eje  $z$  es la longitud de onda principal  $\lambda_p$ . Dicha longitud de onda corresponde a cuatro veces el grosor óptico de las capas, es decir, se trata de un espejo de un cuarto de onda. El eje horizontal corresponde a la longitud de onda de la luz incidente  $\lambda_0/\lambda_p$ . El código de color es el siguiente: hacia el rojo y marrón oscuro corresponde a mayor intensidad, hacia el azul y violeta menor intensidad. La luz incide desde la región inferior del mapa.

Si bien la reflectividad se supone desconocida inicialmente y para conocerla se debe resolver la ecuación de la amplitud antes, se puede comenzar por resolver la ecuación de la amplitud (3.11), a partir de ella calcular la reflectividad y luego multiplicar la solución obtenida  $A(z)$  por la constante de proporcionalidad adecuada (se dice que es constante porque no depende de  $z$ , pero dependerá de  $\lambda_0$ ). A continuación se calcula dicho factor de proporcionalidad. Las dos ecuaciones implicadas, la que involucra a  $A_d$  y la que incluye la  $Q$  conveniente para una  $\lambda_0$  dada son (3.11) y (3.10), que se reescriben a continuación para incidencia normal y medios no magnéticos

$$A_d'' - \frac{k_0^2}{A_d^3} = -k_0^2 n^2 A_d \quad \text{y} \quad A'' - \frac{Q^2}{A^3} = -k_0^2 n^2 A.$$

Ambas están relacionadas con la misma ecuación (2.10) para el campo  $U'' = -Uk_0^2 n^2$ . Sean las dos soluciones asociadas  $U(z) = Ae^{iq(z)}$  y  $U_d(z) = A_d e^{iq_d(z)}$ , como solo se trata de una renormalización la diferencia entre ambas  $U$ 's es tan solo un factor constante complejo  $\tilde{C}_d$ , tal que  $U(z) = \tilde{C}_d U_d(z)$ . De modo que  $A = |\tilde{C}_d| A_d$  y  $q = q_d + \delta$ , donde  $\delta$  es la fase compleja de ese factor. Los invariantes (3.9)

correspondientes son  $A_d^2 q'_d = k_0$  y  $A^2 q' = Q$ , pero  $q'_d = q'$ , entonces

$$\frac{k_0}{A_d^2} = \frac{Q}{A^2}$$

por lo que con (8.10) queda

$$A = \sqrt{\frac{Q}{k_0}} A_d = \sqrt{(1 - R(\lambda_0)) n_i} A_d.$$

En conclusión, si se cuenta con un conjunto de soluciones  $A_d$  para distintas longitudes de onda  $\lambda_0$  y con el espectro de reflectividad  $R(\lambda_0)$ , se pueden obtener las  $A$ 's adecuadas para generar el mapa de intensidades multiplicando las soluciones  $A_d$  por  $\sqrt{(1 - R(\lambda_0)) n_i}$ .

En el mapa de la figura 8.8 la luz es incidente desde la parte inferior y se han renormalizado las soluciones de tal manera que la intensidad del campo incidente es siempre la misma para todas las longitudes de onda. En la parte superior solo hay luz transmitida por lo que la intensidad se vuelve constante a lo largo del eje  $z$ , las fluctuaciones de la intensidad se dan por interferencia entre las ondas que se contrapropagan. Sobre el eje horizontal, en la región central cercana a  $\lambda_p$ , la intensidad es muy baja más allá de la primera capa. La alta reflectividad debido a la interferencia constructiva de las ondas reflejadas no deja que la luz se propague hacia dentro de la multicapa. En algunos textos le llaman a ese rango de frecuencias “banda prohibida” (*band gap*). Las frecuencias para las que la reflectividad es mínima, si son permitidas y producen intensidades altas en algunas regiones. En un DBR real, los materiales no son perfectamente transparentes, esa pequeña fracción de energía que se absorbe en las regiones de alta intensidad puede deteriorar la estructura, sobre todo cuando estas coinciden con los planos de interfase. Las fronteras entre materiales son vulnerables pues las características distintas, como el coeficiente de expansión térmica, pueden provocar esfuerzos que dañen irremediablemente el espejo.

### 8.1.3. Conclusiones de la sección 8.1

Se ha mostrado que resolver numéricamente la ecuación de la amplitud para el campo eléctrico es una buena alternativa para calcular la intensidad óptica dentro de una estructura periódica de multicapas y su reflectividad, aún con reflectividades muy altas. Para cambios abruptos en el índice de refracción los resultados numéricos reproducen la predicción analítica dentro de el  $10^{-4}$  % de variación. Hay que resaltar el hecho de que, aunque para multicapas perfectamente periódicas se pueden emplear expresiones analíticas con los polinomios de Chebyshev para predecir su comportamiento, es muy frecuente en recubrimientos ópticos el uso de multicapas más complicadas que no repiten un mismo período[91, 92]. Es en estos casos principalmente en los que resolver numéricamente la ecuación de la amplitud es una alternativa más atractiva que el método de las matrices, ya que su multiplicación consecutiva puede llevar a inestabilidades debido al desbordamiento del error como se muestra en 8.1.1. No se considera la dispersión en esta sección, pero si se conoce la relación  $n(\lambda)$  se puede incorporar fácilmente. Los cálculos se hicieron para incidencia normal, pero si el ángulo de incidencia está suficientemente lejos del ángulo crítico, la generalización a incidencia oblicua es franca tanto para TE como TM.

## 8.2. Perfiles periódicos con variación gradual del índice de refracción y otros “corrugados”

### 8.2.1. Perfiles $n(z)$ continuos que se aproximan al de un DBR

Describir la propagación de luz a través de multicapas mediante la ecuación de la amplitud (3.10) permite modelar de manera más realista las interfaces entre capas. En un DBR fabricado en el laboratorio,

estas interfases no son estrictamente planos bidimensionales, las rugosidades o la adsorción de un material en otro extiende la transición a un intervalo probablemente pequeño pero finito de  $z$ . Escogiendo un perfil continuo adecuado se puede tomar en cuenta, hasta cierto punto, este fenómeno. Considérese un índice de refracción como el siguiente

$$n_{\text{DBRcontinuo}}(\Lambda) = \begin{cases} n_i & \text{para } \Lambda < -\frac{13}{8} \\ \frac{n_{\text{max}} - n_{\text{min}}}{2} \left[ \pm |\cos(4\pi\Lambda)|^{\frac{1}{50}} + 1 \right] + n_{\text{min}} & \text{para } -\frac{13}{8} < \Lambda < \frac{13}{8} \\ n_t & \text{para } \Lambda > \frac{13}{8} \end{cases}, \quad (8.11)$$

donde  $\Lambda$  es el camino óptico en unidades de longitud de onda, este perfil se grafica en la figura 8.9(a). En contraste con el caso de un DBR ideal como el que se describe en la figura 8.1(b) y en la expresión (8.8), con el perfil continuo (8.11) la ecuación del campo eléctrico (2.10) no tiene solución analítica conocida. Por lo anterior, el método de las matrices ya no resulta tan conveniente. Sin embargo resolver numéricamente la ecuación de la amplitud (3.16) con dicho perfil para varias longitudes de onda no es más complicado que hacerlo para un DBR ideal. La ecuación (3.31) se puede reescribir sin dificultad si la variable independiente es  $\Lambda$  en vez de  $z$

$$\left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 = \frac{\left( Ak_0 n - \frac{Q}{A} \right)^2 + nA'^2}{\left( Ak_0 n + \frac{Q}{A} \right)^2 + nA'^2}, \quad (8.12)$$

donde la prima indica diferenciación respecto de  $\Lambda$  y se ha tomado en cuenta que se trata de incidencia normal. Sujutando a las condiciones a la frontera adecuadas para representar físicamente solo una onda transmitida del lado derecho del medio estratificado, si se evalúa el cociente de la expresión (8.12) en la región  $\Lambda < -\frac{13}{8}$ , del lado izquierdo del medio estratificado, éste corresponderá a la reflectividad. El espectro de reflectividad  $R(\lambda_0)$ , así obtenido, se muestra en la figura 8.9(b). Nuevamente la longitud de onda  $\lambda_p$  es aquella para la cual el grosor óptico de las capas es un cuarto de onda,  $n_{\text{max}} = 2.40$ ,  $n_{\text{min}} = 1.38$ ,  $n_i = 1$  y  $n_t = 1.5$ . Se ha supuesto incidencia normal, materiales transparentes y no magnéticos. El perfil no tiene interfaces ideales, debido a ello la reflectividad como función de la longitud de onda  $R(\lambda)$  ya no es una curva tan suave como la de la figura 8.6, presenta algunas pequeñas irregularidades que le confieren un aspecto más “experimental”, es decir, se parece un poco más a una medición experimental de la reflectancia.

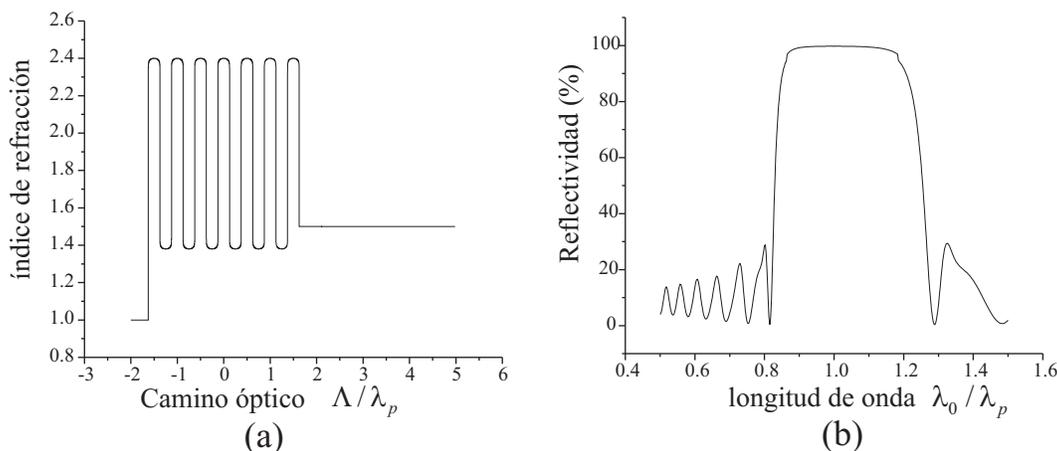


Figura 8.9: (a) Perfil  $n(\Lambda)$  de un espejo dieléctrico de multicapas en el que se considera una transición gradual entre un índice de refracción y otro, expresado en la ecuación (8.11). (b) Reflectividad como función de la longitud de onda incidente del perfil en la figura anterior.

En la figura 8.10 se muestran dos ejemplos de tales resultados experimentales. La figura 8.10 (a) es la gráfica de reflectividad contra longitud de onda de un DBR de silicio poroso (la línea sólida), tomada de la referencia [93]. Se resalta una indentación que no predice el modelo abrupto para un DBR, sin embargo se ve claramente una característica similar en la figura 8.9(b) que sí predice el modelo gradual propuesto en este trabajo. La figura 8.10 (b) es la reflectividad para un DBR que forma parte de un espejo saturable, tomada de la referencia [94]. Aquí se aprecian picos más agudos en los lóbulos secundarios que lo predicho por el modelo abrupto, muy parecidos a los de 8.9 (b).

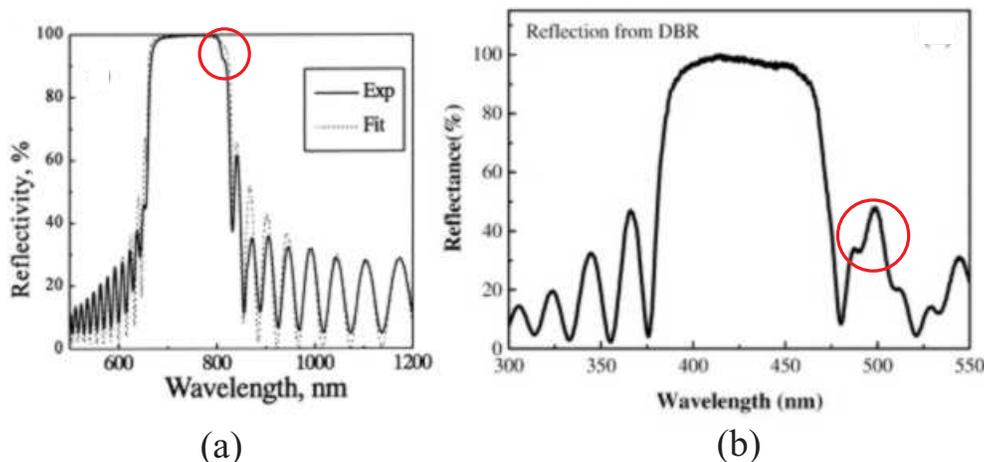


Figura 8.10: Un par de ejemplos de reportes experimentales para las reflectividades de DBR's, (a) una estructura de silicio poroso [93] y (b) una multicapa que forma parte de un espejo saturable [94].

No es la intención original de este trabajo ajustar un perfil para reproducir los espectros experimentales presentados en la figura 8.10. Solamente se trató de incluir en el modelo el hecho de que una interfase ocurre a lo largo de una distancia finita en un dispositivo DBR real, como consecuencia se logró mayor similitud con resultados experimentales. Sin embargo se puede seguir investigando en esa dirección, pues hay un parámetro libre que se puede variar siendo éste es la potencia  $p$  a la que se eleva la función armónica (aquí se usó  $p = 1/50$ ). Mientras más pequeño sea el exponente del coseno, más abrupta será la representación de las interfaces en el modelo. El grosor de la interfase, el parámetro  $D$  que se define en la sección 3.2.2, se puede relacionar con  $p$  de la siguiente manera  $D = \frac{2}{k_0} \arcsin\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{1}{p}}$ . Incluso se puede cambiar el tipo de función que se usó aquí para modelar una multicapa con interfaces de grosor finito, por ejemplo se podría recurrir a los primeros términos de la serie de Fourier para una onda cuadrada. De hecho, no se necesita que el perfil pueda ser expresado con una fórmula matemática, puede estar basado en resultados experimentales de perfilometría, como los que arrojan las técnicas de espectroscopía Auger (AES) [95] y emisión óptica por descarga de radiofrecuencia [96] (rf-GD-OES).

### 8.2.2. Perfil de triángulos

Dado que las discontinuidades en la derivada  $\frac{dn}{dz}$  producen reflexión de luz como se demuestra en el capítulo 5, se propone aquí que repitiendo periódicamente estos planos se pueden diseñar espejos dieléctricos o filtros. Un perfil de “triángulos” es el que se escoge como ejemplo [89, 90], el cual se muestra en la

figura 8.11 y se puede resumir en la siguiente expresión

$$n_{\Delta}(z) = \begin{cases} n_{\min} & \text{para } z < 0 \\ 2(n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \left( \frac{z}{\lambda_p} - \frac{j}{n_{\max} + n_{\min}} \right) + n_{\min} & \text{para } \frac{j\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} < z < \frac{(j-\frac{1}{2})\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \\ 2(n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \left( -\frac{z}{\lambda_p} + \frac{j+1}{n_{\max} + n_{\min}} \right) + n_{\min} & \text{para } \frac{(j+\frac{1}{2})\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} < z < \frac{j\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \\ n_{\min} & \text{para } z > \frac{10\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \end{cases}, \quad (8.13)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Este perfil  $n_{\Delta}(z)$  que varía gradualmente, consta de 20 segmentos rectos en los que las pendientes son  $\pm 2(n_{\max}^2 - n_{\min}^2)/\lambda_p$ , en particular se elige  $n_{\max} = 2$  y  $n_{\min} = 1.5$ . En ambos extremos el índice de refracción es  $n_i = n_t = 1.5$ . El grosor óptico de cada intervalo, en el que el índice de refracción varía linealmente, es  $\frac{\lambda_p}{4}$ , un cuarto de onda para la longitud de onda principal. En unidades de esa longitud de onda, los segmentos se extienden a lo largo de un intervalo  $\Delta z = d = \frac{\lambda_p}{2(n_{\max} + n_{\min})}$ . A la vista, dicho perfil, parece una secuencia de diez triángulos isósceles idénticos. Se supone incidencia normal, materiales transparentes y no magnéticos. Estas estructuras pudieran parecer muy sofisticadas, pero están dentro de lo que es posible lograr en un laboratorio especializado para producir materiales ópticos y recubrimientos [97].

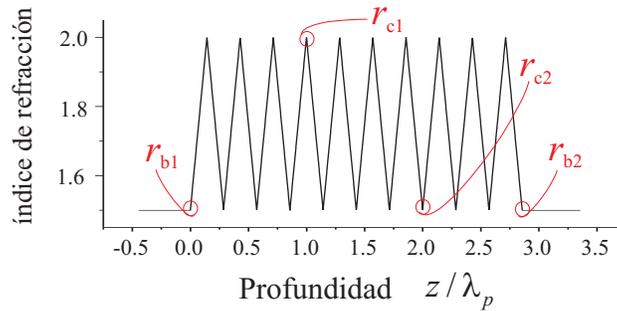


Figura 8.11: Perfil  $n(z)$  de “triángulos” de la expresión (8.13).

Cada vértice representa un plano de discontinuidad en la primera derivada, el cual produce reflexión. En la sección 5.2 se expone como calcular, mediante la aproximación SVRI, el coeficiente de reflexión a menor orden no nulo de estos vértices. Hay cuatro tipos de vértices y se resaltan ambos en la figura 8.11. Aplicando la ecuación (5.37) para los cuatro casos se concluye que los coeficientes de reflexión son

$$\begin{aligned} r_{c1} &= \frac{i\lambda_0}{2\pi\lambda_p} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\min}}{n_{\max}} \right)^2 \right], & r_{c2} &= \frac{i\lambda_0}{2\pi\lambda_p} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \right)^2 \right], \\ r_{b1} &= \frac{i\lambda_0}{4\pi\lambda_p} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \right)^2 \right], & r_{b2} &= \frac{i\lambda_0}{4\pi\lambda_p} \left[ 1 - \left( \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Si se evalúan tomando la longitud de onda principal  $\lambda_0 = \lambda_p$

$$r_{c1} \approx i(0.0696), \quad r_{c2} \approx -i(0.1238), \quad r_{b1} \approx -i(0.0619) \quad \text{y} \quad r_{b2} \approx -i(0.0619), \quad (8.15)$$

correspondiendo todas ellas a una reflectividad del orden del 1%. Como una primera aproximación para predecir el orden de la reflectividad de esta estructura en la longitud de onda principal se puede emplear el resultado (2.82). Este resultado fue obtenido suponiendo una yuxtaposición de capas homogéneas, pero está escrito en términos de los coeficientes de reflexión de las interfaces, lo que lo hace más versátil.

Emplearlo implicaría suponer que la reflectividad de la estructura sólo depende de la reflexión en los vértices mientras que la variación gradual del índice de refracción no influye en absoluto. Haciendo las substituciones  $r_{1i} \rightarrow |r_{b1}|$ ,  $r_{12} \rightarrow |r_{c1}|$ ,  $r_{21} \rightarrow -|r_{c2}|$  y  $r_{2t} \rightarrow -|r_{b2}|$

$$r_{\text{previa}} = \frac{\frac{1-|r_{b1}|}{1+|r_{b1}|} \left(-\frac{1-|r_{c1}|}{1+|r_{c1}|}\right)^{10} + \frac{1+|r_{b2}|}{1-|r_{b2}|} \left(-\frac{1+|r_{c2}|}{1-|r_{c2}|}\right)^9}{\frac{1-|r_{b1}|}{1+|r_{b1}|} \left(-\frac{1-|r_{c1}|}{1+|r_{c1}|}\right)^{10} - \frac{1+|r_{b2}|}{1-|r_{b2}|} \left(-\frac{1+|r_{c2}|}{1-|r_{c2}|}\right)^9}. \quad (8.16)$$

De esta forma la reflectividad en la longitud de onda principal es  $R = r_{\text{previa}}^2 = 92\%$ , resultado que será interesante comparar más adelante.

En esta sección se tratará el perfil de triángulos de manera minuciosa. Primero, se resuelve la ecuación de la amplitud para varias longitudes de onda  $0.5 < \lambda < 1.5$  con el método de las diferencias finitas, renormalizando las soluciones se produce un mapa de intensidad óptica que se presenta en la figura 8.12. Posteriormente se encuentra la reflectividad como función de la longitud de onda de tres formas distintas:

- a) Mediante las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud ya obtenidas: caso “numérico”.
- b) De forma analítica exacta mediante series de Bessel, atendiendo a la propuesta que plantean Morozov *et al.* en la referencia [5], al citar uno de los trabajos que presentó la autora de esta tesis [89] en el simposio “Optical Interference Coatings 2013”. Propuesta que consiste en emplear la matriz que se describe en las ecuaciones (2.115): caso “analítico exacto”.
- c) De forma analítica aproximada mediante la aproximación SVRI de acuerdo al lo visto en el la sección 5.2, lo cual es equivalente a suponer que no hay reflexión sobre las regiones graduales sino solamente sobre los planos de discontinuidad en la derivada: caso “analítico aproximado SVRF”.

En este mapa de intensidad 8.12 los contrastes no son tan grandes como en el del DBR 8.8, ésto se debe a que la reflectividad de los planos de unión en el perfil de triángulos no es tan grande como la de las interfaces abruptas entre dos materiales distintos. En el perfil de triángulos no hay interfaces definidas entre dos materiales con índices de refracción distintos, que son las más vulnerables en condiciones de altas intensidades. Lo anterior explica por que este tipo de estructuras con variación gradual del índice de refracción son más resistentes al daño por luz láser [98].

### 8.2.2.1. Caso numérico

Se encuentra la reflectividad mediante las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.11), las  $A_d$  para varias longitudes de onda, recurriendo a la ecuación (3.31):

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \frac{k_0^2 \left(A_d n - \frac{1}{A_d}\right)^2 + A_d^2}{k_0^2 \left(A_d n + \frac{1}{A_d}\right)^2 + A_d^2}, \quad (8.17)$$

Sujetando a las condiciones a la frontera adecuadas para representar físicamente solo una onda transmitida del lado derecho del medio estratificado, si se evalúa el cociente de la expresión (8.17) en la región del lado izquierdo del medio inhomogéneo, éste corresponderá a la reflectividad:  $R_{\text{numérica}} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$ .

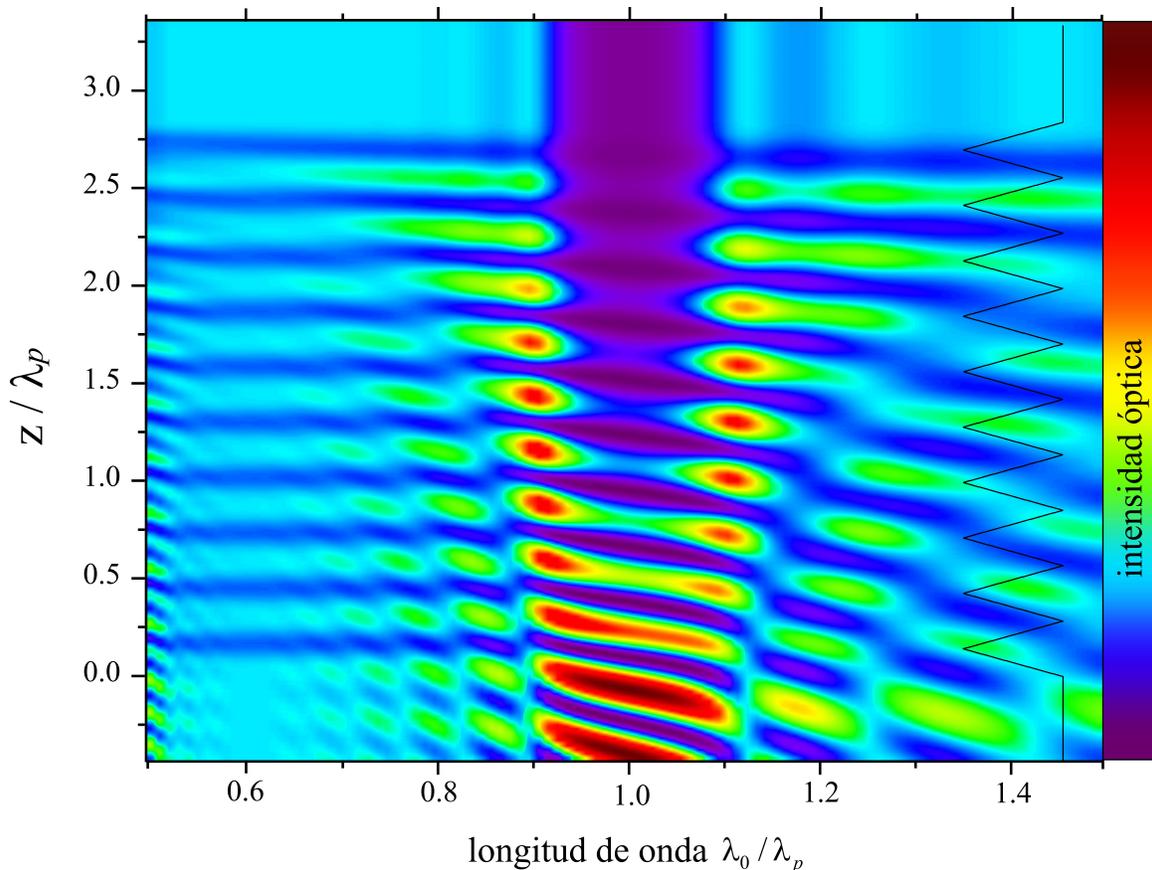


Figura 8.12: Mapa de intensidad óptica para un perfil de triángulos como el que describe la figura 8.11. Se muestra un bosquejo del perfil  $n(z)$  como referencia del lado izquierdo. El mapa está construido con los datos de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.10). La unidad de distancia para el eje  $z$  es la longitud de onda principal  $\lambda_p$ . Dicha longitud de onda corresponde a cuatro veces el espesor óptico de medio triángulo. El eje horizontal corresponde a la longitud de onda de la luz incidente, en unidades de  $\lambda_p$ . El código de color es el siguiente: hacia el rojo y marrón oscuro corresponde a mayor intensidad, hacia el azul y violeta menor intensidad. La luz incide desde la región inferior del mapa.

### 8.2.2.2. Caso analítico exacto

Para encontrar la expresión analítica de la reflectividad como función de la longitud de onda, se multiplican dos matrices como la que se propone en (2.116). En el caso de la primera matriz  $\mathbf{m}_a$  se substituye  $n_1 = n_{\min} = 1.5$ ,  $n_2 = n_{\max} = 2$  y  $d = 1 / (2(n_{\min} + n_{\max})) \lambda_p = \lambda_p / 7$ . Esta primera matriz representa un intervalo creciente del perfil de triángulos en la figura 8.11. Para la segunda matriz a multiplicar  $\mathbf{m}_b$ , se emplea el mismo valor de  $d$  pero se invierten los valores de  $n_1$  y  $n_2$ :  $n_1 = n_{\max} = 2$  y  $n_2 = n_{\min} = 1.5$ , representando así un intervalo decreciente del mismo perfil de triángulos. Un triángulo queda representado por  $\mathbf{m}_{ab} = \mathbf{m}_a \times \mathbf{m}_b$  y el perfil completo por  $\mathbf{M}_\Delta = (\mathbf{m}_{ab})^{10}$ , empleando los polinomios de Chebyshev como se explica en la sección 2.2.6.3

$$\mathbf{M}_\Delta = \begin{pmatrix} (m_{a11}m_{b11} + m_{a12}m_{b21})U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) & (m_{a11}m_{b12} + m_{a12}m_{b22})U_{N-1}(a) \\ (m_{a21}m_{b11} + m_{a22}m_{b21})U_{N-1}(a) & (m_{a21}m_{b12} + m_{a22}m_{b22})U_{N-1}(a) - U_{N-2}(a) \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

donde  $a = \frac{1}{2} (m_{a11}m_{b11} + m_{a12}m_{b21} + m_{a21}m_{b12} + m_{a22}m_{b22})$  y  $U_N$  son los polinomios de Chebyshev de segundo tipo. Según la ecuación (2.68) el coeficiente de reflexión es

$$r_{\text{exacta}} = \frac{n_i [\mathbf{M}_{11} + n_t \mathbf{M}_{12}] - (n_t \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21})}{n_i [\mathbf{M}_{11} + n_t \mathbf{M}_{12}] + (n_t \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21})},$$

donde  $\mathbf{M}_{ij}$  son las entradas de la matriz (8.18).

### 8.2.2.3. Caso analítico aproximado SVRI

La expresión para el campo eléctrico a lo largo de cada segmento del perfil, bajo la aproximación SVRI se puede construir con la ecuación (5.19). Se escoge el menor orden posible de la aproximación tal que no anule la reflectividad, para  $A_{\text{SVRI}}(z)$  ésto implica llegar a segundo orden

$$A_{\text{SVRI}} = A_0 + k_0^{-2} A_2 = n^{-\frac{1}{2}} + k_0^{-2} \left( -\frac{3}{16} n^{-\frac{9}{2}} \left( \frac{dn}{dz} \right)^2 + \frac{1}{8} n^{-\frac{7}{2}} \left( \frac{d^2 n}{dz^2} \right) \right), \quad (8.19)$$

donde  $\frac{d^2 n}{dz^2} = 0$ , dado que  $n(z)$  es una función lineal en cualquiera de los 20 segmentos que forman el perfil. La fase  $q_{\text{SVRI}}(z)$  se encuentra con (5.21)

$$q_{\text{SVRI}}(z) = k_0 \int_0^z \frac{dz}{A_{\text{SVRI}}^2}.$$

Es posible desarrollar el integrando en una serie de potencias de  $k_0^{-2}$  pero, a causa del factor  $k_0$  extra, el resultado para  $q_{\text{SVRI}}$  es una serie de potencias impares en  $k_0^{-1}$ . Si se desea retener todos los términos hasta segundo orden, el único que no se anula para  $q_{\text{SVRI}}$  es el de primer orden.

$$q_{\text{SVRI}}(z) = k_0 \int_0^z n dz = k_0 \Lambda(z).$$

El campo eléctrico en cada segmento se puede expresar entonces con

$$U_{\text{SVRI}}(z) = \left( n^{-\frac{1}{2}} - k_0^{-2} \frac{3}{16} n^{-\frac{9}{2}} n'^2 \right) \left( C_a e^{ik_0 \Lambda(z)} + C_b e^{-ik_0 \Lambda(z)} \right), \quad (8.20)$$

donde  $C_a$  y  $C_b$  son constantes complejas, la prima indica la derivada respecto a  $z$ . La expresión (8.20) representa la solución general a la ecuación del campo eléctrico (2.10) para un segmento del perfil, bajo la aproximación SVRI hasta tercer orden, para escribirla se requiere explícitamente de  $n(z)$  y su primera derivada  $n'(z)$ , no se necesita involucrar derivadas de mayor orden. Con (8.20) podemos construir fácilmente una matriz de transferencia y luego, mediante la multiplicación de matrices representar todo el perfil y calcular la reflectividad.

A continuación se escriben los elementos de la matriz que representan a los segmentos en que el índice de refracción es creciente, es decir, para la primera de las opciones en la ecuación (8.13). Sujutando a las condiciones a la frontera prescritas en (2.59)

$$m_{a11}^{\text{SVRI}} = A_{\text{SVRI}}(0) \left[ \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(d)} \cos k_0 \Lambda(d) + \frac{1}{k_0} A'_{\text{SVRI}}(d) \sin k_0 \Lambda(d) \right],$$

$$m_{a12}^{\text{SVRI}} = -A_{\text{SVRI}}(0) A_{\text{SVRI}}(d) i \sin k_0 \Lambda(d),$$

$$\begin{aligned}
m_{a21}^{\text{SVRI}} &= \frac{i}{k_0} \left[ \frac{A'_{\text{SVRI}}(d)}{A_{\text{SVRI}}(0)} - \frac{A'_{\text{SVRI}}(0)}{A_{\text{SVRI}}(d)} \right] \cos k_0 \Lambda(d) + \\
&- i \left[ \frac{1}{k_0^2} A'_{\text{SVRI}}(0) A'_{\text{SVRI}}(d) + \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(0) A_{\text{SVRI}}(d)} \right] \sin k_0 \Lambda(d), \\
m_{a22}^{\text{SVRI}} &= A_{\text{SVRI}}(d) \left[ \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(0)} \cos k_0 \Lambda(d) - \frac{1}{k_0} A'_{\text{SVRI}}(0) \sin k_0 \Lambda(d) \right]. \tag{8.21}
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, los valores de las  $A_{\text{SVRI}}$  y  $A'_{\text{SVRI}}$  son específicamente

$$\begin{aligned}
A_{\text{SVRI}}(0) &= n_{\min}^{-\frac{1}{2}} - k_0^{-2} \left( \frac{3}{16} \right) n_{\min}^{-\frac{9}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right]^2, \\
A_{\text{SVRI}}(d) &= n_{\max}^{-\frac{1}{2}} - k_0^{-2} \left( \frac{3}{16} \right) n_{\max}^{-\frac{9}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right]^2, \\
A'_{\text{SVRI}}(0) &= -\frac{1}{2} n_{\min}^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right] + k_0^{-2} \left( \frac{27}{32} \right) n_{\min}^{-\frac{11}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right]^3, \\
A'_{\text{SVRI}}(d) &= -\frac{1}{2} n_{\max}^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right] + k_0^{-2} \left( \frac{27}{32} \right) n_{\max}^{-\frac{11}{2}} \left[ \frac{2}{\lambda_p} (n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \right]^3. \tag{8.22}
\end{aligned}$$

Ahora se escriben los elementos de la matriz que representa a los segmentos en que el índice de refracción es decreciente, es decir, para la segunda de las opciones en la ecuación (8.13). Las  $A_{\text{SVRI}}$  y  $A'_{\text{SVRI}}$  de las ecuaciones (8.22), que son para intervalos crecientes, son muy similares a las de los intervalos decrecientes, sólo se necesita hacer el intercambio siguiente  $n_{\min} \leftrightarrow n_{\max}$  para que sean válidas en los intervalos decrecientes. Lo anterior es equivalente a intercambiar a  $A_{\text{SVRI}}(0) \leftrightarrow A_{\text{SVRI}}(d)$  y  $A'_{\text{SVRI}}(0) \leftrightarrow -A'_{\text{SVRI}}(d)$  en las ecuaciones (8.21), obtenemos entonces los siguientes elementos de matriz

$$\begin{aligned}
m_{b11}^{\text{SVRI}} &= A_{\text{SVRI}}(d) \left[ \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(0)} \cos k_0 \Lambda(d) - \frac{1}{k_0} A'_{\text{SVRI}}(0) \sin k_0 \Lambda(d) \right], \\
m_{b12}^{\text{SVRI}} &= -A_{\text{SVRI}}(0) A_{\text{SVRI}}(d) i \sin k_0 \Lambda(d), \\
m_{b21}^{\text{SVRI}} &= \frac{i}{k_0} \left[ \frac{A'_{\text{SVRI}}(d)}{A_{\text{SVRI}}(0)} - \frac{A'_{\text{SVRI}}(0)}{A_{\text{SVRI}}(d)} \right] \cos k_0 \Lambda(d) + \\
&- i \left[ \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(0) A_{\text{SVRI}}(d)} - \frac{1}{k_0^2} A'_{\text{SVRI}}(0) A'_{\text{SVRI}}(d) \right] \sin k_0 \Lambda(d), \\
m_{b22}^{\text{SVRI}} &= A_{\text{SVRI}}(0) \left[ \frac{1}{A_{\text{SVRI}}(d)} \cos k_0 \Lambda(d) + \frac{1}{k_0} A'_{\text{SVRI}}(d) \sin k_0 \Lambda(d) \right]. \tag{8.23}
\end{aligned}$$

Se debe resaltar que las  $\Lambda$ 's, para los intervalos crecientes y decrecientes, tienen la siguiente propiedad  $\Lambda_{\text{creciente}}(d) = \Lambda_{\text{decreciente}}(d)$ . Ésto es por simetría y está relacionado con el hecho de que la longitud del camino óptico recorrido hacia la derecha, en un intervalo dado, es la misma que si se recorre el camino en sentido contrario 5.2.1. Multiplicando las matrices (8.21) y (8.23) se obtiene a la que representa un triángulo completo  $\mathbf{m}_{ab}^{\text{SVRI}} = \mathbf{m}_a^{\text{SVRI}} \times \mathbf{m}_b^{\text{SVRI}}$  que luego al potenciarla produce la que representa a todo el medio in homogéneo  $\mathbf{M}_{\text{triángulos}}^{\text{SVRI}} = (\mathbf{m}_{ab})^{10}$ . El resultado se expresa de manera análoga a (8.18). El coeficiente de reflexión correspondiente es

$$r_{\text{SVRI}} = \frac{n_i [\mathbf{M}_{11}^{\text{SVRI}} + n_t \mathbf{M}_{12}^{\text{SVRI}}] - (n_t \mathbf{M}_{22}^{\text{SVRI}} + \mathbf{M}_{21}^{\text{SVRI}})}{n_i [\mathbf{M}_{11}^{\text{SVRI}} + n_t \mathbf{M}_{12}^{\text{SVRI}}] + (n_t \mathbf{M}_{22}^{\text{SVRI}} + \mathbf{M}_{21}^{\text{SVRI}})},$$

#### 8.2.2.4. Comparación de reflectividades $R(\lambda)$ para el perfil de triángulos obtenidas con distintos métodos

En la figura 8.13 se muestra la comparación de los tres resultados para  $R(\lambda)$ , el analítico exacto 8.2.2.2, el aproximado SVRI 8.2.2.3 y el numérico 8.2.2.1. A la escala de la figura principal no se distinguen entre sí dos de los resultados, el exacto y el numérico. En cambio, aunque sorprende el gran parecido del resultado aproximado con los otros dos, ya se le nota a éste una clara diferencia, un corrimiento hacia longitudes de onda menores. Dicho corrimiento aumenta con la longitud de onda, lo que es de esperarse pues la aproximación SVRI es mejor mientras más gradual es la variación del índice de refracción, comparada con la longitud de onda. Aunque el perfil es el mismo, independientemente de la longitud de onda de la luz incidente, para longitudes de onda mayores los cambios en el índice de refracción ocurren a lo largo de una distancia correspondiente a menos ciclos, es decir los cambios son relativamente más abruptos.

Para poder apreciar mejor la diferencia entre los resultados exacto y numérico, se muestra una gráfica de  $R_{\text{exacta}} - R_{\text{numérica}}$  arriba a la derecha. Se puede interpretar de esta gráfica, un ligero corrimiento hacia la derecha del resultado numérico respecto del analítico, pues el máximo principal “a” antecede al mínimo “b”. También se infiere que el resultado numérico alcanza una reflectividad máxima un poco menor que la del resultado exacto dado que el valor absoluto de la diferencia  $R_{\text{exacta}} - R_{\text{numérica}}$  es mayor en el máximo “a” que en el mínimo “b”. Las reflectividades obtenidas correspondientes a la longitud de onda principal  $\lambda_p$  son  $R = 89.9\%$  (escrito con tres cifras significativas) para el caso exacto y el numérico, mientras que para el SVRI es  $R = 90.9\%$ , estos resultados no se alejan mucho de la predicción simple que se hizo al principio de la sección 8.2.2.

Normalmente, los investigadores que trabajan con recubrimientos de interferencia óptica suelen presentar gráficas de reflectividad contra longitud de onda  $R(\lambda)$ , en un rango reducido  $0.5 > \lambda > 1.5$ , como el que se ha usado hasta ahora en éste trabajo. Lo anterior se acostumbra ya sea con resultados experimentales o teóricos, pues los materiales que se usan para fabricar dichos recubrimientos suelen no ser transparentes en todo el espectro electromagnético sino sólo en una pequeña ventana cercana a la frecuencia de operación. Además éstos materiales presentan dispersión,  $n(\lambda)$ , de tal modo que extender la presentación de resultados teóricos a un espectro muy amplio, sin tomar en cuenta la absorción y la dispersión, pierde sentido físico. Sin embargo para otros fenómenos relacionados con propagación de ondas en medios inhomogéneos, por ejemplo los electrones en el bulto del estado sólido, o simplemente desde el punto de vista matemático, puede tener interés presentar resultados en un espectro más amplio y como función del número de onda en el vacío  $k_0$  en vez de la longitud de onda. Así lo hacen Morozov et. al. en la referencia [5], la gráfica 8.14 muestra resultados similares a los de la figura 8.13 pero como función de  $k_0$  y en un rango más extendido de frecuencias. Con este formato, la gráfica revela que la aproximación SVRI se aleja por completo de la solución exacta para  $k_0 \lesssim 2.5$ , es decir  $\lambda_0 \gtrsim 2.5\lambda_p$ . Lo cuál obedece fielmente el criterio (5.47). Dado que no se aprecia claramente la diferencia entre el caso exacto y el numérico a la escala de la figura principal, se anexa una gráfica de  $R_{\text{exacta}} - R_{\text{numérica}}$  también.

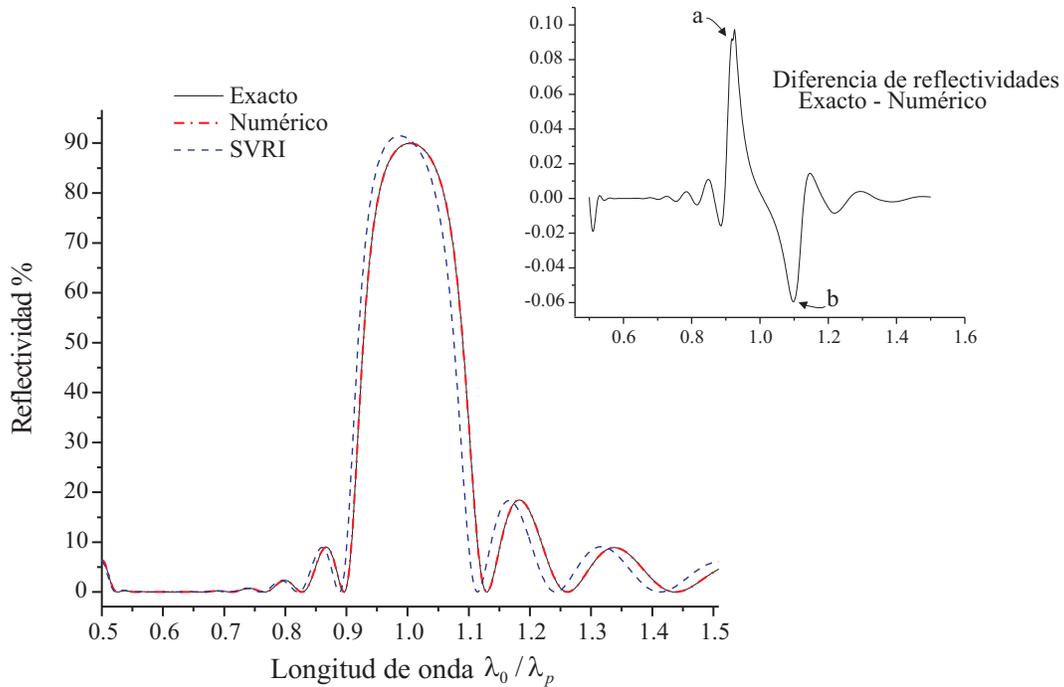


Figura 8.13: Comparación de los tres resultados para  $R(\lambda)$ , el analítico exacto 8.2.2.2, el analítico aproximado SVRI 8.2.2.3 y el numérico 8.2.2.1. Se muestra una gráfica de  $R_{\text{exacta}} - R_{\text{numérica}}$  arriba a la derecha.

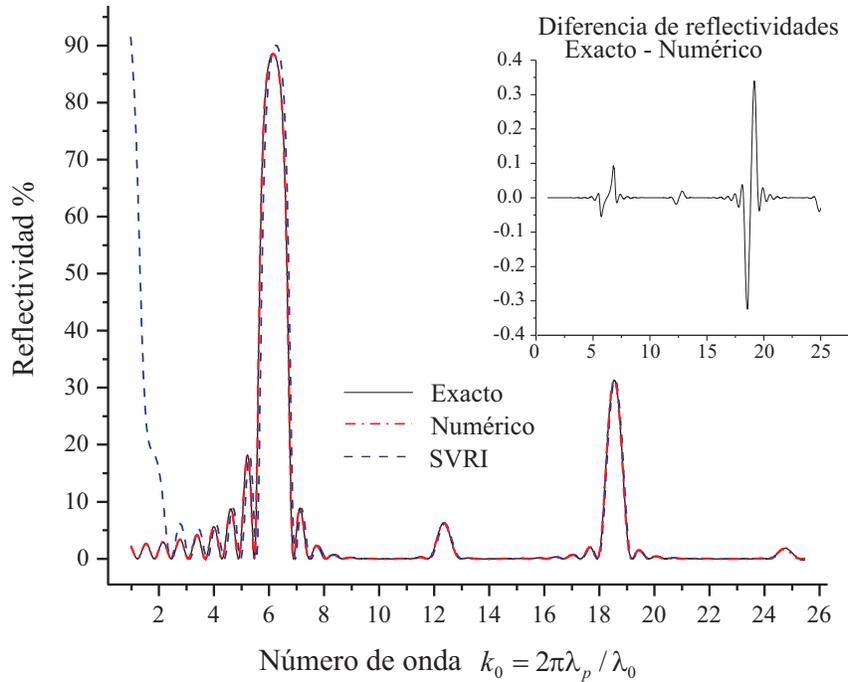


Figura 8.14: Comparación de los tres resultados para  $R(k_0)$ , el analítico exacto 8.2.2.2, el analítico aproximado SVRI 8.2.2.3 y el numérico 8.2.2.1. Se muestra una gráfica de  $R_{\text{exacta}} - R_{\text{numérica}}$  arriba a la derecha.

En dos de los casos, el “exacto” y el “SVRI”, se recurre al método de las matrices para encontrar la reflectividad. Un buen indicador de la validez de los resultados, cuando se emplea al método de las matrices, es el valor absoluto del determinante de la matriz que representa al medio estratificado. Desde el punto de vista teórico ese determinante debería ser igual a la unidad (2.62), pero como los cálculos se basan en los valores numéricos de las cantidades involucradas, si la situación es satisfactoria el determinante resulta tan solo cercano a la unidad. Se presentan en la figura 8.15 gráficas de  $|1 - |\det(\mathbf{M})||$  como función del número de onda, el grado de confiabilidad disminuye conforme esta cantidad se aleja de cero. La figura 8.15(b) se presenta con dos escalas distintas en el eje vertical. En la gráfica que abarca mayor rango sobre la vertical, se ve claramente como para valores pequeños del número de onda, el módulo del determinante de la matriz se dispara a valores muy grandes. La otra escala permite apreciar mejor lo que ocurre para valores de  $|1 - |\det(\mathbf{M})|| < 1$ . El módulo del determinante de la matriz que describe al medio es mucho más cercano a la unidad en el caso exacto que bajo la aproximación SVRI.

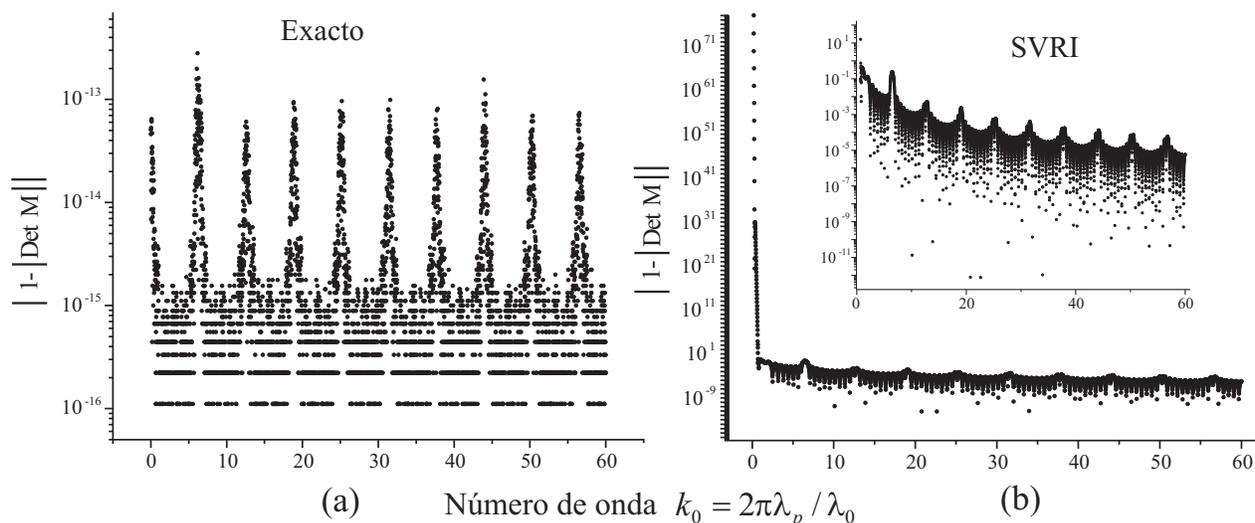


Figura 8.15: Gráficas de  $|1 - |\det(\mathbf{M})||$  como función del número de onda. Son gráficas de puntos y la escala del eje vertical es logarítmica. (a) El determinante de la matriz del medio estratificado que resulta del tratamiento exacto con series de Bessel y (b) la aproximación SVRI, con dos escalas distintas en el eje vertical. La forma en que se distribuyen los puntos de las gráficas, más que estar relacionada con información física, es consecuencia del algoritmo que usa el programa *Mathematica* [22] para efectuar las operaciones.

### 8.2.2.5. Comparación con la reflectividad de un DBR

Si un recubrimiento con perfil  $n(z)$  continuo, uno de triángulos, puede funcionar como un espejo dieléctrico ¿cómo se compara su desempeño con el de un DBR? Para poder contestar a esta pregunta, se construye un perfil discontinuo, como el de 8.1 pero con planos de discontinuidad que tengan una reflectividad similar a la de los vértices del perfil 8.11. Este perfil se muestra en la figura 8.16(a),  $n_{\max} = 1.821$  y  $n_{\min} = 1.500$ , de tal forma que el coeficiente de reflexión de un plano de discontinuidad es

$$r_{\text{DBR}} = \pm \frac{n_{\max} - n_{\min}}{n_{\max} + n_{\min}} \approx \pm 0.0967. \quad (8.24)$$

Para el perfil de triángulos de la figura 8.16(b), los coeficientes de reflexión asociados a las discontinuidades de la derivada en los vértices, calculados mediante la aproximación SVRI a primer orden no nulo, están

dados por (8.14). La magnitud promedio de los dos coeficientes de reflexión más relevantes, calculados en la longitud de onda principal, es  $(|r_{c1}| + |r_{c2}|) / 2 \approx 0.0967$ , coincidiendo con (8.24).

En la figura 8.16(c) se muestran los resultados para  $R(\lambda)$  de ambos perfiles, obtenidos mediante las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud. En general, ambas curvas se parecen mucho aunque hay algunas diferencias. La primera diferencia que se aprecia es que, para longitudes de onda más pequeñas, la reflectividad del perfil de triángulos es menor comparada con la del DBR. Lo anterior es consecuencia de que el módulo de los coeficientes de reflexión (8.14) es proporcional a la longitud de onda. Además, en  $\lambda_0 = 0.5$  hay un pequeño máximo en la reflectividad del perfil de triángulos que corresponde a un mínimo en el caso del DBR, el cual no es un “lóbulo lateral” ya que es persistente, es decir, aparece siempre en el mismo lugar ( $\lambda_0 = 0.5$ ) aunque el número de triángulos en la estructura del perfil cambie.

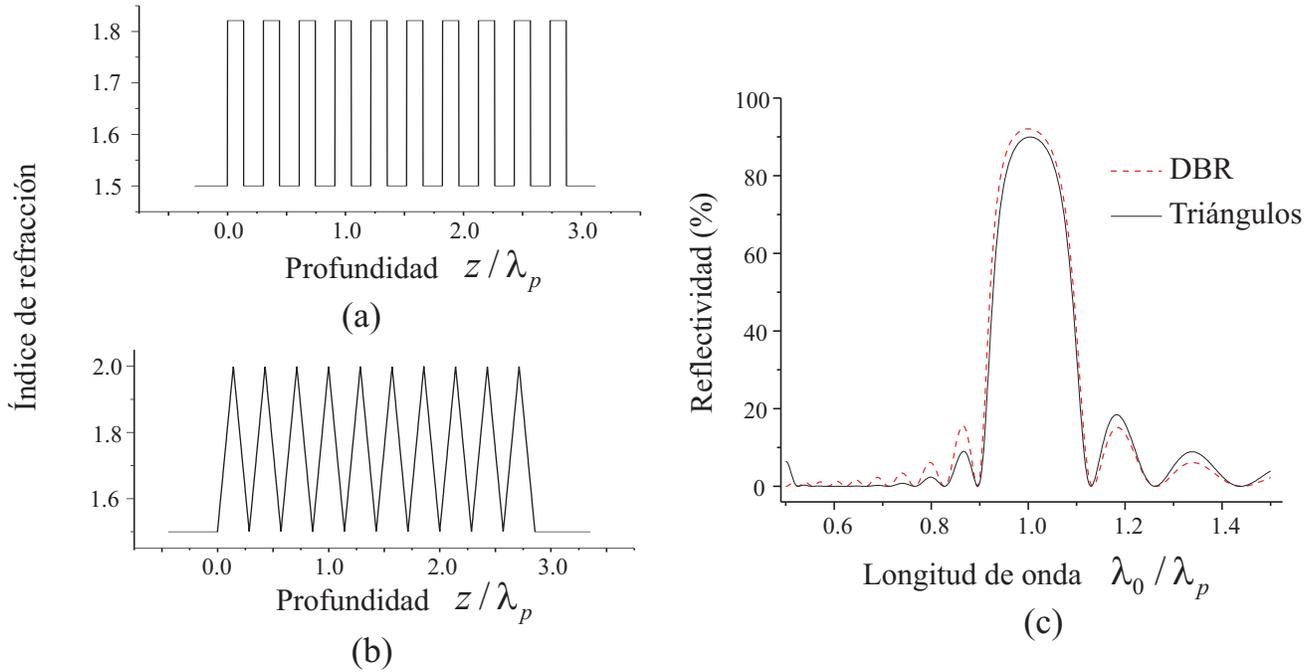


Figura 8.16: Dos perfiles de índice de refracción, (a) un DBR y (b) uno de triángulos . Se compara su reflectividad en (c)

### 8.2.3. Perfil de dientes de sierra

En una publicación muy reciente, Morozov *et al.* [5] resuelven analíticamente y de forma exacta, mediante series de Bessel, la ecuación del campo eléctrico para un perfil de dientes de sierra, como se explica en la sección 2.2.8.4. Con el método de las matrices encuentran el espectro de reflectividad de ese perfil. También emplean tres distintas aproximaciones basándose en la fórmula asintótica de Hankel [40, Capítulo 10] para hacer más simple la expresión de la reflectividad. En esta sección se presentan otro par de alternativas que pueden ser mejor opción para llegar al espectro de reflectividad de manera simple. Se considera aquí un perfil con seis dientes

$$n_{\text{sierra}}(z) = \begin{cases} n_i & \text{para } z < 0 \\ 2(n_2^2 - n_1^2) \left(\frac{z}{\lambda_p}\right) + n_1 - j(n_2 - n_1) & \text{para } \frac{j\lambda_p}{2(n_2+n_1)} < z < \frac{(j+1)\lambda_p}{2(n_2+n_1)} \\ n_t & \text{para } \frac{6\lambda_p}{2(n_2+n_1)} < z \end{cases}, \quad (8.25)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots, 5$ ,  $n_i = n_t = 1$ ,  $n_1 = 1.5$  y  $n_2 = 3$ . Nuevamente, la longitud óptica de los intervalos es de un cuarto de la longitud de onda principal es decir  $d = 1 / (2 (n_1 + n_2)) \lambda_p = k_p / (4\pi (n_1 + n_2))$ . Se muestra la gráfica de este perfil  $n(z)$  en la figura 8.17.

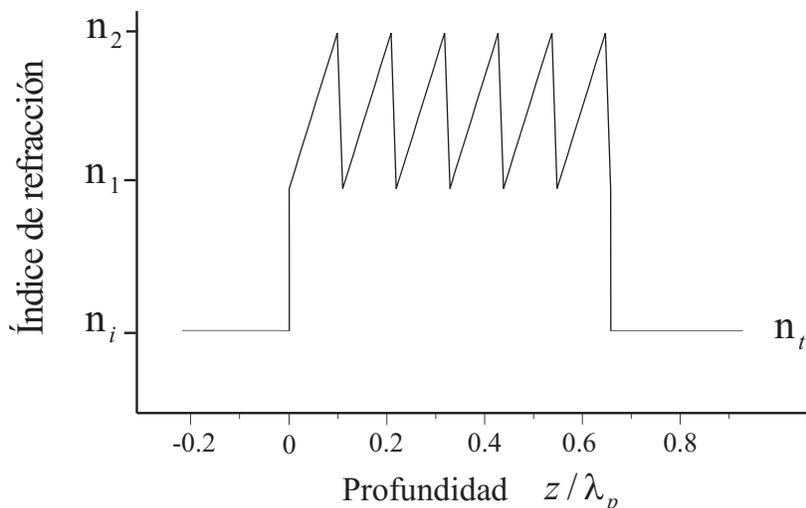


Figura 8.17: Perfil  $n(z)$  de dientes de sierra, descrito en la expresión (8.25).

El coeficiente de reflexión está dado analíticamente por (2.117). En esta sección se comparan los resultados obtenidos con la solución numérica a la ecuación de la amplitud y también mediante la aproximación SVRI con los exactos basados en las series de Bessel y se muestra que pueden ser una buena alternativa para obtener la reflectividad de forma más simple. En la figura 8.18 se muestra la gráfica de  $R(k_0)$  para los tres casos, el exacto que se basa en las series de Bessel (2.117), el obtenido con las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud y el aproximado SVRI. El procedimiento para encontrar a  $R(k_0)$  bajo la aproximación SVRI es similar al expuesto en 8.2.2.3 pero tomando solo los intervalos crecientes.

De los resultados para  $R(k_0)$  que se ilustran en la figura 8.18, no se percibe la diferencia entre el exacto y numérico. En la región  $k_0 \gtrsim 7.5$  el resultado aproximado SVRI presenta diferencias poco significativas en relación al exacto, mientras que para números de onda menores su comportamiento ya difiere demasiado. Nuevamente, lo anterior se apega al criterio (5.47). Para poder apreciar mejor las diferencias se presentan las gráficas de la figura 8.19, las fluctuaciones que parecen exagerar dichas diferencias se deben al corrimiento horizontal relativo de las gráficas que se comparan. Si bien la aproximación SVRI no es buena para números de onda pequeños, para  $k_0$  grandes se acerca más al resultado exacto que el caso numérico. En general, tanto el caso numérico como el SVRI reproducen las mismas características principales del resultado exacto, que son una secuencia de bandas prohibidas (los máximos más pronunciados de la reflectividad) y sus lóbulos laterales. Cabe mencionar que las frecuencias en las que se centran las bandas prohibidas son persistentes, no dependen del número de dientes, mientras que las de los lóbulos laterales cambian cuando se agregan o quitan más dientes al perfil.

En los casos “exacto” y “SVRI” se recurre al método de las matrices para encontrar la reflectividad. Se presentan en la figura 8.20 gráficas de  $|1 - |\det(\mathbf{M})||$  como función del número de onda, esta cantidad indica la validez del resultado, el grado de confiabilidad disminuye conforme se aleja de cero.

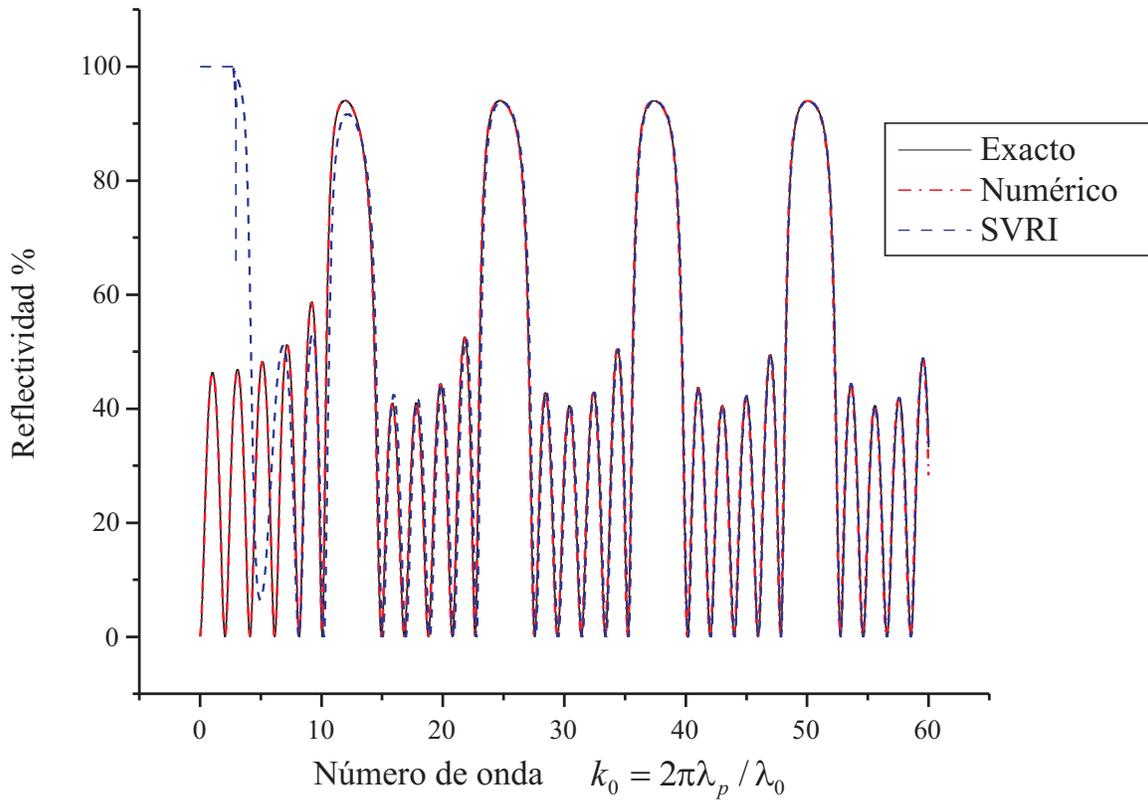


Figura 8.18: Comparación de los tres resultados para  $R(k_0)$ , el exacto que se basa en las series de Bessel (2.117), tomado de [5], el obtenido con las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud y el aproximado SVRI. En esta figura no se distingue una diferencia clara entre los dos primeros.

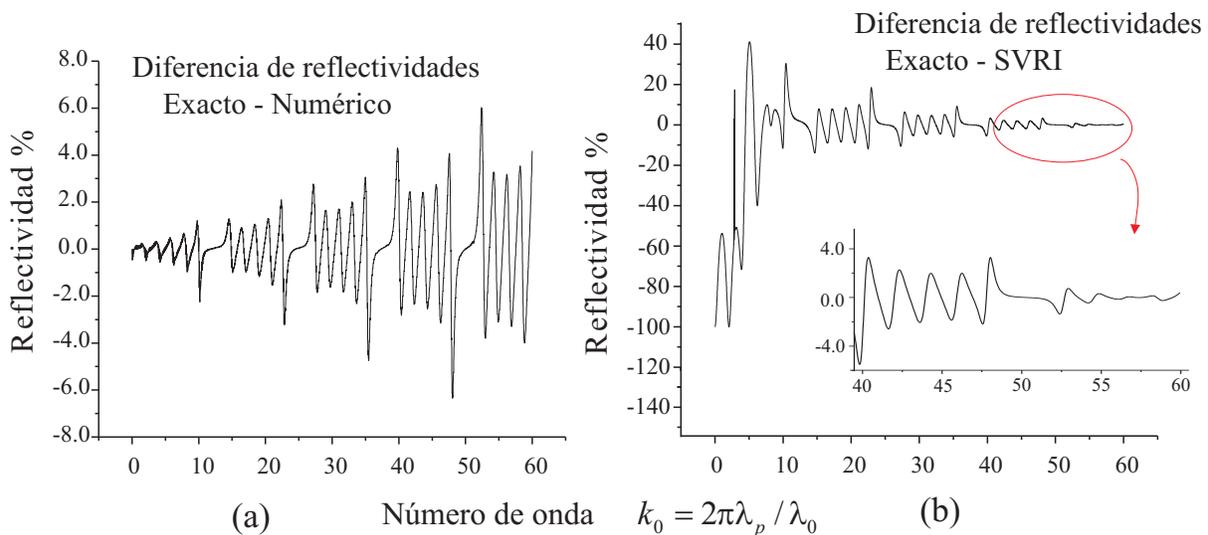


Figura 8.19: Diferencia entre espectros de reflectividad. (a) La reflectividad basada en las soluciones exactas menos la obtenida con las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud. (b) La reflectividad basada en las soluciones exactas menos la que resulta de la usar la aproximación SVRI.

Se ve claramente en 8.20(b) como para  $k_0 \lesssim 2.5$ , el módulo del determinante de la matriz se dispara a valores muy grandes. Sin embargo sorprende que para valores mayores del número de onda, en el caso de la aproximación SVRI el determinante de la matriz está ligeramente más cerca de la unidad que en el caso exacto.

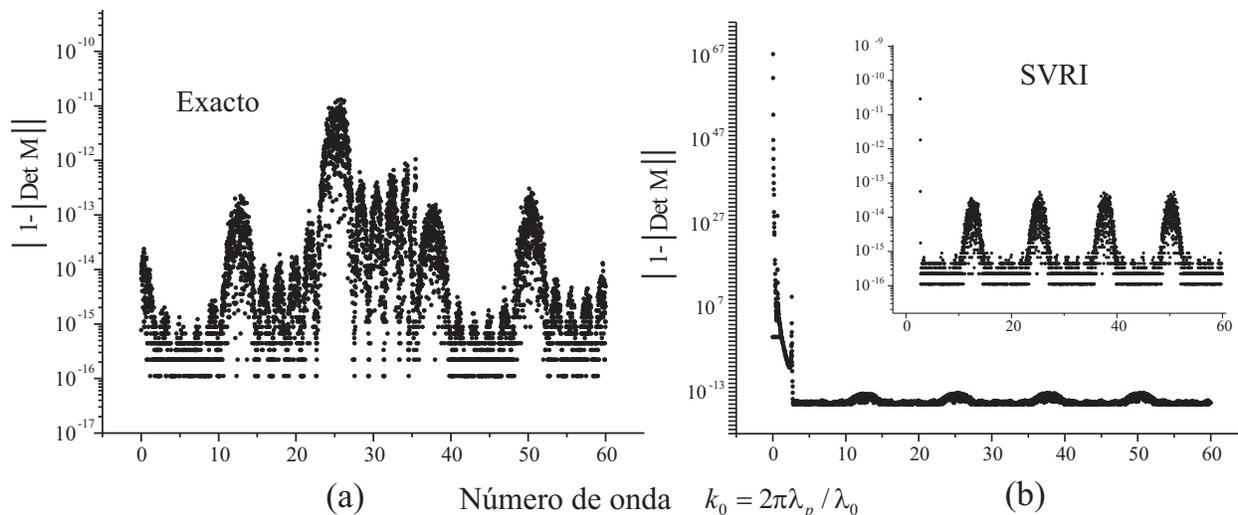


Figura 8.20: Gráficas de  $|1 - |\det(\mathbf{M})||$  como función del número de onda. Son gráficas de puntos y la escala del eje vertical es logarítmica. (a) En relación al determinante de la matriz del medio estratificado que resulta del tratamiento exacto con series de Bessel y (b) la que resulta de la aproximación SVRI. La forma en que se distribuyen los puntos de las gráficas, más que estar relacionada con información física, es consecuencia del algoritmo que usa el programa *Mathematica* [22] para efectuar las operaciones.

El resolver numéricamente la ecuación de la amplitud para varias longitudes de onda permite generar de forma rápida el mapa de intensidad óptica. Las figuras 8.21 (a) y (b) muestran este mapa, graficando con respecto a la longitud de onda y número de onda respectivamente. Para el perfil de dientes de sierra se aprecia mejor el detalle cuando se grafica contra  $k_0$ , la región para  $\lambda$  pequeña encierra mucha información que se pierde en el pixelado del lado izquierdo de la figura 8.21(a). Se observa que ninguna de las bandas prohibidas está centrada en la longitud de onda principal  $\lambda_p = 1$  ( $k_0 = 2\pi$ ). La primera banda está centrada en  $\lambda_0 = 0.5$  ( $k_0 = 4\pi$ ), y en general las bandas están centradas en  $\lambda_0 = 1/2j$  ( $k_0 = 4j\pi$ ),  $j = 1, 2, 3, \dots$ , así que la estructura puede funcionar como espejo de media onda. Ésto se debe a que los coeficientes de reflexión asociados a los planos de discontinuidad dentro del perfil de dientes de sierra, que son las superficies donde se refleja la luz, tienen el mismo signo, es decir, tienen la misma fase.

En contraste, en el caso del DBR la fase del coeficiente se va alternando, con una diferencia de  $\pi$  entre plano y plano. Para el perfil de triángulos el coeficiente de reflexión de los planos de unión es complejo, pero también hay una diferencia de fase aproximada de  $\pi$  entre plano y plano. Por esta razón las bandas prohibidas de estas dos estructuras, DBR y de triángulos, están centradas en  $k_0 = (4j + 2)\pi$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Este par de situaciones de interferencia en multicapas se explicó al final de la sección 8.1 con un modelo simplificado y se mostró que los espectros de reflectividad tienen la misma forma, excepto por un desplazamiento relativo de  $\Delta k_0 = 2\pi$ , hecho que se expresa en la ecuación (8.3).

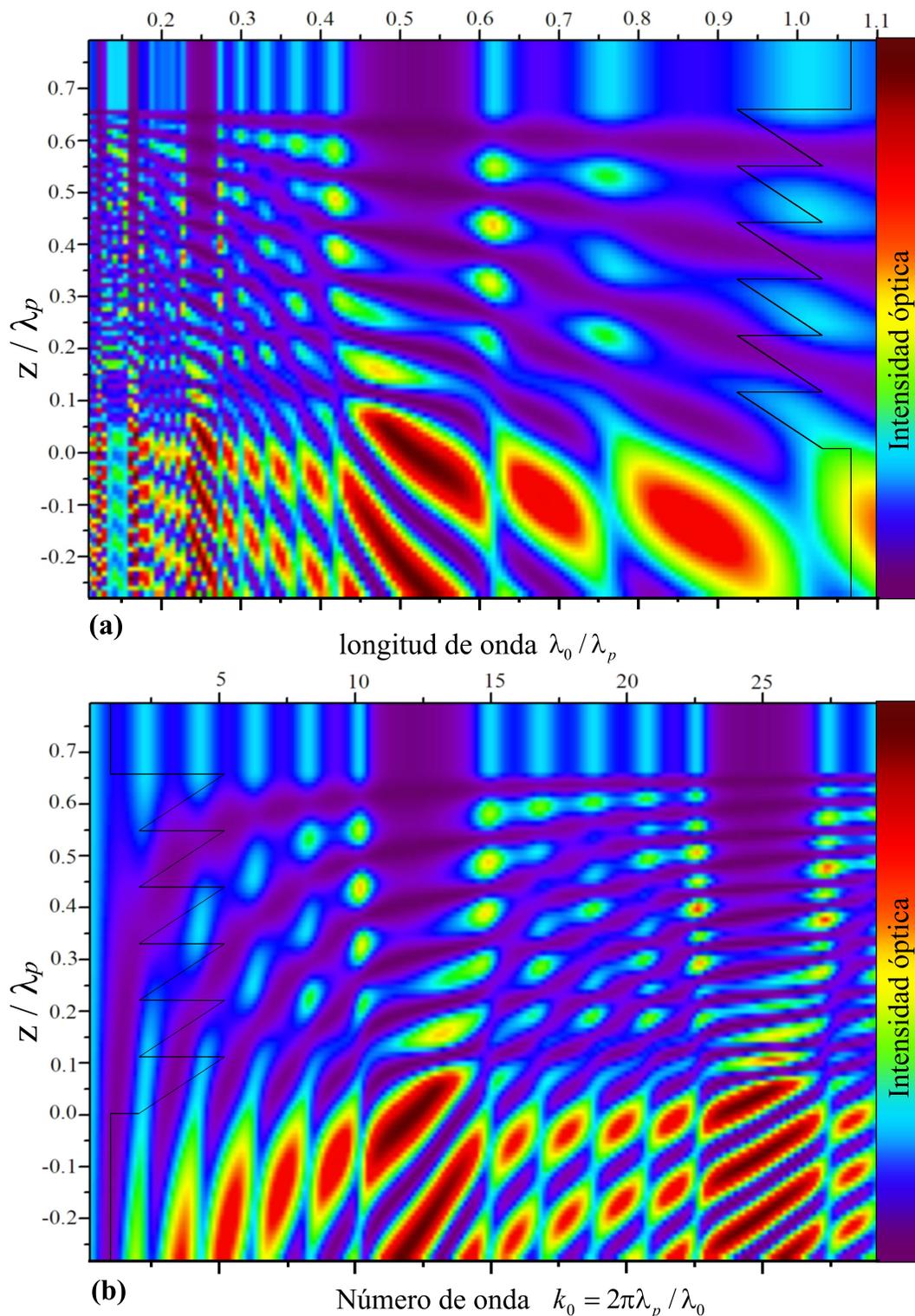


Figura 8.21: Mapas de intensidad óptica para un perfil de dientes de sierra como el que describe la figura 2.14. Se muestra el bosquejo del perfil  $n(z)$  correspondiente a un costado. El mapa está construido con los datos de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.10). La unidad de distancia para el eje  $z$  es la longitud de onda principal  $\lambda_p = 1$ . Dicha longitud de onda corresponde a cuatro veces el espesor óptico de un diente. El código de color es el siguiente: hacia el rojo y marrón oscuro corresponde a mayor intensidad, hacia el azul y violeta menor intensidad. (a) El eje horizontal corresponde a la longitud de onda de la luz incidente, en unidades de  $\lambda_p$ . (b) El eje horizontal corresponde al número de onda de la luz incidente. En ambos casos la luz incide desde la región inferior del mapa.

### 8.2.4. Perfiles apodizados

Para muchas aplicaciones se desea que los espejos dieléctricos no reflejen más que una ventana estrecha mientras que el resto de las frecuencias se transmitan, así se pueden usar como filtros. Lo ideal para estas aplicaciones es que el valor de  $R(\lambda)$  sea cero para toda longitud de onda excepto un intervalo estrecho en el que su valor sea del 100 %, es decir, disminuir sustancialmente la reflectividad de los lóbulos laterales como los que se ven en las gráficas de reflectividad 8.6 y 8.10. Apodizar un perfil periódico disminuye dramáticamente la aparición de estos lóbulos laterales [99]. En este caso, apodizar significa modular una función periódica para que en los extremos se aproxime a un valor constante. Al mismo tiempo se busca que los filtros tengan un alto umbral de daño ocasionado por luz láser. Se consiguen ambas características, disminución de lóbulos y alto umbral, con perfiles  $n(z)$  continuos, llamados “corrugados” (*rugate*, en inglés [2]), que suelen ser funciones sinusoidales moduladas para que en los extremos se aproximen a un índice de refracción constante. Un ejemplo de un perfil de este tipo se muestra en la figura 8.22(a), la expresión analítica que lo describe es la siguiente

$$n_{\text{cosenoidal}}(z) = \frac{n_{\text{max}} - n_{\text{min}}}{2} \exp \left[ - \left( z \frac{n_{\text{max}} + n_{\text{min}}}{4\lambda_p} \right)^2 \right] \cos \left[ 2\pi z \frac{(n_{\text{max}} + n_{\text{min}})}{\lambda_p} \right] + \frac{n_{\text{max}} + n_{\text{min}}}{2}. \quad (8.26)$$

En esta sección se demuestra que con un perfil de triángulos apodizado también se consigue esa reducción significativa de los lóbulos laterales. Al ser un perfil  $n(z)$  continuo debe mantener un alto umbral de daño. Con tal propósito se construye un perfil de 17 triángulos, modulando su altura con una función gaussiana, de tal modo que el espesor óptico entre dos vértices contiguos sea siempre de  $\frac{\lambda_p}{4}$

$$n_{a\Delta}(z) = \begin{cases} n_{\text{min}} & \text{para } z < 0 \\ \frac{2}{\lambda_p} \left\{ \left[ n_{\text{min}} + (n_{\text{max}} - n_{\text{min}}) e^{-\left(\frac{2j}{8}\right)^2} \right]^2 - n_{\text{min}}^2 \right\} (z - z_{2j-1}) + n_{\text{min}} & \text{para } z_{2j-1} < z < z_{2j} \\ \frac{-2}{\lambda_p} \left\{ \left[ n_{\text{min}} + (n_{\text{max}} - n_{\text{min}}) e^{-\left(\frac{2j}{8}\right)^2} \right]^2 - n_{\text{min}}^2 \right\} (z - z_{2j+1}) + n_{\text{min}} & \text{para } z_{2j} < z < z_{2j+1} \\ n_{\text{min}} & \text{para } z > z_{17} \end{cases},$$

donde  $n_{\text{max}} = 2.21$ ,  $n_{\text{min}} = 1.50$ ,  $j = -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8$  y las  $z_j$  se definen mediante las siguientes relaciones de recurrencia

$$z_{2j+1} = z_{2j} + \lambda_p \left[ n_{\text{min}} + \left( \frac{n_{\text{max}} - n_{\text{min}}}{2} \right) e^{-\left(\frac{2j}{8}\right)^2} \right],$$

$$z_{2j} = z_{2j-1} + \lambda_p \left[ n_{\text{min}} + \left( \frac{n_{\text{max}} - n_{\text{min}}}{2} \right) e^{-\left(\frac{2j}{8}\right)^2} \right].$$

Aunque dicho perfil es engorroso de escribir con expresiones algebraicas, su gráfica es muy simple y se presenta en la figura 8.22(b). Tomando ambos perfiles, el cosenoidal que se usa regularmente para la fabricación de filtros graduales y el de triángulos que es la propuesta novedosa de este trabajo, se resuelve numéricamente la ecuación de la amplitud para varios valores de  $\lambda$ , con ello se calcula la reflectividad y se grafica el resultado en la figura 8.22(c). En ambos casos se reducen dramáticamente los lóbulos laterales que presentan tanto un DBR común como un perfil de triángulos no apodizado, pero también en ambos casos se presenta de forma persistente el pequeño máximo de reflectividad en  $\lambda_0 = 0.5$ , sin embargo para el perfil de triángulos dicho máximo es un poco menor.

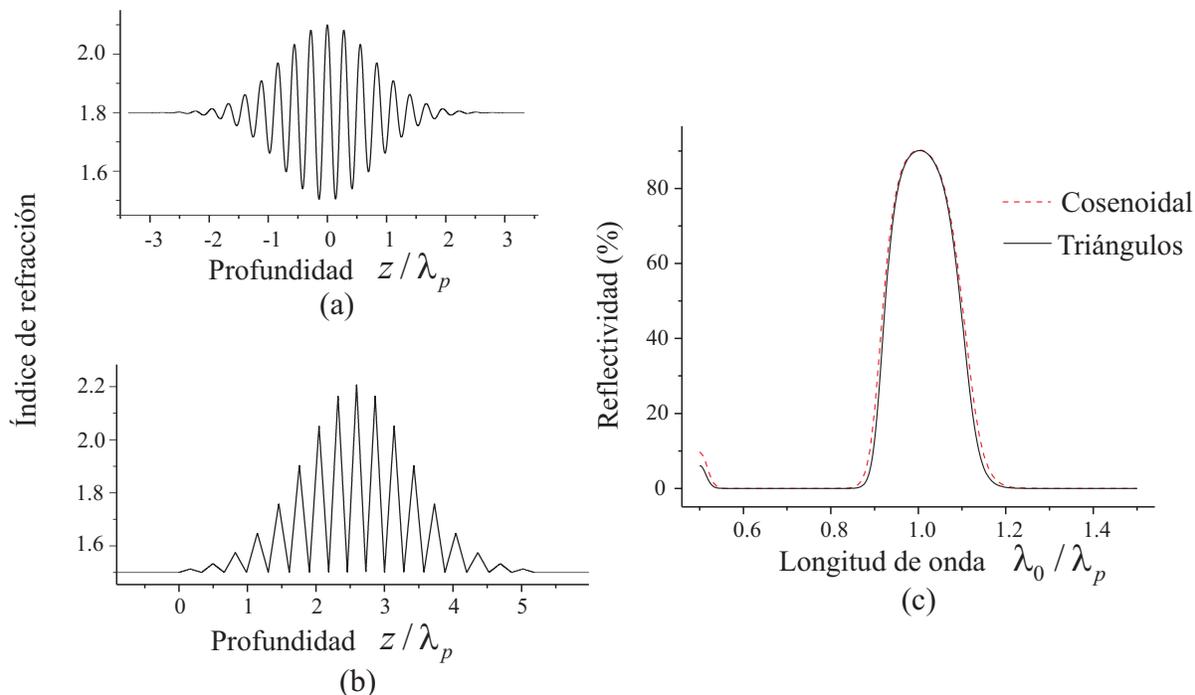


Figura 8.22: (a) Un perfil corrugado típico como el de (8.26) con  $n_{\min} = 1.5$  y  $n_{\max} = 2.1$ , (b) perfil de triángulos apodizado con  $n_{\min} = 1.50$  y  $n_{\max} = 2.21$ , (c) espectro de reflectividad para ambos casos.

Las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud, renormalizadas como se explica en la sección 8.1.2, también permiten elaborar mapas de intensidad óptica para ambos perfiles. Dichos mapas se presentan en las figuras 8.23 (a) y (b), se aprecia una gran similitud entre ambos. En estos mapas de intensidad de perfiles apodizados se percibe menos complejidad en los patrones fuera de la banda central.

### 8.2.5. Consecuencias de un coeficiente de reflexión complejo asociado a los planos que reflejan luz dentro de un perfil periódico

Al final de la sección 8.1, empleando un modelo “de juguete”, se exponen dos esquemas de reflexión en multicapas. En particular se consideran multicapas de periodicidad  $\lambda_p/2$ , es decir que la forma del perfil  $n(z)$  se repite nuevamente después de una distancia óptica equivalente a la mitad de la longitud de onda principal. El primero de los esquemas, “ $R_{-+}$ ”, consiste en que los coeficientes de reflexión de las interfases, aunque tienen el mismo módulo, difieren en su fase, siendo la diferencia de  $\pi$  para interfases consecutivas. El segundo “ $R_{++}$ ”, asocia el mismo coeficiente, en módulo y fase, a todas las interfases. Si bien el modelo que se emplea para explicar a grandes rasgos estos esquemas es muy simple, es suficiente para entender que se intercambian las frecuencias para las que hay interferencia constructiva y destructiva en ambos casos, dado que hay un corrimiento de  $\Delta k_0 = 2\pi$ , como indica la expresión (8.3). Por ejemplo, en un DBR como el de la figura 8.1(a), la banda principal de reflexión está centrada en  $\lambda_p$ , debido a la interferencia constructiva, mientras que hay un mínimo de reflexión en  $\lambda_p/2$  debido a la interferencia destructiva de las ondas reflejadas en las interfases. El ejemplo anterior corresponde a el esquema  $R_{-+}$ . En cambio para el perfil de dientes de sierra, como el de la figura 8.17, el máximo principal de reflectividad está centrado en  $\lambda_p/2$  mientras que en  $\lambda_p$  hay interferencia destructiva, correspondiendo al esquema  $R_{++}$ . En el DBR se alternan los signos de  $r$  (la fase difiere en  $\pi$ ) para cada interfase consecutiva, mientras que en el perfil de dientes de sierra las  $r$ 's son iguales (excepto la del primer plano de reflexión).

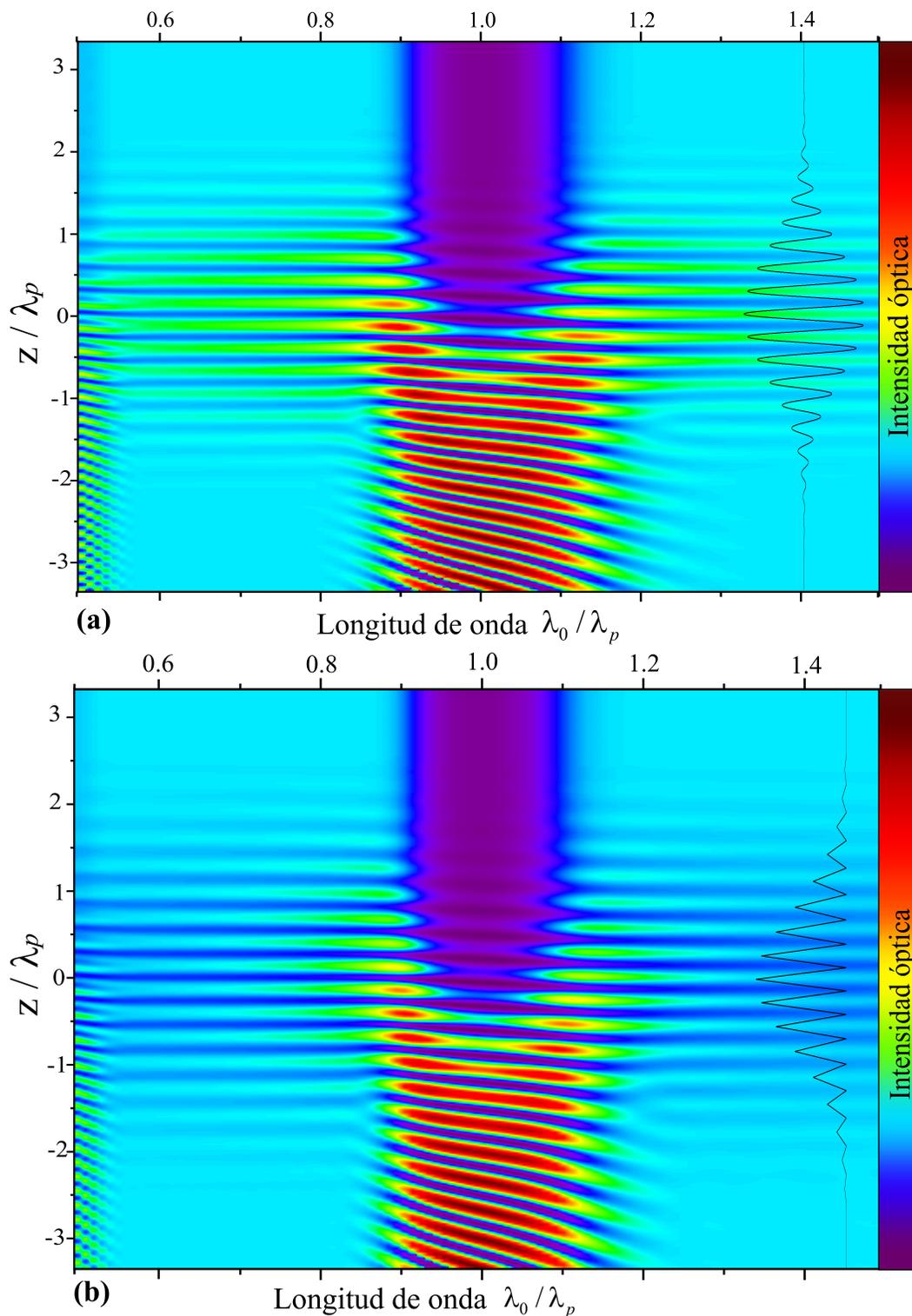


Figura 8.23: Mapas de intensidad óptica para perfiles corrugados como los que describen la ecuación (8.26) y las figuras 8.22 (a) y (b). Se muestra el bosquejo del perfil  $n(z)$  correspondiente del lado izquierdo. El mapa está construido con los datos de las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.10). La unidad de distancia para el eje  $z$  es la longitud de onda principal  $\lambda_p$ . Dicha longitud de onda corresponde a cuatro veces el grosor óptico de un intervalo creciente o decreciente del perfil. El eje horizontal corresponde a la longitud de onda de la luz incidente, en unidades de  $\lambda_p$ . El código de color es el siguiente: hacia el rojo y marrón oscuro corresponde a mayor intensidad, hacia el azul y violeta menor intensidad. (a) El caso del perfil cosenoidal y (b) el de triángulos, ambos apodizados. En ambos casos la luz incide desde la región inferior del mapa.

En el caso del perfil de triángulos como el de la figura 8.11, los coeficientes complejos  $r_{c1}$  y  $r_{c2}$  difieren en su fase, con una diferencia aproximada de  $\pi$ , por lo que se espera un espectro de reflexión muy similar al del DBR, lo cual se confirma en los resultados plasmados en la figura 8.16. Sin embargo hay varias diferencias sutiles, una de ellas consiste en que el espectro de reflectividad del perfil de triángulos presenta un pequeño, pero conspicuo, máximo de reflexión en  $\lambda_p/2$ , dónde se esperaba un mínimo en la reflectividad. Es un máximo persistente, pues su presencia no depende del número de triángulos que componen el perfil. De hecho, ese máximo aparece también para el perfil de triángulos apodizado, aunque los otros lóbulos laterales disminuyen de forma muy significativa, como se mostró en la figura 8.22(c). A la aparición de ese máximo de reflectividad no esperado en los perfiles graduales y periódicos, Shvartsburg [4, capítulo 2, pg. 31] le llama “filtración espectral” y su origen no ha sido explicado satisfactoriamente. En general suele ser una característica no deseada de los filtros “corrugados”.

El modelo de juguete de la sección 8.1, que toma en cuenta solo las primeras reflexiones sobre las superficies y aproxima el coeficiente de transmisión de todas ellas a la unidad, nos permite saber que esperar si la diferencia de fase entre los coeficientes de reflexión contiguos no es exactamente  $\pi$  o cero. A continuación se revisan las dos situaciones conocidas y se exploran las nuevas, en términos de  $k_0$ .

1. Cuando la diferencia en la fase es de  $\pi$  entre coeficientes de reflexión contiguos,  $r_{12} = -r_{21}$  (como en un DBR), el producto de la suma en (8.1) por su conjugada es la reflectividad

$$R_{-+}(k_0) \approx |r_{12}|^2 \left[ m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j 2(m-j) \cos \frac{jk_0}{2} \right],$$

donde  $m$  es el número de interfases (o superficies que reflejan). La expresión anterior es equivalente a (8.4) tanto para un número par como impar de interfases. Los máximos de reflectividad persistentes (que no depende su posición del número de capas) o bandas prohibidas se sitúan en  $k_0 = (2j+1)2\pi$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

2. Cuando no hay diferencia de fase entre coeficientes de reflexión contiguos,  $r_{12} = r_{21}$  (como en el perfil de dientes de sierra) la reflectividad resulta

$$R_{++}(k_0) \approx |r_{12}|^2 \left[ m + \sum_{j=1}^{m-1} 2(m-j) \cos \frac{jk_0}{2} \right].$$

La expresión anterior es equivalente a (8.5) tanto para un número par como impar de superficies que reflejan. Los máximos de reflectividad persistentes (que no depende su posición del número de capas) o bandas prohibidas se sitúan en  $k_0 = (2j+2)2\pi$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

3. El caso novedoso surge cuando la diferencia de módulo y fase entre coeficientes de reflexión contiguos es arbitraria, considerando que el coeficiente  $r$  es en general complejo. Sean  $r_{12} = a+bi$  y  $r_{21} = c+di$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son números reales de tal manera que el módulo de  $r_{12}$  y  $r_{21}$  no sobrepase la unidad. Se yuxtaponen  $m$  superficies, empezando con la que corresponde al coeficiente  $r_{12}$  y luego alternando con  $r_{21}$ . El producto de la suma en (8.1) por su conjugada, para un número impar de superficies, es la reflectividad

$$R_{\text{impar}}(k_0) \approx \frac{m+1}{2} (a^2 + b^2) + \frac{m-1}{2} (c^2 + d^2) + \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left\{ 2(m-2j+1)(ac+bd) \cos \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) k_0 \right] \right\} +$$

$$+ [(m - 2j + 1)(a^2 + b^2) + (m - 2j - 1)(c^2 + d^2)] \cos(jk_0)\}. \quad (8.27)$$

Mientras que para un número par de superficies la reflectividad resulta

$$\begin{aligned} R_{\text{par}}(k_0) &\approx \frac{m}{2}(a^2 + b^2) + \frac{m}{2}(c^2 + d^2) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \left\{ 2(m - 2j + 1)(ac + bd) \cos\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)k_0\right] + \right. \\ &[(m - 2j)(a^2 + b^2) + (m - 2j)(c^2 + d^2)] \cos(jk_0)\} + \\ &\left. \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \left\{ 2(bc - ad) \sin\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)k_0\right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Si  $r_{12} = -r_{21}$ , estos resultados se reducen al esquema  $R_{-+}$  y si se supone que  $r_{12} = r_{21}$  se reducen al  $R_{++}$ . En cambio, por ejemplo, si la diferencia de fase entre los coeficientes es de  $\frac{\pi}{2}$ , se presenta un espectro de reflectividad distinto. Los factores  $ac + bd$  se anulan, anulándose también los términos correspondientes a las frecuencias que son múltiplos semienteros de  $k_0$ .

En la figura 8.24 se presentan cinco espectros de reflectividad distintos, en todos los casos  $|r_{12}| = |r_{21}| = 0.1$  y  $m = 7$ . El primer espectro es del tipo  $R_{-+}$ , es decir con una diferencia de fase entre coeficientes de  $\delta = \pi$ , mientras que el último es del tipo  $R_{++}$  con una diferencia de fase entre coeficientes de  $\delta = 0$ . Los intermedios corresponden a una diferencia de  $\delta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{4}$ . Es sorprendente ver como para valores intermedios de la diferencia de fase  $0 < \delta < \pi$  parece que se da una superposición de los casos extremos  $R_{-+}$  y  $R_{++}$  en vez de un corrimiento paulatino de todo el espectro, de  $0$  a  $2\pi$ , sobre el eje de  $k_0$ . Cuando se modifica el espesor óptico de las capas, pero no los coeficientes de reflexión, ocurre ese desplazamiento del espectro de reflectividad sobre el eje de  $k_0$ . Ingenuamente, uno esperaría un comportamiento similar al ir cambiando la fase de los coeficientes de reflexión. Ahora se puede entender, mediante el modelo matemático que lleva a las expresiones (8.27) y (8.28), porqué ocurre ese máximo persistente en  $\lambda_p/2$  (“filtración espectral”) para el perfil de triángulos, con o sin apodización. Si la diferencia de fase entre coeficientes contiguos no es exactamente  $\pi$ , pero es cercana, por ejemplo  $\frac{9}{10}\pi$ , el espectro de reflectividad sería parecido al segundo que aparece, en la figura 8.24. Aunque es principalmente un espectro de reflectividad tipo  $R_{-+}$ , ya se aprecian de forma incipiente las bandas del esquema  $R_{++}$ . No obstante que el resultado de la aproximación SVRI a menor orden no nulo arroja coeficientes de reflexión  $r_{c1}$  y  $r_{c2}$  imaginarios puros, si se aumenta el orden de la aproximación eso ya no es estrictamente cierto. En el capítulo 5 se muestra que a mayor orden en la aproximación SVRI aparecen más términos, de modo que no se garantiza que  $r_{c1}$  y  $r_{c2}$  tengan una diferencia de fase exacta de  $\pi$ . De hecho, para obtener el espectro de reflectividad del perfil de triángulos mediante la aproximación SVRI, se emplea el método de las matrices con la solución a la ecuación de la amplitud a segundo orden (8.19). Si se introduce esta forma de la amplitud  $A(z)$  en la expresión para encontrar el coeficiente de reflexión (5.26), con  $k_0 = 2\pi/\lambda_p$ , se obtienen valores muy similares de  $r_{c1}$  y  $r_{c2}$  a los que se presentan en (8.15), pero ya no son imaginarios puros

$$r_{c1} \approx -0.0045 + i(0.0668), \quad r_{c2} \approx -0.0119 - i(0.1084).$$

La diferencia de fase entre estos dos coeficientes es  $(0.94)\pi$  que es suficientemente distinta de  $\pi$  para que surjan, aunque pequeñas, las bandas de  $R_{++}$ .

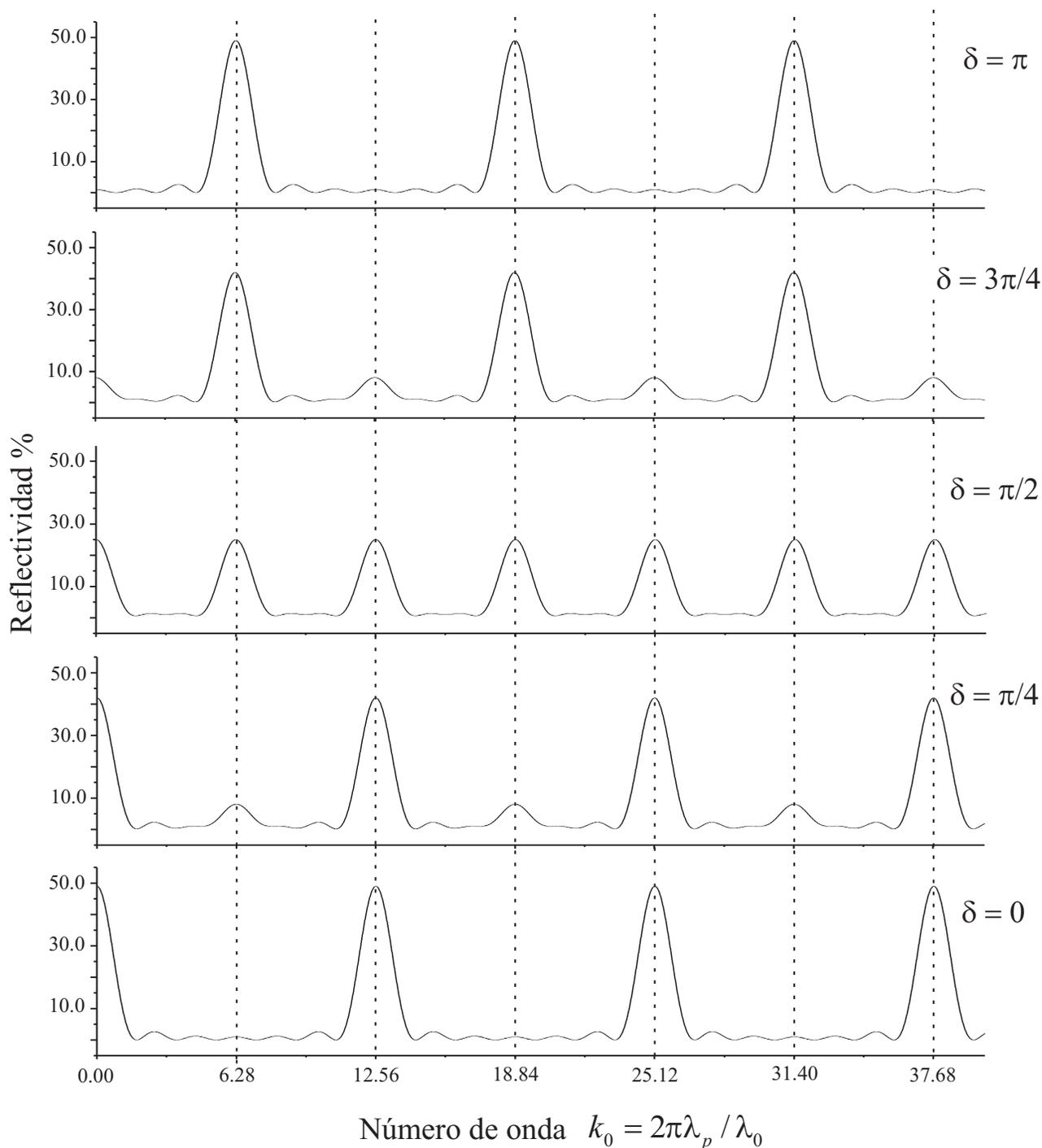


Figura 8.24: Se presentan cinco espectros de reflectividad distintos, en todos los casos  $|r_{12}| = |r_{21}| = 0.1$  y  $m = 7$ . Para cada espectro se tiene una diferencia de fase entre coeficientes de reflexión contiguos de  $\delta = \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$  y 0.

En el modelo de juguete no se considera la dependencia en  $k_0$  de los coeficientes de reflexión de las superficies. Si bien no se está considerando dispersión en los materiales, el coeficiente de reflexión asociado a las discontinuidades en las derivadas de  $n(z)$  depende significativamente de  $k_0$ . De modo que los espectros

que se obtengan con modelos más refinados no serán tan uniformes como los que aparecen en 8.24. Para comprobar todo lo anterior usando ya un modelo mas preciso, se puede comenzar por explorar un caso concreto, que combine el perfil de triángulos con el de dientes de sierra, como el de la figura 8.25(a). Este perfil se describe con la siguiente expresión

$$n_{\text{combinado}}(z) = \begin{cases} n_{\min} & \text{para } z < 0 \\ 2(n_{\max}^2 - n_{\min}^2) \left( \frac{z}{\lambda_p} - \frac{j}{n_{\max} + n_{\min}} \right) + n_{\min} & \text{para } \frac{j\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} < z < \frac{(j-\frac{1}{2})\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \\ n_{\min} & \text{para } \frac{(j+\frac{1}{2})\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} < z < \frac{j\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \\ n_{\min} & \text{para } z > \frac{10\lambda_p}{n_{\max} + n_{\min}} \end{cases}, \quad (8.29)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots, 10$ . En este caso la diferencia de fase entre los coeficientes de reflexión de superficies reflejantes contiguas es aproximadamente  $\pi/2$ , en un rango de frecuencias cercano a la principal  $k_0 \approx 2\pi/\lambda_p$ . Mediante las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud (3.11) para varios valores de  $k_0$  y empleando la expresión (3.31) se obtiene el espectro de reflectividad mostrado en la figura 8.25(b). Efectivamente se perciben el doble de bandas prohibidas, dado un cierto intervalo en  $k_0$ , que en los casos del DBR y el perfil de dientes de sierra, también se observan disminuidos los lóbulos laterales en comparación con uno u otro perfil. Las bandas impares son las que corresponden al esquema  $R_{-+}$  y las pares al  $R_{++}$ .

Los resultados de esta sección sugieren una forma de mejorar el método de la transformada de Fourier descrito en 2.2.9. A la conocida expresión  $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ , que es consecuencia de las relaciones de Fresnel, en particular (2.27) para incidencia normal, se le suma el término dominante en la aproximación SVRI que tome en cuenta la reflexión causada por las discontinuidades en la primera derivada, como lo es (5.37), pero incluyendo el caso en que  $n_1 \neq n_2$

$$r \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} + i \frac{n_2 n_1' - n_1 n_2'}{2k_0 n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left( 1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right). \quad (8.30)$$

La expresión anterior corresponde a considerar las dos primeras ecuaciones de (5.28). A continuación los cambios finitos de (8.30) se transforman en infinitesimales

$$dr \approx \frac{dn}{2n} + i \frac{dn'}{4k_0 n^2}.$$

y se introducen en la integral de la transformada

$$\mathcal{Q}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dn}{2n} + i \frac{d \left( \frac{dn}{dz} \right)}{4k_0 n^2} \right) \exp [2ik_0 \Lambda],$$

que escrita en términos de la diferencial del camino óptico  $d\Lambda$  queda

$$\mathcal{Q}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dn}{2n} + i \frac{\left( \frac{dn}{d\Lambda} \right)^2 + n \frac{d^2 n}{d\Lambda^2}}{4k_0 n^2} \right) \exp [2ik_0 \Lambda] d\Lambda.$$

La expresión anterior es de mayor grado de aproximación que la transformada de Fourier (2.122), ya que toma en cuenta el carácter complejo de los coeficientes de reflexión para las superficies. Por desgracia, con esta modificación, inferir el perfil a partir del espectro de reflectividad deseado requerirá de un procedimiento más elaborado que tan sólo encontrar una transformada inversa.

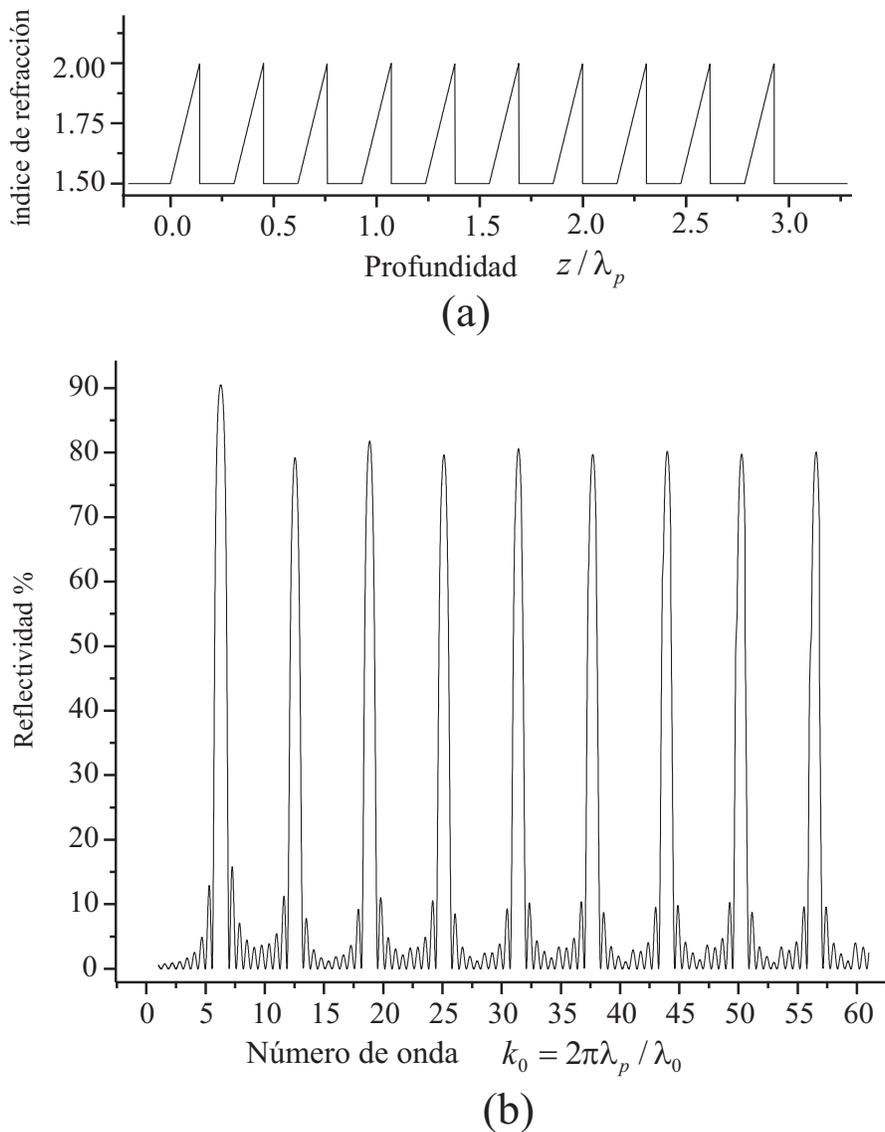


Figura 8.25: (a) Perfil periódico que combina características del de triángulos y el de dientes de sierra, presentado en (8.29). Se toma  $n_{\max} = 2$  y  $n_{\min} = 1$ . La diferencia de fase entre los coeficientes de reflexión de superficies reflejantes contiguas es aproximadamente  $\pi/2$ . Consta de 10 períodos. (b) La reflectividad como función de  $k_0$  para el perfil (8.29).

### 8.2.6. Conclusiones de la sección 8.2

Describir la propagación de luz a través de multicapas mediante la ecuación de la amplitud (3.10) y sus soluciones numéricas permite modelar de manera más realista las interfases entre capas, debido a que no es más complicado tratar perfiles graduales que abruptos. Estos perfiles continuos predicen mejor el comportamiento de dispositivos ópticos reales.

Dado que las discontinuidades en la derivada de  $n(z)$  producen reflexión de luz, repitiendo periódicamente estos planos se mostró que es posible diseñar espejos dieléctricos o filtros, con el ejemplo del perfil de triángulos. Tanto las soluciones numéricas a la ecuación de la amplitud como las soluciones analíticas aproximadas con SVRI son buenas alternativas para tratar este caso y el de dientes de sierra. Se pueden construir perfiles apodizados con superficies de discontinuidad en las derivadas de  $n(z)$ , resultando en las

características ópticas usuales de un corrugado.

Los máximos persistentes de reflexión extras que aparecen en el perfil de triángulos, la llamada “filtración espectral”, se debe a que los coeficientes de reflexión complejos asociados a superficies contiguas presentan una diferencia de fase distinta de cero o  $\pi$  entre ellos. El resultado anterior sugiere una modificación al método de la transformada de Fourier.

# Conclusiones generales y perspectivas

La representación de amplitud y fase es una metodología acertada para describir la propagación de ondas planas a través de medios estratificados, ya sea que el perfil de índice de refracción sea continuo o discontinuo, en incidencia normal u oblicua, ya sea que se trate de polarización TE o TM, incluyendo el caso de la reflexión total interna. Aunque en este trabajo el énfasis se puso en materiales transparentes, se puede generalizar este tratamiento a medios disipativos. Cuando se buscan soluciones numéricas, la representación de amplitud y fase es una opción más eficiente que el tradicional método de las matrices, pese a que dicha representación implique resolver una ecuación diferencial ordinaria no lineal: la ecuación de la amplitud.

Se aplicó satisfactoriamente la metodología propuesta de esta tesis a los casos de interfases “suaves”, películas delgadas graduales, esparcimiento de luz por monocapas de partículas pequeñas y reflectividad de multicapas considerando el carácter finito del grosor de las interfases. Se estudiaron nuevos perfiles periódicos con aplicación potencial en recubrimientos con interferencia óptica y en cristales fotónicos. Se logró una generalización para el coeficiente de reflexión en incidencia normal que incluye el efecto de las discontinuidades en las derivadas de  $n(z)$ . También se obtuvo una comprobación de las “relaciones de reversibilidad” de manera simple, gracias al invariante que relaciona a la amplitud y a la fase del campo. En resumen, junto con una nueva metodología en este trabajo se reportan resultados originales que en algunos casos resultan sorprendentes. Cuando es posible, se procura comparar los resultados obtenidos aquí con los logrados mediante otros métodos y aún si no es factible recurrir a otros métodos, se hace un esfuerzo para verificar por distintas vías los resultados relevantes. En general todo lo anterior puede ser de utilidad para las aplicaciones que se exponen en la sección 1.1.

Hasta aquí, todavía quedan implícitas en este trabajo varias ideas que pueden ser la base para construir propuestas de futuras investigaciones relacionadas con el tema principal y/o tópicos asociados. Para finalizar, vale la pena escribir de manera explícita algunas de estas ideas:

- Probar con otros perfiles, además de la tangente hiperbólica, en el caso de incidencia oblicua. Incluir perfiles  $n(z)$  analíticos o con discontinuidades de distintas clases, ya sea que modelen interfases sencillas o capas delgadas. La incidencia oblicua es de mucho interés ya que permite el fenómeno de la reflexión total interna y que haya una componente del campo eléctrico en la dirección  $z$ .
- Retomar el tema de los “espejismos” considerando explícitamente que la variación de índice de refracción en el aire es gradual.
- Resolver la ecuación de la amplitud para medios que absorben (3.15), con distintos ejemplos.
- Buscar como abordar el problema de la propagación en medios en los que  $\varepsilon(z)$  y/o  $\mu(z)$  se anulan para algún valor de  $z$  (materiales de índice negativo).
- Explorar bajo que condiciones el tratamiento propuesto en la tesis se puede aplicar a medios anisotrópicos.
- Generalizar las relaciones de reversibilidad para incluir medios con absorción y/o anisotrópicos.

- Incluir el fenómeno de la dispersión óptica en los materiales, es decir la dependencia del índice de refracción en la frecuencia  $n = n(\omega)$ .
- La “dispersión espacial”, dependencia del índice de refracción en el número de onda  $k$  de manera independiente a  $\omega$ , permite más de un modo de propagación para un mismo tipo de polarización [100, 101]. Sería interesante investigar si es posible tratar ese esquema de varios modos de propagación con la representación de amplitud y fase.
- Obtener explícitamente también los coeficientes de transmisión para todos los casos en que se obtuvo el de reflexión. Si se obtienen los coeficientes de transmisión de primeros principios, empleando directamente las soluciones a la ecuación de la amplitud, posteriormente se puede verificar la validez del modelo mediante las relaciones de reversibilidad.
- Tratar detenidamente el tema de la convergencia de la serie WKB o SVRI como una serie asintótica.
- Proponer una definición más general del camino óptico basada en la aproximación SVRI a ordenes mayores que el primero.
- Explorar el “problema inverso”: prescribir el espectro de reflexión primero y luego hallar el perfil  $n(z)$  correspondiente.
- Investigar si hay forma de aprovechar la expresión integral de la función de reflexión (3.55) para generar un método iterativo que pueda ser usado en el diseño de recubrimientos con interferencia óptica, es decir, para poder encontrar el perfil óptico cuando se desea obtener un espectro de reflectividad dado.
- Obtener evidencias experimentales que comprueben o descarten las predicciones hechas en esta tesis, ya sea que se puedan montar experimentos en los laboratorios de la propia UAMI o colaborando con otras instituciones. Algunas de las predicciones relevantes son: la reflectividad en incidencia normal de una monocapa 7, la de un perfil de triángulos 8.2.2 y la fase del coeficiente de reflexión en el caso de discontinuidades en las derivadas del índice de refracción 5.1.6.

# Glosario

Símbolo	Significado	Sección
<b>H</b>	Campo magnético H.	2.1
<b>J</b>	Densidad de corriente eléctrica externa.	2.1
<b>E</b>	Campo Eléctrico.	2.1
<b>B</b>	Campo magnético B.	2.1
<b>D</b>	Campo de desplazamiento eléctrico.	2.1
$\rho$	Densidad de carga externa.	2.1
$x, y, z, t$	Coordenadas cartesianas espaciales y el tiempo, respectivamente.	2.1
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	Vectores unitarios en las direcciones $x, y, z$ respectivamente.	2.1
$\mu$	Permeabilidad magnética del medio.	2.1
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío.	2.1
$\varepsilon$	Permitividad eléctrica del medio.	2.1
$\varepsilon_0$	Permitividad eléctrica del vacío.	2.1
$g$	Conductividad eléctrica.	2.1
TE	Polarización con el campo eléctrico transversal, en la dirección $x$ .	2.2.1
TM	Polarización con el campo magnético transversal, en la dirección $x$ .	2.2.1
$E$	Magnitud vectorial del campo eléctrico.	2.2.1
$E_t$	Parte del campo eléctrico que depende del tiempo.	2.2.1

Símbolo	Significado	Sección
$E_x, E_y, E_z$	Componentes cartesianas de la parte espacial del campo eléctrico.	2.2.1
$\omega$	Frecuencia de la onda.	2.2.1
$k_0$	Número de onda en el vacío.	2.2.1
$n$	Índice de refracción.	2.2.1
$c$	Velocidad de la luz en el vacío.	2.2.1
$U(z)$	Parte del campo eléctrico que depende de $z$ .	2.2.1
$Y(y)$	Parte del campo eléctrico que depende de $y$ .	2.2.1
$\sigma$	Constante de separación entre las partes que dependen de $y$ y $z$ del campo (eléctrico o magnético).	2.2.1
$u$	Constante unitaria que contiene las unidades del campo eléctrico en el Sistema Internacional de Unidades, (V/m).	2.2.1
$\mathbf{S}$	Vector de Poynting.	2.2.1
$H_x, H_y, H_z$	Componentes cartesianas de la parte espacial del campo magnético H.	2.2.2
$\mathcal{U}(z)$	Parte del campo magnético H que depende de $z$ .	2.2.2
$\mathcal{Y}(y)$	Parte del campo magnético H que depende de $y$ .	2.2.2
$v$	Constante unitaria que contiene las unidades del campo magnético H en el Sistema Internacional de Unidades, (A/m).	2.2.2
$\tilde{A}_i$	Constante compleja, se interpreta su módulo como la amplitud de la onda incidente que viaja hacia la dirección positiva del eje $z$ .	2.2.5
$\tilde{A}_r$	Constante compleja, se interpreta su módulo como la amplitud de la onda reflejada que viaja hacia la dirección negativa del eje $z$ .	2.2.5
$\tilde{A}_t$	Constante compleja, se interpreta su módulo como la amplitud de la onda transmitida que viaja hacia la dirección positiva del eje $z$ .	2.2.5

Símbolo	Significado	Sección
$\theta$	Ángulo que hace la dirección de propagación de la onda plana con el eje $z$ .	2.2.5
$t_{\perp}$	Coefficiente de transmisión complejo, polarización TE.	2.2.5
$r_{\perp}$	Coefficiente de reflexión complejo, polarización TE.	2.2.5
$\delta_{r_{\perp}}$	Fase del coeficiente de reflexión, polarización TE.	2.2.5
$I$	Irradiancia.	2.2.5
$R_{\perp}$	Reflectividad, polarización TE.	2.2.5
$T_{\perp}$	Transmitancia, polarización TE.	2.2.5
$r_{\parallel}$	Coefficiente de reflexión complejo, polarización TM.	2.2.5
$t_{\parallel}$	Coefficiente de transmisión complejo, polarización TM.	2.2.5
$\theta_B$	Ángulo de Brewster	2.2.5
$\delta_{r_{\parallel}}$	Fase del coeficiente de reflexión, polarización TM.	2.2.5
$R_{\parallel}$	Reflectividad, polarización TM.	2.2.5
$T_{\parallel}$	Transmitancia, polarización TM.	2.2.5
$V(z)$	Función asociada a $U$ , que junto con esta última, permite escribir al campo con una notación matricial, polarización TE.	2.2.6
$\mathcal{V}(z)$	Función asociada a $\mathcal{U}$ , que junto con esta última, permite escribir al campo con una notación matricial, polarización TM.	2.2.6
$h(z)$	Función relacionada con el cambio de variable que permite transformar la ecuación diferencial para $U$ en una ecuación de Riccati.	2.2.6
$U_N$	Polinomios de Chevyshev de segundo tipo	2.2.6.3
$\beta_1, \beta_2$	Abreviaciones para poder escribir de forma compacta los elementos de matriz de un medio con dos capas.	2.2.6.3
$p_1, p_2$	Abreviaciones para poder escribir de forma compacta los elementos de matriz de un medio con dos capas.	2.2.6.3

Símbolo	Significado	Sección
$r_{\perp}(z), r_{\parallel}(z)$	Funciones de reflexión para polarización TE y TM.	2.2.7
$\Lambda$	Longitud del camino óptico.	2.2.8
$\text{Ai}(\zeta), \text{Bi}(\zeta)$	Funciones de Airy.	2.2.8
${}_2F_1(a, b; c; \xi)$	Serie hipergeométricas.	2.2.8
$\Gamma(a)$	Función Gamma.	2.2.8
$J_m(\xi)$	Serie de Bessel.	2.2.8
$\tilde{Q}(k_0)$	Función de Sossi.	2.2.9
$F(z)$	Variable dependiente que resulta de hacer una transformación de Louiville sobre la ecuación diferencial para $U(z)$ .	3.1
$\mathcal{F}(z)$	Variable dependiente que resulta de hacer una transformación de Louiville sobre la ecuación diferencial para $\mathcal{U}(z)$ .	3.1
$\kappa_{\text{TE}}^2(z)$	Coeficiente del término de orden cero de la ecuación que resulta de llevar a cabo la transformación de Louiville sobre la ecuación diferencial para $U(z)$ , que es la parte que depende de $z$ del campo eléctrico.	3.1
$\kappa_{\text{TM}}^2(z)$	Coeficiente del término de orden cero de la ecuación que resulta de llevar a cabo la transformación de Louiville sobre la ecuación diferencial para $\mathcal{U}(z)$ , que es la parte que depende de $z$ del campo magnético $\mathbf{H}$ .	3.1
$A(z), \mathcal{A}(z)$	Módulos de las funciones complejas $F(z)$ y $\mathcal{F}(z)$ respectivamente, son las soluciones de las ecuaciones para la amplitud en los casos TE y TM .	3.1
$q(z), \mathbf{q}(z)$	Fases de las funciones complejas $F(z)$ y $\mathcal{F}(z)$ respectivamente.	3.1
$Q$	Invariante que relaciona el módulo con la fase de $F(z)$ y $\mathcal{F}(z)$ .	3.1.1
$A_d(z)$	Múltiplo de $A(z)$ que permite escribir de forma más simple la ecuación de la amplitud.	3.1.1
$A_+$	Módulo de $\tilde{A}_i$ multiplicado por la raíz de la permeabilidad magnética relativa o la permitividad eléctrica relativa, según si se trata de polarización TE o TM respectivamente.	3.2.1

Símbolo	Significado	Sección
$A_-$	Módulo de $\tilde{A}_r$ multiplicado por la raíz de la permeabilidad magnética relativa o la permitividad eléctrica relativa, según si se trata de polarización TE o TM respectivamente.	3.2.1
$\delta_+, \delta_-$	Fases de $\tilde{A}_i$ y $\tilde{A}_r$ respectivamente.	3.2.1
$\Delta\delta$	Diferencia entre $\delta_1$ y $\delta_2$ .	3.2.1
$A_{\max}, A_{\min}$	Valores máximo y mínimo locales de $A$ respectivamente.	3.2.1
$D$	“Grosor” de la interfase, distancia a lo largo de la cual ocurre el 90 % del cambio en el índice de refracción.	3.2.2
$\lambda$	Longitud de onda en el vacío.	3.2.2
$A_i$	Valor de $A_+$ cuando $z \ll 0$ .	3.2.2
$A_r$	Valor de $A_-$ cuando $z \ll 0$ .	3.2.2
$A_t$	Valor de $A_+$ cuando $z \gg 0$ .	3.2.2
$\theta_c$	Ángulo crítico.	3.2.3.2
$R_{\perp}(z), R_{\parallel}(z)$	Cuadrado del módulo de las funciones de reflexión para polarización TE y TM respectivamente.	3.4
$\mathcal{G}(z)$	Cantidad relacionada con el cuadrado del módulo de la función de reflexión, en vez de variar entre 0 y 1, varía entre $-\infty$ y $\infty$ .	3.4
$n_{\text{avg}}$	Índice de refracción promedio.	4.2
$L$	Distancia entre interfases.	4.3
$C^0, C^1, C^2, \dots C^m$	Tipos de función según su derivada discontinua de mas bajo orden.	5
SVRI	Referente a la aproximación de la variación suave del índice de refracción	
$A_{\text{SVRI}}$	Solución a la ecuación de la amplitud en la aproximación SVRI.	5.2.1
$A_0, A_1, A_2, \dots A_m$	Coefficientes para la serie de potencias en $k_0^{-1}$ que corresponde a la solución aproximada $A_{\text{SVRI}}$ .	5.2.1
$q_{\text{SVRI}}$	Fase de $U(z)$ en la aproximación SVRI.	5.2.3

Símbolo	Significado	Sección
$U_{izq}, U_{der}$	$U(z)$ en las regiones $z < 0$ y $z > 0$ respectivamente, bajo la aproximación SVRI.	5.2.4
$A_{izq}, A_{der}$	Soluciones de la ecuación de la amplitud $A(z)$ , en las regiones $z < 0$ y $z > 0$ respectivamente, bajo la aproximación SVRI.	5.2.4
$r$	Coefficiente de reflexión en incidencia normal.	5.2.4
$t$	Coefficiente de transmisión en incidencia normal.	5.2.4
$r_0, r_1, r_2, \dots, r_m$	Coefficientes para la serie de potencias en $k_0^{-1}$ que corresponde a $r$ en la aproximación SVRI.	5.2.5
$n_{izq}, n_{der}$	Índice de refracción en las regiones $z < 0$ y $z > 0$ respectivamente.	5.2.5
$\underline{U}_{izq}, \underline{U}_{der}$	$U(z)$ en las regiones $z \ll 0$ y $z \gg 0$ respectivamente, cuando la luz incide desde la izquierda ( $z \ll 0$ ).	6.1.1
$\tilde{A}_i, \tilde{A}_r, \tilde{A}_t$	Cantidades $\tilde{A}_i, \tilde{A}_r$ y $\tilde{A}_t$ evaluadas cuando la luz incide por la izquierda ( $z \ll 0$ ).	6.1.1
$\underline{r}_\perp, \underline{t}_\perp$	Coefficientes $r_\perp$ y $t_\perp$ cuando la luz incide por la izquierda ( $z \ll 0$ ).	6.1.1
$\overleftarrow{U}_{izq}, \overleftarrow{U}_{der}$	$U(z)$ en las regiones $z \ll 0$ y $z \gg 0$ respectivamente, cuando la luz incide desde la derecha ( $z \gg 0$ ).	6.1.1
$\tilde{A}_i, \tilde{A}_r, \tilde{A}_t$	Cantidades $\tilde{A}_i, \tilde{A}_r$ y $\tilde{A}_t$ evaluadas cuando la luz incide por la derecha ( $z \gg 0$ ).	6.1.1
$\overleftarrow{r}_\perp, \overleftarrow{t}_\perp$	Coefficientes $r_\perp$ y $t_\perp$ cuando la luz incide por la derecha ( $z \gg 0$ ).	6.1.1
$\underline{U}_{izq}, \underline{U}_{der}$	$\mathcal{U}(z)$ en las regiones $z \ll 0$ y $z \gg 0$ respectivamente, cuando la luz incide desde la izquierda ( $z \ll 0$ ).	6.1.2
$\underline{r}_\parallel, \underline{t}_\parallel$	Coefficientes $r_\parallel$ y $t_\parallel$ cuando la luz incide por la izquierda ( $z \ll 0$ ).	6.1.2
$\overleftarrow{U}_{izq}, \overleftarrow{U}_{der}$	$\mathcal{U}(z)$ en las regiones $z \ll 0$ y $z \gg 0$ respectivamente, cuando la luz incide desde la derecha ( $z \gg 0$ ).	6.1.2
$\overleftarrow{r}_\parallel, \overleftarrow{t}_\parallel$	Coefficientes $r_\parallel$ y $t_\parallel$ cuando la luz incide por la derecha ( $z \gg 0$ ).	6.1.2
$\underline{F}, \underline{F}$	Solución $F(z)$ para los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.1
$w$	El wronskiano.	6.2.1

Símbolo	Significado	Sección
$\underline{R}_{\perp}, \overleftarrow{R}_{\perp}$	Reflectividad para la polarización TE en los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.1
$\underline{T}_{\perp}, \overleftarrow{T}_{\perp}$	Transmitancia para la polarización TE en los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.1
$\underline{\mathcal{F}}, \overleftarrow{\mathcal{F}}$	Solución $\mathcal{F}(z)$ para los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.2
$\underline{R}_{\parallel}, \overleftarrow{R}_{\parallel}$	Reflectividad para la polarización TM en los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.2
$\underline{T}_{\parallel}, \overleftarrow{T}_{\parallel}$	Transmitancia para la polarización TM en los casos en que la luz es incidente desde el lado izquierdo ( $z \ll 0$ ) y derecho ( $z \gg 0$ ) respectivamente.	6.2.2
$N$	Número total de partículas en una monocapa.	7.1
$\rho$	Densidad superficial de partículas	7.1
$\Theta$	Fracción del plano que cubren las partículas cuando se le ve en dirección perpendicular a él.	7.1
$E_{\parallel}^S, E_{\perp}^S$	Amplitud del campo eléctrico esparcido, polarizaciones TE y TM respectivamente.	7.1.1
$E_{\parallel}^i, E_{\perp}^i$	Amplitud del campo eléctrico incidente, polarizaciones TE y TM respectivamente.	7.1.1
$S_1, S_2, S_3, S_4$	Elementos de la matriz de la amplitud del esparcimiento.	7.1.1
$x_m$	Parámetro de tamaño de la partícula que esparce luz.	7.1.1
$f(\theta)$	Factor de forma de la partícula que esparce luz.	7.1.1
$\alpha$	Parámetro relacionado con la porción de cubierta y el tamaño de las partículas que esparcen luz.	7.1.1
$r_{\text{coh}}^{\text{SSA}}$	Coefficiente de reflexión especular (coherente) para el modelo de esparcimiento simple.	7.1.1
$t_{\text{coh}}^{\text{SSA}}$	Coefficiente de reflexión especular (coherente) para el modelo de esparcimiento simple.	7.1.1
$r_{\text{coh}}^{\text{MSM}}$	Coefficiente de reflexión especular (coherente) para el modelo de esparcimiento múltiple.	7.1.1

Símbolo	Significado	Sección
$t_{\text{coh}}^{\text{MSM}}$	Coefficiente de transmisión especular (coherente) para el modelo de esparcimiento múltiple.	7.1.1
$r_{\text{sop}}$	Coefficiente de reflexión especular (coherente) cuando la monocapa está soportada por un substrato.	7.1.2
$\beta$	Diferencia de fase entre reflexiones sucesivas de la onda coherente cuando hay substrato.	7.1.2
$n_{\text{efe}}, n_{\text{pro}}$	Índice de refracción efectivo y promedio del índice de refracción de la mezcla respectivamente.	7.1.3
$f$	Fracción de volumen ocupada por las esferas.	7.1.3
$d(z)$	Radio de una rebanada circular de la esfera.	7.1.4
THF	Referente a el modelo de película homogénea efectiva.	7.2
EGL	Referente al modelo de película gradual equivalente.	7.2
SSA-M	Referente al modelo de esparcimiento simple con el resultado de Mie.	7.2
MSM-M	Referente al modelo de esparcimiento múltiple con el resultado de Mie.	7.2
SSA-R&G	Referente al modelo de esparcimiento simple con la aproximación de Rayleigh-Gans.	7.2
MSM-R&G	Referente al modelo de esparcimiento múltiple con la aproximación de Rayleigh-Gans.	7.2
$x_m^{\text{nueva}}$	Parámetro de tamaño de la partícula que esparce luz, empleando el índice de refracción promedio.	7.2.2.1
DBR	Referente a un espejo de Bragg (Distributed Bragg Reflector)	8.1
$\lambda_p$	Longitud de onda principal, para la que las capas tienen un grosor óptico de un cuarto de onda.	8.1
$\lambda_0$	Longitud de onda en el vacío.	8.1
$R_{++}(k_0)$	Representa el espectro de reflectividad cuando no hay cambio de signo en los coeficientes contiguos ( $r_{12} = r_{21}$ ).	8.1
$R_{-+}(k_0)$	Representa el espectro de reflectividad cuando sí hay cambio de signo en los coeficientes contiguos ( $r_{12} = -r_{21}$ ).	8.1

Nota: En algunas de las secciones de esta tesis se emplean otros símbolos varios, como  $a, b, c, \zeta, \xi$ , etc., cuando se refieren a cantidades circunscritas a una sola sección y se les involucra brevemente (“comodines”).

# Agradecimientos

- A Manuel Fernández Guasti por invitarme participar en los proyectos relacionados con fenómenos ondulatorios e invariantes.
- A los miembros del jurado en el examen predoctoral: W. Luis Mochán Backal, Joaquín Delgado Fernández y José Luis Jiménez Ramírez, por sus atinadas sugerencias.
- A Eduardo Piña Garza y Joaquín Delgado Fernández por el apoyo con la bibliografía relacionada con series asintóticas.
- A Stoyan H. Russev del Departamento de Física del Estado Sólido y Microelectrónica, Facultad de Física, Universidad de Sofía, en Bulgaria por sus recomendaciones en relación a la bibliografía del capítulo 6.
- A Juan Ignacio Larruquert Goicoechea del Instituto de Óptica del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en Madrid, España, por su apoyo para conseguir bibliografía antigua pero valiosa.
- A los organizadores del *International Commission for Optics Congress (ICO) #22* en agosto de 2011 en la ciudad de Puebla, en particular a los miembros del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) por el apoyo para poder asistir a este congreso.
- A la Coordinación General de Vinculación y Desarrollo Institucional de la Universidad Autónoma Metropolitana, al Instituto de Ciencia y Tecnología del DF (ICyTDF), a la *Optical Society of America (OSA)* y al comité organizador del *Optical Interference Coatings (OIC)* que e llevó a cabo del 16 al 21 de junio del 2013 en *Whistler, British Columbia, Canada* por los apoyos para poder asistir a esta reunión y presentar dos trabajos.
- A Luis Mochán y Roberto Alexander-Katz por las nuevas ideas aportadas para enriquecer mi trabajo de tesis y su invaluable tiempo.
- A los miembros del Departamento de Física y de la División de Ciencias básicas e Ingeniería (CBI) de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa (UAM-I) que fueron amables y pacientes conmigo durante el período de tiempo que estuve inscrita al posgrado. En particular quiero agradecer al área de Física de Líquidos por cederme el espacio de su seminario para llevar a cabo mi examen de grado.
- A Sofi, los dos Ramones, Nathán y demás miembros de mi familia por regalarme todo ese tiempo que no les dediqué a ellos.

# Bibliografía

- [1] N. Nakagawa, H. Y. Hwang y D. A. Muller. Why some interfaces cannot be sharp. *Nature Materials*, 5:204 – 209, 2006. doi:10.1038/nmat1569.
- [2] B. G. Bovard. Rugate filter theory: an overview. *Appl. Opt.*, 32(28):5427–5442, Oct 1993. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-32-28-5427>, doi:10.1364/AO.32.005427.
- [3] H. Fabricius y L. Lys og Optik. *The Gradient Index Filter: A New Type of Optical Interference Filter*. Lys and Optik, 1992. <http://books.google.com.mx/books?id=pTASAwAAAJ>.
- [4] A. B. Shvartsburg y A. A. Maradudin. *Waves in Gradient Metamaterials*. World Scientific Publishing Company, 2013. ISBN 9789814436953. <http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8649>.
- [5] G. V. Morozov, D. W. L. Sprung y J. Martorell. One-dimensional photonic crystals with a sawtooth refractive index: another exactly solvable potential. *New Journal of Physics*, 15(10):103009, 2013. <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=10/a=103009>, doi:10.1088/1367-2630/15/10/103009.
- [6] R. J. Doviak y D. S. Zrníc. *Doppler radar and weather observations: second edition*. Dover Publications, 2006. ISBN 9780486450605. <https://www.nssl.noaa.gov/publications/books/>.
- [7] A. F. Fercher, W. Drexler, C. K. Hitzenberger y T. Lasser. Optical coherence tomography - principles and applications. *Reports on Progress in Physics*, 66(2):239, 2003. <http://stacks.iop.org/0034-4885/66/i=2/a=204>.
- [8] P. G. Kevrekidis y Y. Drossinos. Nonlinearity from linearity: The ermakov-pinney equation revisited. *Mathematics and Computers in Simulation*, 74:196 – 202, 2007. Nonlinear Waves: Computation and Theory V Thiab R. Taha. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475406002631>, doi:10.1016/j.matcom.2006.10.005.
- [9] J. W. S. Rayleigh. On reflection of vibrations at the confines of two media between which the transition is gradual. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1):51–56, 1879. <http://plms.oxfordjournals.org/content/s1-11/1/51.short>, doi:10.1112/plms/s1-11.1.51.
- [10] P. K. L. Drude. Ueber die reflexion und brechung ebener lichtwellen beim durchgang durch eine mit oberflächenschichten behaftete planparallele platte. *Annalen der Physik*, 279(5):126–157, 1891. doi:10.1002/andp.18912790507.
- [11] M. Schlick. Über die reflexion des lichtetes in einer inhomogenen schicht. In *Moritz Schlick, Kritische Gesamtausgabe*. Springer Wien New York, 1 edition, 2006. Re-edition of the original 1904 version of Schlick's dissertation as a chapter in the book. <http://www.springer.com/series/7287>.

- [12] R. M. Gans. Fortpflanzung des lichts durch ein inhomogenes medium. *Annalen der Physik*, 352(14):709–736, 1915. doi:10.1002/andp.19153521402.
- [13] M. Born y E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7th edition, 2005. ISBN 9780521784498.
- [14] F. Abelès. Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoïdales dans les milieux stratifiés. application aux couches minces. première partie. *Ann. Phys.*, 5(12):596–640, 1950.
- [15] R. Jacobsson. V light reflection from films of continuously varying refractive index. volume 5 of *Progress in Optics*, pages 247 – 286. North-Holland, Amsterdam (Elsevier), 1966. doi:10.1016/S0079-6638(08)70454-2.
- [16] W. Kofink y E. Menzer. Reflexion elektromagnetischer wellen an einer inhomogenen schicht nach der wentzel-kramers-brillouin-methode. *Annalen der Physik*, 431:388–402, 1941. doi:10.1002/andp.19414310508.
- [17] Lyx 2.0.0 - the document processor. Internet, Mayo 8 2011. <http://www.lyx.org/>.
- [18] 2014. <http://www.originlab.com/>.
- [19] 2014. <http://www.corel.com/rola/?storeKey=la#>.
- [20] 2014. <http://www.qtiplot.com/>.
- [21] 2014. <http://www.gimp.org/>.
- [22] Mathematica. Internet, 2011. <http://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [23] Just basic 1.01. Internet, 2004. <http://justbasic.com/>.
- [24] Volodymyr Bazhan. Scatlab 1.2. Internet, 2003. [https://archive.org/details/tucows\\_364415\\_ScatLab](https://archive.org/details/tucows_364415_ScatLab).
- [25] J. Stewart. *Calculus*. Cengage Learning, 7 th edition, 2012. ISBN 9780538497817.
- [26] J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Fondo Educativo Interamericano, 1984. ISBN 9789685001373. <http://books.google.com.pe/books?id=QHnjAAAACAAJ>.
- [27] Manuel Fernández-Guasti y Ruth Diamant. Generalización de la ley de snell del ángulo de refracción. *Óptica Pura y Aplicada*, 45(3):377–385, 2012. doi:10.7149/OPA.45.3.377.
- [28] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd Ed.* Jhon Wiley and Sons, Inc., 1999. ISBN 9788126510948. <http://books.google.com.mx/books?id=8qHCZjJHRUGC>.
- [29] H. Jeffreys. On certain approximate solutions of lineae differential equations of the second order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-23(1):428–436, 1925. <http://plms.oxfordjournals.org/content/s2-23/1/428.short>, doi:10.1112/plms/s2-23.1.428.
- [30] R. J. Jacobsson. Review of the optical properties of inhomogeneous thin films. En J. A. Dobrowolski y P. G. Verly, editores, *Proc. SPIE 2046, Inhomogeneous and Quasi-Inhomogeneous Optical Coatings*, 2, Quebec City, Canada, August 16 1993. SPIE. doi:10.1117/12.163540.

- [31] F. Abelès. Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoïdales dans les milieux stratifiés. application aux couches minces. deuxième partie. *Ann. Phys.*, 5(12):707–782, 1950.
- [32] W. Geffcken. Reflexion elektromagnetischer wellen an einer inhomogenen schicht. *Annalen der Physik*, 432(4-5):385–392, 1941. doi:10.1002/andp.19414320406.
- [33] K. Försterling. Über die Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen Medien. *Annalen der Physik*, 403(1):1–39, 1931. doi:10.1002/andp.19314030102.
- [34] L. R. Walker y N. Wax. Non uniform transmission lines and reflection coefficients. *Journal of Applied Physics*, 17(12):1043–1045, 1946. <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/17/12/10.1063/1.1707673>, doi:10.1063/1.1707673.
- [35] W. Kofink. Reflexion elektromagnetischer wellen an einer inhomogenen schicht. *Annalen der Physik*, 436(1-3):119–132, 1947. doi:10.1002/andp.19474360113.
- [36] P. S. Epstein. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 16(10):627– 637, October 15 1930. doi:10.1073/pnas.16.10.627.
- [37] L. M. Brekhovskikh. *Waves in Layered Media*. Applied mathematics and mechanics. Academic Press, 1980. ISBN 9780121305604. <http://books.google.com.mx/books?id=j50RAQAATAAJ>.
- [38] J. Wallot. Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante. *Annalen der Physik*, 365(24):734–762, 1919. doi:10.1002/andp.19193652405.
- [39] G. B. Airy. On the intensity of light in the neighborhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 6:379–402, 1838. [https://archive.org/details/cbarchive\\_36815\\_ontheintensityoflightintheneig1838](https://archive.org/details/cbarchive_36815_ontheintensityoflightintheneig1838).
- [40] M. Abramowitz y I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1964. ISBN 9780486612720. <http://books.google.com.mx/books?id=MtU8uP7XMvoC>.
- [41] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists 3RD Edition*. Academic Press, third edition, 1985. ISBN 9780120598205. <http://www.powells.com/biblio/9780120598205>.
- [42] A. Rostami y H. Motavali. Asymptotic iteration method: a powerful approach for analysis of inhomogeneous dielectric slab waveguides. *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. 4:171–182, 2008. <http://www.jpier.org/pierb/pier.php?paper=08011701>, doi:10.2528/PIERB08011701.
- [43] H. Motavali y A. Rostami. Exactly modal analysis of inhomogeneous slab waveguide using nikiforov-uvarov method. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 22(5-6):681–692, 2008. arXiv: <http://dx.doi.org/10.1163/156939308784159507>, doi:10.1163/156939308784159507.
- [44] S. H. Mazharimousavi, A. Roozbeh y M. Halilsoy. Electromagnetic wave propagation through inhomogeneous material layers. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 27(16):2065–2074, 2013. arXiv:<http://dx.doi.org/10.1080/09205071.2013.831741>, doi:10.1080/09205071.2013.831741.
- [45] L. Sossi. *On the theory of the synthesis of multilayer dielectric light filters*, pages 171–176. 1977. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1977otsm.book..171S>.

- [46] H. Fabricius. Gradient-index filters: designing filters with steep skirts, high reflection, and quintic matching layers. *Appl. Opt.*, 31(25):5191–5196, Sep 1992. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-31-25-5191>, doi:10.1364/AO.31.005191.
- [47] P. G. Verly y J. A. Dobrowolski. Iterative correction process for optical thin film synthesis with the fourier transform method. *Appl. Opt.*, 29(25):3672–3684, Sep 1990. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-29-25-3672>, doi:10.1364/AO.29.003672.
- [48] J. L. Reid y J. R. Ray. Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 21-7:1583–1588, 1980. doi:10.1063/1.524625.
- [49] M. Fernández-Guasti y H. Moya-Cessa. Amplitude and phase representation of quantum invariants for the time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, 67:063803, Jun 2003. doi:10.1103/PhysRevA.67.063803.
- [50] J. Cariñena y J. de Lucas. A nonlinear superposition rule for solutions of the milne-pinney equation. *Phys. Lett. A*, 372(33):5385 – 5389, 2008. doi:10.1016/j.physleta.2008.06.053.
- [51] P. B. Espinoza-Padilla. Ermakov-lewis dynamic invariants with some applications. Master’s thesis, Universidad de Guanajuato (México), 2000. <http://arxiv.org/pdf/math-ph/0002005.pdf>.
- [52] M. Fernández-Guasti, A. Gil-Villegas y R. Diamant. Ermakov equation arising from electromagnetic fields propagating in 1d inhomogeneous media. *Revista Mexicana de Física*, 46(6):530–538, 2000. [http://sgpwe.izt.uam.mx/pages/cbi/ruth/index\\_archivos/Ermakovequation.pdf](http://sgpwe.izt.uam.mx/pages/cbi/ruth/index_archivos/Ermakovequation.pdf).
- [53] N. Atzin, M. Fernandez-Guasti y R. Diamant. Light propagation at soft interface. Internet, December 2 2010. <http://demonstrations.wolfram.com/LightPropagationAtSoftInterface/>.
- [54] M. Fernández-Guasti y R. Diamant. Stratified media: nonlinear ode is better. En Ramón Rodríguez-Vera y Rufino Díaz-Urbe, editores, *Proceedings of the 22nd General Congress of the International Commission for Optics (ICO): Light for the Development of the World*, volume 8011 6D, Puebla, Mexico, August 15 2011. SPIE. doi:10.1117/12.903288.
- [55] R. Diamant y M. Fernández-Guasti. Light propagation in 1d inhomogeneous deterministic media: the effect of discontinuities. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 11(4):045712, 2009. doi:10.1088/1464-4258/11/4/045712.
- [56] R. Diamant. Light propagation through thin films, the amplitude and phase representation. En Ramón Rodríguez-Vera y Rufino Díaz-Urbe, editores, *Proceedings of the 22nd General Congress of the International Commission for Optics (ICO): Light for the Development of the World* <http://dx.doi.org/10.1117/12.902219>, volume 8011 5U, Puebla, Mexico, August 15 2011. SPIE. doi:10.1117/12.902219.
- [57] B. A. Barsky y T. D. DeRose. Geometric continuity of parametric curves: Three equivalent characterizations. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 9(6):60–68, November 1989. doi:10.1109/38.41470.
- [58] R. Diamant y M. Fernández-Guasti. Phase change of light reflected by a discontinuity in the derivatives of the refractive index. *Optics Communications*, 294(0):64 – 72, 2013. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401812014733>, doi:10.1016/j.optcom.2012.12.036.

- [59] R. Diamant y M. Fernández-Guasti. Reflected wave atypical phase change at a boundary. En Ramón Rodríguez-Vera y Rufino Díaz-Urbe, editores, *Proceedings of the 22nd General Congress of the International Commission for Optics (ICO): Light for the Development of the World*, volume 8011 5U, Puebla, Mexico, August 15 2011. SPIE. doi:10.1117/12.901760.
- [60] R. Diamant y M. Fernández-Guasti. Reflection coefficient due to a discontinuity in the  $n$ th order derivative of the refractive index. *Journal of Optics*, 16(1):015707, 2014. <http://stacks.iop.org/2040-8986/16/i=1/a=015707>, doi:10.1088/2040-8978/16/1/015707.
- [61] E. Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 4th edition, 2002. ISBN 9780805385663.
- [62] Z. Knittl. *Optics of Thin Films: An Optical Multilayer Theory*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 1976. ISBN 9780471495314.
- [63] S. H. Russev. New derivation of the reversibility theorem for the optics of stratified media. *J. Mod. Opt.*, 36(8):1139–1142, 1989. doi:10.1080/09500348914551161.
- [64] J. W. S. Rayleigh. On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 86(586):207–226, February 1912. doi:10.1098/rspa.1912.0014.
- [65] A. Kamenshchik, M. Luzzi y G. Venturi. Method of comparison equations and generalized ermakov's equation. *Russian Physics Journal*, 52:1339–1351, 2009. doi:10.1007/s11182-010-9375-4.
- [66] E. T. Copson. *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, 1965. Cambridge Books Online. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511526121>.
- [67] R.B. Dingle. *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Academic Press, 1973. <https://books.google.es/books?id=vhsPAAAAIAAJ>.
- [68] S. C. Malick y S. Arora. *Mathematical Analysis*. New Age International Pvt Ltd Publishers, third edition edition, January 2009.
- [69] Sergei Winitzki. Cosmological particle production and the precision of the wkb approximation. *Phys. Rev. D*, 72:104011, Nov 2005. doi:10.1103/PhysRevD.72.104011.
- [70] W. H. Southwell. Quintic refractive index profile antireflection coatings, April 22 1986. US Patent 4,583,822. <http://www.patentbuddy.com/Patent/4583822>.
- [71] C.M. Bender y S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Springer, 1999. <https://books.google.com.mx/books?id=-yQXwhE6iWMC>.
- [72] H. A. Macleod. *Thin-Film Optical Filters, Fourth Edition*. Series in Optics and Optoelectronics. Taylor & Francis, 2010. ISBN 9781420073034. <http://books.google.com.mx/books?id=7zTtQJl8F2wC>.
- [73] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Wiley Dover Publications, 1981. ISBN 9780486642284. [http://books.google.com.mx/books/about/Light\\_Scattering\\_by\\_Small\\_Particles.html?hl=es&id=PlHfPMVAFrC](http://books.google.com.mx/books/about/Light_Scattering_by_Small_Particles.html?hl=es&id=PlHfPMVAFrC).
- [74] C. F. Bohren y D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley-Interscience, 1983. ISBN 9780471293408. <http://www.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0471293407.html>.

- [75] R. Diamant, A. García-Valenzuela y M. Fernández-Guasti. Reflectivity of a disordered monolayer estimated by graded refractive index and scattering models. *J. Opt. Soc. Am. A*, 29(9):1912–1921, Sep 2012. <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-9-1912>, doi:10.1364/JOSAA.29.001912.
- [76] T. Yamaguchi, H. Takahashi y A. Sudoh. Optical behavior of a metal island film. *J. Opt. Soc. Am.*, 68(8):1039–1044, Aug 1978. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-68-8-1039>, doi:10.1364/JOSA.68.001039.
- [77] R. Lazzari, G. Renaud, C. Revenant, J. Jupille y Y. Borensztein. Adhesion of growing nanoparticles at a glance: Surface differential reflectivity spectroscopy and grazing incidence small angle x-ray scattering. *Phys. Rev. B*, 79:125428, Mar 2009. doi:10.1103/PhysRevB.79.125428.
- [78] R. G. Barrera, M. del Castillo-Mussot, G. Monsivais, P. Villaseor y W. L. Mochán. Optical properties of two-dimensional disordered systems on a substrate. *Phys. Rev. B*, 43:13819–13826, Jun 1991. doi:10.1103/PhysRevB.43.13819.
- [79] T. Wenzel, J. Bosbach, F. Stietz y F. Träger. In situ determination of the shape of supported silver clusters during growth. *Surface Science*, 432(3):257 – 264, 1999. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0039602899005464>, doi:10.1016/S0039-6028(99)00546-4.
- [80] T. Okamoto, I. Yamaguchi y T. Kobayashi. Local plasmon sensor with gold colloid monolayers deposited upon glass substrates. *Opt. Lett.*, 25(6):372–374, Mar 2000. <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-25-6-372>, doi:10.1364/OL.25.000372.
- [81] J. Toudert, D. Babonneau, L. Simonot, S. Camelio y T. Girardeau. Quantitative modelling of the surface plasmon resonances of metal nanoclusters sandwiched between dielectric layers: the influence of nanocluster size, shape and organization. *Nanotechnology*, 19(12):125709, 2008. <http://stacks.iop.org/0957-4484/19/i=12/a=125709>, doi:10.1088/0957-4484/19/12/125709.
- [82] R. Serna, J. C. G. de Sande, J. M. Ballesteros y C. N. Afonso. Spectroscopic ellipsometry of composite thin films with embedded bi nanocrystals. *Journal of Applied Physics*, 84(8):4509–4516, 1998. <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/84/8/10.1063/1.368676>, doi:10.1063/1.368676.
- [83] A. García-Valenzuela, E. Gutiérrez-Reyes y R. G. Barrera. Multiple-scattering model for the coherent reflection and transmission of light from a disordered monolayer of particles. *J. Opt. Soc. Am. A*, 29(6):1161–1179, Jun 2012. <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-6-1161>, doi:10.1364/JOSAA.29.001161.
- [84] M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier y L. D. Travis, editores. *Light scattering by nonspherical particles theory, measurements, and applications*. San Diego: Academic Press, Sep 1999. ISBN 9780124986602. [http://books.google.com.mx/books/about/Light\\_Scattering\\_by\\_Nonspherical\\_Particl.html?id=qT3DwjHXA9cC&redir\\_esc=y](http://books.google.com.mx/books/about/Light_Scattering_by_Nonspherical_Particl.html?id=qT3DwjHXA9cC&redir_esc=y).
- [85] V. A. Loiko, V. P. Dick y V. I. Molochko. Monolayers of discrete scatterers: comparison of the single-scattering and quasi-crystalline approximations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(9):2351–2354, Sep 1998. <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-15-9-2351>, doi:10.1364/JOSAA.15.002351.
- [86] M. C. Peña-Gomar, F. Castillo, A. García-Valenzuela, R. G. Barrera y E. Pérez. Coherent optical reflectance from a monolayer of large particles adsorbed on a glass surface. *Appl. Opt.*, 45(4):626–632, Feb 2006. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-45-4-626>, doi:10.1364/AO.45.000626.

- [87] G. B. Airy. On the phenomena of newton's rings when formed between two transparent substances of different refractive powers. *Philosophical Magazine*, 2:20–30, 1833.
- [88] R. Diamant y M. Fernández-Guasti. Novel method to compute high reflectivity of multilayered mirrors with rugate features. In *Optical Interference Coatings*, page TC.2. Optical Society of America, 2013. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=OIC-2013-TC.2>, doi:10.1364/OIC.2013.TC.2.
- [89] M. Fernández-Guasti y R. Diamant. Enhanced reflection from derivative discontinuities in the refractive index of a triangular stack profile. In *Optical Interference Coatings*, page TC.3. Optical Society of America, 2013. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=OIC-2013-TC.3>, doi:10.1364/OIC.2013.TC.3.
- [90] M. Fernández-Guasti y R. Diamant. Photonic crystal with triangular stack profile. *Optics Communications*, 346(0):133 – 140, 2015. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401815001285>, doi:10.1016/j.optcom.2015.02.029.
- [91] W. H. Southwell. Flip-flop coating synthesis revisited. *Appl. Opt.*, 53(4):A179–A185, Feb 2014. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-53-4-A179>, doi:10.1364/AO.53.00A179.
- [92] M. K. Trubetskov, T. Amotchkina y A. V. Tikhonravov. Design of multilayer optical coatings with high stability to refractive index variations. In *Optical Interference Coatings*, page TD.3. Optical Society of America, 2013. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=OIC-2013-TD.3>, doi:10.1364/OIC.2013.TD.3.
- [93] S. Setzu, P. Ferrand y R. Romestain. Optical properties of multilayered porous silicon. *Materials Science and Engineering: B*, 69-70(0):34 – 42, 2000. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921510799002615>, doi:10.1016/S0921-5107(99)00261-5.
- [94] N. Xiang, F. Lin, H.P. Li, H.F. Liu, W. Liu, W. Ji y S.J. Chua. Gan-based semiconductor saturable absorber mirror operating around 415 nm. *Thin Solid Films*, 515(10):4484 – 4487, 2007. The Third International Conference on Materials for Advanced Technologies (ICMAT 2005); Symposium J - {III} - V Semiconductors for Microelectronic and Optoelectronic Applications {ICMAT} 2005 - Symposium J. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004060900600959X>, doi:10.1016/j.tsf.2006.07.138.
- [95] S. Hofmann y A. Zalar. Auger electron spectroscopy depth profiling of ni/cr multilayers by sputtering with  $n_2^+$  ions. *Thin Solid Films*, 60(2):201 – 211, 1979. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0040609079901901>, doi:10.1016/0040-6090(79)90190-1.
- [96] R. Escobar Galindo, E. Fornies y J. M. Albella. Interfacial effects during the analysis of multilayer metal coatings by radio-frequency glow discharge optical emission spectroscopy part 1. crater shape and sputtering rate effects. *J. Anal. At. Spectrom.*, 20:1108–1115, 2005. doi:10.1039/B502771C.
- [97] Jean Desforges, Corentin Cheminot, Nicolas Laville y Georges Bader. Rugate filters fabricated from dense and porous magnetron sputtered  $wo_3$  films. *Appl. Opt.*, 53(4):A110–A113, Feb 2014. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-53-4-A110>, doi:10.1364/AO.53.00A110.
- [98] M. Jupé, M. Lappschies, L. Jensen, K. Starke y D. Ristau. Laser-induced damage in gradual index layers and rugate filters. In *Proc. SPIE 6403, Laser-Induced Damage in Optical Materials*, volume 6403, pages 640311–640311–13, 2006. doi:10.1117/12.696130.

- [99] W. H. Southwell. Using apodization functions to reduce sidelobes in rugate filters. *Appl. Opt.*, 28(23):5091–5094, Dec 1989. <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-28-23-5091>, doi:10.1364/AO.28.005091.
- [100] J. J. Hopfield y D. G. Thomas. Theoretical and experimental effects of spatial dispersion on optical properties of crystals. *Physical Review*, 132(2):563 – 572, 1963. doi:10.1103/PhysRev.132.563.
- [101] L.V. Keldysh, A.A. Maradudin y D.A. Kirzhnits. *The Dielectric Function of Condensed Systems*. Modern Problems in Condensed Matter Sciences. Elsevier Science, 2012. <https://books.google.com.mx/books?id=b6qCF8s1pMMC>.