Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana
Departamento de Matemáticas División de Ciencias Básicas e Ingeniería Unidad Iztapalapa

Estrategias Óptimas de Abatimiento de Emisiones Contaminantes.

T E S I S

que para obtener el grado académico de:
Maestro en Ciencias Matemáticas
Aplicadas e Industriales

P R E S E N T A:

Lic. Christian Michel Curiel Anaya

Directores de Tesis: Dra. Myriam Cisneros Molina (Sociedad Hipotecaria Federal S. N. C.) y Dr. Carlos Ibarra Valdez (UAM-I)

Iztapalapa, D.F. Diciembre de 2011

Reconocimientos

Deseo expresar mis más sinceros y profundos agradecimientos a la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa (UAM-I) por haberme permitido ser parte de su Casa de estudios.

Al Dr. Carlos Ibarra Valdez de la UAM-I y a la Dra. Myriam Cisneros Molina de Sociedad Hipotecaria Federal S. N. C. por la dirección de esta tesis[†].

A mis sinodales, Dr. Julio Ernesto Solís Daun (UAM-I) y Dr. Ernesto Soto Galera (IMP) por haber revisado y proporcionado comentarios valiosos para la mejora de esta tesis.

Al Dr. Esteban Martina Boggetto por haber contribuido en la revisión.

A CONACyT por el apoyo monetario otorgado durante mi estancia.

†Cabe mencionar que cuando se inició esta tesis, la Dra. Myriam Cisneros era investigadora del Programa de Matemáticas Aplicadas y Computación en el Instituto Mexicano del Petróleo (IMP) y dentro de sus temas de expertis e interés está el análisis económico-financiero de problemas medioambientales.

Dedicatoria

A mis padres José y Maria Estela que me dieron la vida e inculcaron valores para ser un hombre de bien.

A mis hermanos Edgar Omar, Ana Laura y Oscar Octavio por su constante motivaciön y consejos.

A mis sobrinos Ximena, Gustavo y Arlet por sus sonrisas que fomentaron en mi destellos de creatividad.

A todos ellos los amo con todo mi ser, gracias por apoyarme en cada momento.

"Try again, fail again. Fail better" -- Samuel Beckett

Índice general

Reconocimientos iii

Dedicatoria v

Introducción xi

1. Optimización con un producto y un contaminante 1

1.1. El problema 1
1.2. Modelo Matemático 4
1.2.1. Supuestos en el problema 5
1.3. Solución al problema sin restricciones 5
1.3.1. Condiciones de primer orden 6
1.3.2. Análisis de $\frac{da}{dy}$ y c_a 7
1.3.3. Supuestos técnicos del problema 11
1.3.4. Condiciones de segundo orden 11
1.3.5. Resultado principal 12
1.3.6. Líneas isobeneficio 14
1.3.7. Interpretación económica de la solución 15
1.4. Solución al problema con restricción de desigualdad en las emisiones 16
1.4.1. Existencia de la solución al problema dual 17
1.4.2. Condiciones de primer orden 17
1.4.3. Condiciones de segundo orden 18
1.4.4. Resultado principal 19
1.4.5. El problema de minimizar emisiones sin restricciones . 20
1.4.6. Líneas isobeneficio e isoemisiones 21
1.5. Solución del problema con restricción de igualdad en las emisiones 23
1.6. El Beneficio Marginal 24

1.6.1. Beneficio Marginal por Emisiones 27
1.6.1.1. Inflexión en la Curva Marginal de Abatimiento (CMA) 29
1.6.2. Implicaciones en políticas ambientales 30
1.6.3. Condición necesaria y suficiente para garantizar diferenciabilidad en la Curva Marginal de Abatimiento (CMA) 32
1.7. Ejemplos 33

2. Extensiones del modelo 41
2.1. Un problema incorporando precios variables 41
2.1.1. Líneas isobeneficio y curva marginal de abatimiento para un problema de precio variable 43
2.1.2. Resultado principal 44
2.1.3. Interpretación económica de la solución 45
2.2. El problema incorporando impuestos 45
2.2.1. Líneas isobeneficio y curva marginal de abatimiento para un problema que incorpora impuestos 49
2.2.2. Resultado principal 50
2.2.3. Interpretación económica de la solución 51
2.3. El problema incorporando restricción en la demanda 52
2.3.1. Resultado principal 54
2.3.2. Interpretación económica de la solución 55
2.4. El problema incorporando comercio de emisiones 55
2.4.1. Interpretación económica de la solución 60
2.5. Ejemplos 60

3. Extensión del modelo a dos empresas 67
3.1.1. Resultado principal 75
3.2. El Sector Energético Mexicano y Potencial Aplicación del Modelo 76

4. Conclusiones y Trabajo Futuro 81

A. Teorema de la Función Implícita 85

B. Optimización convexa 101
B.2. Optimización de funciones en n variables 102
B.3. Función dual de Lagrange 106
B.4. La función dual de Lagrange 106

B.5. Límites inferiores en el valor óptimo 107

Bibliografía **110**

Introducción

El cambio climático es un fenómeno que se manifiesta en un aumento de la temperatura promedio del planeta, directamente vinculada con el aumento en la concentración de gases de efecto invernadero en la atmósfera, producto de actividades humanas relacionadas con la quema de combustibles fósiles (carbón, petróleo, gasolinas, diesel, gas natural, etc) y la quema y pérdida de bosques que son dos de las principales fuentes de este problema. Este aumento de la temperatura tiene consecuencias en la intensidad de los fenómenos del clima en todo el mundo provocando climas más extremosos y fenómenos climáticos más intensos. En general, los veranos serán más cálidos y los patrones de las lluvias se modificarán, dando lugar a lluvias más intensas en algunas partes y lluvias menos frecuentes en otras, aumentando así las sequías.

También se teme que las capas de hielo que actualmente permanecen en las partes más frías del planeta (en los polos y en las montañas más altas) se vayan derritiendo, lo que aumentará el nivel medio del mar, inundando permanentemente amplias zonas costeras; es por eso que es importante mencionar que las consecuencias previstas del cambio climático afectarán nuestro ambiente inmediato y, por consiguiente, la manera en que todos vivimos en nuestro planeta.

La necesidad y la conveniencia de afrontar dicho problema resulta cada vez más evidente y radica en el hecho fundamental de tener un desarrollo humano sustentable en defensa del capital natural y de la utilización racional de los recursos naturales. Por el alcance de sus implicaciones económicas, políticas y sociales, el cambio climático es hoy tema ineludible de carácter internacional y es objeto de preocupación para toda la sociedad en general.

En México existen abundantes alternativas de bajo costo para la reducción de emisiones con importantes beneficios adicionales a corto y a largo plazo.[1] Los costos de la inacción pueden ser incluso superiores a los de la implementación de estos proyectos a nivel global, sectorial, o individual, o a esfuerzos para la concientización ambiental.

Uno de los instrumentos de mayor utilidad para la toma de decisiones sobre las alternativas de reducción de emsiones son las llamadas Curvas Marginales de Abatimiento (CMA), que representan el abatimiento marginal óptimo al reducir en una unidad extra de emisiones, a partir de un nivel de emisiones base al implementar una estrategia de mitigación. Una curva marginal de abatimiento se obtiene de ordenar por costos las estrategias de abatimiento identificadas. Por ejemplo, en la figura 1 se representa la CMA que muestra los sectores[2] en los cuales es posible implementar las mejores estrategias de abatimiento que pueden ser aplicadas para tener un desarrollo económico de bajas emisiones y así cumplir con las metas de abatimiento establecidas, obtenida de "La Economía del Cambio Climático: Síntesis".[3]

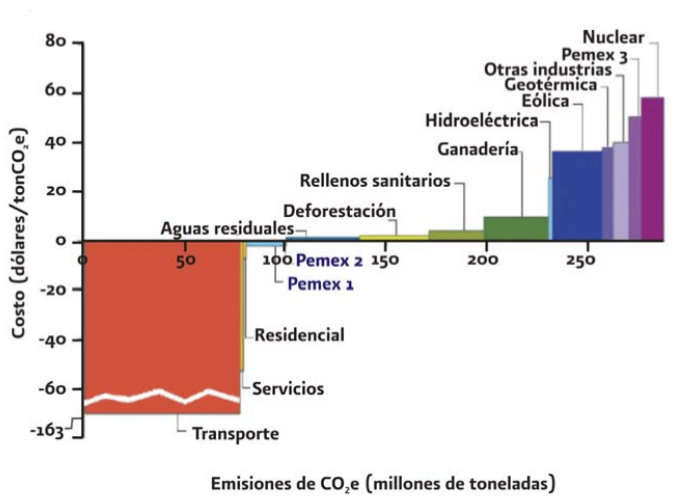


Figura 1: Curva de costo marginal de abatimiento de emisiones en México del 2009 al 2020.

[1]Ver por ejemplo un estudio reciente del Banco Mundial [23].
[2]Pemex 1, Pemex 2 y Pemex 3 se refieren a la posible reducción de emisiones fugitivas de metano en el sector petrolero mexicano como resultado de la disminución de las reservas.
[3]Reporte del gobierno federal en colaboración con SHCP y SEMARNAT [16].

La curva representa los sectores en los cuales es posible implementar alternativas para la reducción de emisiones en el país. En el eje de la abscisa, se distingue la reducción de emisiones de cada medida de abatimiento y en el eje ordenado se relaciona el costo unitario para cada intervención; por ejemplo, resalta que diversas medidas en transporte son las que proporcionarían mayor reducción de emisiones (con una reducción potencial aproximada de 75 millones de tonCO_2e) y a un costo de alrededor de -160USD/tonCO_2e. El costo negativo indica que al implementar ésta medida, incluso se tendría un flujo de dinero positivo. A estas medidas se les denomina "no-regrets" y reflejan en gran medida ineficiencias operativas y de planeación en los sectores.

La figura 2 obtenida de "La Economía del Cambio Climático: Síntesis",[3] muestra las curvas marginales de abatimiento para medidas que pueden ser implementadas en el sector energético Mexicano.

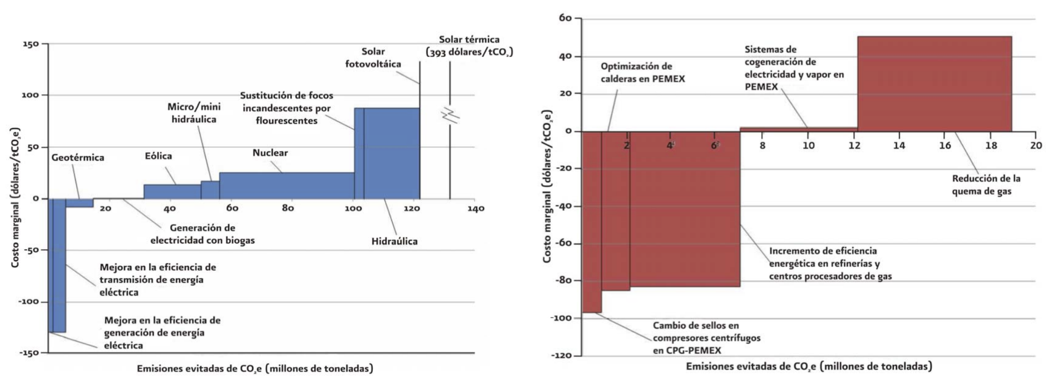


Figura 2: Curvas de costos marginales de abatimiento para el sector energético mexicano en el escenario de mitigación 2009-2030.

Desde el punto de vista de una empresa productora (productos o servicios), el problema de elegir opciones de abatimiento no es menos complicado que el problema global. Las empresas se enfrentan al delicado dilema entre maximizar utilidades mediante el aumento en la producción de sus productos y la reducción de contaminantes, ya sea por convicción o por imposición regulatoria, aunado a que la evaluación económica de los costos de abatimiento es una tarea muy compleja y con un alto grado de incertidumbre. Los costos de abatimiento pueden depender de factores tales como disponibilidad de tecnología, cambios en la estructura productiva y su relación con el consumo de energía, curvas de costos marginales, elasticidades de demanda, etc.

Un primer acercamiento simple y sistemático al problema de toma de decisiones desde el punto de vista de las empresas es el que adoptamos en ésta tesis. El punto principal radica en el planteamiento y solución del problema de producción-abatimiento mediante un modelo de optimización y el análisis de sus curvas marginales de abatimiento. Es importante mencionar que incluso bajo esta formulación ideal, se pueden analizar y entender más la existencia de medidas "no-regrets", resultados de análisis con enfoque económico (costo-beneficio) como el mencionado en el libro México: Estudio Sobre la Disminución de Carbono (MEDEC).[4]

Así, en esta tesis se analizan las curvas marginales de abatimiento para cada empresa bajo diferentes supuestos, pero también es posible analizar curvas marginales de abatimiento desde un enfoque más sectorial o incluso como nación.[5] Debe sin embargo considerarse que persisten diferencias significativas entre las distintas curvas marginales de abatimiento y que son endógenas a cambios en los precios relativos por lo que su aplicación depende crucialmente de la estrategia de abatimiento propuesta.[6]

Es por eso que esta tesis pretende proporcionar algunos elementos básicos para el análisis sistemático (mediante modelos matemáticos) de alternativas de abatimiento, ya sea a nivel sectorial o a nivel individual haciendo énfasis en el uso de las curvas marginales de abatimiento, tomando en cuenta las implicaciones y/o beneficios ambientales en términos de reducción de emisiones, conjuntamente con la obtención de ganancias al producir los bienes y/o servicios que la empresa ofrece. En la realidad, el abatir emisiones tiene implicaciones para las empresas, ya que el implementar una o varias actividades de abatimiento requiere de inversión que puede ser en costos fijos bajos, pero costos variables altos, o en otro caso, costos fijos altos y costos variables bajos. Es precisamente

[4]En dicho estudio se identifican y evaluan opciones de bajo costo para reducir las emisiones de gases de efecto invernadero que México puede implementar en el corto, mediano y largo plazo.

[5]En esta tesis tocamos brevemente el tema en el capítulo 3 donde se plantea un problema de optimización con la interacción de dos empresas. Se discute concisamente sobre la CMA bajo estas condiciones, pero el tema es tan amplio que la profundidad del análisis y discusión se deja para trabajo futuro.

[6]Para un análisis mas detallado consulte [23]

donde la simplificación del problema, abstraído como modelo matemático es importante para entender en forma sistematizada la problemática ambiental de las empresas.

Es en este contexto, que en el capítulo 1 se retoma el planeamiento sobre la relación entre la producción y la implementación de actividades de abatimiento en las empresas y su curva de costo marginal de abatimiento, presentado en el artículo de McKitrick [20], pero expuesto y analizado con mucho mayor detalle, incluso resaltando algunas condiciones necesarias y suficuentes para encontrar el óptimo en el problema de optimización. En donde se encuentra que también bajo especificaciones simples (solo una empresa con un contaminante y una actividad de abatimiento), la curva marginal de abatimiento puede ser no diferenciable en algún punto.

La no diferenciabilidad implica que la elección de la actividad de abatimiento bajo incertidumbre puede depender del nivel previsto de reducción de emisiones. También las condiciones de estabilidad para la dinámica de mecanismos fiscales puede no cumplirse en la vecindad del punto en donde no es diferenciable. Una implicación política es que en algunos casos, las restricciones en la producción pueden llegar a ser tan eficientes como las restricciones en las emisiones, es por eso que la empresa tiene la opción de reducir la producción para disminuir sus emisiones, o implementar una actividad de abatimiento, por lo que siempre se tienen por lo menos dos maneras de llegar al objetivo de reducción de emisiones, provocando así la no diferenciabilidad.

Si bien el estudio de las curvas marginales de abatimiento es una herramienta clave en la economía ambiental, estas propiedades analíticas son raramente estudiadas, en éste primer capítulo se explican algunas de sus propiedades y se plantea el problema de optimización con restricción en las emisiones como la solución sucesiva de tres problemas proponiendo los resultados como proposiciones, teniendo en cuenta la condición necesaria y suficiente que debe ser asumida para asegurar que la curva marginal de abatimiento es continuamente diferenciable; la identificación de esta condición facilita la consistencia teórica.

En el capítulo 2 se presentan diversas variantes, bajo las mismas características y retomando los supuestos hechos en el capítulo 1. Se propone el planteamiento del problema de optimización con la incorporación de una función de precios variables, la cual se plantea como una función que depende de la cantidad de producción, así es posible implementar alguna estrategia en los precios teniendo en cuenta que de las funciones mas usadas en la actualidad son las del tipo Cobb-Douglas ya que son las que toman en cuenta distintos factores productivos y podrían proporcionar una perspectiva diferente para la toma de decisiones. El contexto mediante el cual se desarrollan cada una de las posibles extensiones presentes en éste capítulo es análogo y comparativo al del capítulo 1, pero no es exhaustivo, sin embargo se analizan los puntos principales, que son, el comportamiento de la curva marginal de abatimiento y la condición necesaria y suficiente para garantizar diferenciabilidad en dicha curva, así, cada problema es planteado como proposición.

Posteriormente se plantea un problema incorporando un gravamen en las emisiones en donde el objetivo principal es concientizar al agente contaminante, ya que de ser implementado como alternativa de abatimiento, dicho agente contaminante pagaría en proporción a la cantidad de emisiones que produce, sin embargo, la mayoría de impuestos ambientales no han sido diseñados con el propósito de modificar el comportamiento de los agentes que causan la contaminación, ya que tienen una finalidad recaudatoria, tratando de financiar con ellos las intervenciones necesarias para remediar la degradación ambiental, antes que prevenir y reducir dicha degradación. Es importante mencionar que, la recaudación obtenida por un impuesto ambiental es aceptada en muy buen modo por el administrador público, lo que le puede hacer perder de vista que la mejor señal de efectividad de un impuesto ambiental es que la recaudación sea nula.

Otra alternativa mas enfocada al desempeño óptimo de la empresa es la restricción en la catidad de producción dada una demanda fija, aunado con el hecho de cumplir con la restricción en las emisiones, es importante mencionar que existe una relación entre la cantidad demandada y el precio, es decir, a mayor precio, menor cantidad demandada y a menor precio mayor cantidad demandada, además del hecho de que aunque dicha restricción parece ser excesiva es posible caracterizar el óptimo respecto de la actividad de abatimiento, se encuentra un comportamiento similar en la curva marginal de abatimiento al analizado en el capítulo 1.

También en el capítulo 2, se plantea la alternativa de abatimiento con el comercio de reducción de emisiones. Este problema se plantea tratando de contestar algunas preguntas que surgen de las iniciativas recientes dentro de las negociaciones internacionales en cuanto se asignan a las empresas (o sectores) cuotas para sus emisiones en función de los objetivos de los respectivos gobiernos o de entes reguladores en materia de medio ambiente, mediante la cual se propone que la solución al cambio climático requiere la consolidación de un mercado internacional de emisiones ya sea a través del uso de un sistema de permisos comercializables o directamente del comercio libre de emisiones.

En este sentido, es fundamental que México avance en la creación de un mercado de carbono en donde se defina su forma de integración ya sea a nivel sectorial, es decir, entre empresas, o a un nivel global (entre países). Dicha alternativa tiene ciertas implicaciones que pueden ser consideradas antes de ser implementada, de entre las cuales destacan: la construcción de un sistema de permisos comercializables, precios no tan elevados y el diseño y aplicación de regulaciones que apoyen la creación y funcionamiento eficiente de este mercado.

Debe reconocerse la importancia de modificar hábitos y patrones de producción, distribución y consumo, apoyar de manera decisiva la innovación y la difusión de nuevas tecnologías que reduzcan las emisiones, así como de la eliminación de barreras institucionales y un amplio conocimiento respecto de sus respectivas curvas marginales de abatimiento.

En el último capítulo (capítulo 3) se presenta la interacción entre dos empresas, teniendo en mente a las dos empresas del sector energético que contribuyen mayormente en la emisión de gases de efecto invernadero en México (PEMEX y CFE). Parte fundamental del problema es incluir la interacción entre las dos empresas, reflejada en la satisfacción de las respectivas demandas, así como el interés de un desarrollo económico sustentable y de bajas emisiones. Pese a que los modelos planteados y analizados en este capítulo son una idealización de la situación real entre PEMEX y CFE, se cumplen con el objetivo de esbozar elementos que ayuden a entender el problema principal y dimensionar su complejidad; así como también que algunas de las conclusiones obtenidas pueden servir para la toma de decisiones en cada una de las empresas vistas aisladamente, pero también integradas como parte de un mismo sector.

El estudio de este último capítulo fue motivado principalmente porque el sector energético en México es el que mas contamina, y también es el que tiene un amplio espectro de alternativas de abatimiento a implementar a corto y largo plazo, como pueden ser:[7]

- Proponer mecanismos financieros para acelerar la adopción de tecnologías energéticamente eficientes en PEMEX.
- Integrar propuestas de política pública que impulsen el aprovechamiento del potencial de cogeneración y eficiencia energética.
- Priorizar el aprovechamiento del gas asociado a la producción de petróleo crudo y evitar sus emisiones.
- Promover el cultivo de especies apropiadas y los procesos de transformación más eficientes para la producción de biocombustibles de origen agropecuario y forestal.
- Diversificar tecnologías y fuentes primarias de generación de electricidad e impulsar a través de mecanismos específicos el uso de fuentes de energía que reduzcan las emisiones.
- Establecer protocolos para reducir las fugas de hexafluoro de azufre en el sistema de transmisión y distribución de energía eléctrica.
- Desarrollar e instrumentar los Programas Nacionales de energía eólica, geotérmica y minihidráulica, así como esquemas de financiamiento que agilicen e incrementen el aprovechamiento de estas fuentes renovables de energía en los sectores público y privado.
- Desarrollar campañas de promoción de proyectos de generación de energía eléctrica con fuentes renovables de energía, en sectores seleccionados, entre otros.

Concluimos esta introducción diciendo que si bien el esfuerzo de mitigar los efectos del calentamiento global parece ser una proeza a gran escala, creemos que la toma de decisiones para provocar cambio no sólo debe venir desde los planes de acciones gubernamentales o mediante políticas internacionales globales, sino que se pueden lograr avances en la reducción de emisiones con acciones concretas a menores escalas, por ejemplo, a nivel de empresas; y que el análisis y resultados de esta tesis puede contribuir en esa dirección.

[7] Fuente México: Estudio Sobre la Disminución de Carbono [23]

Capítulo 1

La decisión óptima de una empresa que produce un producto y un contaminante

En éste capítulo se retoma el problema que se encuentra en el artículo de McKitrick [20], describiendolo detalladamente, explicando el comportamiento de la curva marginal de abatimiento, haciendo énfasis en que dicha curva puede ser no diferenciable en un punto y adaptandola a la definición del uso actual del beneficio marginal; tomando como idea principal el beneficio obtenido respecto a la cantidad de abatimiento alcanzada, representando de forma gráfica cada uno de los posibles escenarios, dividiendo el problema en cuestión como la sucesión de tres problemas que están estrechamente relacionados; así como también se plantean como proposiciones los problemas de maximizar los beneficios con restricciones y sin restricciones en las emisiones, para así demostrar que dichos problemas tienen solución y dicha solución es única.

1.1. El problema

El objetivo principal de toda empresa es obtener ganancias al producir bienes y/o servicios, de tal modo que los ingresos siempre sean mayores o iguales que los egresos. En este caso el termino "iguales"no se descarta, ya que se puede dar el caso en el que la empresa no obtiene ganancia ni perdida por la venta del bien y/o servicio producido. Sin embargo, el esforzarse para obtener mayores ganancias puede ser una tarea difícil, ya que ello puede conllevar a diferentes implicaciones en el ámbito productivo, ambiental y laboral entre otros, y por ende aumentar los costos.

En este trabajo se hará énfasis solamente en los ámbitos productivo y ambiental, resaltando la estrecha relación entre ellos, y motivado por la creciente normatividad en términos de regulación de contaminantes, o los posibles acuerdos vinculantes en materia de gases de efecto invernadero que provocan el calentamiento global.

Como es sabido, toda empresa que produce un bien y/o servicio, emite una cierta cantidad de contaminantes al medio ambiente, dentro de los cuales destacan los gases de efecto invernadero (GEI), que son básicamente seis: Bióxido de Carbono CO_2, Metano CH_4, Óxido Nitroso N_2O, Hidrofluorocarbonos $HFCs$, Perfluorocarnonos $PFCs$ y Hexafluoruro de Azufre SF_6, los cuales se producen por diversas actividades, como por ejemplo, la quema de combustibles fósiles (carbón, derivados de petróleo y gas), reacciones químicas en procesos industriales (como la producción de cemento y acero), cambio de uso de suelo (deforestación), descomposición anaeróbica (cultivo de arroz, rellenos sanitarios), escape de gas en minas y pozos petroleros, producción y uso de fertilizantes nitrogenados, procesos de manufactura (los Hidrofluorocarbonos y Perfluorocarbonos son usados como refrigerantes), el uso de Hexafluoro de Azufre como fluido dieléctrico, etc.

En este capítulo consideramos una empresa que produce solamente un producto y emite un sólo contaminante. La cantidad de emisiones derivadas de la producción del producto será directamente proporcional al volumen de producción, es decir, a mayor cantidad de producción, mayor cantidad de contaminantes que se emiten al medio ambiente. Así también, el costo de producir un bien y/o servicio es directamente proporcional a la cantidad de producción, es decir, a mayor cantidad de producción se tiene un mayor costo para producir el bien y/o servicio.

Sin una restricción de emisiones, las empresas tendrían el incentivo de producir el máximo posible (sujeto quizá a la demanda del producto). Bajo restricciones de emisiones, las empresas necesitarán efectuar acciones para disminuir o moderar las emisiones contaminantes, es decir, mitigar o abatir emisiones. En este caso, la decisión óptima de cuánto producir no es tan obvia.

Para las empresas, el abatir emisiones tiene diversas implicaciones, ya que el implementar una o varias actividades de abatimiento, como por ejemplo, la implementación de tecnologías en chimeneas, modificación y mejora de procesos químicos, filtros catalíticos, etc., implica cierta inversión que puede tener costos fijos bajos (los costos fijos son aquellos costos que permanecen invariables ante los cambios en la cantidad de producción), pero costos variables altos (un costo variable es aquel que se modifica de acuerdo a variaciones de la cantidad de producción, se trate tanto de bienes como de servicios. Es decir, si la cantidad de producción decrece, estos costos decrecen, mientras que si la cantidad de producción aumenta el costo variable aumenta), o en otro caso, se pueden tener costos fijos altos y costos variables bajos.

Ahora, es importante mencionar la relación que existe entre los costos y la cantidad de producción, esto es posible, dadas las curvas de costo marginal por producción, las cuales miden la variación que experimentan los costos cuando se altera el nivel de producción. Así, dado un nivel de producción y, puede preguntarse cómo varían los costos si se altera dicho nivel en una cantidad Δy, esto es,

$$CM(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y) - c(y)}{\Delta y} \approx \frac{dc}{dy},$$

donde $CM(y)$ representa el costo marginal de la cantidad de producción, y es la cantidad de producto y c el costo unitario.

Cuando en la toma de decisiones de la empresa se incluye el abatimiento de emisiones contaminantes (por convicción o por imposición regulatoria), y dado que estas acciones implican costos, los beneficios económico se verán afectados. En este caso, el costo marginal también tendrá variación en el nivel de abatimiento, es decir, uno también puede preguntarse en cómo varían los costos si se altera el nivel de abatimiento en una cantidad Δa, así

$$CM(a) = \frac{\Delta c(a)}{\Delta a} = \frac{c(a + \Delta a) - c(a)}{\Delta a} \approx \frac{dc}{da}.$$

De forma análoga la curva de costo marginal de abatimiento (en lo sucesivo CMA) enlaza los niveles de emisión de una empresa con el costo adicional de las unidades de reducción de contaminación.

Así pues, la empresa tiene la opción de reducir la producción, para reducir las emisiones, o de implementar una o varias actividades de abatimiento, por lo que siempre se tienen por lo menos dos maneras de reducir emisiones.

En la siguiente sección se detalla un modelo matemático que captura la toma de decisiones de una empresa que fabrica un sólo producto y que emite sólo un contaminante.

1.2. Modelo Matemático

Una empresa produce una cantidad y de producto (número de unidades, volúmenes de producción, etc.) y ajusta en niveles no negativos a de actividades de abatimiento de la contaminación (que puede ser medido en reducción de emisiones, pesos invertidos en la actividad de abatimiento, etc.). El producto se vende a un precio fijo p por unidad. Se generan emisiones e basadas en el nivel de producción y de la actividad de abatimiento, así pues, e es directamente proporcional a la cantidad de producción e inversamente proporcional a la actividad de abatimiento. El costo total lo denotaremos por c. Por lo tanto los beneficios monetarios totales π (Beneficios = Ingresos - Egresos) son

$$\pi(p,\ y,\ a) = py - c(y,\ a), \tag{1.1}$$

y las emisiones estarán dadas por

$$e = e(y, a). \tag{1.2}$$

El problema de la empresa consiste en maximizar los beneficios (ganancias), sujeto a una restricción en la cantidad de contaminantes que la empresa puede emitir, es decir, se tiene que resolver alguno de los siguientes problemas de optimización:

$$\begin{aligned} &\max_{y\geq 0,\ a\geq 0} \quad py - c(y,\ a) \\ &\text{sujeto a} \\ &\qquad\qquad e(y,a) \leq e_1 \text{ ó } e(y,a) = e_1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde, como se explicó anteriormente, y es la cantidad de producción, a es la magnitud de la actividad de abatimiento, p es el precio de venta por unidad de producto producido, c representa el costo total y e_1 es un nivel fijo máximo de emisiones para la empresa.

1.2.1. Supuestos en el problema

Necesitamos hacer algunos supuestos para detallar sobre la situación real que estamos modelando. Así,

1. La función de e que representa a las emisiones $e = e(y, a)$ debe ser convexa creciente en la producción para capturar el hecho de que a mayor cantidad de producción, se esperan mayores emisiones; y convexa decreciente en la actividad de abatimiento ($e_y > 0$, $e_{yy} > 0$ y, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$ respectivamente).

2. Para garantizar que c sea creciente y cóncava respecto a la cantidad de producción necesitamos $c_y > 0$ y $c_{yy} > 0$.

3. c debe ser creciente con respecto a la actividad de abatimiento, y la igualdad ocurre cuando no se hace el esfuerzo por implementar alguna tecnología de abatimiento, es decir, se necesita que $c_a \geq 0$.

El objetivo de este planteamiento es enlazar los niveles de emisión de una empresa con el costo adicional de las unidades de reducción de contaminación,

$$\frac{\text{emisiones marginales por esfuerzo de abatimiento}}{\text{emisiones marginales por producción}} \approx$$

$$\approx \frac{\text{unidad extra de producción}}{\text{unidad extra de abatimiento}} * \frac{\text{costo}}{\text{unidad extra de producción}}$$

$$\approx \frac{\text{costo}}{\text{unidad extra de abatimiento}}.$$

1.3. Solución al problema sin restricciones

El beneficio marginal por producción (BM) mide la variación que experimentan los beneficios cuando se aumenta una unidad extra de producción, para este caso

$$BM(y) = \frac{\Delta\pi(y)}{\Delta y} = \frac{\pi(y + \Delta y) - \pi(y)}{\Delta y} \approx \frac{d\pi}{dy},$$

que por la expresión (1.1), se tiene

$$\frac{d\pi}{dy} = p - c_y.$$

Pero la empresa solo funcionará en niveles de producción donde el precio de venta excede o es igual al costo marginal de producción, por lo que

$$p - c_y \geq 0 \text{ o bien } p \geq c_y.$$

esto quiere decir, que a la empresa le conviene producir una cantidad suficiente para lograr que el costo marginal de producir una unidad extra de producto no sobrepase el precio unitario.

Si primeramente asumimos que no hay restricción en el nivel de emisiones que la empresa emite (el regulador no ha impuesto restricciones en cuanto a las emisiones contaminantes), sea

$$e_1 = \infty.$$

Entonces, el problema (1.3) a resolver en esta sección es

$$\max_{y \geq 0,\, a \geq 0} \quad py - c(y,\ a). \tag{P1}$$

1.3.1. Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden para el problema en (P1) son

$$\frac{d\pi}{dy}(y^*,\ a^*) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\pi}{da}(y^*,\ a^*) = 0,$$

por lo que el óptimo $(y^*,\ a^*)$ queda completamente determinado por

$$\begin{aligned} c_y(y^*,\ a^*) &= p \quad (1.4)\\ c_a(y^*,\ a^*) &= 0. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Para poder encontrar el óptimo, notemos que por las condiciones del problema es posible aplicar el Teorema de la Función Implícita (ver A.1.1 en el Apéndice A).

Tomando como $U = \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} - \{0\}$, para los puntos en U se cumplen las condiciones del TFIM; es decir, para $(y, a) \in U$ tal que

1. $\pi(y,\ a) - \pi(y^*,\ 0) = 0$, y

2. $\dfrac{\partial \pi}{\partial a}(y,\ a) = -c_a < 0$, dado que c es creciente con respecto a a.

Entonces en una vecindad de cualquier punto $(y,\ a) \in U$ para el que se cumpla 1., podemos encontrar una función $a(y)$ de clase C^1 tal que $a = a(y)$, y expresar π como

$$\pi(y) = py - c(y, a(y)).$$

Aplicando la condición de primer orden y derivando de forma implícita tenemos

$$0 = \frac{d\pi}{dy} = \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial \pi}{\partial a}\frac{da}{dy} = p - c_y + (-c_a)\frac{da}{dy},$$

así pues

$$\frac{da}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \pi}{\partial a}} = -\frac{p - c_y}{-c_a},$$

entonces

$$\frac{da}{dy} = \frac{p - c_y}{c_a}. \tag{1.6}$$

El óptimo (y^*, a^*) queda caracterizado por

$$p - c_y(y^*, a^*) - c_a(y^*, a^*)a_y(y^*, a^*) = 0. \tag{1.7}$$

1.3.2. Análisis de $\frac{da}{dy}$ y c_a

Notemos primeramente que para niveles de producción menores que el óptimo $(y < y^*)$ tendremos que $p \geq c_y$. Es decir, se producirá hasta que el costo marginal de producir sea igual al precio de venta.

El supuesto sobre los costos $(c_a \geq 0)$ es muy general. Para un nivel de producción y fijo, en principio cabe la posibilidad de tener una curva como la señalada con la letra A en la Figura 1.1. En la curva A, el punto $\hat{a}$ es un punto de inflexión y el intervalo comprendido entre $a^<$ y $a^>$ son puntos cuyo costo de abatimiento no cambia. Para la curva A, los costos marginales de abatimiento se presentan en la Figura 1.2. En términos prácticos, se espera que la curva marginal de costos de abatimiento sea una función convexa y no del tipo de la curva A en la Figura 1.2, salvo quizá en industrias donde la tecnología sea muy especial.

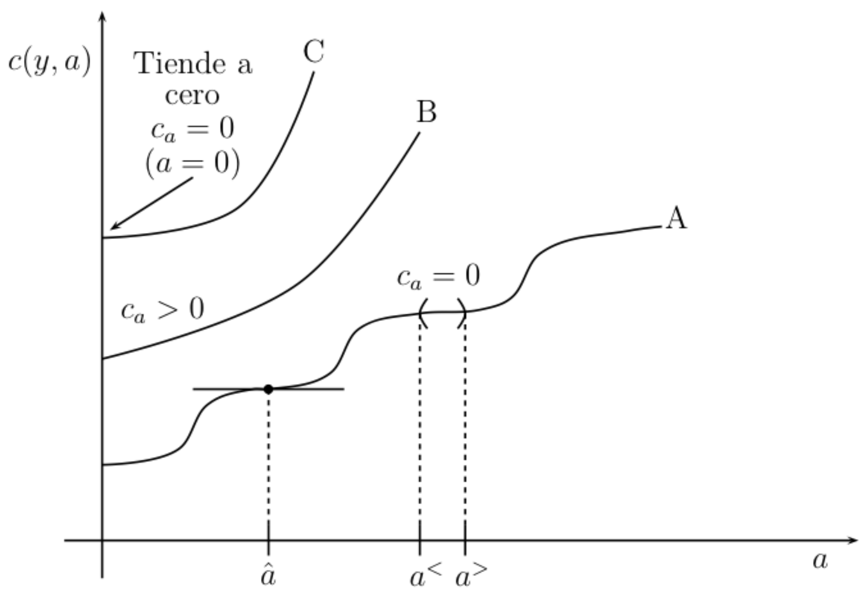


Figura 1.1: Costo de abatimiento para un nivel de producción fijo.

Esto nos deja suponer que los costos de abatimiento para un nivel de producción dado sean más del tipo ilustrados en las curvas B y C en la Figura 1.2, incrementales en los niveles de abatimiento.

La diferencia entre la curva B y C de la Figura 1.2 radica en cómo se comporta la curva en $a = 0$. La curva B supone que el costo incremental por una unidad extra de abatimiento es alto, es decir, abatir la primera unidad es costoso para la empresa. Esto se puede dar; por ejemplo, en industrias con tecnología vieja u obsoleta, donde el costo de inversión en tecnología de abatimiento es alto, con costos de mantenimiento bajos, o bien cuando el costo de implementar medidas de abatimiento no es muy alto pero el operarlo es muy caro (costos de mantenimiento altos). En la curva C el costo marginal de empezar a aba-

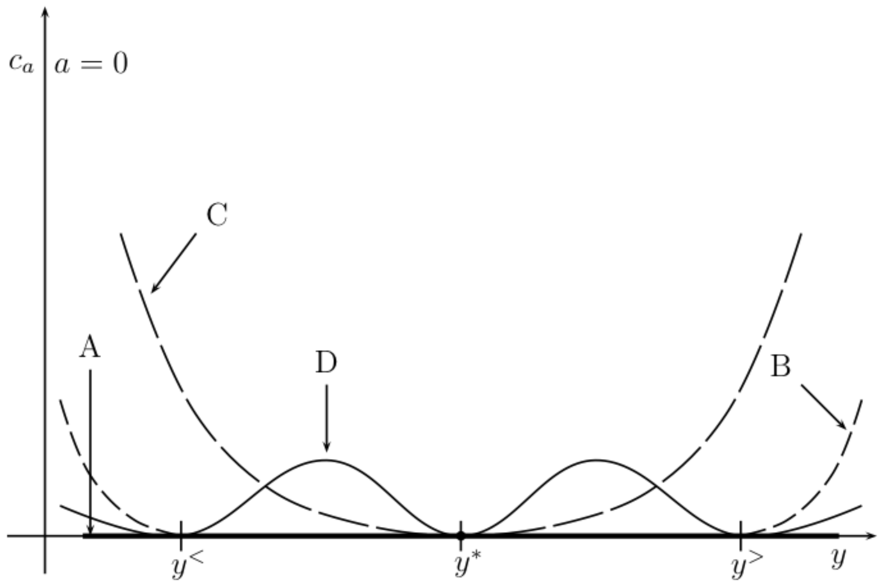


Figura 1.2: Costo marginal de abatimiento para un nivel de abatimiento fijo.

tir es cero. Uno supondría que la mayoría de las industrias debieran tener un perfil de costos parecido a éste, donde inicialmente abatir no es muy costoso e incremental en el nivel de abatimiento.

En el sentido anterior, es importante tener una mejor intuición sobre lo que implica c_a en $a = 0$.

Por la condición en (1.5), se tiene $c_a = 0$ en el par óptimo (y^*, a^*), pero para cualquier otro valor de y, c_a podría ser cero o no.

Supongamos que existen algunos niveles de producción y para los cuales $c_a > 0$. Podríamos tener entonces curvas de costos marginales de abatimeinto en $a = 0$ similares a las ilustradas en la Figura 1.3. La curva D no es lo que se espera en la práctica, pero las curvas A, B y C son más plausibles.

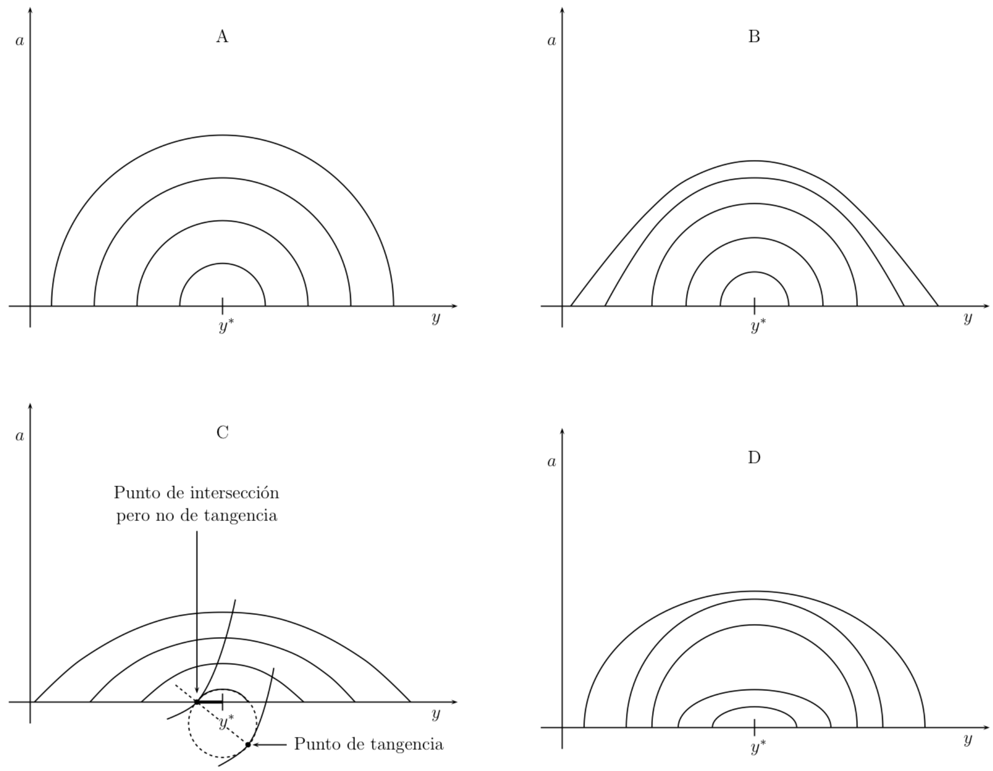


Figura 1.3: Curvas de costos marginales en $a = 0$.

Conjuntando el análisis anterior con las condiciones de primer orden en (1.6) y (1.7), llegamos a los dos casos posibles siguientes:

Caso 1.3.1 *Se cumple que*

$$c_a = 0 \ \ en \ \ a = 0 \ \ para\ todo\ y \geq 0.$$

Caso 1.3.2 *Se cumple que existe* $0 \leq y < \infty$ *con* $y \neq y^*$ *tal que*

$$c_a > 0 \ pero \ c_a = 0 \ en \ a = 0.$$

En ambos casos, la solución óptima será $(y^*, a^* = 0)$, con y^* determinada por

$$c_y(y^*, 0) = p.$$

1.3.3. Supuestos técnicos del problema

Concluyendo el análisis de la Sección anterior, la siguiente expresión

$$c_a = 0 \ \text{ en } \ a = 0, \ \text{ con } \ y = y^* \tag{1.8}$$

es una condición necesaria y suficiente para garantizar un óptimo del problema en (P1).

1.3.4. Condiciones de segundo orden

Dadas las condiciones de primer orden, en esta sección se verifica que el punto óptimo $(y^*,\ 0)$ cumpla con las condiciones de segundo orden, para asegurar que en dicho punto se encuentre un máximo, por lo cual se calculan las segundas derivadas

$$\frac{d^2\pi}{dy^2}(y^*,\ 0), \quad \frac{d^2\pi}{dady}(y^*,\ 0) \quad \text{y} \quad \frac{d^2\pi}{da^2}(y^*,\ 0).$$

En dos variables, la condición de segundo orden para verificar un máximo es $\frac{d^2\pi}{dy^2} < 0$,[1] pero esto es cierto sí y solamente si

$$\frac{d^2\pi}{dy^2}(y^*,\ 0) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\pi}{da^2}(y^*,\ 0) < 0,$$

y además

$$\left(\frac{d^2\pi}{dy^2}(y^*,\ 0)\right)\left(\frac{d^2\pi}{da^2}(y^*,\ 0)\right) - \left(\frac{d^2\pi}{dady}(y^*,\ 0)\right)^2 > 0. \tag{1.9}$$

Por los supuestos del problema (ver sección 1.2.1), sabemos que $c_{yy} > 0$, por lo que la primera condición se cumple. Para verificar la segunda, recordemos que $c_a \geq 0$ pero $c_a = 0$ en $a = 0$, de donde se deduce que $c_{aa}(y^*, 0) > 0$.Para ver lo anterior, recordemos que $c_a = 0$ en $a = 0$ quiere decir que el costo marginal de abatir una unidad extra de contaminante cuando no se ha hecho ningún esfuerzo de abatimiento es cero, y $c_a \geq 0$ para cualquier punto significa que la gráfica de $c_a(a)$ estará completamente en el primer cuadrante del plano cartesiano (ver Figura 1.4). Más aún, dadas las condiciones de primer orden en la sección 1.3.2, tenemos que para una $\delta > 0$ suficientemente pequeña $c_a(y^*, 0 + \delta a) - c_a(y^*, 0) > 0$, por lo que tendremos

$$c_{aa} = \lim_{\delta a \to 0^+} \frac{c_a(y^*, 0 + \delta a) - c_a(y^*, 0)}{\delta a} \geq 0.$$

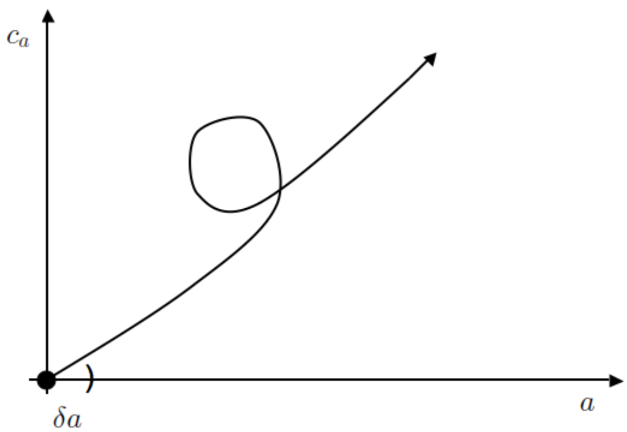


Figura 1.4: Costo marginal de abatimiento sin esfuerzo.

Por otro lado, si analizamos ahora c_a en $a = 0$ pero en función de y, sabemos que $c_a(y^*, 0) = 0$ es el costo marginal mínimo para el nivel de abatimiento $a = 0$ (ver Figura 1.5), es decir, para cualquier $y \gtreqless y^*$, $c_a(y, 0) > c_a(y^*, 0)$, existe un $\delta y > 0$, para el cual

$$c_{ay} = \lim_{\delta y \to 0^+} \frac{c_a(y^* + \delta y, 0) - c_a(y^*, 0)}{\delta y} = 0,$$

y

$$c_{ay} = \lim_{\delta y \to 0^-} \frac{c_a(y^* + \delta y, 0) - c_a(y^*, 0)}{\delta y} = 0.$$

Combinando con el análisis anterior, la condición en (1.9) se convierte en

$$c_{yy}c_{aa} - c_{ay}^2 > 0,$$

la cual se satisface.

1.3.5. Resultado principal

Combinando los análisis de las secciones anteriores, la solución óptima del problema sin restricciones en (P1) queda resumido en la siguiente proposición.

[1] Ver Teorema B.2.3 en Apéndice B.

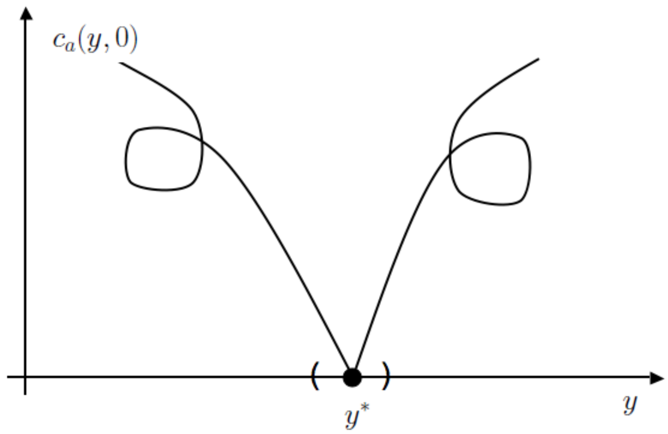


Figura 1.5: Costo marginal de abatimiento en función de la producción.

Proposición 1.3.3 *Considérese el problema (P1) con función objetivo cóncava, definido en un dominio $S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$, entonces, dicho problema tiene solución única $(y^*, 0)$ sí y sólo si, $c_a = 0$ en $(y^*, a^* = 0)$, y y^* satisface,*

$$c_y(y^*,\ 0) \ = \ p. \tag{1.10}$$

Demostración. Necesidad ($\Rightarrow$) La función de beneficios es la suma de una función lineal con una función convexa, y dado que las funciones lineales son tanto cóncavas como convexas, y como $c(y,a)$ es una función convexa, entonces $-c(y,a)$ es una función cóncava, así $\pi(y,a)$ es cóncava.

Sabemos que π es cóncava y $(y^*, 0)$ es el máximo global de π en S convexo, sí y sólo si $(y^*, 0)$ es un punto estacionario de π, por lo cual cumple con las condiciones necesarias de primer orden (ver B.2.1), de lo que se sigue que para $(y^*, 0)$,

$$c_a(y^*, a^*) = 0 \text{ en } a^* = 0.$$

Suficiencia ($\Leftarrow$) Suponiendo $c_a = 0$ en $(y^*, a^* = 0)$, y y^* satisface (1.10), se quiere probar que existe solución única $(y^*,\ 0)$ para el problema cóncavo. Para este caso es necesario probar que la solución para el problema es un máximo global, proponiendo el punto estacionario $(y^*,\ 0)$. Aplicando B.2.1, B.2.3 y la definición B.2.6, por lo cual el punto $(y^*,\ 0)$ es el máximo global y es único. ■

1.3.6. Líneas isobeneficio

El análisis de la sección anterior también nos ayuda a caracterizar las líneas de isobeneficio del problema.

Analicemos primero el caso $a > 0$. Sabemos que

$$\frac{da}{dy} = -\frac{\frac{\partial \pi}{\partial y}}{\frac{\partial \pi}{\partial a}} = -\frac{p - c_y}{-c_a},$$

pero las expresiones en (1.7) y la primera condición en (1.5) siguen siendo válidas independientemente del valor de a para y^*, por lo que $c_a > 0$ y podemos concluir que $\frac{da}{dy} = 0$.

Cuando $y < y^*$, el costo marginal unitario no ha alcanzado al precio unitario (el costo marginal iguala al precio en el nivel óptimo de producción y^*), por lo que $\frac{da}{dy} > 0$. Por analogía, deducimos que para $y > y^*$ tenemos $\frac{da}{dy} < 0$. Cuando $a = 0$, tenemos dos casos:

Caso 1.3.4 ($c_a = 0$) *Si $y \gtrless y^*$, entonces tendremos que $p \neq c_y$ y $c_a = 0$, por lo que $\frac{da}{dy} = \infty$. Cuando $y = y^*$ el costo marginal es igual al precio ($c_y = p$), por lo que $\frac{da}{dy} = \frac{0}{0}$, estos resultados se ven gráficamente en la Figura 1.6.*
En este caso, las líneas de isobeneficio son semicírculos o semielipses donde uno de sus ejes coinciden con el eje de las abscisas, y que convergen concentricamente al punto $(y^*, 0)$, el cual corresponde al beneficio π^*. A medida que crece el radio de los círculos, menor será el isobeneficio.

Caso 1.3.5 ($c_a > 0$) *Para $y < y^*$, sabemos que $p - c_y > 0$, por lo que $\frac{da}{dy} > 0$. Análogamente para $y > y^*$ tendremos $\frac{da}{dy} < 0$.*

En este caso las líneas isobeneficio son como la parte superior de semicírculos o semielipses (el eje de las abcisas está por arriba del eje horizontal del círculo o elipse). La Figura 1.7 ilustra esta situación.

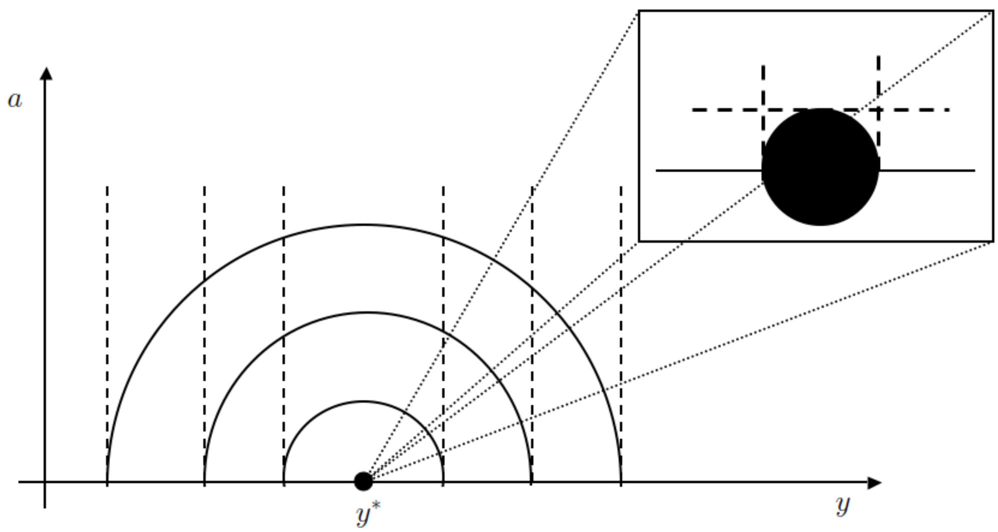


Figura 1.6: Líneas de isobeneficio.

1.3.7. Interpretación económica de la solución

La interpretación económica de la solución óptima $(y^*, 0)$ caracterizada en (1.7) es la siguiente. La condición $c_y = p$ quiere decir que se debe escoger el nivel de producción más alto hasta que los costos no sobrepasen al precio de venta unitario, ya que de otra manera el beneficio económico no será positivo. Por otro lado, la segunda condición $c_a = 0$ implica que se debe escoger un nivel de abatimiento cuyo costo sea lo menor posible (cero, ya que los costos son no negativos). Intuitivamente, el único nivel de abatimiento que debe satisfacer esta condición debe ser cero (no abatir no implica costos, cualquier otro nivel de abatimiento debe incurrir en costos para la empresa). Matemáticamente el problema no implica que $a^* = 0$, por lo que se necesita la condición (1.8) retomada aquí por facilidad.

Otra manera de ver lo anterior es a través de la condición (1.7). El primer término es el precio recibido por unidad de producto, el segundo término es el costo de producir una unidad extra y el tercer término es el costo de abatir una unidad extra de contaminante dado el nivel óptimo de producción. Es decir, es el beneficio marginal total por producción y abatimiento en el óptimo. Para maximizar esta expresión (maximizar beneficio económico marginal) se

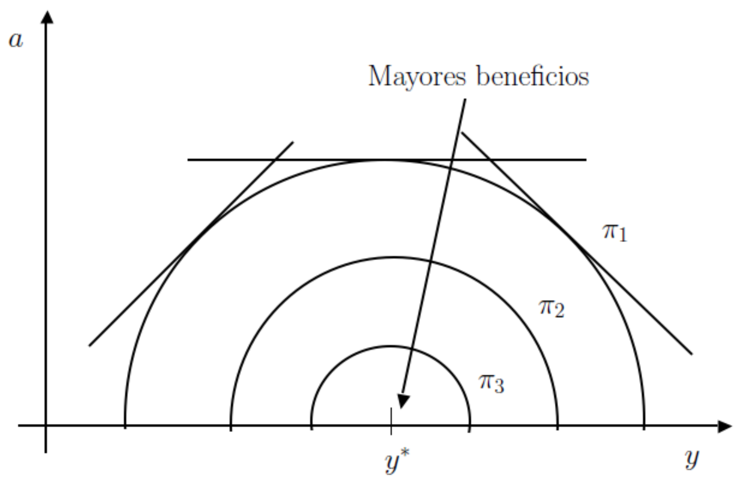


Figura 1.7: Razón de cambio del abatimiento respecto la cantidad de producción.

necesita que el costo de producir sea a lo más el precio recibido y que los costos de abatir sean mínimos (cero). Lo anterior indica que cuando no hay restricciones en las emisiones, no es necesario implementar medida alguna de abatimiento. La solución óptima estará unicamente determinada por el nivel de producción óptimo y caracterizado en que el costo marginal de producción de una unidad extra sea igual al precio de venta del producto.

1.4. Solución al problema con restricción de desigualdad en las emisiones

En el problema (1.3), la función de beneficios que se quiere maximizar está dada por $\pi(p,\ y,\ a) = py - c(y\ a)$. Para ser consistentes con los resultados teóricos del Apéndice B, necesitamos expresar el problema original como un problema de minimización para plantear el problema dual. Entonces, el problema equivalente por resolver es:

$$\begin{aligned} \max_{y\geq 0,\, a\geq 0} \quad & py - c(y,\ a) \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & e(y,\ a) \leq e_1. \end{aligned} \tag{P2}$$

El Lagrangiano $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, asociado a dicho problema es[2]

$$L(y,\ a,\ \lambda) = -py + c(y,\ a) + \lambda(e(y,\ a) - e_1). \tag{1.11}$$

1.4.1. Existencia de la solución al problema dual

En esta sección se define la función dual $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como el valor mínimo del Lagrangiano sobre $(y,\ a)$: para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(\lambda) = \operatorname*{ínf}_{(y,\ a)\in\mathcal{D}} (-py + c(y,\ a) + \lambda(e(y,\ a) - e_1)).$$

Cuando el Lagrangiano no está acotado inferiormente, la función dual tiende a $-\infty$. Pero en este caso, el Lagrangiano esta acotado inferiormente ya que si la cantidad de producción es cero y los esfuerzos de abatimiento son cero ($y = 0$ y $a = 0$)

$$L(0,\ 0,\ \lambda) = c(0,\ 0) + \lambda(e(0,\ 0) - e_1),$$

además, $e(0,\ 0) = 0$, ya que no hay producción ni abatimiento, y por lo tanto no hay emisiones. De manera análoga se espera que $c(0,\ 0) = 0$, entonces

$$L(0,\ 0,\ \lambda) = -\lambda e_1,$$

que representa una cota inferior, es decir,

$$L(y,\ a,\ \lambda) \geq -\lambda e_1,$$

y el problema dual está bien definido.

1.4.2. Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden para el problema en (1.11) son

$$\frac{dL}{dy}(y^1,\ a^1,\ \lambda^1) = 0, \quad \frac{dL}{da}(y^1,\ a^1,\ \lambda^1) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{dL}{d\lambda}(y^1,\ a^1,\ \lambda^1) = 0,$$

[2]Ver Apéndice B.

calculando las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= -p + c_y + \lambda e_y\\ \frac{\partial L}{\partial a} &= c_a + \lambda e_a\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= e(y,\ a) - e_1,\end{aligned}$$

por lo que el óptimo $(y^1,\ a^1,\ \lambda^1)$ queda completamente determinado por

$$\begin{aligned}-p + c_y + \lambda e_y &= 0\\ c_a + \lambda e_a &= 0\\ e(y,\ a) - e_1 &= 0,\end{aligned}$$

o bien $(y^1,\ a^1)$ está determinado por

$$e(y^1,\ a^1) = e_1 \tag{1.12}$$

y

$$p - c_y(y^1,\ a^1) + \frac{c_a(y^1,\ a^1)}{e_a(y^1,\ a^1)} e_y(y^1,\ a^1) = 0, \tag{1.13}$$

con

$$\lambda^1 = -\frac{c_a(y^1,\ a^1)}{e_a(y^1,\ a^1)}.$$

1.4.3. Condiciones de segundo orden

Dadas las condiciones de primer orden, en esta sección se verifica que el punto óptimo $(y^1,\ a^1)$ cumpla con las condiciones de segundo orden, para esto es necesario calcular las segundas derivadas de (1.11), con $\lambda \geq 0$, para formar la matriz hessiana, esto es

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= c_{yy} + \lambda e_{yy}, & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} &= e_y,\\ \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} &= c_{aa} + \lambda e_{aa}, & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} &= e_a,\\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial a} &= c_{ya} + \lambda e_{ya}, & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} &= 0,\end{aligned}$$

así pues, la matriz hessiana es

$$H = \begin{bmatrix} c_{yy} + \lambda e_{yy} & c_{ya} + \lambda e_{ya} & e_y \\ c_{ya} + \lambda e_{ya} & c_{aa} + \lambda e_{aa} & e_a \\ e_y & e_a & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante está dado por

$$\begin{aligned} \text{det H} &= -(e_a)^2(c_{yy} + \lambda e_{yy}) + 2e_y e_a(c_{ya} + \lambda e_{ya}) - (e_y)^2(c_{aa} + \lambda e_{aa}) \\ &= -(e_a)^2(c_{yy} + \lambda e_{yy}) + 2e_y e_a(\lambda e_{ya}) - (e_y)^2(c_{aa} + \lambda e_{aa}), \end{aligned}$$

como $\lambda = -\frac{c_a}{e_a}$, de los supuestos dados en la sección 1.2.1, se tiene que $\lambda \geq 0$ y det H < 0, por lo tanto se tiene un mínimo global.

1.4.4. Resultado principal

La solución óptima del problema con restricciones de desigualdad en (P2) queda resumida en la siguiente proposición

Proposición 1.4.1 *Sea el problema (P2) con función objetivo cóncava, definido en un dominio $S = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$, con restricción de desigualdad convexa, en particular $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$, $c_y > 0$, $c_{yy} > 0$, $c_a \geq 0$, entonces se dice que dicho problema tiene solución única (y, a) y esta caracterizada por*

$$e(y, a) = e_1$$

y

$$p - c_y(y, a) + \frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)} e_y(y, a) = 0,$$

con

$$\lambda = -\frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)},$$

que representa el costo marginal por emisiones abatidas.

Demostración. Es necesario verificar que la función de beneficios ($\pi(y, a) = py - c(y, a)$) es estrictamente cóncava, y que la restricción es estrictamente convexa; así pues, aplicando el teorema B.2.5 se tiene que

$$D_1(y, a) = \pi_{yy} < 0 \quad y \quad D_2(y, a) = \begin{vmatrix} -c_{yy} & -c_{ya} \\ -c_{ya} & -c_{aa} \end{vmatrix} > 0,$$

se cumple para todo (y, a) dadas las hipótesis y lo visto en la sección 1.2.1, por lo cual $\pi(y, a)$ es estrictamente cóncava en S, ahora se verifica que $e(y, a)$ sea estrictamente convexa, nuevamente aplicando el torema B.2.5 se tiene

$$D_1(y, a) = e_{yy} > 0 \quad y \quad D_2(y, a) = \begin{vmatrix} e_{yy} & e_{ya} \\ e_{ya} & e_{aa} \end{vmatrix} > 0,$$

se cumple para todo (y, a), por lo cual $e(y, a)$ es estrictamente convexa en S.

Así aplicando los teoremas B.5.3, B.5.2 y B.2.6 al problema (P2), se tiene que la solución es única.
■

1.4.5. El problema de minimizar emisiones sin restricciones

Si consideramos el problema de minimizar emisiones sin restricciones

$$\min_{y \geq 0,\, a \geq 0} \quad e(y, a),$$

las condiciones de primer orden son

$$\frac{de}{da} = 0 \text{ y } \frac{de}{dy} = 0,$$

o bien asumiendo que $a = a(y)$ y haciendo uso del teorema de la función implícita

$$e_a \frac{da}{dy} + e_y = 0,$$

o reescribiendo

$$\frac{da}{dy} = \frac{-e_y}{e_a} > 0. \tag{1.14}$$

Es decir, las pendientes de las curvas isoemisiones están dadas por menos el cociente entre las emisiones marginales por producción y las emisiones marginales por abatimiento.
La pendiente en (1.14) es positiva dado el supuesto *1.* visto en la sección 1.2.1; una suposición razonable cuando una tecnología de abatimiento es implementada, es que la empresa se esfuerza para reducir las emisiones, lo cual implica

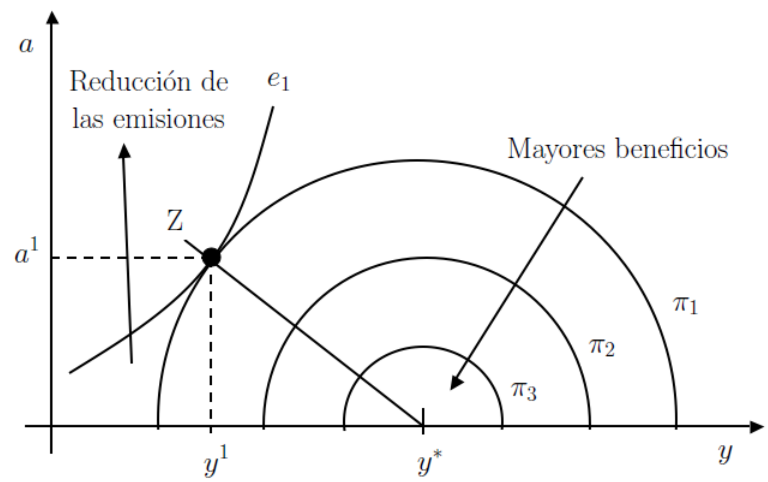


Figura 1.8: Combinaciones óptimas de abatimiento y producción.

que la restricción de isoemisiones es convexa por arriba. Esto se ve gráficamente en la línea e_1 de la Figura 1.8, y se muestran combinaciones de a y y en el campo de emisiones e_1. Para un nivel de producción dado, las emisiones disminuyen a medida que aumenta el abatimiento; así la dirección muestra el movimiento indicado dentro de la región de bajas emisiones.

1.4.6. Líneas isobeneficio e isoemisiones

Si reescribimos la condición de optimalidad en (1.13) para el problema con restricciones tenemos

$$\frac{p - c_y(y^1,\ a^1)}{c_a(y^1,\ a^1)} = -\frac{e_y(y^1,\ a^1)}{e_a(y^1,\ a^1)},$$

que no es otra cosa que la igualdad entre la pendiente de las líneas isobeneficio y la pendiente de las líneas isoemisiones. Esto conjuntamente con la condición (1.12), nos dice que el óptimo para el problema con restricciones queda caracterizado por ser el punto donde las pendientes de isobeneficio e isoemisiones se igualan, satisfaciendo simultáneamente que las emisiones sean igual a la cota de restricción e_1.

El lugar geométrico donde la pendiente de la línea de isobeneficio es igual a la pendiente de la línea de isoemisiones es ilustrado por el segmento Zy^* en la Figura 1.8. La elección óptima de la producción y abatimiento, tiene la restricción e_1, que es el punto (y^1, a^1), con los beneficios π_1 asociados. El verdadero costo para la empresa de alcanzar el objetivo de reducir las emisiones dado el problema con una restricción, se puede conocer si se hace un cambio en el nivel de beneficios, $\pi^* - \pi_1$.

El hecho de alcanzar el objetivo de reducir las emisiones se considera como un costo, ya que el mayor beneficio π^* es el que se encuentra en el punto óptimo no regulado $(y^*, 0)$, que es cuando la empresa se esfuerza por no realizar una actividad de abatimiento, mientras que el beneficio π_1 representa el óptimo regulado en el punto (y^1, a^1), el cual no se encuentra en la dirección de mayores beneficios, así que la diferencia representa lo que le puede costar a la empresa el tener una actitud altruista con el medio ambiente.

Cuando se asume $c_a(y, 0) = 0$, se asegura que las lineas isobeneficio cruzan el eje y verticalmente; por lo tanto una pendiente ascendente de la restricción de las emisiones siempre será tangente a la línea de isobeneficios en los puntos interiores del espacio no negativo (y, a). Consecuentemente la empresa utilizará cantidades positivas de equipo de abatimiento, en lugar de sólo reducir la producción.

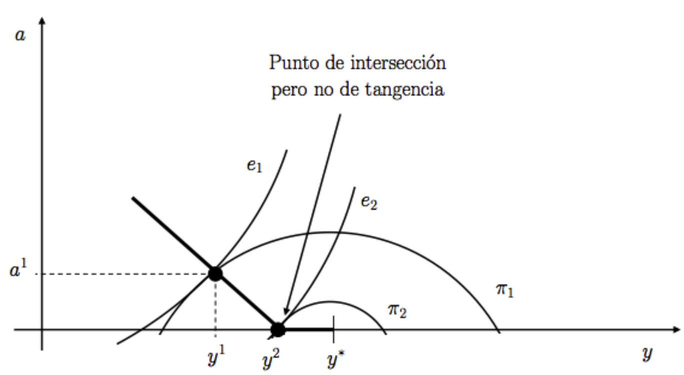


Figura 1.9: Reducción de la producción para alcanzar el objetivo en las emisiones.

Cuando se cumple que $c_a(y, 0) > 0,\ y \neq y^*$, habrán valores en la constante de restricción en las emisiones para los cuales las curvas isoemisiones no toquen tangencialmente a las curvas isobeneficio, sino en un punto esquina situado sobre el eje horizontal, tal como se ilustra con el punto y^2 en la Figura 1.9. En este caso, la pendiente en la curva de isoemisiones será mayor que la pendiente en la curva isobeneficio, es decir

$$-\frac{e_y}{e_a} > \frac{p - c_y}{c_a},$$

que implica

$$c_a > -\frac{(p - c_y)\, e_a}{e_y}. \tag{1.15}$$

Situaciones como ésta suceden cuando a bajos niveles de abatimiento, unidades marginales de a son muy costosas y/o relativamente inefectivas, entonces la empresa sólo tiene la opción de controlar emisiones mediante la reducción de la producción.

1.5. Solución del problema con restricción de igualdad en las emisiones

Nuevamente, para ser consistentes con los resultados teóricos del Apéndice B, necesitamos expresar el problema original haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} &\max_{y \geq 0,\ a \geq 0} \quad py - c(y,\ a) \\ &\text{sujeto a} \\ &\qquad\qquad e(y,\ a) = e_1. \end{aligned} \tag{P3}$$

El Lagrangiano $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, asociado a dicho problema es

$$L(y,\ a,\ \lambda) = py - c(y,\ a) - \lambda(e(y,\ a) - e_1). \tag{1.16}$$

Calculando las derivadas e igualando a cero se tiene

$$\frac{dL}{dy}(y, a, \lambda) = 0, \quad \frac{dL}{da}(y, a, \lambda) = 0,$$

esto es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= p - c_y - \lambda e_y,\\ \frac{\partial L}{\partial a} &= -c_a - \lambda e_a,\end{aligned}$$

por lo que el óptimo $(y^1,\ a^1,\ \lambda^1)$ se encuentra resolviendo

$$\begin{aligned}p - c_y &= \lambda e_y,\\ -c_a &= \lambda e_a,\\ e(y,\ a) &= e_1,\end{aligned}$$

para y, a y λ, así pues, el óptimo queda completamente determinado por

$$e(y^1,\ a^1) = e_1 \tag{1.17}$$

y

$$p - c_y(y^1,\ a^1) + \frac{c_a(y^1,\ a^1)}{e_a(y^1,\ a^1)} e_y(y^1,\ a^1) = 0, \tag{1.18}$$

con

$$\lambda^1 = -\frac{c_a(y^1,\ a^1)}{e_a(y^1,\ a^1)}.$$

Es posible aplicar el Teorema B.5.1, ya que dadas las condiciones del problema se sabe que tanto $c(y,a)$ como $e(y,a)$ son funciones convexas, por lo tanto el punto (y^1,a^1) resuelve el problema (P3).

1.6. El Beneficio Marginal

La solución del problema en (P1) nos indica el nivel óptimo (en términos de beneficio económico) de producción en una empresa que no tiene restricciones ambientales; y el problema (P2) nos indica cuál debe ser el nivel óptimo de producción y abatimiento en la empresa cuando hay una restricción en emisiones por parte del ente regulador. Ver estas dos soluciones por separado no nos dice cómo hacer la transición de una a otra. Una manera de analizar esta transición es calculando el beneficio marginal por una unidad extra de abatimiento (reducción de emisiones) a partir de estar en el óptimo sin restricciones ambientales. Estos beneficios marginales se resumen en las Curvas Marginales de Abatimiento (CMA), que analizaremos en esta sección.

Para esto, hacemos uso nuevamente del Teorema de la Función Implícita (TFIM) del Apéndice A para garantizar que y y a se pueden expresar en función de las emisiones; es decir, existe una función y y a tal que

$$y = y(e) \ \text{ y } \ a = a(y, e).$$

Así, el beneficio económico π queda expresado como:

$$\pi(e) = py(e) - c\left(y(e), a(y(e), e)\right),$$

derivando tenemos

$$\frac{d\pi}{de} = \left(p - c_y - c_a \frac{da}{dy}\right) \frac{dy}{de} - c_a \frac{da}{de}. \tag{1.19}$$

Dado que la relación (1.7) de la sección 1.3.1 es válida para cualquier combinación óptima de producción-abatimiento (determina las líneas de isobeneficio), la expresión dentro del paréntesis se anula, por lo que $\frac{d\pi}{de}$ se reduce a

$$\frac{d\pi}{de} = -c_a \frac{da}{de}. \tag{1.20}$$

Note que la expresión en (1.20) es siempre positiva ya que $c_a \geq 0$ y $\frac{da}{de} < 0$.

En particular, si se evalúa en el óptimo del problema sin restricciones $(y^*, 0)$, la expresión se anula, ya que $c_a = 0$ en $a = 0$, es decir, $e^* = e(y^*, 0)$ es un óptimo para la función $\pi(e)$. Más aún, e^* es un máximo ya que

$$\frac{d^2\pi}{de^2} = -c_{aa} \frac{da}{de} - c_a \frac{d^2 a}{de^2} > 0,$$

debido a que $c_{aa} > 0$, $\frac{da}{de} < 0$, $c_a \geq 0$ y $\frac{d^2 a}{de^2} < 0$.

Por otro lado, en el problema (P3) con restricciones de igualdad cuando $e_2 > e^*$ (el nivel deseado de emisiones rebasa a las emisiones de la solución óptima del problema sin restricciones), la trayectoria óptima está caracterizada por los pares $(y_2, 0)$, donde y_2 se determina mediante

$$e(y_2, 0) = e_2,$$

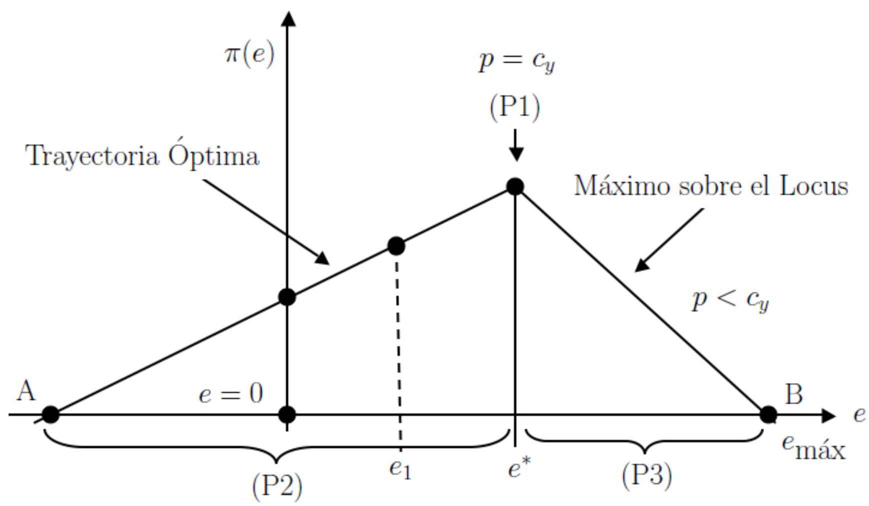


Figura 1.10: Beneficio versus emisiones.

y dado que se asumió $c_a = 0$ para $a = 0$, entonces (1.19) queda

$$\frac{d\pi}{de} = (p - c_y)\frac{dy}{de} < 0,$$

ya que aquí se cumple $p < c_y$ (se tuvo que sacrificar ganancia para producir lo suficiente y alcanzar la igualdad de emisiones) y $\frac{dy}{de} > 0$.

La Figura 1.10 esquematiza el beneficio económico versus las emisiones para las soluciones óptimas de los tres problemas ((P1), (P2) y (P3)). El punto e^* corresponde a la solución del problema sin restricciones (P1), donde $e^* = e(y^*, 0)$. Este punto es donde se alcanza el beneficio económico máximo. La curva de pendiente positiva para valores menores de e^* corresponde a las soluciones del problema con restricciones cuando $e^* > e_1$. El punto extremo izquierdo A corresponde a la inacción, es decir, $(y = 0, a = 0)^3$, que también corresponde a

[3] Note que en la Figura 1.10 se ha ejemplificado al punto A como con emisiones negativas. En realidad sus emisiones pueden ser menores, iguales o mayores que cero dependiendo de la forma funcional específica de la función de costos y abatimiento.

resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min e(y,a) \\ &\text{sujeto a} \\ &\pi \geq 0, \end{aligned}$$

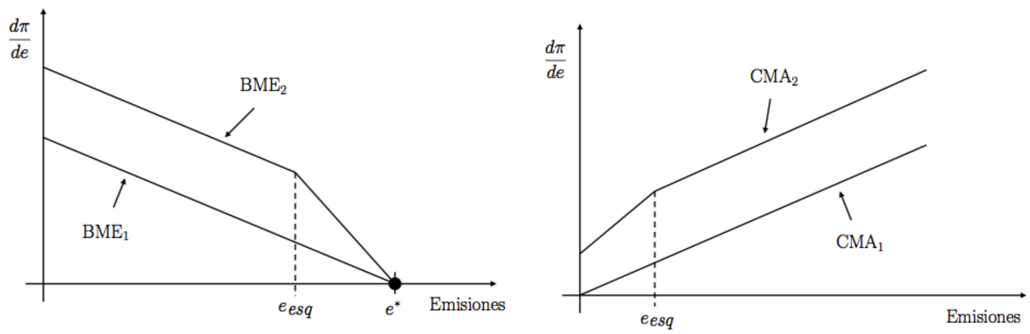
que es su problema dual. Note que la solución del problema con restricciones de desigualdad cuando $e_1 > e^*$ es $(y^*, 0)$, ya que es donde se alcanza el máximo beneficio económico. La curva de pendiente negativa a la derecha de e^* corresponde a la solución del problema con restricciones de igualdad (P3) para valores $e^* < e_2$. El punto B del extremo derecho corresponde a $(y^{max}, 0)$ con y^{max} satisfaciendo $py^{max} = c(y^{max}, 0)$, de donde se desprende que $e_{max} = e(y^{max}, 0)$.

1.6.1. Beneficio Marginal por Emisiones

En términos de formulación de políticas para la empresa, es más útil analizar $\frac{d\pi}{de}$, que es el beneficio marginal por una unidad extra de emisiones (BME). La Figura 1.11 (a) ejemplifica el comportamiento de una curva decremental con cruce en cero en e^*. Es decir, nos indica cuál es el beneficio marginal óptimo al emitir (o disminuir) una unidad extra de emisiones, que a su vez está asociado a una combinación óptima de producción-abatimiento, sin embargo, la curva que esta orientada al ámbito ambiental es la que se encuentra en la Figura 1.11 (b), que representa el abatimiento marginal óptimo al reducir en una unidad extra de emisiones, a partir de un nivel de emisiones base (e_{base}), de donde es importante mencionar que e_{esq} representa el punto de no diferenciabilidad en la curva marginal de abatimiento, el cual se explicará detalladamente en la sección 1.6.1.1.

Si la empresa tiene establecida una política actual (se le denomina también línea base, business as usual o BAU) de producción-abatimiento que determina un nivel actual de emisiones e_{base} asociado a un costo c_{base}, entonces en términos del beneficio marginal por emisiones se puede construir la denominada Curva Marginal de Abatimiento que relaciona el beneficio económico (marginal) por cada unidad extra de reducción de emisiones ($R(y,a) = e(y,a) - e_{base}$), a partir de la línea base, es decir, si $\pi' = \pi - \pi_{base}$ y $R(y,a) = e(y,a) - e_{base}$, el beneficio marginal por la reducción de una unidad extra de emisiones será

$$\frac{\partial \pi'}{\partial R} = \frac{\partial \pi}{\partial R}.$$



(a) Beneficio marginal respecto emisiones (b) Curva Marginal de Abatimiento

Figura 1.11: Funciones de costo marginal de abatimiento.

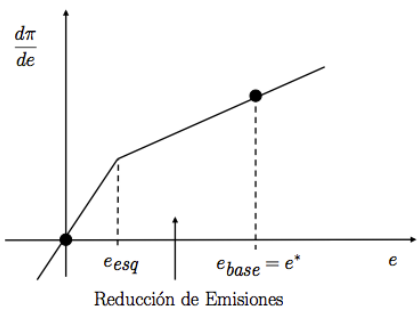
El área bajo la curva CMA desde $e = 0$ hasta el nivel de reducción de emisiones deseado será el costo total por abatimiento.

Si $e_{base} = e^*$, la CMA comenzará en cero y el costo marginal de abatir una unidad extra de emisiones se incrementa gradualmente, como lo muestra la Figura 1.12 (a).

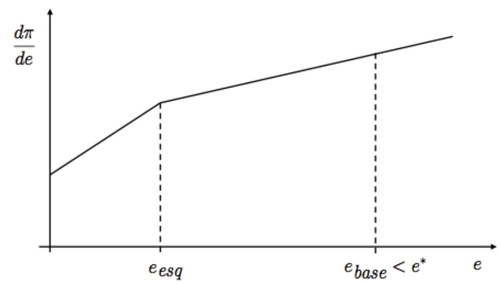
Si $e_{base} < e^*$, entonces el costo de abatir la primera unidad de emisiones es positivo y aumenta subsecuentemente como se muestra en la Figura 1.12 (b).

En el caso que $e_{base} > e^*$ nótese que no solamente no hay costo en abatir las primeras unidades de emisiones, sino que hay beneficio económico. A todas estas medidas cuyos costos marginales están en la parte negativa del eje ordenado se les denomina "no-regrets". Visto desde el punto de vista de planeación óptima de producción-abatimiento, curvas CMA como esta muestran que la empresa opera ineficientemente, ya que podría tener un mejor beneficio económico a un menor nivel de emisiones e^*(ver Figura 1.12 (c)).

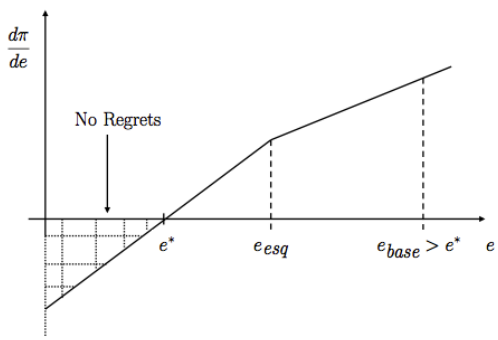
En este caso, la recomendación para la empresa es aplicar las medidas de abatimiento óptimamente hasta llegar al nivel de emisiones e^*, independientemente de imposiciones regulatorias en cuanto a reducción de emisiones.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.12: Curvas marginales de abatimiento.

1.6.1.1. Inflexión en la Curva Marginal de Abatimiento (CMA)

De la sección 1.4.6 sabemos que la relación en (1.15), que reescribimos por facilidad a continuación,

$$c_a > -\frac{(p - c_y)\, e_a}{e_y},$$

es una condición necesaria y suficiente para que el problema con restricciones tenga una solución de esquina, dicho en otras palabras, si la empresa no es perfectamente competitiva, esto es que $c_a > 0$ en $a = 0$, entonces se tendrá que $p - c_y > 0$ en un nivel no regulado de emisiones, y por lo tanto la CMA de la empresa no se cruza con el eje horizontal, implicando así que la reducción inicial de emisiones pueda ser costosa para la empresa. En términos de la CMA, esto implica que

$$\frac{d\pi}{de} < -c_a \frac{da}{de}.$$

Esto es, la pendiente de la curva CMA es menor que la asociada con las tangentes interiores, por lo cual la empresa intenta reducir emisiones al disminuir su producción, antes de moverse a niveles positivos de abatimiento, provocando así que la pendiente de la línea de isobeneficio sea menor que la pendiente de la línea de isoemision. Geométricamente esto significa que la CMA crece mas rápidamente entre el punto 0 y e_{esq}, donde e_{esq} es el nivel de emisiones asociado con el nivel de producción y_{esq}, calculado como

$$c_a\left(y_{esq},0\right) = -\frac{\left[p - c_y\left(y_{esq},0\right)\right] e_a\left(y_{esq},0\right)}{e_y\left(y_{esq},0\right)},$$

por lo que

$$e_{esq} = e\left(y_{esq},0\right).$$

Entonces, si la condición (1.15) se cumple, la curva CMA estará compuesta por dos partes (no diferenciable en un punto) y dada por

$$\frac{d\pi}{de} = \begin{cases} -c_a \frac{\partial a}{\partial e} & 0 \le e \le e_{esq} \\ \left(p - c_y - c_a \frac{\partial a}{\partial y}\right) \frac{dy}{de} - c_a \frac{\partial a}{\partial e} & e_{esq} < e \le e^*. \end{cases} \tag{1.21}$$

La Figura 1.11 (b) ilustra la situación de no diferenciabilidad en la curva CMA_2.

Notese que el primer término en (1.21) corresponde a la reducción (aumento) de emisiones por disminución (aumento) en la producción y el segundo por aumento (disminución) en los esfuerzos de abatimiento, es decir, cuando hay una solución de esquina sólo se pueden reducir emisiones hasta $e_{esq} - e_{base}$, solamente mediante la disminución de producción. A partir de ese punto, la reducción puede ser con una combinación de abatimiento o reducción de la producción (ver Figura 1.9).

1.6.2. Implicaciones en políticas ambientales

Si se requieren esfuerzos grandes de abatimiento para alcanzar una unidad inicial de reducción de emisiones, o si el esfuerzo es demasiado costoso, el rango entre e_{esq} y e^* puede abarcar rangos de reducción de emisiones de interés para un regulador.

Lo que puede recaer en la implementación de modelos de optimización para la toma de decisiones de la empresa, haciendo énfasis en los costos marginales en los cuales se podrían incurrir tomando en cuenta la relación existente entre dichos costos y la cantidad de producción.

Así pues, si la empresa va a reducir emisiones (ya sea por convicción o por imposición) tomará en cuenta los costos y no tanto el impacto ambiental que pueda producir, y como es de esperarse, es posible implementar una o varias actividades de abatimiento, las cuales pueden ser costosas pero de grandes beneficios para el medio ambiente, costosas pero con poco beneficio ambiental, baratas y de grandes beneficios ambientales o baratas y poco satisfactorias para el ambiente (como ya se ha mencionado anteriormente el hecho de incluir abatimiento en los costos implicará la afectación de su beneficio económico).

Desde el punto de vista tanto del regulador como de la sociedad, lo saludable sería mejorar el ambiente y cumplir con la reducción de emisiones, y desde el punto de vista empresarial, lo ideal sería abatir a bajo costo, sin embargo, una pregunta fundamental que surge con frecuencia respecto de los esfuerzos a bajo costo que se pueden implementar para reducir emisiones es, ¿por qué no se han implementado aún?. A menudo la disponibilidad de tecnología comercial y aún los bajos costos no son suficientes para vencer las barreras relacionadas con las carencias institucionales, causando poco interés y motivación para su futura implementación.

En la figura[4] 1.13 se muestran algunas actividades o tecnologías que se pueden implementar para abatir las emisiones en México, haciendo énfasis en lo que le costaría al país el implementar dichas actividades ahí expuestas, ya sea como sector, como empresa o como país, dicha gráfica enlaza los niveles de emisión con el costo adicional de las unidades de reducción de contaminación; en los rectángulos que se encuentran por debajo del eje horizontal se presentan mayores beneficios ambientales a costos relativamente bajos; los rectángulos encontrados por encima del eje horizontal representan costos relativamente

[4]Tomada del Simposium Latinoamericano de la Energía: Política Energética y Medio Ambiente [14]

altos y son poco beneficiosas para el medio ambiente, al menos en el corto plazo .

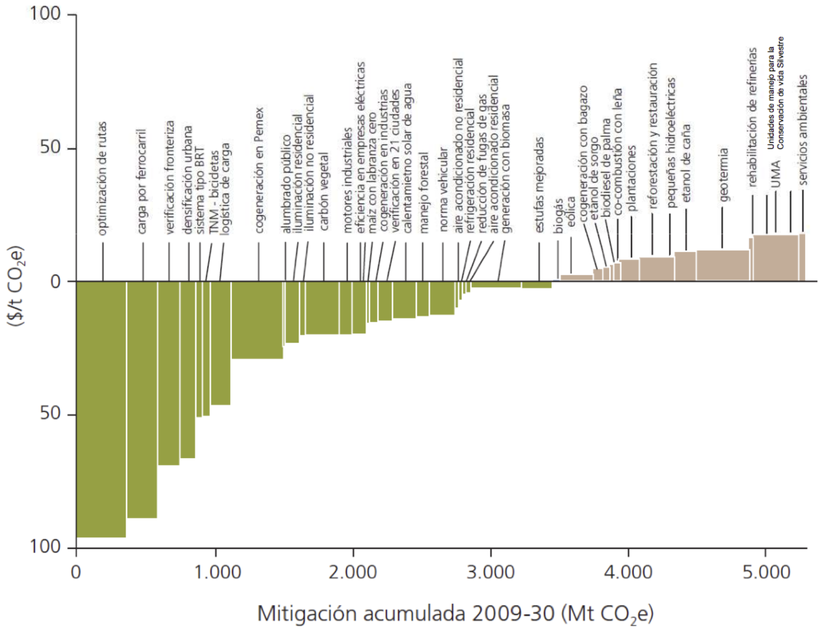


Figura 1.13: Curva Marginal de Abatimiento.

Así, en la búsqueda de un desarrollo social y económico que incluya la preservación de un ambiente natural de calidad, es factible la implementación de actividades de abatimiento, sin embargo, como se mencionó anteriormente, las instituciones encargadas de regular el comportamiento ambiental se encuentran aún en el proceso de aprendizaje, en el transcurso del cual se han adoptado diferentes posturas y estrategias, de las cuales se espera llegar a un punto en común de conformidad.

1.6.3. Condición necesaria y suficiente para garantizar diferenciabilidad en la Curva Marginal de Abatimiento (CMA)

De la discusión anterior se desprende que la condición necesaria y suficiente para garantizar diferenciabilidad en la Curva Marginal de Abatimiento asociada a un desempeño óptimo de una empresa en cuanto a producción-abatimiento es:

$$c_a\,(y,0) \leq -\frac{[p - c_y\,(y,0)]\,e_a\,(y,0)}{e_y\,(y,0)}.$$

1.7. Ejemplos

Los ejemplos que a continuación se presentan tienen el objeto de clarificar los resultados obtenidos en éste capítulo haciendo énfasis en el caso irrestricto en contraste con una restriccón de desigualdad.

Ejemplo 1.7.1 *(Caso sin restricciones) Una empresa tiene una fabrica que produce un solo artículo, y desea maximizar sus beneficios, mostrando cierto desinterés referente a normas para la protección del medio ambiente. Sea* y *la cantidad de unidades que produce de dicho artículo, y cada una de las cuales son vendidas a un precio fijo* $p = 160$ *unidades monetarias. La función de costos para producir cierta cantidad de unidades esta dada por*

$$c(y,a) = y^2 + a^2 + 3550,$$

en donde a *representa la implementación de una actividad de abatimiento (en caso de ser necesario), y en donde la cantidad de contaminantes emitidos al medio ambiente al realizar el proceso de producción es representada por*

$$e(y,a) = e^{\left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a\right)} - 1.$$

Solución

La función de beneficios $\pi(y,a)$ *de la empresa es*

$$\pi(y,a) = 160y - c(y,a),$$

por lo tanto el problema de optimización que se pretende resolver es

$$\max_{y\geq 0,\; a\geq 0} \quad 160y - y^2 - a^2 - 3550, \tag{1.22}$$

calculando las condiciones de primer orden para la función de beneficios

$$\frac{d\pi}{dy} = 0 \;\; y \;\; \frac{d\pi}{da} = 0,$$

se tiene

$$\frac{d\pi}{dy} = 0 = 160 - 2y \text{ entonces, } y = 80$$

y

$$\frac{d\pi}{da} = 0 = -2a \text{ entonces, } a = 0,$$

por lo tanto, el único punto estacionario encontrado es $(y^* = 80, a^* = 0)$*, ahora se verifica que dicho punto estacionario sea el punto óptimo que maximiza los beneficios de la empresa, mediante las condiciones de segundo orden*

$$\frac{d^2\pi}{dy^2}(y^* = 80, a^* = 0), \quad \frac{d^2\pi}{dady}(y^* = 80, a^* = 0) \;\; y \;\; \frac{d^2\pi}{da^2}(y^* = 80, a^* = 0),$$

por lo cual

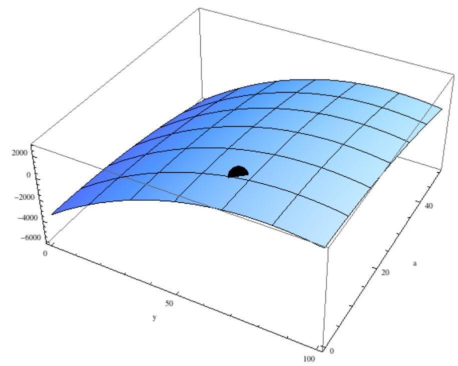
$$\frac{d^2\pi}{dy^2}(y^*, a^*) = -2, \quad \frac{d^2\pi}{da^2}(y^*, a^*) = -2, \quad y \quad \frac{d^2\pi}{dady}(y^*, a^*) = 0,$$

del Teorema B.2.3 inciso a), en el apéndice B se tiene que $\frac{d^2\pi}{dy^2} < 0$ *y* $\left(\frac{d^2\pi}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2\pi}{da^2}\right) - \left(\frac{d^2\pi}{dady}\right) > 0$*, por lo tanto* $(y^* = 80, a^* = 0)$ *es un máximo local, mas aún, por el Teorema B.2.4 se tiene que dicho punto óptimo es global.*

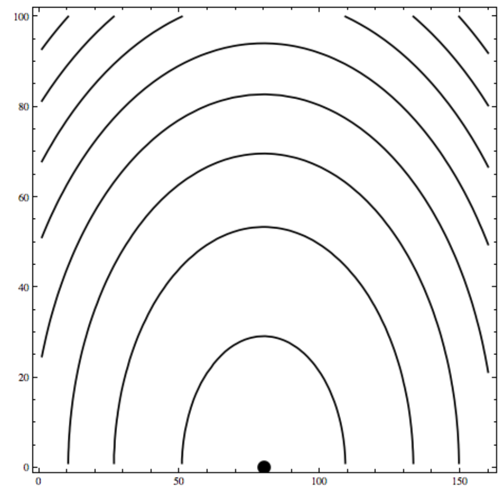
El punto óptimo $(y^* = 80, a^* = 0)$ *maximiza los beneficios de la empresa, es decir, que al producir* 80 *unidades de dicho articulo y sin realizar actividad de abatimiento alguna, se obtiene el máximo beneficio* $\pi^*(y^*, a^*) = 2850$ *unidades monetarias.*

Tomando en cuenta el aspecto ambiental, se tiene que la cantidad de contaminantes emitidos al medio ambiente es $e(y^*, a^*) = e^{20} = 485.165$ *millones.*

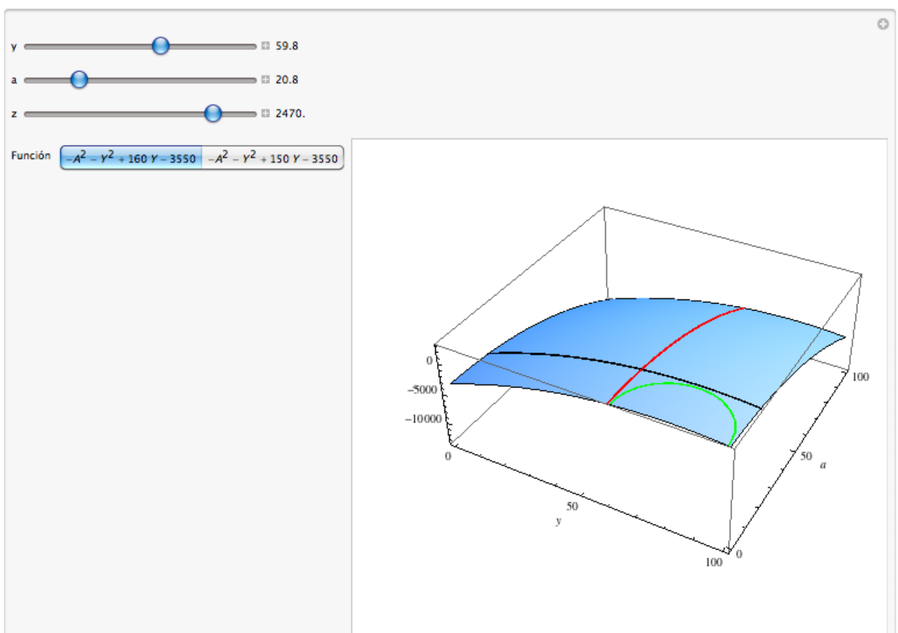
La Figura 1.14 (a) *representa la función de beneficios de la empresa, en la cual se muestra el punto óptimo* $(y^* = 80, a^* = 0)$*, que es en donde se alcanza el mayor beneficio,* (b) *representa la función de isobeneficios, para los cuales se pueden tener diversas cantidades de producción y abatimiento,* (c) *representa el comportamiento de la función de isobeneficios visto en la sección 1.3.6.*



(a)



(b)



(c)

Figura 1.14: $\pi(y, a)$ cuando no se regulan las emisiones.

Ejemplo 1.7.2 *(Caso con restricción) Se desea maximizar los beneficios de* *la empresa del ejemplo 1.7.1, ahora mostrando interés por las normas para la protección del medio ambiente, ya que existe un ente regulatorio, encargado de establecer una cota máxima para el nivel de emisiones de la empresa la cual es*

$$e_1 = 2 \text{ millones.}$$

Solución

En este caso el problema con restricción en las emisiones es

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{y\geq 0,\ a\geq 0} & 160y - y^2 - a^2 - 3550, \\ \textit{sujeto a} & \\ & e(y,a) \leq e_1. \end{array} \tag{1.23}$$

Como es un problema de optimización con restricciones, se plantea el lagrangiano del problema

$$L(y,a,\lambda) = 160y - y^2 - a^2 - 3550 - \lambda(e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} - 1 - e_1),$$

esto es,

$$L(y,a,\lambda) = 160y - y^2 - a^2 - 3550 - \lambda(e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} - 2\times 10^6),$$

aplicando las condiciones de primer orden

$$\frac{dL}{dy} = 0, \quad \frac{dL}{da} = 0 \ \ y \ \ \frac{dL}{d\lambda} = 0,$$

se tiene

$$\frac{dL}{dy} = 160 - 2y - \frac{1}{4}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 0, \tag{1.24}$$

$$\frac{dL}{da} = -2a + \frac{1}{8}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 0, \tag{1.25}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} + 2\times 10^6 = 0, \tag{1.26}$$

así pues, de (1.25) se tiene que

$$\lambda = \frac{16a}{e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)}},$$

por lo cual, de (1.26) se tiene

$$e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 2 \times 10^6,$$

entonces,

$$y = 4\ln(2 \times 10^6) + \frac{1}{2}a, \tag{1.27}$$

sustituyendo (1.27) en (1.24) y despejando a se tiene

$$a^* = 8.78615,$$

sustituyendo a^* *en 1.27 se tiene*

$$y^* = 62.4277$$

por lo cual,

$$\lambda^* = 0.0000702892,$$

el cual es el único punto estacionario encontrado, por lo que es necesario verificar si dicho punto es el que maximiza el lagrangiano del problema, mediante las condiciones de segundo orden, construyendo la matriz hessiana se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= -2 - \frac{1}{16}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)}, & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} &= -\frac{1}{4}e^{(y-a)}, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} &= -2 - \frac{1}{64}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)}, & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} &= \frac{1}{8}e^{(y-a)}, \\
\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial a} &= \frac{1}{32}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)}, & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} &= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto la matriz es

$$H = \begin{bmatrix} -2 - \frac{1}{16}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} & \frac{1}{32}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} & -\frac{1}{4}e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} \\ \frac{1}{32}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} & -2 - \frac{1}{64}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} & \frac{1}{8}e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} \\ -\frac{1}{4}e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} & \frac{1}{8}e^{(y-a)} & 0 \end{bmatrix},$$

la cual es definida negativa por lo que se tiene un máximo, y dicho máximo es global dadas las condiciones del problema.

Por lo tanto, se tiene que $\pi(y^* = 62.4277, a^* = 8.78615) = 2464.02$, *en la Figura 1.15 se tiene una gráfica conjunta, en donde se aprecia que tanto la función de emisiones como la función de beneficios de la empresa, coinciden* *en el punto del valor óptimo encontrado, lo que implica que, (y^*, a^*) son las cantidades necesaria de producción y abatimiento respectivamente para poder cumplir con las normas estipuladas por el ente regulatorio.*

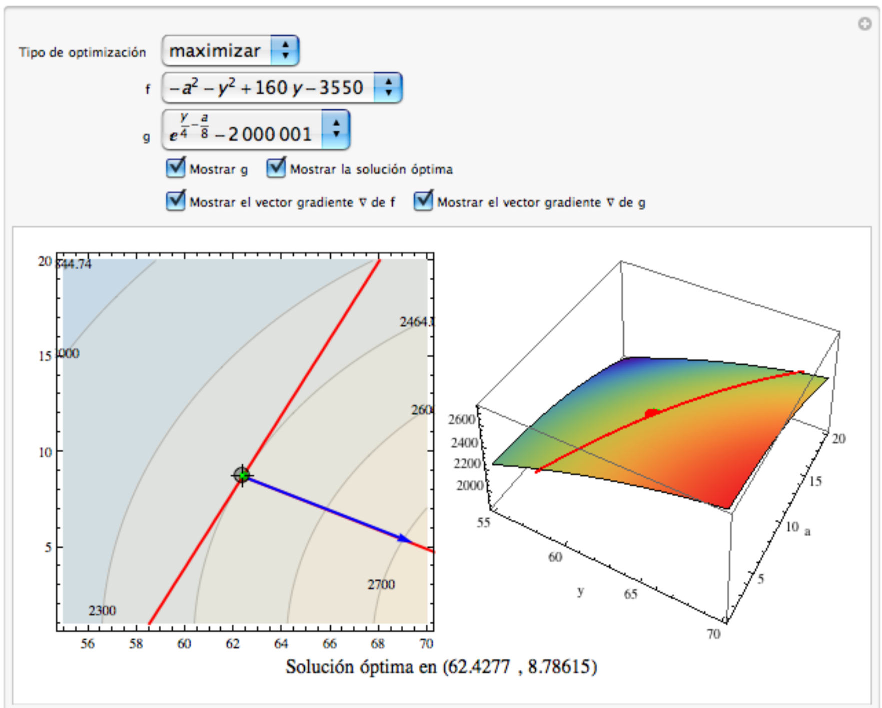


Figura 1.15: Beneficios y Emisiones del ejemplo 1.7.2.

En las lineas isobeneficio e isoemisiones mostradas en la Figura 1.16, es posible ver como el valor óptimo calculado se encuentra sobre una linea de isobeneficio la cual esta alejada del valor óptimo calculado en el ejemplo 1.7.1 provocando así, la disminución del beneficio, con el objeto de cumplir con la restricción referente a la cantidad de contaminantes emitidos.

Así pues, cumpliendo con el objetivo de reducir emisiones se obtiene un beneficio de 2464.02 *con una diferencia de* 385.98 *respecto del calculado en el ejemplo 1.7.1.*

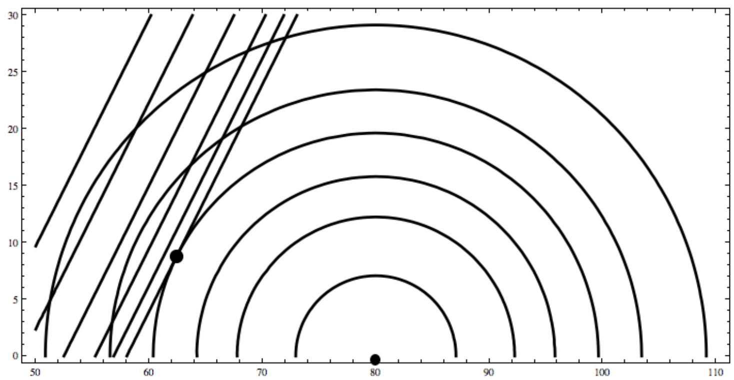
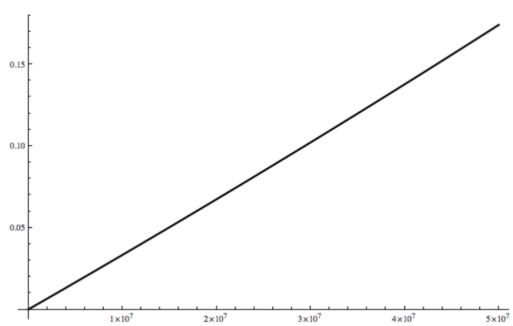
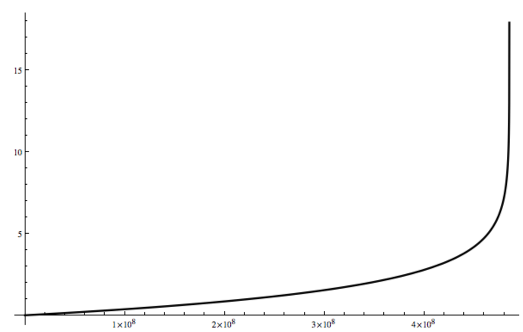


Figura 1.16: Isobeneficios e isoemisiones del ejemplo 1.7.2.

La Figura 1.17, indica que a mayor cantidad de reducción de emisiones, es requerido un mayor abatimiento, pese al comportamiento inicial en (a), es notable el hecho que limita la cantidad de emisiones para así no incrementar los costos, como se puede observar en (b).



(a) Emisiones controladas en la CMA



(b) Exceso de emisiones en la CMA

Figura 1.17: CMA.

Capítulo 2

Extensiones del modelo

En éste capítulo se presentan algunas extensiones del modelo desarrollado en el capítulo 1, enfocadas hacia escenarios más realistas, en los cuales se incluyen una función variable de precios, así como también se expone un modelo en el cual se toman en cuenta los impuestos, además de un modelo con restricciones tanto de demanda como de emisiones y finalizando con la incorporación a dicho modelo del comercio internacional de emisiones, para proporcionar una perspectiva diferente de lo visto en el capítulo 1.

2.1. Un problema incorporando precios variables

De forma análoga a lo visto en el capítulo 1, una empresa produce una cantidad y de producto y ajusta en niveles no negativos a de actividades de abatimiento de la contaminación, e intentando proporcionar una versión alternativa y usual en textos de economía, el producto es vendido a un precio variable; esta modificación proporciona la perspectiva en la cual la empresa podría obtener un mayor beneficio aplicando alguna estrategia en los precios sin descuidar el punto de vista ambiental, incluso para la industria o empresa sería posible saber cuanto van a aumentar o disminuir sus ingresos por ventas con respecto a un cambio en los precios por elasticidades. Es necesario que dicha función de precio variable sea cóncava, por lo cual, $p'(y) > 0$ y $p''(y) \leq 0$, para así ser consistentes con el problema de maximización.

Por lo tanto, el problema de optimización consiste en

$$\begin{array}{cl} \max\limits_{y\geq 0,\, a\geq 0} & p(y)y - c(y,a) \\ \text{sujeto a} & \\ & e(y,a) \leq e_1, \end{array} \tag{2.1}$$

así, el lagrangiano para dicho problema es,

$$L(y,a,\lambda) = p(y)y - c(y,a) - \lambda(e(y,a) - e_1),$$

calculando las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial L}{\partial y}\left(\hat{y},\hat{a},\hat{\lambda}\right) = 0,\ \ \frac{\partial L}{\partial a}\left(\hat{y},\hat{a},\hat{\lambda}\right) = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial L}{\partial \lambda}\left(\hat{y},\hat{a},\hat{\lambda}\right) = 0,$$

por lo cual

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & p(y) + yp'(y) - c_y - \lambda e_y \ = \ 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial a} & = & -c_a - \lambda e_a \ = \ 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & -e(y,a) + e_1 \ = \ 0, \end{array}$$

así el óptimo $(\hat{y},\hat{a})$ queda completamente determinado por

$$p(\hat{y}) + \hat{y}p'(\hat{y}) - c_y(\hat{y},\hat{a}) + \frac{c_a(\hat{y},\hat{a})}{e_a(\hat{y},\hat{a})}e_y(\hat{y},\hat{a}) = 0, \tag{2.2}$$

$$e(\hat{y},\hat{a}) = e_1, \tag{2.3}$$

con

$$\hat{\lambda} = -\frac{c_a(\hat{y},\hat{a})}{e_a(\hat{y},\hat{a})}.$$

Ahora calculando las condiciones de segundo orden para asegurar que el punto $(\hat{y},\hat{a})$ sea un máximo, es necesario calcular

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\hat{y},\hat{a}),\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial y}(\hat{y},\hat{a}),\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial a^2}(\hat{y},\hat{a}),\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda}(\hat{y},\hat{a}),\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(\hat{y},\hat{a}) \ \text{ y}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(\hat{y},\hat{a}),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= 2p'(y) + yp''(y) - c_{yy} - \lambda e_{yy}, & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} &= -e_y, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} &= -c_{aa} - \lambda e_{aa}, & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} &= -e_a, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial y} &= -c_{ay} - \lambda e_{ay}, & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} &= 0, \end{aligned}$$

formando la matriz hessiana, esto es

$$H = \begin{bmatrix} 2p'(y) + yp''(y) - c_{yy} - \lambda e_{yy} & -c_{ya} - \lambda e_{ya} & -e_y \\ -c_{ya} - \lambda e_{ya} & -c_{aa} - \lambda e_{aa} & -e_a \\ -e_y & -e_a & 0 \end{bmatrix},$$

como $\lambda = -\frac{c_a}{e_a}$, de los supuestos dados en la sección 1.2.1, se tiene que $\lambda \geq 0$ y det H > 0, por lo tanto se tiene un máximo global.

2.1.1. Líneas isobeneficio y curva marginal de abatimiento para un problema de precio variable

Reescribiendo la condición de optimalidad (2.2), es posible ver como el óptimo para éste problema de precio variable queda caracterizado por ser el punto donde las pendientes de isobeneficio e isoemisiones se igualan, esto es,

$$\frac{p(\hat{y}) + \hat{y}p'(\hat{y}) - c_y(\hat{y}, \hat{a})}{c_a(\hat{y}, \hat{a})} = -\frac{e_y(\hat{y}, \hat{a})}{e_a(\hat{y}, \hat{a})}, \tag{2.4}$$

se satisfacen conjuntamente con la condición (2.3), para que así las emisiones sean igual a la cota de restricción e_1.

El lugar geométrico donde la pendiente de la línea de isobeneficio es igual a la pendiente de la línea de isoemisiones es análogo al visto en la sección 1.4.6, representado en la Figura 1.8, dado en el punto (y^1, a^1) que es en donde dichas pendientes se igualan.

De forma análoga al análisis hecho en las secciones 1.4.2 y 1.6.1.1, la curva marginal de abatimiento es diferenciable si se cumple

$$c_a(y, 0) \leq -\frac{[p(y) + yp'(y) - c_y(y, 0)]\, e_a(y, 0)}{e_y(y, 0)},$$

en caso de que dicha desigualdad no se cumpla, se tendrá una solución de esquina análoga a la vista en la sección 1.6.1.1, por lo cual,

$$\frac{d\pi}{de} = \begin{cases} -c_a \frac{\partial a}{\partial e} & 0 \leq e \leq e_{esq} \\ \left(p(y) + yp'(y) - c_y - c_a \frac{\partial a}{\partial y}\right) \frac{dy}{de} - c_a \frac{\partial a}{\partial e} & e_{esq} < e \leq e^*. \end{cases}$$

2.1.2. Resultado principal

La solución óptima para un problema de precio variable (2.1) queda resumida en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 *Sea el problema (2.1) cóncavo definido en un dominio $S \subset \mathbb{R}^2$ convexo, con restricciones de desigualdad convexas, y en particular $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$, $c_y > 0$, $c_{yy} > 0$, $c_a \geq 0$, entonces se dice que dicho problema tiene solución única (y, a) y esta caracterizada por*

$$e(y, a) = e_1$$

y

$$p(y) + yp'(y) - c_y(y, a) + \frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)} e_y(y, a) = 0,$$

con

$$\lambda = -\frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)},$$

que representa el costo marginal por abatimiento respecto de las emisiones abatidas.

Demostración. Es necesario verificar que la función de beneficios ($\pi(y, a) = p(y)y - c(y, a)$) es estrictamente cóncava, y que la restricción es estrictamente convexa; así pues, aplicando el teorema B.2.5 se tiene que

$$D_1(y, a) = \pi_{yy} < 0 \quad y \quad D_2(y, a) = \begin{vmatrix} 2p'(y) + yp''(y) - c_{yy} & -c_{ya} \\ -c_{ya} & -c_{aa} \end{vmatrix} > 0,$$

se cumple para todo (y, a) dadas las hipótesis y lo visto en la sección 1.2.1, siempre que

$$c_{yy} - yp''(y) > 2p'(y),$$

dado que $p'(y) > 0$ y $p''(y) \leq 0$, por lo cual $\pi(y,a)$ es estrictamente cóncava en S, ahora se verifica que $e(y,a)$ sea estrictamente convexa, nuevamente aplicando el torema B.2.5 se tiene

$$D_1(y,a) = e_{yy} > 0 \quad y \quad D_2(y,a) = \begin{vmatrix} e_{yy} & e_{ya} \\ e_{ya} & e_{aa} \end{vmatrix} > 0,$$

se cumple para todo (y,a), por lo cual $e(y,a)$ es estrictamente convexa en S.

Así aplicando los teoremas B.5.3, B.5.2 y B.2.6 al problema (2.1), se tiene que la solución es única. ■

2.1.3. Interpretación económica de la solución

La interpretación económica de la solución óptima $(\hat{y},\hat{a})$ es análoga a la expuesta en la sección 1.3.7, sin embargo, de lo visto en la sección 1.3, nuevamente debe cumplirse el hecho fundamental de que la empresa sólo funcionará en niveles de producción donde en este caso la función de precios excede o es igual al costo de producción para el nivel óptimo de producción $\hat{y}$ encontrado en la solución, es decir, $p(\hat{y}) + \hat{y}p'(\hat{y}) \geq c_y(\hat{y},\hat{a})$; la semejanza e importancia en este hecho radica en que a pesar de que este problema tiene una restricción en las emisiones y el análisis hecho en la sección 1.3.7 es para el caso irrestricto, es necesario que se cumpla con el fin de que a su vez se satisfaga con la restricción en las emisiones y así se tenga la igualdad de las líneas de isobeneficio con las líneas de isoemision vista en la ecuación (2.4).

2.2. El problema incorporando impuestos

Es sabido que una grande y rápida reducción de las emisiones de carbono es esencial para revertir en lo que sea posible el cambio climático y evitar sus graves consecuencias como fenómenos meteorológicos, inundaciones, propagación de enfermedades, etc.

Con el fin de reducir las emisiones de gases de efecto invernadero, sería posible tomar como medida la implementación de algún tipo de impuesto sobre las emisiones. Los impuestos son uno de los instrumentos de mayor importancia con el que cuenta el estado para promover el desarrollo económico, sobre todo porque a través de éstos se puede influir en los niveles de asignación del ingreso en la población, ya sea mediante un determinado nivel de tributación, o a través del gasto social, el cual depende en gran medida del nivel de recaudación logrado.

Los elementos más importantes del impuesto son: el sujeto, el objeto, la fuente, la base, la cuota y la tasa; en éste caso el sujeto es pasivo, es decir, es toda persona física o moral que tiene la obligación de pagar impuestos en los términos establecidos por las leyes, el objeto es la actividad o cosa que la ley señala como el motivo del gravamen, de tal manera que se considera como el hecho generador del impuesto, la fuente es el monto de los bienes o de la riqueza de una persona física o moral de donde provienen las cantidades necesarias para el pago de los impuestos (las fuentes resultan ser el capital y el trabajo), la base es el monto gravable sobre el cual se determina la cuantía del impuesto, la unidad es la parte proporcional, específica o monetaria que se considera de acuerdo a la ley para fijar el monto del impuesto y por último, la cuota es la cantidad en dinero que se percibe por unidad tributaria (se fija en cantidades absolutas).

El fin principal de este impuesto, por ejemplo, es desanimar la utilización de los combustibles. Un impuesto sobre la gasolina conduciría a concientizar a los usuarios a utilizar en menor medida los automóviles, o tener en cuenta a la hora de la elección del auto que aquellos con motores mas pequeños contaminan menos, por ende el impuesto que pagarían seria menor.

Otra forma de verlo es que se hace pagar a los contaminadores en proporción a sus emisiones, al incorporar como costo las externalidades ambientales.

Así pues, en éste caso, un impuesto sobre el carbono τ debe ser el mecanismo para reducir las emisiones de carbono. Actualmente, los precios de la gasolina, electricidad y combustibles en general no incluyen los costos asociados con los impactos por el cambio climático.

Algunas consideraciones que se deberían tener en cuenta a la hora de aplicar dicho impuesto son:

1. El impuesto sobre el carbono debe ser aplicado de manera gradual en las empresas y los hogares para tener el tiempo suficiente para adaptarse.

2. Un impuesto sobre el carbono debería ser neutral en los ingresos. El gobierno suavizaría el impacto de costos añadidos a través de por ejemplo, descuentos o mediante la reducción de otros impuestos, etc.

Inclusive, la implementación de un impuesto a las emisiones de carbono, podría verse como una actividad eficiente para mitigar (abatir) los efectos del cambio climático, mientras que por otro lado incrementaría los ingresos del estado esperando así la futura redistribución de los ingresos obtenidos al ser implementado dicho impuesto.

Dicho lo anterior, el problema de optimización, desde un punto de vista en el que una empresa es un ente contaminante al cual el estado le ha implementado un impuesto fijo denotado como τ, es

$$\max_{y\geq 0,\, a\geq 0} \quad \pi(y,a) = py - c(y,a) - \tau f(d(y,a)), \tag{2.5}$$

en donde $d(y,a) = e(y,a) - e_1$, así $\tau f(d(y,a))$ representa el impuesto (τ) pagado en base a la proporción de emisiones $f(d(y,a))$, y de forma explicativa se puede tomar $f(x) = \max(x,0)$ o $f(x) = x$, es importante mencionar que la función $f(x) = \max(x,0)$ es una función no diferenciable, sin embargo, el punto de no diferenciabilidad se encuentra en $x = 0$, y ya que se espera $d(y,a) \geq 0$ para cantidades positivas de producción y abatimiento este análisis se puede llevar a cabo esperando un comportamiento lineal entre la diferencia de emisiones totales y el tope de emisiones propuesto por el ente regulador.

Las condiciones de primer orden para el problema (2.5) son

$$\frac{d\pi}{dy}(\bar{y},\bar{a}) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\pi}{da}(\bar{y},\bar{a}) = 0,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dy} &= p - c_y - \tau f'(d(y,a))d_y = 0, \\ \frac{d\pi}{da} &= -c_a - \tau f'(d(y,a))d_a = 0, \end{aligned}$$

el óptimo $(\bar{y},\bar{a})$ queda completamente determinado por

$$p - c_y(\bar{y},\bar{a}) + \frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{f'(d(\bar{y},\bar{a}))d_a(\bar{y},\bar{a})} f'(d(\bar{y},\bar{a}))d_y(\bar{y},\bar{a}) = 0, \tag{2.6}$$

De la sección 1.2.1 se sabe que $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$ y $e_{aa} > 0$, dado que $d(y,a) = e(y,a) - e_1$, entonces $d_y(y,a) = e_y(y,a)$ y $d_a(y,a) = e_a(y,a)$ por lo tanto reescribiendo la caracterización del punto óptimo $(\bar{y},\bar{a})$,

$$p - c_y(\bar{y},\bar{a}) + \frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_a(\bar{y},\bar{a})} f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_y(\bar{y},\bar{a}) = 0,$$

es decir,

$$p - c_y(\bar{y},\bar{a}) + \frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{e_a(\bar{y},\bar{a})} e_y(\bar{y},\bar{a}) = 0,$$

incluso cuando al problema de optimización se le implementa una actividad de abatimiento de forma indirecta mediante el cobro de un impuesto por emisiones producidas, el comportamiento de las líneas de isobeneficio respecto de las líneas de isoemisiones es semejante al estudiado en la sección 1.4.6, tomando en cuenta que en este caso

$$\tau = -\frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_a(\bar{y},\bar{a})},$$

el impuesto es directamente proporcional al costo por abatimiento e inversamente proporcional a la proporción de emisiones producidas por las emisiones abatidas.

Calculando las condiciones de segundo orden para el punto óptimo $(\bar{y},\bar{a})$ se tiene

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}(\bar{y},\bar{a}), \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial a \partial y}(\bar{y},\bar{a}), \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}(\bar{y},\bar{a}),$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2}(\bar{y},\bar{a}) &= -\tau f''(d(\bar{y},\bar{a}))(e_y(\bar{y},\bar{a}))^2 - c_{yy}(\bar{y},\bar{a}) \\
&\quad -\tau f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_{yy}(\bar{y},\bar{a}), \\
\frac{\partial^2 \pi}{\partial a^2}(\bar{y},\bar{a}) &= -\tau f''(d(\bar{y},\bar{a}))(e_a(\bar{y},\bar{a}))^2 - c_{aa}(\bar{y},\bar{a}) \\
&\quad -\tau f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_{aa}(\bar{y},\bar{a}), \\
\frac{\partial^2 \pi}{\partial a \partial y}(\bar{y},\bar{a}) &= -\tau f''(d(\bar{y},\bar{a}))e_a(\bar{y},\bar{a})e_y(\bar{y},\bar{a}) - c_{ya}(\bar{y},\bar{a}), \\
&\quad -\tau f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_{ya}(\bar{y},\bar{a}),
\end{aligned}$$

formando la matriz hessiana, y dados los supuestos vistos en la sección 1.2.1, se tiene que det H > 0, por lo que se tiene un máximo global.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial a} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial a \partial y} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial a^2} \end{bmatrix}.$$

De forma particular si $f(x) = x$ se tiene el problema

$$\max_{y \geq 0,\, a \geq 0} \quad \pi(y, a) = py - c(y, a) - \tau(e(y, a) - e_1),$$

de donde las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial \pi}{\partial y}(\bar{y}, \bar{a}) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial a}(\bar{y}, \bar{a}) = 0,$$

esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial y} &= p - c_y - \tau e_y = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial a} &= -c_a - \tau e_a = 0, \end{aligned}$$

así el óptimo $(\bar{y}, \bar{a})$ queda completamente determinado por

$$p - c_y(\bar{y}, \bar{a}) + \frac{c_a(\bar{y}, \bar{a})}{e_a(\bar{y}, \bar{a})} e_y(\bar{y}, \bar{a}) = 0.$$

De las condiciones de segundo orden evaluadas en el óptimo se tiene

$$H = \begin{bmatrix} -c_{yy} - \tau e_{yy} & -\tau e_{ya} \\ -\tau e_{ya} & -c_{aa} - \tau e_{aa} \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es mayor que cero, por lo tanto el problema se maximiza, y dicho punto óptimo es global.

2.2.1. Líneas isobeneficio y curva marginal de abatimiento para un problema que incorpora impuestos

De forma análoga a lo visto en la sección 1.4.6, se propone reescribir la condición de optimalidad que para éste problema es la (2.6), así es posible ver como el óptimo queda caracterizado por ser el punto donde las pendientes de isobeneficio e isoemisiones se igualan, esto es,

$$\frac{p - c_y(\bar{y}, \bar{a})}{c_a(\bar{y}, \bar{a})} = -\frac{e_y(\bar{y}, \bar{a})}{e_a(\bar{y}, \bar{a})}.$$

El lugar geométrico donde la pendiente de la línea de isobeneficio es igual a la pendiente de la línea de isoemisiones es análogo al visto en la figura 1.8.

El comportamiento de la curva marginal de abatimiento en éste caso, es semejante al visto en la sección 1.6.1.1, y nuevamente se tiene que la curva marginal de abatimiento es diferenciable si se cumple

$$c_a\,(y, 0) \leq -\frac{\left[p - c_y(y, 0)\right] e_a\,(y, 0)}{e_y\,(y, 0)},$$

en caso de que dicha desigualdad no se cumpla, se tendrá una solución de esquina análoga a la vista en la sección 1.6.1.1 (reducir la producción para lograr el objetivo de reducir las emisiones), por lo cual, la curva marginal de abatimiento para este problema es, análoga a

$$\frac{d\pi}{de} = \begin{cases} -\left(c_a + \tau f'(d(y, a(y, e)))d_a\right)\frac{\partial a}{\partial e} & 0 \leq e \leq e_{esq} \\ \\ \left(p - c_y - c_a\frac{\partial a}{\partial y} - \tau f'(d(y, a(y, e)))(d_a\frac{\partial a}{\partial y} + d_y)\right)\frac{dy}{de} & \\ \quad -\left(c_a + \tau f'(d(y, a(y, e)))d_a\right)\frac{\partial a}{\partial e} & e_{esq} < e \leq e^*. \end{cases}$$

2.2.2. Resultado principal

La solución óptima del problema incorporando impuestos en (2.5) queda resumida en la siguiente proposición

Proposición 2.2.1 *Sea el problema (2.5) cóncavo definido en un dominio* $S \subset \mathbb{R}^2$ *convexo, y particularmente* $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$, $c_y > 0$, $c_{yy} > 0$, $c_a \geq 0$, *entonces se dice que dicho problema tiene solución única* (y, a) *y esta caracterizada por*

$$p - c_y(y, a) + \frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)} e_y(y, a) = 0.$$

Demostración. Es necesario verificar que la función de beneficios ($\pi(y,a) = py - c(y,a) - \tau f(d(y,a))$) es estrictamente cóncava; en la proposición 1.4.1 se probo que $\pi(y,a) = py - c(y,a)$ es estrictamente cóncava, por lo que en este caso sólo será necesario verifica que $\tau f(d(y,a))$ sea estríctamente convexa; así pues, aplicando el teorema B.2.5 se tiene que

$$D_1(y,a) = \tau f'(d(y,a))d_{yy} + \tau f''(d(y,a))(d_y)^2 > 0$$

y el determinante $D_2(y,a)$ es,

$$\begin{vmatrix} \tau f'(d(y,a))d_{yy} + \tau f''(d(y,a))(d_y)^2 & \tau f'(d(y,a))d_{ya} + \tau f''(d(y,a))d_y d_a \\ \tau f'(d(y,a))d_{yy} + \tau f''(d(y,a))d_y d_a & \tau f'(d(y,a))d_{aa} + \tau f''(d(y,a))(d_a)^2 \end{vmatrix} > 0,$$

y se cumple para todo (y,a), por lo cual $\tau f(d(y,a))$ es estrictamente convexa en S, así, $-\tau f(d(y,a))$ es estrictamente cóncava en S.

Aplicando los teoremas B.5.3, B.5.2 y B.2.6 al problema (2.5), se tiene que la solución es única. ■

2.2.3. Interpretación económica de la solución

En este problema, de manera implícita se tiene una restricción en las emisiones que lleva a la concientización de la empresa a intentar reducir sus emisiones con el fin de minorar los egresos respecto a este rubro, así, la interpretación económica de la solución óptima $(\bar{y},\bar{a})$ parece ser análoga a la vista anteriormente, sin embargo, existe una diferencia casi intangible pese a la similitud de los resultados encontrados en la sección 1.6.1.1.

En el problema con restricción en las emisiones visto en la sección 1.4, se tiene que la ecuación (1.13) junto con la igualdad de la restricción en las emisiones caracterizan el punto óptimo encontrado, es decir, se emite lo más posible no antes de la cota impuesta por el ente regulador, y pese a que en este problema no se tiene restricción alguna en las emisiones el óptimo también es caracterizado por la misma ecuación (1.13), sin embargo, con impuestos el problema de optimización parece ser más restrictivo, dependiendo de que tan elevado sea el impuesto.

Intuitivamente se pretende emitir más de lo que se emitió en el problema con restricciones de desigualdad visto en la sección 1.4 (producir más ya que no hay restricciones) siempre y cuando no se afecten los beneficios (esperando que estos sean iguales o mayores), tomando en cuenta que en este caso τ no sea tan elevado $\left(\tau < -\frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_a(\bar{y},\bar{a})}\right)$. Si el impuesto es muy alto $\left(\tau \geq -\frac{c_a(\bar{y},\bar{a})}{f'(d(\bar{y},\bar{a}))e_a(\bar{y},\bar{a})}\right)$, se emitirá a lo más la misma cantidad para los valores óptimos encontrados en la sección 1.4, optando así por dichos valores.

2.3. El problema incorporando restricción en la demanda

En esta sección se propone agregar una restricción al problema (P2) de la sección 1.4, analizado en el capítulo 1, que de cierta forma delimita a la empresa a producir solo la cantidad del bien y/o servicio demandado en el mercado, así que la demanda es definida como la cantidad, de bienes y/o servicios que pueden ser adquiridos en los diferentes precios del mercado por un consumidor (demanda individual) o por el conjunto de consumidores (demanda total o de mercado), en un momento determinado, es importante mencionar que existe una relación entre la cantidad demandada y el precio, la cual es inversa, es decir, a mayor precio, menor cantidad demandada y a menor precio mayor cantidad demandada. Por simplicidad, aquí consideramos la demanda constante.

Por lo tanto, el problema consiste en

$$\begin{array}{ll} \underset{y\geq 0,\ a\geq 0}{\text{máx}} & p(y)y - c(y,\ a) \\ \text{sujeto a} & \\ & \begin{aligned} e(y,a) &\leq e_1 \\ y &\leq d, \end{aligned} \end{array} \tag{2.7}$$

en donde d es constante y representa la demanda del mercado. Así pues el problema de Lagrange es

$$L(y,a,\lambda,\mu) = p(y)y - c(y,a) - \lambda(e(y,a) - e_1) - \mu(y - d),$$

calculando las condiciones de primer orden se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y} &= p(y) + yp'(y) - c_y - \lambda e_y - \mu = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial a} &= -c_a - \lambda e_a = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -e(y,a) + e_1 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= -y + d = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto si $\mu > 0$ el único punto estacionario es $(d, \tilde{a})$, en el cual las dos restricciones son activas, esto implica que $d < \hat{y}$, con $\hat{y}$ como en la sección 2.1; tomando

$$p(y) + yp'(y) - c_y - \lambda e_y \geq 0,$$

$$p(y) + yp'(y) - c_y + \frac{c_a}{e_a} e_y \geq 0,$$

así

$$\frac{p(y) + yp'(y) - c_y}{c_a} \geq -\frac{e_y}{e_a},$$

de donde la igualdad de las lineas de isobeneficio con las lineas de isoemisiones sucede sólo si $\mu = 0$, esto quiere decir que la tasa de variación del valor óptimo respecto a los cambios en la demanda vale cero, ya que se espera cubrir con toda la demanda tomando en cuenta la restricción en las emisiones. Además del hecho de estar resolviendo el problema visto en la sección 2.1, cuya solución es $(\hat{y}, \hat{a})$, es decir, si $\hat{y} < d$, entonces el óptimo $(\hat{y}, \hat{a})$ maximiza el problema sin restricción en la demanda, y si $d \leq \hat{y}$ con $\hat{y}$ óptimo del problema de precio variable visto en la sección 2.1, se tiene el punto estacionario que maximiza éste problema $(d, \tilde{a})$, así las condiciones de primer orden para dicho punto son

$$\begin{aligned}
c_y(d, \tilde{a}) &= p(d) + dp'(d) - \lambda e_y(d, \tilde{a}), \\
c_a(d, \tilde{a}) &= -\lambda e_a(d, \tilde{a}) \text{ dado que } e_a < 0, \\
e(d, \tilde{a}) &= e_1.
\end{aligned}$$

Construyendo la matriz Hessiana se tienen las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2p'(y) + yp''(y) - c_{yy} - \lambda e_{yy}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} = -c_{aa} - \lambda e_{aa},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial a} = -c_{ya} - \lambda e_{ya}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} = -e_y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} = -e_a,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \mu} = -1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial \lambda} = 0,$$

por lo tanto la matriz Hessiana es

$$H = \begin{bmatrix} 2p'(y) + yp''(y) - c_{yy} - \lambda e_{yy} & -c_{ya} - \lambda e_{ya} & -e_y & -1 \\ -c_{ya} - \lambda e_{ya} & -c_{aa} - \lambda e_{aa} & -e_a & 0 \\ -e_y & -e_a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la cual es definida positiva por lo que se tiene un máximo.

2.3.1. Resultado principal

Es importante mencionar que al agregar una restricción de demanda, el comportamiento de la curva marginal de abatimiento, así como también el lugar geométrico de la línea de isobeneficio es igual a la pendiente de la línea de isoemisiones, que es semejante al visto en la sección 2.1.1; así pues, la solución óptima del problema incorporando restricción en la demanda (2.7) queda resumida en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1 *Sea el problema (2.7) cóncavo definido en un dominio* $S \subset \mathbb{R}^2$ *convexo, con restricciones de desigualdad convexas, y en particular* $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$, $c_y > 0$, $c_{yy} > 0$, $c_a \geq 0$, *entonces se dice que dicho problema tiene solución única* (y, a) *y esta caracterizada por*

$$e(y, a) = e_1$$

y

$$p(y) + yp'(y) + \frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)} e_y(y, a) - c_y(y, a) = 0$$

con

$$\lambda = -\frac{c_a(y, a)}{e_a(y, a)},$$

que representa el costo marginal por abatimiento respecto de las emisiones abatidas.

Demostración. De forma análoga a la demostración de la proposición 2.1.1 la función de beneficios es estrictamente cóncava, así como también las restricciones en las emisiones y en la demanda son estrictamente convexas, por lo tanto se tiene una única solución. ∎

2.3.2. Interpretación económica de la solución

La interpretación económica de la solución óptima cobra sentido en las dos siguientes observaciones: si $d > \hat{y}$, es decir, que no se cubrió con la demanda fija establecida, entonces, se tiene la solución óptima $(\hat{y}, \hat{a})$ al problema de precio variable con restricción en las emisiones visto en la sección 2.1, así, no se produce en exceso y se implementa una actividad de abatimiento con el fin de cumplir con la cota de emisiones impuesta por el ente regulador.

Si $\hat{y} \geq d$, la solución óptima es $(d, \tilde{a})$ y se espera producir al menos la cantidad fija del producto demandado, sin dejar de lado las emisiones producidas con el fin de cumplir con la demanda, y es en este sentido que puede ser más costoso el implementar una actividad de abatimiento con el fin de reducir emisiones, ya que si la cantidad de producto demandada es alta, esto implicará mayor producción y por ende mayor cantidad de emisiones, además del hecho de que los costos se incrementaran provocando una reducción en los beneficios, por lo cual $\tilde{a}$ encontrada en la sección 2.1 es menor que $\hat{a}$ encontrada en la solución de éste problema.

Es en esta solución donde la caracterización del óptimo es análoga a la vista en las ecuaciones (2.2) y (2.3), sin embargo dado los argumentos anteriores se puede incurrir en menores beneficios dependiendo de la demanda.

2.4. El problema incorporando comercio de emisiones

El comercio de derechos de emisión es un mecanismo que permite asignar a las empresas cuotas para sus emisiones de gases de efecto invernadero en función de los objetivos de los respectivos gobiernos o de entes reguladores en materia de medio ambiente.

Puede verse como un sistema muy práctico, ya que permite a las empresas superar su cuota de emisiones a condición de que encuentren otras empresas que produzcan menos emisiones y les vendan sus cuotas. Por una parte, dicho sistema ofrece cierta flexibilidad, sin ningún perjuicio para el medio ambiente. Además, fomenta el desarrollo y transferencia de conocimiento de nuevas tecnologías. Las empresas, motivadas por los beneficios que obtienen de la venta de sus derechos de emisión, desarrollan y utilizan tecnologías limpias.

En este capítulo se propone la función de beneficios a maximizar $\pi(y,a) = py - c(y,a) - P_cE + P_vV$, donde, V es la proporción de las emisiones reducidas que se venden al precio P_v, E son las emisiones por comprar, P_c es el precio de compra de cada emisión adquirida.

Como antes, se pretende maximizar $\pi(y,a)$ con $y \geq 0$, $a \geq 0$, $E \geq 0$, y $V \geq 0$, además se tiene que la relación de emisiones por abatir esta dada por

$$R(y,a) = e(y,0) - e(y,a),$$

por lo cual, las emisiones totales de la empresa después de haber producido, vendido y comprado es

$$e(y,a) - E + V,$$

así pues la restricción en las emisiones es la siguiente

$$e(y,a) - E + V \leq e_1,$$

y se espera vender no más que las emisiones que se pretenden abatir, es decir,

$$V \leq R(y,a).$$

Por lo tanto el problema a resolver es el siguiente

$$\begin{array}{rrcl} \displaystyle\max_{y\geq 0,\ a\geq 0,\ E\geq 0,\ V\geq 0} & py - c(y,a) - P_cE + P_vV & & \\ \text{sujeto a} & & & \\ & e(y,a) - E + V & \leq & e_1 \\ & V & \leq & R(y,a), \end{array} \tag{2.8}$$

por lo que el lagrangiano es

$$\begin{aligned} L(y,a,E,\lambda,\mu) &= py - c(y,a) - P_cE + P_vV - \lambda(e(y,a) - E + V - e_1) \\ &\quad -\mu(V - R(y,a)), \end{aligned}$$

calculando las condiciones de primer orden se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial L}{\partial y} = p - c_y(y,a) - \lambda e_y(y,a) + \mu R_y(y,a) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -c_a(y,a) - \lambda e_a(y,a) + \mu R_a(y,a) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial E} = -P_c + \lambda = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial V} = P_v - \lambda - \mu = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -e(y,a) + E - V + e_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -V + R(y,a) = 0, \quad (2.14)$$

es necesario encontrar él o los diferentes puntos estacionarios, así, de (2.11) y (2.12) se tiene respectivamente $\check{\lambda} = P_c$ y $\check{\mu} = P_v - P_c$, es decir, son las variaciones del valor óptimo respecto a los cambios en dichas restricciones.

De la ecuación (2.14) se tiene $\check{V} = R(\check{y}, \check{a})$ y sustituyendo en (2.13)

$$\check{E} = e(\check{y}, 0) - e_1,$$

que representa la cantidad de emisiones que se comprarán en el mercado. Es decir, se comprará en los mercados el total excedente de emisiones al nivel establecido por la regulación.

De la ecuación (2.10) se tiene

$$P_v = -\frac{c_a(\check{y}, \check{a})}{e_a(\check{y}, \check{a})},$$

así, se espera que el precio de venta sea al menos el costo marginal de abatir una unidad extra de emisiones.

La ecuación (2.9) se reescribe como

$$p - c_y(\check{y}, \check{a}) - \frac{c_a(\check{y}, \check{a})}{e_a(\check{y}, \check{a})} R_y(\check{y}, \check{a}) - P_c e_y(\check{y}, 0) = 0.$$

Caso 2.4.1 *Si* $P_v \neq P_c$ *y la relación de emisiones por abatir es* $R(\check{y}, \check{a}) = 0$, *es decir, se pretende comprar permisos de emisión, lo cuál ocurre sólo si* $\check{a} = 0$ *para un nivel de producción* $\check{y}$*; de la ecuación (2.14) se tiene que* $\check{V} = 0$*, lo que implica que no hay proporción de emisiones reducidas por vender, de las ecuaciones (2.9) y (2.10) respectivamente*

$$P_c = \frac{p - c_y(\check{y}, 0)}{e_y(\check{y}, 0)} \ \ y \ \ P_v = -\frac{c_a(\check{y}, 0)}{e_a(\check{y}, 0)},$$

se tiene la idea intuitiva de producir la mayor cantidad posible de producto y adquirir E *permisos de emisión tal que*

$$\check{E} = e(\check{y}, 0) - e_1,$$

con el fin de cubrir con la cota establecida por el ente regulador.

Suponiendo que la solución óptima es $(\check{y}, 0)$*, así* $\check{e}$ *y* $\check{\pi}$ *son las emisiones y el beneficio óptimo para el punto estacionario* $(\check{y}, 0)$*. Pero si* $\check{y} < y^*$*, lo que ocurre sólo si* $P_c < \frac{p - c_y(y^*, 0)}{e_y(y^*, 0)}$*, con* y^* *la solución del problema (P1), así,* $(y^*, 0)$ *es también solución factible de (2.8), entonces* $\check{\pi} < \pi^*$*, lo que contradice el hecho del máximo beneficio, por lo tanto* $\pi^* = \check{\pi}$ *y* $y^* = \check{y}$*, por lo que si* $R(y, a) = 0$ *la solución óptima es* $(y^*, 0)$ *que es la solución del problema (P1).*

Caso 2.4.2 *Si* $P_v = P_c$ *y* $R(\check{y}, \check{a}) \neq 0$*, es decir, se espera vender permisos de emisión pero como los precios tanto a la compra como a la venta son iguales, se opta por reducir emisiones y cumplir con la cota impuesta por el ente regulador, entonces,* $\mu = 0$*, y de las ecuaciones (2.9) y (2.10), se tiene respectivamente*

$$p - c_y(\check{y}, \check{a}) + \frac{c_a(\check{y}, \check{a})}{e_a(\check{y}, \check{a})} e_y(\check{y}, \check{a}) = 0$$

y

$$P_v = P_c = -\frac{c_a(\check{y}, \check{a})}{e_a(\check{y}, \check{a})}.$$

Suponiendo que la solución óptima es $(\check{y}, \check{a})$*, cuyas emisiones y beneficio son* $\check{e}(\check{y}, \check{a})$ *y* $\check{\pi}(\check{y}, \check{a})$ *respectivamente, si* $\check{y} < y^1$ *y* $\check{a} < a^1$*, lo que ocurre sólo si* $P_c < \frac{p - c_y(y^1, a^1)}{e_y(y^1, a^1)}$*, así,* (y^1, a^1) *es también solución factible de (2.8), entonces* $\check{\pi} < \pi^1$*, lo que contradice el hecho del máximo beneficio, por lo tanto* $\pi^1 = \check{\pi}$ *y* $(y^1 = \check{y}, a^1 = \check{a})$*, por lo que si* $R(y^1, a^1) \neq 0$ *la solución óptima es* (y^1, a^1) *que es la solución del problema (P2).*

Caso 2.4.3 *Si $P_v \neq P_c$ y la relación de emisiones por abatir es $R(\check{y},\check{a}) \neq 0$, el punto estacionario $(\check{y},\check{a})$ caracteriza la solución*

$$p - c_y(\check{y},\check{a}) + P_v R_y(\check{y},\check{a}) - P_c e_y(\check{y},0) = 0,$$

esperando así, vender permisos de emisión y aumentar los beneficios siempre y cuando $R(\check{y},\check{a}) > \check{E}$, o lo que es lo mismo, $e(\check{y},\check{a}) < e_1$.

Para este caso, se calculan las condiciones de segundo orden, es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= -c_{yy}(\check{y},\check{a}) - \lambda e_{yy}(\check{y},\check{a}) + \mu R_{yy}(\check{y},\check{a}),\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} &= -c_{aa}(\check{y},\check{a}) - \lambda e_{aa}(\check{y},\check{a}) + \mu R_{aa}(\check{y},\check{a}),\\
\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial a} &= -c_{ya}(\check{y},\check{a}) - \lambda e_{ya}(\check{y},\check{a}) + \mu R_{ya}(\check{y},\check{a}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \mu} &= R_y(\check{y},\check{a}), & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \mu} &= R_a(\check{y},\check{a}),\\
\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} &= -e_y(\check{y},\check{a}), & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} &= -e_a(\check{y},\check{a}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial E^2} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial V^2} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} &= 0,\\
\frac{\partial^2 L}{\partial E \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial \lambda} &= 1, & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial V} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial V} &= 0,\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial E} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial V} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial E \partial \mu} &= 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial \lambda} &= -1,\\
& & \frac{\partial^2 L}{\partial V \partial \mu} &= -1 & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \mu} &= 0
\end{aligned}$$

formando la matriz hessiana, se tiene un máximo global sólo si det $H > 0$*,*

$$H = \begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial a} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \mu}\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial a \partial \mu}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial a} & 1 & -1 & 0 & 0\\
\frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mu \partial a} & 0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

el determinante para este caso es positivo y maximiza la función objetivo sólo si,

$$(c_{aa}(\breve{y},\breve{a})+P_c e_{aa}(\breve{y},\breve{a})-(P_v-P_c)R_{aa}(\breve{y},\breve{a}))(c_{yy}(\breve{y},\breve{a})+P_c e_{yy}(\breve{y},\breve{a})-(P_v-P_c)R_{yy}(\breve{y},\breve{a}))$$
$$> (c_{ya}(\breve{y},\breve{a}) + P_c e_{ya}(\breve{y},\breve{a}) - (P_v - P_c)R_{ya}(\breve{y},\breve{a}))^2.$$

2.4.1. Interpretación económica de la solución

El comercio de emisiones para este caso puede ser visto desde otra perspectiva, presentada en los tres puntos siguientes:

- Si $P_v V > P_c E$, entonces la empresa se convierte en oferente de permisos de emisión, por lo cual, sus ingresos aumentan ante el esfuerzo realizado al abatir emisiones.
- Si $P_v V < P_c E$, entonces la empresa debe comprar permisos de emisión, lo cual se acentúa en los egresos ya que puede verse como un pago por emitir más de lo autorizado.
- Si $P_v V = P_c E$, entonces se tiene que el problema de optimización es el que se resolvió en el capítulo 1 con restricción en las emisiones, enfatizando el hecho de que no le interesa comprar o vender permisos de emisión sino más bien, cumplir con la cota establecida por el ente regulador.

2.5. Ejemplos

De manera progresiva, y bajo ciertas modificaciones en la función objetivo se presentan los siguientes ejemplos con el objeto de clarificar los resultados obtenidos en el capítulo 2.

Ejemplo 2.5.1 *Para la función de beneficio dada en el ejemplo 1.7.1, se propone cambiar el precio fijo* $p = 160$ *por una función de precio variable del tipo Cobb-Douglas* [1] *en una dimensión*

$$p(y) = Ay^{m-1}; \;\; A,\ 0 < m < 1 \text{ constantes.}$$

[1]Una empresa produce un único bien empleando dos factores productivos distintos, K y L, capital y trabajo respectivamente. Así la función de producción de la empresa ($Y = F(K, L)$) estima la cantidad de producto Y dadas las cantidades de factor productivos empleadas(K y L). Una función del tipo Cobb-Douglas se puede generalizar para un número m de factores de producción, denotados como $x_1, x_2, \ldots, x_m$, así la función es $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = A\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i}$.

Solución

El problema de optimización es,

$$\max_{y\geq 0,\, a\geq 0} \quad Ay^m - y^2 - a^2 - 3550 \tag{2.15}$$

y resolviendo como un problema irrestricto, se calculan las condiciones de primer orden, por lo que se tiene

$$\frac{d\pi}{dy} = 0 = Amy^{m-1} - 2y,$$

lo que implica

$$y(Amy^{m-2} - 2) = 0,$$

por lo que se tienen dos posibles casos, $y = 0$*, lo cual no tiene un fin práctico, o,*

$$y = + \sqrt[m-2]{\frac{2}{Am}}$$

tomando la parte positiva de la raíz ya que no tienen sentido las cantidades de producción negativas, y,

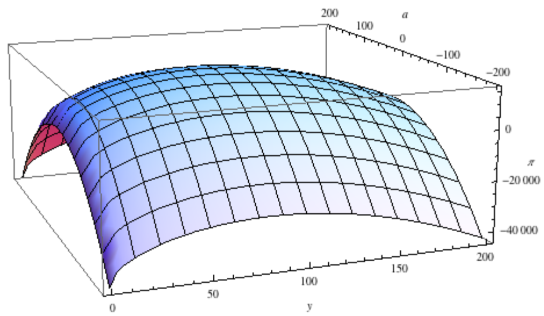
$$\frac{d\pi}{da} = 0 = -2a,$$

lo que implica que $a = 0$.

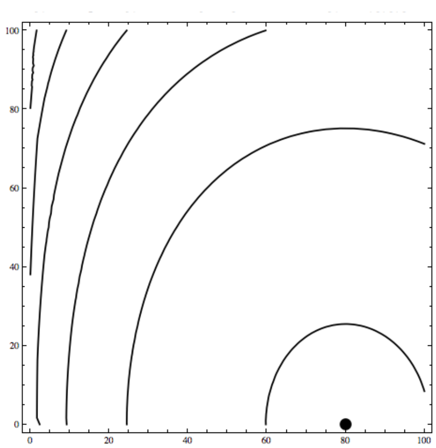
Así pues, como caso particular si $m = \frac{1}{2}$ *y* $A = 2862.1670$*, se tiene el mismo punto estacionario que en el ejemplo 1.7.1 ((*$y^* = 80, a^* = 0$*)), el cual maximiza el problema en cuestión, si embargo como es de esperarse se tiene un beneficio máximo* $\pi(y^*, a^*) = 15650$*, el cual es considerablemente mayor al calculado en el ejemplo 1.7.1, además debido a la complejidad de la función a maximizar no es posible dar una representación gráfica de la curva marginal de abatimiento, pero dados los hechos matemáticos mencionados se sabe que existe (aplicación del teorema de la función implícita).*

Ahora proponiendo el siguiente problema a resolver, mostrando interés por las normas para la protección del medio ambiente, ya que existe un ente regulatorio, encargado de establecer una cota máxima para el nivel de emisiones de la empresa la cual es

$$e_1 = 2 \times 10^6.$$



(a) Función objetivo



(b) Isobeneficio

Figura 2.1: Función de precio variable.

Solución

En este caso el problema con restricción en las emisiones es

$$\begin{aligned} \max_{y\geq 0,\ a\geq 0} \quad & Ay^m - y^2 - a^2 - 3550, \\ \textit{sujeto a} \quad & \\ & e(y,a) \leq e_1, \end{aligned} \tag{2.16}$$

con $e(y,a) = e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} - 1$, *y como es un problema de optimización con restricciones, se plantea el lagrangiano del problema*

$$L(y,a,\lambda) = Ay^m - y^2 - a^2 - 3550 - \lambda(e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} - 1 - e_1),$$

esto es,

$$L(y,a,\lambda) = Ay^m - y^2 - a^2 - 3550 - \lambda(e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} - 2\times 10^6),$$

aplicando las condiciones de primer orden

$$\frac{dL}{dy} = 0, \quad \frac{dL}{da} = 0 \;\; y \;\; \frac{dL}{d\lambda} = 0,$$

se tiene

$$\frac{dL}{dy} = Amy^{m-1} - 2y - \frac{1}{4}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 0, \tag{2.17}$$

$$\frac{dL}{da} = -2a + \frac{1}{8}\lambda e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 0, \tag{2.18}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} + 2\times 10^6 = 0, \tag{2.19}$$

así pues, de (2.18) se tiene que

$$\lambda = \frac{16a}{e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)}},$$

por lo cual, de (2.19) se tiene

$$e^{(\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}a)} = 2\times 10^6,$$

entonces,

$$y = 4\ln(2\times 10^6) + \frac{1}{2}a, \tag{2.20}$$

sustituyendo λ *en (2.17) se tiene*

$$Amy^{m-1} - 2y - 4a, \tag{2.21}$$

despejando a *de (2.20) y sustituyendo en (2.21), se tiene*

$$y^* = 64.2775$$

sustituyendo y^* *en (2.20) se tiene*

$$a^* = 12.4857$$

por lo cual,

$$\lambda^* = 0.0000998851,$$

(y^*, a^*) *es el único punto estacionario encontrado, por lo que es necesario verificar si dicho punto es el que maximiza el lagrangiano del problema, mediante las condiciones de segundo orden, construyendo la matriz hessiana se tiene*

$$H = \begin{bmatrix} Am(m-1)y^{m-2} - 2 - \frac{1}{16}\lambda e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} & \frac{1}{32}\lambda e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} & -\frac{1}{4}e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} \\ \frac{1}{32}\lambda e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} & -2 - \frac{1}{64}\lambda e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} & \frac{1}{8}e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} \\ -\frac{1}{4}e^{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{8}a)} & \frac{1}{8}e^{(y-a)} & 0 \end{bmatrix},$$

la cual es definida negativa por lo que se tiene un máximo, y dicho máximo es global dadas las condiciones del problema.

Por lo tanto, se tiene que $\pi(y^* = 64.2775, a^* = 12.4857) = 15109.4$, *en la Figura 2.2 se tiene una gráfica conjunta, en donde se aprecia que tanto la función de emisiones como la función de beneficios de la empresa, coinciden en el punto del valor óptimo encontrado, lo que implica que,* (y^*, a^*) *son las cantidades necesaria de producción y abatimiento respectivamente para poder cumplir con las normas estipuladas por el ente regulatorio en este problema de precio variable.*

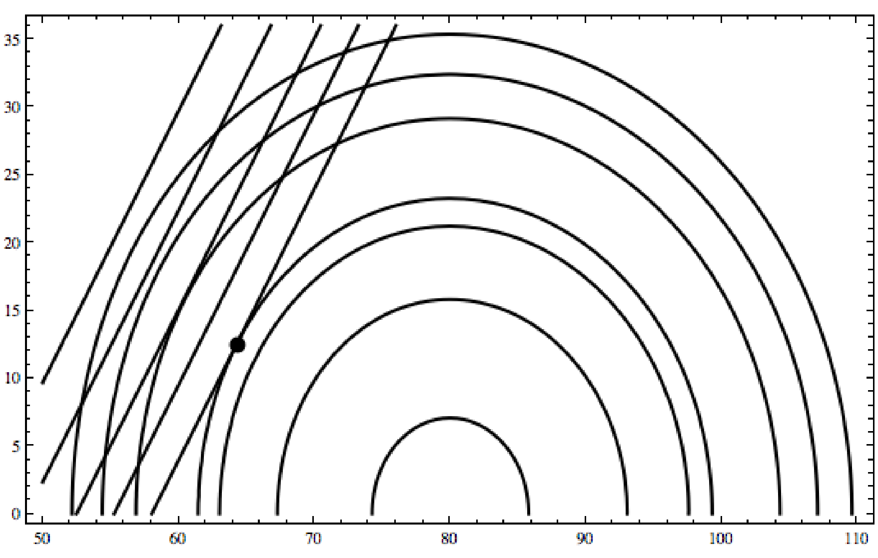


Figura 2.2: Beneficios y emisiones para un problema de precio variable.

De forma análoga al problema irrestricto de precio variable, se tiene que debido a la aparente complejidad de la función a maximizar no es posible dar una representación gráfica de la curva marginal de abatimiento, pero dados los hechos matemáticos mencionados se sabe que existe (aplicación del teorema de la función implícita).

Capítulo 3

Extensión del modelo a dos empresas

En este capítulo se presenta la interacción entre dos compañías que asemeja a las dos empresas en México que más emisiones contaminantes lanzan al medio ambiente, proponiendo tres posibles escenarios en materia de reducción de emisiones de Gases de Efecto Invernadero (GEI) en el sector energético de la actividad nacional (PEMEX y CFE), con el fin de garantizar el suministro de energéticos que requiere el desarrollo nacional y proporcionando así diferentes perspectivas para la elección de una mejor estrategia de mitigación aplicada a dicho sector.

Es importante mencionar que si bien el modelo aquí presentado es una idealización y simplificación de la situación real entre CFE y PEMEX, dicho modelo con sus respectivas conclusiones servirán para entender un poco más la situación real y dar elementos para la toma de decisiones.

Caso 3.1.2 *(Sin colaboración) Se tienen dos empresas, cada una produce un solo producto (diferentes entre sí) y ambas generan el mismo contaminante. Ambas pueden implementar medidas de mitigación de contaminantes mediante inversión.*

La empresa I (CFE) produce en cada periodo (diario, semanal, mensual, anual) $y_1 MWh$ *de electricidad y los vende en el mercado a un precio fijo* p_1. *Así el costo conjunto de producir* $y_1 MWh$ *y utilizar* a_1 *esfuerzos de abatimiento es* $c_1(y_1, a_1)$, *y cuyas emisiones están dadas por la función* $e_1(y_1, a_1)$.

Por otro lado la empresa II (PEMEX) produce y_2 barriles de combustible en cada periodo y los vende en el mercado a un precio p_2. Así pues, el respectivo costo de producción-abatimiento esta dado por $c_2(y_2, a_2)$ y sus respectivas emisiones $e_2(y_2, a_2)$.

Suponemos además que ambas empresas tiene el acuerdo de que cada una debe satisfacer totalmente la demanda en el producto de la otra, y que cada una debe también tomar en cuenta la demanda global de su producto en el mercado, es decir, CFE tendrá una restricción en demanda de

$$y_1 \leq d_1 + D_1(y_2),$$

donde, d_1 es una demanda fija y $D_1(y_2)$ es la demanda específica de PEMEX, con $D_1' > 0$ y $D_1'' \geq 0$.

Similarmente, para PEMEX, con $D_2' > 0$ y $D_2'' \geq 0$ la restricción de demanda quedará dada por

$$y_2 \leq d_2 + D_2(y_1).$$

Ambas empresas por separado están también sujetas a regulaciones ambientales, es decir, tienen la restricción de

$$e_i(y_i, a_i) \leq \overline{e_i} \;\; i = 1, 2.$$

Si suponemos además por simplicidad que α representa la cantidad de barriles de combustible que se necesitan para producir un MWh ($\alpha = \frac{BBL}{MWh}$, es decir, PEMEX vende barriles de combustible a CFE), y que β es la cantidad de MWh necesarios para producir un barril de combustible ($\beta = \frac{MWh}{BBL}$, es decir, CFE vende electricidad a PEMEX), tenemos que

$$D_2(y_1) = \alpha y_1$$

es la cantidad de combustible que CFE debe comprar en cada periodo a PEMEX y que

$$D_1(y_2) = \beta y_2$$

es la cantidad de electricidad que PEMEX debe comprar a CFE.

Así en este caso, cada empresa está interesada en maximizar la ganancia total, por lo que matemáticamente, los problemas de optimización para cada empresa *quedan de la siguiente manera:*

Empresa I (CFE)

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{y_1\geq 0,\ a_1\geq 0} & p_1'y_1 - c_1(y_1,a_1) & \\ \textit{sujeto a} & & \\ & y_1 \;\leq\; & d_1+\beta y_2 \\ & e_1(y_1,a_1) \;\leq\; & \overline{e_1} \end{array} \tag{3.1}$$

y Empresa II (PEMEX)

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{y_2\geq 0,\ a_2\geq 0} & p_2'y_2 - c_2(y_2,a_2) & \\ \textit{sujeto a} & & \\ & y_2 \;\leq\; & d_2+\alpha y_1 \\ & e_2(y_2,a_2) \;\leq\; & \overline{e_2} \end{array} \tag{3.2}$$

intuitivamente el precio p_1' en la empresa I desglosa el gasto por combustible, esto es,

$$p_1' = p_1 - p_2\alpha,$$

pudiendo así reescribir la función de costos $c_1(y_1, a_1)$ como

$$c_1'(y_1,a_1) = c_1(y_1,a_1) + p_2\alpha y_1,$$

de forma análoga para la empresa II el precio p_2' desglosa el gasto por electricidad.

Resolviendo cada problema de forma individual, de la sección 2.3 se sabe que el máximo global se encuentra en el punto (d, a^*), por lo tanto, de forma análoga la solución óptima tanto para CFE como para PEMEX se encuentra en los puntos $(\beta d_2 + d_1, a_1^*)$ y $(\alpha d_1 + d_2, a_2^*)$ respectivamente, con a_i^* determinados por

$$p_i - c_{iy_i}(y_i,a_i^*) + \frac{c_{ia_i^*}(y_i,a_i^*)}{e_{ia_i^*}(y_i,a_i^*)} e_{iy_i}(y_i,a_i^*) = 0 \ \ (i=1,2),$$

$$e_i(y_i,a_i^*) = \overline{e_i},$$

con

$$y_1 = \beta d_2 + d_1,$$

y

$$y_2 = \alpha d_1 + d_2.$$

De forma análoga a lo visto en las secciones 1.6.1.1 y 1.6.3, cada empresa tendrá su respectiva curva marginal de abatimiento como la expresada en (1.21), que puede no ser diferenciable en un punto.

Caso 3.1.3 *(Colaboración en beneficio) En éste caso, la visión es más de sector (energético) que como empresas aisladas, pero lo que interesa es ver y optimizar el beneficio económico conjunto, imponiendo a cada una restricción en emisiones y en demanda, así el problema de optimización es*

$$\begin{array}{rrcl}
\underset{y_1\geq 0,\ a_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ a_2\geq 0}{\text{máx}} & \multicolumn{3}{l}{p_1' y_1 - c_1(y_1,\ a_1) + p_2' y_2 - c_2(y_2,\ a_2)} \\
\textit{sujeto a} & & & \\
 & e_1(y_1, a_1) & \leq & \overline{e_1} \\
 & e_2(y_2, a_2) & \leq & \overline{e_2} \\
 & y_1 & \leq & \beta y_2 + d_1 \\
 & y_2 & \leq & \alpha y_1 + d_2,
\end{array} \tag{3.3}$$

por lo tanto el lagrangiano para dicho problema es

$$\begin{aligned}
L(y_1, y_2, a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \ = \ & p_1' y_1 - c_1(y_1,\ a_1) + p_2' y_2 - c_2(y_2,\ a_2) \\
& -\lambda_1(e_1(y_1, a_1) - \overline{e_1}) - \lambda_2(e_2(y_2, a_2) - \overline{e_2}) \\
& -\lambda_3(y_1 - \beta y_2 - d_1) - \lambda_4(y_2 - \alpha y_1 - d_2),
\end{aligned}$$

y calculando las condiciones de primer orden se tiene,

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1' - c_{1_{y_1}} - \lambda_1 e_{1_{y_1}} - \lambda_3 + \lambda_4 \alpha = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2' - c_{2_{y_2}} - \lambda_2 e_{2_{y_2}} + \lambda_3 \beta - \lambda_4 = 0, \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a_1} &= -c_{1_{a_1}} - \lambda_1 e_{1_{a_1}} = 0, && (3.6)\\
\frac{\partial L}{\partial a_2} &= -c_{2_{a_2}} - \lambda_2 e_{2_{a_2}} = 0, && (3.7)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= -e_1(y_1, a_1) + \overline{e_1} = 0, && (3.8)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= -e_2(y_2, a_2) + \overline{e_2} = 0, && (3.9)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} &= -y_1 + \beta y_2 + d_1 = 0, && (3.10)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} &= -y_2 + \alpha y_1 + d_2 = 0, && (3.11)
\end{aligned}
$$

de las ecuaciones (3.10) y (3.11) se tiene que

$$y_1 = \frac{\alpha\beta d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha\beta} + d_1$$

y

$$y_2 = \frac{\alpha d_1 + d_2}{1 - \alpha\beta};$$

de las ecuaciones (3.8) y (3.9) se obtiene respectivamente $e_1(y_1, a_1) = \overline{e_1}$ *y* $e_2(y_2, a_2) = \overline{e_2}$*, de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se tiene*

$$\lambda_1 = -\frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} \quad y \quad \lambda_2 = -\frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}}$$

respectivamente, así el óptimo se caracteriza despejando λ_4 *de la ecuación (3.5) y sustituyendo en la ecuación (3.4)*

$$p_1' - c_{1_{y_1}} + \frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} e_{1_{y_1}} + \alpha\left(p_2' - c_{2_{y_2}} + \frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}} e_{2_{y_2}}\right) - \lambda_3(1 - \alpha\beta) = 0,$$

para $\lambda_3 \geq 0$*, así pues se encontró el único punto estacionario*

$$\left(\frac{\alpha\beta d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha\beta} + d_1, \frac{\alpha d_1 + d_2}{1 - \alpha\beta}, a_1^*, a_2^*\right),$$

en el cual todas las restricciones son activas, sin embargo como se espera que $\mu \geq 0$*, entonces,*

$$p(y) + yp'(y) - c_y - \lambda e_y \geq 0,$$

$$p(y) + yp'(y) - c_y + \frac{c_a}{e_a} e_y \geq 0,$$

así

$$\frac{p(y) + yp'(y) - c_y}{c_a} \geq -\frac{e_y}{e_a},$$

de donde la igualdad de las lineas de isobeneficio con las lineas de isoemisiones sucede sólo si $\mu = 0$, esto quiere decir que la tasa de variación del valor óptimo respecto a los cambios en la demanda vale cero, ya que se espera cubrir con toda la demanda tomando en cuenta la restricción en las emisiones, así las condiciones de primer orden para dicho punto son

Caso 3.1.4 *(Colaboración en beneficio y emisiones) Aquí realmente ambas empresas se ven como el sector energético tanto en lo económico como en lo ambiental, así el problema de optimización es el siguiente*

$$\begin{array}{rl}
\displaystyle\max_{y_1 \geq 0,\ a_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ a_2 \geq 0} & p_1' y_1 - c_1(y_1,\ a_1) + p_2' y_2 - c_2(y_2,\ a_2) \\
\textit{sujeto a} & \\
& \begin{array}{rcl} e_1(y_1, a_1) + e_2(y_2, a_2) & \leq & \overline{e_{12}} \\ y_1 & \leq & \beta y_2 + d_1 \\ y_2 & \leq & \alpha y_1 + d_2 \end{array}
\end{array} \tag{3.12}$$

por lo tanto el lagrangiano para dicho problema es

$$\begin{aligned}
L(y_1, y_2, a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \; & p_1' y_1 - c_1(y_1,\ a_1) + p_2' y_2 - c_2(y_2,\ a_2) \\
& -\lambda_1(e_1(y_1, a_1) + e_2(y_2, a_2) - \overline{e_{12}}) \\
& -\lambda_2(y_1 - \beta y_2 - d_1) - \lambda_3(y_2 - \alpha y_1 - d_2),
\end{aligned}$$

y calculando las condiciones de primer orden se tiene,

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1' - c_{1_{y_1}} - \lambda_1 e_{1_{y_1}} - \lambda_2 + \lambda_3\alpha = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2' - c_{2_{y_2}} - \lambda_1 e_{2_{y_2}} + \lambda_2\beta - \lambda_3 = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = -c_{1_{a_1}} - \lambda_1 e_{1_{a_1}} = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = -c_{2_{a_2}} - \lambda_1 e_{2_{a_2}} = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -e_1(y_1, a_1) - e_2(y_2, a_2) + \overline{e_{12}} = 0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -y_1 + \beta y_2 + d_1 = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -y_2 + \alpha y_1 + d_2 = 0, \tag{3.19}$$

de forma análoga al caso 3.1.3, se tiene que de las ecuaciones (3.18) y (3.19)

$$y_1 = \frac{\alpha\beta d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha\beta} + d_1$$

y

$$y_2 = \frac{\alpha d_1 + d_2}{1 - \alpha\beta},$$

de la ecuación (3.17) se tiene

$$e_1(y_1, a_1) + e_2(y_2, a_2) = \overline{e_{12}},$$

sin embargo, en este caso, de las ecuaciones (3.15) y (3.16) se tiene

$$\lambda_1 = -\frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} \quad y \quad \lambda_1 = -\frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}}$$

respectivamente, por lo que

$$-\frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} = -\frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}},$$

es decir, se espera que la razón de cambio del costo por emisiones abatidas sea la misma tanto para PEMEX como para CFE, lo cual tiene mucho sentido ya que *al colaborar en beneficio y emisiones, puede verse como un sector energético; despejando λ_3 de la ecuación (3.14), y sustituyendo en la ecuación (3.13) el óptimo queda caracterizado por*

$$p_1' - c_{1_{y_1}} + \frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} e_{1_{y_1}} + \alpha \left(p_2' - c_{2_{y_2}} + \frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}} e_{2_{y_2}} \right) - \lambda_2 (1 - \alpha\beta) = 0,$$

así pues se encontró el único punto estacionario

$$\left(\frac{\alpha\beta d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha\beta} + d_1, \frac{\alpha d_1 + d_2}{1 - \alpha\beta}, a_1^*, a_2^* \right),$$

el cual es global y maximiza el problema, realizando un análisis semejante al hecho en la sección 2.3 se tiene que $\lambda_2 = 0$.

El comportamiento de la curva marginal de abatimiento nuevamente se plantea bajo los supuestos hechos en las secciones 1.4.2 y 1.6.1.1, la curva marginal de abatimiento es diferenciable si se cumple

$$c_{1_{a_1}}(y_1, 0) \leq -\frac{[p_1' - c_{1_{y_1}}(y_1, 0) + \alpha(p_2' - c_{2_{y_2}}(y_2, 0)) - \lambda_2(1 - \alpha\beta)] e_{1_{a_1}}(y_1, 0)}{e_{1_{y_1}}(y_1, 0) - \alpha e_{2_{y_2}}(y_2, 0)},$$

en éste caso para la curva marginal de abatimiento, se propone aplicar el teorema de la función implícita a las funciones

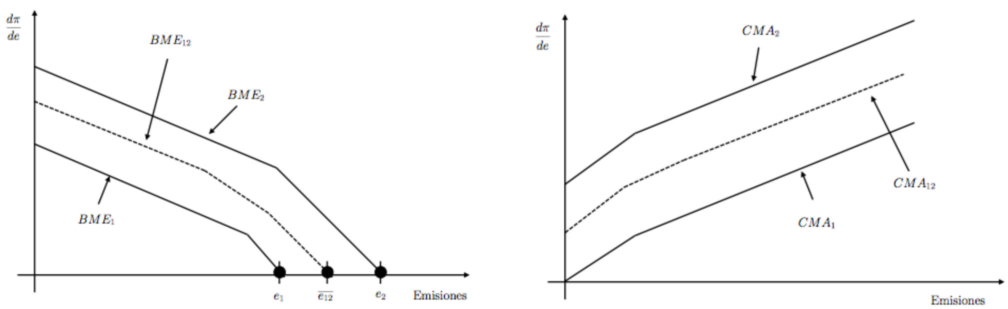
$$e = e_1(y_1, a_1) \;\; y \;\; e = e_2(y_2, a_2),$$

como se hizo en la sección 1.4.2, bajo el supuesto

$$e_1(y_1, a_1) + e_2(y_2, a_2) = \overline{e_{12}},$$

así, si la CMA_1 y la CMA_2 son de dos empresas por separado, la CMA en conjunto es $CMA_{12} = \text{mín}(CMA_1, CMA_2)$, y podría pensarse que si cada curva tienen un punto de inflexión, entonces, la CMA_{12} podría tener hasta dos puntos de inflexión (ver figura 3.1); y en caso de que dicha desigualdad no se cumpla, se tendrá una solución de esquina análoga a la vista en la sección 1.6.1.1 (reducir la producción para lograr el objetivo de reducir las emisiones), esto es,

$$\frac{d\pi}{de} = \begin{cases} -\left(c_{1_{a_1}} \frac{\partial a_1}{\partial e} + c_{2_{a_2}} \frac{\partial a_2}{\partial e} \right) & 0 \leq e \leq e_{esq} \\ \left(p_1' - c_{1_{y_1}} - c_{1_{a_1}} \frac{\partial a_1}{\partial y_1} \right) \frac{dy_1}{de} + \left(p_2' - c_{2_{y_2}} - c_{2_{a_2}} \frac{\partial a_2}{\partial y_2} \right) \frac{dy_2}{de} \\ \quad - c_{1_{a_1}} \frac{\partial a_1}{\partial e} - c_{2_{a_2}} \frac{\partial a_2}{\partial e} & e_{esq} < e \leq e^*. \end{cases}$$



(a) Beneficio Marginal respecto Emisiones (b) Curva Marginal de Abatimiento

Figura 3.1: CMA, mín(CMA_1, CMA_2).

3.1.1. Resultado principal

La solución óptima del problema (3.12) queda resumida en la siguiente proposición

Proposición 3.1.5 *Sea el problema (3.12) cóncavo definido en un dominio $S \subset \mathbb{R}^2$ convexo, con restricciones de desigualdad convexas, y en particular $e_y > 0$, $e_{yy} > 0$, $e_a < 0$, $e_{aa} > 0$, $c_y > 0$, $c_{yy} > 0$, $c_a \geq 0$, entonces se dice que dicho problema tiene solución única (y_1, y_2, a_1, a_2) y esta caracterizada por*

$$e_1(y_1, a_1) + e_2(y_2, a_2) = \overline{e_{12}}$$

y

$$p_1' - c_{1_{y_1}} + \frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} e_{1_{y_1}} + \alpha\left(p_2' - c_{2_{y_2}} + \frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}} e_{2_{y_2}}\right) - \lambda_2(1 - \alpha\beta) = 0$$

con

$$\lambda_1 = -\frac{c_{1_{a_1}}}{e_{1_{a_1}}} = -\frac{c_{2_{a_2}}}{e_{2_{a_2}}},$$

que representa la igualdad en el costo marginal por abatimiento respecto de las emisiones abatidas para ambas empresas.

Demostración. *Dado que el resultado de sumar dos funciones convexas es una función convexa, además del hecho de que las funciones lineales son tanto cóncavas como convexas, aunados los supuestos hechos en la sección 1.2.1, entonces la demostración es análoga a la de la proposición 2.1.1.*

■

3.2. El Sector Energético Mexicano y Potencial Aplicación del Modelo

Una de las razones más apremiantes para buscar un desarrollo de bajas emisiones es que se prevén los impactos del cambio climático potencialmente severos, tanto en los países industrializados como en los países en desarrollo, y que el riesgo de los impactos más adversos se puede reducir si abatimos las emisiones de gases de efecto invernadero.

Las discusiones sobre un desarrollo de bajas emisiones a menudo se centran en la necesidad de realizar acciones de mitigación en las actividades relacionadas con la producción y el consumo de energía.

En éste contexto, de acuerdo con información de la Agencia Internacional de Energía (AIE),[1] el sector energético (en México conformado principalmente por la generación de electricidad (CFE) y la producción de combustibles fósiles (PEMEX)) contribuye con aproximadamente 60 % de las emisiones de Gases de Efecto Invernadero (GEI) por combustión a nivel mundial. En el 2004, el sector energético en México representó cerca del 40 %, siendo el que más contribuye.

El consumo de energía tiene un impacto directo en las emisiones de CO_2 derivadas de la combustión. En México, durante el período de 2000 a 2004, las emisiones de CO_2 iban prácticamente de la mano con el consumo de energía (ver [10]). La tasa de crecimiento promedio anual de las emisiones durante dicho periodo fue 1.8 %, mientras que la del consumo fue 1.7 %. Pero a partir de 2004 se observó un crecimiento anual más acelerado del consumo de energía respecto al de las emisiones de CO_2, 2.5 % contra 1.7 % respectivamente (ver [7]).

Esta disminución en las emisiones contra el consumo de energía seguramente es reflejo de las diversas políticas ambientales implementadas en los últimos años, entre las que destacan las relacionadas con la generación de electricidad, como la repotenciación de unidades de vapor convencional y el programa de retiros de capacidad de CFE, lo que se ha traducido en un incremento de 13.3 % en

[1]Considerando emisiones por combustión en el sector energético dentro del reporte del 2009 de la AIE,[1].

el empleo de gas natural, que es un combustible más limpio, y la reducciónn de 5.4 % en el uso de diesel y 9.2 % en combustóleo.[2]

En febrero de 2005 se estableció el Comité de Cambio Climático del Sector Energía, como instrumento de coordinación para el seguimiento, análisis y definición de políticas y actividades relacionadas con el cambio climático y el Mecanismo para un Desarrollo Limpio del Protocolo de Kioto, y en enero del presente año, la Secretaría de Energía presentó el documento "Estrategia Nacional para la Transición Energética y el Aprovechamiento Sustentable de la Energía (ENE)" ([7]).

En [7] se describen las políticas, programas, proyectos y acciones del Gobierno Federal tendientes a incrementar el empleo de las energías renovables y las tecnologías limpias para la generación eléctrica, promover la eficiencia y sustentabilidad energéticas y reducir nuestra dependencia de los recursos fósiles como fuente primaria de energía. Cabe resaltar que éste escrito no sólo considera el impacto que genera el sector energético dentro del medio ambiente relacionado con el uso final, sino considera a la cadena energética en su totalidad, desde la producción hasta el consumo final y contempla factores como las emisiones de gases contaminantes y el aprovechamiento sustentable de los recursos naturales.

En [9], se establece que las principales acciones de mitigación en el sector energético son:

- Modificaciones regulatorias que fomentan la mitigación de emisiones mediante fuentes renovables:
  - Ley para el Aprovechamiento de las Fuentes Renovables de Energía (LAFRE)
  - Programa de electrificación rural con energías renovables
  - Contrato de interconexión para fuentes renovables intermitentes
  - Permisos para la generación de energía eléctrica a partir de fuentes renovables
  - Depreciación acelerada

[2] Tomado de [7].

- Aprovechamiento de energías renovables:
    - Plan de Acción para eliminar barreras para el desarrollo de la generación eoloeléctrica en México.
    - Proyectos eólicos de la Comisión Federal de Electricidad
    - Energía solar térmica

  Desarrollo de energías renovables conectadas a la Red:
    - Proyecto de Energías Renovables a Gran Escala (PERGE)
    - Fondo Verde del PERGE
    - Servicios Integrales de Energía para Pequeñas Comunidades Rurales en México (SIEPCRM)
    - Programa de electrificación rural del Instituto de Investigaciones Eléctricas-Comisión Federal de Electricidad (IIE-CFE)

  Eficiencia energética y ahorro de energía:
    - Normas Oficiales Mexicanas de Eficiencia Energética
    - Ahorros de energía por acciones del FIDE
    - Ahorro de energía en edificios de la Administración Pública Federal
    - Ahorro de energía en la Comisión Federal de Electricidad
    - Ahorro de energía en Petróleos Mexicanos (PEMEX)
    - Mecanismo para un Desarrollo Limpio
    - Combustibles fósiles más limpios
- Proyectos de aprovechamiento de biogás y gas de minas
    - Cambio de combustibles
    - Plantas de ciclo combinado
    - Plan Nacional del Hidrógeno
    - Captura de carbono
- Actividades de Investigación en el sector energía
- Prospectiva de energías renovables. Una Visión al 2030 de la utilización de las energías renovables en México

- Energías renovables para el desarrollo sustentable en México
- Evaluación del potencial de la biomasa como fuente de energía
- Estudio de política de biocombustibles para México
- Aprovechamiento del metano generado a partir del estiércol en granjas porcinas y vacunas
- Estudios de aprovechamiento de biogás
- Control conjunto de la contaminación urbana y de emisiones de gases de efecto invernadero en la Zona Metropolitana del Valle de México
- Beneficios locales y globales del Control de la Contaminación en la Zona Metropolitana del Valle de México
- Control conjunto de las emisiones locales y globales en la Zona Metropolitana de Guadalajara
- Modelación del impacto económico de la mitigación de emisiones de gases de efecto invernadero
- Escenarios de emisiones y medidas de mitigación de gases de efecto invernadero en sectores clave (transporte y desechos)
- Valoración de ecotecnologías en viviendas de interés social en Torreón, Coahuila y Mexicali, Baja California
- Diseño de un plan de acción para promover la realización de inventarios e identificación de oportunidades para reducir las emisiones de gases de efecto de invernadero en la industria mexicana

En el marco anterior es que se destaca la importancia del sector energético en México y sobre todo, el papel fundamental que tienen nuestras dos paraestatales, PEMEX y CFE en cuanto a la formulación de políticas públicas encaminadas a una transformación energética más sustentable. En particular, se resalta la necesidas de analizarlas no sólo por separado, sino entendiendo las relaciones y ventajas como sector.

En el contexto anterior, y motivado por los cambios recientes en la política energético-ambiental del país, es que se decidió incluir en esta tesis el presente capítulo donde se plantea vía un modelo matemático la interacción entre dos compañías, cuyos supuestos emulan la operación entre PEMEX y CFE.

Si bien los tiempos y alcance de la tesis ya no permitieron hacer una búsqueda de información (estimar funciones de costos y emisiones) y poder comprobar si los supuestos de los modelos presentados en este capítulo describen la situación real entre PEMEX y CFE, sí creemos que los resultados y conclusiones pueden servir para entender este complejo binomio empresarial. La aplicación se deja para trabajo futuro.

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajo Futuro

En esta tesis se desarrollaron de manera sistemática tan sólo algunas de las múltiples alternativas que tiene una empresa para mejorar sus beneficios siendo condescendiente con el medio ambiente.

Desde la cantidad desmedida de emisiones provocadas con el fin de producir una mayor cantidad de producto y obtener el mayor beneficio posible, hasta la producción controlada en base a cierta concientización ambiental adquirida por iniciativa o por cierta imposición.

Si bien, una explicación detallada de lo que esto implica parece ser intuitiva, el fundamento matemático desarrollado en este contexto hizo énfasis en el uso de las Curvas Marginales de Abatimiento (CMA) con el objeto de analizar los costos de abatimiento de ciertas estrategias que pueden ser implementadas siempre y cuando se obtenga un mayor beneficio.

La empresa desea conocer cual sería su beneficio marginal de generar una unidad extra de contaminante, mediante el uso y la interpretación de la CMA con el fin de conocer sus niveles de emisión y el costo marginal de las unidades de reducción que esto implica.

Según el análisis hecho en le capítulo 1, incluso para un caso simple (una empresa que emite sólo un contaminante) se obtuvo un punto de no diferenciabilidad en la CMA, y dicho comportamiento prevaleció en los problemas que aquí se presentaron (incorporación de precios variables, restricción de demanda en la cantidad de producción, impuestos por emisiones producidas y comercio de emisiones), de igual modo se preservó el punto de tangencia entre las líneas de isoemisión y las de isobeneficio. Así, se encontro el comportamiento general de la solución para cada uno de los problemas aquí desarrollados, es importante mencionar que no en todos los casos se tiene como restricción una función de emisiones de forma explícita, sin embargo, ya sea mediante la solución del problema con impuestos o mediante el comercio de emisiones, los resultados reflejan como es de esperarse cierta concientización ambiental que desde el punto de vista de la empresa merma el beneficio y la cantidad de producción a la cual esta predispuesta.

El hecho de centrar la atención sólo a la cantidad de producción estrecha la relación existente entre dicha cantidad y lo que el consumidor solicita en el mercado (demanda del producto), es por esto que desde un punto de vista más realista fue posible conjuntar en el problema de maximizar los beneficios tanto la restricción de las emisiones como limitar la producción sólo a la cantidad demandada del producto.

Ya sea, con restricción en la catidad de producción, implementando un gravamen en las emisiones, o comercializando con ellas, se verificó que la CMA puede ser no diferenciable, y dicha diferenciabilidad está condicionada al cumplimiento de una desigualdad, la cual es calculada de forma particular y es análoga a la vista en la sección 1.6.3.

Problema	Condición
P2 2.5 2.8	$c_a(y,0) \leq -\dfrac{[p - c_y(y,0)]\, e_a(y,0)}{e_y(y,0)}$
2.1 2.7	$c_a(y,0) \leq -\dfrac{[p(y) + yp'(y) - c_y(y,0)]\, e_a(y,0)}{e_y(y,0)}.$

Cualquier posible extensión del modelo expuesto en [20] y desarrollado detalladamente en ésta tesis debe considerar las características específicas del caso a estudiar con el fin de dar cuenta de las diferencias causadas por los supuestos que se asuman en su desarrollo. Así, retomando los supuestos establecidos en el capítulo 1 y dado el análisis hecho en el capítulo 2, en el capítulo 3 se presentó la propuesta de extender el modelo a más empresas que emiten el mismo contaminante, centrando dicho análisis en las dos empresas de mayor relevancia en el sector energético, se presentaron tres diferentes estrategias de decisión, ya sea interactuando de forma separada, o como sector contribuyendo conjuntamente.

Finalmente, si las extensiones aquí presentadas parecen ser realistas el nivel de incertidumbre acerca del comportamiento de la CMA es elevado, ya que no sólo depende de datos que una empresa pueda proporcionar, sino también de factores exógenos que no pueden ser calculados con métodos deterministicos.

Dichos factores pueden conllevar a la implementación de modelos no deteremi-nisticos para ciertos casos prácticos, como es el caso de [6] el cual modela un monopolio dinámico con externalidades ambientales, en el cual se incorpora un impuesto en las emisiones, en [22] se analiza el impacto de la contaminación y la política de reducción utilizando un modelo estocástico de crecimiento endógeno, en [3] se comparan opciones endógenas de derechos de emisión, y se llega a que el ahorro de costos no necesariamente conduce a una reducción en las emisiones, en [12] se evalúa la posibilidad de formar acuerdos voluntarios en el cual se le permite a un país el comercio de permisos de emisión con otros países miembros.

Es por esto, y como es de esperarse, que es deseable llegar a un replanteamiento de los problemas aquí expuestos, ya sea para más de dos empresas y más acciones de abatimiento, o de forma particular replantearlos como modelos estocásticos.

Apéndice A

Teorema de la Función Implícita

En este apéndice[1] se pretende determinar la estructura geométrica y analítica de las soluciones de

$$f(x,\ y) = 0$$

con

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ de clase } C^1,$$

la respuesta más sistemática a este problema es el Teorema de la Función Implícita, en lo sucesivo TFIM. Empezamos con dimensiones bajas.

Teorema A.1.1 (TFIM ($\boldsymbol{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$)) *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Suponga que para $(x_0,\ y_0) \in U$ se cumplen*

1. $f(x_0,\ y_0) = 0$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) \neq 0$.

Entonces, existen $\delta,\ \varepsilon > 0$, y $\phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ de clase C^1 (ver figura A.1) tal que

$$f(x,\ y) = 0 \textit{ si y sólo si } y = \phi(x) \qquad (x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)),$$

es decir,

$$f(x,\ \phi(x)) = 0 \qquad (x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)). \tag{A.1}$$

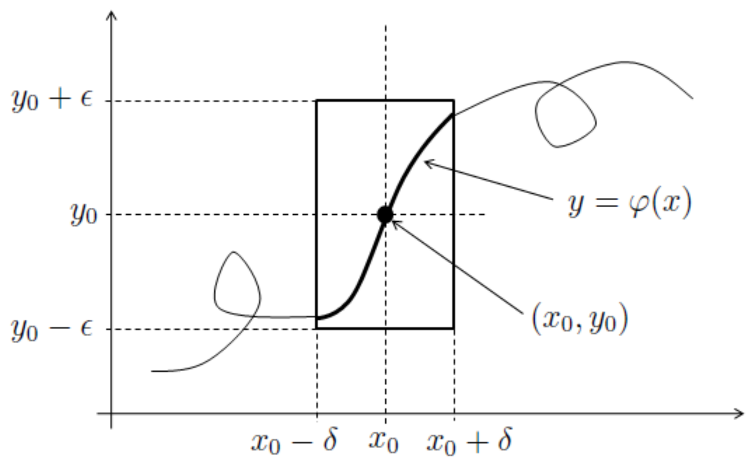


Figura A.1: Localidad en el TFIM

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) \neq 0$, entonces existe una función $x = \phi(y)$ tal que $f(\phi(y),\ y) = 0$. Derivando de forma implícita mediante la regla de la cadena (A.1) se obtiene

$$D_1 f(x,\ y)\frac{dx}{dx} + D_2 f(x,\ y)\frac{dy}{dx},$$

mas aún, como $\dfrac{dx}{dx} = 1$, y además $y = \phi(x)$ $\left(y' = \dfrac{dy}{dx} = \phi'(x)\right)$, entonces

$$D_1 f(x,\ \phi(x)) + D_2 f(x,\ \phi(x))\phi'(x) = 0,$$

de donde

$$\phi'(x) = -D_1 f(x,\ \phi(x))(D_2 f(x,\ \phi(x)))^{-1}.$$

Obsérvese que el denominador del miembro derecho es diferente de cero para valores de x en una cierta vecindad de $(x_0,\ y_0) = (x_0,\ \phi(x_0))$, debido a que las derivadas parciales son continuas y a la condición *2* del teorema A.1.1.

Más aún, el teorema A.1.1 se puede aplicar a una ecuación lineal con perturbación de la forma

$$ax + by + R(x,\ y) = 0,\ \text{con}\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

[1]El desarrollo y análisis hecho en este capítulo está basado en [2]

donde $R(x,\ y)$ es de clase C^1, y además es un residuo de orden uno tal que $\lim_{x,y\to 0} R(x,\ y)/\left\|(x,\ y)\right\| = 0$, lo que intuitivamete quiere decir que $R(x,\ y)$ contiene sólo terminos de orden superior a uno. Entonces, sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, proponiendo $f = ax + by + R(x,\ y) = 0$, $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Suponga que para $(x_0,\ y_0) \in U$ se cumplen

1. $f(x_0,\ y_0) = 0.$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) \neq 0,$

ya que se quiere tener y en función de x, suponiendo que se cumple la condición 1. del teorema A.1.1, y calculando

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = b$$

dado que $R(x,\ y)$ es un reciduo de orden uno, entnoces $R(x_0,\ y_0) = 0$, lo que implica que $\frac{\partial R}{\partial y}(x_0,\ y_0) = 0$, entonces, existen $\delta,\ \varepsilon > 0$, y $\phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ de clase C^1 tal que

$$f(x,\ y) = 0 \text{ si y sólo si } y = \phi(x) \qquad (x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)),$$

es decir,

$$f(x,\ \phi(x)) = 0 \qquad (x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)),$$

por lo tanto

$$f(x,\ \phi(x)) = ax + b\phi(x) + R(x,\ \phi(x)) = 0,$$

siempre y cuando $b \neq 0$. Ahora se presenta una versión mas general del teorema A.1.1.

Teorema A.1.2 (TFIM ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)) *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Suponga que para $x^0 = (x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_{n-1}^0,\ x_n^0) \in U$ se cumplen*

1. *$f(x^0) = 0.$*

2. *$D_n f(x^0) \neq 0.$*

Entonces, existen $\delta,\ \varepsilon > 0,\ y\ \phi : B((x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_{n-1}^0);\delta) \to (x_n^0 - \varepsilon,\ x_n^0 + \varepsilon)$ *de clase* C^1 *tales que*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}, x_n) = 0 \text{ si y sólo si } x_n = \phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}),$$

para toda $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) \in B((x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_{n-1}^0;\delta))$.

Como en el teorema A.1.1, esto equivale a decir que existe localmente una única función ϕ de $n-1$ variables tal que

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ \phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})) = 0.$$

Ejemplo A.1.3 *Determinar si hay solución única para* z *en* $\operatorname{sen} x + \cos y + \tan z = 0$*, cerca del punto* $(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi)$. *Tomando*

$$f(x,\ y,\ z) = \operatorname{sen} x + \cos y + \tan z = 0,$$

sea $U \subset \mathbb{R}^3$ *abierto, y* $f : U \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1. *Veamos si para* $(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi) \in U$ *se cumplen*

1. $f(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi) = 0.$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi\right) \neq 0,$

calculando la condición 2. en el teorema A.1.2 se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi) = \sec^2 z|_{(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi)} = 1,$$

entonces, existen $\delta,\ \varepsilon > 0,\ y\ \phi : B((0,\ \frac{\pi}{2});\delta) \to (\pi - \varepsilon,\ \pi + \varepsilon)$ *de clase* C^1 *tales que*

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \text{ si y sólo si } z = \phi(x,\ y),$$

para toda $(x,\ y) \in B((0,\ \frac{\pi}{2});\ \delta)$.

Esto equivale a decir que existe localmente una única función ϕ *de dos variables tal que*

$$f(x,\ y,\ \phi(x,\ y)) = 0$$

por lo cual se tiene solución única para z *en el punto dado .*

Teorema A.1.4 (TFIM ($\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)) *Sea $f = (g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 con*

1. $g(x_0, y_0, z_0) = 0,\ h(x_0, y_0, z_0) = 0.$

2. $$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ & \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \neq 0,$$

entonces, existe $\delta > 0$, y funciones $\phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\Phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$g(x,\ y,\ z) = 0 \text{ y } h(x,\ y,\ z) = 0 \text{ si y sólo si } y = \phi(x) \text{ y } z = \Phi(x),$$

para toda $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, en otras palabras, existen funciones continuamente diferenciables y únicas ϕ, Φ tales que

$$g(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = 0 \text{ y } h(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = 0. \tag{A.2}$$

Derivando de forma implícita mediante la regla de la cadena (A.2) se obtiene

$$D_1g(x,\ y,\ z)\frac{dx}{dx} + D_2g(x,\ y,\ z)\frac{dy}{dx} + D_3g(x,\ y,\ z)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$D_1h(x,\ y,\ z)\frac{dx}{dx} + D_2h(x,\ y,\ z)\frac{dy}{dx} + D_3h(x,\ y,\ z)\frac{dz}{dx} = 0$$

con $\dfrac{dx}{dx} = 1$, $y = \phi(x)$ $\left(y' = \dfrac{dy}{dx} = \phi'(x)\right)$, $z = \Phi(x)$ $\left(z' = \dfrac{dz}{dx} = \Phi'(x)\right)$ y tomando $p = (x,\ \phi(x),\ \Phi(x))$ entonces

$$D_1g(p) + D_2g(p)\phi'(x) + D_3g(p)\Phi'(x) = 0$$

$$D_1h(p) + D_2h(p)\phi'(x) + D_3h(p)\Phi'(x) = 0.$$

De aquí es posible despejar $\phi(x)$, $\Phi(x)$ ya que

$$\det \begin{bmatrix} D_2g(p) & D_3g(p) \\ D_2h(p) & D_3h(p) \end{bmatrix} \neq 0,$$

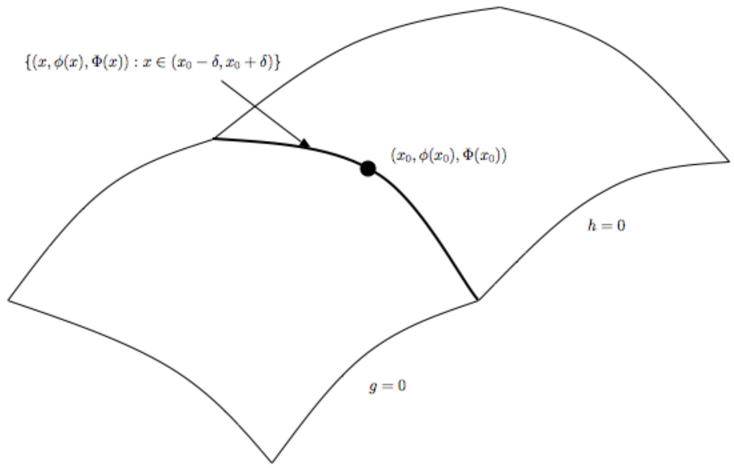


Figura A.2: Intersección de dos superficies bidimensionales en $\mathbb{R}^3$.

debido a la continuidad de las derivadas parciales y a la condición *2.* en el teorema A.1.4 (ver figura A.2).
La figura A.2 representa el problema $g = 0$ & $h = 0$, así pues, el TFIM nos dice que bajo hipótesis adecuadas, dicha intersección se ve localmente como una curva diferenciable.

Ahora veamos el caso caso de un sistema de ecuaciones con sus respectivas perturbaciones, dado de la siguiente forma

$$ax + by + cz + R_1(x,\ y,\ z) = 0$$

$$Ax + By + Cz + R_2(x,\ y,\ z) = 0$$

donde $a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C \in \mathbb{R}$ y $R_1,\ R_2$ son residuos de clase C^1 tales que $\lim_{x,y,z \to 0} R_i(x,\ y,\ z)/\left\|(x,\ y,\ z)\right\| = 0, \quad i = 1,\ 2$. El TFIM en este caso garantiza que bajo hipótesis similares a las del teorema A.1.4, ya que depende de las dos variables que se deseen poner en términos de la restante, es decir, que alguno de los determinantes 2×2 sea distinto de cero, así es posible resolver para dos de las variables en términos de la restante.

Proponiendo

$$f_1(x,\ y,\ z) = ax + by + cz + R_1(x,\ y,\ z) = 0$$

$$f_2(x,\ y,\ z) = Ax + By + Cz + R_2(x,\ y,\ z) = 0,$$

sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 con

1. $f_1(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0,\ f_2(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0.$

2. $$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} \neq 0,$$

suponiendo que se cumple la condición 1. ya que $R_i(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0,\ \ i = 1,\ 2,$ y calculando la condición 2. ya que se quiere tener y y z en terminos de x,

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(x_0,\, y_0,\, z_0)} = (b)\,(C) - (c)\,(B)\,,$$

si $(b)\,(C) - (c)\,(B)$, es distinto de cero, entonces, existe $\delta > 0$, y funciones $\phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\Phi : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$f_1(x,\ y,\ z) = 0 \text{ y } f_2(x,\ y,\ z) = 0 \text{ si y sólo si } y = \phi(x) \text{ y } z = \Phi(x),$$

para toda $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, en otras palabras, existen funciones continuamente diferenciables y únicas $\phi,\ \Phi$ tales que

$$f_1(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = ax + b\phi(x) + c\Phi(x) + R_1(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = 0$$

$$f_2(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = Ax + B\phi(x) + C\Phi(x) + R_2(x,\ \phi(x),\ \Phi(x)) = 0.$$

A continuación se presenta la versión general del TFIM.

Teorema A.1.5 (TFIM ($\boldsymbol{f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m}$)) *Sea $U = V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto, y $f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1. Suponga que para el punto $(x^0,\ y^0) = (x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_n^0, y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots, y_m^0) \in U$ se cumple*

1. $f(x^0,\ y^0) = 0$

2. $det\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x^0,\ y^0)\right]_{i,\ j=1,\ \ldots,\ m} \neq 0.$

Entonces, existen $V_0 \subset V$, $W_0 \subset W$, *abiertos en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *respectivamente, y*

$$\phi = (\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_m) : V_0 \to W_0$$

de clase C^1 *tal que*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n, y_1,\ y_2,\ \ldots, y_m) = 0$$

si y sólo si

$$y_1 = \phi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)\ \&\ y_2 = \phi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)\ \&\ \ldots\ \&\ y_m = \phi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)$$

para toda $(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n, y_1,\ y_2,\ \ldots, y_m) \in V_0 \times W_0$.

Es decir, existen funciones continuamente diferenciables en dominios adecuados $\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_m$ tales que

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \phi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n),\ \ldots,\ \phi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)) = 0$$
$$f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \phi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n),\ \ldots,\ \phi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \phi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n),\ \ldots,\ \phi_m(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)) = 0.$$

Teorema A.1.6 (TFIM bis ($\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$)) *Sea* $U = V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *abierto, y* $f = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ *de clase* C^1. *Suponga que para el punto* $(x^0,\ y^0) \in U$ *se cumple*

1. $f(x^0,\ y^0) = 0$

2. $D_2 f(x^0,\ y^0)$ *es no singular (isomorfismo lineal).*

Entonces, existen $V_0 \subset V$, $W_0 \subset W$, *abiertos en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *respectivamente, y*

$$\phi = (\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_m) : V_0 \to W_0$$

de clase C^1 *tal que*

$$f(x,\ y) = 0$$

si y sólo si $y = \phi(x)$ *para toda* $(x,\ y) \in V_0 \times W_0$.

Abordando el caso general del TFIM, es posible verlo como un sistema lineal de ecuaciones

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m = 0$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + \cdots + b_{2m}y_m = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mm}y_m = 0,$$

en el caso en que

$$\det \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \neq 0,$$

es posible resolver mediante funciones explícitas y globales para $y_1, \ldots, y_m$ en términos de $x_1, \ldots, x_n$. El TFIM asegura que bajo condiciones similares se puede resolver, mediante funciones implícitas y locales, el siguiente sistema con perturbaciones

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m + R_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + \cdots + b_{2m}y_m + R_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \cdots + b_{mm}y_m + R_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Donde $R_1, R_2, \ldots, R_m$ son residuos de orden uno.

Más aún, el TFIM en su forma general se puede ver desde el punto de vista económico como un sistema de m ecuaciones que dependen de n parámetros $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y m variables endógenas $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0,$$

el dominio de los parámetros es $V \subset \mathbb{R}^n$, y el de las variables endógenas es $W \subset \mathbb{R}^m$, con V y W conjuntos abiertos, suponiendo que para $(x^0,\ y^0) = (x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_n^0, y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots, y_m^0) \in V \times W$ se satisfacen las condiciones suficientes *1.* y *2.* del teorema A.1.6, entonces es posible tener las variables endógenas como función de los parámetros localmente alrededor de $(x^0,\ y^0)$.

Demostración. [2]Desde un punto de vista lógico, la demostración de la existencia de las funciones

$$\phi = (\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_m) : V_0 \to W_0$$

donde $V_0 \subset V$ y $W_0 \subset W$ son abiertos, consiste en que la matriz Jacobiana respecto de las m variables endógenas debe de ser de rango completo [3], lo que intuitivamente quiere decir, que es posible mover los valores del sistema de ecuaciones en cualquier direccion para cambios adecuados en las variables endógenas, por consiguiente, si se realizan cambios en los parámetros provocando que los valores del sistema de ecuaciones se alejen de cero, entonces es posible ajustar las variables endógenas para que se cumpla con la condición *1.* del teorema A.1.6. Como dicha matriz Jacobiana es de rango completo, entonces existen

$$\phi = (\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_m) : V_0 \to W_0$$

definidas en algún entorno de $(x^0,\ y^0)$, tal que

$$f_i(x,\ \phi_i(x)) = 0,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ \text{para todo } x \in V_0,$$

derivando de forma implícita, es posible conocer los efectos que pueden provocar los parámetros sobre las variables endógenas,

$$D_x f(x,\ y) + D_y f(x,\ y)\phi'(x) = 0,$$

por lo tanto

$$D\phi(x) = -\frac{D_x f(x,\ y)}{D_y f(x,\ y)}.$$

■

[2]Ver [17] pp 940
[3]Para la definición, ver [21] pp 350.

Ejemplo A.1.7 *¿ Se puede resolver*

$$\begin{array}{rcl} xy^2 + xzu + yv^2 &=& 3 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 &=& 2 \end{array}$$

para $u(x,\ y,\ z)$, $v(x,\ y,\ z)$ *cerca de* $(x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1)$, $(u,\ v) = (1,\ 1)$*?, en este caso calcular* $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ *en* $(1,\ 1,\ 1)$.

Se proponen

$$F_1(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0$$

$$F_2(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = yzu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0.$$

Sea $U = V \times W \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ *abierto, y* $F = (F_1,\ F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ *de clase* C^1. *Supongamos que para el punto* $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ u_0,\ v_0) = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \in U$ *se cumple*

1. $F_1(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) = 0$
   $F_2(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) = 0$

2. $det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(x_0,\, y_0,\, z_0,\, u_0,\, v_0)} \neq 0.$

Calculando la condición 2. se tiene

$$J{=}det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = (xz)(2x - 2u^2v) - (2yv)(3yzu^2 - 2uv^2),$$

evaluando J *en* $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ u_0,\ v_0) = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$, *se tiene que* $J = -2 \neq 0$, *así que se cumplen las condiciones suficientes para aplicar el TFIM.*

Entonces existe $V \subset \mathbb{R}^3$ *abierto con* $(1,\ 1,\ 1) \in V$ *y* $W \subset \mathbb{R}^2$ *abierto con* $(1,\ 1) \in W$*; y una función* $f = (f_1,\ f_2) : V \to W$ *de clase* C^1, *tal que*

$$F_1(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0$$

$$F_2(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = 0,$$

si y sólo si $u = f_1(x\ ,y\ ,z)$ *y* $v = f_2(x\ ,y\ ,z)$*, en otras palabras*

$$\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ z,\ f_1(x\ ,y\ ,z),\ f_2(x\ ,y\ ,z)) = 0 \\ F_2(x,\ y,\ z,\ f_1(x\ ,y\ ,z),\ f_2(x\ ,y\ ,z)) = 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

para todo $(x,\ y,\ z,\ u,\ v) \in V \times W$.

En tal caso sus derivadas pueden calcularse, aplicando la regla de la cadena a (A.3) *y despejando*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,\ y,\ z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}_{(x,\ y,\ z,\ u,\ v)} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,\ y,\ z,\ u,\ v)},$$

calculando la matriz inversa y multiplicando se tiene

$$-\frac{1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,\ y,\ z,\ u,\ v)}$$

por lo cual

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x,\ y,\ z)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

como $v = f_2(x\ ,y\ ,z)$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,\ 1,\ 1) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1,\ 1,\ 1) = -1$.

Como se mencionó en el ejemplo A.1.7, para poder aplicar el TFIM las condiciones son suficientes, mas no necesarias, así que es posible que las conclusiones del TFIM se cumplan, aún cuando no se cumplan con las condiciones de dicho teorema.

Ejemplo A.1.8 *¿ Se puede dar un ejemplo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que en un punto $(a,\ b)$ se tenga*

$$f(a,\ b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,\ b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b) = 0$$

y que sin embargo se cumplan las condiciones del TFIM?.

La respuesta a esta pregunta es, sí, y el ejemplo es el siguiente:

Proponiendo la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,\ y) = Ax + By + Cxy + D = 0$$

con A, B, C y D constantes diferentes de cero; así pues

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A + Cy \text{ implica } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,\ y_0) = 0 \text{ si y sólo si } y = -\frac{A}{C};\ C \neq 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = B + Cx \text{ implica } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\ y_0) = 0 \text{ si y sólo si } x = -\frac{B}{C};\ C \neq 0.$$

Ahora como $y = -\dfrac{A}{C}$ y $x = -\dfrac{B}{C}$; sustituyendo y calculando D para que $F(x_0,\ y_0) = 0$

$$A\left(-\frac{B}{C}\right) + B\left(-\frac{A}{C}\right) + C\left(-\frac{B}{C}\right)\left(-\frac{A}{C}\right) + D = 0 \text{ implica } D = \frac{AB}{C}.$$

Por lo tanto la función es

$$F(x,\ y) = Ax + By + Cxy + \frac{AB}{C} = 0 \text{ con } A,\ B,\ C \neq 0,$$

evaluada en el punto $(x_0,\ y_0) = \left(-\dfrac{A}{C},\ -\dfrac{B}{C}\right)$, por lo cual

$$F\left(-\frac{A}{C},\ -\frac{B}{C}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(-\frac{A}{C},\ -\frac{B}{C}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(-\frac{A}{C},\ -\frac{B}{C}\right) = 0$$

por construcción.

Sin embargo, es posible aplicar el TFIM ya que se puede tener y en términos de x

$$y(B+Cx) = -\frac{AB}{C} - Ax$$

$$y = \frac{-\frac{AB}{C} - Ax}{B+Cx} = \frac{-A(B+Cx)}{BC+C^2x},$$

dado que B, $C \neq 0$ y como x depende de las constantes B y C, entonces $BC + C^2x \neq 0$, por lo que se tiene y en función de x.

Observación: De esta manera se tiene que en el TFIM, las hipótesis y la conclusión no se implican mutuamente.

Después de haber dado versiones variadas del TFIM, es importante mencionar un caso particular de dicho teorema, el cual es el Teorema de la Función Inversa.

Se puede ver como un sistema de n ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\ldots,x_n) = &\quad y_1 \\ \vdots \qquad & \quad\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = &\quad y_n, \end{aligned}$$

las cuales se tratan de invertir, por medio del TFIM aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ con las incógnitas $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, es posible saber acerca de la existencia de dicha inversa. La condición para la existencia de la solución en una vecindad de un punto $x^0 = (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ es que el determinante de la matriz $Df(x^0)$ con $f = (f_1,\ \ldots,\ f_n)$ sea distinto de cero ya que se quieren tener las x's en función de las y's.

Esto es,

$$J\ f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x^0} = det\ Df(x^0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

De forma ilustrativa, para entender el Teorema de la Función Inversa se propone la siguiente ecuación $y = f(x) = x^2$, suponiendo que se quiere despejar

x en función de y se tiene

$$x = \varphi_1(y) = +\sqrt{y} \quad \text{y} \quad x = \varphi_2(y) = -\sqrt{y}$$

así pues,

$$f(\varphi_1(y)) = y \quad \text{y} \quad f(\varphi_2(y)) = y,$$

(representa una composición de funciones dado $y = f(x)$ y $x = g(y)$, $f \circ g$ es $y = f(g(y))$ y $g \circ f$ es $x = g(f(x)))$ se tienen dos valores de y, ya que para cada valor $y \geq 0$ hay dos valores de x tales que $(x,\ y)$ están en la parábola, esto quiere decir que $x = \varphi_1(y)$ no se cumple para cualquier x, lo que lleva a pensar acerca de la localidad de la función inversa.

Suponga que se tiene una función $y = f(x)$, tal que $y^0 = f(x^0)$, y f es derivable en x^0, si $x = \varphi(y)$ es una inversa local de f en una vecindad que contiene a x^0 entonces debe cumplirse $\varphi(f(x)) = x$, para toda x que pertenece a la vecindad. Entonces si la inversa local es derivable en $y^0 = f(x^0)$, aplicando la regla de la cadena se puede calcular la derivada en x^0

$$\varphi'(f(x^0)) \cdot f'(x^0) = 1 \text{ es decir, } \varphi'(y^0) \cdot f'(x^0) = 1.$$

En este caso, los valores de x que cumple $x = \varphi_1(y)$ son los $x \geq 0$, y los que cumplen con $x = \varphi_2(y)$ son los $x \leq 0$, entonces se consideraran dos vecindades distintas y como la función tiene un mínimo absoluto en $x^0 = 0$ (x^0 es el punto en donde la derivada se anula), entonces las funciones φ_1 y φ_2 son las inversas locales de f, y sus respectivas derivadas son

$$\varphi_1'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{y} \quad \varphi_2'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

ambas funciones son derivables excepto en $y = 0$.

Teorema A.1.9 (Teorema de la Función Inversa): *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $x^0 \in U$, y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Supongamos que*

$$Df(x^0) \in L(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n) \textit{ es un isomorfismo lineal,}$$

es decir, es una transformación lineal invertible, entonces existen vecindades $U_0 \subset U$ de x^0, y $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ de $y^0 = f(x^0)$, y una función $\varphi : V_0 \to U_0$ de clase C^1 tal que

$$f(\varphi(y^0)) = y^0;\ \varphi(f(x^0)) = x^0,$$

y se cumple $f(\varphi(y)) = y$ *para todo* $y \in V_0$, *y* $\varphi(f(x)) = x$ *para todo* $x \in U_0$. *Es decir,* $\varphi = f^{-1}$. *Más aún, la derivada de la función inversa está dada por*

$$D\varphi(y) = D(f^{-1}(y)) = D(f^{-1}(f(x))) = [Df(x)]^{-1}\,.$$

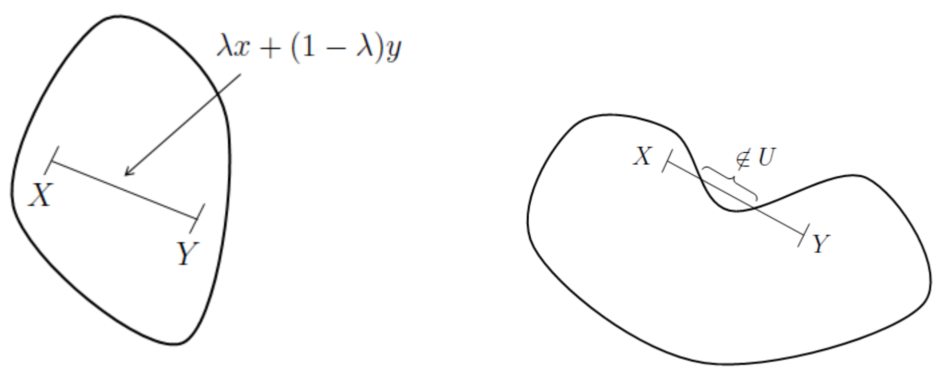
Apéndice B

Optimización convexa

Esta sección es basada principalmente en [15], [8], [5] y [13].

Definición B.1.10 *Se dice que el conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ (ver figura B.1) es convexo si, dados $x,\ y \in U$, se tiene que*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in U \quad \textit{para todo } \lambda \in [0,1].$$



(a) Convexo (b) No convexo

Figura B.1: Conjuntos.

Definición B.1.11 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se dice que f es una función convexa (ver figura B.2), si dados $x,\ y \in U$ se tiene que*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \lambda \in [0,1].$$

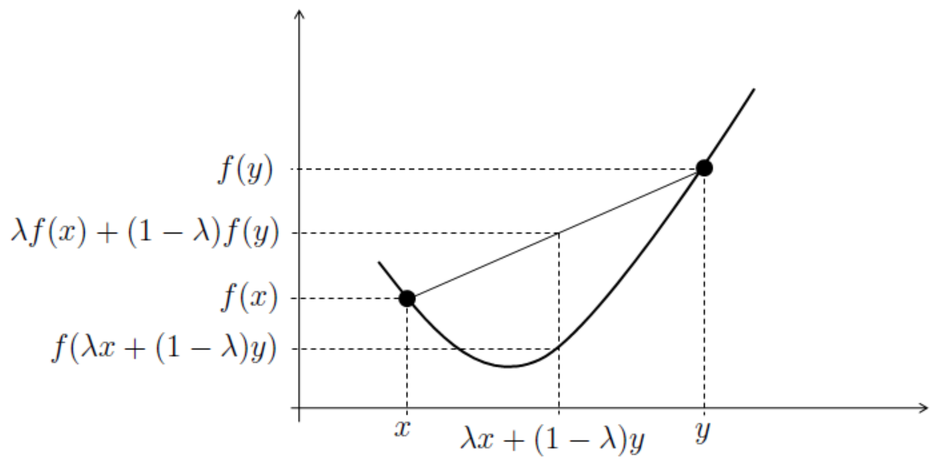


Figura B.2: Función convexa.

Definición B.1.12 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, se dice que f es una función cóncava (ver figura B.3), si dados $x,\ y \in U$ se tiene que*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \lambda \in [0,1].$$

Se dice que la función es convexa en un intervalo si para todo par de puntos en dicho intervalo se cumple con la desigualdad de la definición B.1.11. También es posible asegurar que la función f es cóncava, si $-f$ es una función convexa.

B.2. Optimización de funciones en n variables

Comenzamos por una función en dos variables $z = f(x,\ y)$ definida en un dominio S del plano xy, es decir, de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que f alcanza su valor máximo en un punto interior $(x_0,\ y_0)$ de S, si se mantiene fijo $y = y_0$, la función $g(x) = f(x,\ y_0)$ depende solamente de la variable x y tiene su máximo en $x = x_0$, del cálculo en una variable se tiene que un punto x_0 es estacionario de f si $f'(x_0) = 0$ (la tangente de la gráfica de la función en x_0 es paralela al

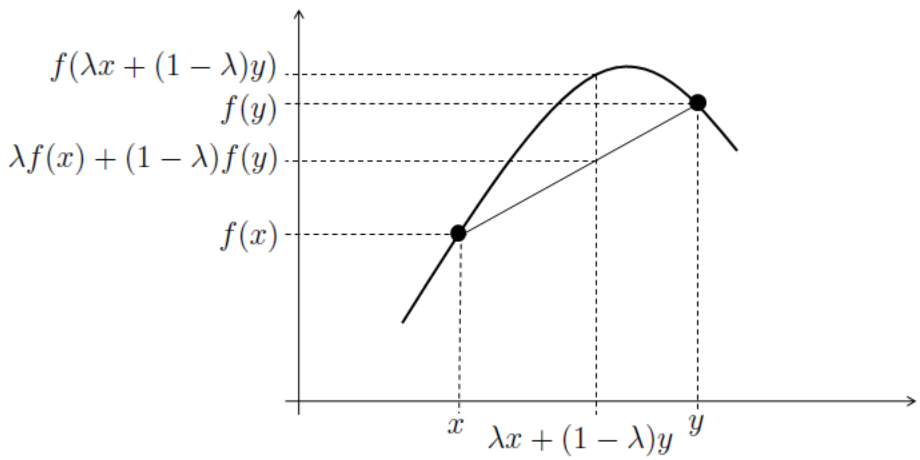


Figura B.3: Función cóncava.

eje x), en este caso, $g'(x_0) = 0$, así para todo x, la derivada $g'(x)$ es la misma que la derivada parcial $f'_x(x,\ y_0)$, entonces $f'_x(x_0,\ y_0) = 0$. De la misma forma es posible ver que el punto $(x_0,\ y_0)$ cumple con $f'_y(x_0,\ y_0) = 0$, dado que la función $h(y) = f(x_0,\ y)$ tiene su valor máximo en $y = y_0$.

Teorema B.2.1 *(Condiciones de primer orden caso $n = 2$) Una condición necesaria para que una función $f(x,\ y)$ diferenciable tenga un máximo o un mínimo en un punto interior $(x_0,\ y_0)$ de su dominio es que $(x_0,\ y_0)$ sea un punto estacionario de f, esto es,*

$$f'_x(x_0,\ y_0) = 0 \ \ \& \ \ f'_y(x_0,\ y_0) = 0.$$

Para el caso general se tiene el siguiente teorema.

Teorema B.2.2 *(Condiciones de primer orden caso general) Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $c = (c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n) \in S$ un punto interior en el que f es diferenciable. Una condición necesaria para que c sea un punto máximo o mínimo para f es que c sea un punto estacionario para f, esto es,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Sea f una función de n variables definida en $S \subset \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $c = (c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n) \in S$, tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in S$, o sea que c maximiza a f en S sí y sólo si c minimiza a $-f$ en S. De esta forma es posible convertir los problemas de maximización en problemas de minimización y viceversa.

Ahora suponga una función $z = f(x,\ y)$ que cumple con las condiciones del teorema B.2.1, entonces es posible saber si $(x_0,\ y_0)$ es un máximo local, un mínimo local o un punto silla, dado el siguiente teorema.

Teorema B.2.3 *(Condiciones de segundo orden caso $n = 2$) Sea $f(x,\ y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(x_0,\ y_0) \in S$ un punto estacionario de f, con*

$$A = f''_{xx}(x_0,\ y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0,\ y_0) \quad y \quad C = f''_{yy}(x_0,\ y_0),$$

se tiene

a) si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ es un máximo local.

b) si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ es un mínimo local.

c) si $AC - B^2 < 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ es un punto silla.

d) si $AC - B^2 = 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ puede ser un máximo local, un mínimo local, o un punto silla.

Teorema B.2.4 *(Condiciones suficientes de óptimos globales) Sea $f(x,\ y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ convexo, y sea $(x_0,\ y_0) \in S$ un punto estacionario de f, con*

$$A = f''_{xx}(x_0,\ y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0,\ y_0) \quad y \quad C = f''_{yy}(x_0,\ y_0),$$

se tiene

a) si para todo $(x, y) \in S$, $A \leq 0$, $C \leq 0$ y $AC - B^2 \geq 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ es un máximo global de $f(x, y)$ en S.

b) si para todo $(x, y) \in S$, $A \geq 0$, $C \geq 0$ y $AC - B^2 \geq 0$, entonces $(x_0,\ y_0)$ es un mínimo global de $f(x, y)$ en S.

Teorema B.2.5 *Sea $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función de clase C^2, definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que*

a) si $(-1)^k D_k(\boldsymbol{x}) > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ y para todo $\boldsymbol{x} \in S$, entonces, f es estrictamente cóncava en S,

b) si $D_k(\boldsymbol{x}) > 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ y para todo $\boldsymbol{x} \in S$, entonces, f es estrictamente convexa en S,

con

$$D_k(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\boldsymbol{x}) & f''_{12}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f''_{1k}(\boldsymbol{x}) \\ f''_{21}(\boldsymbol{x}) & f''_{22}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f''_{2k}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ f''_{k1}(\boldsymbol{x}) & f''_{k2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f''_{kk}(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

que representa los n determinantes de la matriz hessiana

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = [f''_{ij}(\boldsymbol{x})]_{n \times n}.$$

Como un caso particular si $n = 2$, se tiene que $D_1(\boldsymbol{x}) < 0$ y $D_2(\boldsymbol{x}) > 0$, esto es,

$$D_1(\boldsymbol{x}) = f''_{11}(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ y } D_2(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} f''_{11}(\boldsymbol{x}) & f''_{12}(\boldsymbol{x}) \\ f''_{21}(\boldsymbol{x}) & f''_{22}(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} > 0.$$

Teorema B.2.6 *Sea S un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$; y $f : S \to \mathbb{R}$, supóngase que x^0 es un óptimo local. Así pues:*

a) Si f es una función convexa en S, entonces, x^0 es un óptimo global.

b) Si f es una función estrictamente convexa, entonces, x^0 es un óptimo global único de f sobre S.

B.3. Función dual de Lagrange

Considerando el problema de optimización en su forma estándar

$$
\begin{array}{rl}
\max & f_0(x) \\
\text{s.a.} & f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ \ldots, p, \\
 & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Suponiendo que el dominio $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{dom} h_i$ es distinto del vacio. El valor óptimo del problema (anterior poner numeracion) es p^*. El problema puede o no ser convexo. La idea básica de dualidad Lagrangiana, es tomar las restricciones para aumentar la función objetivo con la suma ponderada de las funciones de las restricciones. Se define el Lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ asociado al problema

$$
L(x, \ \lambda, \ \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x),
$$

con dominio dom $L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. En donde λ_i son los multiplicadores de Lagrange asociados con la $i-$ésima igualdad de la restricción $h_i(x) = 0$. Los vectores λ y ν son llamados variables duales o vectores multiplicadores de Lagrange asociados con el problema.

B.4. La función dual de Lagrange

Se define la función dual de Lagrange $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ como el valor mínimo del Lagrangiano sobre x, para $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{R}^p$,

$$
g(\lambda, \ \nu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x) \right)
$$

donde el Lagrangiano no esta acotado por debajo de x, la función dual toma el valor de $-\infty$. Ya que la función dual es el punto ínfimo de la familia afín de funciones de $(\lambda, \ \nu)$, es cóncava, incluso cuando el problema no es convexo.

B.5. Límites inferiores en el valor óptimo

El campo de la función dual con límites inferiores en el valor óptimo p^* del problema. Para cualquier $\lambda \geqslant 0$ y cualquier ν se tiene

$$g(\lambda,\ \nu) \leqslant p^*$$

esta propiedad se verifica suponiendo que $\tilde{x}$ es un punto factible para el problema, es decir, $f_i(\tilde{x}) \leqslant 0$, $h_i(\tilde{x}) = 0$ y $\lambda \geqslant 0$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\tilde{x}) \leqslant 0$$

así que cada termino en la primera sumatoria no es positivo, y cada término en la segunda sumatoria es cero, entonces

$$L(\tilde{x},\ \lambda,\ \nu) = f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(\tilde{x}) \leqslant f_0(\tilde{x})$$

por lo tanto

$$g(\lambda,\ \nu) = \operatorname*{ínf}_{x \in \mathcal{D}} L(x,\ \lambda,\ \nu) \leqslant L(\tilde{x},\ \lambda,\ \nu) \leqslant f_0(\tilde{x}).$$

Así que se tiene $g(\lambda,\ \nu) \leqslant f_0(\tilde{x})$ para cada punto factible $\tilde{x}$.

Un caso particular en dos variables del método de los multiplicadores de lagrange es

$$\begin{aligned} \text{máx(ó mín)} \quad & f(x,y) \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & g(x,y) = c, \end{aligned} \tag{B.1}$$

en el cual si (x_0, y_0) resuelve el lagrangiano

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c),$$

entonces $L(x,y,\lambda)$ es estacionario en (x_0, y_0), pero no necesariamente existe un máximo o un mínimo.

Teorema B.5.1 *(Suficiencia global) Suponiendo que las funciones* $f(x, y)$ *y* $g(x, y)$ *del problema B.1, son continuamente diferenciables en un conjunto abrierto convexo* $S \in \mathbb{R}^2$*, y sea* $(x_0, y_0) \in S$ *un punto estacionario para la función lagrangiana*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c),$$

suponiendo además que $g(x_0, y_0) = c$*. Entonces*

1) $L(x, y, \lambda)$ *cóncava* $\Rightarrow$ (x_0, y_0) *resuelve el problema de maximización de B.1.*

2) $L(x, y, \lambda)$ *convexa* $\Rightarrow$ (x_0, y_0) *resuelve el problema de minimización de B.1.*

Teorema B.5.2 *(Condiciones suficientes de Kuhn-Tucker) Considerando el problema de programación no lineal*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\textit{sujeto a} \\ &\qquad g_j(\boldsymbol{x}) \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde f *y* $g_1, \ldots, g_m$*, son continuamente diferenciables,* f *es cóncava y* $g_1, \ldots, g_m$ *son convexas. Suponga que existen números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *y un vector factible* $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ *tales que*

1) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}})}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

2) $\lambda_j \geq 0$ $(= 0$ *si* $g_j(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) < c_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$,

entonces $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ *resuelve el problema.*

Teorema B.5.3 *(Condiciones necesarias de Kuhn-Tucker) Suponiendo que* $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *resuelve el problema*

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\textit{sujeto a} \\ &\qquad g_j(\boldsymbol{x}) \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{B.3}$$

donde f *y* $g_1, \ldots, g_m$*, son continuamente diferenciables, y suponiendo además que las funciones* g_j *(*$j = 1, \ldots, m$*) tienen gradientes en* $\boldsymbol{x^0}$ *que son linealmente independientes. Entonces existen números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *tales que*

1) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x^0})}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{g_j(\boldsymbol{x^0})}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n),$

2) $\lambda_j \geq 0$ *(*$= 0$ *si* $g_j(\boldsymbol{x^0}) < c_j$*)* $(j = 1, \ldots, m)$.

Bibliografía

[1] Agencia Internacional de Energía (AIE) `http://www.iea.org/`

[2] Carlos Ibarra Valdez, *Notas de Cálculo de Varias Variables: Versión Preliminar*. (2008).

[3] Carsten Helm, *International emissions trading with endogenous allowance choices*. (2002).

[4] C. H. El Cajón, *Costos y Parámetros de Referencia para la Formulación de Proyectos de Inversión en el Sector Eléctrico* (2007).

[5] David G. Luenberger, *Programación Lineal y no Lineal*. Addison-Wesley (1984).

[6] Davide Dragone, Luca Lambertini, George Leitmann y Arsen Palestini, *A Stochastic Optimal Control Model of Pollution Abatement*. (2006).

[7] Estrategia Nacional para la Transición Energética y el Aprovechamiento Sustentable de la Energía (ENE) `http://www.sener.gob.mx/res/0/Estrategia.pdf`

[8] Harris Hancock, *Theory of Maxima and Minima*. Ginn and Company (1917).

[9] Instituto Nacional de Ecología (INE) `http://cambio_climatico.ine.gob.mx/comprendercc/qsehaceparamitigarelcc/ambitonacional.html`

[10] Instituto Nacional de Ecología: Inventario Nacional de Emisiones de Gases de Efecto Invernadero 1990-2002 `http://www.ine.gob.mx/descargas/cclimatico/mexico_nghgi_2002.pdf`

[11] James M. Henderson and Richard E. Quandt , *Microeconomic Theory a Mathematical Approach*. Mc Graw Hill(1980).

[12] Jared C. Carbone Carsten Helm y Thomas F. Rutherford, *International Emission Trade and Voluntary Global Warming Agreements*. (2006).

[13] Javier Márquez Diez-Canedo, *Fundamentos de Teoría de Optimización*. Limusa (1987).

[14] Katia Hernández Andrade, *Simposium Latinoamericano de la Energía: Política Energética y Medio Ambiente*. (2010).

[15] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matemáticas para el Análisis Económico*. Prentice Hall (1996).

[16] Luis Miguel Galindo, *La Economía del Cambio Climático: Síntesis*. SEMARNAT, SHCP, Gobierno Federal (1995).

[17] Mas-Colell, A., M.D. Winston y J. R. Green, *Microeconomic Theory*. Oxford University Press (1995).

[18] M. Germain, Vincent Van Steenberghe , *Innovation Under Taxes versus Permits: How a Commonly Made Assumption Leads to Misleading Policy Recommendations*. (2005).

[19] Poder Ejecutivo Federal, *Programa Especial de Cambio Climático 2008-2012*. (2009).

[20] Ross McKitrick, *A Derivation of the Marginal Abatement Cost Curve*. Journal of Environmental Economics and Management 37, 306-314 (1999).

[21] Stanley I. Grossman, *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill (2005).

[22] Susanne Soretz, *Stochastic Pollution and Environmental Care in an Endogenous Growth Model*. (2002).

[23] Todd M. Johnson, Claudio Alatorre, Zayra Romo, Feng Liu, *México: Estudio Sobre la Disminución de Carbono* . (2009).

[24] Gasca, J., Cisneros-Molina, M., Mar, E. Magdaleno, M., Melgarejo, L., Palmerín, M. E., *Cost-Benefit Analysis of CO2 Mitigation Programs in the Electricity Sector (Identificación de programas y políticas para el sector eléctrico de México que reduzcan las emisiones de gases con efecto invernadero, utilizando modelos de emisión y análisis de escenarios). Reporte Interno de Proyecto. IMP-Banco Mundial*. México (2008).

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Fecha : 12/12/2011
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES) del alumno CHRISTIAN MICHEL CURIEL ANAYA, matrícula 208381779, quien cumplió con los 147 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha doce de diciembre del 2011 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

ESTRATEGIAS OPTIMAS DE ABATIMIENTO DE EMISIONES CONTAMINANTES.

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 207 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

Secretaria

DRA. MYRIAM CISNEROS MOLINA

Vocal

DR. ERNESTO SOTO GALERA

UNIDAD IZTAPALAPA
Coordinación de Sistemas Escolares
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, DF, CP 09340 Apdo. Postal 555-320-9000, Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax: 5804-4876