

**SOBRE LA ESTRUCTURA DE CIERTAS
REPRESENTACIONES DE PRODUCTOS
SEMIDIRECTOS**

**TESIS QUE PRESENTA
GENARO ALMENDRA ARAO,
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS
JULIO DE 1989.**

UAM-I
CBI

090609

A MIS PADRES

A MIS HERMANOS

A MI ESPOSA

AGRADECIMIENTOS

090609

Deseo agradecer en forma muy especial al Dr. Leszek Pysiak por sugerirme la realización del presente trabajo, así como el haberme asesorado durante el desarrollo del mismo.

También deseo agradecer a los miembros del Jurado:

Dr. Antoni Wawrzynczyk

Dr. Felipe Zaldívar

M. en C. Jesús Chargoy

por haber aceptado ser mis sinodales.

México, D. F., Julio de 1989.

INDICE ANALITICO

Introducción	1
Terminología	iv
1. CONOCIMIENTOS PRELIMINARES	1
1.1 Medida de Haar	1
1.2 Espacios Homogéneos	3
1.3 Representaciones de grupos	5
1.4 Propiedades basicas de las representaciones de grupos compactos	14
2. REPRESENTACIONES INDUCIDAS Y SISTEMAS DE IMPRIMITIVIDAD	17
2.1 Representaciones inducidas	17
2.2 Teorema de imprimitividad	23
3. REPRESENTACIONES INDUCIDAS DE PRODUCTOS SEMIDIRECTOS	27
4. SOBRE LA ESTRUCTURA DE CIERTAS REPRESENTACIONES INDUCIDAS	34
5. LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS Y LA REPRESENTACION QUASIREGULAR	49
5.1 Grupos Cristalográficos	49
5.2 Representación quasiregular del grupo G	54
5.3 Significado físico del Teorema	62
Bibliografía	67
Indice Alfabético	69

INTRODUCCION

El presente trabajo está ubicado dentro de la Teoría de Representaciones de Grupos.

Esta teoría se inició con los trabajos de G. Frobenius durante las dos últimas décadas del siglo XIX, él introdujo para grupos finitos conceptos muy importantes como son: Representaciones Irreducibles, Descomposición de una Representación, Caracter de una representación, Representaciones Inducidas y un teorema llamado el Teorema de Reciprocidad de Frobenius el cual describe la descomposición de la representación inducida en componentes irreducibles.

Posteriormente Weyl principalmente, desarrolló la Teoría de Representaciones de Grupos Compactos Infinitos en sus primeros trabajos que son de los años 20 del presente siglo, por ejemplo el Teorema de Peter-Weyl el cual trata de la descomposición de la representación regular de un grupo compacto G en $L^2(G)$ (1927); sus trabajos estuvieron motivados por necesidades de la Física.

Muy importante también fué el desarrollo de la Teoría de Representaciones para Grupos Abelianos Localmente Compactos, uno de los teoremas centrales de esta teoría es el Teorema de Stone, Naimark, Ambrose, Godement que también describe una descomposición de una representación unitaria en componentes irreducibles las cuales en este caso son caracteres del grupo; se demostró primero por Stone para $\mathbb{R}^n$ en 1930-1932, después Naimark en 1943, Ambrose en 1944 y Godement en 1944 dieron varias extensiones del Teorema para un grupo abeliano localmente compacto arbitrario.

En los años veinte el desarrollo de la Teoría de Representaciones de Grupos estuvo determinado por la Física, los físicos se interesaron en las representaciones de grupos no compactos y sus resultados relativos a grupos de transformaciones físicas, ideas de soluciones generales a estos grupos fueron desarrolladas por J. M. Gelfand, G. Mackey, Harish-Chandra y otros.

INTRODUCCION

En la Teoría de Representaciones de Grupos existen dos problemas principales:

- 1) Dado un grupo, encontrar el conjunto de todas las representaciones irreducibles no equivalentes mutuamente.
- 2) Encontrar una descomposición de una representación de un grupo dado en sus componentes irreducibles.

En el caso de un grupo abeliano localmente compacto las representaciones irreducibles son caracteres del grupo, llamado el Grupo Dual; la solución al problema 2) para este caso la da el Teorema de SNAG.

Si el grupo es compacto, la Teoría de Weyl resuelve los dos problemas anteriores.

En el presente trabajo se consideran estos dos problemas, para grupos que son de la forma producto semidirecto.

En el capítulo 3 se describe la solución al primer problema, la cual pertenece a G. Mackey, donde todas las representaciones unitarias irreducibles se pueden obtener como representaciones inducidas por medio de una construcción geométrica. El análisis sistemático de las propiedades generales de las representaciones inducidas lo realizó G. Mackey, dió una construcción general de Representaciones Inducidas para un grupo topológico localmente compacto arbitrario y con esta construcción general probó el Teorema de Imprimitividad y el Teorema de Inducción en Etapas.

En el capítulo 4 le damos solución al problema 2) cuando el grupo es el producto semidirecto $N \rtimes H$ donde N es un grupo abeliano compacto, H un grupo finito y la representación es inducida de un subgrupo; el resultado obtenido determina las componentes que aparecen en la descomposición y sus multiplicidades. El Teorema 4.11 trata un caso particular del Teorema de la sección 9 del artículo [9], la demostración presentada es diferente y usa técnicas mas elementales que en el artículo.

INTRODUCCION

En el capítulo 5 se analizan las representaciones de grupos relacionados con grupos cristalográficos que son de la forma producto semidirecto y satisfacen las hipótesis del capítulo 4, estudiamos también algunos subespacios invariantes de la representación quasiregular para estos grupos; el Teorema 5.12 tiene un interesante significado físico.

TERMINOLOGIA

En el presente trabajo usaremos la simbología que a continuación describimos

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
$\mathbb{R}$	Campo de números reales.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de reales positivos.
$\mathbb{C}$	Campo de números complejos.
$\square$	Final de una Demostración.
$C_0(G)$	Espacio de funciones continuas sobre G con soporte compacto.
$C_0^+(G)$	Espacio de funciones continuas no negativas con soporte compacto.
T_ξ^R	Traslación derecha.
T_ξ^L	Traslación izquierda.
$L(H), B(H)$	Espacio de operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert H .
$T \sim T'$	Equivalencia de representaciones.
$\oplus$	Suma directa.
$\hat{G}$	Espacio dual del grupo G .
$\bar{\alpha}$	Conjugado de $\alpha \in \mathbb{C}$.
T^*	Operador adjunto de T .
χ_T	Caracter de la representación T .
$L^2(G)$	Espacio de funciones cuadrado integrables.
ν^L	Representación del grupo G inducida por la representación L .
ν_K^L	Representación inducida del grupo K por la representación L .
$(:)$	Forma de multiplicidad.
$\text{Aut}(N)$	Grupo de automorfismo del grupo N .
α	Producto semidirecto.

TERMINOLOGIA

$N_o \alpha H$



χL

Representación inducida de $N_o \alpha H$ por la representación χL .

$N_o \alpha H_\chi$

H_χ

Subgrupo de isotropía de χ .

$Orb(f)$

Orbita de f .

$Z\langle t_1, \dots, t_n \rangle$

Lattice generada por $t_1, \dots, t_n$.

CAPITULO 1

CONOCIMIENTOS PRELIMINARES

En el presente capítulo desarrollaremos algunos conceptos básicos importantes tales como Medida de Haar, Espacios Homogéneos, Medida Invariante, Lema de Schur, grupo dual, Teorema de SNAG y algunas propiedades básicas de representaciones de grupos compactos; que nos permitirán estudiar los temas de los capítulos siguientes, como son representaciones inducidas, sistemas de imprimitividad, representaciones inducidas de productos semidirectos y la construcción de Mackey.

§ 1. MEDIDA DE HAAR.

Introducimos el concepto importante de una medida invariante. Sean G un grupo localmente compacto, $C_0(G)$ y $C_0^+(G)$ el espacio de funciones continuas y continuas no negativas sobre G con soporte compacto respectivamente.

Una medida de Radon positiva es una funcional lineal positiva sobre $C_0(G)$ la cual es no negativa sobre $C_0^+(G)$ es decir $\mu(f) \geq 0$ para $f \in C_0^+(G)$.

Una medida de radon positiva μ que es invariante izquierda es decir

$$\mu(T_g^L f) = \mu(f)$$

donde $T_g^L f(x) = f(g^{-1}x)$; $x, g \in G$ se llama una medida de Haar izquierda.

Definimos similarmente una medida de Haar derecha λ , como

$$\lambda(T_g^R f) = \lambda(f)$$

donde $T_g^R f(x) = f(xg)$; $x, g \in G$.

TEOREMA 1.1

Cada grupo localmente compacto tiene una medida de Haar izquierda μ . Si ν es cualquier otra medida de Haar izquierda diferente de cero, entonces $\nu = c\mu$ para algún $c \in \mathbb{R}^+$.

Para una prueba de este Teorema ver [5].

Veamos que la existencia de una medida de Haar izquierda sobre G implica la existencia de una medida de Haar derecha.

Sea μ una medida de Haar izquierda sobre G , definamos la medida λ como

$$\lambda(f) = \mu(\check{f}) \text{ donde } \check{f}(x) = f(x^{-1})$$

así

$$\begin{aligned} \lambda(T_g^R f(x)) &= \mu(\check{f}(xg)) = \mu(f(g^{-1}x^{-1})) = \mu(f(x^{-1})) \\ &= \mu(\check{f}(x)) = \lambda(f(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto λ es una medida de Haar derecha. Luego por el Teorema anterior cada grupo localmente compacto tiene también una medida de Haar derecha λ definida salvo multiplicación por una constante positiva.

La medida de Haar, que es invariante izquierda e invariante derecha se llama **medida invariante**.

Sea $\mu(\cdot)$ una medida de Haar izquierda y sea

$$\mu_g(f) := \mu(T_g^R f).$$

Tenemos

$$\mu_y(T_g^L f) = \mu(T_y^R T_g^L f) = \mu(T_g^L T_y^R f) = \mu_y(f)$$

así $\mu_y(f)$ es una medida de Haar izquierda, y por el Teorema anterior concluimos que

$$\mu_y = \Delta(y)\mu.$$

Por consiguiente

$$\mu(T_y^R f) = \Delta(y)\mu(f) \tag{1.1}$$

Puesto que la función $\vartheta \longrightarrow C_0(\vartheta)$

$$y \longrightarrow T_y^R f$$

es continua, la función $\Delta(y)$ es también continua. Además, satisface la ecuación funcional

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$$

En efecto,

$$\Delta(xy)\mu(f) = \mu(T_{xy}^R f) = \mu(T_x^R(T_y^R f)) = \Delta(x)\mu(T_y^R f) = \Delta(x)\Delta(y)\mu(f)$$

La función $\Delta(x)$ se llama la función modular para el grupo G . Si $\Delta(x) = 1$, entonces por la fórmula (1.1) las medidas de Haar derecha e izquierda para el grupo G coinciden. Si este es el caso, el grupo se llama unimodular.

PROPOSICIÓN 1.2

Cada grupo compacto es unimodular.

DEMOSTRACIÓN

Si G es compacto, entonces la función $f(x) \equiv 1$, $x \in G$, está en $C_0^+(G)$; por consiguiente normalizando la medida de Haar izquierda μ por la condición $\mu(f) = 1$ obtenemos

$$\Delta(y) = \Delta(y) \cdot 1 = \Delta(y) \cdot \mu(f) = \mu(T_y^R f) = \mu(f) = 1. \quad \square$$

§ 2. ESPACIOS HOMOGÉNEOS.

DEFINICIÓN 1.1

Un espacio topológico (X, τ) es homogéneo si para cualquier pareja $x, y \in X$ existe un homeomorfismo f del espacio (X, τ) sobre sí mismo tal que $f(x) = y$.

Cada grupo topológico G es homogéneo, puesto que

cualesquiera dos puntos $x, y \in G$ pueden ser conectados por la traslación izquierda

$$y = T_a^L x = ax, \text{ donde } a = yx^{-1}$$

la cual es un homeomorfismo de G en virtud de la continuidad de la operación del grupo.

Si $H \subset G$ es un subgrupo cerrado de un grupo topológico localmente compacto G , consideramos el conjunto G/H de clases laterales izquierdas gH con $g \in G$; G/H con la topología cociente es un espacio homogéneo bajo el homeomorfismo

$$\begin{aligned} G/H &\longrightarrow G/H \\ x=gH &\longrightarrow \xi_0 gH, \xi_0 \in G. \end{aligned}$$

TEOREMA 1.3

Sea G un grupo topológico localmente compacto, que actúa transitivamente sobre un espacio localmente compacto Γ y tiene una base numerable para su topología. Sea $\gamma \in \Gamma$ y H_γ el subgrupo de isotropía de G $\left[H_\gamma = \left\{ \xi \in G \mid \xi\gamma = \gamma \right\} \right]$. Entonces

1) H_γ es cerrado en G .

2) La función $G/H_\gamma \longrightarrow \Gamma$

$$\xi H_\gamma \longrightarrow \xi \cdot \gamma$$

es un homeomorfismo.

Para una prueba ver [1].

DEFINICION 1.2

Una medida positiva $\mu(x)$ sobre $X = H \backslash G$ se dice invariante si

$$\int_X f(xg) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

El siguiente Teorema provee un criterio conveniente para la existencia de una medida invariante sobre el espacio $X = H \backslash G$.

TEOREMA 1.4

Existe una medida invariante μ sobre el espacio homogéneo $X = H \backslash G$ si y sólo si $\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$ para todo $h \in H$. Esta medida es única salvo multiplicación por constante y satisface

$$\int_G f(g) dg = \int_X d\mu(\dot{g}) \int_H f(hg) dh, \quad \dot{g} = Hg$$

Para una prueba ver [1].

§ 3. REPRESENTACIONES DE GRUPOS.

Sea G un grupo topológico unimodular, separable, localmente compacto y sea H un espacio de Hilbert complejo separable.

DEFINICIÓN 1.3

La función $x \longrightarrow T_x$ de G en el conjunto $L(H)$ de operadores lineales acotados en H se llama una representación de G en H si se cumple

$$T_{xy} = T_x T_y \quad \text{y} \quad T_e = I$$

Una representación se llama unitaria si cada T_x , $x \in G$, es un operador unitario en H , y trivial si $T_x = I$ para todo $x \in G$. A H se le llama el espacio de la representación T . Siempre supondremos que las representaciones son continuas, es decir que para todo $f \in H$ la función $x \longrightarrow T_x f$ es continua, esto significa que para cualquier $x_0 \in G$

$$\|T_x f - T_{x_0} f\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow x_0$$

para todos los vectores $f \in H$.

DEFINICIÓN 1.4

Una representación $x \longrightarrow T_x$ de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert H se dice equivalente a una

representación $x \longrightarrow T'_x$ en H' , si existe un isomorfismo acotado S de H en H' tal que $ST_x = T'_x S$ para toda $x \in G$.

Escribimos en este caso $T \sim T'$.

DEFINICIÓN 15

Dos representaciones $x \longrightarrow T_x$ en H y $x \longrightarrow T'_x$ en H' son **equivalentes unitariamente** si existe un isomorfismo unitario $U : H \longrightarrow H'$ tal que $UT_x = T'_x U$ para cada $x \in G$.

PROPOSICIÓN 15

Dos representaciones unitarias equivalentes son unitariamente equivalentes.

DEMOSTRACIÓN

Sean T y T' representaciones unitarias equivalentes, entonces por la definición 1.4 $ST_x = T'_x S$ para todo $x \in G$, por tanto $T_x^* S^* = S^* T'^*$, de donde $T_x^{-1} S^* = S^* T'^{-1}$ así $ST'_x = T_x S^*$ por consiguiente $SS^* T'_x = ST_x S^* = T'_x SS^*$, así T'_x conmuta con el operador hermitiano positivo SS^* y por tanto también con $A = \sqrt{SS^*}$. El operador $A^{-1}S$ es unitario puesto que

$$(A^{-1}S)(A^{-1}S)^* = A^{-1}SS^*A^{-1} = A^{-1}A^2A^{-1} = I$$

además satisface

$$(A^{-1}S)T = A^{-1}T'S = T'A^{-1}S$$

por lo tanto T y T' son unitariamente equivalentes. $\square$

Sea $x \longrightarrow T_x$ una representación de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert H . Un subespacio H_1 de H se llama **invariante** (con respecto a T) si $f \in H_1$ implica $T_x f \in H_1$ para cada $x \in G$.

Cada representación tiene al menos dos subespacios

invariantes: el espacio nulo $\{0\}$ y el espacio H . Estos subespacios invariantes se llaman triviales.

Los subespacios invariantes no triviales se llaman propios.

DEFINICIÓN 1.6

Una representación T de un grupo topológico G con espacio H se dice irreducible si no tiene subespacios invariantes propios.

Una representación que tiene subespacios invariantes propios se dice reducible.

Sean H un espacio de Hilbert y H_1 un subespacio invariante propio. El complemento ortogonal $H_1^\perp$ de H_1 , en general no es un subespacio invariante de H , sin embargo, si una representación $x \longrightarrow T_x$ en H es unitaria, entonces sí lo es.

PROPOSICIÓN 1.6

Sea $x \longrightarrow T_x$ una representación unitaria de un grupo G en un espacio de Hilbert H . Sea H_1 un subespacio de H y sea P_1 el operador proyección en H , con rango H_1 . Entonces

- 1) El complemento ortogonal $H_1^\perp$ de H_1 es invariante si y sólo si H_1 es invariante.
- 2) H_1 es invariante si y sólo si $P_1 T_x = T_x P_1$, para cada $x \in G$.

El siguiente ejemplo ilustra que la suposición de unitariedad en la Proposición anterior es esencial.

EJEMPLO:

Sea $G = \mathbb{R}$ y H el espacio de Hilbert bidimensional real con el producto escalar $(u,v) = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Representamos $\mathbb{R}$ en H

por las matrices triangulares no unitarias

$$x \longrightarrow T_x = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir

$$T_x \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + xu_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

se sigue de la ecuación anterior que el subespacio H_1

consistiendo de vectores $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es invariante con respecto

a T , mientras el complemento ortogonal $H_1^\perp$ consistiendo de

vectores $v = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}$ no es invariante.

Un espacio de Hilbert H se dice **suma directa** de sus subespacios $H_1, H_2, \dots$, es decir

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots = \sum_i H_i$$

si se satisfacen

1) $H_i \perp H_j$ para $i \neq j$.

2) Cada elemento $u \in H$ se descompone en la serie convergente

$$u = \sum_i u_i \text{ donde } u_i \in H_i.$$

DEFINICIÓN 1.7

Una representación T de G en un espacio de Hilbert H se dice **suma directa** de representaciones T_i de G en H_i si H_i es un subespacio invariante de H para cada i , tal que $H = \sum_i H_i$ y si cada T_i es una subrepresentación de T . Escribimos en este caso

$$T = \sum_i T_i$$

Una representación T de G en H se llama **completamente reducible** si puede expresarse como suma directa de subrepresentaciones irreducibles. Las representaciones de

dimensión finita que son reducibles pero no completamente reducibles se llaman indescomponibles (ver ejemplo anterior).

COROLARIO 1.7

Una representación unitaria de dimensión finita de cualquier grupo es completamente reducible.

DEMOSTRACIÓN

Si H_1 es un subespacio propio invariante de H , entonces por la Proposición anterior $H_1^\perp$ es también invariante y

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp.$$

Si H_1 o $H_1^\perp$ contienen un subespacio propio invariante, entonces usamos nuevamente la Proposición anterior, hasta obtener una descomposición en subespacios invariantes irreducibles de H_1 , probando que este procedimiento es finito el hecho que la representación es de dimensión finita. $\square$

La siguiente Proposición es fundamental en la teoría de representación de grupos.

PROPOSICIÓN 1.8 (LEMA DE SCHUR)

Sean T y T' representaciones irreducibles unitarias de G en H y H' , respectivamente. Si $S : H \longrightarrow H'$ es lineal y acotado tal que $ST_x = T'_x S$ para cada $x \in G$, entonces S es un isomorfismo entre los espacios de Hilbert H y H' o $S = 0$.

Para una prueba ver referencia [1].

El Lema anterior nos proporciona el siguiente criterio de irreducibilidad.

PROPOSICIÓN 1.9

Una representación unitaria T de G en H es irreducible si y solamente si los únicos operadores que conmutan con todos los T_x son múltiplos de la identidad.

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$) Si $ST_x = T_xS$, entonces $S^*T_x = T_xS^*$. Por consiguiente, los operadores autoadjuntos $S_1 = (S + S^*)/2$ y $S_2 = (S - S^*)/2i$ también conmutan con todos los T_x . Por lo tanto,

$$S = \lambda_1 I + \lambda_2 I = \lambda I$$

por la Proposición anterior.

($\Leftarrow$) Si cada operador S que conmuta con T tiene la forma λI , entonces el operador proyección P que conmuta con T es I o 0 . Por consiguiente, por la Proposición 1.6, los únicos subespacios invariantes cerrados son el espacio nulo o todo el espacio H . Así T es irreducible. $\square$

Ahora veamos la simple pero fundamental propiedad de representaciones irreducibles de grupos abelianos localmente compactos.

PROPOSICIÓN 1.10

Cualquier representación unitaria irreducible T de un grupo abeliano localmente compacto G en un espacio de Hilbert complejo H es de dimensión uno.

DEMOSTRACIÓN

Para cada $x \in G$ y $y \in G$ fijo tenemos

$$T_x T_y = T_{xy} = T_{yx} = T_y T_x$$

por consiguiente, por la Proposición 1.9

$$T_y = \alpha(y)I, \alpha(y) \in \mathbb{C}.$$

Así cualquier subespacio H_1 de dimensión 1 de H es invariante.

Pero como T es irreducible; H_1 debe coincidir con H . Por lo tanto H es de dimensión uno. $\square$

DEFINICIÓN 1.8

Un caracter de un grupo abeliano localmente compacto G es una función continua $\hat{x} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|\hat{x}(x)| = 1, \quad \hat{x}(x_1 x_2) = \hat{x}(x_1) \hat{x}(x_2) \quad (1.3)$$

se sigue de (1.3) que

$$\hat{x}(e) = 1 \text{ y } \hat{x}(x^{-1}) = \overline{\hat{x}(x)} = \hat{x}(x)^{-1}$$

Por lo tanto un caracter es una representación unitaria continua de dimensión uno de G .

El espacio dual $\hat{G}$ de un grupo arbitrario G , es el conjunto de clases de equivalencia de todas las representaciones unitarias irreducibles continuas de G .

Ahora, por la Proposición anterior para grupos abelianos, $\hat{G}$ consiste de todos los caracteres de G . $\hat{G}$ es un grupo abeliano bajo la adición, es decir, $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \gamma_2(x), \quad x \in G$$

Se puede mostrar que si G es un grupo abeliano localmente compacto, $\hat{G}$ con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos también es un grupo abeliano localmente compacto. Ver [17].

Ahora veamos un Teorema de descomposición fundamental para una representación unitaria arbitraria de un grupo abeliano.

TEOREMA 1.11 (STONE, NAIMARK, AMBROSE, GODEMENT)

Sea T una representación continua unitaria de un grupo abeliano localmente compacto G en un espacio de Hilbert H . Entonces existe sobre el grupo dual $\hat{G}$ una medida espectral $E(\cdot)$ tal que

$$T_x = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x) dE(\hat{x}) \quad (1.4)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $f \in H$. Entonces la función $x \longrightarrow (T_x f, f)$ es definida positiva; por consiguiente, por el Teorema de Bochner (ver referencia [17]), existe una medida regular finita no-negativa $\mu_{f,f}$ sobre $\hat{G}$ tal que

$$(T_x f, f) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x) d\mu_{f,f}(\hat{x})$$

y en particular,

$$\int_{\hat{G}} d\mu_{f,f}(\hat{x}) = \mu_{f,f}(\hat{G}) = (f, f)$$

usando la fórmula de polarización

$$\begin{aligned} 4(T_x f, v) &= (T_x(f+v), (f+v)) - (T_x(f-v), (f-v)) \\ &\quad + i(T_x(f+iv), (f+iv)) - i(T_x(f-iv), (f-iv)) \end{aligned}$$

para cada $f, v \in H$ existe una medida compleja finita tal que

$$(T_x f, f) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x) d\mu_{f,f}(\hat{x})$$

Ahora fijemos cualquier conjunto de Borel $B \subset \hat{G}$ y definamos la funcional $F_B(f, v) = \mu_{f,v}(B)$, la cual es hermitiana, ya que como $(Tf, v) = \overline{(T_x v, f)}$, tenemos $\mu_{f,v} = \overline{\mu_{v,f}}$, esto implica que $F_B(f, v) = \overline{F_B(f, v)}$ y claramente

$$F_B(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, v) = \lambda_1 F_B(f_1, v) + \lambda_2 F_B(f_2, v)$$

Veamos que F_B es acotada, en efecto, para $\lambda \in \mathbb{R}$ sea

$$f' := f + \lambda \mu_{v,f}(B)v$$

entonces

$$0 \leq \mu_{f',f'}(B) = \mu_{f,f}(B) + 2\lambda |\mu_{f,v}(B)|^2 + \lambda^2 |\mu_{f,v}(B)|^2 \mu_{v,v}(B)$$

lo cual implica que

$$|\mu_{f,v}(B)|^4 - \mu_{f,f}(B)\mu_{v,v}(B)|\mu_{f,v}(B)|^2 \leq 0$$

de donde

$$|\mu_{f,v}(B)|^2 \leq \mu_{f,f}(B)\mu_{v,v}(B)$$

es decir

$$|F_B(f,v)|^2 \leq \mu_{f,f}(B)\mu_{v,v}(B) \leq \|f\|^2 \|v\|^2$$

por lo tanto F_B es acotada.

Así podemos aplicar el Teorema de Riesz, para cada conjunto de Borel $B \subset \hat{G}$ existe un operador $E(B)$ sobre H tal que para cualesquiera $f, v \in H$ se tiene

$$(E(B)f, v) = F_B(f, v) = \mu_{f,v}(B) \quad (1.5)$$

ahora veamos que $E(B)^* = E(B)$. En efecto

$$\begin{aligned} (f, E(B)^* v) &= (E(B)f, v) = \mu_{f,v}(B) = \overline{\mu_{v,f}(B)} \\ &= \overline{(E(B)v, f)} = (f, E(B)v) \end{aligned}$$

además, un cálculo muestra que

$$(E(B)T_x f, v) = \int_B \hat{x}(x)(E(d\hat{x})f, v)$$

por lo tanto si para cada conjunto de Borel B_1 ponemos $Q(B_1) := E(B \cap B_1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_B \hat{x}(x)((E(d\hat{x}))f, v) &= \int_{\hat{G}} \hat{x}(x)(Q(d\hat{x})f, v) = (E(B)T_x f, v) \\ &= \int_B \hat{x}(x)(E(B)(E(d\hat{x}))f, v) \end{aligned}$$

de lo cual es fácil concluir que $E(B \cap B_1) = E(B)E(B_1)$.

Fácilmente se demuestra que la función $B \longrightarrow E(B)$ satisface las condiciones de medida espectral. Por consiguiente por la ecuación (1.5) tenemos

$$(T_x f, v) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x) d\mu_{f,v}(\hat{x}) = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x) (E(d\hat{x})f, v)$$

de donde

$$T_x = \int_{\hat{G}} \hat{x}(x)(E(d\hat{x}))$$

□

§ 4. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS REPRESENTACIONES DE GRUPOS COMPACTOS.

La teoría de representación de grupos compactos forma un puente entre la teoría de representación de grupos finitos y la de grupos no compactos. La mayoría de los teoremas para representaciones de grupos finitos tienen análogos para grupos compactos y estos teoremas a su vez son el punto de partida para la teoría de representación de grupos no compactos. En los siguientes tres teoremas G denota un grupo topológico compacto.

El siguiente Teorema muestra que en el caso de representaciones de grupos topológicos compactos podemos restringir el análisis de las representaciones a representaciones unitarias solamente.

TEOREMA 1.12

Sea T una representación arbitraria de un grupo compacto G en un espacio de Hilbert H . Entonces existe en H un nuevo producto escalar que define una norma equivalente a la inicial, relativa a la cual T define una representación unitaria de G .

El próximo resultado, importante para grupos compactos muestra que cada representación unitaria irreducible es de dimensión finita.

TEOREMA 1.13

Cada representación unitaria irreducible T de G es de dimensión finita.

TEOREMA 1.14

Cada representación unitaria T de G es suma directa de subrepresentaciones unitarias irreducibles de dimensión finita.

Para una prueba de estos últimos tres Teoremas ver [20].

DEFINICIÓN 1.9

Por el caracter de una representación de dimensión finita (T, H) de un grupo compacto G entendemos la función

$$\begin{aligned}\chi_T : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longrightarrow \text{Tr } Tg\end{aligned}$$

Las siguientes propiedades de caracteres son consecuencia directa de la definición de traza:

$$\begin{aligned}\chi_T(e) &= \dim H & \chi(g^{-1}) &= \overline{\chi(g)} \\ \chi_T(ghg^{-1}) &= \chi_T(h) & \chi_T &= \chi_{T'}, \text{ si } T \sim T'\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.10

Sea T una representación que contiene una subrepresentación irreducible S . Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T \sim nS = S \oplus \dots \oplus S$ (n -veces) se dice que la representación T es factorial de S .

Así por el Teorema 1.14 cada representación unitaria de un grupo compacto se puede escribir de manera única como suma directa de representaciones factoriales.

Definamos un operador que nos permite proyectar el espacio de Hilbert H de la representación unitaria T del grupo G , al subespacio de la representación factorial de la representación irreducible S del grupo G .

DEFINICIÓN 1.11

Para cada $h \in H$, definimos el operador

$$P_S : H \longrightarrow H$$

de la siguiente manera

$$P_S(h) = \int_G \chi_S(g^{-1}) T(g) h dg$$

donde χ_S es el caracter asociado a la representación irreducible S .

Ahora veamos un Teorema que nos proporciona la descomposición de la representación regular de un grupo compacto G sobre el espacio $L^2(G)$.

TEOREMA 1.15 (PETER-WEYL)

Sea G un grupo compacto y $(L, L^2(G))$ su representación regular. Entonces

$$L = \bigoplus_{f \in \hat{G}} n(f) U^f \quad \text{y} \quad L^2(G) = \bigoplus_{f \in \hat{G}} n(f) H^f$$

donde U^f es una representación irreducible de G en el subespacio invariante H^f de $L^2(G)$ de dimensión finita $n(f)$.

CAPITULO 2

REPRESENTACIONES INDUCIDAS Y SISTEMAS DE IMPRIMITIVIDAD

Veremos algunas propiedades fundamentales básicas de la Teoría de Representaciones Inducidas de grupos compactos, como son el Teorema de Inducción en Etapas, el Teorema de Imprimitividad y el Teorema de Reciprocidad de Frobenius; para ello comenzamos definiendo el espacio de una representación inducida.

§ 1. REPRESENTACIONES INDUCIDAS.

Sea G un grupo topológico compacto separable y K un subgrupo cerrado de G , L una representación unitaria de K en un espacio de Hilbert separable H . Sea μ la medida invariante en el espacio homogéneo $X = K \backslash G = \{ Kg \mid g \in G \}$. Ahora definamos el siguiente espacio.

DEFINICIÓN 2.1

H^L es el conjunto de todas las funciones $f : G \longrightarrow H$ que satisfacen

- i) $\langle f(g), v \rangle$ es medible (relativa a dg) para todo $v \in H$.
- ii) $f(kg) = L_k f(g)$, para todo $k \in K$ y todo $g \in G$.
- iii) $\int_X \|f(g)\|^2 d\mu(g) < \infty$, $g = Kg$, donde $\|f(g)\|$ es la norma en el espacio H .

Veamos que H^L es isomorfo al espacio de Hilbert $L^2(X, \mu, H)$.

PROPOSICIÓN 2.1

El espacio H^L es isomorfo al espacio de Hilbert $L^2(X, \mu, H)$ de funciones de cuadrado integrable con dominio X y valores en el espacio de Hilbert H .

Ahora construyamos una representación unitaria de G en el espacio de Hilbert H^L .

TEOREMA 2.2

La función $\mathcal{U}^L : G \longrightarrow B(H^L)$ dada por

$$\mathcal{U}^L(\xi_0)f(\xi) := f(\xi\xi_0)$$

es una representación unitaria de G . Denotaremos $\mathcal{U}^L(\xi_0)$ también por $\mathcal{U}_{\xi_0}^L$.

DEMOSTRACIÓN

$\mathcal{U}_{\xi}^L$ es un homomorfismo

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{U}_{\xi_1}^L \mathcal{U}_{\xi_2}^L \right) f(\xi) &= \mathcal{U}_{\xi_1}^L \left(\mathcal{U}_{\xi_2}^L f \right)(\xi) = \left(\mathcal{U}_{\xi_2}^L f \right)(\xi\xi_1) \\ &= f(\xi\xi_1\xi_2) = \mathcal{U}_{\xi_1\xi_2}^L f(\xi) \end{aligned}$$

El operador $\mathcal{U}_{\xi_0}^L$ es isométrico y posee un inverso $\left(\mathcal{U}_{\xi}^L \right)^{-1} = \mathcal{U}_{\xi^{-1}}^L$ por tanto $\mathcal{U}_{\xi}^L$ es unitario. $\square$

DEFINICIÓN 2.2

A la representación $\mathcal{U}^L$ dada en el Teorema anterior se le llama la representación de G inducida por L .

El siguiente Teorema llamado Teorema de inducción en etapas será muy útil en el Capítulo 4.

TEOREMA 2.3

Sean N y K subgrupos cerrados de un grupo compacto separable G , tal que $N \subset K$. Sea L una representación de N y $V = {}_K \mathcal{U}^L$. Entonces ${}_O \mathcal{U}^L \sim {}_O \mathcal{U}^V$.

Para una prueba de este resultado véase [1].

PROPOSICIÓN 2.4

Sean K un subgrupo de G , T y S dos representaciones unitarias de K tal que $(T, \mathcal{T}) \sim (S, S)$. Entonces

$$\left[\begin{array}{c} T \\ {}_O \mathcal{U}, \mathcal{T} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} S \\ {}_O \mathcal{U}, S \end{array} \right]$$

DEMOSTRACIÓN

Como $T \sim S$, existe $\Psi : \mathcal{T} \longrightarrow S$ isomorfismo tal que

$$\Psi T(h) = S(h) \Psi.$$

Deseamos ver que existe $\bar{\Psi} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ isomorfismo tal que

$$\bar{\Psi} \mathcal{U}^T(\xi) = \mathcal{U}^S(\xi) \bar{\Psi}$$

Basta definir $\bar{\Psi}(\mu)(\xi) = \Psi(\mu(\xi))$; $\bar{\Psi}$ es isomorfismo puesto que Ψ lo es. Ahora

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \mathcal{U}^T(\xi) \mu(\bar{\xi}) &= \bar{\Psi} \mu(\bar{\xi} \xi) = \Psi(\mu(\bar{\xi} \xi)) = (\Psi \circ \mu)(\bar{\xi} \xi) \\ &= \mathcal{U}^S(\xi) (\Psi \circ \mu)(\bar{\xi}) = \mathcal{U}^S(\xi) \bar{\Psi} \mu(\bar{\xi}). \end{aligned}$$

□

TEOREMA 2.5

Sean S un subgrupo cerrado de un grupo compacto G , (V, γ) una representación unitaria de S , la cual se descompone en una suma directa

$$V = \bigoplus_{\alpha \in A} V_{\alpha} \quad \text{y} \quad \gamma = \bigoplus_{\alpha \in A} \gamma_{\alpha} \quad \left[V_{\alpha} = V|_{\gamma_{\alpha}} \right]$$

donde A es un conjunto numerable y γ_{α} es S -invariante para cada $\alpha \in A$. Entonces

$${}_O \mathcal{U}^V = \bigoplus_{\alpha \in A} {}_O \mathcal{U}^{V_{\alpha}} \quad \text{y} \quad {}_O \gamma^V = \bigoplus_{\alpha \in A} {}_O \gamma_{\alpha}^{V_{\alpha}}$$

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que si $f \in \gamma^V$ entonces $f(sg) \in \gamma$ para $s \in S$ y $g \in G$. Así

$$\begin{aligned} f(sg) &= \left[f_{\alpha_1}(sg), f_{\alpha_2}(sg), \dots \right] \\ &= \left[v_{\alpha_1}(g)f_{\alpha_1}(s), v_{\alpha_2}(g)f_{\alpha_2}(s), \dots \right] \\ &= \left[u^{\alpha_1}(g)f_{\alpha_1}(s), u^{\alpha_2}(g)f_{\alpha_2}(s), \dots \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u^V(\xi_0)f(\xi) &= u^V(\xi_0) \left[f_{\alpha_1}(\xi), f_{\alpha_2}(\xi), \dots \right] \\ &= \left[f_{\alpha_1}(\xi\xi_0), f_{\alpha_2}(\xi\xi_0), \dots \right] \\ &= \left[v_{\alpha_1}(\xi_0)f_{\alpha_1}(\xi), v_{\alpha_2}(\xi_0)f_{\alpha_2}(\xi), \dots \right] \\ &= \left[u^{\alpha_1}(\xi_0)f_{\alpha_1}(\xi), u^{\alpha_2}(\xi_0)f_{\alpha_2}(\xi), \dots \right] \end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.6

Si la representación u^L de G , inducida por una representación L de un subgrupo K es irreducible, entonces la representación L también es irreducible.

DEMOSTRACIÓN

Si L fuese reducible, podría escribirse como una suma directa $L = L^1 \oplus L^2$, esto implica por el Teorema anterior que $u^L = u^{L^1} \oplus u^{L^2}$, lo cual contradice que u^L es irreducible. □

El siguiente Teorema nos proporciona la dimensión de la representación inducida u^L para una representación L de un subgrupo K de un grupo finito G .

TEOREMA 2.7

La dimensión de la representación $\mathcal{U}^L$ es el producto de la dimensión del espacio H y el índice del subgrupo K en G .

DEMOSTRACIÓN

Sea k el índice de K en G y $g_1, \dots, g_k$ los representantes de las k diferentes clases laterales Kg_i . Consideremos la función

$$p : H \xrightarrow{L} \bigoplus_{i=1}^k V_i \text{ con } V_i = H, \text{ dada por}$$

$$f \longrightarrow (f(g_1), \dots, f(g_k))$$

afirmamos que p es un isomorfismo lineal; claramente p es un homomorfismo lineal, veamos que es isomorfismo. Sean $f, h \in H^L$ tal que $p(f) = p(h)$, entonces $f(g_i) = h(g_i)$ para $i=1, \dots, k$ y como

$$f(kg_i) = L(k) f(g_i) = L(k) h(g_i) = h(kg_i)$$

tenemos que $f = h$. □

La siguiente Proposición describe la estructura del espacio de una representación inducida.

PROPOSICIÓN 2.8

Sean $\omega : G \longrightarrow H$ una función continua con soporte compacto y

$$\hat{\omega}(g) \equiv \int_K L_k^{-1} \omega(kg) dk \quad (2.1)$$

donde dk es una medida de Haar invariante derecha en K . Entonces

1) $\hat{\omega}(g)$ es una función continua con soporte compacto en $K \backslash G$, es decir $\pi(\text{sop } \hat{\omega})$ es compacto en $X = K \backslash G$ donde $\pi : G \longrightarrow X$ es la proyección canónica.

2) $\hat{\omega}(g)$ pertenece a H^L .

3) El conjunto $C_0^L = \{ \hat{\omega}(g) : \omega(g) = \lambda(g)v, \lambda(g) \in C_0(G), v \in H \}$ forma un conjunto denso en H^L .

DEMOSTRACIÓN

1) Cada función continua $\omega(g)$ sobre G con soporte compacto D es uniformemente continua, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una vecindad compacta V de la identidad, tal que

$$g_1^{-1}g_2 \in V \text{ implica } \|\omega(g_1) - \omega(g_2)\| < \varepsilon.$$

Sean $g_0 \in G$ y $g \in g_0 V$. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(g) - \hat{\omega}(g_0) &= \int_K \left[L_k^{-1} \omega(kg) dk - L_k^{-1} \omega(kg_0) \right] dk \\ &= \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} L_k^{-1} (\omega(kg) - \omega(kg_0)) dk.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|\hat{\omega}(g) - \hat{\omega}(g_0)\| \leq \int_{K \cap DV^{-1}g_0^{-1}} \|\omega(kg) - \omega(kg_0)\| dk < \varepsilon m_K \left(K \cap DV^{-1}g_0^{-1} \right)$$

es decir $\hat{\omega}(g)$ es una función continua sobre G .

2) Para cualquier $k_0 \in K$ tenemos

$$\hat{\omega}(k_0 g) = \int_K L_k^{-1} \omega(kk_0 g) dk = \int_K L_{\tilde{k}k_0}^{-1} \omega(\tilde{k}g) d\tilde{k} = L_{k_0} \hat{\omega}(g)$$

además, se sigue de la ecuación (2.1) que $\hat{\omega}(g) = 0$ si $g \in KD$. Así, $\|\omega(g)\|$ es una función continua de g con soporte $\pi(D)$. Por tanto las condiciones de la definición 2.1 se satisfacen y $\hat{\omega} \in H^L$.

3) Sea $f \in H^L$ tal que $(f, \hat{\omega})_{H^L} = 0$.

Así tenemos

$$(f(g), \hat{\omega}(g))_H = \int_K (f(g), L_k^{-1} \omega(kg))_H dk = \int_K (f(kg), \omega(kg))_H dk$$

sea $\omega(g) = \lambda(g)v$, donde $\lambda \in C_0(G)$. Entonces

$$(f(g), \hat{\omega}(g))_H = \int_K \lambda(kg) (f(kg), v)_H dk$$

$$(f, \hat{\omega})_{H^L} = \int_{K \setminus G} \left[\int_K \lambda(kg) (f(kg), v)_H dk \right] d\mu(g)$$

Entonces usando el Teorema 1.4 obtenemos

$$(f, \hat{\omega})_H^L = \int_G \lambda(g)(f(g), v) \rho(g) dg = 0$$

Puesto que λ es arbitrario, esta ecuación implica que $(f(g), v) = 0$ excepto en un conjunto $N_v \subset G$ de medida cero. Sean $\{v_n\}$ una sucesión densa en H y $N = \bigcup_n N_{v_n}$. Puesto que N es de medida cero, para $g \notin N$ tenemos $(f(g), v_n)_H = 0$ para cada n . Por tanto $f(g) = 0$. $\square$

§ 2. TEOREMA DE IMPRIMITIVIDAD.

DEFINICIÓN 2.3

Sea X un G -espacio y U una representación unitaria de G en un espacio de Hilbert H . Si $E(Z)$, $Z \subset X$, es una medida espectral con valores en $\mathcal{L}(H)$, tal que

$$U_g E(Z) U_g^{-1} = E(Z_g^{-1})$$

entonces $E(Z)$ se llama un sistema de imprimitividad para U basado sobre X . Si la base X es transitiva bajo G , $E(Z)$ se llama un sistema transitivo de imprimitividad. Una representación que tiene al menos un sistema de imprimitividad se dice imprimitiva.

Ahora veremos el Teorema de Imprimitividad, el cual nos afirma que a cada representación inducida se le puede asociar un sistema transitivo de imprimitividad y que una representación unitaria que posee un sistema transitivo de imprimitividad es unitariamente equivalente a una representación inducida.

PROPOSICIÓN 2.9

A cada representación inducida de un grupo separable compacto G se le puede asociar un sistema transitivo de

imprimitividad.

DEMOSTRACIÓN

Sea K un subgrupo cerrado del grupo G , L una representación unitaria de K en un espacio de Hilbert H y $\mathcal{U}^L$ la representación inducida de G en H^L . Sea Z un subconjunto de Borel de $X = K \backslash G$ y χ_Z la función característica del conjunto Z . Para cualquier $f \in H^L$ sea

$$(E(Z)f)(\dot{g}) := \chi_Z(\dot{g})f(\dot{g}), \quad \dot{g} = Kg$$

veamos que $E(Z)f \in H^L$.

En efecto: $E(Z)f$ es medible puesto que Z es medible y f también. Además, para $k \in K$, tenemos

$$E(Z)f(k\dot{g}) = \chi_Z(\dot{g})f(k\dot{g}) = L_k(\chi_Z(\dot{g})f(\dot{g})) = L_k E(Z)f(\dot{g})$$

y también

$$\begin{aligned} \int_X \|\chi_Z(\dot{g})f(\dot{g})\|^2 d\mu(\dot{g}) &= \int_X \chi_Z(\dot{g}) \|f(\dot{g})\|^2 d\mu(\dot{g}) \\ &= \int_Z \|f(\dot{g})\|^2 d\mu(\dot{g}) < \infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente hemos visto que $E(Z)f$ satisface las condiciones de la Definición 2.1 y por tanto pertenece a H^L .

Además, se sigue de la definición de $E(Z)$ que

$$\begin{aligned} E(X) &= I, \quad E(\emptyset) = 0, \quad E(Z_1 \cap Z_2) = E(Z_1)E(Z_2), \\ E(Z_1 \cup Z_2 \cup \dots) &= E(Z_1) + E(Z_2) + \dots \end{aligned}$$

Así la función $X \longrightarrow \mathcal{E}(H^L)$

$$Z \longmapsto E(Z)$$

define sobre el espacio X una medida espectral.

Ahora

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{U}_{g_0}^L E(Z) \mathcal{U}_{g_0^{-1}}^L f \right)(\dot{g}) &= \left(E(Z) \mathcal{U}_{g_0^{-1}}^L f \right)(\dot{g} \dot{g}_0) = \chi_Z(\dot{g} \dot{g}_0) \left(\mathcal{U}_{g_0^{-1}}^L f \right)(\dot{g} \dot{g}_0) \\ &= \chi_Z(\dot{g} \dot{g}_0) f(\dot{g}) = \chi_{Zg_0^{-1}}(\dot{g}) f(\dot{g}) = E(Zg_0^{-1}) f(\dot{g}) \end{aligned}$$

Así $\mathcal{U}_g^L E(Z) \mathcal{U}_g^{L-1} = E(Zg^{-1})$.

Por lo tanto hemos visto lo deseado. $\square$

TEOREMA 2.10

Sea U una representación continua unitaria de G en un espacio de Hilbert H , $X = K \backslash G$ y $E : C_0(X) \longrightarrow L(H)$ un homomorfismo tal que

$$U_g E(\Psi) U_g^{-1} = E(T_g^R \Psi), \quad g \in G, \Psi \in C_0(X)$$

Entonces existe una única (hasta equivalencia unitaria) representación unitaria continua L de K en un espacio de Hilbert H^L tal que la pareja (U, E) es unitariamente equivalente a la pareja $(\mathcal{U}^L, E^L)$, es decir existe un operador unitario $V : H \longrightarrow H^L$ tal que

$$V U_g = \mathcal{U}_g^L V, \quad g \in G$$

y

$$V E(\Psi) = E^L(\Psi) V, \quad \Psi \in C_0(X)$$

DEFINICIÓN 2.4

Si T y T' son representaciones unitarias irreducibles del grupo compacto G , definimos la forma de multiplicidad $(:)$ de la siguiente manera

$$(T : T') = \begin{cases} 1 & \text{si } T \sim T' \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por el Teorema 1.14 la definición anterior se puede extender por linealidad a cualquier representación unitaria del grupo compacto G , de esta manera la forma de multiplicidad $(:)$ es bilineal.

Consideremos las operaciones:

$$\text{Ind} : \text{Rep}(K) \longrightarrow \text{Rep}(G)$$

la cual asocia a cada representación unitaria de K la representación inducida de G y

$$\text{Res} : \text{Rep}(G) \longrightarrow \text{Rep}(K)$$

que asocia a cada representación unitaria de G la misma representación restringida al subgrupo K .

Ahora veamos el Teorema de Frobenius, el cual nos relaciona las dos operaciones anteriores y la forma de multiplicidad.

TEOREMA 2.11 (FROBENIUS)

Sean G un grupo compacto, K un subgrupo cerrado de G , T y S representaciones unitarias irreducibles de K y G , respectivamente. Entonces la operación Ind es adjunta a la operación Res con respecto a la forma de multiplicidad, es decir

$$(\text{Ind } T : S)_G = (T : \text{Res } S)_K .$$

Para una demostración véase [19].

CAPITULO 3

REPRESENTACIONES INDUCIDAS DE PRODUCTOS SEMIDIRECTOS

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar un procedimiento para mostrar que en el caso de representaciones inducidas de productos semidirectos cada representación unitaria irreducible de $G = N \rtimes S$ es inducida de un subgrupo no trivial de G , a esta construcción se le llama la construcción de Mackey.

En este capítulo suponemos que N es un grupo abeliano y que o y e son los elementos identidad en N y S , respectivamente.

DEFINICIÓN 3.1

Sean N y S subgrupos localmente compactos. En el conjunto $N \times S$ definimos la operación del grupo mediante:

$$(n_1, s_1)(n_2, s_2) = (n_1 + \tau_{s_1}(n_2), s_1 s_2)$$

donde $\tau : S \longrightarrow \text{Aut}(N)$ es un homomorfismo, a este grupo se le denomina el producto semidirecto de N y S , y se denota por $N \rtimes S$.

Sea T una representación unitaria de G , U y V las restricciones de T a N y S respectivamente, puesto que $(n, s) = (n, e)(o, s)$, para todo $n \in N$ y $s \in S$, tenemos que $T = UV$. Así, una representación T de G está determinada completamente por sus restricciones U y V a los subgrupos N y S , respectivamente. Ahora la ley de composición en G

$$(n_1, s_1)(n_2, s_2) = (n_1 + s_1(n_2), s_1 s_2) \text{ donde } s_1(n_2) := \tau_{s_1}(n_2)$$

implica que las representaciones U y V deben satisfacer la siguiente ecuación

$$U_{n_1} V_{s_1} U_{n_2} V_{s_2} = U_{n_1} U_{s_1(n_2)} V_{s_1} V_{s_2}$$

la cual se reduce a

$$V_{s_1} U_{n_1} V_{s_1}^{-1} = U_{s_1(n_1)} \quad (3.1)$$

Ahora mostraremos que si T es una representación unitaria entonces la ecuación anterior es equivalente a la existencia de un sistema de imprimitividad para T .

En efecto, por el Teorema de SNAO (1.11)

$$U(n) = \int_{\hat{N}} \hat{n}(n) dE(\hat{n})$$

donde $E(\hat{n})$ es una medida espectral sobre $\hat{N}$ y por la ecuación (3.1), puesto que $\hat{n}s(n) = \hat{n}(s(n))$, obtenemos

$$\begin{aligned} V_{s_1} U_{n_1} V_{s_1}^{-1} &= U_{s_1(n_1)} = \int_{\hat{N}} \hat{n}(s(n_1)) dE(\hat{n}) = \int_{\hat{N}} \hat{n}s(n_1) dE(\hat{n}) \\ &= \int_{\hat{N}} \hat{n}(n) dE(\hat{n}s^{-1}). \end{aligned}$$

pero a su vez

$$V_{s_1} U_{n_1} V_{s_1}^{-1} = V_{s_1} \left[\int_{\hat{N}} \hat{n}(n) dE(\hat{n}) \right] V_{s_1}^{-1} = \int_{\hat{N}} \hat{n}(n) d[V_{s_1} E(\hat{n}) V_{s_1}^{-1}].$$

Así

$$\int_{\hat{N}} \hat{n}(n) dE(\hat{n}s^{-1}) = \int_{\hat{N}} \hat{n}(n) d[V_{s_1} E(\hat{n}) V_{s_1}^{-1}]$$

Ahora puesto que los caracteres separan los puntos de N , la ecuación anterior implica que

$$V_{s_1} E(Z) V_{s_1}^{-1} = E(Zs^{-1}) \quad (3.2)$$

para cada conjunto de Borel $Z \subset \hat{N}$. Así, $E(Z)$ es un sistema de imprimitividad para una representación V basada sobre el espacio dual $\hat{N}$. Puesto que

$$U_n E(Z) U_n^{-1} = E(Z) \quad (3.3)$$

de las ecuaciones (3.2) y (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} T(n, s) E(Z) T^{-1}(n, s) &= U_n V_{s_1} E(Z) V_{s_1}^{-1} U_n^{-1} \\ &= U_n E(Zs^{-1}) U_n^{-1} = E(Zs^{-1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

lo que significa que $E(Z)$ forma un sistema de imprimitividad para la representación T de $G = N \rtimes S$. $\square$

NOTACION:

El conjunto de todos los $\hat{n}$ s para un $\hat{n} \in \hat{N}$ dado y todo $s \in S$. Se llama la órbita del caracter $\hat{n}$ y es denotada por $\hat{O}_{\hat{n}}$. Suponemos que la topología sobre la órbita $\hat{O}_{\hat{n}}$ fué elegida de tal manera que es un espacio localmente compacto. Es evidente que dos órbitas $\hat{O}_{\hat{n}_1}$ y $\hat{O}_{\hat{n}_2}$ coinciden o son disjuntas. Por lo tanto el espacio dual $\hat{N}$ se descompone en conjuntos mutuamente ajenos $\hat{O}_{\hat{n}}$.

DEFINICIÓN 3.2

Decimos que el producto semidirecto $G = N \rtimes S$ es regular si $\hat{N}$ contiene una familia numerable $Z_1, Z_2, \dots$ de subconjuntos de Borel, cada uno unión de G -órbitas, tal que cada órbita en $\hat{N}$ es la intersección de los miembros de una subfamilia $Z_{n_1}, Z_{n_2}, \dots$ que contienen esta órbita. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la intersección de un número finito de Z_i es un elemento de la familia $\{Z_i\}_1^\infty$. Esto es equivalente a la suposición de que cada órbita es el límite de una sucesión decreciente $\{Z_{n_i}^n\} \subset \{Z_i\}_1^\infty$, es decir, $Z_{n_i}^n \searrow \hat{O}_{\hat{n}}$.

La mayoría de los productos semidirectos interesantes que ocurren en aplicaciones físicas son regulares.

PROPOSICIÓN 3.1

Sea T una representación unitaria de un producto semidirecto regular $G = N \rtimes S$, sea $E(\cdot)$ la medida a valores proyectivos asociada con la restricción T_N de la representación T a N . Entonces, si T es irreducible existe una órbita $\hat{O}_{\hat{n}}$ tal que $E(\hat{O}_{\hat{n}}) = I$ y $E(\hat{N} - \hat{O}_{\hat{n}}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que cada conjunto Z_i es unión de órbitas, entonces $Z_i g = Z_i$, para todo $g \in G$. La irreducibilidad de T implica por la ecuación (3.2) y Lema de Schur, que $E(Z_i) = 0$ o I . Ahora veamos que para cada órbita $\hat{O}_{\hat{N}} \subset \hat{N}$, $E(\hat{O}_{\hat{N}}) = 0$ o I . Supongamos que $E(\hat{O}_{\hat{N}}) = 0$ para todas las órbitas $\hat{O}_{\hat{N}}$. Puesto que la órbita es el límite $Z_{n_i}^n \searrow \hat{O}_{\hat{N}}$ y la medida $E(\cdot)$ es contablemente aditiva

$$E\left(\bigcap_i Z_{n_i}^n\right) = \prod_i E\left(Z_{n_i}^n\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} E\left(Z_{n_i}^n\right)$$

obtenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E\left(Z_{n_i}^n\right) = E(\hat{O}_{\hat{N}}) = 0$$

Así para cada órbita $\hat{O}_{\hat{N}}$ existe un elemento $Z_{n_i}^n \supset \hat{O}_{\hat{N}}$ de medida cero. Entonces puesto que a $\hat{N}$ lo podemos cubrir por una colección de tales $Z_{n_i}^n$, obtenemos que $E(\hat{N}) = 0$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente existe al menos una órbita $\hat{O}_{\hat{N}}$ tal que $E(\hat{O}_{\hat{N}}) = I$. Si existiesen dos órbitas satisfaciendo la condición $E(\hat{O}_{\hat{N}_i}) = I$, $i = 1, 2$; entonces

$$E\left(\hat{O}_{\hat{N}_1} \cup \hat{O}_{\hat{N}_2}\right) = E\left(\hat{O}_{\hat{N}_1}\right) + E\left(\hat{O}_{\hat{N}_2}\right) = 2I$$

pero $E(\hat{N}) = I$. Por lo tanto la medida espectral $E(\cdot)$ está concentrada solamente sobre una órbita $\hat{O}_{\hat{N}}$. $\square$

LEMA 3.2

La restricción L_N de una representación irreducible L de $N \rtimes S_{\hat{O}}$ al subgrupo N es una representación unidimensional, es decir,

$$L_N(n)f = \hat{n}_O(n)f$$

donde $f \in H$ y $\hat{n}_O$ es un elemento de $\hat{O} \subset \hat{N}$ que tiene el subgrupo de isotropía $N \rtimes S_{\hat{O}}$.

DEMOSTRACIÓN

Por el Teorema de Imprimitividad 2.10, la representación irreducible U de $N \rtimes S$ es unitariamente equivalente a una representación inducida $\mathcal{U}^L$, donde L es una representación del subgrupo $N \rtimes S_0$ y por el Corolario 2.6, L es irreducible. La acción de $\mathcal{U}^L|_N$ está dada en $H^L = L^2(\hat{O}, \mu, H)$ por

$$\mathcal{U}_N^L f(\hat{n}) = L(sns^{-1})f(\hat{n}) \quad (3.5)$$

donde $\hat{n}_0 s = \hat{n}$.

Por otro lado, por el Teorema SNA0 (1.11) para $f, v \in H^L$ tenemos

$$(\mathcal{U}_N^L f, v) = \int_{\hat{N}} \hat{n}(n) d\mu_{f,v}(\hat{n}) = \int_{\hat{O}} \hat{n}(n) [f(\hat{n}), v(\hat{n})]_H d\mu(\hat{n}) \quad (3.6)$$

por la Proposición 2.8 podemos poner

$$f(\hat{n}) = \alpha(\hat{n})f, \quad v(\hat{n}) = \beta(\hat{n})v, \quad \alpha, \beta \in L^2(\hat{O}, \mu), \quad f, v \in H.$$

Entonces las ecuaciones (3.5) y (3.6) implican

$$\int_{\hat{O}} \hat{n}(n) \alpha(\hat{n}) \bar{\beta}(\hat{n}) (f, v)_H d\mu(\hat{n}) = \int_{\hat{O}} \alpha(\hat{n}) \bar{\beta}(\hat{n}) [L(sns^{-1})f, v]_H d\mu(\hat{n})$$

Por lo tanto $L(sns^{-1})f = \hat{n}(n)f$ para todo $n \in N$, $f \in H$ y casi todo $\hat{n} \in \hat{O}$. Si $\hat{n} = \hat{n}_0 s$ tal que la fórmula anterior se cumple y recordando que $\hat{n}_0 s(n) = \hat{n}_0(sns^{-1})$ obtenemos $L_N(n)f = \hat{n}_0(n)f$. $\square$

LEMA 3.3

Cada representación unitaria irreducible L de $N \rtimes S_0$ está determinada y determina una representación unitaria irreducible L' de S_0 .

DEMOSTRACIÓN

Sea L' una representación unitaria de S_0 . Afirmamos que la función

$$(n, s_0) \longrightarrow L(n, s_0) := \hat{n}_0(n) L'(s_0) \quad (3.7)$$

donde $\hat{n}_0 s_0 = \hat{n}_0$ para todo $s_0 \in S_0$, es una representación unitaria $N \rtimes S_0$. En efecto

$$\begin{aligned}
L \left[(n, s_0)(n', s'_0) \right] &= L \left[n+s_0(n'), s_0 s'_0 \right] = \hat{n}_0(n+s_0(n')) L'(s_0 s'_0) \\
&= \hat{n}_0(n) \hat{n}_0(s_0(n')) L'(s_0) L'(s'_0) = \hat{n}_0(n) L'(s_0) \hat{n}_0(s_0(n')) L'(s'_0) \\
&= L(n, s_0) L(n', s'_0).
\end{aligned}$$

y

$$L^*(n, s_0) = \overline{\hat{n}_0(n) L'(s_0)} = \hat{n}_0(-n) L'^{-1}(s_0) = L^{-1}(n, s_0).$$

Si L' es irreducible, entonces L es también irreducible.

Inversamente; por la ecuación (3.7) cada representación irreducible L de $N \rtimes S_{\hat{0}}$ define una representación unitaria irreducible de $S_{\hat{0}}$. $\square$

TEOREMA 3.4

Sea G un producto semidirecto $N \rtimes S$ de grupos localmente compactos separables N y S , N abeliano. Sea T una representación unitaria irreducible de G . Entonces

- 1) Podemos asociar con T una órbita $\hat{0}$ en $\hat{N}$.
- 2) La representación T es unitariamente equivalente a una representación inducida $\mathcal{U}^{\hat{n}L}$, donde L es una representación unitaria irreducible de $S_{\hat{0}}$ en un espacio de Hilbert H y $\hat{n} \in \hat{0}$.

DEMOSTRACIÓN

Por la Proposición 3.1 la medida espectral $E(\cdot)$ asociada con la restricción de T a N está concentrada sobre una órbita $\hat{0}$. Además por la ecuación (3.4) y el Teorema de Imprimitividad 2.10, T es unitariamente equivalente a una representación $\mathcal{U}^{\hat{L}}$ inducida por una representación $\hat{L}$ del subgrupo $N \rtimes S_{\hat{0}}$. Finalmente por los Lemas 3.2 y 3.3, $\hat{L}$ es de la forma $\hat{n}L$, donde L es una representación unitaria irreducible del subgrupo $S_{\hat{0}}$. $\square$

La irreducibilidad de una representación unitaria L no garantiza en general la irreducibilidad de la representación

inducida $\mathcal{U}^L$. Sin embargo en el caso de grupos que son productos semidirectos, el siguiente Teorema afirma que la irreducibilidad de L implica la irreducibilidad de la representación inducida $\mathcal{U}^L$.

TEOREMA 3.5

Sea G un producto semidirecto regular $N \rtimes S$ de grupos localmente compactos separables N y S , y sea N abeliano. Entonces para cada órbita $\hat{O}$ en $\hat{N}$ y para cada representación unitaria irreducible $\hat{n}L$ del subgrupo $N \rtimes S_{\hat{O}}$ donde $\hat{n} \in \hat{O}$ la representación inducida $\mathcal{U}^{\hat{n}L}$ del grupo $N \rtimes S$ es irreducible.

Para una demostración ver [1].

CAPITULO 4

SOBRE LA ESTRUCTURA DE CIERTAS REPRESENTACIONES INDUCIDAS

Sabemos de la construcción de Mackey que las representaciones unitarias irreducibles de los productos semidirectos pueden escribirse en la forma $\mathcal{U}^L$ donde L es una representación irreducible de un subgrupo. Por otro lado $\mathcal{U}^L$ no necesariamente es irreducible cuando L lo es y hay muchos problemas en Matemáticas y Física-Matemática cuya resolución depende de analizar una representación de la forma $\mathcal{U}^L$ en sus componentes irreducibles. Mostraremos que una solución completa al problema de la descomposición de la representación $\mathcal{U}^T$ puede darse en el caso en que el grupo es un producto semidirecto $N \rtimes H$, donde N es un grupo abeliano y compacto, H un grupo finito y T es una representación de un subgrupo. Cabe decir que la demostración presentada aquí es diferente de la dada por G. W. Mackey en [9] para un caso más general, en la cual se usan conocimientos matemáticos más avanzados.

Durante el presente capítulo N denotará un grupo compacto abeliano, N_0 un subgrupo cerrado de N y H un grupo finito.

Sea T una representación unitaria irreducible de $N_0 \rtimes H$.

En este capítulo describiremos la descomposición de la representación inducida $\mathcal{U}^T$ de $G = N \rtimes H$.

Por la construcción de Mackey de representaciones irreducibles de un producto semidirecto (ver Capítulo 3), a la

representación irreducible T de $N_0 \rtimes H$ la podemos realizar como una representación inducida, de la siguiente manera:

Le asociamos un carácter $\chi \in \hat{N}_0$, el grupo de isotropía H_χ y una representación irreducible L de H_χ tal que

$$T \sim \begin{array}{c} N_0 \rtimes H \\ \uparrow \mathcal{U} \chi^L \\ N_0 \rtimes H_\chi \end{array}$$

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de la representación inducida $\mathcal{U}^T$, definamos $I : \mathcal{V} \longrightarrow \{ \text{funciones de } N \text{ en el espacio de } L \}$ como $I(F) = \Psi$ donde $\Psi(n) = F(n, 1)$, y el espacio $\bar{\mathcal{V}} := I\mathcal{V}$, demostremos que $\mathcal{V}$ y $\bar{\mathcal{V}}$ son isomorfos.

PROPOSICIÓN 4.1

La función I definida antes establece un isomorfismo de $\mathcal{V}$ a $\bar{\mathcal{V}}$.

DEMOSTRACIÓN

I es inyectiva: sea $f \in \mathcal{V}$ tal que $I(F) = 0$, entonces $F(n, 1) = 0$ para todo $n \in N$, así

$$F(n, h) = F((0, h)(h^{-1}n, 1)) = L_h F(h^{-1}n, 1) = L_h(0) = 0$$

esto implica que $F \equiv 0$.

I es sobre por la definición del espacio $\bar{\mathcal{V}}$ y claramente es homomorfismo de espacios vectoriales. $\square$

La Proposición anterior nos permite trasladar la representación

$$V := \begin{array}{c} N \rtimes H_\chi \\ \uparrow \mathcal{U} \chi^L \\ N_0 \rtimes H_\chi \end{array}$$

a una representación $\bar{V}$ definida en el espacio $\bar{\mathcal{V}}$ tal que

$$\bar{V}(\bar{n}, \bar{h}) \Psi(n) = V(\bar{n}, \bar{h}) F(n, 1)$$

OBSERVACIÓN 4.2

Si Ψ es un elemento del espacio $\bar{\gamma}$, entonces

$$\Psi(n+n') = \chi(n')\Psi(n)$$

para $n' \in N_0$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\Psi(n+n') &= F(n+n', 1) = F((n', 1)(n, 1)) \\ &= \chi(n')F(n, 1) = \chi(n')\Psi(n).\end{aligned}$$

□

Definimos el siguiente operador para cada $f \in \hat{N}$ de la siguiente manera

$$P_f : \bar{\gamma} \longrightarrow \bar{\gamma}$$

$$P_f \Psi(n) = \int_N \Psi(n+n_1) \overline{f(n_1)} dn_1$$

y el subespacio $\bar{\gamma}_f := P_f \bar{\gamma}$.

Mostremos una extensión de la Observación anterior para el subespacio $\bar{\gamma}_f$.

OBSERVACIÓN 4.3

Si Ψ es un elemento del subespacio $\bar{\gamma}_f = P_f \bar{\gamma}$, entonces

$$\Psi(n+n_2) = f(n_2)\Psi(n)$$

para $n_2 \in N$.

DEMOSTRACIÓN

Si Ψ pertenece a $P_f \bar{\gamma}$, entonces existe Ψ_1 en $\bar{\gamma}$ tal que $\Psi = P_f \Psi_1$. Así por la definición del operador P_f tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi(n+n_2) &= \int_N \Psi_1(n+n_1+n_2) \overline{f(n_1)} dn_1 = \int_N \Psi_1(n+n') \overline{f(n'-n_2)} dn' \\ &= f(n_2) \int_N \Psi_1(n+n') \overline{f(n')} dn' = f(n_2) P_f \Psi_1(n) \\ &= f(n_2) \Psi(n).\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.4

El operador $P_f : \bar{\gamma} \longrightarrow \bar{\gamma}$ es proyectivo.

DEMOSTRACIÓN

Sea Ψ_1 un elemento del espacio $\bar{\gamma}$, entonces $P_f \Psi_1 = \Psi$ con $\Psi \in \bar{\gamma}$. Demostremos que $P_f(P_f \Psi_1) = P_f \Psi_1$. En efecto

$$\begin{aligned} P_f(P_f \Psi_1)(n) &= P_f \Psi(n) = \int_N \Psi(n+n_1) \overline{f(n_1)} dn_1 \\ &= \int_N \left(\int_N \Psi_1(n+n_1+n_2) \overline{f(n_2)} dn_2 \right) \overline{f(n_1)} dn_1 \\ &= \int_N \left(\int_N \Psi_1(n+n'_1) \overline{f(n'_1)} dn'_1 \right) f(n_1) \overline{f(n_1)} dn_1 \\ &= \Psi(n) \end{aligned}$$

□

Puesto que N es un grupo compacto y el subgrupo de isotropía H_χ es un subgrupo del grupo finito H , podemos concluir que el grupo $N \rtimes H_\chi$ es compacto; ahora de la Proposición 1.10 las representaciones unitarias irreducibles del grupo abeliano N son los caracteres, así el espacio $\bar{\gamma}$ lo podemos escribir como suma directa de espacios de representaciones irreducibles, es decir

$$\bar{\gamma} = \bigoplus_{f \in \hat{N}} Cf$$

y por la definición 1.11 podemos proyectar el espacio $\bar{\gamma}$ (de la representación inducida $\bar{V}$) a cada uno de los subespacios Cf , obteniendo entonces

$$\bar{\gamma} = \bigoplus_{f \in \hat{N}} P_f \bar{\gamma} = \bigoplus_{f \in \hat{N}} \bar{\gamma}_f$$

Demostraremos que en la suma directa anterior sólo aparecen los caracteres de N tales que en N_0 coinciden con el caracter χ .

LEMA 4.5

Si $N_0^\perp \chi = \left\{ f \in \hat{N} \mid f|_{N_0} = \chi \right\}$, entonces el espacio $\bar{\gamma}$ es

igual a la suma directa de los subespacios $\bar{\gamma}_f$ con $f \in N_0^\perp \chi$, es decir

$$\bar{\gamma} = \bigoplus_{f \in N_0^\perp \chi} \bar{\gamma}_f$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $f \in N_0^\perp \chi$ y $\Psi \in \bar{\gamma}_f$; demostremos que $P_f \Psi = 0$. Por la definición del operador proyectivo P_f y por el Teorema 1.4, tenemos

$$\begin{aligned} P_f \Psi(n) &= \int_N \Psi(n+n_1) \overline{f(n_1)} \, dn_1 \\ &= \int_{N/N_0} d\bar{n}_1 \int_{N_0} \Psi(n+n_1+n_0) \overline{f(n_1+n_0)} \, dn_0 \\ &= \int_{N/N_0} d\bar{n}_1 \int_{N_0} \chi(n_0) \Psi(n+n_1) \overline{f(n_1)} \overline{f(n_0)} \, dn_0 = 0 \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 4.6

La representación $(\bar{V}, \bar{\gamma})$ del grupo $N \rtimes H_\chi$ cumple con

$$\bar{V}(\bar{n}, \bar{h}) \Psi(n) = L_{\bar{h}} \Psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n}))$$

para todo $\bar{n}$, $n \in N$ y $\bar{h} \in H_\chi$.

DEMOSTRACIÓN

Si $\Psi \in \bar{\gamma}$, entonces para todo $\bar{n}$, $n \in N$ y $\bar{h} \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{V}(\bar{n}, \bar{h}) \Psi(n) &= V(\bar{n}, \bar{h}) F(n, 1) = F((n, 1) \chi(\bar{n}, \bar{h})) = F(n+\bar{n}, \bar{h}) \\ &= F((0, \bar{h}) (\bar{h}^{-1}(n+\bar{n}), 1)) = L_{\bar{h}} F(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n}), 1) \\ &= L_{\bar{h}} \Psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n})). \quad \square \end{aligned}$$

Para cada $f_0 \in N_0^\perp \chi$ definamos la H_χ -órbita de f_0 en $N_0^\perp \chi$ como $\text{Orb}(f_0) = \left\{ f \in N_0^\perp \chi \mid f = f_0 h \text{ para } h \in H_\chi \right\}$ y demosremos el siguiente Lema

LEMA 4.7

El subespacio $\bar{\gamma}_0$ definido como

$$\bar{\gamma}_0 = \bigoplus_{f \in \text{Orb}(f_0)} \bar{\gamma}_f$$

es S -invariante, donde $S = N \alpha H_\chi$.

DEMOSTRACIÓN

Si $\psi \in \bar{\gamma}_f$, entonces por la Observación 4.3

$$\psi(n+n_1) = f(n_1)\psi(n) \text{ para } n, n_1 \in N,$$

además $f \in N_0^\perp \chi$. Por la observación anterior

$$\psi_1(n) := \bar{V}(\bar{n}, \bar{h})\psi(n) = L_{\bar{h}} \psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n}))$$

así

$$\begin{aligned} \psi_1(n+n_1) &= L_{\bar{h}} \psi(\bar{h}^{-1}(n+n_1+\bar{n})) = L_{\bar{h}} \psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n}) + \bar{h}^{-1}n_1) \\ &= L_{\bar{h}} \psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n})) \cdot f(\bar{h}^{-1}n_1) = f(\bar{h}^{-1}n_1) L_{\bar{h}} \psi(\bar{h}^{-1}(n+\bar{n})) \\ &= f(\bar{h}^{-1}n_1) \psi_1(n) = (f \cdot \bar{h})(n_1) \psi_1(n) \end{aligned}$$

esto significa que $\psi_1 \in \bar{\gamma}_{f \cdot \bar{h}}$ donde $f \cdot \bar{h} \in \text{Orb}(f_0)$ ya que $\bar{h} \in H_\chi$ y $f \in \text{Orb}(f_0)$. $\square$

Notemos que si $f_0 \in N_0^\perp \chi$, entonces el subgrupo de isotropía

$$H_{f_0} = \left\{ h \in H \mid f_0 h = f_0 \right\}$$

es un subgrupo del subgrupo de isotropía H_χ . Como H es finito podemos suponer que

$$H_{f_0} \setminus H_\chi = \left\{ [h_0=e], [h_1], \dots, [h_k] \right\}$$

donde $h_1, h_2, \dots, h_k$ son representantes en H_χ de las clases

laterales de H_{f_0} , así $\text{Orb}(f_0) = \{f_0, f_0 h_1, \dots, f_0 h_k\}$ y por la Observación anterior

$$\bar{\gamma}_\sigma = \bar{\gamma}_{f_0} \circ \bar{\gamma}_{f_0 h_1} \circ \dots \circ \bar{\gamma}_{f_0 h_k}$$

Luego si $\bar{x} \in \bar{\gamma}_\sigma$,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \text{ con } \bar{x}_i \in \bar{\gamma}_{f_0 h_i}$$

y por la Observación 4.3 $\bar{x}_i(n+n_1) = f_i(n_1)\bar{x}_i(n)$ donde $f_i = f_0 h_i$, aún más, por la Observación 4.6 tenemos

$$\bar{V}(0, h)\phi(n) = L_h \phi(h^{-1}n)$$

$$\bar{V}(\bar{n}, 1)\phi(n) = \phi(n\bar{n})$$

Como H_{f_0} es un subgrupo de H_χ y L una representación de H_χ , podemos considerar su restricción $L' := L|_{H_{f_0}}$, entonces

$f_0 \cdot L'$ es una representación de $N\alpha H_{f_0}$, $\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}$ es la representación inducida de $N\alpha H_\chi$ y

$$W^{f_0} := \mathcal{U}^{\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}}$$

es la representación inducida de $N\alpha H$.

Deseamos mostrar que $W^{f_0} \sim \mathcal{U}^{\bar{V}_\sigma}$ donde $\bar{V}_\sigma := \bar{V}|_{\bar{\gamma}_\sigma}$, para ello por la Proposición 2.4 basta mostrar que

$$\left[\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}, \mathcal{U}^{f_0 \cdot L'} \right] \sim \left[\bar{V}_\sigma, \bar{\gamma}_\sigma \right]$$

donde

$$\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'} = \left\{ F : N\alpha H_\chi \longrightarrow \text{Espacio de } L \mid \text{cumplen i, ii, iii de la Definición 2.1} \right\} \text{ ón 2.1}$$

$$\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'} : N\alpha H_\chi \longrightarrow B \left[\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'} \right]$$

$$\bar{V}_\sigma : N\alpha H_\chi \longrightarrow B \left[\bar{\gamma}_\sigma \right]$$

Demostremos primero la siguiente

PROPOSICIÓN 4.8

Si h es un elemento de la clase $[h_i]$, entonces

$$P_{f_0} \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi} = \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi}_i \text{ para } \bar{\Phi} \in \bar{\gamma}_\sigma$$

DEMOSTRACIÓN

Si $h \in [h_i]$, entonces existe $h' \in H_{f_0}$ tal que $h = h'h_i$.

Primero observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi}(n) &= \sum_{l=0}^k \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi}_l(n) = \sum_{l=0}^k L_h \bar{\Phi}_l(h^{-1}n) \\ &= \sum_{l=0}^k f_l(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_l(0) \end{aligned}$$

Si $l = i$

$$\begin{aligned} f_i(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_i(0) &= f_i(h_i^{-1}h'^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_i(0) \\ &= f_0(h_i h_i^{-1}h'^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_i(0) = f_0(n) L_h \bar{\Phi}_i(0) \end{aligned}$$

esto significa que $f_i(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_i(0) \in \bar{\gamma}_{f_0}$

Si $l \neq i$

$$f_l(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_l(0) = f_0(h_l h_i^{-1}h'^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_l(0)$$

Supongamos que $h_l h_i^{-1}h'^{-1} = h'' \in H_{f_0}$, entonces $h_l h_i^{-1} \in H_{f_0}$ así

$h_l = h'' h_i$ con $h'' \in H_{f_0}$, por lo tanto $[h_l] = [h_i]$, lo cual

es una contradicción. Por lo tanto $h_l h_i^{-1}h'^{-1} \notin H_{f_0}$, esto

significa que $f_0 \cdot h_l h_i^{-1}h'^{-1}$ es un caracter diferente de f_0 , así

$$f_l(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_l(0) \notin \bar{\gamma}_{f_0}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P_{f_0} \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi}(n) &= f_i(h^{-1}n) L_h \bar{\Phi}_i(0) = L_h f_i(h^{-1}n) \bar{\Phi}_i(0) \\ &= L_h \bar{\Phi}_i(h^{-1}n) = \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\Phi}_i(n) \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.9

La representación inducida

$$\left(\begin{array}{c} f_o \cdot L' \\ \mathcal{U}_o, \mathcal{F}_o \cdot L' \end{array} \right)$$

es equivalente a la representación inducida

$$\left(\begin{array}{c} \bar{V}_o \\ \bar{\mathcal{V}}_o \end{array} \right)$$

DEMOSTRACIÓN

1) Definamos $A : \bar{\mathcal{V}}_o \longrightarrow \mathcal{F}_o \cdot L'$ como

$$(A\bar{\mathcal{F}})(n,h) = P_{f_o} [\bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}}](n); \quad n \in \mathbb{N}, h \in H_\chi$$

veamos que $A\bar{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_o \cdot L'$

a) $A\bar{\mathcal{F}}$ es medible como una función en $N \times H_\chi$ puesto que $\bar{\mathcal{F}}$ es medible y H_χ es un conjunto finito.

b) $(A\bar{\mathcal{F}})((n',h'))(n,h) = f_o(n')L_h(A\bar{\mathcal{F}}(n,h)).$

En efecto:

$$\begin{aligned} (A\bar{\mathcal{F}})(n'+h'n, h'h) &= \left[P_{f_o} [\bar{V}_o(0, h'h)\bar{\mathcal{F}}] \right] (n'+h'n) \\ &= f_o(n'+h'n) \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0, h'h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0) \\ &= f_o(n')f_o(h'n) \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0, h'h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0) \\ &= f_o(n')f_o(n) \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0, h'h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0). \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} f_o(n')L_h(A\bar{\mathcal{F}}(n,h)) &= f_o(n')L_h \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}} \right] (n) \\ &= f_o(n')f_o(n) L_h \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0) \end{aligned}$$

así debemos mostrar que

$$\left[P_{f_o} \bar{V}_o(0, h'h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0) = L_h \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0)$$

ahora

$$L_h \left[P_{f_o} \bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}} \right] (0) = L_h \left[\bar{V}_o(0,h)\bar{\mathcal{F}}_i \right] (0)$$

y

$$\begin{aligned}
 \left[P_{f_0} \bar{V}_\sigma(0, h'h) \bar{\xi} \right] (0) &= \left[P_{f_0} \bar{V}_\sigma(0, h') \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi} \right] (0) \\
 &= \left[\bar{V}_\sigma(0, h') \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i \right] (0) \\
 &= L_h \left[\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i \right] (h^{-1}0) \\
 &= L_h \left[\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i \right] (0)
 \end{aligned}$$

por lo tanto queda demostrado (b).

2) A es inyectiva:

En efecto:

$(A\bar{\xi})(n, h) = 0$ implica $P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}] (n) = 0$, de donde $[\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i] (n) = 0$ así $\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i(n) = L_h \bar{\xi}_i(h^{-1}n) = 0$ por consiguiente $\bar{\xi}_i = 0$ para todo h , por lo tanto $\bar{\xi}_i = 0$ para todo i , de donde $\bar{\xi} = 0$.

3) A es suprayectiva.

Por el Teorema 2.7 tenemos que

$$\dim \bar{V}_\sigma = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Esp} L) \cdot \left[H_\chi : H_{f_0} \right]$$

y

$$\dim \mathcal{F}^{f_0 \cdot L'} = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Esp} L) \cdot \left[H_\chi : H_{f_0} \right]$$

4) a) A es un operador de enlace para N, es decir

$$\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}(\bar{n}, 1)(A\bar{\xi})(n, h) = A [\bar{V}_\sigma(\bar{n}, 1) \bar{\xi}] (n, h)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}(\bar{n}, 1)(A\bar{\xi})(n, h) &= (A\bar{\xi})((n, h)(\bar{n}, 1)) = (A\bar{\xi})(n + h\bar{n}, h) \\
 &= P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}] (n + h\bar{n}) = \bar{V}_\sigma(0, h) \bar{\xi}_i(n + h\bar{n}) = L_h \bar{\xi}_i(h^{-1}(n + h\bar{n})) \\
 &= L_h \bar{\xi}_i(h^{-1}n + \bar{n})
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 A [\bar{V}_\sigma(\bar{n}, 1) \bar{\xi}] (n, h) &= P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h) (\bar{V}_\sigma(\bar{n}, 1) \bar{\xi})] (n) \\
 &= \bar{V}_\sigma(0, h) [\bar{V}_\sigma(\bar{n}, 1) \bar{\xi}]_i(n) = L_h [\bar{V}_\sigma(\bar{n}, 1) \bar{\xi}]_i(h^{-1}n) \\
 &= L_h [\bar{\xi}(h^{-1}n + \bar{n})]_i = L_h \bar{\xi}_i(h^{-1}n + \bar{n})
 \end{aligned}$$

b) A es un un operador de enlace para H, es decir

$$\mathcal{U}^{f_0 \cdot L'}(0, \bar{h})(A\bar{\xi})(n, h) = A [\bar{V}_\sigma(0, \bar{h}) \bar{\xi}] (n, h)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} u^{f_0 \cdot L'}_{(0, \bar{h})(A\bar{h})(n, h)} &= (A\bar{h})((n, h)(0, \bar{h})) = (A\bar{h})(n, h\bar{h}) \\ &= P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h\bar{h})](n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A [\bar{V}_\sigma(0, \bar{h})](n, h) &= P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h)(\bar{V}_\sigma(0, \bar{h}))](n) \\ &= P_{f_0} [\bar{V}_\sigma(0, h\bar{h})](n). \end{aligned} \quad \square$$

OBSERVACIÓN 4.10

Si f_0, f_1 están en la misma H_χ -órbita en $N^\perp_O \chi$, entonces $W^{f_0} \sim W^{f_1}$.

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que $\bar{V}_\sigma$ no depende de f_0 , sino de la órbita. Así $u^{f_1 \cdot L'} \sim \bar{V}_\sigma$, esto implica que $u^{f_1 \cdot L'} \sim u^{f_0 \cdot L'}$ y por la Proposición 2.4 concluimos que $W^{f_0} \sim W^{f_1}$. $\square$

En resumen

$$u^T \sim \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N_O \alpha H \end{array} u^{u^{\chi L}},$$

pero por el Teorema de inducción en etapas 2.3

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N_O \alpha H \end{array} u^{u^{\chi L}} \sim \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N_O \alpha H_\chi \end{array} u^{u^{\chi L}} \sim \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N\alpha H_\chi \end{array} u^{u^{\chi L}} = \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N\alpha H_\chi \end{array} u^V$$

Por otro lado, sabemos que

$$V \sim \bar{V} = \begin{array}{c} \bullet \\ H_\chi\text{-órbitas} \\ \text{en } N^\perp_O \chi \end{array} \bar{V} \sim \begin{array}{c} \bullet \\ H_\chi\text{-órbitas} \\ \text{en } N^\perp_O \chi \end{array} u^{f_0 \cdot L'}$$

luego entonces

$$u^T \sim \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N\alpha H_\chi \end{array} u^V$$

y por el Teorema 2.5 tenemos que

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N\alpha H_\chi \end{array} u^V \sim \begin{array}{c} \oplus \\ H_\chi\text{-órbitas} \\ \text{en } N_o^\perp \chi \end{array} \begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N\alpha H_\chi \end{array} u^u \begin{array}{c} f_o \cdot L' \\ \end{array} = \begin{array}{c} \oplus \\ H_\chi\text{-órbitas} \\ \text{en } N_o^\perp \chi \end{array} \begin{array}{c} f_o \\ W_o \end{array}$$

así hasta este momento la descomposición de u^T queda como sigue

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ N_o \alpha H \end{array} u^T \sim \begin{array}{c} \oplus \\ H_\chi\text{-órbitas} \\ \text{en } N_o^\perp \chi \end{array} \begin{array}{c} f_o \\ W_o \end{array}$$

más aún, como $L' = L|_{H_{f_o}}$ no necesariamente es irreducible,

podemos escribir $L' \sim \bigoplus_{i=1}^m n_i L'_i$ donde L'_i es irreducible y n_i es la multiplicidad de la componente L'_i . Por lo tanto, por el Teorema 2.5

$$u^u \begin{array}{c} f_o \cdot L' \\ \end{array} \sim \bigoplus_{i=1}^m n_i u^u \begin{array}{c} f_o \cdot L'_i \\ \end{array}$$

y

$$W_o \begin{array}{c} f_o \\ \end{array} \sim \bigoplus_{i=1}^m n_i W_o \begin{array}{c} f_o \cdot L'_i \\ \end{array}$$

Ahora resumiremos en el siguiente Teorema todos los resultados anteriores de este capítulo.

TEOREMA 4.11

Sean N un grupo abeliano compacto, N_0 un subgrupo cerrado de N , H un grupo finito, T una representación unitaria irreducible de $N_0 \rtimes H$, χ un caracter de $\hat{N}_0$,

$$N_0^\perp \chi = \left\{ f \in \hat{N} \mid f|_{N_0} = \chi \right\}$$

H_χ el grupo de isotropía de χ , L una representación irreducible de H_χ , tales que

$$T \sim \begin{array}{c} N_0 \rtimes H \\ \uparrow \\ N_0 \rtimes H_\chi \end{array} \chi^L$$

f_0 un representante de cada H_χ -órbita de $N_0^\perp \chi$, H_{f_0} el grupo de isotropía de f_0 , $L' = L|_{H_{f_0}}$ y n_i la multiplicidad de la componente irreducible L'_i de L' . Entonces la descomposición de la representación inducida $\mathcal{U}^T$ del grupo $N \rtimes H$ está dada por

$$\begin{array}{c} N \rtimes H \\ \uparrow \\ N_0 \rtimes H \end{array} \mathcal{U}^T \sim \bigoplus_{\text{H-órbitas en } N_0^\perp \chi} \bigoplus_{i=1}^m n_i W_{f_0 \cdot L'_i}$$

donde las representaciones inducidas

$$W_{f_0 \cdot L'_i} = \mathcal{U}^{f_0 \cdot L'_i}$$

son irreducibles por el Teorema 3.5.

Ahora consideramos un caso particular que por su importancia lo llamamos Teorema.

Sean N un grupo compacto abeliano, H un grupo finito, $N_0 = \{0\}$ el grupo trivial, así $N_0 \rtimes H$ es isomorfo a H y T una representación irreducible de H . El Teorema nos describe la descomposición de la representación inducida

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ H \end{array} \quad \mathcal{U}^T.$$

TEOREMA 4.12

La representación inducida

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ H \end{array} \quad \mathcal{U}^T$$

es equivalente a la representación

$$\begin{array}{c} \oplus \\ \text{H-órbitas} \\ \text{en } \hat{N} \end{array} \quad \oplus_{i=1}^m n_i W^{f \cdot T'_i}$$

donde f es un elemento de una H-órbita en $\hat{N}$, $T' := T|_{H_f}$

$$T' \sim \oplus_{i=1}^m n_i T'_i$$

donde n_i es la multiplicidad de la componente irreducible T'_i y $W^{f \cdot T'_i}$ es una representación inducida de $N\alpha H$.

DEMOSTRACIÓN

Si $\chi \in \hat{N}_0 = \{1\}$, entonces el subgrupo de isotropía $H_\chi = H$, así L es una representación irreducible de H , pudiendo tomar $L = T$.

$$\text{Ahora } N_0^\perp \chi = N_0^\perp = \left\{ f \in \hat{N} \mid f|_{N_0} = \chi \right\} = \hat{N}$$

así por la descripción de la descomposición de la representación $\mathcal{U}^T$ dada en el desarrollo anterior, tenemos

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \\ H \end{array} \quad \mathcal{U}^T \quad \sim \quad \begin{array}{c} \oplus \\ \text{H-órbitas} \\ \text{en } \hat{N} \end{array} \quad \oplus_{i=1}^m n_i W^{f \cdot T'_i}$$

□

NOTA

El significado de este Teorema es el siguiente:

La representación $\mathcal{U}^T$ como una representación unitaria del grupo compacto $N\alpha H$ se descompone en suma directa de componentes irreducibles. Las representaciones irreducibles de $N\alpha H$ son de la forma

$$\begin{array}{c} N\alpha H \\ \uparrow \mathcal{U}^f L \\ N\alpha H_f \end{array}$$

donde $f \in \hat{N}$ es un representante de una H-órbita en $\hat{N}$ y L una representación irreducible del subgrupo H_f .

El Teorema dice que las únicas representaciones 'L' que pueden aparecer en la descomposición son las componentes de la representación T restringidas al subgrupo H_f correspondiente a f .

CAPITULO 5

LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS Y LA REPRESENTACION QUASIREGULAR

En el presente capítulo introducimos el importante concepto de grupo cristalográfico de Bloch, el cual en forma natural aparece en física del estado sólido. Se analiza la representación quasiregular del grupo $G = N \rtimes H$ (la que se define en la sección 5.2) con grupo cristalográfico de Bloch su subgrupo $\Gamma = N_0 \rtimes H$ y se estudian algunos subespacios invariantes de esta representación, el Teorema 5.12 nos muestra una fórmula para calcular la dimensión de estos subespacios; y en la sección 5.3 presentamos el significado físico de este resultado.

§ 1. GRUPOS CRISTALOGRAFICOS.

Deseamos definir el concepto de grupo cristalográfico, para ello definamos primero lattice cristalográfica.

DEFINICIÓN 5.1

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base del espacio $\mathbb{R}^n$. Una lattice cristalográfica de dimensión n es el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros de los vectores $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$, lo cual denotaremos por $\mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Ahora definamos el grupo puntual de una lattice.

DEFINICIÓN 5.2

El grupo puntual de una lattice N es el subgrupo H del grupo de todas las transformaciones ortogonales $O(n)$, que preserva la lattice, es decir

$$H = \left\{ \gamma \in O(n) \mid \gamma t \in N \text{ para cada } t \in N \right\}$$

Es fácil observar que el grupo puntual de una lattice es un subgrupo discreto de $O(n)$, ya que la acción $O(n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y el grupo puntual preserva la lattice; y como $O(n)$ es compacto, el grupo puntual es finito.

DEFINICIÓN 5.3

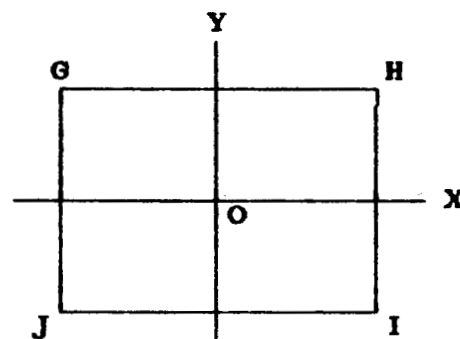
Un grupo cristalográfico G es el producto semidirecto de una lattice N y de su grupo puntual H , así $G = N \rtimes H$ es un subgrupo discreto del grupo euclidiano $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$.

EJEMPLO:

Sean $v_1 = (a, 0)$, $v_2 = (0, a)$, $a \in \mathbb{R}$ y Γ_0 la lattice de dimensión dos, cuadrada, es decir, $\Gamma_0 = \mathbb{Z}\langle v_1, v_2 \rangle$. Entonces el grupo puntual Γ_1 de la lattice Γ_0 es el grupo diedro de grado 4 D_4 , y así el grupo cristalográfico es $\Gamma = \mathbb{Z}\langle v_1, v_2 \rangle \rtimes D_4$.

Recordemos que es D_4 : Sean

- r_1 una reflexión en la diagonal GI
 - r_2 una reflexión en la diagonal HJ
 - r_3 una reflexión en OX
 - r_4 una reflexión en OY
 - r_5 una rotación de 90° alrededor de O
 - r_6 una rotación de 180° alrededor de O
 - r_7 una rotación de 270° alrededor de O
 - r_8 una rotación de 0° alrededor de O
- $D_4 = \{ r_1, \dots, r_8 \text{ con la operación composición} \}$.



Ahora consideremos los grupos cristalográficos que corresponden a la situación física ($n=3$).

En física se considera un cristal infinito como formado por bloques finitos iguales. Esto impone condiciones de periodicidad (de Bloch) para funciones de estado del electrón que se encuentra bajo la acción del potencial de la lattice de núcleos. Esto da la motivación para considerar en lugar del grupo infinito de traslaciones N el siguiente grupo finito

$$N_0 = \mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle / M\mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

donde M es un número entero positivo.

Observemos que la clase del elemento Me_i es cero.

Denotemos por Λ_0 a $M\mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$, entonces $\Lambda_0 \subset \Lambda = \mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ es una sublattice.

Llamaremos grupo puntual de Bloch Γ_1 al grupo de todas las transformaciones ortogonales $\gamma_1 \in O(n)$ tales que $\gamma_1 t \in \Lambda_0$ para cada $t \in \Lambda_0$.

Es fácil observar que el grupo puntual de Bloch Γ_1 es igual al grupo puntual H de la lattice Λ .

Ahora describamos la acción del grupo puntual de Bloch Γ_1 en Λ/Λ_0 :

Si $\gamma_1 \in \Gamma_1$ y $\bar{t} \in \Lambda/\Lambda_0$, entonces $\gamma_1(\bar{t}) := [\gamma_1(t)]$.

Y definamos el grupo cristalográfico de Bloch

DEFINICIÓN 5.4

El grupo cristalográfico de Bloch es el producto semidirecto $\Gamma = N_0 \rtimes \Gamma_1$ donde $N_0 = \Lambda/\Lambda_0$.

EJEMPLO:

En el ejemplo anterior consideramos la lattice $\Lambda = 3\mathbb{Z}\langle v_1, v_2 \rangle$ así

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Lambda/\Lambda_0 = \mathbb{Z}\langle v_1, v_2 \rangle / 3\mathbb{Z}\langle v_1, v_2 \rangle \\ &= \{ k_1 v_1 + k_2 v_2 \mid 0 \leq k_i \leq 2, i=1,2 \} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

y el grupo cristalográfico de Bloch es

$$Z\langle v_1, v_2 \rangle / 3Z\langle v_1, v_2 \rangle \propto D_4.$$

Ahora definimos el concepto importante de lattice recíproca

DEFINICIÓN 5.5

Se dice que la lattice $Z\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ es recíproca de la lattice $Z\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ si $t_i \cdot e_j = 2\pi \delta_{ij}$.

Veamos una Proposición que nos describe el grupo de caracteres de un grupo cociente de grupos abelianos.

PROPOSICIÓN 5.1

Sean N y N_0 grupos abelianos tales que $N_0 \subset N$. Entonces $(N/N_0)^\wedge \simeq N_0^\perp$, donde $N_0^\perp := \{ f \in \hat{N} \mid f|_{N_0} = 1 \}$, $N_0^\perp$ es un subgrupo de $\hat{N}$ y lo llamamos el anulador de N_0 .

DEMOSTRACIÓN

Sea $f \in N_0^\perp$, entonces $f \in \hat{N}$ y $f|_{N_0} = 1$, definamos $\tilde{f}(n+N_0) = f(n)$, así $\tilde{f}(N_0) = f(e) = 1$ por lo tanto $\tilde{f} \in (N/N_0)^\wedge$. Recíprocamente, sea $\tilde{f} \in (N/N_0)^\wedge$, entonces definamos $f(n) = \tilde{f}(n+N_0)$, así $f(N_0) = \tilde{f}(N_0) = 1$, es decir $f|_{N_0} = 1$, por lo tanto $f \in N_0^\perp$. $\square$

Consideremos el grupo $N = R\langle t_1, \dots, t_n \rangle / ZM\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ y la lattice $N_0 = Z\langle t_1, \dots, t_n \rangle / ZM\langle t_1, \dots, t_n \rangle$. Sea f_k un caracter de N , sabemos, de la Proposición anterior que $f_k(x) = e^{ikx}$ donde $k \in \mathbb{R}^n$, $x \in N$ y tal que $f_k(\lambda) = 1$ para $\lambda \in ZM\langle t_1, \dots, t_n \rangle$, esto es equivalente a que $k_i \cdot M t_j = 2\pi \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq n$ donde

$k = m_1 t_1 + \dots + m_n t_n$ y $\{k_1, \dots, k_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$. Esto significa que $\Lambda'' = Z\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ es la lattice recíproca de la lattice $Z\langle Mt_1, \dots, Mt_n \rangle$.

Sea $\Lambda' = Z\langle K_1, \dots, K_n \rangle$ la lattice recíproca de la lattice $Z\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ es decir $K_i \cdot t_j = 2\pi \delta_{ij}$.

Ahora veamos algunas observaciones que nos describen los caracteres de N y N_0 .

OBSERVACIÓN 5.2

La lattice Λ' es una sublattice de la lattice Λ'' .

DEMOSTRACIÓN

Es claro puesto que $k_i = \frac{K_i}{M}$ $i = 1, \dots, n$. □

OBSERVACIÓN 5.3

La lattice Λ' es isomorfa a $N_0^\perp$.

DEMOSTRACIÓN

Veamos que si $f_k \in N_0^\perp$ entonces $k \in \Lambda'$ y recíprocamente.

Si $f_k \in N_0^\perp$, $k \in \Lambda''$; entonces $f_k \in \hat{N}$ y $f|_{N_0} = 1$, esto implica que $f_k(x) = e^{ikx}$ y $f_k(t_i) = 1$ para $i = 1, \dots, n$, de donde $kt_i = 2\pi m_i$ $i = 1, \dots, n$, $m_i \in \mathbb{Z}$ y esto significa que

$$k = m_1 K_1 + \dots + m_n K_n \in \Lambda'$$

Para demostrar el recíproco basta seguir el razonamiento inverso.

Así hemos mostrado que la aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda' &\longrightarrow N_0^\perp \\ k &\longrightarrow f_k \end{aligned}$$

es una biyección, y claramente es un homomorfismo. Análogamente se demuestra que Λ'' es isomorfa a $\hat{N}$. □

PROPOSICIÓN 5.4

El grupo cociente $\hat{N}/N_0^\perp$ es isomorfo al grupo dual $\hat{N}_0$.

Para una demostración ver referencia [17].

OBSERVACIÓN 5.5

El grupo de caracteres de la lattice N_0 es isomorfo a Λ''/Λ' , es decir $\hat{N}_0 \simeq \Lambda''/\Lambda'$.

DEMOSTRACIÓN

Por la Proposición 5.4, $\hat{N}_0 \simeq \hat{N}/N_0^\perp$ y a su vez como $\hat{N} \simeq \Lambda''$ y $N_0^\perp \simeq \Lambda'$ obtenemos que $\hat{N}_0 \simeq \Lambda''/\Lambda'$.

DEFINICIÓN 5.6

Al cociente Λ''/Λ' le llamaremos la zona de Brillouin.

§ 2. REPRESENTACION QUASI-REGULAR DEL GRUPO G.

Consideremos el grupo $N = \mathbb{R}\langle e_1, \dots, e_n \rangle / M\mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$, la lattice $N_0 = \mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle / M\mathbb{Z}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y sean $G = N \rtimes H$ $\Gamma = N_0 \rtimes H$. (Γ es un grupo cristalográfico de Bloch).

Notemos que N es un espacio homogéneo bajo la acción del grupo G . Topológicamente N es un espacio compacto homeomorfo a un toro n -dimensional. Los grupo G y Γ satisfacen las hipótesis para el desarrollo del Teorema del capítulo 4.

En la presente sección analizaremos la representación quasi-regular del grupo G en el espacio $L^2(N)$. A esta representación la denotaremos por $(R, L^2(N))$ y la definimos por:

$$R(\bar{n}, \bar{h}) f(n) = f(\bar{h}n + \bar{n})$$

donde $f \in L^2(N)$ y $n, \bar{n} \in N, \bar{h} \in H$.

Esta representación es de especial interés en el caso que la dimensión de la lattice es $n=3$. Las funciones del estado de los electrones en un cristal con el grupo cristalográfico Γ (impuestas las condiciones de periodicidad de Bloch) pertenecen al espacio $L^2(N)$. Al final de la sección diremos más sobre aplicaciones físicas.

Consideremos también la restricción de la representación R al grupo Γ

$$R' := R|_{\Gamma}$$

Sea T una representación irreducible unitaria del grupo $\Gamma = N_0 \rtimes H$. Por el Teorema 1.14 la representación R' se descompone en la suma directa de representaciones factoriales; sea $L_T^2(N)$ el subespacio de $L^2(N)$ tal que $R'|_{L_T^2(N)}$ es una representación factorial de T (un múltiplo de T , aquí generalmente infinito).

Este subespacio es la imagen del operador proyectivo $P_T : L^2(N) \longrightarrow L_T^2(N)$ definido en la sección 1.4.

La representación T como una representación irreducible del producto semidirecto $\Gamma = N_0 \rtimes H$ está caracterizada (por la construcción de Mackey) por un caracter $\chi \in \hat{N}_0$ y una representación irreducible del subgrupo de isotropía H_χ tal que T es equivalente a la representación inducida $\mathcal{U}^{\chi L}$.

Ahora demostraremos que el subespacio $L_T^2(N)$ se puede escribir como una suma directa de subespacios Γ -invariantes. Para ello hagamos primero algunas observaciones:

Por el Teorema de Peter-Weyl 1.15 el espacio $L^2(N)$ se puede escribir como

$$L^2(N) = \bigoplus_{f_k \in \hat{N}} C f_k$$

donde $f_k(x) = e^{ikx}$ y como por la sección anterior $\hat{N} \simeq \Lambda''$, tenemos que $k \in \Lambda'' = \mathbb{Z}\langle k_1, \dots, k_n \rangle$.

Para cada $r \in \mathbb{R}^+$ definimos $\mathcal{X}_r = \bigoplus_{|k|=r} C f_k$ donde $k \in \Lambda''$.

Veamos que el subespacio $\mathcal{X}_r$ es G -invariante: de la definición de la representación quasi-regular es claro que $\mathcal{X}_r$ es

N -invariante; demostramos que es H -invariante,

$$R(0, \bar{h}) f_k(n) = f_k(\bar{h}, n) = f_{k\bar{h}}(n)$$

y como $\bar{h} \in H$ y H es un subgrupo de $O(n)$.

tenemos $|k\bar{h}| = |k|$, así $\mathcal{R}_r$ es H -invariante.

También observemos que $\mathcal{R}_r$ es un espacio de dimensión finita ya que la intersección de la lattice $\Lambda'' = \mathbb{Z}\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ y la esfera en $\mathbb{R}^n$ de radio r es finita.

Sea $O(k_0)$ una H -órbita del elemento $k_0 \in \Lambda''$

$$O(k_0) = \{ k \in \Lambda'' \mid k = k_0 h, h \in H \}$$

Definamos el siguiente subespacio de $L^2(N)$

$$\mathcal{R}_{k_0} = \bigoplus_{k \in O(k_0)} C f_k$$

LEMA 5.6

El subespacio $\mathcal{R}_{k_0}$ es G -invariante y es espacio de una componente irreducible de R , es decir es G -irreducible.

DEMOSTRACIÓN

La G -invariancia de $\mathcal{R}_{k_0}$ es clara de la definición de la representación R .

Supongamos que $V \neq \{0\}$ es un subespacio de $\mathcal{R}_{k_0}$ G -invariante. Entonces V es N -invariante también. V se descompone en suma directa de componentes N -irreducibles que son de dimensión 1 (puesto que N es compacto y abeliano) y son de la forma Cf para algún $f \in \hat{N}$. Como V es un subespacio de $\mathcal{R}_{k_0}$, los caracteres f que pueden aparecer son de la forma f_k para algún $k \in O(k_0)$.

Ahora supongamos que algún f_k con $k \in O(k_0)$ pertenece al espacio V . Puesto que V es H -invariante todos los caracteres f_{kh} , $h \in H$ pertenecen a V . Por lo tanto todos los f_k , $k \in O(k_0)$ pertenecen a V , lo que significa que $V = \mathcal{R}_{k_0}$. $\square$

De las observaciones anteriores podemos concluir lo siguiente:

$$L^2(N) = \bigoplus_{f_k \in \hat{N}} Cf_k \simeq \bigoplus_{k \in \Lambda''} Cf_k \simeq \bigoplus_{r \geq 0} \bigoplus_{|k|=r} Cf_k = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{X}_r$$

y como $L^2_\Gamma(N) = P_\Gamma(L^2(N))$ obtenemos que

$$L^2_\Gamma(N) = \bigoplus_{r \geq 0} P_\Gamma(\mathcal{X}_r) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{X}_{T,r}$$

donde $\mathcal{X}_{T,r} := P_\Gamma(\mathcal{X}_r)$ es de dimensión finita ya que $\mathcal{X}_r$ lo es y es Γ -invariante puesto que $\mathcal{X}_r$ es G -invariante y Γ es un subgrupo de G .

Ahora en el desarrollo que sigue daremos respuesta al problema de calcular la dimensión del espacio $\mathcal{X}_{T,r}$.

NOTA

El subespacio $\mathcal{X}_{k_0}$ no es Γ -irreducible en general, como una componente de la representación R' . Esto lo veremos en el ejemplo que sigue después de esta sección.

Ahora el subespacio $\mathcal{X}_r$ lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_r &= \bigoplus_{|k|=r} Cf_k = \bigoplus_{\substack{\text{H-órbitas} \\ \text{en } \Lambda'' \cap S_r}} \bigoplus_{k \in O(k_0)} Cf_k \\ &= \bigoplus_{\substack{\text{H-órbitas} \\ \text{en } \Lambda'' \cap S_r}} \mathcal{X}_{k_0} \\ &= \mathcal{X}_{k_{0,1}} \oplus \mathcal{X}_{k_{0,2}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_{k_{0,m}} \text{ tal que } |k_{0,i}|=r \end{aligned} \quad (5.1)$$

para $i = 1, \dots, m$.

La suma directa es finita, puesto que el subespacio $\mathcal{X}_r$ es de dimensión finita.

Así el subespacio $\mathcal{X}_{T,r}$ queda como

$$\mathcal{X}_{T,r} = P_\Gamma \mathcal{X}_r = \bigoplus_{i=1}^j P_\Gamma \mathcal{X}_{k_{0,i}} \text{ con } j \leq m.$$

Observemos que las componentes de $P_\Gamma \mathcal{X}_{k_{0,i}}$ son espacios de

representaciones factoriales de T , ya que $\mathcal{X}_{T,r}$ es un subespacio de $L_T^2(N)$ y entonces es una representación factorial de T .

Así el subespacio $\mathcal{X}_{T,r}$ queda como

$$\mathcal{X}_{T,r} = P_T \mathcal{X}_r = \bigoplus_{i=1}^j P_T \mathcal{X}_{k_{0,i}} = \bigoplus_{i=1}^j \mathcal{X}'_{k_{0,i}} \quad (5.2)$$

donde $j \leq m$, $\mathcal{X}'_{k_{0,i}} := P_T \mathcal{X}_{k_{0,i}}$ y escogemos el orden de los espacios $\mathcal{X}_{k_{0,i}}$ de tal manera que $\mathcal{X}'_{k_{0,i}}$ es diferente de $\{0\}$ para $1 \leq i \leq j$.

OBSERVACIÓN 5.7

Las componentes $\mathcal{X}'_{k_{0,i}}$ son espacios de representaciones factoriales de T (múltiplos finitos de T).

Esto es claro ya que $\mathcal{X}_{T,r}$ es un subespacio de $L_T^2(N)$ y entonces es una representación factorial de T .

OBSERVACIÓN 5.8

La multiplicidad de la representación irreducible T del grupo Γ en $\mathcal{X}'_{k_{0,i}}$ (como representación de Γ) es igual a la multiplicidad de $\mathcal{X}_{k_{0,i}}$ (como representación de G) en la representación inducida $\mathcal{U}^T$ del grupo G , es decir

$$\left(\mathcal{X}'_{k_{0,i}} : T \right)_{\Gamma} = \left(\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_{k_{0,i}} \right)_G$$

DEMOSTRACIÓN

Primero observemos que

$$\left(\mathcal{X}'_{k_{0,i}} : T \right)_{\Gamma} = \left(\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_{k_{0,i}} \right)_{\Gamma}$$

ahora por el Teorema de Frobenius 2.11, se tiene la igualdad

$$\left(\mathcal{X}_{k_{0,i}} : T \right)_{\Gamma} = \left(\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_{k_{0,i}} \right)_G$$

por lo tanto

$$\left(\mathcal{X}'_{k_{0,i}} : T \right)_{\Gamma} = \left(\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_{k_{0,i}} \right)_G$$

□

OBSERVACIÓN 5.9

Si $\mathcal{X}'_{k_o,i}$ es uno de los espacios de la descomposición dada en la fórmula (5.2), entonces la representación quastregular del grupo Θ en $\mathcal{X}_{k_o,i}$ es equivalente a una de las representaciones $W^{fL'_i}$ (según la notación del capítulo 4) donde f es algún caracter de N tal que $f \in N_o^\perp \chi$ y L'_i es una componente irreducible de la representación $L' = L|_{H_f}$.

DEMOSTRACIÓN

Por el Lema 5.6 la representación quasi-regular del grupo Θ en $\mathcal{X}_{k_o,i}$ es irreducible. Ahora, si $\mathcal{X}'_{k_o,i}$ es una componente diferente de $\{0\}$ del espacio $\mathcal{X}_{T,r}$ entonces $\left[\mathcal{X}'_{k_o,i} : T \right] \neq 0$; y por la Observación 5.8 tenemos que la representación irreducible $\mathcal{X}_{k_o,i}$ (como representación de Θ) aparece como componente de $\mathcal{U}^T$. Entonces esta representación es equivalente a una de las representaciones $W^{f \cdot L'_i}$. $\square$

LEMA 5.10

Si $\mathcal{X}_{k_o,i}$ es uno de los subespacios de la descomposición dada en (5.1). Entonces $\mathcal{X}'_{k_o,i} = P_T \mathcal{X}_{k_o,i}$ es diferente del espacio cero si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) En la órbita $O(k_o,i)$ existe un elemento k tal que $f_k|_{N_o} = \chi$
- ii) H_{f_k} es el subgrupo de isotropía de f_k y id la representación trivial de H_{f_k} , entonces

$$\left[L|_{H_{f_k}} : \text{id} \right]_{H_{f_k}} \neq 0$$

LEMA 5.11

Si $k \in \Lambda''$ tal que $|k|=r$ y $f_k|_{N_0} = \chi$. Entonces se cumplen

- 1) $\mathcal{X}'_k = P_T \mathcal{X}_k$ aparece como una componente diferente del espacio cero en la descomposición (5.2), del espacio $\mathcal{X}_{T,r}$

si sólo si $\left[L|_{H_{f_k}} : \text{id} \right]_{H_{f_k}} \neq 0$

- 2) $\dim \mathcal{X}'_k = \dim T \left[L|_{H_{f_k}} : \text{id} \right]_{H_{f_k}}$

DEMOSTRACIÓN

- 1) Es consecuencia inmediata del Lema 5.10.
 2) Puesto que por la Observación 5.8 $\mathcal{X}'_k$ es un espacio de una representación factorial de T , obtenemos que

$$\dim \mathcal{X}'_k = \dim T (\mathcal{X}'_k : T)_T$$

por Observación 5.8 $(\mathcal{X}'_k : T)_T = (\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_k)_G$ y de la demostración del Lema 5.10 sabemos que la representación $\mathcal{X}_k$ como representación de G es equivalente a la representación $W^{f_k \cdot \text{id}}$.
 Entonces

$$(\mathcal{U}^T : \mathcal{X}_k)_G = \left[\mathcal{U}^T : W^{f_k \cdot \text{id}} \right]_G$$

y por el Teorema 4.12

$$\left[\mathcal{U}^T : W^{f_k \cdot \text{id}} \right]_G = \left[L|_{H_{f_k}} : \text{id} \right]_{H_{f_k}}$$

así, resumiendo obtenemos que

$$\dim \mathcal{X}'_k = \dim T \left[L|_{H_{f_k}} : \text{id} \right]_{H_{f_k}}$$

lo cual prueba 2). □

Todos los resultados de esta sección los resumiremos en el siguiente Teorema.

TEOREMA 5.12

$$1) \quad L_T^2(N) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{X}_{T,r}$$

2) Para $r \geq 0$ sean $k_1, \dots, k_j$ todos los elementos de Λ'' tales que

- i) $|k_i| = r$ para $i = 1, \dots, j$
- ii) Las órbitas $O(k_1), O(k_2), \dots, O(k_j)$, son diferentes
- iii) $f_{k_i}|_{N_0} = \chi$ para $i = 1, \dots, j$ entonces

$$\mathcal{X}_{T,r} = \bigoplus_{i=1}^j \mathcal{X}'_{k_i}$$

y

$$\dim \mathcal{X}_{T,r} = \dim T \sum_{i=1}^j \left(L|_{H_{f_{k_i}}} : \text{id} \right)_{H_{f_{k_i}}}$$

§ 3. SIGNIFICADO FÍSICO DEL TEOREMA.

Comentaremos informalmente el significado físico del Teorema anterior, conservando la notación del presente capítulo y suponiendo que $n = 3$.

En física del estado sólido se estudia el siguiente problema:

Determinar el espectro del operador D dado por

$$\Psi \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + v\Psi$$

donde (en el caso de las condiciones de periodicidad de Bloch) v y Ψ son funciones definidas en $N = \mathbb{R}\langle e_1, e_2, e_3 \rangle / M\mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ y

la función v (el potencial) es invariante con respecto al grupo cristalográfico de Bloch Γ .

El dominio del operador D es un subespacio denso de $L^2(N)$ elegido de tal manera que el operador D es auto-adjunto. El operador D conmuta con la acción del grupo Γ en el espacio $L^2(N)$ dada por la representación quasiregular. El espectro del operador D es el "espectro de energía" de un electrón bajo el potencial de la lattice de núcleos de un cristal.

Sea T una representación irreducible unitaria de Γ . Podemos considerar como en la sección anterior el subespacio $L_T^2(N) = P_T L^2(N)$. Sea D_T la restricción del operador D a este subespacio $D_T = D|_{L_T^2(N)}$.

Al espectro del operador D_T en el subespacio $L_T^2(N)$ le llamaremos una "banda" de energía.

Se demuestra que el espectro del operador D_T es puntual y es descrito completamente por el espectro del operador $-\Delta$, donde Δ es el operador de Laplace

$$\psi \longrightarrow - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]$$

definido en el mismo espacio $L_T^2(N)$ (ver [9]).

Más exactamente, existe una correspondencia uno a uno de los dos espectros que conservan las multiplicidades de los valores propios.

Así la descomposición de $L_T^2(N)$ dada en la sección anterior

$$L_T^2(N) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{X}_{T,r}$$

es precisamente la descomposición del espacio $L_T^2(N)$ en suma directa de subespacios propios de $-\Delta$, correspondientes al valor propio r^2 . La dimensión del espacio $\mathcal{X}_{T,r}$ es la multiplicidad del valor propio r^2 . Entonces la conclusión del Teorema permite determinar las multiplicidades de los valores del espectro de energía de un cristal en términos de la Teoría de Representaciones.

Ahora ilustraremos el Teorema 5.12 con un ejemplo.

EJEMPLO:

Sean e_1, e_2 los siguientes vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$

$$e_1 = (2\pi/3, 0)$$

$$e_2 = (0, 2\pi/3)$$

Consideremos la lattice de Bloch generada por los vectores e_1, e_2 .

$$N_0 = Z\langle e_1, e_2 \rangle / 3Z\langle e_1, e_2 \rangle$$

(Observemos que $N_0 \cong Z_3 \times Z_3$). Entonces el grupo puntual de esta lattice es $H = D_4$.

Sea $\Gamma_0 = N_0 \rtimes H$ el grupo cristalográfico de Bloch correspondiente y $G = N \rtimes H$ donde $N = \mathbb{R}\langle e_1, e_2 \rangle / 3Z\langle e_1, e_2 \rangle$.

La lattice recíproca de la lattice $3Z\langle e_1, e_2 \rangle$ es $\Lambda'' = Z\langle k_1, k_2 \rangle$ donde $k_1 = (1,0)$ y $k_2 = (0,1)$ y a su vez la lattice recíproca de la lattice $Z\langle e_1, e_2 \rangle$ es $\Lambda' = Z\langle K_1, K_2 \rangle$ donde $K_1 = 3k_1$ y $K_2 = 3k_2$.

Tenemos que $\Lambda'' \cong \hat{N}$, $\Lambda''/\Lambda' = \hat{N}_0$.

Los siguientes vectores de Λ'' son representantes de todas las clases diferentes en Λ''/Λ' , es decir representan diferentes caracteres de N_0 :

$(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)$

Sea T una representación irreducible de Γ .

Por la construcción de Mackey le corresponde la triada (χ, H_χ, L) donde $\chi \in \hat{N}_0$, H_χ es el subgrupo de isotropía de χ y L es una representación irreducible de H_χ .

Consideraremos dos representaciones T_1 y T_2 de Γ que corresponde a χ determinado por el vector $(1,0) \in \Lambda''$.

Entonces $H_\chi = \{ \text{id}, \sigma \}$ donde σ es la reflexión con respecto al eje X .

- 1) T_1 corresponde a (χ, H_χ, L_1) donde $L_1(\text{id}) = L_1(\sigma) = 1$.
- 2) T_2 corresponde a (χ, H_χ, L_2) donde $L_2(\text{id}) = 1, L_2(\sigma) = -1$.

consideremos los espacios $L_{T_1}^2(N)$, $L_{T_2}^2(N)$ y sus subespacios $\mathcal{X}_{T_1,r}$, $\mathcal{X}_{T_2,r}$ para $r = 5$.

Para calcular $\dim \mathcal{X}_{T_i,r}$ ($i = 1, 2$) primero buscamos los elementos de $k \in \Lambda''$ tales que $|k|=5$, éstos son los siguientes: $(\pm 4, \pm 3)$, $(\pm 3, \pm 4)$, $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 5)$.

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{l} (-3, 4) \\ (-4, 3) \end{array} & \begin{array}{l} (3, 4) \\ (4, 3) \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} (-4, -3) \\ (-3, -4) \end{array} & \begin{array}{l} (4, -3) \\ (3, -4) \end{array}
 \end{array}$$

Todos estos elementos forman dos H-órbitas:

sean $k_1 = (4, 3)$ $O(k_1) = \{ (\pm 4, \pm 3), (\pm 3, \pm 4) \}$

y $k_2 = (-5, 0)$ $O(k_2) = \{ (\pm 5, 0), (0, \pm 5) \}$.

Los vectores k_1 y k_2 satisfacen la condición iii) del Teorema 5.12, es decir pertenecen a la clase de $(1, 0)$ en Λ''/Λ' , o en otras palabras $f_{k_1}|_{N_0} = f_{k_2}|_{N_0} = \chi$.

1) Calculemos la dimensión de $\mathcal{X}_{T_1,r}$

$$\dim \mathcal{X}_{T_1,r} = \dim T \left[\left[L_1|_{H_{f_{k_1}}} : \text{id} \right]_{H_{f_{k_1}}} + \left[L_1|_{H_{f_{k_2}}} : \text{id} \right]_{H_{f_{k_2}}} \right]$$

$$T = \begin{array}{c} N_0 \propto H \\ \uparrow \\ \text{Ind}(\chi \cdot L) \\ N_0 \propto H_\chi \end{array}$$

entonces por el Teorema 2.7

$$\dim T = |B \setminus A| \dim(\chi \cdot L) = 4 \cdot 1 = 4$$

donde $A = N_0 \propto H$ y $B = N_0 \propto H_\chi$.

El grupo de isotropía $H_{f_{k_1}} = \{ id \}$, como $L_1 = id$,

entonces

$$\left(L_1 |_{H_{f_{k_1}}} id \right)_{H_{f_{k_1}}} = 1$$

El grupo de isotropía $H_{f_{k_2}} = \{ id, \sigma \} = H_\chi$, como $L_1 = id$

entonces

$$\left(L_1 |_{H_{f_{k_2}}} id \right)_{H_{f_{k_2}}} = 1$$

obtenemos $\dim \mathcal{X}_{T_1, r} = 8$.

2) Calculemos la dimensión de $\mathcal{X}_{T_2, r}$

$$\dim \mathcal{X}_{T_2, r} = \dim T \left[\left(L_2 |_{H_{f_{k_1}}} id \right)_{H_{f_{k_1}}} + \left(L_2 |_{H_{f_{k_2}}} id \right)_{H_{f_{k_2}}} \right]$$

ahora $H_{f_{k_1}} = \{ id \}$, entonces $L_2 |_{H_{f_{k_1}}} = id$ por lo tanto

$$\left(L_2 |_{H_{f_{k_1}}} id \right)_{H_{f_{k_1}}} = 1$$

$H_{f_{k_2}} = H_\chi$, entonces $L_2 |_{H_{f_{k_2}}} = L_2 \neq id$ por lo tanto

$$\left(L_2 |_{H_{f_{k_2}}} id \right)_{H_{f_{k_2}}} = 0$$

y así obtenemos $\dim \mathcal{X}_{T_2, r} = 4$.

BIBLIOGRAFIA

1. Barut, A. O. and Raczka, R. *Theory of Group Representations and Applications*. (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980).
2. Cornwell, J. F. *Group Theory in Physics, Vol I*. (Academic Press Inc., 1984).
3. Curtis, G. and Reiner, I. *Representation Theory of finite groups and associative algebras*. (John Wiley and Sons, New York 1962).
4. Erwin, K. *Introductory Functional Analysis with Applications*. (John Wiley & Sons, USA, 1978).
5. Hewitt, E. and Ross, K.A. *Abstract Harmonic Analysis, I*. (Springer-Verlag, Berlin, 1963).
6. Keawn, R. *An Introduction to Group Representation Theory*. (Academic Press, New York, 1975).
7. Lomont, J. S. *Applications of Finite Groups*. (Academic Press, USA, 1970).
8. Mackey, G. W. *Induced Representations in Representation Theory of Lie Groups*. (M. Atiyah, Cambridge, 1979).
9. Mackey, G. W. *Induced Representations of Locally Compact Groups and Applications: Functional Analysis and Related Field*. (ed. by F. E. Browder, Springer-Verlag, Berlin, 1970, 132-171).
10. Mackey, G. W. *Induced representations of locally compact groups, I* (Ann. of Math. 55, 1952, 101-139).
11. Mackey, G. W. *Induced representations of Groups and Quantum Mechanics*. (W. A. Benjamin Inc., New York, 1968).
12. Mackey, G. W. *The Theory of unitary group representations* (The University of Chicago Press, Chicago, 1976).
13. Mackey, G. W. *Unitary group representations in physics, probability and number theory* (Benjamin-Commings, 1978).
14. Maurin, K. *Analysis II* (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980).
15. Naimark, M. A. and Stern, A. I. *Theory of Group Representations*. (Springer-Verlag, New York, 1982).

BIBLIOGRAFIA

16. Rudin, W. *Análisis real y complejo*. (Alhambra S.A., Madrid 1979).
17. Rudin, W. *Fourier Analysis on Groups*. (Interscience Publishers, USA, 1960).
18. Serre, J. P. *Representaciones Lineales de los Grupos Finitos* (Ediciones Omega S.A., Barcelona 1970).
19. Wallach, N. R., *Harmonic Analysis on Homogeneous spaces*. (Dekker, New York, 1973).
20. Wawrzynczyk, A. *Group Representations and Special Functions* (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1984).

INDICE ALFABETICO

- Anulador, 52
- Bloch, grupo cristalográfico de, 51
 - puntual de, 51
- Brillouin, zona de, 54
- Cristalográfico, grupo, 50
- Caracter, de un grupo, 11
 - de una representación, 15
 - órbita de, 29
- Espacio dual de un grupo, 11
- Espacios de Hilbert, suma directa de, 8
- Frobenius, teorema de, 26
- Haar, medida de, derecha, 1
 - izquierda, 1
- Homogéneo, espacio, 3
- Imprimitividad, sistema de, 23
 - teorema de, 23
- Invariante, medida, 2
 - medida sobre espacios homogéneos, 4
 - subespacio, 6
- Lattice, 49
 - grupo puntual de, 50
 - recíproca, 52
- Modular, función, 3
- Multiplicidad, forma de, 25
- Peter-Weyl, teorema de, 16
- Radon, medida de, 1
- Representación, 5
 - completamente reducible, 8
 - equivalencia de, 5
 - unitaria de, 6
 - espacio de una, 5
 - factorial, 15
 - imprimitiva, 23
 - indescomponible, 9
 - inducida, 18
 - irreducible, 7
 - reducible, 7
 - suma directa de, 8
- Semidirecto, producto, 27
 - regular, 29
- SNAG, teorema de, 12
- Unimodular, grupo, 3