

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA

Estudio del flujo de líquidos entre una pared porosa y una impermeable.

Tesis que presenta

I. Q. Epifanio Morales Zárate

Para obtener del grado de
Maestro en Ingeniería Química

Asesor:

Dr. J. Alberto Ochoa Tapia

México, D. F., septiembre de 1998.

**ESTUDIO DEL FLUJO DE LÍQUIDOS ENTRE
UNA PARED POROSA Y UNA IMPERMEABLE**

Presenta:

I. Q. Epifanio Morales Zárate

Asesor:

Dr. J. Alberto Ocho Tapia.

MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA

INDICE

INDICE

CAPITULO 1

Introducción.	1
Objetivos	5

CAPITULO 2

Planteamiento del problema.	7
2.1 Ecuaciones para describir la transferencia de momentum en el medio poroso.	20
2.2 Condiciones de frontera.	21
2.2.1. Condición de Beavers y Joseph	22
2.2.2. Condición de salto.	23
2.3 Modelo de porosidad variable.	29
2.4 Efectos inerciales. Corrección de Forchheimer.	34

CAPITULO 3

Solución numérica del modelo matemático.	35
3.1 Procedimiento de solución	38

CAPITULO 4

Análisis de resultados	51
4.1 Espesor de la región de porosidad variable	52
4.2 Variaciones de la porosidad y la permeabilidad en la interregión	54
4.3 Profundidad del canal	59

4.4. Efectos inerciales	63
4.5 Segunda corrección de Brinkman	70
4.6 Comparación entre los modelos de porosidad variable y el de la condición de salto	78
CAPITULO 5	
Sistema experimental	83
5.1 Descripción del sistema	85
5.2 Operación	93
5.3 Propiedades físicas de los medios porosos	94
Conclusiones	99
Bibliografía	101
Nomenclatura	105
Apéndice: Programa para resolver el modelo matemático de porosidad variable.	109

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

Un medio poroso es una red tridimensional interconectada de poros, de cuyo grado de interconexión, tamaño y forma dependen las propiedades del material [1]. Estas propiedades influirán en los procesos en los cuales intervengan dichos materiales y por lo tanto, es importante conocer aquellos parámetros relacionados con su estructura física como pueden ser la porosidad, permeabilidad y área superficial. En el flujo de fluidos particularmente son importantes la porosidad y la permeabilidad. La porosidad es la fracción de volumen total del material que esta ocupada por espacios vacíos y su valor variará entre 0 y 1; en lechos empacados con esferas varía en un rango de 0.3-0.5 dependiendo del acomodo de las esferas y materiales consistentes de fibras generalmente tienen una elevada porosidad (aproximadamente 0.95) [2]. La permeabilidad indica la capacidad del medio poroso de permitir el flujo de fluidos y es una propiedad que depende únicamente de la estructura física del material. En algunos casos los poros pueden estar cerrados por un extremo y poco interconectados o completamente aislados, por lo cual pueden contribuir poco o nada en los procesos de transferencia.

Son muchas las áreas científicas y tecnológicas en las que los materiales porosos son importantes: medicina, bioquímica (transporte de bacterias y virus [3]), ingeniería civil y electroquímica. Entre otras funciones propias de los seres vivos, la respiración, la transpiración y la digestión dependen de este tipo de medios. Casi cualquier material que nos rodea es poroso, textiles, piel, concreto, madera, papel, etc., y para la inmensa mayoría de ellos es imposible dar una descripción geométrica correcta debido a que son demasiado irregulares.

Los materiales porosos están presentes en una gran cantidad de procesos dentro de la ingeniería química: catálisis heterogénea, procesos de separación, secado, filtrado, transferencia de calor, etc.. En los últimos años se han desarrollado investigaciones sobre

reactores de membrana [4]; estas membranas porosas pueden ser de vidrio o cerámica en las cuales se deposita algún metal como paladio. En este tipo de reactores el rendimiento está limitado por el transporte de productos a través de la membrana y en general se obtienen bajos rendimientos, entonces es necesario desarrollar membranas que sean altamente selectivas, que admitan flujos altos y que no sean tan costosas

La extracción de petróleo del subsuelo es otra aplicación importante del flujo de fluidos a través de medios porosos. En este tipo de procesos se pueden tener dos tipos de porosidades, una debido a la propia matriz del subsuelo y otra debido a fracturamientos del mismo. En algunos casos se inyecta un fluido para extraer el petróleo, entonces es importante determinar el flujo y la presión a la que debe ser inyectado el fluido para lograr el máximo grado de extracción [5-9].

Algunas investigaciones sobre descontaminación del subsuelo han demostrado que estos procesos a nivel macroscópico están influenciados por los fenómenos que se dan a nivel microscópico y se ha determinado como la distribución y transporte de contaminantes dependen de la geometría del poro, los procesos de transporte y las tasas de reacción en la escala microscópica [10]. La heterogeneidad física y química de la matriz porosa influyen en las tasas de migración y dilución de las mezclas de contaminantes en formaciones naturales y esto ha sido tomado en cuenta para determinar funcionalidades para la permeabilidad [11-13].

En algunos procesos no es importante el estudio de los fenómenos que ocurren a nivel de tamaño de poro y se aborda el sistema como si no existiera el medio poroso. En estos procesos se utilizan ecuaciones que involucran parámetros llamados efectivos en los cuales están incluidos los efectos a nivel microscópicos. El tratamiento de los procesos que dependen de los fenómenos a nivel microscópico generalmente no es sencillo, debido a que, como ya se mencionó anteriormente es difícil obtener una descripción geométrica exacta de los materiales y a la irregularidad de las interfaces en las que se deben acoplar estos procesos; además se pueden presentar problemas por la disparidad de longitudes de escala. Con el método del promedio volumétrico se pueden obtener ecuaciones de medio

efectivo y métodos para predecir los coeficientes efectivos a partir de ecuaciones puntuales con las cuales se puedan abordar estos problemas [14].

Debido a la importancia que tienen los procesos de transferencia en medios porosos, un gran número de investigadores han abordado el problema desde muchos puntos de vista: transporte de cantidad de movimiento y de calor en cavidades con diversas geometrías, influencia de los cambios de propiedades del medio poroso cerca de las fronteras que los contienen y se ha puesto especial interés en el planteamiento de las condiciones de frontera para acoplar los procesos entre el fluido y el medio poroso. Cuando un fluido fluye paralelo a la superficie de un material permeable existe un arrastre de líquido al interior del material y se presenta un efecto de capa límite debido a la penetración de los esfuerzos cortantes tangenciales hacia el interior del medio poroso. Este proceso se verá influenciado básicamente por las propiedades del medio poroso y la localización de la interface fluido-medio poroso. Para tratar este problema se han propuesto diversos modelos, muchos de los cuales no toman en cuenta efectos inerciales, pero cuando se trabaja con materiales altamente porosos, los efectos debidos a la resistencia por la presencia de sólidos pueden ser iguales a los debidos al arrastre viscoso y en ese caso se deben tomar en cuenta los efectos inerciales [2].

Precisamente en este proyecto se aborda el flujo de fluidos entre una pared porosa y una impermeable. Particularmente se trabaja con un modelo planteado por Ochoa y Whitaker [15,16,17] para el problema de transferencia de cantidad de movimiento entre un fluido y un medio poroso. Este modelo incluye una ecuación para describir la transferencia de cantidad de movimiento a través de una región interfacial de espesor δ en la cual los cambios de las propiedades del material poroso son importantes. Para incluir estos cambios de las propiedades, esta ecuación contiene funcionalidades de la porosidad y la permeabilidad en la región interfacial dependientes de la posición y se soluciona numéricamente mediante el método de diferencias finitas. Esta solución se acopla a la solución analítica de la ecuación de Stokes para el fluido y a la solución analítica de la ecuación de Darcy con la primera corrección de Brinkman para el medio poroso fuera de

la región interfacial. Los resultados obtenidos se comparan con datos experimentales [18,19,20].

El modelo original de Ochoa y Whitaker [16,17] no toma en cuenta los efectos inerciales, pero ya ha sido incluido mediante la adición de lo que se conoce como corrección de Forchheimer [21,22]. Este nuevo modelo contiene los siguientes parámetros ajustables: espesor de la región de porosidad variable, número de Reynolds y las funcionalidades para la porosidad y la permeabilidad. Ochoa y Whitaker [15,17] no lograron el ajuste de los datos de Beavers y Joseph, pero el cambio en el valor de la porosidad y la inclusión de efectos inerciales arrojó mejores resultados. Estos resultados indican que es necesario conocer valores precisos de las propiedades del material principalmente cerca de la interface.

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se logró el ajuste de todos los datos experimentales disponibles en la literatura para este problema pero una plena comprobación de los resultados numéricos sólo será posible mediante un trabajo experimental en el cual se determinen precisamente las propiedades del medio poroso y las condiciones de flujo. En este trabajo se presenta el diseño de un equipo experimental semejante al utilizado por Beavers y colaboradores [18-20,23] en el cual se podrían llevar a cabo dichos experimentos.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Aumentar la comprensión del problema de transferencia de momentum entre una región fluida adyacente a un medio poroso, mediante el estudio de los fenómenos que ocurren en la región entre ellos. Es decir, en la zona en donde la fracción volumétrica de fluido cambia desde la del fluido homogéneo a la del medio poroso homogéneo.

OBJETIVOS PARTICULARES

- ⊙ Resolver mediante el método de diferencias finitas el modelo de porosidad variable propuesto por Ochoa y Whitaker[20] para el problema de transferencia de momentum en la interface entre un fluido y un medio poroso, que considera variaciones de la porosidad y la permeabilidad en la región interfacial, pero ahora incorporando la corrección de Forchheimer para tomar en cuenta efectos inerciales. Comparar estos resultados con datos experimentales [2, 4, 7].
- ⊙ Estudiar la influencia en el problema de transferencia de momentum de los siguientes parámetros: propiedades del medio poroso, profundidad del canal, tipo de flujo, efectos inerciales.
- ⊙ Construcción de un equipo experimental en el cual se puedan efectuar experimentos para obtener información sobre el proceso de transferencia de momentum entre un fluido y un medio poroso.



CAPITULO 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se va a considerar el problema de transporte de momentum en la frontera entre un medio poroso (región ω) y un fluido (región η). El sistema fluido-medio poroso se ilustra en la Figura 2.1. En este sistema se identifica al fluido como la fase β y la fase sólida rígida será designada como σ , además se denomina como regiones homogéneas a aquellas porciones de ω y η que no están influenciadas por los cambios bruscos en la estructura como ocurre en la zona interregional [16,21]. En la región homogénea ω el medio poroso tiene porosidad ($\varepsilon_{\beta\omega}$) y permeabilidad ($K_{\beta\omega}$) constantes.

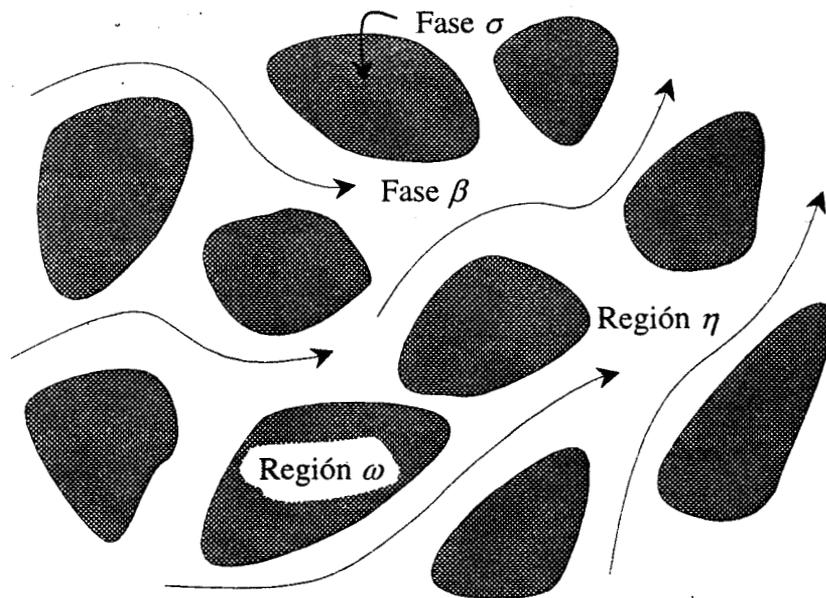


Figura 2.1. Flujo en un sistema compuesto por un fluido y un medio poroso.

Las ecuaciones puntuales que serán válidas en cualquier parte del sistema con la fase fluida β incompresible (ρ_β es constante), están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } \beta \quad (2.1)$$

$$\rho_\beta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \right) = \rho_\beta \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}_\beta \quad \text{en la fase } \beta \quad (2.2)$$

C.F.1: $\mathbf{v}_\beta = 0, \quad \text{en la interface } \beta - \sigma \quad (2.3)$

Sin embargo, la solución de las ecuaciones anteriores no es sencillo debido, entre otras cosas, a la dificultad de tener una descripción geométrica exacta del sistema y particularmente de la interface $\beta - \sigma$, en la que se acopla el proceso de transferencia de momentum. El problema puede ser resuelto utilizando ecuaciones promedio (de medio efectivo) que involucran variables promedio, coeficientes de medio efectivo (en los que se incluyen los efectos a nivel microscópico) y que están sujetas a restricciones de longitudes de escala. Mediante el método del promedio volumétrico [14] se pueden obtener dichas ecuaciones promediadas a partir de las ecuaciones puntuales.

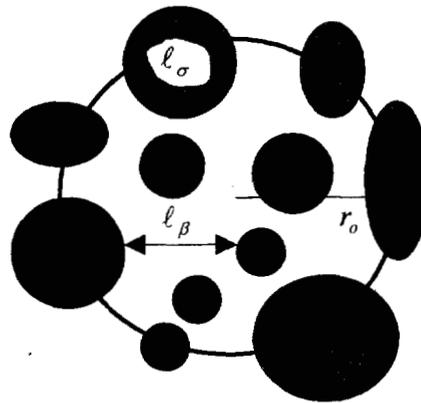


Figura 2.2. Volumen promedio (V)

El procedimiento consiste básicamente en integrar las ecuaciones sobre un volumen promedio V como el que se muestra en la Figura 2.2, aplicando la siguiente ecuación

$$\langle \Psi_\beta \rangle_x = \frac{1}{V} \int_{V_\beta(\mathbf{x})} \Psi_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{y}_\beta) dV_y \quad (2.4)$$

en donde Ψ_β es una propiedad de la fase β y $V_\beta(\mathbf{x})$ es el volumen de la fase β en el volumen promedio V . El vector de posición \mathbf{x} localiza el centroide del volumen promedio y \mathbf{y}_β representa un vector de posición que localiza puntos en la fase β relativos al centroide. De acuerdo con la ecuación (2.4) los promedios son asociados al volumen promedio y la integración es llevada con respecto a los componentes de \mathbf{y}_β . En la figura 2.3 están representados los vectores de posición.

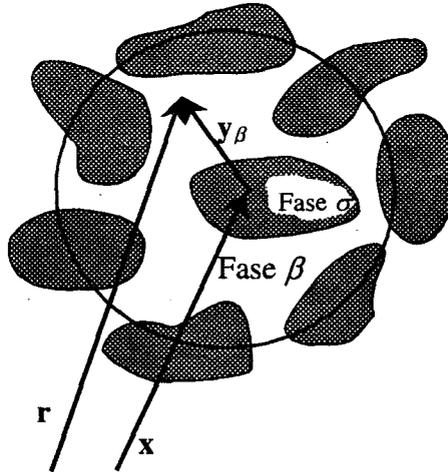


Figura 2.3 Vectores de posición asociados al volumen promedio.

El promedio dado por la ecuación (2.4) se denomina promedio de fase y representa cantidades denominadas superficiales. Se puede definir el promedio intrínseco de la siguiente manera

$$\langle \Psi_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \Psi_\beta dV \quad (2.5)$$

y los promedios estarán relacionados mediante la siguiente expresión

$$\langle \Psi_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle \Psi_\beta \rangle^\beta \quad (2.6)$$

en donde la fracción volumétrica está dada por

$$\varepsilon_\beta = \frac{V_\beta}{V} \quad (2.7)$$

Una teorema útil en el desarrollo del promedio volumétrico lo constituye el teorema del promedio espacial [14]

$$\langle \nabla \Psi_\beta \rangle = \nabla \langle \Psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \Psi_\beta dA \quad (2.8)$$

Al aplicar la ecuación (2.4) a la ecuación de continuidad (2.1) se obtiene

$$\frac{1}{V} \int_{V_\beta} (\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta) dA = \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (2.9)$$

para intercambiar los operadores de diferenciación e integración en la ecuación anterior se emplea la ecuación (2.8)

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta dA = 0 \quad (2.10)$$

y tomando en cuenta la ecuación (2.3) finalmente se obtiene

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad \text{en la fase } \beta \quad (2.11)$$

Si ahora se integra la ecuación (2.2) sobre el volumen promedio V , considerando ρ_β y \mathbf{g} como constantes se obtiene la siguiente ecuación promediada [24]:

$$\rho_\beta \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} \right\rangle + \rho_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \langle \nabla \cdot \mathbf{T}_\beta \rangle \quad (2.12)$$

Debido a que el volumen de la fase fluida es independiente del tiempo, entonces el término de acumulación se puede expresar como

$$\frac{1}{V} \int_{V_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \int_{V_\beta} \mathbf{v}_\beta dV \right) = \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} \quad (2.13)$$

El término convectivo se puede reescribir de la siguiente forma

$$\langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.14)$$

para lo cual se utilizó la ecuación (2.1). Empleando el teorema del promediado espacial se obtiene

$$\langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta dA = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.15)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (2.3). Haciendo uso de la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (2.16)$$

en donde $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ representa desviaciones espaciales alrededor del valor promedio de la variable local \mathbf{v}_β [14], el término $\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle$ se puede expresar como [21]

$$\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle = \underbrace{\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{Flujo convectivo}} + \underbrace{\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle}_{\text{Esfuerzos inerciales}} \quad (2.17)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior ha sido denominado por Ochoa y Whitaker [21] como esfuerzos inerciales en analogía con los esfuerzos de Reynolds que aparecen cuando las ecuaciones de Navier-Stokes se promedian en el tiempo [25]. Sin embargo, la ecuación (2.17) implica la imposición de restricciones en las escalas de longitud ($\ell_\beta \ll r_o \ll L$; en donde ℓ_β es una longitud característica para la fase β , r_o es el radio del volumen promedio y L es una longitud macroscópica característica). Para evitar estas restricciones Ochoa y Whitaker [21] definen el siguiente término de exceso

$$\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} = \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle - \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle \quad (2.18)$$

Al introducir esta expresión en la ecuación (2.15), reorganizando términos y con ayuda de la ecuación (2.7) se puede llegar al siguiente resultado

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = & \varepsilon_\beta \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] + \\ & + \varepsilon_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nuevamente haciendo uso del teorema del promediado espacial se obtiene la siguiente ecuación para el término de esfuerzos viscosos

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{T}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{T}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{T}_\beta dA \quad (2.20)$$

En la ecuación anterior, el primer término del lado derecho representa la fuerza por unidad de volumen ejercida en todo el volumen promedio mientras que el segundo término

representa la fuerza por unidad de volumen ejercida por el fluido en el medio poroso a través de el área interfacial $A_{\beta\sigma} = A_{\sigma\beta}$. Con las ecuaciones (2.13), (2.19) y (2.20), la ecuación (2.12) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} + \rho_\beta \varepsilon_\beta \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] + \\ + \varepsilon_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] = \quad (2.21) \\ \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \nabla \cdot \langle \mathbf{T}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{T}_\beta dA \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\mathbf{T}_\beta = -p_\beta \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_\beta \quad (2.22)$$

en donde

$$\boldsymbol{\tau}_\beta = \mu_\beta \left[\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T \right] \quad (2.23)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{T}_\beta = -p_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \left[\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T \right] \quad (2.24)$$

Al promediar la ecuación (2.24) se obtiene

$$\langle \mathbf{T}_\beta \rangle = -\langle p_\beta \mathbf{I} \rangle + \mu_\beta \left[\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T \right] \quad (2.25)$$

Para obtener la ecuación (2.25) se han utilizado el teorema del promediado volumétrico (2.8) y la ecuación (2.3). Entonces, el término $\nabla \cdot \langle \mathbf{T}_\beta \rangle$ se puede expresar como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{T}_\beta \rangle = -\nabla \left(\varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle \right) + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.26)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (2.6) aplicada al término de presión y además

$$\nabla \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T = \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) = 0 \quad (2.27)$$

Desarrollando el primer término del lado derecho de la ecuación (2.26) se obtiene la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{T}_\beta \rangle = -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \nabla \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.24) en la integral sobre el área interfacial de la ecuación (2.21) se obtiene

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{T}_\beta dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-p_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T) \right] dA \quad (2.29)$$

sustituyen las ecuaciones (2.28) y (2.29) en la ecuación (2.21) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} + \rho_\beta \varepsilon_\beta \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] + \\ & + \varepsilon_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] = \\ & \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \left. -\varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \right|_x - \left. \nabla \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta \right|_x + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{I} p_\beta \Big|_{x+y} + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{x+y} + \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{x+y}^T) \right] dA \end{aligned} \quad (2.30)$$

En la ecuación anterior se hace notar que las cantidades promedio están evaluadas con respecto al centroide y que la integración sobre el área interfacial se lleva a cabo con respecto a los elementos de y_β . El gradiente de la fracción volumen puede ser expresada de la siguiente manera

$$\nabla \varepsilon_\beta = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \quad (2.31)$$

el resultado anterior se obtiene a partir de la ecuación (2.8) tomando a Ψ_β como constante.

En la ecuación (2.31) se puede introducir el término $\langle p_\beta \rangle^\beta|_x$ de tal forma que se tiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta|_x = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \langle p_\beta \rangle^\beta|_x dA \quad (2.32)$$

expresiones semejantes se pueden escribir para $\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x$ y $\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x^T$

$$\nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x dA \quad (2.33)$$

$$\nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x^T = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_x^T dA \quad (2.34)$$

Si se sustituye la ecuación (2.32) en la ecuación (2.30) y se suman y restan las ecuaciones (2.33) y (2.34) a la misma ecuación, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} + \rho_\beta \varepsilon_\beta \left[\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] + \\ & + \varepsilon_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] = \\ & \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} - \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta (\nabla \varepsilon_\beta) \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) - \mu_\beta (\nabla \varepsilon_\beta) \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right)^T \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left[-\mathbf{I} \left(p_\beta|_{x+y} - p_\beta|_x \right) + \mu_\beta \left[\left(\nabla \mathbf{v}_\beta|_{x+y} - \nabla \mathbf{v}_\beta|_x \right) + \left(\nabla \mathbf{v}_\beta|_{x+y}^T - \nabla \mathbf{v}_\beta|_x^T \right) \right] \right] dA \end{aligned} \quad (2.35)$$

En la ecuación anterior se ha tomando en cuenta que $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$. Por otro lado, cada uno de los términos en la integral sobre el área interfacial de la ecuación anterior pueden simplificarse de la siguiente manera:

$$p_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - \langle p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}}^\beta = \tilde{p}_\beta \quad (2.36)$$

$$\nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}}^\beta = \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (2.37)$$

$$\nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^T - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}}^{\beta T} = \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T \quad (2.38)$$

en donde \tilde{p}_β y $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ son las desviaciones espaciales para la presión y la velocidad. Con estas ecuaciones y reorganizando términos finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\partial (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle)}{\partial t} + \rho_\beta \left[\nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc}) \right] + \\ + \rho_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot (\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc}) \right] = \\ = \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[\nabla (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) \right] - \\ - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[\nabla (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) \right]^T - \mu_\beta \Phi_\beta \end{aligned} \quad (2.39)$$

en donde el último término del lado derecho de la ecuación anterior está definido de la siguiente manera

$$\mu_\beta \Phi_\beta = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{I} (p_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - p_\beta|_{\mathbf{x}}) + \mu_\beta \left[(\nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}}) + (\nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^T - \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}}^T) \right] \right] dA \quad (2.40)$$

que para la región homogénea, ω se puede reducir a [14,21,22]

$$\mu_\beta \Phi_\beta = -\mu_\beta (\mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} + \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\beta\omega}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad (2.41)$$

en donde $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es el tensor de permeabilidad de la ley de Darcy y $\mathbf{F}_{\beta\omega}$ es el tensor de la corrección de Forchheimer.

La ecuación (3.39) es semejante a la obtenida por Ochoa y Whitaker [17], pero esta contiene un término adicional relacionado con la transpuesta del gradiente de la velocidad que la hace más completa ya que dicho término es importante cuando se toma en cuenta el componente en la dirección x de la velocidad como se verá más adelante. En principio la ecuación (2.39) no está sujeta a ninguna restricción sobre las longitudes de escala, por lo que se puede aplicar en cualquier parte del sistema considerado en la Figura 1, aunque para la región η se requiere que

$$\frac{r_c}{L_{v1}L_v} \ll 1 \quad \text{en la región homogénea } \eta \quad (2.42)$$

En esta ecuación L_{v1} y L_v son longitudes de escala característicos para la velocidad y el gradiente de la velocidad para asegurar que la velocidad puntual es igual a la velocidad promedio en la región η [16]. Considerando que no existe flujo convectivo en las regiones η y ω y que el proceso se lleva a cabo en estado estacionario, entonces la ecuación de transporte de momentum valida en cualquier parte del sistema de la Figura 2.1 será

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[\nabla (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) \right] - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[\nabla (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle)^T \right] - \mu_\beta \Phi_\beta \quad (2.43)$$

Tomando el componente en x de la velocidad $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle v_{x\beta} \rangle = \mathbf{i} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ suponiendo flujo unidimensional $\left\{ \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = (\langle v_{x\beta} \rangle, 0, 0) \right\}$ con las variaciones de la porosidad con x ($\mathbf{i} \cdot \nabla \varepsilon_\beta$), se obtiene la siguiente ecuación

$$0 = \rho_\beta g_x - \frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \frac{\partial^2 \langle v_\beta \rangle}{\partial y^2} + 2\varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \left(\frac{\partial \ln \varepsilon_\beta}{\partial x} \right)^2 \langle v_\beta \rangle - \mu_\beta \Phi_\beta \Big|_{n_{\beta\sigma}} \quad (2.44)$$

en donde el cuarto término es una corrección para el término de Darcy y ha sido obtenido a partir del término $\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[(\nabla \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle)^T \right]$. Por otra parte, si se toma $\langle v_\beta \rangle = \langle v_{x\beta} \rangle = \mathbf{i} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ como en el caso anterior, pero ahora se consideran las variaciones de la porosidad en la dirección y ($\mathbf{j} \cdot |\nabla \varepsilon_\beta|$) entonces se obtiene:

$$0 = \rho_\beta g_x - \frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \frac{\partial^2 \langle v_\beta \rangle}{\partial y^2} - \mu_\beta \left[\left(\frac{\partial \ln \varepsilon_\beta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \langle v_\beta \rangle}{\partial y} \right) - \left(\left\{ \frac{\partial \ln \varepsilon_\beta}{\partial y} \right\}^2 \langle v_\beta \rangle \right) \right] - \mu_\beta \Phi_\beta \Big|_{n_{\beta\sigma}} \quad (2.45)$$

y en las regiones homogéneas ($|\nabla \varepsilon_\beta| = 0$) la ecuación (2.43) se puede reducir a la ecuación de Stokes para el fluido homogéneo y a la ecuación de Darcy con la corrección de Brinkman para el medio poroso [14,16]. Esto es:

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \quad \text{en la fase } \eta \quad (2.46)$$

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad \text{en la fase } \omega \quad (2.47)$$

La ecuación (2.43) se aplica a cualquier región del sistema, las ecuaciones (2.46) y (2.47) implican restricciones para las longitudes de escala que hacen que no sean válidas para la región interfacial y por lo tanto las predicciones de las ecuaciones anteriores en

dicha región deben tomarse como extrapolaciones [16]; esto en el sentido de que el uso de las ecuaciones se extrapola a regiones donde no son válidas

Regresando al problema original de la Figura 2.1 sobre la transferencia de momentum entre el fluido libre y el medio poroso, a partir del método del promedio volumétrico se han obtenido ecuaciones que son válidas para cada una de las regiones [ecuaciones (2.46) y (2.47)] y de esta manera se han evitado las dificultades que implica la solución de las ecuaciones (2.1)-(2.3). Sin embargo, ahora surge la necesidad de plantear condiciones de frontera adecuadas para acoplar los procesos de transferencia de momentum representados por la ecuación de Stokes y la ecuación de Darcy con la corrección de Brinkman; para esto se debe tomar en cuenta que ambas ecuaciones promediadas no son válidas en la región interfacial. El proceso de pasar del problema representado por las ecuaciones (2.1)-(2.3) a obtener ecuaciones válidas para cada una de las regiones (η y ω) está representado en la Figura 2.4 [26].

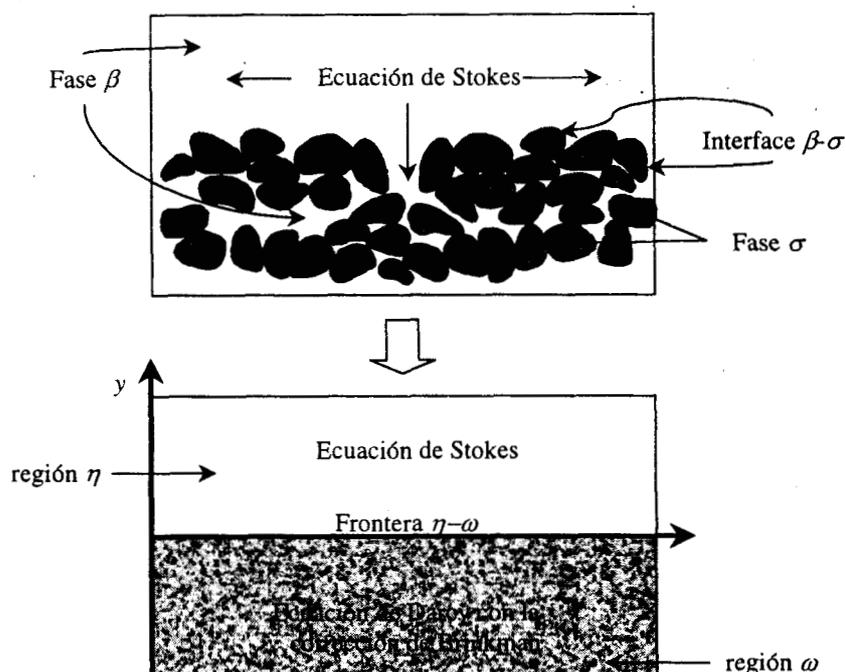


Figura 2.4. Problema del planteamiento de condiciones de frontera entre un fluido y un medio poroso.

En el planteamiento anterior sigue siendo válida la ecuación de Stokes para el fluido libre y se ha utilizado la ecuación de Darcy con la primera corrección de Brinkman para abordar el proceso de transferencia de momentum en la región porosa. Existen otras ecuaciones reportadas en la literatura [22,27] que también pueden ser derivadas con el método del promedio volumétrico imponiendo las restricciones adecuadas para las longitudes de escala. En la elección de estas ecuaciones para un problema en particular se debe tomar en cuenta las condiciones de frontera que se emplearán para acoplar los procesos de transferencia entre la fase fluida y la fase sólida y el tipo de fenómenos que se quieran analizar. A continuación se presentan estas ecuaciones mencionando sus principales características.

2.1 Ecuaciones para la transferencia de momentum en el medio poroso.

La ley de Darcy proporciona una relación entre la velocidad y el gradiente de la presión [27]. Esta ecuación no toma en cuenta efectos inerciales y de frontera pero es adecuada para tratar flujos con un Re_p (número de Reynolds basado en el diámetro de partícula) más bien bajo ($Re_p < 1$) [2]. Sin embargo, no contiene términos macroscópicos para los esfuerzos cortantes y por lo tanto no es adecuada para tratar el problema de capa límite.

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = -\frac{\mathbf{K}_{\beta\omega}}{\mu_\beta} \cdot \nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta \quad (2.48)$$

En la ecuación anterior $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es el tensor de permeabilidad [14,27]. Esta ecuación presenta problemas para poder acoplarla a la ecuación de Stokes que se emplea en la fase fluida.

La ecuación de Darcy con la primera corrección de Brinkman [16,14] sí contiene términos macroscópicos para los esfuerzos cortantes que la hacen adecuada para abordar el

problema de capa límite y permite manejar la continuidad de la velocidad y de los esfuerzos cortantes en la interface.

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad (2.49)$$

algunos reportes [2] indican que no es adecuada para abordar problemas con medios porosos poco permeables, pero es aplicable para materiales altamente porosos ($\varepsilon_{\beta\omega} \geq 0.8$).

La ecuación de Brinkman con la corrección de Forchheimer [21,22] toma en cuenta los efectos inerciales:

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\beta\omega} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad (2.50)$$

En la ecuación anterior, en el último término se incluye la no linealidad en la velocidad que empieza a ser notable en un rango de Re_p de 1-10. Esta desviación de la linealidad se presenta cuando el arrastre debido a la presencia de sólidos es comparable al arrastre por fuerzas viscosas, lo que sucede en materiales altamente porosos [2]. $\mathbf{F}_{\beta\omega}$ depende de la estructura del material poroso y puede ser un valor constante para materiales con estructuras semejantes.

2.2 Condiciones de Frontera

Una vez que se han planteado las ecuaciones de transferencia de momentum para cada una de las regiones, se deben plantear las condiciones de frontera para acoplar los procesos. Este tipo de condiciones han sido estudiadas por muchos investigadores desde diversos puntos de vista. A continuación se presentan algunas de las condiciones de frontera que se han planteado.

2.2.1. Condición de frontera de Beavers y Joseph

Beavers y Joseph [18] propusieron una condición de frontera empírica para acoplar la transferencia de momentum entre el fluido homogéneo (ecuación de Stokes) y el medio poroso (Ley de Darcy).

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle^\eta}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle^\eta - \langle v_\beta \rangle^\omega), \quad \text{en } y = 0 \quad (2.51)$$

La ecuación anterior establece que el esfuerzo cortante es proporcional a la diferencia entre la velocidad inmediatamente fuera del medio poroso y la velocidad del fluido medida a una cierta distancia de la interface hacia el interior del material; esto implica entonces una región interfacial en donde la penetración de los esfuerzos cortantes será importante. Físicamente es incorrecta, pues establece una discontinuidad en la velocidad tangencial que en realidad no se presenta. Beavers y Joseph comprueban su condición experimentalmente y concluyen que el parámetro ajustable α depende de las propiedades de la estructura porosa en la interregión.

A esta relación empírica Saffman [28] le dio un soporte teórico y numerosos investigadores se han dedicado a estudiar la naturaleza del parámetro α . Neale y Nader [29], obtuvieron los mismos resultados de Beavers y Joseph, pero a partir de la ecuación Darcy con la primera corrección de Brinkman, y encuentran que $\alpha = \mu_{ef} / \mu$ en donde μ_{ef} es la viscosidad efectiva y μ es la viscosidad del fluido homogéneo. Sahraoui y Kaviany [30] resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes para un medio poroso ideal constituido por cilindros y establecieron que el comportamiento de α además de la estructura del medio poroso depende de parámetros como Re_p , profundidad del canal (h), estructura superficial del medio poroso, localización de la interface y del régimen de flujo. El trabajo de Beavers y Joseph, aunque puede ser un modelo útil para ciertos estudios hidrodinámicos, además de ser físicamente incorrecto no puede proporcionar información sobre que es lo que realmente está sucediendo en la región de capa límite. En la literatura sobre el tema existen

coincidencias sobre algunos factores que influyen de manera determinante en los procesos de transferencia, por ejemplo, las variaciones de la permeabilidad y la porosidad cerca de las interfaces, la localización de la interface, el espesor de capa límite y los efectos inerciales.

2.2.2 Condición de salto

Ochoa y Whitaker [16,21] han desarrollado dos condiciones de salto para la transferencia de momentum en la frontera entre el fluido y el medio poroso. La primera de estas condiciones la desarrollaron a partir de las ecuaciones (2.43), (2.46) y (2.47) y contiene un parámetro ajustable de orden uno.

Para iniciar con el desarrollo de esa condición de salto es necesario reorganizar el tercer y cuarto término del lado izquierdo de la ecuación (2.43), de la siguiente forma:

$$\nabla(\varepsilon_\beta^{-1}\langle \mathbf{v}_\beta \rangle) = -\varepsilon_\beta^{-2}\nabla\varepsilon_\beta\langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1}\nabla\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.52)$$

$$\nabla(\varepsilon_\beta^{-1}\langle \mathbf{v}_\beta \rangle)^T = -\varepsilon_\beta^{-2}\langle \mathbf{v}_\beta \rangle\nabla\varepsilon_\beta + \varepsilon_\beta^{-1}\nabla\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T \quad (2.53)$$

con estas expresiones la ecuación (2.43) se reescribe como:

$$\begin{aligned} 0 = & \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla\langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-2} \nabla\varepsilon_\beta \cdot \nabla\langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-2} \nabla\varepsilon_\beta \cdot \nabla\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T + \\ & + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\beta^{-2} \nabla\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla\varepsilon_\beta - \mu_\beta \Phi_\beta \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para simplificar la ecuación anterior se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) = \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \varepsilon_\beta^{-2} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.55)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T) = -\varepsilon_\beta^{-2} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T + \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T = \varepsilon_\beta^{-2} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.56)$$

y entonces la ecuación (2.47) se reescribe como

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} - \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) + \mu_\beta \nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T) + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} (\nabla \ln \varepsilon_\beta)^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta - \mu_\beta \Phi_\beta \quad (2.57)$$

en la ecuación anterior se han utilizado las siguientes igualdades:

$$\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \quad (2.58)$$

$$\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \nabla \ln \varepsilon_\beta = (\nabla \ln \varepsilon_\beta)^2 \quad (2.59)$$

Siguiendo el procedimiento de Ochoa y Whitaker [16] se integra la ecuación (2.57) sobre el volumen V_∞ que se muestra en la Figura 2.5 y las ecuaciones (2.46) y (2.47) se integran sobre V_η y V_ω que son los volúmenes de las regiones η y ω contenidas en V_∞ para llegar a las siguientes expresiones

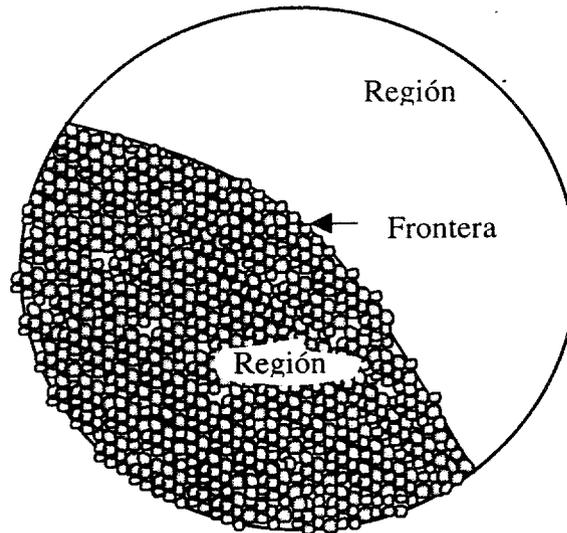


Figura 2.5. Promedio volumétrico: $V_\infty = V_\eta + V_\omega$; A_∞ es el área total de este volumen promedio y $A_{\eta\omega}$ es el área interfacial.

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} \int_{V_\infty} dV - \int_{V_\infty} \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta dV + \mu_\beta \int_{V_\infty} \nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle) dV + \mu_\beta \int_{V_\infty} \nabla \cdot (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T) dV \\ + \int_{V_\infty} \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot [\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta] dV - \int_{V_\infty} \mu_\beta \Phi_\beta dV \quad (2.60)$$

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} \int_{V_\eta} dV - \int_{V_\eta} \nabla \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta dV + \int_{V_\eta} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta dV \quad (2.61)$$

$$0 = \rho_\beta \mathbf{g} \int_{V_\omega} dV - \int_{V_\omega} \nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta dV + \int_{V_\omega} \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega dV - \int_{V_\omega} \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega dV \quad (2.62)$$

posteriormente se aplica el teorema de la divergencia tomando en cuenta que

$$A_\infty = A_\eta + A_\omega \quad (2.63)$$

en donde A_∞ es el área superficial del volumen promedio V_∞ y que el área superficial de los volúmenes contenidos de las regiones η y ω en el volumen promedio será igual a la suma de las porciones de A_∞ contenidos en dichos volúmenes más el área interfacial $A_{\eta\omega} = A_{\omega\eta}$, además para los vectores normales en esta interface se tiene que $\mathbf{n}_{\eta\omega} = -\mathbf{n}_{\omega\eta}$.

Los resultados obtenidos de las ecuaciones (2.61) y (2.62) se restan del obtenido de la ecuación (2.60) y reorganizando términos se obtiene la siguiente ecuación

$$\int_{A_{\omega\eta}} \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \left[-\mathbf{I}(\langle p \rangle_\omega^\beta - \langle p \rangle_\eta^\beta) + \mu_\beta (\varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta) \right] dA = \\ = \int_{A_\eta} \mathbf{n}_\eta \cdot \left[-\mathbf{I}(\langle p \rangle^\beta - \langle p \rangle_\eta^\beta) + \mu_\beta (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta) \right] dA + \\ + \int_{A_\omega} \mathbf{n}_\omega \cdot \left[-\mathbf{I}(\langle p \rangle^\beta - \langle p \rangle_\omega^\beta) + \mu_\beta (\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega) \right] dA + \\ + \int_{V_\eta} \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot [\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta] dV + \\ + \int_{V_\omega} \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot [\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta] dV - \\ - \int_{V_\eta} \mu_\beta \Phi_\beta dV - \int_{V_\omega} \mu_\beta [\Phi_\beta - \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle] dV \quad (2.64)$$

se debe notar que los integrandos sobre V_η y V_ω de la ecuación anterior tienden a cero en las regiones homogéneas ya que para esas regiones:

$$\Phi_\beta = \begin{cases} \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega & \text{en la región homogénea } \omega \\ 0 & \text{en la región homogénea } \eta \end{cases} \quad (2.65)$$

y a partir de este hecho Ochoa y Whitaker [16] definen *funciones exceso* para representar estos términos de tal forma que se obtiene la siguiente condición de salto

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \left[-\mathbf{I} \left(\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta \right) + \mu_\beta \left(\varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \right) \right] &= \quad \text{en } A_{\eta\omega} \\ &= \nabla_s \cdot (\delta \langle \mathbf{T} \rangle_S) - \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot (\langle \mathbf{T} \rangle_B) + \mathbf{n}_{\omega\beta} \cdot (\langle \mathbf{B} \rangle) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación obtenida por Ochoa y Whitaker [16]. Los términos del lado derecho de la ecuación anterior denominados esfuerzos de exceso superficiales, esfuerzos de exceso en el seno del fluido y esfuerzos de exceso de Brinkman respectivamente, han sido definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{n}_s \cdot \delta \langle \mathbf{T} \rangle_S d\sigma &= \int_{A_\eta} \mathbf{n}_\eta \cdot \left[-\mathbf{I} \left(\langle p \rangle^\beta - \langle p \rangle_\eta^\beta \right) + \mu_\beta \left(\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \right) \right] dA + \\ &+ \int_{A_\omega} \mathbf{n}_\omega \cdot \left[-\mathbf{I} \left(\langle p \rangle^\beta - \langle p \rangle_\omega^\beta \right) + \mu_\beta \left(\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T - \varepsilon_{\omega\beta}^{-1} \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \right) \right] dA \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\int_{A_{\omega\eta}} \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot (\langle \mathbf{B} \rangle) dA = \int_{V_\omega} \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta \right) dV \quad (2.68)$$

$$\int_{A_{\omega\eta}} \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot (\langle \mathbf{T} \rangle) dA = \int_{V_\eta} \mu_\beta \Phi_\beta dV - \int_{V_\omega} \mu_\beta \left[\Phi_\beta - \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right] dV \quad (2.69)$$

La ecuación (2.69) se ha mantenido como la definieron Ochoa y Whitaker [16], pero las ecuaciones (2.67) y (2.68) contienen términos extras derivados de la descomposición del término $\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left[\left(\nabla \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right)^T \right]$ de la ecuación (2.43). Otra forma de presentar esta condición de salto es no descomponer el término anterior y entonces al final del procedimiento efectuado anteriormente aparecerá otro término de exceso definido de la siguiente manera

$$\int_{A_{\omega\eta}} \mathbf{n}_{\omega\eta} \cdot \langle \mathbf{B}' \rangle dA = \int_{V_{\infty}} \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left\{ \left(\nabla \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right)^T \right\} dV \quad (2.70)$$

mientras los demás términos quedarán definidos de acuerdo con Ochoa y Whitaker [16]. La condición de salto finalmente tomará la misma forma que presentan Ochoa y Whitaker [16], que incluye un parámetro ajustable β en cuya definición quedarán incluidas las funciones exceso y que será del orden de 1 ya sea positivo o negativo.

$$\frac{1 - \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega}{dy}}{\varepsilon_{\beta\omega}} - \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta}{dy} = \frac{\beta}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \langle v_\beta \rangle_\omega \quad \text{en } y = 0 \quad (2.71)$$

La otra condición de salto desarrollada por los autores anteriores [21] si incluye efectos inerciales, para lo cual se reorganiza la ecuación (2.39) con ayuda de las ecuaciones (2.52), (2.53), (2.55) y (2.56).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_\beta \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] + \\ & + \rho_\beta \left[\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \right] = \\ & = \rho_\beta \mathbf{g} + \nabla \cdot \left[-\langle p_\beta \rangle^\beta \mathbf{I} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T \right) \right] - \\ & - \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \left[\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta \right] - \mu_\beta \Phi_\beta \end{aligned} \quad (2.72)$$

Siguiendo el procedimiento de Ochoa y Whitaker [21], se simplifica la nomenclatura de la ecuación (2.72) con las siguientes definiciones:

$$\mathbf{v} = \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.73)$$

$$\mathbf{U} = \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{u} = \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-2} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_{exc} \right) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{b} = \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \nabla \ln \varepsilon_\beta \right) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{T} = -\mathbf{I} \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left[\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^T \right] \quad (2.77)$$

y por lo tanto la ecuación (2.72) queda de la siguiente manera:

$$\rho_\beta \frac{\partial (\rho_\beta \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho_\beta \mathbf{U}) + \rho_\beta \mathbf{u} = \nabla \cdot \langle \mathbf{T} \rangle + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \mathbf{b} - \mu_\beta \Phi_\beta \quad (2.71)$$

La ecuación anterior tiene la misma forma que la ecuación (A3) de Ochoa y Whitaker [21] y además el procedimiento para obtener la condición de salto incluyendo los efectos inerciales es el mismo que se ha seguido para obtener la condición de salto anterior, por lo que únicamente se presenta el resultado final, es decir, la condición de salto para la transferencia de momentum entre un medio poroso y un fluido incluyendo efectos inerciales.

$$\varepsilon_\beta^{-1} \frac{\partial \langle v_\beta \rangle_\omega}{\partial y} - \frac{\partial \langle v_\beta \rangle_\eta}{\partial y} = \frac{\beta_1}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \langle v_\beta \rangle + \frac{\rho_\beta}{\mu_\beta} \beta_2 \left(\langle v_\beta \rangle \right)^2 \quad \text{en } \omega - \eta \quad (2.79)$$

en donde los coeficientes β_1 y β_2 son parámetros ajustables de orden uno. El primer coeficiente estará asociado con los esfuerzos de exceso de Brinkman y del seno del fluido y el segundo coeficiente está asociado con los esfuerzos de exceso inerciales.

2.3 Modelo de porosidad variable.

Para abordar el problema físico en forma más estricta, Ochoa y Whitaker proponen un modelo que incluye funcionalidades para la porosidad y la permeabilidad dependientes de la posición [17]. Con el modelo de porosidad variable se pretende considerar una transición de la región en donde es válida la ecuación de Stokes a la región en donde es válida la ecuación de Darcy con la 1a. corrección de Brinkman, a través de una región interfacial de espesor δ . Este modelo es el que se ha trabajado en este proyecto, aplicándolo particularmente al problema de transporte de momentum ilustrado en la Figura 2.6. Un fluido fluye a través de un canal formado por una pared impermeable y una porosa. El flujo es paralelo a la superficie permeable y se presenta un arrastre de líquido hacia el interior del material poroso, entonces, debido a los efectos de los esfuerzos cortantes tangenciales existirá una región en la cual habrá un efecto de capa límite en el interior del medio poroso. El modelo de porosidad variable está basado en la ecuación (2.39), la cual se puede escribir de la siguiente manera una vez que se sustituye la ecuación (2.41)

$$\begin{aligned}
 0 = & \rho_{\beta} \mathbf{g} - \nabla \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} + \mu_{\beta} \varepsilon_{\beta}^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle - \mu_{\beta} \varepsilon_{\beta}^{-1} \nabla \varepsilon_{\beta} \cdot \left[\nabla (\varepsilon_{\beta}^{-1} \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle) \right] - \\
 & - \mu_{\beta} \varepsilon_{\beta}^{-1} \nabla \varepsilon_{\beta} \cdot \left[\nabla (\varepsilon_{\beta}^{-1} \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle)^T \right] - \mu_{\beta} \mathbf{K}_{\beta}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle - \mu_{\beta} (\mathbf{K}_{\beta}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\beta}) \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Para el problema unidireccional de la Figura 2.6 se toma el componente en x de la velocidad $\langle v_{\beta} \rangle = \langle v_{x\beta} \rangle = \mathbf{i} \cdot \langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle$ y las variaciones de la permeabilidad y la porosidad en la dirección y , de modo que se obtienen la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} + \underbrace{\frac{\mu_\beta}{\varepsilon_\beta(y)} \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle}{dy^2}}_{\text{Primera corrección de Brinkman}} - \underbrace{\frac{\mu_\beta}{\varepsilon_\beta(y)} \frac{d\varepsilon_\beta(y)}{dy} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\varepsilon_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle \right) \right]}_{\text{Segunda corrección de Brinkman}} - \\
& - \underbrace{\frac{\mu_\beta}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle}_{\text{Término de Darcy}} - \underbrace{\mu_\beta \frac{F_\beta(y)}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle}_{\text{Corrección de Forchheimer}} \quad -\delta \leq y \leq 0
\end{aligned}
\tag{2.81}$$

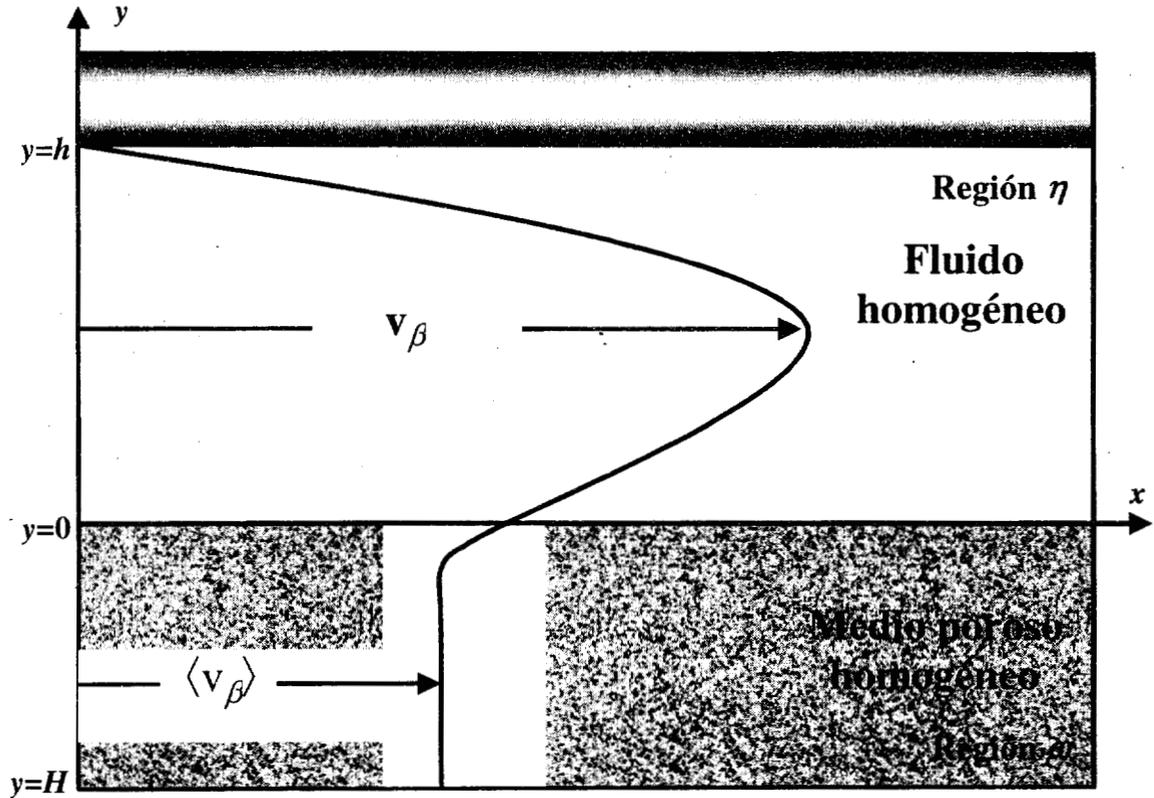


Figura 2.6. Flujo de un fluido paralelo a una superficie porosa.

La ecuación anterior describirá el transporte de momentum en una región de espesor determinado en la cual la porosidad y la permeabilidad del medio poroso variarán con la posición. El transporte de momentum en las regiones homogéneas será descrito mediante la ecuación de Stokes para la región fluida y la ecuación de Darcy con la primera corrección de Brinkman para el medio poroso homogéneo. Como se ha mencionado anteriormente, estas ecuaciones se pueden obtener a partir de la ecuación (2.39) imponiendo ciertas restricciones para las longitudes de escala. Por lo tanto, el problema de transferencia de momentum en la frontera entre un medio poroso y un fluido representado en la Figura 2.6 será modelado mediante las siguientes ecuaciones y condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1} \quad \langle v_\beta \rangle_\eta = 0 \quad \text{en } y = h \quad (2.82)$$

Ecuación de Stokes:

$$0 = \frac{d\langle p_\beta \rangle_\eta^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2\langle v_\beta \rangle_\eta}{dy^2}, \quad 0 \leq y \leq h \quad (2.83)$$

$$\text{C.F.2} \quad \langle v_\beta \rangle_\eta = \langle v_\beta \rangle, \quad \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta}{dy} = \frac{d\langle v_\beta \rangle}{dy}, \quad \text{en } y = 0 \quad (2.84)$$

Ley de Darcy con la 1a. y 2a. correcciones de Brinkman y la corrección de Forchheimer

$$0 = \frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} + \frac{\mu_\beta}{\varepsilon_\beta(y)} \frac{d^2\langle v_\beta \rangle}{dy^2} - \frac{\mu_\beta}{\varepsilon_\beta(y)} \frac{d\varepsilon_\beta(y)}{dy} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\varepsilon_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle \right) \right] - \frac{\mu_\beta}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle - \mu_\beta \frac{F_\beta(y)}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle \quad -\delta \leq y \leq 0 \quad (2.85)$$

$$\text{C.F.3} \quad \langle v_\beta \rangle = \langle v_\beta \rangle_\omega, \quad \frac{d\langle v_\beta \rangle}{dy} = \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega}{dy}, \quad \text{en } y = -\delta \quad (2.86)$$

Ley de Darcy con la 1a. corrección de Brinkman

$$0 = -\frac{d\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} + \frac{\mu_\beta}{\varepsilon_{\beta\omega}} \frac{d^2\langle v_\beta \rangle_\omega}{dy^2} - \frac{\mu_\beta}{K_{\beta\omega}} \langle v_\beta \rangle_\omega \quad -\delta \leq y \leq -\infty \quad (2.87)$$

$$\text{C.F.4} \quad \langle v_\beta \rangle_\omega \text{ acotada conforme } y \rightarrow -\infty \quad (2.88)$$

Se está empleando la ecuación de Stokes (2.83) para el fluido homogéneo y la ecuación de Darcy con la 1a. corrección de Brinkman (2.87) para el medio poroso. Para la región interfacial, la ecuación (2.85) incluye la 1a. y 2a. correcciones de Brinkman que contienen variaciones para la porosidad y la permeabilidad dependientes de la posición, lo cual es importante para abordar el problema de los cambios de estas propiedades cerca de la interface y la corrección de Forchheimer para incluir los efectos inerciales en la región interfacial. De acuerdo con Ochoa y Whitaker [16] la 2a. corrección de Brinkman es del mismo orden de magnitud que la 1a. corrección de Brinkman en la región interfacial. Como condiciones de frontera para acoplar los procesos de transferencia entre el fluido, la interregión y el medio poroso se utilizan la continuidad en la velocidad y en el esfuerzo cortante. Las funcionalidades para la permeabilidad y la porosidad que se utilizaron en este modelo son las siguientes:

$$\frac{K_{\beta\omega}}{K_\beta(y)} = \frac{[1 - \varepsilon_\beta(y)]^2 \varepsilon_{\beta\omega}^3}{\varepsilon_\beta^3(y) [1 - \varepsilon_{\beta\omega}]^2} \quad (2.89)$$

en donde

$$\varepsilon_\beta(y) = 1 + 3(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 2(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \quad -\delta \leq y \leq 0 \quad (2.90)$$

La ecuación (2.89) está basada en la ecuación de Blake-Kozeny que es válida para flujo laminar y para $\varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.5$ [8] y su utilidad puede disminuir conforme las partículas que conforman el medio poroso pierden esfericidad [1]. Debido a que la permeabilidad depende de la estructura del material poroso es difícil obtener una ecuación general, por lo que en la literatura se pueden encontrar una gran variedad de ecuaciones para evaluar esta propiedad, muchas de las cuales están basadas en medios porosos ideales, es decir, que están constituidos por partículas de forma bien definida como esferas o cilindros y algunas otras incluyen parámetros que son particulares de cada material [1].

Los datos experimentales con los que se comparan los resultados numéricos en este trabajo fueron obtenidos por Beavers y Joseph [18] trabajando con dos tipos de materiales muy diferentes estructuralmente; uno estaba constituido por partículas granulares unidas con cerámica y el otro de fibras metálicas. Con respecto al primer material, suponiendo gránulos con cierto grado de esfericidad y se toma en cuenta que su porosidad está en el rango de 0.4-0.6, entonces es razonable pensar que la ecuación (2.89) es aplicable; por otra parte existen reportes que validan la utilidad de la ecuación de Blake-Kozeny para medios porosos constituidos por fibras [1]. Sahraoui y Kaviany [30] establecen que dicha relación no es adecuada para predecir las variaciones de la porosidad y la permeabilidad en la interregión. Algunos investigadores que reportan haber trabajado con modelos que incluyen variaciones de la permeabilidad, no lo hicieron con una funcionalidad dependiente de la posición directamente, sino variando el número de Darcy que se define como $D^2/K_{\beta\omega}$ en donde D es alguna longitud característica del sistema que trabajan.

Las comparaciones entre los resultados numéricos de Ochoa y Whitaker y datos experimentales no fueron satisfactorios [15,17]. Entre las posibles causas que estos autores consideran que están influyendo en esos resultados están las siguientes:

1. La definición de el término $\mu_{\beta}\Phi_{\beta}$ de la ecuación (2.40) es mucho más complejo que la definición dada en la ecuación (2.41), tomando en cuenta que esta ecuación implica la imposición de restricciones de escala.

2. Las funcionalidades para la porosidad y la permeabilidad son funciones de la posición mucho más complejas que las que se utilizaron.
3. No se conocían valores exactos para la porosidad de los materiales empleados en la obtención de los datos experimentales.

El modelo de porosidad variable es retomado en este proyecto y se ha trabajado en forma similar a como lo hicieron Ochoa y Whitaker [16]; sin embargo, ahora si se ha contado con valores para la porosidad de los materiales porosos. Esta circunstancia dio paso a examinar factores que influyen en el problema como son:

- Variaciones de las propiedades (porosidad y permeabilidad) en la región interfacial.
- Profundidad del canal
- Efectos inerciales.

2.5 Efectos inerciales: Corrección de Forchheimer.

Como se mencionó anteriormente, los efectos inerciales se vuelven importantes para $Re_p \geq 1$. El término de Forchheimer $F_{\beta\omega}(y)$ tiene la siguiente forma [21,22]

$$F_{\beta}(y) = \frac{1}{100[1 - \varepsilon_{\beta}(y)]} \frac{d_p \langle v_{\beta} \rangle \rho_{\beta}}{\mu_{\beta}} \quad (2.91)$$

CAPITULO 3

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE POROSIDAD VARIABLE

En este capítulo se presenta la solución del modelo de porosidad variable planteado en el capítulo anterior. Inicialmente se presenta la solución de la ecuación (2.85) pero sin tomar en cuenta efectos inerciales, es decir, sin incluir la corrección de Forchheimer. La solución de esta ecuación se lleva a cabo mediante el método de diferencias finitas y se acopla con las soluciones analíticas de las ecuaciones (2.83) y (2.87). Posteriormente se presenta la solución de la ecuación (2.85) incluyendo la corrección de Forchheimer.

Como se ha mencionado anteriormente, el sistema físico está constituido por un canal formado por una pared impermeable y un medio poroso; a través de este canal fluye un fluido paralelamente a la superficie porosa y debido a la penetración de los esfuerzos cortantes tangenciales en el medio poroso, existirá una región de espesor determinado en la cual se presentará un efecto de capa límite; además, en esta región las propiedades del medio poroso (porosidad y permeabilidad) variarán con la posición.

Para modelar el proceso de transferencia de momentum en la frontera entre el fluido y el medio poroso se emplearán la ecuación de Stokes para el fluido homogéneo y la ecuación de Darcy con la primera corrección de Brinkman para el medio poroso homogéneo; la transferencia de momentum en la región interfacial con propiedades físicas variables será descrita mediante la ecuación de Darcy con la primera y segunda correcciones de Brinkman y para tomar en cuenta efectos inerciales se agrega la corrección de Forchheimer. Los resultados numéricos se comparan con datos experimentales para determinar la eficiencia del modelo matemático planteado.

Las ecuaciones (2.82)-(2.88) constituyen el modelo matemático para este problema y se adimensionalizan de acuerdo con las siguientes variables:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} & U_{\eta} &= \frac{\langle v_{\beta} \rangle_{\eta}}{\langle v \rangle_{\omega}^{\infty}} \\ U_{\omega} &= \frac{\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}}{\langle v \rangle_{\omega}^{\infty}} & U &= \frac{\langle v_{\beta} \rangle}{\langle v \rangle_{\omega}^{\infty}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

en donde $\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\infty}$ está dada por la ley de Darcy en la región homogénea ω :

$$\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\infty} = -\frac{K_{\beta\omega}}{\mu_{\beta}} \frac{d\langle p_{\beta} \rangle}{dx} \quad y \rightarrow -\infty \quad (3.2)$$

y por lo tanto el modelo matemático sin incluir la corrección de Forchheimer en forma adimensional queda de la siguiente forma:

$$\text{C.F.1} \quad U_{\eta} = 0 \quad \text{en } Y = \sigma \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 U_{\eta}}{dY^2} = -1, \quad 0 \leq Y \leq \sigma \quad (3.4)$$

$$\text{C.F.2} \quad U_{\eta} = U, \quad \frac{dU_{\eta}}{dY} = \frac{dU}{dY}, \quad \text{en } Y = 0 \quad (3.5a,b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} \frac{d^2 U}{dY^2} - \frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} \frac{d\varepsilon_{\beta}(Y)}{dY} \left[\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} U \right) \right] - \\ - \frac{K_{\beta\omega}}{K_{\beta}(Y)} U = -1, \quad -\gamma \leq Y \leq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{C.F.3} \quad U = U_\omega, \quad \frac{dU}{dY} = \frac{dU_\omega}{dY}, \quad \text{en } Y = -\gamma \quad (3.7\text{a,b})$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{\beta\omega}} \frac{d^2 U_\omega}{dY^2} - U_\omega = -1, \quad -\infty \leq Y \leq -\gamma \quad (3.8)$$

$$\text{C.F.4} \quad U_\omega \rightarrow 1, \quad \text{en } Y \rightarrow -\infty \quad (3.9)$$

y las funcionalidades para la porosidad y la permeabilidad quedarán escritas de la siguiente manera:

$$\frac{K_{\beta\omega}}{K_\beta(Y)} = \frac{[1 - \varepsilon_\beta(Y)]^2 \varepsilon_{\beta\omega}^3}{\varepsilon_\beta^3(Y) [1 - \varepsilon_{\beta\omega}]^2} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_\beta(Y) = 1 + 3(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \left(\frac{Y}{\gamma}\right)^2 + 2(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \left(\frac{Y}{\gamma}\right)^3, \quad -\gamma \leq Y \leq 0 \quad (3.11)$$

En las ecuaciones anteriores σ se ha definido como

$$\sigma = \frac{h}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \quad (3.12)$$

en donde h es la profundidad del canal (ver Figura 2.5) y para simplificar el manejo de la nomenclatura se ha escrito el espesor de la región de porosidad variable como:

$$\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \quad (3.13)$$

Para obtener la distribución de velocidades tanto en el región interfacial como en las regiones homogéneas es necesario acoplar la solución numérica de la ecuación (3.6) que

se obtendrá mediante el método de diferencias finitas con las soluciones analíticas de las ecuaciones (3.4) y (3.8). Cada una de estas soluciones contiene una constante de integración que se determinará mediante un procedimiento iterativo. En este proceso de solución del modelo matemático las condiciones de continuidad en la velocidad (3.5a) y (3.7a) se emplearán para acoplar las soluciones analíticas con la solución numérica, mientras que las que las condiciones de continuidad en los esfuerzos (3.5b) y (3.7b) se emplearán como un criterio de convergencia. A continuación se describe este proceso de cálculo.

3.1 Procedimiento de solución.

Las ecuaciones (3.4) y (3.8) tienen las siguientes soluciones analíticas:

$$U_{\eta} = \frac{1}{2}\sigma^2 \left[1 - \left(\frac{Y}{\sigma} \right)^2 \right] - C_1 \left[1 - \left(\frac{Y}{\sigma} \right) \right], \quad 0 \leq Y \leq \sigma \quad (3.14)$$

$$U_{\omega} = C_2 \exp\left(Y\sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}}\right) + 1, \quad -\infty \leq Y \leq -\gamma \quad (3.15)$$

Para obtener las ecuaciones anteriores se resolvieron las ecuaciones de Stokes (3.4) y de Darcy con la primera corrección de Brinkman (3.8) junto con las condiciones de frontera representadas por las ecuaciones (3.3) y (3.9). Las constantes C_1 y C_2 se determinan mediante el método de Newton-Raphson; de hecho, el cálculo de estas constantes representa la parte más importante del proceso de solución.

La ecuación (3.6) se puede reescribir para obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{d^2U}{dY^2} + P(Y)\frac{dU}{dY} + Q(Y)U = R(Y) \quad (3.16)$$

la cual representa una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden en la que los coeficientes están dados por las siguientes expresiones:

$$P(Y) = -\frac{1}{\varepsilon_\beta(Y)} \frac{d\varepsilon_\beta(Y)}{dY} \quad (3.17)$$

$$Q(Y) = \frac{1}{\varepsilon_\beta^2(Y)} \left(\frac{d\varepsilon_\beta(Y)}{dY} \right)^2 - \frac{K_{\beta\omega}}{K_\beta(Y)} \varepsilon_\beta(Y) \quad (3.18)$$

$$R(Y) = -\varepsilon_\beta(Y) \quad (3.19)$$

El método de diferencias finitas consiste en reemplazar los operadores diferenciales de una ecuación específica por aproximaciones de la siguiente forma:

$$\frac{d^2U}{dY^2} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta Y)^2} \quad (3.20)$$

$$\frac{dU}{dY} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta Y} \quad (3.21)$$

en donde ΔY es la distancia entre nodos y el subíndice i indica el nodo en el cual se evalúa la velocidad. Las ecuaciones anteriores se denominan diferencias centradas y se obtienen al expandir U en un polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de Y_i y evaluando en Y_{i+1} y Y_{i-1} . Para aplicar el método el intervalo $-\gamma \leq Y \leq 0$ se divide en una serie de nodos ($i=1, \dots, N$), y la ecuación (3.16) se discretiza aplicando las aproximaciones anteriores [31] Entonces, reorganizando términos se obtiene:

$$\left[1 + \frac{\Delta Y}{2} P(Y_i) \right] U_{i+1} + \left[(\Delta Y)^2 Q(Y_i) - 2 \right] U_i + \left[1 - \frac{\Delta Y}{2} P(Y_i) \right] U_{i-1} = (\Delta Y)^2 R(Y_i) \quad (3.22)$$

Para $i=2$ y para $i=N-1$:

$$\left[1 + \frac{\Delta Y}{2} P(Y_2)\right] U_3 + [(\Delta Y)^2 Q(Y_2) - 2] U_2 + \left[1 - \frac{\Delta Y}{2} P(Y_2)\right] U_1 = (\Delta Y)^2 R(Y_2) \quad (3.23)$$

$$\left[1 + \frac{\Delta Y}{2} P(Y_{N-1})\right] U_N + [(\Delta Y)^2 Q(Y_{N-1}) - 2] U_{N-1} + \left[1 - \frac{\Delta Y}{2} P(Y_{N-1})\right] U_{N-2} = (\Delta Y)^2 R(Y_{N-1}) \quad (3.24)$$

Si el nodo para $i=1$ corresponde a la frontera en $Y=0$, entonces de acuerdo con la condición de continuidad en la velocidad (3.5a) y la ecuación (3.14) evaluada en $Y=0$, se tiene la siguiente igualdad:

$$U_1 = \frac{1}{2} \sigma^2 - C_1 \sigma, \quad \text{en } Y = 0 \quad (3.25)$$

y con un procedimiento similar, identificando $i=N$ como la frontera en $Y=-\gamma$ y utilizando la condición de continuidad en la velocidad (3.7a) y la ecuación (3.15) evaluada en $Y=-\gamma$

$$U_N = C_2 \exp\left(-\gamma \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}}\right) + 1, \quad \text{en } Y = -\gamma \quad (3.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.25) y (3.26) en (3.23) y (3.24) y aplicando la ecuación (3.22) para $i=3, \dots, N-2$, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones en un arreglo tridiagonal de $N-2 \times N-2$. Para solucionar este sistema de ecuaciones se emplea el método de Crout [31] que tiene como base la factorización de matrices que se simplifica cuando se trata de matrices tridiagonales como en este caso.

Una vez que se tienen las soluciones analíticas para las regiones homogéneas y el sistema de ecuaciones para la región interfacial el procedimiento de solución del modelo se

lleva a cabo de la siguiente forma: se suponen valores para las constantes C_1 y C_2 y para el espesor de la región de porosidad variable (γ) y se resuelve el sistema de ecuaciones. Con esta solución se pueden calcular las derivadas de la velocidad en $Y=0$ y $Y=-\gamma$ que no necesariamente tienen que ser iguales a las calculadas a partir de las ecuaciones (3.14) y (3.15)

$$\frac{dU_\eta}{dY} = C_1 \quad \text{en } Y = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{dU_\omega}{dY} = C_2 \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}} \exp(-\gamma \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}}) \quad \text{en } Y = -\gamma \quad (3.28)$$

Si las condiciones de continuidad de los esfuerzos cortantes en $Y=0$ (ecuación (3.5b)) y en $Y=-\gamma$ (ecuación (3.7b)) son satisfechas entonces termina el proceso de cálculo; en caso contrario se deben calcular nuevas constantes. Estas condiciones de frontera se utilizan como criterios de convergencia para lo cual es necesario reescribir las ecuaciones (3.5b) y (3.7b) de la siguiente manera

$$\frac{dU_\eta}{dY} - \frac{dU}{dY} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{dU}{dY} - \frac{dU_\omega}{dY} = 0 \quad (3.30)$$

y a partir de las ecuaciones anteriores se pueden obtener las siguientes expresiones

$$M_1 = U_2 - U_1 - \Delta Y C_1 \quad (3.31)$$

$$M_2 = U_N - U_{N-1} - \Delta Y C_2 \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}} \exp(-\gamma \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}}) \quad (3.32)$$

en las cuales se han combinando la discretización mediante diferencias finitas y las derivadas dadas por las ecuaciones (3.27) y (3.28). Cuando M_1 y M_2 son menores o iguales

a 1×10^{-9} para los valores de C_1 y C_2 supuestos entonces termina el proceso de cálculo; en caso contrario se calculan nuevos valores para estas constantes mediante el método de Newton-Raphson. Este método se implementa a partir de las ecuaciones (3.31) y (3.32) y se puede representar mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k-1)} - \mathbf{J}(\mathbf{C}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{C}^{(k-1)}) \quad (3.33)$$

en donde $\mathbf{C}^{(k)}$ representa el vector de las nuevas constantes calculadas en la iteración (k) y $\mathbf{C}^{(k-1)}$ representa el vector de las constantes en una iteración anterior ($k-1$); $\mathbf{M}(\mathbf{C}^{(k-1)})$ es el vector de las funciones M_1 y M_2 de las ecuaciones (3.31) y (3.32) que dependen de las constantes de la iteración ($k-1$) y $\mathbf{J}(\mathbf{C}^{(k-1)})$ es la matriz jacobiana que se obtiene a partir de las ecuaciones (3.31) y (3.32) y que tendrá los siguientes componentes

$$\mathbf{J}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial M_1}{\partial C_1} \right)_{C_2} & \left(\frac{\partial M_1}{\partial C_2} \right)_{C_1} \\ \left(\frac{\partial M_2}{\partial C_1} \right)_{C_2} & \left(\frac{\partial M_2}{\partial C_2} \right)_{C_1} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Las derivadas parciales son aproximadas mediante la siguiente ecuación

$$\frac{\partial M_j}{\partial C_z}(\mathbf{C}) = \frac{M_j(\mathbf{C} + \mathbf{e}_z \Delta C) - M_j(\mathbf{C} - \mathbf{e}_z \Delta C)}{2\Delta C} \quad (3.35)$$

en donde ΔC tendrá un valor de 1×10^{-9} y \mathbf{e}_z es un vector cuyo único elemento diferente de cero es un uno en la z -ésima coordenada. Entonces la evaluación de estas derivadas parciales requiere de resolver tres veces el sistema de ecuaciones lineales, para \mathbf{C} , para $\mathbf{C} + \mathbf{e}_z \Delta C$ y para $\mathbf{C} - \mathbf{e}_z \Delta C$. De acuerdo con la ecuación (3.33) sería necesario calcular la

inversa de la matriz jacobiana en cada iteración; para evitar eso, esa misma ecuación se reescribe de la siguiente forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{C}^{(k-1)})\mathbf{A} = -\mathbf{M}(\mathbf{C}^{(k-1)}) \quad (3.36)$$

en donde
$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k-1)} \quad (3.37)$$

por lo tanto ahora se resuelve el sistema de ecuaciones representado por la ecuación (3.36) para \mathbf{A} y posteriormente a este vector se suma el vector $\mathbf{C}^{(k-1)}$. Como se mencionó anteriormente, con las constantes calculadas se debe satisfacer el siguiente criterio:

$$\mathbf{M}(\mathbf{C}) \leq |1 \times 10^{-9}| \quad (3.38)$$

Una vez determinadas las constantes C_1 y C_2 , además de los perfiles de velocidad, se puede calcular el incremento fraccional del flujo másico en el canal debido a la presencia del medio poroso, en relación con el flujo en el canal si no existiera tal material y entonces la pared inferior ($Y=0$) fuese impermeable:

$$\Phi = \frac{\text{flujo másico real}}{\text{flujo másico con pared impermeable en } Y = 0} - 1 \quad (3.39)$$

Ambos flujos se calculan a partir de la solución analítica para la ecuación de Stokes (3.14) de acuerdo con

$$\rho_\beta \langle U_\eta \rangle = \frac{1}{\sigma} \int_{Y=0}^{Y=\sigma} U_\eta dY \quad (3.40)$$

tomando en cuenta que cuando se tiene la pared inferior impermeable se tiene como condición de frontera $U_\eta = 0$ en $Y=0$. El resultado final para la ecuación (3.39) es

$$\Phi = 3 - 6 \frac{C_1}{\sigma} \quad (3.41)$$

los valores calculados con la ecuación anterior se compararán con datos experimentales [18-20]. Otros resultados numéricos que se obtienen una vez que se ha solucionado el modelo matemático son los gradientes de velocidad que para las regiones homogéneas se calculan a partir de las derivadas de las ecuaciones (3.14) y (3.15) y para la región interfacial estos gradientes se aproximan mediante la ecuación (3.21). Con ayuda de las ecuaciones (3.20) y (3.21) también se calculan cada uno de los términos de la ecuación (3.6).

3.2. Corrección de Forchheimer: Efectos inerciales

Para manejar los efectos inerciales se incluye la corrección de Forchheimer y entonces se obtiene la siguiente ecuación adimensional

$$-1 = \frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} \frac{d^2 U}{dY^2} - \frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} \frac{d\varepsilon_{\beta}(Y)}{dY} \left[\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\beta}(Y)} U \right) \right] - \frac{K_{\beta\omega}}{K_{\beta}(Y)} U - \frac{K_{\beta\omega}}{K_{\beta}(Y)} F_{\beta}(Y) U, \quad -\gamma \leq Y \leq 0 \quad (3.42)$$

la cual se puede reescribir en la siguiente manera

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + P(Y) \frac{dU}{dY} + F(Y) U^2 + Q(Y) U = R(Y) \quad (3.43)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea y no lineal, en donde

$$F(Y) = \frac{[1 - \varepsilon_{\beta}(Y)] \varepsilon_{\beta\omega}^3}{100(1 - \varepsilon_{\beta\omega})^2 \varepsilon_{\beta}^3(Y)} Re_{\rho} \quad (3.44)$$

la ecuación anterior se obtiene a partir de la siguiente relación

$$F(Y) = \frac{K_{\beta\omega}}{K_{\beta}(Y)} F_{\beta}(Y) \quad (3.45)$$

Los otros coeficientes de la ecuaciones (3.43) están dados por las ecuaciones (3.17)-(3.17)

Para la solucionar la ecuación (3.43) se reescribe en la siguiente forma:

$$\frac{d^2U}{dY^2} + \Theta\left(Y, U, \frac{dU}{dY}\right) = 0 \quad (3.46)$$

en donde:

$$\Theta\left(Y, U, \frac{dU}{dY}\right) = P(Y) \frac{dU}{dY} + Q(Y)U + F(Y)U^2 - R(Y) \quad (3.47)$$

y al aplicar el método de diferencias finitas [31] a la ecuación (3.46) se obtiene

$$U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} + (\Delta Y)^2 \Theta\left(Y_i, U_i, \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta Y}\right) = 0 \quad (3.48)$$

Siguiendo un procedimiento similar al descrito para la solución de la ecuación (3.6) se divide el intervalo $-\gamma \leq Y \leq 0$ en una serie de nodos ($i=1, \dots, N$) para los cuales se aplica la ecuación (3.48). Al aplicar la ecuación (3.48) para $i=2$ y para $i=N-1$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$U_3 - 2U_2 + U_1 + (\Delta Y)^2 \Theta\left(Y_2, U_2, \frac{U_3 - U_1}{2\Delta Y}\right) = 0 \quad (3.49)$$

$$U_N - 2U_{N-1} + U_{N-2} + (\Delta Y)^2 \Theta \left(Y_{N-1}, U_{N-1}, \frac{U_N - U_{N-2}}{2\Delta Y} \right) = 0 \quad (3.50)$$

Estas ecuaciones junto con las que se obtienen al aplicar la ecuación (3.48) para $i=3, \dots, N-2$ constituirán un sistema no lineal de ecuaciones en un arreglo tridiagonal de $N-2 \times N-2$, cuya solución se aproxima utilizando el método de Newton-Raphson; de hecho, en este caso el sistema de ecuaciones que se soluciona es el que resulta de la aplicación de dicho método que puede ser representado de la siguiente forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{B} = -\mathbf{T}(\mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (3.51)$$

en donde \mathbf{U} es el vector de la velocidad, \mathbf{T} es el vector para el sistema de ecuaciones no lineal obtenido, \mathbf{J} es la matriz jacobiana obtenida a partir del sistema de ecuaciones anterior y \mathbf{B} es el siguiente vector

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{(k-1)} \quad (3.52)$$

el significado de los superíndices (k) y $(k-1)$ es el mismo que se ha explicado para el cálculo de las constantes C_1 y C_2 . Nuevamente el sistema de ecuaciones se resuelve para \mathbf{B} y a este resultado se le suma $\mathbf{U}^{(k-1)}$ para obtener \mathbf{U}^k . De acuerdo con la ecuación (3.51), para cada ecuación del sistema no lineal se tendrán que calcular las derivadas parciales con respecto a U_i , U_{i+1} y U_{i-1} para formar el jacobiano. La forma tridiagonal del sistema de ecuaciones permite que en lugar de derivar cada una de las ecuaciones en su totalidad, solo se derive la función Θ de la ecuación (3.47) que se puede reescribir de la siguiente manera

$$\Theta \left(Y, U_i, \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta Y} \right) = P(Y_i) \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta Y} + Q(Y_i) U_i + F(Y_i) U_i^2 - R(Y_i) \quad (3.53)$$

las derivadas parciales se calculan empleando una expresión semejante a la ecuación (3.35). El sistema de ecuaciones representado por la ecuación (3.51) también se resuelve con el

método de Crout. El cálculo de las constantes C_1 y C_2 se lleva a cabo en la forma como se ha descrito anteriormente. Cuando en el término de Forchheimer utilizamos $Re_p=0$, entonces $F(Y)=0$ y la ecuación (3.43) se reduce a la ecuación (3.16), esto permitió manejar la solución de ambas ecuaciones en un sólo programa de computadora que tiene como base a la ecuación (3.43). En la figura 3.1 se presenta en forma muy simple el proceso de solución del modelo matemático.

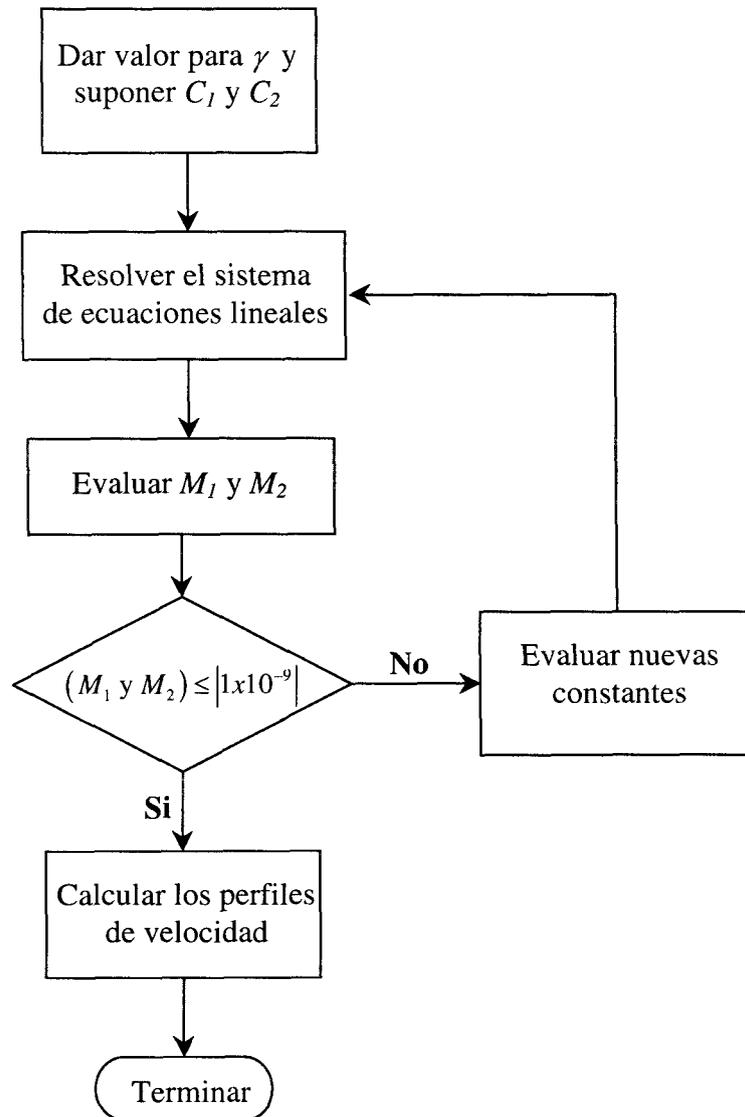


Figura 3.1. Diagrama de bloques que resume el procedimiento de solución del modelo matemático representado por las ecuaciones (3.4)-(3.9).

El programa que se utilizó consta de las siguientes partes:

1. Programa principal.
2. Rutina que calcula las constantes C_1 y C_2 con el método de Newton-Raphson.
3. Rutina que resuelve el sistema de ecuaciones.
4. Rutina que calcula la función Θ de la ecuación (3.53).
5. Rutina que calcula las derivadas parciales del Jacobiano de la ecuación (3.51)
6. Rutina que calcula los coeficientes dados por las ecuaciones (3.17)-(3.19).

Del programa principal se leerán los siguientes datos de entrada:

- γ → Espesor adimensional de la región interfacial
 C_1, C_2 → Valores iniciales para las constantes.
 σ → Profundidad adimensional del canal.
 Re_p → Número de Reynolds basado en el diámetro de partícula.
 $\varepsilon_{\beta\omega}$ → Porosidad de la región homogénea ω .
 N → Número de nodos en los que se dividirá el intervalo $-\gamma \leq Y \leq 0$ al aplicar el método de diferencias finitas

Con respecto al número de nodos en los que se discretizó el intervalo $-\gamma \leq Y \leq 0$, los resultados indican que estos son independientes de N cuando se utilizan 200 puntos o más. En el programa principal además se encuentran las opciones para elegir el tipo de resultados que se desean: incremento fraccional del flujo en el canal, perfiles de velocidad o los términos de la ecuación (3.42). Para no incluir la corrección de Forchheimer Re_p debe valer 0.

La rutina constante inicia calculando las derivadas de la matriz jacobiana (3.35) y una vez que se han calculado se evalúan las nuevas constantes. Debido a lo sencillo del sistema

que se debe resolver (ecuación (3.51)) pueden obtener expresiones explícitas para cada una de las constantes:

$$C_2^{(k+1)} = \frac{M_1^{(k)} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}} - M_2^{(k)} \frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}}}{\frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial C_2^{(k)}} - \frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_2^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}}} \quad (3.54)$$

$$C_1^{(k+1)} = C_2^{(k+1)} \frac{\frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_2^{(k)}}}{\frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}}} - \frac{M}{\frac{\partial M_1^{(k)}}{\partial C_1^{(k)}}} \quad (3.55)$$

Una vez que se han calculado las constantes y se cumple la condición de la desigualdad (3.38) esta rutina calculará el incremento fraccional del flujo (ecuación (3.41)), los perfiles de velocidad en el fluido homogéneo (ecuación (3.14)) y en el medio poroso homogéneo (ecuación (3.15)), los gradientes de velocidad que para la región interfacial se aproximarán con diferencias finitas y para las regiones homogéneas se calcularán con las derivadas de las ecuaciones (3.20) y (3.21).

$$\frac{dU_\eta}{dY^2} = -Y + C_1 \quad 0 \leq Y \leq \sigma \quad (3.56)$$

$$\frac{dU_\omega}{dY} = C_2 \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}} \exp(Y \sqrt{\varepsilon_{\beta\omega}}) \quad -\infty \leq Y \leq -\gamma \quad (3.57)$$

La rutina que resuelve el sistema de ecuaciones inicia calculando las aproximaciones iniciales que requiere el método de Newton-Raphson de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$U_i = U_1 + i \left(\frac{U_N - U_1}{\gamma} \right) \Delta Y, \quad \text{para } i = 2, \dots, N-1 \quad (3.58)$$

en donde U_1 y U_N están dados por las ecuaciones (3.25) y (3.26). Después de esto se calcula cada uno de los elementos de la matriz tridiagonal, para lo cual se hace uso de las subrutinas que calculan los valores para la función Θ definida en la ecuación (3.47) y las derivadas parciales de esta función con respecto a U_i , U_{i+1} y U_{i-1} . Posteriormente se resuelve el sistema de ecuaciones para \mathbf{B} definido en la ecuación (3.52) y como criterio de convergencia se utiliza la siguiente expresión

$$|\mathbf{B}| \leq 1 \times 10^{-9} \quad (3.59)$$

Finalmente, los términos de la ecuación (127) también se aproximarán con ayuda de diferencias finitas. Los coeficientes $P(Y)$, $Q(Y)$, $R(Y)$ y $F(Y)$ se calculan a partir de las ecuaciones (3.10) y (3.11) y de la siguiente expresión.

$$\frac{d\varepsilon_\beta(Y)}{dY} = 6(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \frac{Y}{\gamma^2} + 6(\varepsilon_{\beta\omega} - 1) \frac{Y^2}{\gamma^3} \quad (3.60)$$

CAPITULO 4

ANALISIS DE RESULTADOS

Una vez que se obtuvo la solución para el modelo de porosidad variable, se procedió a comparar los resultados obtenidos con datos experimentales y analizar los efectos de los parámetros como la porosidad $\varepsilon_\beta(Y)$ y la permeabilidad $K_\beta(Y)$ dependientes de la posición en la región interfacial, el espesor de la región interfacial ($\delta/\sqrt{K_{\beta\omega}}$), la profundidad del canal (σ) y el número de Reynolds (Re_p). Primero se trabajó con el modelo de porosidad variable sin tomar en cuenta los efectos inerciales y posteriormente se incluyeron.

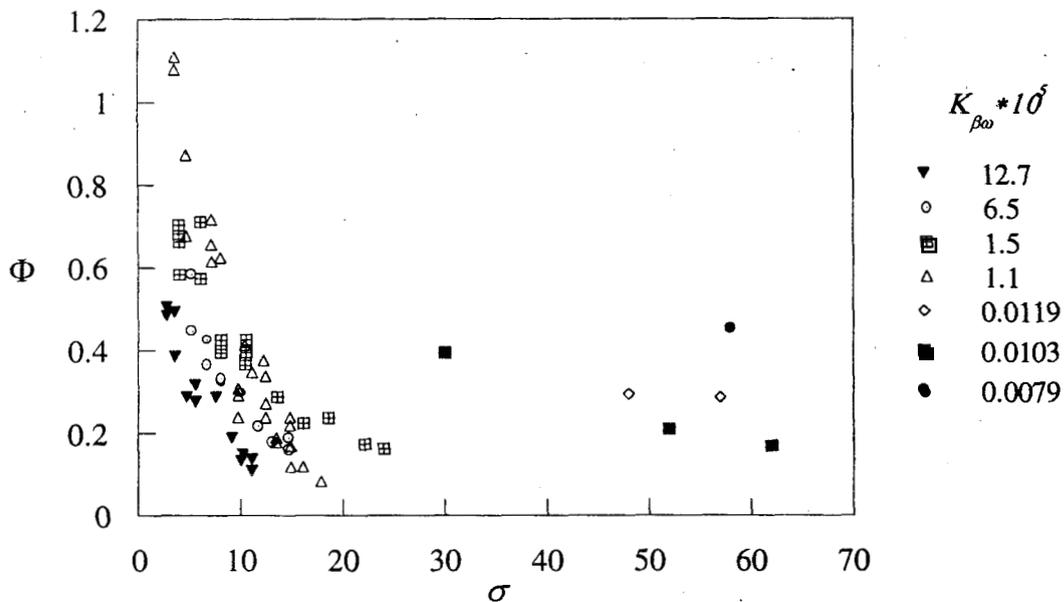


Figura 4.1. Datos experimentales de Beavers y colaboradores para foamental con diferentes permeabilidades [18-20]

4.1 Espesor de la región de porosidad variable

Para iniciar este análisis en la Figura 4.1 se presentan los datos experimentales obtenidos por Beavers y colaboradores sobre el incremento fraccional del flujo másico en el canal debido al efecto de capa límite [18-20]. Estos datos fueron obtenidos utilizando un mismo tipo de material poroso denominado foametal, que es un material constituido de fibras metálicas y la diferencia entre cada una de las muestras es su permeabilidad ($K_{\beta\omega}$), cuyo valor oscila dentro de un rango muy amplio ($0.0079 \times 10^{-5} - 12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$). Se observa entonces que entre menos permeable es el material, el incremento del flujo en el canal aumenta, lo que indicaría que el efecto de capa límite está siendo mayor. Esto puede deberse, entre otras cosas, a fuertes variaciones de las propiedades del medio poroso en la interregión que podrían estar influyendo en la penetración de los esfuerzos cortantes.

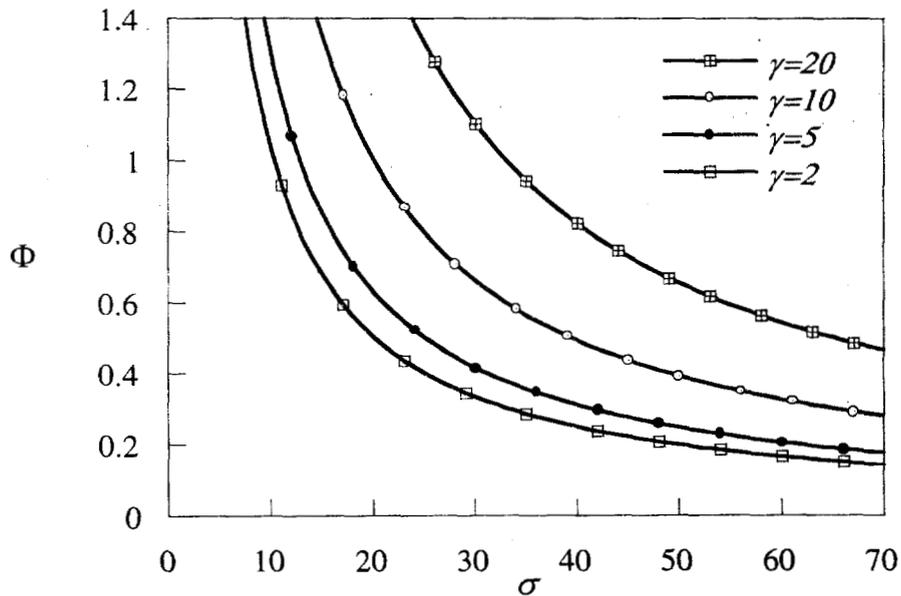


Figura 4.2. Incremento fraccional del flujo en el canal para diferentes espesores de la región interfacial, calculado con la ecuación (3.41).

En la Figura 4.2 se presentan diferentes curvas calculadas con la ecuación (3.41) para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$, sin tomar en cuenta efectos inerciales y para diferentes valores del espesor de la región interfacial (γ). Como puede observarse, a un menor espesor de la región de porosidad variable le corresponde un menor incremento en el flujo másico en el canal. El espesor de la interregión γ para ajustar los datos experimentales se ha determinado de acuerdo con el criterio que presentan Ochoa y Whitaker [17]:

$$\frac{\delta}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \approx \frac{1}{\alpha} \quad (4.1)$$

en donde α es al parámetro de ajuste de Beavers y Joseph [18]. Diversos investigadores [30,32], han establecido que la dimensión de dicha interregión es del orden del diámetro de poro o de partícula o del orden de $\sqrt{K_{\beta\omega}}$, entonces, partiendo de la ecuación de Blake-Kozeny [25], se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\delta}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} = \left\{ \sqrt{\frac{180(1-\varepsilon_{\beta\omega})^2}{\varepsilon_{\beta\omega}^3}} \right\} \left(\frac{\delta}{d_p} \right) \quad (4.2)$$

En la ecuación anterior aparece la dependencia del espesor δ de las propiedades del material poroso ($K_{\beta\omega}$, $\varepsilon_{\beta\omega}$, d_p). En la Figura 4.3 se tienen diferentes ajustes para los datos experimentales [18-20]; cada una de las curvas está asociada a la permeabilidad de los materiales y se observa que Φ disminuye conforme la permeabilidad del medio es mayor. Las variaciones de las propiedades del medio en la interregión son importantes para que se presente el comportamiento anterior, pero existen otros factores importantes. Sahraoui y Kaviany [30] reportan que el parámetro α de Beavers y Joseph [18] tiene la siguiente dependencia:

$$\alpha = \alpha(\varepsilon_{\beta}, Re_p, \sigma, \text{dirección de flujo, estructura superficial}) \quad (4.3)$$

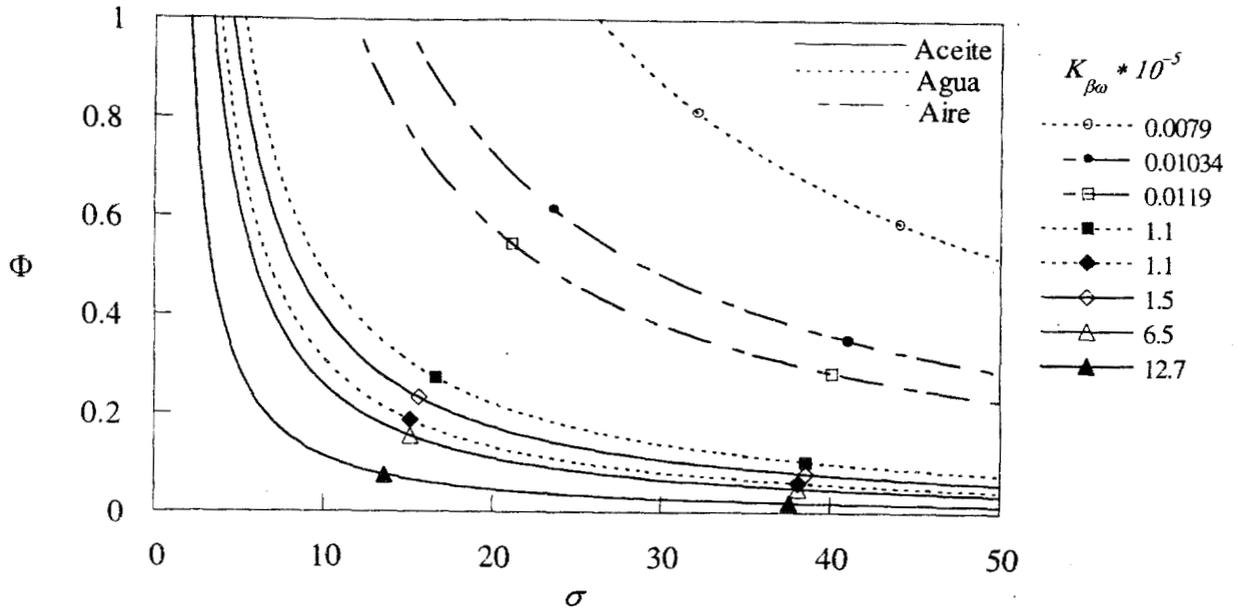


Figura 4.3. Incremento fraccional del flujo en el canal calculado con la ecuación (3.41). Curvas que ajustan los datos experimentales de Beavers y colaboradores [18-20]

Entonces, de acuerdo con la ecuación (4.1), δ debe tener la misma dependencia de α . En la Figura 4.3 se observa que los resultados son independientes del tipo de fluido.

4.2 Variaciones de la permeabilidad y la porosidad en la interregión.

En los ajustes de todos los datos experimentales se emplearon los valores de α de Beavers y Joseph [18-20] para calcular los valores de γ de acuerdo con la ecuación (4.1). En las figuras 4.4 y 4.5 se presentan estos ajustes para dos tipos diferentes de materiales, foametal y aloxita respectivamente [18]. En estos ajustes se utilizó $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$ como lo hacen Ochoa y Whitaker [17] y al igual que ellos únicamente se logró un buen ajuste para los datos correspondientes a aloxita y el valor de 2 para el espesor de la región interfacial utilizado para ajustar los datos de la Figura 4.4, es el valor más pequeño que se puede emplear, ya que valores menores producen un incremento de Φ o valores negativos.

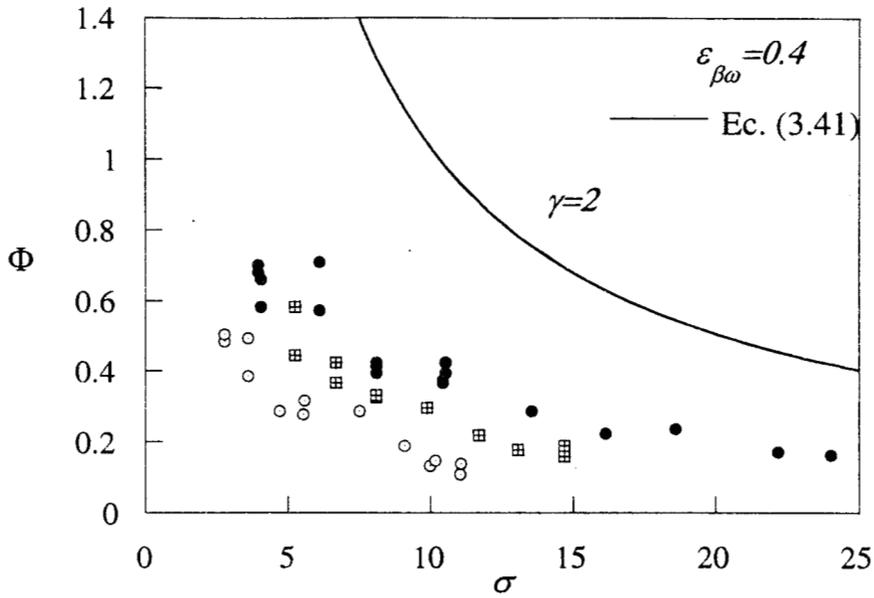


Fig. 4.4. Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$) ● $K_{\beta\omega}=1.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ◻ $K_{\beta\omega}=6.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ○ $K_{\beta\omega}=12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

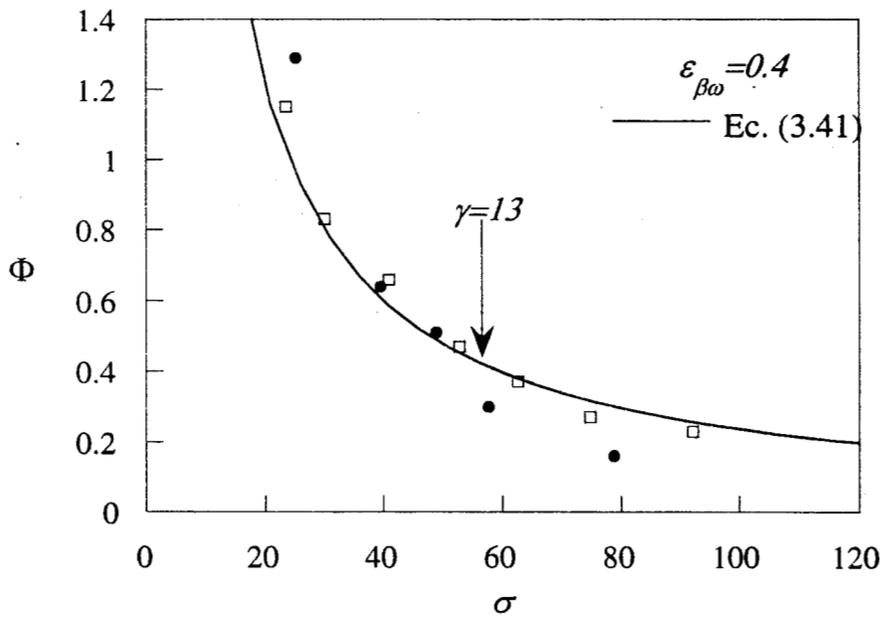


Fig. 4.5 Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para aloxita ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$) ◻ $K_{\beta\omega}=0.1 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ● $K_{\beta\omega}=0.248 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

Ochoa y Whitaker [17] utilizaron un valor para la porosidad de 0.4 en forma arbitraria al no contar con un valor real de la porosidad de los materiales, ya que Beavers y Joseph no reportaron estos valores [18]; sin embargo, en la literatura se reportan datos experimentales según los cuales la porosidad de la aloxita estaría en el rango de 0.4-0.5 [33] y para foametal sería de 0.95 aproximadamente [1,19,20]. Con estos valores el orden para el valor de la región interfacial para aloxita sería de 30 y de 1.5 para foametal, lo cual se cumple para todos los casos, excepto para el foametal con la más baja permeabilidad [20]. En las figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 se presentan los ajustes hechos a los datos experimentales para foametal empleando $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$. Con el cambio en el valor de la porosidad se pueden emplear valores de γ menores de 2, sin embargo a partir de 0.25 no habrá más cambios en el incremento fraccional del flujo y como puede observarse en las gráficas sólo se alcanzan a ajustar algunos datos.

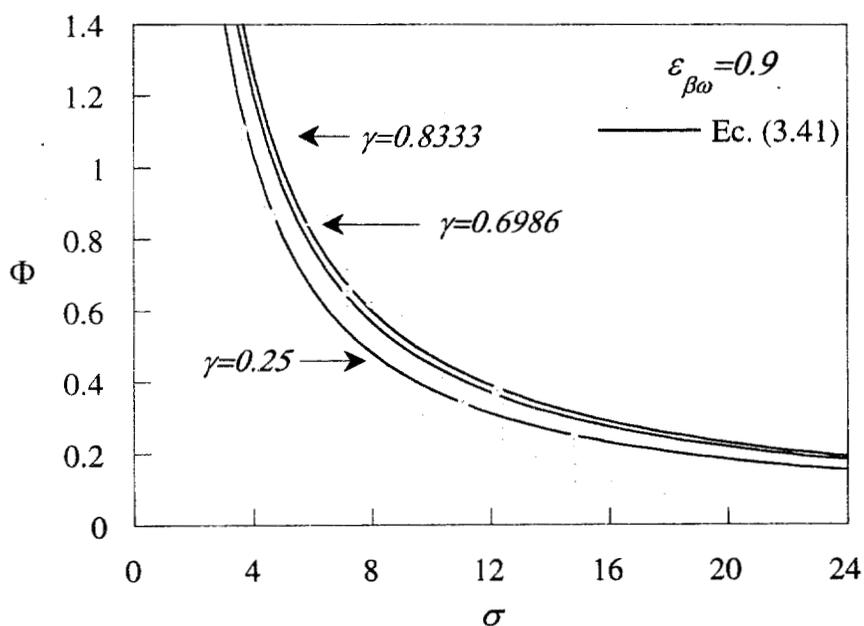


Figura 4.6. Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) $\odot K_{\beta\omega}=1.1 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

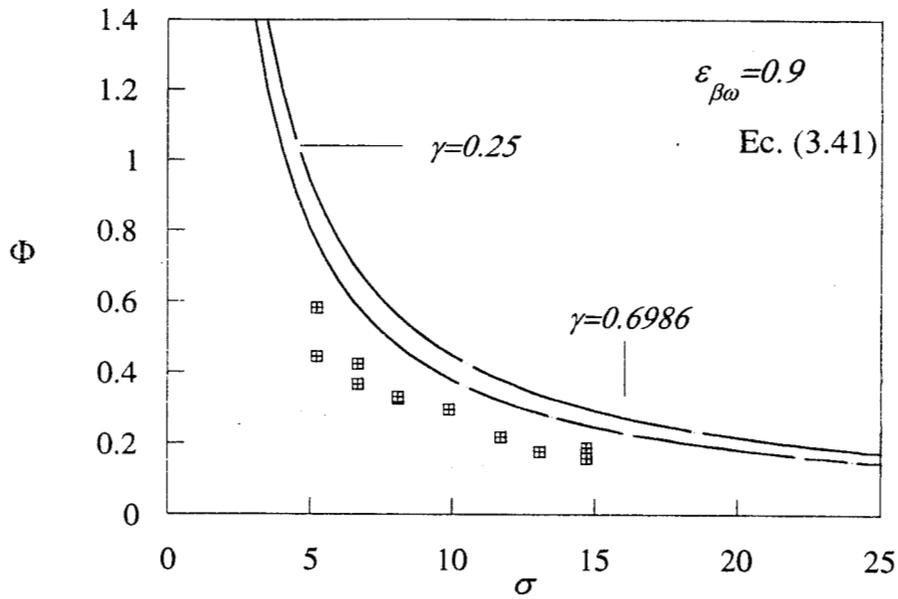


Figura 4.7. Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para foamental ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) ● $K_{\beta\omega}=1.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ◻ $K_{\beta\omega}=6.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ○ $K_{\beta\omega}=12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

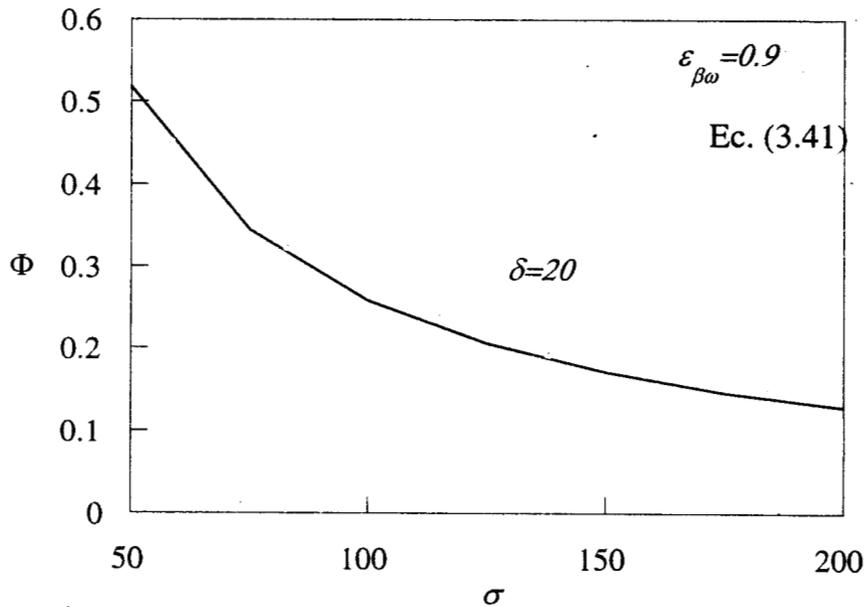


Figura 4.8. Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para foamental ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) ○ $K_{\beta\omega}=0.0079 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

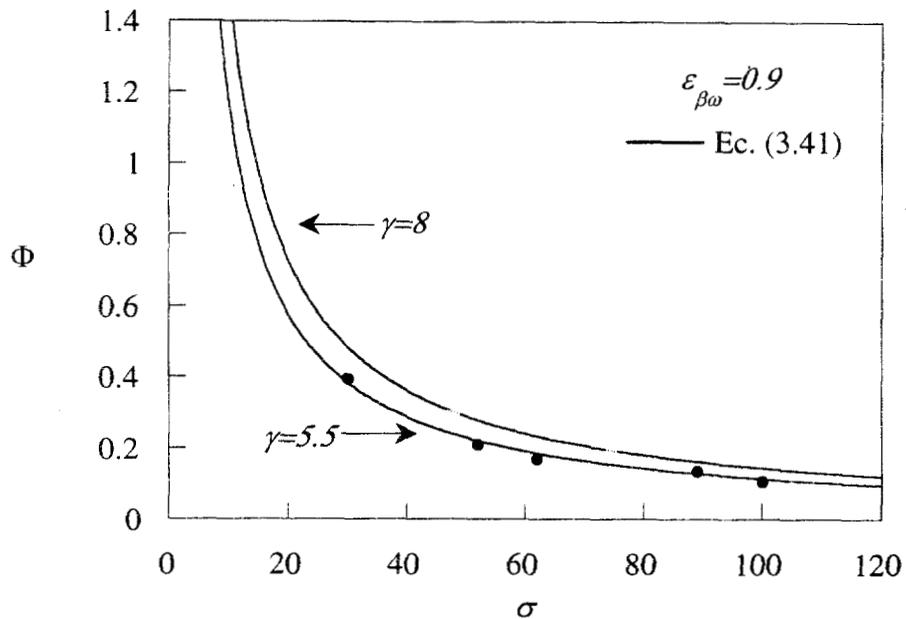


Figura 4.9. Comparación entre el modelo de porosidad variable y datos experimentales para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) \odot $K_{\beta\omega}=0.0103 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, \bullet $K_{\beta\omega}=0.0119 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

En la gráfica 4.10 se presentan dos curvas correspondientes a los cálculos para aloxita ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$, $K_{\beta\omega}=0.248 \times 10^{-5} \text{ in}^2$) y para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$, $K_{\beta\omega}=12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$). Beavers y Joseph atribuyen este comportamiento a la diferencia de la estructura física en la región interfacial y mientras el foametal tiene una estructura más uniforme, la aloxita que es un material granular compactado, probablemente tiene una porosidad mayor en los lados que en el cuerpo principal [18].

Lo anterior se puede verificar calculando los cambios de la porosidad y la permeabilidad en la región interfacial para ambos materiales como se muestra en la Figura 4.11. En esta gráfica también se comparan los espesores de las regiones de porosidad variable para los materiales reportados en la Figura 4.10; para aloxita este espesor es aproximadamente 10 veces mayor que para foametal.

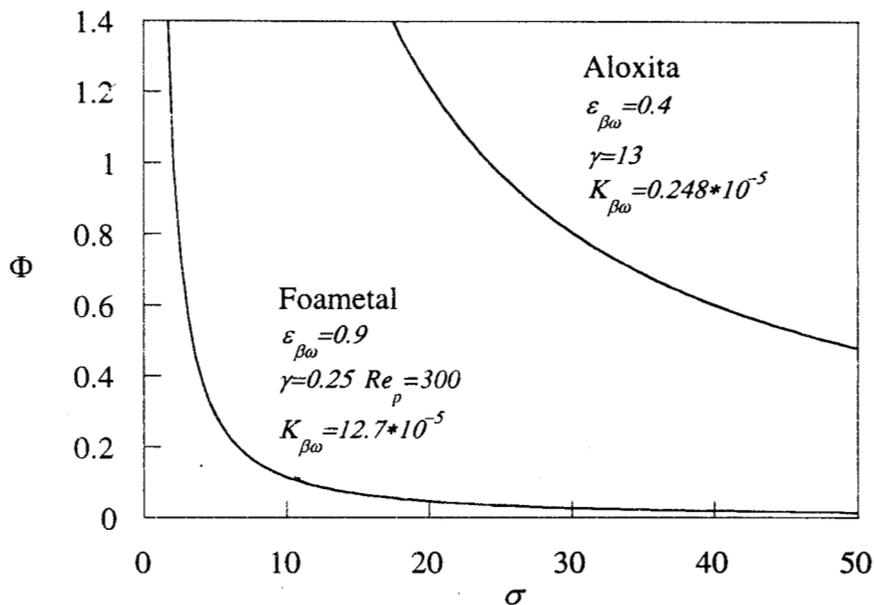


Figura 4.10. Comparación del incremento fraccional del flujo en el canal para aloxita y para foametel. Curvas calculadas con la ecuación (3.41).

Como puede observarse en la Figura 4.11 la porosidad de la aloxita es mayor que la de foametel en una región cercana a la interface y lo mismo sucede con la permeabilidad en la misma región, lo cual confirma la hipótesis de Beavers y Joseph acerca de las variaciones de las propiedades de los materiales en la interface.

4.3 Profundidad del canal (σ)

El comportamiento de las propiedades de los materiales en la interfase también se refleja en los perfiles de velocidad como se observa en la Figura 4.12 que han sido calculados para un valor de $\sigma = 10$; en esta gráfica se tiene la velocidad adimensional y la coordenada espacial dimensional $y = (Y \cdot \sqrt{K_{\beta\omega}})$. Tomando en cuenta que σ ha sido definido

como $h/\sqrt{K_{\beta\omega}}$, entonces para este valor de σ se tienen diferentes valores para la profundidad del canal ya que los materiales tienen diferentes $K_{\beta\omega}$. Esto permite analizar el efecto de la profundidad del canal (σ)

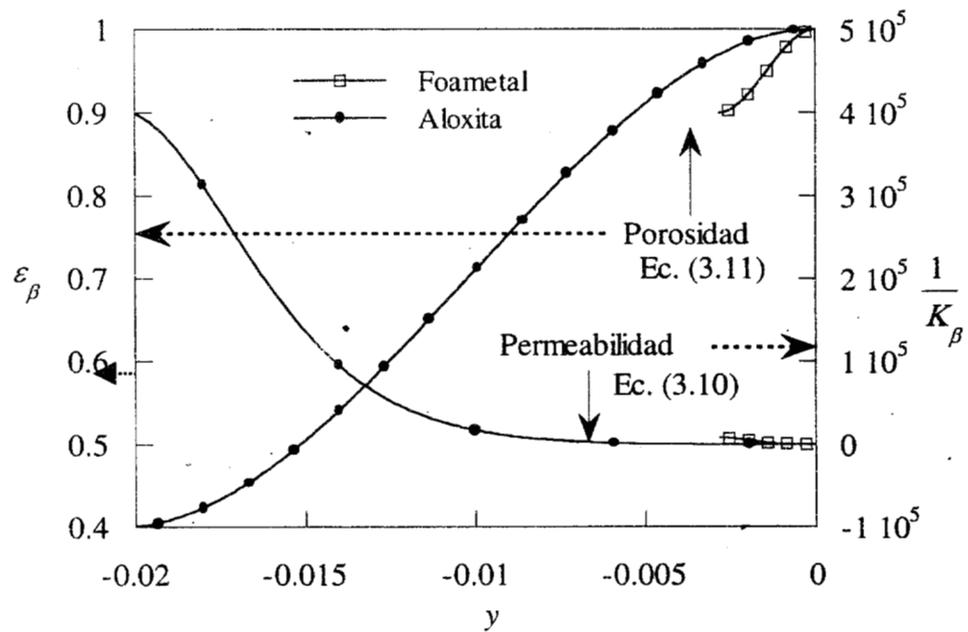


Figura 4.11. Comparación de las variaciones de la permeabilidad y la porosidad en la región interfacial.

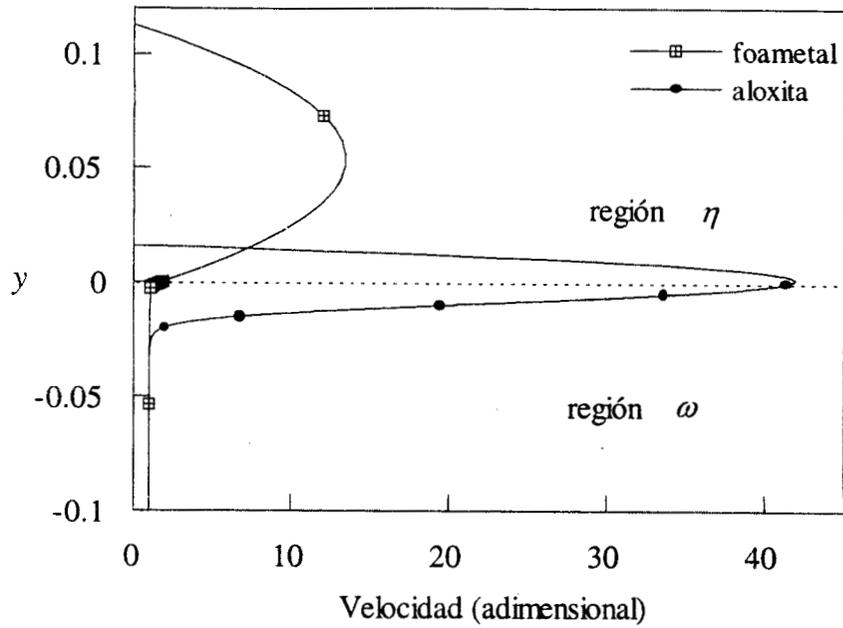


Figura 4.12. Perfiles de velocidad para aloxita y foametal. Los cálculos se hicieron para $\sigma=10$ en ambos casos ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$).

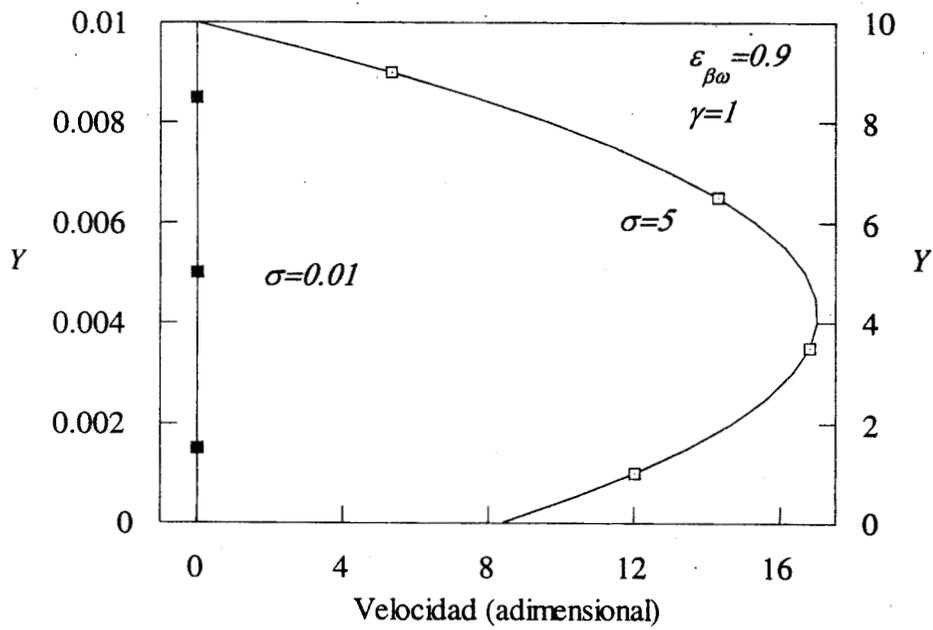


Figura 4.13.- Perfiles de velocidad en función de la profundidad del canal.

La profundidad del canal (h) influye en el tipo de flujo que se tenga, así, para valores de pequeños de h se tiene un flujo con un perfil de velocidad lineal y conforme va aumentando la profundidad se empieza a tener un perfil parabólico, y consecuentemente la velocidad interfacial también aumenta. Esto puede observarse en la Figura 4.13, en donde se han calculado los perfiles de velocidad para $\gamma=1$. Este comportamiento también fue observado por Sahraoui y Kaviany [25] quienes reportan que esto es debido a los efectos inerciales en la interface que se van haciendo cada vez más importantes y que esto es un fenómeno similar al que se tiene cuando se aumenta el número de Reynolds. En la Figura 4.14 se presentan los gradientes de velocidad en la región interfacial para los mismos casos de aloxita y foametal de la Figura 4.10 y se puede observar que dicho gradiente es lineal en el canal, pero no lo es en la región interfacial y fuera de la región de porosidad variable el gradiente es constante. Además, el gradiente en la interface es mayor para foametal que para aloxita, para la cual es lineal inclusive en una cierta distancia por debajo de esa interface.

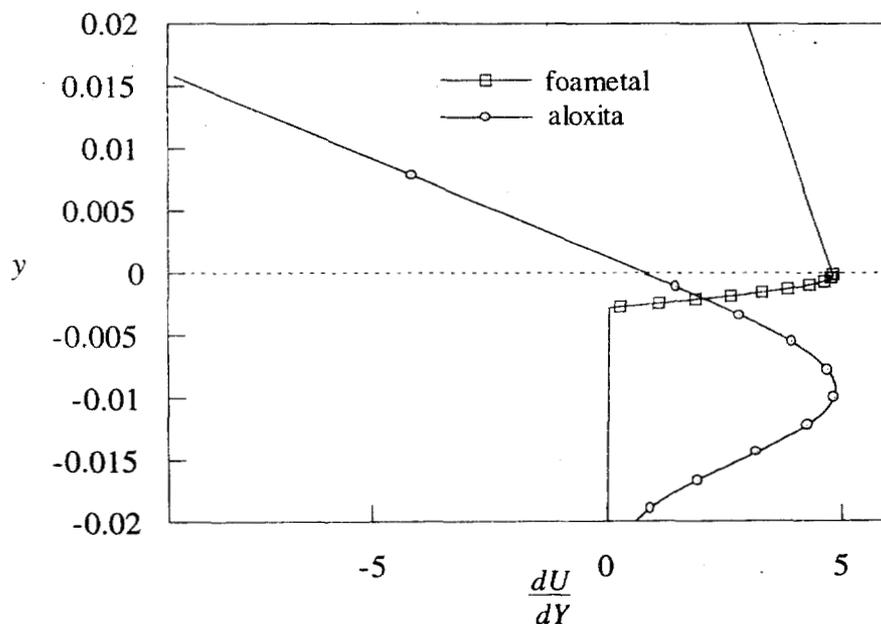


Figura 4.14. Comparación entre los gradientes de velocidad para aloxita y foametal en la región interfacial.

4.4. Efectos inerciales

Se ha visto la importancia que tiene el conocer las propiedades de los materiales porosos para ajustar los datos experimentales, pero como se observa en las Figuras 4.6 y 4.7 aún así no se logró el ajuste de todos los datos experimentales. También se ha visto que en un material más poroso e impermeable que otro no necesariamente se dará un mayor incremento del flujo en el canal. En esto influyen las variaciones de la porosidad y la permeabilidad en la región interfacial y el incremento de los efectos inerciales. Cuando los efectos inerciales son importantes se introduce no linealidad en la velocidad, lo cual ocurre para un rango del número de Re_p (basado en el diámetro de partícula) de 1-10. Con esto no se quiere decir que se este pasando a un régimen de flujo turbulento, pues en esos valores del número de Re_p no es posible, más bien que el arrastre debido a los obstáculos sólidos es comparable al arrastre superficial debido a la fricción [18]. De acuerdo con Sahraoui y Kaviany [25] el incremento de los efectos inerciales se manifiesta en una menor velocidad interfacial y la formación de remolinos que harán que el incremento del flujo en el canal sea menor que si dichos efectos no fueran importantes. Para tomar en cuenta los efectos inerciales se emplea la ecuación la corrección de Forchheimer (3.47). Whitaker establece que [33]

$$\delta = O(\ell_\beta) \quad Re_p \ll 1 \quad (4.4)$$

$$\delta = O(\ell_\beta / \sqrt{Re_p}) \quad Re_p \gg 1 \quad (4.5)$$

en donde ℓ_β es una longitud característica para la fase β . En la Tabla 4.1 se muestran los valores para el espesor de la región de porosidad variable adimensional (γ) estimados a partir de las ecuaciones (4.4) y (4.5) y los valores que se utilizaron para el ajuste de los datos experimentales; como longitudes característica se tomaron los diámetros de partícula (tal como los sugieren Larson y Higdon [14] y Sahraoui y Kaviany [25]) que reportan Beavers y Joseph para algunos materiales [2]. Puede observarse la concordancia entre los valores estimados y los utilizados.

Material	Permeabilidad [in ²]	Diámetro promedio de partícula [in]	Valor estimado para γ Ec. (4.5).	Valor usado en el ajuste (numérico)	Re_p
Foametal	1.5×10^{-5}	0.016	1.85	1.28	5
Foametal	6.5×10^{-5}	0.034	0.94	0.6986	20
Foametal	12.7×10^{-5}	0.045	0.23	0.25	300
Aloxita	0.1×10^{-5}	0.013	13	13	-
Aloxita	0.248×10^{-5}	0.027	17	13	-

Tabla 4.1. Comparación entre los valores estimados y los valores utilizados del espesor de la región de porosidad variable, utilizados para el ajuste de los datos experimentales.

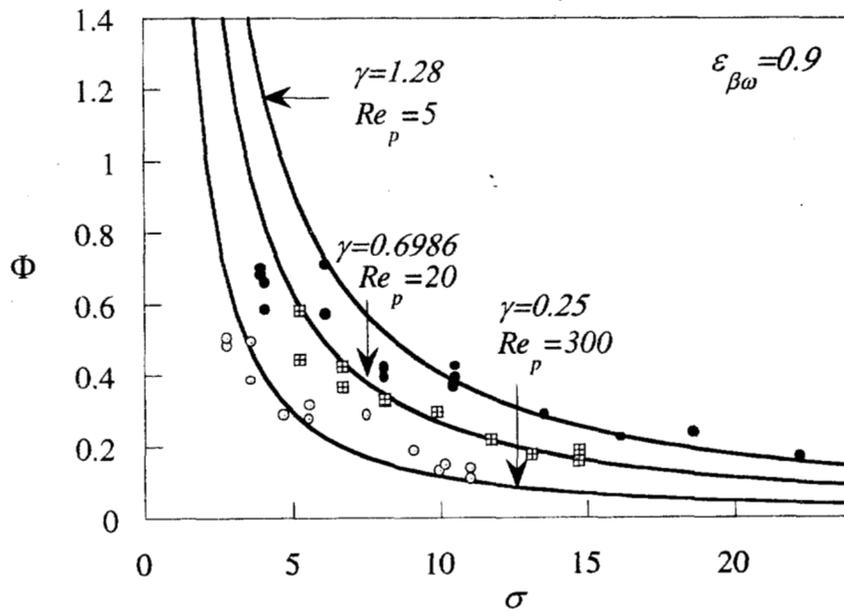


Figura 4.15. Comparación del modelo de porosidad variable con la corrección de Forchheimer con datos experimentales para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) ● $K_{\beta\omega}=1.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ⊠ $K_{\beta\omega}=6.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$, ○ $K_{\beta\omega}=12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

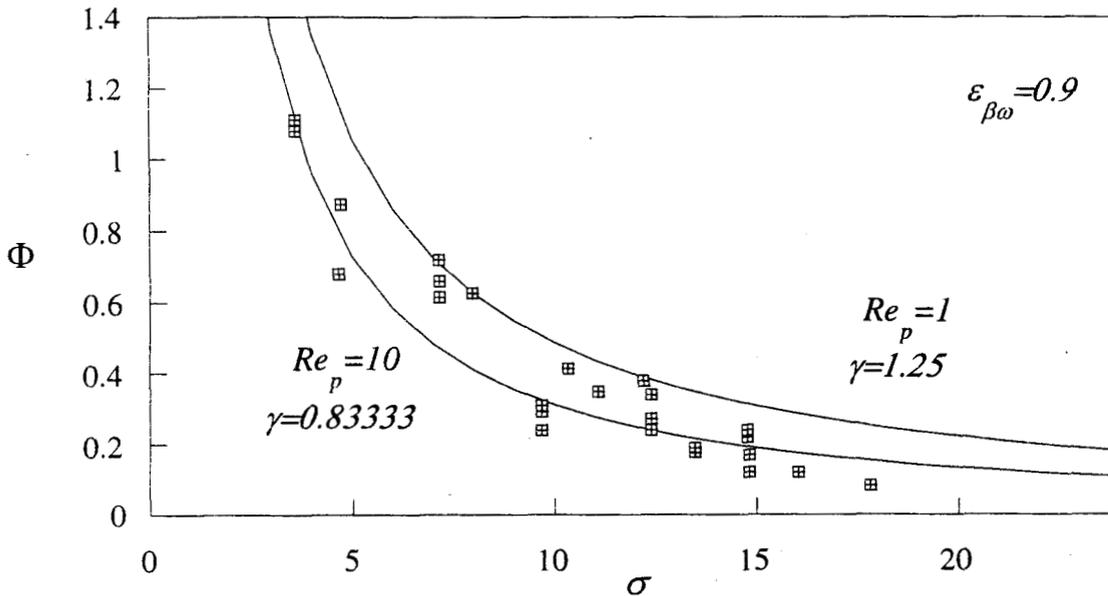


Figura 4.16. Comparación del modelo de porosidad variable con la corrección de Forchheimer con datos experimentales para foametal ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$). $K_{\beta\omega}=1.1 \times 10^{-5} \text{ in}^2$

Sahraoui y Kaviany [25] encontraron que α , el parámetro de Beavers y Joseph aumenta con Re_p , por lo que de acuerdo con la ecuación (4.1) el espesor de la región de porosidad variable disminuye con el aumento de Re_p . En las Figuras 4.15 y 4.16 se presentan los ajustes para los datos experimentales de Beavers y Joseph [2] incluyendo, en la ecuación de transferencia de momentum para la región de porosidad variable la corrección de Forchheimer y como puede observarse se logra un buen ajuste.

Anteriormente se analizaron las diferencias en las propiedades de dos materiales con diferente porosidad (aloxita y foametal) y se vio como influyen en la transferencia de momentum; esta misma situación se presenta para los datos experimentales de la Figura 4.15, en donde todos los materiales tienen el mismo valor de $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$. En la Figuras 4.17 y 4.18 se observan las variaciones de la porosidad y la permeabilidad en la región interfacial. El material que es más permeable ($\gamma=0.25$, $K_{\beta\omega}=12.7 \times 10^{-5} \text{ in}^2$) presentan la

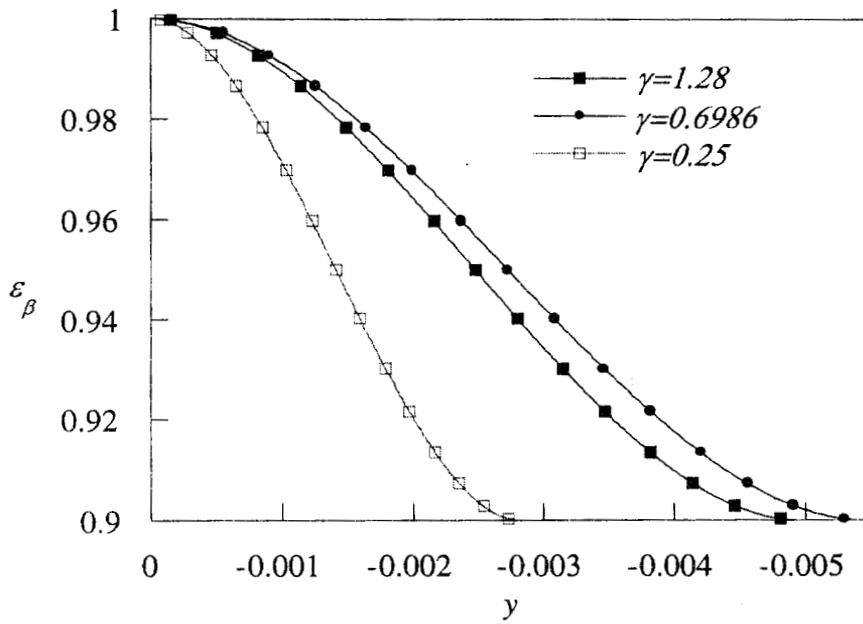


Figura 4.17. Variaciones de la porosidad en la interregión, $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$ (Ec. 3.11).

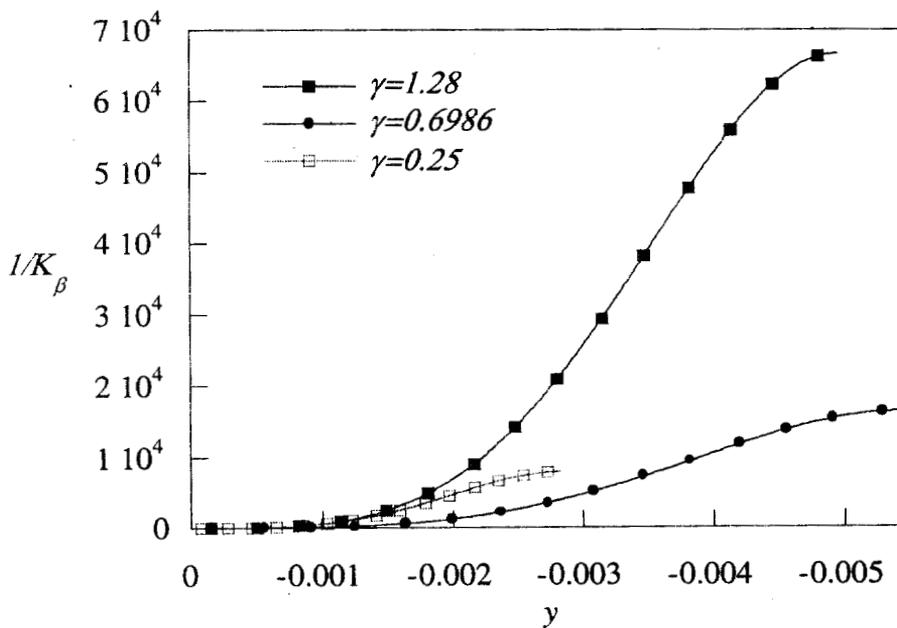


Figura 4.18. Variaciones de la permeabilidad en la interregión, $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$ (Ec. 3.10).

menor porosidad, aunque no la menor permeabilidad. El material para el cual se presenta el mayor incremento de flujo ($\gamma=1.28$, $K_{\beta\omega}=1.5 \times 10^{-5} \text{ in}^2$) tiene también la mayor permeabilidad pero no sucede lo mismo con la porosidad. Finalmente el material con mayor porosidad en la región interfacial ($\gamma=0.6986$, $K_{\beta\omega}=6.5 \times 10^{-5}$) tiene la permeabilidad menor. De acuerdo con lo anterior no es tan clara la razón por la cual entre más permeable es el material se tiene un menor incremento en el flujo.

En la Figura 4.19 se presentan los perfiles de velocidad calculados para $\sigma=10$ y como se ha explicado anteriormente, de acuerdo a la definición de σ , a este valor corresponden diferentes valores para la profundidad del canal (h), dependiendo del material. Se observa que esta profundidad aumenta con la permeabilidad del material, entonces se debe tomar en cuenta que entre más grande es h , los efectos inerciales se hacen cada vez más importantes, además para $Re_p \geq 1$ se pierde la no linealidad en la velocidad. Un incremento en los efectos inerciales, como ya se ha mencionado anteriormente se manifiesta entre otras cosas en una disminución en el incremento del flujo en el canal. En la Figura 4.20 se muestran los gradientes de velocidad en la región de porosidad variable para los tres materiales que se analizan; estos gradientes pueden aportar información sobre la magnitud de los efectos inerciales, ya que entre más grandes sean estos gradientes mayor será la importancia de los efectos inerciales [25]. Se observa que en la interface este gradiente se incrementa para el material que presenta el menor incremento fraccional en el flujo del canal, aunque no presenta la mayor permeabilidad en esa región como se ha visto en la Figura 4.18. Cuando no se toman en cuenta los efectos inerciales, ya no hay diferencia en los resultados para $\gamma \geq 0.25$. En las Figuras 4.21 y 4.22 se presentan los términos de la ecuaciones (3.6) y (3.42) en donde se observa que en el caso en que no se toman en cuenta los efectos inerciales, el término de Darcy es del mismo orden de magnitud que la primera corrección de Brinkman, mientras que cuando se toman en cuenta dichos efectos el término de Darcy y la segunda corrección de Brinkman son pequeños en comparación con el término de Forchheimer y la primera corrección de Brinkman que a su vez son del mismo orden de magnitud.

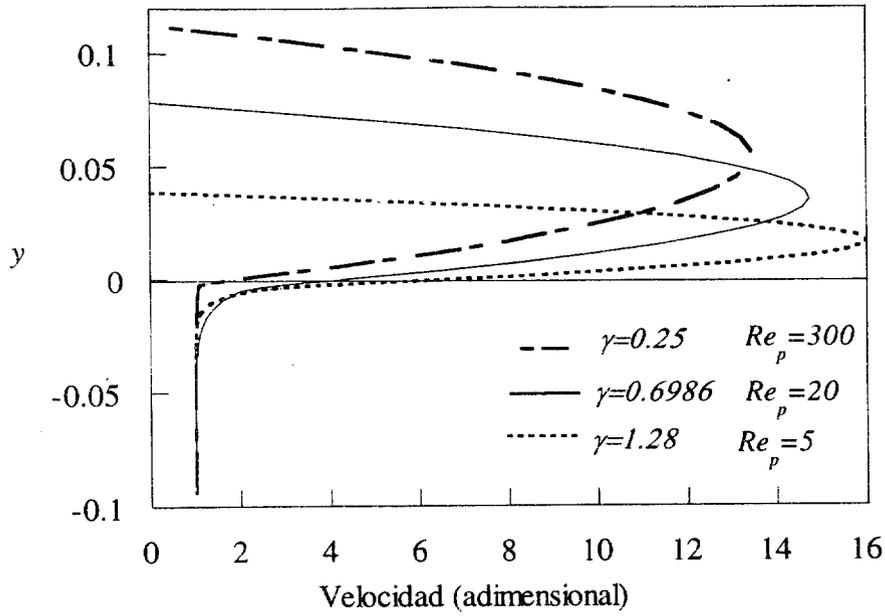


Figura 4.19. Perfiles de velocidad para tres diferentes tipos de foamental. Los cálculos se hicieron para $\sigma=10$ ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$).

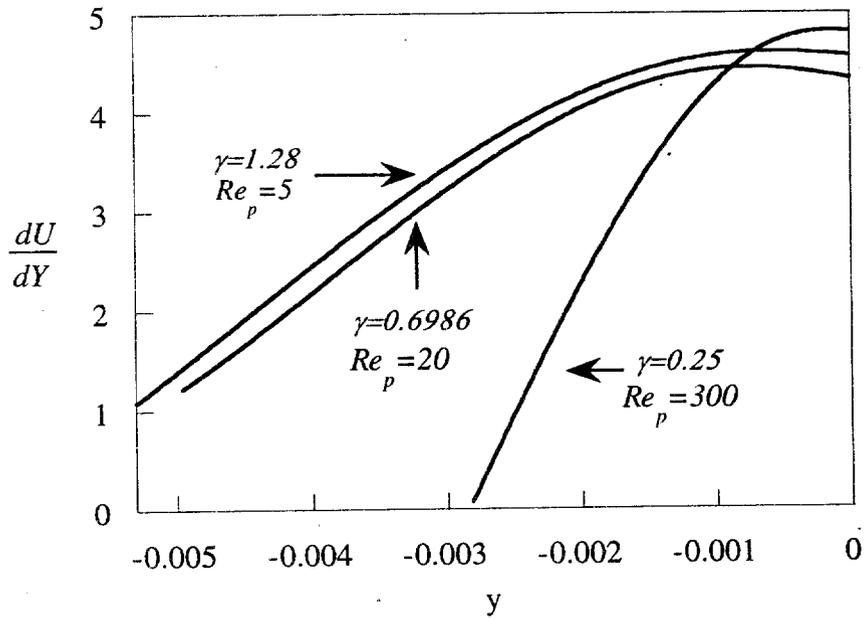


Figura 4.20. Gradiente de velocidad para tres tipos diferentes de foamental. Los cálculos se hicieron para $\sigma=10$ ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$).

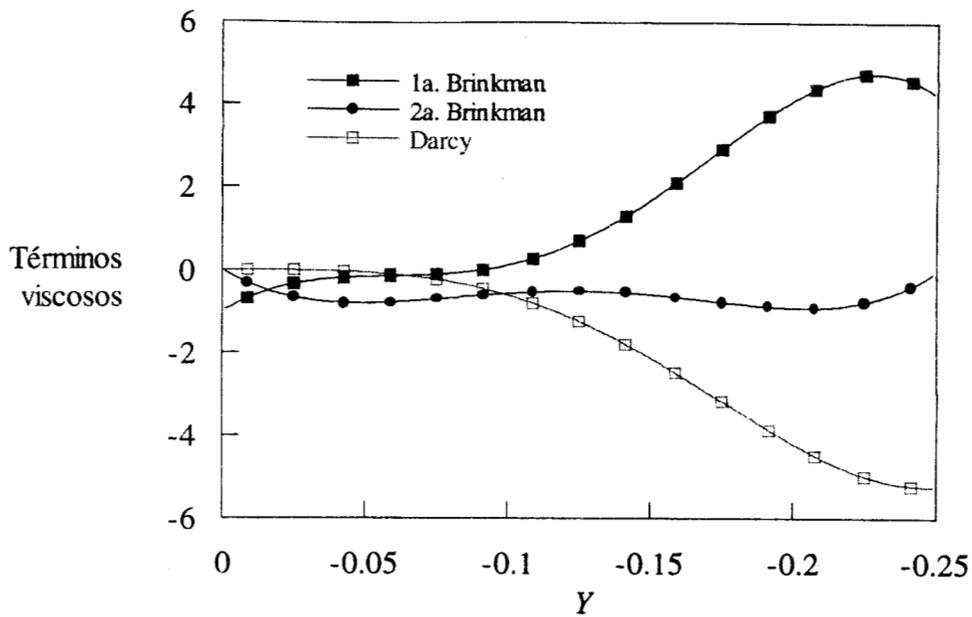


Figura 4.21. Términos viscosos de la ecuación (3.6). Los cálculos se hicieron para $\sigma=10$ y $\gamma=0.25$ ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$).

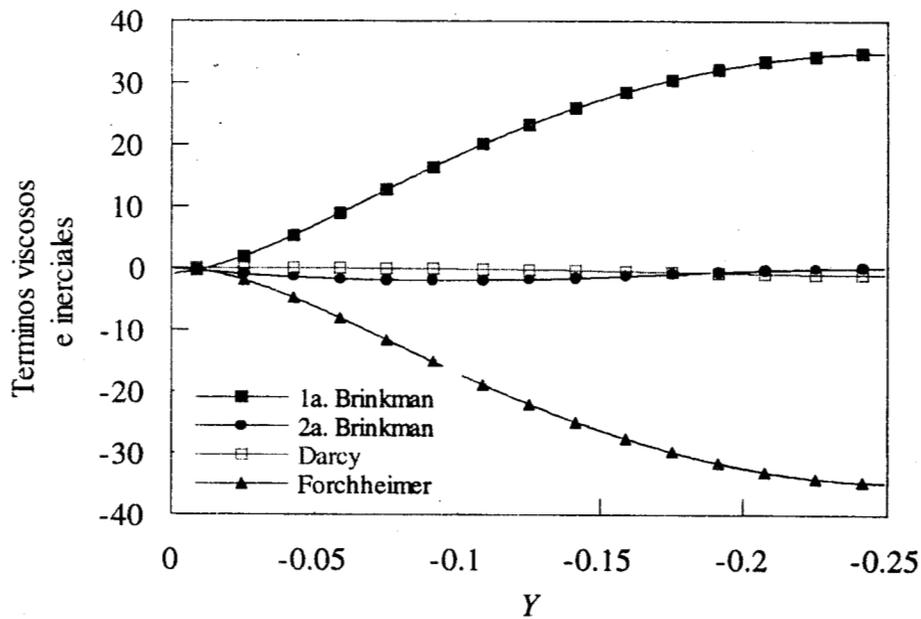


Figura 4.22. Términos viscosos e inerciales de la ecuación (3.42). Los cálculos se hicieron para $\sigma=10$ y $\gamma=0.25$ ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$).

4.5. Segunda corrección de Brinkman

Se mencionó anteriormente que con una porosidad de 0.4 únicamente se lograron ajustar los datos experimentales para aloxita (Figura 4.5) y además no fue posible trabajar con valores para el espesor de la región de porosidad variable (γ) menores de 2. Para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$ se pudieron manejar valores menores de 2, aunque para valores menores de 0.25 no hay mayor variación en los resultados. Independientemente del tipo de medio poroso, en las Figuras 4.23 y 4.24 se presenta el comportamiento de cada uno de los términos de la ecuación (3.6) en la región de porosidad variable para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$ y $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$. Una primera interpretación de estas gráficas podría ser que de acuerdo con la Figura 4.23 los términos de la 1a y 2a correcciones de Brinkman se anulan y por lo tanto el término de Darcy cobra importancia, pero este término no es adecuado para abordar el problema de capa límite, lo cual explicaría el mal comportamiento. En la Figura 4.24 los términos que se anulan son la corrección de Brinkman con el término de Darcy, entonces la 2a corrección de Brinkman es importante.

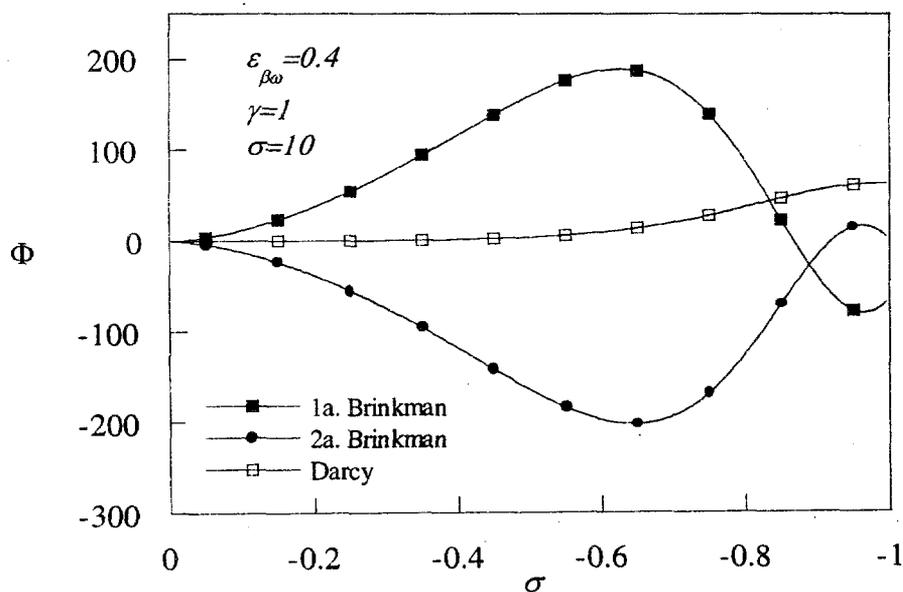


Figura 4.23. Variación de los términos de la ecuación (72) en la interregión.

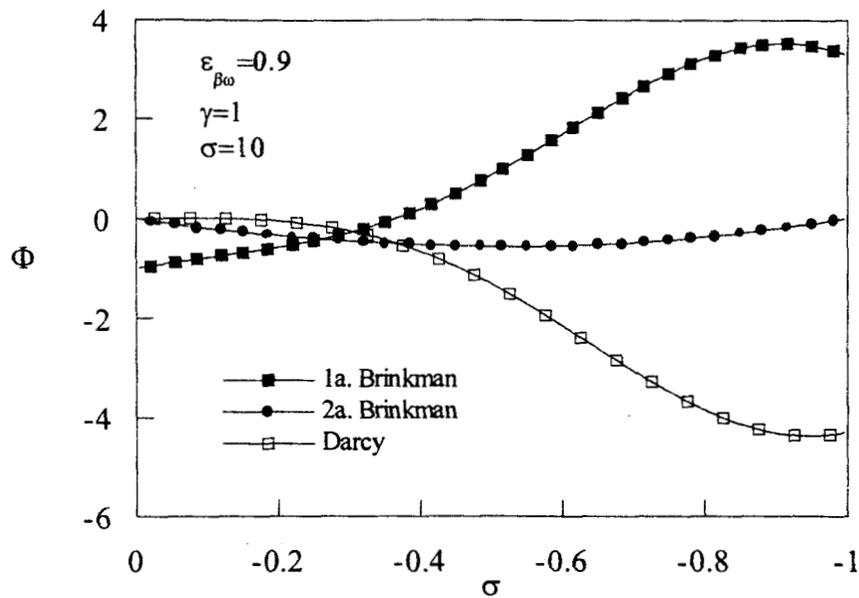


Figura 4.24. Variación de los términos de la ecuación (3.6) en la interregión

El anterior criterio fue utilizado por Ochoa y Whitaker [21] para establecer la importancia de la segunda corrección de Brinkman a partir de los términos graficados en la Figura 4.25. De acuerdo con los autores la primera corrección de Brinkman y el término de Darcy tienden a anularse y entonces la segunda corrección de Brinkman vendría a ser importante. Sin embargo, en la Figura 4.26 en la que se tienen los mismos términos de la Figura 4.25 pero tomando el valor absoluto de esos valores para poder comparar los ordenes de magnitud de cada uno de los términos; se observa que la primera corrección de Brinkman y el término de Darcy no tienden a anularse; cerca de la interface y hasta aproximadamente la mitad de la región interfacial la primera corrección de Brinkman domina, mientras el término de Darcy y la segunda corrección de Brinkman son muy pequeños en comparación con el primer término e inclusive en alguna zona de la región interfacial son estos términos los que tienden a anularse. Después la primera corrección de Brinkman decrece y el término de Darcy crece mientras que la segunda corrección prácticamente permanece constante. Cerca de la zona en donde inicia la región homogénea ω , la primera corrección de Brinkman y el término de Darcy crecen y ahí si tienden a

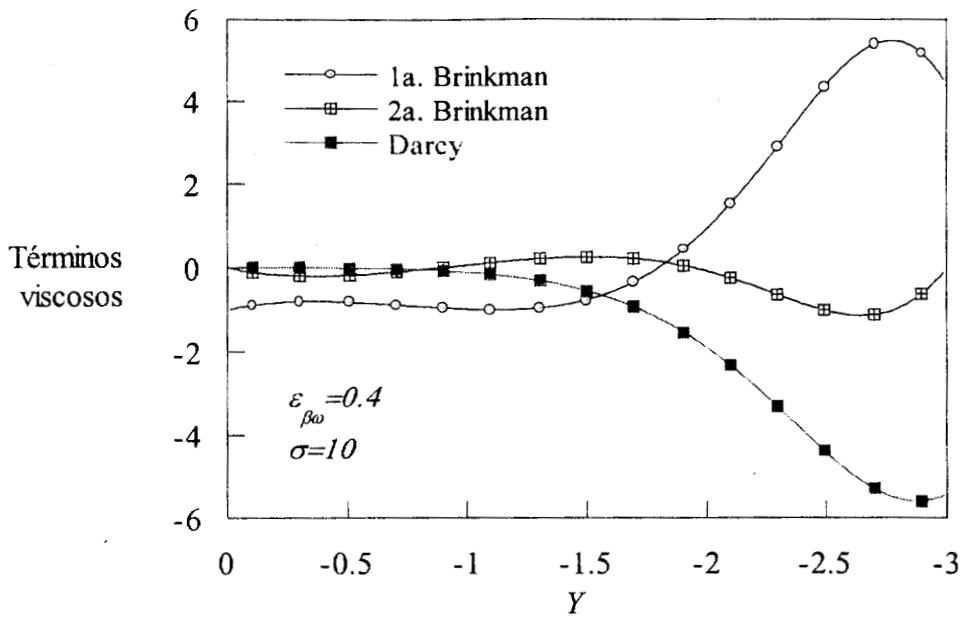


Figura 4.25. Variación de los términos viscosos de la ecuación (3.6) en la región interfacial. Los cálculos se hicieron para $\gamma=3$.

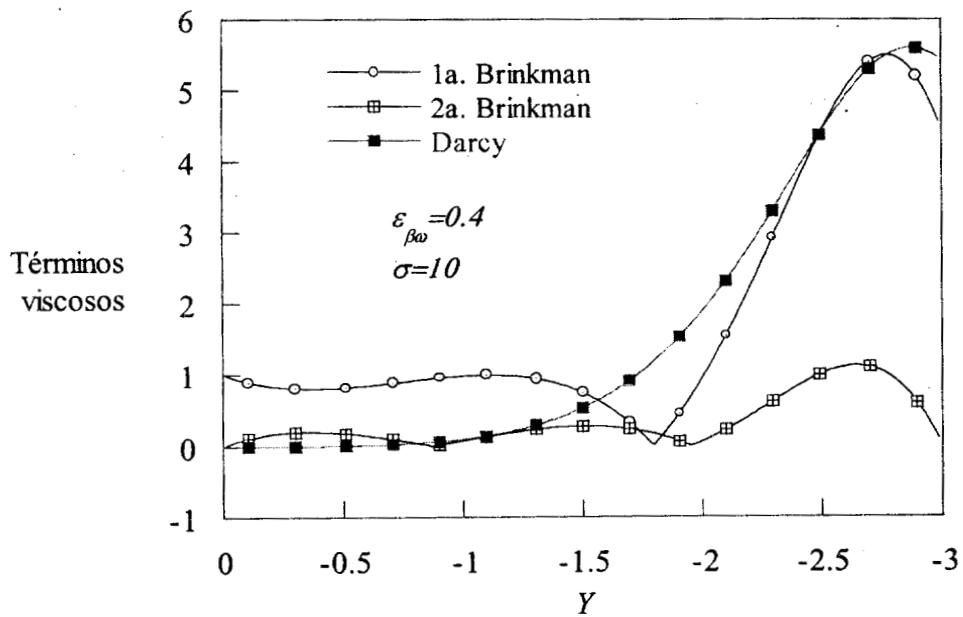


Figura 4.25. Variación de los términos viscosos de la ecuación (3.6) en la región interfacial. Los cálculos se hicieron para $\gamma=3$.

anularse, pero no se podría decir que entonces la segunda corrección de Brinkman es importante porque se está presentando en una zona cercana a donde se tienen propiedades constantes, en donde es válida la ley de Darcy con la corrección de Brinkman. Además, de acuerdo con la Figura 4.22 no se podría decir que la primera corrección de Brinkman y el término de Forchheimer se anulan y que la segunda corrección de Brinkman viene a ser el término importante pues no es adecuado para tomar en cuenta los efectos inerciales. La situación anterior se presenta en prácticamente todos los casos e inclusive en algunos el término de Darcy es mayor al la primera corrección de Brinkman.

Por otra parte, un seguimiento del comportamiento de los términos de la ecuación (3.6) (sin incluir la corrección de Forchheimer) para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$, $\sigma=10$ y diferentes valores del espesor de la región de porosidad variable indica que para valores grandes de γ la 1a. corrección de Brinkman y el término de Darcy son del mismo orden de magnitud mientras que 2a corrección de Brinkman es mucho menor que esos dos términos. A medida que el espesor de la región interfacial va disminuyendo, la 1a corrección de Brinkman y el término de Darcy mantienen un comportamiento uniforme pero la 2a corrección de Brinkman varía su comportamiento y cada vez se hace más grande hasta igualar a la 1a corrección de Brinkman y el término de Darcy va siendo cada vez más pequeño comparado con los dos términos anteriores, es entonces cuando se presenta el mal comportamiento, esto se observa en la Figuras 4.23, 4.27 y 4.28.

Cuando se efectúa el cambio de porosidad para trabajar con $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$, $\sigma=10$ y $\delta=\sqrt{K_{\beta\omega}}$ ($\gamma=1$), entonces el comportamiento antes mencionado desaparece y se vuelven a presentar la 1a corrección de Brinkman y el término de Darcy del mismo orden de magnitud y la 2a. corrección de Brinkman mucho menor que esos dos términos (Figuras 4.24 y 4.28). Pero de igual manera al ir disminuyendo el espesor de la región de porosidad variable la 2a. corrección de Brinkman varía su comportamiento y va haciéndose cada vez más grande hasta igualar a la 1a. corrección de Brinkman, mientras el término de Darcy se va haciendo cada vez menor y nuevamente se vuelve a presentar un comportamiento anómalo como se observa en la Figura 4.29

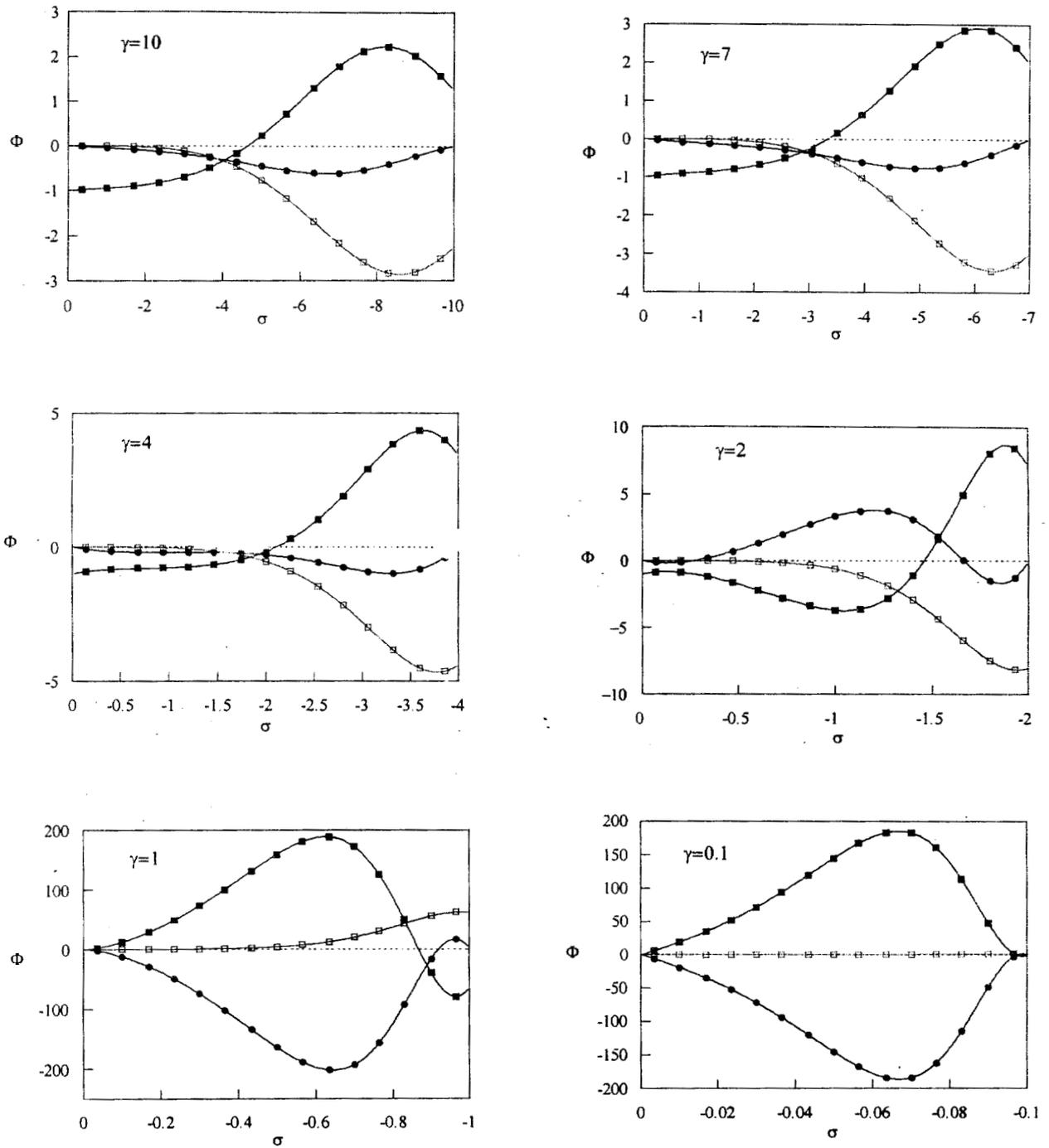


Figura 4.27. Variaciones de los términos viscosos de la ecuación (3.6) en función del espesor de la interregión. Los cálculos se hicieron para $(\varepsilon_{\beta\omega}=0.4, \sigma=10)$. \blacksquare 1a. de Brinkman, \bullet 2a. de Brinkman, \square Término de Darcy

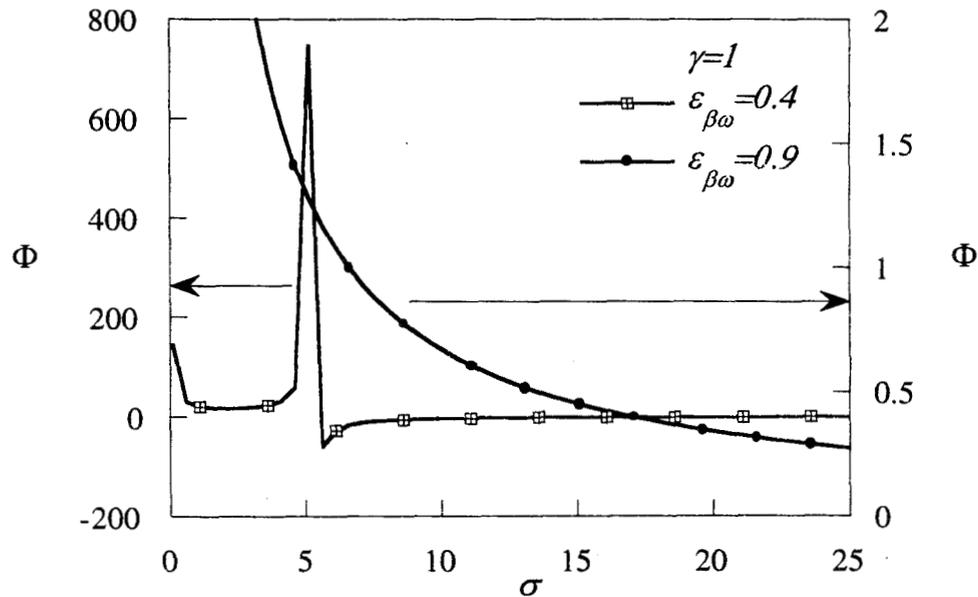


Figura 4.28. Incremento fraccional del flujo en el canal para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Sin tomar en cuenta efectos inerciales Los cálculos se hicieron para $\gamma=1$.

Este comportamiento ligado a la 2a corrección de Brinkman ya había sido reportado por Ochoa [19], quien eliminó este término de la ecuación (3.6) y entonces el comportamiento descrito anteriormente desaparece. Procediendo de igual manera, eliminado la segunda corrección de Brinkman se calculó el incremento fraccional del flujo para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$ y ahora si fue posible utilizar valores de γ menores de 2 sin que se presentara algún comportamiento anómalo. En la Figura 4.30 se comparan los resultados obtenidos sin incluir la 2a. corrección de Brinkman e incluyéndola y como puede observarse, los resultados son mejores cuando no se incluye la corrección. También se realizaron los cálculos para $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$ (Figura 4.31) y en este caso los resultados también se mejoraron cuando no se incluye la 2a. corrección de Brinkman. Para $\gamma=0.25$ y $\gamma=0.6986$ no existe gran diferencia entre los resultados (el error es de aproximadamente 0.015%) y no se presenta mal comportamiento para $\gamma=0.01$.

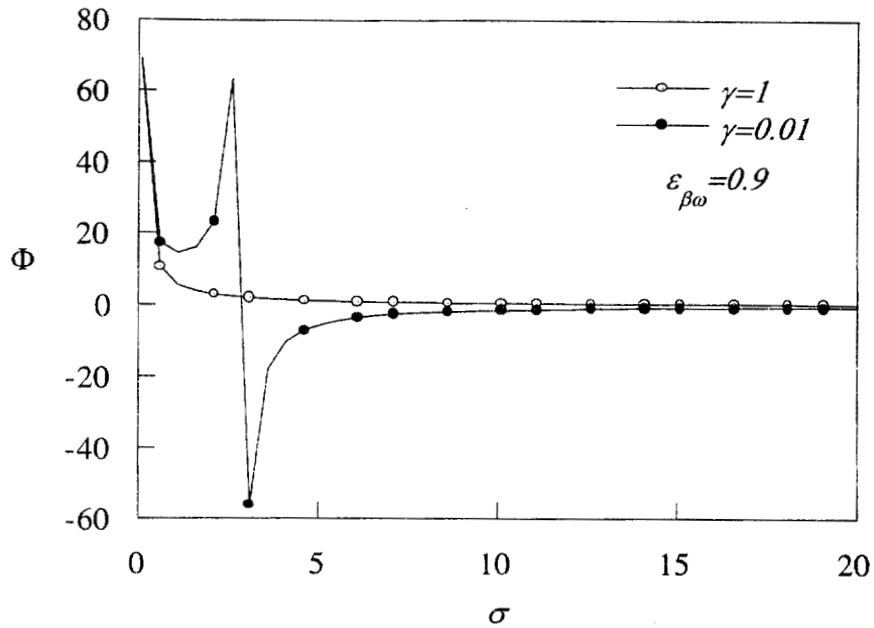


Figura 4.29. Incremento fraccional del flujo en el canal (ec. (3.41)), sin incluir efectos inerciales.

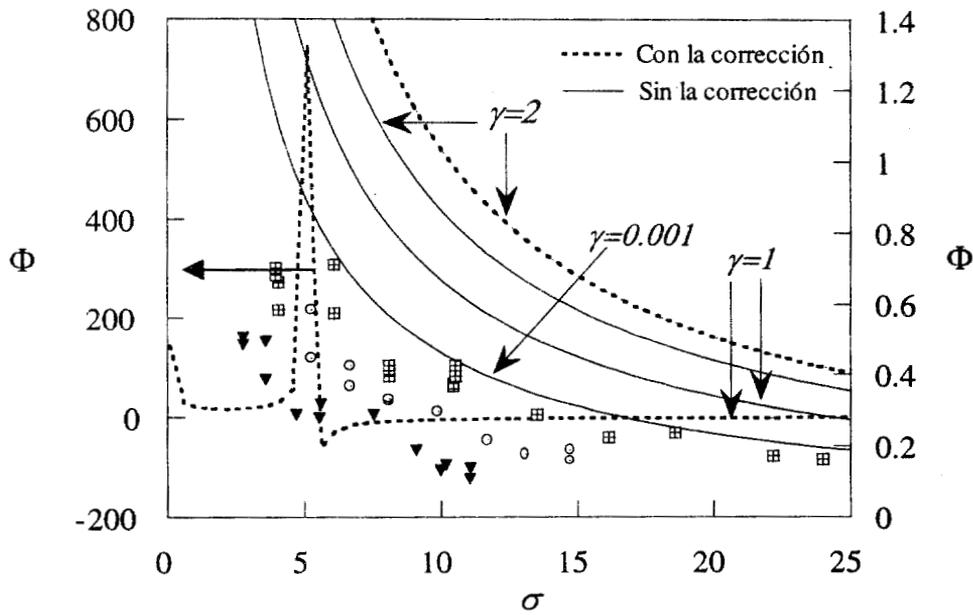


Figura 4.30. Comparación de los resultados obtenidos con y sin incluir la 2a. corrección de Brinkman ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) (ec. 3.41), con datos experimentales. No se incluyen efectos inerciales.

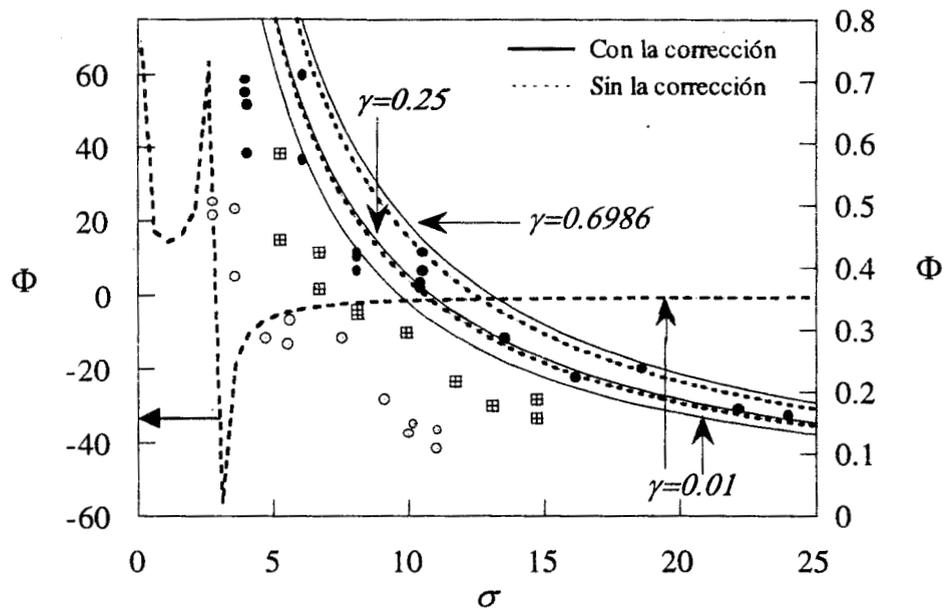


Figura 4.31 Comparación de los resultados obtenidos con y sin incluir la 2a. corrección de Brinkman ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) (ec. 3.41), con datos experimentales. No se incluyen efectos inerciales.

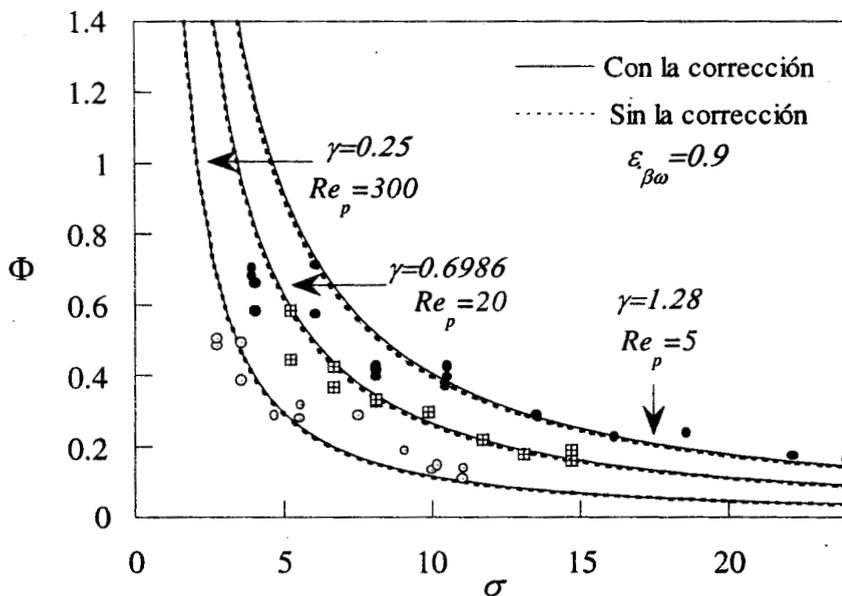


Figura 4.32. Comparación de los resultados obtenidos con y sin incluir la 2a. corrección de Brinkman ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$) (ec. 3.41), con datos experimentales. Se incluyen efectos inerciales.

Cuando se emplea la ecuación con la corrección de Forchheimer sucede lo mismo. En la Figura 4.32 se observa las curvas para ajustar los datos experimentales calculadas con y sin incluir la 2a. corrección de Brinkman; como puede observarse los resultados son prácticamente los mismos (existe un error de máximo de 2% para el rango manejado en las gráficas). En todos los casos analizados (como ejemplos véanse las Figuras 4.21, 4.24 y 4.25) los otros términos son de un orden de magnitud mayor que la segunda corrección de Brinkman. Los resultados antes expuestos sobre la segunda corrección de Brinkman indicarían que tiene muy poca influencia en la ecuación de transporte de momentum y como se ha visto el no incluirla, elimina los comportamientos anómalos ya descritos y además mejora los resultados.

6.6. Comparación del modelo de porosidad variable con la condición de salto.

En la Figura 4.33 se presenta la comparación entre los datos experimentales para el material denominado foamental y los resultados obtenidos al aplicar el modelo que utiliza la condición de salto (2.71). Los valores para el parámetro ajustable β utilizados en esos ajustes son diferentes de los empleados por Ochoa y Whitaker [21] ya que ellos utilizaron $\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$ y en este trabajo se utilizó $\varepsilon_{\beta\omega}=0.9$ que corresponde al valor reportado para la porosidad de foamental [4]; de cualquier manera el parámetro sigue siendo del orden de 1 positivo o negativo. En la Figura 4.34 se presenta la comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de porosidad variable (incluyendo y sin incluir la 2a. corrección de Brinkman) en el cual se incluye la corrección de Forchheimer y los datos obtenidos con el modelo de la condición de salto. En general existe una buena concordancia entre los datos principalmente en el canal y en la interface en donde la diferencia entre las velocidades para $Y=0$ no es mayor al 2% en todos los casos. Se puede pensar que las diferencias en la región de porosidad variable se pueden deber a los efectos inerciales que son tomados en cuenta en el modelo de porosidad variable.

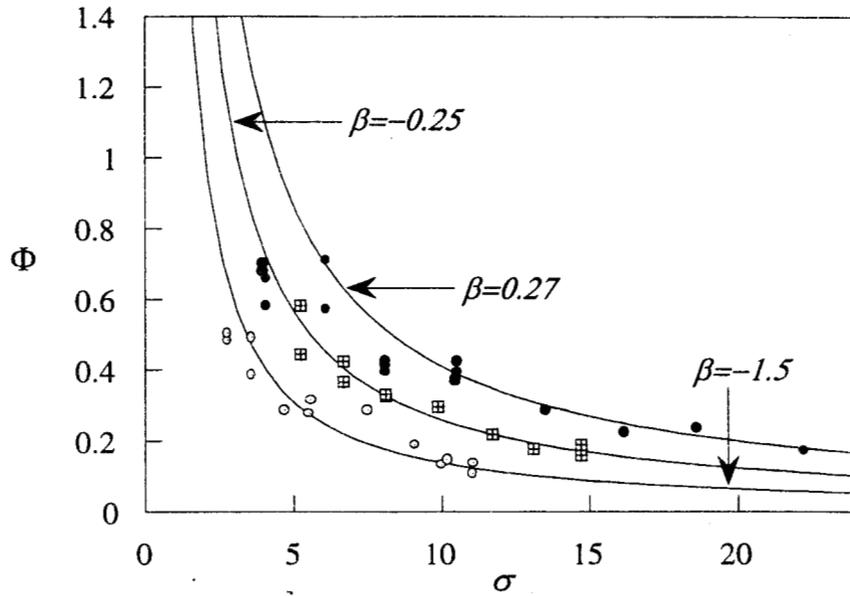


Figura 4.33. Incremento fraccional del flujo. Comparación entre datos experimentales y el modelo que utiliza la condición de salto.

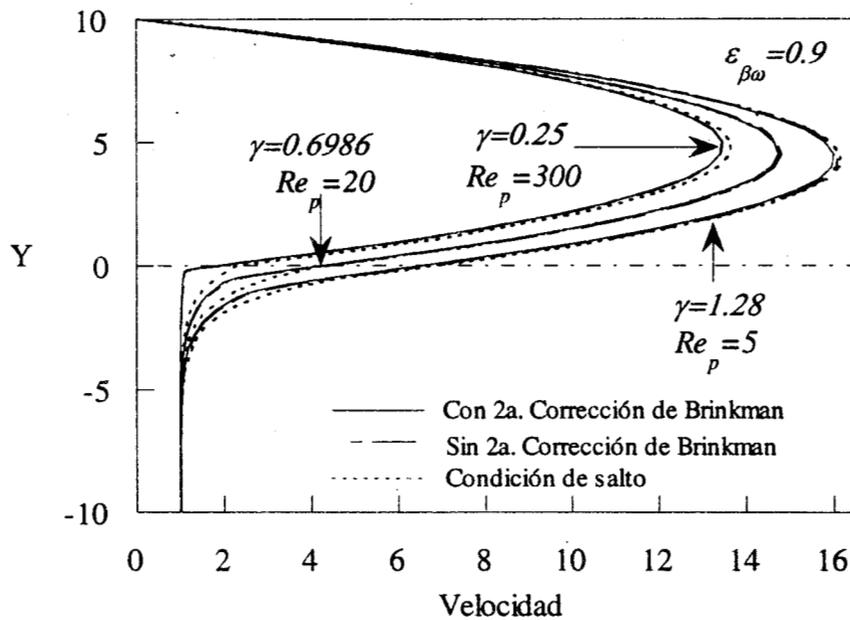


Figura 4.34. Perfiles de velocidad. Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de porosidad variable y el modelo que utiliza la condición de salto ($\epsilon_{\beta\omega}=0.9$)

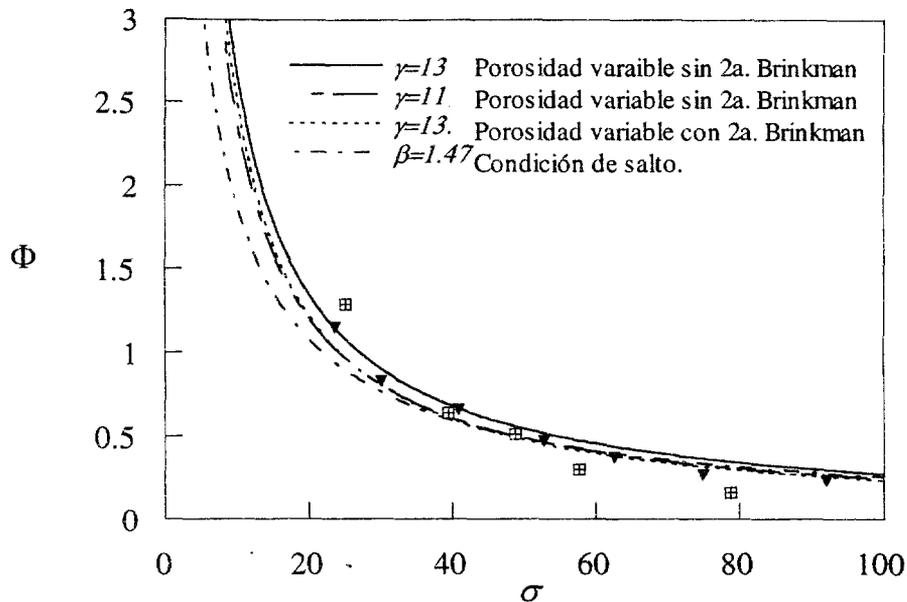


Figura 4.35. Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de porosidad variable y el modelo que utiliza la condición de salto ($\varepsilon_{\beta\omega}=0.4$)

En la Figura 4.35 se presenta la comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de porosidad variable (en donde no se toma en cuenta la corrección de Forchheimer) y el modelo de la condición de salto con los datos experimentales para aloxita. Se observa que en este caso aproximadamente para $\sigma < 40$ existen ciertas diferencias entre el modelo de porosidad variable y el modelo de la condición de salto; estas diferencias se observan también en los perfiles de velocidad de la gráfica 4.36. Para $\sigma > 40$ ya no existen mayores diferencias entre los perfiles de velocidad en el canal, pero si en la región de porosidad variable, esto se observa en la Figura 4.36 en donde se tienen los perfiles de velocidad para $\sigma=50$.

En la gráfica 4.37 se observa que mientras los perfiles de velocidad en el canal son muy semejantes, en la región de porosidad variable existen diferencias con el modelo de la condición de salto. Esto es contrario a lo que se esperaría ya que ambos modelos están basados en las mismas ecuaciones

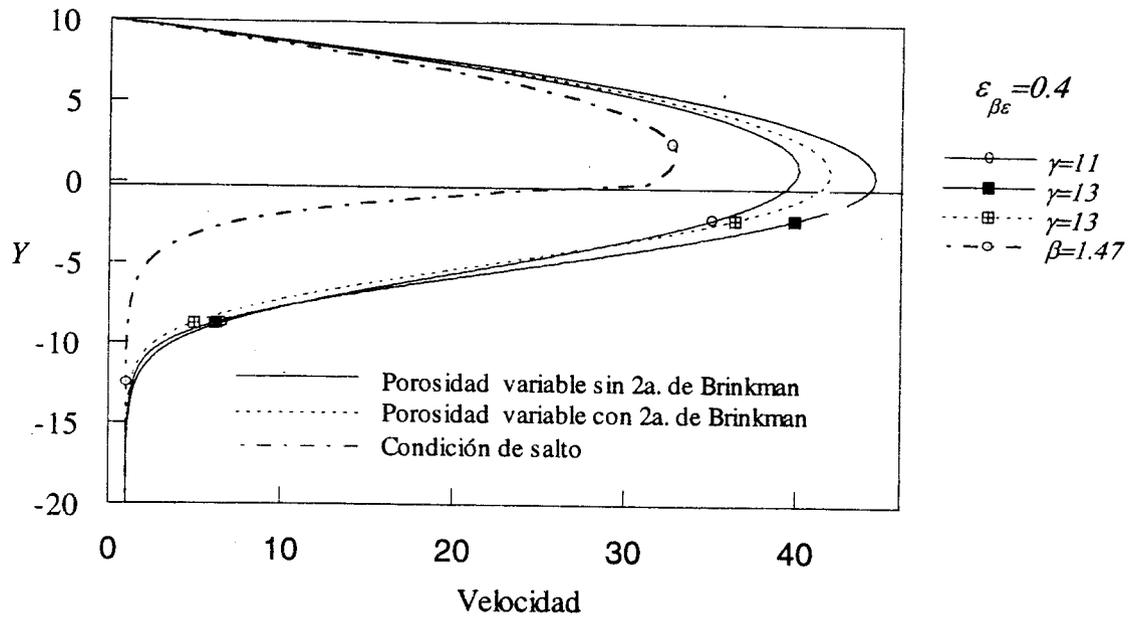


Figura 4.36. Perfiles de velocidad Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo de porosidad variable y el de la condición de salto ($\epsilon_{\beta\omega}=0.4$)

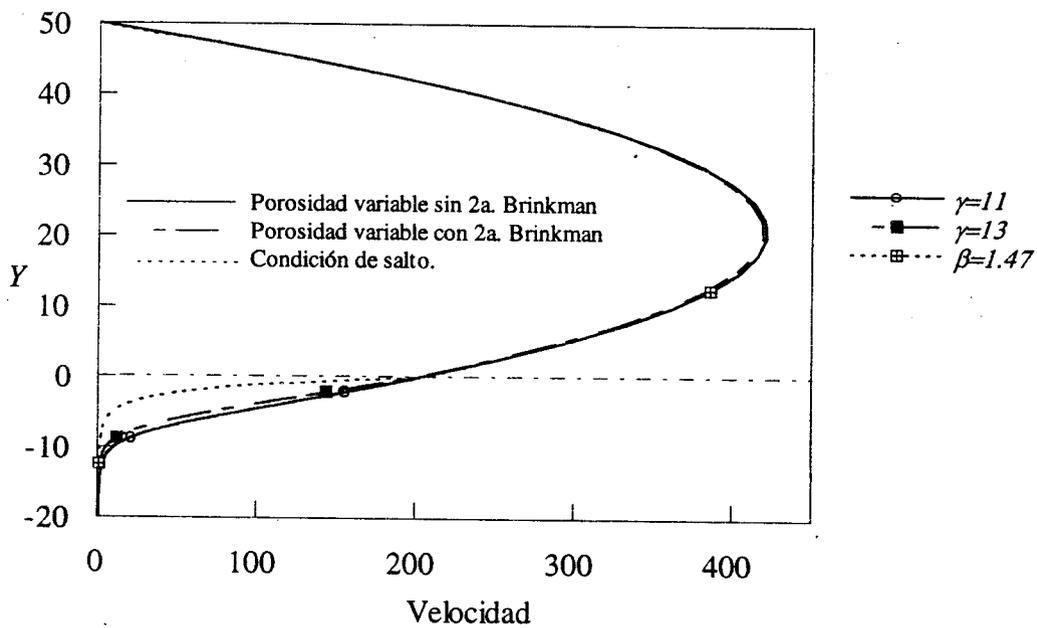


Figura 4.37. Perfiles de velocidad. Comparación entre los datos obtenidos con el modelo de porosidad variable y el de la condición de salto ($\epsilon_{\beta\omega}=0.4$, $\sigma=50$)

-

CAPÍTULO 5

SISTEMA EXPERIMENTAL

En el capítulo anterior se han comparado los datos experimentales de Beavers y Joseph [2, 4, 7] con los resultados numéricos, encontrándose una buena concordancia entre ambos. Se ha visto que es necesario conocer las propiedades físicas (porosidad y permeabilidad particularmente) de los materiales porosos debido a la importancia que tienen en el proceso de transferencia de momentum. De igual manera, la profundidad del canal (h) puede influir en el tipo de flujo que se tenga y para $Re_p \geq 1$ los efectos inerciales en la interregión se vuelven importantes principalmente en materiales altamente permeables. Por otra parte, el modelo de porosidad variable puede permitir un estudio más profundo de los fenómenos que ocurren en la interface entre un medio poroso y un fluido, pero se lograrían mejores resultados y una mejor comprensión del problema si junto con las simulaciones numéricas se efectuara trabajo experimental. En estos experimentos se podrían determinar las propiedades del medio poroso y se podrían controlar tanto h como Re_p . Entonces se obtendría información que complementarían los modelos matemáticos y en este sentido se podría conocer más acerca de parámetros como el espesor de la región de porosidad variable (γ) y los parámetros ajustables de las condiciones de salto de Ochoa y Whitaker β , β_1 y β_2 , representadas por las ecuaciones (2.71) y (2.79). Como parte de este proyecto se presenta a continuación el diseño de un sistema experimental similar al utilizado por Beavers y Joseph [2,3,4,5] en el que se podrían efectuar dichos experimentos. Este diseño que se presenta constituye un prototipo en el cual se pueden realizar algunos experimentos, pero que se podrá ir mejorando conforme la complejidad de los mismos lo requiera y para hacerlo más práctico y funcional.

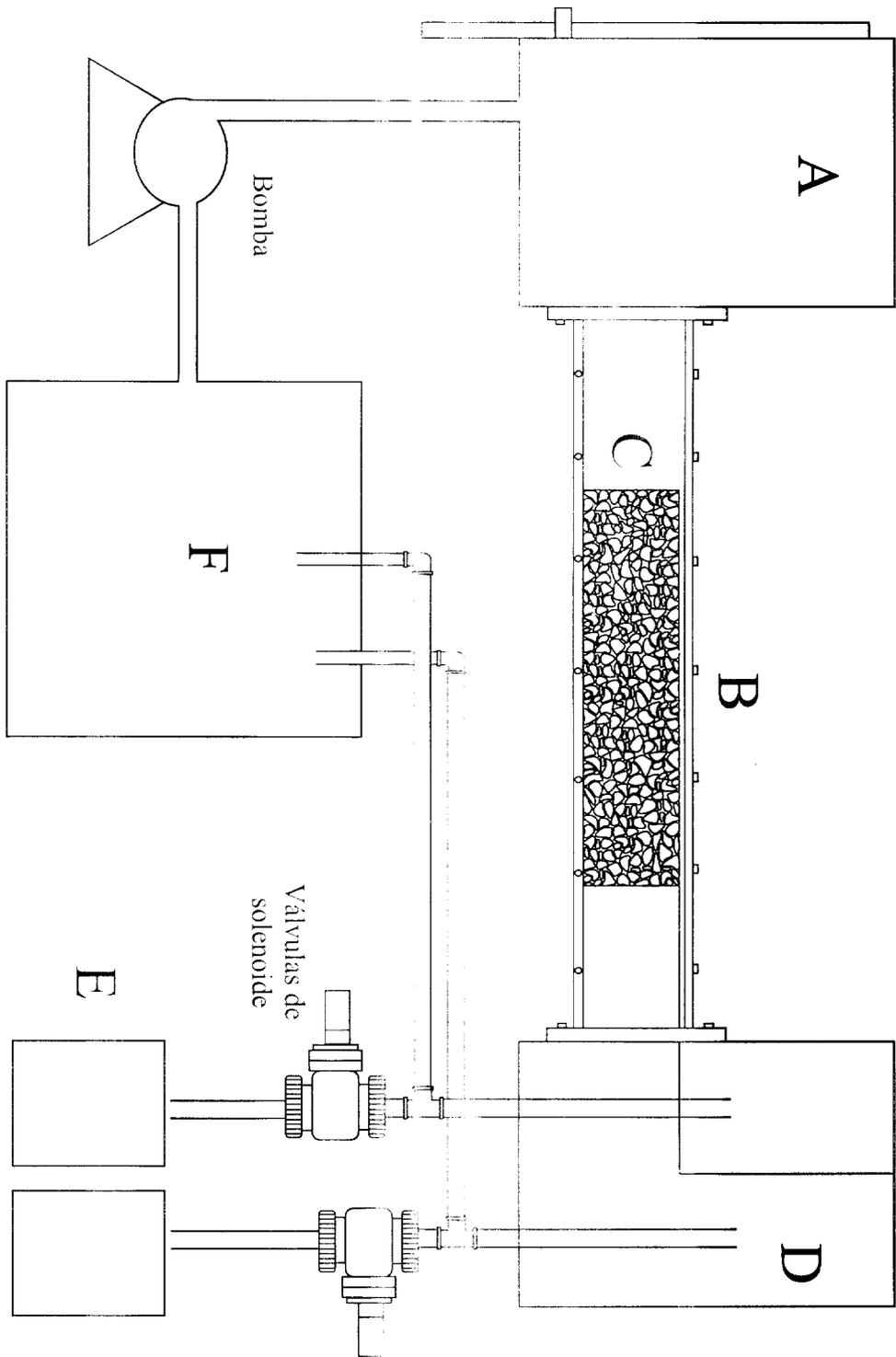


Figura 5.1. Sistema experimental

5.1 Descripción general del sistema

En la Figura 5.1 se observa el esquema del sistema y en general su funcionamiento es el siguiente: del tanque A un líquido fluye a través de un ducto de sección transversal rectangular B en el cual se encuentra el medio poroso C. Entre la parte superior de este medio y la pared superior del ducto existe un espacio de dimensión h , libre de obstrucciones, de tal forma que el fluido fluya paralelo a la superficie permeable y al final del medio poroso, en su extremo superior hay una placa que separará el flujo que pasa sobre el medio poroso del que pasa a través del medio poroso y ambos flujos llegarán al tanque D dividido en dos secciones para recibir ambos flujos; en cada sección existe un sistema de tubos concéntricos que permitirán controlar la altura del líquido. Del tanque D salen dos líneas, una para cada sección, en las cuales se han montado válvulas de solenoide controladas por timers. Cuando las válvulas se encuentran cerradas el fluido será dirigido a un tercer tanque F de donde se recirculará al tanque A y cuando las válvulas se abren el flujo se dirigirá a dos recipientes pequeños E, entonces determinando la masa del contenido de los recipientes y con el tiempo programado en los timers se puede conocer el flujo másico de las dos corrientes. Todos los componentes del sistema fueron hechos en acrílico con un espesor de 1.9 cm, a excepción de la placa colocada al final del medio poroso y las placas que dividen el tanque D que son de acrílico de un espesor de 0.6 cm.

En la Figura 5.2 se presenta un dibujo del tanque A. Este tanque mide interiormente 30x30x40 cm de largo, ancho y alto respectivamente y las caras están pegadas alternadamente. En la parte superior de una de las caras, 2 cm debajo de la parte superior del tanque hay una abertura de 2 cm de alto que permitirá mantener el nivel del líquido en una altura constante de 36 cm. Entonces, al llegar el líquido a una altura de 36 cm, se desbordará hacia una especie de tolva que lo dirigirá al tanque F. En otra de las caras del tanque, en la parte inferior tiene una abertura rectangular de 10 cm de ancho y 6 cm de alto, (estas medidas corresponden también a las medidas interiores del ducto rectangular B) y alrededor de esta abertura tiene distribuidos 12 orificios que permitirán unir el tanque con una brida rectangular mediante tornillos allen de 0.6 cm de diámetro; en la Figura 5.3 se

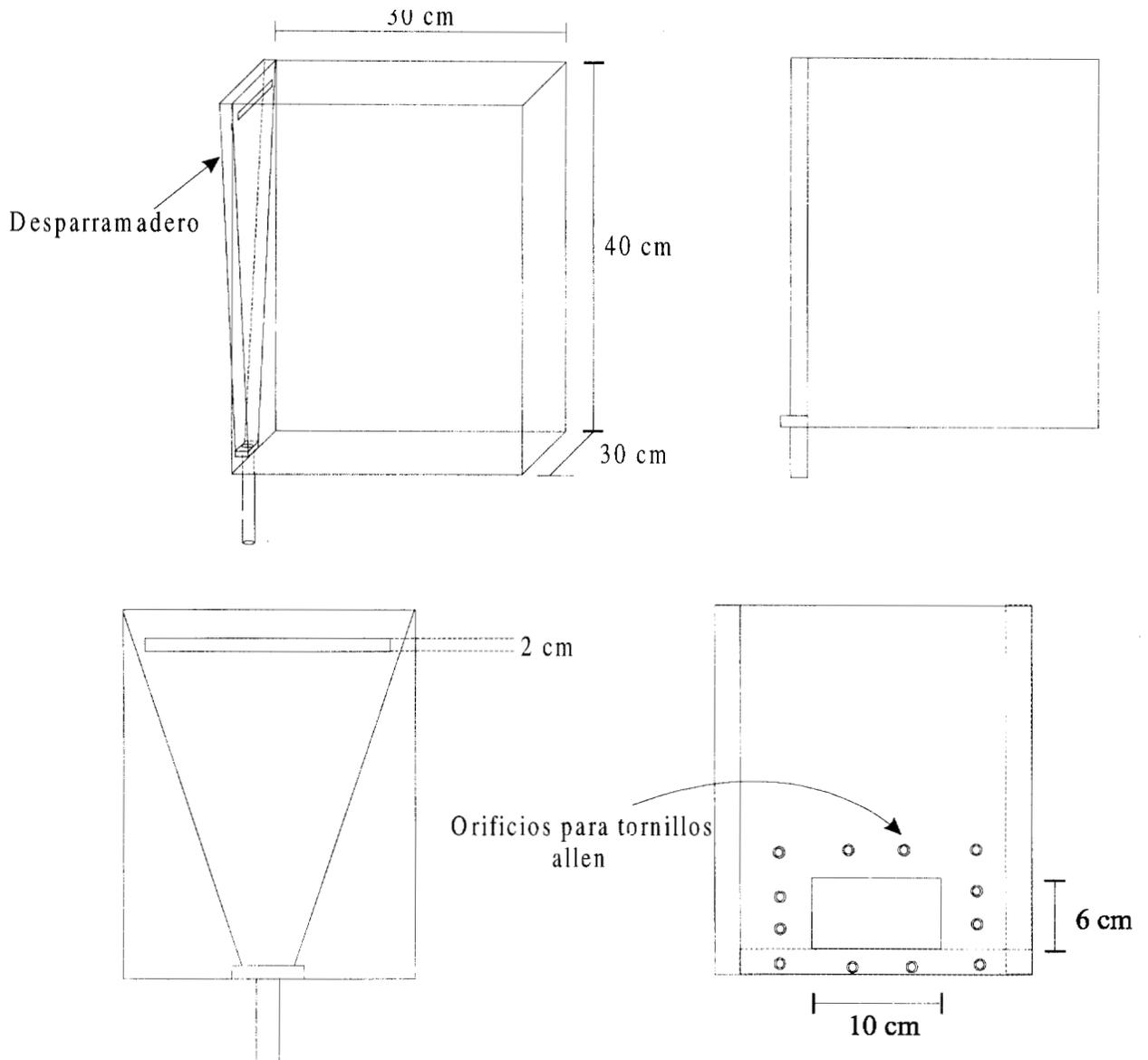


Figura 5.2. Diferentes vistas del tanque A

puede ver como están colocados estos tornillos. De estos tornillos 8 (4 superiores y 4 laterales) son de cabeza rectangular y atraviesan la pared del tanque totalmente; los 4 tornillos restantes son de cabeza plana y han quedado fijos entre la base y la pared del tanque debido a que estos están pegados. En la Figura 5.3 se muestra un detalle de la forma en que están unidos el tanque y la brida.

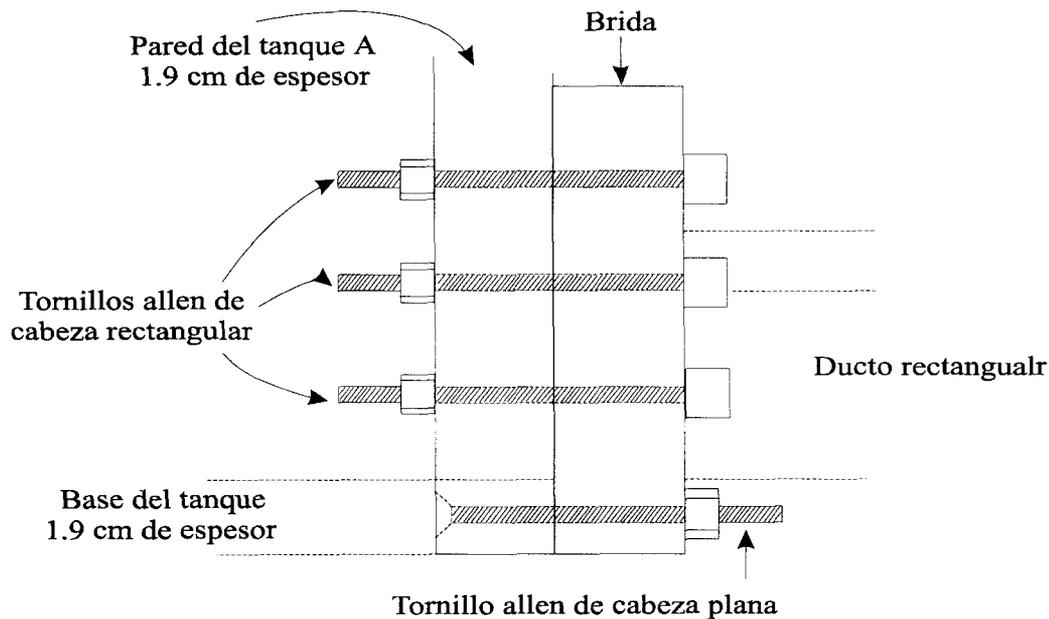
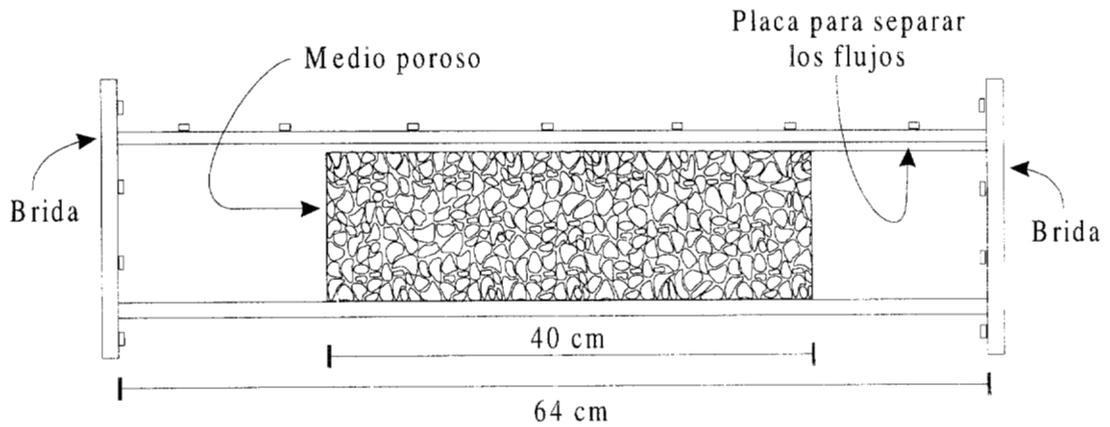


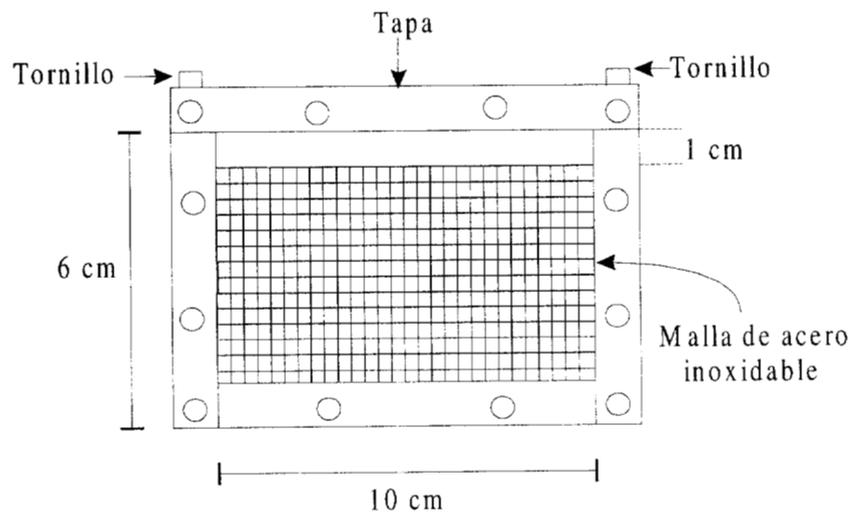
Figura 5.3. Detalle de la unión entre el tanque A y la brida.

El ducto rectangular en donde va el medio poroso fue ideado originalmente para estar constituido por dos piezas. La primera de estas piezas era un ducto con medidas interiores de 64x10x6 cm de largo, ancho y alto respectivamente, y con una tapa de 64 x 13.8 cm de largo y ancho; se utilizó acrílico de 1.9cm de espesor y todas las piezas se unieron con tornillos allen. En la pieza anterior se insertó un canal de 44x10x6 cm de largo, ancho y alto en el cual se colocaría el medio poroso que debería medir 40x10x5 cm. Esta parte fue hecha de acrílico de 0.8 cm de espesor y todas las caras fueron unidas con tornillos allen. El objetivo de armar así esta parte del sistema era permitir libertad para cambiar el medio poroso sin muchos problemas; sin embargo esto demostró ser impráctico debido entre otras cosas a la gran cantidad de tornillos empleados, para los cuales algunas cuerdas se barrieron y ya no cerraron correctamente lo cual trajo como consecuencia problemas de fugas. Por otra parte, para insertar el canal pequeño se rebajaron las paredes interiores del canal grande, pero debido a que el espesor del acrílico no es el mismo en todo el material quedaron protuberancias que impidieron que ambos canales se acoplaran de manera adecuada.

Partiendo de la idea de que es importante poder cambiar el medio poroso de forma práctica y que no deberán existir protuberancias que alteren el flujo, se optó por una única pieza de 64x10x6 cm de largo ancho y alto en acrílico de 1.9 cm de espesor con una tapa de 64x13.8 cm de largo y ancho. La base y las paredes laterales de esta canal se pegaron y la tapa se unió con tornillos de 0.4 cm de diámetro que se encasquillaron para evitar que las cuerdas se barrieran. La Figura 5.4 se muestra un dibujo de este canal.



A) Vista lateral



B) Vista frontal

Figura 5.4. Vistas lateral y frontal de la sección de prueba.

En la Figura anterior se observa que se colocaron mallas de acero inoxidable en los extremos del medio poroso, esto se hizo pensando en lechos porosos hechos con partículas que no estuvieran unidas como esferas o pequeños cilindros. También se observa la placa que se ha colocado en el extremo superior final del medio poroso; está placa está enrasada con el borde de la malla de acero inoxidable. Esta sección del sistema irá unida a bridas por medio de tornillos allen de cabeza plana de 0.6 cm de diámetro; las bridas a su vez se unirán a los tanque A y D. En la Figura 5.4 también se observan los orificios para los tornillos y en la Figura 5.5 se observa en detalle como es que se unen la sección de prueba y la brida.

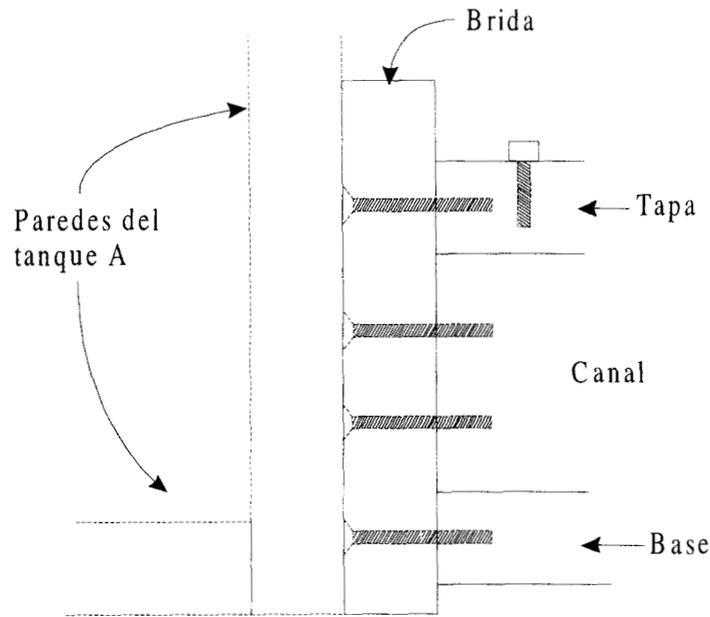


Figura 5.5. Unión de la brida y el canal rectangular en el extremo del tanque A.

La unión del canal rectangular con la brida que va unida al tanque D es en la misma forma que para el tanque A. Como se mencionó anteriormente las paredes laterales y la base del canal rectangular han sido pegadas y la placa que dividirá los flujos y que va enrasada con la malla de acero inoxidable también ha sido pegada a las paredes laterales. Beavers y Joseph manejaron diferentes alturas del espacio entre la parte superior del medio poroso y la tapa del canal cambiando empaques de diferentes espesores. En este primer

diseño debido a que la placa que divide los flujos ha quedado pegada a las paredes laterales sólo se podrá trabajar una altura fija de 1 cm, por lo tanto, los medios porosos que se utilicen deberán medir 40x 10x5 cm de largo ancho y alto respectivamente. El tanque D que recibirá el líquido de la sección anterior ha sido dividido en dos secciones con acrílico de 6 mm de espesor; una placa vertical divide verticalmente al tanque y se une a una placa horizontal que viene a la altura de la placa que divide los flujos en el canal rectangular (Figura 5.6).

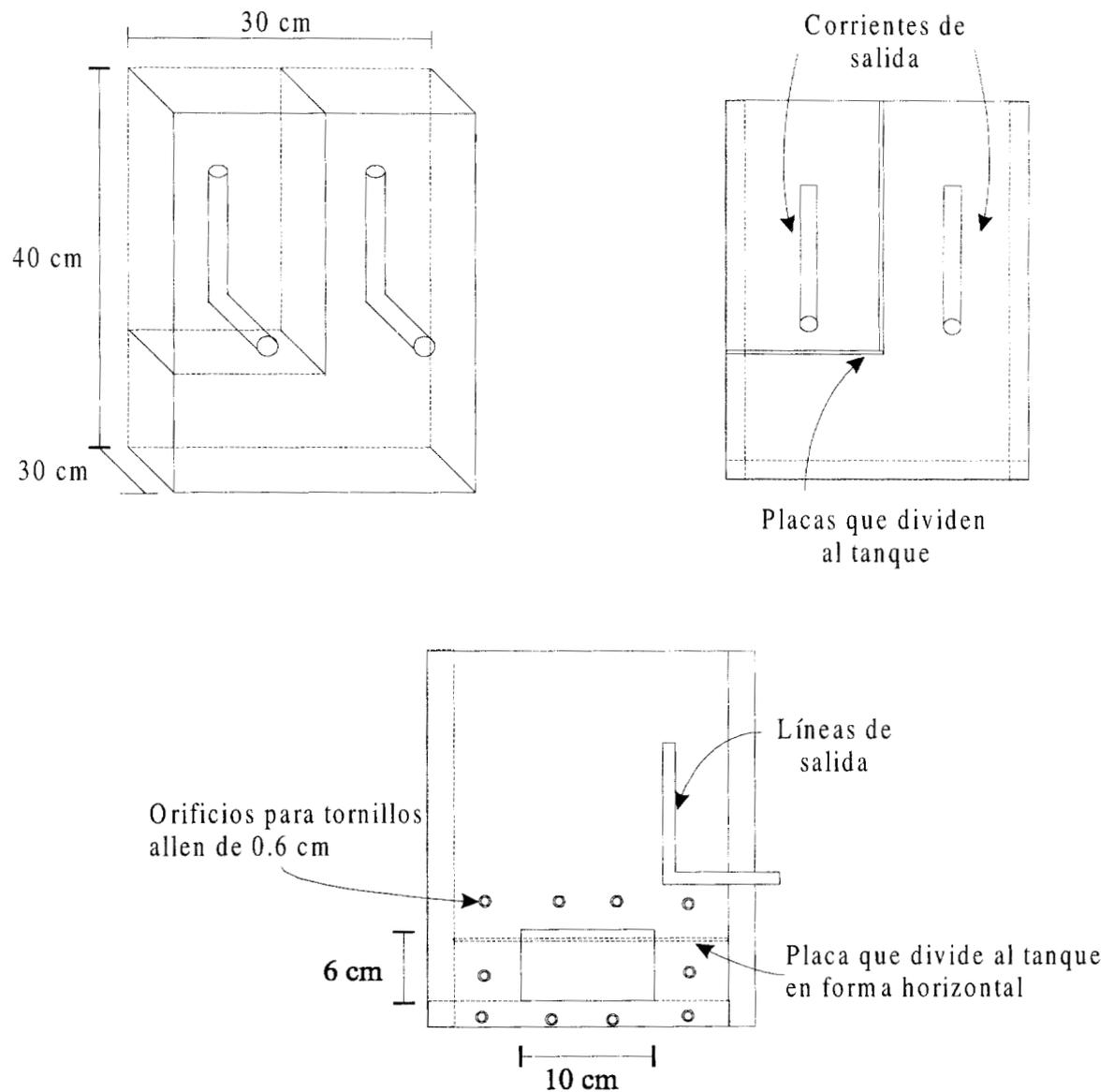


Figura 5.6. Tanque D

Las caras laterales y la base del tanque D están unidas en forma alternada con tornillos allen de 0.79 cm de diámetro. Las corrientes de salida son de latón de 1.27 cm de diámetro interno. La unión de el tanque con la brida correspondiente es similar a la del tanque A con la diferencia de que se han eliminado los tornillos que coinciden con la placa horizontal que divide al tanque; esto se ve en más detalle en la Figura 5.7.

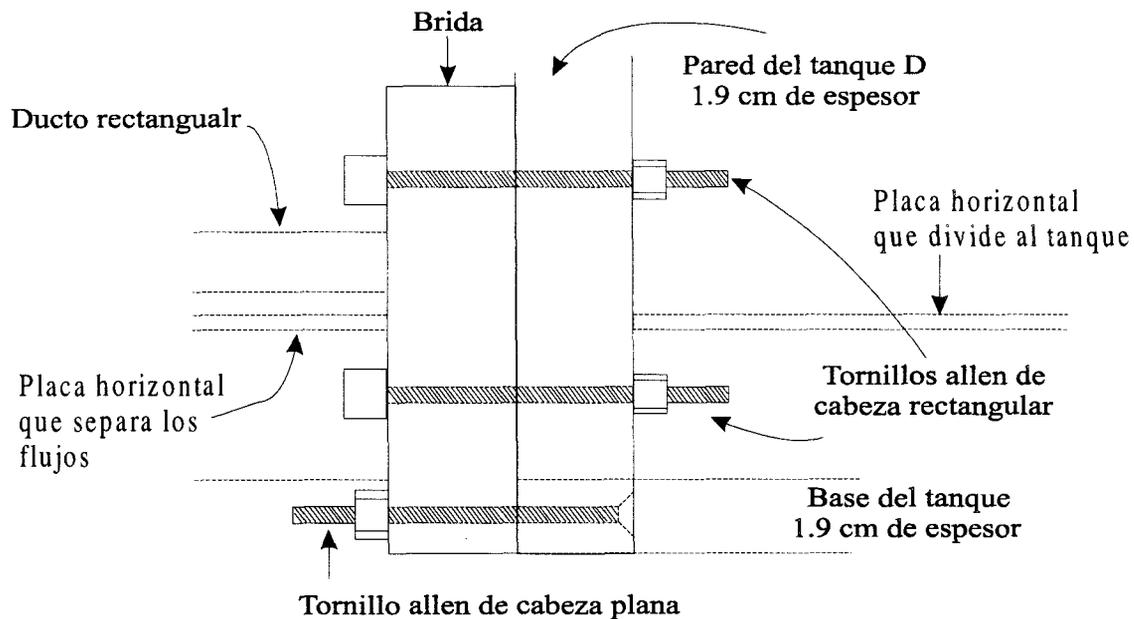


Figura 5.7. Unión entre la brida y el tanque D

Como puede notarse, las bridas están unidas tanto a los tanques como al ducto rectangular, por lo que estas bridas tiene 2 líneas concéntricas de orificios alrededor de una abertura rectangular de 10x6 cm de ancho y alto. La línea interior de orificios sirve para unir la brida con el ducto rectangular y la línea externa sirve para unir la brida con los respectivos tanques. Alrededor de la línea interna de orificios se ha colocado un empaque en ambas caras de la brida, esto con el fin de sellar esas uniones y evitar fugas. Las bridas también fueron hechas en acrílico de 1.9 cm de espesor (Figura 50).

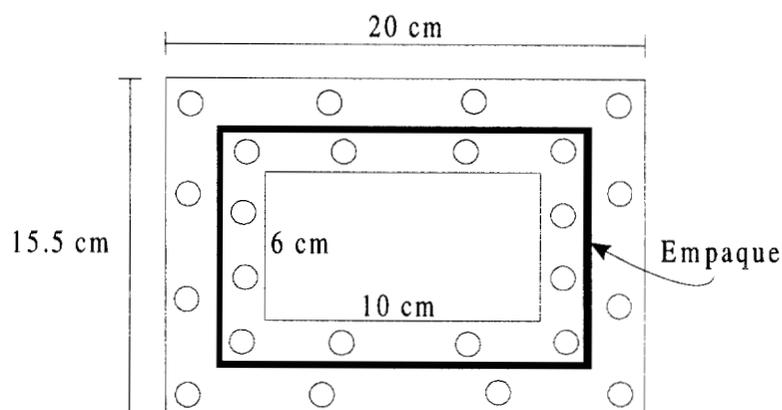


Figura 5.8. Brida

El tanque F tiene 40x40x60 cm de largo, ancho y alto respectivamente como medidas interiores; esta hecho de acrílico de 1.75 cm de espesor y todas las caras están pegadas. La tubería auxiliar es de PVC industrial de 1.75 cm de diámetro interno

Un elemento importante en este sistema experimental es una bomba dosificadora que permita manejar un amplio rango de flujos. El rango que está bomba debe manejar debe extenderse mínimamente hasta 150 lt/hrs; este cálculo está hecho para un número de Reynolds basado en el diámetro equivalente del ducto rectangular (4 veces el radio hidráulico) de 2100 y sin tomar en cuenta el medio poroso. Con este flujo se lograría un Re_p suficientemente grande, lo que permitiría que los efectos inerciales interfaciales fuesen importantes. Actualmente se cuenta con una bomba dosificadora que maneja como máximo 18 lt/hr, lo cual es insuficiente para lograr un amplio rango de flujos.

Las válvulas de solenoide están controladas por timers. Colocándolas en la forma como se muestra en la Figura 5.1 no se tiene el flujo que se esperaba cuando estas válvulas se abrieran, sino que se sigue recirculando el agua al tanque C. Por otra parte, actualmente estas válvulas operan independientemente, es decir, cada una tiene un timer que las controla, pero esto ocasiona que no se coordinen ambas válvulas y aunque se encendieran

al mismo tiempo, posteriormente se presenta un desfaseamiento. Para evitar esto se deben controlar por un sólo timer.

Ya que se han descrito los componentes del sistema es importante mencionar que el armado del sistema, particularmente en lo que se refiere a el ducto rectangular y su unión con las bridas y a los tanques debe seguir un orden. Se coloca el medio poroso en el lugar adecuado y se atornillan las bridas y el canal sin colocar la tapa, entonces se une este canal a los tanques por medio de las bridas. Se unen, la placa que divide los flujos en el canal y placa que divide el tanque D, una vez hecho esto se coloca la tapa.

5.2 Operación

Una vez que se ha armado el sistema, al accionar la bomba empezará a llenarse el tanque A con el líquido del tanque F por medio de la bomba, el flujo pasará a través del canal rectangular, llenará el tanque D y cuando el nivel del líquido alcance el nivel de las líneas de salida el líquido abandonará el tanque y empezará a ser recirculando cuando las válvulas estén cerradas o a pasar a los recipientes E, si las válvulas están abiertas. Aunque la operación parece simple, sin embargo existen varios factores que deben considerarse antes de hacer cualquier tipo de medición.

- El gradiente de presión debe mantenerse constante. Esto es importante ya que en el modelo matemático de porosidad variable así se ha establecido. Si el gradiente de presión no permanece constante entonces el modelo no será válido para aplicarlo a los experimentos que se efectúen. Este gradiente será ajustado mediante el control de nivel de líquido en el tanque D a través del sistema de tubos concéntricos.
- Efectos iniciales y finales. Teóricamente se necesitaría un ducto rectangular con una longitud aproximada de 2.5 m para desprejar efectos iniciales y finales; sin embargo, podrían ser problemático controlar la caída de presión en esa distancia. En el sistema que se presenta si existirán efectos iniciales y finales, pero si se colocan una serie de

mallas en la entrada del ducto se puede lograr uniformidad en el flujo que llega a el medio poroso. Por otra parte se tendrían que cuantificar los efectos de las paredes laterales y de la base del ducto en el flujo. Con respecto a las paredes laterales existen reportes que indican que la diferencia entre la velocidad cerca de las paredes y en la sección central puede ser de apenas 1.8% [26]. Con ayuda del modelo de porosidad variable se ha inspeccionado el efecto de la base del ducto. Para esto se han tomado las dimensiones reales del ducto y las propiedades de un lecho poroso de esferas de vidrio de 1.2 cm de diámetro para el cual se tiene $\varepsilon_{\beta\omega}=0.35$ y $K_{\beta\omega}=1.02 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$, además se ha impuesto la condición de no deslizamiento ($\langle v_{\beta} \rangle_{\omega} = 0$) en $y=H$, en donde H es el espesor del lecho poroso (ver Figura 2.6). De esta simulación se obtiene que una diferencia apreciable del perfil de velocidades constante que existe en la región homogénea del medio poroso se presenta aproximadamente 4.5 cm por debajo de la superficie permeable, por lo que se puede considerar que los efectos de la base del ducto no afectarán en la región interfacial.

- Las paredes del ducto tendrán un efecto sobre la porosidad del lecho poroso, pero no sobre la permeabilidad [5].
- Las mediciones de flujo serán promedio y se trabajará en estado estacionario.

5.3 Propiedades físicas de los medios porosos.

La porosidad de un medio poroso se puede determinar cuantificando el volumen desplazado por el medio poroso cuando se sumerge en un líquido. Se determina cual es el volumen total ocupado por el medio (sólido más poros) y a este volumen se le resta el volumen de líquido desplazado, este resultado se divide entre el volumen total del medio poroso y entonces se obtendrá la porosidad. De esta manera se determinaron las porosidades de dos lechos formados con esferas de 1.2 cm de diámetro y cilindros de 0.3

cm de largo, encontrándose valores de 0.345 y 0.65 respectivamente, los cuales coinciden con los reportados en la literatura [5,12,18].

Para estimar la permeabilidad de los lechos se podría emplear la ecuación de Carman-Kozeny [8] para partículas de forma esférica, y para otro tipo de partículas se pueden emplear relaciones reportadas en la literatura o también se podría utilizar el sistema experimental ya descrito, con la ayuda de la ley de Darcy, para lo cual es necesario conocer el gradiente de presión. Esto lleva a la necesidad de colocar medidores de presión a lo largo del ducto rectangular; estos medidores además ayudarían a saber si se tiene un flujo paralelo, unidireccional y completamente desarrollado. Las condiciones necesarias para tener estas características de flujo, de acuerdo con Beavers y colaboradores [4] son ausencia de gradientes de presión transversales y un gradiente de presión axial uniforme en tanto en el medio poroso como en el canal y esto será cierto si la presión estática medida por arriba del canal y la presión estática por debajo del canal están en balance.

Con el gradiente de presión conocido se puede despejar $K_{\beta\omega}$ de la ley de Darcy. Otra manera de determinar la permeabilidad del medio poroso es a partir de la siguiente ecuación [5]

$$\frac{1}{\mu_{\beta} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}} \frac{d \langle p_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dx} = \frac{1}{K_{\beta\omega}} + b \frac{\rho_{\beta} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}}{\mu_{\beta}} \quad (5.1)$$

que tiene la forma de la ecuación de una línea recta en donde la intercepción al eje de las ordenadas es el inverso de la permeabilidad. Entonces a partir de mediciones del gradiente de la presión en el sistema experimental se puede graficar el lado izquierdo de la ecuación anterior en el eje de las ordenadas y el grupo $\rho_{\beta} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega} / \mu_{\beta}$ será graficado en el eje de las abscisas. La ecuación (5.1) representa la ley de Darcy con la corrección de Forchheimer en donde b es el coeficiente de Forchheimer.

Un aspecto importante en este sistema lo constituirán los instrumentos de medición; particularmente en el sistema que se tiene actualmente montado haría falta un instrumento para determinar la masa de líquido colectado en los recipientes E y para determinar la presión a lo largo del ducto rectangular harían falta manómetros.

No se han efectuado experimentos; pero se espera efectuarlos en un futuro próximo; por el momento se ha logrado tener una idea más clara de los problemas que dichos experimentos conllevan y de las posibles formas de resolverlos. Este primer diseño del equipo experimental ayudará a determinar las condiciones óptimas de construcción y operación para posteriormente lograr un mejor diseño. La idea central de este diseño será lograr un equipo versátil en el cual se puedan trabajar cualquier tipo de medios porosos, que se pueda armar sin mayores problemas y en el que se puedan efectuar las mediciones necesarias evitando al máximo los errores. Por lo tanto el trabajo futuro sobre el diseño del equipo debe centrarse en las siguientes partes:

- Ducto rectangular. Es necesario construirlo de tal forma que se puedan colocar medios porosos diversos y que se puedan manejar distintos valores para la profundidad del canal (h) formado por la tapa impermeable y la superficie porosa.. Esto último forzosamente debe hacerse cambiando la posición de la tapa, ya que si se manejaran medios porosos con diferentes alturas, se tendría una superficie permeable distinta cada vez.
- Sistema de tubos concéntricos para manejar el nivel de líquido en el tanque D. Actualmente este sistema es un poco rudimentario y poco práctico en el que está restringida tanto la libertad para maniobrar como el rango de alturas que se pueden manejar.
- Válvulas de solenoide. Como se mencionó anteriormente, no se han obtenido buenos resultados con las válvulas colocadas como se muestra en la Figura 5.1. En esta parte del sistema se pueden generar algunos errores que pueden llevar a una sobreestimación

de los flujos másico. Esto puede generarse debido a que existirá cierta cantidad de líquido en la línea cuando la válvula se abra y por otro lado cuando esto suceda cierta cantidad de líquido de la línea de recirculación puede regresar y pasar por la válvula. Una forma práctica de abordar las situaciones descritas anteriormente sería colocar válvulas de solenoide de tres vías con las cuales se evitaría el regreso de la línea de recirculación y no se tendrían más problemas de paso de líquido a través de las válvulas hacia los recipientes E; aunque se debe estimar la carga que permanecerá en la zona entre la línea de recirculación y la válvula para no sobrestimar las mediciones.

- Mallas metálicas. Para lograr una uniformidad en el flujo a la entrada del ducto rectangular se pueden colocara mallas metálicas. Beavers y colaboradores [2,3,4,5], colocan una serie de mallas metálicas en el tanque A en el extremo en donde está la abertura que controla el nivel del líquido en ese tanque.
- Sistema de vaciado del sistema. Es necesario colocar en un tanque una línea de salida del líquido para vaciar el equipo.

Algunas de las modificaciones anteriores pueden realizarse en el equipo con el que se cuenta actualmente, pero la modificación del ducto rectangular llevará necesariamente a la construcción de un nuevo equipo experimental.



CONCLUSIONES

La mayor parte del trabajo se ha concentrado en la solución numérica del modelo de porosidad variable y los resultados obtenidos son importantes. Se han logrado ajustar todos los datos experimentales reportados en la literatura y se ha comprobado la importancia de conocer perfectamente las propiedades físicas (porosidad y permeabilidad) de los materiales que se trabajen. Un material altamente poroso no necesariamente es también altamente permeable, pues los poros pueden tener un bajo grado de interconexión, lo que impedirá el flujo de fluidos a través de la matriz sólida. Estas variaciones de las propiedades de los materiales porosos se vuelven aún más importantes en la región interfacial, por lo que es importante conocerlas.

También se ha visto la importancia que tienen los efectos inerciales para $Re_p \geq 1$, más aún en materiales altamente porosos, en los cuales el arrastre debido a los esfuerzos viscosos es comparable con el arrastre debido a la presencia de los sólidos, lo cual se puede observar en la Figura 4.22 en donde la primera corrección de Brinkman es del mismo orden que la corrección de Forchheimer.

Por otra parte el análisis del comportamiento de los términos de la ecuación de transporte de momentum para la región interfacial indica que la principal contribución, en el caso de trabajar con la ecuación (3.6) se debe a la primera corrección de Brinkman y al término de Darcy, si se trabaja con la ecuación (3.42) los términos importantes son la primera corrección de Brinkman y la corrección de Forchheimer. En algunos casos el término de Darcy es mayor que la primera corrección de Brinkman, lo que podría ser contradictorio si tomamos en cuenta que no es apropiado para abordar el problema de capa límite, esto puede deberse a que contiene las variaciones de la permeabilidad en la región interfacial, que como ya se vio son muy importantes. En cambio la segunda corrección de Brinkman puede producir resultados no esperados y en general es de un orden de magnitud

menor que los otros términos y su eliminación de la ecuación de transporte no altera los resultados e inclusive puede mejorarlos, por lo que la ecuación para el transporte de momentum en la región interfacial podría quedar en la siguiente forma:

$$0 = -\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_\beta(y)} \mu_\beta \frac{\partial^2 \langle v_\beta \rangle}{\partial y^2} - \frac{\mu_\beta}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle - \mu_\beta \frac{F_\beta(y)}{K_\beta(y)} \langle v_\beta \rangle \quad \text{para } -\delta \leq y \leq 0$$

que es la ley de Darcy con la primera corrección de Brinkman a la cual se le agregaría la corrección de Forchheimer para tomar en cuenta los efectos inerciales.

Con los resultados obtenidos de la simulación numérica y al buscar los parámetros que ajustaran los datos, se ha notado que ciertos parámetros son básicos para este problema, concretamente el espesor de la región interfacial, del cual sería importante contar con datos experimentales, pues en el modelo matemático influye las variaciones de la permeabilidad y la porosidad y no al contrario. Además se necesitan resultados experimentales más detallados que los que se encuentran en la literatura para poder corroborar algunos de los resultados numéricos obtenidos y entonces poder determinar con más detalle las dependencias de algunos parámetros como los involucrados en las condiciones de salto de Ochoa y Whitaker [16,,17,21]. Lo anterior se podría hacer en el equipo experimental que se ha proyectado, en donde también se podrían determinar porosidades y permeabilidades de los medios porosos.

Se cuenta con un sistema experimental en el que se puede empezar a trabajar para determinar las condiciones bajo las cuales se tendrá un flujo unidireccional, laminar y completamente desarrollado; en el que se pueden detectar posibles causas que pueden alterar el tipo de flujo y partir del cual se pueda obtener un mejor diseño. Las principales modificaciones tendrán que hacerse en el ducto rectangular en donde se inserta el medio poroso, sin embargo, esto podría traer como consecuencia que se tenga que reconstruir prácticamente todo el sistema.

BIBLIOGRAFÍA

1. Dullien, F. A. L., 1979, *Porous media. Fluid transport and pore structure*, Academic Press INC., San. Diego California, E. U. A.
2. Nield, D.A. y Bejan, A., 1992, *Convection in porous media*, Springer-Verlag, New York
3. Sim, Y. y Chrysikopoulos V., 1996, One-dimensional virus transport in porous media with time dependent inactivation rate coefficients, *Water Resour. Res.*, **32**(8), 2067-2611.
4. Sheintuch, M. y Dessau, M. R., 1996, Observations, modeling and optimization of yield, selectivity and activity during dehydrogenation of isobutane and propane in a Pd membrane reactor, *Chem. Eng. Sci.*, **51**(4), 535-547.
5. Arreola, T.A., 1990, Recuperación de petróleo en medios porosos por inyección de CO₂, *Revista del IMP XXII*(4).
6. Cruz, H. J. y Pérez, R. C., 1990, Desplazamiento de fluidos en medios porosos fracturados como un proceso de convección-dispersión, *Revista del IMP*, **XXII**(2).
7. Pérez, C. F. C. y Pérez, R. C., 1990, Recuperación miscible de hidrocarburos en medios porosos homogéneos y fracturados, *Revista del IMP*, **XXII**(2).
8. Serrano, S. M., Arreola, T. A. y Alva, M. J. M., 1990, Recuperación mejorada de petróleo por inyección de fluidos no newtonianos, *Revista del IMP*, **XXII**(4).
9. Vartuli, M., Temprano, N., Chertcoff, R. y Rosen, N., Desplazamiento miscible de soluciones poliméricas en medios porosos., *Revista del IMP*, **XXII**(3).
10. Dykaar, B. B., y Kitanidis, K. P., 1996, Macrotransport of a biologically reacting solute through porous media, *Water Resour. Res.*, **32**(2), 307-320.
11. Corapcioglu, M, Tuncay, K. y Kagan, B., 1996, Oil mound spreading and migration with ambient groundwater flow in coarse porous media, *Water Resour. Res.*, **32**(5), 1299-1308.

12. Mayer, M. y Miller, C., 1996, The influence of mass transfer characteristics and porous media heterogeneity on non-aqueous phase dissolution, *Water Resour. Res.*, **32**(6), 1551-1567.
13. Thompson, A., Shafer, A. y Smith, R., 1996, Impacts of physical and chemical heterogeneity on cocontaminant transport in a sandy porous media, *Water Resour. Res.*, **32**(4), 801-818.
14. Whitaker, S., The volumetric average method, Notas de clase.
15. Ochoa-Tapia, J. A., 1994, Un estudio comparativo de dos modelos para el transporte de momentum entre un fluido y un medio poroso, *Avances en Ingeniería Química*, 101-106.
16. Ochoa-Tapia, J. A. y Whitaker, S., 1995, Momentum Transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development, *Int. J. Heat and Mass Transfer.* **38**(14), 2635-2646.
17. Ochoa-Tapia, J. A. y Whitaker, S., 1995, Momentum Transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment, *Int. J. Heat and Mass Transfer.* **38**(14), 2647-2655.
18. Beavers, G. S. y Joseph, D. D., 1967, Boundary conditions at naturally permeable wall, *J. Fluid Mech.* **30**, 197-207.
19. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. y Magnuson, R. A., 1970, Experiments on coupled parallel flows in a channel and bounding porous medium, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **92D**, 842-849.
20. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. y Masha, B. A., 1974, Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow, *AICHE Journal*, **20**(3), 596-597.
21. Ochoa-Tapia, J. A. y Whitaker, S., 1997, Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: inertial effects, *J. Porous Media*, **1**(3), 201-207.
22. Whitaker, S., 1995, The Forchheimer equation: A theoretical development., enviado a *Transport in Porous Media*.
23. Beavers, G. S. y Sparrow, E. M., 1969, Non-Darcy flow through fibrous porous media, *J. Applied Mech.* **36**(4), *Trans. ASME*, **91**, Series E, 711-714.

24. Ruben G. Carbonell, 1997, Comunicación personal.
25. Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N., 1960, *Transport Phenomena*, John Wiley, New York, E. U. A.
26. Sahle, J. F. T. y Adler, P. M. , 1993, Flow along porous media by partial image velocimetry, *AICHE Journal*, **39**(11), 1765-1776.
27. Whitaker, S., 1986, Flow in porous media: A theoretical derivations of Darcy's Law, *Transport in Porous Media*, **1**, 3-25.
28. Saffman, P., 1971, On the boundary condition at the surface of porous medium, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 93-101.
29. Neale, G. y Nader, W., 1974, Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *Can. J. Chem. Engng*, **52**, 475-478.
30. Sahraoui, M., y Kaviany, M., 1992, Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **35**, 927-943.
31. Burden, L. R., y Faires, J. D., 1985, *Análisis numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, Boston, E.U.A.
32. Larson, R. E. y Higdon, J. J. L., 1987, Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media-II Transverse flow, *J. Fluid Mech.*, **178**, 119-136.
33. Levenspiel, O. 1996, *Flujo de fluidos e Intercambio de calor*. Ed. Reverté S. A., Barcelona, España.
34. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. y Rodenz, D. E., 1973, Influence of Bed size on the flow characteristics and porosity of randomly packed bed of spheres, *J. Applied Mech. Trans ASME*, 655-660.

NOMENCLATURA

$A_{\beta\sigma}$	área de la interface β - σ contenida en el volumen promedio
A_∞	área total del volumen promedio
A_ω	porción de A_∞ contenida en la región ω
A_η	porción de A_∞ contenida en la región η
$A_{\omega\eta}$	área de la interface ω - η contenida en A_∞
$\langle \mathbf{B} \rangle$	esfuerzo de Brinkman de exceso
\mathbf{F}_β	tensor de la corrección de Forchheimer
\mathbf{g}	vector gravedad
H	profundidad del medio poroso
h	profundidad del canal
\mathbf{I}	tensor unitario
\mathbf{i}, \mathbf{j}	vectores unitarios base en la dirección x y en la dirección y
\mathbf{K}_β	tensor permeabilidad de la ley de Darcy
$K_{\beta\omega}$	permeabilidad de la región homogénea ω
$K_\beta(y)$	permeabilidad del medio poroso en la interregión como función de la posición
L_v	longitud característica asociada con la longitud
L_{v1}	longitud característica asociada con el gradiente de la velocidad
ℓ_β	longitud característica asociada con la fase β en la región ω
ℓ_σ	longitud característica asociada con la fase σ en la región ω
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector normal dirigido de la fase β a la fase σ
$\mathbf{n}_{\omega\eta}$	vector normal dirigido de la región ω hacia la región η
p_β	presión en la fase β
$\langle p_\beta \rangle^\beta$	presión promedio intrínseco

$\langle p_\beta \rangle_\eta^\beta$	presión promedio intrínseco en la región η
$\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta$	presión promedio intrínseco en la región ω
$\langle p_\beta \rangle$	presión promedio superficial
r_o	radio del volumen promedio esférico
Re_p	Número de Reynolds basado en el diámetro de partícula
$\langle \mathbf{T} \rangle_S$	esfuerzo superficial de exceso
$\langle \mathbf{T} \rangle_B$	esfuerzo en el seno del fluido de exceso
\mathbf{v}_β	vector velocidad en la fase β
$\tilde{\mathbf{v}}_\beta$	desviaciones espaciales de la velocidad
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$	velocidad promedio intrínseco
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$	velocidad promedio superficial
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta$	velocidad promedio superficial en la región η
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega$	velocidad promedio superficial en la región ω
x, y	coordenadas rectangulares
V	volumen promedio
V_∞	volumen promedio a gran escala.
V_η	volumen de la región η contenida en V_∞
V_ω	volumen de la región ω contenida en V_∞

Símbolos griegos

α	coeficiente ajustable en la condición de salto de Beavers y Joseph
β	coeficiente ajustable en la condición de salto de Ochoa y Whitaker, sin efectos inerciales

β_1, β_2 coeficientes ajustables en la condición de salto de Ochoa y Whitaker con efectos inerciales.

γ espesor adimensional de la región de porosidad variable

δ espesor de la región de porosidad variable

ε_β porosidad de la fase β

$\varepsilon_\beta(y)$ porosidad del medio poroso en la interregión como función de la posición

$\varepsilon_{\beta\omega}$ porosidad de la fase β en la región homogénea ω

σ profundidad adimensional del canal

μ_β viscosidad de la fase β

ρ_β densidad de la fase β

Subíndices

β identifica una cantidad asociada a la fase β

η identifica una cantidad asociada a la región η

σ identifica una cantidad asociada con la fase σ

ω identifica una cantidad asociada a la región ω

$\omega\beta$ indica una cantidad asociada a la frontera $\omega\text{--}\beta$



APÉNDICE A

PROGRAMA PARA RESOLVER EL MODELO MATEMÁTICO DE POROSIDAD VARIABLE

Este programa esta estructurado de la siguiente manera: en el bloque principal se encuentran los datos que son comunes a todas las subrutinas

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N

COMMON/PROPIEDADES/EB

COMMON/DELTA/TOL,DXY

en donde

ALFA	espesor de la región interfacial.
OMEGA	localización de la interface fluido medio poroso.
SIG	profundidad adimensional del canal (σ)
RE	número de Reynolds (Re_p)
EB	porosidad de la región homogénea ω ($\varepsilon_{\beta\omega}$)
N	número de nodos de la malla de diferencias finitas.

y además también se encuentran las suposiciones iniciales para las constantes C_1 y C_2 y H que es la distancia entre nodos de la malla de diferencias finitas. En este bloque llama inmediatamente a la subrutina CONSTANTES que mediante el método de Newton-Raphson calculará nuevos valores para C_1 y C_2 . Para este cálculo se llama a la subrutina DIFERENCIAS en cuatro ocasiones para obtener valores para M_1 y M_2 de las ecuaciones (3.31) y (3.32) y poder calcular las derivadas parciales de estas ecuaciones de acuerdo con la ecuación (3.35). Estas derivadas se requieren para calcular los nuevos valores de las constantes de acuerdo con las ecuaciones (3.54) y (3.55).

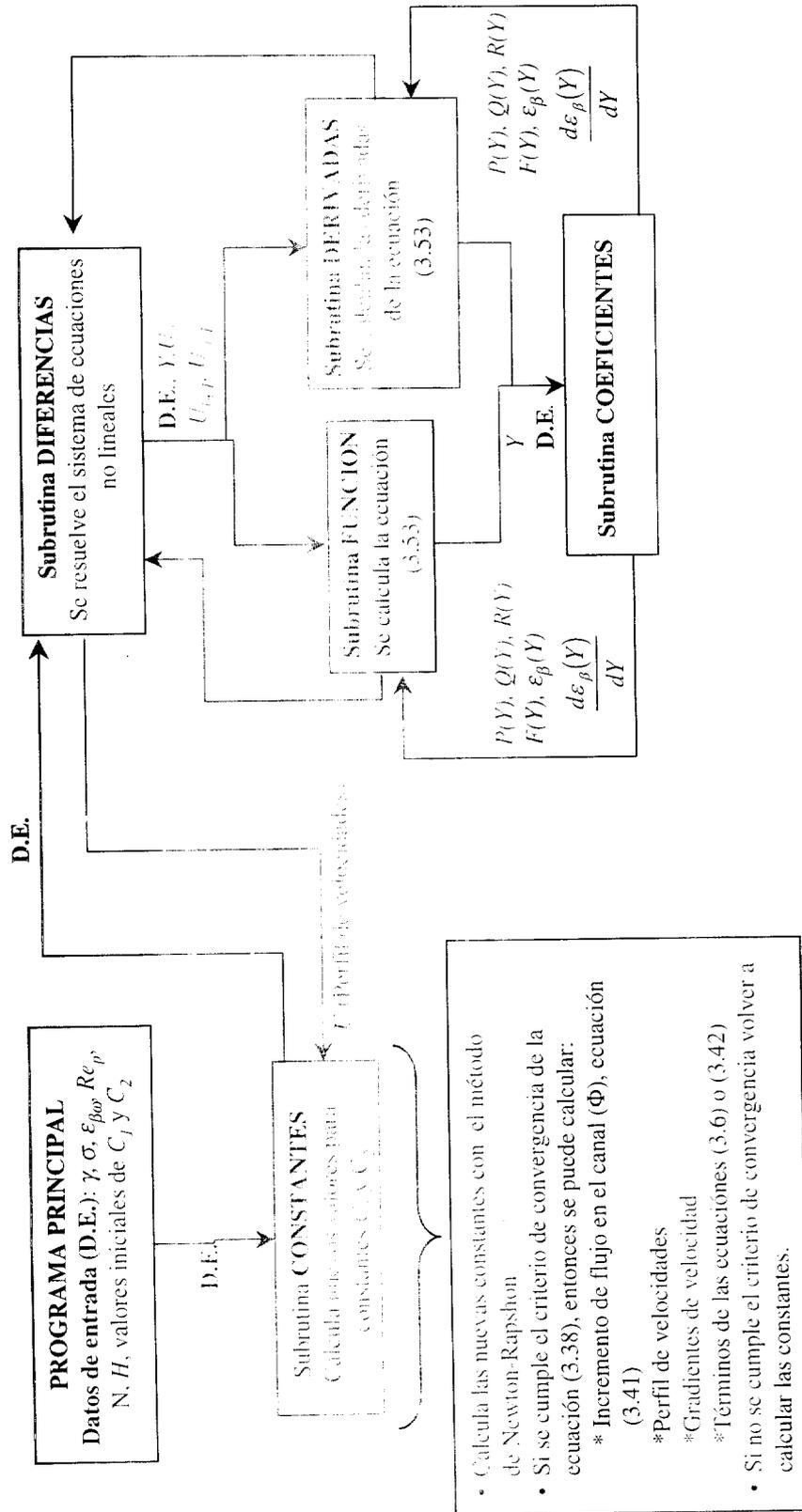


Figura A1. Diagrama de bloques para el algoritmo de solución del modelo de porosidad variable.

En la subrutina DIFERENCIAS resolverá el sistema de ecuaciones no lineales. Esta subrutina a su vez utiliza las subrutinas FUNCION y DERIVADAS que calculan la ecuación (3.53) y sus derivadas. Estas dos subrutinas emplean la subrutina COEFICIENTES que calcula las ecuaciones (3.17)-(3.19) y la ecuación (3.44).

Si el criterio de convergencia de la ecuación (3.38) se satisface, entonces se pueden calcular los perfiles de velocidad, los gradientes de velocidad o el incremento del flujo en el canal. En caso de no converger, se calcularán nuevas constantes a partir de las calculadas recientemente. En la figura A1 se muestra un diagrama de bloques para este programa:

PROGRAM PROYECTO

El siguiente programa resuelve la ecuación (3.42) para la región de porosidad variable ($\gamma \leq Y \leq 0$) mediante el método de diferencias finitas.

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 INCREMENTO
LOGICAL III

PARAMETER(NN=500)

DIMENSION FO(2), V(NN)

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N
COMMON/PROPIEDADES/EB
COMMON/DELTA/TOL,DXY

OPEN(1, FILE='RESULTADOS'.DAT)

ALFA=-13
OMEGA=0.0
SIG=50
RE=0
EB=0.4

N=200
TERMINAR=50
INCREMENTO=0.5
III=.TRUE.

TOL=1.0E-09
DXY=0.0001
```

```

A1=0.5
A2=0.5

WRITE(*,*)'1. INCREMENTO FRACCIONAL DEL FLUJO'
WRITE(*,*)'2. PERFIL DE VELOCIDADES'
WRITE(*,*)'3. TERMINOS VISCOSOS E INERCIALES'
WRITE(*,*)'4. GRADIENTES DE VELOCIDAD'

WRITE(*,*)'OPCION'
READ(*,*)OPCION
H=(OMEGA-ALFA)/(FLOAT(N))

C1=3.0*(1.0/ALFA)*(1.0/ALFA)*(EB-1.0)
C2=2.0*(-1.0/ALFA)*(-1.0/ALFA)*(-1.0/ALFA)*(EB-1.0)
C3=(EB*EB*EB)/((1.0-EB)*(1.0-EB))

DO 135 WHILE (III)

CK1=A1
CK2=A2

CALL CONSTANTE(A1,A2,OPCION,C1,C2,C3,SIG,H,F1,F2,III)

IF (SIG.EQ.TERMINAR.OR.SIG.GT.TERMINAR) THEN
    III=.FALSE.
ELSE
    SIG=SIG+INCREMENTO
ENDIF

135 CONTINUE

CLOSE(1)

1000 END

```

```

SUBROUTINE CONSTANTE(A1,A2,OPCION,C1,C2,C3,SIG,H,F1,F2,III)
C EMPLEANDO EL METODO DE NEWTON-RAPHSON PARA EVALUAR
C NUEVAS CONSTANTES: C1 Y C2.

IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
INTEGER*4 BANDERA1,BANDERA2,FIN
LOGICAL II,III

PARAMETER(NN=500)
DIMENSION FA(4), FB(4), FC(4), FD(4), FO(2), DP(4), CT(4), TC(2)
DIMENSION V(NN),VN(21),VW(21),GV(NN)

COMMON/DELTA/TOL,DXY
COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N
COMMON/PROPIEDADES/EB

```

```

450 FORMAT(1X,F15.5,1X,5(F15.5))
454 FORMAT(1X,F6.2,2X,F10.5)
455 FORMAT(1X,F10.5,1X,F10.5)

```

```

FIN=500
BANDERA2=1
II=.TRUE.

```

```

DO 125 WHILE (II)

```

```

CT(1)=A1+DXY
CT(2)=A1-DXY
CT(3)=A2+DXY
CT(4)=A2-DXY
TC(1)=A1
TC(2)=A2

```

```

DO 900 K=1,4

```

```

    IF (K.EQ.1.OR.K.EQ.2) THEN
        BANDERA1=2
    ELSE
        BANDERA1=1
    ENDIF

```

```

    IF (K.EQ.1.OR.K.EQ.2) THEN
        CK1=CT(K)
        CK2=TC(BANDERA1)
    ELSE
        CK1=TC(BANDERA1)
        CK2=CT(K)
    ENDIF

```

```

        CALL DIFERENCIAS(CK1,CK2,C1,C2,C3,SIG,H,V)

```

```

        FO(1)=V(N+1)-V(N)-H*CK1
        FO(2)=V(2)-V(1)-H*CK2*SQRT(EB)*EXP(SQRT(EB)*ALFA)

```

```

        IF (K.EQ.1.OR.K.EQ.2) THEN
            FA(K)=FO(1)
            FB(K)=FO(2)
        ELSE
            FC(K-2)=FO(1)
            FD(K-2)=FO(2)
        ENDIF

```

```

        IF (K.EQ.2) THEN
            DP(1)=(FA(1)-FA(2))/(2*DXY)
            DP(3)=(FB(1)-FB(2))/(2*DXY)
        ENDIF

```

```

        IF (K.EQ.4) THEN
            DP(2)=(FC(1)-FC(2))/(2*DXY)
            DP(4)=(FD(1)-FD(2))/(2*DXY)

```

ENDIF

900 CONTINUE

$Y2=(F1*DP(3)-F2*DP(1))/(DP(1)*DP(4)-DP(2)*DP(3))$
 $Y1=-Y2*(DP(2)/DP(1))-(F1/DP(1))$

A1NUEVA=A1+Y1
A2NUEVA=A2+Y2

A1=A1NUEVA
A2=A2NUEVA

CK1=A1
CK2=A2

CALL DIFERENCIAS(CK1,CK2,C1,C2,C3,SIG,H,V)

$FO(1)=V(N+1)-V(N)-H*CK1$
 $FO(2)=V(2)-V(1)-H*CK2*SQRT(EB)*EXP(SQRT(EB)*ALFA)$

F1=FO(1)
F2=FO(2)

E1=ABS(FO(1))
E2=ABS(FO(2))

IF (E1.LT.TOL.AND.E2.LT.TOL) THEN

```
C *****
C * INCREMENTO FRACCIONAL DEL FLUJO
C *****
IF (OPCION.EQ.1) THEN
```

PSI=3-6*(A1/SIG)

WRITE(1,454)SIG,PSI

ENDIF

```
C *****
C * CALCULO DEL PERFIL DE VELOCIDADES
C *****
```

IF (OPCION.EQ.2) THEN

DELTAY=SIG/20

DO 460 KJ=21,1, -1

YN=DELTAY*(KJ-1)

$VN1=0.5*SIG*SIG*(1-(YN/SIG)*(YN/SIG))$

$VN2=A1*SIG*(1-(YN/SIG))$

```

      VN(KJ)=VN1-VN2
      WRITE(1,455)YN,VN(KJ)
460  CONTINUE

```

```

      Y=0
      DO 480 KJ=N+1,1, -1
        WRITE(1,455)Y,V(KJ)
        Y=Y-H
480  CONTINUE

```

```

      YW=ALFA
      DO 470 KJ=1,20
        VW(KJ)=A2*EXP(YW*SQRT(EB))+1
        WRITE(1,455)YW,VW(KJ)
        YW=YW-0.5
470  CONTINUE

```

```

      ENDIF

```

```

C *****
C *          TERMINOS VISCOSOS E INERCIALES
C *****

```

```

      IF (OPCION.EQ.3) THEN

```

```

      Y=ALFA+H
      DO 500 KJ=2,N
        X1=Y

```

```

        CALL COEFICIENTES(X1,C1,C2,C3,P,Q,R,E,FH)

```

```

        PB=(V(KJ+1)-2*V(KJ)+V(KJ-1))/(H*H)
        SB=P*((V(KJ+1)-V(KJ-1))/(2*H))+(-P)*(-P)*V(KJ)
        ED=C3*(((1-E)*(1-E))/(E*E))*V(KJ)
        CF=FH*V(KJ)*V(KJ)
        G1=PB/E
        G2=SB/E
        G3=-ED/E
        G4=CF/E
        SUMA=G1+G2+G3+G4
        FF=(1/(100*(1-E)))*RE
        PER=(1+G1+G2)/(V(KJ)+FF*V(KJ)*V(KJ))
        WRITE(1,450)Y,G1,G2,G3,G4,SUMA
        Y=Y+H

```

```

500  CONTINUE

```

```

      ENDIF

```

```

C *****
C *          CALCULO DE GRADIENTES DE VELOCIDAD
C *****

```

```

      IF (OPCION.EQ.4) THEN

```

```

        DELTAY=SIG/20
        DO 1060 KJ=21,1, -1
            YN=DELTAY*(KJ-1)
            VN(KJ)=-YN*YN+A1
1060    CONTINUE

        Y=0
        GV(N+1)=(V(N+1)-V(N))/H
        WRITE(1,455)Y,GV(N+1)
        Y=-H
        DO 1080 KJ=N,1, -1
            GV(KJ)=-(V(KJ)-V(KJ+1))/H
            WRITE(1,455)Y,GV(KJ)
            Y=Y-H
1080    CONTINUE

        YW=ALFA
        DO 1070 KJ=1,20
            VW(KJ)=SQRT(EB)*A2*EXP(YW*SQRT(EB))
            WRITE(1,455)YW,VW(KJ)
            YW=YW-0.5
1070    CONTINUE

        ENDIF

        II=.FALSE.
    ENDIF

    IF (BANDERA2.GT.FIN.OR.BANDERA2.EQ.FIN)THEN
        WRITE (*,*)'NO CONVERGENCIA. PROGRAMA TERMINADO'
        II=.FALSE.
        III=.FALSE.
    ENDIF

    BANDERA2=BANDERA2+1
125    CONTINUE

    RETURN
    END

```

SUBROUTINE DIFERENCIAS(CK1,CK2,C1,C2,C3,SIG,H,V)

C RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES MEDIANTE EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON. EL SISTEMA ECUACIONES QUE SE GENERA AL APLICAR DICHO MÉTODO SE SOLUCIONA CON EL MÉTODO DE CROUT [31]

```

    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    REAL*8 L
    PARAMETER(NN=500)
    DIMENSION V(NN), Z(NN), X(NN), L(NN,NN), U(NN,NN), A(NN,NN)

```

```

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N
COMMON/PROPIEDADES/EB
COMMON/DELTA/TOL,DXY

```

```
M=100
```

```

CF1=CK2*EXP(SQRT(EB)*ALFA)+1
CF2=0.5*SIG*SIG-CK1*SIG

```

```

V(1)=CF1
V(N+1)=CF2

```

```

DO 10 I=2,N
    V(I)=CF1+FLOAT(I)*((CF2-CF1)/(OMEGA-ALFA))*H
10 CONTINUE

```

```

I=1
DO 20 WHILE (I.LE.M)
    Y=ALFA+H
    J=1
    X1=Y
    X2=V(2)
    X3=V(3)
    X4=CF1

```

```

    CALL FUNCION(X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,F)
    CALL DERIVADAS(J,X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,DF1,DF2,DF3)

```

```

    A(1,1)=-2+H*H*DF1
    A(1,2)=1+H*H*DF2
    A(1,N)=-V(3)-2*V(2)+CF1+H*H*F)

```

```

    Y=Y+H
    DO 30 J=2,N-2
        X1=Y
        X2=V(J+1)
        X3=V(J+2)
        X4=V(J)

```

```

        CALL FUNCION(X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,F)
        CALL DERIVADAS(J,X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,DF1,DF2,DF3)

```

```

        A(J,J)=-2+H*H*DF1
        A(J,J-1)=1+H*H*DF3
        A(J,J+1)=1+H*H*DF2
        A(J,N)=-V(J+2)-2*V(J+1)+V(J)+H*H*F)
        Y=Y+H

```

```

30    CONTINUE

```

```

    J=N-1
    X1=Y
    X2=V(N)

```

```

X3=CF2
X4=V(N-1)

CALL FUNCION(X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,F)
CALL DERIVADAS(J,X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,DF1,DF2,DF3)

A(J,J)=-2+H*H*DF1
A(J,J-1)=1+H*H*DF3
A(J,N)=-CF2-2*V(N)+V(J)+H*H*F

KI=N-1

L(1,1)=A(1,1)
U(1,2)=A(1,2)/L(1,1)

DO 40 J=2,KI-1
    L(J,J-1)=A(J,J-1)
    L(J,J)=A(J,J)-L(J,J-1)*U(J-1,J)
    U(J,J+1)=A(J,J+1)/L(J,J)
40 CONTINUE

L(KI,KI-1)=A(KI,KI-1)
L(KI,KI)=A(KI,KI)-L(KI,KI-1)*U(KI-1,KI)

Z(1)=A(1,KI+1)/L(1,1)

DO 50 J=2,KI
    Z(J)=(1/L(J,J))*(A(J,KI+1)-L(J,J-1)*Z(J-1))
50 CONTINUE

X(KI)=Z(KI)

DO 60 J=KI-1,1,-1
    X(J)=Z(J)-U(J,J+1)*X(J+1)
60 CONTINUE

DO 70 J=2,N
    V(J)=V(J)+X(J-1)
70 CONTINUE

SUMA=0
DO 80 J=2,N
    SUMA=SUMA+X(J)*X(J)
80 CONTINUE
VECTOR=SQRT(SUMA)

IF (VECTOR.LE.TOL) THEN

    GO TO 2000

ENDIF

I=I+1

```

20 CONTINUE

WRITE(*,*)'NUMERO DE ITERACIONES EXCEDIDO'

RETURN

2000 END

SUBROUTINE FUNCION(X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,F)

C CALCULA LA FUNCIÓN Θ DEFINIDA EN LA ECUACIÓN (3.53)

\$DEBUG

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N

CALL COEFICIENTES(X1,C1,C2,C3,P,Q,R,E,FH)

$F = P * ((X3 - X4) / (2 * H)) + Q * X2 + FH * X2 * X2 - R$

RETURN

END

SUBROUTINE DERIVADAS(J,X1,X2,X3,X4,H,C1,C2,C3,DF1,DF2,DF3)

C CALCULA LAS DERIVADAS DE LA ECUACIÓN (3.53)

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N

COMMON/DELTA/TOL,DXY

$XA1 = X2 + DXY$

$XA2 = X2 - DXY$

IF(J.EQ.N-1) THEN

$XB1 = X3$

$XB2 = X3$

ELSE

$XB1 = X3 + DXY$

$XB2 = X3 - DXY$

ENDIF

IF (J.EQ.1) THEN

$XC1 = X4$

$XC2 = X4$

ELSE

$XC1 = X4 + DXY$

$XC2 = X4 - DXY$

ENDIF

CALL COEFICIENTES(X1,C1,C2,C3,P,Q,R,E,FH)

B1=P*((X3-X4)/(2*H))+Q*XA1+FH*XA1*XA1-R
B2=P*((X3-X4)/(2*H))+Q*XA2+FH*XA2*XA2-R
D1=P*((XB1-X4)/(2*H))+Q*X2+FH*X2*X2-R
D2=P*((XB2-X4)/(2*H))+Q*X2+FH*X2*X2-R
E1=P*((X3-XC1)/(2*H))+Q*X2+FH*X2*X2-R
E2=P*((X3-XC2)/(2*H))+Q*X2+FH*X2*X2-R

DF1=(B1-B2)/(2*DXY)
DF2=(D1-D2)/(2*DXY)
DF3=(E1-E2)/(2*DXY)

RETURN
END

SUBROUTINE COEFICIENTES(X1,C1,C2,C3,P,Q,R,E,FH)

C COEFICIENTES P(Y), Q(Y), R(Y) DE LA ECUACION DIFERENCIAL Y CALCULO DE VALORES
C DE E(Y).
C

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

COMMON/PARAMETROS/ALFA,OMEGA,RE,N

PD=3*C2*X1*X1+2*C1*X1
C5=C2*X1*X1*X1+C1*X1*X1
E=1+C1*X1*X1+C2*X1*X1*X1
P=-PD/E
Q=(1/(E*E))*(PD*PD-C3*C5*C5)
R=-E
FH=-(RE/100)*((1-E)/(E*E))*C3

RETURN
END