

**“DINAMICA CUALITATIVA DE ALGUNOS PROBLEMAS
DE 3 Y 4 CUERPOS CARGADOS”**

TESIS QUE PRESENTA

FELIPE ALFARO AGUILAR

**PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS**

ASESOR: DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA

ABRIL 1997

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA**

**“DINAMICA CUALITATIVA
DE ALGUNOS PROBLEMAS
DE 3 Y 4 CUERPOS CARGADOS”**

POR

FELIPE ALFARO AGUILAR

TESIS DE MAESTRIA

Agradecimientos

Deseo mostrar mi agradecimiento al Dr. Ernesto Pérez Chavela, por su decisiva labor como director de esta tesis, por su ayuda y apoyo en mi formación profesional.

También desco agradecer a CONACYT por el apoyo económico que me brindó, re-dituando en un desempeño más eficiente en la realización de este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer al Dr. Ernesto Lacomba, al M. en C. José Luis Jiménez, y al Dr Manuel Falconi, por sus comentarios realizados a esta tesis y que han resultado de gran valía.

**A mis padres Victoria y Guillermo,
y a mi compañera Luz Vianey.**

Indice

Introducción

1	Aspectos generales de la Mecánica Celeste	1
1.1	El problema de los n -cuerpos	2
1.2	Singularidades y Colisiones Totales	7
1.3	El problema de 2 cuerpos	10
2	Configuraciones Centrales en el problema de los n-cuerpos	16
2.1	Configuraciones Centrales	18
2.2	Teoremas sobre existencia de Configuraciones Centrales	21
2.3	Otros resultados importantes sobre Configuraciones Centrales	25
3	Configuraciones Centrales en el problema cargado de 3 cuerpos	32
3.1	El problema cargado de los n -cuerpos (pcnc)	33
3.2	Configuraciones Centrales en el pcnc	33
3.3	Conteo de Configuraciones Centrales en el pc3c	34
3.4	Configuraciones Centrales no colineales	36
3.5	Configuraciones Centrales colineales (CCC)	38
3.5.1	CCC donde ningún λ_i se anula	40
3.5.2	Conteo de CCC donde al menos un λ_i se anula	45
3.6	Número total de Configuraciones Centrales	49
3.7	Conclusiones	50
4	El problema romboidal cargado de 4 cuerpos	52
4.1	Ecuaciones de movimiento	53
4.2	Coordenadas de McGehee	56
4.3	Gráficas de $U(\theta)$	58

4.4	Puntos de equilibrio	60
4.5	Regularización de colisiones dobles	62
4.6	Variedad del infinito para $h = 0$	67
4.7	Flujo global en E_0	69
	Apéndice La función $U(\theta)$	73
5	El problema colineal cargado de 3 cuerpos	79
5.1	Análisis de la ordenación 1-2-3	80
5.2	Diferentes ordenaciones	85
5.3	Conclusiones	87

Conclusiones Globales

Bibliografía

Introducción

La Mecánica Celeste es una rama de las Matemáticas que se ocupa del Problema de los n -cuerpos y de todos los aspectos que de esto se derivan. Lo anterior se aplica para estudiar el movimiento de los planetas, cometas, asteroides y satélites naturales y artificiales entre otros. Estos cuerpos celestes se mueven en el espacio por acción de las fuerzas gravitacionales, obedeciendo la ley inversa del cuadrado de Isaac Newton. De esta manera, el movimiento de un cuerpo celeste está determinado por la atracción gravitacional que sobre él ejercen todos los demás cuerpos. En el caso más sencillo $n = 2$, es decir, el problema de 2 cuerpos, se deduce que los planetas siguen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.

Para $n \geq 3$ el problema de los n -cuerpos es un problema abierto, en el sentido que no se conocen las soluciones explícitas, por esta razón los problemas de 3 ó 4 cuerpos se han estudiado mediante casos particulares, un ejemplo interesante es el problema restringido de 3 cuerpos, por medio del cual se puede estudiar el movimiento de ciertos asteroides bajo la influencia del Sol y Júpiter que es el planeta con mayor masa y que está más cerca de los asteroides.

En el problema general de n -cuerpos sólo se conocen soluciones particulares que se obtienen de ciertas posiciones de las partículas llamadas **Configuraciones Centrales**, donde el vector de aceleración es un múltiplo escalar del vector de posición. Otra característica importante es que las colisiones totales y los escapes al infinito del sistema de partículas se dan asintóticamente por Configuraciones Centrales [7]. Esto hace de las Configuraciones Centrales, un tópico muy interesante en Mecánica Celeste.

Recientemente se ha empezado a analizar una generalización del problema de n -cuerpos donde intervienen fuerzas gravitacionales y electrostáticas, las cuales tienen la característica común de obedecer la ley inversa del cuadrado. En estos problemas cargados la presencia de más parámetros hace más complicado el estudio de los sistemas de ecuaciones. Lo anterior está motivado por la inquietud de conocer los cambios que surgen en los problemas newtonianos, cuando consideramos que las partículas tienen

Un caso físicamente interesante es el problema del átomo con n -electrones [5], cuyas ecuaciones Hamiltonianas

$$\ddot{q}_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{(q_i - q_j)}{|q_i - q_j|^3} - \frac{n\lambda q_i}{|q_i|^3} \quad (q_i \in \mathbb{R}^3, \lambda > 0),$$

describen el movimiento de n electrones cargados negativamente. Los electrones se mueven bajo su mutua repulsión, y la atracción de un núcleo infinitamente masivo y cargado positivamente, con carga $n\lambda$.

Con el estudio de los problemas cargados, pretendemos entender en un contexto más amplio las Configuraciones Centrales, y la dinámica que se produce para diferentes valores de los parámetros. Así, cuando las masas predominan sobre las cargas, las fuerzas entre partículas son de atracción y tendremos un problema newtoniano; si en cambio las cargas predominan sobre las masas, entonces puede suceder que todas las fuerzas entre partículas sean de repulsión y entonces tendremos un problema coulombiano. Entonces los problemas newtonianos y coulombianos son situaciones extremas, y ambos son casos particulares de los problemas cargados.

Existe muy pocas referencias sobre problemas cargados, de hecho sólo se conoce el problema isósceles cargado de 3 cuerpos [1] y [2] estudiado por Atela P. en 1988, y un caso particular del problema romboidal cargado de 4 cuerpos [4], estudiado por Casasayas J. en 1988. Nosotros pretendemos estudiar *la dinámica cualitativa de algunos problemas cargados de 3 y 4 cuerpos*, más específicamente, el problema romboidal cargado de 4 cuerpos y el problema colineal cargado de 3 cuerpos (ambos, el romboidal y el colineal han sido estudiados en el caso newtoniano, ver [11] y [13]). Este es un trabajo original, en el sentido de que estos problemas cargados no han sido estudiados con la generalidad que pretendemos hacer.

Las Configuraciones Centrales (CC) juegan un papel importante en el estudio de los problemas cargados, dada la relación intrínseca que tienen con las colisiones totales y los escapes al infinito. Por lo cual, analizaremos el artículo *Central Configuration in the charged three body problem* de Pérez E. [17], con el objetivo de entender la manera como se extienden los resultados conocidos sobre CC en el problema newtoniano de 3 cuerpos (existen 5 CC, dos son no colineales con forma de triángulo equilátero, y las otras tres son colineales, una por cada ordenación de partículas).

En los últimos dos capítulos analizamos problemas restringidos de 3 y 4 cuerpos cargados, cuyas ecuaciones de movimiento son sistemas Hamiltonianos con dos grados

de libertad y se estudian de una manera muy similar. El Hamiltoniano ocasiona una “foliación” del espacio fase en conjuntos invariantes llamados *niveles de energía*, donde mantiene un valor constante h . Lo anterior permite reducir el estudio de la dinámica a cada uno de estos niveles de energía.

En el capítulo 1, hacemos un análisis de los aspectos básicos del problema de los n cuerpos, primeramente se deducen las ecuaciones de movimiento y sus 10 integrales clásicas de movimiento, así como algunos resultados sobre colisiones totales. Al final se analiza el problema de dos cuerpos, haciendo una descripción cualitativa de todas las soluciones.

En el capítulo 2, se hace un análisis de las Configuraciones Centrales en el problema de n -cuerpos, y se muestran los principales resultados: el Teorema de Moulton, el Teorema de 45° , y el Teorema del Bisector. Como aplicación de estos resultados se obtienen las 5 Configuraciones Centrales que existen para el caso $n = 3$.

En el capítulo 3 observaremos lo que sucede con las Configuraciones Centrales para el caso $n = 3$ cuando se considera que las partículas tienen masas y cargas, las cuales producen combinaciones muy variadas de fuerzas atractivas y repulsivas. Para esto analizamos el artículo *Central Configuration in the charged three body problem* [17] que muestra algunas diferencias muy interesantes respecto del problema newtoniano, pues varía tanto el número como la forma de las Configuraciones Centrales.

El estudio de una dinámica cualitativa, lo iniciamos con el capítulo 4 con el problema romboidal cargado de 4 cuerpos, el cual es una generalización del problema romboidal de 4 cuerpos [11]. Las ecuaciones de movimiento forman una familia de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, y 3 parámetros. Aquí estudiamos el flujo global de este problema para el caso $h = 0$.

Finalmente, en el capítulo 5 nos basamos en los resultados del capítulo 3 y usamos técnicas como las utilizadas en el capítulo 4, para describir el flujo global del problema colineal cargado de 3 cuerpos, también para el caso $h = 0$.

Capítulo 1

Aspectos generales de la Mecánica Celeste

El problema de los n -cuerpos consiste en la descripción de la dinámica de un sistema de n masas puntuales, que se mueven por acción de la fuerza gravitacional. La mecánica celeste es la rama de las matemáticas que estudia este problema, y todos los aspectos que de esto se deducen.

El problema de los n -cuerpos, primeramente formulado por Isaac Newton en el siglo XVII, ha sido motivado por grandes matemáticos y astrónomos en los últimos tres siglos. La complejidad de movimientos aumenta rápidamente con el número de masas, de tal manera que sólo en el caso $n = 2$, se tienen soluciones explícitas de este problema.

Únicamente el problema de dos cuerpos está completamente resuelto, por esta razón es un problema importante en mecánica celeste, y además porque describe con bastante aproximación una gran cantidad de movimientos de cuerpos celestes alrededor de otros.

En este capítulo describiremos algunos aspectos generales que se conocen del problema de los n -cuerpos, y mostraremos la solución general del problema de dos cuerpos.

1.1 El problema de los n -cuerpos

El problema de n -cuerpos dice: **dadas las posiciones y velocidades de n masas puntuales en un momento dado, calcular sus posiciones y velocidades en cualquier otro momento.**

La formulación matemática es desarrollada a continuación.

Sean n partículas con posiciones $\mathbf{r}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T \in \mathbb{R}^3$, y masas $m_i \in \mathbb{R}^+$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Por la Segunda Ley de Newton, el movimiento de cada partícula está descrito por

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la partícula i . Considerando la Ley de Gravitación Universal, y sumando todas las fuerzas que influyen sobre m_i , se obtiene que

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3},$$

donde G es una constante que depende de las unidades de masa, longitud y tiempo. Escogiendo adecuadamente estas unidades se puede hacer $G = 1$. Entonces las ecuaciones del problema de n -cuerpos están dadas por:

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n.} \quad (1)$$

Sea $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)^T \in \mathbb{R}^{3n}$ un vector de posición que llamaremos configuración del sistema de partículas, y sea X el espacio de configuraciones:

$$X = \{ (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)^T \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j, \quad \forall i \neq j \}.$$

Si $-U$ denota a la energía potencial del sistema de partículas, entonces U que llamaremos función potencial, esta dada por

$$U : X \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad U(\mathbf{r}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}.$$

El campo vectorial (1) resulta ser el gradiente de la función potencial, con lo cual el sistema de ecuaciones (1) se puede expresar en las siguientes dos formas:

$$\boxed{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, n,} \quad (2)$$

$$\boxed{M \ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}),} \quad (3)$$

donde

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^T, \quad \nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_n)^T, \quad \text{y} \quad M = \text{diag} (m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n).$$

Sean $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ y $\mathbf{p} = M \dot{\mathbf{r}}$, llamados *momento lineal de la partícula i* y *momento lineal del sistema de partículas*, respectivamente. Entonces el problema de n -cuerpos se escribe como un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= M^{-1} \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \nabla U(\mathbf{r}). \end{aligned}} \quad (4)$$

El dominio de definición de este sistema, es el espacio fase:

$$TX = \{ (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{6n} : \quad \mathbf{r} \in X, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n} \}.$$

Ahora definimos algunos términos que se usarán más adelante.

- a) Una Orbita o trayectoria en TX , es una solución $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ del sistema de ecuaciones (4), definida en su intervalo maximal.
- b) Un conjunto K es invariante si para toda condición inicial $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \in K$, la solución por este punto está enteramente contenida en K .

1.1 Observación.

Es inmediato que m_i puede cancelarse de las ecuaciones (1), implicando que el movimiento de la partícula i , es el mismo sin importar cual sea el valor de su masa. Esto concuerda con el experimento de Galileo Galilei:

2 cuerpos que se sueltan a la misma altura, caen con la misma velocidad, independientemente de que sus masas sean iguales o diferentes.

Integrales primeras del problema de n -cuerpos

Una integral primera del sistema de ecuaciones (4), es una función $I : TX \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $I(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ permanece constante a lo largo de cada órbita del espacio fase TX , pero no es constante en ningún conjunto abierto de TX . De esta manera, dada I una integral primera y $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto

$$\{(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in TX : I(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = c\}$$

es invariante. Si c es un valor regular, entonces por el teorema de la función implícita, el conjunto invariante tiene codimensión 1 en el espacio fase. A continuación describimos las 10 integrales primeras que se conocen para el problema de los n -cuerpos.

a) Integrales del momento lineal

Para una solución cualquiera $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ del sistema (4), tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \nabla_i U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = 0,$$

en la última sumatoria los términos se anulan por parejas. Entonces

$\frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_i(t) = 0$, implicando que $\sum \mathbf{p}_i(t)$ es constante sobre toda solución,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ constante.} \quad (5)$$

Recordaremos esta propiedad, diciendo que *la solución tiene momento lineal \mathbf{a}* . De aquí obtenemos 3 integrales primeras, conocidas como *integrales del momento lineal*:

$$\boxed{I_{ml}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i.} \quad (6)$$

b) Integrales del centro de masa

La relación (5) implica que $\frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{a}$, en todos los puntos de la solución $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ constantes.} \quad (7)$$

Es decir, $\mathbf{c}_m = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$ el centro de masa del sistema de partículas, tiene movimiento rectilíneo uniforme. Entonces dada una solución $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ con momento lineal \mathbf{a} , obtenemos la siguiente solución con momento lineal cero y centro de masa fijo en el origen,

$$\bar{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{c}_m(t), \quad \bar{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i(t) - \frac{m_i}{\sum m_j} \mathbf{a}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos estudiar estas soluciones, para las cuales la siguiente función vectorial representa 3 nuevas integrales primeras, conocidas como *integrales del centro de masa*:

$$I_{cm}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (8)$$

c) Integrales del momento angular

Para una solución cualquiera $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = 0,$$

donde los términos de la última sumatoria se anulan por parejas, y el símbolo \times indica el producto cruz de 2 vectores. Entonces $\frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = 0$, implicando que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ constante.} \quad (9)$$

En este caso decimos que *la solución tiene momento angular \mathbf{c}* . De la relación anterior, obtenemos otras 3 integrales primeras conocidas como *integrales del momento angular*:

$$I_{ma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (10)$$

d) Integral de la energía

Definimos la *energía cinética* del sistema de partículas como:

$$T : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^{-1} |\mathbf{p}_i|^2.$$

Sobre una solución cualquiera $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$, se cumple que

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \sum_{i=1}^n m_i^{-1} \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}, \\ \dot{U} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = \nabla U \cdot \dot{\mathbf{r}} = M \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \end{aligned}$$

entonces $\frac{d}{dt}(T - U) = 0$. Implicando que $T - U$ es constante sobre toda la solución,

$$T(\mathbf{p}(t)) - U(\mathbf{r}(t)) = h, \quad h \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

y decimos que *la solución tiene energía h* . Esta relación nos dá otra integral primera llamada *integral de energía*:

$$\boxed{H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) - U(\mathbf{r})}. \quad (12)$$

Cualquier integral primera da lugar a conjuntos invariantes en el espacio fase TX . De manera que si fijamos el centro de masa en el origen, y consideramos constantes el momento angular c y la energía h , obtenemos en el espacio fase un conjunto invariante $S_{(c,h)}$, cuya dimensión es $6n - 10$ excepto en algunas situaciones particulares donde las integrales no son independientes (como \mathbf{r} y \mathbf{p} paralelos que implican $c = 0$), ver [15],

$$S_{(c,h)} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in TX : I_{ml} = 0, \quad I_{cm} = 0, \quad I_{ma} = c, \quad H = h\}.$$

En el intento por dar una solución explícita del problema de n -cuerpos, el siglo pasado se hicieron muchos esfuerzos para encontrar nuevas integrales independientes, hasta que H. Bruns en 1887 demostró que aparte de las 10 integrales clásicas, no existen más integrales que dependan algebraicamente de la posición y la velocidad [3].

1.2 Singularidades y Colisiones Totales

Sea $\mathbf{r}(t)$ una solución del problema de los n -cuerpos, y sea $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ el intervalo máximo de definición de $\mathbf{r}(t)$. Existen dos posibilidades:

- La solución está definida sobre todos los reales, entonces $I = \mathbb{R}$. En este caso se dice que la solución es regular.
- Algún extremo de I es finito, es decir, supongamos que $\beta < \infty$. Cuando esto sucede, decimos que la solución tiene una singularidad en β .

Para entender lo que sucede físicamente con las soluciones, cuando estas se acercan a una singularidad, consideremos el siguiente resultado de Paul Painlevé de 1895 [16]:

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ con $|t_0| < \infty$. Entonces la solución tiene una singularidad en t_0 si y sólo si, la menor de las distancias entre las n partículas, a lo largo de esta solución tiende a cero, cuando $t \rightarrow t_0$.

Entonces las singularidades ocurren por colisión de dos o más partículas, o por movimientos muy complicados sin colisión. El primer ejemplo demostrado, fue obtenido recientemente por Jeff Xia en 1988 en un problema de 5 cuerpos [21], donde ocurren escapes al infinito en tiempo finito. Este tipo de singularidades sólo ocurren para $n \geq 4$, pues para $n = 3$, Painlevé demostró hace más de un siglo que las singularidades sólo ocurren por colisión [16].

Colisiones Totales

Un tipo particular de singularidades son las colisiones totales, esto es, cuando todas las partículas están en una misma posición a un cierto tiempo. Definimos el *momento de inercia* del sistema de partículas como

$$I : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i|^2, \quad (13)$$

que mide el tamaño del sistema. Consideremos el momento de inercia sobre una solución del problema de n -cuerpos. Derivando I dos veces respecto del tiempo t , usando (2) y la energía cinética, obtenemos

$$\ddot{I} = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i U + \sum_{i=1}^n m_i^{-1} \|\mathbf{p}_i\|^2 = \mathbf{r}^T \nabla U + 2T = -U + 2T.$$

En la última igualdad se considera que U es homogénea de grado -1 , y se aplica el Teorema de Euler:

Dada $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ homogénea de grado k , entonces $\mathbf{r}^T \nabla f(\mathbf{r}) = kf(\mathbf{r})$.

La relación obtenida se conoce como la *identidad de Lagrange-Jacobi*, la cual por la integral de energía $T - U = h$, puede expresarse en cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{cases} \ddot{I} = 2T - U, \\ \ddot{I} = U + 2h, \\ \ddot{I} = T + h. \end{cases} \quad (14)$$

Como una aplicación de la identidad de L-J tenemos el siguiente resultado:

1.2 Proposición.

El problema de n -cuerpos no tiene puntos de equilibrio.

DEMOSTRACION.

Supongamos lo contrario, que el sistema (4) tiene un punto de equilibrio, es decir, existe una solución $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ que se mantiene constante, para toda t donde la solución esté definida. Entonces $\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv 0$, $\mathbf{p}(t) \equiv 0$, (por $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{r}}$), y $T \equiv 0$ (por $T = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p}$). Por la identidad de L-J, se sigue $\ddot{I} = -U < 0$, lo cual implica que \dot{I} es decreciente. Esto contradice la igualdad $\dot{I} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 0$. ■

A continuación presentamos una caracterización de las colisiones totales, para soluciones del problema de n -cuerpos con centro de masa fijo en el origen, es decir, cuando $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$.

1.3 Proposición.

En el problema de n -cuerpos hay colisión total, si y sólo si $I \rightarrow 0$.

DEMOSTRACION. La conclusión es inmediata, después de probar que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 = 2IM_T,$$

donde M_T es la masa total ($M_T = \sum m_i$). Debido a que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j (\|\mathbf{r}_j\|^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i 2I + m_i \|\mathbf{r}_i\|^2 M_T - 2m_i \mathbf{r}_i \cdot \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j \right] = \frac{1}{2} [M_T 2I + 2IM_T - 0] = 2IM_T. \end{aligned}$$

En la tercera igualdad se aplicó la condición de centro de masa en el origen. ■

1.4 Proposición.

La colisión total debe ocurrir en tiempo finito.

DEMOSTRACION. La demostración es un argumento de convexidad. Supongamos que la colisión total ocurre en un tiempo infinito, entonces todas las distancias entre partículas tienden a cero. Esto implica que $U \rightarrow \infty$, y por la identidad de L-J $\ddot{I} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces existe t_0 finito, tal que $\ddot{I} \geq 1$ para $t \geq t_0$. Integrando dos veces, obtenemos que

$$I \geq \frac{t^2}{2} + at + b \quad \forall t \geq t_0.$$

De aquí se sigue que $I \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual implicaría que no hay colisión total. ■

1.5 Teorema (Sundman).

Colisión total implica momento angular $c = 0$.

DEMOSTRACION. Consideremos una solución con intervalo máximo de definición (a, t_c) , donde t_c es el tiempo de colisión. Por la proposición anterior, t_c es finito. Entonces $I \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_c$, esto hace que $U \rightarrow \infty$ e $\ddot{I} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_c$. Por lo tanto, existe un intervalo (s, t_c) en el cual $\ddot{I} > 0$.

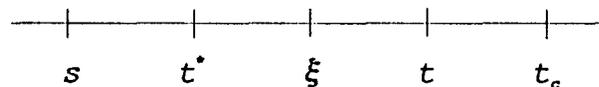


FIGURA 1.1 Ordenación de tiempos.

Ahora se quiere obtener el signo de \dot{I} en (s, t_c) . Sea $t^* \in (s, t_c)$ arbitrario; queremos desarrollar $I(t)$ para $t \in (t^*, t_c)$ por la fórmula de Taylor, alrededor de t^* :

$$I(t) = I(t^*) + \dot{I}(t^*)(t - t^*) + \frac{1}{2}\ddot{I}(\xi)(t - t^*)^2,$$

donde $\xi \in (t^*, t)$. Se sabe que $I(t^*) > 0$ y que $\ddot{I}(\xi) > 0$. Haciendo que $t \rightarrow t_c$ en la fórmula anterior, obtenemos $\dot{I}(t^*) < 0$. Como $t^* \in (s, t_c)$ es arbitrario, entonces tenemos que $\dot{I}(t) < 0$ en todo el intervalo (s, t_c) .

Probemos ahora que $\|\mathbf{c}\|^2 \leq 4I(\ddot{I} - h)$ (desigualdad de Sundman).

$$c = \|\mathbf{c}\| = \left\| \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right\| \leq \sum m_i \|\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\| \leq \sum m_i \|\mathbf{r}_i\| \|\dot{\mathbf{r}}_i\|,$$

entonces

$$c \leq \sum (\sqrt{m_i} \|\mathbf{r}_i\|) (\sqrt{m_i} \|\dot{\mathbf{r}}_i\|).$$

Si ahora consideramos la desigualdad de Cauchy $[\sum a_i b_i]^2 \leq [\sum a_i^2][\sum b_i^2]$, se sigue que

$$c^2 \leq (\sum m_i \|\mathbf{r}_i\|^2) (\sum m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2) = 2I2T,$$

y por la identidad de L-J, obtenemos $c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h)$. Después multiplicamos por $-\dot{I}I^{-1}$, que es positivo en el intervalo (s, t_c) , encontrando

$$0 < -c^2 \dot{I}I^{-1} \leq 4h\dot{I} - 4I\ddot{I} \quad \text{en} \quad (s, t_c).$$

Integrando en el intervalo (s, t) con $t \in (s, t_c)$, obtenemos $c^2 \ln \frac{1}{I} \leq 4hI - 2\dot{I}^2 + a$, donde a es cte. de integración. Entonces $c^2 \ln \frac{1}{I} \leq 4hI + a$, y despejando c^2 tenemos que $c^2 \leq \frac{4hI + a}{\ln \frac{1}{I}}$. Cuando la solución tiende a colisión total, $I \rightarrow 0$, y el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero. Como c es constante, entonces $c = 0$. ■

1.3 El problema de 2 cuerpos

El único caso que se puede resolver completamente del problema de n - cuerpos, es cuando $n = 2$. Es el problema más sencillo en mecánica celeste, y por lo mismo, es un problema muy utilizado.

Introduciendo $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y considerando el centro de masa en el origen, obtenemos

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{s}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{s}. \quad (15)$$

Si aplicamos estas relaciones en el problema de 2-cuerpos y sus respectivas integrales primeras, obtenemos un problema de fuerza central:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{s}} = -(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},} \quad (16)$$

con integrales del momento angular y de energía:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c}, \quad \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} |\dot{\mathbf{s}}|^2 - \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{s}|} = h.$$

Resolviendo el sistema anterior y considerando las relaciones (15), queda resuelto el problema de 2-cuerpos. Empezemos por simplificar las integrales primeras:

$$\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{c}_1, \quad (17)$$

$$\frac{|\dot{\mathbf{s}}|^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{s}|} = h_1, \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{c}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{c}, \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} h. \quad (19)$$

Caracterización de la solución $\mathbf{s}(t)$, mediante el momento angular \mathbf{c}

De las propiedades del producto cruz, podemos hacer algunas observaciones sobre el momento angular:

- si $\mathbf{c} = 0$, entonces por (19) y (17), los vectores \mathbf{s} y $\dot{\mathbf{s}}$ son paralelos. Implicando que la solución $\mathbf{s}(t)$ tiene lugar en una recta fija que pasa por el origen. Y por las ecuaciones (15), el movimiento de los 2 cuerpos, se dá sobre una recta que pasa por el origen
- Si $\mathbf{c} \neq 0$, entonces por (19) y (17), los vectores \mathbf{s} y $\dot{\mathbf{s}}$ están sobre un plano P ortogonal a \mathbf{c} , que pasa por el origen. Implicando que la solución $\mathbf{s}(t)$ se encuentra siempre en P . Entonces por las ecuaciones (15), el movimiento de los 2 cuerpos tiene lugar en el plano P .

Soluciones con momento angular diferente de cero $c \neq 0$

Sea $s(t)$ una solución de (16) con momento angular $c \neq 0$. Por el Teorema 1.5 (de Sundman), se sabe que estas soluciones no tienen singularidades por colisión.

A continuación probaremos que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} - \frac{\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}_1}{m_1 + m_2} \right) = 0$, a lo largo de cada solución $s(t)$. Derivamos cada término por separado,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \right) = \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{2}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}})\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} = \frac{(\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}) \times \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} = \frac{\mathbf{c}_1 \times \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3},$$

donde en la segunda y tercera igualdad, se aplicaron la fórmula del triple producto cruz y la integral del momento angular (17), respectivamente. Y usando (16), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}_1}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{c}_1 \times \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3}.$$

Por lo tanto, la expresión

$$\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} - \frac{\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}_1}{m_1 + m_2},$$

es una integral primera, pues permanece constante a lo largo de cada solución $s(t)$. Hemos mencionado anteriormente que todas las integrales primeras generan conjuntos invariantes cuando se igualan a una constante. Consecuentemente, las soluciones contenidas en el nivel $-e$, tienen la siguiente identidad

$$\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} + \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{c}_1}{m_1 + m_2}. \quad (20)$$

El miembro derecho de esta ecuación se integra, multiplicando escalarmente por \mathbf{s} . Después se aplica la fórmula $a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = (a_1 \times a_2) \cdot a_3$, y finalmente por la integral de momento angular (17), se obtiene

$$\boxed{s = \frac{(m_1 + m_2)^{-1} c_1^2}{1 + e \cos \theta}}, \quad (21)$$

donde $\theta = \text{ang} \{ \mathbf{s}, \mathbf{e} \}$, $s = |\mathbf{s}|$, $e = |\mathbf{e}|$, y $c_1 = |\mathbf{c}_1|$. De la geometría analítica, se deduce que esta función representa la órbita de una cónica no degenerada, con el origen

en uno de los focos. Como \mathbf{e} es un vector constante en \mathbb{R}^2 , lo podemos rotar al eje x positivo y así la pareja (s, θ) son las coordenadas polares. Entonces la constante e , es la *excentricidad* de la cónica, y su valor determina el tipo de trayectoria que genera la solución $s(t)$. Con esto queda demostrado lo siguiente:

1.6 Proposición.

Las soluciones $s(t)$ con momento angular diferente de cero, son planares y tienen forma cónica con el origen en uno de los focos. Son circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas, dependiendo de que $e = 0$, $0 < e < 1$, $e = 1$ y $e > 1$ respectivamente.

Haciendo algunos manejos algebraicos con las integrales de energía, de momento angular y la nueva integral (20), encontramos una relación entre las constantes escalares h_1 , c_1 , e ,

$$e^2 = \frac{2c_1^2 h_1}{(m_1 + m_2)^2} + 1. \quad (22)$$

Entonces es clara la siguiente caracterización de las figuras cónicas,

$$h_1 > 0 \quad \iff \quad e > 1 \quad \iff \quad s(t) \text{ es una hipérbola.}$$

$$h_1 = 0 \quad \iff \quad e = 1 \quad \iff \quad s(t) \text{ es una parábola.}$$

$$\frac{-(m_1 + m_2)^2}{2c_1^2} < h_1 < 0 \quad \iff \quad 0 < e < 1 \quad \iff \quad s(t) \text{ es una elipse.}$$

$$h_1 = \frac{-(m_1 + m_2)^2}{2c_1^2} \quad \iff \quad e = 0 \quad \iff \quad s(t) \text{ es una circunferencia.}$$

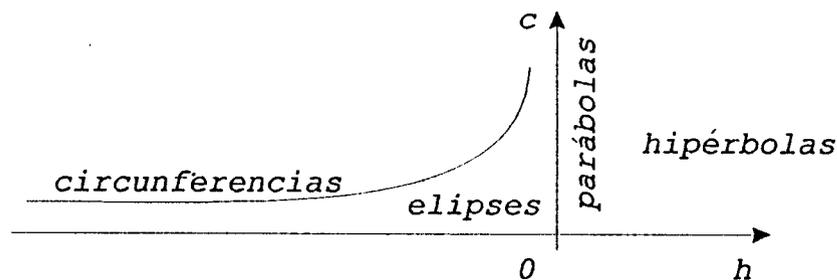


FIGURA 1.2 Tipos de soluciones $s(t)$ en el espacio energía-momento.

Soluciones con momento angular cero $c = 0$

Como habíamos mencionado, una solución $\mathbf{s}(t)$ con momento angular cero, se mantiene siempre sobre una línea recta que pasa por el origen. Entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{s}(t)$ no es un vector, sino un escalar que denotaremos por $s(t)$.

Definiendo $p = \dot{s}$ podemos escribir las ecuaciones de movimiento (16), como un sistema de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{s} = p, \\ \dot{p} = -\frac{(m_1 + m_2)}{s^2}, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

con relación de energía

$$\frac{p^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{s} = h_1. \quad (24)$$

En el espacio fase (figura 1.3) se indica el comportamiento de las soluciones del sistema (23). No hay puntos de equilibrio, y cada órbita tiene un nivel de energía diferente.

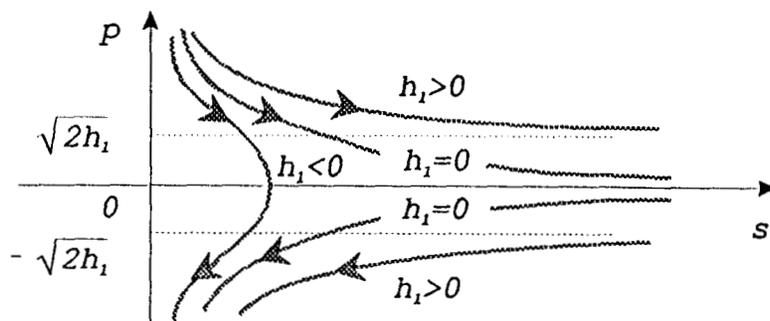


FIGURA 1.3 Órbitas correspondientes a soluciones colineales.

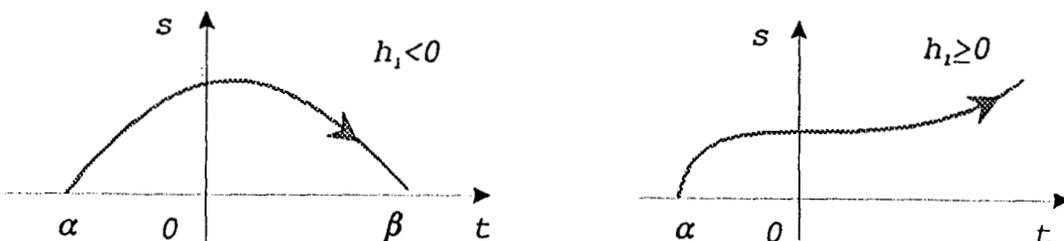


FIGURA 1.4 $s(t)$ para $h_1 < 0$ y $h_1 \geq 0$, respectivamente.

Sea $I = (\alpha, \beta)$ el intervalo máximo de definición de $s(t)$. Del espacio fase observamos que las órbitas con $h_1 < 0$, empiezan y terminan en colisión doble $s = 0$, entonces por la proposición 1.4 α y β son finitos. Para las órbitas con $h_1 \geq 0$ y $p(t) > 0$, obtenemos que $\beta = +\infty$ y α es finito, figura 1.4. De lo anterior podemos concluir que: En el problema de dos cuerpos sólo existen singularidades por colisión.

Regularización de colisiones dobles

Eliminaremos las singularidades ocasionadas por colisiones dobles, extendiendo analíticamente las órbitas que tienen este tipo de singularidades. Para esto usaremos la *regularización de Sundman* [19], que consiste en un cambio de variables $u = sp$, y una reparametrización del tiempo $\frac{dt}{d\tau} = s$, aplicados al sistema (23) y la relación de energía (24). Las ecuaciones de movimiento en las coordenadas (s, u) son

$$\begin{cases} s' = u, \\ u' = m_1 + m_2 + 2h_1s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad (25)$$

con relación de energía

$$\frac{u^2}{2} - (m_1 + m_2)s = h_1s^2, \quad (26)$$

donde (') significa derivada respecto del nuevo tiempo τ . Con el sistema ya definido en $s = 0$, ahora se puede continuar la descripción del movimiento de los dos cuerpos, después de la colisión. El espacio fase regularizado (figura 1.5), se obtiene directamente de la relación de energía (26). No existen puntos de equilibrio, pues los puntos que anulan el campo vectorial (25), no satisfacen (26). Finalmente, en el espacio fase puede observarse lo mencionado sobre conexión analítica de órbitas con singularidades por colisión.

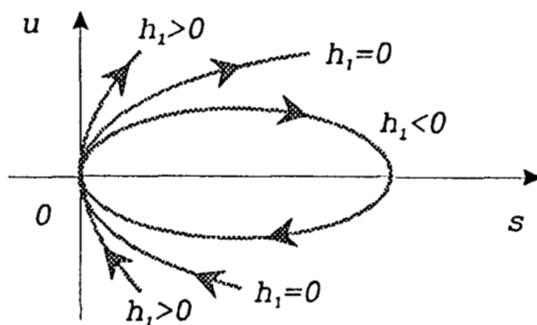


FIGURA 1.5 Espacio fase regularizado.

Capítulo 2

Configuraciones Centrales en el problema de los n -cuerpos

Las *soluciones homotéticas* $\varphi = k(t)\mathbf{r}_0$, donde \mathbf{r}_0 es una configuración fija con ciertas características llamada Configuración Central (CC), son una clase de soluciones particulares del problema general de n -cuerpos.

Una misma CC puede generar varias soluciones al problema de n -cuerpos, con movimientos muy diferentes. Además de las soluciones homotéticas, las CC planares generan las *soluciones en equilibrio relativo* $\varphi = A(t)\mathbf{r}_0$, que se obtienen por rotación uniforme de \mathbf{r}_0 , alrededor del centro de masa. La combinación de estos movimientos da origen a las *soluciones homográficas* $\varphi = k(t)A(t)\mathbf{r}_0$. Estas soluciones particulares son las únicas soluciones explícitas que se conocen para el problema de n -cuerpos. Como aplicaciones importantes tenemos que la expansión del universo y las colisiones totales en el problema de n -cuerpos tienen lugar por CC, lo cual hace de las CC un tópico muy importante en mecánica celeste.



FIGURA 2.1 Configuración Central Euleriana, y una solución en equilibrio relativo, del problema de 3 cuerpos.

Las CC para el problema de tres cuerpos son las primeras que se obtuvieron. Euler [9] en 1767, encontró que para cada ordenación colineal de 3 masas, existe una única manera de seleccionar la razón de las distancias. Aplicando ciertas condiciones iniciales a estas *configuraciones eulerianas*, se obtiene una solución con movimiento periódico (Figura 2.1). Lagrange en 1772, observó lo mismo colocando las masas sobre los vértices de un triángulo equilátero (Figura 2.2) [12].

En este capítulo analizaremos algunos resultados generales sobre CC en el problema de n -cuerpos, los cuales usamos al final para encontrar todas las CC del problema de tres cuerpos.

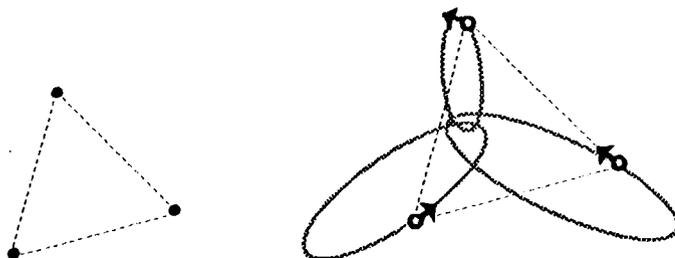


FIGURA 2.2 Configuración Central Lagrangiana, y una solución homográfica del problema de 3 cuerpos.

2.1 Configuraciones Centrales

Ahora se definen las Configuraciones Centrales de un sistema de n partículas, y encontrarán algunas de las caracterizaciones principales.

Sea $\nabla = \cup_{1 \leq i < j \leq n} \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \}$ el conjunto de configuraciones en colisión.

2.1 Definición.

Una configuración $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ se llama Configuración Central (CC), si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}_0) - \lambda \mathbf{r}_0 = 0.} \quad (27)$$

Entonces las CC se encuentran resolviendo esta ecuación, desafortunadamente en general esto es un problema algebraico muy complicado. Basta mencionar que para $n \geq 4$ ni siquiera se sabe si el número de CC es finito o infinito. *Únicamente en el problema de tres cuerpos se conocen todas las CC!* y estas son las configuraciones eulerianas y las configuraciones lagrangianas. Ambas se encuentran determinadas en este capítulo por el Teorema de Moulton (para $n = 3$), y los Lemas (2.16) y (2.18).

2.2 Definición.

Una solución $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ del sistema (3) es llamada homotética, si existe una configuración fija \mathbf{r}_0 y una función escalar $s(t) > 0$, tal que $\mathbf{r}(t) = s(t)\mathbf{r}_0$.

2.3 Proposición.

$\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es Configuración Central, si y sólo si, existe una solución homotética del problema general de n - cuerpos, con \mathbf{r}_0 como configuración fija.

DEMOSTRACION.

(\Leftarrow) Por hipótesis, existe una solución del sistema (3), de la forma $\varphi(t) = s(t) \mathbf{r}_0$. Si además de esto, consideramos que ∇U es homogéneo de grado -2, tenemos entonces que

$$M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}_0) = \ddot{s} s^2 \mathbf{r}_0,$$

Como $M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}_0)$ y \mathbf{r}_0 están fijos, entonces $\ddot{s} s^2(t) = \mu$. Por lo tanto, $M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}_0) = \mu \mathbf{r}_0$, y \mathbf{r}_0 es CC.

(\Rightarrow) No es difícil probar que $\varphi(t) = s(t) \mathbf{r}_0$ es una solución homotética del sistema (3), donde $s(t) > 0$ es una función escalar que satisface $\ddot{s}(t) = \lambda s^{-2}(t)$ (λ es la constante de la definición de *CC*).

■

Interpretación Variacional de las *CC*

Consideremos la métrica generada por el producto escalar $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M \mathbf{r}$ en el espacio \mathbb{R}^{3n} , donde M es la matriz diagonal: $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$. Dado que no se pierde generalidad al fijar el tamaño de una *CC*, podemos analizarlas restringiéndonos a la esfera unitaria:

$$S = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta : \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle = 1, m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_n \mathbf{r}_n = \mathbf{0} \}.$$

2.4 Teorema (Smale).

Respecto del producto escalar $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M \mathbf{r}$, se obtiene que

$$\nabla U|_S = M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}.$$

Además, las Configuraciones Centrales son los puntos críticos de $U|_S$.

DEMOSTRACION. Sea \mathbf{r} una configuración en S y $F(\mathbf{r}) := M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}, F(\mathbf{r}) \rangle &= \langle \mathbf{r}, M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}, M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle \\ &= \mathbf{r}^T \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = (-1) U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (\text{por Teorema de Euler}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto muestra que $F(\mathbf{r})$ es tangente a S . Por otra parte, desarrollando el producto $\langle F(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle$, para toda $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{r}} S$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle &= \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle + 0 \quad \text{pues } \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &= (M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}))^T M \mathbf{v} = DU(\mathbf{r}) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Entonces $F(\mathbf{r})$ es el gradiente de $U|_S$ con respecto de la métrica generada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y entonces los puntos críticos de $U|_S$ son las configuraciones que resuelven $F(\mathbf{r}) = 0$. Ahora veremos que las soluciones de esta ecuación son precisamente las CC .

Sea \mathbf{r}_0 una CC . Multiplicando (27) por $\mathbf{r}_0^T M$, obtenemos $\mathbf{r}_0^T \nabla U(\mathbf{r}_0) = \lambda \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle$. Y considerando que el potencial U es homogéneo de grado -1 en el Teorema de Euler, encontramos que

$$\lambda = \frac{-U(\mathbf{r}_0)}{\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle}.$$

Pero $\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle = 1$ pues $\mathbf{r}_0 \in S$, por lo tanto, las CC son las soluciones de $F(\mathbf{r}) = 0$. ■

Resumimos las caracterizaciones anteriores de CC con el siguiente lema [14]:

2.5 Lema.

Sea $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$, una Configuración Central, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i) Existe una solución homotética del problema de n -cuerpos, con \mathbf{r}_0 como configuración fija.
- ii) \mathbf{r}_0 es punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U|_S$.
- iii) \mathbf{r}_0 es punto crítico de $U|_S$.

Clases de equivalencia

Con el fin de conocer los diferentes tipos de CC , dividiremos el conjunto de CC en clases de equivalencia. La relación de equivalencia viene del hecho que el potencial U sólo depende de la distancia entre las partículas, de esta forma tenemos:

2.6 Definición

Dos configuraciones son equivalentes si son semejantes en el sentido de la geometría euclídeana, esto es, cuando una rotación y/o un cambio en la escala hacen coincidir ambas configuraciones.

De esta manera, cuando hablamos de CC , nos estamos refiriendo a un representante de cada clase de equivalencia.

Ejemplos de Configuraciones Centrales

- a) Sabemos que 3 partículas sobre los vértices de un triángulo equilátero, forman una CC independientemente de los valores de las masas (Lagrange 1772) [12]. Más adelante, probaremos que las únicas CC no colineales en el problema de tres cuerpos son la que tienen forma de triángulo equilátero.
- b) n partículas ($n \geq 4$) sobre los vértices de un polígono regular, forman una CC , sólo en el caso en que todas las masas son iguales. Este es un resultado de Perko Walter 1985 [18] y de Elmabsout en 1988 [8].
- c) n partículas sobre una línea recta, forman una CC , si se ajustan a una cierta proporción de distancias, que depende de las masas (Moulton 1910) [15]. El análisis de este resultado lo haremos en la siguiente sección.
- d) n masas iguales en los vértices de un polígono regular y otra masa cualquiera en el centro del polígono, siempre forman una CC [15].

2.2 Teoremas sobre existencia de CC

2.7 Teorema.

Dadas n masas cualesquiera, existe siempre al menos una CC .

DEMOSTRACION. La idea es mostrar que $U|_S$ tiene un mínimo, y por el Teorema 2.4, este punto crítico debe ser una CC . Sea $\Delta_{ij} = \{\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)^T \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}$, y $\Delta = \cup_{i < j} \Delta_{ij}$. Sea V una vecindad de Δ en S , entonces $S \setminus V$ es compacto. Y como una función continua definida sobre un conjunto compacto necesariamente tiene un mínimo, entonces el potencial U restringido a $S \setminus V$ tiene un mínimo.

Por otra parte, cuando $\mathbf{r} \rightarrow \Delta$ se tiene que $U \rightarrow \infty$. Entonces, para cualquier $k > 0$, V se puede escoger suficientemente pequeña de manera que $U|_V \geq k$.

Escogiendo V suficientemente pequeña, se puede asegurar que el mínimo de U restringido a $S \setminus V$, es mínimo de U restringido a S . Por el Teorema 2.4, este mínimo es una CC . ■

El Teorema de Moulton (1910) [14] proporciona el número de CC que se encuentran sobre una línea recta L . Sobre esta recta, consideremos el conjunto de configuraciones con centro de masa en el origen y norma uno:

$$C = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \Delta : \sum m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1 \}.$$

2.8 Teorema (Moulton).

Existe una única CC correspondiente a cada ordenación posible de n partículas que se encuentran sobre una línea recta. Por tanto, existen $\frac{n!}{2}$ CC colineales (que corresponden a las distintas ordenaciones de las partículas sobre la recta), cada una de ellas es un mínimo no degenerado de $U|_C$.

Para la demostración del Teorema de Moulton, hacemos uso de los siguientes resultados:

2.9 Lema.

C consiste de $n!$ componentes conexas, cada una de ellas homeomorfa a un disco $n - 2$ dimensional. Esto corresponde a las $n!$ ordenaciones de las partículas.

DEMOSTRACION. Es suficiente con demostrar que

$$C' = \{ \mathbf{r} \in C : r_1 < r_2 < \dots < r_n \}$$

es homeomorfo a un disco de dimensión $n - 2$. Para esto, introducimos

$$C'' = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \Delta : \sum m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad r_1 < r_2 < \dots < r_n \}.$$

Por otra parte, existe un difeomorfismo entre C'' y $(\mathbb{R}^+)^{n-1}$, dado por $\varphi(r_1, \dots, r_n) = (r_2 - r_1, \dots, r_n - r_{n-1})$. Así, para un rayo K en $(\mathbb{R}^+)^{n-1}$, la imagen inversa $\varphi^{-1}(K)$ es un rayo en C'' . Pero un rayo en C'' sólo contiene una configuración con norma uno,

entonces $\varphi^{-1}(K)$ corta a C' en un punto único. Y como el conjunto de rayos en $(\mathbb{R}^+)^{n-1}$ es homeomorfo a un disco D de dimensión $n-2$, entonces C' es homeomorfa a D .

$$C' \stackrel{\text{hom.}}{\sim} \{\text{rayos en } C'\} \stackrel{\text{hom.}}{\sim} \{\text{rayos en } (\mathbb{R}^+)^{n-1}\} \stackrel{\text{hom.}}{\sim} D.$$

2.10 Lema.

C es un conjunto invariante del sistema $\dot{\mathbf{r}} = \text{grad}U|_S$.

DEMOSTRACION. Sea $G \subset S0(3)$ el grupo de rotaciones alrededor de L (L es la línea recta que contiene a las configuraciones en C), es claro que los puntos fijos de G son precisamente los que están en L , entonces $G\mathbf{r} = \mathbf{r}$. Y aplicando $F(\mathbf{r}) = \text{grad}U|_S$ tenemos $F(G\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})$, pero $F(\mathbf{r})$ conmuta con el grupo $S0(3)$, entonces $G(F(\mathbf{r})) = F(\mathbf{r})$. Así, $F(\mathbf{r})$ es punto fijo de G . Por lo tanto, $F(\mathbf{r})$ es una configuración colineal en L .

2.11 Lema.

Las componentes de C son convexas geodésicamente.

DEMOSTRACION. Ya que \mathbb{R}^n con la métrica $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M \mathbf{r}$ es isométrico a \mathbb{R}^n con la métrica euclidéa (la isometría es $x_i = \sqrt{m_i} r_i$), tenemos que C es isométrico a la esfera unitaria estándar del espacio Euclidéano \mathbb{R}^{n-1} . Siendo que las componentes de C pueden ser expresadas como intersecciones de C con los medios espacios $\{r_i < r_j\}$, entonces las componentes de C son convexas geodésicamente, es decir, que dos puntos en la componente C' pueden unirse por un arco de geodésica contenido en C' .

2.12 Lema.

Sea $\mathbf{r} \in C$, entonces $D^2U(\mathbf{r})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, $\forall \mathbf{v}$ en el espacio tangente $T_{\mathbf{r}}C$.

DEMOSTRACION. Calculando las segundas derivadas del potencial, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_i} &= \sum_{j \neq i} \frac{2m_i m_j}{r_{ji}^3} =: \sum_{j \neq i} D_{ji}, \\ \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_i} &= \frac{(-2m_i m_k)}{r_{ki}^3} =: -D_{ki}, \quad k \neq i, \end{aligned}$$

y sustituyendo en $D^2U(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
 D^2U(\mathbf{r})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} \sum_{j \neq 1} D_{j1} & & -D_{1n} \\ & \ddots & \\ -D_{n1} & & \sum_{j \neq n} D_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \\
 &= \sum_{\lambda} v_{\lambda}^2 \sum_{j \neq \lambda} \frac{m_{\lambda} m_j}{r_{j\lambda}^3} - \sum_{\lambda} v_{\lambda} \sum_{k \neq \lambda} v_k \frac{m_{\lambda} m_k}{r_{k\lambda}^3}, \\
 &= 2 \sum_{\lambda} \sum_{j \neq \lambda} \frac{m_j m_{\lambda}}{r_{j\lambda}^3} (v_{\lambda}^2 - v_j v_{\lambda}) = 2 \sum_{\substack{j, \lambda \\ j < \lambda}} \frac{m_j m_{\lambda}}{r_{j\lambda}^3} (v_j - v_{\lambda})^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

y sólo es cero en caso de que $v_1 = \cdots = v_n$, pero este vector no puede ser tangente a C . Así que $D^2U(\mathbf{r})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$. ■

Ahora si estamos en posibilidad de demostrar el **Teorema de Moulton**:

DEMOSTRACION. Probemos el resultado para la ordenación:

$$C' = \{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in C : r_1 < \cdots < r_n\}.$$

Como C' es homomorfa a un disco (Lema 2.9), entonces $U(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$ cuando $\mathbf{r}(t) \rightarrow \delta C' \subset \Delta$ ($\delta C'$ es la frontera de C'), implicando que $U|_{C'}$ tiene un mínimo \mathbf{r}_0 . Dado que las componentes de C son conexas, entonces $\mathbf{r}_0 = \min U|_C$, y por lo tanto, $U|_C$ tiene al menos un mínimo local \mathbf{r}_0 en cada una de las componentes de C . Probaremos que \mathbf{r}_0 es un punto crítico de $U|_S$.

Sea φ una solución del sistema $\dot{\mathbf{r}} = \text{grad } U(\mathbf{r})|_S$, que pasa por \mathbf{r}_0 . Por el Lema 2.10, φ está completamente contenida en C . Además, el $\text{grad } U|_S$ es tangente a S , en particular sobre C , entonces \mathbf{r}_0 anula el $\text{grad } U|_S$. Con esto, hemos probado que *en cada componente de C , existe al menos una CC*.

La unicidad se prueba con un argumento de convexidad. Por el Lema 2.11, las componentes de C son convexas geodesicamente, es decir, dados \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en C' , existe un arco de una geodésica que los conecta, y está contenido en C' . Sea $\gamma(s)$ una parametrización con velocidad unitaria de este arco. Entonces $\gamma''(s) = -\gamma(s)$. Derivando dos veces $U(\gamma(s))$ respecto de s , obtenemos

$$U''(\gamma(s)) = DU(\gamma(s))\gamma'(s),$$

$$\begin{aligned}
U''(\gamma(s)) &= D^2U(\gamma(s))(\gamma', \gamma') + DU(\gamma(s))\gamma''(s), \\
&= D^2U(\gamma(s))(\gamma', \gamma') - DU(\gamma(s))\gamma(s), \\
&= D^2U(\gamma(s))(\gamma', \gamma') + U(\gamma(s)),
\end{aligned}$$

en la última igualdad se aplicó el teorema de Euler.

Por el Lema 2.12, se concluye que $U''(\gamma(s)) > 0$. Entonces existe a lo más un punto crítico en cada componente de C , pues si existieran 2 puntos críticos en una misma componente, se podrían conectar con una geodésica, teniendo $U'(\gamma(s)) = 0$ en los extremos, lo que obliga a $U''(\gamma(s))$ a tener un cero entre ellos, esto es una contradicción.

De aquí, se sigue que en cada componente de C , existe un único punto crítico que es mínimo no degenerado de $U|_C$. Finalmente, ya que al efectuar una rotación de 180° estamos en la misma clase de equivalencia de una CC dada, sólo se considera la mitad de las $n!$ Configuraciones Centrales. ■

2.3 Otros resultados importantes sobre CC .

En esta sección analizaremos dos teoremas importantes sobre CC en el problema de n -cuerpos: El Teorema de 45° y el Teorema del Bisector. Ambos resultados descartan configuraciones que no pueden ser CC , para ninguna selección de masas. Como una aplicación del Teorema del Bisector, tenemos que tres masas cualquiera formando un triángulo no equilátero, no pueden ser una CC (Lema 2.16).

El Teorema de 45° se basa en la función $\theta(\mathbf{r})$ que mide el *grado de aproximación colineal* de las configuraciones. Dada L una recta en \mathbb{R}^3 , y $\mathbf{r} \in S$, definimos

$$\theta_L(\mathbf{r}) = \max_{i \neq j} \text{ang} \{ \mathbf{r}_{ij}, L \} \in [0, 90^\circ],$$

donde $\text{ang} \{ \mathbf{r}_{ij}, L \}$ es el ángulo entre el vector $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y el vector direccional de L . Esta función se anula cuando la configuración \mathbf{r} es colineal y paralela a L .

Ahora definimos la función

$$\theta : S \rightarrow [0, 90^\circ], \quad \theta(\mathbf{r}) = \min_L \theta_L(\mathbf{r}).$$

Podemos observar que esta función se anula cuando la configuración \mathbf{r} es colineal. Así, entre más cercano a cero sea $\theta(\mathbf{r})$, se tiene que \mathbf{r} es más aproximada a una configuración colineal. La principal propiedad de esta función, se describe en el siguiente resultado:

2.13 Lema (Moeckel).

La función $\theta(\mathbf{r})$ es continua. Además es estrictamente decreciente sobre las soluciones del sistema $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U|_S$, cuando la configuración satisface $\theta(\mathbf{r}) \in (0, 45^\circ]$.

DEMOSTRACION. Continuidad de la función $\theta(\mathbf{r})$. Sea $\mathbf{r}(t)$ una órbita en S , entonces para i, j y L fijos, se tiene que $\text{ang}\{\mathbf{r}_{ij}, L\}$ es continuo en S . Además, θ_L también es continua, pues es el máximo sobre un conjunto finito de índices. Ahora minimizamos $\theta_L(\mathbf{r})$ sobre todas las rectas L en \mathbb{R}^3 . Pero como sólo se considera el vector direccional de L , es suficiente considerar las rectas que pasan por el origen, las cuales son homeomorfas a la esfera S^2 (compacta). Como se está minimizando sobre un conjunto compacto, entonces para cada configuración \mathbf{r} existe una recta L^* (recta de mejor ajuste), tal que

$$\theta(\mathbf{r}) = \min_L \theta_L(\mathbf{r}) = \theta_{L^*}(\mathbf{r}),$$

esto demuestra la continuidad de la función θ .

Monotonía decreciente de $\theta(\mathbf{r})$. Sea $\mathbf{r}(t)$ una solución del sistema $\dot{\mathbf{r}} = \text{grad} U|_S$ tal que $\theta(\mathbf{r}(t_0)) \in (0, 45^\circ]$ en algún instante t_0 . Mostraremos que $\theta(\mathbf{r}(t))$ es estrictamente decreciente para toda $t > t_0$. Pero por la continuidad de θ es suficiente con probarlo para t cercano a t_0 .

Sea L la recta que mejor se ajusta a $\mathbf{r}(t_0)$, entonces $\theta(\mathbf{r}(t_0)) = \theta_L(\mathbf{r}(t_0))$. Si logramos probar que

$$\theta_L(\mathbf{r}(t)) < \theta_L(\mathbf{r}(t_0)), \quad (28)$$

para t cercano a t_0 , tendremos

$$\theta(\mathbf{r}(t)) \leq \theta_L(\mathbf{r}(t)) < \theta_L(\mathbf{r}(t_0)) = \theta(\mathbf{r}(t_0)),$$

y la demostración del teorema estará terminada. Sean i, j los índices tales que $\theta(\mathbf{r}(t_0)) = \text{ang}\{\mathbf{r}_{ij}(t_0), L\}$. Para t cercana a t_0 , también se cumple que

$$\theta_L(\mathbf{r}(t)) = \text{ang}\{\mathbf{r}_{ij}(t), L\} =: \alpha(t).$$

Por hipótesis $\alpha(t_0) > 0$. Probaremos que $\dot{\alpha}(t_0) < 0$, con lo cual la desigualdad (28) estará demostrada. Sea \mathbf{u} el vector unitario en dirección de la recta L , que satisface $\text{ang}\{\mathbf{r}_{ij}(t), \mathbf{u}\} \leq 90^\circ$. Entonces $\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha(t)$. Derivando esta expresión, obtenemos

$-\text{sen} \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{ij}}{r_{ij}} \cdot \mathbf{v}$, donde

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

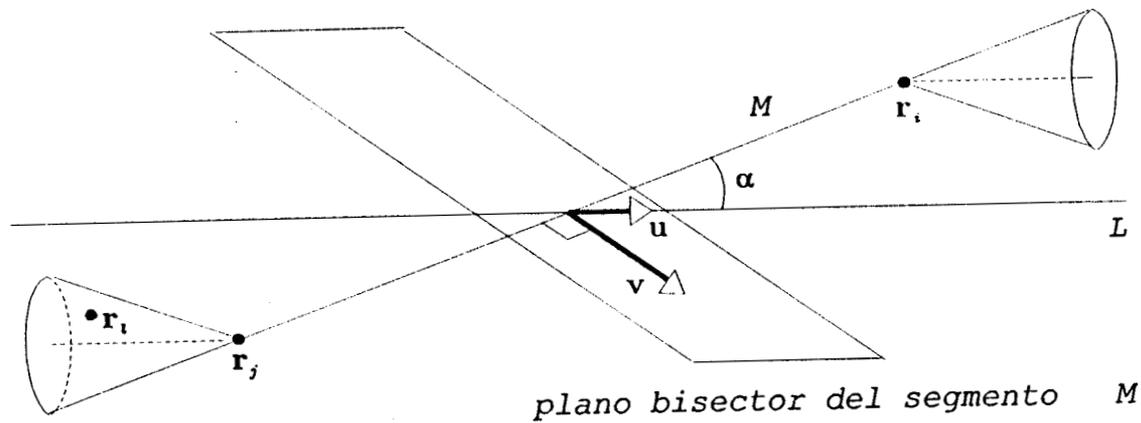
es la componente de \mathbf{u} normal a $\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$. Demostrar que $\dot{\alpha}(t_0) < 0$, es equivalente a probar que $\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v} > 0$. Como $\mathbf{r}(t)$ es solución de $\dot{\mathbf{r}} = \text{grad} U|_S$, entonces restando las componentes $\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j$, obtenemos

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k \neq i,j} m_k \left(\frac{\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{v}}{r_{ki}^3} - \frac{\mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{v}}{r_{kj}^3} \right).$$

De $\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}_{kj} - \mathbf{r}_{ij}$, se sigue que $\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_{kj} \cdot \mathbf{v}$, entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k \neq i,j} m_k (\mathbf{r}_{ki} \cdot \mathbf{v}) \left(\frac{1}{r_{ki}^3} - \frac{1}{r_{kj}^3} \right). \quad (29)$$

Probaremos que en el tiempo t_0 , algunos términos de esta suma son positivos, y los demás son nulos.



Por definición de $\alpha(t)$, tenemos que $\text{ang}\{\mathbf{r}_{ij}(t), L\} = \max_{k \neq i} \text{ang}\{\mathbf{r}_{ki}(t), \mathbf{u}\}$, entonces las demás partículas deben estar en los conos A o D , o la recta M que une \mathbf{r}_i con \mathbf{r}_j . Si \mathbf{r}_k está sobre M , entonces $\mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{v} = 0$, y el término de índice k en (29) se anula. Como por hipótesis $\alpha(t_0)$ es positivo, entonces existen partículas en los conos A o D , fuera de la recta M . Sea \mathbf{r}_ℓ la posición de una de estas partículas en el cono A . Es claro que $\mathbf{r}_{\ell i} \cdot \mathbf{v} < 0$ pues $\text{ang}(\mathbf{r}_{\ell i}, \mathbf{v}) \in (90^\circ, 180^\circ)$, entonces resta probar que $\frac{1}{r_{\ell i}^3} - \frac{1}{r_{\ell j}^3} < 0$. Pero esto se sigue de la desigualdad $r_{\ell j} < r_{\ell i}$, la cual se cumple si el ángulo de apertura de los conos es $2\alpha \leq 90^\circ$ (lo contrario implicaría la posible existencia de partículas en el plano π bisector perpendicular del segmento \mathbf{r}_i a \mathbf{r}_j , donde $r_{\ell j} = r_{\ell i}$). Por lo tanto, \mathbf{r}_ℓ contribuye positivamente en la ecuación (29). Lo mismo sucede con las partículas en el cono B . ■

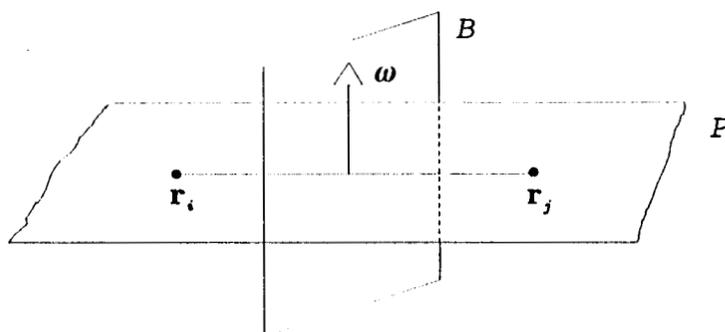
Una aplicación inmediata del Lema de Moeckel, es el Teorema de los 45° .

2.14 Teorema de 45° .

No existen CC con $\theta(\mathbf{r}) \in (0, 45^\circ]$

DEMOSTRACION. Por el Teorema 2.5, las CC son los puntos de equilibrio de $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U|_S$, entonces para toda t se cumple que $\theta(\mathbf{r}(t))$ es constante. Luego por el Lema de Moeckel, no pueden existir CC con $\theta(\mathbf{r}) \in (0, 45^\circ]$. ■

Otro resultado general sobre CC , es el Teorema del Bisector:



Consideremos un sistema de n partículas. Sean $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ las posiciones de dos de ellas, y sea B el plano bisector del segmento $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$, tal que $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$ es su dirección normal.

Sea ω un vector unitario cualquiera en el plano B , y sea P el plano que contiene al segmento $\overline{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j}$ y tiene como dirección normal al vector ω . Así, los planos B y P dividen el espacio \mathbb{R}^3 en 4 cuadrantes.

2.15 Teorema del Bisector (Conley).

Sea una configuración donde las partículas están contenidas en dos cuadrantes diagonalmente opuestos, con al menos una partícula en el interior de alguno de ellos. Entonces tal configuración no puede ser CC para cualquier selección de masas.

DEMOSTRACION. De la ecuación $\dot{\mathbf{r}} = \text{grad } U|_S$, tenemos que

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega = (m_i^{-1} \nabla_i U - m_j^{-1} \nabla_j U) \cdot \omega + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}_{ij} \cdot \omega$$

donde $\nabla_i U$ es el miembro derecho del sistema (1). Y como los vectores \mathbf{r}_{ij} y ω son ortogonales, resulta que

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega = \sum_{k \neq i, j} m_k \left(\frac{\mathbf{r}_{ik} \cdot \omega}{r_{ki}^3} - \frac{\mathbf{r}_{jk} \cdot \omega}{r_{jk}^3} \right).$$

Usando la relación $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{jk}$, y la ortogonalidad entre \mathbf{r}_{ij} y ω se sigue que $\mathbf{r}_{ik} \cdot \omega = \mathbf{r}_{jk} \cdot \omega$, entonces

$$\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega = \sum_{k \neq i, j} m_k (\mathbf{r}_{ik} \cdot \omega) \left(\frac{1}{r_{ki}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right). \quad (30)$$

Sea \mathbf{r}_ℓ la posición de otra partícula, diferente de las dos iniciales. Existen varios casos:

- Si $\mathbf{r}_\ell \in B$, entonces $\mathbf{r}_{i\ell} = \mathbf{r}_{j\ell}$ y el término ℓ desaparece de la suma.
- Si $\mathbf{r}_\ell \in P$, diferente de \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j , entonces $\mathbf{r}_{i\ell} \cdot \omega = 0$ y el término ℓ desaparece de la suma.
- Si $\mathbf{r}_\ell \notin P$ y $\mathbf{r}_\ell \notin B$, y está en el cuadrante superior derecho, entonces $r_{\ell i} > r_{\ell j}$. De donde $\frac{1}{r_{\ell i}^3} - \frac{1}{r_{\ell j}^3} < 0$. Como $\text{ang}(\mathbf{r}_{i\ell}, \omega) \in (90^\circ, 180^\circ)$ entonces $\mathbf{r}_{i\ell} \cdot \omega < 0$.
- Si $\mathbf{r}_{\ell i} \notin P$ y $\mathbf{r}_\ell \notin B$ y está en el cuadrante inferior izquierdo, siguiendo el mismo razonamiento, tenemos que $\mathbf{r}_{j\ell} \cdot \omega > 0$ o bien $\mathbf{r}_{i\ell} \cdot \omega > 0$.

Por lo tanto, si existe al menos una partícula en el interior de alguno de los cuadrantes diagonalmente opuestos se tiene que $\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega > 0$.

Sea $\mathbf{r}(t)$ un punto de equilibrio de $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U|_S$, entonces \mathbf{r} es una *CC*. Luego $\dot{\mathbf{r}}_k = 0$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, en particular, $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_j = 0$, entonces $\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega = 0$. Por lo tanto, la desigualdad $\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega > 0$ implica que \mathbf{r} no es *CC*. Lo inverso no es cierto, es decir, $\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \omega = 0$ no implica que \mathbf{r} sea *CC*. ■

Como una aplicación inmediata del Teorema del Bisector, tenemos el siguiente resultado.

2.16 Lema.

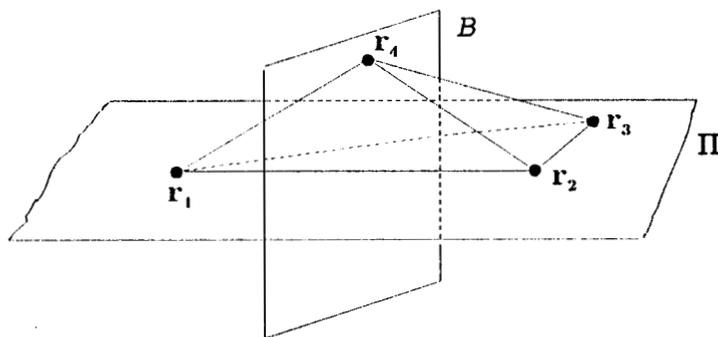
La única posibilidad de que 3 partículas formen una *CC* no colineal, es de que formen un triángulo equilátero.

DEMOSTRACION. Sean $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ y \mathbf{r}_3 las posiciones de las tres partículas. Consideremos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ y sean *B* y *P* como en el teorema del bisector. Cuando la partícula restante está en

el interior de cualquiera de los 4 cuadrantes, por el Teorema del Bisector se concluye que la configuración no puede ser CC . Entonces la tercera partícula tiene que estar en el plano bisector B , formando un triángulo (isósceles) con las otras dos partículas. Repitiendo el procedimiento para los segmentos $\overline{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3}$ y $\overline{\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3}$, se sigue el resultado deseado. ■

2.17 Lema.

La única opción para que 4 partículas no coplanares sea una CC , es de que formen un tetrahedro regular.



DEMOSTRACION. Como las 4 partículas son no coplanares, colocamos 3 de ellas sobre el plano Π , digamos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Sea B el plano bisector del segmento $\overline{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}$. Es inmediato que si \mathbf{r}_4 está en el interior de cualquiera de los 4 cuadrantes, entonces no hay CC , luego \mathbf{r}_4 debe estar en B .

Se repite el procedimiento para los demás segmentos del triángulo $\Delta\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3$, de donde se concluye que este triángulo debe ser equilátero y similarmente con las demás caras. Por lo tanto, en caso de existir una CC con 4 partículas no coplanares, ésta debe formar un tetrahedro regular. ■

Completaremos la información dada en el Lema 2.14, probando que las configuraciones triangulares equiláteras son CC , usando la caracterización de las CC , como puntos de equilibrio de $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U|_S$.

2.18 Lema.

Tres partículas con masas cualquiera y colocadas sobre los vértices de un triángulo equilátero, forman una CC .

DEMOSTRACION. Dado un triángulo equilátero de cualquier tamaño, probaremos que existe una homotecia que anula el gradiente $\nabla U|_S$. Si consideramos el origen de coordenadas en el centro de masas, entonces los vértices correspondientes son $\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_c$, $\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_c$ y $\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_c$, donde $\mathbf{s}_1 = \mu(-\sqrt{3}, -1, 0)$, $\mathbf{s}_2 = \mu(\sqrt{3}, -1, 0)$, $\mathbf{s}_3 = \mu(0, 2, 0)$, $\mu > 0$

determina el tamaño del triángulo, y $\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{s}_1 + m_2\mathbf{s}_2 + m_3\mathbf{s}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

El vector $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_c, \mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_c, \mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_c)$ estará en S si es unitario con la norma dada por $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$, y esto sucede cuando

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{12(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)}}.$$

Se puede verificar que $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = \mu\sqrt{12}$, para toda i, j , de donde

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}{\mu\sqrt{12}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{(\mu\sqrt{12})^3}.$$

Entonces

$$U(\mathbf{r})\mathbf{r}_i = U(\mathbf{r})(\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_c) = \frac{1}{(\mu\sqrt{12})^3} \left(\sum_{j=1}^3 m_j (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \right) = \sum_{j=1, j \neq i}^3 m_j \frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Ahora es claro que el vector $\nabla U|_S = M^{-1}\nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\mathbf{r}$, cuya componente i -ésima es

$$\sum_{j=1, j \neq i}^3 m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \left(\frac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_1m_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2m_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right) \mathbf{r}_i,$$

se anula en la configuración que estamos analizando. ■

Capítulo 3

Configuraciones Centrales en el problema cargado de 3 cuerpos

Una parte fundamental de la tesis es el estudio de las Configuraciones Centrales en el problema cargado de 3 cuerpos. Este es un análisis del artículo *Central configuration in the charged three body problem* [17] que explicaré a continuación.

En el capítulo anterior mencionamos algunos resultados conocidos, sobre la existencia de Configuraciones Centrales (*CC*) en el problema de n -cuerpos. En general es muy complicado siquiera conocer el número de *CC*, para $n \geq 4$ no se sabe si este número es finito o infinito. Para $n = 3$, existen cinco *CC*, tres son colineales, una por cada ordenación. Y las otras dos son no colineales con forma de triángulo equilátero. Este último número es debido a que dos triángulos equiláteros, donde uno es reflexión del otro respecto de uno de los lados, no pertenecen a la misma clase de equivalencia, pues no pueden ser llevados uno en el otro por rotaciones u homotecias en el plano.

Es de suponerse que los Teoremas del capítulo 2, no se cumplen cuando se modifican las hipótesis, cargando electrostáticamente a las partículas. Ernesto Pérez en 1995 [17], muestra lo anterior para el Problema de 3 cuerpos cargados, encontrando que cambian el conteo, y el tipo de Configuraciones Centrales.

La combinación de fuerzas atractivas y repulsivas produce diferencias notables respecto del problema newtoniano. En este capítulo se muestran los resultados obtenidos, en los cuales observaremos las diferencias a las que nos referimos.

3.1 El problema cargado de los n -cuerpos (pcnc)

Generalizaremos el problema de los n -cuerpos, agregando cargas de cualquier signo a las n masas puntuales. Con lo cual, el movimiento es generado por acción de las fuerzas gravitacionales y electrostáticas. Lo llamaremos *el problema cargado de los n -cuerpos* (pcnc).

Continuando con la notación del capítulo 1, la formulación matemática del pcnc conserva la misma forma del problema original. Las ecuaciones de movimiento están dadas por un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (m_i m_j - q_i q_j) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

o bien

$$M \ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}), \quad (32)$$

donde $U(\mathbf{r})$ es la función potencial

$$U : \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(\mathbf{r}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j - q_i q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}.$$

3.2 Configuraciones Centrales en el pcnc

Las Configuraciones Centrales (CC) se definen de la misma manera que en el problema de n -cuerpos.

3.1 Definición.

Una configuración $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$, se llama Configuración Central si existe una constante $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que

$$M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) - \lambda \mathbf{r} = 0. \quad (33)$$

Una forma equivalente de esta definición, se obtiene cuando expresamos a las CC como soluciones de la ecuación $\nabla I U^2(\mathbf{r}) = 0$. Donde I es el momento de inercia del sistema de partículas, definido en (13) sección 1.2.

3.2 Proposición.

La configuración $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es *CC*, si y sólo si, $\nabla IU^2(\mathbf{r}) = 0$ y $U(\mathbf{r}) \neq 0$.

DEMOSTRACION. El resultado es inmediato después de escribir

$$\nabla IU^2(\mathbf{r}) = 2IU\nabla U + U^2 M \mathbf{r} = 2IUM \left(M^{-1} \nabla U + \frac{U}{2I} \mathbf{r} \right).$$

■

En ambos problemas, el newtoniano y el cargado, las *CC* tienen su centro de masa en el origen. Esto es debido a la forma de definir las *CC*, pues en esencia estas configuraciones son posiciones muy particulares de un conjunto de partículas, y son independientes de los sistemas de referencia.

3.3 Conteo de Configuraciones Centrales en el pc3c

En lo que resta del capítulo, haremos un conteo de *CC* en el problema cargado de 3 cuerpos, resolviendo la ecuación $\nabla IU^2(\mathbf{r}) = 0$. En el caso $n = 3$, el potencial U es

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_3}{r_{12}} + \frac{\lambda_2}{r_{13}} + \frac{\lambda_1}{r_{23}},$$

donde $\lambda_1 = m_2 m_3 - q_2 q_3$, $\lambda_2 = m_1 m_3 - q_1 q_3$, y $\lambda_3 = m_1 m_2 - q_1 q_2$.

Como las *CC* tienen su centro de masa en el origen, es válido expresar el momento de inercia I , como

$$2I = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

La ecuación $\nabla IU^2(\mathbf{r}) = 0$ representa un sistema de 6x6 ecuaciones no lineales, cuya dimensión se puede reducir a 2x2, considerando el centro de masa en el origen, e introduciendo coordenadas de Jacobi, definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{r}_3 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{s}_3 &= m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema para \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , y \mathbf{r}_3 , podemos expresar las distancias r_{ij} en función de las nuevas variables. Entonces puede verificarse que

$$\begin{aligned} r_{12} &= s_1, \\ r_{13} &= \sqrt{s_2^2 + (1 - \mu)^2 s_1^2 + 2(1 - \mu)s_1 s_2 \cos \theta}, \\ r_{23} &= \sqrt{s_2^2 + \mu^2 s_1^2 + 2\mu s_1 s_2 \cos \theta}, \end{aligned}$$

donde $s_1 = |\mathbf{s}_1|$, $s_2 = |\mathbf{s}_2|$, $\theta = \text{ang}\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$, $\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$.

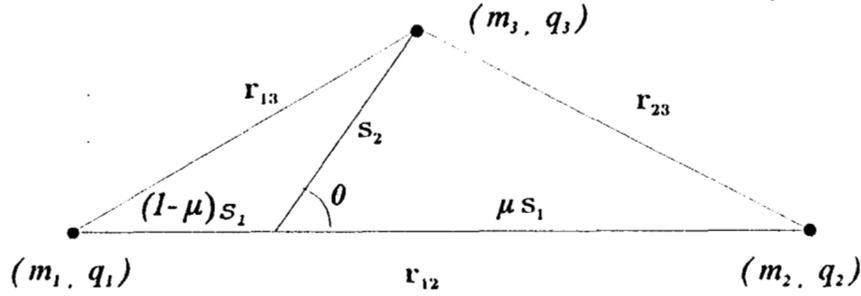


FIGURA 3.1 Sistema de coordenadas de Jacobi.

Con las nuevas coordenadas, el momento de inercia adquiere una forma más simple:

$$2I = g_1 s_1^2 + g_2 s_2^2,$$

donde g_1 y g_2 son nuevos parámetros que dependen exclusivamente de las masas,

$$g_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad g_2 = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Ahora la expresión IU^2 depende sólo de dos variables: el ángulo θ y el cociente $\rho = \frac{s_2}{s_1}$,

$$2IU^2 = (g_1 + g_2 \rho^2) \left[\frac{\lambda_3}{R_{12}} + \frac{\lambda_2}{R_{13}} + \frac{\lambda_1}{R_{23}} \right]^2, \quad (34)$$

donde $R_{ij} = \frac{r_{ij}}{s_1}$, y está dado por

$$\begin{aligned} R_{12} &= 1, \\ R_{13} &= \sqrt{\rho^2 + (1 - \mu)^2 + 2(1 - \mu)\rho \cos \theta}, \\ R_{23} &= \sqrt{\rho^2 + \mu^2 - 2\mu\rho \cos \theta}. \end{aligned} \quad (35)$$

Usando la proposición 3.2, las CC se encuentran resolviendo el sistema

$$\frac{\partial}{\partial \rho} IU^2(\rho, \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} IU^2(\rho, \theta) = 0,$$

y considerando que $U \neq 0$. Si aplicamos estas derivadas parciales en la ecuación (34), y definimos $\beta = \frac{g_1}{g_2}$, obtenemos el sistema no lineal:

$$\rho\left(\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{R_{13}} + \frac{\lambda_1}{R_{23}}\right) - (\beta + \rho^2) \left[\frac{\lambda_2}{R_{13}^3} (\rho + (1 - \mu)\text{Cos } \theta) + \frac{\lambda_1}{R_{23}^3} (\rho - \mu\text{Cos } \theta) \right] = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\lambda_1 \mu \rho \text{Sen } \theta}{R_{23}^3} - \frac{\lambda_2 (1 - \mu) \rho \text{Sen } \theta}{R_{13}^3} = 0. \quad (37)$$

3.4 Configuraciones Centrales no Colineales

Por los Lemas 2.16 y 2.18 sabemos que 3 partículas sin carga y con masas cualesquiera, forman una CC no colineal, si y sólo si, esta configuración es de triángulo equilátero. En esta sección, encontramos condiciones sobre las masas y cargas en el **pc3c** para la existencia de CC no colineales, mostrando que en este último caso los triángulos que determinan las partículas pueden ser de cualquier forma.

3.3 Teorema.

- a) Para cualquier selección de masas y cargas, existen 2 CC no colineales, siempre que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tengan el mismo signo, y

$$\sqrt[3]{m_i |\lambda_i|} + \sqrt[3]{m_j |\lambda_j|} > \sqrt[3]{m_k |\lambda_k|}, \quad (38)$$

donde (i, j, k) permuta cíclicamente en $(1, 2, 3)$. Hay 0 CC si lo anterior no sucede.

- b) Para cualquier configuración triangular r_0 , existen masas y cargas, tales que r_0 es CC no colineal.

DEMOSTRACION.

- a) Resolviendo la ecuación (37), encontramos que

$$\rho \text{Sen } \theta = 0, \quad \text{o} \quad \frac{\lambda_1 \mu}{R_{23}^3} = \frac{\lambda_2 (1 - \mu)}{R_{13}^3}.$$

La primera expresión implica que la configuración es colineal; este es un caso que consideraremos en la siguiente sección. Usando la definición de μ , la segunda expresión es equivalente a

$$\frac{\lambda_1 m_1}{R_{23}^3} = \frac{\lambda_2 m_2}{R_{13}^3}.$$

Llamando a esta expresión común $\frac{1}{z^3}$, podemos expresar a R_{13} y R_{23} en función de z . Después de sustituir en la ecuación (36), obtenemos que

$$m_3 \lambda_3 = \frac{1}{z^3}.$$

De esta manera, la única solución no colineal del sistema de ecuaciones (36) y (37), debe satisfacer

$$\frac{m_1 \lambda_1}{R_{23}^3} = \frac{m_2 \lambda_2}{R_{13}^3} = m_3 \lambda_3. \quad (39)$$

De esta relación se sigue que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tienen el mismo signo, y además, las distancias relativas R_{ij} deben ser

$$R_{23} = \sqrt[3]{\frac{m_1 \lambda_1}{m_3 \lambda_3}}, \quad R_{13} = \sqrt[3]{\frac{m_2 \lambda_2}{m_3 \lambda_3}}, \quad R_{12} = 1. \quad (40)$$

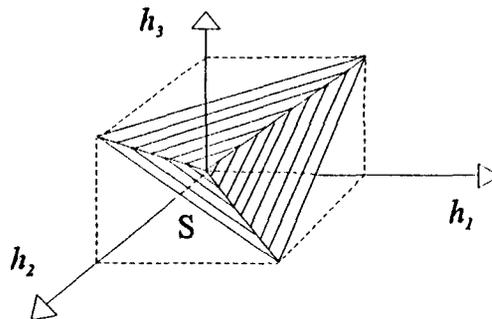
Estas distancias R_{ij} deben cumplir la desigualdad del triángulo:

$$R_{ij} + R_{jk} > R_{ik}, \quad (i, j, k) \sim (1, 2, 3) \quad (41)$$

Como veremos esto no siempre sucede. De hecho, si en el octante positivo del espacio $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, aplicamos el difeomorfismo $\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (h_1, h_2, h_3)$ dado por

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{\lambda_2}{m_1 m_3}}, \quad h_2 = \sqrt[3]{\frac{\lambda_3}{m_1 m_2}}, \quad h_3 = \sqrt[3]{\frac{\lambda_1}{m_2 m_3}},$$

puede observarse que la superficie S en el octante positivo del espacio $h_1 h_2 h_3$, formada por los tres planos $h_i + h_j = h_k$, divide al octante en dos regiones.



Para los puntos que están en la región interior, los R_{ij} satisfacen la desigualdad del triángulo, y por lo tanto, representan CC no colineales. Dado que la clase de

equivalencia de esta CC , considera rotaciones unicamente en el plano, entonces por simetría existen en total dos CC no colineales.

En la superficie S hay CC colineales, y en la región que está entre S y las caras del octeto positivo, no hay CC por no cumplirse la desigualdad del triángulo.

b) Sean 3 partículas con masas y cargas, tales que

$$\frac{q_1}{m_1} = \sqrt{\frac{(1-a^3)(1-b^3)}{1-c^3}}, \quad \frac{q_2}{m_2} = (1-a^3) \left(\frac{m_1}{q_1} \right), \quad \frac{q_3}{m_3} = (1-b^3) \left(\frac{m_1}{q_1} \right),$$

donde $a, b, c \in (0, 1)$ y satisfacen la desigualdad del triángulo, entonces

$$\lambda_1 = m_2 m_3 c^3 > 0, \quad \lambda_2 = m_1 m_3 b^3 > 0, \quad \lambda_3 = m_1 m_2 a^3 > 0.$$

Claramente se cumplen las condiciones del inciso anterior, entonces existe una CC no colineal, y por (40) la CC es homotópica a un triángulo con lados a, b, c .

■

3.4 Observación.

Es interesante señalar que en el problema newtoniano de tres cuerpos, la única Configuración Central no Colineal es la que tiene forma de triángulo equilátero. Este resultado se extiende al problema cargado, de tal manera que ahora cualquier configuración triangular puede ser una Configuración Central!

Otro hecho que vale la pena resaltar es que para poder tener Configuraciones Centrales no colineales λ_1, λ_2 y λ_3 deben tener el mismo signo.

3.5 Configuraciones Centrales Colineales (CCC)

Para hacer el conteo de CCC , es necesario considerar las diferentes ordenaciones posibles entre 3 partículas. Cada ordenación está caracterizada por la partícula que se encuentra en la posición interior, por lo que existen exactamente 3 ordenaciones: 2-1-3, 1-2-3, 1-3-2. Recordemos que estamos considerando clases de equivalencia bajo rotaciones y homotecias.

Cuando hacemos el análisis de la ordenación 1-2-3, estamos considerando todos los posibles valores de las masas y cargas de las tres partículas. Entonces el estudio para las

otras dos ordenaciones esta totalmente determinado, únicamente se necesita renombrar las masas y cargas, para tener la misma sucesión de índices en los parámetros.

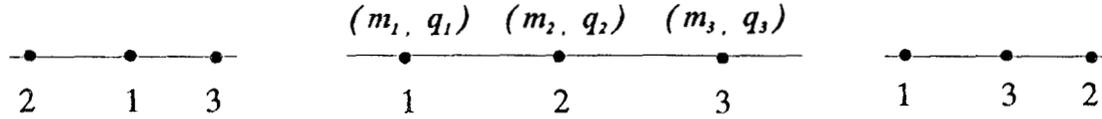


FIGURA 3.2 Tres partículas colineales se pueden ordenar en tres formas posibles, incluyendo rotaciones.

* Para una terna (m_1, q_1) , (m_2, q_2) , (m_3, q_3) con la ordenación 2-1-3 definimos

$$(\bar{m}_1, \bar{q}_1) = (m_2, q_2), \quad (\bar{m}_2, \bar{q}_2) = (m_1, q_1), \quad (\bar{m}_3, \bar{q}_3) = (m_3, q_3), \quad (42)$$

lo cual implica que $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_3$.

* Y para una terna (m_1, q_1) , (m_2, q_2) , (m_3, q_3) con la ordenación 1-3-2 definimos

$$(\hat{m}_1, \hat{q}_1) = (m_1, q_1), \quad (\hat{m}_2, \hat{q}_2) = (m_3, q_3), \quad (\hat{m}_3, \hat{q}_3) = (m_2, q_2), \quad (43)$$

lo cual implica que $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \hat{\lambda}_3$, $\lambda_3 = \hat{\lambda}_2$.



FIGURA 3.3 Renombramiento de las partículas, en las ordenaciones 2-1-3 y 1-3-2.

Ordenación 1-2-3. De la figura 3.1, se puede deducir que la ordenación 1-2-3, está caracterizada por la suma de distancias

$$\mu s_1 + r_{23} = s_2.$$

Entonces las distancias relativas R_{ij} como funciones de ρ y θ ($\theta = 0$), adquieren expresiones simples:

$$R_{12} = 1, \quad R_{23} = \rho - \mu, \quad R_{13} = 1 + \rho - \mu.$$

Con estas observaciones, resolveremos el sistema de ecuaciones (36) y (37). La segunda de estas ecuaciones se satisface claramente, pues $\theta = 0$. Definiendo una nueva variable:

$$x = \rho - \mu,$$

que es siempre positiva en la ordenación 1-2-3, podemos expresar la ecuación (36) como un polinomio en x ,

$$\ell(x) = b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0, \quad (44)$$

donde $x > 0$, y

$$\begin{aligned} b_5 &= \lambda_3, \\ b_4 &= \lambda_3(\mu + 2), \\ b_3 &= \lambda_3(2\mu + 1) + \lambda_2(1 - \mu) - \lambda_1\mu, \\ b_2 &= \lambda_3\mu - \lambda_2\mu \frac{m_2}{m_3} - \lambda_1\mu \left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right), \\ b_1 &= -\lambda_1\mu \left(3 + 2\frac{m_2}{m_3}\right), \\ b_0 &= -\lambda_1\mu \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right). \end{aligned}$$

De esta manera, cada solución positiva de $\ell(x) = 0$, representa una clase de *CCC*. Entonces el número de *CCC* es el número de soluciones positivas y diferentes, de $\ell(x) = 0$, pues soluciones múltiples representan una misma *CCC*. Haremos el conteo en dos partes: cuando ningún λ_i es cero, y cuando al menos un λ_i es cero.

3.5.1 CCC donde ningún λ_i se anula

Supongamos que las masas y cargas son tales que todos los λ_i son diferentes de cero, entonces multiplicamos el polinomio $\ell(x)$ por $\frac{m_1 + m_2}{m_2\lambda_2}$, obteniendo

$$p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (45)$$

donde $x > 0$, y

$$a_5 = \beta_3,$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \beta_3(\mu + 2), \\
a_3 &= \beta_3(2\mu + 1) - \beta_1 + 1, \\
a_2 &= \beta_3\mu - \beta_1\left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right) - \frac{m_1}{m_3}, \\
a_1 &= -\beta_1\left(3 + 2\frac{m_2}{m_3}\right), \\
a_0 &= -\beta_1\left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right),
\end{aligned}$$

con

$$\beta_1 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{y} \quad \beta_3 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) \frac{\lambda_3}{\lambda_2}. \quad (46)$$

Contaremos las soluciones positivas de $p(x) = 0$, utilizando la *regla de los signos de Descartes*:

Sea $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-k_1} + \dots + a_r x^{n-k_r}$ un polinomio con coeficientes reales y no nulos, donde $0 < k_1 < \dots < k_r$. Si $L(f)$ es el número de cambios de signo en la sucesión $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$, entonces el número de raíces positivas de $f(x)$, coincide con $L(f)$, o es menor en un número par.

Considerando una sola vez las soluciones múltiples, obtenemos el número de soluciones positivas y diferentes. Determinaremos los signos de los coeficientes a_i , de acuerdo a los siguientes casos:

A) λ_1 tiene signo opuesto al de λ_2 y λ_3 . Entonces

$$\text{sign}\{\beta_1, \beta_3\} = \{-, +\}, \quad \text{y} \quad \text{sign}\{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{+, +, +, ?, +, +\}.$$

Dependiendo del coeficiente a_2 , hay 0 ó 2 cambios de signo. Entonces existen 0, 1 ó 2 soluciones positivas y diferentes, el caso donde tenemos una solución positiva corresponde a una raíz doble.

B) λ_2 tiene signo opuesto al de λ_1 y λ_3 . Entonces

$$\text{sign}\{\beta_1, \beta_3\} = \{-, -\}, \quad \text{y} \quad \text{sign}\{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{-, -, ?, ?, +, +\}.$$

Dependiendo de los coeficientes a_3 y a_2 , existen 1 ó 3 cambios de signo. Entonces existen 1, 2 ó 3 soluciones positivas y diferentes.

C) λ_3 tiene signo opuesto al de λ_1 y λ_2 . Entonces

$$\text{sign} \{\beta_1, \beta_3\} = \{+, -\}, \quad \text{y} \quad \text{sign} \{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{-, -, ?, -, -, -\}.$$

Dependiendo del coeficiente a_3 , existen 0 ó 2 cambios de signo. Entonces existen 0, 1 ó 2 soluciones positivas diferentes.

D) λ_1, λ_2 y λ_3 , tienen el mismo signo. Entonces

$$\text{sign} \{\beta_1, \beta_3\} = \{+, +\}, \quad \text{y} \quad \text{sign} \{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{+, +, ?, ?, -, -\}.$$

No es difícil probar que $a_2 > 0$ y $a_3 < 0$ no pueden suceder simultáneamente. Esto se sigue de la relación de dependencia que existe entre ellos,

$$a_3 = a_2 + 1 + \frac{m_1}{m_3} + \beta_3(1 + \mu) + \beta_1\left(2 + \frac{m_2}{m_3}\right).$$

Por lo tanto, sólo existe un cambio de signo, y exactamente una solución positiva.

Recordemos que por cada solución de $p(x)$ positiva y diferente, obtenemos una clase de CC . La siguiente figura muestra los resultados anteriores, indicando en cada cuadrante del plano $\beta_1\beta_3$, el número posible de CCC .

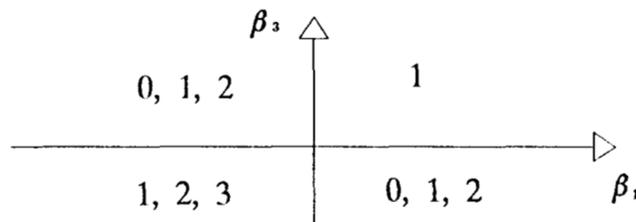


FIGURA 3.4 Números posibles de CCC en la ordenación 1-2-3, donde ningún λ_i se anula.

Conteo Total de CCC donde ningún λ_i se anula

Para hacer el conteo de CCC en las ordenaciones 2-1-3 y 1-3-2, aplicamos los renombramientos dados en (42) y (43). Entonces se repite el análisis de la ordenación 1-2-3, pero con superíndices en todos los parámetros. Para esto se definen $\bar{\mu}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3$ y $\hat{\mu}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3$, de manera que

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} = \frac{m_2}{m_2 + m_1},$$

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_3},$$

$$\bar{\beta}_1 = \left(\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \right) \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\hat{\beta}_1 = \left(\frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_2} \right) \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2} = \left(\frac{m_1}{m_3} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_3},$$

$$\bar{\beta}_3 = \left(\frac{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}{\bar{m}_2} \right) \frac{\bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_2} = \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1} \right) \frac{\lambda_3}{\lambda_1},$$

$$\hat{\beta}_3 = \left(\frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{m}_2} \right) \frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_2} = \left(\frac{m_3 + m_1}{m_3} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Finalmente, se aplica el esquema de la figura 3.4, para tener el número posible de *CCC* en las ordenaciones 2-1-3 y 1-3-2.

A) λ_1 tiene signo opuesto al de λ_2 y λ_3 . Entonces

$(\beta_1, \beta_3) \in 2Q$, y existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3) \in 3\bar{Q}$, entonces existen 1, 2 ó 3 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \in 2\hat{Q}$, entonces existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ó 7 *CCC*.

B) λ_2 tiene signo opuesto al de λ_1 y λ_3 . Entonces

$(\beta_1, \beta_3) \in 3Q$, y existen 1, 2 ó 3 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3) \in 2\bar{Q}$, entonces existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \in 4\hat{Q}$, entonces existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ó 7 *CCC*.

C) λ_3 tiene signo opuesto al de λ_1 y λ_2 . Entonces

$(\beta_1, \beta_3) \in 4Q$, y existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3) \in 4\bar{Q}$, entonces existen 0, 1 ó 2 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \in 3\hat{Q}$, entonces existen 1, 2 ó 3 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ó 7 *CCC*.

D) λ_1, λ_2 y λ_3 , tienen el mismo signo. Entonces

$(\beta_1, \beta_3) \in 1Q$, y existe 1 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3) \in 1\bar{Q}$, entonces existe 1 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \in 1\hat{Q}$, entonces existe 1 CCC en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen exactamente 3 CCC.

3.5 Teorema.

Si todas las λ_i son diferentes de cero, es posible tener 1, 2, 3, 4, ó 5 Configuraciones Centrales Colineales.

DEMOSTRACION. Lo único que se tiene que probar, es que no existen ejemplos con 6 ó 7 CCC.

A) λ_1 tiene signo opuesto al de λ_2 y λ_3 .

Supongamos que existen 6 ó 7 CCC, entonces debe suceder que $(\beta_1, \beta_3) \in 2Q$ y $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) \in 2\hat{Q}$ estén simultaneamente en la región de 1 ó 2 CCC, veremos que esto es imposible.

En este caso, los coeficientes a_5, a_4, a_3, a_1, a_0 son positivos, y lo mismo es cierto para $\hat{a}_5, \hat{a}_4, \hat{a}_3, \hat{a}_1, \hat{a}_0$. Entonces por la regla de los signos de Descartes, (β_1, β_3) y $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3)$ están en la región de 1 ó 2 CCC, si $a_2 < 0$ y $\hat{a}_2 < 0$. Es decir, si

$$\beta_3\mu - \beta_1 \left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right) - \frac{m_1}{m_3} < 0, \text{ y}$$

$$\hat{\beta}_3\hat{\mu} - \hat{\beta}_1 \left(3 + \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_3}\right) - \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_3} < 0.$$

Usando las relaciones (43) y (42), podemos escribir ambas ecuaciones en términos de $\beta_1, \beta_3, \mu, m_1, m_2,$ y m_3 , obteniendo

$$\beta_3\mu - \beta_1 \left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right) - \frac{m_1}{m_3} < 0,$$

$$\frac{m_1(m_1 + m_2)}{m_2 m_3} - \beta_1 \left(3 + \frac{m_3}{m_2}\right) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_3}\right) - \frac{m_1}{m_2} \beta_3 < 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por $\frac{m_1}{m_2}$, la segunda por μ y sumandolas tenemos que

$$-\beta_1 \left[\left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right) \frac{m_1}{m_2} + \left(\frac{m_1 + m_2}{m_3}\right) \left(3 + \frac{m_3}{m_2}\right) \mu \right] < 0,$$

lo cual es una contradicción ya que $\beta_1 < 0$. El análisis en los casos restantes es similar.



Es importante señalar que para tres partículas colineales, sin carga y con masas cualquiera, existe una *CCC* por cada ordenación posible (Teorema de Moulton). En cambio, de la demostración anterior se deduce que en general no existen *CCC* para todas las ordenaciones, esto prueba el siguiente resultado.

3.6 Lema.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son diferentes de cero y no tienen el mismo signo, entonces hay ordenaciones colineales donde no existen Configuraciones Centrales.

3.5.2 Conteo de *CCC* donde al menos un λ_i se anula

Suponiendo que al menos un λ_i se anula, continuaremos aplicando el procedimiento de la sección 3.5.1.

i) Los tres λ_i 's se anulan.

La función potencial está dada por $U \equiv 0$, y por definición no existen *CC*.

ii) Exactamente dos λ_i 's se anulan.

La función potencial U , toma la forma de un problema de Kepler repulsivo o atractivo, dependiendo del signo de la λ_i que no se anula. Por lo tanto, no existen *CC*.

iii) Exactamente un λ_i se anula. Empezaremos analizando la configuración 1-2-3.

iii-a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$.

Como la única restricción para obtener *CCC* mediante $p(x) = 0$, es que $\lambda_2 \neq 0$, entonces para este caso $\beta_1 = 0$ y $\beta_3 \neq 0$.

Si $\beta_3 > 0$, entonces $\text{sign} \{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{+, +, +, ?, 0, 0\}$. Por la regla de los signos de Descartes, si $a_2 > 0$ o $a_2 < 0$ entonces existen 0 ó 1 soluciones positivas de $p(x)$, respectivamente.

Si $\beta_3 < 0$, entonces $\text{sign} \{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{-, -, ?, -, 0, 0\}$. Por lo tanto, existen 0, 1 ó 2 soluciones de $p(x)$ positivas y diferentes.

iii-b) $\lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Nuevamente podemos utilizar la ecuación $p(x) = 0$, para obtener CCC . Entonces $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_3 = 0$.

Si $\beta_1 > 0$, entonces $\text{sign}\{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{0, 0, ?, -, -, -\}$. Por la regla de los signos de Descartes, si $a_3 > 0$ o $a_3 < 0$ entonces existen 1 ó 0 soluciones positivas de $p(x)$, respectivamente.

Si $\beta_1 < 0$, entonces $\text{sign}\{a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\} = \{0, 0, +, ?, +, +\}$. Por lo tanto, existen 0, 1 ó 2 soluciones de $p(x)$ positivas y diferentes.

iii-c) $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$.

Podríamos usar la ecuación $\ell(x) = 0$, pero tenemos mejor información considerando $\lambda_2 = 0$ en la obtención de $\ell(x)$, pues resulta un polinomio de tercer grado,

$$x^3 + \mu x^2 - \mu \frac{\lambda_1}{\lambda_3} x - \mu \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) = 0.$$

Si λ_1 y λ_3 tienen el mismo signo, entonces los signos de los coeficientes son $\{+, +, -, -\}$. Por lo tanto, hay exactamente una solución positiva.

Si λ_1 y λ_3 tienen signos opuestos, entonces los signos de los coeficientes son $\{+, +, +, +\}$. Por lo tanto, no existen soluciones positivas.

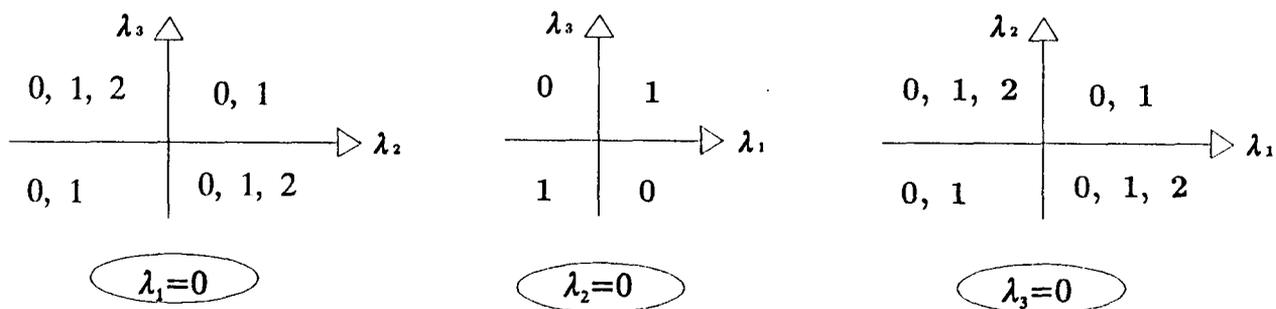


FIGURA 3.5 Números posibles de CCC en la ordenación 1-2-3, donde exactamente un λ_i se anula.

Conteo Total de CCC donde al menos un λ_i se anula

Ahora haremos el conteo total de CCC donde exactamente un λ_i se anula.

0) Si 2 ó 3 λ_i se anulan, entonces existen 0 CCC .

1.a) $\lambda_1 = 0$, λ_2 y λ_3 tienen signos iguales.

$(\lambda_2, \lambda_3) \in 1Q$ con $\lambda_1 = 0$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3) \in 1\bar{Q}$ con $\bar{\lambda}_2 = 0$, entonces existe 1 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \in 1\hat{Q}$ con $\hat{\lambda}_1 = 0$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, ó 3 *CCC*.

1.b) $\lambda_1 = 0$, λ_2 y λ_3 tienen signos opuestos.

$(\lambda_2, \lambda_3) \in 2Q$ con $\lambda_1 = 0$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3) \in 2\bar{Q}$ con $\bar{\lambda}_2 = 0$, entonces existen 0 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \in 2\hat{Q}$ con $\hat{\lambda}_1 = 0$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 0, 1, 2, 3, ó 4 *CCC*.

2.a) $\lambda_2 = 0$, λ_1 , y λ_3 tienen signos iguales.

$(\lambda_1, \lambda_3) \in 1Q$, entonces existe 1 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \in 1\bar{Q}$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in 1\hat{Q}$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, ó 3 *CCC*.

2.b) $\lambda_2 = 0$, λ_1 y λ_3 tienen signos opuestos.

$(\lambda_1, \lambda_3) \in 2Q$, entonces existen 0 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1) \in 2\bar{Q}$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in 2\hat{Q}$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 0, 1, 2, 3, ó 4 *CCC*.

3.a) $\lambda_3 = 0$, λ_1 , y λ_2 tienen signos iguales.

$(\lambda_1, \lambda_2) \in 1Q$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) \in 1\bar{Q}$, entonces existen 0 ó 1 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) \in 1\hat{Q}$, entonces existe 1 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 1, 2, ó 3 *CCC*.

3.b) $\lambda_3 = 0$, λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos.

$(\lambda_1, \lambda_2) \in 2Q$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 1-2-3.

$(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) \in 2\bar{Q}$, entonces existen 0, 1, ó 2 *CCC* en la ordenación 2-1-3.

$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) \in 2\hat{Q}$, entonces existen 0 *CCC* en la ordenación 1-3-2.

Por lo tanto, en este caso existen 0, 1, 2, 3, ó 4 *CCC*.

3.7 Teorema.

Si exactamente un λ_i se anula, entonces existen 0, 1, ó 2 Configuraciones Centrales Colineales.

DEMOSTRACION. Sólo debemos probar que no existen ejemplos con 3, ó 4 *CCC*.

1.a) $\lambda_1 = 0$, λ_2 y λ_3 tienen signos iguales.

Mostraremos que no existen ejemplos con 3 *CCC*. Supongamos que

$$(\lambda_2, \lambda_3) \in 1Q \text{ con } \lambda_1 = 0, \quad \text{y} \quad (\hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_2) \in 1\hat{Q} \text{ con } \hat{\lambda}_1 = 0,$$

están simultáneamente en la región de 1 *CCC*. Para que esto suceda, es necesario que $a_2 < 0$ y $\hat{a}_2 < 0$ entonces

$$\begin{aligned} \beta_3 \mu - \frac{m_1}{m_3} &< 0, \\ \hat{\beta}_3 \hat{\mu} - \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_3} &< 0. \end{aligned}$$

Usando las relaciones (42) y (43) sobre estas desigualdades, obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} \beta_3 &< \frac{m_1 + m_2}{m_3}, \\ \beta_3 &> \frac{m_1 + m_2}{m_3}. \end{aligned}$$

Esto evidentemente no puede suceder, y por lo tanto, las ordenaciones 1-2-3 y 1-3-2 no tienen *CCC* simultáneamente.

1.b) $\lambda_1 = 0$, λ_2 y λ_3 tienen signos opuestos.

Mostraremos que no existen ejemplos con 3 ó 4 *CCC*. Supongamos que

$$(\lambda_2, \lambda_3) \in 2Q \text{ con } \lambda_1 = 0, \quad \text{y} \quad (\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \in 2\hat{Q} \text{ con } \hat{\lambda}_1 = 0,$$

están simultáneamente en la región de 1 ó 2 *CCC*. Para que esto suceda, es necesario que $a_3 > 0$ y $\hat{a}_3 > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\beta_3(2\mu + 1) + 1 &> 0, \\ \hat{\beta}_3(2\hat{\mu} + 1) + 1 &> 0.\end{aligned}$$

Usando las relaciones (42) y (43) sobre estas desigualdades, obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned}\beta_3 &> \frac{-1}{2\mu + 1}, \\ \beta_3 &< \frac{-(m_1 + m_2)(3m_1 + m_3)}{m_2m_3}.\end{aligned}$$

Pero esto no puede suceder porque

$$\frac{-(m_1 + m_2)(3m_1 + m_3)}{m_2m_3} < \frac{-1}{2\mu + 1}.$$

Por lo tanto, las ordenaciones 1-2-3 y 1-3-2 no tienen *CCC* simultáneamente.

En los demás casos sucede lo mismo que en 1.a) y 1.b)

■

Con esta demostración podemos extender el resultado del Lema 3.6.

3.8 Lema.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no tienen el mismo signo, y cuando más, uno de ellos es cero, entonces hay ordenaciones colineales donde no existen Configuraciones Centrales.

3.6 Número Total de Configuraciones Centrales

A continuación presentamos una recopilación de los resultados obtenidos en este capítulo.

3.9 Teorema.

Dadas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$ y $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, construimos los parámetros λ_i , $i = 1, 2, 3$. Entonces,

- i) si al menos dos λ_i se anulan, hay 0 CC .
- ii) Si exactamente un λ_i se anula, existen 0, 1, ó 2 CC (todas colineales).
- iii) Si todos los λ_i tienen el mismo signo, y se satisface la relación (38) tenemos 5 CC , de las cuales, dos son no colineales y tres son colineales (una por cada posible ordenación).
Si todos los λ_i tienen el mismo signo y (38) no se cumple, entonces sólo tenemos las CC colineales.
- iv) Si no todos los λ_i tienen el mismo signo, entonces podemos tener 1, 2, 3, 4, ó 5 CC (todas ellas colineales).

3.7 Conclusiones

En el capítulo 2 mencionamos resultados importantes del problema de n -cuerpos sobre Configuraciones Centrales (CC), como son el Teorema de Moulton, el Teorema de 45° , y el Teorema del Bisector. Esto se hizo con el objetivo de entenderlos y observar lo que sucede cuando además de masas, suponemos que las partículas también tienen cargas electrostáticas. Esto implica combinaciones muy diversas de fuerzas atractivas y repulsivas entre partículas, lo que hace natural que surgan cambios en los diversos resultados del problema de n -cuerpos, particularmente los relacionados con las CC .

Con el estudio de CC en el problema cargado de 3 cuerpos, pudimos observar semejanzas y diferencias con el correspondiente problema newtoniano. Respecto de las CC no colineales, existen dos para cada selección de masas y cargas (igual que en el caso newtoniano), siempre que se satisfaga la condición (38). Del Teorema 3.3 es importante resaltar que las CC no colineales pueden tener cualquier forma triangular (en el caso newtoniano, sólo los triángulos equiláteros forman CC no Colineales). En el caso que las masas predominan sobre las cargas, las CC no colineales tienen formas muy cercanas a los triángulos equiláteros, ver (40); y en el caso que las cargas sean las que predominen, las CC no colineales pueden tener cualquier forma triangular.

El conteo de CC colineales (CCC) de este problema cargado, también tiene aspectos interesantes como es la existencia de hasta 3 CCC para una ordenación colineal de partículas, pero en otra de las ordenaciones tenemos 0 CCC (en el caso newtoniano, hay exactamente 1

CCC por cada ordenación). En general, el conteo sólo puede ser de 2 formas; uno es cuando los parámetros λ_{ij} tienen el mismo signo, existiendo una CCC para cada ordenación; la otra forma posible es cuando los λ_{ij} tienen signos diferentes, entonces hay 0 CCC en una ordenación, 1 ó 3 CCC en otra, y 0 ó 2 CCC en la ordenación restante. Si las masas predominan sobre las cargas tenemos 1 CCC por cada ordenación y cuando las cargas son las que predominan entonces tenemos cualquiera de las dos situaciones anteriores.

Observemos también, que en los problemas cargados podemos tener CC “casi colineales”; esto nos permite concluir que teoremas importantes sobre Configuraciones Centrales en el problema de n -cuerpos, como son el Teorema de Moulton, el Teorema de 45° , y el Teorema del Bisector, dejan de cumplirse en los problemas cargados.

Capítulo 4

El problema romboidal cargado de 4 cuerpos

En este capítulo describiremos el movimiento de cuatro partículas, cuya dinámica es producida por dos tipos de fuerzas: gravitacional, y electrostática. Las partículas se mueven con la restricción de mantener en todo momento una configuración romboidal. Por lo mismo, lo llamaremos el **Problema Romboidal Cargado**.

Si consideramos nulas todas las cargas, lo anterior se convierte en el Problema Romboidal Newtoniano [11], el cual se puede reducir al estudio de una familia a un parámetro de sistemas hamiltonianos, donde el parámetro α es la razón de masas. En cambio, el Problema Romboidal Cargado que también se reduce a una familia de sistemas hamiltonianos, tiene 3 parámetros, esta es una diferencia esencial respecto al caso newtoniano.

Como en todo sistema hamiltoniano, el hamiltoniano es una *integral primera*, así el espacio fase está “foliado” por las superficies de energía constante E_h . Aquí, nos limitaremos a describir la dinámica global en el caso $h = 0$.

4.1 Ecuaciones de movimiento

Consideremos 4 partículas puntuales colocadas en los vértices de un rombo, cada partícula tiene masa positiva $m_i \in \mathbb{R}^+$, y carga de cualquier signo $q_i \in \mathbb{R}$. Damos condiciones iniciales simétricas respecto a las diagonales del rombo en posiciones y velocidades, de tal forma que las partículas siempre mantengan la configuración romboidal, cuando se mueven bajo la acción de las fuerzas gravitacional y electrostática. Para mantener esta configuración simétrica es necesario tener $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$, $q_1 = q_2$, $q_3 = q_4$, salvo en casos excepcionales como veremos después.

Sea $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$ el parámetro que mide esencialmente la diferencia entre las fuerzas gravitacional y electrostática, de manera que $\lambda_{ij} > 0$ implica que las partículas i, j se atraen, y con $\lambda_{ij} < 0$ se repelen.

Ahora introducimos coordenadas tipo Jacobi. Sean x la semidistancia entre las partículas 1 y 2; y la semidistancia entre las partículas 3 y 4; y $\alpha = m_3/m_1$. No se pierde generalidad al suponer $m_1 = m_2 = 1$, entonces $m_3 = m_4 = \alpha$. En estas coordenadas las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= - \left[\frac{\lambda_{12}}{4x^2} + \frac{2\lambda_{13}x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \\ \ddot{y} &= - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\lambda_{34}}{4y^2} + \frac{2\lambda_{13}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \tag{47}$$

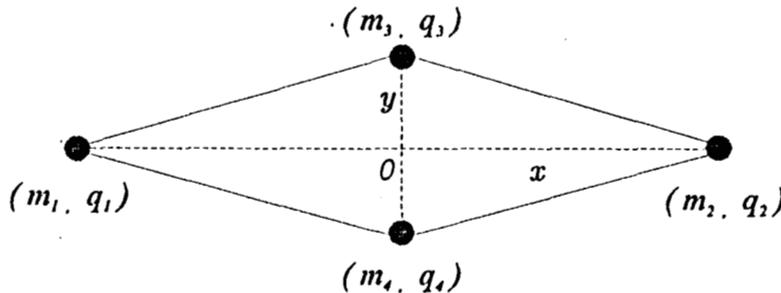


FIGURA 4.1 Esquema romboidal de las partículas 1, 2, 3, 4.

4.1 Observación.

Cuando $\lambda_{12} = \lambda_{34} = 0$, y $\alpha = 1$, se tiene el equivalente de un problema de dos cuerpos. Las ecuaciones (47) corresponden a un problema de Kepler atractivo o repulsivo, dependiendo del signo de λ_{13} [6].

Cuando $\lambda_{12} = \lambda_{34} = 0$, y $\alpha \neq 1$, tenemos un problema anisotrópico de Kepler [10]. Aunque las ecuaciones de movimiento son muy parecidas al problema de Kepler, las órbitas que se obtienen son bastante diferentes.

En adelante supondremos que λ_{12} y λ_{34} son diferentes de cero.

Haciendo $\mathbf{r} = (x, y)^T$, $M = \text{diag}\{2, 2\alpha\}$, y $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{r}}$, las ecuaciones (47) forman un sistema hamiltoniano con 2 grados de libertad,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},\end{aligned}\tag{48}$$

donde el hamiltoniano está dado por

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p} - U(\mathbf{r}),\tag{49}$$

y la energía potencial U por

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_{12}}{2x} + \frac{4\lambda_{13}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\lambda_{34}}{2y}.\tag{50}$$

Para cada solución $\varphi(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ del sistema (48), se tiene $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi) = 0$, entonces $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ es constante a lo largo de la solución $\varphi(t)$. Luego, el espacio fase está dividido en conjuntos invariantes con energía constante, llamados

$$\text{niveles de energía : } E_h = \{(\mathbf{r}, \mathbf{p}) : H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = h\}.\tag{51}$$

La proyección de E_h al espacio de configuraciones, recibe el nombre de región de Hill, la cual está dada por

$$\text{región de Hill de } E_h = \{(x, y) : U(x, y) + h \geq 0\}.\tag{52}$$

Con el objetivo de que la matriz de masas del hamiltoniano no dependa de α , hacemos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}x_1 &= x, \\ x_2 &= \sqrt{\alpha}y,\end{aligned}\tag{53}$$

y escribiendo las ecuaciones (47) en las coordenadas x_1, x_2 , tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= - \left[\frac{\lambda_{12}}{4x_1^2} + \frac{2\lambda_{13} \alpha^{\frac{3}{2}} x_1}{(\alpha x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \\ \ddot{x}_2 &= -\sqrt{\alpha} \left[\frac{\lambda_{34}}{4x_2^2} + \frac{2\lambda_{13}x_2}{(\alpha x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right].\end{aligned}\tag{54}$$

El parámetro α es cualquier número positivo, pero por la simetría del problema es suficiente estudiar el caso donde $\alpha \in (0, 1]$. Para el caso $\alpha > 1$, basta con invertir los ejes coordenados.

Existen dos formas de seleccionar las masas y cargas, para tener un problema romboidal:

Caso A: $m_1 = m_2, m_3 = m_4, q_1 = q_2, q_3 = q_4, y$

Caso B: $m_1 = m_2, m_3 = m_4, q_3 = q_4 = 0, q_1, q_2$ cualquiera.

Este último caso es explicable, si consideramos que sólo hay interacción electrostática entre las partículas 1, 2, y su movimiento se mantiene simétrico respecto del centro geométrico. Para esto, basta analizar un sistema de 2 partículas con masas iguales m , y cargas arbitrarias. Las ecuaciones que describen su movimiento son:

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{r}}_1 &= F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ m\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),\end{aligned}$$

donde F es la fuerza resultante que actúa entre ambas partículas. Si el centro de masa está fijo en el origen de coordenadas, y damos condiciones iniciales simétricas en la posición y la velocidad, entonces el movimiento de ambas partículas es simétrico.

Parámetros independientes.

En las ecuaciones (54), tenemos una familia de sistemas de ecuaciones con parámetros independientes: $\{\alpha, q_1, q_3\}$ en el caso A, y $\{\alpha, q_1, q_2\}$ en el caso B.

Ahora mostraremos la dependencia que existe entre los parámetros $\alpha, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{34}$, expresándolos en términos de masas y cargas (aunque son dependientes, en adelante por comodidad para el manejo de las expresiones algebraicas resultantes, seguiremos trabajando con los últimos 4 parámetros).

$$\text{Caso A :} \quad \lambda_{12} = 1 - q_1^2, \quad \lambda_{34} = \alpha^2 - q_3^2, \quad \lambda_{13} = \alpha - q_1 q_3, \quad (55)$$

entonces

$$\lambda_{12} = 1 - \frac{(\alpha - \lambda_{13})^2}{\alpha^2 - \lambda_{34}}. \quad (56)$$

Por lo tanto, los parámetros α , λ_{34} , λ_{13} , son independientes.

$$\text{Caso B :} \quad \lambda_{12} = 1 - q_1 q_2, \quad \lambda_{34} = \alpha^2, \quad \lambda_{13} = \alpha. \quad (57)$$

Por lo tanto, los parámetros independientes son α y λ_{12} .

OBSERVACIÓN. Usando (55) y (57) encontramos en ambos casos, A y B, que

$$\lambda_{12} > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{34} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{13} > 0. \quad (58)$$

Lo contrario implica un sistema de desigualdades que no tiene solución. Físicamente, significa que no puede suceder simultáneamente, la atracción entre partículas opuestas y repulsión entre partículas no opuestas (figura 4.2).

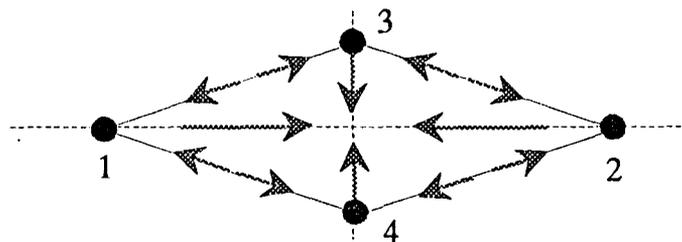


FIGURA 4.2 No existen masas y cargas para esta combinación de fuerzas atractivas y repulsivas.

4.2 Coordenadas de McGehee

En el problema romboidal existen dos tipos de colisiones (*dos o más partículas están en colisión, cuando ocupan la misma posición simultáneamente*), las colisiones dobles entre partículas opuestas cuando $x_1 = 0$ ó $x_2 = 0$, y las colisiones cuádruples cuando $x_1 = x_2 = 0$.

Cualquier tipo de colisión implica una singularidad en el campo vectorial (54), pues las componentes tienden a infinito en el momento de la colisión, y estas son las únicas singularidades del sistema. A continuación eliminaremos la singularidad causada por colisión total, mediante una técnica introducida por McGehee [13], esta técnica viene de la geometría algebraica y es llamada *explosión del origen*. Consiste de una serie de cambios de coordenadas aunadas con una reparametrización del tiempo. En Mecánica Celeste a las coordenadas finales de estos cambios les llamaremos Coordenadas de McGehee, que en nuestro caso están definidas por

$$r = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad v = r^{\frac{1}{2}}\dot{r}, \quad u = r^{\frac{3}{2}}\dot{\theta}. \quad (59)$$

El significado geométrico de estas coordenadas es el siguiente: r, θ son coordenadas de posición, esencialmente las coordenadas polares en el plano x_1x_2 , restringidas al espacio de configuración (en este caso el primer cuadrante). v es la velocidad radial \dot{r} reescalada por $r^{\frac{1}{2}}$, y u es la velocidad tangencial $r\dot{\theta}$ reescalada por $r^{\frac{1}{2}}$.

El sistema de ecuaciones (54) en coordenadas (r, v, θ, u) , sigue presentando la singularidad por colisión total ($r = 0$), pero ahora es fácilmente removible mediante el reescalamiento de tiempo $\frac{dt}{d\tau} = r^{\frac{3}{2}}$. Entonces continuando con la notación de punto para derivar, pero ahora significando derivada respecto del nuevo tiempo τ , las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= rv, \\ \dot{v} &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta), \\ \dot{\theta} &= u, \\ \dot{u} &= -\frac{uv}{2} + U'(\theta), \end{aligned} \quad (60)$$

con relación de energía

$$u^2 + v^2 = 2U(\theta) + 2hr, \quad (61)$$

donde $U(\theta)$ está dada por (62), y $U'(\theta)$ significa derivada respecto de θ .

$$U(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{8\lambda_{13}}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{\lambda_{34}}{\operatorname{sen} \theta} \right], \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (62)$$

Con las coordenadas de McGehee, hemos eliminado la singularidad por colisión total del campo vectorial. Más aún, hemos extendido el campo vectorial en forma analítica a la frontera $r = 0$, a la cual llamaremos *variedad de colisión total*:

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) : r = 0, \quad v^2 + u^2 = 2U(\theta), \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}. \quad (63)$$

Esta variedad es invariante, ya que $r = 0$ implica $\dot{r} = 0$, es de dimensión dos, y generalmente contiene puntos de equilibrio. Desde el punto de vista físico, Λ y por tanto el flujo sobre Λ son ficticios pero dan información del comportamiento cerca de colisión total.

Además, dado que Λ es independiente de la energía h , tenemos que la variedad de colisión es frontera común de todos los niveles de energía E_h (64). Lo anterior se puede entender mejor, si pensamos en la variedad de colisión como el lomo de un libro, y un número infinito de hojas que son los niveles de energía

$$E_h = \{(r, v, \theta, u) : r > 0; \quad u^2 + v^2 = 2U(\theta) + 2hr, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}. \quad (64)$$

OBSERVACIÓN. Ya que el potencial $U(q)$ dado por (50) es homogéneo de grado -1, al escribirlo en términos de coordenadas polares (r, θ) vemos que el potencial depende esencialmente de θ , por lo que abusando de notación escribimos $U(\theta)$.

4.3 Gráficas de $U(\theta)$

En el apéndice al final de este capítulo, hacemos un análisis minucioso del potencial $U(\theta) : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por (62), encontrándose que la gráfica correspondiente tiene 10 formas cualitativamente diferentes, U_1, U_2, \dots, U_{10} mostradas en la tabla 1. Como aspectos generales, podemos mencionar que $U(\theta)$ tiene dos asíntotas verticales: $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, y dependiendo de las masas y cargas, el número de puntos críticos varía entre 0 y 2 (Lema A1 del apéndice). Esto explica porque el potencial tiene una gran diversidad de formas posibles.

Para el estudio del potencial se encuentra la región de valores de los parámetros que caracterizan a cada forma, donde se hace necesaria la introducción de los siguientes parámetros:

$$\beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}}, \quad \gamma = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{34}}, \quad k = 8\gamma(\alpha - 1), \quad (65)$$

$$\varphi = \beta - [(-8\gamma)^{2/3} - 1]^{3/2}, \quad g = \alpha^{-3/2} [\beta\alpha + (k^{2/5} - 1)^{5/2}].$$

De ellos, φ está definida únicamente cuando $-8\gamma > 1$, y g está definida sólo si $k > 1$. La tabla 1 se divide en dos columnas que corresponden a $\lambda_{34} > 0$ y $\lambda_{34} < 0$, en el primer caso están las formas U1, U4, U6, y U9, y en el segundo están las formas U2, U3, U5, U7, U8, y U10.

Por otra parte, recordemos que las configuraciones de cualquier solución del sistema (60) en E_h , únicamente pueden estar en la región de Hill (52), la cual depende de h y $U(\theta)$. En el caso que $h = 0$, está dada por

$$\text{región de Hill} = \{(x_1, x_2) : U(\theta) \geq 0 \text{ donde } \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}\}.$$

Como estaremos mencionando constantemente las colisiones dobles entre las partículas i, j , simplemente escribiremos “la colisión doble i - j ”. Con las regiones de Hill podemos conocer el tipo de colisiones dobles que se obtienen, recordemos que $x_1 = 0$ representa la colisión doble 1-2, y $x_2 = 0$ implica la colisión doble 3-4. Así por ejemplo, las soluciones de (60) con potencial U5 y energía $h = 0$, sólo tienen la colisión doble 1-2. En este caso, $\lambda_{34} < 0$ y $\lambda_{12} > 0$ que implican repulsión entre las partículas 3 y 4, y atracción entre las partículas 1 y 2, respectivamente. Para las soluciones de (60) con potencial U3 y $h = 0$, no existen ningún tipo de colisiones dobles, pues $\lambda_{34} < 0$ y $\lambda_{12} < 0$ que implican repulsión entre partículas opuestas. Ver tabla 1 en el apéndice.

Como veremos posteriormente, los puntos críticos del potencial generan soluciones homotéticas del sistema (60), donde la configuración fija es una CC. Entonces queda clara la importancia de remarcar que el potencial puede tener hasta dos puntos críticos, pues esta es una diferencia notable respecto del problema romboidal newtoniano (partículas con carga cero), donde existe exactamente un punto crítico, y por tanto una única Configuración Central [11].

Casos Genéricos

Considerando que un subconjunto de \mathbb{R}^n tiene medida de Lebesgue positiva, si contiene un abierto de \mathbb{R}^n , entonces:

Las formas U1, U2, hasta U7, de la tabla 1, están representadas en el espacio de parámetros por conjuntos de medida positiva, y los llamaremos casos genéricos. Los potenciales U8, U9, y U10, son los casos degenerados pues tienen medida cero en el espacio de parámetros.

4.4 Puntos de equilibrio

Dado que cualquier solución del sistema (60) debe satisfacer la relación de energía (61), entonces los puntos de equilibrio $(r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ del sistema (60), además de anular el campo vectorial correspondiente, también deben satisfacer la relación de energía. Considerando lo anterior, los puntos de equilibrio se obtienen de resolver:

$$r_0 v_0 = 0, \quad h r_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad U'(\theta_0) = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = \pm \sqrt{2U(\theta_0)},$$

de donde podemos observar que θ_0 es punto crítico del potencial, y $U(\theta_0) \geq 0$. De esta manera: *el sistema (60) con un potencial U2, U4, U6, U7, o U9 (ver tabla 1), no tiene puntos de equilibrio. Para la forma degenerada U8, al final de esta sección hacemos algunos comentarios. Finalmente, el sistema (60) con un potencial U1, U3, U5, o U10 (ver tabla 1), si tiene puntos de equilibrio que se encuentran sobre la variedad de colisión, y están dados por*

$$\{(r_0, v_0, \theta_0, u_0) : r_0 = 0, \quad v_0 = \pm \sqrt{2U(\theta_0)} \neq 0, \quad \theta_0 \text{ p.c. de } U(\theta) \quad \text{y} \quad u_0 = 0\},$$

4.4 Definición.

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable, entonces un punto de equilibrio $x_0 \in \Omega$ del sistema $\dot{x}(t) = F(x)$, se llama hiperbólico si todos los valores propios de $DF(x_0)$ tienen parte real diferente de cero.

La hiperbolicidad es una propiedad muy importante de los puntos de equilibrio, dado que en una vecindad de ellos, el flujo no lineal es homeomorfo al flujo lineal (Teorema de Hartman-Grobman). Entonces lo que haremos es linealizar el campo vectorial dado por (60), alrededor de un punto de equilibrio, y al calcular los valores propios sabremos si este punto es hiperbólico. Para esto observemos que la coordenada v se obtiene de la relación de energía, para cualquier valor de h , alrededor de un punto donde $v \neq 0$. Esto permite

linealizar el sistema de ecuaciones (60) en las coordenadas (r, θ, u) , alrededor de cada punto de equilibrio con $v \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & U''(\theta_0) & \frac{-v_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ u \end{pmatrix} \quad (66)$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v_0, \\ \lambda_2 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16U''(\theta_0)}}{4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 16U''(\theta_0)}}{4}. \end{aligned}$$

Ahora se ve que si $U''(\theta_0) \neq 0$ entonces el punto de equilibrio es hiperbólico, implicando la existencia de variedades invariantes estables W^s o inestables W^u , y sólo en el caso en que $U''(\theta_0) = 0$ se tienen puntos de equilibrio no hiperbólicos.

4.5 Lema.

Sea $P_0 \in \Lambda$ un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (60). Entonces existen variedades invariantes en $E_h \cup \Lambda$, asociadas a P_0 con las siguientes dimensiones

1. Si $v_0 U''(\theta_0) < 0$, se tiene $\dim W^u = 1$, $\dim W^s = 2$. Respecto del flujo en Λ , P_0 es punto silla cuando $v_0 < 0$, y es punto atractor cuando $v_0 > 0$.
2. Si $v_0 U''(\theta_0) > 0$, se tiene $\dim W^u = 2$, $\dim W^s = 1$. Respecto del flujo en Λ , P_0 es punto repulsor cuando $v_0 < 0$, y es punto silla cuando $v_0 > 0$.

DEMOSTRACION. La dimensión de la variedad estable W^s la dá el número de valores propios con parte real negativa (positiva, si la variedad es inestable). Entonces las dimensiones de las variedades son inmediatas. Concluimos la demostración diciendo que el flujo en Λ alrededor de P_0 está determinado por los valores propios λ_2 y λ_3 , lo cual se obtiene de considerar $r \equiv 0$ en el sistema (66). ■

Derivando dos veces el potencial, se puede probar que

$$U''(\theta) = \frac{-3\sqrt{\alpha} \lambda_{34}}{\sqrt{2} \operatorname{sen}^3 \theta} \left[\frac{k}{\left(\frac{\alpha}{\tan^2 \theta} + 1\right)^{5/2}} - 1 \right] + \left[\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right] U'(\theta). \quad (67)$$

Dado que el segundo término se anula en los puntos críticos del potencial, podemos conocer los parámetros que hacen $U''(\theta_0) = 0$. Entonces obtenemos el siguiente resultado.

4.6 Lema.

El sistema (60) sólo tiene puntos de equilibrio con los potenciales U1, U3, U5, y U10. En el caso de las formas genéricas U1, U3, y U5, los puntos de equilibrio son hiperbólicos, y para la forma degenerada U10 los puntos son no hiperbólicos.

DEMOSTRACION. Al inicio de esta sección se encontró que sólo pueden existir puntos de equilibrio con los potenciales U1, U3, U5, y U10 (ver tabla 1), por lo que sólo resta analizar la hiperbolicidad. Haciendo $U''(\theta_0) = 0$ en (67) se tiene $k > 1$, $\theta_0 = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{k^{2/5} - 1}}$. Esto lo sustituimos en $U'(\theta) = 0$ ((78) del Apéndice), resultando $\beta\alpha + (k^{2/5} - 1)^{5/2} = 0$, de donde obtenemos $\beta < 0$, $g = 0$. ■

OBSERVACIÓN. Consideremos las soluciones del sistema (60) con el potencial degenerado U8, y energía $h = 0$. Entonces por (61), se deduce que u , v , y θ tienen los valores fijos 0, 0, y θ_0 , respectivamente. Luego por definición de estas coordenadas, tenemos que no existe movimiento, y que el cociente $\frac{x_1}{x_2}$ es constante. Esto se puede explicar cuando vemos en la tabla 1 que $\lambda_{12} < 0$, $\lambda_{34} < 0$, y $\lambda_{13} > 0$, lo cual implica que las partículas “opuestas” se repelen, y las “no opuestas” se atraen. Esta combinación de fuerzas se anula cuando $\theta = \theta_0$ en la configuración romboidal, de manera que la fuerza actuante sobre cada partícula es cero.

4.5 Regularización de colisiones dobles

Existe una colisión binaria entre dos partículas, únicamente cuando la fuerza entre ellas es de atracción. De manera que cuando $\lambda_{12} > 0$ y $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, se dan las colisiones dobles

1-2, similarmente cuando $\lambda_{34} > 0$ y $\theta \rightarrow 0$, suceden las colisiones 3-4. Así, en el caso que $\lambda_{12} < 0$ y $\lambda_{34} < 0$ no existen ningún tipo de colisiones dobles.

Las singularidades causadas en las ecuaciones (60) por este tipo de colisiones las eliminaremos mediante un procedimiento llamado regularización, donde se extienden analíticamente las órbitas de colisión doble más allá del tiempo de colisión. Aquí aplicaremos la regularización de Sundman que consiste en una reparametrización en el tiempo:

$\frac{dr}{ds} = f(\theta)$, y un cambio de variables: $w = uf(\theta)$, donde s es el nuevo tiempo, y $f(\theta) = \sin \theta \cos \theta$ tiene la propiedad de eliminar las singularidades del potencial (62).

Las ecuaciones de movimiento en las coordenadas r, v, θ, w , están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= rvf(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + U(\theta) + 2hr\right]f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + U(\theta) + hr\right]2f(\theta)f'(\theta) - \frac{vw}{2}f(\theta) + U'(\theta)f^2(\theta),\end{aligned}\tag{68}$$

con relación de energía dada por

$$w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2U(\theta)f^2(\theta) + 2hrf^2(\theta).\tag{69}$$

Dado que los productos $f(\theta)U(\theta)$ y $f^2(\theta)U'(\theta)$ son funciones analíticas en $[0, \frac{\pi}{2}]$, tenemos que el sistema (68) y la relación de energía (69) son analíticas para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Después de aplicar la regularización, los puntos de equilibrio del sistema se conservan, además de que la variedad de colisión y el flujo definido sobre ella alrededor de los puntos de equilibrio, se mantiene cualitativamente igual. Entonces la información sobre la hiperbolicidad y las variedades invariantes asociadas a ellos, también se conserva.

Simetría

El sistema de ecuaciones (68) tiene la siguiente simetría que denotaremos por L .

$$(r, v, \theta, w, s) \xrightarrow{L} (r, -v, \theta, -w, -s),$$

entonces para cada órbita en Λ , existe otra que se obtiene de la anterior, cambiando el signo de v, w, s . Cuando esto sucede, se dice que el flujo es reversible.

Variedad de colisión

La variedad de colisión total en las coordenadas r, v, θ, w esta dada por

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, w) : r = 0, \quad w^2 + v^2 f(\theta)^2 = 2U(\theta) f^2(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\},$$

y el flujo definido sobre Λ esta dado por

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= [-\frac{v^2}{2} + U(\theta)] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= [\frac{-v^2}{2} + U(\theta)] 2f(\theta) f'(\theta) - \frac{vw}{2} f(\theta) + U'(\theta) f^2(\theta), \end{aligned} \tag{70}$$

4.7 Definición.

Un campo vectorial F es casigradiante respecto a una función v , si v es creciente a lo largo de las soluciones de $\dot{x}(t) = F(x)$ que no son puntos de equilibrio.

4.8 Proposición.

El flujo sobre Λ es casigradiante respecto de la coordenada v .

DEMOSTRACION. Probaremos que $v(s)$ crece a lo largo de una órbita en Λ que no es punto de equilibrio. De la primera ecuación del sistema (70) y de las propiedades de $f(\theta)$, tenemos que $\dot{v} > 0$ excepto cuando $w = 0$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, donde $\dot{v} = 0$. Este caso representa un punto de inflexión de $v(s)$, pues $\ddot{v} = 0$ y $v^{(3)} \neq 0$. ■

Existen esencialmente 4 variedades de colisión $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, dadas por las formas genéricas del potencial U_1, U_3, U_5, U_7 (tabla 1), respectivamente. En la figura 4.3 se muestran las proyecciones en las coordenadas v, θ, w , de estas variedades, obtenidas por revolución alrededor del eje θ . El flujo en cualquier variedad de colisión está determinado por el sistema de ecuaciones (70), y tiene dos características generales: las líneas de flujo espiralean a contrareloj y la coordenada v es creciente a lo largo de ellas; las cuales se obtienen de la tercera ecuación de (70) y la Proposición 4.8 respectivamente. Respecto de los puntos de equilibrio, existen dos por cada punto crítico del potencial.

Con lo anterior podemos describir el flujo sobre Λ_2 y Λ_4 . En la variedad de colisión Λ_2 (homeomorfa a una esfera) hay dos puntos de equilibrio que son hiperbólicos, atractor y repulsor por el Lema 4.5. Observémos que en este caso no existen colisiones binarias pues ambos parámetros λ_{12} y λ_{34} son negativos. Las líneas de flujo giran a contrareloj y crecen en la dirección positiva de la coordenada v .

La variedad de colisión Λ_4 (homeomorfa a una esfera sin dos puntos) no tiene puntos de equilibrio, y todas las líneas de flujo son cualitativamente iguales (figura 4.4). Observemos que aquí no tenemos colisiones entre las partículas 1 y 2, ya que $\lambda_{12} < 0$.

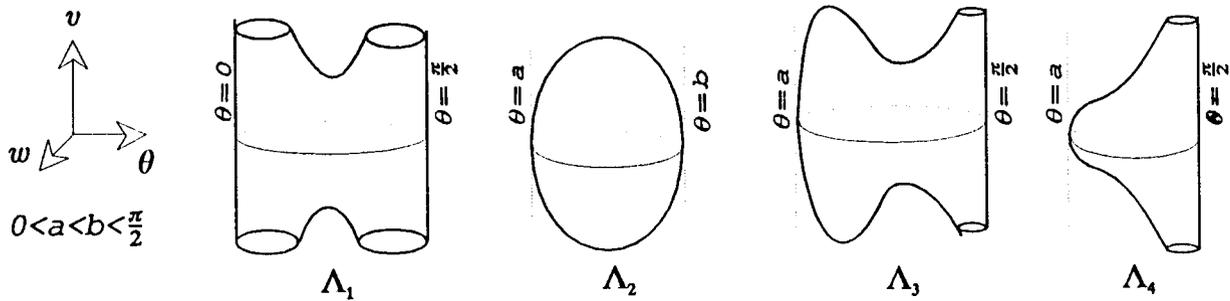


FIGURA 4.3 Las variedades de colisión.

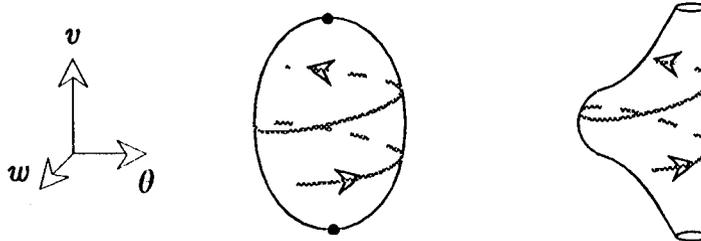


FIGURA 4.4 Flujo en las variedades de colisión Λ_2, Λ_4 .

En las variedades Λ_1 y Λ_3 (homeomorfas a una esfera menos 4 puntos y 2 puntos, respectivamente) el flujo es más complejo, debido a la presencia de puntos silla (Lema 4.5). Con estos puntos de equilibrio están asociadas variedades invariantes de dimensión uno, que son fundamentales para la determinación del flujo en ambas variedades de colisión. En el caso de Λ_1 ambos parámetros λ_{12} y λ_{34} son positivos, implicando que se presentan los dos tipos de colisiones dobles. Para el caso de Λ_3 tenemos λ_{12} negativa, y λ_{34} positiva, y por lo tanto, sólo las partículas 3 y 4 presentan colisiones binaria.

En Λ_3 hay 4 puntos de equilibrio: para $v_0 < 0$ hay un repulsor y un punto silla, y

para $v_0 > 0$ un atractor y un punto silla. Sea A el punto silla con $v_0 < 0$, entonces la variedad estable correspondiente, está constituida por las órbitas $W_A^{s,+}$ y $W_A^{s,-}$, como se muestra en la figura 4.5a. Las dos órbitas de la variedad inestable $W_A^{u,+}$, $W_A^{u,-}$ originan que el flujo que surge de ambas extremidades de Λ_3 continúe por dos bandas (figura 4.5b). Por la simetría L , el flujo para $v > 0$ se obtiene del flujo para $v < 0$, con lo cual concluimos que $W_A^{u,+}$ y $W_A^{u,-}$ determinan el flujo en la variedad de colisión.

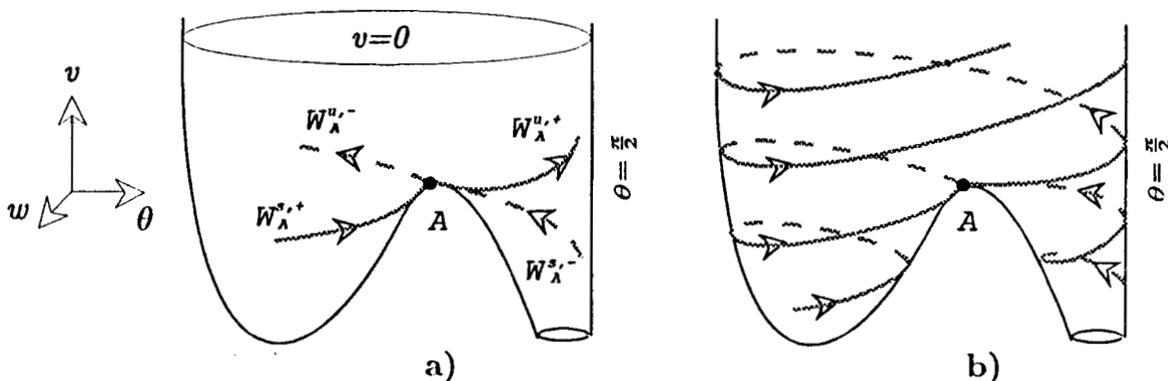


FIGURA 4.5 Variedad invariante asociada al punto silla A en Λ_3 .

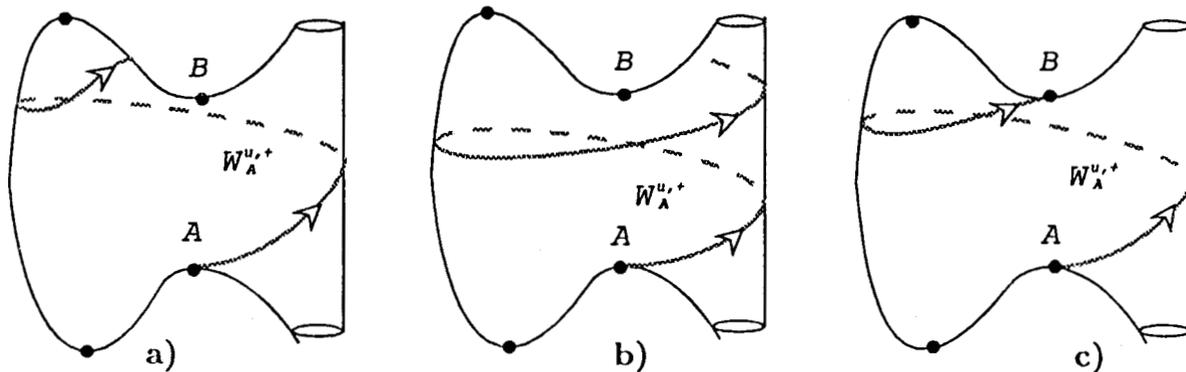


FIGURA 4.6 Diferentes comportamientos de la variedad $W_A^{u,+}$.

Ocasionalmente las órbitas $W_A^{u,-}$ o $W_A^{u,+}$ conectan a los puntos silla. Cuando esto sucede, el signo de w sobre la órbita de conexión, cerca de A puede ser igual o diferente del signo cerca de B . En el primer caso, la simetría L implica que ambas órbitas terminan en el punto B . Las conexiones con $W_A^{u,+}$ se encuentran numéricamente fijando dos parámetros y haciendo variar al tercero, con el objetivo de observar sobre $W_A^{u,+}$ que $\theta < \theta_0$ a partir de cierto tiempo (figura 4.6a), y $\theta > \theta_0$ para otro valor del parámetro libre (figura 4.6b),

entonces por continuidad existe un valor para el que $W_A^{u,+}$ termina en el punto B (figura 4.6c).

En la práctica, se observa que existen muchas selecciones de los 3 parámetros, tal que suceden las conexiones anteriores. Las evidencias numéricas muestran que existe una cantidad al menos numerable de selecciones de parámetros, para los cuales existen conexiones de las subvariedades invariantes. Un análisis numérico más detallado a este respecto, está fuera de nuestros objetivos, que son básicamente analíticos.

4.6 Variedad del infinito para $h = 0$

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de las soluciones de escape del sistema (68), introducimos el cambio de coordenadas $\rho = \frac{1}{r}$. De manera que el infinito para la coordenada radial r , ahora se analiza con $\rho = 0$.

Las ecuaciones de movimiento (68) en las coordenadas ρ, v, θ, w están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= -\rho v f(\theta), \\ \frac{dv}{ds} &= \left[-\frac{v^2}{2} + U(\theta) + 2hr\right] f(\theta), \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= \left[\frac{-v^2}{2} + U(\theta) + hr\right] 2f(\theta)f'(\theta) - \frac{vw}{2}f(\theta) + U'(\theta)f^2(\theta), \end{aligned} \quad (71)$$

con relación de energía

$$\left[\frac{w^2}{2} + \frac{v^2 f^2(\theta)}{2} - U(\theta) f^2(\theta) \right] \rho = h f^2(\theta). \quad (72)$$

El nivel de energía E_h para $h = 0$ es

$$E_0 = \{(\rho, v, \theta, w) : \rho > 0; w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2U(\theta) f^2(\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}. \quad (73)$$

Este nivel de energía, se extiende de manera analítica a una frontera de dimensión 2, llamada *variedad del infinito*:

$$\mathcal{N} = \{(\rho, v, \theta, w) : \rho = 0, w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2U(\theta) f^2(\theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}. \quad (74)$$

OBSERVACIÓN. Para $h = 0$, las variedades de colisión y del infinito son iguales, y también el flujo definido sobre ellas.

Considerando que v puede obtenerse de la relación $w^2 + v^2 f^2(\theta) = 2U(\theta) f^2(\theta)$, linealizamos el sistema (71) en $E_0 \cup \mathcal{N}$ en las coordenadas (ρ, θ, w) , alrededor del punto de equilibrio $(0, \theta_0, 0)$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & U''(\theta_0) & \frac{-v_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ w \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -v_0, \\ \lambda_2 &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16U''(\theta_0)}}{4}, \\ \lambda_3 &= \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 16U''(\theta_0)}}{4}. \end{aligned}$$

luego el Lema 4.5 se modifica de la siguiente manera:

4.9 Lema.

Sea $P_0 \in \mathcal{N}$ un punto de equilibrio, tal que la coordenada θ_0 de este punto satisface $U''(\theta_0) \neq 0$. Entonces existen variedades invariantes en $E_h \cup \mathcal{N}$, asociadas a P_0 con las siguientes dimensiones:

1. Si $v_0 < 0$, y $U''(\theta_0) > 0$,
se tiene $\dim W^u = 2, \dim W^s = 1$, además P_0 es punto silla en \mathcal{N} .
2. Si $v_0 < 0$, y $U''(\theta_0) < 0$,
se tiene $\dim W^u = 3, \dim W^s = 0$, además P_0 es punto repulsor en \mathcal{N} .
3. Si $v_0 > 0$, y $U''(\theta_0) > 0$,
se tiene $\dim W^u = 1, \dim W^s = 2$, además P_0 es punto silla en \mathcal{N} .
4. Si $v_0 > 0$, y $U''(\theta_0) < 0$,
se tiene $\dim W^u = 0, \dim W^s = 3$, además P_0 es punto atractor en \mathcal{N} .

DEMOSTRACION. Análoga a la demostración del Lema 4.5. ■

4.7 Flujo global en E_0

En esta sección describiremos el flujo en el nivel de energía E_0 , lo cual mostrará como es el movimiento de las partículas para soluciones con energía $h = 0$.

Excepto por la primera ecuación del sistema (68), es exactamente lo mismo hacer $h = 0$ ó $r = 0$ en (68) y (69). Cuando esto sucede decimos que el flujo en E_0 es **proyectable** sobre Λ , es decir, dada una órbita $\varphi(s) = (r, v, \theta, w)(s)$ de (68) en E_0 , se tiene que $\phi(s) = (0, v, \theta, w)(s)$ es una órbita de (68) en Λ . La coordenada $r(s)$ se obtiene de la primera ecuación de (68), encontrando que $\dot{r}(s) < 0$ cuando $v(s) < 0$ y $\dot{r}(s) > 0$ cuando $v(s) > 0$. De esta manera, el flujo en E_0 se obtiene a partir de su proyección a la variedad de colisión.

Finalmente, para describir el movimiento romboidal de las partículas, proyectamos la órbita $\varphi(s) \in E_0$ al plano de configuraciones (r, θ) , y consideramos que

$$r = \sqrt{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

La coordenada θ esencialmente mide la mitad del ángulo que hay en el vértice 2 de la figura romboidal, de tal manera que si d_{ij} es la distancia entre las partículas i, j , entonces $\theta \sim 0$ corresponde a $\frac{d_{34}}{d_{12}} \sim 0$, y $\theta \sim \frac{\pi}{2}$ corresponde a $\frac{d_{12}}{d_{34}} \sim 0$.

Soluciones homotéticas

Empezamos con las órbitas $\varphi(s) = (r, v, \theta, w)(s)$ en E_0 , que se proyectan a Λ sobre los puntos de equilibrio $(0, v_0, \theta_0, 0)$. Entonces por la proyectabilidad, debe suceder que $v(s) \equiv v_0$, $\theta(s) \equiv \theta_0$, $w(s) \equiv 0$. De la primera ecuación de (68), se obtiene $r(s) = c e^{v_0 f(\theta_0) s}$, donde c es una constante positiva que depende de las condiciones iniciales, y $f(\theta_0) > 0$ si $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Este tipo de soluciones

$$\{(r, v, \theta, w) : r(s) = c e^{v_0 f(\theta_0) s}, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0, \quad w = 0\},$$

recibe el nombre de soluciones **homotéticas**, y se llaman así, porque en todo momento forman una homotecia de una CC dada. Estas soluciones conectan las variedades de colisión y del infinito por sus puntos de equilibrio. Para $v_0 > 0$, inicia en Λ ($r = 0$) y termina en \mathcal{N} ($r = \infty$). Para $v_0 < 0$ sucede lo contrario.

Las CC (definidas en (3.1)) para el problema romboidal (newtoniano o cargado) son aquellas configuraciones (r, θ) , tales que θ es punto crítico del potencial $U(\theta)$. Esto hace importante la diferencia que existe entre el problema romboidal donde existe un punto crítico, y el problema romboidal cargado donde puede haber dos, pues cada punto crítico del potencial genera una clase de Configuraciones Centrales que nos dan soluciones explícitas del problema.

Otras soluciones

Ahora describiremos el movimiento romboidal para diferentes tipos de soluciones con energía $h = 0$. Empezemos denotando con F_{ij} a la fuerza resultante que existe entre las partículas i, j .

EJEMPLO 1. Análisis de soluciones donde el potencial tiene la forma **U5** de la tabla 1.

En este caso tenemos $\lambda_{34} < 0$, $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{13} > 0$, implicando que la fuerza F_{34} sea de repulsión, y F_{12}, F_{13} , sean de atracción. Esta combinación de fuerzas atractivas y repulsivas, ocasiona que *aunque se repelen las partículas 3, 4, éstas son atraídas por las otras dos, haciendo que en algunas ocasiones el movimiento termine en colisión total.*

Lo anterior sucede en las órbitas que están sobre la variedad estable del punto de equilibrio A_2 (figura 4.7).

Consideremos una órbita φ en E_0 , que se proyecta a Λ_3 sobre σ_1 . Probaremos que φ inicia en la variedad del infinito. Invertimos el tiempo con $s^* = -s$, entonces $\frac{d\rho}{ds^*} = \rho' = \rho v f(\theta)$. De esta ecuación se sigue que $\rho(s^*)$ es decreciente para s^* suficientemente grande, y como ρ está acotada inferiormente, entonces $\rho'(s^*) \rightarrow 0$ cuando $s^* \rightarrow +\infty$. Si suponemos que la cota inferior μ es positiva, tenemos $\rho' \rightarrow \mu v_0 f(\theta_0) > 0$ cuando $s^* \rightarrow +\infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la órbita φ inicia con $\rho = 0$. Similarmente se prueba que φ termina en la variedad de colisión, usando la ecuación $\dot{r} = r v f(\theta)$.

Así, la órbita φ en E_0 , que se proyecta a Λ_3 sobre σ_1 , inicia en la variedad del infinito y termina en la variedad de colisión. El movimiento romboidal es “pulsante” alrededor de

la Configuración Central θ_1 , no contiene colisiones dobles, y termina asintóticamente en colisión total por la Configuración Central θ_2 . Por la combinación de fuerzas, las partículas 1 y 2 una vez que se empiezan a acercar ya no pueden alejarse, por lo que debe existir un momento a partir del cual, ellas siempre se están acercando hasta llegar a colisión total. Entonces las partículas 3 y 4 son las que pulsan, pues se repelen entre si y a la vez son atraídas por las demás partículas (figura 4.8).

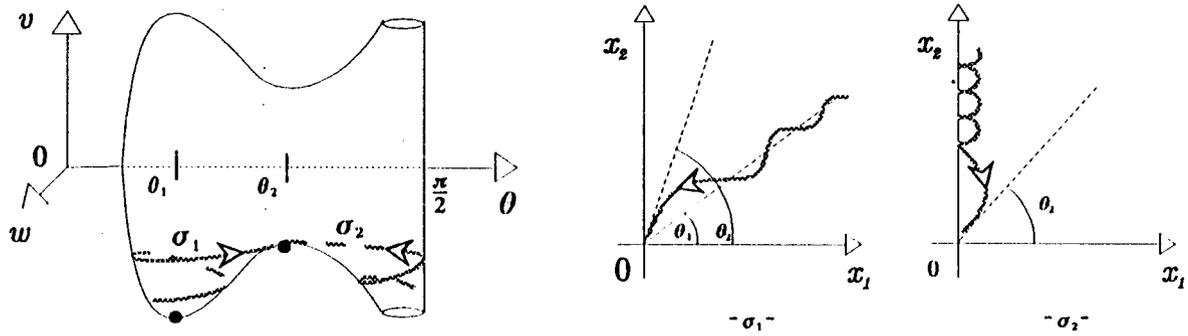


FIGURA 4.7 Orbitas con energía cero que terminan en colisión total, proyectadas a Λ_3 y al plano $x_1 x_2$, respectivamente.

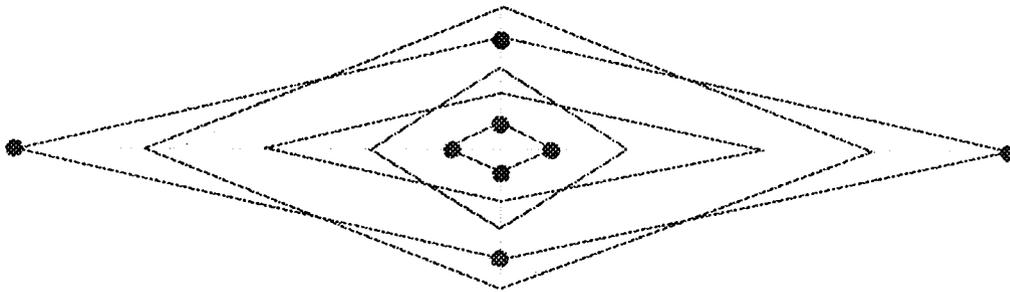


FIGURA 4.8 Movimiento en diferentes etapas de tiempo. Sin presentar colisiones dobles, las partículas llegan a colisión total.

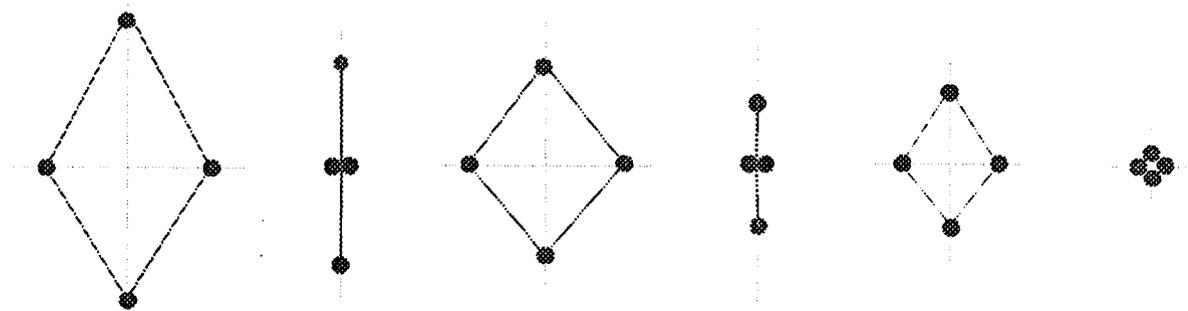


FIGURA 4.9 Este movimiento es radicalmente diferente del anterior.

Las órbitas en E_0 que se proyectan sobre σ_2 terminan en la variedad de colisión. El movimiento inicia con infinitos choques 1-2, y termina asintóticamente en colisión total por Configuraciones Centrales (figura 4.9).

EJEMPLO 2. Análisis de soluciones donde el potencial tiene la forma U3 de la tabla 1.

De la misma tabla obtenemos $\lambda_{12} < 0$, $\lambda_{34} < 0$, $\lambda_{13} > 0$, implicando que la fuerza F_{13} sea de atracción, y F_{12} , F_{34} sean de repulsión, y por lo tanto, no ocurren las colisiones binarias. Todas las soluciones con energía cero son descritas en los ejemplos a y b:

- a) Aunque las partículas opuestas se repelen, la solución homotética con $v_0 < 0$ termina en colisión total.
- b) Cualquier solución no homotética en E_0 , inicia y termina en la variedad del infinito. El movimiento es "pulsante" alrededor de la Configuración Central, no tiene ningún tipo de colisiones, y se acerca al infinito asintóticamente por la Configuración Central.

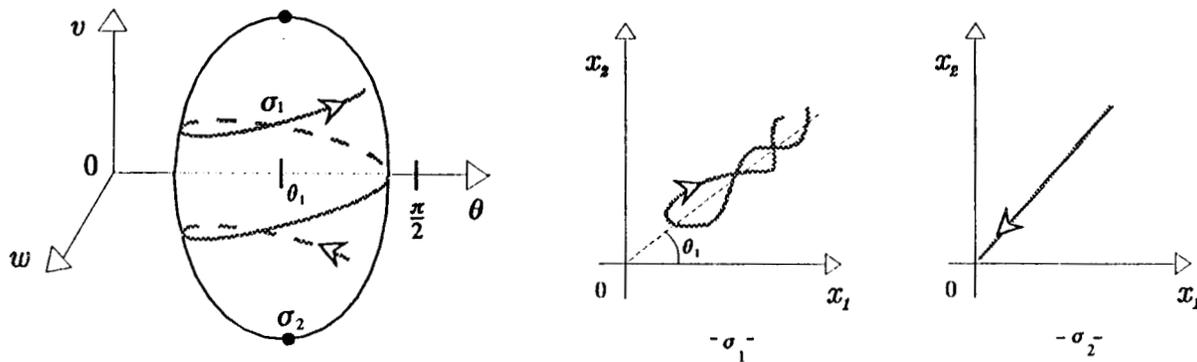


FIGURA 4.10 Órbitas en E_0 , proyectadas a Λ_2 y al plano $x_1 x_2$, respectivamente.

OBSERVACIÓN. Como situaciones extremas en este problema romboidal donde interactúan las fuerzas gravitacional y electrostática, tenemos el caso donde la fuerza gravitacional predomina, dando un problema puramente atractivo y el potencial respectivo U1 (ver tabla 1). Cuando la fuerza electrostática predomina, el movimiento depende del signo de las cargas. Pero las partículas opuestas tienen la misma carga y se repelen, luego si las partículas no opuestas tienen cargas con signos iguales, entonces el problema romboidal es puramente repulsivo donde el potencial es U2; y si los signos son opuestos entonces tenemos un problema romboidal con potencial U3, donde hay repulsión entre partículas opuestas, y atracción entre partículas no opuestas.

Apéndice. La función $U(\theta)$

A continuación haremos un análisis detallado del potencial $U(\theta)$, con el objetivo de caracterizar sus diversas formas. Supondremos que λ_{12} y λ_{34} son diferentes de cero, y por lo tanto, el potencial está definido en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$U(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{8\lambda_{13}}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{\lambda_{34}}{\operatorname{sen} \theta} \right], \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

Derivando $U(\theta)$ respecto de θ , obtenemos

$$U'(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\lambda_{12} \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta} + \frac{8\lambda_{13} (\alpha - 1) \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda_{34} \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right], \quad (75)$$

Sean β , γ y k , nuevos parámetros definidos por

$$\beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}}, \quad \gamma = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{34}}, \quad \text{y} \quad k = 8\gamma(\alpha - 1). \quad (76)$$

Escribiendo $U'(\theta)$ en terminos de estos parámetros, obtenemos

$$U'(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \lambda_{34} \left[\frac{\beta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\alpha} \cos^2 \theta} + \frac{k \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right], \quad (77)$$

ahora, definiendo la función

$$g(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\tan^3 \theta}, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

tenemos que

$$U'(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \lambda_{34} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} g(\theta). \quad (78)$$

Entonces los puntos críticos de $U(\theta)$ son precisamente las soluciones de la ecuación $g(\theta) = 0$, lo que hace necesario analizar las propiedades de $g(\theta)$:

1. $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = -\infty$, y $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$.
2. Sea θ_g un punto crítico de g , entonces $\begin{cases} k > 1, & \text{y} \\ \theta_g = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{k^{2/5} - 1}} \end{cases}$
3. $g(\theta_g) = \alpha^{-3/2} [\beta \alpha + (k^{2/5} - 1)^{5/2}]$.

DEMOSTRACION.

1. Los límites son inmediatos de la definición de g .
2. Derivando $g(\theta)$ obtenemos

$$g'(\theta) = -3k(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{-5}{2}} \tan \theta \sec^2 \theta + 3 \frac{\sec^2 \theta}{\tan^4 \theta},$$

entonces $g'(\theta) = 0$ si y sólo si $k = (\frac{\alpha}{\tan^2 \theta} + 1)^{5/2}$, de donde se sigue que $k > 1$ y $\theta = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{k^{2/5} - 1}}$.

3. Evaluando g en su punto crítico obtenemos la expresión deseada. ■

Denotemos por θ_0 a los puntos críticos de $U(\theta)$, los cuales son soluciones de $g(\theta) = 0$. Consideremos $g(\theta)$ en una vecindad de θ_0 , si $g(\theta)$ tiene signos opuestos para $\theta < \theta_0$, y para $\theta > \theta_0$, entonces por (78) se concluye que θ_0 es máximo o mínimo de $U(\theta)$. Si por el contrario $g(\theta)$ no cambia de signo, entonces θ_0 es un punto de inflexión de $U(\theta)$.

Observemos que la propiedad 2 de $g(\theta)$, implica que esta función tiene a lo más un punto crítico.

Cuando $\beta > 0$, se cumplen los siguientes límites:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(\theta) > 0.$$

Entonces $g(\theta)$ debe tener un cero y cambia de signo en una vecindad de θ_0 , finalmente por (78), $U(\theta)$ tiene exactamente un máximo o mínimo.

Cuando $\beta \leq 0$ los límites extremos de g son negativos, entonces la única posibilidad de que g se anule, es que θ_g exista y que $g(\theta_g) \geq 0$. En el caso que $g(\theta_g) > 0$, la función g se anula dos veces, implicando dos puntos críticos del potencial.

De todas las consideraciones anteriores, presentamos el siguiente resultado que caracteriza los puntos críticos de $U(\theta)$.

A1 Lema.

Para $\lambda_{12} \neq 0$, $\lambda_{34} \neq 0$, la función $U(\theta)$ tiene 0, 1, ó 2 puntos críticos en $(0, \frac{\pi}{2})$.

- Si $\beta > 0$, hay un p.c. que puede ser máximo o mínimo.

- Si $\beta < 0$, $k > 1$, $g(\theta_0) > 0$, hay 2 p.c. uno es máximo y el otro es mínimo.
- Si $\beta < 0$, $k > 1$, $g(\theta_0) = 0$, hay un p.c. de inflexión.
- En cualquier otro caso no hay puntos críticos.

Signo de $U(\theta)$ evaluada en su punto crítico

A continuación examinaremos el signo de $U(\theta_0)$. Haciendo $U'(\theta_0) = 0$ en (75) y simplificando, resulta

$$\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{8\lambda_{13}(\alpha - 1)}{(\alpha + \tan^2 \theta_0)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda_{34}}{\tan^3 \theta_0} = 0, \quad (79)$$

factorizando $\cos^{-1} \theta$ en (62) y sustituyendo λ_{12} de (79) en la expresión factorizada, se obtiene

$$U(\theta_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{-8\lambda_{13}(\alpha - 1)}{(\alpha + \tan^2 \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8\lambda_{13}}{(\alpha + \tan^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda_{34}}{\tan^3 \theta_0} + \frac{\lambda_{34}}{\tan \theta_0} \right],$$

simplificando

$$U(\theta_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\cos^3 \theta_0} \left[\frac{8\lambda_{13}}{(\alpha + \tan^2 \theta_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda_{34}}{\tan^3 \theta_0} \right], \quad (80)$$

y si $\alpha \neq 1$, sustituimos λ_{13} de (79) en (80), resultando

$$U(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin^3 \theta_0} \left[\frac{\lambda_{34} \alpha^{3/2} - \lambda_{12} \tan^3 \theta_0}{\alpha - 1} \right]. \quad (81)$$

Las relaciones (80) y (81) ayudarán a obtener el signo de $U(\theta_0)$, para esto retomaremos cada uno de los casos del Lema A1.

Cuando $\beta \leq 0$, del Lema A1 se obtiene $k > 1$, y por la definición de k se sigue que $\alpha \neq 1$. De hecho $\alpha < 1$ por la Observación 4.1, entonces se puede utilizar (81), resultando que

$$\text{sign } U(\theta_0) = -\text{sign } \lambda_{34}.$$

Cuando $\beta > 0$, (80) y (81) no determinan el signo de $U(\theta_0)$, por lo que procedemos a estudiar con detalle la función

$$\varphi(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{8\gamma}{(\alpha + \tan^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\tan \theta}, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (82)$$

Entonces $U(\theta)$ puede expresarse como

$$U(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\lambda_{34}}{\cos \theta} \varphi(\theta), \quad (83)$$

y mediante $\varphi(\theta_0)$ se determinará el signo de $U(\theta_0)$. Para esto se analizan las propiedades de $\varphi(\theta)$,

1. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi(\theta) = +\infty$, y $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} > 0$.
2. Sea θ_φ un punto crítico de $\varphi(\theta)$, entonces $\begin{cases} -8\gamma > 1, & y \\ \theta_\varphi = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{(-8\gamma)^{2/3} - 1}} \end{cases}$
3. $\varphi(\theta_\varphi) = \beta - [(-8\gamma)^{2/3} - 1]^{3/2}$.

DEMOSTRACION.

1. Los límites son inmediatos de la definición de φ .
2. Derivando $\varphi(\theta)$ respecto de θ , se obtiene

$$\varphi'(\theta) = -8\gamma(\alpha + \tan^2 \theta)^{-3/2} \tan \theta \sec^2 \theta - \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta},$$

entonces $\varphi'(\theta) = 0$ si y sólo si $-8\gamma = (\frac{\alpha}{\tan^2 \theta} + 1)^{3/2}$, de donde se sigue que $-8\gamma > 1$ y $\theta_\varphi = \arctan \sqrt{\frac{\alpha}{(-8\gamma)^{2/3} - 1}}$.

3. Evaluando φ en su punto crítico, se obtiene el resultado deseado. ■

Ahora procedemos a desglosar el caso $\beta > 0$.

Si $-8\gamma \leq 1$, θ_φ no existe (propiedad 2), y por lo tanto $\varphi(\theta)$ es siempre positiva, entonces $\varphi(\theta_0) > 0$ y de (83) se deduce que

$$\text{sign } U(\theta_0) = \text{sign } \lambda_{34}.$$

Si $-8\gamma > 1$ y $\varphi(\theta_\varphi) > 0$, entonces $\varphi(\theta)$ es siempre positiva y la conclusión es la misma.

Si $-8\gamma > 1$ y $\varphi(\theta_\varphi) = 0$ entonces $U(\theta_0) = 0$. Esto se sigue después de derivar (83) respecto de θ y evaluar en θ_φ , encontrándose que $\theta_0 = \theta_\varphi$.

Si $-8\gamma > 1$ y $\varphi(\theta_\varphi) < 0$ entonces de (83) se sigue que $U(\theta_\varphi)$ tiene el signo opuesto a λ_{34} . Luego, si consideramos que $U(\theta)$ tiende al infinito (con el signo de λ_{34}) en los extremos de $(0, \frac{\pi}{2})$, se obtiene:

$$\text{sign } U(\theta_0) = -\text{sign}(\lambda_{34}).$$

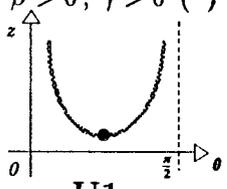
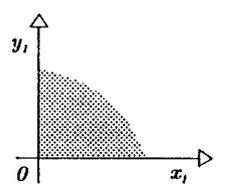
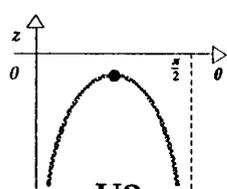
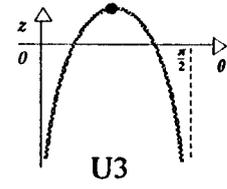
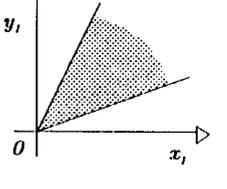
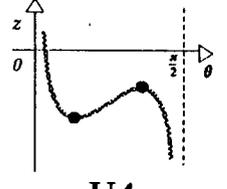
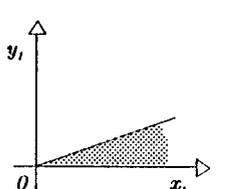
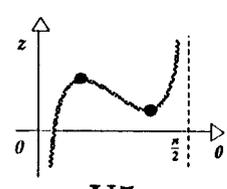
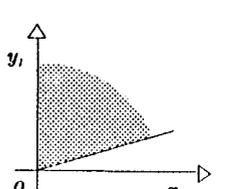
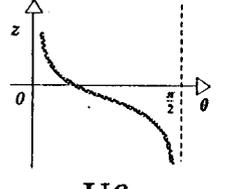
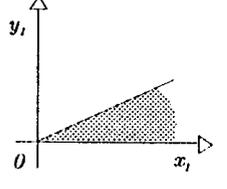
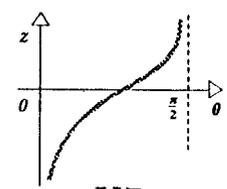
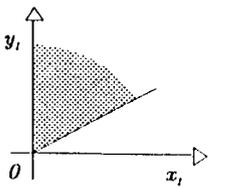
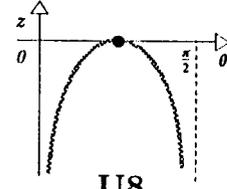
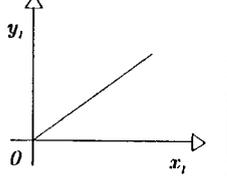
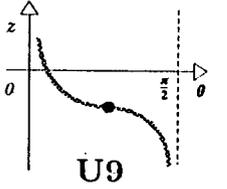
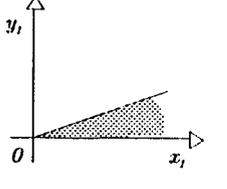
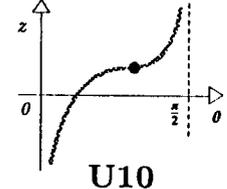
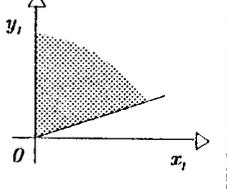
Resumimos las conclusiones anteriores en el siguiente resultado que complementa al Lema A1, dando el signo de $U(\theta_0)$.

A2 Lema.

Dados $\lambda_{12} \neq 0$ y $\lambda_{34} \neq 0$, el potencial $U(\theta)$ evaluado en sus puntos críticos, tiene los siguientes signos:

- Si $\beta > 0$ y $\begin{cases} -8\gamma \leq 1 & \text{ó} \\ -8\gamma > 1, \varphi(\theta_\varphi) > 0 \end{cases}$ entonces $\text{sign } U(\theta_0) = \text{sign } \lambda_{34}$.
- Si $\beta > 0$, $-8\gamma > 1$, $\varphi(\theta_\varphi) = 0$, entonces $U(\theta_0) = 0$.
- Si $\beta > 0$, $-8\gamma > 1$, $\varphi(\theta_\varphi) < 0$, entonces $\text{sign } U(\theta_0) = -\text{sign } \lambda_{34}$.
- Si $\beta < 0$, $k > 1$, entonces $\text{sign } U(\theta_0) = -\text{sign } \lambda_{34}$.

Tabla 1

Gráficas de la función $z = U(\theta)$				
parámetros	$\lambda_{34} > 0$	región de Hill para $h = 0$	$\lambda_{34} < 0$	región de Hill para $h = 0$
$\beta > 0$ $-8\gamma \leq 1$ <hr/> $\beta > 0$ $-8\gamma > 1$ $\varphi > 0$	$\beta > 0, \gamma > 0$ (*)  U1		 U2	<p>No hay región de Hill, y por lo tanto, no existe movimiento posible.</p>
$\beta > 0$ $-8\gamma > 1$ $\varphi < 0$	<p>por (58) no existe para $\lambda_{34} > 0$</p>		 U3	
$\beta < 0$ $k > 1$ $g > 0$	 U4		 U5	
$\beta < 0$ $k \leq 1$ <hr/> $\beta < 0$ $k > 1$ $g < 0$	 U6		 U7	
$\beta > 0$ $-8\gamma > 1$ $\varphi = 0$	<p>por (58) no existe para $\lambda_{34} > 0$</p>		 U8	
$\beta < 0$ $k > 1$ $g = 0$	 U9		 U10	

* simplificación debida a (58)

• punto crítico

Capítulo 5

El problema colineal cargado de 3 cuerpos

Consideremos 3 partículas con masas $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}^+$, y cargas $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, y dejemos que se muevan bajo sus mutuas interacciones gravitacionales y electrostáticas. Suponiendo condiciones iniciales que producen un movimiento colineal, obtenemos lo que llamaremos *el problema colineal cargado de 3 cuerpos*, el cual es una generalización del problema colineal de 3 cuerpos [13], donde sólo se consideran interacciones gravitacionales.

La fuerza que actúa entre las partículas k y l , resultado de las fuerzas gravitacional y electrostática, es atractiva cuando el parámetro $\lambda_{kl} = m_k m_l - q_k q_l$ es positivo, y es repulsiva cuando λ_{kl} sea negativa. Así por ejemplo, cuando las masas y cargas implican $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$, entonces la partícula central atrae a las otras dos, las cuales se repelen entre sí (figura 5.1). Esta combinación de fuerzas atractivas y repulsivas, da lugar a movimientos interesantes que terminan en colisión total.

Las ecuaciones de movimiento forman una familia de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, y su análisis es idéntico al hecho para el problema romboidal cargado, por lo que sólo estaremos interpretando resultados en el nivel de energía cero.

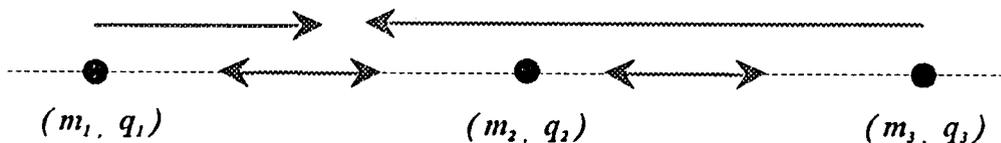


FIGURA 5.1 Dirección de fuerzas en el caso $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$.

5.1 Análisis de la ordenación 1-2-3

En el estudio del problema romboidal cargado del capítulo 4, encontramos que las ecuaciones de movimiento forman una familia de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, lo cual se veía traducido en que el análisis de la dinámica dependía de la forma de una función $U : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ que llamamos el potencial $U(\theta)$.

Ahora, en el problema colineal cargado de 3 cuerpos igualmente tenemos un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad, y la dinámica también depende de la forma de un potencial $U(\theta)$, donde $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ representa la razón de distancias de la partícula central hacia las otras dos, de manera que $\theta = 0$ implica colisión doble entre la partícula 1 y la partícula 2, que representaremos por colisión doble 1-2, debido a que las estaremos mencionando con frecuencia; análogamente $\theta = \frac{\pi}{2}$ implica colisión doble 2-3.

La gráfica del potencial se obtiene conociendo los puntos críticos y los comportamientos asintóticos en los extremos del intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Cada punto crítico está asociado con una CCC, las cuales ya fueron estudiadas en el capítulo 3 para los diferentes valores de masas y cargas, donde encontramos que para una misma ordenación de 3 partículas pueden existir hasta 3 CCC, implicando un potencial $U(\theta)$ con 3 puntos críticos. Por la relación que tiene el problema colineal cargado con el capítulo 3, debemos observar que el parámetro que aquí definimos como $\lambda_{kl} = m_k m_l - q_k q_l$, en el capítulo 3 se define como $\lambda_p = m_k m_l - q_k q_l$, donde (k, l, p) es una permutación de la terna $(1, 2, 3)$.

Cuando el movimiento tiende a la colisión doble 1-2 ($\theta = 0$), el potencial tiende asintóticamente a $+\infty$ si $\lambda_{12} > 0$, o $-\infty$ si $\lambda_{12} < 0$, Para las colisiones dobles 2-3 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) sucede lo mismo, pero con el parámetro λ_{23} (figura 5.2).

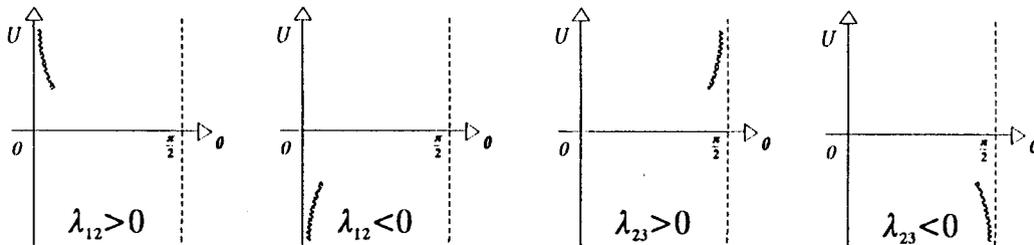


FIGURA 5.2 Comportamiento asintótico del potencial en colisión doble.

Según el conteo de CCC del problema de 3 cuerpos cargados hecho en el capítulo 3, podemos tener hasta 3 clases de CCC con una misma ordenación. Particularmente

si consideramos masas y cargas con la ordenación 1-2-3, tales que $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, y $\lambda_{13} < 0$, podemos estar en el caso más interesante de 3 CCC (sección 3.5.1), cuyo potencial correspondiente U_1 tiene 3 puntos críticos (figura 5.3a).

No perdamos de vista que el problema colineal cargado es una generalización del problema newtoniano colineal de 3 cuerpos [13], el cual se obtiene considerando cargas nulas, con lo cual $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} > 0$, y de la sección 3.5.1 vemos que existe exactamente 1 CCC, correspondiendo un potencial con un punto crítico (figura 5.3b).

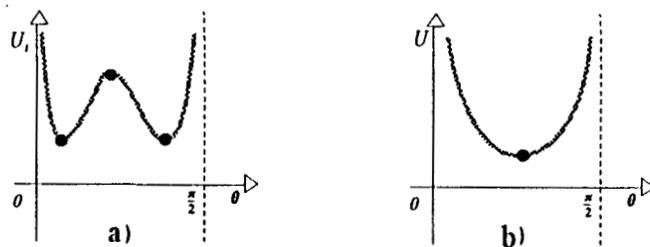


FIGURA 5.3 Un potencial con 3 puntos críticos ($\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$) y el potencial newtoniano ($\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} > 0$), respectivamente.

Consideremos el potencial U_1 de 3 puntos críticos ($\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$); por los signos de los parámetros sabemos que la partícula interior atrae a las otras dos, dando lugar a las colisiones dobles 1-2 y 2-3 (figura 5.1). Las partículas 1 y 3 se repelen entre si (pues $\lambda_{13} < 0$), a la vez que son atraídas por la partícula 2; esto hace pensar que si la atracción es más fuerte que la repulsión, entonces existe la posibilidad de que colisionen las partículas 1 y 3. Esto es posible, si consideramos que la masa 2 es suficientemente grande. Más adelante probaremos la existencia de estos movimientos colineales que terminan en colisión total.

Tanto las colisiones dobles como las colisiones totales, representan singularidades en las ecuaciones de movimiento. La singularidad por colisión total se elimina introduciendo las coordenadas de McGehee r, v, θ, u , usadas anteriormente en el capítulo 4; r y θ son las coordenadas de posición, r^2 es el momento de inercia que representa el tamaño del sistema, de manera que $r = 0$ implica colisión total, v y u son la velocidad radial y tangencial del sistema, reescaladas por el factor $r^{\frac{1}{2}}$.

El Hamiltoniano H es una integral primera para el sistema, es decir, se mantiene constante a lo largo de cada solución de las ecuaciones de movimiento. Por esta razón trabajaremos sobre un nivel fijo de energía constante $H = h$, al cual llamaremos *relación*

de energía. Cabe señalar que con la introducción de las coordenadas de McGehee, las ecuaciones de movimiento dejan de ser Hamiltonianas, sin embargo la relación de energía sigue conservandose y se elimina la singularidad por colisión total, creandose una variedad invariante de dimensión dos, llamada *variedad de colisión total* Λ , caracterizada por $r = 0$ y la relación de energía,

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) \mid r = 0 \text{ y } H(r, v, \theta, u) = h\}.$$

Dado que $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ y $r = 0$, consideremos la proyección de Λ al espacio de coordenadas v, θ, u . Para el caso del potencial U_1 , la proyección de la variedad de colisión correspondiente Λ_1 es una superficie que se hace no acotada cuando la coordenada θ tiende a los extremos del intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, ver figura 5.4.

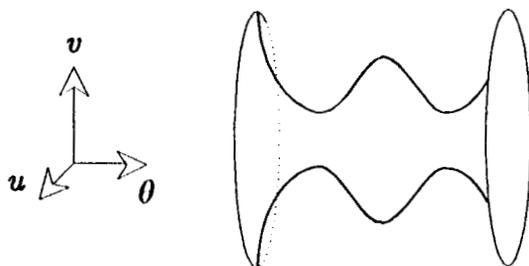


FIGURA 5.4 Variedad de colisión Λ_1 , para el potencial U_1 .

Las singularidades por colisión doble del campo vectorial asociado a las ecuaciones de movimiento, se eliminan haciendo una regularización de Sundman de la misma forma que en el estudio del problema romboidal cargado. De manera, que ahora el campo vectorial es analítico, con lo cual se puede continuar la descripción del movimiento aún después de las colisiones dobles, lo que no podía suceder antes de regularizar.

Con la regularización, la variedad de colisión toma la forma de una superficie homeomorfa a una esfera menos cuatro puntos (figura 5.5).

Puede observarse que todo esto se ha desarrollado con detalle para el problema romboidal cargado en el capítulo 4, y como el problema colineal cargado de 3 cuerpos presenta las mismas características en las ecuaciones de movimiento (sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad), aquí sólo estamos usando los resultados obtenidos.

El flujo definido sobre Λ_1 es casigradiente respecto de la coordenada v , i.e. v crece con el tiempo sobre cada órbita en Λ_1 , la cual además gira a contrareloj. Cada punto crítico del potencial, se ve reflejado en Λ_1 , en dos puntos de equilibrio hiperbólicos. De cada mínimo local del potencial U_1 se obtienen dos puntos silla en Λ_1 , los cuales tienen asociadas variedades estables e inestables de dimensión uno. Y del máximo local de U_1 , se obtiene un atractor y un repulsor sobre Λ_1 .

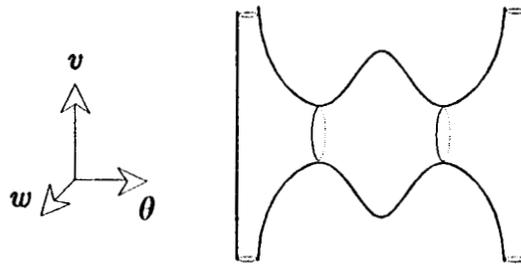


FIGURA 5.5 Variedad de colisión Λ_1 después de regularizar.

Flujo global sobre el nivel de energía $h = 0$

Es importante señalar que el flujo en Λ_1 es ficticio, pues aquí $r = 0$ en todo momento. Hemos explotado la singularidad de colisión total, a la superficie Λ_1 , la colisión total ahora tiene lugar en tiempo infinito, el flujo se extiende a Λ_1 , que es invariante por el flujo. De esto y los teoremas de continuidad respecto a condiciones iniciales obtendremos importante información sobre soluciones del flujo global que terminan en colisión triple, y de las que pasan muy cerca de este tipo de colisión.

Particularmente en el nivel de energía E_0 donde $h = 0$, el flujo presenta la propiedad de proyectabilidad en la variedad de colisión, i.e. si $\varphi(t) = (r(t), v(t), \theta(t), u(t))$ es una solución en E_0 , entonces $\sigma(t) = (0, v(t), \theta(t), u(t))$ es una solución en la variedad de colisión. Con esto, ahora podemos describir el flujo en E_0 , a partir del flujo en Λ_1 y de considerar que la coordenada r satisface $\frac{dr}{dt} = rv \sin 2\theta$.

Para ejemplificar lo anterior, consideremos las órbitas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \subset \Lambda_1$ que terminan todas en los puntos silla con $v_0 < 0$, para $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_3$ (figura 5.6).

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, las órbitas en E_0 cuyas proyecciones a Λ_1 son $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, respectivamente. Por lo tanto, de las soluciones φ_i sólo nos falta conocer el comportamiento de la coordenada r , y analizando $\frac{dr}{dt} = rv \sin 2\theta$ se puede concluir que r

es decreciente si $v < 0$, y es creciente si $v > 0$. En particular sobre las órbitas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, la coordenada r es decreciente y tiende a cero. Finalmente, proyectamos las soluciones φ_i en el plano de configuraciones r, θ , obteniendo las curvas mostradas en la figura 5.7.

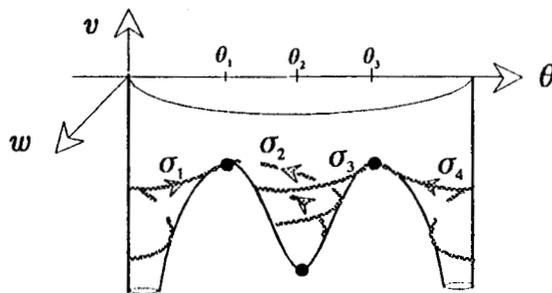


FIGURA 5.6 Algunas órbitas en Λ_1 .

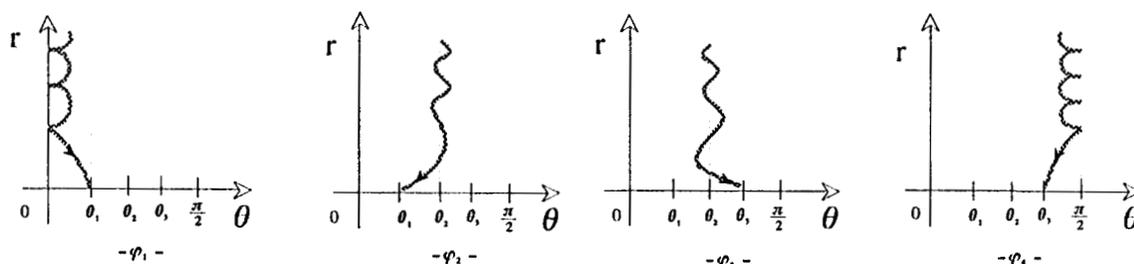


FIGURA 5.7 Proyecciones de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, al plano de configuraciones r, θ .

Para interpretar el movimiento colineal recordemos que r representa el tamaño de la configuración, $\theta = 0$ la colisión doble 1-2, y $\theta = \frac{\pi}{2}$ la colisión doble 2-3. Además por los signos de los parámetros $\lambda_{12} > 0, \lambda_{23} > 0, \lambda_{13} < 0$, tenemos que la partícula central atrae a las otras dos, y estas se repelen entre si.

Así, para la solución φ_1 , las partículas 1 y 2 colisionan un número infinito de veces, mientras el tamaño de la configuración decrece hasta producirse la colisión total. Este movimiento es realmente interesante, pues después de una colisión doble 1-2, la partícula central se mueve hacia la partícula 3, pero no choca sino que regresa hasta producirse otra colisión 1-2, y esto sucede un número infinito de veces hasta que sucede una colisión total (figura 5.8). El movimiento para φ_4 es semejante a φ_1 .

Analizando $\frac{dr}{dt} = rv \sin 2\theta$, se puede probar que la coordenada $r(t)$ de las soluciones φ_2 y φ_3 es siempre decreciente, inicia con $+\infty$ y termina en cero. Implicando que las

soluciones φ_2 y φ_3 conectan la variedad del infinito con la variedad de colisión total, acercándose a ambas variedades asintóticamente por CC. Observemos de la figura 5.7, que la coordenada θ oscila inicialmente alrededor de θ_2 , y termina asintóticamente en θ_1 o θ_3 . En cualquiera de los dos casos, la coordenada θ está acotada por el intervalo (θ_1, θ_3) , y por lo tanto, no existen colisiones dobles.

Respecto del movimiento colineal de estas soluciones, la oscilación puede ser explicada de la siguiente manera: la partícula 2 (denotada por “2”) es atraída por “1” y se acercan, a la vez que “3” es atraída por “2”, haciendo que esta se acerque a “1” hasta que se alejan por su mutua repulsión, entonces “2” se aleja de “1” acercándose hacia “3”, a la vez que “1” está siguiendo a “2” porque se atraen, esto hace que las partículas extremas se acerquen hasta que su fuerza de repulsión las aleja, y este proceso se repite mientras el tamaño de la configuración está disminuyendo hasta que se produce la colisión total.

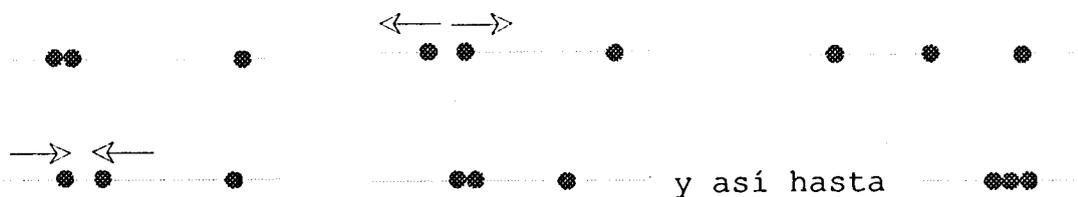


FIGURA 5.8 Ejemplo de movimiento colineal, φ_1 .

5.2 Diferentes ordenaciones

Utilizando la información del capítulo 3, podemos conocer lo que sucede cuando se cambia la ordenación de las partículas. Para esto consideremos nuevamente el caso con 3 CCC en la ordenación 1-2-3, donde el potencial es U_1 y los parámetros son $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$. Permutando las partículas tenemos dos ordenaciones posibles: 2-1-3 y 1-3-2; en cada una de ellas el potencial tiene formas diferentes, debido a una disminución en el número de puntos críticos. Esto se observa en los resultados de la sección 3.5.1, en el caso con 3 CCC para la ordenación 1-2-3, y 0 ó 2 CCC para las otras dos ordenaciones, de las cuales se probó que al menos una no tiene CCC (Lema 3.6).

Independientemente de la ordenación, por la selección de parámetros que estamos con-

siderando: $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{23} > 0$, $\lambda_{13} < 0$, sabemos que la partícula 2 atrae a "1" y "3", y estas se repelen entre si.

Respecto de las colisiones dobles en la ordenación 2-1-3, las partículas izquierda y central se atraen y colisionan, las partículas central y derecha se repelen y no colisionan. El potencial correspondiente U_2 , tiende a $+\infty$ en $\theta = 0$ y tiende a $-\infty$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$, debido a los signos de los parámetros λ_{12} y λ_{13} .

Para la ordenación 1-3-2, sólo hay colisión doble entre las partículas central y derecha (colisión 3-2). El potencial U_3 en este caso, tiende a $-\infty$ en $\theta = 0$ y tiende a $+\infty$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$, debido a los signos de λ_{13} y λ_{23} , respectivamente:

Suponiendo que hay 2 CCC para la ordenación 2-1-3, y 0 CCC para la ordenación 1-3-2, tenemos potenciales U_2 y U_3 con las formas mostradas en la figura 5.9. Las correspondientes variedades de colisión total Λ_2 y Λ_3 son superficies de dimensión dos, homomorfas a una esfera menos dos puntos (figura 5.10).

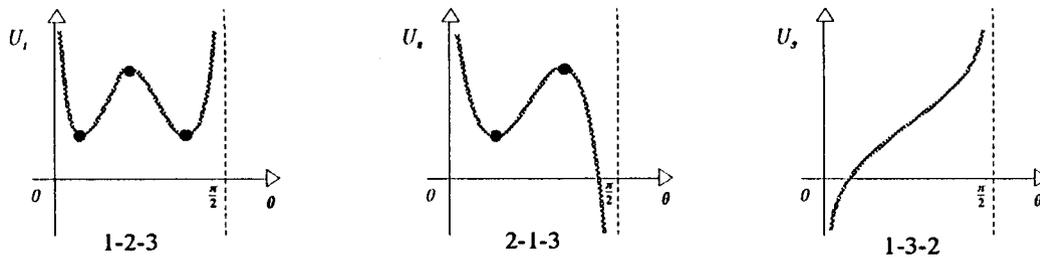


FIGURA 5.9 Cambios en el potencial en las diferentes ordenaciones.

En Λ_2 hay cuatro puntos de equilibrio hiperbólicos, un punto silla y un repulsor en la región $v < 0$, además de un punto silla y un atractor para $v > 0$. En Λ_3 no hay puntos de equilibrio.

Para obtener el flujo global en el nivel de energía E_0 , usamos la proyectabilidad del flujo sobre la variedad de colisión, la cual es una propiedad característica de este nivel de energía. Entonces de las soluciones en E_0 sólo nos hace falta conocer el comportamiento de la coordenada r , de la cual sabemos que es decreciente en la región $v < 0$, y es creciente cuando $v > 0$.

Para la ordenación 2-1-3, sean φ_5 y φ_6 soluciones en E_0 cuyas proyecciones a Λ_2 son las órbitas σ_5 y σ_6 (figura 5.10), y las proyecciones al plano de configuraciones r, θ están en la figura 5.11. Entonces el movimiento colineal para la solución φ_5 se desarrolla

con un número infinito de colisiones dobles 2-1, mientras la configuración se reduce hasta producirse una colisión total asintóticamente por CCC. Cabe mencionar que después de cada colisión 2-1, la partícula central "1" se dirige hacia la "3" y ambas se repelen pues $\lambda_{13} < 0$, no obstante, el movimiento termina en colisión total, asintóticamente por la CCC θ_1 .

En el movimiento colineal de la solución φ_6 , no existe ningún tipo de colisión, la configuración siempre decrece oscilando alrededor de una CCC y terminando asintóticamente en la CCC θ_2 (figura 5.11).

En la ordenación 1-3-2, sea φ_7 una solución en E_0 cuya proyección a Λ_3 sea la órbita σ_7 de la figura 5.10, y las proyecciones al plano r, θ están en la figura 5.11. Entonces el movimiento colineal para φ_7 se desarrolla con un número infinito de colisiones dobles 3-2, mientras la configuración se reduce y luego crece sin producirse la colisión total.

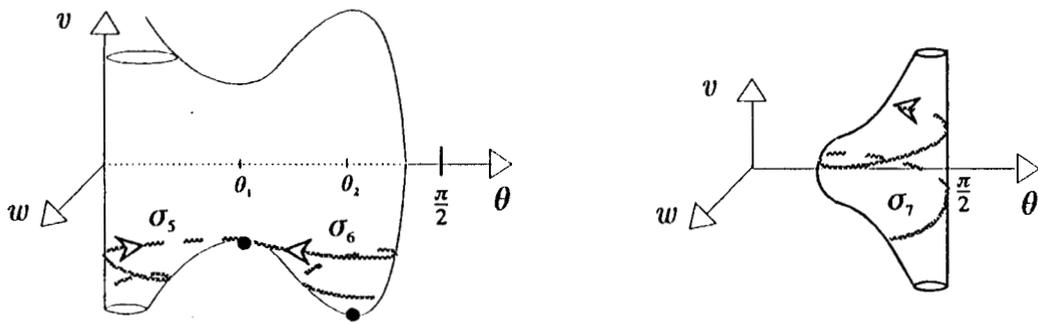


FIGURA 5.10 Variedades de colisión Λ_2 y Λ_3 , respectivamente.

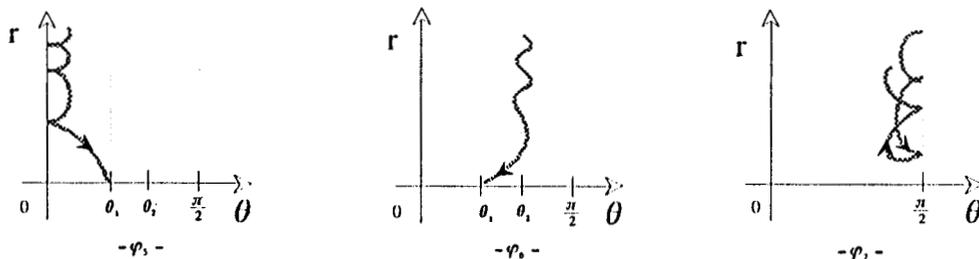


FIGURA 5.11 Proyecciones de $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$, al plano r, θ .

5.3 Conclusiones

La generalización hecha en este capítulo al problema colineal de 3 cuerpos [13], muestra

cambios muy interesantes en el movimiento colineal. Estos cambios surgen por la combinación de fuerzas atractivas y repulsivas, que hacen variar el número de CCC por cada ordenación. En el ejemplo que analizamos hay 3 CCC en la ordenación 1-2-3, y cero CCC con alguna otra ordenación. Esto no sucede en el problema newtoniano colineal, donde hay 1 CCC en cada ordenación.

En la dinámica, lo anterior se refleja en la obtención de movimientos que no podían suceder cuando sólo considerábamos la fuerza gravitacional. Como ejemplo, tenemos el movimiento colineal de una solución no homotética φ_6 , que termina en colisión total sin pasar por colisiones dobles.

Queda para un trabajo posterior, analizar el movimiento colineal en los niveles de energía E_h para $h \neq 0$, lo cual es un problema bastante complicado.

Conclusiones Globales

Con el estudio de los problemas cargados, hemos observado la forma como se extienden algunos resultados correspondientes a problemas newtonianos de 3 y 4 cuerpos, quedando estos últimos como casos particulares de los problemas cargados; en los cuales hay combinaciones muy diversas de fuerzas atractivas y repulsivas entre partículas, lo que hace natural que surgan diferencias respecto a los diversos resultados de problemas newtonianos, particularmente los relacionados con las Configuraciones Centrales (CC).

En el capítulo 3 estudiamos las CC para el problema cargado de 3 cuerpos, mediante la revisión del artículo *Central Configurations in the Charged Three Body Problem* [17], con lo cual pudimos observar lo siguiente:

Igual que en el caso newtoniano, hay 2 CC no colineales para cada selección de masas y cargas, siempre que $\lambda_1 = m_2 m_3 - q_2 q_3$, $\lambda_2 = m_1 m_3 - q_1 q_3$ y $\lambda_3 = m_1 m_2 - q_1 q_2$ tengan signos iguales, y las magnitudes $\sqrt[3]{m_1 |\lambda_1|}$, $\sqrt[3]{m_2 |\lambda_2|}$, $\sqrt[3]{m_3 |\lambda_3|}$ cumplan la desigualdad del triángulo, en caso contrario hay 0 CC no colineales. La forma triangular de estas CC puede ser cualquiera escogiendo adecuadamente los valores de las masas y cargas. Esto implica una diferencia esencial respecto del caso newtoniano donde sólo los triángulos equiláteros forman CC no colineales.

Dada la presencia de las fuerzas gravitacionales y electrostáticas, hay dos situaciones extremas:

Cuando predominan las fuerzas gravitacionales entonces las CC no colineales tienen formas muy cercanas a los triángulos equiláteros; si en cambio, las cargas son las que predominan, entonces las CC no colineales pueden tener cualquier forma triangular.

Respecto de las Configuraciones Centrales colineales (CCC), encontramos que el conteo varía con las ordenaciones, representando esto una diferencia respecto del caso newtoniano donde hay 1 CCC en cualquier ordenación. Fue interesante observar que para una misma ordenación podemos tener hasta 3 CCC; esto es importante por la

relación que tienen las CC con la dinámica de las partículas cerca de colisión total, y los escapes al infinito. El conteo de CCC lo resumimos en dos casos:

1.-Cuando λ_1 , λ_2 , y λ_3 tienen el mismo signo, existe 1 CCC para cada ordenación. Aquí está contenida la situación que se da cuando las fuerzas gravitacionales predominan sobre las fuerzas electrostáticas (λ_1 , λ_2 , y λ_3 positivos), cuyo conteo total es de 5 CC, donde 3 CC son colineales (una por cada ordenación), y 2 CC son no colineales. El mismo conteo se presenta cuando las fuerzas entre partículas son repulsivas, correspondiendo a un problema coulombiano donde λ_1 , λ_2 , y λ_3 son negativas.

2.-Cuando λ_1 , λ_2 , y λ_3 tienen signos diferentes, en cuyo caso existen 0 CCC para una ordenación, 1 ó 3 CCC con otra, y 0 ó 2 CCC en la ordenación restante. Por el Teorema 3.3 sabemos que hay 0 CC no colineales, por lo que el conteo total es de 5 CC como máximo, y 1 CC como mínimo (todas colineales).

Debido a que las CC no colineales del problema cargado de 3 cuerpos pueden tener cualquier forma triangular, es posible aproximarse a una CCC tanto como se quiera por CC no colineales. Esto nos permite concluir que teoremas importantes sobre Configuraciones Centrales en el problema de n -cuerpos, como son el Teorema de Moulton, el Teorema de 45° , y el Teorema del Bisector, dejan de cumplirse en los problemas cargados.

En el capítulo 4, iniciamos el estudio de la dinámica cualitativa en el problema romboidal cargado de 4 cuerpos, cuyas ecuaciones de movimiento son sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad. Dado que el Hamiltoniano es una integral primera, es suficiente estudiar el flujo sobre cada nivel de energía constante.

Se observó que las ecuaciones de movimiento dependen esencialmente de una función potencial, que depende de 3 parámetros independientes, haciendo que el potencial tenga formas cualitativamente diferentes según el número de puntos críticos (ver tabla 1, en el apéndice del capítulo 4). Encontramos que pueden haber hasta dos puntos críticos, a diferencia del correspondiente problema newtoniano donde hay exactamente uno. Cabe resaltar la importancia de los puntos críticos, por la relación directa que tienen con las Configuraciones Centrales, pues estas configuraciones determinan el comportamiento de las partículas cerca de colisión total.

Con cada potencial tenemos dinámicas muy diferentes, que aquí analizamos encontrando el flujo global en el nivel de energía cero para cada uno de los potenciales. Resta sin embargo, conocer el flujo global en los demás niveles de energía, lo cual representa un problema bastante complicado. Basta mencionar que la región de Hill para el potencial U_3 (ver Tabla 1 en el apéndice) con energía negativa es acotada, lo cual implica la posible existencia de soluciones periódicas, ciclos límites, y soluciones recurrentes.

En el capítulo 5, analizamos el problema colineal cargado de 3 cuerpos, cuyas ecuaciones de movimiento son Hamiltonianas con dos grados de libertad, y cuyo estudio es el mismo que se hizo para el problema romboidal cargado. Las CCC las obtuvimos en el capítulo 3, donde encontramos que existen hasta 3 CCC. Como cada CCC implica un punto crítico en la función potencial, entonces las formas del potencial tienen hasta 3 puntos críticos, lo que hace tener un gran número de potenciales; que en su mayor parte tienen la misma forma que los potenciales del problema romboidal cargado. Por lo cual, sólo consideramos un caso donde el potencial tiene 3 puntos críticos para cierta ordenación de partículas. El potencial depende de la ordenación, pues si permutamos el orden de las partículas el potencial cambia de forma, debido a la variación en el número de CCC; en una de las otras ordenaciones el potencial no tiene puntos críticos.

Respecto de la dinámica, obtuvimos el flujo global en el nivel de energía cero, quedando aún por encontrar el flujo global en los niveles de energía positivos y negativos, que por lo visto en este trabajo da lugar a dinámicas realmente complicadas.

Bibliografía

- [1] Atela, P., *The Charged Isosceles 3-Body Problem*, Contemporary Mathematics, vol **81**, 1988.
- [2] Atela, P. and McLachlan, R., *Global Behavior of the Charged Isosceles Three-Body Problem*, International Journal of Bifurcation and chaos, vol. **4**, No. 4 (1994), 865-884.
- [3] Bruns, H., *Über die Integrale des Vielkörper-problems*, Acta math. II, (1887), 25-96.
- [4] Casasayas, J. and Nunes, A. *A restricted charged four-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **47** (1990), 245-266,
- [5] Davies-Truman-Williams, *Classical Periodic Solutions of the equal mass 2n-Body Problem, 2n-ion Problem and the n-electron atom problem*, Physics Letters **99A 1** (1983), 15-18.
- [6] Delgado-Fernández J., Pérez-Chavela E., *Singularidades en Mecánica Celeste*, Aportaciones matemáticas. Comunicaciones **5** (1986), 155-172.
- [7] Diacu, F., *Singularities of the n-body problem, An Introduction to Celestial Mechanics*, Les Publications CRM. Montreal, (1992).
- [8] Elmabsout, B., *Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le problème des N corps*, Celestial Mechanics **41** (1988), 131-151.
- [9] Euler, *De moto rectilineo trium corpum se motuo attrahentium*, Novi Comm. Accad. Sci. Imp. Petrop. II (1769) 144-151.
- [10] Gutzwiller, M.C., *The anisotropic Kepler problem in two dimensions*,

J. Math. Physics **14** (1973), 139-152.

- [11] Lacomba, Ernesto and Pérez-Chavela, Ernesto, *Motions Close to Escapes in the Rhomboidal four body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **57** (1993), 411-437.
- [12] Lagrange, *Ouvres*, vol 6, Paris, (1873) 272-292.
- [13] McGehee R., *Triple collision in the collinear three body problem*, Inventiones Math. **27** (1974) 191-227.
- [14] Moeckel, R. *On Central Configurations*, Math. Z. **205** (1990) 499-517.
- [15] Moeckel, R., *Celestial Mechanics (specially central configurations)*, preliminary lecture notes, Scholl and workshop on variational and local methods in the study of hamiltonian systems, Trieste Italia (1994).
- [16] Painlevé, P., *Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Herman, Paris (1987).
- [17] Pérez-Chavela, Ernesto; Saari, Donald G.; Susin, Antoni and Yan, Zhiming, *Central Configuration in the Charged three body problem*, Contemporary Mathematics **198**. Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics (1996), 137-155.
- [18] Perko, L.M. and E.L. Walter, *Regular polygon solutions of the N-body problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985) 301-309.
- [19] Sundman, *Mémoire Sur le Problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1913) 105-179.
- [20] Winter, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1941).
- [21] Xia, Z., *The existence of noncollinear singularities in the N-body problem*, Ann. of Math. 1992.