UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNA CONDICIÓN PARA ÁRBOLES GENERADORES DE GRADO ACOTADO

Presenta
ALEJANDRO AGUILAR ZAVOZNIK
para la obtención del título de
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)
Asesor
Dr. Eduardo Rivera Campo

Unidad Iztapalapa
Departamento de Matemáticas

México
6 de marzo de 2007

Índice general

Introducción

Tomemos una gráfica G, una subgráfica T es un árbol de G si T es conexa y no tiene ciclos; más aún, si además de estas dos condiciones, todos los vértices de G también son vértices de T, entonces diremos que T es un árbol generador de G. El que una gráfica tenga un árbol generador es una condición equivalente a que ésta sea conexa.

Dado k un entero mayor o igual a 2, diremos que T es un k-árbol generador de G si T es un árbol generador y su grado máximo es menor o igual que k.

En esta tesis estudiaremos algunas condiciones suficientes para que una gráfica G tenga un k-árbol generador T que contenga cierta subgráfica acíclica de G.

El caso $k = 2$ ha sido estudiado ampliamente en la literatura, desde Kirkman y Hamilton, quienes plantearon de manera independiente el problema de encontrar el ciclo generador de cierta gráfica G; esto es, encontrar un ciclo que pase por cada uno de los vértices de la gráfica G.

Dado C un ciclo generador de G, podemos obtener un árbol generador T quitándole a C una arista. Si quisiéramos que un vértice fijo v tuviera grado 1, basta con elegir una de las dos aristas incidentes a v del ciclo C. Así, T será un 2-árbol generador de G en el que v tiene grado 1.

Algunas definiciones importantes que se presentan en estas condiciones son la n-conexidad y el número de independencia. A continuación definiremos rápidamente estos conceptos, que más adelante serán tratados de forma más amplia.

La n-conexidad es una generalización de la conexidad. Diremos que G es n-conexa si para todo par de vértices de G, digamos u y v, existen n trayectorias que van de u a v tales que cualquier vértice de la gráfica G, que no sean ni u ni v, pase a lo más por una de estas trayectorias.

Un subconjunto U de los vértices de G se dice que es independiente si no existe una arista en G que sea incidente a dos vértices de U. El número de independencia de G es el máximo de las cardinalidades de todos los conjuntos independientes de G.

En el Capítulo 1 presentamos algunos antecedentes sobre condiciones suficientes para que una gráfica contenga un árbol generador con grados acotados, y en el Capítulo 2 encontraremos condiciones suficientes para que una gráfica G contenga un k-árbol en el que, además, ciertos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_s$ tengan grados acotados por $d_1, d_2, \ldots, d_s$ respectivamente.

Finalmente, en el Capítulo 3, resolveremos el problema principal de este trabajo, que es encontrar un k-árbol generador que extienda una subgráfica acíclica de G. Primero encontraremos una condición que depende únicamente de la conexidad; y posteriormente, utilizaremos los resultados del Capítulo 2 para dar otra solución en términos del número de independencia.

Capítulo 1

Antecedentes

A lo largo de este trabajo, la palabra gráfica denotará una gráfica simple finita. Si G es una gráfica, $V(G)$ y $E(G)$ serán los conjuntos de vértices y de aristas de la gráfica, respectivamente; y si escribimos $G = (V, E)$, estamos hablando de la gráfica donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas. Con $d_G(v)$ denotaremos al grado del vértice v en la gráfica G y con $\Delta(G)$ al grado máximo de la gráfica G. Si e es la arista incidente a v_1 y v_2, entonces escribiremos $e = v_1v_2$. Si v es incidente a e lo denotaremos como $v \in V(e)$. G' es una subgráfica de G lo escribiremos como $G' \subseteq G$.

Si $G = (V(G), E(G))$ es una gráfica y e es una arista de G, entonces $G - e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ sera la gráfica con los vértices de G, y todas las aristas de G excepto e; análogamente, $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$ es la gráfica que tiene los vértices de G y sus aristas son las de G agregando la arista e. Si v es un vértice de G, entonces $G-v$ será la gráfica cuyos vértices son $V(G) \setminus \{v\}$ y sus aristas son las aristas de G excepto aquellas que son incidentes a v. Si $V \subseteq V(G)$ y $E \subseteq E(G)$, definimos las operaciones $G \setminus V$ y $G \setminus E$, restando uno por uno los elementos de cada conjunto de forma recursiva. Tomemos G_1 y G_2 dos subgráficas de G; definiremos $G_1 \cup G_2$ a la gráfica tal que sus vértices son $V(G_1) \cup V(G_2)$ y sus aristas son $E(G_1) \cup E(G_2)$.

En el caso de una digráfica $\overrightarrow{G}$, escribiremos como $V(\overrightarrow{G})$ a su conjunto de vértices y $A(\overrightarrow{G})$ será su conjunto de arcos.

Consideraremos una trayectoria o un ciclo en una gráfica G como la subgráfica de G que consiste exclusivamente de los vértices y las aristas de la trayectoria o el ciclo. $P_T(v_1, v_2)$ será la única trayectoria en un árbol T que va del vértice v_1 al vértice v_2. Con $C(G)$ denotaremos al número de componentes conexas de una gráfica G.

Un ciclo hamiltoniano y una trayectoria hamiltoniana en una gráfica G son aquellos que pasan por todos los vértices de G. Una gráfica es hamiltonianamente conexa si entre toda pareja de vértices de la gráfica hay una trayectoria hamiltoniana.

1.1. Conexidad

Una gráfica es conexa si entre cada par de vértices existe una trayectoria que va de uno de éstos al otro; y es n-conexa si $G \setminus V$ es conexa para cualquier conjunto $V \subseteq V(G)$ con a lo más $n-1$ vértices. Podemos observar que si una gráfica es n-conexa y $m \leq n$ entonces también es m-conexa, pues si $|V| \leq m-1$ entonces $|V| \leq n-1$. También es claro que ser conexa y ser 1-conexa es lo mismo.

Para poder encontrar algunas condiciones equivalentes a la n-conexidad necesitamos definir lo que significa que un conjunto de trayectorias sean internamente disjuntas.

Un conjunto de trayectorias que van de u a v serán internamente disjuntas si los únicos vértices de la gráfica por los que pasa más de una de estas trayectorias son u y v (ver figura 1).

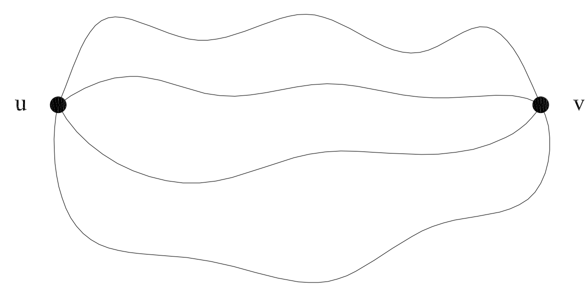

FIGURA 1

Análogamente, si tenemos un conjunto de n trayectorias que empiezan en un vértice fijo v y terminan en n vértices distintos, diremos que estas trayectorias son internamente disjuntas si el único vértice por el que pasan más de una trayectoria es el vértice inicial v (ver figura 2).

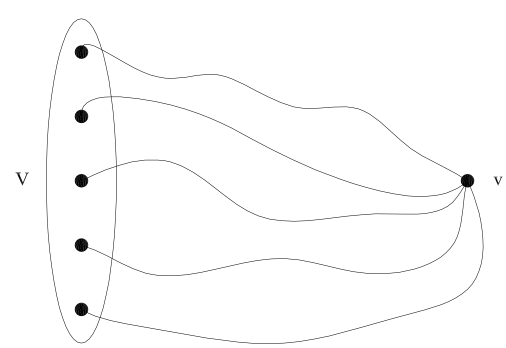

FIGURA 2

Finalmente, si tenemos V_1 y V_2 dos subconjuntos disjuntos de $V(G)$, diremos que n trayectorias que van de los vértices de V_1 a los vértices de V_2 son internamente disjuntas si cada trayectoria tiene un vértice terminal en V_1 y otro en V_2 y por cada vértice de G pasa a lo más una de estas trayectorias (ver figura 3).

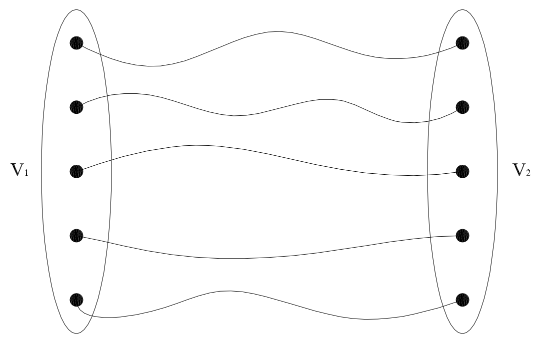

FIGURA 3

El Teorema de Menger, que a continuación enunciamos, nos da una definición equivalente a la n-conexidad; y tiene algunas consecuencias importantes.

Teorema 1.1. *(Teorema de Menger* [**2**]*) Una gráfica es n-conexa si y sólo si cualquier par de vértices de G están conectados por al menos n trayectorias internamente disjuntas.*

Teorema 1.2. [**2**] *Sean G una gráfica con al menos $n+1$ vértices, $v_1 \in V(G)$ y $V \subseteq V(G) \setminus \{v_1\}$ un conjunto arbitrario con n vértices. Si G es n-conexa, entonces existen n trayectorias internamente disjuntas que van del vértice v al conjunto V.*

Teorema 1.3. [**2**] *Sean G una gráfica con al menos $2n$ vértices, y V_1 y V_2 dos subconjuntos disjuntos de $V(G)$, cada uno con n vértices. Si G es n-conexa, entonces existen n trayectorias internamente disjuntas que van de V_1 a V_2.*

Estos teoremas nos muestran más claramente por qué la n-conexidad es una generalización de la conexidad, además de que nos dan otra forma para entender la razón por la cual si una gráfica es n-conexa, también será m-conexa cuando $m \leq n$.

Como consecuencia del Teorema de Menger tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.4. *Si G es n-conexa, entonces para cualquier vértice v de G existen n aristas incidentes con v.*

1.2. Número de independencia

Ahora definiremos lo que es el número de independencia. Este concepto nos permite saber que tan grande podemos tomar un conjunto de vértices de tal forma que, dos a dos, los elementos de este conjunto no sean adyacentes.

Un conjunto V de vértices de G será independiente en G si $uv \notin E(G)$ para todos u y v en V, es decir, si cualquier par de elementos de V no son adyacentes en G.

Diremos que el número de independencia de una gráfica es $\alpha(G)$ si cualquier conjunto de vértices de G con cardinalidad mayor que $\alpha(G)$ no es independiente, o equivalentemente, $\alpha(G)$ es la cardinalidad del conjunto independiente más grande de G.

Además, definiremos $\sigma_k(G)$ de la siguiente forma:

$$\sigma_k(G) = \text{mín}\left\{\sum_{i=1}^{k} d_G(v_i) : \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G) \text{ es independiente}\right\}.$$

Las condiciónes que encontramos en este trabajo para resolver nuestro problema, dependen principalmente de la definición de n-conexidad y de la de número de independencia. Aunque existen otros tipos de condiciones que también pueden servir, como una condición similar a la del Teorema de Ore, que enunciaremos más adelante.

Un resultado elemental, pero de mucha utilidad es el siguiente, que tiene que ver con árboles.

Lema 1.5. *Si T es un árbol y $U \subseteq V(T)$ un conjunto independiente, entonces $T \setminus U$ tendrá $\sum_{u \in U} d_T(u) - |U| + 1$ componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos el conjunto U, y haremos la demostración de este lema por inducción sobre $N = \sum_{u \in U} d_T(u) - |U| + 1$. El menor N posible es cuando todos los grados de los vértices de U son 1, esto es $N = 1$. En este caso, todos los vértices de U son hojas del árbol, por lo que al quitarlas nos quedará un árbol, esto es, una componente.

Supongamos que para $N = n$ la afirmación es cierta. Si N fuera $n + 1$, tomemos el árbol dirigido $\overrightarrow{T}$ usando un vértice cualquiera de T como raíz. De éste, tomemos un $u \in U$ tal que no existe una trayectoria dirigida en $\overrightarrow{T}$ desde u hasta algún otro vértice de U; y sea V el conjunto que consta de todos los vértices para los que en $\overrightarrow{T}$ existe una trayectoria desde u que llega a ellos, sin tomar en cuenta a u. Sea $T' = T \setminus V$, en este caso la suma que llamamos N dará n, y el número de componentes de $T' \setminus U$ es una menos que $T \setminus U$. Por la hipótesis de inducción, $T' \setminus U$ tiene n componentes, y $T \setminus U$ tendrá $n+1$ como queríamos. $\square$

1.3. Árboles generadores con grados acotados

En esta sección daremos algunos resultados que existen sobre condiciones suficientes para encontrar árboles generadores con grados acotados. Comenzaremos con el Teorema de Ore, que es una generalización del Teorema de Dirac. También enunciaremos un resultado análogo de Chvátal y Erdös, que tiene las mismas consecuencias que el de Ore, pero con hipótesis distintas. Estos resultados nos dan condiciones suficientes para que exista un árbol generador con grado máximo a lo más dos.

Inmediatamente después de esto, enunciaremos algunas generalizaciones de estos teoremas. Comenzaremos por un par de resultados de Win y de Neumann-Lara y Rivera-Campo, que generalizan estos dos resultados, dando condiciones para encontrar árboles generadores con grado máximo acotado por un entero. Finalmente, enunciaremos dos teoremas de Matsuda y Matsumura que a su vez, generalizan los dos teoremas anteriores.

En la introducción mencionamos que el tener un ciclo generador es suficiente para que exista un árbol generador con grado máximo a lo más 2. Una condición para encontrar un ciclo hamiltoniano es la del Teorema de Dirac.

Teorema 1.6. *(Teorema de Dirac* [**2**]*) Toda gráfica con $n \geq 3$ vértices y grado mínimo al menos $n/2$ tiene un ciclo hamiltoniano.*

Este teorema fue modificado más adelante por Oystein Ore en 1960 y 1963. Si tomamos dos vértices no adyacentes en una gráfica que cumplen con la condición del teorema anterior, entonces la suma de sus grados es mayor o igual que n. Por esto, si pedimos que la suma de los grados de dos vértices no adyacentes en una gráfica sea mayor o igual que n, todas las gráficas que cumplían la condición del Teorema de Dirac, también cumplirán ésta. Así, el teorema de Ore es una generalización del de Dirac.

Teorema 1.7. *(Teorema de Ore* [**6**], [**7**], [**8**]*) Sea G una gráfica.*

1. *Si $\sigma_2(G) \geq |V(G)| - 1$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana.*
2. *Si $\sigma_2(G) \geq |V(G)|$, entonces hay un ciclo hamiltoniano en G.*
3. *Finalmente, si $\sigma_2(G) \geq |V(G)| + 1$,entonces G es hamiltonianamente conexa.*

En 1972 Vašek Chvátal y Paul Erdös publicaron un resultado similar a los que Ore encontró en los 60's, pero con una condición distinta; en este caso, en lugar de acotar la suma de los grados de dos vértices independientes, se condicionó el número de independencia.

Teorema 1.8. *(Teorema de Chvátal y Erdös* [**1**]*) Sea G una gráfica n-conexa.*

1. *Si $\alpha(G) \leq n+1$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana.*
2. *Si $\alpha(G) \leq n$, entonces hay un ciclo hamiltoniano en G.*
3. *Si $\alpha(G) \leq n-1$, entonces G es hamiltonianamente conexa, esto es, existe una trayectoria hamiltoniana entre cualquier par de vértices.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea P una trayectoria de G tal que $|V(P)|$ es máximo. Supongamos que P no es hamiltoniana; entonces podemos tomar un vértice $v \in V(G) \setminus V(P)$. Como G es n-conexa, existen n trayectorias internamente disjuntas, $P(v, z_i)$ que van de v a n vértices de G tales que $V(P(v, z_i)) \cap V(P) = \{z_i\}$ (ver figura 4).

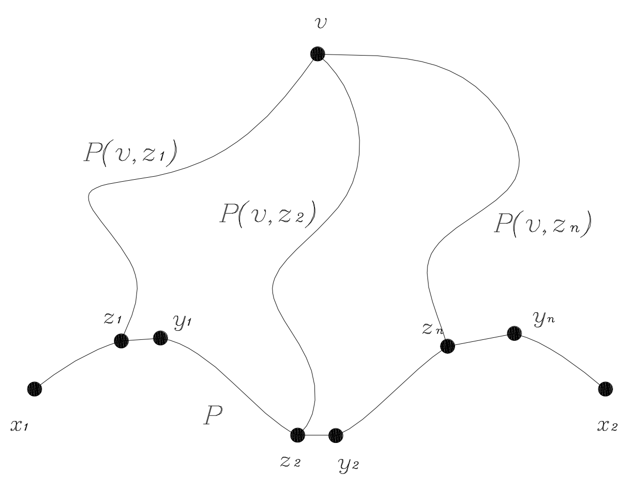

FIGURA 4

Demostremos que el conjunto $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ es independiente en P. Supongamos que $z_i z_j$ es una arista de P, entonces

$$P' = (P - z_i z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$$

también es una trayectoria de G y tiene más vértices que P, pues además de todos los que esta trayectoria utilizaba, $v \in V(P')$. Como consecuencia de esto, Z es independiente en P. Llamemos

x_1 y x_2 a los dos vértices terminales de la trayectoria P, x_1 y x_2 no son elementos de Z, pues si lo fueran, $P \cup P(v, z_i)$ sería una trayectoria más larga. Por esta misma razón, v no es adyacente ni a x_1 ni a x_2.

Sea $\overrightarrow{P}$ la trayectoria dirigida de x_1 a x_2 generada por P. Sin pérdida de generalidad supongamos que el último z antes de x_2 es z_n. Tomemos $y_1, \ldots, y_n$, los únicos vértices tales que $z_i y_i$ es un arco de $\overrightarrow{P}$, y sea $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$; como Z es independiente en P, entonces $Y \cap Z = \varnothing$, pues ningún z puede estar en la exvecindad de otro.

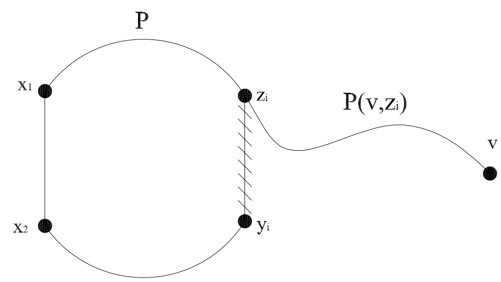

FIGURA 5

El conjunto $W = \{x_1, x_2, v\} \cup (Y \setminus \{y_n\})$ es un conjunto independiente en G. Primero supongamos que $x_1 x_2$ es una arista de G (ver figura 5), entonces $(P + x_1 x_2 - z_1 y_1) \cup P(v, z_1)$ es una trayectoria más larga que P, por lo tanto x_1 y x_2 no son adyacentes en G. Además, ya habíamos visto que v no es adyacente a x_1 ó a x_2, por lo tanto, $\{x_1, x_2, v\}$ es un conjunto independiente en G.

v no puede ser adyacente a ningún $y_i \in Y$, pues en tal caso $(P + v y_i - z_i y_i) \cup P(v, z_i)$ sería una trayectoria más larga, lo que es una contradicción por la elección de P.

Finalmente, si x_1 fuera adyacente a algún $y_i \in Y$, entonces $(P + x_1 y_i - z_i y_i) \cup P(v, z_i)$ sería más larga que P; y si x_2 fuera adyacente a algún $y_i \in Y$ con $1 \leq i \leq n-1$, entonces

$$(P + x_2 y_i - z_i y_i - z_{i+1} y_{i+1}) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_{i+1})$$

sería una trayectoria de orden mayor que el máximo (ver figura 6). Por lo tanto W es un conjunto independiente en G.

Como $|W| = 3 + (n-1) = n+2$, y W es un conjunto independiente, entonces tenemos una contradicción con la hipótesis de que $\alpha(G) \leq n+1$. Debido a esto, nuestra suposición de que P no es

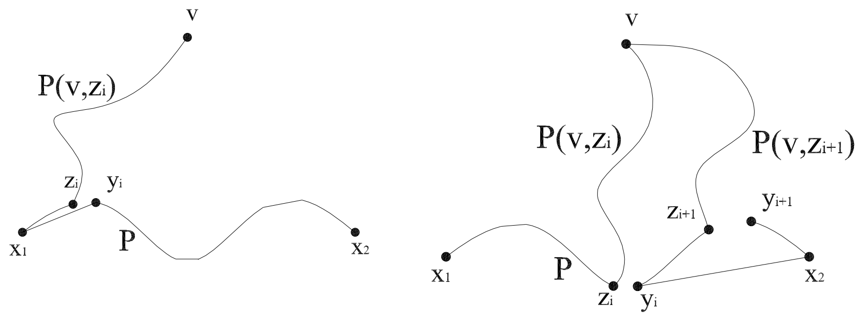

FIGURA 6

una trayectoria hamiltoniana es falsa; y por lo tanto la afirmación 1 es cierta.

2. Sea C el ciclo más grande que hay en G. Supongamos que C no es hamiltoniano. Tomemos un vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$, y sea $m = \text{mín}\{|C|, n\}$. Tomemos m trayectorias internamente disjuntas ($P(v, z_i)$) que van de v a m vértices distintos de C, que cumplan $V(C) \cap P(v, z_i) = \{z_i\}$. El conjunto $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ es independiente en C, pues si dos vértices de Z, z_i y z_j, fueran adyacentes en C, entonces $(C - z_i, z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$ es un ciclo de G más grande que C, esto es una contradicción, y por lo tanto Z es independiente en C. Esto trae como consecuencia que si el ciclo no es hamiltoniano, entonces tendrá al menos $2n$ vértices.

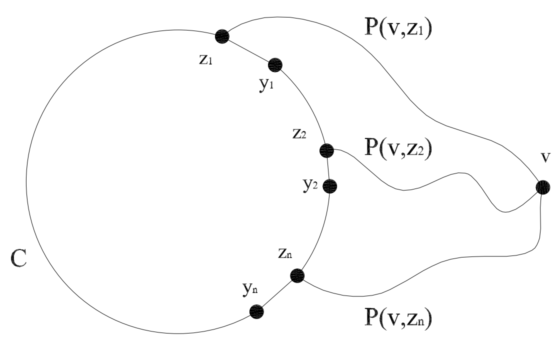

FIGURA 7

Dirijamos al ciclo C en cualquiera de las dos direcciones, y llamémoslo $\overrightarrow{C}$. Para cada z_i en Z tomemos un y_i tal que $z_i y_i$ sea un arco de $\overrightarrow{C}$, y sea $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

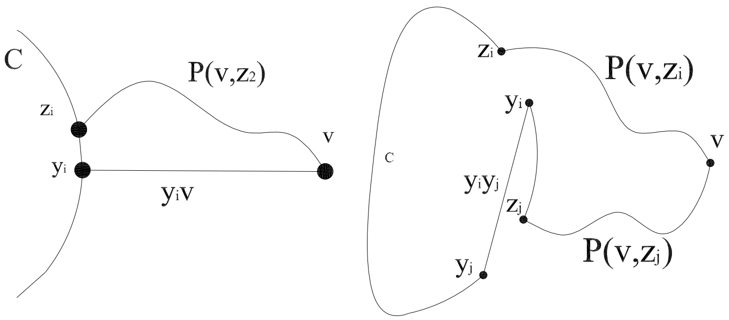

FIGURA 8

Afirmamos que $Y \cup \{v\}$ es independiente en G. Si vy_i fuera una arista de G para algún $1 \leq i \leq n$, entonces

$$(C - z_i y_i + y_i v) \cup P(v, z_i)$$

es un ciclo con más vértices que C, por lo que v no es adyacente a ningún vértice de Y (ver Figura 8, izquierda). Supongamos que existen $y_i, y_j \in Y$ tales que $y_i y_j \in E(G)$. Entonces

$$(C + y_i y_j - y_i z_i - y_j z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$$

es un ciclo con más vértices que los que C tenía (ver Figura 8, derecha). Como consecuencia de lo anterior, $Y \cup \{v\}$ es un conjunto independiente con $|Y| + 1 = |Z| + 1 = n + 1$ elementos, lo que es una contradicción, pues $\alpha(G) \leq n$, y por lo tanto C es hamiltoniano.

3. Sean v_1 y v_2 dos vértices cualesquiera de G. Tomemos P la trayectoria de G más larga en la que los grados de v_1 y v_2 son iguales a 1. Si esta trayectoria no es hamiltoniana, escojamos un vértice v en $V(G) \setminus V(P)$.

   P tiene al menos n vértices, pues si fuera más corta, podríamos tomar un vértice fuera de P, y trayectorias internamente disjuntas que fueran de v a cada uno de los vértices de P. Si tomamos una arista $z_i z_j$ de P, entonces $(P - z_i z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$ sería una trayectoria más larga; esto es una contradicción, y por lo tanto, P tiene al menos n vértices.

   Tomemos n trayectorias internamente disjuntas que vayan de v a un conjunto $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ tal que $P(v, z_i) \cap P = \{z_i\}$ donde $P(v, z_i)$ es la trayectoria que va de v a z_i. El conjunto Z es independiente en P, pues si z_i, z_j fueran adyacentes, la trayectoria de v_1 a v_2, $(P - z_i z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$, tendría más vértices que P

Dirijamos la trayectoria P de x_1 a x_2, y, por cada z_i, tomemos a y_i como el único vértice tal que el arco $\overrightarrow{z_i v_i}$ está en la trayectoria dirigida. Afirmamos que el conjunto $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ es un conjunto independiente en G. Si y_i y y_j fueran adyacentes en G, la trayectoria

$$(P + y_i y_j - z_i y_i - z_j y_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$$

iría de v_1 a v_2 y sería más larga que P, por lo tanto, la afirmación es cierta.

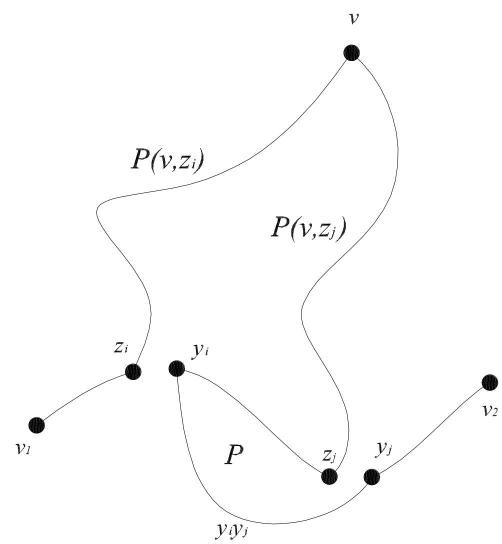

FIGURA 9

Como Y tiene n elementos y es independiente, entonces tenemos una contradicción con la hipótesis de que el número de independencia es menor o igual que $n - 1$; por lo tanto, existe una trayectoria hamiltoniana de v_1 a v_2, para cualquier par de vértices en G.

□

El inciso 1 del teorema anterior nos da condiciones para encontrar una trayectoria hamiltoniana; pero además, como consecuencia de los incisos 2 y 3, podemos encontrar trayectorias hamiltonianas donde uno o dos vértices dados, respectivamente, sean terminales en esta trayectoria.

Corolario 1.9. *Sean G una gráfica n-conexa y $U \subseteq V(G)$ tal que $|U| \leq 2$. Si $\alpha(G) \leq n - |U| + 1$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana P, en la que $d_P(u) = 1$ para todo u en el conjunto U.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|U| = 0$, este resultado es el inciso 1 del teorema anterior. En el caso $|U| = 1$, $\alpha(G) \leq n$, entonces tiene un ciclo hamiltoniano. En este ciclo, el único vértice u que está en U, tiene grado 2, por lo que si quitamos una de las dos aristas que son incidentes a este vértice en el ciclo, tendremos una trayectoria hamiltoniana en la que u es terminal. Finalmente, si $U = \{u_1, u_2\}$, $\alpha(G) \leq n - 1$, y entonces, la gráfica G es hamiltonianamente conexa, y por lo tanto existe una trayectoria hamiltoniana que va de u_1 a u_2, que es lo que queríamos. $\square$

El Teorema de Neumann-Lara y Rivera-Campo es una generalización de esto. Nos da una condición similar para encontrar árboles generadores con grado máximo acotado, pero donde k no es necesariamente 2. Dejaremos este resultado sin demostrar, pues más adelante daremos la prueba de una generalización.

Teorema 1.10. *(Teorema de Neumann-Lara y Rivera-Campo* [**5**]*) Sea G una gráfica n-conexa y $k \geq 2$ un entero. Si $\alpha \leq n(k-1)+1$. entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más k.*

Observemos que si $k = 2$, la hipótesis del teorema anterior queda $\alpha(G) \leq n + 1$ que es precisamente lo que pedía el Teorema de Chvátal y Erdös.

También en esa época, Win encontró una generalización del inciso 1 del Teorema de Ore.

Teorema 1.11. *(Teorema de Win* [**9**]*) Sea $k \geq 2$ un entero. Si $\sigma_k(G) \geq |V(G)| - 1$, entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más k.*

Recientemente, Haruide Matsuda y Hajime Matsumura generalizaron aún más los teoremas de Chvátal y Erdös y de Neumann-Lara y Rivera-Campo; dando una condición para encontrar un árbol generador con grado máximo menor o igual a k y con cierto conjunto de vértices entre sus hojas.

Teorema 1.12. [**4**] *Sean $k, s, n \in \mathbb{Z}$ tales que $k \geq 2$, $0 \leq s \leq k$ y $n \geq s+1$. Supongamos que G es una gráfica n-conexa que satisface*

$$\alpha(G) \leq (n-s)(k-1)+1.$$

Entonces para cada conjunto de s vértices de G existe un árbol generador con grado máximo menor o igual a k en el que ese conjunto de vértices son terminales.

En este trabajo también se encontró la siguiente generalización de los Teoremas de Ore y Win.

Teorema 1.13. [**4**] *Sea* $k, s, \in \mathbb{Z}$ *tales que* $k \geq 2$ *y* $0 \leq s \leq k$. *Supongamos que* G *es una gráfica* $(s+1)$*-conexa que satisface*

$$\sigma_k(G) \geq |V(G)| + (k-1)s - 1.$$

Entonces, para cualquier conjunto de s *vértices de* G, *existe un árbol generador de* G *con grado máximo a lo más* k *tal que el conjunto de* s *vértices son terminales.*

En el siguiente capítulo, demostraremos un resultado más general del primero de los teoremas de Matsuda y Matsumura, el cual utilizaremos en el tercer capítulo para encontrar una solución al problema principal que se plantea en esta tesis.

Capítulo 2

Condiciones para árboles generadores con grados acotados

En este capítulo estudiaremos un resultado que nos da condiciones para encontrar árboles generadores con grado máximo acotado, en el cual algunos vértices tengan grado acotado por algunos enteros.

Comenzaremos estudiando algunas condiciones para que exista un subárbol en el que algunos vértices tienen grado fijo, esto lo utilizaremos más adelante para resolver lo planteado en el párrafo anterior.

2.1. Árboles generadores con grados acotados de forma irregular

Ahora estudiaremos un problema similar al que vimos en la última sección del capítulo anterior, pero además acotaremos de forma distinta los grados de algunos vértices. Para esto necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 2.1. *Sean G una gráfica y $k \geq 2$ un entero. $T = (V^*, E^*)$ es un k-subárbol de G si:*

1. *T es un árbol,*
2. *$V^* \subseteq V(G)$,*
3. *$E^* \subseteq E(G)$,*
4. *El grado máximo de T es a lo más k.*

Si $V(T) = V(G)$, diremos que T es un k-árbol generador.

Definición 2.2. *Sean G una gráfica, $k \geq 2$ y $s \geq 0$ enteros; si $s \geq 1$, sea $U = \{u_1, \ldots, u_s\} \subseteq V(G)$ y una sucesión de enteros $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$ con $1 \leq d_i \leq k$ para $i = 1, \ldots, s$. Si $s = 0$, un D_k-subárbol de G es un k-subárbol de G; y si $s \geq 1$, $T = (V^*, E^*)$ es un D_k-subárbol de G si:*

1. *T es un k-subárbol,*
2. *$U \subseteq V^*$,*
3. *$1 \leq d_T(u_i) \leq d_i$ para todo $u_i \in U$.*

Si $V(T) = V(G)$ diremos que T es un D_k-árbol generador.

Cada vez que digamos que una gráfica es un D_k-subárbol de G, debe entenderse que esa gráfica tiene asociado un entero s, un conjunto de s vértices U y una sucesión de s enteros, aunque éstos no se mencionen.

Observemos que el Teorema de Neumann-Lara y Rivera-Campo nos dice cuando podemos encontrar un k-árbol generador; nuestro propósito en esta sección será hallar una condición para que exista un D_k-árbol generador de una gráfica G.

Por otro lado, el Corolario 1.9 del Teorema de Chvátal y Erdös, lo podríamos escribir de la siguiente forma, utilizando esta terminología.

Corolario 2.3. *Sean G una gráfica n-conexa, $0 \leq s \leq 2$ un entero, y si $s \geq 1$, $U \subseteq V(G)$ tal que $|U| = s$ y D es la sucesión con s 1's. Si $\alpha(G) \leq n - s + 1$, entonces G tiene un D_2-árbol generador.*

Primero encontraremos algunas formas de construir un D_k-subárbol, utilizando como hipótesis una cota de la conexidad de G. Después demostraremos un resultado con el que, si tenemos un D_k-subárbol de una gráfica G y se cumplen el resto de las hipótesis, entonces podremos encontrar un D_k-árbol generador.

Para el segundo resultado, demostraremos primero varios lemas, para unirlos en la demostración de este resultado. Finalmente, con todo lo anterior, daremos una condición suficiente para que exista un D_k-árbol generador.

2.1.1. La existencia de D_k-subárboles y la conexidad

Ahora encontraremos algunas condiciones para poder afirmar que en una gráfica existen D_k-subárboles. Para demostrar todos estos resultados utilizaremos una cota inferior de la conexidad, y en todos los casos se utilizará el mismo método, que consiste en construir el D_k-subárbol por medio de trayectorias.

Empezaremos con algunas condiciones para encontrar trayectorias que contengan cierta cantidad de vértices.

Lema 2.4. *Sean $s \geq 2$ un entero y G una gráfica $(s-1)$-conexa. Si $U = \{u_1, u \dots, u_s\}$ es un conjunto de s vértices de G y u, v son vértices de U, entonces existe una trayectoria P en G que contiene a todo U entre sus vértices, y en la que u y v son los dos vértices terminales de P.*

DEMOSTRACIÓN. Lo haremos por inducción sobre s. Sea $s = 2$. Como la gráfica es conexa, existe una trayectoria entre u y v, en la que estos dos vértices son terminales.

Supongamos cierto que en una gráfica $(t-2)$-conexa tenemos una trayectoria P_{t-2} donde $t-1$ vértices dados se encuentran en ella, y dos fijos son sus hojas.

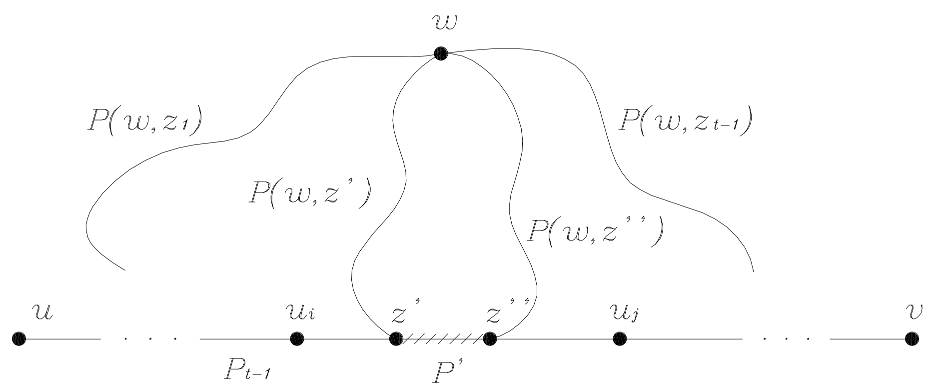

FIGURA 1

Si G es $(t-1)$-conexa y tenemos un conjunto con t vértices, entonces tomemos $w \in U \setminus \{u, v\}$. $G' = G \setminus \{w\}$ es $(t-2)$-conexa y $U' = U \setminus \{w\} \subseteq V(G')$. Por la hipótesis de inducción, en G' existe una trayectoria P_{t-1}, donde $U' \subseteq V(P_{t-1})$ y con vértices terminales u y v. P_{t-1} también está contenida en G, y no contiene al vértice w. Como G es $(t-1)$-conexa y P_{t-1} tiene al menos $t-1 = |U'|$ vértices, entonces existen $t-1$ trayectorias internamente disjuntas, a las que denotaremos con $P(w, z_i)$, entre w y $t-1$ vértices distintos de P_{t-1} tales que $V(P_{t-1}) \cap V(P(w, z_i)) = \{z_i\}$. Llamemos $Z = \{z_1, \ldots, z_{t-1}\}$. Como $|V(P_{t-1}) \cap V(U')| = t-1$, entonces la trayectoria P_{t-1} queda dividida en $t-2$ trayectorias $P(u_i, u_j)$ tales que, $V(P(u_i, u_j)) \cap U = \{u_i, u_j\}$ (recordemos que los extremos de P_{t-1} están en U); esto es, los únicos vértices de U en cada trayectoria son, a lo más, los extremos. Como $Z \subseteq V(P)$, entonces, por el principio del palomar de Dirichlet, existen z' y z'' tales que estos dos vértices están en la misma trayectoria $P(u_i, u_j)$. Sea $P(z', z'')$ la única trayectoria que va de z' a z'' en P, y llamemos $P' = P(z', z'') \setminus \{z', z''\}$. La trayectoria $P_t = (P \setminus V(P')) \cup P(w, z') \cup P(w, z'')$ es la trayectoria que buscábamos, pues contiene a todos los vértices de U, y sus terminales son u_1 y u_2.

□

También tenemos los siguientes corolarios del lema anterior.

Corolario 2.5. *Sean G una gráfica s-conexa, con $s \geq 2$, y U un subconjunto con s vértices de G; y sea u un vértice en U. Existe una trayectoria*

P en G que contiene a todo U entre sus vértices, y en la que $d_P(u) = 1$ y $d_P(w) = 2$ para todo $w \in U \setminus \{u\}$.

DEMOSTRACIÓN. Como G es s-conexa, existe al menos un vértice v en G que no es un elemento de U. Tomemos $U' = U \cup \{v\}$, por el Lema 2.4 podemos encontrar una trayectoria en la que estén todos los elementos de U' y tal que u_i y v sean los vértices terminales. Esta trayectoria nos sirve, pues el grado de v_i es 1 y el de los demás elementos de U es 2.

□

Corolario 2.6. *Sean G es una gráfica $(s+1)$-conexa, con $s \geq 2$, y U un subconjunto de $V(G)$ con s elementos. Existe una trayectoria P en G que contiene a todo U entre sus vértices de grado 2.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que G es $(s+1)$-conexa, entonces tiene al menos $s+2$ vértices. Tomemos dos vértices de G, v_1 y v_2, que no estén en U, y sea $U' = U \cup \{v_1, v_2\}$. Por el Lema 2.4 existe una trayectoria en la que v_1 y v_2 son sus hojas y que contiene a todos los elementos de U', que es la que necesitábamos.

□

Ahora encontraremos una condición similar a la del lema y los corolarios anteriores pero para encontrar una gráfica con una mayor cantidad de vértices de grado 1 fijos, aunque con grado máximo mayor que 2.

Lema 2.7. *Si G es una gráfica n-conexa, $2 \leq k$ y $2 \leq s \leq n$ enteros, y $m = \text{mín}\{k, s\}$; tomemos $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ un subconjunto de $V(G)$. Entonces existe un k-subárbol T en el que $d_T(u_i) = 1$ si $1 \leq i \leq m$ y $d_T(u_i) = 2$ si $m+1 \leq i \leq s$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un vértice $v \notin U$, el cual existe pues la gráfica es n-conexa y el número de vértices de U es menor o igual que n. Ya que G es m-conexa (debido a que $m \leq s \leq n$) entonces hay m trayectorias internamente disjuntas de v a cada uno de los vértices de U con subíndice menor o igual a m, llamémoslas $P(v, u_i)$. $T = \bigcup_{i=1}^{m} P(v, u_i)$ es un k-subárbol en el que los elementos de U con subíndice entre 1 y m tienen grado 1, v tiene grado m y todos los demás vértices tienen grado 2 (véase figura 2).

Supongamos que hay algún $w = u_k$ con $m < k \leq s$ tal que $w \notin V(T)$. Sean

$$W = (U \cup \{v\}) \cap V(T)$$

y $\mathcal{P}$ el conjunto de trayectorias de la forma $P_T(w_i, w_j)$ con $w_i, w_j \in W$, y tales que $V(P_T(w_i, w_j)) \cap W = \{w_i, w_j\}$. Debido a que todas las hojas

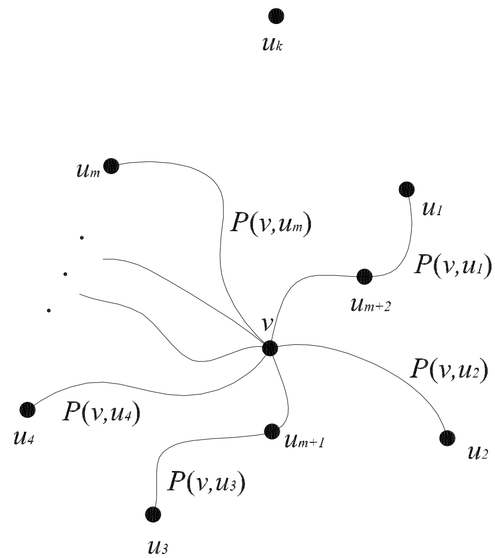

FIGURA 2

de T están en W, entonces $T = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Ahora contaremos el número de trayectorias que hay en $\mathcal{P}$. Tomemos T' al árbol T modificándolo de tal forma que si algún par de vértices de W son adyacentes, digamos w_i y w_j, coloquemos un vértice x_{ij} entre ellos, así quedaría la trayectoria $w_i x_{ij} w_j$ (véase figura 3). En T', W es un conjunto independiente, y el número de trayectorias en P será igual al número de componentes conexas en $T' \setminus W$.

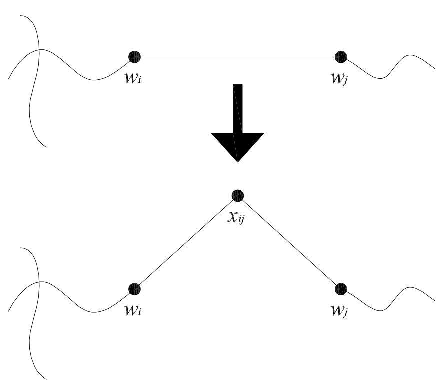

FIGURA 3

Llamemos $U^* = \{u_{m+1}, \ldots, u_s\}$. Ya que W es un conjunto independiente en T', sabemos que hay

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{w \in W} d_{T'}(w) - |W| + 1 \\
&= d_T(v) + \sum_{i=1}^{m} d_T(u_i) + \sum_{u \in U^* \cap W} d_T(u) - |W| + 1 \\
&= m + m + 2|U^* \cap W| - |W| + 1 \\
&= m + (m + |U^* \cap W| + 1) + |U^* \cap W| - |W| \\
&= m + |W| + |U^* \cap W| - |W| \\
&= m + |U^* \cap W| < m + |U^*| = |U| = s
\end{aligned}$$

componentes conexas en $T' \setminus W$. Entonces $|\mathcal{P}| < s \leq n$

Primero supongamos que T tiene al menos n vértices. Como la gráfica es n-conexa, hay n trayectorias internamente disjuntas, $P(w, z_j)$, que van de w, el vértice de U que no está en el subárbol, a n vértices distintos de T, y tales que $V(T) \cap V(P(w, z_j)) = \{z_j\}$. Como $|\mathcal{P}| < n$, entonces al menos dos de estas trayectorias son tales que, para algún $P \in \mathcal{P}$, $\{z_j, z_k\} \cap P = \{z_j, z_k\}$, por el principio del palomar.

Si z_j y z_k son adyacentes, $(T - z_j z_k) \cup P(w, z_j) \cup P(w, z_j)$, en este árbol, los elementos de U que había en T mantienen su grado, y al menos se le agregó w a los vértices de grado 2. Si z_j y z_k no son adyacentes, sea $P' = P_P(z_j, z_k) \setminus \{z_j, z_k\}$, que sigue siendo una trayectoria pues únicamente quitamos los vértices terminales; entonces $T \setminus V(P') \cup P(w, z_j) \cup P(w, z_k)$ es un k-subárbol, en el que los elementos de U que había en T mantienen su grado, y que tiene más vértices de U entre aquellos que tienen grado 2, que los que tenía T. Si en este nuevo subárbol aún faltaran vértices de U, repetimos el proceso, hasta que todos los vértices de U estén en el k-subárbol y tengan grado 1 ó 2, según se requiera. Por lo tanto, existe la subgráfica que buscábamos. $\square$

También podemos encontrar un D_k-subárbol en el caso en que $d_i$no sea 1 ó 2.

Proposición 2.8. *Sean G una gráfica, $U = \{u_1, \ldots, u_s\} \subseteq V(G)$, $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$ una sucesión de enteros tal que $2 \leq d_i$ y $k \geq \max\{d_i : 1 \leq i \leq s\}$. Si G es $\left(\sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) + 1\right)$-conexa, entonces existe un D_k-subárbol en G.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos al conjunto U, y sea $N = \sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) + 1$. Lo haremos por inducción sobre N. U tiene s vértices, y ya que $d_i \geq 2$, entonces el mínimo N que debemos considerar es $N = s+1$ (cuando todos los d_i son iguales a 2). Por el Corolario 2.6, si $N = s + 1$, entonces existe una trayectoria donde los vértices de U tienen grado igual a 2, Por lo tanto, existe el D_k-subárbol deseado.

Supongamos que el resultado es cierto para $N = n$. Si $N = n + 1$, tomemos un vértice x adyacente a u_s (suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $d_s \geq 3$) y tal que $x \notin U$ (éste existe pues $s < N$ y la gráfica es N-conexa). Además, consideremos $D' = \{d_i, \ldots, d_{s-1}, d_s - 1\}$. La gráfica $G \setminus \{x\}$ es n-conexa, y por la hipótesis de inducción, existe T un D'_k-subárbol, pues

$$\sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) + 1 = \left(\sum_{i=1}^{s}(d'_i - 1) + 1\right) + 1.$$

Ese árbol es una subgráfica de G, y no tiene a x entre sus vértices. Por la forma en que se definió D', u_s tiene grado $d_s - 1$ Por lo tanto $T + xu_s$ es un D_k-subárbol en G. $\square$

Con esto concluimos nuestro estudio de algunos métodos para encontrar D_k-subárboles en una gráfica G. Nosotros utilizaremos principalmente los Lemas 2.4 y 2.7.

2.1.2. D_k-subárboles como hipótesis para hallar D_k-árboles generadores

El propósito de esta sección es demostrar la Proposición 2.9, la que nos permite saber cuando existe un D_k-árbol generador. Entre las hipótesis de ésta, se encuentra la existencia de un D_k-subárbol, por esto los resultados que demostramos anteriormente son importantes, pues uniendo estos dos podremos encontrar una condición para asegurar que en una gráfica hay un D_k-árbol generador, sin pedir explícitamente un D_k-subárbol.

Proposición 2.9. *Sean G una gráfica n-conexa, $U = \{u_1, \ldots, u_s\} \subseteq V(G)$ un subconjunto de los vértices de G, k un entero y $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$ una sucesión de enteros tal que $1 \leq d_i \leq k$ para $i = 1, 2, \ldots, s$ (podemos suponer que $d_i \geq d_{i+1}$). Si existe un D_k-subárbol de G y*

$$\alpha(G) \leq (n - s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1,$$

entonces existe un D_k-árbol generador.

Lema 2.10. *Sean T un árbol, y P_1 y P_2 dos trayectorias distintas en T que empiezan en un mismo vértice z. Entonces, $P_1 \cap P_2$ es una trayectoria que empieza en z.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que hay al menos dos componentes conexas en $P_1 \cap P_2$. Sea C_o una componente de $P_1 \cap P_2$ tal que $z \notin C_o$, y sea z' un v́ertice en C_o. Consideremos $P_1' \subseteq P_1$ y $P_2' \subseteq P_2$ las partes de P_1 y P_2 que empiezan en z y terminan en z'. Si $P_1' = P_2'$ entonces z y z' están en la misma componente conexa de $P_1 \cap P_2$, por lo que $P_1' \neq P_2'$. Entonces existen dos trayectorias distintas que van desde z hasta z' en T, lo que es una contradicción, pues T es un árbol. Por lo tanto $P_1 \cap P_2$ es conexa (ver Figura 4).

Además, la intersección de dos trayectorias no puede tener grado máximo mayor que dos, pues éste es el grado máximo en cada una de ellas. Entonces $P_1 \cap P_2$ es una gráfica conexa con grado máximo dos, y por lo tanto, es una trayectoria.

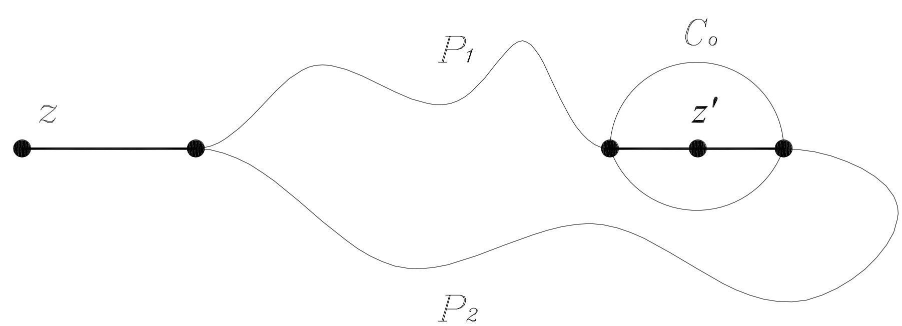

FIGURA 4

□

La prueba de la Proposición 2.9 empieza suponiendo que tomamos el D_k-subárbol de orden máximo, el siguiente lema nos permite asegurar que éste tiene al menos n vértices. Esto será importante, pues tomaremos n trayectorias que queremos que lleguen al menos a n vértices del D_k-subárbol que tomamos.

Lema 2.11. *Si T' es un k-subárbol de una gráfica n-conexa G con al menos dos vértices, entonces existe T un k-subárbol de G con al menos n vértices tal que $d_{T'}(v) = d_T(v)$, para todo $v \in V(T')$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|V(T')| \geq n$, entonces $T = T'$.

Supongamos que $|V(T')| = n' < n$, construiremos a partir de T' el árbol que deseamos. Existe un vértice $v \notin V(T')$, pues la gráfica debe tener al menos $n+1$ vértices ya que de cada uno salen al menos n aristas. Como

G es n-conexa, también es n'-conexa, por lo que existen n' trayectorias, $P(v, w)$, internamente disjuntas que van desde v hasta cada $w \in V(T')$.

Sea $w_1 w_2$ una arista de T'. Como T' es un árbol, $w_1 w_2$ es una arista de corte. Entonces, $T = (T' - w_1 w_2) \cup P(v, w_1) \cup P(v, w_2)$ es un árbol de orden mayor tal que $d_{T'}(w) = d_T(w)$ para todo $w \in T'$. Si el orden de T sigue siendo menor que n, entonces repetimos el proceso hasta conseguirlo.

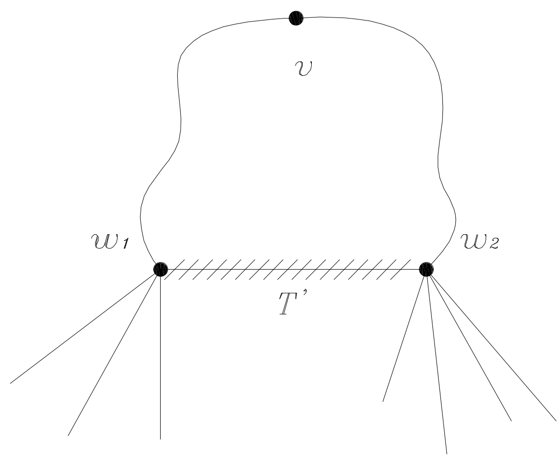

FIGURA 5

□

Ahora definiremos un conjunto Z a partir de n trayectorias. Éste nos permitirá, más adelante, encontrar un conjunto independiente con cardinalidad mayor que $\alpha(G)$. Esta contradicción será la base de la demostración de la proposición que estamos probando con estos lemas. La segunda parte del lema juega un papel importante, pues será lo que nos ayudará a contar los elementos del conjunto independiente que definiremos a partir de Z.

Lema 2.12. *Para algunos $U = \{u_1, \ldots, u_s\} \subseteq V(G)$ y $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$, sea T un D_k-subárbol de orden máximo de G una gráfica n-conexa. Sabemos que si T no es generador, existe $v \in V(G) \setminus V(T)$ y n trayectorias internamente disjuntas, $P(v, z_i)$, que van de v a n vértices de T; tales que $P_T(v, z_i) \cap T' = \{z_i\}$. Llamemos $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ (acomodado de tal forma que $d_T(z_i) \geq d_T(z_{i+1})$). Entonces, Z es un conjunto independiente en T; además, $d_T(z) = d_i$ si $z \in Z \cap U$ y $d_T(z) = k$ si $z \in Z \setminus U$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Z no es un conjunto independiente, esto es, existe una arista $z_i z_j$ en G para algunos $1 \leq i < j \leq n$.

$$T' = (T - z_i z_j) \cup P(v, z_i) \cup P(v, z_j)$$

es un D_k-subárbol de orden mayor, pues $V(T) \subseteq V(T')$ y $d_T(v) = d_{T'}(v)$ para todo $v \in V(T)$. Esto es una contradicción, pues T era de orden máximo.

Si $z \in Z \cap U$, digamos $z = u_i$, entonces $d_T(z) = d_i$, pues, si no, $T \cup P(v, z)$ sería un D_k-subárbol de orden mayor. Análogamente, si $z \in Z \setminus U$, entonces $d_T(z) = k$. $\square$

Sean G una gráfica n-conexa, T un D_k-subárbol de G de orden máximo, si T no es de grado máximo, sea Z como en el lema anterior. Ya que Z es independiente, $T' \setminus Z$ tiene exactamente

$$N = \sum_{z \in Z} d_{T'}(z) - |Z| + 1 = \sum_{z \in Z} d_{T'}(z) - n + 1$$

componentes distintas. Llamemos a cada una de estas componentes T_i con $i = 1, \ldots, N$ y $\mathcal{T} = \{T_i : i = 1, \ldots, N\}$.

Tomemos $\overrightarrow{T}$ el árbol dirigido con raíz z_1 generado por T. Para cada T_i con $i = 1, \ldots, N$ tomemos un arco $x_i z_i^+$ si es que éste existe en $A(\overrightarrow{T})$, con $x_i \in T_i$ y $z_i^+ \in Z$. En otro caso, tomemos como x_i un vértice terminal de $\overrightarrow{T}$ que esté en la componente T_i. Además, en cada T_i tomemos el único arco $z_i^- y_i$ tal que $z_i^- \in Z$ y $y_i \in T_i$. Sean

$$X = \{x_i : 1 \leq i \leq N\},$$
$$Y = \{y_i : 1 \leq i \leq N\};$$

y tomemos a los siguientes subconjuntos de U:

$$U_k = \{u_i \in U : d_i = k\},$$
$$U_{\neq k} = \{u_i \in U : d_i \neq k\}.$$

Lema 2.13. *Si G es una gráfica n-conexa, T un D_k-subárbol de G y X, Y, Z y $\mathcal{T}$ como se definieron anteriormente. Existen al menos*

$$(n - s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1$$

componentes en $\mathcal{T}$ tales que $U_{\neq k} \cap \{x_i, y_i\} = \varnothing$, con $x_i, y_i \in T_i$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos

$$A = (X \cup Y) \cap U_{\neq k}, \text{ y}$$
$$B = Z \setminus U_{\neq k}.$$

Tenemos que $Z \subseteq B \cup (U_{\neq k} \setminus A)$, pues $Z \cap (X \cup Y) = \varnothing$ por la independencia de Z, $A \subseteq U_{\neq k}$ y $A \cap B = \varnothing$ y $U_{\neq k} \cap B = \varnothing$; entonces,

$$|B| + |U_{\neq k} \setminus A| \geq |Z|$$

$$|B| + |U_{\neq k}| = |B| + |U_{\neq k} \setminus A| + |A| \geq |Z| + |A|.$$

Despejando obtenemos $|B| \geq |Z| - |U_{\neq k}| + |A| = n - (s - |U_k|) + |A|$, y tomemos

$$\beta = |B| - n + s - |U_k| - |A| \geq 0.$$

Por la forma en que ordenamos a Z y por el Lema 2.12, tenemos que

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{z\in Z} d_{T'}(z) - n + 1 = |B|k + \sum_{i=|B|+1}^{n} d_T(z_i) - n + 1 \\
&= (\beta + n - s + |U_{\neq k}| + |A|)k + \sum_{i=|B|+1}^{n} d_T(z_i) - n + 1 \\
&= (n-s)k + (\beta + |U_k| + |A|)k + \sum_{i=|B|+1}^{n} d_T(z_i) - n + 1 \\
&= (n-s)k - n + 1 + \\
&\quad \left[(\beta + |A|) + \left((\beta + |A|)(k-1) + |U_k|k + \sum_{i=|B|+1}^{n} d_T(z_i)\right)\right] \\
&\geq (n-s)k - n + 1 + \left[\beta + |A| + \left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right)\right].
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se cumple pues $d_i \leq k-1$ si $u_i \in U_{\neq k}$ y $\beta + |A| + |U_k| + (n - |B|) = s$, que es el número de sumandos que hay en cada uno de los paréntesis redondos. Más aún, de la desigualdad anterior tenemos que

$$N \geq (n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1 + |A|,$$

pues $\beta \geq 0$. Sabemos que hay a lo más $|A|$ componentes donde $\{x_i, y_i\} \cap U_{\neq k} \neq \varnothing$ y por lo tanto, existen al menos $(n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1$ componentes tales que ni x_i ni y_i están en $U_{\neq k}$. □

Lema 2.14. *Sean T un árbol, $Z \subseteq V(T)$ un conjunto independiente, v_1, $v_2 \in V(T) \setminus Z$ tales que v_1 y v_2 no están en la misma componente conexa de $T \setminus Z$. Llamemos $\overrightarrow{T}$ al árbol dirigido con raíz en z, un elemento de Z y sean z_1, z_2 los elementos de Z tales que, si $P\overrightarrow{T}(z_i, v_i)$ es la trayectoria de z_i a v_i en $\overrightarrow{T}$, se cumple que $P\overrightarrow{T}(z_i, v_i) \cap Z = \{z_i\}$ para $i = 1, 2$. Entonces, $V(P_T(v_1, v_2)) \cap \{z_1, z_2\} \neq \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero supongamos que $z_1 = z_2$. Ya que $V(P_T(v_i, z_i))$ para $i = 1, 2$ está compuesta por vértices de la misma componente conexa de $T \setminus Z$ en la que está v_i y además z_i, y que las componentes de v_1 y v_2 son disjuntas, entonces $V(P_T(v_1, z_1)) \cap V(P_T(v_2, z_2)) = \{z_1\}$. Por lo tanto, $P_{T'}(v_1, v_2) = P_{T'}(v_1, z_1) \cup P_T(v_2, z_2)$, y $z_1 = z_2 \in V(P_T(v_1, v_2))$.

Ahora analicemos el caso $z_1 \neq z_2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_1 \notin V(P_T(z, z_2))$. Sabemos, por definición, que z_i es el último vértice en Z en la trayectoria $P_{T'}(z, v_i)$, con $i = 1, 2$. Supongamos $\{z_1, z_2\} \cap P_T(v_1, v_2) = \varnothing$. Esto implica que en los vértices de esta trayectoria no hay ninguno que esté en el conjunto Z, lo que nos dice que v_1 y v_2 están en la misma componente de $T \setminus Z$, lo que no es cierto, por la forma como se escogieron los v_i's. Por lo tanto, $z_i \in P_{T'}(v_1, v_2)$ para $i = 1$ ó $i = 2$. $\square$

El siguiente lema es el paso más importante en la demostración. En él encontramos un conjunto independiente de vértices en G, con cardinalidad mayor que el número de independencia, que es lo que nos permitirá llegar a una contradicción, y así, afirmar que existe un D_k-árbol generador.

Lema 2.15. *Sean G una gráfica n-conexa, T un D_k-subárbol de orden máximo, y definamos como antes X, Y, Z y $\mathcal{T}$. El conjunto $\{x_i \in X : 1 \leq i \leq N, U \cap \{x_i, y_i\} = \varnothing\} \cup \{v\}$ es independiente en G.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos este lema en tres partes.

a) **($vx_i \notin E(G)$)** Si el grado de $x_i = 1$, entonces $T + vx_i$ es un D_k-subárbol con más vértices que T (es importante el hecho de que $x_i \notin U$, pues se le está aumentando el grado). Esto es una contradicción, pues T era de orden máximo.

   Si $d_T(x_i) \geq 1$, entonces $(T - x_i z_i^+ + vx_i) \cup P(v, z_i^+)$ es un D_k-subárbol de orden mayor que T. Observemos que se agrega una trayectoria que va desde x_i hasta z_i^+ en lugar de la arista $x_i z_i^+$.

b) **(Si $d_T(x_i) \leq k-1$ y $d_T(x_j) \leq k-1$, entonces $x_i x_j \notin E(G)$)** Por el Lema 2.14 $\{z_i^-, z_j^-\} \cap V(P_T(x_i, x_j)) \neq \varnothing$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_i^- \in V(P_T(x_i, x_j))$. $z_i^- y_i$ es una arista de $P_T(x_i, x_j)$, pues es una arista de la trayectoria en T que va desde x_i hasta z_i^-. De lo anterior se sigue que $z_i^- y_i$ es una arista del único ciclo que hay en $T + x_i x_j$. Así, $(T + x_i x_j - z_i^- y_i) \cup P(v, z_i^-)$ sigue siendo conexa y los vértices tienen grado menor o igual a k, y por lo tanto es un D_k-subárbol con un mayor número de vértices que T.

c) **(Si $d_T(x_i) = k$ ó $d_T(x_j) = k$, entonces $x_i x_j \notin E(G)$)** Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $d_T(x_i) = k$.

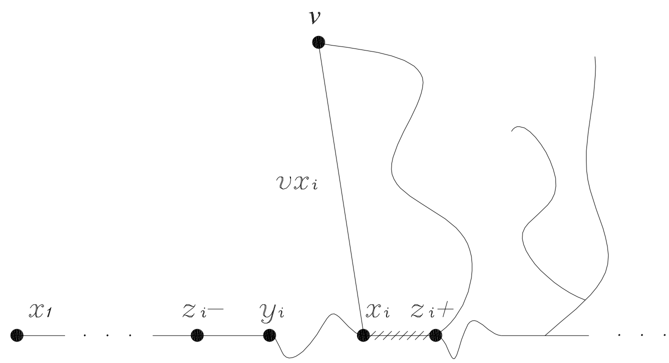

FIGURA 6

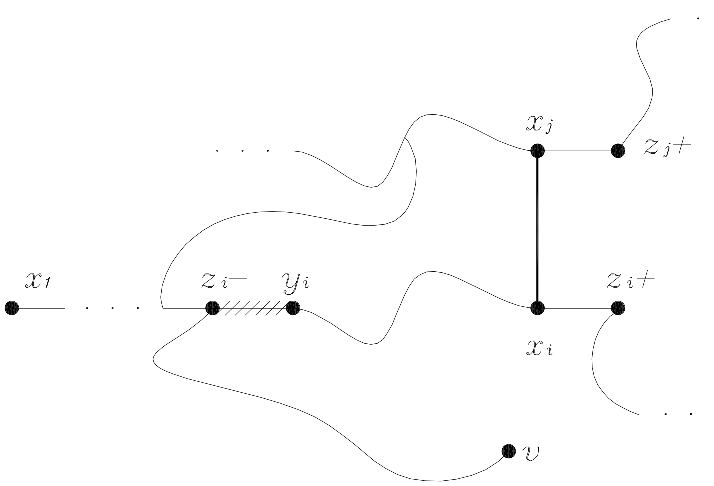

FIGURA 7

Caso 1. **(Si** $d_T(x_j) = 1$**)** Ya que el grado de x_j en el árbol es 1, entonces, la trayectoria $P_T(x_i, x_j)$ contiene a la arista $z_j^- y_j$, pues esta trayectoria debe salir de la componente T_j, y como x_j es una hoja, se sigue que no hay ningún $z \in Z$ en la exvecindad de la componente T_j, entonces esta trayectoria debe pasar por z_j^-.

Por lo anterior,

$$(T + x_i x_j - x_i z_i^+ - z_j^- y_j) \cup P(v, z_i^+) \cup P(v, z_j^-)$$

es un D_k-subárbol de G con más vértices que T.

Caso 2. **(si** $d_T(x_j) \neq 1$**)** En este caso, deben existir tanto z_i^+ como z_j^+, pues ni x_i es una hoja, ni x_j es terminal. Además, por el Lema 2.14 al menos uno de los dos vértices z_i^- ó z_j^- es un

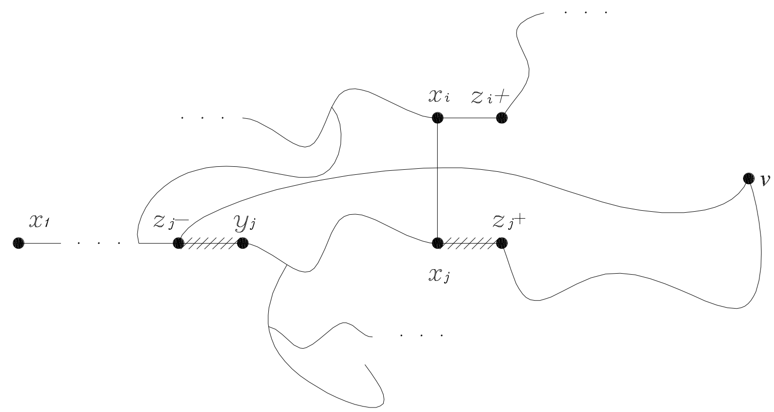

FIGURA 8

vértice de la trayectoria que va de x_i a x_j en T. Supongamos que z_i^- está en la trayectoria que mencionamos, el otro caso es análogo.

$T' = T + x_i x_j - z_i^- y_i$ sigue siendo acíclica pues la arista $z_i^- y_i$ está en el ciclo que se forma al agregar $x_i x_j$; y como tiene la misma cantidad de vértices y aristas que T, entonces es un árbol. Si a T' le quitamos las aristas $x_i z_i^+$ y $x_j z_j^+$, nos queda una gráfica con tres componentes, una donde está $x_i x_j$, y las dos partes de $\overrightarrow{T}$ que quedan después de z_i^+ y z_j^+; las uniremos utilizando tres trayectorias que vayan de v a un elemento de Z en cada componente; esto es, tomemos el árbol

$$T'' = (T + x_i x_j - z_i^- y_i - x_i z_i^+ - x_j z_j^+) \cup P(v, z_i^-) \cup P(v, z_i^+) \cup P(v, z_j^+).$$

Los vértices x_i, x_j, z_i^-, z_i^+ y z_j^+ tienen el mismo grado en T y en T'', mientras que y_i disminuye su grado en 1. Por lo anterior, T'' es un D_k-subárbol de G con $V(T) \subsetneq V(T'')$, que es una contradicción con el hecho de que T era de orden máximo. Por lo tanto, en este caso, x_i y x_j son independientes.

□

Todo lo que se hizo con los D_k-subárboles, se podría haber hecho si en lugar de tomar a 1 como la cota inferior, hubiéramos tomado un entero, esto es, en lugar de buscar que el grado de un vértice estuviera entre 1 y d_i, hubiéramos pedido que éste hubiera estado acotado entre un c_i y un d_i tales que $1 \leq c_i \leq k-1$ y $c_i \leq d_i \leq k$. Las demostraciones serían exactamente iguales.

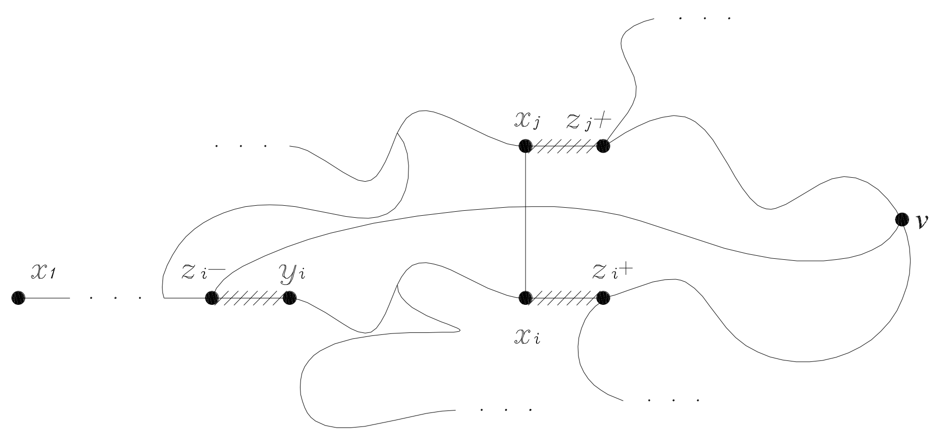

FIGURA 9

Finalmente, con todos los lemas anteriores, obtenemos la demostración que era el propósito de esta sección.

DEMOSTRACIÓN DE 2.9. Tomemos como T un D_k-subárbol de orden máximo (existe pues, por hipótesis, al menos hay uno). Por el Lema 2.11 éste tiene al menos n vértices.

Si $V(T) = V(G)$, entonces T es el árbol que buscamos. Supongamos que $V(T) \subsetneq V(G)$. Tomemos un vértice $v \in V(G) \setminus V(T)$. Como G es n-conexa, existen n trayectorias $P(v, z_i)$ que van desde v a n vértices distintos de T, tales que $V(T) \cap V(P(v, z_i)) = \{z_i\}$. Tomemos el conjunto $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Por el Lema 2.12, Z es un conjunto independiente en T.

Usando los Lemas 2.13 y 2.15, tenemos que en G hay un conjunto independiente con

$$|\{x_i \in X : 1 \leq i \leq N, U_{\neq k} \cap \{x_i, y_i\} = \varnothing\} \cup \{v\}| > (n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1$$

vértices, lo que es una contradicción con la hipótesis del enunciado. Por lo tanto, el árbol T es un D_k-subárbol con $|V(G)|$ vértices. $\square$

2.1.3. Una condición suficiente para la existencia de un D_k-árbol generador

Ahora uniremos los resultados que hemos obtenido para encontrar una condición suficiente para tener un D_k-árbol generador. Este resultado es muy importante en este trabajo, pues usaremos el árbol, que afirma que podemos obtener, para construir otro árbol generador en el que se encuentra un conjunto de aristas dado; que es el objetivo de esta tesis.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Lema 2.7 y la última proposición de la sección anterior.

Corolario 2.16. *Sean G una gráfica n-conexa, $k \geq 2$ un entero, $U = \{u_1, \ldots, u_s\} \subseteq V(G)$ y $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$ una sucesión de enteros tal que $1 \leq d_i \leq k-1$. Si $s \leq n$, en D hay a lo más k d_i's iguales a 1 y*

$$\alpha(G) \leq (n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1,$$

entonces existe un D_k-subárbol que además es un árbol generador de G.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.7, existe un D_k subárbol de G. A éste le aplicamos la Proposición 2.9 y encontramos el árbol generador que queríamos.

$\square$

Capítulo 3

Conjuntos de aristas fijas en árboles generadores

Este capítulo contiene dos resultados que nos permiten encontrar, en una gráfica, un árbol generador que contenga un subbosque dado. La primera sección da una solución muy sencilla a este problema, que depende únicamente de la conexidad de G, y que consiste en agregar un conjunto de aristas adecuado. La segunda solución que encontraremos utiliza el Corolario 2.16 para encontrar un árbol generador con condiciones adecuadas para poder ser modificado de tal forma que las aristas del subbosque queden en el árbol que encontraremos al final.

3.1. Una solución explícita

Comenzaremos esta sección demostrando algunos resultados preliminares, que finalmente uniremos para encontrar la primera solución que mencionamos al principio de este capítulo. El primero consiste en encontrar un conjunto de n aristas, que al agregarlas a un bosque, disminuyan el número de componentes de éste en n.

Lema 3.1. *Sean G una gráfica n-conexa con $n \geq 2$ y B un k-bosque generador de G. Sea $C(B)$ la cantidad de componentes conexas de B. Si $C(B) \geq 2n-1$, entonces existe B' un $(k+1)$-bosque generador de G con $C(B') = C(B) - n$ y tal que $E(B) \subseteq E(B')$.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos inducción sobre n.

Supongamos que G es 2-conexa. Tomemos v_1 y v_2 dos vértices de G tales que, en B, se encuentren en componentes conexas distintas. Como G es conexa, existe una trayectoria de v_1 a v_2 en G, en la que hay al menos una arista, $e_1 = xy$, que tiene un extremo en la componente de v_1 y otro afuera de ésta.

Tomemos $B_1 = B + e_1$. Como B tenía al menos tres componentes conexas, entonces existe alguna de estas tal que e_1 no tiene ninguno de sus vértices en ella; llamémosla C_1.

Sea z una hoja de C_1. Dado que G es 2-conexa, existen dos trayectorias disjuntas internamente, una de z a x, y otra de z a y. En estas trayectorias

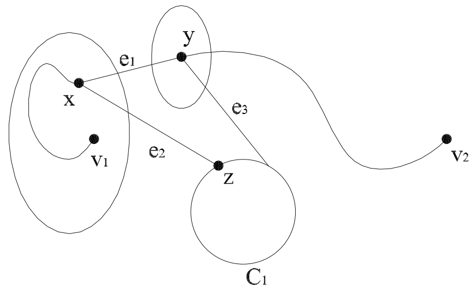

FIGURA 1

existen dos aristas, e_2 y e_3, que pasan de C_1 hacia afuera, las cuales tienen vértices distintos, o bien, son adyacentes en z. Si e_i no es adyacente a la arista e_1, para $i = 2$ ó $i = 3$, $B_1 + e_i$ es el bosque deseado, pues primero hicimos que la componente de x y la de y fueran una misma, y luego unimos a C_1 con otra componente. Si las dos aristas son incidentes a e_1, entonces $B + e_2 + e_3$ cumple las condiciones. Es importante notar, para esto, que x y y se encuentran en componentes distintas. Esto demuestra el caso $n = 2$.

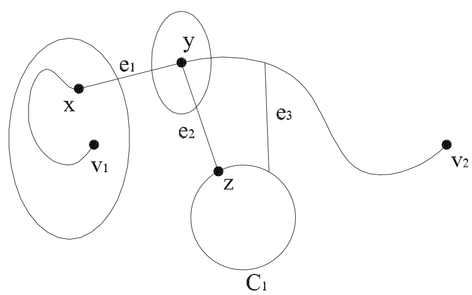

FIGURA 2

Ahora supongamos que si G es $(n-1)$-conexa, esto es, existe un acoplamiento M con $n-1$ aristas tales que $B + M$ tiene $n-1$ componentes, y el grado máximo de $B + M$ es, a lo más, 1 mayor que el grado máximo de B. Hay un máximo de $2n-2$ componentes en las que una arista de M tiene un vértice, debido a que M tiene $n-1$ aristas; entonces, existe una componente C_n en la que ninguna arista de M cae, pues hay al menos $2n-1$. Sea z un vértice terminal de C_n; como G es n-conexa, existen n trayectorias internamente disjuntas desde z hasta un vértice z' fuera de C_n. En estas trayectorias hay al menos n aristas que van desde C_n hacia afuera. Si alguna de estas aristas no es adyacente a ninguna de las aristas de M, al agregarla tenemos el bosque que buscábamos. Si todas las n aristas son adyacentes con las $n-1$ de M, entonces hay al menos dos, e y e', que son adyacentes a la misma arista m de M. En este caso $B + M - m + e + e'$ es un bosque generador con n componentes menos y donde el grado es a lo más 1 mayor que el grado de B.

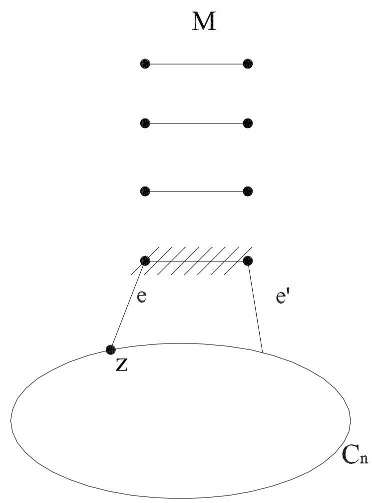

FIGURA 3

Por esto, la proposición es cierta. □

Ahora demostraremos un resultado de Dirac que nos servirá en el caso en que el número de componentes no sea suficiente para utilizar el lema anterior. Para esto, primero demostraremos el siguiente lema, que utilizaremos para encontrar un ciclo en el que están las posibles aristas que necesitamos agregar a un bosque con pocas componentes para que nos quede un árbol generador.

Teorema 3.2. *Si G es n-conexa, con $n \geq 2$; entonces existe un ciclo que pasa por cualquier conjunto de n vértices de G.*

DEMOSTRACIÓN. Lo demostraremos por inducción sobre n. Si $n = 2$, sean x y y dos vértices de G. Como G es 2-conexa, existen dos trayectorias internamente disjuntas entre x y y, la unión de éstas es el ciclo que buscamos.

Supongamos que si G es $(n-1)$-conexa, existe un ciclo que pasa por cualquier conjunto de $n-1$ vértices de G. En el caso de una gráfica n-conexa, sea $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V(G)$ el conjunto de n vértices por los que queremos que pase un ciclo. Al ser G n-conexa, también es $(n-1)$-conexa, entonces existe un ciclo que pase por $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Si u_n está en ese ciclo, ya terminamos; en caso contrario, existen n trayectorias desde u_n hasta el ciclo, las que podemos escoger de tal forma que cada trayectoria toca al ciclo en un único vértice. Por el principio del palomar, hay al menos dos de estas trayectorias que caen entre dos vértices de U que sean consecutivos en el ciclo. Si agregamos estas dos trayectorias y quitamos la que va desde el extremo de una de éstas al extremo de la otra, tendremos un ciclo en el que U está contenido en sus vértices. □

Corolario 3.3. *Si G es n-conexa, y B es un k-bosque generador con $C(B) \leq n$ componentes, entonces existe un $(k+2)$-árbol generador de G.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un vértice en cada componente de B. Tendremos un conjunto de a lo más n vértices, entonces podemos encontrar un ciclo C que pasa por todos estos vértices. $B + E(C)$ es conexa, pues en cada componente hay una trayectoria entre cualquier par de vértices, y hay una trayectoria que pasa por el ciclo entre cada una de las componentes. El grado máximo de esta gráfica no es mayor que $\Delta(B) + 2$, por lo que un árbol generador de ésta tampoco tendrá vértices de grado mayor. Además, este árbol se puede escoger de tal forma que se usen todas las aristas de B, por la Proposición 3.5. □

Ahora uniremos los resultados anteriores.

Proposición 3.4. *Si G es una gráfica n-conexa y B es un subbosque de B con $C(B)$ componentes y grado máximo k, entonces existe T un árbol generador de G tal que $B \subseteq T$ y el grado máximo de T es a lo más:*

1. *$C(B)/n + 1$ si n divide a $C(B)$ y*
2. *$\lfloor C(B)/n \rfloor + 2$ si n no divide a $C(B)$.*

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos el resultado del Lema 3.1 $\lfloor C(B)/n \rfloor - 1$ veces, donde B_i es el bosque que queda después de la i-ésima vez que usamos el procedimiento. Esto se puede pues después de haber aplicado el lema $\lfloor C(B)/n \rfloor - 2$ veces, obtenemos el bosque $B_{\lfloor C(B)/n \rfloor - 2}$, que cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} C(B_{\lfloor C(B)/n \rfloor - 2}) &= C(B) - n\left(\left\lfloor \frac{C(B)}{n} \right\rfloor - 2\right) \\ &= C(B) - n\left\lfloor \frac{C(B)}{n} \right\rfloor + 2n \\ &\geq C(B) - C(B) + 2n = 2n, \end{aligned}$$

pues la función piso tiene la siguiente propiedad:

$$\frac{C(B)}{n} - 1 < \left\lfloor \frac{C(B)}{n} \right\rfloor \leq \frac{C(B)}{n}.$$

donde la igualdad se cumple si n divide a $C(B)$; y de la que se sigue que:

$$-\left\lfloor \frac{C(B)}{n} \right\rfloor \geq -\frac{C(B)}{n}$$

Como $C(B_{\lfloor C(B)/n \rfloor -2}) \geq 2n$, entonces podemos aplicar el lema una vez más.

Análogamente, $C(B_{\lfloor C(B)/n \rfloor -1}) = C(B) - n\lfloor C(B)/n \rfloor + n$, tiene al menos n componentes, y no más de $2n-1$; más aún, tiene n componentes si y sólo si n divide a $C(B)$.

En el caso del inciso 1, aplicamos el Corolario 3.3, y nos queda que el árbol generador que encontramos tiene grado máximo menor o igual que $\lfloor C(B)/n \rfloor + 1$.

Si n no divide a $C(B)$, entonces tenemos que aplicar el Lema 3.1 una vez más, pero ahora usando que la conexidad es

$$\frac{n}{2} < \left\lfloor \frac{C(B) - n\left\lfloor \frac{C(B)}{n} \right\rfloor + n}{2} \right\rfloor \leq n.$$

Después de esto, ahora si podemos usar el Corolario 3.3 y nos queda que el grado máximo del árbol obtenido es menor o igual que $\lfloor C(B)/n \rfloor + 2$. □

3.2. Una solución usando un D_k-árbol generador

Proposición 3.5. *Sean T' un árbol generador de una gráfica G, y $xy \in E(G)$. Existe T, un árbol generador de G, tal que xy es una arista de T y*

$$d_T(u) = d_{T'}(u), \quad \textit{si } u \in V(G) \setminus \{x\} \qquad \textit{y}$$

$$d_T(x) \leq d'_T(x) + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $xy \in E(T')$, entonces $T = T'$. Supongamos ahora que $xy \notin E(T')$. Agreguemos la arista xy al árbol T'. En esta gráfica existe un único ciclo C, y es tal que $xy \in E(C)$. Llamemos $\overrightarrow{C}$ al ciclo C dirigido de tal forma que el arco $\overrightarrow{xy}$ esté en $\overrightarrow{C}$. Existe un único arco $\overrightarrow{yz}$ en $\overrightarrow{C}$ que empieza en y. La gráfica $T = T' + xy - yz$ es un árbol, pues es conexa debido a que yz era parte del único ciclo de $T' + xy$, y $|E(T')| = |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(T')| - 1$. Además, $xy \in E(T)$, $d_{T'}(u) = d_T(u)$, para todo $u \in V(G) \setminus \{x\}$ y $d_T(x) \leq d'_T(x) + 1$. □

Corolario 3.6. *Sean G una gráfica en la que T' es un k-árbol generador de G, B es un subbosque de G, y $B_1 \subseteq V(B)$ un conjunto que tiene exactamente una hoja de cada componente conexa de B. Entonces existe T un árbol generador de G tal que $E(B) \subseteq E(T)$ y donde:*

1. $d_T(u) \leq d_{T'}(u)$ *si u no es incidente con ninguna arista de B,*
2. $d_T(u) \leq d_{T'}(u) + d_B(u) - 1$ *si u es un vértice de $V(B) \setminus B_1$ y*
3. $d_T(u) \leq d_{T'}(u) + 1$ *si $u \in B_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\overrightarrow{B}$ la gráfica dirigida tal que cada componente de $\overrightarrow{B}$ esta generada como un árbol dirigido con raíz en el único vértice de la componente que está en B_1.

Utilizamos el procedimiento de la demostración de la proposición anterior para cada arista de B, y obtenemos un árbol T'. Observemos que a cada vértice que no es raíz, le quitamos una arista por cada arco que entra, y le agregamos una por cada arco de $\overrightarrow{B}$ que entra o que sale. Además, observemos que las aristas que ya se agregaron no se vuelven a quitar, pues no hay ciclos en B. Entonces, si u es una raíz de $\overrightarrow{B}$, $d_{T'}(u) \leq d_T(u) + 1$, pues en este caso no se quitó ninguna arista; Si $u \in V(\overrightarrow{B})$ y no es raíz, entonces $d_{T'}(u) \leq d_B(u) + d_T(u) - 1$; y si $u \in V(G) \setminus V(B)$, entonces $d_{T'}(u) \leq d_T(u)$. Por lo tanto, T' es un árbol generador de G que cumple con las condiciones que buscamos. □

Como consecuencia de algunos de los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema, que es una condición suficiente para que exista un k-árbol generador que contenga a un k-subbosque dado.

Teorema 3.7. *Sean G una gráfica n-conexa; $k \geq 2$ un entero; B un k-subbosque de G, que no contiene vértices aislados, con $|V(B)|$ vértices, t hojas y $C(B)$ componentes conexas, tal que $s = |V(B)| - t + C(B) \leq n$ y B tenga a lo más k vértices de grado k; $B_1 \subseteq V(B)$ un conjunto que tiene exactamente una hoja de cada componente conexa de B. Si*

$$\alpha(G) \leq n(k-1) + |V(B)| - C(B) - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + 1,$$

entonces existe T un árbol generador de G tal que su grado máximo es menor o igual que k y $E(B) \subseteq E(T)$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $U = (V(B) \setminus \{v \in V(B) : d_B(v) = 1\}) \cup B_1$, este conjunto tiene cardinalidad s. Ordenemos este conjunto de tal forma que $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ cumple con $d_B(u_i) \leq d_B(u_{i+1})$. Tomemos los enteros

$$d_i = \begin{cases} k - d_B(u_i) + 1 & \text{si } d_B(u_i) \neq 1 \\ k - 1 & \text{si } d_B(u_i) = 1 \end{cases}$$

y la sucesión finita $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$, claramente $d_i \geq d_{i+1}$. Como a lo más hay k vértices de grado k en B, entonces hay un máximo de k d_i's iguales a 1. Calcularemos la suma de los $d_i's$. La primera suma del primer renglón de las operaciones siguientes corresponde a los d_i's de los vértices de B con grado mayor que 1 y la segunda a los d_i's de los vértices de B_1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} d_i &= \sum_{i=1}^{s-C(B)} (k - d_B(u_i) + 1) + \sum_{i=s-C(B)+1}^{s} (k-1) \\
&= \sum_{i=1}^{s-C(B)} (k - d_B(u_i) + 1) + \sum_{i=s-C(B)+1}^{s} (k+1-2).
\end{aligned}$$

Notemos que en cada sumando hay un $k+1$, por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} d_i &= (k+1)s - \sum_{i=1}^{s-C(B)} d_B(u_i) - 2(s - (s - C(B) + 1) + 1) \\
&= (k+1)s - \sum_{i=1}^{s-C(B)} d_B(u_i) - 2C(B) \\
&= (k+1)s - \sum_{i=1}^{s-C(B)} d_B(u_i) - t + t - 2C(B).
\end{aligned}$$

La suma del último renglón corresponde a los grados de los vértices de B con grado mayor que 2. Ahora le agregaremos los grados de los vértices terminales de B, esto es, le sumaremos t; y con esto obtendremos la suma de los grados de los vértices de B.

$$\sum_{i=1}^{s} d_i = (k+1)s - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + t - 2C(B).$$

Ahora calculemos el número $a = (n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1$,

$$\begin{aligned} a &= (n-s)k + \sum_{i=1}^{s} d_i - n + 1 \\ &= (n-s)k + (k+1)s - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + t - 2C(B) - n + 1 \\ &= nk - n + s + t - 2C(B) - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + 1 \end{aligned}$$

Ya que $s = |V(B)| - t + C(B)$, tenemos que $s + t - C(B) = |V(B)|$, por lo que

$$a = n(k-1) + |V(B)| - C(B) - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + 1.$$

Como $\alpha(G) \leq a$, entonces con el U y D que se definieron anteriormente, se cumplen las condiciones del corolario 2.16, y entonces existe T' un D_k-subárbol de G.

Apliquemos el corolario 3.6 con el árbol T' y el bosque B, obteniendo un nuevo árbol generador T, en el que los vértices que no eran incidentes con ninguna arista de B eran de grado menor que k, y así se quedan; los vértices de B que no estaban en B_1 cumplían con $d_{T'}(v) \leq k - d_B(v) + 1$, y por lo tanto $d_T(v) \leq k - d_B(v) + 1 + d_B(v) - 1 = k$, notemos que si $d_B(v) = 1$, lo que se pide es que $d_{T'}(v) \leq k$; y si $v \in B_1$, tenemos que $d_{T'}(v) \leq k - 1$ y por el Corolario 3.6, $d_T(v) \leq k - 1 + 1 = k$. Por lo tanto, T es un k-árbol en el que $E(B) \subseteq E(T)$. $\square$

Usando el lema anterior, en lugar del Lema 2.7 en la demostración del Teorema 3.7, podemos demostrar la siguiente versión de este teorema, en la que la condición del número de vértices con grado k se limita más, pero se permite que s sea igual a $n + 1$.

Teorema 3.8. *Sean G una gráfica n-conexa; $k \geq 2$ un entero; B un k-subbosque de G, que no contiene vértices aislados, con $|V(B)|$ vértices, t hojas y $C(B)$ componentes conexas, tal que $s = |V(B)| - t + C(B) \leq n+1$ y B tenga a lo más 2 vértices de grado k; $B_1 \subseteq V(B)$ un conjunto que tiene exactamente una hoja de cada componente conexa de B. Si*

$$\alpha(G) \leq n(k-1) + |V(B)| - C(B) - \sum_{v \in V(B)} d_B(v) + 1,$$

entonces existe T un árbol generador de G tal que su grado máximo es menor o igual que k y $E(B) \subseteq E(T)$. $\square$

Bibliografía

[1] Chvátal, Vašek; Erdös, Paul. **A note on Hamilton circuits**. Descrete Math., **2**, 1972, p.p. 111-113.

[2] Diestel, Reinhard. **Graph theory**. Springer-Verlag. **GTM**, 173. Nueva York, 2005. 3ra edición.

[3] Hall, P. **On representatives of subsets**. J. London Math. Soc., **10**, 1935, p.p. 26-30.

[4] Matsuda, Haruhide; Matsumura, Hajime. **On a k-tree containing specified leaves in a graph**. Graphs and Combinatorics. Por publicarse.

[5] Neumann-Lara, Victor; Rivera-Campo, Eduardo. **Spanning trees with bounded degrees**. Combinatorica, **11**, 1991, No. 1, p.p. 55–61.

[6] Ore, Oystein. **Note on Hamilton circuits**. Amer. Math. Monthly, **67**, 1960, p.p. 55.

[7] Ore, Oystein. **Hamilton connected graphs**. J. Math. Pures Appl., **42**, 1963, p.p. 21–27.

[8] Tutte, William T.. **Conectivity in graphs**. Oxford University Press. Londres, 1966.

[9] Win, Sein. **Existenz von Gerüsten mit vorgeschriebenem Maximalgrad in Graphen**, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, **43**, 1975, p.p. 263–267.