Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Sociales y Humanidades

Posgrado en Humanidades

“Alcances y límites del logicismo neo-fregeano de Bob Hale y Crispin Wright. Una revisión crítica de su desarrollo de la aritmética en relación con su ontología abstracta”

TESIS
que para obtener el grado de:

Maestro en Humanidades (Filosofía)

Línea académica: Filosofía de la Ciencia y del Lenguaje

Presenta:

Rodney Morales Xelhuantzi

Matrícula: 2163800497

Director:
Dr. José Jorge Max Fernández de Castro Tapia

Jurado:

Presidente:
Dr. José Jorge Max Fernández de Castro Tapia

Secretario:
Dr. Silvio José Mota Pinto

Vocal:
Dr. Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez

Iztapalapa, Ciudad de México, 15 de febrero de 2024

A mis padres, David y Catalina

Mis esfuerzos para arrojar luz sobre las cuestiones en torno a la palabra 'número' y las palabras y los signos para los números individuales parecen haber terminado en completo fracaso. Sin embargo, aquellos esfuerzos no han sido completamente en vano. Precisamente porque han fracasado, podemos aprender algo de ellos.

GOTTLOB FREGE—
Posthumous Writings. 1924

Es viejo el dicho de que Dios hizo todo con peso, medida y número. Pero existen cosas que no pueden ser pesadas, a saber, las que carecen totalmente de fuerza y poder. También hay las que no tienen partes y por lo tanto no son susceptibles de medida. Pero nada existe que no admita el número. Y así, el número es casi una figura metafísica, y la aritmética una estática universal con la que se exploran las potencias de las cosas.

GOTTFRIED WILHEM LEIBNIZ—
Historia y elogio de la lengua o característica universal. Ca. 1678

Contenido

Agradecimientos

Expreso mi mayor agradecimiento al Dr. Max Fernández de Castro por su amabilidad de dirigir este trabajo, por su dedicación semanal para la revisión crítica de algunos textos y por sus recomendaciones bibliográficas que fueron de enorme provecho en ideas clave de los dos últimos capítulos que aquí presento; todo error en este escrito es ajeno a él. Asimismo, agradezco la gentileza que tuvieron mis sinodales, Dr. Silvio Mota Pinto y Dr. Cristian Gutiérrez Ramírez, por leer este texto terminado y por las observaciones hechas que lo han enriquecido. Destaco también el apoyo invaluable de dos instituciones de suma importancia en mi desarrollo académico: la Universidad Autónoma Metropolitana, porque durante años ha sido más que una casa de estudios, y al CONACyT por el sostén económico brindado en mi estancia durante el posgrado.

Prefacio

El origen de este trabajo se encuentra en tres situaciones. La primera fue el seminario de filosofía del lenguaje, organizado ya en 2014 por el Dr. Silvio Mota Pinto en la Universidad Autónoma Metropolitana, donde se analizaban textos de filosofía analítica y, ocasionalmente, textos de, o relacionados con, la filosofía del lenguaje de Frege. La segunda fue la presentación de avances de tesis doctoral de la ahora Dra. Melissa Gutiérrez Vivanco, en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, que versaba sobre el platonismo matemático defendido por Penelope Maddy en relación con el reto epistemológico de Benacerraf. La tercera fue la visita de Bob Hale† en junio de 2015 a la UAM-I, quien tuvo la bondad de ofrecer dos charlas, una sobre su postura metafísica esencialista y otra sobre su neo-fregeanismo. Un año después empecé los primeros esbozos del presente trabajo.

Durante varios meses abandoné la redacción y la investigación que me hubieran llevado a concretar este proyecto más pronto. Las razones fueron varias, pero la de mayor importancia fue mi decepción de encontrar que, justo cuando pensé haberlo concluido, no encontraba un texto satisfactorio que analizara como yo esperaba las ideas de los neo-fregeanos. Lo que en el fondo nunca abandoné fue la intención de terminar lo que había empezado. Tras muchos meses de plantearlo, el tiempo me dio la claridad de la estructura de mis ideas principales que un escrito como el presente merece. La primera versión de este trabajo ya no existe más.

Introducción general

¿Existen los números con independencia de nuestra mente y lenguaje? ¿Cómo saberlo?

I

Mi postura en este escrito es que el proyecto logicista neo-fregeano de Bob Hale y Crispin Wright, que sostiene que la aritmética es una rama de la lógica de segundo orden, es plausible a la luz del éxito de la Aritmética Frege, pero los razonamientos que apoyan su platonismo matemático, según el cual, los números cardinales son objetos abstractos, no son concluyentes. Mi argumento se resume en aceptar la demostración del Teorema de Frege como evidencia de que la aritmética es derivable de la lógica de segundo orden más el Principio de Hume como único axioma no lógico, pero, por otro lado, señalo que la solución neo-fregeana al problema de indeterminación de la referencia de términos numéricos, que debería permitirnos un acceso epistémico a estos objetos aritméticos abstractos, es circular y, por tanto, inviable.

El texto se estructura como sigue. En el primer capítulo expongo críticamente las bases y principios que Hale y Wright toman de la obra de Frege, particularmente su idea de los conceptos sortales, el Principio de Hume, el concepto de analiticidad que surge de éste y el Principio de Contexto en la interpretación neo-fregeana que recibe el nombre de Tesis de la Prioridad Sintáctica. Mi intención ahí será explicar cómo transitamos del lenguaje común acerca de números hacia la lógica y al Principio de Hume con sus implicaciones epistemológicas y ontológicas. Quiero evidenciar cómo nuestro uso cotidiano de los números está relacionado con conceptos, lo que nos llevará a una aritmética cardinal, tal como lo pensó Frege en su etapa madura. En el segundo capítulo desarrollo una demostración de los axiomas Dedekind-Peano con base en la adaptación a la lógica moderna del lenguaje lógico que Frege pensó en *Begriffsschrift*, que no contiene el Principio de Hume. Asimismo, ofrezco una demostración del isomorfismo de un modelo para esta aritmética, que llamaré Aritmética Begriffsschrift, respecto de un modelo estándar. Allí observaré que hay una versión de logicismo que no tiene compromisos ontológicos con los números como objetos. También discuto algunos problemas en torno al estatus lógico de la lógica de segundo orden, y paso después a introducir el Principio de Hume para tener una nueva demostración de los mismos axiomas aritméticos, conocida como Teorema de Frege. En este punto acepto que es necesario este principio para la prueba de que existen infinitamente muchos números, lo que sugiere un compromiso ontológico con tales objetos. En el tercer capítulo analizo el Problema de César, reviso los intentos de Frege y los neo-fregeanos por superarlo, y critico los argumentos de los últimos, basados en los conceptos sortales. En esta parte argumentaré que, a pesar de lo atractiva que es la aparente solución neo-fregeana a dicho problema, en realidad nos lleva al mismo punto de partida, a saber, ni el Principio de Hume ni los conceptos sortales ofrecen una vía para determinar si un término singular numérico refiere a un número. Concluyo esta tercera parte con tres intentos por revivir el proyecto fregeano más allá de las interpretaciones de Hale y Wright.

No me inclino por un nominalismo matemático; únicamente pretendo defender que una ontología para la aritmética, de acuerdo con el neo-fregeanismo, no tiene bases sólidas.

II

Llamamos *logicismo fregeano* a la tesis de que las verdades aritméticas son verdades de la lógica.[1] Esta postura fue defendida por Gottlob Frege en *Die Grundlagen der Aritmetik* (en lo que sigue, simplemente *Grundlagen*). Para él, el lenguaje lógico es el lenguaje del pensamiento puro, libre de las intuiciones del espacio y del tiempo —a la manera de Kant— y de experiencias del mundo sensible. En su primera gran obra de 1879 se manifiesta esto desde el título: *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (*Conceptografía: un lenguaje de fórmulas, construido a semejanza del lenguaje aritmético, para el pensamiento puro*). En ella desarrolla un lenguaje lógico de orden superior que tiene el propósito ser el fundamento de la aritmética. Su proyecto logicista, sin embargo, no se extiende a la geometría. La razón es que las verdades aritméticas son para Frege tan generales como las de la lógica, con la diferencia de que las primeras son derivables de las segundas, mientras que las verdades de la geometría, si bien son generales, dependen de la intuición del espacio.

Además de contener una demostración de los axiomas aritméticos desde la lógica, el logicismo también tiene implícita una epistemología influenciada por la filosofía racionalista de Descartes, Spinoza y Leibniz, y por la filosofía trascendental de Kant. La influencia es evidente en las múltiples referencias en *Grundlagen* a tales filósofos, sobre todo a los tres últimos. Para un racionalista, las únicas verdades fiables son aquellas sumamente generales pertenecientes a la razón, como los principios de no contradicción, de razón suficiente, etc., mientras que las verdades particulares cuya fuente son los hechos asequibles a los sentidos son dudosas y contingentes. Leibniz fue el primero en nombrar esta distinción. Desde el

---

[1] En el desarrollo de este trabajo se aclara que el logicismo fregeano es distinto del neo-fregeano. Una diferencia crucial entre ambos es que el primero reduce, además de verdades, objetos aritméticos a objetos lógicos, particularmente porque Frege piensa que los números son rangos de valores, que pertenecen a la lógica; Hale y Wright no comparten esta postura. V. *infra*. p. 19 y ss.

empirismo, Hume le siguió. Se las llamó *verdades de razón* y *verdades de hecho*, respectivamente. Ambas evolucionaron y llegaron a la filosofía de Kant nombradas como *juicios analíticos* y *juicios sintéticos*. Para el filósofo de Königsberg, los juicios analíticos, cuando son *a priori* (cuando no dependen de la experiencia), son verdades que no extienden nuestro conocimiento, porque el predicado no dice más que lo que ya está contenido en el sujeto; los sintéticos *a posteriori* (que dependen de la experiencia) sí lo hacen porque introducen la intuición del espacio y del tiempo, y los sintéticos *a priori*, como los de la aritmética o la geometría, también lo extienden por la misma razón, aunque sin apoyo de la experiencia. El logicismo de Frege sostiene que las verdades de la lógica son sumamente generales, como las verdades de razón, y que de ellas se pueden deducir otras, como las de la aritmética. Así, el conocimiento de las verdades de la lógica justifica el conocimiento de aquellas que se deducen de ellas siempre que exista una cadena de inferencias. De acuerdo con esto, y contrario a Kant, Frege piensa que las verdades analíticas *a priori* sí extienden nuestro conocimiento, y prueba de ello está en la aritmética. Frege crea un sistema de lógica de orden superior en el que las leyes de la aritmética son deducibles desde un conjunto de axiomas, definiciones y reglas de inferencia, y en el que ninguna intuición, hecho contingente, o experiencia dudosa, tienen cabida. En tal sistema sólo está el pensamiento puro. Cada vez que se demuestra algo en lógica, como puede ser una proposición aritmética, el conocimiento se expande sin nada ajeno a ese pensamiento. Así, el logicismo fregeano está íntimamente relacionado con la analiticidad de la aritmética, o sea, con la epistemología de las verdades aritméticas.

El platonismo matemático es la tesis de que los números son objetos *sui generis*. Frege es considerado un platonista por su postura de que los números son objetos auto-subsistentes. Sin embargo, este adjetivo para las entidades matemáticas no abarca la concepción que Frege tuvo de ellas, porque entidades como un bandoneón, una bacteria o un planeta también son auto-subsistentes, pero no como él lo pensó acerca de los números. Podrían mejor llamarse, como lo hacen Hale y Wright, *objetos abstractos*. Un objeto abstracto es una entidad individual, atemporal, que no ocupa un espacio y no tiene relaciones causales con otras entidades. Hay tres argumentos para llegar al platonismo mediante una vía fregeana: 1) el uso de expresiones precedidas por un artículo definido sugiere que refieren a objetos, de modo que, cuando hablamos sobre *el* número dos, por ejemplo, hablamos de un objeto, así como también hay referencia a un objeto celeste cuando hablamos sobre *el* planeta más cercano a la Tierra; 2) los enunciados de la aritmética no son verdades *simpliciter*, son verdades necesarias (¿lógica o metafísicamente?), así que sus hacedores de verdad tienen que ser objetos no contingentes; 3) en la ontología solo incluimos aquellos objetos que tengan un criterio de individuación, y los números encuentran el suyo en el Principio de Hume, por lo que pertenecen a nuestra ontología.

El mayor de los problemas que enfrenta el platonismo es de tipo epistémico, y consiste en justificar el conocimiento de que *hay* objetos matemáticos abstractos. En efecto, ¿cómo podemos conocer una clase de objetos que no se presentan en nuestra experiencia porque no puede tener relaciones causales con nuestros sentidos dada su naturaleza abstracta? Esta es una cuestión que todo platonista debe responder y que ha llevado a filósofos y matemáticos a respuestas oscuras, como la de Kurt Gödel, para quien los objetos matemáticos son accesibles gracias a lo que él llama «intuición matemática» (aunque no aclara qué significa esto), o como la de Georg Cantor, que concibió los conjuntos matemáticos como el εἶδως de Platón, pero nunca justificó su conocimiento. Aunque algunos filósofos contemporáneos (Paul Benacerraf o Hartry Field, son ejemplos representativos) han elaborado y reelaborado argumentos ingeniosos que cuestionan los argumentos del acceso epistémico a objetos matemáticos, la verdad es que Frege ya había observado un siglo antes el problema, y para su solución propuso dos principios que nos llevan al conocimiento de objetos abstractos: el de Hume y el de contexto.

El Principio de Hume es un principio de abstracción. Un principio de abstracción es un bicondicional cuyo esquema es:

$$\forall\Phi\forall\Psi\ \S\Phi = \S\Psi \leftrightarrow \Phi \approx \Psi$$

El símbolo «§» es un operador cuyos argumentos son predicados; cuando el lugar de su argumento lo ocupa un predicado, o sea, una variable o literal que representa una propiedad, se tiene un término singular. Así, la expresión «§Φ» es un término singular. La identidad «=» es una relación entre objetos y, por lo anterior, puede valer entre los §-términos, que representan objetos. El símbolo «≈» significa una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva). En este sentido, el esquema nos dice que hay una identidad entre objetos representados por los §-términos si y solo si existe una relación de equivalencia entre las propiedades Φ y Ψ. Decimos que una postura es abstraccionista si usa instancias del esquema anterior para propósitos filosóficos. Frege enunció en *Grundlagen* dos principios de abstracción que el neo-fregeanismo ha retomado para revivir su proyecto lógico-filosófico. El primero es el de Hume, que dice que, dados dos conceptos *F* y *G*, el número de los *F*´s es igual al número de los *G*´s si y sólo si hay una relación uno a uno entre los objetos que satisfacen *F* y los que satisfacen *G*, simbolizado como:

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$$

El segundo es el de la dirección de las paralelas, que dice que la dirección de la línea *a* es idéntica a la de la línea *b* si y solo si *a* y *b* son paralelas; en símbolos:

$$\mathrm{D}\,(a) = \mathrm{D}\,(b) \leftrightarrow a \,//\, b$$

La tradición filosófica ha considerado que en *Die Grundgesetze der Aritmetik* (en lo subsiguiente, solo *Grundgesetze*) Frege tiene una tercera instancia, a saber, su Ley Básica V:

$$\grave{\varepsilon}\,(F) = \grave{\varepsilon}\,(G) \leftrightarrow \forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$$

En palabras: el rango de valores (también llamado *extensión*) del concepto F es idéntico al del concepto G si y solo si F y G son coextensionales. Su estatus como principio de abstracción no es definitivo, pues hay argumentos que lo contradicen y que revisaré en el capítulo 3.

Lo destacable de estos principios es que engloban y relacionan lógica, epistemología y ontología. En particular, el abstraccionismo neo-fregeano prioriza la fórmula $F \approx G$ por ser de carácter lógico y con ella pretende justificar el conocimiento de identidades numéricas cuya verdad implica, desde su punto de vista, una ontología sobre números. Sin embargo, es cuestionable cómo podemos llegar a conocer entidades abstractas desde la lógica, cuando esta ciencia tiene como objeto de estudio la evaluación de argumentos como válidos o inválidos y, por tanto, no trabaja con ningún tipo de entidades matemáticas. Dicho de otro modo: ¿en qué momento del tránsito de la lógica a la aritmética llegamos a adquirir un compromiso ontológico con números? Si la aritmética efectivamente trata acerca de objetos abstractos y ellos son los hacedores de verdad de sus enunciados, y si la aritmética está contenida en la lógica, entonces, o la lógica también trata sobre objetos abstractos o el logicismo es un error. Me parece que hay más de una manera de deshacer el disyunto anterior.

El Principio de Hume resulta dudoso sobre la base de que la verdad del bicondicional es una estipulación. Como tal, tiene un carácter arbitrario, aunque no deja de ser plausible que podamos explicar la identidad de los números cardinales mediante relaciones de equivalencia. Nuestra consciencia sobre la estipulación del bicondicional cortaría el puente entre lógica y ontología que traza el Principio de Hume y separaría ambas partes para separar igualmente sus objetos de interés. Es decir, debemos tomar en cuenta que la lógica de segundo orden, que aparece en el lado derecho del bicondicional del Principio de Hume, no tiene entre sus intereses los objetos matemáticos; que la identidad de los #-términos del lado izquierdo del bicondicional sí tiene, o al menos, sugiere una ontología de números, y que la relación entre ambos lados es un asunto de estipulación.

Hasta donde sé, una buena parte de la literatura filosófica ha ignorado o relegado los logros de *Begriffsschrift* para desarrollar la aritmética. Pienso que esta obra tiene un gran valor para discutir si realmente hay un vínculo entre lógica y ontología en el logicismo fregeano. Pues lo que yo llamaré Aritmética Begriffsschrift (la teoría aritmética que surge de la teoría de secuencias de la *opera prima* de Frege) muestra que, de la lógica de segundo orden se deducen las leyes de la aritmética, pero no hay un compromiso ontológico con los números como objetos porque no hay un criterio de individuación para ellos, como lo es el Principio de Hume. No obstante, podemos justificar lógica y epistémicamente las leyes aritméticas partiendo desde la conceptografía fregeana. Es así que el logicismo puede separarse de la ontología abstracta, pero no así de la analiticidad en su sentido epistemológico.

Esta propuesta tiene un obstáculo. En el prólogo a *Begriffsschrift* Frege escribe que su lenguaje lógico pretende «progresar hasta el concepto de número [*Zahlbegriff*]». Aquí la palabra alemana *Zahl* se traduce como *número*. Más tarde, en *Grundlagen* y *Grundgesetze*, aparece la palabra alemana *Anzahl* para significar *número cardinal*. El cambio en el vocabulario técnico de Frege refleja el desenvolvimiento de su pensamiento desde una aritmética estructural hasta una cardinal. En su obra de 1879 no encontramos un medio para «medir» los conceptos en relaciones biunívocas con otros, por lo que la cardinalidad no es concebible. Es solo hasta 1884 que Frege llega al pensamiento de que los enunciados que contienen números son, en el fondo, afirmaciones sobre conceptos, y el Principio de Hume manifiesta este avance respecto de *Begriffsschrift*. Como veremos en el capítulo 2, el lenguaje de segundo orden y las definiciones fregeanas formuladas en *Begriffsschrift*, en particular la de ancestral, nos permiten definir el concepto de número natural que abre una vía para construir una estructura linealmente ordenada y un modelo estándar para la aritmética, pero es imposible tener una explicación del concepto de número cardinal. Para esto será necesario el Principio de Hume.

El pensamiento de que los números cardinales están íntimamente relacionados con conceptos nos lleva también a la teoría de los conceptos sortales. Pues, según expondré en el primer capítulo, no cualquier concepto tiene cardinalidad, sólo la tienen los llamados *sortales*. De acuerdo con Hale y Wright, nuestra referencia a objetos, abstractos o concretos, siempre está mediada por conceptos o propiedades que les pertenecen. Por ejemplo, en la referencia a Alejandro Magno y a Bucéfalo deben estar presentes los conceptos PERSONA y

CABALLO, respectivamente, para poder diferenciar uno de otro, pues lo contrario nos llevaría a inferir que se trata de uno y el mismo objeto. Para el neo-fregeano, lo anterior ocurre de manera natural. Cuando un niño señala ostensivamente un objeto, tiene una forma de diferenciar un *tipo* de objeto de otro; cuando señala este (juguete), sabe que el objeto es de diferente tipo que esta (mesa), y aunque aún no tenga palabras para su diferencia, ella está presente en los conceptos o propiedades de sus correspondientes objetos. A medida que crecemos y nuestro raciocinio es más abstracto, no nos limitamos a señalar objetos de cierto tipo, los relacionamos uno a uno con objetos de otros conceptos. Aprendemos a contar relacionando los dedos de nuestras manos con numerales o nombres de los números, o sea, nuestro conteo ocurre por una relación de equivalencia, y ésta sólo es posible si hay conceptos sortales.

Por un lado, esta teoría es útil para la (aparente) solución neo-fregeana al Problema de César y, por otro, apoya una teoría esencialista que defiende la existencia de entidades universales. Específicamente, el Principio de Hume es tomado por el neo-fregeano como un acceso epistémico a un ejemplo de una propiedad esencial, a saber, el concepto NÚMERO. Dado que éste se explica por relaciones lógicas, cuya verdad es independiente del mundo contingente, el neo-fregeano infiere que el concepto NÚMERO es una propiedad no contingente y, por tanto, esencial, para ciertas entidades. Puesto que no es mi propósito discutir el esencialismo derivado de los principios de abstracción, ignoraré el asunto. Lo que sí estimo como relevante en la discusión sobre la ontología de la aritmética es el Problema de César. Los conceptos sortales juegan un papel medular en la solución de esta objeción, así como en el desarrollo de la aritmética cardinal. Para Hale y Wright la dificultad estriba en el hecho de que el concepto NÚMERO introducido por el Principio de Hume no tiene límites claros para su dominio, de tal modo que no es claro cuáles objetos son números cardinales y cuáles no, así que si un objeto extraño a la aritmética como el conquistador Julio César es un número (cae bajo el concepto) no es algo que se pueda determinar. Pero para el neo-fregeanismo, los conceptos sortales solucionan el enigma: dado que un concepto sortal debe tener un criterio de exclusión de todos aquellos objetos que no caigan en él, entonces el de NÚMERO CARDINAL debe poder explicar cómo y por qué Julio César no es un número. En el capítulo 3 ofrezco un argumento para mostrar que el del neo-fregeano es circular, así como otros que muestran que su conclusión no se sigue, de modo que el Problema de César persiste en el neo-fregeanismo y en la teoría de los conceptos sortales.

III

En lo siguiente incluyo tecnicismos necesarios para entender el pensamiento abstraccionista de Hale y Wright, así como el del mismo Frege. Usaré algunos signos y cambios tipográficos por mor de la claridad en el curso de la lectura. La referencia a conceptos en el transcurso del discurso aparecerá escrita en versalitas; por ejemplo, cuando hablo de los conceptos NÚMERO, PLANETA, PERSONA, etc. También voy a indicar conceptos mediante el uso de corchetes, particularmente cuando se construyen con fórmulas del lenguaje formal; en este sentido, [x: ...x...] es el concepto SER UN x TAL QUE... Otro uso de las versalitas es el que empleo al escribir las palabras «teorema», «axioma», «lema», «definición» y otras similares para el lenguaje natural que aparece en las demostraciones. Todo el lenguaje lógico de Frege se ha modificado e interpretado en el de la lógica moderna, salvo en los casos en los que no hay símbolos modernos correspondientes. Para referir a fórmulas en el orden del lenguaje natural usaré los símbolos (⌜), (⌝) para separarlas del resto del texto, excepto cuando tratemos en su mayor parte el lenguaje formal en el capítulo 2. Me apoyo de las letras griegas dseta (ζ) y xi (ξ) como letras esquemáticas para referir a funciones y poder marcar una diferencia con los valores de éstas. Así, ⌜$f(\xi)$⌝ refiere a una función, mientras que ⌜$f(a)$⌝ es un término del lenguaje formal. Las obras de Frege serán mencionadas por sus títulos originales. Las traducciones de las citas textuales son mías, no así las de Frege (2016*a*). La palabra «sortal», extraña a la lengua española, y cuya raíz inglesa es «*sort*» (clase o tipo), la he incluido como el adjetivo hispanizado «sortal» y su significado se entenderá en el contexto de la exposición. Los nombres de algunos elementos importantes dentro de la discusión los escribiré con mayúscula inicial como nombres propios, por ejemplo, Principio de Hume, Tesis de la Prioridad Sintáctica o Problema de César, porque no se trata de nombres genéricos.

Capítulo 1. Las bases filosóficas del logicismo neo-fregeano

Introducción

En la culminación de su pensamiento matemático y filosófico, Gottlob Frege incluyó la Ley Básica V de *Grundgesetze* como uno de sus axiomas lógicos que demuestran las leyes de la aritmética. Tras la aparición de la Paradoja de Russell, que nace por esta Ley V, Frege abandonó parcialmente su proyecto logicista. Más de medio siglo después, Crispin Wrigth y Bob Hale retoman algunos principios fregeanos para revivir el logicismo que Frege pensó hasta 1884 en *Grundlagen*, a saber, los conceptos sortales, el Principio de Hume y el Principio de Contexto. Este capítulo tiene el propósito de explicar y exponer críticamente dichos fundamentos para conocer el renacimiento logicista en sus fundamentos.

1.1 Los conceptos sortales

1.1.1 Entidades saturadas y entidades insaturadas

Según William Demopoulos[2], Frege muestra que los análisis aritméticos de Dedekind y Peano surgen del uso cotidiano que hacemos de los números en relación con nuestro banco ordinario de conceptos. Para comprender los fundamentos de la aritmética propuestos por Frege y retomados por los neo-fregeanos, vamos a comenzar por explicar dicha relación.

En la obra de Frege no encontramos una definición de lo que significa ser un concepto o un objeto, pues él sostiene[3] que se trata de dos nociones básicas o primitivas, y que las nociones así consideradas son indefinibles; no obstante, sí existe una aproximación intuitiva de que son entidades referidas por expresiones lingüísticas. Por un lado, los conceptos son los referentes de los predicados, mientras que, por otro, los objetos lo son de los términos singulares. En el contexto de la filosofía de Frege, los objetos deben entenderse como individuos que pueden tener distintos modos de existencia: son físicos o abstractos; y los conceptos deben entenderse no como entidades mentales, es decir, ideas o productos del acto de pensar, sino como propiedades que tienen los objetos, susceptibles de ser aprehendidas por el pensamiento y, por tanto, objetivas y reales. Por *término singular* vamos a entender nombres propios, pronombres, demostrativos y descripciones definidas, esto es, aquellas expresiones que signifiquen individuos. Los predicados que aquí se toman

[2] Demopoulos, 2000, p. 221
[3] Frege, 2016*a*, p. 278.

en cuenta son nominales (de la forma «*A* es *B*», como en «Juan es profesor») o verbales (de la forma *sujeto + verbo,* como en «Juan tiene piernas»).[4] Como es bien sabido, Frege se opuso a la introducción del psicologismo en la aritmética, de suerte que lo que tenga que contar como fundamento para esta ciencia tendrá que ser ajeno a los productos de la mente humana y, en consecuencia, se tendrá que adoptar una postura realista. Por ello, conceptos y objetos son entidades objetivas y son parte de la ontología fregeana.

Para conocer la naturaleza de ambas entidades y su relación mutua, es preciso analizar el comportamiento que tienen sus representantes lingüísticos en las oraciones. En una oración, un predicado es lo que se afirma acerca de un sujeto y un sujeto es eso sobre lo cual recae el predicado. Tomemos como ejemplo la oración verdadera «Carlos Salinas es calvo». Si en ella eliminamos el nombre propio «Carlos Salinas», lo que queda es el predicado «... es calvo» que tiene un espacio vacío que sólo pueden ocupar términos singulares para formar oraciones verdaderas o falsas. Así, podríamos sustituir el nombre propio «Carlos Salinas» por «Enrique Peña Nieto» para tener, en este caso, una oración falsa. Esto ilustra que un predicado es independiente del sujeto y por sí mismo no afirma nada, pero puede decir algo de cualquier sujeto y formar así oraciones con un valor de verdad. En la medida que los predicados refieren a conceptos, el comportamiento sintáctico de los primeros manifiesta lo que Frege llamó *insaturación* de los segundos, que es el hecho de que los conceptos son entidades incompletas o insaturadas, que se completan cuando se relacionan con un objeto, de la misma forma como los predicados tienen un vacío que los términos singulares pueden llenar. Entonces, que un concepto sea insaturado significa que puede acoger cualquier objeto para su saturación. Por el contrario, los objetos son para Frege entidades saturadas porque no pueden acoger a otros objetos. Cuando un objeto satura un concepto, decimos que cae bajo él, y sus representantes en la esfera del lenguaje forman oraciones con un valor de verdad. Eso explica por qué, aunque en principio Enrique Peña Nieto puede saturar el concepto SER CALVO, la oración que resulta de esta saturación es falsa, pues de hecho Peña Nieto no es (no tiene la propiedad de ser) calvo.

El origen de la idea de la insaturación de los conceptos está en *Begriffsschrift*. En los parágrafos nueve y diez Frege analiza el comportamiento sintáctico de las funciones y sus argumentos, dos elementos de la gramática de la lógica. En ese pasaje no se ha contemplado aún la existencia de objetos y conceptos como lo que significan algunos elementos del

---

[4] El criterio para los predicados que vamos a explicar es que representen propiedades de los individuos *y* que respondan la pregunta *cuántos individuos tienen la propiedad* X. También debe considerarse que, en este análisis, no se incluyen las oraciones impersonales, como «llueve» o «se piensa que Enrique VIII mató a su esposa» por la razón anterior.

lenguaje, es decir, como entidades, pero sí la diferencia entre funciones y argumentos a partir de su relación sintáctica. Frege explica:

> *Si en una expresión cuyo contenido no necesita ser juzgable, aparece un símbolo simple o compuesto en uno o más lugares, y lo pensamos como remplazable por algo distinto en todos o en algunos de esos lugares, pero siempre por lo mismo, entones, a la parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte remplazable, su argumento.*

Esto significa que, similar a como los objetos saturan conceptos en la realidad, en el lenguaje las variables de primer orden (los argumentos) llenan el espacio vacío de las funciones. Pese a que en esta etapa temprana de su pensamiento Frege está lejos de proponer una ontología que incluye conceptos y objetos, creo que no es osado decir que las funciones son expresiones insaturadas en el sentido de que tienen un espacio vacío que ocupan los argumentos. De hecho, en la etapa madura de Frege, los conceptos son funciones que, cuando están saturadas, tienen como valor un valor de verdad. Empero, las palabras «saturado» e «insaturado» no aparecen en esta primera obra de 1879.

1.1.2 Los criterios de un concepto sortal

El interés en la relación de saturación de objetos a conceptos reside en que en ella se origina la concepción fregeana de los números cardinales. Empero, no todos los conceptos son apropiados para su concepción de los números.

Max Freund (2019, pp. 1-10) propone cuatro criterios para saber qué tipo de conceptos consideramos al pensar en los números cardinales: uno para contar, donde tiene sentido preguntar cuántos objetos caen bajo un concepto dado; uno de clasificación, que indica cuáles objetos caen en ese concepto; uno de identidad conceptual, que menciona si el concepto bajo el que cae un objeto es idéntico al concepto bajo el que cae otro objeto; y uno de individuación, que nos ayuda a discernir todos los objetos que caen bajo un mismo concepto[5]. Cada uno de estos criterios está estrechamente relacionado. El criterio para contar supone el de individuación y el de identidad, pues si, por un lado, fuéramos incapaces de discernir dos objetos al confundirlos, entonces tomaríamos ambos como si fueran uno solo, y si, por otro lado, no supiéramos que un objeto cae bajo el mismo concepto que otro,

[5] Como veremos, los neo-fregeanos solo mencionan dos criterios, a saber, el de identidad y el de aplicación (Wright, 1983, p. 109). Este último va de la mano con el de clasificación, pues, como Freund explica, clasificar objetos implica aplicarles un concepto (2019, p. 4). Los criterios que los neo-fregeanos no mencionan están detrás de los que sí mencionan.

entonces correríamos el riesgo de contar menos objetos que los que de hecho caen en ese concepto. A su vez, el criterio de identidad conceptual supone el de clasificación, porque la función de éste es determinar a cuáles objetos se aplica un concepto y, por tanto, ofrece la pauta para saber si aquellos objetos caen bajo el mismo concepto. Los conceptos que tienen estos criterios se llaman *sortales*.

Hay otros conceptos que tienen algunos de estos criterios, pero que no pueden llamarse propiamente sortales porque carecen del criterio para contar. Los sustantivos de masa como ORO y AGUA se cuentan entre ellos, pues también clasifican e identifican, pero nunca tiene sentido hacer con ellos una pregunta del tipo *cuántos*. Así, decir que un objeto es oro porque tiene el número atómico 79 (criterio de clasificación) o preguntarse si el líquido que está en mi vaso es del mismo tipo que el que está en el río (criterio de identidad) tiene sentido, pero éste se pierde si preguntamos cuántos oros o aguas hay. Es cierto que con los sustantivos de masa no solo está la identidad sortal, sino también la identidad numérica, pero de eso no surge el concepto NÚMERO CARDINAL como ocurre con los conceptos sortales. Usaremos la identidad numérica al decir que el oro de mi anillo de bodas es el mismo que el de una pepita, o que el agua dentro de mi vaso es la misma que la que ahora yace derramada sobre el piso, pero de eso no se sigue que tenga sentido responder cuántos oros tiene el anillo, o cuántas aguas tiene el vaso. Similarmente ocurre con los conceptos OBJETO, COSA y aquellos que representan colores. Los dos primeros de estos tres conceptos son ambiguos y su respuesta a la pregunta de *cuántos* es imprecisa, pues los objetos se componen de partes que también son objetos (si señalo un libro y pregunto cuántos objetos hay, podría referirme al libro, o a sus páginas, o a sus palabras, o a sus letras, etc. y en cada caso la respuesta sería un número distinto). Otro tanto ocurre con los conceptos de colores. Entonces, un concepto es sortal solo si tiene el criterio para contar, que presupone los otros tres criterios, pero de los otros tres no se sigue el primero.[6]

El corazón del logicismo neo-fregeano son los conceptos sortales. Sin embargo, no considera explícitamente los cuatro criterios de Freund mencionados arriba, sino únicamente dos:

> El dominio de cualquier concepto general aplicable a objetos implica saber distinguir entre objetos a los cuales se aplica y objetos a los cuales no —implica una comprensión de lo que Dummett llamó *criterio de aplicación* para un concepto. Lo que marca la

[6] Johnatan Lowe (2009, p. 14) decide llamar sortales también a los sustantivos de masa, a pesar de que acepta que no tienen un criterio para contar. Para los propósitos que buscamos aquí, esto es inaceptable.

> diferencia de un concepto sortal de otros que son meramente aplicables es esa capacidad que un concepto sortal *F* implica, además de saber qué cuestiones de identidad y distinción establece entre sus instancias [...] En otras palabras, los conceptos sortales se distinguen de otros por su asociación con lo que Frege llama *criterio de identidad* (Hale y Wright, 2001, p. 14).

Lo que el neo-fregeano llama *criterio de aplicación* es similar a lo que arriba se llamó *criterio de clasificación*. Detallar las sutilezas de la diferencia entre ambos es superfluo, pues basta con decir que la clasificación de un concepto comprende también su aplicación. Lo que quiero destacar es que los conceptos sortales neo-fregeanos no son otro tipo de conceptos porque desatienden algunos criterios, más bien, los criterios de aplicación e identidad que menciona el neo-fregeano suponen los otros mencionados por Freund. En esta cita el neo-fregeano dice que la característica distintiva de los conceptos sortales es el criterio de identidad (que arriba se llamó *criterio de individuación*), y eso es porque él es necesario para el criterio para contar (que no considera explícitamente el neo-fregeano), del cual emana el concepto de número.

1.1.3 Conceptos sortales, lógica y números cardinales

Frege sostuvo la tesis fundamental del logicismo de que el contenido de un enunciado sobre un número es la predicación sobre un concepto (*Grundlagen* §55, *Grundgesetze* I, ix). Hay diferentes modos en que un número puede aparecer en una oración del lenguaje natural, por ejemplo: «Andrés, Julio y Roberto son tres hombres», «Hay cinco nueces sobre la mesa» o «Marte tiene dos lunas». Cada una de estas oraciones relaciona un concepto (HOMBRE, NUEZ SOBRE LA MESA y LUNA DE MARTE, respectivamente) con un número, y esta relación solo es posible porque se trata de conceptos sortales. En *Grundlagen* §57 Frege muestra que la última oración[7]:

> (***A***) Marte tiene dos lunas

puede ser parafraseada como una identidad:

> (***B***) 2 es el número de lunas de Marte.

(Una paráfrasis similar aplica para las otras oraciones). Es evidente que ambas oraciones, ***A*** y ***B***, son semánticamente equivalentes, puesto que tienen el mismo contenido proposicional,

[7] En realidad, su ejemplo dice «Júpiter tiene cuatro lunas». Decido cambiar la oración original porque actualmente sabemos que el planeta más grande de nuestro sistema solar tiene más de cuatro satélites.

aunque la gramática y la sintaxis sean notoriamente diferentes. En la paráfrasis ***B*** de la oración ***A*** se observa el planteamiento de Frege: en ***B*** hay una predicación sobre un número, a saber, que el concepto LUNA DE MARTE cae bajo el concepto de orden superior de NÚMERO CARDINAL. Este concepto, también sortal, subsume a todos los conceptos sortales bajo los cuales caen algunos objetos o incluso no cae ninguno. La transformación de una oración en otra ocurre solo porque hay criterios sortales que permiten llegar al concepto NÚMERO CARDINAL bajo el que cae el concepto LUNA DE MARTE, lo cual no ocurre con la oración «Marte tiene agua», precisamente porque AGUA no tiene un criterio para contar.

De la pregunta de cuántos objetos caen en un concepto de primer orden surge el concepto NÚMERO. Si preguntamos cuántas lunas tiene Marte y observamos que, de acuerdo con el criterio de clasificación del concepto LUNA DE MARTE, sólo se aplica a los objetos Deimos y Fobos, y que, según el criterio de identidad sortal, ambos caen bajo el mismo concepto, y, por último, que Deimos es numéricamente distinto de Fobos en conformidad con el criterio de individuación, entonces la respuesta es 2, y esto es lo que dice la oración ***B***. La ausencia de alguno de estos criterios tendría como consecuencia una respuesta indeterminada o falsa para la cuestión de arriba. Esto significa que, como todo concepto sortal tiene los cuatro criterios mencionados, para todo concepto sortal hay un único número que le corresponde.

Si el criterio de contar presupone el de clasificar, entonces antes de relacionar números con conceptos hay que saber cuáles objetos caen bajo éstos, si acaso alguno lo hace. En efecto, hay una buena cantidad de conceptos cuya saturación es nula. Llamaré *vacíos* a los de este tipo. Tomemos como ejemplo el concepto UNICORNIO y veamos cómo surge de su criterio de clasificación una lógica antes que un término numérico. En principio, cualquier término singular es sintácticamente adecuado para formar una oración con el predicado «... es unicornio». Hay una larga lista de oraciones formadas con él: «Shakespeare es unicornio», «el mamífero más grande del planeta es unicornio», «yo soy unicornio» etc., pero en todos los casos resulta una falsedad, pues en la saturación de mi predicado ninguno de los objetos referidos por los términos singulares logra su cometido, porque el concepto no se aplica a ninguno de ellos. Sea x una variable de objeto que represente a cualquier individuo de un universo del discurso. Entonces, en una lógica clásica de predicados esto se presenta así:

(1) $\forall x\,(\neg \text{UNICORNIO}\,(x))$

La equivalencia lógica de (1) es:

(2) $\neg\exists x\,(\text{UNICORNIO}\,(x))$

cuya traducción es simplemente que no existen los unicornios, es decir, el dominio de aplicación del concepto es vacío.

Hasta este punto no ha aparecido un número correspondiente al concepto UNICORNIO, pero su criterio para contar no tiene reparo en hacer que así sea. La respuesta a la pregunta de cuántos unicornios hay es cero, de lo que se sigue la verdad de la oración:

(3) 0 = el número de unicornios

Entonces, hay claramente una relación entre las oraciones cuantificadas y las de identidad que tienen términos numéricos. Tanto la existencia como el concepto de número subsumen a los conceptos sortales de primer orden, y en tanto que lo hacen tienen una relación. Por tanto, es válido el bicondicional:

(4) $\neg\exists x$ (UNICORNIO (x)) $\leftrightarrow$ (0 = el número de unicornios)

que, en su forma general, adquiere el rigor del siguiente

LEMA[8]: $(\neg\exists x\, F(x)) \leftrightarrow$ (0 = el número de F´s)

En consecuencia, si no existe un objeto bajo un concepto, su número es cero; pero si existe al menos uno, entonces su número será mayor que cero.[9]

Entre todos los conceptos sortales vacíos existe uno de naturaleza lógica propuesto por Frege en *Grundlagen* §74: DISTINTO DE SÍ MISMO. Desde luego, es cierto que ningún objeto cae bajo este concepto, puesto que todo es idéntico a sí mismo. Entonces, ya que no hay objetos distintos de sí mismos, tenemos la primera:

DEFINICIÓN**:** *cero es el número de objetos distintos de sí mismos*.

A partir de esta definición, es fácil definir recursivamente todos los números naturales. Como cero es igual a sí mismo, cero cae bajo el concepto IGUAL A CERO; puesto que ningún otro objeto más que cero lo hace, el número que le corresponde es 1. Recursivamente: 2 es

---

[8] *Demostración*. **→)** Supongamos $\neg\exists w\, F(w)$. Por la ley de la identidad: $\neg\exists y\, [x\colon x \neq x]\, (y)$. Entonces: $F \approx [x\colon x \neq x]$. Por PH: $\#F = \#[x\colon x \neq x]$. Por definición de cero: $0 = \#F$. **←)** Supongamos $\#F = 0$. Por definición de cero: $\#\mathrm{F} = \#[x\colon x{\neq}x]$. Por PH: $\mathrm{F} \approx [x\colon x \neq x]$. Por la definición de equinumerosidad: existe una relación R que relaciona cada objeto que cae en $[x\colon x \neq x]$ con uno que cae en F y viceversa. Por ley de identidad: $\neg\exists w\, [x\colon x{\neq}x]w$. Por tanto, $\neg\exists x\, F(x)$. Adelanto la demostración del Lema que será más clara con las definiciones que a parecen en lo subsiguiente. (Véase Zalta, 2022).

[9] Frege vincula la existencia de objetos, que necesariamente caen en algún o algunos conceptos, con los números cardinales. En *Grundlagen* §53 declara: «La existencia es análoga al número. En efecto, la afirmación de la existencia [de objetos bajo un concepto] no es otra cosa que la negación del número cero».

el número de objetos que caen en el concepto MENOR O IGUAL A 1, porque sólo el cero y el uno lo hacen; 3 es el número de objetos que caen bajo el concepto MENOR O IGUAL A 2, pues 0, 1 y 2 tienen esta propiedad, etc. En general: *n* es el número de objetos que caen en el concepto MENOR O IGUAL A *n-1* cuando *n*>1.

Así, con los conceptos representados por predicados y con los objetos representados por variables de primer orden es posible desarrollar un lenguaje lógico de primer orden, pero sólo con los conceptos sortales podremos tener un nexo entre los números cardinales y la lógica que formaliza nuestro lenguaje natural.

1.1.4 Equinumerosidad de los conceptos sortales

Existen muchos conceptos que comparten el mismo número. Por ejemplo, el número 2 no pertenece únicamente al concepto SER MENOR O IGUAL A UNO, sino también a POLO DEL PLANETA TIERRA, LUNA DE MARTE, AUTOR DE *PRINCIPIA MATHEMATICA*, etc. La razón por la que estos conceptos tienen un número común es su equinumerosidad. Decimos que un concepto *F* es equinumérico con un concepto *G* si y sólo si los objetos que caen en *F* están relacionados uno a uno con los objetos que caen en *G*. Para representar formalmente esta relación entre los conceptos *F* y *G* hay que pasar de la lógica de primer orden a la de segundo de orden:

$$\exists R\ (\forall x \forall y \forall z\ (Rxy \wedge Rxz \rightarrow y{=}z) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (Rxz \wedge Ryz \rightarrow x{=}y) \wedge \forall x\ (Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge Rxy) \wedge \forall x\ (Gx \rightarrow \exists y\ (Fy \wedge Ryx))$$

Usaremos la notación $F{\approx}G$ para abreviar la fórmula anterior. Por otro lado, si *n* es el número que corresponde al concepto *F* y también al concepto *G*, entonces es verdadera la identidad:

el número de los *F*´s = el número de los *G*´s

Entonces, si el número correspondiente a un concepto se determina por los objetos que caen bajo él, y si esos objetos están relacionados biunívocamente con objetos de otro concepto, se sigue que el número que pertenece a ambos conceptos es el mismo. La dirección contraria del condicional es válida: si dos conceptos tienen el mismo número, entonces los objetos que caen bajo uno de ellos están en una relación biunívoca con los objetos del otro concepto. He aquí el Principio de Hume:

$$\#F{=}\#G \leftrightarrow F{\approx}G$$

(En lenguaje natural: el número de los F´s es igual al número de los G´s si y solo si los objetos que caen bajo F y G están relacionados uno a uno).

1.2 El Principio de Hume

1.2.1 El Principio de Hume y la individuación de los números cardinales

El Principio de Hume juega un rol esencial en el programa filosófico y matemático neo-fregeano. Primero, porque tiene la clave de una ontología abstracta de entidades aritméticas gracias a que funge como un criterio de individuación para los objetos referidos por los términos formados por la función ⌜#ξ⌝ cuando ésta tiene un concepto sortal de primer orden como su argumento. Segundo, porque es una condición suficiente, aunque no necesaria, para la demostración de los axiomas Dedekind-Peano de la aritmética, conocida como Teorema de Frege. Y tercero, porque si el principio es analítico —y así lo piensa el neo-fregeano—, entonces toda la aritmética es un conjunto de verdades analíticas, de modo que basta con tener conocimiento lógico y conocimiento del principio para poder justificar epistémicamente cualquier afirmación aritmética al demostrarla como verdadera o falsa. De esto se sigue que el Principio de Hume abarca dos ámbitos de la filosofía de las matemáticas: uno ontológico, porque trata los números como objetos, y otro epistemológico, porque busca la justificación del conocimiento de las verdades aritméticas.

El Principio de Hume surge por la intención de definir el concepto NÚMERO y de conocer la naturaleza misma de los números. Este intento ya estaba presente desde *Begriffsschrift*, donde Frege escribe:

> Cuando me planteé la pregunta de a cuál de estas dos clases pertenecen los juicios matemáticos [si a los juicios empíricos o a los lógicos], tuve que ver primero qué tan lejos se podría llegar en la aritmética exclusivamente por medio de inferencias, apoyado solo en las leyes del pensamiento que están por encima de todas las particularidades. Mi procedimiento fue este: primero busqué reducir el concepto de ordenación en una serie a la consecuencia *lógica* y de ahí progresar hasta el concepto de número (Frege, 2016*a*, p. 42).

En efecto, la conceptografía[10] fregeana hasta 1879 logra establecer una teoría de las secuencias a partir de un número reducido de axiomas lógicos, definiciones y reglas de inferencia que forma una estructura linealmente ordenada cuyos elementos se comportan *como si* fueran números naturales. Si bien este progreso «hasta el concepto de número», que ocurre de forma estructural, es completamente logicista porque la estructura de los números

[10] Llamo *conceptografía* al lenguaje lógico de Frege de su *Begriffsschrift* y de sus *Grundgesetze*.

naturales se reduce a fórmulas lógicas, se debe admitir que tiene tres limitantes: no tiene una definición de número cardinal[11], en él no aparece el concepto NÚMERO como se presentó arriba y no tiene un recurso para individuar a los números. Esta última no significa que los números no sean pensados como objetos en *Begriffsschrift*, pues tienen que serlo como elementos que conforman la estructura numérica; más bien, significa que no hay un medio de discernir un número de otro dentro de la secuencia a la que pertenecen.

Contrario a la teoría de las secuencias, en el Principio de Hume sí existe el concepto NÚMERO CARDINAL y ello permite individuar los números. La razón es que tal concepto es una función cuyos valores son objetos. Como apunté arriba, la lógica fregeana toma los conceptos de primer orden como funciones que, cuando su espacio para un argumento es ocupado por una variable de objeto, tienen como valor un valor de verdad. El operador o función numérica ⌜#ξ⌝, por su parte, tiene como argumentos variables de predicado (que representan conceptos sortales de primer orden) cuyos valores están representados por términos. En este sentido, si ⌜Φ⌝ es un predicado de primer orden y un argumento de la función ⌜#ξ⌝, *i. e.*, si ⌜#Φ⌝ es una fórmula bien formada, entonces su valor es un objeto del universo del discurso. Asimismo, Frege[12] piensa que las expresiones con un artículo definido tienen el rol sintáctico de términos singulares y el semántico de referir a objetos. Puesto que la lectura de la fórmula ⌜*#F*⌝ en el lenguaje natural es «el número de los *F*´s» que tiene el artículo definido «el», se sigue que estos términos singulares aparecidos en el Principio de Hume refieren a objetos. En tanto que son términos singulares, es posible formar relaciones de identidad con ellos. En *Begriffsschrift* §8 se afirmó que la identidad ocurre entre signos; pero en su etapa madura Frege declara[13] que esta relación solo puede ocurrir entre objetos referidos por esos signos. Entonces, toda vez que haya un criterio para decidir si un término singular del tipo *#F* refiere o no al mismo objeto que otro término, habrá una manera de individuar a ese objeto. No es la identidad en sí misma lo que lo hace, sino ciertas condiciones que deben cumplirse. En el caso de los términos numéricos, el Principio de Hume tiene esta tarea.

[11] En *Begriffsschrif* no hay una definición de número cardinal ni de número natural explícita, pero, como veremos, al menos esta última sí se puede deducir fácilmente de la teoría de las sucesiones, como muestra Max Fernández de Castro (2005). Esta definición aparecerá en el capítulo siguiente de este trabajo. *Vid*. p. 54.
[12] *Grundlagen* §57
[13] Particularmente en *Über Sinn und Bedeutung*.

1.2.2 El Principio de Hume y los objetos lógicos

El pilar del programa logicista neo-fregeano es el Principio de Hume. Sobre él descansan no solo la epistemología y la ontología de verdades y objetos aritméticos, también lo hace la demostración de las leyes básicas de la aritmética. Cuando es introducido en la lógica de segundo orden, tiene el cometido de un axioma no lógico.[14] Pese a que no es una verdad de la lógica, sí es estimado por los neo-fregeanos como una verdad conceptual; conceptual, porque, según explicaré adelante, la equinumerosidad entre conceptos se reformula como una identidad entre los valores de la función ⌜#ξ⌝. Dos trabajos seminales neo-logicistas han evidenciado que la demostración de las leyes de la aritmética mediante lógica de segundo orden más el Principio de Hume no conduce a ninguna contradicción, como sí ocurre con otros principios que el mismo Frege propuso como lógicos. El primero se debe a Wright (1983) y el segundo a George Boolos (1999*d*). ¿Pero qué tan logicista, en el sentido de Frege, puede ser una teoría que parte de un principio que no es una verdad de la lógica?

En un artículo de inicios de siglo, Marco Ruffino (2003) expone las razones por las cuales él piensa que Frege no hubiera seguido la línea de razonamiento de sus sucesores neo-fregeanos. Con su argumento, critica la interpretación de Hale y Wright sobre Frege. Su tesis es que Frege no hubiera sido un neo-fregeano porque éste ignora el estatus lógico de los números, lo cual es de suma importancia en el logicismo de aquél. Un corolario de su tesis es que el punto de inflexión entre el primero y los segundos se halla en el uso del Principio de Hume como una verdad fundacional para las leyes de la aritmética. De acuerdo con Ruffino, lo que es verdaderamente fundacional para Frege por su carácter lógico no es el Principio de Hume, sino el bicondicional «la extensión del concepto *F* es igual a la extensión del concepto *G* si y solo si *F* y *G* son co-extensionales», que en *Grundgesetze* se convierte en la Ley Básica V, cuya forma es: ⌜$\grave{\varepsilon}\,(F) = \grave{\varepsilon}\,(G) \leftrightarrow \forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$⌝[15]

Frege rechazó el Principio de Hume como una verdad fundacional en su programa logicista porque sirve como un criterio para decidir si la identidad ⌜$\#F = \#G$⌝ se cumple, mas no para conocer qué es un número ni para determinar la referencia de sus términos singulares. Su observación en *Grundlagen* §66 de que el Principio de Hume es incapaz de decidir si Julio César —por absurdo que parezca— es el referente de «el número de los *F*´s»

---

[14] No es lógico porque el operador numérico ⌜#ξ⌝ no lo es, y no lo es porque al mapear conceptos de primer orden asigna objetos numéricos como su valor. En general, todos los §-operadores de los principios de abstracción tienen como valores objetos no lógicos.

[15] En palabras: el rango de valores del concepto *F* es idéntico al rango de valores del concepto *G* si y sólo si *F* y *G* son coextensionales.

lo lleva a buscar una vía de definición explícita del concepto NÚMERO. El así llamado Problema de César[16] amenaza uno de los intereses prioritarios de Frege: el de concebir a los números como objetos lógicos y no únicamente como objetos abstractos. Del pensamiento fregeano de que las expresiones que tienen un artículo definido representan objetos a través del lenguaje se desprende que la expresión «el concepto *C*» no trata de un concepto *C*, sino de un objeto que Frege llama la *extensión* del concepto *C*. Tal como ocurre con las nociones indefinibles de *concepto* y *objeto*, no hay una explicación de qué son las extensiones de conceptos, por lo que Frege supone[17] que sus lectores lo comprendemos. Lo que sí menciona es que son entidades lógicas[18], y de sus escritos se deduce que ellas representan conceptos en el nivel de los objetos; de ahí que «el concepto *C*» no refiere al concepto *C*, sino a su representante objetual la extensión del concepto *C*. En su respuesta al Problema de César de *Grundlagen* §68, Frege define el número de los *F*´s como la extensión del concepto EQUINUMÉRICO CON EL CONCEPTO *F* y esto le permite ver a los números como objetos lógicos. Entonces, para Frege el Principio de Hume adquiere una importancia secundaria respecto de la prioridad de la que gozan las extensiones, porque no comparte su carácter lógico.

Sin embargo, hoy sabemos que la Ley V, que contiene rangos de valores que son un tipo especial de extensiones de conceptos, produce una contradicción que señaló por primera vez Bertrand Russell. El neo-fregeanismo nace sobre la base del señalamiento de Wright en su célebre *Frege´s Conception of Numbers as Objects* de que siempre que se elimine la Ley V junto con los rangos de valores y en su lugar se priorice el Principio de Hume como axioma no lógico, la paradoja de Russell desaparecerá. Ello significa que, contra Frege, el neo-fregeano otorga una importancia primaria al Principio de Hume y ninguna (o casi ninguna) a las extensiones de conceptos ni a la Ley V.

Ruffino critica el descuidado proceder neo-fregeano de sólo tomar a los números como objetos abstractos «sin mostrar ninguna preocupación especial con su estatus de objetos *de lógica*» (2003, p. 54). En efecto, Frege no hubiera estado dispuesto a pensar los valores de verdad (lo Verdadero y lo Falso) y las extensiones de conceptos como objetos lógicos sin que los números, que son lo esencial de la aritmética, estuvieran en la misma esfera lógica. Si el neo-fregeano equipara los objetos abstractos con los lógicos, entonces hay un mal entendimiento de lo que éstos significan; pero si pasa por alto la relevancia que Frege da a ellos en su logicismo, entonces hay una clara disrupción entre ambos. Pues, por una parte, hay objetos abstractos como las direcciones de líneas o las formas geométricas que no

---

[16] Que lo explicaré con detalle hasta el tercer capítulo.
[17] «Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto» (Frege, 2016*a*, p. 451, n. 90)
[18] Frege, 1979, p. 181.

son lógicos; y, por otra parte, es poco probable que tanto Hale como Wright no hayan notado lo significativo que es que los números sean objetos lógicos en la filosofía de Frege.

La diferencia capital entre Frege y los neo-fregeanos, de acuerdo con Ruffino, se resume en el siguiente pasaje de su artículo:

> Adoptar el Principio de Hume como axioma sería eficiente desde un punto de vista técnico, pero sería incompatible con el interés de Frege de evidenciar la naturaleza lógica de la aritmética. Un sistema compuesto de lógica de segundo orden más el Principio de Hume sería consistente y produciría también todos los resultados relevantes de la aritmética, incluida la infinidad de las series de los números naturales. Pero el reconocimiento de la aritmética como parte de la lógica en este caso dependería de aceptar ciegamente los números como objetos lógicos, sin ninguna reducción a entidades a las que se refiera en una teoría lógica como es el caso de las extensiones (o rangos de valores). En los ojos de Frege, esto no sería una estrategia convincente y equivaldría a abandonar el logicismo (Ruffino, 2003, 70-71).

La interpretación que ofrece Ruffino sobre el logicismo en estas líneas me parece adecuada, pero creo que ello depende de mirar de una forma igualmente ciega el logicismo *fregeano*. Pues si nos limitáramos a éste, entonces las conclusiones filosóficas que se siguen de ejercer nuestra libertad de trabajar con el Principio de Hume para demostrar las leyes de la aritmética se verían ofuscadas por no incluir los objetos lógicos. El logicismo *neo-fregeano*, desde luego, tiene que ser distinto del original propuesto por su predecesor porque el estatus lógico de los números es irrelevante para Hale y Wright (como lo son también lo Verdadero, lo Falso y las extensiones de conceptos o rangos de valores). Las ideas del neo-fregeano son *logicistas* no porque piensen los números como objetos lógicos; lo son porque abstraen y derivan de la lógica conceptos y proposiciones aritméticas. Por esta razón, su logicismo es abstraccionista. En consecuencia, para revivir el proyecto aritmético de Frege hay que contradecir algunas de sus bases. El logicismo fregeano no puede ser lo mismo que el logicismo neo-fregeano.

1.2.3 El estatus de definición del Principio de Hume

De acuerdo con el Principio de Hume, la condición necesaria y suficiente para decidir si el número de los *F*´s es el número de los *G*´s es la equinumerosidad entre los conceptos *F* y *G*. Dicha relación entre conceptos es una fórmula de la lógica de segundo orden, pero la identidad entre números no lo es. El concepto NÚMERO CARDINAL no es parte de la lógica porque es un operador que, cuando toma variables de predicados de primer orden como sus argumentos, sus valores son objetos. Él es introducido por el Principio de Hume mediante abstracción, esto es, mediante la recreación del sentido de la equinumerosidad entre conceptos sortales, y así, el significado y el sentido de tal concepto se entiende únicamente en el contexto del Principio de Hume. Por ello, éste no puede ser considerado una definición explícita de ese concepto, porque ello supondría que el *definiens* podría separarse del *definiendum*, lo que de hecho no es el caso. Cabe cuestionar si, al menos, el Principio de Hume es una definición contextual o implícita.

Según Philip Ebert (2017), en todas las definiciones hay una estipulación entre el *definiendum* y el *definiens*. Las definiciones explícitas presentan el contenido del *definiens* en un vocabulario o simbología distinta a través del *definiendum*, generalmente con el fin de abreviar o simplificar su uso. Ellas se identifican por dos características: la eliminabilidad, que es el hecho de que el *definiendum* es evitable en cualquier fórmula de la teoría en la que aparezca, y la no creatividad, que es el hecho de que el *definiendum* no conduce a nuevos teoremas en una teoría que el mismo *definiens* no podría crear. En las definiciones explícitas el *definiens* tiene una equivalencia semántica para el *definiendum*, de modo que son mutuamente sustituibles en una teoría (Ebert, 2017, p. 133-134). Por otro lado, están las definiciones implícitas o contextuales, que carecen de la eliminabilidad y la no creatividad. En ellas, según Ebert, se introducen, además de nuevos símbolos, nuevos conceptos que no son semánticamente equivalentes a los ya conocidos, y cuyo significado se alcanza «fijando ciertos contextos para el uso de nuevas expresiones *estipulando* que los enunciados en los cuales ocurren son verdaderos [...] En este sentido las definiciones implícitas se suelen considerar *constitutivas de significado*: comprenderlas basta para adquirir un *nuevo concepto*» (*íbid*. p.135-136). Por esta razón, el *definiens* de una definición implícita no puede ser sustituido por su *definiendum*.

Es pertinente una observación sobre esta presentación de Ebert de las definiciones contextuales. Las constantes lógicas de conjunción, disyunción y bicondicional se definen contextualmente a partir de las de condicional material y negación, así como también el cuantificador existencial se define con el universal y la constante de negación. Sin embargo, las constantes y el cuantificador definidos sí son eliminables en el lenguaje de la lógica, de lo que se sigue que no son creadoras de nuevos resultados. Creo que la caracterización de Ebert de las definiciones explícitas e implícitas pretende hacernos ver que el Principio de Hume debe clasificarse entre las del segundo tipo porque hay una disparidad entre la equinumerosidad y la identidad de números cardinales que radica en que los términos singulares de ésta aportan resultados que para la lógica de segundo orden son inalcanzables.

Hay razones para pensar que el Principio de Hume es una definición implícita. La primera es que lleva a cabo una estipulación. Si bien no lo hace sobre el significado de la identidad entre números cardinales como un *definiendum*, sí lo hace con sus condiciones de verdad, dado que estipula la verdad de un bicondicional. Aceptar tal estipulación es aceptar que la equinumerosidad y la identidad entre números tienen las mismas condiciones de verdad, aunque con expresiones diferentes. La segunda es que introduce el concepto NÚMERO CARDINAL como la función $\ulcorner \# \xi \urcorner$ que no pertenece a la lógica, pero que gracias al bicondicional entendemos su sentido en el contexto de la equinumerosidad entre conceptos sortales de primer orden.

El neo-fregeano oscila entre pensar el Principio de Hume como una definición contextual o como una explicación del concepto NÚMERO CARDINAL. En sus textos se lee:

> creemos que los principios de abstracción fregeanos —principios cuya forma general es: $\forall\alpha\ \forall\beta\ (\S\alpha = \S\beta \leftrightarrow \alpha \approx \beta)$—, que estipulan que es necesario y suficiente que sus argumentos α y β estén en una relación de equivalencia, $\approx$, para que sean verdaderas las identidades que caracterizan los §-términos, pueden verse legítimamente como definiciones implícitas del §-operador que forma términos (Hale y Wright, 2001*a*, p. 142).

> Al menos en el contexto del programa neo-fregeano, definición por abstracción es vista como una forma de *definición implícita* que se puede emplear para establecer el significado de términos fundamentales para ciertas teorías matemáticas [...] Nuestro énfasis ha estado generalmente en la idea de que al dar la definición implícita, lo que hacemos es *estipular* que el operador numérico significa cualquier cosa que necesite significar —ni más ni menos— para que el enunciado, el Principio de Hume, exprese una verdad, cuando los significados de las otras expresiones implicadas son los ya establecidos, y su sintaxis es tomada en sentido literal (Hale, 2023, pp. 9-10).

Pero en otros pasajes encontramos:

> $N^{=}$ [el Principio de Hume] no es una definición estricta [...] *no ofrece ningún medio general para la definición contextual de ocurrencias del operador de cardinalidad*. [...] si $N^{=}$ puede ofrecer todo lo que es necesario para un entendimiento de sus usos, entonces no puede haber una duda bien motivada sobre su efectividad como explicación (Wright, 2001*d*, p. 246. Itálicas mías).

Wright (2001*a*, p. 219) nuevamente: «$N^{=}$ sería visto, no como una verdad de la lógica, ni como una definición en sentido estricto, sino más bien, como el corazón de la explicación de la noción de número cardinal».

En efecto, el Principio de Hume no define un concepto, un término, un símbolo y ni siquiera la identidad entre números, no porque no contenga el significado de cualquiera de ellos, sino porque solo nos ayuda a discernir en qué condiciones dos números cardinales son o no son idénticos. Dada una identidad entre números cardinales, el principio estipula sus condiciones de verdad como si de una definición se tratara, pero en realidad lo que hace es reformularla en un lenguaje lógico que nos ayuda a comprender cómo y por qué tal identidad sería verdadera o falsa. Ese es su poder explicativo. Si el neo-fregeano toma el principio como una definición implícita es porque ilustra un entendimiento de lo que es un número en el contexto de la identidad en la que aparece este concepto.

Empero, el Principio de Hume tiene que enfrentar el problema de justificar su estipulación, lejos de si se le considera una definición implícita o una explicación. En sí misma, la estipulación no es el problema, en tanto que es un acto arbitrario, pero sí lo es lo que estipula. Pues cuando el principio establece que las condiciones de verdad para la equinumerosidad son las mismas que las de la identidad entre cardinales, no es claro cómo pasamos de un lenguaje lógico a uno acerca de números. Dicho de otro modo: cuando se observa minuciosamente el vínculo que hace el principio entre su lado izquierdo y su lado derecho, es difícil concebir cómo las condiciones de verdad de un enunciado de identidad entre lo que pretenden ser objetos abstractos descansan en una relación lógica, y viceversa. El Principio de Hume no parece ser una estipulación inocente.

1.2.4 La estipulación del Principio de Hume

¿Qué nos hace creer en la *verdad* estipulada por el Principio de Hume? Su estipulación no es inocente porque la introducción de los operadores numéricos, además de conducir a resultados matemáticos, conlleva conclusiones filosóficas muy discutibles, por ejemplo, la existencia de los números como objetos abstractos.[19] Desde un punto de vista lógico, no hay justificación para la introducción del concepto NÚMERO o del operador numérico.

---

[19] Hay que mencionar que el neo-fregeano niega que la estipulación de las condiciones de verdad hecha por el Principio de Hume presuponga la existencia de objetos abstractos, pues su estrategia argumentativa no consiste en dicha presuposición, sino en tomar su existencia como una conclusión. «La estipulación de la verdad de la oración relevante no debe requerir referencia a ninguno de sus

Wright defiende que está permitido hacer este tipo de estipulaciones porque uno tiene derecho a llevar a cabo una investigación. Él argumenta que toda investigación tiene presupuestos fundamentales cuya justificación epistémica no puede exigirse si se desea evitar caer en un regreso al infinito. Aunque esos presupuestos no deben ser adoptados con total certeza, uno debe tomar el riesgo de aceptar su verdad en aras de la investigación. Claro que no todos los presupuestos son buenos, sino sólo aquellos de los cuales no hay buenas razones para creer en su negación y que no conducen a un regreso al infinito de su justificación epistémica (Wright, 2017, p. 166). En este sentido, el Principio de Hume cuenta como el derecho del neo-fregeano para indagar la naturaleza de los números y defender su logicismo. Wright apunta:

> Cuando una definición implícita tiene éxito al introducir un concepto en buen estado, la habremos aceptado como verdadera, ya que tal definición implícita únicamente funciona *porque* la aceptamos como verdadera. Entonces, si somos buenos en la definición implícita —buenos en este tipo de innovación conceptual—, habrá una correlación fiable entre nuestra aceptación de los vehículos de definición implícita y la verdad de los pensamientos que ellos expresan. En una concepción fiabilista del conocimiento, nuestra aceptación de los vehículos de definición implícita será generalmente cognoscible. Y ya que ellos serán aceptaciones *in vacuo*, no informadas por la evidencia de nada, el conocimiento implicado será *a priori* (Wright, 2017, p. 171).

No cabe duda de que todo conocimiento tiene presupuestos cuya justificación epistémica en algún punto debe parar, pero los riesgos de aceptarlos también deben ser limitados. Hay conceptos que tienen fuerza teórica cuando son supuestos que explican una situación, pero a la luz de nueva evidencia o a falta de ella, resultan ser fantasmas vacíos. El flogisto y el éter en la ciencia moderna son ejemplos de esto.

Seguramente este no es el caso del Principio de Hume, ya que sus resultados matemáticos (la demostración de los axiomas de la aritmética, las definiciones recursivas de los números naturales, de número natural finito y de la relación sucesor, la demostración de que existen infinitamente muchos objetos aritméticos) son innegables y muestran que uno está comprometido a admitirlo como axioma en un sistema de lógica de segundo orden. Eso supone aceptar la verdad de su bicondicional. Pero sus límites aparecen cuando surgen otras implicaciones más filosóficas que matemáticas que no son indubitables. Entre estas se cuentan las de carácter epistemológico, que afirman que el principio es una verdad analítica

términos componentes de ninguna manera que no se pueda asegurar únicamente porque posea su sentido» (Hale y Wright, 2001*b* p. 145).

a priori, y las de carácter ontológico, que, con ayuda del Principio de Contexto —o su reformulación neo-fregeana, la Tesis de la Prioridad Sintáctica— sostienen que los términos singulares del tipo ⌜*#F*⌝ refieren a objetos. Si no estamos dispuestos a conceder estas implicaciones filosóficas, sería adecuado analizar y evaluar los argumentos del neo-fregeano que las sostienen, de modo que el carácter técnico del Principio de Hume no signifique una epistemología y una ontología como las entienden Hale y Wright.

1.3 La analiticidad del Principio de Hume

De acuerdo con Paul Boghossian (1998), la analiticidad de un enunciado *p* se entiende en dos sentidos. Uno es semántico, y dice que *p* es analítico si es verdadero en virtud del significado de sus términos componentes; otro es epistémico, según el cual, *p* es analítico si se conoce como verdadero en virtud de comprender el significado de sus términos componentes. El neo-fregeano defiende la analiticidad de la aritmética sobre la base de que el Principio de Hume es analítico también. ¿Por qué sería analítico? ¿Qué sentido de analiticidad le atribuyen los neo-fregeanos?

1.3.1 La analiticidad en la aritmética

Bien sabido es que la distinción entre juicios analíticos y sintéticos se debe a Kant. Un juicio analítico para Kant es aquel cuyo predicado está contenido en el sujeto, como en «todos los cuerpos son extensos», mientras que los juicios sintéticos requieren siempre la intuición del espacio o del tiempo[20], como en «la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta». Los primeros no tratan sobre cómo es el mundo, sino que descomponen en partes un concepto dado, y son triviales porque no aportan nueva información, de donde se sigue que no extienden el conocimiento. En cambio, los segundos sí extienden el conocimiento; son *a priori* cuando no se justifican mediante la experiencia, y son *a posteriori* cuando en la experiencia encuentran su justificación. Kant sostuvo que los juicios de la aritmética, como «5 + 7 = 12», son sintéticos *a priori*. Sintéticos, porque el solo análisis de la suma entre 5 y 7 no implica el 12, sino que se requiere la intuición del tiempo para agregar siete unidades al cinco hasta llegar al doce; *a priori*, porque este conocimiento es independiente de la experiencia.

[20] En la *Crítica* espacio y tiempo se definen como intuiciones puras de la razón, como representaciones puras *a priori* necesarias para fundamentar todas las intuiciones externas. Es decir: espacio y tiempo no son sino condiciones subjetivas para ser afectados por las cosas externas a través de la sensibilidad. Aunque algunos juicios de la aritmética o la geometría se puedan corroborar con ejemplos tomados de la experiencia, esto no tiene que ser así, pues incluso sin ella justificamos juicios matemáticos solo mediante estas intuiciones, lo que los hace *a priori* y sintéticos, en palabras de Kant.

En la *Crítica de la razón pura* A7 Kant declara que en los juicios analíticos hay una «conexión del sujeto con el predicado pensada por identidad». Esta relación es semántica y tiene implicaciones epistémicas, ya que el contenido del sujeto es idéntico o está presente en el del predicado, por lo que conocer uno significa conocer el otro. Esto es claro en su ejemplo «todos los cuerpos son extensos» y en el más reciente «los solteros son no casados». Cada vez que se analizan los conceptos CUERPO y SOLTERO es inevitable pensar en los conceptos EXTENSO y NO CASADO respectivamente, lo que refleja que, dentro del mismo juicio, pasamos de un concepto a otro por mero análisis o descomposición, sin la mediación de la intuición ni mucho menos de la experiencia. Ese paso no trasciende el contenido de los conceptos ni el de los juicios, sino que se queda en ellos, por lo que nada nuevo se llega a conocer. De ahí que Kant piense que los juicios analíticos son estériles en las ciencias naturales o matemáticas, dado que en cada una se espera que nuestro conocimiento se extienda, y para tal fin son útiles los juicios sintéticos *a priori* y *a posteriori*.

Frege contradice a Kant cuando afirma que los juicios o proposiciones de la aritmética son analíticas *a priori*, no sintéticas. Su argumento dice que la intuición del tiempo es innecesaria para justificar el conocimiento de proposiciones aritméticas siempre que existan proposiciones o leyes aún más generales que las de la aritmética de las cuales éstas se deduzcan, y estas leyes son las de la lógica. En efecto, Frege va a establecer un conjunto de axiomas, definiciones y reglas de inferencia de carácter lógico y va a demostrar que de ahí se derivan las leyes de la aritmética. Así, la afirmación de la identidad entre 7+5 y 12 se justifica gracias al análisis de los axiomas y las definiciones lógicas y a una cadena de inferencias en las que la intuición del tiempo no tiene cabida, de suerte que las verdades aritméticas no pueden ser sintéticas.

Esto no sugiere que la analiticidad en Kant y en Frege sea diferente[21]. En ambos ser analítico significa «estar contenido en»[22]. Para el primero, el predicado está contenido en el sujeto *dentro de un mismo juicio*, y sólo es necesario el análisis de los conceptos para reconocer su «conexión por identidad» y, por tanto, la verdad del juicio. Lo que sabemos del predicado es lo mismo que lo que sabemos del sujeto, así que el conocimiento no se extiende.

[21] «Con esto no quiero asignar, por supuesto, un nuevo sentido a aquellos términos [*a priori, a posteriori,* analítico y sintético], sino únicamente precisar adecuadamente el que autores anteriores, Kant en particular, les han dado» (*Grundlagen,* §3, n. 1).

[22] Kant (*Crítica de la razón pura*, A6/B10) usa el participio *enthalten*, que se traduce como *contenido*, cuando dice que los juicios analíticos son aquellos en los que «el predicado *B* pertenece al sujeto *A* como algo que está contenido [*enthalten*] (ocultamente) en ese concepto *A*». Frege (*Grundlagen*, §88) usa la misma palabra alemana con la misma traducción: «Lo cierto es que [las conclusiones que obtenemos de un razonamiento lógico y que amplían nuestro conocimiento] están contenidas [*enthalten*] en las definiciones, así como las plantas están en las semillas».

Para el segundo, las leyes de la aritmética están contenidas en las leyes sumamente generales de la lógica, del pensamiento puro, y podemos llegar a ellas a partir de éstas mediante inferencias y deducciones. Lo que sabemos de aritmética no es lo mismo que lo que sabemos de las leyes lógicas, pero el conocimiento de éstas justifica el de aquélla porque unas verdades se deducen de otras. En Frege el conocimiento lógico sí se extiende más allá de la lógica.

La diferencia entre las dos concepciones de analiticidad estriba en el objeto del análisis. Para Kant, son los conceptos dentro de un mismo juicio; para Frege, son las proposiciones lógicas (definiciones y axiomas). Los juicios analíticos kantianos no aportan más contenido que el que tiene su propio sujeto (el juicio «todos los objetos son extensos» no dice más que lo que ya está en el concepto OBJETO), y por ello son estériles. Las proposiciones analíticas fregeanas sí aportan nuevo contenido que es deducible de leyes y definiciones de la lógica. En *Grundlagen* §3 se lee:

> Cuando se dice que una proposición es analítica o *a posteriori*, en mi sentido, [...] se juzga el fundamento último sobre el que descansa la justificación para tenerla como verdadera. [...] El problema [sobre el fundamento de la verdad de los juicios aritméticos] es el de encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades primitivas. Si en este camino solo se encuentran definiciones y leyes generales de la lógica, entonces se trata de una verdad analítica, teniendo en mente que debemos tener en cuenta todas las proposiciones sobre las que descansa la admisibilidad de cualquiera de las definiciones.

Visto así, la analiticidad de la aritmética significa que todas sus proposiciones son verdades derivables de las leyes generales del pensamiento lógico puro, de suerte que, contra Kant, Frege piensa la analiticidad no como una trivialidad, sino como una extensión del conocimiento lógico que se sirve del método deductivo que mantiene en la matemática la pureza del pensamiento al no mezclar sus conceptos con la experiencia o la intuición en una cadena de inferencias que va de lo lógica y sumamente general a lo aritméticamente general. Desde luego, Kant fue incapaz de pensar este sentido de analiticidad en la aritmética porque en su contexto histórico no gozó de las herramientas técnicas y teóricas de la lógica moderna que Frege, por su parte, sí aprovechó debido al giro abstracto de las matemáticas decimonónicas[23].

---

[23] José Ferreirós escribe: «La emergencia de las ideas logicistas en los últimos siglos, que son bastante difíciles de entender para los historiadores actuales, se pueden entender mejor cuando son vistas en su contexto. El desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX mostró una tendencia lejos de lo intuitivo y más hacia lo abstracto» (2007, p. 17). Y continúa: «El desarrollo del siglo XIX de lo intuitivo a lo

Como Frege, Hale y Wright sostienen que las verdades aritméticas son analíticas cuando se deducen de verdades más generales, pero agrega la cláusula de que la aritmética es analítica *si* el Principio de Hume también lo es:

> Las leyes fundamentales de la aritmética se pueden derivar dentro de un sistema de lógica de segundo orden aumentado por un principio cuyo rol es *explicar*, sino exactamente definir, la noción general de identidad de número cardinal, y que esta explicación procede en términos de una noción que puede definirse en términos de conceptos de lógica de segundo orden. Si tal principio explicativo, junto con 'definiciones implícitas', se puede considerar *analítico*, entonces eso basta para demostrar, al menos, la analiticidad de la aritmética. (Wright, 2001*e*, p. 279)

¿Pero cómo puede ser analítico el Principio de Hume si no puede demostrarse a partir de axiomas, dado que él mismo es uno, y no es una definición, según se explicó arriba? El Principio de Hume es para el neo-fregeano una verdad *conceptual*, en el sentido de que, en su rol de principio explicativo, tiene la función de ofrecer como una explicación las bases lógicas para nuestro entendimiento del concepto NÚMERO.

Para llegar a la analiticidad del Principio de Hume, Hale (2001*b*) interpreta las observaciones fregeanas de *Grundlagen* §64 acerca de un principio de abstracción, el de la identidad de las paralelas:

$$\mathbf{D^{=}}: \qquad \mathrm{D}(a) = \mathrm{D}(b) \leftrightarrow a//b$$

(En palabras: la dirección de la línea *a* es igual que la dirección de la línea *b* si y solo si *a* es paralela respecto de *b*). En este parágrafo, Frege justifica la introducción de un nuevo concepto abstracto de segundo orden, el de DIRECCIÓN, sobre la base de que el contenido de la proposición de paralelismo se parte y distribuye en la proposición de identidad de las direcciones sustituyendo el símbolo de la primera relación por el de la segunda. Esta partición del contenido de una proposición es interpretada por el neo-fregeano como la acción de reconceptualizar (*reconceptualizing*) una relación de equivalencia en una

abstracto confirma que las matemáticas tienen que ver mucho más con los conceptos puros de lo que antes se había pensado. Abandonar la referencia a la intuición es considerar a las matemáticas como un desarrollo teórico basado únicamente sobre conceptos del entendimiento» (p. 18). Asimismo, Fernández de Castro *et al.* (2018, pp.22-23) afirman que Frege reformula el sentido de analiticidad porque rompe con la estructura *sujeto-predicado* de la lógica aristotélica con la que Kant aún trabajaba y adopta la sintaxis de funciones *n*-arias y argumentos o variables de primer orden de la lógica actual. El mismo Frege fue consciente de esto. En *Grundlagen* §88 escribe: «Es evidente que Kant ha subestimado —*si bien como consecuencia de una conceptuación demasiado estrecha*— el valor de los juicios analíticos, aunque parece haber vislumbrado algo del concepto más amplio utilizado aquí» (Frege, 2016*a*, p. 470. Énfasis mío).

identidad. Reconceptualizar el contenido significa para Hale y Wright que ambos lados del bicondicional de un principio de abstracción (el Principio de Hume, el de las paralelas, o cualquier otro) tienen las mismas condiciones de verdad y que representan el mismo estado de cosas no solo desde diferentes conceptos, también desde diferentes *tipos* de conceptos (el concepto PARALELISMO es de primer orden, mientras que el de DIRECCIÓN es de segundo; lo mismo ocurre con los conceptos EQUINUMEROSIDAD y NÚMERO). Los principios de abstracción pueden introducir conceptos abstractos de segundo orden siempre que encuentren una proposición que reconceptualice, junto con esos mismos conceptos, el contenido de otras expresiones anteriormente dadas.

La analiticidad de los principios de abstracción se entiende, de acuerdo con lo anterior, en las siguientes palabras de Wright: «Si vamos a considerar los principios de abstracción como *formativos* de conceptos que ellos introducen, entonces la analiticidad de un principio de este tipo es consecuencia de que le asignemos este rol a él» (2001*e*, p. 292). Esto es: un principio de abstracción es analítico cuando *forma* conceptos por abstracción de su relación de equivalencia. Formación aquí no es sinónimo de *creación*, porque no es que los conceptos NÚMERO CARDINAL O DIRECCIÓN no tengan sentido si no hay relaciones de equivalencia (en el habla cotidiana los usamos sin una claridad de equinumerosidad o paralelismo); más bien debe entenderse como *introducción*. Puesto que la abstracción para introducir los nuevos conceptos en estos principios tiene una dirección que va de derecha a izquierda, la explicación de cómo entender esos conceptos comparten la misma dirección. En efecto, el lado derecho del Principio de Hume —desde donde empieza la abstracción— es una fórmula de la lógica de segundo orden. Por su naturaleza, debemos pensar que forma parte de nuestros conocimientos básicos o primitivos y que, como tal, puede explicar cómo entender una identidad numérica que contiene el concepto derivado NÚMERO, que no es primitivo.

En este sentido, así como ocurre con la equinumerosidad en el Principio de Hume, las relaciones de equivalencia del lado derecho de los principios de abstracción tienen una prioridad epistémica sobre el lado izquierdo porque con base en ellas se logran explicar los conceptos introducidos. Así lo apunta Wright en *Frege´s Conception:*

> Tenemos que reconocer que los enunciados del lado derecho implicados en la traducción eliminativa de los *D*-términos tienen una cierta prioridad epistémica [...] nuestro acceso a un concepto sortal de dirección es logrado vía nuestra aprehensión de las ideas de una línea, de paralelismo, y de otras propiedades de las líneas (Wright, 1983, p. 32)

Asimismo, Hale declara:

> [el propósito de Frege es] describir una vía por la cual alguien que carece del concepto de *dirección* pueda llegar a poseerlo. Además, el concepto introducido así —aunque Frege no lo pone de esta manera— es un concepto sortal. [...] Esto lo compromete con dos afirmaciones sobre los lados izquierdo y derecho de $D^{=}$:
>
> *Prioridad*: $D^{=}$ (derecha) significa tener prioridad explicativa sobre $D^{=}$ (izquierda)
>
> *Sintaxis*: la sintaxis superficial de $D^{=}$ (izquierda) es semánticamente activa
>
> La *Prioridad* requiere que alguien sea capaz de recibir $D^{=}$ como una explicación sobre la manera de hablar de las direcciones, con base en su entendimiento anterior de su componente de la derecha (2001*e*, p. 95).

Por tanto, desde el punto de vista neo-fregeano, la analiticidad significa reconceptualizar el contenido de una relación de equivalencia como una relación de identidad que introduce conceptos de segundo orden. Esta acción explica, desde un conocimiento lógico básico, cómo entender la identidad entre objetos que son valores de un concepto (una función) formado por abstracción de estos principios.

Si esta interpretación es adecuada, entonces el sentido neo-fregeano de analiticidad es epistémico. La razón es que el Principio de Hume (y otros de abstracción) es analítico si introduce el concepto NÚMERO CARDINAL justificadamente, o sea, con una explicación que parte de un conocimiento lógico básico. Su abstracción toma el conocimiento de la equinumerosidad para lograr comprender la identidad junto con sus conceptos introducidos. En otras palabras, el Principio de Hume es analítico en virtud de nuestra comprensión de sus términos componentes.

1.3.2 ¿Es analítico el Principio de Hume?

Boolos (1999*a*, pp. 302-303) ha argumentado que la analiticidad del Principio de Hume en su rol de axioma nada aporta al logicismo. Las leyes de la aritmética son deducibles sin que importe si aceptamos su carácter analítico o no. Concuerdo con su afirmación, pero su contribución técnica a la aritmética no define sus límites filosóficos. Creo que su estatus analítico es discutible por dos razones de mayor relevancia.

El principio de Hume pide que se reconozcan las mismas condiciones de verdad en sus relaciones de equivalencia y de identidad de cada lado de su bicondicional, pero es claro que ambas relaciones no tratan sobre el mismo asunto. El enunciado $\ulcorner \#F = \#G \urcorner$ trata sobre objetos pretendidamente abstractos y $\ulcorner F \approx G \urcorner$ habla de la existencia de una relación biunívoca entre dos conceptos de primer orden. En tanto que es una fórmula de la lógica de segundo orden, el lado derecho del bicondicional no habla sobre objetos matemáticos; pero el lado izquierdo ni es una fórmula lógica ni está libre de una ontología abstracta. Incluso si uno está dispuesto a admitir una ontología en el lenguaje lógico, por ejemplo, la existencia en sentido literal de las entidades representadas por todas las variables ligadas al ∃-cuantificador, no se sigue que haya objetos matemáticos. Si por condiciones de verdad entendemos estados de cosas, como parece sugerir Hale (2001*b*), entonces ¿cómo puede ser analítico un principio en cuyos componentes hay una evidente diferencia? Ni existe una conexión entre uno y otro por identidad, como lo diría Kant, ni el contenido de la equinumerosidad se reconceptualiza en la identidad entre números, como piensa el mismo neo-fregeano. La analiticidad del Principio de Hume parece fracasar en virtud de la diferencia de condiciones de verdad de cada parte del bicondicional.

Además, según la tradición filosófica desde Kant hasta nuestros días, las verdades analíticas no tratan acerca de cómo es el mundo y sus objetos, pero la analiticidad del Principio de Hume parece contradecirle. Una verdad puede ser analítica sin que conlleve compromisos ontológicos. Así, «el actual rey de Francia es un monarca» es analítico, pero no tiene un compromiso con la existencia de un gobernante francés, o podrían no existir individuos solteros y aun así «los solteros son no casados» es también analítico. Sin embargo, para el neo-fregeano el Principio de Hume no solo es un asunto de logicismo y analiticidad, lo es también de compromisos ontológicos. Como Wright (2001*e*, p. 277) aclara, no es que el principio cree mediante estipulación entidades matemáticas, más bien, introduce el concepto NÚMERO CARDINAL que no es vacío, que abarca un conjunto de objetos, y por el cual llegamos a conocerlos. Si esto es cierto, ¿por qué de verdades igualmente analíticas como «el actual rey de Francia es un monarca» no aceptamos un compromiso ontológico?

Las respuestas a este par de objeciones descansan en el sentido epistémico de analiticidad del Principio de Hume. En primer lugar, no tiene que haber un mismo contenido en ambas partes del bicondicional porque el principio no es verdadero en virtud de sus términos componentes. Si así fuera, entonces los compromisos ontológicos de la equinumerosidad tendrían que ser los mismos que los de la identidad, pero claramente no es así. Cuando el neo-fregeano habla de reconceptualizar las relaciones de equivalencia de un principio de abstracción, no quiere decir expresar el mismo contenido de tales relaciones en términos de conceptos abstractos, sino explicar éstos a partir del conocimiento lógico básico de las relaciones de equivalencia. Así es como tiene sentido tomar el bicondicional del Principio de Hume como verdadero en virtud de comprender cada uno de sus lados izquierdo y derecho. Es a través de nuestro conocimiento de la equinumerosidad que comprendemos lo que significa la identidad entre cardinales. En segundo lugar, puesto que el Principio de Hume no estipula que hay objetos aritméticos, sino que ellos existen con independencia de si los conocemos, su analiticidad no entra en conflicto con sus compromisos ontológicos. Quiero decir que una cosa en su estatus como verdad analítica y otra la ontología abstracta que apoya, pero esto no debe entenderse como si el neo-fregeano sostuviera que el conocimiento de los números como objetos ocurre por una vía analítica. El entendimiento que obtenemos del concepto NÚMERO CARDINAL es gracias a la analiticidad del Principio de Hume, pero no es una vía de acceso epistémico a los números como objetos.

Entonces, el principio sí es una verdad analítica, en el sentido epistémico, en tanto que es una verdad conceptual, y es una verdad conceptual porque reconceptualiza una relación de equivalencia entre conceptos como una identidad entre números cardinales, lo que significa que explica esta última relación en términos de la equinumerosidad. Si bien no es propiamente una definición del concepto NÚMERO CARDINAL, como principio explicativo ofrece la claridad en nuestro entendimiento del empleo de este concepto que es de uso cotidiano. Además, en él nuestro conocimiento se extiende desde una fórmula de la lógica de segundo orden hasta una identidad aritmética. Aunque esto no indica acceder epistémicamente a los números como objetos abstractos, el Principio de Hume sí plantea el contexto necesario para tal fin, a saber, enunciados en los que hay términos singulares que representan entidades mediante la referencia. Puesto que esta propiedad semántica de los términos singulares no compete al Principio de Hume, éste debe trabajar en conjunto con otro principio fregeano para justificar el conocimiento de los números como objetos: el Principio de Contexto o su interpretación neo-fregeana, la Tesis de la Prioridad Sintáctica.

1.4 La Tesis de la Prioridad Sintáctica

1.4.1 El problema epistemológico de los números como objetos abstractos

El platonismo matemático es la tesis de que los números son objetos *sui generis*. Particularmente, Frege dice en *Grundlagen* §62 que los números son objetos auto-subsistentes (*selbständige Gegenstände*). Como sustituto de *auto-subsistente*, los neo-fregeanos usan el adjetivo *abstracto*. Por *objeto abstracto* vamos a entender una entidad que no es espacial, ni temporal, que no tiene alguna relación causal con otras entidades. Dado que mucho de nuestro conocimiento sobre otros asuntos tiene su fuente en la experiencia, el principal reto que tiene que superar un platonista es el de justificar su acceso epistémico a objetos abstractos (aunque esto no significa que su justificación también tiene que partir de la experiencia). El Principio de Hume juega un rol esencial en el platonismo defendido por Hale y Wright, porque contiene enunciados en los que figuran términos singulares que pretenden referir a objetos abstractos, pero no es suficiente para la ontología de la aritmética porque no determina si tales términos refieren o no.

En "Matemathical truth" Paul Benacerraf (1973) plantea el reto epistémico para el platonista en un dilema. Argumenta que, para afirmar la verdad de una proposición cualquiera (incluidas las de la matemática), uno tiene que conocer previamente sus condiciones de verdad. Por ejemplo, se puede afirmar que la oración «Neil Armstrong fue el primer hombre en pisar la luna» es verdadera solo si hay conocimiento de sus condiciones de verdad (por ejemplo, una relación causal directa de ese hecho con nuestra experiencia, o una relación indirecta, como una noticia, una foto, un video, etc.). Asimismo, para afirmar que la oración matemática «cero es el primer número natural» es verdadera hay que conocer, como una condición necesaria, sus condiciones de verdad. El problema para cualquiera es que no hay, ni puede haber, una evidencia tomada de la experiencia que nos apoye para sostener la verdad de esa última oración, puesto que no hay hechos matemáticos que se presenten empíricamente. Entonces, surge un dilema para el platonista: o bien, el platonista justifica su conocimiento de las condiciones de verdad de proposiciones aritméticas para poder afirmar su verdad, o bien, abandona toda afirmación sobre la verdad de las proposiciones aritméticas si no puede hacer tal justificación. Este reto funciona solo si seguimos una teoría causal del conocimiento. En efecto, puesto que para el platonista neo-fregeano los números son objetos abstractos, se sigue, por su sola definición, que no hay modo de conocerlos causalmente.

Ante el dilema de Benacerraf, Hale y Wright (2002) piensan que se ha planteado mal el problema. Para ellos, el conocimiento de la existencia de objetos abstractos no es una condición necesaria para la verdad de las proposiciones matemáticas, sino una consecuencia. En lugar de conocer previamente objetos aritméticos como condiciones de verdad de una proposición matemática, el neo-fregeano primero asegura en el Principio de Hume el valor de verdad de una proposición aritmética con base en los conocimientos más fundamentales de la lógica y después infiere que hay objetos abstractos representados por expresiones de esa proposición. Ellos apuntan: «El problema fundamental no es cómo podríamos conocer como verdaderas las proposiciones matemáticas, dado que ellas son sobre objetos abstractos, sino cómo ellas tratan inteligiblemente sobre esos objetos» (Hale y Wright, 2002, pp. 114-115). Si, por un lado, el Principio de Hume tiene los elementos necesarios para abrir una vía de acceso epistémico a objetos abstractos, por otro lado, aún es insuficiente para saber cuál es esa vía. Si no es por una relación empírica causal que el neo-fregeano asegura conocer los números, ¿por qué medios se logra su justificación epistémica?

1.4.2 Interpretaciones del Principio de Contexto

Una regla de la conceptografía fregeana reza que «todo signo correctamente formado debe referir a algo» (*Grundgesetze*, I, XII). Por sí misma tampoco establece una defensa del platonismo, porque los signos matemáticos no indican por derecho propio su referencia, pero sí contiene el indicio de la estrategia epistémica que usan Frege y los neo-fregeanos. En un manuscrito anterior a *Grundlagen*, Frege escribe:

> Las reglas de la lógica siempre presuponen que las palabras que usamos no son vacías, que nuestros enunciados expresan juicios, que uno no está jugando un mero juego de palabras. Una vez que 'Sachse es un hombre' expresa un juicio, la palabra 'Sachse' debe designar algo, y en ese caso no necesito ninguna premisa para inferir que 'hay un hombre' a partir de eso. La premisa 'Sachse existe' es redundante (Frege, 1979, p. 60)

Aquí Frege habla de juicios. De acuerdo con él, un juicio es el reconocimiento de la verdad de una proposición, de modo que en la proposición de arriba se está presuponiendo su verdad. Pero, aunque no se requiera de otra premisa, la conclusión «hay un hombre» no se sigue inmediatamente de la verdad de la proposición citada. A pesar de que Frege no lo menciona explícitamente, hay un principio metodológico subyacente necesario para llegar a la conclusión de que hay objetos referidos por ciertas expresiones subenunciativas[24], a saber, el Principio de Contexto.

Cuando en *Grundlagen* se ha mencionado ya que los números son entidades reales de orden no físico, Frege se pregunta en §62 cómo entonces nos han de ser dadas estas entidades, puesto que no las podemos percibir, y su respuesta es: «Solo en el contexto de una proposición las palabras refieren [*bedeuten*] algo». Este principio también aparece en otros tres pasajes de la misma obra (X, §60 y §106) con ligeras modificaciones y en su *Opus magnum,* los *Grundgesetze*. Pero ¿cuál es la función y el significado del Principio de Contexto?

Una primera interpretación nos dice que el Principio de Contexto establece que para que una expresión subenunciativa (un término singular o un predicado) refiera tiene que cumplir la condición necesaria de que aparezca en un enunciado significativo (Stainton,

[24] Se llaman *expresiones subnenunciativas* aquellas que componen gramatical y sintácticamente los enunciados, por ejemplo, los nombres propios, los demostrativos, los adjetivos, los predicados, etc. particularmente, el Principio de Contexto se enfoca en términos singulares, pero también se aplica a los predicados que refieren a conceptos.

2006; Resnik, 1967). Esta es una lectura fiel, aunque no una buena interpretación, de lo que externa la cita de arriba que permite una fácil refutación al pensamiento de Frege, pues, como señala el argumento general de Robert Stainton, dado que es un hecho empírico que todos nosotros podemos usar palabras significativas aisladamente, es decir, fuera de un contexto, también es un hecho que las palabras tienen significado aisladamente, de lo que se sigue que el Principio de Contexto es incorrecto.

Aaron Barth (2012) y Øystein Linnebo (2019) concuerdan en que esta refutación es válida siempre que se tome la interpretación anterior. El argumento de Barth es el siguiente:

> Cuando es interpretado como una hipótesis empírica sobre el lenguaje natural, el principio está en tensión con el hecho de que los hablantes son capaces de expresar proposiciones expresando palabras singulares y otras expresiones subenunciativas. A la luz de esto, y contrario al principio de contexto, las palabras tienen contenido proposicional y, por tanto, significado (*meaning*) cuando no están incluidas en enunciados (p. 26)

El de Linnebo se basa en la premisa de que hay un principio de la lingüística, según el cual, «las palabras tienen significados léxicos independientes que juegan un rol importante al determinar los significados de los enunciados en los cuales ellos ocurren» (p. 94). Naturalmente, este principio no puede transgredirse, de lo que concluimos que algo tiene que estar mal con la interpretación anterior. Resnik, Stainton, Barth y Linnebo están de acuerdo en que la idea de que las palabras *solo* tienen significado en contextos enunciativos es incorrecta, pero no hay acuerdo entre ellos de que esta interpretación del Principio de Contexto sea correcta.

A diferencia de Resnik y Stainton, Barth y Linnebo coinciden en que el Principio de Contexto tiene que interpretarse en conformidad con otro principio semántico fregeano relevante, el Principio de Composicionalidad, que afirma que el sentido de un enunciado depende del sentido de sus componentes (Frege, 1984, p. 162). Barth apunta: «[el Principio de Contexto dice que] los enunciados son los principales portadores de verdad, mientras que la asociación de nombres o términos singulares con la verdad se apoya en su *contribución* a los valores de verdad de los enunciados» (p. 31. Énfasis mío). Similarmente, para Linnebo el Principio sostiene que «el significado (*meaning*) de una expresión subenunciativa *e* únicamente se puede explicar en términos de su *contribución* al significado de los enunciados en los cuales *e* ocurre» (p. 96. Énfasis mío).

Dummett comparte algo de la interpretación composicional del Principio de Contexto. En *Frege: Philosophy of Mathematics* lo toma como lo siguiente:

> el sentido (*sense*) [de un término singular] *es* justo su contribución a los pensamientos expresados por enunciados de los cuales es parte; considerar la expresión como representando algo por sí misma, independientemente de cualquier enunciado, es destruir la concepción completa de su posesión de un sentido (1991, p. 202.)

Sin embargo, Dummett observa que el Principio de Contexto parece entrar en conflicto con el de composicionalidad, que él asimila como el hecho de que «aprehendemos el sentido de un enunciado conociendo los sentidos de sus expresiones constituyentes» (*íbid*). ¿Pero verdaderamente los dos principios son excluyentes? En absoluto, responde Dummett. Él argumenta que el conflicto entre ambos principios no ocurre, pues en realidad hay una codependencia entre uno y otro:

> Para aprehender los pensamientos expresados por ciertos enunciados, primero es necesario ser capaz de aprehender aquellos expresados por otros más simples. Para aprehender el sentido de una expresión dada se requiere que seamos capaces de aprehender los pensamientos expresados por ciertos enunciados que los contienen (Dummett, 1991, p. 202).

Linnebo también observa al respecto que solo puede haber tal conflicto si se interpreta el Principio de Contexto a la manera de Resnik y Stainton; pero, como esto no puede ocurrir por la razón citada arriba, se sigue que ambos principios son compatibles. Además, Linnebo también apunta que el Principio de Contexto tiene que ver solo con la *explicación* del significado, mientras que el Principio de Composicionalidad tiene que ver con la *determinación* del significado (2019, p. 104), de modo que los asuntos de ambos son distintos pero compatibles.

Aunque las presentaciones anteriores del Principio de Contexto son parecidas, hay cierta diferencia, pues mientras Linnebo habla del significado (*meaning*) de una expresión, Dummett lo hace sobre su sentido (*sense*). En los cuatro pasajes de *Grundlagen* mencionados arriba, así como en el llamado Principio de Contexto Generalizado de *Grundgesentze* I, §29-§31, Frege usa la palabra *Bedeutung*, que suele traducirse como *referencia*. Según lo entendió Frege en *Über Sinn und Bedeutung*, la referencia es una relación semántica entre una expresión lingüística y algo extralingüístico, y el sentido (*Sinn*) es un modo de presentación de un objeto o un pensamiento. Decimos, además, que el significado de una expresión es lo que entendemos o como interpretamos esa expresión. Así, la referencia de los nombres propios «Pancho Villa» y «Doroteo Arango» es la misma, porque ambos tienen una relación con el mismo objeto extralingüístico, pero sus sentidos (sus modos de presentarse ante nosotros) son distintos. Cuando uno interpreta el nombre

«Pancho Villa», uno sabe que esa expresión se usa para hablar de una persona, y a eso llamamos el significado del nombre propio. Linnebo aclara (2019, p.91) que usa la palabra *significado* como un término informal que traduce y conserva la informalidad de *Bedeutung* de *Grundlagen*, por lo que podemos decir que para él el significado es un tipo de referencia. Por su parte, Dummett prefiere dejar la referencia para las obras maduras de Frege, particularmente *Grundgesetze,* y limitarse a tratar sobre el sentido. Pero el Principio de Contexto trata sobre la referencia y no sobre el sentido de una expresión. ¿Eso sugiere que Dummett está mal? Y si la referencia es el asunto del Principio de Contexto, ¿por qué entonces se menciona el sentido (*Sinn*) de una proposición en *Grundlagen* §62? Parece que, si el Principio de Contexto está enfocado a ser la culminación de un argumento platonista, debe tratar sobre la referencia y no sobre el sentido. Sin embargo, sentido y referencia tienen una estrecha relación. Maite Escurdia apunta al respecto: «Para Frege, los hablantes conocen las referencias de las expresiones sólo mediante los modos en que se les presentan, por lo que el significado que explica la comprensión del lenguaje no es la referencia, sino el sentido» (2016, p. 207). Así entendido, toda expresión que tiene referencia no puede carecer de sentido —aunque lo contrario sí puede ocurrir—, por lo que no se puede hablar únicamente de la referencia de una expresión, ya que es el sentido una manera de conocer, y, por tanto, de identificar la referencia. En consecuencia, que el Principio de Contexto trate sobre la referencia de las expresiones subenunciativas supone que también trata sobre sus sentidos.

1.4.3 La interpretación neo-fregeana del Principio de Contexto

La finalidad del Principio de Contexto es llegar a conocer aquellos objetos que escapan a nuestra experiencia. Los objetos físicos se pueden conocer empíricamente, y la relación entre ellos y sus nombres se da por ostensión, por lo que aquí el Principio no es necesario. Entonces, la interpretación de Dummett, que únicamente tiene en cuenta el sentido de las expresiones, parece no satisfacer el propósito de Frege en *Grundlagen* §62, ya que el orden inverso de la conclusión del último párrafo, a saber, que el sentido de las expresiones subenunciativas supone su referencia, no vale. Frege observó que, por ejemplo, las expresiones poéticas son ricas en sentidos, pero estériles en referencia; sin embargo, la ciencia no puede confinarse en el orden del sentido, tiene que trascender también a la referencia. Si existieran esos límites, entonces el Principio de Contexto no podría ofrecer una vía de acceso epistémico a objetos abstractos porque su solo sentido es compatible con la negación de su existencia. Esta interpretación del Principio de Contexto solo sirve si queremos rechazar el platonismo matemático y, al mismo tiempo, aceptar una parte de la filosofía de las matemáticas de Frege, y esta es la intención de Dummett. Pero Frege es abiertamente un platonista. Por tanto, la interpretación de Dummett del Principio de Contexto no responde completamente a las intenciones fregeanas.

Por otro lado, la interpretación neo-fregeana del Principio de Contexto, conocida como Tesis de la Prioridad Sintáctica, fue propuesta por Wright en *Frege´s Conception*:

> Nuestra posición, al menos, es consistente con la tesis de la prioridad sintáctica que contiene el Principio de Contexto: la tesis de que la noción de un objeto es posterior *en el orden de la explicación* a la de término singular; que no hay una mejor explicación general de la noción de un objeto que la que se puede dar en términos de las nociones de término singular y referencia; y que la verdad de los contextos enunciativos apropiados que contienen lo que es, por los criterios sintácticos, un término singular es suficiente para tener cuidado, y así hablar, de su referencia (1983, p. 24. Énfasis mío).

Esta tesis reivindica el platonismo de *Grundlagen*. Wright continúa:

> [...] este platonismo es una tesis basada en la estructura sintáctica del lenguaje de la teoría de números; para Frege, las categorías sintácticas son anteriores a las ontológicas, y es por referencia a la estructura sintáctica de enunciados verdaderos que cuestiones ontológicas se entienden y establecen (1983, p. 25).

Como las interpretaciones del Principio de Contexto de Barth, Linnebo y Dummett, la Tesis de la Prioridad Sintáctica está en conformidad con el Principio de Composicionalidad. Hale escribe en *Abstract objects*:

> El argumento fregeano firmemente vincula cuestiones ontológicas con cuestiones de verdad [...] Suponga que $A(t)$ es una proposición verdadera, y suponga que t funciona allí adentro como un término singular. El rol de tales términos es transmitir referencia a un objeto particular, sobre el cual, la proposición como un todo dice algo. Esa es la contribución semántica del término singular, su contribución hacia determinar las condiciones de verdad de la proposición. *Aquellas condiciones de verdad no pueden ser satisfechas a menos que el término singular contenido cumpla su función referencial*. Por lo tanto, hay un objeto al cual el término refiere. El argumento subordina cuestiones de referencia (y de ontología) a cuestiones de verdad y forma lógica (Hale, 1987, p. 12)

Es notorio que esta interpretación está más cerca de la de Barth porque menciona una contribución semántica del término singular a las condiciones de verdad de los enunciados en que aparece, y a la de Linnebo, porque alude a la referencia de los términos singulares.

La estrategia neo-fregeana que usa la Tesis de la Prioridad Sintáctica consiste en decir que, si una expresión del lenguaje funge como un término singular, y si tal expresión se encuentra en el contexto de un enunciado verdadero, lo que supone que, además de tener un rol sintáctico, tiene también uno semántico porque contribuye a la verdad del enunciado en el que figura, entonces ese término singular refiere a un objeto. Si es nuestro deseo conocer objetos cuyo acceso epistémico sea imposible a nuestros sentidos, debemos fijar nuestra atención en los nombres que usamos para representarlos en nuestro lenguaje y pensamiento, así como en lo que decimos acerca de ellos. No podemos conocer objetos inaccesibles a nuestra percepción si ni siquiera podemos pensarlos, y para pensarlos necesitaremos términos singulares. Por eso dice el neo-fregeano que, en el orden de la explicación, hay una prioridad del lenguaje sobre la ontología, pues no conoceremos objetos abstractos si no tenemos nombres o términos para ellos, y ya que para referir a objetos o individuos son necesarios los términos singulares, entonces tiene sentido el énfasis sobre el rol sintáctico de los términos del lenguaje para saber que éstos representan objetos. En virtud de que el Principio de Hume asegura las condiciones de verdad de una identidad en la que figuran términos singulares, la interpretación neo-fregeana del Principio de Contexto toma el rol sintáctico de tales términos para explicar por qué ellos refieren a objetos. Esas expresiones refieren porque contribuyen al valor de verdad de la identidad en que aparecen; y refieren a objetos porque son términos singulares.

1.4.4 Dos objeciones a la Tesis de la Prioridad Sintáctica

Joongol Kim (2011) ha criticado la Tesis sobre la base de que no respeta en su totalidad el pensamiento fregeano. Como vimos en el primer apartado de este capítulo, para Frege las nociones de *objeto* y *concepto* son básicas, primitivas, indefinibles y, por ello, inexplicables. Si la afirmación de Wright de que «la noción de un objeto es posterior en el orden de la explicación a la de término singular» es plausible, entonces las palabras de Frege reflejan una idea incorrecta. Además, Wright también sostiene que «un oponente de Frege no puede dar una explicación general de cómo una criatura sin lenguaje podría aprender y mostrar que determina las nociones de objeto y concepto» (1983, p. 41). Esto reitera la prioridad del lenguaje sobre la ontología. Para Kim (2004, p. 30) Frege establece un isomorfismo entre el lenguaje y las entidades, es decir, una correlatividad entre nombres propios y objetos, y predicados y conceptos. Este isomorfismo aunado a la inexplicabilidad de las nociones de *objeto* y *concepto* debida a su carácter primitivo contradice la Tesis de la Prioridad Sintáctica: «el isomorfismo de Frege [...] no apoya la afirmación de Wright de que las nociones lingüísticas son anteriormente explicativas de las ontológicas. De hecho, si hay una prioridad explicativa entre ambas, tiene que estar en las últimas, no en las primeras» (Kim, 2011, p. 205). De acuerdo con Kim, el verdadero oponente de Frege sería Wright. Pienso que su crítica es parcialmente correcta. En efecto, si las nociones de *objeto* y *concepto* realmente son primitivas, entonces claro que una criatura sin lenguaje podría determinarlas, aunque quizá no lo pueda demostrar. Pero la misma observación no aplica para la Tesis de la Prioridad Sintáctica. Ninguna de las interpretaciones anteriores del Principio de Contexto intenta *explicar* las nociones que Frege pensó como primitivas, más bien, lo que pretende es determinar que los términos singulares refieren cuando aparecen en contextos proposicionales. La Tesis neo-fregeana no se propone explicar qué es un objeto, sino justificar que conocemos la existencia de objetos vía su relación semántica con sus representantes lingüísticos. Por lo tanto, la crítica de Kim no contradice el punto principal de la interpretación neo-fregeana.

Otra crítica a la Tesis de la Prioridad Sintáctica proviene del ficcionalismo de Hartry Field. La pregunta —quizás más bien una sugerencia— detrás del ficcionalismo es si acaso el discurso matemático no es más bien una *façon de parler*, más que un lenguaje significativo sobre estados de cosas. Después de todo, ¿qué nos justifica a decir que la oración «2 = el número de los autores de *Principia Mathematica*» trata sobre objetos matemáticos que no nos justifique a decir que la oración «Don Quijote = el caballero de la triste figura» trata sobre una persona real? Bueno, consideramos que la última de estas oraciones es verdadera, así como que el nombre y la descripción definida que lo componen no refieren a un objeto real. (Tendríamos que investigar si los personajes, espacios y tiempos ficticios pueden llamarse *objetos literarios*). Lo cierto es que la forma gramatical de ambas oraciones es la misma, de suerte que, al menos, cabe dudar si, aun tomando como verdadera la primera oración, el numeral 2 y la descripción «el número de autores de *Principia Mathematica*» refieren. ¿Qué razón tenemos para decir que no es cierto que no refieren? ¿Cómo podríamos sostener que los términos matemáticos no son meras expresiones de arte, como los otros?

En su nota crítica a la publicación de *Frege´s Conception* de Wright, Field (1984) señala que en el Principio de Hume no hay una conexión lógica entre la relación uno a uno entre conceptos sortales de primer orden y la identidad entre números cardinales que corresponden a esos mismos conceptos. Así como lo expliqué arriba, el paso del lenguaje lógico al numérico no explica en qué punto aparecen los objetos abstractos. Field observa con toda razón (p. 658) que la existencia de los números como objetos no puede seguirse lógicamente de una relación de equivalencia entre conceptos, por lo que para el neo-fregeano, que es consciente de este asunto, es importante considerar el estatus del Principio de Hume como el de una verdad *conceptual*, dado que el concepto de NÚMERO CARDINAL se puede abstraer y explicar desde una relación lógica. Para el neo-fregeano, la existencia de los números como objetos no es una conclusión lógica, sino conceptual.

Field compara el proceder neo-fregeano con el Argumento Ontológico de San Anselmo. En efecto, así como en el *Proslogion* el razonamiento dice que Dios existe dado que podemos pensar y entender el concepto DIOS como un ser con ciertos atributos, así también el neo-fregeano argumenta que los números existen dado que tenemos una explicación del concepto de NÚMERO CARDINAL. Y si el argumento ontológico fracasa, también debe hacerlo el neo-fregeano.

Lejos de usar los razonamientos tradicionales que contradicen el argumento ontológico, Field cuestiona, más bien, contra la Tesis de la Prioridad Sintáctica, el hecho de que el carácter sintáctico de una expresión lingüística funcione para llegar a su carácter semántico. Pues hay muchos ejemplos de expresiones cuyo rol sintáctico es el de términos singulares que son vacíos, esto es, que carecen de referencia. Que «Dios» haga las veces de nombre propio no indica, según Field, que refiera al objeto Dios. Otro tanto ocurre con «Don Quijote» y «Zeus». ¿Por qué lo mismo no ocurriría con «el número de autores de *Principia Mathematica*»? Los números, así como los personajes literarios, podrían ser objetos ficticios que encuentren significado o sentido únicamente dentro de un conjunto de enunciados que los incluyan, pero no referencia. Del rol sintáctico de «el número de autores de *Principia Mathematica*», que puede aparecer en una oración verdadera, no se deduce necesariamente que la expresión refiera al número 2, ni, por ello, que exista tal objeto. En este sentido, cabe la posibilidad de que haya términos numéricos significativos sin referencia.

Una primera réplica neo-fregeana a este argumento es que los términos numéricos aparecen en oraciones verdaderas y no aisladamente. El Principio de Hume tiene un papel importante junto con la Tesis de la Prioridad en este punto porque es lo que ofrece esas oraciones de identidad verdaderas que contienen términos numéricos. Como hemos visto, el principio, si bien no es una definición de número cardinal, sí es un principio explicativo para las condiciones de verdad de la identidad entre números cardinales. Así, dicha verdad tiene un buen fundamento, una buena explicación, que es la relación uno a uno entre conceptos sortales de primer orden. Pero al respecto, el ficcionalista respondería que lo mismo podría ocurrir para objetos ficticios. Por ejemplo, «Don Quijote = Alonso Quijano» es una identidad que tiene sentido dentro de una construcción ficticia, pero ninguno de ambos nombres refiere. Tiene sentido porque es admisible la afirmación de que cada acción y cada característica que se dice del primero se dice también del segundo. Sin embargo, la identidad no podría ser verdadera, o, al menos, no literalmente verdadera.

Comoquiera que sea, esta respuesta no valdría para el neo-fregeano. La identidad del lado izquierdo del bicondicional de Principio de Hume funge como un criterio de individuación de objetos y, por ende, como un criterio ontológico. Todos los objetos de la ontología neo-fregeana deben tener un criterio de individuación que se basa en un criterio de identidad, es decir, siempre que tengamos una manera de decir bajo qué condiciones una identidad «$a = b$» es verdadera, podremos afirmar que a y b refieren a objetos independientes de la mente y del lenguaje, y que esta propiedad semántica contribuye al valor de verdad de su enunciado. En este sentido, la identidad «Don Quijote = Alonso Quijano» no es literalmente verdadera porque sus términos componentes no refieren, por lo que es imposible que contribuyan a su valor de verdad. Pero más importantes aún es el hecho de que las condiciones de verdad para la identidad entre números cardinales se encuentran en una fórmula de la lógica de segundo orden; así que, si aceptamos el Principio de Hume como una verdad conceptual, tenemos que conceder que su identidad tiene un buen fundamento para considerarse como verdadera, por lo que sus términos constituyentes tienen que referir.

Entonces la Tesis de la Prioridad no busca justificar el valor semántico de las expresiones por su rol sintáctico. Si así fuera, nos comprometeríamos con entidades que no estamos dispuestos a aceptar. Más bien, la Tesis tiene que trabajar junto con el Principio de Hume para asegurar las condiciones de verdad de los enunciados en los que aparecen esas expresiones, y éste, en contraste con el argumento ontológico, tiene la ventaja de tener una fórmula de la lógica de segundo orden con la que se explica la identidad entre objetos referidos por sus términos singulares. Sin embargo, cabe investigar, como lo haremos abajo, si esos términos refieren efectivamente a números o a otro tipo de objetos, pues esto es algo que ni el Principio de Hume ni la Tesis de la Prioridad Sintáctica pueden responder.

Conclusión

Hasta aquí se ha explicado el tránsito desde el uso cotidiano de conceptos sortales relacionados con objetos hasta la referencia de los términos singulares del tipo «el número de los *F*-objetos». Los primeros se han develado como la clave para llegar al concepto NÚMERO CARDINAL debido a sus criterios sortales. Los objetos que saturan conceptos sortales de primer orden pueden estar en relaciones uno a uno con otros conceptos, y eso, que se ha llamado equinumerosidad, sirve como un criterio para decidir si dos números cardinales son idénticos. Así nace el Principio de Hume. Empero, este principio de abstracción no es una definición del concepto NÚMERO CARDINAL, sino una explicación acerca de cómo entenderlo cuya base epistemológica es la equinumerosidad en tanto que es una relación lógica. El proceder de la explicación es una reconceptualización de la equinumerosidad. De acuerdo con ello, el Principio de Hume es una verdad analítica en un sentido epistemológico, pues se le conoce como verdadero en virtud de la comprensión de sus componentes. Su carácter analítico es una parte esencial del logicismo neo-fregeano, porque así las verdades que se deriven de él junto con otras de la lógica serán igualmente analíticas. Además del Principio de Hume, el neo-fregeanismo interpreta el Principio de Contexto de Frege como una tesis que afirma que, si una expresión subenunciativa tiene el rol de un término singular y figura en enunciados con un valor de verdad, entonces esa expresión tiene un valor semántico, su referencia, que contribuye al valor de verdad de su enunciado, de lo que se sigue que deben existir entidades extralingüísticas como referentes de los términos singulares. Puesto que los términos singulares del tipo «el número de los *F*-objetos» se encuentran en contextos lingüísticos con valores de verdad planteados por el Principio de Hume, por el Principio de Contexto (o su interpretación neo-fregeana) concluimos que hay un objeto que es su referente. Aunque uno esperaría que «el número de los *F*-objetos» refiera a un número cardinal, lo cierto es que ninguno de los dos principios mencionados asegura que así sea. Conocemos que hay un objeto referido, pero no conocemos de qué tipo sea. Debido a que puede ser cualquier tipo de objeto y no hay certeza de que sean números, el platonismo matemático no es una conclusión de los argumentos anteriores.

En este capítulo quedan asentadas las bases filosóficas del logicismo neo-fregeano. A continuación, revisaremos su desarrollo técnico desde la lógica de segundo orden para revelar sus logros en el campo de la aritmética. Será hasta el tercer capítulo que volveremos al problema del tipo de objetos referidos por los términos singulares del Principio de Hume y veremos si acaso el platonismo matemático tiene un buen fundamento en los razonamientos neo-fregeanos.

Capítulo 2. Las aritméticas fregeanas

Introducción

El logicismo (neo-)fregeano tiene tres propósitos: demostrar que la aritmética es una rama de la lógica, defender que el conocimiento matemático es una extensión analítica del conocimiento lógico y concebir los números como objetos auto-subsistentes. En este capítulo voy a mostrar que en *Begriffsschrift* Frege alcanza con éxito los primeros dos puntos, pero fracasa en el tercero, y que solo con la introducción del Principio de Hume en *Grundlagen* logra sus tres objetivos logicistas. Con ello quiero argumentar que el Principio de Hume es suficiente pero no es necesario para demostrar la aritmética desde la lógica. Esto quiere decir que hay una versión de logicismo que omite concebir los números como objetos abstractos. Dado que para el desarrollo de las aritméticas fregeanas de *Begriffsschrift* y *Grundlagen* debe haber un lenguaje de segundo orden, definiré este lenguaje y revisaré algunos problemas filosóficos en torno a él.

2.1 Un lenguaje formal para las aritméticas fregeanas

La lógica de Frege es la lógica de orden superior. Las definiciones de ancestral de *Begriffsschrift* §26 o de equinumerosidad de *Grundlagen* §63 son todas fórmulas de un lenguaje de orden superior. Éste se entiende como aquel que, además de tener variables de objeto (variables de primer orden cuyos símbolos son las literales $x, y, z, \ldots$), tiene variables de predicados n-arios y funciones n-arias de primer nivel (cuyos argumentos son variables de objetos) o de nivel superior (cuyos argumentos son predicados o funciones de primer nivel, predicados o funciones de predicados, etc.). Así como ocurre con las variables de objeto en el lenguaje de primer orden, en el lenguaje de orden superior los cuantificadores ligan variables de predicados o de funciones de distintos niveles.

La fuerza expresiva de las proposiciones lógicas que Frege necesitó para demostrar la aritmética no se abarca cuantificando solamente sobre variables de objeto, es preciso hacerlo también sobre las de predicado. Muchas fórmulas en la conceptografía fregeana que tienen un rol esencial para el logicismo no tienen equivalencias en lenguajes de primer orden. Si evitáramos la cuantificación sobre predicados, las formulaciones de la mencionada definición de ancestral —que Richard Heck califica de mágica (Heck, 2012, p. 198) dado su poder explicativo—, del Axioma de Comprehensión y del Principio de Inducción Matemática serían imposibles, y con ello perderíamos muchas de sus bondades en los fundamentos de la aritmética. Por tanto, hay buenas razones para cuantificar sobre variables de segundo orden.

La concepción que Frege tuvo de la lógica no es la que actualmente toman en cuenta los lógicos. Primero, porque incluye elementos como las barras de juicio y contenido[25], las extensiones[26] y los rangos de valores[27], que son irrelevantes para la lógica actual; segundo, porque relaciona[28] la lógica con una ontología que incluye a los números y a los Pensamientos como un tipo de entidades; tercero, porque relaciona[29] la lógica con nociones epistémicas como la de analiticidad y a prioridad, cuarto, porque sugiere[30] una concepción normativista de la lógica, es decir, para él la lógica dicta cómo debemos razonar. Estas diferencias arrojan luz sobre sus pensamientos sobre semántica, ontología y epistemología. Los cuatro puntos son propios más de una lógica filosófica, que de una lógica matemática *stricto sensu*, en la cual pueden quedar relegados. Desde luego, en el pensamiento de Frege es natural incluirlos todos si se considera su contexto y sus propósitos teóricos, pero cualquier libro o manual de lógica matemática actual los deja fuera.[31] Sin embargo, su lenguaje del pensamiento puro es, en esencia, una lógica de orden superior. Además, en sus escritos encontramos nociones de un sistema deductivo (axiomas, reglas lógicas, inferencias) y es posible desarrollar un modelo para su aritmética o establecer uno para interpretar su lenguaje. La sintaxis, los modelos y el sistema deductivo que se presentan a continuación, no fueron pensados completamente por Frege, pero están en concordancia con su conceptografía.

2. 1.1 Sintaxis

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con los siguientes elementos: conectivos lógicos de negación ($\neg$), condicional ($\rightarrow$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), y bicondicional ($\leftrightarrow$); cuantificador universal ($\forall$) y existencial ($\exists$); variables de objetos ($x, y, z, \ldots$); símbolos de predicados n-arios ($F, G, H, \ldots$); símbolos de función n-arias ($f, g, h, \ldots$); símbolos de constante ($a, b, c, \ldots$); fórmulas ($\Phi, \Psi, \Gamma, \ldots$); y paréntesis: (,). Agregamos a $\mathcal{L}$ la relación de identidad (=) como una relación lógica.

Son términos las variables de objetos y las constantes. Hay una regla de formación de términos:

[25] *Beggriffsschrift*, §2; *Grundgesetze* §5
[26] Frege, 2016, p. 451
[27] Frege, 2013, p. X
[28] Frege, 2016, p. 337
[29] Frege, 2016, p. 383
[30] Frege, 2013, p. XV
[31] En artículos sobre filosofía de la lógica la relación entre lógica y ontología y el carácter normativo de la lógica son tópicos comunes. Hasta donde sé, no hay libros de lógica-matemática que aborden una discusión filosófica sobre ellos.

- *si* f *es una función* n-*aria y* t *un término, entonces* ⌜f (t)⌝ *es un término*
- *si* f *es una función* n-*aria y* $t_1 \ldots t_n$ *un término, entonces* ⌜f ($t_1 \ldots t_n$)⌝ *es un término*

Las siguientes son reglas para obtener fórmulas bien formadas (*fbf*):

- *Si* F *es un predicado n-ario y* t *un término, entonces* F (t, … t´) *es fbf*
- *Si* Φ, Ψ *son fórmulas, entonces* $\neg \Phi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$, *son fbf.*
- *Si* x *es un término y* Φ *una fórmula con* x *no libre, entonces* $\forall x(\Phi)$ y $\exists x(\Phi)$ *son fbf.*
- *Si* x *y* x´ *son variables libres, entonces* x = x´ *es una fbf.*

Sea *Var*($\mathcal{L}$) el conjunto de variables de objeto de $\mathcal{L}$, o sea, *Var*($\mathcal{L}$) = {*x, y, z*…}. Los cuantificadores solo pueden ligar elementos de este conjunto. $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden con identidad que denotaremos por $\mathcal{L}_1^=$.

Extendamos el conjunto *Var*($\mathcal{L}$) para crear a un lenguaje de segundo orden $\mathcal{L}_2^=$. Sean {*P, Q, R*…} y {*f, g, h*…} subconjuntos de *Var*($\mathcal{L}$). Entonces tenemos nuevas *fbf*:

- *Si* F *es una variable de predicado n-ario y* Φ *una fórmula con* F *no libre, entonces* $\forall F(\Phi)$, $\exists F(\Phi)$ *son fbf*
- *Si* f *es una variable de función n-aria y* Φ *una fórmula con* f *no libre, entonces* $\forall f(\Phi)$ *y* $\exists f(\Phi)$ *son fbf*

Ahora que los cuantificadores pueden ligar variables de predicado y función, la identidad ya no es una relación primitiva de $\mathcal{L}_2^=$, sino que se define de manera similar a la Ley de Leibniz:

$$x = y \overset{\text{def}}{=} \forall F\,(Fx \leftrightarrow Fy)$$

2.1.2 Semántica[32]

Los elementos del lenguaje formal tienen que ser interpretados mediante un modelo. Un modelo para la lógica de primer orden es una estructura matemática $M = \langle d, I \rangle$, en la cual *d* es un conjunto no vacío, llamado universo del discurso o dominio, e *I* es una función de interpretación que asigna elementos del conjunto *d* a elementos del vocabulario no lógico. Así, si *t* es un término, entonces *I* lo asigna a un miembro de *d*. Una asignación de variable *s* es una función que asigna variables del lenguaje a *d*, esto es, s: *Var*($\mathcal{L}$) $\longrightarrow d$. Para todo modelo *M* y toda asignación *s,* hay una función de denotación que asigna un elemento del conjunto *d* a todos los términos del lenguaje. Decimos que *M* es un modelo de una fórmula

[32] Existe una amplia literatura sobre teoría de modelos para la lógica de segundo orden. En este breve apartado me baso en los trabajos de Marcus Rossberg (2006) y Stewart Shapiro (2005*b*).

Φ si M satisface Φ para toda asignación de variable s. Decimos que Φ es una consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas Γ si, para todo modelo M y toda asignación de variable s en M, $M, s \vDash \Gamma$ tal que toda Φ es verdadera en M, s.

La semántica estándar para la lógica de segundo orden usa el mismo modelo que la lógica de primer orden. Dado que el conjunto $Var(\mathcal{L})$ tiene como elementos letras de predicado y de función, la función de asignación asigna elementos del conjunto d a variables de primer orden, subconjuntos de d^n a variables de predicado n-arios, y funciones de d^n a variables de función n-arias. Se agregan cláusulas respecto de la función de denotación dado el hecho de que ahora los cuantificadores ligan variables de segundo orden:

- Sea $M = \langle d, I \rangle$ un modelo y s una asignación de variables en M. La denotación de la función $f\,(t\ldots\, t)$ en M es el resultado de la función $s\,(f)$ para las denotaciones de $t\ldots\, t$.
- Sea $M = \langle d, I \rangle$ un modelo y s una asignación de variables en M. Si F es un predicado n-ario y $t\ldots\, t'$ son términos, $M, s \vDash F\,(t\ldots\, t')$ si y solo si la secuencia de denotaciones de los términos $t\ldots\, t'$ está en los valores de la función $s\,(F)$.

$\mathcal{L}_2{}^{=}$ también se puede interpretar por modelos no estándar, a saber, mediante la semántica Henkin[33]. Un modelo de Henkin es un cuádruplo $M=\langle d, D, F, I \rangle$, donde d e I se entienden igual que en el modelo anterior, D y F son secuencias de conjuntos cuyos miembros son subconjuntos de d^n que se asignan a variables de predicados n-arios y de funciones de d^n a d asignadas a variables de función, respectivamente. Esto significa que la función de interpretación del modelo ya no asigna elementos de d^n a variables de segundo orden, sino que ahora les asigna elementos (secuencias de conjuntos) de D o F.

2.1.3 El sistema deductivo de la lógica de segundo orden[34]

La deducción de una fórmula Φ es una secuencia finita de fórmulas $\Phi_1\ldots\, \Phi_n$, tal que $\Phi_n = \Phi$, y alguna(s) Φ_i de la secuencia son o bien axiomas, o bien fórmulas derivadas en la secuencia mediante reglas de deducción. Las reglas de deducción se entienden de manera informal como un mecanismo por el cual llegamos a fórmulas a partir de un conjunto de fórmulas primitivas. La deducción es una cadena de inferencias cuyos nodos son llevados a cabo por

[33] Llamada así en honor a Leon Henkin (1921-2006)

[34] Existe una amplia literatura sobre sistemas deductivos para la lógica de segundo orden. En este breve apartado me baso en los trabajos de Stewart Shapiro (1991), Marcus Rossberg (2006), y Dag Prawitz (2006).

este mecanismo. Un sistema deductivo está conformado por un conjunto de axiomas, reglas de inferencia y reglas de deducción.

Esquema axiomático

$A \to (B \to A)$

$A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

$\forall x\, A(x) \to A\,(t)$ t es un término libre para x en Φ

$\forall F\, A(F) \to A(T)$ T es un predicado libre para F en Φ

$\forall f\, A(f) \to A(r)$ r es una función libre para f en Φ

Reglas de inferencia

Modus ponens:

De A y $A \to B$ inferimos B

Generalización:

De $A \to B\,(t)$ inferimos $A \to \forall x\, B(x)$ si t no es libre en A

De $A \to B\,(T)$ inferimos $A \to \forall F\, B(F)$ si T no es libre en A

De $A \to B\,(r)$ inferimos $A \to \forall f\, B(f)$ si r no es libre en A

A las reglas de deducción de la lógica de primer orden agregamos de manera similar otras para variables de predicado. Las abreviaciones 'I' y 'E' delante de los cuantificadores significan Introducción y Eliminación, respectivamente. El superíndice junto al cuantificador indica que las reglas valen para el lenguaje de orden-2.

Reglas de deducción para la lógica de segundo orden

$\forall^2$-I) $\dfrac{A}{\forall F\,(A)}$ $\forall^2$-E) $\dfrac{\forall F\,(A)}{A}$

$\exists^2$-I $\dfrac{A}{\exists F\,(A)}$ $\exists^2$-E $\dfrac{\exists F\,(A)}{A}$

2.2 Los límites entre lógica de segundo orden y teoría de conjuntos

2.2.1 Los argumentos de W. O. Quine contra la lógica de segundo orden

En un lenguaje de primer orden la fórmula ⌜ $\exists x\ F(x)$ ⌝ se lee como «hay al menos un individuo con la propiedad F» o «existe al menos un F» o «algún individuo es F». La interpretación literal de las fórmulas cuantificadas lleva consigo un compromiso ontológico con algún tipo de entidades objetuales. Si esto es cierto, entonces, por analogía, lo mismo tiene que ocurrir cuando se cuantifica sobre predicados: la fórmula ⌜ $\exists F\ (F(t))$ ⌝ dice que existe una propiedad instanciada por un individuo. ¿Esto nos compromete ontológicamente también con la existencia de propiedades de individuos?

El famoso *dictum* de W. V. O. Quine, «ser es ser el valor de una variable» (Quine, 1939, p. 708)[35], plantea que fórmulas como ⌜ $\exists x\ F(x)$ ⌝ tienen un compromiso ontológico con las entidades representadas por la variable ligada por el ∃-cuantificador cuando son parte de teorías verdaderas. Si sustituimos el símbolo de predicado por uno concreto, por ejemplo, «cuadrúpedo», entonces ⌜ $\exists x$ (x es cuadrúpedo) ⌝ es una fórmula que compromete con la existencia de entidades cuadrúpedas en una teoría. Si, por el contrario, sustituimos «unicornio» en lugar del símbolo de predicado, la fórmula será falsa y no habrá ningún compromiso ontológico con unicornios. Sin embargo, rechaza que fórmulas de segundo orden como ⌜ $\exists F\ (F(x))$ ⌝ tengan el mismo compromiso con entidades universales o propiedades de objetos. Según su razonamiento, las variables que liga el ∃-cuantificador sustituyen nombres de objetos. En *Philosophy of Logic* Quine argumenta:

> Empecemos por considerar algunas cuantificaciones ordinarias: ‘($\exists x$) (x pasea)’, ‘(x) (x pasea)’, ‘($\exists x$) (x es primo)’. La oración abierta que sigue al cuantificador presenta a ‘x’ en una posición en la que podría estar un nombre; el nombre propio de un paseante, por ejemplo, o el de un número primo. Las cuantificaciones no quieren decir que los nombres propios pasean o que son primos; dicen que pasean o que son primos cosas que podrían ser nombradas *por* nombres propios puestos en las posiciones de ‘x’. Por lo tanto, colocar a letra predicativa ‘F’ en un cuantificador es tratar de repente las posiciones de predicado como posiciones de nombre propio y, consiguientemente, tratar los predicados como nombres propios de entidades de algún tipo (Quine, 1970, p. 118).

[35] Citado en Rossberg (2006, p. 90).

En este sentido, dado que la cuantificación sobre variables de objeto nos dice algo sobre objetos, la cuantificación sobre predicados tendría que decirnos algo sobre las propiedades que representan; pero para Quine no es así, ya que los predicados no son nombres.

En segundo lugar, un segundo *dictum* de Quine, «ninguna entidad sin identidad», significa que toda entidad debe tener un criterio de identidad numérica. En este sentido, si *F* y *G* sustituyen nombres de una entidad, entonces tiene que haber un criterio para decidir la verdad de «$F = G$». Si *F* significa el atributo SOLTERO y *G*, NO CASADO, entonces parece que «SOLTERO = NO CASADO» es una verdad (analítica) por una cuestión de simple sinonimia, lo que nos llevaría a pensar que hay dos nombres para el mismo atributo. Sin embargo, es bien sabido que Quine rechaza la sinonimia y la analiticidad, de modo que no hay un criterio para decidir la identidad entre atributos. En palabras de Quine: «Los atributos se parecen a las proposiciones en cuanto a lo inadecuados que resultan todos los intentos de identificarlos, de conseguir su individuación» (1973, p. 119). Entonces: dado que no se pueden individuar, los predicados no son nombres o sustitutos de nombres de algún tipo de entidad, de suerte que cuantificar sobre predicados, para Quine, es un sinsentido y no tiene un compromiso ontológico con entidades universales.

Frege conocía ya el problema de la individuación de entidades que representan las variables de predicados. En su respuesta a la crítica de Kenno Berry[36] sobre sus *Grundlagen*, llega a la conclusión de que los conceptos son entidades cuya referencia no es directa en el sentido de que, cada vez que intentamos hablar sobre ellas, terminamos hablando sobre un objeto. Pues contrario a lo que ocurre con la afirmación «el caballo de Nerón es un caballo», en la que hablamos de un objeto representado por una descripción definida, la afirmación «el concepto CABALLO es un concepto» no habla de un concepto, sino de un objeto, ya que la expresión «el concepto CABALLO» es una descripción definida, un término singular que denota un objeto. En las oraciones no podemos hablar de los conceptos porque para predicar sobre ellos hay que convertirlos en sujetos, en algún tipo de término singular que refiere a objetos. Así, hablar sobre el concepto CABALLO no es, paradójicamente, hablar sobre el concepto CABALLO sino de la extensión del concepto CABALLO. Frege explica:

> Según esto, se esperaría que la referencia del sujeto gramatical fuera el concepto; pero debido a la naturaleza predicativa, éste no puede aparecer así sin más, sino que tiene que ser transformado primero en un objeto, o, dicho más exactamente, tiene que ser

[36] "Uber Begriff und Gegenstand"

> representado por un objeto que designamos anteponiéndole las palabras "el concepto" (Frege, 2016*a*, p. 282)

De acuerdo con esto, ¿cómo podríamos hablar de la identidad entre dos conceptos si al decir «el concepto *F* es idéntico al concepto *G*» usamos descripciones definidas que indican que hablamos, en realidad, de sus representantes objetuales? La relación más cercana a la identidad que puede haber entre conceptos es la de equinumerosidad que, como la identidad, también es una relación de equivalencia, pero, a diferencia de la primera, la segunda no individúa entidades universales. Esto no significa que Frege llegue a la misma conclusión de Quine; para él, los conceptos, las propiedades de los objetos, no son referidos por los predicados directamente.

Con base en lo anterior, ¿qué se puede decir sobre los predicados en el lenguaje de segundo orden? Pensar que puede haber un criterio de identidad para decidir la verdad de $\ulcorner F = G \urcorner$ desde un punto de vista fregeano supone que se toman las variables de predicados como representantes de propiedades de objetos y, en consecuencia, que se toman en un sentido intensional[37]. Pero, dado que la búsqueda de tal criterio falla incluso para Frege, no hay una justificación para considerarlas dentro de la ontología. Empero, la interpretación intensional de los predicados no es la única. De acuerdo con Quine (1970, p. 68), el enunciado $\ulcorner Fx \urcorner$ puede interpretarse como $\ulcorner x \in w \urcorner$, esto es, los predicados no representan entidades universales que engloban individuos, sino que son conjuntos. Así, la fórmula $\ulcorner w_1 = w_2 \leftrightarrow \forall x \, (x \in w_1 \leftrightarrow x \in w_2) \urcorner$ funcionaría como un criterio para decidir cuándo un predicado, tomado como un conjunto, es idéntico a otro. Interpretados de esta manera, los predicados son entidades extensionales. A tenor de este criterio, Quine demuestra que dos predicados son extensionalmente idénticos, pero intensionalmente distintos. El atributo *criatura con corazón* tiene exactamente los mismos elementos que el atributo *criatura con riñón,* pero claramente, tener corazón no es lo mismo que tener riñón.

La distinción intensional/extensional dicho sobre los predicados que representan las variables de segundo orden cuantificadas nos ilustra sobre la naturaleza de la lógica de segundo orden. Si la interpretación extensional de los predicados es correcta, entonces somos llevados al tercer *dictum* de Quine: «la lógica de segundo orden es teoría de conjuntos

[37] Cuando el enunciado *Fx* se lee como «*x* tiene la propiedad *F*» o «*F* vale para *x*» o simplemente «*x* es un *F*» el predicado se toma como una propiedad y, por tanto, en un sentido intensional. La intensionalidad de un predicado es opuesta a su extensionalidad. Dos propiedades —como menciono abajo— pueden abarcar los mismos objetos y ser distintas. Esto no ocurre cuando los predicados tienen su sentido extensional. Vistos como un fregeano, los predicados son intensionales porque representan propiedades. De ahí que se tenga que considerar la frase «desde un punto de vista fregeano», pues al menos para Frege hay un sentido intensional.

vestida de cordero» (1973, p. 118). Para Quine, la lógica de segundo orden no es una lógica genuina. La razón es que las variables de predicados que son cuantificadas en la lógica de segundo orden son interpretadas como conjuntos, que son objetos matemáticos con los que sí podemos estar comprometidos, ya que existe un criterio de identidad por el cual podemos individuarlos. Es decir: en el fondo no hay cuantificación sobre variables de predicados, puesto que los predicados son conjuntos, así que no hay una lógica de segundo orden. Esto lleva a la conclusión de que cualquier intento por usar la lógica de segundo orden como fundamento para la aritmética es deshonesto, pues la justificación del conocimiento matemático no es el conocimiento lógico, sino nociones igualmente matemáticas. La consecuencia de este pensamiento quineano socava el programa logicista neo-fregeano, pues muestra que el conocimiento aritmético no tiene una base lógica conformada por conceptos, objetos y la relación entre ambos, como afirman Frege y sus seguidores, sino una matemática compuesta por conjuntos (Herbert, 2015; MacBride, 2003, p. 135-142).

2.2.2 Tres argumentos en favor de la lógica de segundo orden

Pero no todo está perdido para el logicismo. La lógica de segundo orden es una extensión de la de primer orden en un sentido semántico, dado que los símbolos de función y predicado forman subconjuntos en el conjunto de las variables que el modelo tiene que interpretar. Sintácticamente, el sistema deductivo de la lógica de primer orden también se extiende con nuevas reglas lógicas para fórmulas que cuantifican variables de segundo orden. Si lo que ocurre con esta extensión es que agregamos elementos semánticos y sintácticos al lenguaje, ¿cómo y en qué punto el lenguaje deja de ser lógica para llegar a ser teoría de conjuntos?

En su "On Second Order Logic" George Boolos acepta que en todo modelo de lógica de primero y segundo orden uno está comprometido con el conjunto vacío, dado que éste es un subconjunto del dominio del modelo, pero de ahí no se desarrolla una teoría de conjuntos (1999, p. 48). Según Boolos, la pureza de la lógica de segundo orden se mantiene por sus definiciones de validez y consecuencia que son una continuidad de la de primer orden. Señala:

> Validez y consecuencia son, como siempre, verdaderas en todas las interpretaciones adecuadas; la definición de una interpretación permanece inalterada, como lo hace la explicación de las condiciones bajo las cuales un enunciado de primer orden es verdadero en una interpretación. La explicación necesita únicamente ser *suplementada* con nuevas cláusulas para los nuevos tipos de enunciados que surgen en la lógica de segundo orden. La suplementación se puede dar en cláusulas separadas para cada nuevo tipo de cuantificador, que será

> perfectamente análogo a aquellos cuantificadores para individuos [...] La existencia de tales definiciones [de validez y consecuencia] ofrece una fuerte razón para reconocer la lógica de segundo orden como lógica (1999*b*, 48).

Lo que hace un modelo (estándar) con el lenguaje de primer orden es análogo con lo que hace con el lenguaje de segundo orden, como observamos en el apartado anterior.

Boolos también argumenta que, si la lógica de segundo orden fuera teoría de conjuntos vestida de oveja, entonces las fórmulas válidas en la primera tendrían que serlo también en la segunda, pero no es así. Como ejemplos, Boolos aduce (1999*b*, p. 40) la fórmula válida de segundo orden ⌜$\exists F \forall x\, (Fx)$⌝ que, en su traducción a la teoría de conjuntos es la fórmula inválida ⌜$\exists w \forall x\, (x \in w)$⌝, y la fórmula válida ⌜$\forall F\, (Fx \leftrightarrow Fy)$⌝, cuya traducción ⌜$\forall w\, (x \in w \leftrightarrow y \in w)$⌝, es inválida. De estas razones, Boolos concluye: «ningún enunciado de segundo orden asevera lo mismo que cualquier teorema de la teoría de conjuntos y, por tanto, en este sentido, ni siquiera el más mínimo fragmento de teoría de conjuntos está incluido en la lógica de segundo orden» (1999, p. 46).

En *Necessary Beings*, Hale (2013) presenta tres argumentos para defender el sentido intensional de los predicados en la lógica de segundo orden. El primero es realmente sencillo. Retomando la dicotomía fregeana entre objeto y concepto, Hale apunta que es un sinsentido la idea de considerar los conceptos (representados por los predicados) como conjuntos, ya que éstos son objetos, y ningún objeto puede ser un concepto, lo que significa que ninguna variable de segundo orden puede representar a un objeto. Los objetos sólo caen bajo conceptos, pero nunca bajo otros objetos, de modo que si las variables de segundo orden representaran conjuntos (objetos), estaríamos afirmando que los objetos representados por las variables de primer orden caen bajo ellos, lo que estaría en desacuerdo con el pensamiento fregeano. Este primer argumento es débil porque depende de aceptar ciegamente las palabras de Frege.

El segundo argumento de Hale sostiene que hay una buena razón para cuantificar sobre predicados que representan propiedades. Dicha razón es que solo así expresamos las condiciones de la identidad para objetos mediante la fórmula ⌜$a{=}b \leftrightarrow \forall F\, (Fa \leftrightarrow Fb)$⌝, que es una versión formal de la Ley de Leibniz. Esas condiciones tienen que estar basadas en la compartición de las mismas propiedades relativas a cada objeto, y no en la de las mismas porciones de espacio y tiempo —como afirmaría el naturalismo de Quine—, porque eso excluiría a los objetos abstractos. Hale piensa que no hay manera de que esta alternativa pueda apoyar “un argumento selectivo contra las propiedades en el pensamiento quineano, ya que nuestras condiciones de identidad de objetos cuantifican sobre propiedades, y eso presupone que hablar de propiedades es correcto" (2013, p. 188).

Su tercer argumento dice que hay condiciones necesarias y suficientes para la identidad entre propiedades análogas a las de la identidad entre objetos. Hale declara:

> Una vez que reconocemos que podemos hablar adecuadamente de propiedades y relaciones, así como de objetos, una cuestión obvia es si podemos establecer condiciones necesarias y suficientes para la identidad de propiedades análoga a nuestras condiciones para la identidad entre objetos. Yo pienso que sí. Así como los objetos son idénticos si y solo si necesariamente ellos comparten todas sus propiedades (de primer nivel), así las propiedades (de primer nivel) son las mismas si y solo si ellas necesariamente comparten *todas* sus propiedades (de segundo nivel) (2013, 188).

Entonces, Hale piensa que si ⌜R^2⌝ representa un predicado binario de segundo orden cuyos argumentos ⌜F⌝ y ⌜G⌝ son predicados de primer orden, entonces podemos establecer la fórmula ⌜$R^2(F, G) \leftrightarrow \forall X^2\ (X^2(F) \leftrightarrow X^2(G))$⌝, donde R representa la relación de identidad. Un ejemplo de propiedad de orden superior que X representaría es INSTANCIAR AL OBJETO $\boldsymbol{a}$ que cumplen F y G si y sólo si ⌜Fa⌝ y ⌜Ga⌝. En consecuencia, dos conceptos son idénticos si tienen las mismas condiciones de satisfacción o, dicho de otra manera, "dos predicados 'F' y 'G' representan la misma propiedad si y sólo si tienen el mismo significado" (Hale, 2013, p. 189). Estos dos últimos argumentos de Hale defienden una idea realista sobre los conceptos; en consecuencia, los predicados aquí son intencionales.

Marcus Rossberg (2006) toma una vía sintáctica para defender que la lógica de segundo orden es una lógica genuina. Su argumento se basa en una concepción deductivista de la lógica inspirada en Frege, aunque difiere en puntos importantes respecto del fregeanismo. Él piensa que una concepción basada en la teoría de modelos borra la línea divisoria entre lógica y matemática porque un modelo es, por definición, una estructura matemática. Por el contrario, la concepción deductivista, puramente sintáctica, está libre de nociones matemáticas y conjuntistas. Rossberg dice que, si asumimos que las inferencias de la lógica de primer orden son casos de consecuencia lógica —como de hecho lo hacemos— y si, por otro lado, aceptamos que el mismo mecanismo sintáctico funciona en la lógica de segundo orden, entonces ésta tiene que contar como lógica. En su disertación doctoral, *Second-Order Logic*: *ontological and epistemological problems*, escribe:

> La lógica de primer orden tiene constantes lógicas para la generalización sobre la posición de los nombres —el cuantificador de primer orden—, pero las letras de predicado no tienen ningún rol en la inferencia. Dada la similitud de las reglas, y la curiosa carencia de la función inferencial de las letras de predicado, ¿no contaría la cuantificación de segundo orden como lógica? Los cuantificadores están bien incorporados en nuestras prácticas inferenciales y la generalización sobre posiciones de nombres es considerada como propiamente lógica. ¿Qué nos quedaría si aplicáramos un mecanismo muy similar para la generalidad para la posición del predicado también? (Rossberg, 2006, p. 204).

La idea de Rossberg está en concordancia con la de Boolos en dos sentidos. Primero, y muy importante, es el hecho de tomar a la lógica de segundo orden como una continuidad de la de primer orden. Si las reglas de inferencia para los lenguajes de primer orden son lógicas, entonces cuando se aplican para lenguajes superiores conservan su carácter lógico. Segundo, Boolos y Rossberg usan la navaja de Ockham para eliminar una ontología abstracta de la lógica de segundo orden:

> Las entidades no se tienen que multiplicar más allá de la necesidad [...] los compromisos ontológicos se llevan a cabo por nuestros cuantificadores de *primer* orden; un cuantificador de segundo orden no se tiene que tomar como un cuantificador de primer orden disfrazado, teniendo ítems de un tipo especial, como colecciones, en su rango. No es que haya dos clases de cosas en el mundo, individuos y colecciones de ellos, que nuestras variables de primero y segundo orden, respectivamente, abarcan y que nuestras formas singulares y plurales, respectivamente, denotan. Más bien, hay (al menos) dos maneras diferentes de referir a las mismas cosas, entre las cuales puede haber muchas, muchas colecciones (Boolos, 1999*b*, p. 72).

Por su parte, para evitar compromisos ontológicos, Rossberg concibe los cuantificadores en su enfoque deductivista no como objetuales sino como cuasi sustitucionales, dado que los predicados son esquemáticos:

> La preocupación obvia es que los cuantificadores de primer orden abarcan los objetos del dominio. No queremos comprometernos con predicados que tengan referentes, así que no cuantificaríamos sobre la posición de los predicados. Aquí la réplica es que, en el enfoque deductivista, los cuantificadores (de primero *y* segundo orden) no se pensarían como objetuales. Más bien, las reglas del cuantificador son cuasi-sustitucionales. 'Cuasi-sustitucional' aquí significa que las reglas esquemáticas de

> eliminación e introducción especifican qué rol inferencial suplen los enunciados que contienen los cuantificadores respecto de otros enunciados. Un rango de entidades ni es mencionado ni especificado —y, hasta ese punto, la explicación de los cuantificadores es una forma de cuantificación sustitucional (2006, p. 204).

Si, por un lado, el argumento de Quine contra la lógica de segundo orden es que las variables de predicado esconden conjuntos porque su criterio de identidad es extensional y porque toda fórmula de dicha lógica tiene una traducción en la teoría de conjuntos, por otro lado, los argumentos de Hale, Boolos y Rossberg responden satisfactoriamente a esta contrariedad. Pues el límite entre lógica y teoría de conjuntos consiste en que no toda fórmula de la primera tiene una equivalencia en una fórmula de la segunda; además, la lógica de segundo orden no es un nuevo lenguaje, es una extensión de la lógica de primer orden tanto en su interpretación de las nuevas variables como en su sistema deductivo. Esto último no significa que la lógica de orden superior contenga los resultados de una lógica clásica de predicados; solo dice que la manera como ligamos las variables de objeto a los cuantificadores también se aplica para las variables de predicados, y lo mismo ocurre en la deducción. Por último, el tercer argumento de Hale muestra cómo hay un criterio para decidir la identidad entre predicados F y G aludiendo a conceptos de orden superior, en una analogía con la Ley de Leibniz. Sin embargo, a diferencia de Hale, esta identidad se puede interpretar, no como una relación entre entidades universales, sino, como sugiere Rossberg, de manera esquemática para evitar compromisos ontológicos. Si la lógica de segundo orden tiene compromisos ontológicos con entidades universales es un asunto que no discuto aquí; sin embargo, vamos a conceder que así es para seguir el argumento neo-fregeano que aparecerá en el siguiente capítulo.

2.3 La Aritmética-BF

2.3.1 Elementos lógicos de *Begriffsschrift* para la demostración de la aritmética

Frege escribe:

> … la aritmética fue el punto de partida de una serie de pensamientos que me llevó a mi conceptografía. Y por ello intenté aplicarla antes que nada a esa ciencia, intentando probar un análisis más detallado de los conceptos de la aritmética y un fundamento más profundo para sus teoremas. Por el momento, en la tercera parte [de *Begriffsschrift*] comunico algunos de sus resultados en esa dirección (1967, p. 8).

La tercera parte de *Begriffsschrift* que su autor menciona aquí contiene la parte sustancial del logicismo que me interesa mostrar en este apartado. En ella se encuentra una teoría de series con la que se demuestran las leyes fundamentales de la aritmética y se desarrolla un modelo aritmético isomorfo a un sistema de Peano. Esta teoría de series no satisface la concepción de los números como objetos lógicos, porque en ellas el sistema de números los presenta como una estructura y, por tanto, no los puede individuar. En este primer logicismo de Frege hay dos logros reconocibles: 1) las leyes de la aritmética son verdades derivables de la lógica de segundo orden y 2) si ser lógicamente derivable de una proposición significa ser una verdad analítica respecto de esa proposición, entonces las leyes de la aritmética son analíticas.

Las leyes de la aritmética que son verdades derivadas para el logicismo son los axiomas Dedekind-Peano:

A1. *Cero es un número*:

$\mathbb{N}0$

A2. *El sucesor de un número es un número*

$\forall x \forall y\, (\mathbb{N}x \wedge Pxy \rightarrow \mathbb{N}y)$

A3. *Todo número tiene un sucesor*

$\forall x\, (\mathbb{N}x \rightarrow \exists y\, (Pxy))$

A4. *Cero no es sucesor de algún número*

$\neg\exists x\, (\mathbb{N}x \wedge \mathrm{P}x0)$

A5. *Todo número tiene un único sucesor*

$\forall x\, (\mathbb{N}x \wedge \forall y \forall z\, (Pxy \wedge Pxz \rightarrow y{=}z))$

A6. *Todo número tiene un único antecesor*

$\forall x \forall y \forall z\, (\mathbb{N}x \wedge \mathbb{N}y \wedge Pxz \wedge Pyz \rightarrow x{=}y)$

A7. *Principio de Inducción Matemática*

$\forall F\, (F0 \wedge \forall x\, (\mathbb{N}x \wedge Fx \rightarrow \forall y\, (Pxy \rightarrow Fy)) \rightarrow \forall x\, (\mathbb{N}x \rightarrow Fx))$

Llamo *Aritmética-BF* a la teoría conformada por la lógica de segundo orden, el esquema axiomático, las definiciones presentadas a continuación y todos los teoremas, lemas y proposiciones que de ellos se siguen.

Esquema axiomático[38]:

(1)	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$	*BF*. (1)
(2)	$(c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))$	*BF*. (2)
(3)	$(d \rightarrow (b \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow (d \rightarrow a)$	*BF*. (8)
(4)	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$	*BF*. (28)
(5)	$\neg \neg a \rightarrow a$	*BF*. (31)
(6)	$a \rightarrow \neg \neg a$	*BF*. (41)
(7)	$c{=}d \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d))$	*BF*. (52)
(8)	$a = a$	*BF*. (54)

Definiciones:

(1) *Relación hereditaria*: *BF* (69)

$\text{HER}\ (\mathrm{F}, Q) \overset{\text{def}}{=} \forall x \forall y\ ((\mathrm{F}x \wedge Q\ (x, y)) \rightarrow \mathrm{F}y)$

(2) *Relación funcional* *BF* (124)

$\text{FUNC}\ (Q) \overset{\text{def}}{=} \forall x \forall y \forall z\ (Q\ (x, y) \wedge Q\ (x, z) \rightarrow y = z)$

(3) *Ancestral fuerte* *BF* (76)

$\mathrm{Q}^{*}ab \overset{\text{def}}{=} \forall \mathrm{F}\ (\forall x\ (Q\ (a, x) \rightarrow \mathrm{F}x) \wedge \forall x \forall y\ ((\mathrm{F}x \wedge Q\ (x, y)) \rightarrow \mathrm{F}y) \rightarrow \mathrm{F}b)$

(4) *Ancestral débil* *BF* (99)

$\mathrm{Q}^{*=}ab \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Q}ab \vee a = b$

En *Grundgesetze* I Frege estudia las series finitas e infinitas que son posibles gracias al ancestral débil y fuerte definidos ya en *Begriffsschrift*. Estas definiciones dan forma a la estructura de los números naturales porque construyen series bien ordenadas. William Stirton (2019) observa que los teoremas 207 y 263 de *Grundgesetze* I, §144 y §157 respectivamente, son ejemplos de series infinitas. En ellos Frege muestra que, por series infinitas, que son fórmulas puramente lógicas, llegamos a $\aleph_0$, que él llama *Endlos*, y viceversa.

TEOREMA 263, *Grundgesetze* I:

$$\exists \mathrm{Q}\ (\mathrm{Func}\ (\mathrm{Q}) \wedge \neg \exists x\ (\mathrm{Q}^{*}\ (x, x) \wedge \forall x\ (Gx \rightarrow \exists y\ (Q\ (x, y) \wedge \exists x \forall y\ (Gy \leftrightarrow Q^{*=}(x, y))) \\ \rightarrow \#Gx = \mathrm{N}x\!:\ \mathrm{P}^{*=}\ (0, x)$$

[38] Compare este conjunto de axiomas con el esquema de arriba. Los axiomas (1) y (2) son los mismos, (4) es la dirección inversa del condicional, (5) y (6) son tautologías, (8) es una abreviación de una fórmula de segundo orden, como vimos arriba.

El teorema dice que el número de los *G*-objetos es idéntico al número de los números naturales si existe una relación *Q* que cumpla las siguientes cuatro condiciones[39]:

i. *Q* es funcional:

$$\mathrm{Func}\ (Q)$$

ii. Ningún objeto se sigue a sí mismo en la *Q*-serie:

$$\neg\exists x\ (Q^*\ (x, x)$$

iii. Todo *G*-objeto es seguido por algún otro en la *Q*-serie:

$$\forall x\ (Gx \rightarrow \exists y\ (Q\ (x, y)$$

iv. Todo *G*-objeto pertenece a la *Q*-serie que comienza con *x*:

$$\exists x \forall y\ (Gy \leftrightarrow Q^{*=}(x, y)))$$

En otras palabras, nos dice que toda serie infinita es numerable.[40] El lado opuesto del bicondicional, el Teorema 207, afirma que toda serie numerable es infinita.

TEOREMA 207*, Grundgesetze* I:

$$\#Gx = \mathrm{N}x\text{: } P^{*=}\ (0, x)$$
$$\rightarrow (\exists Q\ (\mathrm{Func}\ (Q) \wedge \neg\exists x\ (Q^*\ (x, x) \wedge \forall x\ (Gx \rightarrow \exists y\ (Q\ (x, y) \wedge \exists x \forall y\ (Gy \leftrightarrow Q^{*=}(x, y))))$$

Ambos teoremas contienen la función ⌜#ξ⌝ ausente en el lenguaje de segundo orden. Omitiremos esta expresión porque basta considerar las condiciones (*i*)-(*iv*) del Teorema 263 para demostrar las leyes de la aritmética.

Por último, es necesaria la siguiente:

DEFINICIÓN[41]: *un número natural es el objeto* 0 *con el que comienza la Q-serie, o cualquier objeto dentro de la Q-serie que comience con* 0. En términos formales:

$$\mathbb{N}x \stackrel{\text{def}}{=} Q^{*=}\ (0,\ x).$$

[39] Véase Heck, (2013, p. 179)
[40] Stirton (2019, p. 213)
[41] Esta definición no aparece en *Begriffsschrift*, pero sí en *Grundlagen* §83, donde leemos: «*n* es un miembro de la secuencia de los números naturales que comienza con 0». Aunque forma parte de las definiciones de esta última obra, obsérvese que no aparece el operador numérico del Principio de Hume.

2.3.2 La demostración de los axiomas Dedekind-Peano en *Begriffsschrift*

Con base en lo anterior, llevamos a cabo la demostración de los axiomas Dedekind-Peano en la Aritmética-BF.[42] Podemos llamar a este el Primer Teorema de Frege:

A-1. $\mathbb{N}0$

Prueba: es inmediato por la suposición.

A-2. $\forall x \forall y\ (\mathbb{N}x \wedge Q\ (x, y) \rightarrow \mathbb{N}y)$

Prueba: se sigue de la proposición 108 de *BF*: $Q^{*=}(k, x) \wedge Q\ (x, y) \rightarrow Q^{*=}(k, y)$

A-3: $\forall x\ (\mathbb{N}x \rightarrow \exists y\ (Q\ (x, y)))$

Prueba: Es inmediato por la condición (*iii*) del Teorema 263 de *GG*.

A-4: $\neg \exists \mathrm{x}\ (\mathbb{N}x \wedge Q\ (x, 0))$

Prueba (*por reducción al absurdo*): supongamos $Q^{*=}(0, x)$ y $Q\ (x, 0)$. Por la proposición 102 de *BF*: $(Q^{*=}\ (x, y) \wedge Q\ (y, z) \rightarrow Q^{*}(x, z))$, se sigue $Q^{*}(0, 0)$. Pero esto contradice la condición (*ii*) del Teorema 263. Por tanto, o bien $Q^{*=}(0, x)$, o bien $Q(x, 0)$, pero no ambas. Por nuestra última definición, se sigue que $Q\ (x, 0)$ es falsa.

A-5: $\forall x\ (\mathbb{N}x \wedge \forall y \forall z\ (Q\ (x, y) \wedge Q\ (x, z) \rightarrow y = z))$

Prueba: supongamos que *x* es un número. Entonces, es inmediato por la definición (2) de arriba (*BF* 124).

A-6: $\forall x \forall y \forall z\ (\mathbb{N}x \wedge \mathbb{N}y \wedge Q\ (x, z) \wedge Q\ (y, \mathrm{z}) \rightarrow x = y)$

Prueba: supongamos el antecedente: $Q^{*=}\ (0, x)$, $Q^{*=}\ (0, y)$, $Q\ (x, z)$ y $Q\ (y, z)$. Usaremos las siguientes proposiciones de *BF*:

(91) $Q\ (a, b) \rightarrow Q^{*}\ (a, b)$

(96) $Q^{*}\ (a, b) \wedge Q\ (b, c) \rightarrow Q^{*}\ (a, c)$

(124) $(\mathrm{Fun}\ (Q) \wedge Q\ (a, b) \wedge Q^{*}\ (a, c)) \rightarrow Q^{*=}\ (b, c)$

(133) $(\mathrm{Fun}\ (Q) \wedge Q^{*}\ (0, x) \wedge Q^{*}\ (0, y)) \rightarrow (Q^{*}\ (x, y) \vee Q^{*}\ (y, x) \vee x=y)$

Por *BF* 133 se sigue: $Q^{*}\ (x, y) \vee Q^{*}\ (y, x) \vee x = y$. Si $Q^{*}\ (x, y)$ y $Q\ (x, z)$, entonces, por *BF* 124, $Q^{*=}\ (z, y)$, que equivale a $Q^{*}\ (z, y) \vee z=y$. Pero $z=y$ no es el caso por $Q\ (y, z)$. Luego, por *BF* 96, $Q^{*}\ (z, y)$ y $Q\ (y, z)$, se sigue $Q^{*}\ (z, z)$, lo que contradice la condición (*ii*) del

[42] Una demostración rigurosa en un sistema deductivo, como lo requiere el logicismo fregeano, resulta exhaustiva en este espacio. Aquí sigo a Max Fernández de Castro (2005) para un esbozo de la demostración de las leyes de la aritmética a partir de otros teoremas lógicos de *Begriffsschrift*, no a partir de los axiomas anteriores.

Teorema 263, por lo que $Q^*(x, y)$ no es el caso. Si $Q^*(y, x)$ y $Q(y, z)$, por *BF* 91, se sigue $Q^*(y, y)$, lo que también contradice la condición (*ii*). Por eliminación: $x=y$.

TEOREMA BFA 7. $\forall F(F0 \wedge \forall x(\mathbb{N}x \wedge Fx \rightarrow \forall y(Pxy \rightarrow Fy)) \rightarrow \forall x(\mathbb{N}x \rightarrow Fx))$
Prueba: supongamos lo siguiente: F0, $Q^{*=}(0, x)$, y HER (F, Q). Usamos la proposición 84 de *BF*: $F0 \wedge \forall x \forall y((Fx \wedge Q(x, y)) \rightarrow Fy) \wedge Q^{*=}(0, y) \rightarrow Fy$. De lo que se sigue $\forall x(\mathbb{N}x \rightarrow Fx)$. Por la regla de generalización, se sigue: $\forall F(F0 \wedge \forall x(\mathbb{N}x \wedge Fx \rightarrow \forall y(Pxy \rightarrow Fy)) \rightarrow \forall x(\mathbb{N}x \rightarrow Fx))$.

2.3.3 Un modelo estándar para la Aritmética-BF

Es fácil ver que la *Q*-serie es la relación fundamental en nuestra demostración. En la Teoría de conjuntos la relación $<n, \in>$ (donde n es un objeto de un conjunto A y $\in$ es una relación binaria) es linealmente ordenada en el conjunto $\mathbb{N}$. Si logramos probar que la relación $Q^{*=}$ es linealmente ordenada, entonces estaremos seguros de que sus objetos se comportan exactamente como los números naturales. Para ello, debemos demostrar el:

TEOREMA**:** $Q^{*=}(c, x)$ *es una relación linealmente ordenada*.
Prueba: debemos probar que la relación es no-reflexiva, transitiva y total. La no-reflexividad se sigue inmediatamente de la condición (*ii*). La transitividad se sigue de la proposición (98) de *BF*: $Q^*(x, y) \wedge Q^*(y, z) \rightarrow Q^*(x, z)$. La totalidad es demostrada si para cualesquiera objetos x, y se cumple sólo una de tres fórmulas: $x=y$, $Q^*(x, y)$ o $Q^*(y, x)$. Supongamos $Q^*(x, y)$ y $Q^*(y, x)$. Por transitividad de Q se sigue $Q^*(x, x)$, lo que contradice la condición (*ii*). Entonces $Q^*(x, y)$ o $Q^*(y, x)$, pero no ambos. Ahora supongamos que ocurre $Q^*(x, y)$ y $x=y$. Por sustitución de los idénticos: $Q^*(x, x)$ o $Q^*(y, y)$, lo que también contradice la condición (*ii*). Entonces $Q^*(x, y)$ o $x=y$, pero no ambos. Lo mismo vale para $Q^*(y, x)$. En consecuencia, ocurre sólo una de tres fórmulas $x=y$, $Q^*(x, y)$ o $Q^*(y, x)$. □

En la Aritmética-BF es posible construir un modelo isomorfo a un Sistema de Peano[43]. Decimos que un modelo M es isomorfo a un Sistema de Peano si, para sus respectivos dominios A y X, hay una función $f: A \rightarrow X$ que identifica cada $x \in A$ con $n \in X$ y cada $s(x) \in A$ con un $s(n) \in X$, esto es: $f(x) = n$ y $f(s(x)) = (s(n))$[44]. Para demostrar dicho isomorfismo, hay que construir un modelo para la Aritmética-BF. De acuerdo con la

[43] Fernández de Castro, 2005, p. 36. También Boolos, quien sostiene que «Frege muestra que cualquier estructura que satisfaga un cierto conjunto de las cuatro condiciones [del Teorema 263 de *Grundgesetze*] es isomorfa al de los números naturales» (1999, p. 323).
[44] Esto es una aproximación al Teorema de Recursión para los números naturales.

definición de número, el conjunto de números naturales es $\{x: Q^{*=}(0, x)\}$. Necesitamos una relación de sucesión de números y una constante, que las encontramos en la definición de ancestral débil y el cero, respectivamente. Llamemos M^{BF} al modelo de la Aritmética-BF y definámoslo como:

$$M^{BF} = \langle\{x: Q^{=}(0, x)\}, Q^{=}, 0\rangle$$

Ahora definamos un Sistema de Peano:

DEFINICIÓN: *Un Sistema de Peano es una terna* $<X, h, k_0>$ *tal que* X *es un conjunto no vacío,* h *es una función* h: X⟶X, *y* k_0 *es un miembro del conjunto* X, *y se cumplen las condiciones:* (a) h *es una función inyectiva,* (b) k_0 *no es un miembro de la Imagen de* h *y* (c) X = Y *para todo* $Y \subseteq X$, *si* $k \in Y$ *y si el hecho de que toda* x *que pertenece a* X *pertenezca a* Y *implica que* $h(x) \in Y$.

Llamemos M^{P} al modelo de Peano. Si M^{BF} es isomorfo a M^{P}, entonces es un modelo estándar de la aritmética.

TEOREMA**:** *El modelo M^{BF} es isomorfo a M^{P}.*

Prueba: por el Teorema de Recursión, existe una función f: $\{x: Q^{*=}(0, x)\} \longrightarrow X$, que es el conjunto de pares ordenados $<0, k_0>$, $<x, k> \in \{x: Q^{*=}(0, x)\} \times X$, esto es: $f(0) = k_0$ y $f(s(x)) = s(k)$. Por las condiciones (a) y (b) de la definición anterior, se sigue que f es una función inyectiva igual que h. Ahora bien, $Im(f) \subseteq X$. Entonces: 1) $k_0 \in Im(f)$ y 2) $k_n \in Im(f)$ porque $k_n = f(x_n)$ para $x_n \in \{x: Q^{*=}(0, x)\}$. Luego: $h(k) = h(f(x)) = f(s(x)) \in Im(f)$. Por último, dada la condición (c) de la última definición: $Im(f) = X$. Por lo tanto, dado que f es una función inyectiva y suprayectiva, se sigue por definición que f es una función biyectiva entre los conjuntos $\{x: Q^{*=}(0, x)\}$ y X.

De este teorema se sigue que M^{BF} es un modelo para la aritmética, es decir, la Aritmética-BF tiene un modelo.

El sistema de los números naturales construido en la Aritmética-BF tiene el conjunto infinito $\{x: Q^{*=}(0, x)\}$. Es infinito porque es biyectable con el conjunto ω. Sin embargo, en cualquier modelo isomorfo a un modelo estándar de la aritmética lo importante es la estructura del modelo y no los individuos que la componen. En la Aritmética-BF, como he mencionado, los números no se individúan, se entienden como tales por sus relaciones en la

Q-serie. En este sentido, no se puede demostrar que los números sean objetos ni que éstos sean infinitos.

Hasta aquí, las leyes de la aritmética y el isomorfismo de un modelo estándar se han demostrado con bases puramente lógicas. Esto muestra que el logicismo logra su objetivo matemático y epistemológico. Matemático porque las leyes de la aritmética son demostrables desde la lógica de segundo orden y epistemológica porque el conocimiento de la lógica se extiende como conocimiento de la aritmética. Empero, no hay un compromiso con ningún tipo de entidades abstractas, a menos que la estructura misma de los números pretenda verse como una de ellas.

2. 4 El Teorema de Frege

2.4.1 La importancia del Teorema de Frege en el proyecto platonista neo-fregeano

Llamamos *Teorema de Frege*[45] a la demostración de los axiomas Dedekind-Peano de la aritmética mediante la lógica de segundo orden más el Principio de Hume como único axioma no lógico. Llamamos *Aritmética Frege* a la teoría conformada por la lógica de segundo orden, el Principio de Hume y todos los teoremas, lemas y proposiciones derivados de los dos primeros. El Teorema es especialmente importante en el programa fundacionista neo-fregeano por la razón de que *necesita* un principio abstraccionista para lograr su objetivo. Wright manifiesta:

> … el significado filosófico del Teorema de Frege no puede ser menos que este: que, al menos en lo que respecta a la teoría de números, el programa epistemológico más extenso que Frege esperó lograr en *Grundgesetze* aún es un asunto en curso (2001*e*, p. 280).

Dicho programa es el de extender nuestro conocimiento lógico hacia el conocimiento de verdades aritméticas mediante inferencias lógicas. Dicho en palabras neo-fregeanas, el programa reza así: las verdades aritméticas son analíticas si el Principio de Hume también lo es.

El Principio de Hume tiene un rol esencial en la ontología abstracta relacionado íntimamente con su rol como axioma en la demostración del Teorema de Frege. No solo es que tenga términos singulares como valores del operador numérico en la identidad de su lado izquierdo que sugieren representar objetos; Hale y Wright observan que la

[45] Para diferenciarlo del anterior, podríamos llamarlo Segundo Teorema de Frege. Lo conservo como simplemente Teorema de Frege para concordar con la tradición.

demostración de que existen infinitamente muchos objetos llevada a cabo en *Grundlagen* §82-83 necesita tratar los números como objetos.[46] Este teorema, que vamos a demostrar en lo que sigue, es un logro de la Aritmética Frege que no puede alcanzar la Aritmética-BF, según la conclusión del último apartado. Esta es una razón para preferir la Aritmética Frege en lugar de la Aritmética-BF si deseamos una ontología abstracta.

En *Frege´s Conception* Wright ofrece otra razón en favor de esa misma preferencia. Él piensa que una progresión numérica (la *Q*-serie de la Aritmética-BF es un ejemplo) no es epistémicamente básica como sí lo es la relación biunívoca entre conceptos. Wright escribe:

> Tenemos un medio de introducir números como objetos, en el sentido de Frege, que a su vez parece anterior e independiente de la noción de progresión. Entonces, ¿en qué sentido la idea de una progresión es *básica* para nuestro entendimiento de número cardinal finito? Alguien podría estar familiarizado con los números naturales como objetos, es decir, podría reconocer identidades numéricas verdaderas y falsas, y tener clara la distinción entre números y cosas de otras clases, sin concebir que estén ordenados en una progresión. (1983, p. 118)

Wright piensa que la equinumerosidad es epistémicamente más básica que una progresión, porque ésta es el *resultado* de asignar ordenadamente un único numeral a cada objeto que caiga bajo un concepto dado. Un ejemplo de Wright (1983, p. 118-119) ilustra su razonamiento. Supongamos que en una comunidad primitiva un individuo, que carece de un sistema numérico, pero no de unidades de medida, desea medir el perímetro del territorio que habita. Él puede dividir el perímetro según su unidad, y siempre que sea capaz de diferenciar cada división de otra, logrará saber cuántas veces se repite la medida en el perímetro. Si a cada división asigna un nombre propio (digamos: *a, b, c*...), podrá relacionar cada objeto que cae en el concepto DIVISIÓN DEL PERÍMETRO DEL TERRITORIO A SEGÚN LA UNIDAD DE MEDIDA *t* con uno y solo un objeto que caiga en el concepto NOMBRES DE LA DIVISIÓN DEL PERÍMETRO DEL TERRITORIO A SEGÚN LA UNIDAD DE MEDIDA *t*. Nuestro hombre podrá observar que la unión espacial de *a* y *b* es mayor que cualquiera de ambas unidades solas, y que la unión de *a*, *b* y *c* es mayor que la anterior, etc. Si ahora ordena esos nombres linealmente, de tal modo que a^* significa dos veces *a* (o la unión de *a* y *b*), y a^{**} tres veces *a* (o la unión de *a, b*, y *c*), etc., tendrá una progresión numérica: $a < a^* < a^{**} \ldots < n$. Antes de llegar a la progresión numérica debemos tener una relación uno a uno entre cada división del perímetro y cada numeral, y es cuando observamos que la unión de dos divisiones es

[46] Hale y Wright (2001, p.7)

mayor que cada una que llegamos a la progresión numérica. El orden de los símbolos y, por ende, la progresión numérica, es posterior a la relación uno a uno que guardan con cada división de la superficie, de modo que lo fundamental para la noción de número natural son estas relaciones con las que podemos responder cuánto mide la superficie y no la progresión numérica.

Desde luego, estos dos argumentos no socavan los fundamentos lógicos de la primera definición de número (natural) de la Aritmética-BF. Pues aun si concedemos parte del argumento de Wright, la definición de número natural a partir de la *Q*-serie es innegable.

2.4.2 Hacia el Teorema de Frege

Vamos a aceptar el Principio de Hume dentro de la lógica de segundo orden.

En el lenguaje $L_2^=$ la fórmula:

$$\exists R\, (\forall x \forall y \forall z\, (Rxy \wedge Rxz \rightarrow y{=}z) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (Rxz \wedge Ryz \rightarrow x{=}y) \wedge \forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Gy \wedge Rxy) \wedge \forall x\, (Gx \rightarrow \exists y\, (Fy \wedge Ryx))$$

es una fórmula bien formada, que abreviamos como $F \approx G$. Agregamos a él un axioma que lo extiende por abstracción de la fórmula anterior:

$$\text{PH-AXIOMA:} \quad \#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$$

Sea $L2{=}^{\#}$ el lenguaje de segundo orden con identidad resultado de agregar a $L_2^=$ el operador numérico ⌜#ξ⌝. No hay una definición explícita para él en $L_2^=$, de modo que ⌜#ξ⌝ es creador de nuevos resultados. A esta extensión del lenguaje de segundo orden agregamos una nueva cláusula sobre términos:

- *Si* F *es una variable de predicado unario, entonces* #F *es un término*

Esto significa que el operador ⌜#ξ⌝ es una función que toma predicados unarios de primer orden entre sus argumentos y les asigna un término como su valor. En este sentido, las fórmulas ⌜ $\#F = \#G$ ⌝ y ⌜ $\#F = t$ ⌝ son fbf.

En la Aritmética Frege hay nuevas definiciones:

- *Antecesor*:

$Pxy \overset{\text{def}}{=} \exists F \exists x\, (Fx \wedge y = \#Fz \wedge x = (Fz \wedge z{\neq}x))$

- *Relación conversa*:

$R^{\text{CONV}}\, (x, y) \overset{\text{def}}{=} R\, (y, x)$

- *Relación de mapeo*:

$R^{MAP}(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \forall z\, (Rxz \rightarrow y = z)) \wedge \forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Gy \wedge Rxy))$

2.4.3 Demostración del Teorema de Frege

A partir de lo anterior se demuestra el Segundo Teorema de Frege:

1: $\mathbb{N}0$.

Prueba: es inmediato por la definición de $\mathbb{N}\xi$ (*supra*. p. 53)

2: $\forall x \forall y\, ((\mathbb{N}x \wedge Pxy) \rightarrow \mathbb{N}y)$

Prueba: supongamos que m es el antecesor de n: Pmn. Por la definición de antecesor, $m = \#[Fz \wedge z \neq x]$. Puesto que m es el número del concepto $[Fz \wedge z \neq x]$ y por la definición de $\mathbb{N}\xi$, se sigue: $\mathbb{N}m$. Luego, por HER (F, R) y nuevamente por la definición de antecesor, se sigue $\mathbb{N}n$, es decir, el sucesor n de m es un número.

3: $\forall x\, (\mathbb{N}x \rightarrow \exists y\, (Pxy))$

*Prueba***:** Supongamos: $\forall y\, (\mathbb{N}y \wedge Pym \rightarrow \forall z\, (Pyz \rightarrow Pzn)$. Por inducción: $\mathbb{N}0$. Por la definición de sucesor, se sigue que m tiene que ser distinto de 0 en P (0, m), es decir, cero tiene un sucesor. Por generalización, para cualquier $\mathbb{N}y$ tal que P (y, ξ) hay un sucesor, dado que $\neg$P (y, y).

4: $\neg \exists x\, (\mathbb{N}x \wedge Px0)$

Prueba: por reducción al absurdo. Supongamos $Px0$. Por la definición de antecesor, se sigue Fa y $0 = \#Fy$ y $x = \#[Fz \wedge z \neq a]$. Ya que x es el número del concepto $[Fz \wedge z \neq a]$, por definición tenemos $\mathbb{N}x$. Sin embargo, por el lema sobre el cero (*supra*. p. 14) y por $0 = \#Fy$ se sigue $\neg \exists y\, Fy$. Luego, por Fa y la regla de generalización existencial, se sigue $\exists y\, Fy$, lo que implica una contradicción. Por tanto, la suposición es falsa.

5: $\forall x\, (\mathbb{N}x \wedge \forall y \forall z\, ((Pxy \wedge Pxz) \rightarrow y=z))$

*Prueba***:** supongamos que a es sucesor de b: Pba. Por definición, b es el número de los objetos que satisfacen el concepto $[Fz \wedge z \neq x]$. Por definición de número, $\mathbb{N}b$. Supongamos también que c es sucesor de b: Pbc, y, además, un concepto $[Gz \wedge z \neq x]$ tal que $[Fz \wedge z \neq x] \approx [Gz \wedge z \neq x]$. Por Principio de Hume, $\#[Fz \wedge z \neq x] = \#[Gz \wedge z \neq x]$. Sustituyendo, resulta $b = \#[Gz \wedge z \neq x]$. Por la conjunción de Pba y Pbc y la definición de relación funcional, se sigue $c=a$. Por generalización y conjunción llegamos a $\forall x\, (\mathbb{N}x \wedge \forall y \forall z\, ((Pxy \wedge Pxz) \rightarrow y=z))$.

6: $\forall x \forall y \forall z\ ((\mathbb{N}x \wedge \mathbb{N}y) \wedge ((\mathrm{P}xz \wedge \mathrm{P}yz) \rightarrow x{=}y)$.

Prueba: supongamos P*ba* y P*ca*. Podemos obtener $\mathbb{N}b$ y $\mathbb{N}c$ sin necesidad de suponerlo. De la definición de antecesor se sigue $a = \#\mathrm{F}z$ y $b = \#[\mathrm{F}z \wedge z{\neq}x]$ para algún concepto F; y $a = \#\mathrm{G}z$ y $c = \#[\mathrm{G}z \wedge z{\neq}x]$ para algún concepto G. Ya que b es el número del concepto $[\mathrm{F}z \wedge z{\neq}x]$ y c lo es del concepto $[\mathrm{G}z \wedge z{\neq}x]$, por definición de número inferimos $\mathbb{N}b$ y $\mathbb{N}c$. Como $a = \#\mathrm{G}z = \#\mathrm{F}z$, por Principio de Hume: los objetos de F están en relación uno-a-uno con los de G, es decir, $\mathrm{F} \approx \mathrm{G}$. Si a cada uno de estos conceptos quitamos un objeto x, nos quedan los conceptos $[\mathrm{F}z \wedge z{\neq}x]$ y $[\mathrm{G}z \wedge z{\neq}x]$, cuyos objetos están en relación uno-a-uno, esto es, $[\mathrm{F}z \wedge z{\neq}x] \approx [\mathrm{G}z \wedge z{\neq}x]$. Por Principio de Hume $\#[\mathrm{F}z \wedge z{\neq}x] = \#[\mathrm{G}z \wedge z{\neq}x]$. Concluimos $b{=}c$.

7: $\forall \mathrm{F}\ (\mathrm{F}0 \wedge\ \forall x\ \forall y\ (\mathbb{N}x \wedge \mathrm{F}x \wedge\ (\mathrm{P}xy \rightarrow \mathrm{F}y)) \rightarrow \forall x\ (\mathbb{N}x \rightarrow \mathrm{F}x))$

Prueba: es inmediato por la definición de ancestral fuerte.

2.4.4 Prueba de que existen infinitos objetos en la *Q*-serie

Quizás el poder explicativo más notable en la Aritmética Frege es la demostración de que existen infinitamente muchos objetos. Los primeros esbozos de ella aparecen famosamente en *Grundlagen* §82-83. Sin embargo, Heck (2013, 2019) ha señalado que hay algunos errores en este pasaje de los que su mismo autor fue consciente, por lo que una prueba más rigurosa la llevó a cabo en *Grundgesetze*. Para concluir este capítulo reconstruiré la demostración como Heck la entiende en las obras citadas. También me apoyo en los trabajos de Boolos y Heck (1999) y Wright (1983).

En aquellos parágrafos de *Grundlagen* se lee: «al demostrar que hay un número que sigue en la serie de números naturales inmediatamente a n, se demostrará al mismo tiempo que no existe un último miembro en esta serie». Enseguida se apuntan algunas proposiciones para el esbozo de la demostración de la infinitud, que, formalizadas, son:

(0) $Q\ n,\ \#\ [x\colon Q^{*=}x,\ n]$

(1) $Q\ d,\ a \wedge \mathrm{Q}\ d,\ \#[x\colon Q^{*=}\ x,\ d] \rightarrow \mathrm{Q}\ a,\ \#[x\colon Q^{*=}\ x,\ a]$

(2) $\mathrm{Q}\ 0,\ \#[\mathrm{x}\colon Q^{*=}x,\ 0]$

(3) $a = \#\ [Q^{*=}\ x,\ a \wedge x \neq a]$

(4) $\forall x\ (Q^{*=}\ x,\ a \wedge x \neq a) \equiv Q^{*},\ d$

(5) $\forall x\ (Q^{*=}0,\ x \rightarrow \neg\ Q^{*}x,\ x)$

Frege dice que a (0) hay que agregar la condición de que n pertenece a la serie de números que comienza con cero. O sea, lo que se tiene que demostrar es: si n es un número, entonces el número que corresponde al concepto PERTENECIENTE A LA SERIE DE LOS NÚMEROS NATURALES QUE TERMINA CON n sigue inmediatamente a n en la serie de los números naturales.

PROPOSICIÓN: $Q^{*=}0, n \rightarrow Q\, n, \#[x: Q^{*=}x, n]$

Prueba: por inducción. Comenzamos con el caso base: el cero. Por el Teorema de Frege, sabemos que:

$\neg\, Q^{*}x, 0$

Por la definición del ancestral débil:

$Q^{*\,=}x, 0 \rightarrow x = 0$

es decir, hay un único número que pertenece a la serie de números que termina con 0, que es el cero, de modo que:

$\neg\exists x\, (Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0)$, así que $Q^{*\,=}0, 0$.

Esto significa que el concepto $[x: Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0]$ es vacío, o sea:

$\neg\exists x\, [x: Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0]\, x$.

Por el Principio de Hume y la definición de cero:

$0 = \#[x: Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0]$.

Por el Lema de la p. 15:

$\neg\exists x\, [x: Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0]\, x \rightarrow 0 = \#[x: Q^{*}, 0 \wedge x \neq 0]$.

Por la definición de antecesor:

$\mathrm{F}b \wedge m = \#[x: \mathrm{F}x \wedge x \neq b] \rightarrow Qm, \#\mathrm{F}x$.

Por instanciación:

$Q^{*\,=}0, 0 \wedge 0 = \#[x: Q^{*\,=}x, 0 \wedge x \neq 0] \rightarrow Q\, 0, \#[x: Q^{*\,=}x, 0]$.

Por *modus ponens*:

$Q\, 0, \#[x: Q^{*\,=}x, 0]$.

Paso de inducción. Hay que probar que el concepto $Q\ \xi$, $\#[x\text{: } Q^{*=} x, \xi]$ es hereditario en la *Q*-serie. Esto es:

$$\forall y\ (Q^{*=}0, y \wedge Q\ y, \#[x\text{: } Q^{*=} x, y] \rightarrow \forall z\ (Q\ y, z \rightarrow Q\ z, \#[x\text{: } Q^{*=} x, z])).$$

Vamos a suponer dos proposiciones:

$$Q\ d, a \rightarrow ((Q^{*=} x, a \wedge x \neq a) \rightarrow Q^{*=} x, d)$$

$$Q^{*=}\ 0, a, \wedge Q\ d, a \rightarrow (Q^{*=} x, d \rightarrow (Q^{*=} x, a \wedge x \neq a)).$$

De ambas se sigue:

$$Q^{*=}\ 0, a \wedge Q\ d, a \rightarrow \forall x\ ((Q^{*=} x, d) \equiv (Q^{*=} x, a \wedge x \neq a)).$$

De esto último más $\forall x\ (Fx \equiv Gx) \rightarrow \#Fx = \#Gx$, se sigue:

$$Q^{*=}\ 0, a \wedge Q\ d, a \rightarrow \#[x\text{: } Q^{*=} x, d] = \#[x\text{: } Q^{*=} x, a \wedge x \neq a].$$

Ahora bien. Supongamos nuevamente:

$$a = \#[x\text{: } Q^{*=} x, d] \text{ y } \#[x\text{: } Q^{*=} x, d] = \#[x\text{: } Q^{*=} x, a \wedge x \neq a].$$

De ambos tenemos:

$$a = \#[x\text{: } Q^{*=} x, a \wedge x \neq a].$$

De ello se sigue:

$$a = \#[x\text{: } Q^{*=} x, a \wedge x \neq a] \wedge Q^{*=} a, a \wedge \#[x\text{: } Q^{*=} x, a] = \#[x\text{: } Q^{*=} x, a]$$

que es una instanciación de una fórmula general:

$$\exists F \exists x\ (a = \#[z\text{: } Fz \wedge x \neq z] \wedge Fx \wedge \#[z\text{: } Q^{*=}z, a] = \#Fz.$$

Vamos a suponer $Q^{*=}0, d$ y $Q\ d, a$. Por la identidad $a = \#[x\text{: } Q^{*=} x, d]$ y por sustitución, cabe suponer también $Q\ d, \#[x\text{: } Q^{*=} x, d]$. Por la definición de HER, tenemos $Q^{*=}0, a$. Sea entonces $[x\text{: } Q^{*=} x, a]$ un concepto. Por abstracción: $\#[x\text{: } Q^{*=} x, a]$, que es el sucesor de a. Así que:

$$Q^{*=}0, d \wedge Q\ d, \#[x\text{: } Q^{*=} x, d] \wedge Q\ d, a \rightarrow Q\ a, \#[x\text{: } Q^{*=} x, a].$$

Por generalización:

$$\forall y\ (Q^{*=}0, y \wedge Q\ y, \#[x\text{: } Q^{*=} x, y] \rightarrow \forall z\ (Q\ y, z \rightarrow Q\ z, \#[x\text{: } Q^{*=} x, z])).$$

■

Ahora bien, para que la serie sea infinita, hay que tomar en cuenta:

$Q^{*=}0, b \land \neg Q^{*}\, 0, 0 \land \forall x\, \forall y\, (\neg Q^{*}\, x, x \land Q\, x, y \to \neg Q^{*}\, y, y) \to \neg Q^{*}\, b, b$

que es una instanciación de $Q^{*=}\, a, b \land Fa \land \forall x\, \forall y\, (Fx \land Q\, x, y \to F\, y) \to F\, b$, de donde se sigue que ningún número es sucesor de sí mismo:

$Q^{*=}0, b \to \neg Q^{*}\, b, b$

Esta demostración nos lleva a la infinitud de números en la Q-serie que empieza con cero. Si queremos individuar cada número en la serie, podemos agregar la observación de Wright (1983, p, 145) de construir una cadena infinita $\#Fx \neq \#Gx \neq \#Hx \neq \ldots$ Ello es fácil si sustituimos los conceptos F, G, H... por $[x\colon Q^{*=}\, x, \xi]$ siempre que igualmente sustituyamos números *a, b, c*..., tales que *Q a, b, Q b, c...,* por la letra esquemática ξ. Desde luego, por el Principio de Hume, veremos que los conceptos resultantes de tal sustitución no estarán relacionados uno a uno, esto es, según la formalización de Wright:

$$\neg\exists R\, (Fx \text{ 1-1}_R\, Gx) \land \neg\exists R\, (Gx \text{ 1-1}_R\, Hx) \land \ldots$$

que, como él mismo señala, tiene que ser transitiva. La transitividad está asegurada en la prueba anterior, de suerte que no solo hay un razonamiento para la infinitud de los números, sino también para individuarlos, que es uno de los propósitos de la Aritmética Frege.

Conclusiones

Contra Quine, tres argumentos reivindican el estatus lógico de la lógica de segundo orden. El primero demostró que los predicados no siempre son interpretables como conjuntos; el segundo, que hay una forma de individuar propiedades representadas por predicados en una manera análoga a la Ley de Leibniz; el tercero, que la lógica de orden superior es una extensión de la de primer orden. Los tres argumentos contradicen el argumento quineano de que la lógica de segundo orden es, en el fondo, teoría de conjuntos (si esto fuera cierto el logicismo sería un sinsentido). Como se ha mostrado que la lógica de orden superior sí es una lógica genuina, hemos pasado a demostrar que las leyes básicas de la aritmética son derivables de un lenguaje lógico y que existe un modelo para esta aritmética isomorfo a un sistema de Peano. Para tal fin se han usado las definiciones de *Begriffsschrift* expresadas en la lógica de segundo orden. Esta primera evidencia de logicismo está libre de compromisos ontológicos con los números como objetos, de lo que se sigue una conclusión relevante: ser logicista no implica ser platonista. Cuando el Principio de Hume se agrega a la lógica de segundo orden, se demuestra el Teorema de Frege, se individúan los números como objetos y se demuestra que existe un número infinito de ellos. De ello se sigue que tal axioma tiene implicaciones ontológicas, puesto que con él se individúan los números cardinales, y la individuación funge como un criterio ontológico. El primer logicismo, que no incluye el Principio de Hume, está libre de considerar los números cardinales como objetos abstractos, pero está limitado a no poder demostrar la infinitud de los números; el segundo logicismo no tiene tal límite, y de ello derivan compromisos ontológicos hacia los números. Una segunda conclusión relevante de este capítulo es que el Principio de Hume es suficiente, pero no necesario, para demostrar las leyes de la aritmética desde un lenguaje lógico.

Capítulo 3. La indeterminación de la referencia en la aritmética

Introducción

En *Grundlagen* §66 Frege dice que, por absurdo que parezca, no hay un medio para diferenciar la dirección de la línea *a* de Inglaterra con ayuda del principio $D^{=}$. Asimismo, la diferencia entre el número de los *F*-objetos y Julio César es indecidible desde el Principio de Hume. Si bien, por el Principio de Contexto sabemos que los términos singulares del tipo «el número de los *F*´s» refieren, y a partir del concepto lógico SER DISTINTO DE SÍ MISMO se ha construido la definición del cero, y con ella, recursivamente, la de los demás números cardinales, el Principio de Hume no indica cuál es la naturaleza de tales objetos. Por sentido común, el número de los *F*´s tendría que ser algún número igual o mayor que cero, dado que las definiciones recursivas así lo establecen, pero ellas sólo ofrecen el sentido del término singular, mas no lo que sus referentes son en sí mismos. Si el logicismo neo-fregeano pretende ser platonista, tendrá que concretar una respuesta a esta incógnita. Para Hale y Wright, un análisis minucioso del concepto NÚMERO CARDINAL junto con una concepción realista sobre propiedades esenciales identificadas con conceptos sortales puros tienen la clave al llamado Problema de César. ¿Cómo interpreta el neo-fregeano este problema? ¿Su solución es satisfactoria y única? Este capítulo tiene las respuestas a estas interrogantes.

3.1 ¿Qué es el Problema de César?

3.1.1 Los principios de abstracción y el Problema de César

Los principios de abstracción contienen un criterio basado en relaciones de equivalencia para decidir la verdad o falsedad de sus identidades. Cuando una identidad entre números cardinales tiene un valor de verdad, cada uno de sus términos singulares refiere a objetos, y esto está en concordancia con los principios de contexto y composicionalidad. En el caso particular del Principio de Hume, la equinumerosidad entre conceptos *F* y *G* funge como condición de verdad y como criterio para decidir si el número de los *F*-objetos es idéntico al número de los *G*-objetos. No obstante, dado un término «*q*» del lenguaje de la Aritmética Frege, no es posible decidir si el número de los *F*-objetos es idéntico a *q*, porque el criterio funciona únicamente cuando en la identidad ambos términos singulares tienen la forma «el número de los Φ´s», en virtud de que la función ⌜$\#\xi$⌝ subsume los mismos conceptos que aparecen en la equinumerosidad, lo que equivale a decir que en la teoría no existen condiciones para decidir la verdad o la falsedad de la identidad mixta ⌜$\#F = q$⌝. Si es verdadera y «q» representa un objeto ajeno a la aritmética, digamos, Julio César, entonces la teoría trataría de objetos no aritméticos; si la identidad es verdadera y «q» representa un número, entonces no sabríamos que estamos tratando con números; si es falsa y «q» representa a César, entonces no hay justificación para sostenerlo; si es falsa y «q» no representa a César, entonces «q» representa un número o cualquier otro objeto no aritmético.

El problema surge porque los principios de abstracción no son definiciones explícitas de los conceptos abstractos que introducen; si lo fueran, sería posible sustituir el *definiendum* por el *definiens*, y de ese modo estaría determinado si Julio César es o no un número. Robert May y Kai Wehmeier apuntan al respecto:

> Si PH fuera una definición, debería decirnos no solo cuándo los conceptos tienen el mismo número, sino también permitir la eliminación del *definiendum* en favor del *definiens,* no solo en contextos de reconocimiento, también en cualquier otro contexto. Únicamente entonces poseería la generalidad lógica esencial de una definición (2019, p. 183).

Puesto que, estrictamente, no se trata de una definición, lo más que podemos pedir a un principio de abstracción es la explicación del sentido de su enunciado de identidad mediante las relaciones de equivalencia. Así, si el Principio de Hume fuera una definición del concepto de número, entonces podríamos sustituir siempre el término «$\#F$» por otro «q» toda vez que el significado del primero fuera el mismo que el del segundo, lo que implicaría que sus referentes representarían el mismo objeto; pero ya que no está claro si «$\#F$» y «q» son sustituibles, no se puede concluir que sus referentes sean idénticos.

Mathias Schirn (2003, p. 206) observa que Frege expone por primera vez su insatisfacción hacia las definiciones de los números cardinales en *Grundlagen* §56. Siguiendo la notación de Schirn, donde «$N^n\ F(x)$» significa «el número n pertenece al concepto F», en §55 Frege define:

$$N^0 F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \neg F(x)$$

$$N^1 F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\forall\neg F(x)\ \&\ \forall x\ \forall y\ (F(x)\ \&\ F(y) \rightarrow x = y)$$

$$N^{n+1} F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x\ (\mathrm{F}(x)\ \&\ N^n (F(y)\ \&\ \mathrm{y} \neq \mathrm{x}))$$

Ahí su autor dice que «por medio de nuestras definiciones, jamás podríamos decir [...] si a un concepto corresponde el número Julio César», por lo que «es solo una ilusión que hayamos definido el 0 y el 1». La razón de esto, según Frege, es que en realidad únicamente se ha dado *sentido* a expresiones como «el número *n* corresponde al concepto *F*», pero dar sentido a un término no es lo mismo que definirlo. Pese a ello, Schirn argumenta que el Problema de César no se encuentra propiamente en este intento por definir los números cardinales, pues para tal objeción se necesita concebir a los números como objetos, y aquí, como el mismo Frege apuntó, «no se permite ver el 0 y el 1 como objetos independientes, susceptibles de ser reconocidos, cada uno, como el mismo». De acuerdo Schirn (2003, p. 208), «lo que Frege de hecho define son cuantificadores numéricamente definidos», no los números como objetos, de donde se sigue que en *Grundlagen* §56 no se formula el Problema de César. Aun así, la crítica a una primera aproximación de las definiciones de los números cardinales nos acerca al defecto de dar sentido a oraciones numéricas.

Pero si lo anterior no es propiamente el Problema de César, ¿en qué consiste esta objeción? En *Grundlagen* §66 Frege replantea el problema una vez que ha expuesto otro principio de abstracción, el de la dirección de las paralelas:

$D^=$: la dirección de la línea a = la dirección de la línea $b \leftrightarrow a$ es paralela respecto de b

Nuestro filósofo menciona que «con él no se puede decidir si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra» y explica que el problema es que $D^=$ «nada dice acerca de si la proposición "la dirección de a es igual a q" ha de afirmarse o negarse, cuando q misma no está dada en la forma "la dirección de b"». A diferencia de §56, donde se intenta *definir* la expresión «el número *n* pertenece al concepto *F*», en §66 el problema es encontrar los medios para *decidir* la identidad entre objetos cuando son representados mediante dos nombres distintos. Aquí se atribuye el problema a la incapacidad de los principios de abstracción para encontrar esos medios. En efecto, $D^=$ es un criterio de identidad únicamente para direcciones. Uno no puede decidir si «$A = B$» es verdadera o falsa usando $D^=$ si uno no sabe si A y B son direcciones. De modo que para decidir cuándo dos direcciones son las mismas, hay que conocerlas expresamente como tales. Pero cuando esto no ocurre, cuando, por ejemplo, la dirección de una línea es designada por una variable que no es conocida como la dirección de una línea, entonces el principio no sirve como un criterio de identidad entre direcciones. La verdad o falsedad de «$A = B$» solo puede decidirse si previamente se ha estipulado que cada uno de esos términos denota una dirección, por lo que *a fortiori* serían conocidos como direcciones; a menos que esto ocurra, A y B podrían denotar cualquier objeto en el universo del discurso, por ejemplo, Inglaterra o Julio César.

3.1.2 Identidades transortales

La solución de Frege fue introducir identidades transortales.[47] Una identidad transortal es una relación de identidad cuyos términos singulares están contenidos en dos distintos principios de abstracción. En *Grundlagen* §68, Frege define la dirección de la línea a como la extensión del concepto PARALELO A LA LÍNEA a e identifica las extensiones de los conceptos PARALELO A LA LÍNEA a y PARALELO A LA LÍNEA b cuando, y sólo cuando, las líneas son paralelas. Entonces hay dos principios de abstracción acerca de direcciones:

$D^{=}$ EXT: $\mathrm{EXT}\,[\theta//a] = \mathrm{EXT}\,[\theta//b] \leftrightarrow a // b$

$D^{=}$: $D\,(a) = D\,(b) \leftrightarrow a // b$

La definición del concepto de dirección se obtiene por una identidad transortal:

$$D\,(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{EXT}\,[\theta//a]$$

El caso particular del concepto NÚMERO CARDINAL es análogo. Frege definió explícitamente los números cardinales como extensiones de conceptos sortales. Las extensiones de conceptos son objetos lógicos que tienen un criterio extensional de identidad: si F y G son conceptos de primer orden, sus extensiones son idénticas si y solo si todos los objetos que satisfacen al primero satisfacen al segundo y viceversa. Así, Frege llega a su definición explícita de NÚMERO CARDINAL: «el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumeroso con respecto al concepto F"» (Frege, 2016*a*, p. 451), o sea:

$$\#F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{EXT}\,[\mathrm{H}: \mathrm{H} \approx \mathrm{F}]$$

Entonces, dado que el número que corresponde a un concepto no puede ser otra cosa más que la extensión de ese concepto, Julio César no podría ser un número cardinal.

Pero la solución del problema con base en las extensiones de conceptos tiene un costo indeseable para cualquier teoría. Si, por un lado, las extensiones de conceptos excluyen la sospecha de identificar los números con César, por otro lado, cuando toman la forma de rangos de valores en *Grundgesetze*, llevan a la contradicción que B. Russell derivó de la Ley V que los introduce. Esto deviene en la elección de uno de dos caminos: o bien, aceptar los números como rangos de valores junto con la Ley V que los introduce para solucionar el Problema de César a pesar de que ésta produce una paradoja, o bien, rechazar la Ley V y los

[47] Así las han llamado Roy T. Cook y Philip A. Ebert (2005) y Mathian Schirn (2003).

números como rangos de valores para evitar contradicciones en el sistema, a pesar de que no se pueda determinar si el número de los *F*-objetos es un conquistador romano. Frege transitó por el primer camino cuyo final infeliz lamentó hasta sus últimos años; aunque la contradicción es inherente a la Ley V, Frege fue firme al sostener que los rangos de valores, esto es, las extensiones de conceptos, son la única vía en la que los números se pueden concebir como objetos lógicos. Los neo-fregeanos, según apunté arriba (pp. 19-21), marcan su diferencia con Frege en que priorizan el Principio de Hume sobre la Ley V y tratan de resolver el Problema de César con base en él.

3.1.3 La relevancia de los rangos de valores en la aritmética

Richard K. Heck (2005) ha señalado que ni la Ley V ni los rangos de valores son necesarios para desarrollar la aritmética como Frege pensaba. Heck escribe:

> Salvo dos excepciones, Frege usa los rangos de valores únicamente por conveniencia para llevar a cabo ciertas partes de sus pruebas más fácilmente; muchos de sus usos se pueden eliminar de manera uniforme. Los dos usos ineliminables ocurren en las pruebas de Frege de las dos direcciones de lo que a veces se ha llamado 'PH' (Heck, 2005, p. 162)

En efecto, la demostración del Principio de Hume (PH) ocurre como sigue en *Grundgesetze*[48]:

PH ←)

1) $F \approx G \rightarrow (H \approx F \rightarrow H \approx G)$	GG 25
2) $F \approx G \rightarrow (H \approx G \rightarrow H \approx F)$	Lema 32 α
3) $\neg (\Delta \equiv (\neg\Gamma \rightarrow (\Delta \equiv \Gamma)$	Axioma IV
4) $F \approx G \rightarrow (H \approx F \equiv H \approx G)$	Lema 32 γ de (1), (2) y (3)
5) $F \approx G \rightarrow \forall H\ (H \approx F \equiv H \approx G)$	Lema 32 δ G. U. D de (5)
6) $F \approx G \rightarrow (\{H\colon H \approx F\} = \{H\colon H \approx G\})$	Lema 32 ε, de Axioma V y (5)
7) $F \approx G \rightarrow \#F = \#G$	Def. del operador # y de (6)

■

[48] Aquí sigo la demostración de May y Wehmeier (2019). Ellos observan que, en realidad, en la dirección izquierda-derecha Frege demuestra la contrapositiva $\neg (F \approx G) \rightarrow \neg(\#F = \#G)$ y que, estrictamente hablando, no se demuestra Principio de Hume como un bicondicional, sino las dos direcciones de los condicionales.

PH →)

1) $F \approx G \to F \in \#G$	Teorema 45 de GG
2) $F \in \#G \to F \approx G$	Teorema 47 de GG
3) $F \in \#F$	de (1), (2), GG 25 y Lema 32 α
4) $\#F = \#G \to F \in \#G$	de (1) y (2)
5) $\#F = \#G \to F \approx G$	de (4) y (2)

■

Pero si la Ley V no es necesaria como tampoco lo son los rangos de valores para demostrar las leyes básicas de la aritmética, ¿por qué aceptarlas al costo de la inconsistencia del sistema que Frege había logrado? Heck agrega que «Frege sabía que las leyes básicas de la aritmética se podían derivar de PH en ese subsistema de su sistema formal que resulta de la exclusión de la Ley Básica V» (*ibid.*). Entonces, dado que en la derivación de los teoremas poco importa si César es idéntico al número de los *F*-objetos, todo apunta a que la elección de Frege por el primer cuerno del dilema fue un asunto más filosófico que matemático. Me parece que esta conclusión encuentra apoyo en el Apéndice de *Grundgesetze* II:

> Hubiera renunciado con gusto a esa ley fundamental [V] de haber encontrado algún sustituto. E incluso ahora no sé cómo podría fundamentarse científicamente la aritmética, cómo los números podrían ser aprehendidos como objetos lógicos y ser introducidos en la reflexión, si no se permite —al menos condicionalmente— pasar de un concepto a su extensión (Frege, 2016*a*, p. 553).

Frege no podía pasar por alto una ontología abstracta si su propósito era dar a la aritmética el estatus de ciencia. Si consideramos sus argumentos en la primera parte de *Grundlagen* contra las posturas de que los números son creaciones mentales (ideas) o meros símbolos (numerales), veremos que solo se puede tomar a la aritmética como una ciencia si su asunto es objetivo. Los enunciados aritméticos pueden ser juicios (enunciados reconocidos como verdaderos) siempre que se reconozca que sus hacedores de verdad son entidades independientes de cualquier actividad humana y la aritmética puede ser una ciencia solo si hace afirmaciones verdaderas. Esto explica mucho de lo que se mostró en el capítulo anterior: el logicismo de *Begriffsschrift* es un proyecto inconcluso para Frege porque, a pesar de que ahí de demuestran los axiomas de la aritmética a partir del lenguaje lógico, no considera los números como objetos. Por tanto, Frege no pudo haber adoptado el subsistema de *Grundgesetze* al que Heck refiere (la Aritmética Frege) que excluye los rangos de valores porque estos objetos eran la puerta de entrada para reconocer a los números como objetos lógicos. El Principio de Hume le era insuficiente.

3.1.4 Cuatro interpretaciones del Problema de César

Pese al fracaso de las extensiones de conceptos como objetos lógicos, es importante preguntar qué tipo de problema filosófico creyó haber resuelto Frege con ellas, es decir, qué tipo de problema filosófico es el Problema de César. Dirk Greimann (2003) muestra que hay cuatro aspectos desde los que se puede abordar el problema. En primer lugar, está el aspecto metafísico, que consiste en que el Principio de Hume no contiene información acerca de la naturaleza de los números. Definirlos como rangos de valores de funciones y éstos como objetos lógicos, parece haber acercado a Frege a lo que son en sí mismos los números. Su renuencia hacia el psicologismo y su concepción de los números como objetos auto-subsistentes refleja claramente su postura platonista, esto es, una metafísica abstracta. Pero, tal como Greimann apunta, una vez que define los números como rangos de valores, «no investiga su naturaleza metafísica, sino que hace estipulaciones que están designadas a fijar los valores de verdad de enunciados de la forma $x = \acute{\varepsilon}\, \varphi(\varepsilon)$» (2019, p. 266). Pero es bien sabido que con los rangos de valores y la Ley V que los introduce aparece nuevamente un problema de indeterminación que deseo abordar más adelante.

En segundo lugar, está el aspecto epistemológico. En *Grundlagen* §62 Frege pregunta cómo nos son dados los números como objetos o cómo los aprehendemos, y al final del Apéndice II de *Grundgesetze* repite esta cuestión y agrega «¿Qué nos justifica en reconocer los números como objetos?». Que la identidad «el número de planetas = César» *de hecho* es falsa es algo que conocemos por sentido común, pues cualquier persona que haya sido César por ningún motivo podría ser identificada con un número. Pero si, como pretende Frege, el conocimiento aritmético (de sus verdades y de sus objetos) tiene bases puramente lógicas, entonces se tiene que manifestar que las relaciones biunívocas entre conceptos, que pertenecen a la lógica de segundo orden, no extienden nuestro conocimiento hacia los objetos representados por los términos de la forma «el número de los F´s», de modo que con la lógica no podemos saber si César es uno de estos objetos. En cambio, la identidad transortal $\ulcorner \#F = \textsc{ext}\,[H\!: H \approx F] \urcorner$ sí justifica que los números únicamente pueden ser objetos lógicos si las extensiones de conceptos también lo son. Heck parece apoyar este aspecto del problema cuando escribe: «Frege introduce extensiones de conceptos en su sistema para explicar cómo aprehendemos objetos lógicos [...] el abandono del programa logicista es, por tanto, el resultado del fracaso para resolver no un problema *formal*, sino uno *epistemológico*» (2005, p. 166).

El aspecto lógico es el tercero mencionado por Greimman. En *Grundgesetze* II, §56 Frege escribe:

> Una definición de un concepto (un posible predicado) debe ser completa; tiene que determinar sin ambigüedad para todo objeto si cae bajo un concepto o no [...] Así, no debe haber ningún objeto para el cual, después de la definición, quede la duda de si cae bajo el concepto, incluso si no siempre es posible [...] decidir la cuestión. Podemos expresar lo anterior de manera figurada como esto: *un concepto debe tener límites precisos*. (Cursivas mías)

Llamamos a esto el principio de determinación completa. Con él se relaciona íntimamente el principio del tercero excluido. Frege continúa diciendo: «La ley del tercero excluido es, de hecho, solo el requisito, dicho de otra forma, de que los conceptos tienen límites precisos». El Problema de César evidencia que el Principio de Hume, como cualquier otro principio de abstracción, viola los dos principios anteriores, pues la abstracción nada dice acerca de si César cae o no bajo el concepto de número, y eso explica por qué la identidad mixta $\ulcorner \#F = q \urcorner$ no se determina como verdadera ni falsa desde los principios de abstracción. Greimman argumenta que este aspecto del problema ya estaba presente antes de *Grundgesetze*. En efecto, en *Grundlagen* leemos:

> Todo lo que se exige de un concepto desde el punto de vista de la lógica y con un ojo de rigor de prueba es únicamente que los límites de su aplicación sean precisos, que estén determinados, respecto de si cualquier objeto cae o no bajo un concepto. (*Grundlagen* §74. Citado en Greimman, 2003, p. 271)

Esta situación parece contradecir las palabras de Heck de que el Problema de César no afecta al sistema formal, pues siempre que el concepto de número sea introducido por el Principio de Hume, la ley del tercero excluido será violada al no cumplirse el principio de determinación completa.

Pero esta conclusión no coincide con la demostración del Teorema de Frege que hicimos en el capítulo anterior, pues ahí queda la prueba de que el Problema de César es inocuo al sistema formal. Creo que, ante todo lo anterior, el Problema de César *principalmente* debe ser visto como uno de carácter semántico[49]. Cuando planteamos el

[49] Greimman llega a esta conclusión (2003, p. 277); Heck también lo ve así cuando apunta que el problema «muestra nuestra incapacidad para *referir* a números» (Heck, 2005, p. 174. Cursivas mías); Schirn dice que el problema de cómo aprehendemos objetos lógicos «no coincide con el problema de César que es puramente semántico».

problema de las identidades mixtas, lo que está en el fondo es que es indeterminado a qué objeto refiere el término «#*F*» y, por tanto, es indeterminado si su referente cae bajo el concepto de número. El hecho de que la ley del tercero excluido se viole no depende únicamente de la introducción del concepto de número en el lenguaje formal, depende también, como sugiere Schirn, de la referencia de sus términos singulares:

> Es esencial al proyecto fundacional de Frege apoyarse en una lógica clásica y en una semántica clásica para asegurar que todo concepto y toda relación (más generalmente: toda función) de la teoría formal tiene límites determinados, *así como* para asegurar una *referencia* de toda expresión bien formada, especialmente para toda fórmula bien formada de su Begriffsschrift. Únicamente así, él piensa, puede garantizar la validez de las leyes de la lógica clásica en su teoría formal, en particular, la validez de la ley del tercero excluido (Schirn, 2003, pp. 210-211. Cursivas mías).

La violación a la ley del tercero excluido solo puede ocurrir si atendemos a los objetos para los cuales no está determinado si caen o no bajo el concepto de número, es decir, si atendemos a la referencia de los términos singulares de la forma «#*F*». La vaguedad del concepto de número es tal si lo relacionamos con sus objetos. Esta es la razón de que el Problema de César no implique evitar desarrollar la Aritmética Frege, pues se trata en realidad de un problema de la semántica filosófica. Por ello, Frege identificó los números con extensiones de conceptos al restringir el universo de objetos que pueden ser los valores de la función ⌜#ξ⌝.

3.2 Los números como conceptos sortales

3.2.1 ¿Qué es un número cardinal?

Hemos visto que Frege sostuvo hasta sus últimos años que los números son un tipo de objetos lógicos llamados extensiones de conceptos, a costa de la consistencia del sistema formal. Sus razones ya se han mencionado. Por su parte, los neo-fregeanos piensan que junto con la Aritmética Frege debe haber una respuesta filosófica a la pregunta de cuál es la referencia de los términos singulares que representan los valores de la función ⌜#ξ⌝, lo que supone determinar el valor de verdad de identidades mixtas como ⌜$\#\xi = q$⌝.

La tesis fundamental de Crispin Wright en su *Frege´s Conception* es que los números son instancias del concepto sortal de número introducido por el Principio de Hume mediante abstracción. Él dice:

> [Frege] quiere pensar los números (naturales) como *conceptos genuinamente sortales*. Y un entendimiento de tales conceptos implica, repito, comprender dos cosas: como cualquier concepto, implica tener una concepción de la distinción entre cosas que caen bajo el concepto y cosas que no lo hacen; e implica también entender los criterios de identidad y distinción entre las cosas que caen en el concepto en cuestión (1983, p.109).

La importancia del pensamiento expresado en esta cita es invaluable para el neo-fregeano, pues articula el platonismo matemático con la aritmética cardinal a través de una teoría de los conceptos sortales. Se piensa que el concepto de número es un sortal de segundo orden introducido por el Principio de Hume —que ha mostrado su éxito como axioma no lógico dentro de un sistema formal para probar el Teorema de Frege— cuyos criterios, dados por la relación uno a uno entre conceptos de primer orden, determinan qué es un número. Para el platonismo matemático neo-fregeano es necesario no solo tener la certeza de que los términos singulares de la identidad ⌜$\#F = \#G$⌝ refieren cuando ésta es verdadera, como lo indica el Principio de Contexto, sino también determinar qué clase de objetos son referidos por los valores de la función ⌜$\#\xi$⌝.

En favor de su platonismo matemático, Wright argumenta que sabemos que los números existen siempre que sea asequible el concepto de número como un sortal y que existen «contextos verdaderos de tipos relevantes que contengan términos que apoyen la denotación de números naturales» (Wright, 1983, p. 129). Sin embargo, Hale señala que una conclusión platonista requiere, además de un argumento tal[50], asegurar que los objetos referidos como instancias del concepto de número sean abstractos (Hale, 1987, p. 11).

En *Abstract Objects* (1987) Hale distingue entre los conceptos sortales concretos y los abstractos. Por *conceptos concretos* entiende aquellos cuyas instancias son objetos físicos, susceptibles de percepción u ostensión; por *abstractos*, aquellos saturados por objetos abstractos[51]. Esta distinción está motivada por la observación de que hay términos que pueden referir a objetos *type* o a objetos *token*. Como ejemplos, Hale menciona letras, palabras, sinfonías, juegos de ajedrez y, por supuesto, números. Cada uno de ellos es un sortal, pero merece diferentes criterios de identidad según se consideren como un *type* o un *token*. Si preguntáramos, como exigen los criterios sortales, cuántas letras «e» hay en la

[50] Mark Balaguer llama a esto el argumento del término singular y corre más o menos así: Si una proposición de la forma "a es F" es literalmente verdadera, entonces los términos singulares de la proposición denotan objetos existentes. Hay proposiciones literalmente verdaderas cuyos términos singulares únicamente pueden referir a objetos abstractos. Por lo tanto, existen objetos abstractos.
[51] Véase Hale, 1987, cap. 3.

palabra «elefante» y pensáramos en la letra *token*, la respuesta tendría que ser «tres»; si la pensáramos como una letra *type*, responderíamos que solo hay una. Incluso para lo que parece ser un mismo concepto, tendría que haber diferentes criterios sortales siempre que la respuesta a la pregunta «¿cuántos *F*-objetos hay?» sea distinta. Discernir los objetos *token*, en tanto que son concretos, es una cuestión de espacialidad: en «elefante» hay tres letras *token* «e», porque aparece tres veces en espacios separados; pero no ocurre así con el objeto *type*: aunque «no es un asunto sencillo decir qué se requiere para la mismidad de una letra *type*»[52], un primer acercamiento a ello es que un objeto *type a* es el mismo que uno *b* si están espacialmente, pero no temporalmente, separados. [53] Hale apunta:

> La distinción abstracto/concreto es, más o menos, una distinción entre aquellos sortales cuyas relaciones fundamentales [*grounding*] pueden valer entre cosas que están separadas espacial pero no temporalmente, y aquellos cuyas relaciones fundamentales no pueden ser así (Hale, 1987, p. 59)

Y aclara lo que entiende por una relación fundamental:

> Sea *F* cualquier sortal y *R* cualquier relación de equivalencia. Entonces, diré que *R fundamenta* [*grounds*] *F* si y solo si, para cualquier enunciado de identidad que vincula términos que *F*-denotan, hay algún enunciado al efecto de que *R* vale entre ciertas cosas, la verdad de lo cual es (lógicamente) necesaria y suficiente para la verdad de ese enunciado de *F*-identidad (*Ibid.*).

Dicho de manera breve: la verdad de una identidad entre instancias de un concepto sortal (cualquiera) depende necesaria y suficientemente de una relación de equivalencia. Con base en esto, Hale nos da las condiciones necesarias y suficientes para identificar un sortal abstracto:

> *F* es un sortal abstracto si y solo si, para cualquier *R* que fundamente *F*
> (i) *R* puede valer entre cosas que están separadas espacial, pero no temporalmente, o
> (ii) *R* es de segundo o de un nivel superior, o
> (iii) *R* vale únicamente entre instancias de un sortal abstracto *G*. (Hale, 1987, p.61)

Desde luego, el argumento anterior nos lleva a los principios de abstracción. Ellos nos dan los criterios de identidad para las instancias de conceptos sortales, y es el hecho de que estas instancias puedan coexistir separadamente en el espacio lo que las hace abstractas.[54]

[52] Hale, 1987, p. 56.
[53] *Ibid.* P. 58.
[54] Hale, 1987, p. 184-185

Así ocurre con las instancias de los conceptos FORMA, DIRECCIÓN y, por supuesto, NÚMERO, cada uno de los cuales es introducido por un principio de abstracción. Sin embargo, no solo se trata de diferenciar lo abstracto de lo concreto, sino también de identificar lo que es propio de cada uno de estos conceptos abstractos y sus instancias. Esto significa que también se pide diferenciar una forma de una dirección, o una dirección de un número.

En *Frege´s Conception*, Wright señala: «un concepto sortal supuesto está en buen estado cuando tenemos una comprensión satisfactoria de las condiciones de verdad de enunciados de identidad entre sus instancias y una comprensión satisfactoria de la distinción entre sus instancias y cosas de otro tipo» (Wright, 1983, p. 123)[55]. En el caso particular del concepto de número, Wright dice que, para distinguir entre números y objetos de otros tipos, primero hay que tener «una comprensión de las condiciones de identidad y distinción *entre* números» (Wright, 1983, p. 114). Su postura es que, si queremos determinar los límites del concepto NÚMERO (o de cualquier otro), primero hay que tener una forma de individuar sus objetos, o, dicho de otra manera, el criterio de identidad y distinción para objetos aritméticos determina que *únicamente* los números pueden saturar el concepto NÚMERO y que cualquier otro tipo de objeto queda excluido de su dominio. A manera de eslogan, Hale resume las palabras anteriores: «ser un *F* es ser algo que tiene las condiciones de identidad de los *F´*s», y explica:

> Cuando *F* es un sortal (abstracto) cuyo criterio de identidad asociado está dado en términos de una relación de equivalencia *R*, que vale entre cosas de algún otro tipo, entonces un objeto es un *F* (si y) solo si el contenido de un enunciado de identidad que le concierne se puede explicar adecuadamente en términos de los *R´*s que valen entre cosas adecuadas de esa otra clase (Hale, 1987, p. 187).

Particularmente, para Hale «ser un número es ser algo para lo cual las cuestiones de identidad son explicables como cuestiones sobre qué conceptos se pueden relacionar uno a uno» (Hale, 1987, p. 197). Esto explica por qué para el neo-fregeano son esenciales solo dos de los cuatro criterios sortales, a saber, el de identidad y el de aplicación. En efecto, es razonable pensar que, para determinar el dominio de un concepto, hay que encontrar algo común entre los objetos que lo conforman que no apele al concepto mismo y eso es el modo en que los identificamos.

[55] La misma idea se repite exactamente en Hale, 1987, p. 200.

3.2.2 Inclusión y exclusión sortal

Si, por un lado, el Principio de Hume no es una definición explícita del concepto NÚMERO, y eso ha llevado a un problema de indeterminación, por otro lado, es él mismo lo que ofrece la pauta para la solución al problema que ha generado. Pues el lado derecho de su bicondicional, la relación uno a uno entre conceptos de primer orden, funge como un criterio de identidad entre los objetos referidos por los valores de la función ⌜#ξ⌝, de modo que es natural pensar, de acuerdo con lo anterior, que tal relación determina los límites del concepto de número. Wright sintetiza esta idea en un nuevo principio llamado de inclusión sortal:

> **N^d:** *Gx* es un concepto sortal bajo el cual caen los números (¿si? y) solo si hay, o podría haber, términos singulares '***a***' y '***b***' que pretenden denotar instancias de *Gx* tal que las condiciones de verdad de '***a*** = ***b***' podrían ser adecuadamente explicadas como aquellas de algún enunciado para el efecto de que la correlación 1-1 se obtenga entre un par de conceptos (Wright, 1983, pp. 116-117).

Hale comparte esta manera de determinar un concepto, pero observa que N^d es compatible con los criterios de identidad para los números que John von Neumann propuso para la teoría de conjuntos. De acuerdo con este matemático, los números se construyen de la siguiente manera: ∅, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {∅, {∅, {∅}} … {∅, {∅, {∅}…}. Aquí, dos números son iguales si y solo si tienen la misma cardinalidad, o sea, si existe una correlación entre conjuntos. Sin embargo, esta construcción conjuntista de los números va en contra del programa logicista.[56] Hale entonces propone un principio más general:

> (S) Los términos singulares de un rango dado representan instancias de un concepto sortal *F* si y solo si hay algún sortal *G*, cuya extensión está incluida en la de *F*, tal que, donde *a* y *b* son cualesquiera términos de ese rango, entender '*a* = *b*' implica ejercitar una comprensión del criterio de identidad para los *G*´s (Hale, 1987, p. 206).

No obstante, Hale piensa que (S) debe ser reformulado para el caso particular del concepto NÚMERO, y así, llega a su siguiente propuesta:

> S´*H* es un sortal bajo el cual caen los números únicamente si, donde '*a*' y '*b*' son términos que apoyan denotar instancias de *H*, el entendimiento de '*a* = *b*' implica

[56] Véase Hale y Wright, 2001, p. 369, n. 55. Aquí se aclara que Hale quiere evitar que los números sean los de von Neumann porque eso evita, a su vez, la objeción de indeterminación de la referencia que Paul Benacerraf expone en su "What Numbers Could not Be".

> ejercitar una comprensión del criterio de identidad, el conocimiento del cual es requerido para un entendimiento completo de *G*, donde *G* es algún sortal cuyas instancias en su totalidad son números (Hale, 1987, p. 215).

Como su autor explica poco más abajo, (S´) tiene la ventaja sobre N^d porque exige que la identidad entre números sea ya entendida como una biyección entre conceptos, y no solo que *pueda* serlo.

Wright concibe otro principio que, junto con el de Hume, llevan a N^d. Reza así:

> No hay dos objetos que caigan bajo un concepto sortal dado *Fx* que puedan ser candidatos reputables para la *identidad* con objetos que caen bajo otro concepto sortal *Gx*, a menos que se satisfagan las siguientes condiciones: para todo enunciado de identidad '$a = b$', donde 'a' y 'b' tienen referencia entre las instancias relevantes de *Fx*, corresponde al menos un enunciado '$A = B$' donde 'A' y 'B' denotan instancias de *Gx*, que tienen las mismas condiciones de verdad (Wright, 1983, p. 122).

Este nuevo principio, llamado SI o de inclusión sortal, es en realidad una versión más fuerte del criterio de identidad sortal que mencionamos en el primer capítulo. Según lo entendimos ahí, dos objetos *a* y *b* caen bajo el mismo sortal si y solo si sus criterios de identidad numérica son iguales. Así, si *a* es un *F* y *b* es un *G*, y las condiciones de verdad para «$a = a$» coinciden con las de «$b = b$», entonces *F* es el mismo concepto que *G*, incluso si *a* y *b* son numéricamente distintos.

El propósito de todos estos principios no es otro que el de delimitar el dominio de los conceptos introducidos por los principios de abstracción, particularmente, el concepto de NÚMERO CARDINAL. Si aceptamos estos límites y sus fundamentos, entonces es evidente que Julio César no es un número, con lo que tenemos que la identidad mixta «$\#F$ = César» es falsa. La razón de ello es que los criterios de identidad para el concepto PERSONA, bajo el cual cae César, son distintos de los del concepto NÚMERO. La identidad personal es una en la que influye el tiempo. Debe haber un criterio de identidad que nos permita decidir si el César que conquistó la Galia es el mismo que el que fue ultimado por el senado romano. Una propuesta es la continuidad de los estados mentales. No hay dos personas que tengan los mismos estados mentales en la misma continuidad. Por su parte, la identidad para números cardinales nada tiene que ver con la continuidad en el tiempo, de suerte que, como los criterios de identidad para César no coinciden con los de los números, hay buenas razones, más allá del sentido común, para reconocer como falsa la identidad entre el número de los *F*´s y César.

3.2.3 Números, esencias y categorías

Hale, más que Wright, ha puesto una especial atención en vincular su filosofía de las matemáticas con la metafísica, particularmente con su postura esencialista. No es mi intención revisar aquí el esencialismo del filósofo escocés, pero dicho vínculo tiene relevancia como continuación en su pretendida solución al Problema de César.

De acuerdo con Hale (2020, pp. 11-17), el Principio de Hume, entendido como una cuasi definición del concepto NÚMERO CARDINAL, y por ello, como una estipulación de las condiciones necesarias y suficientes de lo que es un número, nos acerca al conocimiento y a la naturaleza o esencia de lo que es un número cardinal. En «Essence and Definition by Abstraction» Hale retoma la dicotomía tradicional entre definición real y definición nominal. La definición real responde la cuestión por el *quid* de una entidad mencionando lo que *es* esa entidad y la nominal lo hace explicando el *significado* de un término que denomina a esa misma entidad. Hale piensa que ambas interpretaciones son conciliables, al menos, para algunos casos. Dos ejemplos son ilustrativos: decir que un círculo es una figura geométrica compuesta por el conjunto de todos y únicamente aquellos puntos equidistantes de un punto fijo en un plano dado es decir lo que *es* un círculo y también el *significado* del concepto CÍRCULO; lo mismo ocurre cuando definimos una yegua como un caballo hembra. Hale piensa que el Principio de Hume no solo nos da una explicación (cercana a una definición contextual) de lo que *significa* ser un número cardinal, sino también de lo que *es* uno. Dicha explicación, desde luego, nos es dada desde la relación de equinumerosidad y es detalladamente puesta en los principios de inclusión y exclusión sortal. Entonces, cuando estos principios sortaesl nos llevan al pensamiento de que número cardinal es todo aquello cuya identidad se determina por relaciones uno a uno entre conceptos de primer orden, tenemos —si admitimos lo anterior— tanto la delimitación del concepto sortal NÚMERO CARDINAL como la esencia de los objetos denotados por el término ⌜$\#F$⌝.

De lo anterior se desprende otro argumento contra la indeterminación: César no es un número cardinal porque su esencia no es ser tal.

Siguiendo la tradición filosófica, las esencias son un tipo de propiedades o conceptos que se caracterizan por ser aquello que no puede no pertenecer a un objeto. Hale (2013, p. 169) distingue, a su vez, dos tipos de propiedades esenciales: están aquellas cuyos objetos que las instancian son necesarios y aquellas cuyos objetos son contingentes. Las del primer tipo son ellas mismas necesarias mientras que las del segundo son igualmente contingentes. Así, por ejemplo, Bucéfalo es un objeto real e histórico, aunque contingente, dado que pudo no haber existido, así como tampoco pudo haber existido ningún individuo de su especie, de modo que la esencia CABALLO es también contingente. ¿Qué objetos son necesarios para Hale? Él asume en *Necessary Beings* que los enunciados de la aritmética son necesaria y literalmente (*at face-value*) necesarios. Esto implica para él que sus objetos, como parte de sus hacedores de verdad, son igualmente necesarios (2013, p. 148). Ellos, además de tener la propiedad de ser números cardinales, tienen otras propiedades (ser primo, ser par o impar), relaciones con otros de su mismo tipo (ser sucesor, antecesor, menor o mayo) o son tomados por funciones ($\xi + \zeta$, $\xi \times \zeta$, etc.) Si esto es cierto, entonces se sigue que el concepto NÚMERO CARDINAL es una propiedad esencial de los objetos denotados por los términos singulares del tipo ⌜$\#F$⌝ y que es necesaria, así como también lo son sus relaciones y funciones (Hale, 2013, pp. 165-177).

De todo esto tenemos un nuevo argumento contra la indeterminación: César no *puede* ser un número cardinal porque César es un objeto contingente que no puede instanciar una propiedad o concepto necesario. Dicho de otro modo: el concepto NÚMERO CARDINAL solo puede ser instanciado por objetos necesarios y César es uno contingente.

Por último, en «To Bury Caesar», Hale y Wright ofrecen el siguiente argumento contra el Problema de César que alude a conceptos, esencias y categorías. Ahí, ellos llaman *concepto sortal puro* a la propiedad esencial de un objeto: «Para un objeto caer bajo un concepto sortal puro es para él ser una cosa de un tipo genérico particular [...] tal que pertenece a la esencia de ese objeto ser una cosa de ese tipo» (Hale y Wright, 2001*b*, p. 387). Por su puesto, estos conceptos son propiedades que pertenecen necesariamente a los objetos que los saturan. Los conceptos sortales puros están determinados, como lo vimos arriba, por sus criterios de identidad. Dos conceptos F y G son los mismos si y solo si sus criterios de identidad son los mismos. Esto último no parece absolutamente cierto cuando Wright y Hale observan que hay conceptos distintos que comparten *algo* de sus criterios de identidad. Así ocurre con GATO y TIGRE o con TIGRE y MAMÍFERO. Puesto que hay algo común en todos estos conceptos sortales puros, el neo-fregeano los engloba en lo que llama *categoría*. Según su definición, una categoría es un sortal máximamente extensivo que subsume conceptos sortales puros que comparten un mismo criterio de identidad. En este sentido, CATO, TIGRE, MAMÍFERO pertenecen a una misma categoría, digamos, ANIMAL. Todo objeto a que no caiga bajo una categoría C está excluido de cualquier sub-concepto de C y no tiene sus criterios de identidad; dicho de otra manera: a pertenece a una categoría C si y solo si cae bajo algún sortal puro cuyos criterios de identidad son los de C.

La solución al Problema de César ahora se basa en que NÚMERO CARDINAL y PERSONA son dos conceptos de diferentes categorías. Usando ⌜$S(a) = S(b) \leftrightarrow Eq(a, b)$⌝ como un esquema de los principios de abstracción, Wright y Hale dicen que «una condición para la identidad de los Ss siempre se puede expresar como una relación cuyo dominio es el de las mismas cosas: $x = y$ si y solo si $\forall a\ \forall b\ (x = S(a)\ \&\ y = S(b) \rightarrow Eq(a, b)$» (2001, p. 390). Puesto que César y el cero no pertenecen a la misma equivalencia, o sea, $\ulcorner \neg\ Eq\ (\text{César}, 0)\urcorner$, no pueden ser idénticos. Más adelante, Hale y Wright refuerzan su argumento basado en las categorías:

> Los conceptos F y G comparten un criterio de identidad justo cuando
>
> (*) $(\forall x, y)\ (x\ eq_F\ y \leftrightarrow x\ eq_G\ y)$
>
> es una verdad (conceptualmente) necesaria. [...] si las categorías son conceptos sortales máximamente inclusivos bajo un criterio de identidad singular en este sentido, entonces no hay ninguna cuestión de que número y persona sean sub-sortales de alguna categoría singular. Pues eso requeriría un *C* tal que $(\forall x, y)\ (x\ eq_{NUM}\ y \leftrightarrow x\ eq_C\ y)$ y $(\forall x, y)\ (x\ eq_{PERS}\ y \leftrightarrow x\ eq_C\ y)$ valgan por necesidad conceptual, y, por tanto, que $(\forall x, y)\ (x\ eq_{NUM}\ y \leftrightarrow x\ eq_{PERS}\ y)$ también lo haga. Y —parece muy obvio— no hay tal necesidad conceptual. (2001*b*, p. 391).

El estatus de verdad conceptual del Principio de Hume que mencioné en 1.4.4 arriba ahora se extiende con una modalidad a las categorías. El nuevo argumento neo-fregeano contra la indeterminación es: César no *puede* (por modalidad conceptual) ser un número porque la categoría a la que pertenece es distinta (porque sus criterios de identidad también lo son) a la que pertenecen los números.

3.3 La persistencia de la indeterminación

Mediante los principios N^d, S, S´ y SI los neo-fregeanos han logrado delimitar el concepto de número introducido por abstracción. Con ello el criterio de aplicación discrimina los objetos que caen bajo el concepto de número y aquellos que, como Julio César, están fuera. El argumento se ha basado en la premisa de que bajo este concepto solo pueden caer los objetos cuyo criterio de identidad sea una relación de equivalencia entre conceptos. ¿Es satisfactoria esta propuesta neo-fregeana al Problema de César?

3.3.1 Primera circularidad en el argumento neo-fregeano

Un primer argumento responde que el razonamiento de Hale y Wright es circular. De acuerdo con *Grundlagen* §66, el Problema de César emana de la incapacidad de los principios de abstracción para determinar el valor de verdad de la identidad mixta «$@\xi = q$». Una solución es que la teoría de los conceptos sortales nos dé las condiciones necesarias y suficientes para decidir ese valor de las identidades mixtas *en su forma general*, y así remediar el embrollo generado por los principios de abstracción. Eso ayudaría a llegar a la conclusión de que «*q*» refiere a lo mismo que el valor de la función @ξ cuando la identidad mixta es verdadera, y lo contrario cuando es falsa. Sin embargo, para el neo-fregeano esto no es la conclusión, sino la premisa. Hale y Wright razonan, con base en los principios de inclusión y exclusión sortal, que César no cae bajo el concepto de número porque sus criterios de identidad y distinción no se basan en la relación uno a uno entre conceptos de primer orden. Ya que César está excluido del concepto de número, es imposible que sea numéricamente idéntico a un valor de la función ⌜#ξ⌝. (Una condición necesaria para la identidad numérica es que haya identidad sortal). De esto concluyen la falsedad de la identidad mixta «$\#F$ = César». Lo que ha hecho el neo-fregeano es explicar qué significa ser un número para concluir que César no cabe en esta explicación. Esta respuesta supone que *ya* sabemos qué tipo de objeto es César, y por ello sabemos también que sus criterios sortales no coinciden con los del concepto de número, de lo que se concluye que César no es un número. La superación neo-fregeana al Problema de César funciona *solo si* suponemos como algo conocido el tipo de objeto referido por la literal «*q*» en la identidad mixta, tal como sucede con el objeto César. Pero el problema originalmente no supone este conocimiento, sino todo lo contrario: si se determinaran los valores de verdad de una identidad mixta sabríamos qué tipo de objeto es referido por la literal «*q*». La circularidad se hace evidente ahora: el neo-fregeano argumenta que César no es (idéntico a) un número porque César no es (no tiene los mismos criterios de identidad que) un número. (El mismo argumento no podría concluir que *q* es (o no es) un número porque se desconoce si *q* tiene (o no tiene) los mismos criterios de identidad que un número).

Desde este punto de vista es evidente que la delimitación del concepto NÚMERO no es la solución al Problema de César. Los principios de inclusión y exclusión sortal han reivindicado el principio de determinación completa y, sin embargo, el principio del tercero excluido aún no vale para las identidades mixtas. Una solución tendría que indicar, para todos los casos posibles, cuál es la referencia de «*q*», porque así conoceríamos sus criterios de identidad sortal; o bien, cuál es el valor de verdad de la identidad mixta, porque así deduciríamos si *q* cae o no bajo el concepto de número. Pues el principio de composicionalidad nos dice que la referencia de un término singular contribuye al valor de verdad del enunciado en el que aparece, de modo que, si desconocemos la referencia de «*q*», desconocemos también el valor de verdad de «$\#F = q$»; y por el Principio de Contexto, no sabemos si «*q*» refiere o a qué tipo de objeto refiere porque la identidad no tiene claro un valor de verdad. En su forma general, las identidades mixtas parten de nuestra ignorancia de ambas cosas: ni conocemos la referencia del término singular ni podemos decidir un valor de verdad para el enunciado en el que figura. Entonces, la estrategia neo-fregeana ha sido equivocada, porque no ofrece información sobre la referencia de la literal «q» (a menos que se sustituya por el representante lingüístico de un objeto conocido) ni sobre el valor de verdad de las identidades mixtas. Por tanto, no es el aspecto lógico del Problema de César, sino el epistemológico, el relevante.

Los principios N^d y SI nos han puesto en el mismo punto de donde partimos. La razón de ello es que están fundamentados en el Principio de Hume que, por su naturaleza abstraccionista, es el origen del problema, por lo que una cuasi paráfrasis de él no basta para llegar a conocer los objetos referidos en el lado izquierdo de su bicondicional. Si concedemos que la identidad «$\#F = \#G$» es verdadera, entonces por el Principio de Hume sabíamos ya que el nombre $\#F$ refiere al mismo objeto que el nombre $\#G$ si y solo si F y G son biunívocos, o sea, que los criterios de identidad de un objeto conocido mediante dos nombres distintos se basan en la relación uno a uno que hay entre dos conceptos de primer orden. Esta última forma de presentar el Principio de Hume es la idea central de la inclusión y exclusión sortal. El único paso que ha dado el neo-fregeano delante de Frege es que sí ha podido determinar las condiciones para saber el valor de verdad de una identidad mixta cuando no está dado en la forma «el número de los F' s», pero solo para casos particulares en los que el referente de un término singular es bien conocido, pero no hay una respuesta sustancial.

3.3.2 Segunda circularidad en el argumento neo-fregeano

Un segundo argumento que también apela a la circularidad es expresado por William Stirton. En "Caesar Invictus" él presenta la idea de Wright (1983, p. 143) de que un hablante puede inferir $\ulcorner \exists y\, (y) = \#F \urcorner$ a partir de su entendimiento de $\ulcorner \#F = \#G \urcorner$ mediante el Principio de Hume, y la llama la tesis de la denotación; y llama tesis de la distinción a la idea también de Wright (1983, p. 141) de que el mismo hablante puede ver la falsedad de $\ulcorner \#F = q \urcorner$ siempre que «q» sea un término singular que refiera a un objeto concreto y $\ulcorner Fx \urcorner$ sea una fórmula donde x es libre (Stirton, 2003, p. 290). Stirton dice: «Una cuestión que llega a ser importante es si Wright puede establecer la tesis de la distinción sin apoyarla tácitamente en la tesis de la denotación. Si no puede, sus argumentos para ambas tesis serán circulares». Stirton (2003, p.p. 301-302) reconstruye el argumento de Wright como sigue: supongamos un hablante de un lenguaje ε_0 cuyos términos singulares únicamente refieren objetos concretos. Si se le presenta el Principio de Hume como una definición del concepto NÚMERO, podrá transitar de ε_0 a ε_1, que es una extensión de ε_0 que contiene términos singulares abstractos. Stirton observa que, para llegar a la tesis de la denotación, Wright ya presupone que nuestro hablante conoce la falsedad de «$\#F = q$» cuando «q» es un término de ε_0, porque «$\#F$» refiere a un abstracto y «q» a uno concreto, y porque éste último es un término que denota (si no tuviera esta propiedad semántica, el hablante no conocería que el enunciado en el que figura tiene un valor de verdad). Asimismo, puesto que se presupone que un enunciado de la forma ⌜$y = \#F$⌝ es verdadero, o sea, que sus términos denotan, lo mismo vale para otro en el que se sustituye la literal «y» por «q». El problema, tal como lo ve Stirton —y concuerdo con él—, es que, para llegar a la tesis de la denotación no deberíamos presuponer la de la distinción, porque en la segunda ya sabemos que, puesto que «q» pertenece a ε_0, «q» no puede referir a un objeto abstracto como pretende el operador numérico.

En "Caesar and circularity" Stirton (2019, p. 44) considera dos posibles objeciones de corte neo-fregeano que podría enfrentar. La primera dice que no es necesario que el hablante de ε_0 y ε_1 entienda todas las palabras, por ejemplo «q», para concluir la falsedad de «$q = \#F$», pues «podría razonar en una manera meramente formal». La segunda dice que no es cierto que el mismo hablante *primero* tenga que aseverar la falsedad de «$q = \#F$» (siempre que q pertenezca a ε_0) para luego entender ecuaciones del tipo $y = \#F$, pues bien podría aceptar esta falsedad de manera hipotética y tentativa para deducir de ella la ecuación deseada.

La contestación de Stirton a la primera objeción es un contraejemplo ofrecido por los mismos neo-fregeanos. Hale y Wright argumentan (2001*b*, pp. 390-396) que la identidad entre números, abreviada como «$x \text{ eq}_{\text{NUM}}\, y$», está definida por la fórmula:

$$\forall F \forall G\, ((x = \#F \wedge y = \#\mathrm{G}) \rightarrow \exists A\, (\forall x\, (Fx \rightarrow \exists! y\, (Gy \wedge Axy)) \wedge \forall x\, (Gx \rightarrow \exists! y\, (Fy \wedge Ayx))))$$

Como esta identidad únicamente puede valer para números, entonces por necesidad conceptual no vale como identidad entre personas. Esto es: sea cual sea la identidad para personas, es falso que $\forall x\ \forall y\ (x \text{ eq}_{\text{NUM}}\ y \leftrightarrow x \text{ eq}_{\text{PERS}}\ y)$, pues no hay una categoría C que subsuma los conceptos de número y persona simultáneamente. Stirton dice que para conocer una fórmula primero hay que entenderla completa o parcialmente, y luego argumenta, con base en la observación de que esta fórmula de segundo orden contiene una subfórmula del tipo ⌜$y = \#F$⌝, que nuestro hablante de ε_0 y ε_1 «debe entender algunas ecuaciones de ese tipo para poder hacer un juicio informado sobre si $\forall x\ \forall y\ (x \text{ eq}_{\text{NUM}}\ y \leftrightarrow x \text{ eq}_{\text{PERS}}\ y)$ "puede valer por necesidad conceptual"». Dicho de otra manera, Hale y Wright están suponiendo la tesis de la denotación para concluir la de la distinción. Por otro lado, Stirton responde a la segunda objeción diciendo:

> Wright y Hale quieren que [el supuesto hablante] haga algo que es temporalmente imposible: para algunos x e y quieren que él entienda x e y juntos, cuando de hecho es imposible para él entender x a menos que primero haya entendido y, y es igualmente imposible para él entender y a menos que primero haya entendido x (Stirton, 2019, p 47).

En su respuesta, dice que x significa la oración «$q = \#F$ es falso siempre que q pertenezca a ε0» e y significa la falsedad de $\forall x\ \forall y\ (x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{NUM}}\ y \leftrightarrow x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{PERS}}\ y)$. Stirton entonces apunta que, a menos que pueda haber una justificación de ambas con independencia una de la otra, la circularidad del argumento neo-fregeano permanece. Puesto que él no ve una salida a esta circularidad, porque «el argumento para [«$q = \#F$ es falso siempre que q pertenezca a ε0»] procede a través de [$\forall x\ \forall y\ (x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{NUM}}\ y \leftrightarrow x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{PERS}}\ y)$], mientras que el argumento para [$\forall x\ \forall y\ (x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{NUM}}\ y \leftrightarrow x\ \mathrm{eq}_{\mathrm{PERS}}\ y)$] que ellos han descrito procede a través de [«$q = \#F$ es falso siempre que q pertenezca a ε0»]» (Stirton, 2019, p. 48), entonces la solución neo-fregeana fue solo una apariencia.

3.3.3 Violación del principio de unicidad en los principios de abstracción

Un último argumento dado por Joongol Kim (2004) apunta que la indeterminación de la referencia persiste porque hay al menos dos objetos que los términos de un principio de abstracción pueden referir. Él menciona (pp. 64-71) que las definiciones deben cumplir dos características: la de existencia y la de unicidad. En los casos de los principios de abstracción neo-fregeanos, el de Hume y el de la dirección de las paralelas, esta exigencia es insatisfecha porque definen contextualmente al menos dos conceptos con base en la relación uno a uno y en la relación de paralelismo, respectivamente, incumpliendo con ello la unicidad. La consecuencia es que, si sus términos singulares refieren, pueden referir a dos tipos distintos de objetos y, por ende, persiste la indeterminación de la referencia. Para Kim, el paralelismo entre dos líneas «define» el concepto DIRECCIÓN a la manera de Frege, pero también lo hace con el concepto INCLINACIÓN de las líneas:

la inclinación de la línea a = la inclinación de la línea b si y sólo si a y b son paralelas

El concepto INCLINACIÓN no es el mismo que el de DIRECCIÓN, porque "las inclinaciones son cierto tipo de grados, algunos de los cuales son mayores o menores que otros, mientras que las direcciones no son entidades cuantificables que admitan tal comparación" (Kim, 2004: 70). En consecuencia, el principio $D^{=}$ fracasa al definir el concepto DIRECCIÓN porque viola la exigencia de unicidad.

Kim piensa que el Principio de Hume no está absuelto del mismo problema. Pero las relaciones uno a uno no sólo nos dan una explicación del concepto NÚMERO, sino también del concepto de CONTEO (*count*). Por tanto, tendríamos algo como lo siguiente:

El conteo de los F´s = el conteo de los G´s si y sólo si hay tantos F´s como G´s

Nuevamente fracasa el intento de definir un concepto abstracto. Los conceptos de conteo y de número son distintos:

> El conteo de los F´s es el resultado de contar F´s. Por tanto, una comprensión del concepto de conteo presupone una comprensión del acto de contar. Por otro lado, el número de los F´s es una magnitud abstracta que no depende del acto de contarlos. Entonces, el Principio de Hume fracasa al satisfacer la condición de unicidad de solución y, por tanto, no da ninguna definición correcta del concepto de número (Kim, 2004, p. 70).

En consecuencia, las relaciones uno a uno que el neo-fregeano piensa que definen el concepto de número y sólo a él, «definen» también a otro concepto distinto del que es deseado.

Es claro que esto no sólo es un ejemplo contra los principios de abstracción como definiciones contextuales de conceptos abstractos, sino también contra los principios N^d y SI. La estrategia del neo-fregeano contra el Problema de César consistió en afirmar que los números son instancias de conceptos sortales. Como tales, éstos tienen criterios de identidad y distinción que determinan el criterio de aplicación, es decir, mediante el conocimiento de los criterios de identidad y distinción podemos discriminar objetos que son adecuados para instanciar un concepto dado de aquellos que no lo son. Pero lo que muestran los ejemplos de Kim es que los criterios de identidad y distinción no son suficientes para determinar el criterio de aplicación. Hay al menos dos objetos de distinto tipo como posibles candidatos a ser los referentes de los términos de las proposiciones de identidad de un principio de abstracción. Por lo tanto, si la solución al Problema de César radicaba en los principios N^d y SI y teniendo en cuenta el argumento de Kim, se sigue que en realidad no hay tal solución.

3.4 Julio César más allá de Frege y el neo-fregeanismo

Lo que se ha buscado hasta este punto es tener un sistema lógico que demuestre las leyes de la aritmética consistentemente y un platonismo que conciba los números como objetos abstractos. Frege fracasó en el primer punto; los neo-fregeanos, en el segundo. Arriba he mencionado que esta forma de tomar el asunto plantea un dilema, pues hay que favorecer alguno de ambos puntos a costa de sacrificar el otro, pero quizás esto solo sea una falsa disyunción, ya que podemos buscar interpretaciones que favorezcan las dos partes. Este es el propósito de este último apartado que pretende dejar abierta una posibilidad de unir el logicismo fregeano con un platonismo matemático.

3.4.1 ¿Hay una salida a la Paradoja de Russell?

Cuando en junio de 1902 B. Russell derribó con la paradoja que lleva su nombre el edificio lógico que Frege construyó durante años en sus *Grundgesetze*, éste respondió inmediatamente —apenas seis días después— que «parece que la transformación de la generalidad de una identidad en una identidad de rango de valores [...] no siempre es permisible, que mi ley V [...] es falsa y que mis explicaciones en §31 no bastan para asegurar referencia» (Frege, 2016*a*, p. 578). En esa carta de Frege a Russell, con fecha del 22 de junio de 1902, se promete hacer justicia al descubrimiento de la paradoja en un apéndice al segundo volumen de *Grundgesetze*, que por entonces se encontraba ya en imprenta.

Ya en el §52 de *Grundgesetze* I Frege había dividido el bicondicional de la Ley V en sus dos direcciones como un condicional material:

Ley V*a*: $\forall x\ (Fx \leftrightarrow Gx) \rightarrow \grave{\varepsilon}\ (F) = \grave{\varepsilon}\ (G)$

Ley V*b*: $\grave{\varepsilon}\ (F) = \grave{\varepsilon}\ (G) \rightarrow \forall x\ (Fx \leftrightarrow Gx)$

Y en el mencionado apéndice, apunta que «el único lugar donde puede residir el error [de una contradicción] es en nuestra ley (Vb), que por tanto debe ser falsa» (Frege, 2016, p. 559). Llega a esta conclusión sobre la base del siguiente razonamiento[57]: 1) sea A el concepto *ser la extensión de un concepto y no caer en sí mismo*, 2) sea $\grave{\varepsilon}\ (A)$ la extensión o curso de valores del concepto A, 3) supongamos $\neg A\ (\grave{\varepsilon}\ (A))$, o sea, que la extensión del concepto no cae bajo su propio concepto. Pero, por la Ley V*b*, si $\grave{\varepsilon}\ (A) = \grave{\varepsilon}\ (B)$ para cualquier concepto B, entonces $B\ (\grave{\varepsilon}\ (A))$ que, por la generalidad de la identidad, nos lleva a $A\ (\grave{\varepsilon}\ (A))$, y de ahí a una contradicción.

Max Fernández de Castro (2005, pp. 41-5) ha observado que en estos tres pasos para la generación de la contradicción se encuentran, respectivamente, el axioma de comprehensión, según el cual, con cualquier fórmula abierta se puede formar un nuevo concepto; el supuesto de que para todo concepto hay una extensión o curso de valores que le corresponde; y, desde luego, la Ley V*b*. Él entonces se pregunta a cuál de ellos hubiera estado dispuesto Frege a abandonar, por mor de evitar la paradoja. Pues si (al menos

[57] Frege, 2016, pp. 57-9.

aparentemente) los rangos de valores daban una respuesta al Problema de César, una vía que ayudara a conservar la consistencia del sistema hubiera sido lo ideal para lograr el proyecto matemático y filosófico de Frege.

Sin embargo, Fernández de Castro sostiene que difícilmente Frege hubiera tenido tal disposición. En primer lugar, muestra que para Frege el principio de comprensión es esencial en su conceptografía porque contribuye a la formación de nuevos conceptos. Esta formación ocurre cuando se pueden incluir y excluir diferentes objetos que tienen rasgos o características comunes; por ejemplo, a partir de la característica de tener bigote que tienen algunas personas, se forma el concepto TENER BIGOTE bajo en cual caen únicamente aquellos que tienen esa característica y, cuando usamos su representante lingüístico, el predicado, para formar oraciones, como en «Juan tiene bigote», llegamos a lo verdadero o a lo falso. La segunda formación ocurre cuando existe un criterio de subsunción, o sea, cuando un concepto cae o puede caer bajo otro, como en el caso de que dos conceptos sean equivalentes, hay una relación de segundo orden que los subsume.

En segundo lugar, explora la propuesta de «disminuir el número de representantes postulados de manera implícita por la Ley V» que está de acuerdo con una idea que Boolos defiende en "Saving Frege form contradiction". Ahí, Boolos (1999*c*, p. 178) propone eliminar la Ley V en favor de su Nueva Ley V, cuyos objetos no son extensiones sino lo que él llama subtensiones de conceptos. La subtensión de un concepto es un objeto que tiene como criterio de identidad la similitud entre dos conceptos, y ésta ocurre si y solo si ambos conceptos son pequeños y subsumen los mismos objetos. Un concepto *F* es pequeño si el concepto SER IDÉNTICO CONSIGO MISMO no es equinumérico con un subconcepto de *F*. Si dos conceptos son similares, entonces les corresponde el mismo representante objetual. Así, no todos los conceptos tienen un representante objetual como lo propone la Ley Básica V, sino solo los de la Nueva Ley V. A decir de Boolos, su Nueva Ley V no tendría por qué ser menos aceptable que la que el mismo Frege dio en el apéndice de 1903, y a pesar de que él muestra cómo se desarrolla la aritmética consistentemente a partir de esta ley, Fernández de Castro señala que «la única objeción que [...] podría hacérsele, por ejemplo, a la propuesta de Boolos es que ésta tiene un cierto carácter arbitrario, extraño en un sistema que codifica la lógica» (2005, p. 50-51).

Por último, está la vía de negar que todos los conceptos tienen un representante en el ámbito de los objetos. Como evidencia de ello, Fernández de Castro cita las palabras de un escrito fregeano tardío[58] en el que se menciona que una expresión como «la extensión del

[58] Frege, 1979, p. 269.

concepto *estrella*» no tiene denotación pese a que la aparición del artículo definido sugiere lo contrario. Frege dice esto a la luz de la paradoja que deviene por su construcción de los números como conjuntos. Sin embargo, Fernández de Castro pronto repara en que Frege siempre cuidó que todo término singular bien formado en la conceptografía debe tener denotación.

Esto último es de gran importancia en los fundamentos lógicos de la aritmética, pues, según lo he expuesto, para que ésta tenga un carácter científico todo término dentro de la conceptografía debe tener referencia. Pero más allá de ello, demostrar la referencialidad de los nombres del lenguaje formal es importante porque justo la paradoja resalta que esto no se ha llevado a cabo. Como se expuso arriba, Frege atribuye como una causa de la paradoja el que «mis explicaciones en §31 no bastan para asegurar referencia».

3.4.2 Los criterios de referencialidad en *Grundgesetze*

En §29-§31 de *Grundgesetze* se ofrece una prueba de referencialidad para los términos adecuadamente construidos en el lenguaje formal. Allí, Frege quiere llegar a la conclusión de que «todo nombre formado a partir de nombres referenciales refiere a algo» (*Grundgesetze* I, §30). La prueba (también llamada *criterio*) de referencia corre en §29 de la siguiente manera:

- Un nombre de una función de un solo argumento '$f(\xi)$' refiere si el nombre propio '$f(a)$' que resulta de llenar con 'a' el lugar del argumento de la función refiere siempre que el nombre propio 'a' refiere.
- Un nombre propio 'a' refiere si, cuando ocupa el espacio del argumento de un nombre referencial de una función de primer nivel de un solo argumento $f(\xi)$, el nombre que resulta, $f(a)$, refiere; y si el nombre de una función de primer nivel de un argumento '$f(a, \xi)$' que resulta de '$f(\zeta, \xi)$' cuando el ζ-argumento es ocupado por 'a', refiere para cualquier nombre de función de primer nivel de dos argumentos '$f(\zeta, \xi)$, y si lo mismo vale para el ξ-argumento.
- Un nombre de una función de primer nivel de dos argumentos '$f(\zeta, \xi)$' refiere si, cuando los ζ-, ξ-argumentos son ocupados por nombres 'a' y 'b', resulta un nombre referencial para '$f(a, b)$' siempre que 'a' y 'b' refieren.
- El nombre de una función de segundo nivel con un argumento '$M(\Phi(\xi))$' refiere si, cuando el nombre de una función de primer nivel de un argumento '$f(\xi)$' refiere, el nombre propio resultante '$M(f(a))$' refiere.

Frege nos pide en §31 dos suposiciones semánticas: la primera es que, para que la aplicación de este criterio funcione, «uno ya debe haber reconocido algunos nombres como referenciales»; la segunda es que los nombres de los valores de verdad refieren a los objetos Verdadero y Falso. De acuerdo con esto, «gradualmente ampliaremos el círculo de nombres que son reconocidos como referenciales, demostrando que los nombres que son agregados forman nombres con aquellos que ya han sido agregados». Esto significa que, para Frege, los primeros nombres referenciales del sistema, que él llama *primitivos*, son lo Verdadero y lo Falso. Esta exigencia sirve a la estrategia fregeana porque así, cualesquiera otras funciones, como '—ξ', '⊤ξ', 'ξ→ζ', etc., tienen asegurada una referencia, a saber, un valor de verdad, siempre que los ξ-, ζ-argumentos refieran a un valor de verdad.

Pero la conceptografía no solo puede tener valores de verdad si quiere concebir los números como objetos, pues claramente los números no son valores de verdad; debe haber también rangos de valores, algunos de los cuales serán valores de verdad, otros, números. Heck (2013, p. 73) observa que los rangos de valores son introducidos por una versión meta-lingüística de la Ley V —y no propiamente por ésta— mencionada en *Grundgesetze* §10 que él llama *estipulación inicial*, que dice que la identidad ⌜ἐΦ (ε) = ἀΨ (α)⌝ es correferencial con la generalidad ⌜∀*a* (Φ*a* = Ψ*a*)⌝. Sin embargo, es bien sabido que un problema de indeterminación de la referencia persiste a partir de esta estipulación. En esta sección de la obra Frege dice que la estipulación inicial no fija completamente la referencia del nombre ⌜ἐΦ (ε)⌝, pues «no podemos decidir si un objeto que no nos es dado como un rango de valores es un rango de valores o a qué función pertenece». Dicho de manera similar a como lo hicimos con la función ⌜#ξ⌝, la Ley V y su versión meta-lingüística no determinan si un término «*t*» que no es dado como un rango de valores es un rango de valores. Si tomamos en cuenta que Frege había definido en *Grundlagen* §68 los números como extensiones de conceptos y que las extensiones son ahora los rangos de valores, se sigue que Frege no tiene una manera de determinar la referencia de nombres que posiblemente representen números cardinales, a menos que se presenten explícitamente como rangos de valores.[59]

Además de mostrar el defecto de la estipulación inicial, §10 también nos muestra dos argumentos matemáticos informales (Heck, 2013, p. 89). El primero dice que, dada una

[59] Heck (2013, p. 84) considera esto una reminiscencia del Problema de César discutido en *Grundlagen* §67, aunque Bentzen (2019, p. 619) piensa que son dos problemas distintos. En lo que ambos están de acuerdo es que, tal como se plantea en *Grundgesetze* I §10, el problema es de tipo semántico, dado que se menciona el problema de la referencia de nombres de rangos de valores, y la referencia es una propiedad semántica. Vamos a seguir esta interpretación.

función $\ulcorner X\,(\xi)\urcorner$, hay un mismo criterio de reconocimiento para objetos cuyos nombres tienen la forma $\ulcorner X\,(\dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon))\urcorner$ y para los de la forma $\ulcorner \dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon)\urcorner$, de suerte que $\ulcorner X\,(\dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon)) = X\,(\dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon))\urcorner$ es correferencial con $\ulcorner \forall a\,(\Phi a = \Psi a)\urcorner$; el segundo, defiende la estipulación de que la función $\ulcorner X\,(\xi)\urcorner$ tiene como valor lo Verdadero si su argumento es $\ulcorner \tilde{\eta}\,\Lambda\,(\eta)\urcorner$, o $\ulcorner \tilde{\eta}\,\Lambda\,(\eta)\urcorner$ si su argumento es lo Verdadero, y su valor es lo Falso si su argumento es $\ulcorner \tilde{\eta}\,\mathrm{M}\,(\eta)\urcorner$, o $\ulcorner \tilde{\eta}\,\mathrm{M}\,(\eta)\urcorner$ si su argumento es lo Falso, y «para cualquier otro argumento, el valor de la función $X\,(\xi)$ va a coincidir con el argumento mismo». Frege concluye entonces que la igualdad $\ulcorner X\,(\tilde{\eta}\,\Phi(\eta)) = X\,(\tilde{\alpha}\,\Phi(\alpha))\urcorner$ es correferencial con $\ulcorner \forall a\,(\Phi a = \Psi a)\urcorner$ y agrega: «siempre es posible determinar que un rango de valores arbitrario es lo Verdadero y otro rango de valores es lo Falso».

Con esto, Frege pretendía resolver el Problema de César, ya que solo se tendrían dos tipos de objetos en su conceptografía, a saber, los rangos de valores y los valores de verdad. Pues en ese mismo parágrafo leemos que cualquier objeto puede concebirse como un rango de valores, siempre que haya un concepto bajo el cual únicamente un objeto Δ caiga, a saber, $\Delta = \xi$, por lo que todo objeto llega a ser su propia unidad de clase, esto es, $\ulcorner \dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon) = \Delta\urcorner$. Si aceptáramos este argumento, entonces el enunciado «$\dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon)$ = César» no tendría lugar en la conceptografía, porque evidentemente César no es ni un rango de valores ni un valor de verdad.

Pero Heck apunta que hay algo incorrecto en el argumento. Dice que el enunciado $\ulcorner \exists F\,(\xi = \dot{\varepsilon}F\,(\varepsilon))\urcorner$ no puede tener un valor de verdad a partir de la estipulación inicial, a menos que el argumento $\ulcorner\xi\urcorner$ sea dado explícitamente en la forma $\ulcorner \dot{\varepsilon}F\,(\varepsilon)\urcorner$:

> Frege no pudo haber fracasado al notar que [...] las variaciones triviales de este argumento muestran que la estipulación inicial no decide si César es un rango de valores. Si esto es así, entonces la estipulación inicial no fija la referencia del predicado "$\exists F\,(\xi = \dot{\varepsilon}F\,(\varepsilon))$", incluso después de que él ha estipulado qué son los rangos de valores y los valores de verdad (Heck, 2013, p. 93).

Aun así, Heck señala que tiene que haber una explicación de qué significa para César satisfacer el enunciado $\ulcorner \exists F\,(\xi = \dot{\varepsilon}F\,(\varepsilon))\urcorner$ ya que, tomado como una variable libre, tiene que estar dentro de un dominio de cuantificación, pues «si César no está en el dominio, Frege no tendría que preocuparse por él» (Heck, 2013, p. 94). Bentzen (2019, p. 627) también apoya la interpretación de que el dominio en *Grundgesetze* es inclusivo de todo tipo de objetos (*v. gr.*, personas, árboles, planetas), así que es razonable pedir tal explicación. Ésta consiste en hacer de César un rango de valores convirtiéndolo en su propia unidad de clase, de modo que se presente explícitamente como un término del tipo $\ulcorner \dot{\varepsilon}\Phi\,(\varepsilon)\urcorner$ que esté dentro del dominio de los cuantificadores. En este sentido, la solución al Problema de César sería tener un dominio restringido de cuantificación, en el que solo los rangos de valores y los valores de verdad sean objetos cuyas variables estén en el alcance del cuantificador. Heck lo plantea de la siguiente manera:

> Cuando él [Frege] dice que "hasta aquí hemos introducido solo los valores de verdad y los rangos de valores como objetos", quiere decirnos que los cuantificadores en su lenguaje formal son, en este punto, tomados como si abarcaran únicamente esos objetos. Si es así, decir cuáles son las referencias de las fórmulas de la forma "$x = \dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", bajo varias asignaciones para "x", él necesita solo considerar los casos en los que "x" es asignado a un valor de verdad o un rango de valores y, así, en particular, no necesita considerar el caso en el que César es asignado (Heck, 2013, p. 94).

Sin embargo, Heck apunta que para Frege esto sería inaceptable, dada su posición adversa sobre un dominio restringido de cuantificación. Las razones del filósofo alemán para esta contrariedad son las siguientes.

3.4.3 Los números como conceptos-correlatos

Gregory Landini (2006, 2012), por su parte, tiene una propuesta interesante inspirada en los *Grundgesetze* que intenta evitar el Problema de César reconstruyendo algunas definiciones fregeanas de los números cardinales. Él parte de la observación de que el Problema de César surge solo si concebimos a los números como objetos (2006, pp. 210-211). Según su argumento, aunque la primera vez que Frege esboza el problema es en *Grundlagen* §55-56, no es en esta sección donde su platonismo se ve amenazado, pues aquí los números son definidos, como hemos visto (p. 65), adjetivamente en la forma «el número que pertenece al concepto *F*»; es más bien en el §63 donde Frege no tiene una manera de reconocer que los términos numéricos refieren a números, es decir, no hay manera de sostener que los números son objetos. Landini apunta:

> Es difícil imaginar, sin embargo, que las objeciones que Frege resalta en §55 y §56 aplica a sus definiciones adjetivas. La objeción de Frege, que ha llegado a llamarse "la objeción de Julio César", parece aplicar únicamente contra ciertos intentos por definir los números cardinales como *objetos*. Esto se corrobora por el hecho de que la objeción de Julio César aparece nuevamente en *Grundlagen* §63 como una objeción a introducir los números como *objetos* (Landini, 2006, p. 210).

En efecto, desde cualquier punto que veamos el problema (semántico, epistémico, lógico o metafísico), siempre está implícita una concepción de los números como objetos. Según lo hemos entendido (sec. 3.1), tal objeción consiste en la incapacidad de los principios de abstracción de darnos la información suficiente para decidir los valores de verdad de identidades mixtas y, con ello, de decidir si un término numérico representa un objeto numérico.

En segundo lugar, para salvar el proyecto fregeano, Landini propone ver los números, no como objetos, sino como lo que él llama *conceptos-correlatos*. Los conceptos-correlatos son funciones de segundo orden que relacionan uno a uno conceptos sortales de primer orden o conceptos de orden superior con otros de menor orden. Landini comenta que la idea de cardinalidad es tan natural en nuestra vida cotidiana que incluso los niños, inconscientemente, la usan en sus primeros usos de los números (como cuando relacionan uno a uno un numeral con los dedos de las manos), y que, aunque «la noción de *ser el siguiente en una serie consecutiva* es una intuición primitiva indefinible en el fundamento de la noción de número», no fue hasta que Cantor y Frege, independientemente, llegaron a la conclusión de que tal noción es fruto de la relación de correspondencia uno a uno (2012, p. 74). Esta correspondencia entre objetos de los conceptos (y no de conjuntos, como en Cantor) es una relación de segundo orden y, por ende, es fundamental en nuestra concepción de los números cardinales. De acuerdo con esto, dado un concepto sortal φ, Landini[60] define un número cardinal como:

$$\mathbf{Card}_{\beta y}{}^{\psi y}\,[\varphi_\beta] \overset{\text{def}}{=} \varphi_x \approx \psi_y$$

Así, por ejemplo, el cero, que Frege define en *Grundgesetze* I §41, Landini la convierte[61] en:

$$\mathbf{0}_\beta\,[\varphi_\beta] = \mathbf{Card}_{\beta y}{}^{y \neq y}\,[\varphi_\beta]$$

Una transformación similar ocurre con los demás números cardinales y con las definiciones de la conceptografía. El 1 cardinal de *Grundgesetze* §42 es ahora:

$$\mathbf{1}_x\,[\varphi_x] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Card}^{mz\ \psi z\ \leq\ 0z\ \psi z}[\varphi x]$$

Como él menciona, aquí hay una relación de equinumerosidad entre una función de primer nivel φ y una de tercer nivel F (M (ψ)), ya que hay una biyección entre los objetos que satisfacen φ y los conceptos que satisfacen M (θ). Landini llama a esto una relación *heterogénea* y la define así:

[60] 2006, p. 212; 2012, p. 73.
[61] 2006, p. 212; 2012, p. 77.

$$\varphi \approx_{xM} \mathrm{F}\ [\mathrm{M}\ (\psi)] \overset{\text{def}}{=} \exists \mathrm{R}\ (\mathrm{R}\ (x, M\ (\theta))\ \&\ \forall x\ (\varphi x \rightarrow \exists M\ (\mathrm{F}\ (M\ (\psi))\ \&\ \mathrm{R}\ (x, M\ (\theta)))\ \&\ \forall M\ (F\ (M\ (\psi)) \rightarrow \exists\ x\ (\varphi x\ \&\ \mathrm{R}\ (x, M\ (\theta))))$$

Esta relación tiene gran relevancia según Landini porque «es por medio de tal función heterogénea que podemos contar cardinales como funciones de segundo nivel» (2006, p. 215).

Esta propuesta pretende transformar nuestra concepción de los números como objetos haciendo de cada término singular una función que correlaciona conceptos, y define así cada uno de los números cardinales. Landini entonces muestra que, con ello, se tiene una definición de cada número cardinal, *que no es un objeto*, sino una función de segundo orden, a veces homogénea o a veces heterogénea. Pero si esto es correcto, hay un problema que enfrentar y que el mismo Landini advierte:

> La dificultad central bien conocida de una explicación de los cardinales como funciones de segundo nivel es el problema de asegurar una infinidad de *objetos*. contar cardinales como funciones de segundo nivel no evitará la necesidad de una infinidad de objetos (Landini, 2006, p. 216).

Como vimos en la sección 2.4, la Aritmética Frege motiva el platonismo matemático porque contiene una demostración de que existen infinitamente muchos objetos, de suerte que la propuesta de Landini destruiría esta idea. Es decir: si los números no son ya objetos, entonces ¿cómo podría demostrarse que existen infinitos objetos para la teoría aritmética que hemos desarrollado? Que debe haber una infinidad de objetos aritméticos —continúa Landini— lo prueba el hecho absurdo de que, al suponer lo contrario, «las operaciones aritméticas no producirían los resultados esperados» (2006, p. 217). Por ejemplo, si en la teoría solo hubiera tres objetos, una operación aritmética como la suma del cardinal 2 con el cardinal 2 nos llevaría al cero, al uno o al dos. Su solución es que esta infinidad no debe ser una consecuencia del Principio de Hume, y que éste no es un axioma dentro de la Aritmética Frege, sino que esos resultados esperados se deben seguir de un único axioma lógico:

$$(\mathit{Inf})\ \forall \mathrm{M}\ (\mathrm{N}_{\varphi}\ (\mathrm{M}_x\ \varphi_x) \rightarrow \forall f\ (\mathrm{M}_x\, f_x \rightarrow \exists x\ \neg f x))$$

De esto se tiene:

$$\forall \Omega\ (\mathrm{N}_{\varphi}\ (\Omega_x\ \varphi_x) \rightarrow \Omega_x\ \theta_x\ \mathrm{P}_{\theta}\ \mathbf{Card}_{\beta M}{}^{[\mathrm{M}x\psi x\ \leq \Omega x \psi x]}\ [\theta\beta])$$

que significa que para todo cardinal finito hay un número cardinal finito distinto menor o igual que él, que llega inmediatamente después de él. A su vez, de aquí se desprende:

$$\forall M\ (N_{\varphi}\ (M_x\ \varphi_x) \rightarrow \exists\Omega\ (N_{\varphi}\ (\Omega_x\ \varphi_x)\ \&\ M_x\ \Psi_x\ P_{\psi}\ \Omega_x\ \psi_x))$$

Cuyo significado es que, en una serie de números, hay un cardinal finito que sucede inmediatamente a cualquier otro cardinal finito. Esto evita tener a los números como objetos en el sentido que los introduce el Principio de Hume, pero de ello no se sigue que la infinitud de cardinales no exista, de modo que, transformando los números como conceptos-correlatos, llegaríamos a la misma infinitud de números que la que habíamos probado para la Aritmética Frege.

La propuesta de Landini es atractiva y prometedora. Él señala:

> Dada la cuantificación sobre funciones de nivel superior, podemos reconstruir las pruebas y definiciones de *Grundgesetze* desarrollando los cardinales como funciones de segundo nivel. Este enfoque elimina *todos* los cursos de valores de Frege, incluyendo los de los números cardinales, y elimina la confianza en el Principio de Hume. El único nuevo axioma es (*Inf*) que asegura la infinidad de objetos. de hecho, este es un logro de la obra de Frege que es, por mucho, tan significante como el *Teorema de Frege* (Landini, p. 219).

Qué tan dispuesto pudo haber estado Frege a aceptar abandonar sus cursos de valores y a transformar sus definiciones y axiomas que él consideró de naturaleza lógica es algo difícil de decidir. Sin embargo, la misma cuestión podríamos hacer respecto de la interpretación neo-fregeana que permite eliminar la Ley V en favor del Principio de Hume, de manera que, así como con la propuesta de Hale y Wright, la de Landini podría abrir un camino que evite el Problema de César y que permita el desarrollo del logicismo de un modo similar a como Frege lo pensó.

Conclusiones

De las razones esgrimidas en este capítulo se sigue: 1) que el platonismo matemático neo-fregeano es una tesis inacabada, 2) que el concepto NÚMERO CARDINAL no está delimitado y 3) que además de los intentos de solución al Problema de César de Frege y los neo-fregeanos hay una alternativa basada en los conceptos-correlatos. Es inacabada porque, por el Principio de Contexto, sabemos que los términos singulares del tipo *#F* refieren, pero la naturaleza de los referentes es desconocida. Los argumentos neo-fregeanos expuestos aquí son insatisfactorios para llegar a ese conocimiento. La razón está conectada con la segunda conclusión. El neo-fregeano ofrece una respuesta brillante sobre por qué César no es un número cardinal, pero, a partir de la equinumerosidad y de los principios de inclusión y exclusión sortal relacionados con ella es imposible saber qué es un número cardinal, por lo que no hay determinación de la verdad de una identidad mixta general «$\#F = q$». Además, se ha mostrado que con las relaciones de equivalencia se ofrece el sentido de otros conceptos, como el de conteo o el de inclinación, para la equinumerosidad y el paralelismo, respectivamente. Por último, la propuesta de concebir los números como conceptos-correlatos deshace el Problema de César y parece prometedora, pero sólo un análisis más profundo de, por ejemplo, sus resultados en la aritmética, podrá ilustrar su alcance como una nueva concepción de los números sobre una interpretación nueva del logicismo de Frege.

Conclusiones generales

¿Tiene el neo-fregeano una epistemología satisfactoria para verdades y objetos aritméticos?

I

El neo-fregeano ha usado nuestro banco conceptual cotidiano a la manera de Frege para transitar del lenguaje lógico al aritmético. El puente entre uno y otro es el Principio de Hume. Partiendo de dos entidades fregeanas, los objetos y los conceptos, y sus correlatos lingüísticos, términos singulares y predicados, respectivamente, llegamos a la relación lógica de equinumerosidad. Desde un punto de vista conceptual, trazamos una línea desde ésta hasta los números cardinales. Gracias a los llamados conceptos sortales, que se definen por sus criterios de identidad, discernimiento, clasificación y conteo, llegamos al concepto sortal de orden superior NÚMERO CARDINAL. Lo que hace el Principio de Hume no es introducir, ni mucho menos crear, el concepto de número, sino explicar y justificar epistémicamente su entendimiento. Los conceptos representados por predicados en la lógica de segundo orden son sortales, y es por ello que, mediante abstracción, llegamos justificadamente al concepto NÚMERO CARDINAL. Entonces, el primer alcance del logicismo neo-fregeano es haber encontrado una visión conceptualista de los predicados de la lógica para pensarlos como sortales y de ahí pasar al concepto de NÚMERO CARDINAL.

El segundo alcance neo-fregeano consiste en pensar el Principio de Hume como una verdad analítica *a priori* debido a su conceptualismo. Aunque no es una verdad lógica, reconocemos su bicondicional como verdadero porque comprendemos sus lados derecho e izquierdo como reconceptualizaciones. La verdad del bicondicional es dudosa porque ni la equinumerosidad es una identidad entre cardinales, ni ésta una equinumerosidad, es decir, uno y otro no tratan de los mismos estados de cosas; más bien, la reconceptualización debe entenderse en un sentido epistémico como una explicación de los conceptos abstractos, una manera de hacer inteligible a nuestro entendimiento lo que significamos cuando usamos expresiones como «el número de los *F*´s», de modo que la analiticidad debe tener el mismo sentido.

Pero antes del Principio de Hume, con la sola lógica de segundo orden también llegamos a una idea de analiticidad como la pensó Frege. La demostración de las leyes de la aritmética en la Aritmética-BF, en la que ningún concepto empírico ni intuición se combinan, es evidencia de que las verdades aritméticas son analíticas toda vez que se deriven de la lógica. Para el neo-fregeano, las verdades aritméticas son analíticas (¿sólo?) si el

Principio de Hume también lo es. Pero en la primera teoría desarrollada en el segundo capítulo vemos que esta no es una condición necesaria para la analiticidad de la aritmética ni para la demostración de sus leyes básicas. De esto tenemos una conclusión relevante: hay logicismo y analiticidad en la aritmética sin el Principio de Hume.

Cuando agregamos a la lógica de segundo orden este principio, una nueva derivación de las leyes aritméticas ocurre, el llamado Teorema de Frege. Con el operador ⌜#ξ⌝ es posible la definición de la relación *sucesor*, clave en las demostraciones. Más aún: gracias al Principio de Hume, en la Aritmética Frege se demuestra que hay una infinidad de números. Esto es imposible en la Aritmética-BF. Entonces se sigue que un alcance más del logicismo neo-fregeano es, por un lado, la Aritmética Frege, y por otro, dicha demostración.

De nuevo en el campo filosófico, el neo-fregeano tiene buenos argumentos para defender que los términos singulares refieren a objetos, particularmente los de la forma «el número de los *F*´s». Su tesis de que las categorías sintácticas de predicado y término singular son epistémicamente anteriores a sus respectivas categorías ontológicas de concepto sortal y objeto, que es una interpretación del Principio fregeano de Contexto, trabaja en conjunto con el principio semántico de composicionalidad y con el de Hume. Pues los enunciados de la forma «el número de los *F*´s = el número de los *G*´s» que éste plantea son verdaderos o falsos si y solo si sus términos componentes refieren, debido a que su referencia contribuye al valor de verdad de los contextos que los contienen. En este sentido, el último alcance del neo-fregeano que concluimos es que los términos singulares del Principio de Hume refieren.

II

Creo que el alcance lógico de la teoría de las secuencias de *Begriffsschrift* merece más atención de la que, hasta donde sé, ha recibido. La razón es que en él radica una muestra de logicismo: ahí se prueban las leyes de la aritmética con base en fórmulas lógicas y, aunque Frege no lo hizo así, se deduce una definición de número natural y se construye un modelo estándar para la aritmética. Sin embargo, puesto que no hay manera de individuar los números naturales en esta teoría, ellos no son concebidos como objetos independientes. De aquí se sigue una navaja de dos filos: por un lado, ello significa una limitación de la primera conceptografía fregeana, puesto que no hay objetos aritméticos; por otro lado, esto mismo evita los problemas epistemológicos que tal compromiso conlleva. Así, otra conclusión que yo veo es que en *Begriffsschrift* hay logicismo sin platonismo matemático —a menos que la estructura de los números quiera verse como una entidad.

Más importante aún me parece la limitación de los esfuerzos neo-fregeanos por tratar de resolver el Problema de César. Si bien, es razonable aceptar el Principio de Hume por su éxito como axioma en la Aritmética Frege, es dudoso si los términos singulares que contiene refieren efectivamente a números cardinales o a otros objetos. Así se deja ver que los principios de abstracción en general no son definiciones de los conceptos que introducen y eso es causa de que su delimitación no esté determinada, por lo que no sabemos con exactitud cuáles objetos caen en dichos conceptos y cuáles no, es decir, su criterio de clasificación no es claro. Si esto es cierto, entonces el enunciado «el número de los *F*´s es Julio César» no es ni verdadero ni falso, porque los límites difusos del concepto NÚMERO CARDINAL no permiten saber si César cae bajo él, de modo que el principio del tercero excluido se viola. Tal es la interpretación que se adecúa a la manera neo-fregeana de tratar el asunto.

Siguiendo esta línea de razonamiento, la estrategia de Hale y Wright consiste en proponer nuevos principios conceptuales fundamentados en el de Hume. Si lo que origina el problema es que no está determinado cuáles objetos caen y cuáles no en el concepto abstracto, entonces hay que pensar en cómo excluir a los objetos inadecuados y cómo incluir a los adecuados conforme el concepto lo exige. Retomando la teoría de los conceptos sortales, el neo-fregeano observa que para determinar los límites de los conceptos hay que considerar sus criterios de identidad y distinción sortal. El medio por el cual sabemos que el César de las guerras púnicas es el mismo que el asesinado por el senado romano es que hay un criterio para identificar o diferenciar personas que consiste —desde una teoría de la identidad personal— en la continuidad psicológica. Desde luego, este criterio es inútil para saber si el cero es distinto de su sucesor, de modo que para los números debe haber otro criterio ajeno a la continuidad psicológica, y ese tiene que apoyarse en la equinumerosidad, según el Principio de Hume.

Como declaré anteriormente, esta es una solución excelente para diferenciar a César de cualquier número, pero no para decir qué es en sí mismo un número cardinal. Mi principal argumento contra la aparente solución consistió en notar que el razonamiento neo-fregeano es circular: para llegar a saber si *a* es un número cardinal, hay que partir de conocer qué tipo de objeto es *a*. Otro argumento fuerte observa que las relaciones de equivalencia, que fungen como criterios de identidad sortal, pueden explicar más de un concepto abstracto, por lo que no determinan un solo concepto, sino al menos dos. De ahí infiero una de mis conclusiones más importantes de este trabajo: el Problema de César no tiene solución dentro de los argumentos neo-fregeanos, y esto equivale a decir que no sabemos si los términos singulares del Principio de Hume refieren a números cardinales o a otros objetos.

En consecuencia: la epistemología neo-fregeana es limitada. No justifica el conocimiento de la ontología abstracta sobre los objetos aritméticos que pretende y que es exigido para su credibilidad, ya que ni el Principio de Hume, ni el Principio de Contexto, ni la teoría de los conceptos sortales apoyan un argumento concluyente en favor del platonismo matemático. Pero, junto a este fracaso argumentativo, hay un logro. La lógica de segundo orden con y sin el Principio de Hume permite justificar el conocimiento de las leyes generales de la aritmética porque son verdades derivables de ella, lo que significa que, en el marco de su teoría, las verdades aritméticas son analíticas. En suma: si los números son un tipo de objetos o no es algo que no sabemos, pero al menos existen bases para saber por qué las proposiciones de la aritmética son verdaderas.

Bibliografía

- Barth, A. (2012). “A Refutation of Frege´s Context Principle?”, *Thought*, no. 1, pp. 26-35.
- Benacerraf, P. (1965). “What Numbers could not be?”, *Philosophical Review*, vol. 74, no. 1, pp. 47-73.
- Benacerraf, P. (1973), “Mathematical truth”, *The Journal of Philosophy*, vol. 70, no. 19, pp. 661-679.
- Bentzen, B. (2019). “Frege On Referentiality and Julius Caesar in *Grundgesetze* Section 10”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 60, no. 4, pp. 617-637.
- Boghossian, P. A. (1998). “Analiticity” en *A Companion to the Philosophy of Language*, Hale, Bob y Wright, Crispin (Eds.), Blackwell: Oxford, pp. 331-368.
- Boolos, G. (1999*a*). “Is Hume Principle analytic?”, en *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, pp. 301-314.
- Boolos, G. (1999*b*). “On Second Order Logic”, en *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, pp. 37-72.
- Boolos, G. (1999*c*). “Saving Frege from Contradiction”, en *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, pp. 171-182.
- Boolos, G. (1999*d*). “The consistency of Frege´s *Foundations of Aritmetic*”, en *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, pp. 183-201.
- Boolos, G. y R. Heck (1999). “Die Grundlagen der Arithmetik §82-83”, en *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press, Cambridge, pp. 315-338.
- Cook R. T. y Ebert P. A. (2005). “Abstractions and Identity”, *Dialectica*, vol. 52, no. 2, pp. 121-139.
- Demopoulos, W. (2000). “On the Origin and the Status of our Conception of Number”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol 41, no. 3, University of Notre Dame: Indiana.
- Dummett, M. (1991). *Frege. Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press: Cambridge.
- Ebert, P. A. (2016). “A Framework for Implicit Definitions and the A Priori”, en *Abstractionism. Essays in Philosophy of Mathematics*. Ebert, P. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 133- 160.

- Enderton, H. (2015). "Second-order and Higher-order Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, Edward (Ed.) URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/
- Escurdia, M. (2016). "Introducción a la parte II: Semántica. Sentidos y pensamientos" en *Gottlob Frege. Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas*, Valdez, M. (Ed.). Universidad Nacional Autónoma de México: Ciudad de México.
- Fernández de Castro, M. (2005). "La paradoja de Russel y el programa fregeano", *Signos filosóficos*, vol. 7, no. 13, pp. 31-55.
- Fernández de Castro, M., Mota Pinto, S. y Ruffino, M. (2018). "Las semánticas de Frege", en *Introducción a la filosofía del lenguaje*. Universidad Autónoma Metropolitana: Ciudad de México.
- Ferreirós, J. (2007). *Laberynth of Thought. A History of Set Theory and its roll in Modern Mathematics*. Birkhäuser: Berlín.
- Field, H. (1984). "Crispin Wright: *Frege´s Conception of Numbers as Objects*", *Canadian Journal of Philosophy*, vol. 14, no. 4, pp. 637-662.
- Frege, G. (1967*a*), Begriffsschrift*, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, en *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic. 1879-1931*. Jan van Heijenoort (Ed.). Harvard University Press: Cambridge.
- Frege, G. (1967*b*). *The Foundations of Arithmetic*, Northwestern University Press: Illinois.
- Frege, G. (1967*c*). *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, Basil Blackwell: Oxford.
- Frege, G. (1979). *Posthumous Wrigtings*, Basil Blackwell: Oxford.
- Frege, G. (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell: Oxford.
- Frege, G. (2016*a*), *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas*, Universidad Nacional Autónoma de México: Ciudad de México.
- Frege, G. (2016*b*). *The Basic Laws of Arithmetic*, Oxford University Press: Oxford.
- Freund, M. (2019). *The Logic of Sortals. A conceptualist Approach*, Springer: Cham.

- Greimann, D. (2003). “What is Julius Caesar Problem?”, *Dialectica*, vol 57, no. 3, pp. 261-278.
- Hale, B. (1987). *Abstract Objects*, Basil Blackwell: Oxford.
- Hale, B. (2001*a*). “Dummett´s critique on Wright´s attempt to resuscitate Frege”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 189-213.
- Hale, B. (2001*b*). “*Grundlagen* §64”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 91-116.
- Hale, B. (2001*c*). “Is Platonism Epistemologically Bankrupt?”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 169-188.
- Hale, B. (2001*d*). “Singular Terms (1)”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 31-47.
- Hale, B. (2001*e*). “Singular Terms (2)”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 48-72.
- Hale, B. (2013). *Necessary Beings. An Essay on Ontology, Modality and Relation Between them*, Oxford University Press: Oxford.
- Hale, B. (2020). “Essence and Definition by Abstraction” en *Essence and Existence. Selected Essays*, Jessica Leach (Ed.), Oxford University Press: Oxford.
- Hale, B. y Wright, C. (1992). “Nominalism and contingency of Abstract Objects”, *The Journal of Philosophy,* vol. 83, no. 2, pp. 115-135.
- Hale, B. y Wright, C. (2001). *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford.
- Hale, B. y Wright, C. (2001*a*). “Implicit Definition and the a priori”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 117-152.
- Hale, B. y Wright, C. (2001*b*). “To Bury Caesar”, en Hale, Bob y Crispin Wright (2001), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 335-398.

- Hale, B. y Wright, C. (2002). "Benacerraf´s Dilemma Revisited", *European Journa of Philosophy*, vol. 10, no. 1, pp. 101-129.
- Heck, R. (2005). "Julius Caesar and Basic Law V", *Dialectica*, vol 59, no. 2, pp. 161-178.
- Heck, R. (2012). *Reading Frege´s* Grundgesetze. Oxford University Press: Oxford.
- Heck, R. (2019). "Tha basic laws of cardinal numbers", en *Essays on Frege´s* Basic Laws of Arithmetic, Ebert, Philip. A. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 1-30.
- Hofbewer, T. (2023) "Logic and ontology" en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-ontology/
- Kant, I. (2004). *Prolegomena to any future Metaphysics, that will be able to come forward a Science*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kant, I. (2009). *Crítica de la razón pura*, Fondo de Cultura Económica/Universidad Autónoma Metropolitana/Universidad Nacional Autónoma de México: Ciudad de México.
- Kim, J. (2004). *A philosophical Inquiry into the Concept of Number*. Tesis doctoral. Notre Dame University: Indiana.
- Kim, J. (2011). "Frege´s Context Principle: an Interpretation", *Pacific Philosophical Quarterly*, no. 92, pp. 193-213.
- Landini, G. (2006). "Frege´s cardinals as Concept-Correlates", *Erkenntnis*, no. 65, pp. 207-243.
- Landini, G. (2012). *Frege´s Notation. What they are and How they mean*. Palgrave/McMillan: Hampshire.
- Linnebo, Ø. (2019). "The Context Principle in Frege´s *Grundgesetze*" en *Essays on Frege´s* Basic Laws of Arithmetic, Ebert, Philip. A. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 91-114.
- Lowe, E. J. (2009), *More kinds of Being. A further Study of Individuation, Identity, and the Logic of sortal Terms*. Wiley-Blackwell: Oxford.
- May, R. y Wehmeier, K. (2019). "The proof of Hume Principle" en *Essays on Frege´s* Basic Laws of Arithmetic, Ebert, Philip. A. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 182-206.
- McBride, F. (2003). "Speaking with Shadows: A Study of Neo-logicism", *British Journal of Philosophy of Science*, no. 54, pp. 103-163.

- Pollard, S. (2014). "Frege Arithmetic" en *A Mathematical Prelude to the Philosophy of Mathematics*, Springer, Nueva York.
- Prawitz, D. (2006). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study,* Dover Publications: Nueva York.
- Quine, W. V. O. (1939), "Designation and Existence", *Journal of Philosohpy*, no. 36, pp. 701-709.
- Quine, W. V. O. (1970), *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall.
- Quine, W. V. O. (1973). *Filosofía de la lógica*, Alianza Editorial: Madrid
- Rayo, A. (2005). "Logicism Reconsidered", en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, Steward (Ed.), Oxford University Press: Oxford.
- Resnik, M. (1967). "The Context Principle in Frege´s Philosophy of Mathematics", *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 27, no. 3, pp. 356-365.
- Rey, G. (2018). "The Analytic/Synthetic Distinction", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, Edward (Ed.), URL: https://plato.stanford.edu/entries/analytic-synthetic/
- Rossberg, M. (2006). "Second Order Logic: Ontological and Epistemological problems", Tesis doctoral. URL: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://core.ac.uk/download/pdf/30318842.pdf
- Ruffino, M. (2003). "Why Frege would not be a neo-fregean", *Mind*, vol. 112, no. 445, pp. 51-78.
- Schirn, M. (2003). "Fregean abstraction, referenctial indeterminacy and the logical foundations of Arithmetic", *Erkenntnis*, no. 59, pp. 203-232.
- Shapiro, S. (2005*a*). *Foundations without foundationalism. A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press: Oxford.
- Shapiro, S. (2005*b*), "Higher-order Logic" en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, E. (Ed.), Oxford University Press: Oxford, pp. 751-780.
- Shapiro, S. (2005*c*), "Philosophy of Mathematics and its Logic: Introduction" en *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Shapiro, E. (Ed.), Oxford University Press: Oxford, pp. 3-28.
- Staiton, R. (2006). *Words and Thoughts*, Oxford University Press: Oxford.

- Stirton, W. (2003). “Caesar Invictus”, *Philosophia Mathematica*, vol. 11, no. 3, pp 285-304.
- Stirton, W. (2016), “Caesar and Circularity” en *Abstractionism. Essays in Philosophy of Mathematics*. Ebert, Philip. A. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 37-49.
- Stirton, W. (2019). “Frege´s Teorems of Simple Series”, en *Essays on Frege´s* Basic Laws of Arithmetic, Ebert, Philip. A. y Rossberg, Marcus (Eds.), Oxford: Oxford University Press, pp. 207-234.
- Wright, C. (1983). *Frege´s Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen.
- Wright, C. (2001*a*). “Critical Notice of Michael Dummett´s *Frege: Philosophy of Mathematics*”, en Hale, Bob y Crispin Wright (2001), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 214-228.
- Wright, C. (2001*b*). “Field and Fregean Platonism”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 153-168.
- Wright, C. (2001*c*). “Is Hume´s Principle Analytic?”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 307-333.
- Wright, C. (2001*d*). “On the Harmless Impredicativity of $N^{=}$ (Hume´s Principle)”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 229-256.
- Wright, C. (2001*e*). “On the Philosophical Significance of Frege´s Theorem”, en Hale, Bob y Crispin Wright (Eds.), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 272-306.
- Wright, C. (2001*f*). “Response to Dummett”, en Hale, Bob y Crispin Wright (2001), *The Reason´s Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics*, Clanderon Press, Oxford, pp. 256-271.
- Wright, C. (2017). “Abstraction and Epistemic Entitlement: On the Epistemological Status of Hume´s Principle”, en Ebert, P. y Rossberg, M. (Eds.),

Abstractionism. Essays in Philosophy of Mathematics, Oxford Universuty Press, pp. 162-185.

- Zalta, E. N. (2017) "Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy,* Edward N. Zalta (ed.), URL: https://plato.stanford.edu/entries/frege-theorem/

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

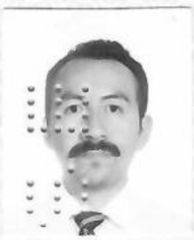
ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00465
Matrícula: 2163800497

Alcances y límites del logicismo neo-fregeano de Bob Hale y Crispin Wright. Una revisión crítica de su desarrollo de la aritmética en relación con su ontología abstrata.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 15 del mes de febrero del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE JORGE MAX FERNANDEZ DE CASTRO TAPIA
DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIERREZ RAMIREZ
DR. SILVIO JOSE MOTA PINTO



RODNEY MORALES XELHUANTZI
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN HUMANIDADES (FILOSOFÍA)

DE: RODNEY MORALES XELHUANTZI

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CSH

DR. JOSE REGULO MORALES CALDERON

PRESIDENTE

DR. JOSE JORGE MAX FERNANDEZ DE CASTRO TAPIA

VOCAL

DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIERREZ RAMIREZ

SECRETARIO

DR. SILVIO JOSE MOTA PINTO

Con base en la facultad que me otorga el Acuerdo 9/2002 del Rector General que formaliza la creación, estructura orgánica funciones de la Dirección de Sistemas Escolares, apartado Tercero, incisos k), l) y s), y de conformidad con la información y documentos escolares que integran el expediente de **RODNEY MORALES XELHUANTZI** con matrícula **2163800497**, la denominación correcta de la idónea comunicación de resultados es **"Alcances y límites del logicismo neo-fregeano de Bob Hale y Crispin Wright. Una revisión crítica de su desarrollo de la aritmética en relación con su ontología abstracta."**, lo cual se aclara para los efectos legales ha que haya lugar.

Mtra. Rosalía Serrano de la Paz
Directora de Sistemas Escolares