

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Propagadores poliméricos vía integral de
trayectoria: de sistemas mecánicos al modelo
cósmico homogéneo e isotrópico.**

Tesis que presenta:
Ing. Fís. Juan Carlos Ruelas Vázquez.
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)



Asesor:
Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Jurado Calificador:

Presidente

Héctor Hugo García Compeán

Secretario

Vocal

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada

Índice general

1. Introducción	7
2. Cuantización polimérica de sistemas mecánicos	9
2.1. Cuantización hamiltoniana de una partícula no relativista en un potencial	9
2.1.1. Dinámica	11
2.1.2. Caso invariante por reparametrizaciones temporales	12
2.2. Integral de trayectoria para una partícula	13
2.2.1. Partícula libre no relativista	18
2.2.2. Partícula no relativista en una caja	23
2.2.3. Partícula libre relativista	27
3. Cosmología cuántica por lazos	31
3.1. Cosmología cuántica por lazos hamiltoniana	31
3.2. Integral de trayectoria por lazos para la cosmología espacialmente homogénea e isotrópica	37
3.2.1. Suma sobre trayectorias	37
3.2.2. La amplitud gravitacional A_G	38
3.2.3. Serie perturbativa	42
3.2.4. Satisfaciendo la restricción	43
3.3. Marco deparametrizado	45
3.3.1. Suma sobre historias	45
3.3.2. Desarrollo perturbativo	47
3.3.3. La ecuación de Schrödinger	47
4. Discusión, conclusiones y perspectivas	49
A. Integral de trayectoria y cuantización...	53
B. Invariancia por reparametrizaciones temporales	57
Bibliografía	61

Resumen

Como es bien sabido el modelo cuántico de un átomo evita la divergencia en la energía emitida por radiación que ocurre en una descripción clásica del mismo. Por analogía, existe la expectativa de que una descripción cuántica de la gravitación podría permitir el contender con el crecimiento sin límite de la intensidad de campo gravitacional, codificada en la curvatura del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general clásica, cuando ésta es usada para describir la época temprana del universo conocida como el “big bang”. Sin embargo, las dificultades encontradas al aplicar el método de cuantización estándar a la relatividad general han llevado a la búsqueda de alternativas. La cuantización por lazos es una de ellas y cuando se aplica a un modelo de universo simple reemplaza de hecho el big bang por un rebote en el que la intensidad gravitacional permanece acotada y por tanto la dinámica del cosmos puede extenderse a tiempos previos a éste. Los lazos son gráficos formados por nodos y aristas que asemejan un material polimérico, razón por la cual a este esquema de cuantización también se le denomina como polimérico. Notablemente estos gráficos sugieren una idea de discretez que reemplaza la noción del espacio continuo. Cabe señalar que la gravitación cuántica por lazos implica un método hamiltoniano. Por otro lado la covariancia manifiesta se implementa a través de esquemas como la integral de trayectoria. Con esta motivación se propusieron los llamados modelos de espuma de espín (MEE). En este caso los modelos cosmológicos se definen como situaciones límite, homogéneas e isotrópicas, a partir del formalismo general. Sin embargo, hasta hace poco, estos modelos no contaban con un sustento preciso en la formulación de la integral de trayectoria. Esto podría cambiar con el desarrollo de la integral de trayectoria polimérica del modelo cósmico homogéneo e isotrópico[1]. Aún quedan por explorar diferentes aspectos físicos en este contexto.

En esta tesis estudiaremos la propuesta de Ashtekar et. al. [1] para el cálculo de la amplitud de transición, o propagador, que es elemento central de la integral de trayectoria polimérica para el modelo cósmico homogéneo e isotrópico. No obstante que este modelo tiene un solo grado de libertad, contiene información dinámica gravitacional basada en la relatividad general. Estas características sugieren estudiar modelos mecánicos con un número finito de grados de libertad bajo el mismo esquema como un paso previo al análisis del modelo cósmico. Siguiendo esta ruta obtenemos el propagador polimérico, vía integral de trayectoria, de la partícula libre relativista y no relativista así como el de una partícula en una caja. Mientras que el primero y el tercero reproducen resultados conocidos obtenidos por métodos hamiltonianos, el segundo es un resultado nuevo. Todos ellos se reducen a los casos conocidos cuantizados de la manera usual en la aproximación continua.

Problemas físicos de interés que pueden tratarse en el futuro con estos métodos incluyen interacciones entre partículas en el caso de los modelos mecánicos y, en el caso cósmico, la posible generación y evolución de inhomogeneidades que permitan describir la estructura a gran escala de nuestro universo visible. Sin embargo no los incluiremos en este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los grandes problemas abiertos de la física teórica es construir una teoría de gravedad cuántica que nos permita entender el comportamiento de sistemas gravitacionales en situaciones extremas, posiblemente cerca de la escala de Planck, definida por la combinación de constantes físicas incluyendo la de Newton, G , la de Planck, \hbar , y la velocidad de la luz en el vacío, c , como $t_p = \frac{\ell_p}{c} \sim 10^{-43} s$, $\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-33} cm$ ó $E_p = \frac{\hbar}{t_p} \sim 10^{19} GeV$. Estas pueden ocurrir por ejemplo en el universo muy temprano, cerca del llamado “big bang”, o en los agujeros negros.

Por otro lado, el comportamiento de la materia a muy altas energías, por ejemplo en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC por sus siglas en inglés) la energía accesible es del orden de $10^3 GeV$ y los rayos cósmicos más energéticos que llegan a escalas de $10^9 GeV$, suponen una estructura continua del espacio tiempo. Sin embargo, la descripción teórica de estos fenómenos implica controlar cantidades divergentes asociadas con esta hipótesis de estructura continua, misma que podría requerir revisión. En el ámbito cósmico, la teoría de la relatividad general de Einstein permite describir un modelo de universo en expansión, el denominado Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que es espacialmente homogéneo e isotrópico. Desafortunadamente éste adolece del problema de la imposibilidad de continuar su dinámica más allá del tiempo correspondiente al big bang en el que la densidad de materia y la curvatura del espacio tiempo divergen. Aludiendo a cómo el modelo atómico cuántico reemplaza la divergencia de la radiación electromagnética de un modelo atómico clásico se sugiere que un tratamiento cuántico del modelo cósmico pudiese resolver la dificultad que implica el big bang.

Una de las propuestas de modelos cosmológicos cuánticos surge de la cuantización por lazos de la gravedad, que es un esquema hamiltoniano. En ella, esencialmente, en lugar de las variables canónicas para la relatividad general se adoptan otras que la hacen semejante a una teoría como la del electromagnetismo o las de Yang-Mills. A nivel cuántico es posible definir un espacio de Hilbert cinemático en el que los estados están etiquetados por gráficos que hacen recordar a un material polimérico y que portan información que contribuye a los espectros de operadores geométricos de área o volumen o bien a la entropía de ciertos agujeros negros. Este espacio de Hilbert incorpora parte de la estructura de la teoría pero a la fecha la parte dinámica sigue abierta. En estas circunstancias es deseable contar con modelos que permitan elucidar mejor la estrategia de cuantización y por ello uno de los modelos más desarrollados en este contexto es el de la cosmología cuántica por lazos. Notablemente la imposibilidad clásica de continuar la dinámica presentada por el big bang es reemplazada por un comportamiento aceptable sin ninguna cantidad física que crezca sin control.

Desde el punto de vista dinámico el modelo cósmico homogéneo e isotrópico posee un número finito de grados de libertad y por ello es estrictamente un sistema mecánico, si bien un tanto

complejo. Sin embargo, por su carácter relativista, este modelo presenta invariancia por reparametrizaciones temporales lo que se manifiesta por la presencia de una constricción. Desde este punto de vista resulta entonces de interés considerar otros sistemas mecánicos a la luz de este esquema de cuantización polimérica, incluyendo o no constricciones.

Una propuesta alternativa al esquema hamiltoniano por lazos es la de los modelos de espuma de espín, en los que la estructura básica está dada por superficies poliédricas cuyas caras están etiquetadas por representaciones de un grupo. Esta propuesta se basa en una perspectiva tipo Feynman en la que se plantea una amplitud de transición para la gravedad. En este caso los modelos cosmológicos se han estudiado como el límite de grandes volúmenes que capturan esencialmente los grados de libertad homogéneos. Debemos enfatizar que el sustento estricto de este formalismo en la integral de trayectoria se ha empezado a desarrollar solo recientemente. Usando el espacio de Hilbert hamiltoniano, Ashtekar et. al. [1] construyeron una integral de trayectoria para la amplitud de un modelo cosmológico en dos versiones: por un lado fijando una variable de tiempo y por otro usando la técnica del promedio en el grupo para el tratamiento de el problema manifiestamente invariante bajo reparametrizaciones temporales. Como debería de ser, ambas estrategias llevan al mismo resultado.

En esta tesis abordaremos el estudio de amplitudes cuánticas poliméricas via integral de trayectoria de sistemas mecánicos simples así como el caso del modelo cosmológico homogéneo e isotrópico de Ashtekar et. al. [1] Los primeros servirán de preámbulo para el caso cósmico permitiéndonos así entender en un contexto más simple algunas de las sutilezas técnicas en la integral de trayectoria polimérica. Tales sistemas mecánicos simples son: la partícula no relativista, libre y en una caja, y la partícula libre relativista. Estas amplitudes o propagadores coinciden en el primero y segundo caso con resultados obtenidos previamente por métodos hamiltonianos [2], mientras que el tercero es un resultado nuevo que verificamos tiene como límite continuo el propagador estándar de la partícula relativista [3].

La tesis está estructurada de la siguiente forma. En el capítulo 2 iniciamos por recordar la cuantización polimérica hamiltoniana de una partícula en un potencial. Después planteamos la integral de trayectoria polimérica para los tres sistemas simples mencionados antes. En el capítulo 3 las técnicas anteriores se extienden al caso del modelo cósmico. Aquí se tratan tanto el modelo deparametrizado en el que se elige un campo escalar como variable de tiempo, así como el modelo invariante bajo reparametrizaciones temporales en el que se implementa la técnica del promedio sobre el grupo. El último capítulo 4 discute el paralelismo entre los modelos simples y el modelo cósmico así como sus diferencias, concluyendo de esta manera con una discusión sobre la utilidad de los primeros para una mejor comprensión del último. Asimismo planteamos posibles desarrollos futuros que incluyen la aplicación de la integral de trayectoria polimérica.

Capítulo 2

Cuantización polimérica de sistemas mecánicos

En este capítulo implementamos la cuantización polimérica via integral de trayectoria de una partícula no relativista, libre y en una caja, así como de una partícula libre relativista. El análisis de estos sistemas nos facilitará el tratamiento del modelo cósmico homogéneo e isotrópico del capítulo 3, cuya dinámica es más complicada. Como veremos ambos tipos de sistemas poseen la misma cinemática cuántica.

Si bien nuestro objetivo es implementar la integral de trayectoria polimérica, para lograrlo haremos uso de algunos ingredientes de la cuantización polimérica hamiltoniana. En particular, usaremos la estructura del espacio de Hilbert cinemático en el esquema polimérico. Asimismo discutiremos brevemente la estrategia del promedio en el grupo para sistemas con invariancia por reparametrizaciones temporales. Este es el contenido de la sección 2.

En la segunda sección 2.2 describimos la construcción de la integral de trayectoria haciendo uso del espacio de Hilbert polimérico para el caso de una partícula en un potencial. El propagador físico se plantea como un promedio en el grupo de transformaciones generadas por la construcción que surge de la invariancia por reparametrizaciones temporales. Esta construcción es la base a partir de la cual los propagadores de los tres sistemas mecánicos mencionados antes pueden obtenerse.

2.1. Cuantización hamiltoniana de una partícula no relativista en un potencial

Para describir a una partícula cuántica polimérica podemos partir del procedimiento de Dirac, el cual permite formular la descripción cuántica tomando en consideración parte de la estructura clásica. El primer paso en este procedimiento es encontrar un espacio de Hilbert \mathcal{H} que permita representar a un conjunto de observables clásicos como operadores. Estos operadores, denominados observables cuánticos, deben ser operadores auto adjuntos y satisfacer el álgebra determinada por el corchete de Poisson $\{A(q, p), B(q, p)\}$ de los observables clásicos $A(q, p)$ y $B(q, p)$. En particular la dinámica del sistema suele estar asociada con el correspondiente hamiltoniano $H(q, p)$. Evidentemente a nivel cuántico pueden aparecer ambigüedades de ordenamiento de las variables básicas así como dificultades en la implementación de la dinámica posiblemente por la presencia de constricciones. Un ejemplo de esto último es el caso de sistemas invariantes por reparametrizaciones temporales donde aparece una construcción en lugar de un

hamiltoniano propiamente dicho.

En el esquema de Schrödinger, para una partícula puntual en una dimensión, el espacio de Hilbert es comúnmente $L^2(\mathbb{R}, dx)$ y los observables son la posición \hat{x} y el momento \hat{p} . Estos operadores actúan por multiplicación y derivación respectivamente, satisfaciendo así el álgebra de las relaciones canónicas de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \widehat{\{x, p\}} = i\hbar \hat{I} \quad \text{y siendo nulas las otras combinaciones,} \quad (2.1)$$

aquí \hat{I} es el operador identidad.

Ahora considérese la versión exponenciada de los operadores de posición, \hat{U}_λ , y de momento, \hat{V}_μ , es decir

$$\hat{U}_\lambda = e^{i\lambda\hat{x}} \quad \text{y} \quad \hat{V}_\mu = e^{i\mu\hat{p}}, \quad (2.2)$$

donde λ y μ son parámetros reales. Se puede ver que, a diferencia de \hat{x} y \hat{p} , los operadores \hat{U}_λ y \hat{V}_μ están bien definidos en todo el espacio de Hilbert \mathcal{H}^1 . Estos operadores actúan sobre un estado arbitrario $\psi \in \mathcal{H}$ de la siguiente forma

$$\hat{U}_\lambda \psi(x) = e^{i\lambda x} \psi(x) \quad \text{y} \quad \hat{V}_\mu \psi(x) = \psi(x - \mu). \quad (2.3)$$

De la ecuación (2.3) se pueden obtener las siguientes reglas de composición para \hat{U}_λ y \hat{V}_μ :

$$\hat{U}_{\lambda_1} \hat{U}_{\lambda_2} = \hat{U}_{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \hat{V}_{\mu_1} \hat{V}_{\mu_2} = \hat{V}_{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{y} \quad \hat{U}_\lambda \hat{V}_\mu = e^{i\lambda\mu} \hat{V}_\mu \hat{U}_\lambda. \quad (2.4)$$

En la representación de Schrödinger, con espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$ y (2.3), \hat{U}_λ y \hat{V}_μ son operadores débilmente continuos en sus respectivos parámetros por lo que existen los operadores no acotados $\hat{x} = -i[\partial_\lambda \hat{U}_\lambda]$ y $\hat{p} = -i[\partial_\mu \hat{V}_\mu]$. En esta representación las relaciones (2.4) son equivalentes a las relaciones canónicas de conmutación (2.1) (ver [6]).

Una manera de introducir la representación polimérica es identificar al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{poli}}$ con el espacio de funciones de cuadrado sumable $\ell^2(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{H}_{\text{poli}} \equiv \ell^2(\mathbb{R}) := \left\{ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|^2 < \infty \right\}. \quad (2.5)$$

Una base ortonormal de este espacio es el conjunto de funciones $e_\nu(x)$ etiquetadas por un parámetro real ν , con la propiedad

$$e_\nu(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = \nu, \\ 0, & \text{si } x \neq \nu. \end{cases} \quad (2.6)$$

Así el producto interno entre elementos $e_\nu(x)$ y $e_\lambda(x)$ es

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} e_\nu(x) e_\lambda(x) = \delta_{\nu, \lambda}, \quad (2.7)$$

donde $\delta_{\nu, \lambda}$ es una delta de Kronecker y no una delta de Dirac.

Es importante subrayar que en la cuantización polimérica el operador \hat{V}_μ no es débilmente continuo. Esto es fácil de ver como sigue. Consideremos el siguiente límite

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \langle x | \hat{V}_\mu | x \rangle &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \langle x | x - \mu \rangle \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \delta_{x, x - \mu} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Los operadores \hat{x} y \hat{p} sólo están bien definidos en un subespacio denso de \mathcal{H} debido a su carácter no acotado.

mientras que $\hat{V}_{\mu=0} = \hat{I}$ nos lleva a $\langle x | \hat{V}_{\mu=0} | x \rangle = \delta_{x,x} = 1$, indicando la falta de continuidad. En este caso entonces no podemos obtener el generador de traslaciones \hat{p} pero sí el operador de traslación \hat{V}_μ . Podemos escoger como observables elementales a \hat{x} y \hat{V}_μ y representarlos sobre los vectores base como

$$\hat{x}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle, \quad \text{y} \quad \hat{V}_\mu|\nu\rangle = |\nu - \mu\rangle, \quad (2.9)$$

además de cumplir con el álgebra

$$[\hat{x}, \hat{V}_\mu] = -\mu\hat{V}_\mu, \quad [\hat{x}, \hat{x}] = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{V}_\mu, \hat{V}_\mu] = 0. \quad (2.10)$$

Procedemos ahora a definir la dinámica cuántica.

2.1.1. Dinámica

Para una partícula de masa m en una dimensión, el hamiltoniano clásico es $H(x, p) = p^2/2m + W(x)$, donde $W(x)$ es el potencial que actúa sobre la partícula. Dado que en $\mathcal{H}_{\text{poli}}$ no existe un operador de momento \hat{p} , para definir la dinámica debemos aludir a las propiedades de los observables elementales \hat{x} y \hat{V}_μ . Con este fin consideremos la aproximación clásica

$$e^{i\mu_0 p/\hbar} + e^{-i\mu_0 p/\hbar} \approx 2 - \mu_0^2 p^2/\hbar^2 \quad \text{para } p \ll \hbar/\mu_0, \quad (2.11)$$

donde μ_0 es un parámetro real fijo. Esta aproximación tiene la ventaja de que los términos exponenciales se pueden cuantizar directamente como operadores \hat{V}_{μ_0} y $\hat{V}_{-\mu_0}$, lo que motiva definir al operador \hat{K} que sustituye al término cuadrático en el momento si se le define de la siguiente manera

$$\hat{K} := \frac{\hbar^2}{\mu_0^2} [2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}] \quad (2.12)$$

De esta manera, el hamiltoniano polimérico \hat{H}_{poli} para una partícula de masa m en una dimensión es

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{poli}} &= \frac{\hat{K}}{2m} + W(\hat{x}) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} [2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}] + W(\hat{x}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

La ecuación para las eigenfunciones $\psi_E(x)$, con eigenvalores E , del operador hamiltoniano \hat{H}_{poli} , $\hat{H}_{\text{poli}}\psi_E = E\psi_E$, es una ecuación en diferencias que en esta representación tiene la forma

$$\psi(x + \mu_0) + \psi(x - \mu_0) = \left[2 - \frac{2m\mu_0^2}{\hbar^2} (E - W(x)) \right] \psi(x). \quad (2.14)$$

La ecuación de eigenvalores (2.14) sugiere naturalmente el uso de una red regular de elementos de \mathbb{R} con paso μ_0 de modo que el espacio de Hilbert polimérico admite la estructura $\mathcal{H}_{\text{poli}} = \bigoplus_{x_0 \in [0, \mu_0)} \mathcal{H}_{x_0}$, donde \mathcal{H}_{x_0} es la restricción de (2.5) a una red regular con punto base x_0 . La presencia del parámetro continuo x_0 nos indica el carácter no separable de $\mathcal{H}_{\text{poli}}$ aunque claramente \mathcal{H}_{x_0} si es separable².

²Un espacio de Hilbert es separable si y sólo si admite una base ortonormal numerable. La mayoría de los espacios de Hilbert en la práctica son separables; si son de dimensión finita N se pueden relacionar bajo isomorfismos con \mathbb{C}^N y si son de dimensión infinita son isomorfos al espacio de secuencias complejas $\{x_n\}_1^\infty$ de norma $\sum_1^\infty |x_n| < \infty$ [6]. Es posible trabajar con estos espacios, por ejemplo en [7] se muestra un análisis del oscilador armónico polimérico considerando $\mathcal{H}_{\text{poli}}$.

2.1.2. Caso invariante por reparametrizaciones temporales

Existen sistemas en los cuales no se tiene acceso a un hamiltoniano en términos del cual describir la evolución temporal. Tal es el caso de los sistemas invariantes por reparametrizaciones temporales (Apéndice B). Como veremos más adelante el modelo cosmológico de FLRW, isotrópico y homogéneo, es un ejemplo de los sistemas invariantes ante reparametrizaciones temporales.

La partícula en una dimensión puede interpretarse como un sistema mecánico deparametrizado con el tiempo Newtoniano como una elección de tiempo, pues como se discute en el Apéndice (B) podemos implementar en él la invarianza por reparametrizaciones temporales para tener una analogía mas cercana a el modelo cosmológico FLRW. Al implementar esta simetría en la partícula puntual, pasamos a tener un sistema con dos variables de configuración, x y t , donde el hamiltoniano del sistema es remplazado por una constricción C de primera clase que tiene la forma $C = p_t + H$, en particular para la partícula libre la constricción C tiene la forma $C = p_t + p_x^2/2m$.

Para cuantizar este sistema escogemos representar los observables \hat{t} , \hat{x} , \hat{p}_t y \hat{V}_μ satisfaciendo la siguiente álgebra:

$$[\hat{t}, \hat{p}_t] = i\hbar, \quad [\hat{x}, \hat{V}_{\mu_0}] = -\mu_0 \hat{V}_{\mu_0} \quad \text{y cualquier otro conmutador es nulo.} \quad (2.15)$$

De esta forma la cuantización de este sistema posee tanto elementos de la representación a la Schrödinger como del esquema polimérico.

El espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} que permite representar el álgebra (2.15) es un producto directo de un espacio de Hilbert usual \mathcal{H}_{Sch} y uno polimérico $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, es decir $\mathcal{H}_{\text{cin}} = \mathcal{H}_{\text{Sch}} \otimes \mathcal{H}_{\text{poli}}$. En particular, si t y x actúan por multiplicación obtenemos un espacio de Hilbert compuesto por funciones de onda $\Psi(x, t)_{\text{cin}} = \psi(x)\phi(t)$ donde $\psi(x)$ son vectores de cuadrado sumable que pertenecen a $\mathcal{H}_{\text{poli}} = \ell^2(\mathbb{R})$ (con soporte sobre un conjunto numerable de puntos) y $\phi(t)$ son funciones de cuadrado integrable en $\mathcal{H}_{\text{Sch}} = L^2(\mathbb{R}, dt)$. La norma de cualquier vector en $\Psi(x, t)_{\text{cin}}$ estará dada por

$$\|\Psi\| = \sum_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dt |\Psi(x, t)|^2. \quad (2.16)$$

Para implementar la constricción a nivel cuántico se debe de tener presente que no existe el operador \hat{p}_x . Una vez construido el operador \hat{C} , las funciones $\Psi_{\text{fis}}(t, x)$ que representarán estados físicos serán aquellas que satisfagan la constricción es decir $\hat{C}\Psi_{\text{fis}}(t, x) = 0$. Una forma de obtener estados físicos a partir de funciones de onda cinemáticas es mediante el procedimiento del promedio sobre el grupo implementado en la forma

$$\Psi_{\text{fis}}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda \hat{C}} \Psi_{\text{cin}}(t, x) \quad (2.17)$$

En particular para una partícula libre, la forma más simple de construir la constricción \hat{C} es con base en el hamiltoniano polimérico mencionado en la Sección 2:

$$\hat{C} := \hat{p}_t + H_{\text{poli}} = \hat{p}_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} [2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}]. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la ecuación que satisfacen los estados físicos Ψ_{fis} es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\text{fis}}(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} [2\Psi_{\text{fis}}(x, t) - \Psi_{\text{fis}}(x - \mu_0, t) - \Psi_{\text{fis}}(x + \mu_0, t)] = 0. \quad (2.19)$$

Ya que la función $\Psi_{\text{fis}}(x, t)$ de onda es factorizable, esta ecuación equivale a la ecuación de evolución que se obtiene en un marco deparametrizado.

2.2. Integral de trayectoria para una partícula

Para un sistema cuántico, el propagador $G(x_f, t_f; x_i, t_i)$ nos permite encontrar la función de onda $\psi(x_f, t_f)$ de un sistema a un tiempo t_f , partiendo de una función de onda $\psi(x_i, t_i)$ a un tiempo inicial t_i , mediante la integral

$$\psi(x_f, t_f) = \int dx_i G(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i). \quad (2.20)$$

Aquí el propagador corresponde a la amplitud de transición del estado $|x_i\rangle$, considerado al tiempo t_i , al estado $|x_f\rangle$ al tiempo t_f , es decir,

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | \hat{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle, \quad (2.21)$$

donde $\hat{U}(t_f, t_i)$ es el operador de evolución del sistema cuántico y $|x\rangle$ son los eigenvectores del operador \hat{x} , mientras que t es el tiempo Newtoniano externo.

En un sistema invariante por reparametrizaciones temporales puede ser posible elegir una variable asociada con un tiempo interno. En este caso hablamos de un sistema deparametrizado y podemos usar la descripción que acabamos de dar en donde identificamos al tiempo Newtoniano externo t con el grado de libertad elegido para deparametrizar el sistema.

A diferencia de lo que pasa en un esquema deparametrizado, en uno que es manifiestamente invariante por reparametrizaciones temporales, el propagador físico $\bar{G}(x_f, t_f; x_i, t_i)$ debe corresponder con la amplitud de probabilidad de transición entre estados físicos $|x_f, t_f\rangle_{\text{fis}}$ y $|x_i, t_i\rangle_{\text{fis}}$. En este caso t es un grado de libertad adicional y el sistema incluye una restricción que refleja la presencia de la invariancia por reparametrizaciones temporales.

En general los estados físicos no tienen norma finita en \mathcal{H}_{cin} . Tenemos entonces que para definir el propagador en un marco invariante por reparametrizaciones temporales, es necesario primero definir un producto interno (llamado producto interno físico $(\cdot, \cdot)_{\text{fis}}$) para los estados físicos. La técnica del promedio sobre el grupo nos aporta el siguiente producto interno para estos estados

$$\bar{G}(x_f, t_f; x_i, t_i) \equiv (|x_f, t_f\rangle_{\text{fis}}, |x_i, t_i\rangle_{\text{fis}})_{\text{fis}} := \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle x_f, t_f | e^{i\alpha \hat{C}} | x_i, t_i \rangle, \quad (2.22)$$

donde \hat{C} es la restricción cuántica del sistema y $|x, t\rangle_{\text{fis}}$ son estados físicos obtenidos a partir de los estados cinemáticos $|x, t\rangle$ mediante la técnica del promedio sobre el grupo.

Para el caso de la partícula no relativista de masa m , en un esquema invariante ante reparametrizaciones temporales, el propagador físico toma la forma

$$\bar{G}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle x_f, t_f | e^{i\lambda(\hat{p}_t + \hat{H})} | x_i, t_i \rangle. \quad (2.23)$$

Ya que \hat{p}_t y \hat{H} actúan en distintos espacios y por lo tanto conmutan, el integrando del propagador se puede separar de forma natural en dos amplitudes, una definida en \mathcal{H}_{Sch} y la otra en $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \bar{G}(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle x_f, t_f | e^{i\lambda(\hat{p}_t + \hat{H})} | x_i, t_i \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle x_f, t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t} e^{i\lambda \hat{H}} | x_i, t_i \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle x_f | e^{i\lambda \hat{H}} | x_i \rangle \langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t} | t_i \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) \langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t} | t_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde se definió a

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) := \langle x_f | e^{i\lambda\hat{H}} | x_i \rangle. \quad (2.25)$$

La amplitud correspondiente a la parte temporal se puede obtener fácilmente al introducir un operador identidad usando los eigenvectores de \hat{p}_t , $\hat{\mathbb{1}}_{p_t} = \int_{\mathbb{R}} dp_t |p_t\rangle\langle p_t|$, en el segundo factor en (2.24),

$$\langle t_f | e^{i\lambda\hat{p}_t} | t_i \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp_t e^{i\lambda p_t} \langle t_f | p_t \rangle \langle p_t | t_i \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp_t e^{i\lambda p_t} e^{-ip_t(t_f - t_i)}. \quad (2.26)$$

El cálculo de la amplitud de transición en el espacio polimérico $A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda)$ requiere un poco más de trabajo. Para desarrollar el procedimiento de Feynman estándar consideraremos a $e^{i\lambda\hat{H}}$ como el operador de evolución durante un intervalo de tiempo auxiliar $\Delta\tau = 1$, es decir $e^{i\lambda\hat{H}} = e^{i\lambda\hat{H}\Delta\tau}$. Dividamos el intervalo $\Delta\tau$ en N partes iguales, de longitud $\epsilon = 1/N$ y escribamos la amplitud $A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda)$ como

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \langle x_f | \underbrace{e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} \dots e^{i\lambda\epsilon\hat{H}}}_{N \text{ veces}} | x_i \rangle. \quad (2.27)$$

Ahora introduciremos entre cada producto de operadores $e^{i\lambda\epsilon\hat{H}}$ un operador identidad formado por la eigenbase de estados de posición polimérica, $\hat{\mathbb{1}}_x = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|$, de la siguiente manera

$$e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} = \sum_{\bar{x}_k} e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} |\bar{x}_k\rangle\langle \bar{x}_k| e^{i\lambda\epsilon\hat{H}}, \quad (2.28)$$

permitiendo así expresar (2.27) como

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{\bar{x}_{N-1}, \dots, \bar{x}_1} \langle x_f | e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} |\bar{x}_{N-1}\rangle \langle \bar{x}_{N-1} | e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} |\bar{x}_{N-2}\rangle \dots \langle \bar{x}_1 | e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} | x_i \rangle. \quad (2.29)$$

Haremos las siguientes identificaciones $x_f = x_N$ y $x_i = x_0$, mientras que a los elementos de matriz los denotaremos como

$$U_{\bar{x}_j \bar{x}_i} := \langle \bar{x}_j | e^{i\lambda\epsilon\hat{H}} | \bar{x}_i \rangle \quad (2.30)$$

de tal forma que (2.29) se puede reescribir como

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{\bar{x}_{N-1}, \dots, \bar{x}_1} U_{x_N \bar{x}_{N-1}} U_{\bar{x}_{N-1} \bar{x}_{N-2}} \dots U_{\bar{x}_1 x_0}. \quad (2.31)$$

La división del parámetro τ en N partes iguales provee una esqueletonización para este tiempo auxiliar. Un conjunto ordenado $\sigma_N = (x_N, \bar{x}_{N-1}, \dots, \bar{x}_1, x_0)$ se puede ver como una historia discreta asociada a esta esqueletonización. La amplitud de transición (??) puede verse, a la Feynman, como una suma de amplitudes para cada historia σ_N con extremos x_N y x_0 fijos:

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{\sigma_N} A(\sigma_N), \quad (2.32)$$

$$A(\sigma_N) := U_{x_N \bar{x}_{N-1}} U_{\bar{x}_{N-1} \bar{x}_{N-2}} \dots U_{\bar{x}_1 x_0}.$$

Vamos a reorganizar las trayectorias de una forma particular que está motivada por el análisis del modelo cósmico con el objetivo de conectar este enfoque con el modelo de espuma de espín. En nuestro caso esta reorganización simplemente simplifica nuestra tarea. Primero, hagamos la siguiente consideración genérica de que una etiqueta \bar{x}_k puede repetirse, de forma contigua, j

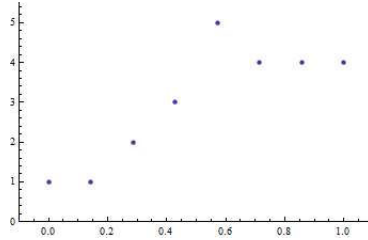


Figura 2.1: Ejemplo de trayectoria que corresponde a $\sigma_7(4, 4, 5, 2, 2, 1, 1)$

veces en σ_N , es decir, $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+2} = \dots = \bar{x}_{k+j}$ pero $\bar{x}_{k+j} \neq \bar{x}_{k+j+1}$. Enseguida, supongamos que una historia σ_N^M presenta M transiciones o cambios de valor de \bar{x} , es decir,

$$\sigma_N^M = (x_M, \dots, x_M, x_{M-1}, \dots, x_{M-1}, \dots, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{N_2}, x_0, \dots, x_0), \quad N \geq M. \quad (2.33)$$

De este modo la posición cambia de x_{k-1} a x_k al tiempo $N_k\epsilon$ y permanece en el valor x_k hasta el tiempo $N_{k+1}\epsilon$. Estas historias discretas pueden denotarse de manera mas transparente usando dos secuencias ordenadas como sigue

$$\sigma_N^M = \{(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0); (N_M, N_{M-1}, \dots, N_1)\}, \quad x_k \neq x_{k-1} \text{ y } N_k > N_{k-1}. \quad (2.34)$$

Cabe hacer notar que mientras dos posiciones consecutivas no pueden ser iguales, un valor dado de la posición puede repetirse en la secuencia; x_k puede ser igual a x_l si $l \neq k \pm 1$. La amplitud de probabilidad para una historia σ_N^M está entonces dada por

$$A(\sigma_N^M) = (U_{x_M x_M})^{N-N_M-1} U_{x_M x_{M-1}} \dots (U_{x_1 x_1})^{N_2-N_1-1} U_{x_1 x_0} (U_{x_0 x_0})^{N_1-1}. \quad (2.35)$$

En palabras, la ecuación (2.35) se describe de la siguiente manera. Observemos que x_{k-1} se repite $N_k - N_{k-1}$ veces, para $k = 1, \dots, M$. La contribución a la amplitud de propagación incluirá entonces $N_k - N_{k-1} - 1$ factores $U_{x_{k-1} x_{k-1}}$. El resto de los factores son propagadores de transición entre dos valores distintos, por ejemplo x_k y x_{k-1} , que contribuyen $U_{x_k x_{k-1}}$. Esto lleva a (2.35).

El siguiente paso en la construcción estándar de una integral de trayectoria sería tomar el límite ‘continuo’ $N \rightarrow \infty$. Pero en contraste con la cuantización usual, nuestra base $|x\rangle$ es una base discreta y como resultado de esto uno puede darle un sentido riguroso a este límite si reorganizamos la suma (2.29) de acuerdo al número de transiciones de posición. Y esto es lo que discutimos en seguida.

La idea clave para reorganizar la suma es considerar la siguiente suma parcial A_N que incluye la contribución de todas las trayectorias formadas por los puntos $(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0)$ y que son generadas al tomar todos los valores posibles de N_k , es decir,

$$A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) = \sum_{N_M=M}^{N-1} \left(\sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \left(\sum_{N_1=1}^{N_2-1} A^N(\sigma_N^M) \right) \dots \right). \quad (2.36)$$

Donde hemos usado que las etiquetas N_k deben estar ordenadas de acuerdo a (2.34), además de ser cantidades enteras positivas y por lo tanto el rango de valores para N_1 es de 1 a $N_2 - 1$.

En el caso de N_2 su valor mínimo es 2 mientras que el máximo es $N_3 - 1$. Tenemos pues que en general el rango de valores para N_k , $k = 1, \dots, M - 1$, es de k a $N_{k+1} - 1$. Para obtener el rango de valores de N_M , veamos que nuevamente el valor mínimo que puede tomar es M , mientras que el máximo debe ser $N - 1$ para asegurar que se trata de una trayectoria de M transiciones y no menos.

A partir de este punto restringiremos el análisis al caso de sistemas para los que los elementos de matriz de la diagonal $U_{x_k x_k}$ no dependen de la posición, que corresponde a aquellos para los cuales el término de potencial del Hamiltoniano es cero. Ejemplos de este tipo son la partícula libre o en una caja. Considerando esta simplificación tenemos que

$$U_{x_M x_M} = U_{x_{M-1} x_{M-1}} = \dots = U_{x_0 x_0}. \quad (2.37)$$

De este modo la amplitud correspondiente a (2.36) toma la forma

$$\begin{aligned} A(\sigma_N^M) &= U_{x_M x_{M-1}} \dots U_{x_1 x_0} \overbrace{(U_{x_M x_M})^{(N - N_M - 1) + \dots + (N_1 - 1)}}^{M \text{ términos}} \\ &= U_{x_M x_{M-1}} \dots U_{x_1 x_0} (U_{x_M x_M})^{(N-M)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En consecuencia todos los N_k se cancelan en el exponente de (2.38) y el -1 se repite M veces. Finalmente, usando (2.38) la expresión (2.36) pasa a ser

$$A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) = A(\sigma_N^M) \sum_{N_M=M}^{N-1} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_1=1}^{N_2-1} 1. \quad (2.39)$$

Resulta conveniente introducir otra suma parcial $A_N(x_f, x_i; M; \lambda)$ que incluye la contribución de todas aquellas trayectorias con exactamente M transiciones en la posición y que inician en x_i y terminan en x_f . De este modo, y usando (2.39), tenemos

$$A_N(x_f, x_i; M; \lambda) = \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) \quad \text{con} \quad x_j \neq x_{j+1}. \quad (2.40)$$

A este punto nuestra amplitud polimérica puede expresarse usando la suma parcial $A_N(x_f, x_i; M; \lambda)$, ecuación (2.40), como

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{M=0}^N A_N(x_f, x_i; M; \lambda). \quad (2.41)$$

Claramente requerimos estudiar el comportamiento de los sumandos en la ecuación (2.41) para $N \rightarrow \infty$ (equivalentemente $\epsilon \rightarrow 0$). Con este fin usamos la ecuación (2.38) en (2.39) para escribir esta última como

$$A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) = U_{x_M x_{M-1}} \dots U_{x_1 x_0} (U_{x_M x_M})^{N-M} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_1=1}^{N_2-1} 1. \quad (2.42)$$

El elemento de matriz $U_{x_M x_M}^{(N-M)}$, para N grande y M finita, se puede expresar, usando

(2.30), como³

$$\begin{aligned}
 U_{x_M x_M}^{(N-M)} &= \left(\langle x_M | 1 + \epsilon \lambda \hat{H} + \mathcal{O}(\epsilon^2) | x_M \rangle \right)^{N-M} \\
 &= (1 + \epsilon \lambda H_{x_M x_M})^{N-M} + (N-M) (1 + \epsilon \lambda H_{x_M x_M})^{N-M-1} \mathcal{O}(\epsilon^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
 &= (1 + \epsilon \lambda H_{x_M x_M})^N (1 + \epsilon \lambda H_{x_M x_M})^{-M} + (N-M) (\mathcal{O}(\epsilon^2) + (N-M-1) \mathcal{O}(\epsilon^3)) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
 &\stackrel{N\epsilon=1}{=} e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} (1 + \mathcal{O}(\epsilon))^{-M} + \mathcal{O}(\epsilon) \\
 &= e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} + \mathcal{O}(N^{-1}),
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

donde $H_{x_j x_k} = \langle x_j | \hat{H} | x_k \rangle$. Por otro lado, los elementos de matriz $U_{x_j x_{j-1}}$, en esta misma aproximación de N grande, toman la forma

$$U_{x_j x_{j-1}} = \langle x_j | e^{i\epsilon \lambda \hat{H}} | x_{j-1} \rangle = \frac{i\lambda H_{x_j, x_{j+1}}}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}). \tag{2.44}$$

Nótese que en (2.44), estrictamente, $x_j \neq x_{j-1}$ y debido a la ortogonalidad de la base no hay un término de orden cero en N .

Para continuar con el análisis observemos que las sumas que aparecen en (2.42) pueden ser recorridas en sus límites debido a que el sumando es un término constante. Usaremos la siguiente regla de translación $N_j \rightarrow N_j + j$, con lo que obtenemos

$$\sum_{N_M=M}^{N-1} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_2=2}^{N_3-1} \sum_{N_1=1}^{N_2-1} 1 = \sum_{N_M=0}^{N-M} \sum_{N_{M-1}=0}^{N_M} \dots \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{N_1=0}^{N_2} 1. \tag{2.45}$$

Usando (2.43), (2.44) y (2.45) en (2.39) nos lleva a

$$\begin{aligned}
 A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) &= (i\lambda\epsilon)^M H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} \\
 &\quad \sum_{N_M=0}^{N-M} \sum_{N_{M-1}=0}^{N_M} \dots \sum_{N_1=0}^{N_2} 1 + \mathcal{O}(N^{-1}).
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

En el límite $N \rightarrow \infty$ podemos identificar las sumatorias con integrales de Riemann mediante la siguiente identificación: $N_i \epsilon = \tau_i$ y $\epsilon \sum_{N_i} \rightarrow \int d\tau_i$. El último límite superior $(N-M)\epsilon = 1 - M\epsilon \rightarrow 1$. Por lo tanto (2.46) toma la forma

$$\begin{aligned}
 A(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) \\
 &= (i\lambda)^M H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} \int_0^1 d\tau_M \int_0^{\tau_M} d\tau_{M-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \\
 &= (i\lambda)^M H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} \frac{1}{M!}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

De acuerdo a (2.40) requerimos sumar sobre todos los valores posibles de x_k , con $k =$

³Recordemos que $(a+b)^p = a^p + p a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + \dots$.

2, ..., M - 1, de la amplitud parcial (2.47). Esto produce

$$\begin{aligned} A(x_f, x_i; \lambda; M) &:= \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} A(x_M, x_{M-1}, \dots, x_1, x_0; \lambda) \\ &= e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} \frac{(i\lambda)^M}{M!} \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} \quad \text{con} \quad x_j \neq x_{j-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por último la amplitud del sector polimérico, ecuación (2.25), se obtiene sumando las contribuciones (2.48) para todos los valores posibles de M como sigue

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{M=0}^{\infty} A(x_f, x_i; \lambda; M). \quad (2.49)$$

De este modo el propagador físico polimérico (2.24), para el caso de potencial nulo, estará dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} dp_t e^{ip_t(t_f - t_i) - \lambda} A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda \delta(\lambda - t_f + t_i) A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) \\ &= A_{\text{poli}}(x_f, x_i; t_f - t_i), \end{aligned} \quad (2.50)$$

en donde hemos usado (2.26) y se entiende el uso de (2.48) y (2.49).

Ahora aplicaremos la fórmula del propagador físico (2.50) a algunos sistemas mecánicos sencillos.

2.2.1. Partícula libre no relativista

Para el caso de la partícula libre no relativista de masa m vamos a considerar el Hamiltoniano polimérico \hat{H} , definido en (2.13), pero con un potencial W nulo, por lo que la constricción \hat{C} de este sistema tiene la forma

$$\hat{C} = \hat{p}_t + \frac{\hat{K}}{2m} = \hat{p}_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} (2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}). \quad (2.51)$$

Es sencillo ver que los elementos de la diagonal del operador \hat{U} son independientes de la posición, por lo que el análisis de la sección 2.2 se puede aplicar en este caso. Los elementos de matriz diagonales del hamiltoniano en la base de posiciones, definidos en (2.30), son

$$H_{x_j x_j} = \langle x_j | \hat{H} | x_j \rangle = \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} (2 - \delta_{x_j, x_j + \mu_0} - \delta_{x_j, x_j - \mu_0}) = \frac{\hbar^2}{m\mu_0^2}, \quad (2.52)$$

donde hemos hecho uso de la acción del operador de translación (2.3). Los no diagonales llevan a

$$H_{x_i x_j} = \langle x_i | \hat{H} | x_j \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} (\delta_{x_i, x_j + \mu_0} + \delta_{x_i, x_j - \mu_0}), \quad (2.53)$$

aquí x_i y x_j son estrictamente distintos.

De la ecuación (2.48), la amplitud parcial $A_M(x_f, x_i; \lambda)$ para este sistema es

$$\begin{aligned}
A_M(x_f, x_i; \lambda) &= e^{i\lambda H_{x_M, x_M}} \frac{(i\lambda)^M}{M!} \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} \quad \text{con } x_i \neq x_{i+1} \\
&= e^{\frac{i\lambda \hbar^2}{m\mu_0^2}} \left(\frac{-i\lambda \hbar^2}{2m\mu_0^2} \right)^M \frac{1}{M!} \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} S(x_f, x_i; M), \\
S(x_f, x_i; M) &:= \left(-\frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} \right)^{-M} H_{x_M x_{M-1}} H_{x_{M-1} x_{M-2}} \dots H_{x_1 x_0} \\
&= \sum_{x_{M-1}, \dots, x_1} \prod_{i=0}^{M-1} (\delta_{x_{M-j}, x_{M-j-1} + \mu_0} + \delta_{x_{M-j}, x_{M-j-1} - \mu_0}) \quad \text{con } x_j \neq x_{j+1}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Para tener una fórmula manejable conviene analizar primero el comportamiento de la función $S(x_f, x_i; M)$ para los primeros valores de M , con $x_f = x_M$:

$$\begin{aligned}
M = 1 : \\
S(x_f, x_i; M) &= \delta_{x_M, x_i - \mu_0} + \delta_{x_M, x_i + \mu_0}, \\
M = 2 : \\
S(x_f, x_i; M) &= \sum_{x_1} (\delta_{x_M, x_1 - \mu_0} + \delta_{x_M, x_1 + \mu_0}) (\delta_{x_1, x_i - \mu_0} + \delta_{x_1, x_i + \mu_0}) \\
&= \sum_{x_1} (\delta_{x_M, x_1 - \mu_0} \delta_{x_1, x_i - \mu_0} + \delta_{x_M, x_1 - \mu_0} \delta_{x_1, x_i + \mu_0} + \delta_{x_M, x_1 + \mu_0} \delta_{x_1, x_i - \mu_0} + \delta_{x_M, x_1 + \mu_0} \delta_{x_1, x_i + \mu_0}) \\
&= \delta_{x_M, x_i - 2\mu_0} + 2\delta_{x_M, x_i} + \delta_{x_M, x_i + 2\mu_0}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

El resultado (2.55) sugiere considerar una prueba por inducción. Mostraremos que $S(x_f, x_i; M)$ puede expresarse en la forma más compacta

$$S(x_f, x_i; M) = \sum_{j=0}^M \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j-M)} \binom{M}{j}. \tag{2.56}$$

Supondremos válida (2.56) para M y mostraremos que se cumple para $M+1$. Consideremos (2.54) con $M \rightarrow M+1$. Podemos ver que se cumple la relación

$$S(x_f, x_i; M+1) = \sum_{x_M} (\delta_{x_{M+1}, x_M + \mu_0} + \delta_{x_{M+1}, x_M - \mu_0}) S(x_M, x_i; M) \quad \text{con } x_f = x_{M+1}. \tag{2.57}$$

Usando (2.56) en (2.57) obtenemos

$$\begin{aligned}
S(x_f, x_i; M+1) &= \sum_{j=0}^M \sum_{x_M} (\delta_{x_{M+1}, x_M + \mu_0} + \delta_{x_{M+1}, x_M - \mu_0}) \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j-M)} \binom{M}{j}. \\
&= \sum_{j=0}^M (\delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j-M+1)} + \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j-M-1)}) \binom{M}{j}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Ahora, redefinimos el índice de suma en el primer término del miembro derecho de la segunda igualdad en (2.58), haciendo $j \rightarrow j + 1$ para obtener

$$\begin{aligned}
S(x_f, x_i; M + 1) &= \sum_{j=1}^{M+1} \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j - (M+1))} \binom{M}{j-1} + \sum_{j=0}^M \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j - (M+1))} \binom{M}{j} \\
&= \sum_{j=1}^M \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j - (M+1))} \left(\binom{M}{j-1} + \binom{M}{j} \right) + \delta_{x_M, x_i + \mu_0(M+1)} + \delta_{x_M, x_i - \mu_0(M+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{M+1} \delta_{x_M, x_i + \mu_0(2j - (M+1))} \binom{M+1}{j},
\end{aligned} \tag{2.59}$$

como queríamos demostrar.

Conviene mostrar un par de propiedades de la función $S(x_f, x_i; M)$ que son de utilidad en análisis subsecuentes. La primera es su invariancia por traslaciones, misma que es evidente considerando su estructura basada en deltas de Kronecker, ver ec. (2.54). Así pues

$$S(\bar{x}', \bar{x}; M) = S(\bar{x}' + a, \bar{x} + a; M) \quad a = r\mu_0, \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{2.60}$$

La siguiente propiedad es la invariancia por reflexiones. Aludiendo a (2.56) y usando que $\delta_{x,y} = \delta_{-x,-y}$, junto con un rearrreglo de la sumatoria correspondiente, se puede ver que⁴

$$S(\bar{x}', \bar{x}; M) = S(-\bar{x}', -\bar{x}; M). \tag{2.61}$$

Otra propiedad muy útil de estas funciones es el carácter triangular, que es la estructura del conjunto donde estas funciones son no triviales. Si introducimos la separación entre los puntos inicial y final $\mu_0 L = x_f - x_i$. Debido a la presencia de la delta de Kronecker en la ec. (2.56) vemos que sólo tendremos un único término no nulo cuando $j = (L + M)/2$. Dado que $0 \leq j \leq M$ la última condición implica $M \geq |L|$. Los valores numéricos correspondientes están representados en la figura (2.2.1), claramente reflejando el carácter triangular.

Es posible darle a A_M , ec. (2.54), una forma más simple y ventajosa. Para ello utilizaremos la propiedad triangular que acabamos de describir. Supongamos primero que L es par. En este caso, solo las amplitudes parciales $A_M(x_f, x_i; \lambda)$ con M par ($M = 2k$) y mayor que $|L|$ serán distintas de 0. De este modo la contribución polimérica (2.49) para el caso de partícula libre no relativista tiene la siguiente forma

$$A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{M=|L|}^{\infty} A_M(x_f, x_i; \lambda) = \sum_{k=|L|/2}^{\infty} e^{i \frac{\hbar^2 \lambda}{m\mu_0^2}} \left(\frac{i\hbar\lambda}{2m\mu_0^2} \right)^{2k} \frac{1}{(2k)!} \binom{2k}{L/2 + k}. \tag{2.62}$$

⁴Invirtiendo los signos en los índices de las deltas de Kronecker en (2.56) tenemos $S(x_f, x_i; M) = \sum_{j=0}^M \delta_{-x_f, -x_i - \mu_0(2j - M)} \binom{M}{j} = \sum_{j=M}^0 \delta_{-x_f, -x_i + \mu_0(2j - M)} \binom{M}{M - j} = S(-x_f, -x_i; M)$. En la última igualdad se usó el cambio $j \rightarrow M - j$.

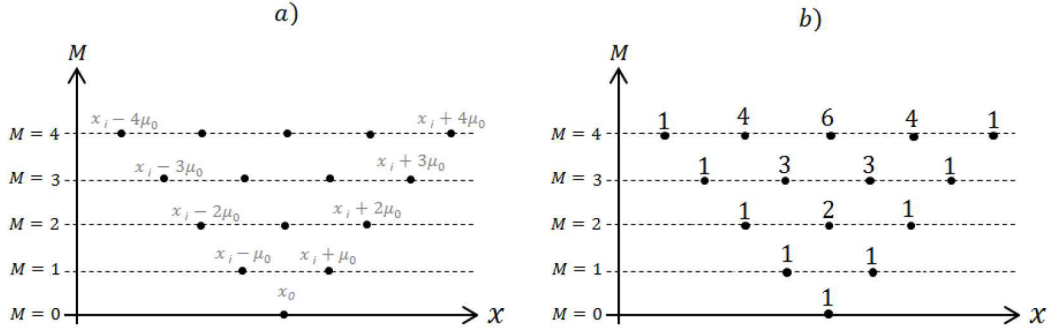


Figura 2.2: Propiedades de la función $S(x_f, x_i; M)$. a) Conjunto de puntos para los que la función $S(x_f, x_i; M)$ es no trivial, es decir, $|x_f - x_i| \leq M\mu_0$, $M = 0, 1, 2, \dots$. Se indican todos los puntos pero solo se incluyen las coordenadas de los puntos frontera. b) Valores no triviales de la función $S(x_f, x_i; M)$. Estos forman un triángulo de Pascal.

Haciendo el cambio en el índice de la suma $k \rightarrow k + |L|/2$ en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned}
A_{\text{poli}}(x_f, t; x_i, \lambda) &= e^{-\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar\lambda}{2m\mu_0^2} \right)^{2k+|L|} \frac{1}{(k+L/2+|L|/2)!(k-L/2+|L|/2)!} \\
&= (i)^{|L|} e^{\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\hbar\lambda}{2m\mu_0^2} \right)^{2k+|L|} \frac{1}{(k)!(k+|L|)!} \\
&= (i)^{|L|} e^{\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} J_{|L|} \left(\frac{\hbar\lambda}{m\mu_0^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n .

Por otro lado, suponiendo ahora que L es impar, sólo las amplitudes parciales con M impar son distintas de cero junto con $M \geq |L|$, en la contribución a la amplitud polimérica (2.49). Usando el índice $k = (M - 1)/2$ tenemos

$$\begin{aligned}
A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda) &= \sum_{k=(|L|-1)/2}^{\infty} e^{\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} \left(\frac{i\hbar\lambda}{2m\mu_0^2} \right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \binom{2k+1}{(L+2k+1)/2}, \\
&= (i)^{|L|} e^{\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\hbar\lambda}{2m\mu_0^2} \right)^{2k+|L|} \frac{1}{(k)!(k+|L|)!} \\
&= (i)^{|L|} e^{\frac{i\hbar\lambda}{m\mu_0^2}} J_{|L|} \left(\frac{\hbar\lambda}{m\mu_0^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Nuevamente obtenemos una función de Bessel como en (2.63).

Ahora, dada la propiedad de las funciones de Bessel de orden entero, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, y tomando la ecuación (2.50) para el propagador $\bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i)$ en términos de la amplitud $A_{\text{poli}}(x_f, x_i; \lambda)$, obtenemos que el propagador de la partícula libre polimérica no relativista es

$$\bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = i^L e^{\frac{i\hbar(t_f-t_i)}{m\mu_0^2}} J_L \left(\frac{\hbar(t_f-t_i)}{m\mu_0^2} \right). \tag{2.65}$$

Este resultado coincide con el obtenido por el método Hamiltoniano en [2]. Su aproximación al continuo debe coincidir con el propagador estándar [22], y esto es lo que se discute en la siguiente subsección. Sin embargo, conviene resaltar algunos aspectos de la construcción del propagador polimérico libre que serán de gran utilidad en el análisis del de la partícula en la caja.

La contribución al propagador libre de todas las trayectorias con M transiciones está dada por (2.54). Enfocaremos nuestra atención en la función $S(x_f, x_i; M)$. Su comportamiento puede verse directamente de su evaluación para $M = 1, 2, \dots$ dada en (2.55): dado el valor inicial x_i esta función es no trivial sólo para $|x_f - x_i| \leq M\mu_0$, $M = 0, 1, 2, \dots$. Además, notablemente, los valores que toma esta función en este conjunto corresponden con la estructura del triángulo de Pascal. Estas dos propiedades se ilustran en la figura ?? que se basa en un plano donde los ejes coordenados son x_f y M .

Regresaremos más adelante a hacer uso de estas propiedades. Pasamos ahora a discutir la aproximación continua del propagador polimérico libre.

Aproximación continua del propagador polimérico para la partícula libre

Recordando que la escala μ_0 da el paso de la red correspondiente a la coordenada espacial, es razonable pensar que en un régimen donde μ_0 sea pequeña deberíamos recuperar la descripción de la cuantización estándar a la Schrödinger. Es decir, $\bar{G}_0 \sim G_0$, con μ_0 pequeña.

El propagador $\bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i)$, ec. (2.65), expresado en la variable $L = (x_f - x_i)/\mu_0$, en el régimen $L \rightarrow \infty$, $\mu_0 \rightarrow 0$ con $\mu_0 L = x_f - x_i < \infty$,

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i) &= i^{(x_f - x_i)/\mu_0} e^{\frac{i\hbar(t_f - t_i)}{m\mu_0^2}} J_{(x_f - x_i)/\mu_0} \left(\frac{\hbar(t_f - t_i)}{m\mu_0^2} \right) \\ &= i^L e^{iL^2 \Delta} J_L(L^2 \Delta) \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $\Delta = \frac{\hbar(t_f - t_i)}{m(x_f - x_i)^2}$.

Usando las fórmulas (5) y (6) de Meissel (página 227 de [5]) podemos expresar la función Bessel de (2.66) como ⁵

$$J_L(L \sec \beta) \approx \frac{\exp iL(\tan \beta - \beta)}{\sqrt{2\pi L} \sqrt[4]{1 - \sec^2 \beta}}, \quad \sec \beta = L\Delta. \quad (2.67)$$

Ahora hacemos uso de un desarrollo en serie de Taylor de (2.67) en términos de $\sec \beta^{-1} =: z$ para obtener

$$J_L(Lz^{-1}) = e^{-i\frac{L}{z}\sqrt{1-z^2}} \sqrt{z} \left[(-i)^L \sqrt{\frac{1}{2\pi i L}} + \mathcal{O}(z) \right]. \quad (2.68)$$

Tomando el primer término en esta ecuación y combinándola con (2.65) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(x_f, t_f; x_i, t_i) &\approx \mu_0 G_0(x_f, t_f; x_i, t_i), \quad \text{cuando } \lambda/\mu_0 \gg 1, \quad \lambda = \frac{\hbar(t_f - t_i)}{m(x_f - x_i)} \\ G_0(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \sqrt{\frac{m}{2mi\hbar(t_f - t_i)}} \exp \left[i \frac{m(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

⁵Estas fórmulas son $J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) = \frac{e^{-\nu(\alpha - \tanh \alpha)} e^{-W_\nu}}{\sqrt{2\pi\nu \tanh \alpha}}$, $W_\nu \sim \mathcal{O}(1/\nu)$. Usando la continuación analítica $\alpha = i\beta$ obtenemos (2.67), válida cuando $\sec \beta = L\Delta = \lambda/\mu_0 \gg 1$, con $\lambda := \frac{\hbar(t_f - t_i)}{m(x_f - x_i)}$, la longitud de de Broglie, además de $\nu = L \gg 1$.

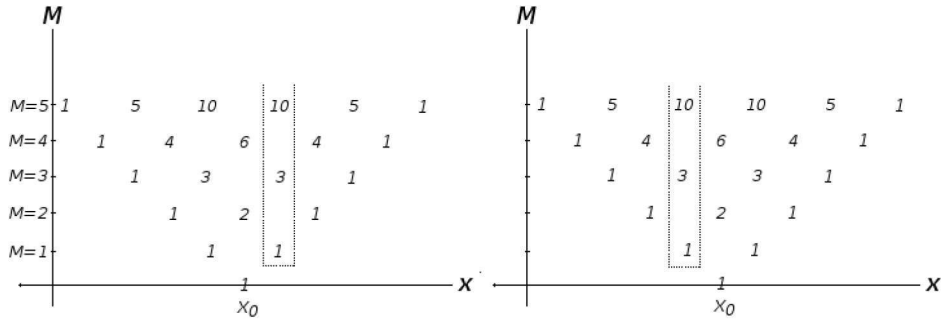


Figura 2.3: La función $S(x, x_0; M)$ satisface la siguiente igualdad $S(x_0 + a, x_0; M) = S(x_0 - a, x_0; M)$ para cualquier cantidad a . En la imagen izquierda se resaltan la función $S(x_0 + \mu_0, x_0; M)$ para los primeros valores de M , mientras que en la imagen derecha se resaltan los valores de $S(x_0 - \mu_0, x_0; M)$.

Donde G_0 es el propagador estándar de la partícula libre [22]. Hacemos notar que el propagador polimérico involucra la medida contable (2.5) por lo que en su relación con el propagador estándar, ec. (2.69), aparece el factor μ_0 . De hecho este permite interpretar el paso de la suma discreta sobre las posiciones a la integral correspondiente, es decir, $\mu_0 \sum_{x_i} \rightarrow \int dx$.

2.2.2. Partícula no relativista en una caja

Después de la partícula libre el siguiente sistema más simple de analizar es uno “casi libre”: la partícula en una caja. Para implementar la condición de frontera que corresponde a la caja, de función de onda nula en las paredes, es posible recurrir a la estrategia del método de imágenes que resulta muy útil en la electrodinámica clásica. Por ejemplo, en el caso de una carga puntual situada de manera asimétrica entre dos planos conductores paralelos, uno introduce una carga imagen para implementar la condición de frontera de potencial cero en uno de los planos conductores, digamos el izquierdo. Para satisfacer la condición de frontera del plano conductor derecho, requerimos dos cargas imagen, ahora a la derecha de este último. El proceso continúa indefinidamente y el potencial del problema original se expresa como una serie formada por potenciales de partículas individuales en una configuración que asegura se cumplan las condiciones de frontera. El tratamiento cuántico dentro del esquema Hamiltoniano polimérico de la partícula en la caja fue desarrollado en [2, 4]. Aquí daremos el tratamiento de este sistema usando la integral de trayectoria polimérica.

Para determinar el propagador, nuestro análisis estará centrado en el estudio de la función $\bar{S}(x, x_0; M)$ (por simplicidad denotaremos por x al punto final x_f y por x_0 al punto inicial x_i), que es el análogo polimérico para la partícula en la caja de la función $S(x, x_0; M)$, de la partícula libre, ecs. (2.54) y (2.56). Consideremos un valor inicial genérico para la posición x_0 . La implementación de la condiciones de frontera, es decir la presencia de las paredes izquierda y derecha en x_- y x_+ , respectivamente, la realizamos considerando que $\bar{S}(x = x_{\pm}, x_0; M) = 0$. Siguiendo el método de imágenes proponemos como primera contribución a $\bar{S}(x, x_0; M)$ la función $S(x, x_0; M)$. Evidentemente tenemos que agregar términos que permitan implementar la condición de frontera.

De (2.60) y (2.61) se puede ver que la función S tiene la propiedad de que $S(x_0 + a, x_0; M) = S(x_0 - a, x_0; M)$ para todo valor de M , como se muestra en la figura (2.2.2). Teniendo en cuenta esta propiedad, la condición de frontera en x_- , $\bar{S}(x_-, x_0; M) = 0$, se satisface si proponemos a

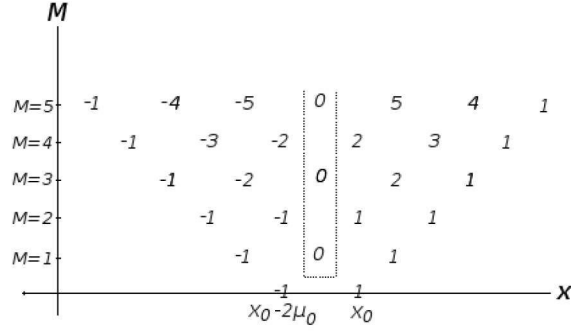


Figura 2.4: La combinación lineal de funciones $S(x, x_0; M) - S(x, 2x_- - x; M)$ satisface la condición de frontera x_- . En esta imagen se representa esta combinación lineal tomando $x_- = x_0 - \mu_0$

$\bar{S}(x, x_0; M)$ como la resta de la función $S(x, x_0; M)$, la cual describe la partícula libre, menos $S(x, x_1^-; M)$, con punto inicial x_1^- , que es la fuente imagen correspondiente a x_0 respecto a la frontera x_- , como ejemplo vease la figura (2.2.2). La relación entre x_1^- y x_0 es $x_0 - x_- = x_- - x_1^-$ y por lo tanto $x_1^- = 2x_- - x_0$. Usando (2.60) y (2.61) podemos mostrar que esta resta de funciones S satisface la condición en la frontera de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S(x_-, x_0; M) - S(x_-, x_1^-; M) &= S(x_-, x_0; M) - S(x_-, 2x_- - x_0; M) \\ &= S(x_-, x_0; M) - S(-x_-, -x_0; M) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Nótese que la función S con punto inicial x_1^- contribuye de forma negativa a \bar{S} .

Con este mismo razonamiento, buscaremos satisfacer la condición de frontera en x_+ , $\bar{S}(x_+, x_0; M) = 0$. Ahora tenemos dos funciones: $S(x, x_0; M)$ y $-S(x, x_1^-; M)$. Tomando como referencia la figura (2.2.2), reflejaremos los puntos x_0 y x_1^- respecto a la frontera x_+ obteniendo los puntos x_1^+ y x_2^+ , respectivamente. Estos puntos obtenidos satisfacen $x_1^+ - x_+ = x_+ - x_0$ y $x_2^+ - x_+ = x_+ - x_1^-$, por lo tanto $x_1^+ = 2x_+ - x_0$ y $x_2^+ = 2x_+ - x_1^-$. De esta manera, proponemos que a la función \bar{S} contribuyen cuatro funciones cada una relacionada, respectivamente, con cada una de estos puntos, pero particularmente la función relacionada con el punto x_1^+ contribuyendo con signo negativo y aquella relacionada con x_2^+ con signo positivo. Así, de forma analoga a como se hizo en (2.70), podemos mostrar que esta combinación particular de estas funciones, satisface la condición frontera en x_+ ,

$$\begin{aligned} S(x_+, x_0; M) - S(x_+, x_1^-; M) - S(x_+, x_1^+; M) + S(x_+, x_2^+; M) \\ &= (S(x_+, x_0; M) - S(x_+, 2x_+ - x_0; M)) + (S(x_+, 2x_+ - x_1^-; M) - S(x_+, x_1^-; M)) \\ &= (S(x_+, x_0; M) - S(-x_+, -x_0; M)) + (S(-x_+, -x_1^-; M) - S(x_+, +x_1^-; M)) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Claramente, esta combinación particular de cuatro funciones (2.71), la cual satisface la la frontera x_+ , no satisface la frontera x_- . Se puede mostrar, como se hizo en (2.70) y (2.71), que si incluimos dos funciones relacionadas con los puntos x_2^- y x_3^- , la primera con signo positivo y la segunda con signo negativo, obtenemos una combinación de seis funciones que satisface la condición de frontera en x_- . Para esto, estos puntos x_2^- y x_3^- son las fuentes imagen de x_1^+ y x_2^+ respecto a x_- , es decir, $x_2^- = 2x_- - x_1^+$ y $x_3^- = 2x_- - x_2^+$.

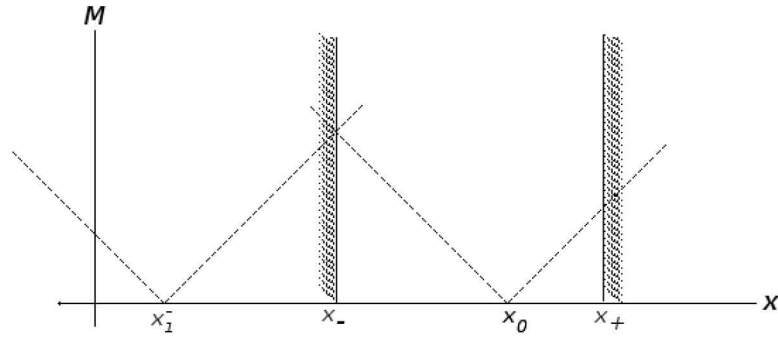


Figura 2.5: La combinación de funciones $S(x, x_0; M) - S(x, 2x_- - x; M)$ satisface la frontera izquierda de la caja, x_- , pero no satisface la frontera derecha x_+ .

Apartir de aquí generalizamos dos características de esta construcción: primero, que las relaciones que permiten obtener las posiciones de los puntos fuente son

$$x_n^- = 2x_- - x_{n-1}^+ \quad \text{y} \quad x_n^+ = 2x_+ - x_{n-1}^- \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.72)$$

y segundo, que sólo las contribuciones relacionadas con las fuentes correspondientes a n par son positivas.

Para tener la forma explícita de x_n^- y x_n^+ en términos de x_0 , x_- y x_+ , es necesario resolver (2.72). Es sencillo ver que (2.72) es equivalente a

$$x_n^- = -2D + x_{n-2}^- \quad \text{y} \quad x_n^+ = 2D + x_{n-2}^+, \quad (2.73)$$

donde $D = x_+ - x_-$ es la longitud de la caja. La solución general de ecuaciones en diferencias del tipo $Y_n = c + Y_{n-2}$, con c constante, y $n = 2k$ par es⁶

$$Y_{2k} = ck + Y_0, \quad (2.76)$$

y para $n = 2k - 1$ impar es

$$Y_{2k-1} = c(k-1) + Y_1. \quad (2.77)$$

En (2.77) y (2.76) Y_0 y Y_1 son los valores iniciales. Usando los resultados (2.77) y (2.76) en (2.73), obtenemos

$$\begin{aligned} x_{2k}^- &= -2kD + x_0, & x_{2k-1}^- &= -2(k-1)D + x_1^-, \\ x_{2k}^+ &= 2kD + x_0, & x_{2k-1}^+ &= 2(k-1)D + x_1^+, \end{aligned} \quad (2.78)$$

⁶Notemos que $Y_n = c + Y_{n-2}$ también se puede escribir como $Y_{n-2} = c + Y_{n-4}$ al reetiquetar el índice n , por lo tanto

$$Y_n = c + Y_{n-2} = 2c + Y_{n-4} \quad \text{y en general} \quad Y_n = jc + Y_{n-2j}, \quad (2.74)$$

con $j \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2j$. Tenemos dos situaciones particulares para Y_n con base en si n es par o no. Si $n = 2k$ es par, hacemos a $j = k$, pero si $n = 2k - 1$ es impar, hacemos $j = k - 1$. Así, la solución general para Y_n resulta entonces depender de dos condiciones iniciales Y_0 y Y_1 de la siguiente forma

$$Y_{2k} = ck + Y_0, \quad Y_{2k-1} = c(k-1) + Y_1. \quad (2.75)$$

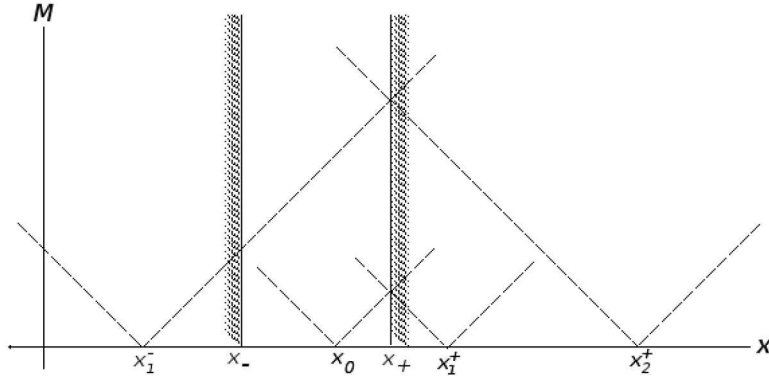


Figura 2.6: La combinación $S(x, x_0; M) - S(x, x_1^-; M) - S(x, x_1^+; M) + S(x, x_2^+; M)$ se construye para satisfacer la condición de frontera derecha, x_+ , pero, ahora, esta combinación no satisface la frontera izquierda x_- .

donde $x_0 = x_0^- = x_0^+$. Pero tenemos de (2.72) que $x_1^- = 2x_- - x_0$ y $x_1^+ = 2x_+ - x_0 = 2D + 2x_- - x_0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} x_{2k}^- &= -2kD + x_0, & x_{2k-1}^- &= -2(k-1)D + 2x_- - x_0, \\ x_{2k}^+ &= 2kD + x_0, & x_{2k+1}^+ &= 2kD + 2x_- - x_0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

para $k = 1, 2, \dots$

Entonces las contribuciones con signo positivo son aquellas de la forma $S(x, x_{2k}^-; M)$ y $S(x, x_{2k}^+; M)$, con $k = 1, 2, \dots$, además de $S(x, x_0; M)$. Todas ellas se pueden agrupar en una sola expresión como $S(x, x_{2k}^+; M)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, las contribuciones con signo negativo se pueden expresar como $S(x, x_{2k+1}^+; M)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente $\bar{S}(x, x_0; M)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{S}(x, x_0; M) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [S(x, x_{2k}^+; M) - S(x, x_{2k+1}^+; M)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [S(x, 2Dk + x_0; M) - S(x, 2Dk + 2x_- - x_0; M)]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Usando (2.80) y (2.54) en (2.62) obtenemos la siguiente expresión para el propagador $G_{\text{caja}}(x = x_f, t_f; x_0 = x_i, t_i)$ de la partícula en la caja

$$\bar{G}_{\text{caja}}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_0(x_f, t_f; x_i + 2jD, t_i) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_0(x_f, t_f; -x_i + 2jD, t_i) \quad (2.81)$$

El propagador (2.81) para la partícula polimérica en una caja es precisamente el obtenido previamente vía la fórmula espectral en [2].

Aproximación continua del propagador polimérico para la partícula en la caja

La aproximación continua del propagador de la partícula polimérica en la caja (2.81) se basa en la idea de la aproximación continua de los propagadores libres que lo conforman, los cuales a su vez, dan lugar al propagador usual de la partícula en la caja de acuerdo a [9, ?].

Usando la aproximación continua del propagador de partícula libre, ec. (2.69), en el propagador (2.81) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\text{caja}}(x_f, t_f; x_i, t_i) &\approx \mu_0 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} G_0(x_f, t_f; x_i + 2jD, t_i) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_0(x_f, t_f; -x_i + 2jD, t_i) \right) \\ &\approx \mu_0 G_{\text{caja}}(x_f, t_f; x_i, t_i). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Donde $G_{\text{caja}}(x_f, t_f; x_i, t_i)$ es el propagador usual de la partícula en la caja [9, ?].

2.2.3. Partícula libre relativista

A nivel clásico, la partícula libre relativista de masa m es un sistema mecánico que puede ser descrito mediante la acción

$$S_R[x^\nu, \dot{x}^\nu] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L(x^\nu, \dot{x}^\nu) = m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\eta_{\nu\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu}, \quad \text{donde} \quad \dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.83)$$

Aquí el índice griego ν toma los valores enteros del 0 al 3 de tal forma que $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$, se toma a la velocidad de la luz en el vacío $c = 1$ y la métrica $\eta_{\nu\mu}$ es la métrica del espacio de Minkowski que tiene la forma $\eta_{\nu\mu} = \text{dag}\{1, -1, -1, -1\}$. La acción S_R además de ser invariante bajo las transformaciones de Lorentz también es invariante bajo reparametrizaciones temporales ya que su lagrangiano es una función homogénea de grado uno en las velocidades (ver Apéndice B).

La acción S_R en el espacio fase toma la forma

$$S_R[x^\nu, p_\nu] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\dot{x}^\nu p_\nu - \lambda C), \quad C = p^\nu p_\nu - m^2, \quad p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu}, \quad (2.84)$$

donde C es una constricción y λ es un multiplicador de Lagrange.

A nivel cuántico, la integral de trayectoria polimérica de la partícula libre relativista, requiere considerar dos características de este sistema mecánico que claramente lo hacen distinto de los anteriores. La primera característica de este modelo es que la constricción C de este sistema no tiene la forma $p_t + F$ donde F es una función de las variables espaciales x^j , con $j = 1, 2, 3$, y de sus momentos conjugados p_j . La segunda, es que este sistema consta de tres dimensiones espaciales y no una.

El espacio de Hilbert \mathcal{H} para la representación polimérica de este sistema es ligeramente distinto del de la sección 2. Debido al número de dimensiones espaciales usaremos el espacio $\mathcal{H}_{\text{Sch}} \otimes \mathcal{H}_{\text{poli}} \otimes \mathcal{H}_{\text{poli}} \otimes \mathcal{H}_{\text{poli}}$, donde \mathcal{H}_{Sch} es el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dt)$. En general, un estado cinemático tendrá la forma $\Psi(t, x, y, z) = \phi(t)\psi(x)\theta(y)\xi(z)$ con norma finita $\|\Psi\| = \int dt \sum_{x,y,z} |\Psi(t, x, y, z)|^2$. Se elegirá una base $|x^\nu\rangle$ en el espacio cinemático en términos de las bases en cada espacio que lo componen como el producto directo $|x^\nu\rangle := |t\rangle \otimes |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle$.

Sólo x , y y z serán cuantizadas en un esquema polimérico. Para esto, se definirá a $V_{\mu_0}^j$ como los operadores de traslaciones en la eigenbase de \hat{x}^j , $j = 1, 2, 3$, respectivamente. El álgebra de operadores a implementar será

$$[\hat{t}, \hat{p}_t] = i\hbar \quad [x^j, \hat{V}_{\mu_0}^j] = -\mu_0 \hat{V}_{\mu_0}^j \quad (2.85)$$

mientras que cualquier otro conmutador será nulo. Para construir la constricción cuántica se deben elegir operadores que sustituyan a $p_{(x^j)}^2$ y $p_{(x^j)}$. Nuevamente usaremos la aproximación

(2.11). De esta forma tenemos que la constricción cuántica sera

$$\hat{C} = \hat{p}_t^2 - \sum_{j=1}^3 \hat{K}^j - m^2 \hat{I} \quad (2.86)$$

donde los operadores \hat{K}^j se definen de forma análoga a (2.12), es decir,

$$\hat{K}^j = \frac{\hbar}{\mu_0^2} (2 - \hat{V}_{\mu_0}^j - \hat{V}_{-\mu_0}^j). \quad (2.87)$$

El propagador cuántico $G_R(x_f^\nu, x_i^\nu)$ lo definiremos con ayuda del promedio sobre el grupo como

$$G_R(x_f^\nu; x_i^\nu) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle x_f^\nu | e^{i\lambda \hat{C}} | x_i^\nu \rangle. \quad (2.88)$$

Un aspecto que facilita el cálculo de este propagador es que podemos separar la amplitud en el integrando como un producto de cuatro amplitudes como se muestra a continuación

$$G_R(x_f^\nu; x_i^\nu) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{-i\lambda m^2} \langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t^2} | t_i \rangle \langle x_f | e^{-i\lambda \hat{K}^1} | x_i \rangle \langle y_f | e^{-i\lambda \hat{K}^2} | y_i \rangle \langle z_f | e^{-i\lambda \hat{K}^3} | z_i \rangle. \quad (2.89)$$

El cálculo de cualquier amplitud parcial para las variables espaciales se puede obtener directamente de la subsección 2.2.1, si en la ecuación (2.64). Sin pérdida de generalidad, desarrollaremos este argumento para la amplitud $\langle x_f | e^{-i\lambda \hat{K}^1} | x_i \rangle$. La amplitud $\langle x_f | e^{i\lambda \hat{K}/2m} | x_i \rangle$ según la ecuación (2.64) tiene la forma

$$\langle x_f | e^{i\lambda \hat{K}/2m} | x_i \rangle = (i)^L e^{\frac{i\lambda}{m\mu_0^2}} J_L \left(\frac{\hbar\lambda}{m\mu_0^2} \right), \quad (2.90)$$

donde $L = (x_f - x_i)/\mu_0$. Considerando el cambio $\lambda \rightarrow -2m\lambda$ y $L_1 = (x_f - x_i)/\mu_0$ obtenemos la amplitud $\langle x_f | e^{i\lambda \hat{K}^1} | x_i \rangle$:

$$\langle x_f | e^{i\lambda \hat{K}^1} | x_i \rangle = (i)^{L_1} e^{-i\frac{2\lambda}{\mu_0^2}} J_{L_1} \left(-\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right). \quad (2.91)$$

Similarmente también encontramos que

$$\begin{aligned} \langle y_f | e^{i\lambda \hat{K}^2} | y_i \rangle &= (i)^{L_2} e^{-i\frac{2\lambda}{\mu_0^2}} J_{L_2} \left(-\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right), \\ \langle z_f | e^{i\lambda \hat{K}^3} | z_i \rangle &= (i)^{L_3} e^{-i\frac{2\lambda}{\mu_0^2}} J_{L_3} \left(-\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right), \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde $L_2 = (y_f - y_i)/\mu_0$ y $L_3 = (z_f - z_i)/\mu_0$.

Tomando las ecuaciones (2.91) y (2.92) en (2.89) obtenemos lo siguiente

$$G_R(x_f^\nu, x_i^\nu) = i^{L_1+L_2+L_3} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{-i\lambda m^2 + i6\lambda/\mu_0^2} \langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t^2} | t_i \rangle J_{L_1} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right) J_{L_2} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right) J_{L_3} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right) \quad (2.93)$$

y simplificando el término $\langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t^2} | t_i \rangle$ como

$$\langle t_f | e^{i\lambda \hat{p}_t^2} | t_i \rangle = \sqrt{\frac{1}{-4\pi\hbar i\lambda}} e^{i\frac{(t_f-t_i)^2}{4\hbar\lambda}}, \quad (2.94)$$

tenemos finalmente que el propagador para la partícula relativista polimérica es

$$G_R(x_f^\nu, x_i^\nu) = i^{L_1+L_2+L_3} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \sqrt{\frac{1}{-4\pi\hbar i\lambda}} e^{-i\lambda m^2 + i6\lambda/\mu_0^2 + i(t_f-t_i)^2/4\hbar\lambda} J_{L_1} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right) J_{L_2} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right) J_{L_3} \left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2} \right). \quad (2.95)$$

Aproximación continua del propagador polimérico para la partícula relativista

Tomando la aproximación de la subsección 2.2.1, tomando a $z = -\mu_0/2\lambda$, tenemos que las funciones Bessel de la ecuación (2.95) se comportan individualmente como

$$J_L\left(\frac{2\lambda}{\mu_0^2}\right) \approx \mu_0(-i)^L e^{2i\hbar\lambda/\mu_0^2 - i(x_f - x_i)^2/4\hbar\lambda} \sqrt{\frac{1}{-4\pi i \hbar \lambda}} \quad (2.96)$$

para $L = L_x, L_y, L_z$. Usando esta ecuación en (2.95) tenemos que el comportamiento del propagador relativista en el límite $\mu_0 \rightarrow 0$ es

$$\begin{aligned} G_R(x_f^\nu, x_i^\nu) &\approx \mu_0^3 \int_{\mathbb{R}} d\lambda \left(\frac{1}{-4\pi i \hbar \lambda}\right)^2 e^{i(t_f - t_i)^2/4\hbar\lambda} e^{i(x_f - x_i)^2/4\hbar\lambda} e^{i(y_f - y_i)^2/4\hbar\lambda} e^{i(z_f - z_i)^2/4\hbar\lambda} e^{i\lambda m^2} \\ &= \mu_0^3 \int_{\mathbb{R}} d\lambda \left(\frac{1}{4\pi i \hbar \lambda}\right)^2 e^{\frac{-i}{2\hbar}[(x_f - x_i)^2/2\lambda + 2\lambda m^2]} \end{aligned} \quad (2.97)$$

que corresponde al bien conocido propagador de la partícula relativista [3], considerando que el factor μ_0^3 está relacionado con la medida usada en los propagadores poliméricos.

A este punto estamos listos para proceder a estudiar el caso del modelo cósmico homogéneo e isotrópico, lo cual es el contenido del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Cosmología cuántica por lazos

Uno de los objetivos de esta tesis es analizar el propagador polimérico de la cosmología por lazos en la formulación de integral de trayectoria, tomando como referencia principal a [1]. En esta referencia se construye el propagador polimérico de un modelo cósmico homogéneo, isotrópico y espacialmente plano acoplado a un campo escalar ϕ . Este capítulo se enfoca en seguir esta construcción, la cual es más complicada que la mostrada en el capítulo 2 debido a que la dinámica es un poco más compleja.

En analogía a los casos mecánicos mostrados anteriormente, el modelo cósmico del cual partimos se puede estudiar tanto desde un marco deparametrizado como desde un marco invariante ante reparametrizaciones temporales. En el marco deparametrizado, la variable de configuración es el volumen del universo ν y el campo escalar ϕ toma el papel de tiempo interno. Por otro lado, en el marco invariante bajo reparametrizaciones temporales, tanto el campo escalar como el volumen del universo son variables de configuración. Otra similitud del sistema cósmico respecto a los modelos mecánicos anteriores es que para trabajar el formalismo de integral de trayectoria nuevamente es necesario recurrir a elementos que surgen del formalismo canónico, como lo es el espacio de Hilbert.

Este capítulo está dividido en tres secciones organizadas de la siguiente forma. Ya que recurriremos a algunos elementos del formalismo canónico, en la sección 3.1 resumiremos algunos de los conceptos básicos de la formulación hamiltoniana de la cosmología por lazos. En la sección 3.2 desarrollaremos el propagador mediante la formulación de integral de trayectoria partiendo de un marco invariante ante reparametrizaciones. Para esto recurriremos, de forma similar a como se hizo en los modelos mecánicos, a una organización particular de las trayectorias en términos del número de transiciones de volumen. En la sección 3.3, nuevamente desarrollaremos este propagador partiendo ahora de un marco deparametrizado, considerando nuevamente esta organización de trayectorias particular. Para complementar el análisis de este modelo cósmico, en las secciones 3.2 y 3.3 mostraremos como se puede obtener este propagador partiendo de desarrollos perturbativos, uno distinto para cada marco.

Cabe destacar que a diferencia de los modelos mecánicos simples, el propagador cosmológico no admite una expresión simple en términos de funciones elementales.

3.1. Cosmología cuántica por lazos hamiltoniana

La cosmología es un área de la física que se encarga de el estudio del universo como un todo, es decir, estudia a gran escala su composición, su historia, su dinámica, etc.. A pesar de que muchos sistemas estelares, como el sistema solar, las galaxias o inclusive de algunos

cúmulos de galaxias, se pueden estudiar con suficiente precisión mediante la teoría de gravitación Newtoniana, la comprensión a gran escala del universo observado depende esencialmente de la relatividad general. Para entender esto recordemos que la teoría de gravitación Newtoniana es adecuada para describir sistemas cuya masa M es pequeña comparada con su tamaño R , es decir $GM/c^2R \ll 1$, donde G es la constante de Newton y c es la velocidad de la luz en el vacío. Por ejemplo, esta razón para la Tierra, tomando su masa y su radio como $M_{\oplus} = 5,972 \text{ Kg}$ y $r_{\oplus} = 6371 \text{ Km}$, respectivamente, es del orden de 10^{-10} por lo que los efectos relativistas son despreciables. Sin embargo, esta condición no se cumple para sistemas compactos u objetos que han colapsado, los cuales tienen radios pequeños comparados con sus masas, como por ejemplo un hoyo negro donde, para el horizonte de eventos, $GM/c^2R \sim 1$.

También podemos entrar en un régimen relativista si consideramos sistemas cuya masa aumenta más rápido que su radio. Este último es el caso de la cosmología. Desde el punto de vista del universo a gran escala, las galaxias e incluso algunos cúmulos de galaxias son estructuras muy pequeñas, meramente átomos del universo. Los telescopios actuales son capaces de ver a distancias mayores a los 10 Gpc (un parsec, abreviado pc, es aproximadamente $1 \times 10^{16} \text{ m}$). A estas distancias el universo parece homogéneo, tiene aproximadamente la misma densidad de galaxias y el mismo tipo de galaxias en todo punto del espacio. Debido a esta homogeneidad observada, el valor medio para la densidad de materia y energía del universo es constante y con un valor de aproximadamente $\rho = 10^{-26} \text{ Kg m}^{-3}$. Esta densidad nos permite encontrar que la masa del universo, $M = 4\pi\rho R^3/3$, es comparable a su radio cuando éste toma valores del orden de $R \sim 6 \text{ Gpc}$, lo cual se encuentra dentro de la escala del universo observado. Por lo tanto el entendimiento del universo observado depende necesariamente de la relatividad general.

Por otro lado, el universo está lleno de radiación que corresponde al espectro de cuerpo negro con una temperatura de $T = 2,725 \text{ K}$. Al observar esta radiación, en promedio, el universo parece idéntico en todas direcciones, con variaciones en la temperatura menores a $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Esto nos lleva a que otra característica del universo a gran escala es la isotropía.

En la formulación más común de la relatividad general, el objeto central de estudio es la métrica del espacio tiempo. Para describir el cosmos, debemos de partir del hecho de que la métrica debe de manifestar la homogeneidad y la isotropía espaciales observadas. Para encontrar esta forma adoptaremos las siguientes idealizaciones del universo: i) el espacio tiempo puede ser foliado en hipersuperficies homogéneas e isotrópicas obtenidas a tiempos constantes, e ii) el marco en reposo promedio de las galaxias admite la definición de simultaneidad.

Consideremos la hipersuperficie definida a un tiempo constante t_0 cuyo elemento de línea espacial dl^2 de la hipersuperficie tiene la forma

$$dl^2(t_0) = h_{ij}(t_0)dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

A un tiempo posterior t_1 esta hipersuperficie es distinta a la anterior, pero el cambio de una a otra tiene que ser tal que en todo momento éstas siempre sean homogéneas e isotrópicas. Entonces la forma que debe tener $h_{ij}(t_1)$ sólo puede ser $h_{ij}(t_1) = f(t, t_0)h_{ij}(t_0)$, ya que de otra forma se perdería la isotropía de la hipersuperficie. En general podemos escribir (3.1) de la siguiente forma

$$dl^2(t) = a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (3.2)$$

donde $a(t_0)$ es igual a uno y h_{ij} es una métrica constante cuyo valor coincide con el de $h_{ij}(t_0)$.

Dado que buscamos que las hipersuperficies espaciales sean homogéneas e isotrópicas, h_{ij} debe de ser esféricamente simétrica. La forma general para una métrica espacial esféricamente simétrica es (ver capítulo 10 de ref. [8])

$$dl^2(t) = a(t)^2 (E^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.3)$$

donde Λ es función del radio y Ω es el ángulo sólido.

Desde el punto de vista geométrico, nos restringiremos al modelo cósmico espacialmente plano. Esto lo logramos haciendo que el escalar de Ricci espacial $R^{(3)}$ sea nulo. Una forma de lograrlo es a partir de la traza del tensor de Einstein espacial $G^{(3)}$ (el cual es proporcional a $R^{(3)}$) e igualarla a cero. Esta traza resulta ser (ver capítulo 12 de ref. [8])

$$G^{(3)} = -\frac{1}{r^2}[r(1 - e^{-2\Lambda})]' = 0, \quad (3.4)$$

que puede integrarse como

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - A/r}, \quad (3.5)$$

donde A surge como una constante de integración.

Ahora extendemos este elemento de línea espacial al elemento de línea espacio temporal. En general, el elemento de línea completo tiene la forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - A/r} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.6)$$

donde N es una función que no puede depender de las variables espaciales, ya que de otra forma se contraponen la homogeneidad requerida en el modelo cósmico. Si queremos que la definición de simultaneidad a t constante sea acorde a la definición de simultaneidad dada por un marco Lorentziano local a cada galaxia, entonces el vector base temporal e_0 debe ser ortogonal a los vector base espaciales e_i . Ésto por definición implica que los elementos de matriz $g_{0i} \equiv e_0 \cdot e_i$ sean nulos. Por lo tanto

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - A/r} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (3.7)$$

Recordemos que en relatividad general localmente debemos recuperar una métrica plana. Considerando regiones cercanas a $r = 0$, es necesario que $A = 0$ para que esto sea posible. Así, encontramos que la forma general para la métrica que describe un cosmos homogéneo e isotrópico espacialmente plano es

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (3.8)$$

Esta métrica es conocida como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

La dinámica del modelo cósmico FLRW se puede obtener a partir de la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int dx^4 \sqrt{-\det g} (\mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}), \quad (3.9)$$

la cual está en términos de la densidad lagrangiana gravitacional $\mathcal{L}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} R$, donde R es el escalar de Ricci y G es la constante de Newton, además $c = 1$. La densidad lagrangiana de materia \mathcal{L}_{mat} que usaremos corresponde a un campo ϕ con acoplamiento mínimo y masa nula, es decir

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi. \quad (3.10)$$

Ahora, los modelos cósmicos se obtienen como situaciones límites de la teoría de relatividad general. Esto simplifica el manejo de estos modelos respecto a la teoría completa. En el caso de FLRW tenemos simetrías espaciales asociadas a la homogeneidad e isotropía, por lo que las

variables ϕ , a y N sólo dependen del tiempo. Debido a estas simetrías la acción para este modelo S_{FLRW} resulta ser [10]

$$S_{FLRW} = \int_{V_0} dx^3 \int_{\mathbb{R}} dt N a^3 \left(-\frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{a}}{N^2 a^2} + \frac{\dot{\phi}}{2N^2} \right). \quad (3.11)$$

La integración en las coordenadas espaciales la haremos sobre una región compacta de volumen V_0 obteniendo así, salvo derivadas totales en el tiempo, el lagrangiano L

$$L = V_0 N a^3 \left(-\frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} \right). \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta que el elemento de línea no depende de las coordenadas respecto a las cuales se describe la teoría, al hacer un cambio de parámetro temporal $t \rightarrow t'(t)$ podemos ver de (3.8) que N transforma como $N \rightarrow N dt'/dt$. En consecuencia, resulta directo ver que el lagrangiano L (3.12) resulta ser una función homogénea de grado uno en las variables \dot{a} , $\dot{\phi}$ y N . Del Apéndice B tenemos que el hamiltoniano correspondiente a un lagrangiano homogéneo de grado uno está constreñido a ser nulo, por lo tanto al pasar a las variables del espacio fase encontramos en lugar del Hamiltoniano la siguiente constricción [11]

$$C = \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3}, \quad \{a, p_a\} = 1, \quad \{\phi, p_\phi\} = 1, \quad (3.13)$$

donde las variables p_a y p_ϕ son los momentos conjugados a a y ϕ respectivamente. Es conveniente realizar el siguiente cambio de variables

$$b := -\frac{4\pi G}{3V_0} \frac{p_a}{a^2} \quad \text{y} \quad \nu := \frac{V_0}{2\pi G} a^3, \quad (3.14)$$

donde el corchete de Poisson entre estas variables es $\{\nu, b\} = -2$. La constricción clásica en estas variables se puede escribir como

$$C = p_\phi^2 - \Theta, \quad (3.15)$$

donde $\Theta = 3\pi G \nu^2 b^2$ es el término de la constricción relacionado con los grados de libertad gravitacionales.

La cuantización polimérica de este modelo procede siguiendo la ruta de la cuantización de la gravedad cuántica por lazos (GCL). En este esquema de cuantización nuevamente el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} no permitirá representar la variable \hat{b} pero si su versión exponenciada $\hat{V}_{\ell_0} = \widehat{e^{i\ell_0 \lambda b}}$, donde ℓ_0 está relacionada con la brecha de área $\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$ y el parámetro de Barbero-Immirzi [12] γ a través de $\ell_0^2 = \gamma^2 \Delta$. Por lo tanto, el álgebra de observables a implementar será

$$[\hat{\phi}, \hat{p}_\phi] = i\hbar \quad \text{y} \quad [\hat{\nu}, \hat{V}_{\ell_0}] = -2\hbar\ell_0 \hat{V}_{\ell_0}. \quad (3.16)$$

De forma análoga a los casos mecánicos tratados en la capítulo 2, el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} que elegiremos es el producto directo del espacio de Hilbert gravitacional (no separable) $\mathcal{H}^{\text{grav}}$ y el espacio de materia (separable) \mathcal{H}^{mat} , es decir $\mathcal{H}_{\text{cin}} = \mathcal{H}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}^{\text{grav}}$. Los vectores de $\mathcal{H}^{\text{grav}}$ son funciones $\Phi(\nu)$ con norma finita $\|\Phi\| := \sum_\nu |\Phi(\nu)|^2$, y por lo tanto sólo tienen soporte sobre un conjunto numerable de puntos. El espacio de Hilbert de materia es el espacio estándar $\mathcal{H}^{\text{mat}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$. Por lo tanto, los estados cuánticos cinemáticos de \mathcal{H}_{cin} son funciones $\Psi(\nu, \phi)$ con norma finita $\|\Psi\| := \sum_\nu \int d\phi |\Psi(\nu, \phi)|^2$. Se considerará una base

ortonormal $|\nu, \phi\rangle$ en \mathcal{H}_{cin} dada por los eigenvectores de los operadores $\hat{\nu}$ y $\hat{\phi}$. Esta base satisface la relación de ortogonalidad

$$\langle \nu', \phi' | \nu, \phi \rangle = \delta_{\nu', \nu} \delta(\phi', \phi). \quad (3.17)$$

donde $\delta_{\nu', \nu}$ es una delta de Kronecker y $\delta(\phi', \phi)$ es una delta de Dirac.

El operador \hat{V}_{ℓ_0} actúa sobre una función de onda $\Psi(\nu)$ en $\mathcal{H}^{\text{grav}}$ mediante desplazamientos $\hat{V}_{\ell_0} \Psi(\nu) = \Psi(\nu + 2\ell_0 \hbar)$. Para construir la constricción cuántica recurriremos a la aproximación clásica $b \approx (V_{\ell_0} - V_{-\ell_0})2i = (\sin \ell_0 b)/\ell_0$, de tal forma que el término gravitacional de la constricción [13] denotada usualmente como $\hat{\Theta}$ es:

$$\hat{\Theta} = \frac{3\pi G}{\ell_0^2} (\sqrt{|\hat{\nu}| \widehat{\sin \ell_0 b} \sqrt{|\hat{\nu}|}})^2. \quad (3.18)$$

Como se discute en el Apéndice B y en el capítulo 2, los estados físicos $\Psi(\nu, \phi)_{\text{fís}}$ son aquellos que satisfagan la constricción cuántica \hat{C} :

$$-\hat{C}\Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi) = -\hat{p}_\phi^2 \Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi) + \hat{\Theta} \Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi) = 0, \quad (3.19)$$

donde el momento asociado a ϕ actúa por derivación, $\hat{p}_\phi \Psi(\nu, \phi) = -i\hbar \partial_\phi \Psi(\nu, \phi)$, y Θ actúa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} \Phi(\nu) = & -\frac{3\pi G}{4\ell_0^2} [\sqrt{|\nu(\nu + 4\ell_0 \hbar)}|(\nu + 2\ell_0 \hbar)\Phi(\nu + 4\ell_0 \hbar)] - 2\nu^2 \Phi(\nu) \\ & + \sqrt{|\nu(\nu - 4\ell_0 \hbar)}|(\nu - 2\ell_0 \hbar)\Phi(\nu - 4\ell_0 \hbar)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como ocurrió en el capítulo 3, la forma de $\hat{\Theta}$ muestra que el espacio de soluciones a la constricción cuántica puede ser descompuesto de forma natural en sectores en los cuales la función de onda sólo tiene soporte sobre conjuntos de puntos espaciados por múltiplos de $4\ell_0$. Aquí nos restringiremos a la red $\nu = 4n\ell_0$, donde n es un entero.

Para obtener los estados físicos a partir de \mathcal{H}_{cin} de nueva cuenta se recurre al procedimiento del promedio sobre el grupo. Si se denota por $e_k(\nu)$, $k \in \mathbb{R}$, al conjunto completo ortonormal de eigenfunciones de Θ sobre $\mathcal{H}^{\text{grav}}$ y usando a $e^{ip_\phi \phi}$ como base del espacio \mathcal{H}^{mat} , podemos expresar a cualquier estado $\Psi(\nu, \phi)$ como

$$\Psi(\nu, \phi) = \int_{\mathbb{R}} dk \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_\phi}{2\pi} \tilde{\Psi}(k, p_\phi) e^{ip_\phi \phi} e_k(\nu). \quad (3.21)$$

Usando este desarrollo, podemos promediar sobre el grupo de transformaciones de norma estas funciones para obtener los estados físicos $\Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi)$ como sigue

$$\Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi) := \int d\alpha [2|\hat{p}_\phi| e^{i\alpha \hat{C}} \Psi(\nu, \phi)]. \quad (3.22)$$

Usando la ecuación (3.21) en (3.22) tenemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi) &= \int d\alpha \int dk \int \frac{dp_\phi}{2\pi} \tilde{\Psi}(k, p_\phi) \left(2|\hat{p}_\phi| e^{i\alpha \hat{p}_\phi^2} e^{ip_\phi \phi} \right) e^{-i\alpha \hat{\Theta}} e_k(\nu) \\ &= \int dk \int dp_\phi 2|p_\phi| \tilde{\Psi}(k, p_\phi) e^{ip_\phi \phi} e_k(\nu) \left(\int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha(p_\phi^2 - \omega_k^2)} \right) \\ &= \int dk \int dp_\phi 2|p_\phi| \tilde{\Psi}(k, p_\phi) e^{ip_\phi \phi} e_k(\nu) \delta(p_\phi^2 - \omega_k^2) \\ &= \int dk [\tilde{\Psi}(k, \omega_k) e^{i\omega_k \phi} e_k(\nu) + \tilde{\Psi}(k, -\omega_k) e^{-i\omega_k \phi} e_k(\nu)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aquí denotamos a los eigenvalores de Θ como ω_k^2 y sin pérdida de generalidad asumimos que $\omega_k \geq 0$ [14]. El factor $2|p_\phi|$ se introdujo en el promedio sobre el grupo (3.22) para futuras simplificaciones técnicas y no altera el carácter físico de esta técnica¹. De la ecuación (3.22) se definen las funciones $\Psi_{\text{fís}}^\pm(\nu, \phi) := \int dk \tilde{\Psi}(k, \pm\omega_k) e^{\pm i\omega_k \phi} e_k(\nu)$. Es posible interpretar estas funciones como soluciones de frecuencia positiva y negativa, respectivamente

$$\Psi_{\text{fís}}^\pm(\nu, \phi) = e^{\pm i\sqrt{\Theta}(\phi - \phi_0)} \Psi_{\text{fís}}^\pm(\nu, \phi_0). \quad (3.24)$$

Induiremos un producto interno entre los estados físicos a través del procedimiento del promedio sobre el grupo. Consideremos un subespacio denso S en \mathcal{H}_{cin} , usualmente S es el espacio de Schwartz, y si $\Psi \in S$ podemos considerar a $\Psi_{\text{fís}}$ como una distribución que pertenece al dual de S , denotado S^* . $\Psi_{\text{fís}}$ actúa sobre cualquier elemento Υ del espacio S a través del producto interno cinemático [15, 16]:

$$\begin{aligned} (\Psi_{\text{fís}}|\Upsilon) &:= \sum_\nu \int d\phi \int d\alpha \left(2|\hat{p}_\phi| e^{-i\alpha\hat{C}} \right) \bar{\Psi}(\nu, \phi) \Upsilon(\nu, \phi) \\ &= \int dk \int dp_\phi 2|p_\phi| \delta(p_\phi^2 - \omega_k^2) \bar{\tilde{\Psi}}(k, p_\phi) \tilde{\Upsilon}(k, p_\phi) \\ &= \int dk \bar{\tilde{\Psi}}(k, \omega_k) \tilde{\Upsilon}(k, \omega_k) + \bar{\tilde{\Psi}}(k, -\omega_k) \tilde{\Upsilon}(k, -\omega_k). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En base a (3.25) definimos el producto interno físico, entre los estados $\Psi_{\text{fís}}$ y $\Upsilon_{\text{fís}}$, como

$$(\Psi_{\text{fís}}, \Upsilon_{\text{fís}}) := (\Psi_{\text{fís}}|\Upsilon) = \overline{(\Psi_{\text{fís}}|\Psi)} \quad (3.26)$$

Una observación importante es que, un conjunto completo de observables está dado por el operador $p_\phi = -i\hbar\partial_\phi$ y el operador de volumen $V|_{\phi_0}$. La acción de estos observables, así como la evolución temporal, deja invariante los espacios de soluciones de frecuencia negativa y positiva, respectivamente. Entonces, como en la teoría de Klein-Gordon, podemos restringirnos a trabajar en uno de los dos espacios de soluciones. En Cosmología Cuántica por Lazos (CCL) generalmente se trabaja con el espacio de soluciones de frecuencia positiva. Así, el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{fís}}$ consistirá en soluciones de frecuencia positiva $\Psi_f^+(\nu, \phi)$ a la restricción, i.e. soluciones que satisfacen

$$-i\hbar\partial_\phi \Psi_f^+(\nu, \phi) = \sqrt{\Theta} \Psi_f^+(\nu, \phi) \quad (3.27)$$

con un producto interno motivado por (3.25) y con la forma

$$\begin{aligned} (\Psi_f^+, \Phi_g^+)_{\text{fís}} &= \int dk \bar{f}(k, \omega_k) \tilde{g}(k, \omega_k) \\ &= \sum_{\nu=4m\ell_0} \bar{\Psi}_+(\nu, \phi_0) \Phi_+(\nu, \phi_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Finalmente, debido a que las soluciones clásicas ϕ para el campo escalar son monótonas es natural usar a ϕ como una variable de tiempo interno. Por lo tanto es posible tratar este modelo cuántico tanto en el marco invariante ante reparametrizaciones temporales como en un marco deparametrizado.

En resumen, en esta sección partimos de que el cosmos está modelado por la métrica de FLRW, si consideramos un universo a gran escala espacialmente isotrópico y homogéneo. Aquí,

¹Podemos relacionar al estado $\Psi(\nu, \phi)$ con $(2|\hat{p}_\phi|)^{-1} \Psi_{\text{fís}}(\nu, \phi)$ y al final obtener una representación unitariamente equivalente del álgebra de los observables de Dirac.

nos enfocamos en el caso particular de universo espacialmente plano y un campo escalar con acomplamiento mínimo, cuya acción es (3.9). La parte geométrica de este modelo es conveniente describirla en términos de las variables geométricas ν y b , las cuales están relacionadas con el volumen del universo y con el parámetro de Hubble H , respectivamente. Además, al ser un sistema invariante ante reparametrizaciones temporales, la dinámica está contenida en la restricción C , ec. (3.13).

En el esquema de cuantización polimérica (o en CCL), este modelo cosmológico se define en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{cin} y las variables de configuración geométricas son $\hat{\nu}$ y $\hat{V}_{\ell_0} = \widehat{e^{i\ell_0\lambda b}}$, las cuales satisfacen el álgebra (3.16). La información física está contenida en los estados $\Psi_{\text{fís}}$ que satisfacen la restricción cuántica \hat{C} (3.19). Generalmente, los estados $\Psi_{\text{fís}}$ no pertenecen a \mathcal{H}_{cin} por lo que no tienen un producto interno definido y es necesario recurrir a la técnica del promedio sobre el grupo para definir un producto interno, ec. (3.26), entre estos estados físicos.

Por otro lado, recurriendo a ϕ como variable de tiempo interna y restringiéndonos sólo a las soluciones de frecuencia positiva tenemos acceso a un marco deparametrizado para este sistema. Aquí, la dinámica está determinada por la ecuación de Schrödinger (3.27) y el producto interno es (3.28).

En el resto de este capítulo construiremos la integral de trayectoria polimérica para este sistema cósmico, tanto en un marco invariante ante reparametrizaciones temporales como en un marco deparametrizado. Para la construcción en el marco invariante ante reparametrizaciones, tomaremos como punto de partida el espacio Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} , el producto interno físico, (3.26), y la relación de ortogonalidad para la base $|\nu, \phi\rangle$, ec. (3.17). En el marco deparametrizado, nos enfocaremos en la ecuación de Schrödinger (3.27) así como en el producto interno para este marco, expresado en la ecuación (3.28).

3.2. Integral de trayectoria por lazos para la cosmología espacialmente homogénea e isotrópica

En esta sección nos enfocaremos en los vectores base $|\nu, \phi\rangle$. Fijando dos estados cinemáticos $|\nu_f, \phi_f\rangle$ y $|\nu_i, \phi_i\rangle$ podemos expresar el producto interno físico de la siguiente manera

$$(|\nu_f, \phi_f\rangle_{\text{fís}}, |\nu_i, \phi_i\rangle_{\text{fís}}) = 2 \int d\alpha \langle \nu_f, \phi_f | e^{i\alpha\hat{C}} | \hat{p}_\phi | \nu_i, \phi_i \rangle, \quad (3.29)$$

donde denotamos como $|\nu, \phi\rangle_{\text{fís}}$ a la solución a la restricción obtenida por el método de promedio sobre el grupo a partir del estado cinemático $|\nu, \phi\rangle$. El propósito de esta sección es mostrar cómo se obtiene un desarrollo que recuerda en parte la descripción de este sistema usando modelos de espuma de espín (MEE) y estudiar sus propiedades a partir de el producto interno físico.

3.2.1. Suma sobre trayectorias

Como en la Sección 2.2, para el caso de la partícula libre, en esta sección se reescribirá el producto interno físico como una suma sobre trayectorias, donde a su vez agruparemos estas trayectorias de acuerdo al número de transiciones en el volumen ν . Siguiendo a Reisenberger y Rovelli [17] partamos del integrando de la ecuación (3.29)

$$A(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i; \alpha)_{\text{fís}} = 2 \langle \nu_f, \phi_f | e^{i\alpha\hat{C}} | p_\phi | \nu_i, \phi_i \rangle. \quad (3.30)$$

Observemos que, de (3.30), $\alpha\hat{C}$ puede interpretarse como un operador Hamiltoniano y esa ecuación se leería como la amplitud de probabilidad de que el estado cinemático $|\nu_i, \phi_i\rangle$ evolucione a el estado $|\nu_f, \phi_f\rangle$ después de un intervalo unitario de tiempo, á la Feynman [19].

La simplificación técnica fundamental de la que ya se ha hecho uso en la sección 2.2 viene del hecho de que \hat{C} es una suma de operadores que actúan de forma separada en \mathcal{H}^{mat} y $\mathcal{H}^{\text{grav}}$. Por lo tanto, la amplitud (3.30) se factoriza como

$$A(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i, \alpha) = A_\phi(\phi_f; \phi_i; \alpha) A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha), \quad (3.31)$$

donde

$$A_\phi(\phi_f; \phi_i; \alpha) = 2\langle\phi_f|e^{i\alpha p_\phi^2}|p_\phi|\phi_i\rangle \quad \text{y} \quad A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \langle\nu_f|e^{-i\alpha\Theta}|\nu_i\rangle. \quad (3.32)$$

La amplitud A_ϕ se evalúa de forma directa al insertar una eigenbase completa del operador \hat{p}_ϕ . La expresión resultante para A_ϕ es

$$A_\phi(\phi_f, \phi_i; \alpha) = 2 \int dp_\phi e^{i\alpha p_\phi^2} e^{ip_\phi(\phi_f - \phi_i)} |p_\phi|. \quad (3.33)$$

La amplitud A_G se estudiará en la siguiente subsección.

3.2.2. La amplitud gravitacional A_G

Para desarrollar el procedimiento estándar de Feynman consideraremos a $e^{-i\alpha C}$ como el operador de evolución durante un intervalo de “tiempo” $\Delta\tau = 1$. Dividamos el intervalo $\Delta\tau$ en partes iguales, de longitud $\epsilon = 1/N$ y escribamos la amplitud gravitacional A_G como

$$\langle\nu_f|e^{-i\alpha\Theta}|\nu_i\rangle = \sum_{\bar{\nu}_{N-1}, \dots, \bar{\nu}_1} \langle\nu_f|e^{-i\epsilon\alpha\Theta}|\bar{\nu}_{N-1}\rangle \langle\bar{\nu}_{N-1}|e^{-i\epsilon\alpha\Theta}|\bar{\nu}_{N-2}\rangle \dots \langle\bar{\nu}_1|e^{-i\epsilon\alpha\Theta}|\nu_i\rangle, \quad (3.34)$$

donde se separó al operador exponencial en N factores y se introdujo un operador identidad en cada tiempo intermedio $\tau = n\epsilon$, con $n = 1, 2, \dots, N-1$. Por simplicidad denotaremos a cada elemento de matriz $\langle\bar{\nu}_n|e^{-i\epsilon\alpha\Theta}|\bar{\nu}_{n-1}\rangle$ como $U_{\bar{\nu}_n\bar{\nu}_{n-1}}$ y a ν_f y ν_i como $\bar{\nu}_N$ y $\bar{\nu}_0$, respectivamente.

Al igual que en la sección 2.2, es posible considerar al conjunto ordenado de puntos $\sigma_N := (\bar{\nu}_N, \bar{\nu}_{N-1}, \dots, \bar{\nu}_0)$ como una trayectoria discreta asociada a esta esqueletonización de N intervalos. El elemento de matriz $A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha)$ esta dado por la suma sobre las trayectorias de las distintas trayectorias discretas con los volúmenes en los extremos, $\bar{\nu}_N$ y $\bar{\nu}_0$, fijos:

$$A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \sum_{\sigma_N} A(\sigma_N) \equiv \sum_{\sigma_N} U_{\bar{\nu}_N\bar{\nu}_{N-1}} U_{\bar{\nu}_{N-1}\bar{\nu}_{N-2}} \dots U_{\bar{\nu}_2\bar{\nu}_1} U_{\bar{\nu}_1\bar{\nu}_0}. \quad (3.35)$$

El siguiente paso en la construcción estándar de la integral de trayectoria es tomar el límite $N \rightarrow \infty$, sin embargo, antes, reorganizaremos las trayectorias de acuerdo a el numero de transiciones de volumen. Para lograr esta reorganización, notemos que en una trayectoria σ_N el volumen $\bar{\nu}_n$ puede permanecer constante durante un cierto numero de instantes de tiempo ϵ , luego puede aumentar su valor de forma discreta y permanecer constante otra cantidad de instantes de tiempo ϵ . Para esta esqueletonización consideramos las trayectoria σ_N^M que involucra $M = 0, 1, \dots, N$ transiciones de volumen

$$\sigma_N^M = \left(\nu_M, \dots, \nu_M; \nu_{M-1}, \dots, \nu_{M-1}; \dots; \overbrace{\nu_1, \dots, \nu_1}^{N_2}; \underbrace{\nu_0, \dots, \nu_0}_{N_1} \right). \quad (3.36)$$

De esta forma, el volumen cambia de ν_{m-1} a ν_m a un tiempo $\tau = N_m \epsilon$ y permanece así hasta el tiempo $\tau = N_{m+1} \epsilon$. Estas trayectorias se pueden etiquetar más claramente de la siguiente forma

$$\sigma_N^M = \{(\nu_M, \dots, \nu_0); (N_M, \dots, N_1)\}, \quad \nu_m \neq \nu_{m-1}, \quad N_m > N_{m-1}. \quad (3.37)$$

La amplitud de probabilidad de la trayectoria σ_N^M está dada por

$$A(\sigma_N^M) = [U_{\nu_M \nu_M}]^{N-N_M-1} U_{\nu_M \nu_{M-1}} \dots [U_{\nu_1 \nu_1}]^{N_2-N_1-1} U_{\nu_1 \nu_0} [U_{\nu_0 \nu_0}]^{N_1-1}. \quad (3.38)$$

La suma sobre todas estas amplitudes se realizarán en tres pasos. Primero, manteniendo fijo el conjunto ordenado de volúmenes (ν_M, \dots, ν_0) y considerando que las transiciones de volumen pueden ocurrir en cualquier valor de $\tau = n\epsilon$ en el intervalo $\Delta\tau$, con $N_m > N_{m-1}$. La suma en cuestión toma la forma

$$A_N(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha) = \sum_{N_M=M}^{N-1} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_1=1}^{N_2-1} A(\sigma_N^M). \quad (3.39)$$

Ahora sumaremos sobre todos los valores de los volúmenes intermedios, respetando que $\nu_m \neq \nu_{m+1}$, para obtener la amplitud $A_N(M)$ asociada a las trayectorias con únicamente M transiciones de volumen:

$$A_N(M; \alpha) = \sum_{\nu_{m-1}, \dots, \nu_1} A_N(\nu_M, \dots, \nu_0, \alpha). \quad (3.40)$$

Finalmente obtenemos la amplitud total $A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha)$ al sumar sobre el número de M de transiciones de volumen posibles dentro de nuestra esqueletonización original en N intervalos:

$$A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \sum_{M=0}^N A_N(M; \alpha). \quad (3.41)$$

Para prescindir de la esqueletonización es necesario tomar el límite $N \rightarrow \infty$. Para esto primero notemos que el M -ésimo término de la suma (3.40) está expresado a través la ecuación (3.40) en términos de las amplitudes $A_N(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha)$, las cuales se pueden reescribir según (3.38) como

$$\begin{aligned} A_N(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha) &= U_{\nu_M \nu_{M-1}} \dots U_{\nu_1 \nu_0} [U_{\nu_M \nu_M}]^N [U_{\nu_M \nu_M} \dots U_{\nu_0 \nu_0}]^{-1} \\ &\times \sum_{N_M=M}^{N-1} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_1=1}^{N_2-1} \left[\frac{U_{\nu_{M-1} \nu_{M-1}}}{U_{\nu_M \nu_M}} \right]^{N_M} \dots \left[\frac{U_{\nu_0 \nu_0}}{U_{\nu_1 \nu_1}} \right]^{N_1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ahora analicemos el comportamiento de los elementos de matriz para los órdenes más bajos en $1/N$, tal como en la sección 2.2:

$$\begin{aligned} U_{\nu_{m+1} \nu_m} &= -\frac{i\alpha}{N} \Theta_{\nu_{m+1} \nu_m} + \mathcal{O}(N^{-2}), \\ [U_{\nu_M \nu_M}]^N &= e^{-i\alpha \Theta_{\nu_M \nu_M}} + \mathcal{O}(N^{-1}), \\ [U_{\nu_M \nu_M} \dots U_{\nu_0 \nu_0}]^{-1} &= 1 + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad \text{y} \\ \left[\frac{U_{\nu_{m-1} \nu_{m-1}}}{U_{\nu_m \nu_m}} \right]^{N_m} &= e^{-i\alpha N_m \epsilon b_m} + \mathcal{O}(N^{-2}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde $b_m = \Theta_{\nu_{m-1}\nu_{m-1}} - \Theta_{\nu_m\nu_m}$. En el límite $N \rightarrow \infty$ podemos tomar a las sumatorias como integrales sobre las variables $\epsilon N_M \rightarrow \tau_m$. Así

$$\begin{aligned} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(\nu_M, \dots, \nu_0, \alpha) \\ &= (-i\alpha)^M \Theta_{\nu_M\nu_{M-1}} \dots \Theta_{\nu_1\nu_0} e^{-i\alpha\Theta_{\nu_M\nu_M}} \\ &\times \int_0^1 d\tau_M \int_0^{\tau_M} d\tau_{M-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 e^{-i\alpha(\sum_{m=1}^M \tau_m b_m)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nótese que los elementos de matriz $\Theta_{\nu_m\nu_n} := \langle \nu_m | \Theta | \nu_n \rangle$ de Θ en \mathcal{H}^{grav} pueden ser calculados fácilmente ya que si $(\nu_m - \nu_n) \notin \{0, \pm 4l_0\}$ entonces $\Theta_{\nu_m\nu_n} = 0$.

Suponiendo que el límite $N \rightarrow \infty$ puede ser intercambiado por la suma sobre ν_{N-1}, \dots, ν_1 en (3.40), llegamos a que la expresión

$$A_G(M; \alpha) := \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(M; \alpha), \quad (3.45)$$

existe para cada M . Nótese que todo lo referente a la esqueletonización desaparece en este límite. Así, $A_G(M; \alpha)$ es la amplitud obtenida al sumar sobre todas las trayectorias que contienen precisamente M transiciones de volumen dentro del intervalo $\Delta\tau = 1$, sin importar en que momento o que valores de volúmenes intermedios intervienen.

Finalmente tenemos que la amplitud total gravitacional puede ser escrita como

$$A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \sum_{M=0}^{\infty} A_G(M; \alpha). \quad (3.46)$$

Mientras que cada amplitud parcial $A_G(M; \alpha)$ está bien definida y es finita, la suma infinita converge como veremos en la subsección 4.2.3. Además, en esta derivación también se supuso que el límite $N \rightarrow \infty$ conmuta con las sumas parciales.

Las integrales de la expresión (3.41) se pueden realizar de forma exacta [18]

$$\begin{aligned} &(-i\alpha)^M e^{-i\Theta_{\nu_M\nu_M}} \int_0^1 d\tau_M \int_0^{\tau_M} d\tau_{M-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 e^{-i\alpha(\sum_{m=1}^M \tau_m b_m)} \\ &= \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum \frac{e^{-i\alpha\Theta_{w_m w_m} \Delta\tau}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde w_m etiqueta los distintos valores que toma el volumen y n_m es el número de veces que ocurre ese volumen en la trayectoria ν_M, \dots, ν_0 . Usando (3.47) en (3.44), obtenemos

$$\begin{aligned} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha) &= \Theta_{\nu_M\nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1}\nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1\nu_0} \\ &\times \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum \frac{e^{-i\alpha\Theta_{w_m w_m} \Delta\tau}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Resumiendo, se ha escrito la parte gravitacional $A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha)$ de la amplitud como una suma sobre historias:

$$A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha) \quad (3.49)$$

con $A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha)$ dado por (3.48). Esta expresión consiste en la suma sobre el número de transiciones de volumen M y la suma sobre el número de secuencias de $M - 1$ volúmenes intermedios que son consistentes con las condiciones de frontera y que cumplen $\nu_m \neq \nu_{m+1}$.

Desarrollo en vértices del producto interno físico.

Recordemos que el producto interno obtenido con la técnica del promedio sobre el grupo, (3.26), es

$$(|\nu_f, \phi_f\rangle_{\text{fís}}, |\nu_i, \phi_i\rangle_{\text{fís}}) = 2 \int d\alpha A_\phi(\phi_f, \phi_i; \alpha) A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha), \quad (3.50)$$

el cual se obtuvo bajo la suposición principal de que es posible intercambiar la integración sobre el parámetro α y la suma, infinita pero convergente, sobre M en el término $A_G(\nu_f, \nu_i; \alpha)$. Usando la ecuación (3.49) obtenemos la siguiente expresión para el producto escalar anterior

$$(|\nu_f, \phi_f\rangle_{\text{fís}}, |\nu_i, \phi_i\rangle_{\text{fís}}) = \sum_{M=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i) \right], \quad (3.51)$$

donde

$$\begin{aligned} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i) &= 2\Theta_{\nu_M \nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_0} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \\ &\times \sum_{m=1}^p \int dp_\phi e^{ip_\phi(\phi_f - \phi_i)} |p_\phi| \frac{\delta(p_\phi^2 - \Theta_{w_m w_m} \Delta\tau)}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

La parte derecha de la ecuación anterior es una suma de distribuciones integradas sobre p_ϕ . De forma directa podemos resolver las integrales sobre p_ϕ y expresar a $A(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i)$ en términos de los elementos de matriz de Θ :

$$\begin{aligned} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i) &= \Theta_{\nu_M \nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_0} \\ &\times \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{e^{i\sqrt{\Theta_{\nu_m \nu_m} \Delta\phi}} + e^{-i\sqrt{\Theta_{\nu_m \nu_m} \Delta\phi}}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde $\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$. Podemos notar de la última expresión que cada amplitud $A(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i)$ es real y por lo tanto el producto escalar obtenido con el promedio sobre el grupo (3.51) también es real.

Finalmente, el procedimiento del promedio sobre el grupo arroja una solución a la restricción la cual tiene componentes de frecuencia negativa y de frecuencia positiva mientras que el espacio de Hilbert físico consiste solamente de soluciones de frecuencia positiva. Denotemos la parte de frecuencia positiva del estado promediado sobre el grupo $|\nu, \phi\rangle_{\text{fís}}$ por $|\nu, \phi\rangle_{\text{fís},+}$. Entonces, el producto escalar físico entre estados de $\mathcal{H}_{\text{fís}}$ está dado por la siguiente suma sobre amplitudes $A(M)$, cada una asociada al número de transiciones de volumen,

$$\begin{aligned} ([\nu_f, \phi_f]_+, [\nu_i, \phi_i]_+)_{\text{fís}} &= \sum_{M=0}^{\infty} A(M) \\ &= \sum_{M=0}^{\infty} \left[\sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} \Theta_{\nu_M \nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_0} \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{e^{i\sqrt{\Theta_{\nu_m \nu_m} \Delta\phi}}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Las características principales de esta expresión son que que la integración sobre α ya fue realizada y resultó convergente y que el sumando involucra a los elementos de matriz de Θ los cuales son fáciles de calcular.

En resumen, partiendo del espacio de Hilbert cinemático y el procedimiento del promedio sobre el grupo se a producido un desarrollo en vértices del producto interno físico.

3.2.3. Serie perturbativa

En esta sección se muestra que la expresión (3.51) de la amplitud de transición se puede obtener usando un desarrollo perturbativo específico. Estructuralmente este desarrollo asemeja la estrategia perturbativa usada en Teoría de Campos en Grupos (TCG) [20, 21]. Consideremos la parte diagonal D y no diagonal \bar{K} del operador Θ en la base $|\nu\rangle$ de tal forma que

$$D_{\nu'\nu} = \Theta_{\nu\nu}\delta_{\nu'\nu}, \quad \bar{K}_{\nu'\nu} = \Theta_{\nu'\nu} - D_{\nu'\nu}. \quad (3.55)$$

Claramente tenemos que $C = p_\phi^2 - D - \bar{K}$. La idea principal es considerar a \bar{K} como una perturbación del termino $p_\phi^2 - D$. Para implementar un desarrollo perturbativo, es necesario introducir la siguiente familia uniparamétrica de operadores

$$C_\lambda = p_\phi^2 - \Theta_\lambda := p_\phi^2 - D - \lambda\bar{K}. \quad (3.56)$$

El parámetro λ simplemente servirá para identificar el exponente de \bar{K} en el desarrollo perturbativo y al final, como es usual, lo fijaremos a uno.

Como punto de partida se toma la descomposición de la amplitud $A(\nu_f, \phi_f; \nu_i \phi_i; \alpha)$ en su parte gravitacional y la parte de materia. La dependencia en λ aparece en la parte gravitacional de la siguiente forma

$$A_G^{(\lambda)}(\nu_f, \nu_i, \alpha) := \langle \nu_f | e^{-i\alpha\Theta_\lambda} | \nu_i \rangle. \quad (3.57)$$

Consideremos ahora un desarrollo perturbativo de esta amplitud. Nuevamente pensamos en $e^{-i\alpha\Theta_\lambda}$ como un operador de evolución auxiliar definido por el Hamiltoniano αD y una ‘perturbación’ $\lambda\alpha\bar{K}$. Definamos el ‘Hamiltoniano de interacción’ como

$$H_I(\tau) = e^{i\alpha D\tau} \alpha\bar{K} e^{-i\alpha D\tau}. \quad (3.58)$$

Así, la evolución en el esquema de interacción esta dictado por la familia de operadores unitarios que actúan sobre $\mathcal{H}^{\text{grav}}$ de la siguiente manera

$$\tilde{U}_\lambda(\tau) = e^{i\alpha D\tau} e^{i\alpha\Theta_\lambda\tau}, \quad \text{satisfaciendo} \quad \frac{d\tilde{U}_\lambda(\tau)}{d\tau} = -i\lambda H_I(\tau)\tilde{U}_\lambda(\tau) \quad (3.59)$$

La solución a esta última ecuación está dada por la exponencial temporalmente ordenada

$$\tilde{U}_\lambda(\tau) = \mathcal{T} e^{-i\lambda \int_0^\tau H_I(\tau) d\tau} = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M \int_0^\tau d\tau_M \int_0^{\tau_M} d\tau_{M-1} \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 [-iH_I(\tau_M)] \dots [-iH_I(\tau_1)]. \quad (3.60)$$

Ahora usamos la relación $e^{-i\alpha\Theta_\lambda} = e^{-i\alpha D} \tilde{U}_\lambda(1)$, tomamos los elementos de matriz de $e^{i\alpha\Theta_\lambda}$ entre los estados inicial $|\nu_i = \nu_0\rangle$ y final $|\nu_f = \nu_M\rangle$, y los escribimos de forma explícita en el producto de H_I 's. El resultado es

$$A_G^{(\lambda)}(\nu_f, \nu_i, \alpha) = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M \int_0^1 d\tau_M \dots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \sum_{\nu_M, \dots, \nu_1} [e^{i(1-\tau_M)\alpha D_{\nu_M\nu_M}}] \times (-i\alpha\bar{K}_{\nu_M\nu_{M-1}}) \dots (-i\alpha\bar{K}_{\nu_2\nu_1}) [e^{i(1-\tau_M)\alpha D_{\nu_1\nu_1}}]. \quad (3.61)$$

Reemplazando a D y a \bar{K} (recordemos que \bar{K} no tiene elementos en la diagonal) por sus definiciones tenemos que

$$A_G^{(\lambda)}(\nu_f, \nu_i; \alpha) = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha), \quad (3.62)$$

donde $A(\nu_M, \dots, \nu_0; \alpha)$ esta dada por la ecuación (3.48).

Es posible construir la amplitud total al incluir el factor correspondiente al campo escalar y realizando la integral sobre el parámetro α como en la sección 2.2. De esta forma, el producto interno físico que da el procedimiento sobre el grupo es

$$([\nu_f, \phi_f], [\nu_i, \phi_i])^{(\lambda)} = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A(\nu_M, \dots, \nu_0, \phi_f, \phi_i), \quad (3.63)$$

donde $A(\nu_M, \dots, \nu_0, \phi_f, \phi_i)$ esta dado por (3.53). Si fijamos el valor de λ a 1 entonces (3.63) se reduce a (3.51).

Así, considerando formalmente a la parte no diagonal de Θ como una perturbación, se obtuvo una derivación independiente del desarrollo en vértices de $([\nu_f, \phi_f], [\nu_i, \phi_i])$ como una serie de potencias en λ , sirviendo la potencia de λ para resaltar el numero de vértices de cada término en la serie. Por lo tanto, en esta segunda derivación de la amplitud también se supone que es posible intercambiar la integral sobre α con la suma infinita (pero convergente) sobre M en (3.62).

3.2.4. Satisfaciendo la constricción

El producto interno físico entre dos estados base define una función de dos puntos

$$G(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) := ([\nu_f, \phi_f]_+, [\nu_i, \phi_i]_+)_{\text{fís.}} \quad (3.64)$$

Del Apéndice B sabemos que éste producto interno satisface la ecuación de constricción en cada argumento. Si nos fijamos sólo en el primer argumento tenemos que

$$[\partial_{\phi_f}^2 - \Theta_f]G(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) = 0, \quad (3.65)$$

donde Θ_f actúa sobre los estados $\Phi(\nu_f)$. Si reemplazamos a Θ por Θ_λ obtenemos una función de dos puntos $G_\lambda(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i)$ que permite el siguiente desarrollo perturbativo

$$G_\lambda(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M A_M(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i), \quad (3.66)$$

donde A_M es la amplitud definida en (3.54) y

$$\begin{aligned} A_M(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) &= \sum_{\nu_{m-1}, \dots, \nu_1} A_+(\nu_m, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i) \\ &\equiv \sum_{\nu_{m-1}, \dots, \nu_1} \Theta_{\nu_m \nu_{m-1}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_0} \\ &\times \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{e^{i\sqrt{\Theta_{w_m w_m}} \Delta \phi}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

El subíndice + en $A_+(\nu_M, \dots, \nu_0; \phi_f, \phi_i)$ enfatiza que hemos tomado sólo la parte de frecuencia positiva.

Comprobaremos que G_λ satisface (3.65) para cada orden en λ . Dado que $\Theta_\lambda = D + \lambda K$, nuestra tarea se reduce a mostrar que

$$(\partial_{\phi_f}^2 - D_f)A_M(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) - \bar{K}_f A_{M-1}(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) = 0. \quad (3.68)$$

Entonces, sin pérdida de generalidad supondremos que $\nu_f = w_p$ en (3.67) y tenemos que

$$\begin{aligned} (\partial_{\phi_f}^2 - D_f)A_+(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1; \phi_f, \phi_i) &= \Theta_{\nu_f \nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_i} \\ &\times \left[\prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{\Theta_{w_m w_m} e^{i\sqrt{\Theta_{w_m w_m}} \Delta \phi}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})} \right. \\ &\left. - \Theta_{w_p w_p} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{\Theta_{w_m w_m} e^{i\sqrt{\Theta_{w_m w_m}} \Delta \phi}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Si w_p ocurre con multiplicidad $n_p = 1$, i.e. si ν_f es el único volumen que toma el valor w_p , entonces no hay derivadas en $\Theta_{w_p w_p}$ en la ecuación superior y se simplifica a

$$\begin{aligned} (\partial_{\phi_f}^2 - D_f)A_+(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1; \phi_f, \phi_i) &= \Theta_{\nu_f \nu_{M-1}} \Theta_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots \Theta_{\nu_1 \nu_i} \\ &\times \left[\prod_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{\Theta_{w_m w_m} e^{i\sqrt{\Theta_{w_m w_m}} \Delta \phi}}{\prod_{j \neq m}^p (\Theta_{w_m w_m} - \Theta_{w_j w_j})} \right] \\ &= \Theta_{\nu_f \nu_{M-1}} A_+(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1; \phi_f, \phi_i). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Así, en trayectorias donde el volumen final ocurre una sola vez en la secuencia, la acción del operador $[\partial_{\phi_f}^2 - D]$ da la amplitud de la trayectoria sin considerar el volumen ν_f y multiplicado por el elemento de matriz de Θ relacionado con la transición de volumen de ν_{M-1} a ν_f . En general, el volumen final puede aparecer en la trayectoria más de una vez: $n_p \neq 1$. En este caso es necesario considerar a $\Theta_{w_p w_p}$ en las derivadas pero finalmente será el mismo resultado. Entonces, en general tenemos que

$$(\partial_{\phi_f}^2 - D_f)A_+(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1; \phi_f, \phi_i) = \Theta_{\nu_f \nu_{M-1}} A_+(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1; \phi_f, \phi_i). \quad (3.71)$$

Finalmente, la evaluación de la acción de la parte no diagonal \bar{K} en A_{M-1} queda como:

$$\bar{K}_f A_+(\nu_f, \nu_{M-2}, \dots, \nu_1, \nu_i; \phi_f, \phi_i) = \sum_{\nu_{M-1}} \Theta_{\nu_f \nu_{M-1}} A_+(\nu_{M-1}, \nu_{M-2}, \dots, \nu_1, \nu_i; \phi_f, \phi_i) \quad (3.72)$$

Combinando los dos últimos resultados en la ecuación (3.67), vemos que la constricción se satisface orden por orden. Así el desarrollo perturbativo obtenido es solución a la constricción cuántica. Además es una buena solución perturbativa en el sentido de que si tomamos solamente trayectorias con M^* transiciones de volumen, o menos, entonces la constricción se satisface a orden λ^{M^*} :

$$[\partial_{\phi_f}^2 - (D_f + \lambda K_f)] \sum_{M=0}^{M^*} \lambda^M A_M(\nu_f, \phi_f; \nu_i, \phi_i) = \mathcal{O}(\lambda^{M^*+1}). \quad (3.73)$$

Este último cálculo provee una comprobación explícita, en este modelo en particular, de una expectativa central sobre los MEE: La demostración de que el producto interno físico entre redes de espín, expresadas como un desarrollo en vértices, es solución al Hamiltoniano de la gravedad cuántica por lazos (GCL) orden por orden.

3.3. Marco deparametrizado

En esta sección, partiremos del marco deparametrizado el cual enfatizamos en rol de ϕ como tiempo interno. Como se mencionó al inicio de este capítulo, en este caso podemos trabajar en el esquema tipo Schrödinger, considerando a ν como nuestra variable de configuración y ϕ como la variable de tiempo. Los estados físicos están ahora representados por funciones $\Psi(\nu)$ con la siguiente norma finita

$$\|\Psi\|_{\text{fís}}^2 = \sum_{\nu=4nl_0} |\Psi(\nu)|^2, \quad (3.74)$$

y cuya evolución esta determinada por ecuación de Schrödinger

$$-i\partial_\phi\Psi(\nu, \phi) = \sqrt{\Theta}\Psi(\nu, \phi) \equiv H\Psi(\nu, \phi). \quad (3.75)$$

En contraste con la sección 3.1, en esta sección no estamos interesados en el espacio de Hilbert cinemático o el procedimiento de promedio sobre el grupo. El objetivo primario de interés será la amplitud de transición

$$A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \langle \nu_f | e^{iH\varphi} | \nu_i \rangle, \quad (3.76)$$

para pasar del estado inicial $|\nu_i\rangle$ en el tiempo $\phi_i = 0$ al estado $|\nu_f\rangle$ en el tiempo $\phi_f = \varphi$. De la sección 3.1, uno esperaría que esta amplitud de transición sea igual que el producto escalar físico $([\nu_f, \varphi]_+, [\nu_i, 0]_+)_{\text{fís}} = G(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0)$ considerado en la sección 3.1. Este es el caso para la solución de frecuencia positiva $\Psi_{\nu_i, \phi_i} \equiv [\nu_i, \phi_i]_+$ obtenida mediante el promedio sobre el grupo del vector base $|\nu_i, \phi_i\rangle$ dado por

$$\Psi_{\nu_i, \phi_i}(\nu, \phi) = \int dk (\bar{e}_k(\nu_i) e^{-i\omega_k \phi_i}) e^{i\omega_k(\phi)} e_k(\nu), \quad (3.77)$$

por lo tanto el producto interno entre dos estados de frecuencia positiva $[\nu_i, \phi_i]_+$ y $[\nu_f, \phi_f]_+$ está dado por

$$([\nu_f, \phi_f]_+, [\nu_i, \phi_i]_+)_{\text{fís}} = \int dk e^{i\omega_k(\phi_f - \phi_i)} \bar{e}_k(\nu_i) e_k(\nu_f). \quad (3.78)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es precisamente la amplitud $\langle \nu_f | e^{iH\varphi} | \nu_i \rangle$. Sin embargo, la interpretación actual nos permite considerar a $A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0)$ como una amplitud de transición física con un Hamiltoniano H . Por lo tanto, podemos seguir literalmente el procedimiento de Feynman usado en la mecánica cuántica no relativista. En esta sección buscaremos obtener de nuevo un desarrollo en vértices para esta amplitud pero encontraremos la particularidad de que si se trunca este desarrollo a un orden finito, entonces el desarrollo sera distinto del obtenido en la sección 3.1.

Dejando de lado las diferencias conceptuales importantes, el procedimiento matemático usado en esta sección es completamente análogo al usado en la sección 3.1. Por lo tanto, sólo presentaremos los pasos principales.

3.3.1. Suma sobre historias

Siguiendo los pasos de Feynman, dividiremos el intervalo temporal $(\varphi, 0)$ en N partes iguales, cada parte de longitud $\epsilon = \varphi/N$, y expresaremos la amplitud de transición $A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0)$ como una suma sobre trayectorias discretas $\sigma_N = (\nu_f = \bar{\nu}_N, \dots, \bar{\nu}_1, \nu_0 = \nu_i)$:

$$A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \sum_{\sigma_N} A(\sigma_N) \quad \text{con} \quad A(\sigma_N) = U_{\bar{\nu}_N \bar{\nu}_{N-1}} U_{\bar{\nu}_{N-1} \bar{\nu}_{N-2}} \dots U_{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_0}, \quad (3.79)$$

donde $U_{\bar{\nu}_n, \bar{\nu}_{n-1}} \equiv \langle \bar{\nu}_n | e^{iH\epsilon} | \bar{\nu}_{n-1} \rangle$. A diferencia de la sección 3.1, aquí la amplitud es puramente gravitacional y el parámetro α del procedimiento del promedio sobre el grupo no está presente.

Como en la subsección 3.2.2, el siguiente paso es reordenar esta suma de forma que enfatice convenientemente las transiciones de volumen. Así, primero notemos que el volumen puede permanecer constante durante un número de intervalos ϵ y consideremos las historias σ_N^M con precisamente M transiciones de volumen:

$$\sigma_N^M = \{(\nu_M, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1, \nu_0); (N_M, N_{M-1}, \dots, N_2, N_1)\}, \quad \nu_m \neq \nu_{m-1}, N_m > N_{m-1}, \quad (3.80)$$

donde ν_m, \dots, ν_0 denotan los volúmenes que intervienen en la historia σ_N^M y N_k denota el número de intervalos ϵ después de los cuales ocurre el cambio del volumen ν_{k-1} a ν_k . La amplitud de probabilidad para esa historia σ_N^M está dada por

$$A(\sigma_N^M) = [U_{\nu_M \nu_M}]^{N-N_M-1} U_{\nu_M \nu_{M-1}} \dots [U_{\nu_1 \nu_1}]^{N_2-N_1-1} U_{\nu_1 \nu_0} [U_{\nu_0 \nu_0}]^{N_1-1}. \quad (3.81)$$

Podemos llevar a cabo la suma sobre todas estas amplitudes en tres pasos. Primero, mantengamos fijo el conjunto ordenado de volúmenes (ν_M, \dots, ν_0) , pero consideremos que las transiciones de volumen pueden ocurrir en cualquier momento, $n\epsilon$ con $n = 1, 2, \dots$, en el intervalo de tiempo, esto sujeto a que la m -ésima transición ocurra antes de la $(m+1)$ -ésima transición para toda m . La suma sobre todo este conjunto de historias es

$$A_N(\nu_M, \dots, \nu_0) = \sum_{N_M=M}^{N-1} \sum_{N_{M-1}=M-1}^{N_M-1} \dots \sum_{N_1=1}^{N_2-1} A(\sigma_N^M). \quad (3.82)$$

El segundo paso consiste en sumar todos los posibles valores ν_m que pueden tomar los volúmenes intermedios ν_m pero tal que $\nu_m \neq \nu_{m-1}$, con $\nu_0 = \nu_i$ y $\nu_M = \nu_f$. De esta forma, obtenemos la amplitud $A(M)$ asociada con el conjunto de todas las trayectorias en las cuales hay exactamente M transiciones de volumen:

$$A_N(M) = \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A_N(\nu_M, \dots, \nu_0). \quad (3.83)$$

Por último, la amplitud total $A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0)$ se obtiene al sumar sobre todas las posibles transiciones de volumen de nuestra esqueletonización inicial con N intervalos ϵ :

$$A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \sum_{M=0}^N A_N(M). \quad (3.84)$$

Al igual que en la amplitud gravitacional obtenida en la subsección 3.2.2, dado que $A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \langle \nu_f | e^{iH\varphi} | \nu_i \rangle$, el valor de la amplitud (3.84) no depende de N . Así, mientras que el rango de M en la suma y la amplitud $A_N(M)$ en (3.84) dependen de N , la suma no lo hace y podemos evitar una esqueletonización particular si tomamos el límite $N \rightarrow \infty$. En este límite lo referente a la esqueletonización del intervalo temporal desaparece y las transiciones de volumen pueden ocurrir en cualquier momento del intervalo continuo $(0, \varphi)$. La contribución A_M de las trayectorias con precisamente M transiciones de volumen tienen un límite continuo, $N \rightarrow \infty$, bien definido y la amplitud total está dada por una suma sobre M

$$A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \sum_{M=0}^{\infty} A_M(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0), \quad (3.85)$$

donde las amplitudes parciales A_M están dadas por

$$\begin{aligned}
A_M(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) &= \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} A(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1, \nu_i, \varphi) \\
&= \sum_{\nu_{M-1}, \dots, \nu_1} H_{\nu_M \nu_{M-1}} H_{\nu_{M-1} \nu_{M-2}} \dots H_{\nu_1 \nu_0} \\
&\times \prod_{k=1}^p \frac{1}{(n_k - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial H_{w_k w_k}} \right)^{n_k - 1} \sum_{m=1}^p \frac{e^{iH_{w_k w_k} \varphi}}{\prod_{j \neq m}^p (H_{w_k w_k}) - H_{w_j w_j}}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Nuevamente la amplitud de transición total del modelo cósmico es expresada como en (3.86) como un desarrollo en vértices a la manera de los MEE. Al comparar la ec. (3.86) con el desarrollo obtenido en el marco invariante, ec (3.54), podemos notar que la primera se describe en términos de elementos de matriz de $H = \sqrt{\Theta}$ [18] mientras que el segundo depende de los elementos de matriz de Θ . Recalquemos que en cada caso se están enfatizando aspectos distintos de la dinámica: por un lado, el marco invariante ante reparametrizaciones temporales y el procedimiento del promedio sobre el grupo en (3.54) y, por otro lado, la deparametrización del sistema cósmico usando a ϕ como variable de tiempo relacional en (3.86).

3.3.2. Desarrollo perturbativo

El desarrollo en vértices (3.86) también se puede obtener como una serie perturbativa imitando a la TCG. Como en la subsección 3.2.3, el enfoque perturbativo tiene la ventaja de que éste puede garantizar la convergencia de la serie obtenida.

Para este desarrollo tomamos el Hamiltoniano H y lo separamos en su parte diagonal D y su parte no diagonal \bar{K} . Por último, definamos la familia de operadores $H_\lambda = D + \lambda \bar{K}$, donde λ servirá solamente como un marcador del exponencial de K , es decir, el numero de transiciones de volumen. De forma análoga a la subsección 3.2.3, considerando el cambio $\Theta \rightarrow H = \sqrt{\Theta}$ y trabajando en el adecuado el esquema de interacciones, se obtiene

$$A_\lambda(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = \sum_{M=0}^{\infty} \lambda^M A_M(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0), \tag{3.87}$$

donde A_M está definida en (3.86). Si hacemos $\lambda = 1$ en (3.87), recuperamos el desarrollo obtenido en (3.85) como en el caso de los MEE.

3.3.3. La ecuación de Schrödinger

Recordemos que en el esquema deparametrizado, la ecuación de Schrödinger incorpora la constricción cuántica y la selección de los estados con frecuencias positivas y que, por definición, la amplitud de transición $A(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0)$ satisface la ecuación de Schrödinger. Pero es útil saber, respecto al desarrollo perturbativo, si al truncar el desarrollo (3.87) la ecuación de Schrödinger se satisface de forma aproximada y que esté bajo control.

Dado que el hamiltoniano en el desarrollo perturbativo es $H_\lambda = D + \lambda \bar{K}$, la ecuación de Schrödinger se satisface, orden por orden, si

$$(i\partial_\varphi + D_f)A_M(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) + K_f A_{M-1}(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) = 0. \tag{3.88}$$

Entonces, usando la expresión (3.86) para las amplitudes parciales A_M , necesitamos verificar que

$$\sum_{\nu_{M-2}, \dots, \nu_1} \left[\sum_{\nu_{M-1}} (i\partial_\varphi + D_f) A_M(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1, \nu_i; \varphi) + K_f A_{M-1}(\nu_f, \nu_{M-2}, \dots, \nu_1, \nu_i; \varphi) \right] \quad (3.89)$$

sea nulo para cada M . Como en la subsección 3.2.3, basándonos en las ecuaciones ecs. (3.71) y (3.72), la ecuación se satisface para cada trayectoria, i.e. para cada amplitud intermedia $A(\nu_f, \nu_{M-1}, \dots, \nu_1, \nu_i; \varphi)$ y $A(\nu_f, \nu_{M-2}, \dots, \nu_1, \nu_i; \varphi)$. De esta forma se muestra que el desarrollo en vértices resultante de la serie perturbativa satisface la dinámica cuántica de forma controlada. Si quisiéramos truncar la serie perturbativa hasta $M = M^*$, tendríamos

$$(i\partial_\varphi + D_f + \lambda K_f) \left[\sum_{M=0}^{M^*} \lambda^M A_M(\nu_f, \varphi; \nu_i, 0) \right] = \mathcal{O}(\lambda^{M^*+1}). \quad (3.90)$$

Capítulo 4

Discusión, conclusiones y perspectivas

El interés en el comportamiento de la interacción gravitacional en situaciones extremas como lo son el llamado “big ban” en el cosmos ó el caso de los agujeros negros, nos lleva naturalmente a plantearnos una posible descripción que incorpore elementos cuánticos en la forma de una teoría de gravedad cuántica. Una de las propuestas desarrolladas recientemente en esta dirección es la denominada gravedad cuántica por lazos. Esta consiste en un tratamiento hamiltoniano de la relatividad general en el que a nivel cuántico los estados gravitacionales resultan estar etiquetados por gráficas formadas por nodos y aristas. Tales gráficas explican el uso del término “lazos” y también justifican el adjetivo polimérico que hemos adoptado en esta tesis y que surge por la similitud con las estructuras en la física de materiales. Una propuesta alternativa a la hamiltoniana para el estudio de la gravedad cuántica son los modelos de espuma de espín que están inspirados más bien en una amplitud de transición o propagador á la Feynman. Sin embargo un análisis exhaustivo de estos modelos basado en la integral de trayectoria estándar sólo se ha iniciado recientemente. Ashtekar et. al. [1] calcularon el propagador de un modelo homogéneo e isotrópico usando este esquema combinado con la técnica del promedio en el grupo que permite incorporar la invariancia por reparametrizaciones temporales del modelo. A pesar de que este modelo posee un numero finito de grados de libertad su estudio se complica por las características propias de su dinámica. Esta situación nos llevó a considerar en este trabajo modelos mecánicos que son más sencillos desde el punto de vista de su dinámica.

En esta tesis estudiamos el propagador polimérico via integral de trayectoria de una partícula no relativista, tanto libre como en una caja, así como el de una partícula libre relativista, para pasar después al caso del modelo cósmico homogéneo e isotrópico. Primeramente, en el segundo capítulo, recordamos algunos elementos de la cuantización polimérica hamiltoniana. En lugar del álgebra canónica asociada a los observables \hat{x} y \hat{p} , adoptamos el álgebra tipo Weyl, ec. (2.4), manteniendo (2.3) pero en un espacio de Hilbert polimérico $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, ec. (2.5). Enseguida se planteó el propagador con base en la integral de trayectoria, los elementos anteriores de la cuantización polimérica hamiltoniana y la técnica del promedio en el grupo. Específicamente particionamos la expresión del propagador en términos del parámetro que reemplaza al tiempo y se analizaron sus contribuciones infinitesimales. En este punto fueron introducidas relaciones de completéz para ambas variables, de tiempo y espacio, que tienen carácter continuo y discreto, respectivamente. El uso de esta última característica refleja el aspecto polimérico del tratamiento, incorporando en particular una red regular en lugar de la recta real o un intervalo de ésta, en el caso de la caja. Uno de los elementos técnicos más útiles de los que se adoptaron aquí fue

la organización de las contribuciones de las diferentes trayectorias en términos del número de transiciones correspondientes a cambios en la posición de la partícula.

Bajo esta organización particular obtuvimos la amplitud de transición para sistemas mecánicos, ec. (2.50), como una suma sobre amplitudes parciales, ec. (2.48), donde cada amplitud parcial corresponde a la contribución de todas las trayectorias con un determinado número de transiciones en x . Es necesario resaltar que la amplitud de transición obtenida sólo es válida para sistemas con un potencial W nulo, como es el caso de los sistemas mecánicos desarrollados en las subsecciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3. Otros casos con $W \neq 0$ requieren más estudio.

Después procedimos a emplear esta amplitud de transición para sistemas mecánicos específicos como la partícula libre considerando el hamiltoniano propuesto en la subsección 2.1.1. Para ello tomamos la forma explícita de los elementos de matriz del hamiltoniano, ec.(2.52), y ec. (2.53), y los introducimos en la ec. (2.48), obteniendo el propagador polimérico (2.65), mismo que se obtuvo en [2] y [4] por métodos hamiltonianos.

Para obtener el propagador de la partícula no relativista en la caja usamos el caso libre excepto que las trayectorias consideradas se restringen a aquellas que yacen en la región de la caja rígida. Explícitamente este modelo puede expresarse como una serie de propagadores de la partícula libre polimérica como lo muestra la ec. (2.81).

Para cada uno de estos tres casos verificamos que en la aproximación continua, $\mu_0 \rightarrow 0$, los propagadores correspondientes coinciden con aquellos obtenidos por el esquema de cuantización de Schrödinger.

Después, en el capítulo 3, pasamos a discutir el caso del modelo cosmológico. En esta parte seguimos de cerca la referencia [1]. Usando como punto de partida la descripción canónica clásica del modelo de FLRW acoplado a un campo escalar homogéneo se repasa brevemente el tratamiento cuántico polimérico del mismo, en el esquema hamiltoniano. Se subraya el papel fundamental que juega la constricción asociada con la invariancia por reparametrizaciones temporales de este modelo relativista (3.19). El propagador físico para este modelo via la integral de trayectoria se obtiene promediando sobre el grupo de transformaciones inducidas por tal constricción, en el que sólo es necesario considerar la contribución de los modos de frecuencia positiva. Parte de la información del espacio de Hilbert polimérico se introduce aquí y la integral de trayectoria correspondiente es susceptible de ser organizada en términos del número de transiciones en la variable de volumen que es la análoga de la variable de configuración \hat{x} de los modelos mecánicos. El propagador toma la forma (3.54).

Notablemente, al considerar el propagador como un desarrollo perturbativo en el que la parte no diagonal de la contribución gravitacional a la constricción se toma como una perturbación con respecto a su parte diagonal más la materia, se reobtiene (3.54). Aún más esta serie truncada a los primeros M^* términos satisface la constricción a cada orden como puede verse en la ec. (3.73). Claramente este es el análogo de la relación que guarda la amplitud de Feynman con la ecuación de Schrödinger.

Por otro lado, tenemos acceso a un marco deparametrizado cuando se usa un campo escalar como variable de tiempo interno. En este caso la dinámica está descrita por la ecuación (3.85). Término a término, (3.54) y (3.85), no coinciden, pero sí las correspondientes sumas.

Entre las conclusiones de este trabajo podemos incluir las siguientes. El modelo cósmico polimérico tiene un par de características que es importante resaltar: primero, la simetría asociada a invariancia por reparametrizaciones temporales y, segundo, el marco de cuantización polimérico. La forma de estudiar estas características es recurrir a sistemas mecánicos, como en el capítulo 2 para la partícula no relativista libre y en la caja, en los cuales podemos analizar por separado algunas implicaciones de la simetría por invariancia ante reparametrizaciones y el esquema

polimérico excluyendo, sin embargo, las dificultades técnicas de la dinámica cósmica específica.

La organización de las trayectorias usando el número de transiciones en la variable de configuración es esencialmente la misma para los sistemas mecánicos y para el modelo cósmico. En los primeros, la variable polimérica es la posición \hat{x} y las trayectorias en la amplitud de transición se organizan dependiendo del número de transiciones en la posición que estas tengan. Por otro lado, en el modelo cósmico la variable discreta \hat{v} representa un volumen, por lo que el ordenamiento de trayectorias aquí se hace respecto al número de transiciones de volumen.

Los propagadores de la partícula polimérica no relativista, libre y en una caja, ya habían sido calculados con base en el formalismo hamiltoniano, mientras que en esta tesis hemos mostrado cómo obtenerlos usando la integral de trayectoria. Además, obtuvimos el propagador de la partícula polimérica relativista, el cual no ha sido reportado hasta donde sabemos, ya sea por el método hamiltoniano o por integral de trayectoria. Cabe mencionar que para los tres sistemas mecánicos aquí considerados la aproximación al continuo para cada uno de los respectivos propagadores coincide con los propagadores que se obtienen tomando el esquema de cuantización de Schrödinger.

Al comparar el propagador cósmico obtenido en un marco deparametrizado respecto al obtenido en un marco invariante, se encuentra que término a término estas series difieren. Sin embargo las series convergen al mismo resultado. Esta “discrepancia” del caso cósmico no está presente para la partícula no relativista, en los cuales se obtiene la misma serie para los propagadores tanto en un marco deparametrizado como invariante.

Es posible extender las ideas desarrolladas en esta tesis. A continuación describimos algunas posibilidades. Desde el punto de vista de los modelos mecánicos, un punto pendiente es analizar la serie obtenida del propagador de la partícula relativista respecto al que se pudiera obtener en un marco deparametrizado, buscando esclarecer la discrepancia ocurrida en el modelo cósmico. Otro sistema mecánico de interés en el formalismo de integral de trayectoria polimérica resulta ser el oscilador armónico, cuyas aplicaciones son muy importantes [26].

Para modelos cósmicos, podemos pensar en extensiones respecto al modelo aquí considerado, que es homogéneo e isotrópico con curvatura espacial nula $k = 0$. Por ejemplo modelos con otras curvaturas ($k = 1, -1$) [27] o, mejor aún, tratar inhomogeneidades posiblemente a nivel perturbativo [29]. Otros modelos gravitacionales interesantes para el presente esquema de integrales de trayectoria, considerando un tratamiento perturbativo, son los modelos inhomogéneos con simetría esférica.

Por último, la relación entre los modelos cósmicos hamiltonianos y los modelos cósmicos derivados del formalismo de espumas de espín requiere más estudio [1, 30, 31].

Apéndice A

Integral de trayectoria y cuantización de Schrödinger de una partícula libre no relativista

El propagador de la mecánica cuántica usual $G(x, t; x', t')$ nos permite obtener la función de onda de un sistema físico a un tiempo t a partir de una función de onda inicial al tiempo t' como lo se muestra a continuación [22]

$$\psi(x, t) = \int dx' G(x, t; x', t') \psi(x', t'). \quad (\text{A.1})$$

Este propagador se define como la amplitud de transición de un estado $|x'\rangle$, en un tiempo t' , a un estado $|x\rangle$, a un tiempo t , es decir,

$$G(x, t; x', t') := \langle x, t | x', t' \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t')} | x' \rangle, \quad (\text{A.2})$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema. De (A.2) es fácilmente que se satisfacen las siguientes propiedades:

- Consistencia con las condiciones iniciales:

$$\lim_{t \rightarrow t'} G(x, t; x', t') = \delta(x - x'). \quad (\text{A.3})$$

- Regla de composición: para $t > \bar{t} > t'$

$$G(x, t; x', t') = \int d\bar{x} G(x, t; \bar{x}, \bar{t}) G(\bar{x}, \bar{t}; x', t'). \quad (\text{A.4})$$

- Para el operador de Schrödinger $i\hbar\partial_t + \hat{H}$, la distribución $\Theta(t - t')G(x, t; x', t')$ es una función de Green

$$\left(i\hbar\partial_t + \hat{H} \right) \Theta(t - t')G(x, t; x', t') = \delta(x - x')\delta(t - t'). \quad (\text{A.5})$$

Existen distintas métodos para calcular este propagador, siendo dos de ellos el método espectral y la método de integral de caminos de Feynman. La método espectral nos permite obtener

el propagador de forma sencilla si conocemos los eigenestados $|\psi_s\rangle$ y los eigenvalores respectivos E_s del Hamiltoniano \hat{H} del sistema. Para calcular el propagador con este método, introducimos un operador identidad de eigenestados del Hamiltoniano, $\sum_s |\psi_s\rangle\langle\psi_s|$, en el producto intero que aparece en (A.2), obteniendo así

$$G(x, t; x', t') = \sum_s \langle x|\psi_s\rangle\langle\psi_s| e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar}|x'\rangle = \sum_s \psi_s(x)\psi_s(x') e^{iE_s(t-t')\hbar}. \quad (\text{A.6})$$

Por ejemplo, para partícula libre, donde el Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$, los eigenestados de energía son

$$\psi_p(x) = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{con } p \in \mathbb{R} \quad (\text{A.7})$$

con sus respectivos eigenvalores $E_s = p^2/2m$. Usando la ecuación (A.6) (en este caso debemos sustituir la sumatoria por una integral debido al dominio de p):

$$\begin{aligned} G(x, t; x', t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(x-x')/\hbar} e^{-ip^2(t-t')/2m\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t-t')}} e^{\frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Otro método para calcular los propagadores esta directamente relacionado con la formulación de integrales de camino. La importancia de este método radica en la relación que surge entre el propagador cuántico de un sistema con el lagrangiano y el hamiltoniano que lo describe clásicamente. Esta formulación fue desarrollada primeramente por Richard P. Feynman en 1948 [19]. El primer paso de este método consiste en reescribir el operador de evolución temporal de la siguiente forma

$$e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar} = \underbrace{e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} \dots e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}}_{N \text{ veces}}, \quad (\text{A.9})$$

donde $\epsilon N = (t - t')$. Posteriormente, se introduce un operador identidad formado con los eigenestados del operador de \hat{x} , $\int dx|x\rangle\langle x|$, entre cada producto de operadores $e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}$. Por ejemplo, para la partícula libre tenemos

$$\begin{aligned} G(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f, t_f|x_i, t_i\rangle = \langle x_f| e^{-i\hat{H}_0(t_f-t_i)/\hbar}|x_i\rangle, \\ G(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \prod_{j=1}^{N-1} \left(\int_{\mathbb{R}} dx_j \right) \langle x_f| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_{N-2}\rangle \dots \\ &\quad \times \langle x_2| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_1\rangle \langle x_1| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_i\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En (A.10), el propagador esta expresado con una serie de $N - 1$ integrales sobre un producto de N amplitudes, donde cada una de estas amplitudes se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle x_n| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_{n-1}\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle x_n| e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|p_n\rangle \langle p_n|x_{n-1}\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(-\frac{p_n^2}{2m} + \frac{p_n(x_n-x_{n-1})}{\epsilon} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Usando (A.11) en (A.10) tenemos

$$G(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx_n \right) e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(-\frac{p_n^2}{2m\hbar} + \frac{p_n(x_n-x_{n-1})}{\epsilon} \right)}. \quad (\text{A.12})$$

Al considerar el límite $N \rightarrow \infty$ en (A.12), el exponente del integrando pasa a ser la acción clásica $S(x_f, t_f; x_i, t_i)$ de la partícula libre multiplicado por el factor i/\hbar

$$\frac{i}{\hbar} S(x_f, t_f; x_i, t_i) = \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p\dot{x} - \frac{p^2}{2m} \right). \quad (\text{A.13})$$

Esta última ecuación mostrar la relación entre el propagador cuántico y el hamiltoniano clásico del sistema.

Para calcular explícitamente el propagador de la partícula libre, tomamos la ec. (A.12) y consideramos la siguiente expresión para el exponencial del integrando

$$\sum_{n=1}^N p_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N-1} x_n(p_n - p_{n+1}) + p_N x_N - p_1 x_0. \quad (\text{A.14})$$

Esto nos permite evaluar fácilmente las integrales sobre las variables x_n , con $n = 1, \dots, N-1$, obteniendo así

$$\begin{aligned} G(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \prod_{n=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \delta(p_n - p_{n+1}) e^{-i\epsilon \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m\hbar} \right) + p_N x_N - p_1 x_0 \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{-i\epsilon \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m\hbar} \right) + p_N x_N - p_N x_0 \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{-i\epsilon \left(N \frac{p_N^2}{2m\hbar} + p_N (x_N - x_0) \right)} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} e^{\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Este resultado coincide con la expresión para el propagador de la ec. (A.8), el cual se obtuvo mediante el método espectral.

Apéndice B

Invariancia por reparametrizaciones temporales

La acción de un sistema mecánico se define como

$$S[q, \dot{q}] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L[q, \dot{q}] \quad (\text{B.1})$$

donde q son las coordenadas generalizadas del sistema y \dot{q} son las velocidades respecto de estas coordenadas respecto al parámetro τ . En general, un sistema físico se puede describir respecto a distintos parámetros, es decir, usar a τ o hacer el siguiente cambio $\tau \rightarrow \bar{\tau}(\tau)$, siempre y cuando $\partial\bar{\tau}/\partial\tau$ sea una función monótona e identificando los puntos extremos, $\bar{\tau}_i = \tau_i$ y $\bar{\tau}_f = \tau_f$. Al expresar el sistema respecto a un nuevo parámetro $\bar{\tau}$ obtendríamos la acción \bar{S} :

$$\bar{S}[q, \dot{q}] = \int_{\bar{\tau}_i}^{\bar{\tau}_f} d\bar{\tau} \bar{L}[q, \dot{q}] \quad (\text{B.2})$$

aquí \dot{q} representan las velocidades respecto al parámetro $\bar{\tau}$.

En general los lagrangianos L y \bar{L} , ecs. (B.1) y (B.2) no tienen la misma forma. Existen sistemas físico que son simétricos ante este tipo de reparametrizaciones temporales. Estos sistemas satisfacen $Ld\tau = \bar{L}d\bar{\tau}$. Ahora, un lagrangiano L invariante ante reparametrizaciones temporales si satisface

$$S_\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L[q, \partial_\tau q] = \int_{\bar{\tau}_i}^{\bar{\tau}_f} d\bar{\tau} \frac{d\tau}{d\bar{\tau}} L[q, \partial_\tau q \frac{d\bar{\tau}}{d\tau}]. \quad (\text{B.3})$$

De la ecuación (B.3) podemos ver que una condición suficiente para que el sistema sea invariante ante reparametrizaciones temporales es que el lagrangiano del sistema L sea una función homogénea de grado uno respecto a las velocidades, es decir,

$$L[q, \partial_\tau q \frac{d\bar{\tau}}{d\tau}] = \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} L[q, \partial_\tau q]. \quad (\text{B.4})$$

Si L es una función homogénea de grado uno, el teorema de Euler para funciones homogéneas establece que

$$\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = L, \quad (\text{B.5})$$

pero esto lleva inevitablemente a que el Hamiltoniano para lagrangianos homogéneos de orden uno este constreñido a ser nulo.

Es posible introducir a mano esta simetría en algunos sistemas mecánicos al promover al tiempo t de parámetro de evolución a variable de configuración, es decir,

$$S[q, \dot{q}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L[q, \dot{q}, t] \rightarrow S[q, t, \dot{q}, \dot{t}] \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dt}{d\tau} L[q, dq/dt, t] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \mathcal{L}[q, t, \dot{q}, \dot{t}], \quad (\text{B.6})$$

donde las derivadas en la ecuación derecha de (B.6) son respecto al parámetro auxiliar τ . Podemos ver que el lagrangiano obtenido \mathcal{L} es obviamente homogéneo de grado uno en las velocidades (incluyendo la velocidad \dot{t})

$$\mathcal{L} = \dot{t} L[q, \dot{q}/\dot{t}] \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto se tiene que

$$\dot{t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} + \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Donde \dot{q}_i son las velocidades derivadas del sistema antes de la implementación de la simetría. Desde el punto de vista hamiltoniano, la relación (B.8) implica por definición que el hamiltoniano del sistema está constreñido $\mathcal{H} = 0$. En términos de las variables de espacio fase, (B.8) puede escribirse como $\dot{t}(p_t + H) = 0$, donde p_t es el momento conjugado a la variable t y H es el hamiltoniano del sistema deparametrizado. El factor \dot{t} nunca es nulo por construcción C , por lo que de forma más simple aún la restricción puede escribirse como

$$C = p_t + H. \quad (\text{B.9})$$

Siguiendo la teoría desarrollada por Dirac [23] para el análisis de sistemas mecánicos con constricciones podemos notar que si sólo tenemos la restricción C y el sistema es totalmente constreñido, es decir, $\mathcal{H} = 0$ la acción que determina el sistema es

$$S[q^j, t, p_j, p_t] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\dot{q}^j p_j + \dot{t} p_t - \lambda C), \quad (\text{B.10})$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange y $C = p_t + H$. Además, considerando que C la única restricción del sistema, esta es entonces una restricción de primera clase y generadora de transformaciones de norma a través del corchete de Poisson. Es decir, si G es una función del espacio fase, entonces la transformacional de norma infinitesimal generada por C , δG , se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\delta G = \{G, C\}. \quad (\text{B.11})$$

Las observables físicas F , resultan ser aquellas que son invariantes ante transformaciones de norma, en otras palabras $\{F, C\} = 0$.

Cuantización de un modelo mecánico invariante ante reparametrizaciones temporales

En presencia de constricciones la cuantización de un sistema mecánico [16] debe de contemplar las siguientes ideas

- Identificar un espacio de Hilbert cinemático, H_{cin} , que implemente el álgebra de los observables básicos. Típicamente $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ se representa como $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$ y $\hat{p}_x\psi(x) = -i\hbar\partial_x\psi(x)$, con $\psi(x) \in H_{\text{cin}} = L^2(\mathbb{R}, dx)$.

- Identificar los estados físicos $\psi_{\text{fis}}(x)$. Éstos están definidos como aquellos estados invariantes bajo la acción de la constricción \hat{C} , es decir, $\hat{C}\psi_{\text{fis}}(x) = 0$ o equivalentemente $e^{i\lambda\hat{C}}\psi_{\text{fis}}(x) = \psi_{\text{fis}}(x)$.

Una de las dificultades técnicas al implementar esta segunda idea radica en el hecho de que en ocasiones $\psi_{\text{fis}}(x) \notin H_{\text{cin}}$, es decir, $\psi_{\text{fis}}(x) \in H_{\text{fis}} \neq H_{\text{cin}}$. Claramente, el espacio de estados de interés es el espacio de Hilbert físico, H_{fis} .

- Una forma de extraer un estado físico $|\Psi_{\text{fis}}\rangle$ a partir de un estado $|\Psi_{\text{cin}}\rangle \in H_{\text{cin}}$. Una forma de lograr esto es mediante la técnica del promedio sobre el grupo,

$$|\Psi_{\text{fis}}\rangle := \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda\hat{C}} |\Psi_{\text{cin}}\rangle. \quad (\text{B.12})$$

Dos estados cinemáticos $|\Psi'_{\text{cin}}\rangle$ y $|\Psi_{\text{cin}}\rangle$ se dice que están en la misma órbita de norma si están relacionados por una transformación de norma, es decir $|\Psi'_{\text{cin}}\rangle = U_{\alpha}|\Psi_{\text{cin}}\rangle$, donde $U_{\alpha} := e^{i\alpha\hat{C}}$. Haciendo el cambio $\lambda \rightarrow \lambda + \lambda'$ en (B.12) se puede mostrar que se obtiene el mismo estado físico a partir de cualquier estado de una misma órbita. Notemos que el estado así generado es invariante bajo la acción de la constricción

$$U_{\alpha}|\Psi_{\text{fis}}\rangle = e^{i\alpha\hat{C}}|\Psi_{\text{fis}}\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i(\lambda+\alpha)\hat{C}} |\Psi_{\text{cin}}\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda' e^{i\lambda'\hat{C}} |\Psi_{\text{cin}}\rangle = |\Psi_{\text{fis}}\rangle. \quad (\text{B.13})$$

- Si los estados físicos no pertenecen a H_{cin} , no se tiene un producto interno definido para ellos. Se puede generar un producto interno en H_{fis} usando, nuevamente, la técnica del promedio sobre el grupo [15, 25]

$$\langle \Phi_{\text{fis}} | \Psi_{\text{fis}} \rangle_{\text{fis}} := \int_{\mathbb{R}} d\lambda \langle \Phi_{\text{cin}} | e^{i\lambda\hat{C}} | \Psi_{\text{cin}} \rangle. \quad (\text{B.14})$$

Este producto interno es invariante ante transformaciones de norma sobre los estados $|\Phi_{\text{cin}}\rangle$ y $|\Psi_{\text{cin}}\rangle$.

Bibliografía

- [1] Ashtekar A., Campiglia M. y Henderson A. 2010, *Casting loop quantum cosmology in the spin foam paradigm*. *Class. Quantum Grav.* 27 135020.
- [2] Flores E., Morales H. y Reyes J. 2013, *Propagators in Polymer Quantum Mechanics*. *Annals Phys.* 336 394-412.
- [3] Fradkin E. y Gitman D. 1991, *Path-integral representation for the relativistic particle propagators and BFV quantization*. *Phys. Rev. D* 44.
- [4] Flores. E. 2013, *Propagadores en mecánica cuántica polimérica: partícula libre y partícula en una caja rígida*. Tesis, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.
- [5] Watson G. N. 1966, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Segunda edición.
- [6] Reed M. y Simon B. 1980 *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. 1: Functional Analysis*. Segunda edición.
- [7] Barbero F., Prieto J. y Villaseñor E. 2013, *Band structure in the polymer quantization of the harmonic oscillator*. *Class. Quantum Grav.* 30 165011.
- [8] Schutz B. 2009, *A first course in general relativity*. Segunda edición.
- [9] Janke W. and Kleinert H. 1979, *Summing Paths for a Particle in a Box*. *Lettere Nuovo Cimento* 25, 297.
- [10] Bojowald M. 2011, *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes and Quantum Gravity*. Cambridge University Press.
- [11] Agullo I. y Corichi A. 2013, *Loop Quantum Cosmology*. arXiv:1302.3833.
- [12] Ashtekar A., Corichi A. y Singh P. 2008, *Robustness of predictions of loop quantum cosmology*. *Phys. Rev. D* 77 024046.
- [13] Kaminski W. y Lewandowski J. 2008, *The flat FRW model in LQC: the self-adjointness*. *Class. Quantum Grav.* 25 035001.
- [14] Ashtekar A., Pawłowski T. y Singh P. 2006. *Quantum nature of the big bang: improved dynamics*. *Phys. Rev. D* 74 084003.
- [15] Marolf D. 1995, *Refined algebraic quantization: systems with a single constraint*. arXiv:gr-qc/9508015.

- [16] Ashtekar A., Lewandowski J., Marolf D., Mourão J. y Thiemann T. 1995, *Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*. J. Math. Phys. 36 6456-93.
- [17] Reisenberger M. y Rovelli C. 1997, *Sum over surfaces form of loop quantum gravity*. Phys. Rev. D 56 3490-508.
- [18] Ashtekar A. Campiglia M. y Henderson A. 2009, *Loop quantum cosmology and spin foams*. Phys. Lett. B 681 347-352.
- [19] Feynman R. 1948, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*. Rev. Mod. Phys. 20 367-87.
- [20] Oriti D. 2006, *The group field theory approach to quantum gravity*. arXiv:gr-qc/0607032.
- [21] Oriti D. y Tlas T. 2008, *A new class of group field theories for 1st order discrete quantum gravity*. Class. Quantum Grav. 25 085011.
- [22] Sakurai J. J. 1993, *Modern Quantum Mechanics*. Revised Edition.
- [23] Sundermayer K. 1984, *Lectures Notes in Physics: Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*.
- [24] Marolf D. 1995, *Quantum Observables and Recollapsing Dynamics*. Class.Quant.Grav. 12 1199-1220.
- [25] Parra L. 2014, *Tesis, Facultad de ciencias, UNAM*.
- [26] Hossain G. M., Husain V. y Seahra S. 2010, *The Propagator in polymer quantum field theory*. Phys.Rev. D82 124032
- [27] Liu X., Huang F. y Zhu J. 2013, *Path integral of Bianchi I models in loop quantum cosmology*. Class. Quantum Grav. 30 065010.
- [28] H. Huang, Y. Ma y L. Qin. 2013, *Path Integral and Effective Hamiltonian in Loop Quantum Cosmology*. Gen. Rel. Grav. 45, 1191.
- [29] Agullo I., Ashtekar A. y Nelson W. 2012, *Perturbations in loop quantum cosmology*. arXiv:1204.1288.
- [30] Henderson A., Rovelli C., Vidotto F. y Wilson-Ewin1 E. 2011, *Local spinfoam expansion in loop quantum cosmology*. Class. Quantum Grav. 28 025003.
- [31] Rovelli1 C. y Vidotto F. 2010, *On the spinfoam expansion in cosmology*. Class. Quantum Grav. 27 145005 .