

**“POTENCIALES HOMOGENEOS
Y CUASIHOMOGENEOS
EN MECANICA CELESTE”**

POR

LUZ VIANEY VELA AREVALO

TESIS DE MAESTRIA

**“POTENCIALES HOMOGENEOS Y CUASIHOMOGENEOS
EN MECANICA CELESTE”**

TESIS QUE PRESENTA

LUZ VIANEY VELA AREVALO

**PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS**

ASESOR: DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA

NOVIEMBRE 1996

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

Agradecimientos

Primeramente deseo expresar mi agradecimiento por su dirección y ayuda a mi asesor, el Dr. Ernesto Pérez Chavela, que fueron determinantes en la preparación de esta tesis y en mi formación durante la maestría.

Agradezco a mis padres, Elodia y Francisco, puesto que la finalización de esta empresa y muchas otras se basaron en su incondicional apoyo y valiosas enseñanzas.

También quiero dar las gracias a las personas que con sus comentarios contribuyeron grandemente en la elaboración de este trabajo: Joaquín Delgado Fernández, Ernesto Lacomba, Don Saari, Arturo Olvera, Lidia Jiménez, Jorge Velasco, Florin Diacu, Gustavo Izquierdo, Pedro Luis del Angel, y a mis compañeros de maestría.

Indice

Introducción	3
1 Potenciales cuasihomogéneos	7
1 Ecuaciones de movimiento y Obtención de integrales primeras	7
2 Identidad de Lagrange-Jacobi	10
3 Configuraciones centrales y equilibrios relativos	12
4 Comportamiento asintótico de las órbitas de colisión total	20
2 El Problema cuasihomogéneo de dos cuerpos	25
1 Explosión de McGehee	25
2 Flujo global	29
3 Regularización de colisiones binarias	37
3.1 Regularización en un problema colineal	37
3.2 Regularización por ramas	39
3.3 Regularización por bloques	40
3 Problema colineal cuasihomogéneo de tres cuerpos	50
1 Coordenadas de McGehee	50
2 Reducción de las coordenadas	54
3 Regularización de colisiones binarias	59
3.1 Caso $b = 2$	62
4 Flujo sobre la variedad de colisión total	63
4.1 Puntos de equilibrio	64
4.2 Casigradiencia del flujo	65
4.3 Configuraciones correspondientes a los puntos de equilibrio	66
4.4 Linealización alrededor de los puntos de equilibrio	67
4.5 Flujo sobre Λ	70
5 Órbitas de colisión o expulsión	71
5.1 Caso $1 \leq b < 2$	72
5.2 Caso $b > 2$	75

	2
5.3 Caso $b=2$	79
Conclusiones	81
Bibliografía	84

Introducción

Según Poincaré, el objetivo final de la Mecánica Celeste es determinar si la Mecánica Newtoniana puede explicar o no, por sí sola, todos los fenómenos astronómicos. Este problema en general se plantea como el Problema de los n cuerpos: describir el movimiento de n masas puntuales sujetas a sus atracciones gravitacionales.

Newton resolvió el problema para 2 cuerpos. Sin embargo, para 3 cuerpos o más se demostró que no es posible la integración completa. Una forma de atacar el problema es: conociendo la solución al problema de dos cuerpos, se ha intentado considerar el efecto de los otros cuerpos como una perturbación de la solución conocida, y se han encontrado soluciones en series de potencias de las masas u otros parámetros. Estos métodos han dado lugar a lo que ahora se conoce como teoría de perturbaciones.

Por ejemplo, el movimiento de Mercurio no se puede explicar de una forma adecuada con un modelo de dos cuerpos donde el cuerpo más masivo es el Sol, por lo cual se recurrió a la teoría general de la relatividad, que ha explicado la precesión del perihelio de Mercurio y otros planetas interiores.

Sin embargo, plantear el Problema de los n cuerpos en el marco de la Relatividad es bastante complicado. Un modelo postnewtoniano del Problema de los n cuerpos basado en la teoría de Brans-Dicke (Estabrook, 1969), es de la forma

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (r_i - r_j)}{r_{ij}^3} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{6 + 4w}{2 + w} \sum_{l \neq i} \frac{m_l}{r_{il}} - \frac{1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{kj}} + \frac{1}{c^2} \frac{1 + w}{2 + w} \left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 + \dots \right),$$

donde los términos que faltan incluyen nuevamente las primeras derivadas de r_i y otros términos por el estilo; c es la velocidad de la luz, y w es la constante de acoplamiento del campo escalar. Como puede observarse el modelo es tan complejo que para su estudio es necesaria una simplificación.

Otra aproximación es considerar que la naturaleza de la fuerza actuante es diferente que la newtoniana. Si una partícula de masa m_1 se encuentra sujeta a la atracción de una masa m_2 a una distancia r , y se han tomado unidades adecuadas para que la constante de gravitación universal sea 1, entonces la fuerza newtoniana se puede

expresar como la derivada de la función potencial,

$$U = \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Este es un potencial homogéneo con grado de homogeneidad -1 .

En esta tesis, nos planteamos la pregunta inicial: qué sucede cuando se consideran potenciales homogéneos en general? es decir, cuando la función potencial es de la forma,

$$U = \frac{m_1 m_2}{r^a};$$

y aún más, nos interesó cómo cambia el comportamiento de las partículas cuando se considera un potencial cuasihomogéneo:

$$W = \frac{m_1 m_2}{r^a} + \frac{m_1 m_2}{r^b}, \quad 0 \leq a < b.$$

Obsérvese que el segundo potencial incluye al primero en el caso de que $a = 0$, porque la suma de constantes en el potencial no afecta a la fuerza.

Este tipo de potenciales se ha usado frecuentemente en algunos problemas físicos. Al intentar explicar las fuerzas intermoleculares, Maxwell en su estudio de la teoría cinética de los gases, propuso potenciales de la forma $V = \frac{k}{r^n}$, y encontró que lo que más se acercaba a los experimentos era $n = 4$. Esto dio lugar a que se buscaran potenciales cada vez más precisos. Sutherland propuso un potencial $V = A \frac{m_1 m_2}{r^3}$ porque facilitaba los cálculos. Además el mismo Sutherland en 1887 propuso que el potencial

$$V = \frac{G}{r} + \frac{M}{r^3}$$

explicaría tanto las fuerzas intermoleculares como las gravitacionales. Más tarde Langevin en 1905 propuso en la teoría de la movilidad de iones al potencial $V = \frac{A}{4\pi n r^4}$, y Wang propuso $V = 8.7 \frac{e^2 a^5}{r^6}$ (Margenau, 1971).

También han resultado potenciales homogéneos en el estudio de la fuerza entre átomos neutrales o iones cargados, que dan lugar a las interacciones de amplio rango. Por ejemplo, la fuerza entre un ión y un átomo polarizado puede calcularse por mecánica cuántica y da lugar a un potencial de la forma $1/r^4$; y entre un dipolo puntual y el átomo polarizado es $1/r^6$ (Torrens, 1972).

El potencial entre una molécula a una distancia r de una superficie conductora puede calcularse como $1/r^3$, y otros proponen que a grandes separaciones es de $1/r^4$ (Shi, Parsegian, 1975). Esto da lugar a fuerzas conocidas como de retardamiento, en que la interacción varía conforme la distancia de separación que agrega un factor multiplicativo $1/r$ al potencial (Levy, 1995). También se han propuesto fuerzas de retardo del orden de $1/r^7$.

Maneff (1924-1930) usando principios físicos encontró que un potencial de la forma

$$\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

es una buena justificación teórica del avance del perihelio de Mercurio y de otros planetas interiores, y también describe adecuadamente el movimiento de la Luna. Él tomó $B \approx 1/c^2$, donde c es la velocidad de la luz.

El mismo tipo de potencial de Maneff ha sido usado como una aproximación al campo relativista de Fock, si se truncan los términos despreciables (Mioc,1994). Otros autores también encontraron este tipo de potencial en el movimiento en un campo fotogravitacional generado por una fuente de radiación (Saslaw,1978). Otras fuerzas no newtonianas se han considerado para estudiar un problema de masa perdida en el que la velocidad rotacional de una galaxia permanece constante, lo que sugiere que existe material no luminoso en el perímetro. Los potenciales considerados aquí son del tipo $GM/r^2 + (GMa_o)^{1/2}/r$ (Liboff, 1992).

Otro ejemplo es la expresión del campo generado por un dipolo, que es del tipo $A/r^4 - B/r^3$ (Liboff,1994).

En general la idea de un potencial cuasihomogéneo es un cambio en la interacción gravitacional dependiendo de la distancia entre los cuerpos. Esto se deduce de que a distancias pequeñas es una parte del potencial la que domina, mientras que a distancias grandes domina la parte del potencial con grado de homogeneidad mayor ($-a$).

En esta tesis se estudian los movimientos que se producen debido a estos potenciales, en sistemas de partículas puntuales.

En el Capítulo 1 plantaremos el Problema cuasihomogéneo de n cuerpos y estudiaremos algunos aspectos generales, como encontrar las integrales de movimiento. Se deduce la Identidad de Lagrange-Jacobi y sus consecuencias respecto del momento en que se produce colisión total. Se estudia también el comportamiento del momento de inercia respecto al tiempo, cerca de colisión total. En este capítulo también se estudia la existencia de soluciones especiales generadas por configuraciones centrales o equilibrios relativos.

En el Capítulo 2, se estudia un sistema de 2 partículas con un potencial cuasihomogéneo. Se usan Coordenadas de McGehee para describir el flujo global dependiendo del valor de b , y se estudian los movimientos que producen colisión. Además se estudian los diferentes conceptos que existen de regularización de colisiones binarias, y se dan diferentes resultados de la regularización al aplicarlos al caso cuasihomogéneo.

En el Capítulo 3, se estudia el Problema colineal cuasihomogéneo de tres cuerpos. En este problema se introducen Coordenadas de McGehee para conocer el comportamiento del flujo cerca de colisión total. Se estudia el comportamiento de las órbitas que van a colisión triple y las que salen de colisión triple. Se demuestra que para $b \geq 2$

el conjunto de condiciones iniciales que van a colisión triple es de medida positiva, y se demuestra la existencia de movimientos en donde la colisión triple se produce en configuración diferente a configuración central. Este es el principal resultado de la tesis; es un resultado original que nos muestra como crece la riqueza de movimientos al considerar potenciales cuasihomogéneos.

Capítulo 1

Potenciales cuasihomogéneos

1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y OBTENCIÓN DE INTEGRALES PRIMERAS

Consideremos el problema de describir el movimiento de tres partículas en el espacio, que están sujetas únicamente a la fuerza gravitacional que ejercen unas sobre otras. Esto es lo que se conoce como el Problema de los tres cuerpos.

De acuerdo a la segunda ley de Newton y a la ley de atracción gravitacional newtoniana, este problema se plantea en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales que determinan la posición de cada partícula \mathbf{q}_i en función del tiempo.

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Este sistema puede escribirse en forma simplificada,

$$M \ddot{\mathbf{q}}(t) = \nabla U(\mathbf{q})(t), \quad \mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)(t),$$

donde $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, m_3, m_3, m_3)$ es la matriz de masas del sistema, y la notación $(\ddot{\quad})$ significa doble derivada con respecto al tiempo. La función U depende sólo de la posición del sistema, y se le conoce como potencial. La ley newtoniana de atracción queda definida por el potencial newtoniano, de la forma

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|},$$

donde \mathbf{q}_i es la posición de cada partícula en \mathbb{R}^3 y m_i su masa.

Este problema ha sido ampliamente estudiado. Sin embargo, en este trabajo se propondrá una generalización del potencial newtoniano, y por tanto estudiaremos aquí una variación al problema de tres cuerpos.

Definición 1. Un potencial cuasihomogéneo para un sistema de tres cuerpos tiene la forma

$$W(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q}),$$

donde

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^a},$$

$$V(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^b},$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \quad \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq a < b.$$

De forma análoga al problema tradicional de 3 cuerpos, podemos definir el Problema cuasihomogéneo de 3 cuerpos como el que consiste en explicar el movimiento de tres partículas regido por este potencial. Así, las ecuaciones de movimiento son:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \nabla W(\mathbf{q}),$$

con $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, m_3, m_3, m_3)$, o bien,

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_i}(\mathbf{q}), \quad (1.1)$$

$$= \sum_{j \neq i}^3 \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Este problema, al igual que el problema de 3 cuerpos tradicional, tiene 10 integrales primeras o integrales de movimiento, es decir, identidades que se mantienen a lo largo de las órbitas.

Veamos cómo se obtienen estas integrales.

Multiplicando escalarmente las ecuaciones en (1.1) por $\dot{\mathbf{q}}_i$ y sumando, tenemos

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i.$$

Esta ecuación se puede integrar directamente con respecto al tiempo para obtener

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 = W + h,$$

o bien

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - W(\mathbf{q}) = h,$$

donde h , la constante de integración, está relacionada con la energía del sistema, por lo que esta ecuación se conoce como la integral de la energía. El primer término es la energía cinética, que se acostumbra denotar por T .

Por otra parte, si las ecuaciones (1.2) se multiplican vectorialmente por \mathbf{q}_i y se suman, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} \mathbf{q}_i \times (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} \mathbf{q}_i \times (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \right], \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \left[\frac{am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} \mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j + \frac{bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} \mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j \right]. \end{aligned}$$

Observando que $\mathbf{q}_i \times \mathbf{q}_j = -\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_i$, al realizar la suma anterior todos los miembros se cancelan. Además, debido a que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i) = \dot{\mathbf{q}}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{q}_i \times \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i \times \ddot{\mathbf{q}}_i,$$

podemos integrar con respecto al tiempo para obtener

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{c}.$$

Esta es la ecuación de la conservación del momento angular. Se define la constante \mathbf{c} como el momento angular del sistema, y sus tres componentes corresponden a tres integrales de movimiento.

Ahora bien, consideremos nuevamente las ecuaciones (1.2). Sumando obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{q}}_i &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \right], \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

y si integramos con respecto al tiempo la ecuación así obtenida nos indica que el centro de masa del sistema se mueve uniformemente en una recta. Por lo tanto podemos considerar al centro de masa fijo en el origen y el momento lineal del sistema igual a cero. Lo anterior se expresa como

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0},$$

y éstas son las 6 integrales de movimiento restantes.

Es fácil generalizar todo lo anterior a un sistema de n partículas para definir el Problema de los n cuerpos cuasihomogéneo, y se observa que las primeras integrales pueden obtenerse similarmente en este caso.

2. IDENTIDAD DE LAGRANGE-JACOBI

Definimos el momento de inercia como

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i|^2. \quad (1.3)$$

Observemos que si j está fija,

$$\sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 = \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i|^2 - 2\mathbf{q}_j \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i + |\mathbf{q}_j|^2 \sum_{i=1}^n m_i = 2I + |\mathbf{q}_j|^2 M,$$

con M la masa total del sistema. Al multiplicar por m_j y sumar obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^n m_i m_j |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 = 4MI. \quad (1.4)$$

De esta expresión se obtiene que el momento de inercia describe el tamaño del sistema, puesto que una colisión total ocurre si y sólo si $I = 0$.

Para obtener la identidad de Lagrange-Jacobi, derivemos la expresión (1.3),

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{q}_i, \\ \ddot{I} &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{q}_i + \sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2, \end{aligned}$$

y recordando las ecuaciones de movimiento (1.2) y la expresión para la energía cinética $T = \frac{1}{2} \sum m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \cdot \mathbf{q}_i + \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \cdot \mathbf{q}_i \right] + 2T, \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{a+2}} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_j) + \right. \\ &\quad \left. \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^{b+2}} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i - 2\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_j) \right] + 2T, \\ &= \sum_i \sum_{j > i} \left[\frac{-am_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^a} + \frac{-bm_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^b} \right] + 2T, \\ &= -aU(\mathbf{q}) - bV(\mathbf{q}) + 2T, \end{aligned}$$

y usando la relación de energía $T - U - V = h$, obtenemos la identidad de Lagrange-Jacobi para un potencial cuasihomogéneo,

$$\ddot{I} = (2 - a)U(\mathbf{q}) + (2 - b)V(\mathbf{q}) + 2h. \quad (1.5)$$

El potencial Newtoniano se obtiene como el caso particular en que $a = 0$ y $b = 1$. Si $a = 0$ se tiene que $U = cte$, luego podemos renombrar la energía para obtener de (1.5) que

$$\bar{I} = V + 2h'.$$

Otro caso interesante es el denominado potencial de Maneff, en el que $a = 1$ y $b = 2$, aquí

$$\bar{I} = U + 2h.$$

En lo que sigue, generalizaremos un conocido teorema sobre el tiempo en que ocurre colisión total para el caso de potencial cuasihomogéneo. Consideremos primero los dos casos anteriores, el newtoniano y el de Maneff.

Supongamos que se da colisión total del sistema en un tiempo t infinito. Es decir,

$$U(\mathbf{q}) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad V(\mathbf{q}) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Luego, según la identidad (1.5) para estos casos, se tendría

$$\bar{I} \rightarrow \infty, \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty,$$

así que existe $t_1 > 0$ tal que $\bar{I} > 1$, para $t > t_1$. De esto, al integrar, tenemos que

$$I \geq t^2/2 + ct + d, \quad c, d \text{ constantes, } t > t_1,$$

y entonces

$$I \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty.$$

Pero habíamos supuesto que en el infinito había colisión total, luego debía ser $I \rightarrow 0$, lo cual es una contradicción.

Lo anterior prueba que en el caso de potencial newtoniano y de potencial de Maneff, si ocurre colisión total, ésta ocurre en un tiempo finito.

Este teorema puede extenderse fácilmente para $0 \leq a < b \leq 2$.

En el caso en que $b > 2$, se tiene que $\bar{I} < 0$ en colisión total; es decir, cerca de colisión total, la función I es cóncava hacia abajo, y es una función no negativa, luego es imposible que la colisión total ocurra en tiempo infinito.

Con todo esto hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 2. *En el problema de n cuerpos con potenciales cuasihomogéneos, si ocurre colisión total, ésta ocurre en un tiempo finito.*

Si fuera por ejemplo $a = 0$ y $b = 2$, entonces $\bar{I} = 2h'$, lo cual se puede integrar directamente para obtener

$$I = h't^2 + ct + d, \quad c, d \text{ constantes,}$$

luego con $h' < 0$ se obtienen movimientos acotados, que empiezan y terminan en colisión total.

Otro caso de interés es cuando $2 \leq a < b$, porque entonces habrá valores de la energía para los cuales $\ddot{I} < 0$ para todo t y las posibilidades para el movimiento general del sistema se reducen a unas pocas formas del momento de inercia (ver Fig. 1.1). Del hecho que I es una función no negativa que es cóncava hacia abajo, se puede concluir que tiene al menos un cero, de lo cual se sigue que toda órbita comienza o termina en colisión total. Incluso puede pasar que la función I sea acotada aún con valores positivos de la energía. Esto es importante porque se pueden generar dinámicas muy complicadas y desconocidas hasta hoy.

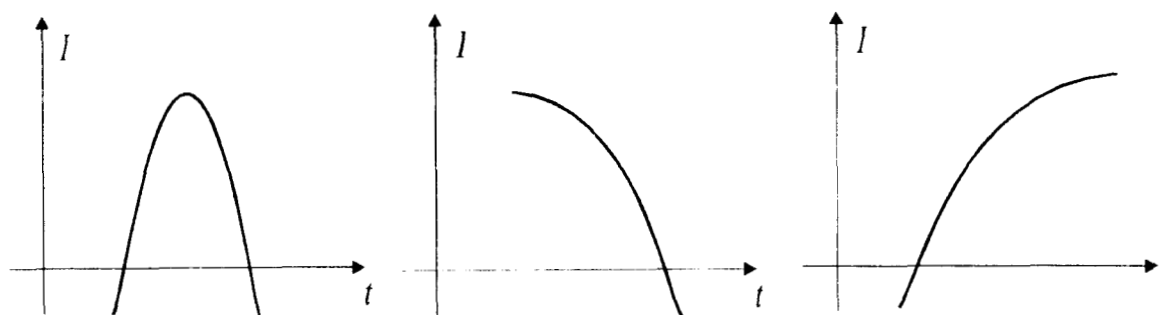


Fig. 1.1 Posibles formas del momento de inercia

Un resultado conocido es el que concierne al momento angular. En un sistema con potencial newtoniano, si ocurre colisión total, entonces el momento angular es igual a cero. En el caso cuasihomogéneo, este resultado ya no es válido en general. Esto se verá al estudiar un sistema de 2 cuerpos con un potencial cuasihomogéneo, en el Capítulo 2.

3. CONFIGURACIONES CENTRALES Y EQUILIBRIOS RELATIVOS

El propósito de esta sección es estudiar la existencia de algunas soluciones particulares de un problema cuasihomogéneo. Es sabido que para un problema Newtoniano, se conocen soluciones especiales: las generadas por configuraciones centrales o por equilibrios relativos. Aquí estudiaremos si estas soluciones aún pueden o no obtenerse para el caso cuasihomogéneo. Estas ideas siguen las de (Moeckel, 1994).

Recordemos la definición usual de configuración central en un sistema de n partículas:

Definición 3. Decimos que $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^{3n}$ es una configuración central si existe $r(t) > 0$ tal que $\mathbf{q}(t) = r(t)\mathbf{q}_0$ es solución del Problema de los n cuerpos.

Veamos si esta definición se aplica a un problema cuasihomogéneo. Aquí, al usar las ecuaciones de movimiento (1.1), y suponer que \mathbf{q}_0 es una configuración central, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= r(t)\mathbf{q}_0, \\ \iff \ddot{\mathbf{q}}(t) &= \ddot{r}(t)\mathbf{q}_0, \\ \iff M\ddot{\mathbf{q}}(t) &= \nabla U(\mathbf{q}(t)) + \nabla V(\mathbf{q}(t)) = \ddot{r}(t)M\mathbf{q}_0. \end{aligned}$$

Usando que ∇U y ∇V son funciones homogéneas con grado de homogeneidad $-(a+1)$ y $-(b+1)$ respectivamente, se obtiene que

$$\ddot{r}(t)M\mathbf{q}_0 = \frac{1}{r(t)^{a+1}}\nabla U(\mathbf{q}_0) + \frac{1}{r(t)^{b+1}}\nabla V(\mathbf{q}_0), \quad (*)$$

de donde

$$\ddot{r}(t)\mathbf{q}_0^T M\mathbf{q}_0 = \frac{1}{r(t)^{a+1}}\mathbf{q}_0^T \nabla U(\mathbf{q}_0) + \frac{1}{r(t)^{b+1}}\mathbf{q}_0^T \nabla V(\mathbf{q}_0),$$

y si aplicamos el Teorema de Euler, tendremos

$$\ddot{r}(t)\mathbf{q}_0^T M\mathbf{q}_0 = \frac{-a}{r(t)^{a+1}}U(\mathbf{q}_0) + \frac{-b}{r(t)^{b+1}}V(\mathbf{q}_0),$$

o bien,

$$\ddot{r}(t) = -\frac{a\lambda_1}{r(t)^{a+1}} - \frac{b\lambda_2}{r(t)^{b+1}},$$

donde $\lambda_1 = \frac{U(\mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_0^T M\mathbf{q}_0}$ y $\lambda_2 = \frac{V(\mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_0^T M\mathbf{q}_0}$.

La última ecuación representa un problema de fuerza central con un potencial cuasihomogéneo. Ahora bien, sustituyendo la anterior ecuación en (*), se tiene que

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a\lambda_1}{r(t)^{a+1}} - \frac{b\lambda_2}{r(t)^{b+1}} \right) M\mathbf{q}_0 &= \frac{1}{r(t)^{a+1}}\nabla U(\mathbf{q}_0) + \frac{1}{r(t)^{b+1}}\nabla V(\mathbf{q}_0) \\ \iff [M^{-1}\nabla U(\mathbf{q}_0) + a\lambda_1\mathbf{q}_0]r(t)^{b-a} &+ [M^{-1}\nabla V(\mathbf{q}_0) + b\lambda_2\mathbf{q}_0] = 0. \end{aligned}$$

La única forma en que la ecuación anterior se satisfaga para toda t , es que los dos términos entre paréntesis sean cero. Es decir, debe cumplirse simultáneamente que

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{q}_0) + a\lambda_1\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad M^{-1}\nabla V(\mathbf{q}_0) + b\lambda_2\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}.$$

Encontrar una configuración central \mathbf{q}_0 , consiste en determinar un vector que sea paralelo a $M^{-1}\nabla U$ y también a $M^{-1}\nabla V$. Esto en general es muy difícil de resolver, pero veremos un caso particular para el cual se cumple.

Consideremos tres partículas m_1 , m_2 y m_3 colocadas en la recta con posiciones $q_1 < q_2 < q_3$.

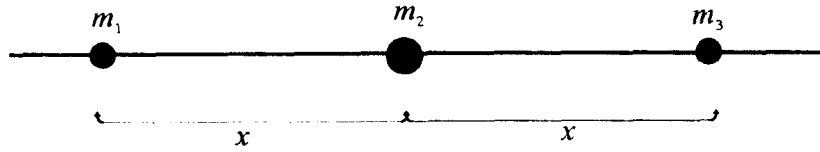


Fig. 1.2. Configuración central de tres cuerpos colineales simétricos ($m_1=m_3$).

Las masas m_1 y m_3 son iguales y están colocadas de manera simétrica respecto al origen, y la tercer partícula está en el origen; es decir, $m_1 = m_3$ y m_2 cualquiera, y la posición inicial cumple $q_1 = -q_3$, $q_2 = 0$. Esta configuración satisface que el centro de masas está en el origen, $m_1q_1 + m_2q_2 + m_3q_3 = 0$. Sea

$$x = q_2 - q_1 = q_3 - q_2,$$

luego tenemos que los vectores $M^{-1}\nabla U$ y $M^{-1}\nabla V$ en el punto $\mathbf{q}_0 = (-q_3, 0, q_3)$ son

$$M^{-1}\nabla U(\mathbf{q}) = a \begin{pmatrix} \frac{m_2}{x^{a+1}} + \frac{m_1}{(2x)^{a+1}} \\ 0 \\ -\frac{m_1}{(2x)^{a+1}} - \frac{m_2}{(x)^{a+1}} \end{pmatrix}, \quad M^{-1}\nabla V(\mathbf{q}) = b \begin{pmatrix} \frac{m_2}{x^{b+1}} + \frac{m_1}{(2x)^{b+1}} \\ 0 \\ -\frac{m_1}{(2x)^{b+1}} - \frac{m_2}{(x)^{b+1}} \end{pmatrix}.$$

Estos vectores son paralelos al vector $(1, 0, -1)^T$, tal como lo es \mathbf{q}_0 . Por tanto, hemos encontrado una configuración central de tres partículas colineales cuando dos masas son iguales, para un problema cuasihomogéneo.

Otras soluciones especiales que deseáramos encontrar son los equilibrios relativos.

Definición 4. Un equilibrio relativo es una configuración $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^{3n}$ que admite una solución al Problema de los n cuerpos cuasihomogéneo de la forma

$$\mathbf{q}(t) = A(t)\mathbf{q}_0,$$

donde A es una matriz de rotación de orden 3×3 y se ha usado la notación

$$A\mathbf{q} = \begin{pmatrix} A\mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ A\mathbf{q}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3.$$

Supongamos que \mathbf{q}_0 es un equilibrio relativo. Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento (1.1), obtenemos que

$$A^{-1}\ddot{A}M\mathbf{q}_0 = \nabla U(\mathbf{q}_0) + \nabla V(\mathbf{q}_0).$$

Hagamos $G(A) = A^{-1}\dot{A}$. Entonces

$$\dot{G} = A^{-1}\ddot{A} - (A^{-1}\dot{A}A^{-1})\dot{A},$$

luego

$$A^{-1}\ddot{A} = \dot{G} + G^2.$$

Observemos que por ser A ortogonal, $A^T = A^{-1}$ y también $A^T A = I$, luego al derivar obtenemos que $A^T \dot{A} = -\dot{A}^T A = -(A^T \dot{A})^T$ y entonces $G = -G^T$. Así que G es una matriz antisimétrica.

Veremos que G es la matriz representante del producto vectorial con un vector de velocidad angular $w(t) \in \mathbb{R}^3$.

Si tomamos a ϕ , θ y ψ como los ángulos de Euler de la rotación A (ver Fig. 1.3), entonces la matriz se puede expresar como $A = A_\phi A_\theta A_\psi$, donde

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

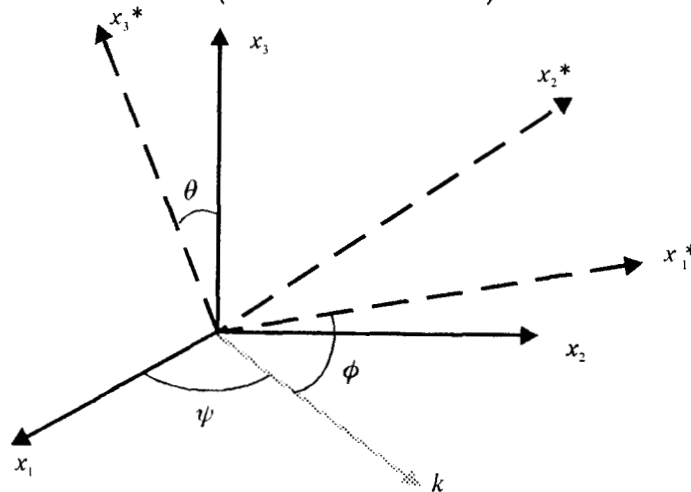


Fig. 1.6. Ángulos de Euler de la rotación.

Además, tenemos la siguiente igualdad,

$$G(A_1 A_2 A_3) = G(A_1) + A_1 G(A_2) A_1^{-1} + A_1 A_2 G(A_3) A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Aplicando G a las matrices anteriores, tenemos que

$$G(A_\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G(A_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G(A_\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir los factores de A , obtenemos

$$G = G(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \cos \theta & \text{sen } \phi - \text{sen } \theta \cos \phi \\ -1 - \cos \theta & 0 & \text{sen }^2 \theta + \cos \phi \\ -\text{sen } \phi + \text{sen } \theta \cos \phi & -\text{sen }^2 \theta - \cos \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta forma de matriz corresponde a la matriz representante del producto vectorial por un vector $w \in \mathbb{R}^3$; es decir, si ponemos $w = (w_1, w_2, w_3)$, la matriz G se puede expresar como sigue

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto,

$$A^{-1}\ddot{A} = \dot{G} + G^2 = \begin{pmatrix} -w_2^2 - w_3^2 & -\dot{w}_3 + w_1 w_2 & \dot{w}_2 + w_1 w_3 \\ \dot{w}_3 + w_1 w_2 & -w_1^2 - w_3^2 & -\dot{w}_1 + w_2 w_3 \\ -\dot{w}_2 + w_1 w_3 & \dot{w}_1 + w_2 w_3 & -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue, veremos que $A^{-1}\ddot{A}$ es una matriz constante. Notemos que

$$A^{-1}\ddot{A}\mathbf{q}_{0i} = m_i^{-1}(\nabla_i U(\mathbf{q}_0) + \nabla_i V(\mathbf{q}_0)) = \text{const.}$$

Se tienen que considerar 3 casos.

- Si los vectores $\mathbf{q}_{01}, \mathbf{q}_{02}, \dots, \mathbf{q}_{0n}$ generan \mathbb{R}^3 , entonces $A^{-1}\ddot{A}$ es una transformación lineal que es constante en una base de \mathbb{R}^3 , luego debe ser $A^{-1}\ddot{A} = \text{const.}$
- Si generan un subespacio de dimensión 2 (\mathbb{R}^2), la matriz de 3×3 $A^{-1}\ddot{A}$ es constante en \mathbb{R}^2 y transforma \mathbb{R}^2 en sí mismo, luego tiene la forma

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

* puede ser cualquier número.

Al comparar esto con las componentes encontradas antes para la matriz $A^{-1}\ddot{A}$, se obtiene que las componentes del vector w satisfacen

$$w_1 \quad \text{y} \quad w_2 = \text{constantes}, \quad w_1 w_3 = 0, \quad w_2 w_3 = 0.$$

Por tanto la matriz queda

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

- Si los \mathbf{q}_{0i} generan un subespacio de dimensión 1, es decir, son vectores colineales, se puede suponer que $w(0) = (w_{01}, 0, w_{03})$. De esta forma las velocidades iniciales cumplen $\dot{\mathbf{q}}_i(0) = m_i w(0) \times \mathbf{q}_{0i}$ y están en el plano \mathbb{R}^2 , así que el movimiento ocurre siempre en \mathbb{R}^2 . Se sigue pues que $w(t) = (0, 0, w_3(t))$ y entonces

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{pmatrix} -w_3^2 & -\dot{w}_3 & 0 \\ \dot{w}_3 & -w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y como ésta es una transformación de \mathbb{R} en \mathbb{R} , debe tenerse que $\dot{w}_3 = 0$ y por tanto $w_3 = \text{const.}$

Como se ha descompuesto la matriz $A^{-1}\ddot{A} = \dot{G} + G^2$ en la suma de una matriz antisimétrica más una simétrica, tendremos que \dot{G} y G^2 son matrices constantes, luego en particular G es constante y así también lo será el vector w . Por tanto, la rotación $A(t)$ es una rotación uniforme alrededor de un eje fijo.

Con esto probamos que $w(t) = w_0 = \text{const.}$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $w_0 = (0, 0, k)$, así que

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{pmatrix} -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A^{-1}\ddot{A}\mathbf{q}_{0i} = m_i^{-1}(\nabla_i U(\mathbf{q}_0) + \nabla_i V(\mathbf{q}_0))$, se sigue que las aceleraciones mutuas están en el plano y que de hecho $\mathbf{q}_{0i} \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Así que no puede pasar que los vectores \mathbf{q}_{0i} generen \mathbb{R}^3 .

Poniendo $A^{-1}\ddot{A} = -k^2 I$, y sabiendo que $\mathbf{q}_{0i} \in \mathbb{R}^2$, se encuentra que \mathbf{q}_0 debe satisfacer

$$M^{-1}(\nabla U(\mathbf{q}_0) + \nabla V(\mathbf{q}_0)) + \lambda \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}, \quad \lambda = k^2 > 0.$$

En esta ecuación queda implícito el hecho de que el centro de masa está en el origen. Esto se obtiene al considerar las ecuaciones

$$-\lambda m_i \mathbf{q}_{0i} = \nabla_i U(\mathbf{q}_0) + \nabla_i V(\mathbf{q}_0),$$

para sumarlas y así tener que

$$-\lambda \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_{0i} = \sum_{i=1}^n \nabla_i U(\mathbf{q}_0) + \sum_{i=1}^n \nabla_i V(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

Por otra parte, veamos que λ queda determinado de manera única por \mathbf{q}_0 , puesto que

$$\mathbf{q}_0^T \nabla U(\mathbf{q}_0) + \mathbf{q}_0^T \nabla V(\mathbf{q}_0) + \lambda \mathbf{q}_0^T M \mathbf{q}_0 = \mathbf{0},$$

y por el teorema de Euler,

$$-aU(\mathbf{q}_0) - bV(\mathbf{q}_0) + \lambda \mathbf{q}_0^T M \mathbf{q}_0 = \mathbf{0},$$

por tanto se tiene que

$$\lambda = \frac{aU(\mathbf{q}_0) + bV(\mathbf{q}_0)}{\mathbf{q}_0^T M \mathbf{q}_0}.$$

Es de notar que la ecuación que caracteriza a un equilibrio relativo difiere de la correspondiente que debe satisfacer una configuración central. En el caso de un equilibrio relativo, debe buscarse un vector que sea paralelo a la resultante de los vectores $M^{-1}\nabla U$ y $M^{-1}\nabla V$, mientras que para encontrar una configuración central se requiere que la configuración sea un vector paralelo al mismo tiempo a $M^{-1}\nabla U$ y $M^{-1}\nabla V$.

Aunque es posible encontrar equilibrios relativos para el caso cuasihomogéneo, veremos que la existencia de dichos vectores no es fácilmente comprobable aún para el caso de tres cuerpos colineales.

Consideremos entonces tres partículas m_1 , m_2 y m_3 en la recta con posiciones q_1 , q_2 y q_3 .

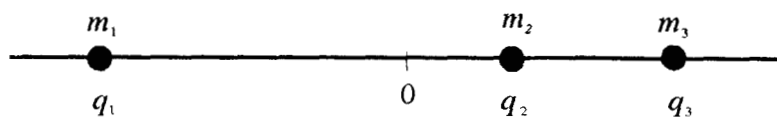


Fig. 1.4. Tres partículas colineales.

Pongamos $\mathbf{q}_0 = (q_1, q_2, q_3)$, cada coordenada correspondiente a la masa m_i con ese ordenamiento de izquierda a derecha, y busquemos las soluciones a la ecuación

$$\lambda \mathbf{q}_0 = M^{-1}(\nabla U(\mathbf{q}_0) + \nabla V(\mathbf{q}_0)).$$

Para esto debemos resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda q_1 &= \frac{am_2}{(q_2 - q_1)^{a+1}} + \frac{am_3}{(q_3 - q_1)^{a+1}} + \frac{bm_2}{(q_2 - q_1)^{b+1}} + \frac{bm_3}{(q_3 - q_1)^{b+1}}, \\ \lambda q_2 &= -\frac{am_1}{(q_2 - q_1)^{a+1}} + \frac{am_3}{(q_3 - q_2)^{a+1}} - \frac{bm_1}{(q_2 - q_1)^{b+1}} + \frac{bm_3}{(q_3 - q_2)^{b+1}}, \\ \lambda q_3 &= -\frac{am_1}{(q_3 - q_1)^{a+1}} - \frac{am_2}{(q_3 - q_2)^{a+1}} - \frac{bm_1}{(q_3 - q_1)^{b+1}} - \frac{bm_2}{(q_3 - q_2)^{b+1}}.\end{aligned}$$

Definamos $x = q_2 - q_1$, $y = q_3 - q_2$, $x + y = q_3 - q_1$. Ahora las ecuaciones a resolver son

$$\begin{aligned}\lambda x &= -\frac{a(m_1 + m_2)}{x^{a+1}} + am_3 \left(\frac{1}{y^{a+1}} - \frac{1}{(x+y)^{a+1}} \right) - \\ &\quad - \frac{b(m_1 + m_2)}{x^{b+1}} + bm_3 \left(\frac{1}{y^{b+1}} - \frac{1}{(x+y)^{b+1}} \right), \\ \lambda y &= -\frac{a(m_2 + m_3)}{y^{a+1}} + am_1 \left(\frac{1}{x^{a+1}} - \frac{1}{(x+y)^{a+1}} \right) - \\ &\quad - \frac{b(m_2 + m_3)}{y^{b+1}} + bm_1 \left(\frac{1}{x^{b+1}} - \frac{1}{(x+y)^{b+1}} \right).\end{aligned}$$

Se puede eliminar λ y se obtiene una sola ecuación,

$$\begin{aligned}-a(m_1 + m_2) \frac{y}{x^{a+1}} + am_3 \left(\frac{1}{y^a} - \frac{y}{(x+y)^{a+1}} \right) - \\ -b(m_1 + m_2) \frac{y}{x^{b+1}} + bm_3 \left(\frac{1}{y^b} - \frac{y}{(x+y)^{b+1}} \right) = \\ = -a(m_2 + m_3) \frac{x}{y^{a+1}} + am_1 \left(\frac{1}{x^a} - \frac{x}{(x+y)^{a+1}} \right) - \\ -b(m_2 + m_3) \frac{x}{y^{b+1}} + bm_1 \left(\frac{1}{x^b} - \frac{x}{(x+y)^{b+1}} \right).\end{aligned}$$

A primera vista, esta ecuación tiene una solución particular con $x = y$ cuando $m_1 = m_3$. Luego la configuración simétrica respecto al origen de dos masas iguales y la tercera en el origen, corresponde a un equilibrio relativo. Hemos encontrado

que esta configuración es tanto una configuración central como un equilibrio relativo, por lo que se pueden generar soluciones, ya sea reescalando la configuración por un factor que resuelva un problema de fuerza central cuasihomogéneo, o rotando la configuración de manera uniforme alrededor de un eje fijo.

Sin embargo, no es claro que la ecuación anterior pueda resolverse para cualesquiera valores a y b y masas m_1, m_2 y m_3 . Encontrar soluciones que provengan de un equilibrio relativo requiere resolver esta ecuación, lo cual es en general realmente difícil.

Por las características de un problema cuasihomogéneo, es de esperarse que no existan configuraciones centrales ni equilibrios relativos para cualquier conjunto de masas.

4. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS ÓRBITAS DE COLISIÓN TOTAL

Supongamos que para un sistema de n partículas, ocurre colisión total en un tiempo t_0 . El objetivo es conocer el comportamiento del momento de inercia I (1.3), cuando $t \rightarrow t_0^+$.

De (1.4), tenemos que para cualesquiera $i \neq j$,

$$I > \frac{1}{4M} m_i m_j |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2,$$

luego,

$$\begin{aligned} I \frac{(m_i m_j)^{\frac{2}{a}}}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2} &> \frac{1}{4M} (m_i m_j)^{1 + \frac{2}{a}}, \\ \Rightarrow I^{\frac{a}{2}} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^a} &> \frac{1}{(4M)^{\frac{a}{2}}} (m_i m_j)^{\frac{a}{2} + 1}, \\ \Rightarrow I^{\frac{a}{2}} U &> \sum_{i < j}^n \frac{1}{(4M)^{\frac{a}{2}}} (m_i m_j)^{1 + \frac{a}{2}} = \mu_1, \end{aligned}$$

y de la misma manera, obtenemos

$$I^{\frac{b}{2}} V > \sum_{i < j}^n \frac{1}{(4M)^{\frac{b}{2}}} (m_i m_j)^{1 + \frac{b}{2}} = \mu_2.$$

Ahora, de la identidad de Lagrange-Jacobi (1.5), tenemos que

$$\ddot{I} - 2h = (2 - a)U + (2 - b)V,$$

luego,

$$\ddot{I} - 2h > (2 - a)I^{-\frac{a}{2}} \mu_1 + (2 - b)I^{-\frac{b}{2}} \mu_2.$$

Esta desigualdad servirá para calcular una integral, de t_0 a un valor $t > t_0$ pero suficientemente cercano al momento de la colisión total. En este caso, es claro que $\dot{I} > 0$ en el intervalo (t_0, t) . Recordando que en t_0 , $I = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (\ddot{I} - 2h)\dot{I} dt &> \int_{t_0}^t \left((2-a)I^{-\frac{a}{2}}\mu_1 + (2-b)I^{-\frac{b}{2}}\mu_2 \right) \dot{I} dt, \\ &= 2\mu_1 I^{1-\frac{a}{2}} + 2\mu_2 I^{1-\frac{b}{2}}, \\ &= 2I^{1-\frac{b}{2}}(2\mu_1 I^{\frac{b-a}{2}} + \mu_2). \end{aligned}$$

El cálculo de esta integral quedará justificado en lo que sigue. Definamos

$$Q = -hI^{\frac{b}{2}} + \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I^{1-\frac{b}{2}}}.$$

Luego, al derivar tenemos que

$$\frac{d}{dt}(2I^{1-\frac{b}{2}}Q) = \frac{d}{dt}\left(-2hI + \frac{\dot{I}^2}{2}\right) = (-2h + \ddot{I})\dot{I},$$

de donde, aprovechando la estimación anterior, obtenemos que

$$2I^{1-\frac{b}{2}}Q = \int_{t_0}^t (\ddot{I} - 2h)\dot{I} dt > 2I^{1-\frac{b}{2}}(2\mu_1 I^{\frac{b-a}{2}} + \mu_2),$$

y de esto,

$$Q > 2\mu_1 I^{\frac{b-a}{2}} + \mu_2.$$

Podemos aquí tomar el límite cuando $t \rightarrow t_0$, y tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} Q = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I^{1-\frac{b}{2}}} > \mu_2 > 0.$$

En lo subsiguiente, demostraremos además que este límite es finito. Consideremos el momento de inercia (1.3),

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i|^2,$$

derivando con respecto al tiempo,

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i.$$

Ahora, observemos que

$$|\mathbf{q}_i| \frac{d}{dt} |\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_i| \frac{2\mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i}{2(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i)^{1/2}} = \mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i,$$

luego podemos obtener una serie de cotas para \dot{I} :

$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i| \left| \frac{d}{dt} |\mathbf{q}_i| \right| \\
 &= \sum_{i=1}^n \sqrt{m_i} |\mathbf{q}_i| \sqrt{m_i} \frac{d}{dt} |\mathbf{q}_i| \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{q}_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d}{dt} |\mathbf{q}_i| \right)^2 \right)^{1/2} \\
 &= (2I)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d}{dt} |\mathbf{q}_i| \right)^2 \right)^{1/2} \\
 &= (2I)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{(\mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i)^2}{|\mathbf{q}_i|^2} \right)^{1/2} \\
 &= (2I)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_i|} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \right)^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq (2I)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

y de lo anterior tenemos,

$$\dot{I}^2 \leq 2I \left(\sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 \right).$$

Se tiene entonces una cota para la expresión que nos interesa,

$$\frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I^{1-\frac{b}{2}}} \leq \frac{1}{2} I^{\frac{b}{2}} \left(\sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 \right) = I^{\frac{b}{2}} T,$$

donde T es la energía cinética del problema. Se requiere probar que en el momento de colisión t_0 , el límite de $I^{\frac{b}{2}} T$ es finito.

Ahora bien, de la relación de energía, se tiene que

$$T = h + U + V.$$

Tomando en cuenta que en el momento de la colisión total $I = 0$, y al recordar la expresión del momento de inercia dada por (1.4), interesa calcular los límites cuando $t \rightarrow t_0$ de los productos

$$\frac{1}{(2M)^{\frac{b}{2}}} \left(\sum_{i < j} m_i m_j |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \left(\sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^a} \right),$$

y

$$\frac{1}{(2M)^{\frac{b}{2}}} \left(\sum_{i < j}^n m_i m_j |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 \right)^{\frac{b}{2}} \left(\sum_{i < j}^n \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^b} \right).$$

Es claro que para un problema de 2 cuerpos, es decir, cuando sólo hay un sumando, los anteriores productos tienen un límite finito cuando $t \rightarrow t_0$.

Sin embargo, no es claro que lo mismo ocurra para 3 o más cuerpos.

Veamos particularmente el segundo producto para el caso de tres cuerpos colineales. Esto es, las posiciones q_1 , q_2 y q_3 son números reales y las distancias quedan expresadas en valores absolutos. Si éste es el caso, se tiene

$$I = \frac{1}{2M} \left(m_1 m_2 |q_1 - q_2|^2 + m_1 m_3 |q_1 - q_3|^2 + m_2 m_3 |q_2 - q_3|^2 \right),$$

y

$$V = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|^b} + \frac{m_1 m_3}{|q_1 - q_3|^b} + \frac{m_2 m_3}{|q_2 - q_3|^b},$$

por lo que

$$I^{\frac{b}{2}} V = \left(\frac{1}{2M} \right)^{\frac{b}{2}} \left(m_1 m_2 + \left| \frac{q_1 - q_3}{q_1 - q_2} \right|^2 m_1 m_3 + \left| \frac{q_2 - q_3}{q_1 - q_2} \right|^2 m_2 m_3 \right)^{\frac{b}{2}} +$$

+ otros términos similares.

Intuitivamente, puede verse que la existencia de este límite depende de la configuración asintótica de las partículas al momento de la colisión. En el caso de tres cuerpos colineales, puede verse que si las partículas colisionan asintóticamente con distancias mutuas proporcionales, o sea con la razón entre distancias constante, entonces tal límite existe. Sin embargo, este material se sale de lo que puede abarcar este capítulo. Veremos en el Capítulo 3 que para $b \geq 2$, existen colisiones totales de este sistema en las que la configuración asintótica está muy alejada de ser una configuración central o tener razones de distancias constantes, por lo que estos límites no existen en general.

En el caso de que este límite exista, es decir que tengamos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I^{1-\frac{b}{2}}} = \mu > 0,$$

se obtiene que, cerca del momento de colisión total,

$$\dot{I}^2 \sim 4\mu I^{1-\frac{b}{2}},$$

luego

$$\dot{I} \sim 2\sqrt{\mu} I^{(\frac{1}{2})(1-\frac{b}{2})}.$$

Esta es una ecuación diferencial separable, la cual puede resolverse para obtener

$$t - t_0 \sim \frac{2}{2+b} \frac{1}{\sqrt{\mu}} I^{\frac{2+b}{4}}$$

o bien,

$$I \sim A(t - t_0)^{\frac{4}{2+b}}.$$

Este resultado describe de manera cualitativa cómo es que ocurren las colisiones en términos del tiempo, porque fundamentalmente explica con qué orden se dirigen las partículas a colisión total.

Es más, en el caso de un problema de dos cuerpos colineal, si q es la distancia entre las partículas, entonces es básicamente la raíz cuadrada del momento de inercia I , luego se tiene que

$$q \sim A'(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}.$$

Esto coincide con el resultado conocido en el caso newtoniano ($a = 0$ y $b = 1$), de que asintóticamente las partículas se dirigen a colisión con el orden de $(t - t_0)^{2/3}$.

Finalizamos este capítulo enunciando lo anterior en una proposición que usaremos posteriormente en el Capítulo 3.

Proposición 5. *Si la configuración asintótica al momento de la colisión total corresponde a una configuración central, o bien con distancias mutuas proporcionales, entonces el orden de la colisión es del tipo*

$$A(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}.$$

Capítulo 2

El Problema cuasihomogéneo de dos cuerpos

El Problema de dos cuerpos cuasihomogéneo considera el movimiento de dos partículas puntuales sujetas a la fuerza debida a un potencial cuasihomogéneo. Este problema puede reducirse a un Problema de fuerza central con potencial cuasihomogéneo, y al igual que en un Problema de Kepler, se encuentra que el movimiento ocurre en un plano, y se tienen dos integrales independientes: la de energía y la de momento angular constante. Por lo tanto el problema es integrable.

En este capítulo, se efectuará la explosión de McGehee a un problema de dos cuerpos en el plano, con potencial cuasihomogéneo, con el fin de conocer el movimiento cerca de colisión de las partículas. En este caso, por ser un problema integrable podremos conocer en estas coordenadas, de manera cualitativa, el flujo global del sistema.

Esta aproximación geométrica al problema, servirá además para comprender la regularización por bloques de la colisión. Esto se estudiará en la segunda parte del capítulo, que está dedicada a los diferentes conceptos de regularización, y su aplicación al problema cuasihomogéneo.

1. EXPLOSIÓN DE MCGEHEE

El movimiento de dos partículas debido a un potencial cuasihomogéneo se puede reducir a un problema de fuerza central en el plano con potencial dado por

$$W = \frac{1}{|\mathbf{Q}|^a} + \frac{\mu}{|\mathbf{Q}|^b}, \quad \mu > 0, \quad 0 \leq a < b.$$

La ecuación de movimiento es pues,

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \nabla W(\mathbf{Q}) = -\frac{a\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^{a+2}} - \frac{b\mu\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^{b+2}}, \quad (2.1)$$

con $\mathbf{Q} = (x, y)^T$.

En las coordenadas (x, y) , las ecuaciones tienen la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{ax}{(x^2 + y^2)^{\frac{a+2}{2}}} - \frac{b\mu x}{(x^2 + y^2)^{\frac{b+2}{2}}}, \quad y \\ \ddot{y} &= -\frac{ay}{(x^2 + y^2)^{\frac{a+2}{2}}} - \frac{b\mu y}{(x^2 + y^2)^{\frac{b+2}{2}}},\end{aligned}$$

y la relación de energía es

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - W = h.$$

Al tomar coordenadas polares (r, θ) definidas en la forma usual:

$$r^2 = |\mathbf{Q}|^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r}, \\ \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{a}{r^{a+1}} - \frac{b\mu}{r^{b+1}},\end{aligned}$$

y la relación de energía es

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r^a} - \frac{\mu}{r^b} = h.$$

Observemos que en la ecuación para θ , las variables son separables, luego podemos realizar una integración con respecto al tiempo para obtener la expresión de la integral de momento angular constante,

$$r^2\dot{\theta} = c.$$

Expresaremos el sistema en coordenadas de McGehee (r, θ, v, u) , donde r y θ son las coordenadas polares usuales en el espacio de configuración y donde v y u se obtienen por un reescalamiento por $r^{\frac{b}{2}}$ de las velocidades radial y tangencial en estas coordenadas:

$$v = r^{\frac{b}{2}}\dot{r}, \quad y \quad u = r^{\frac{b}{2}+1}\dot{\theta}.$$

Las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas son

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^{-\frac{b}{2}}v, \\ \dot{v} &= r^{-\frac{b}{2}-1}\left(\frac{b}{2}v^2 + u^2 - ar^{b-a} - b\mu\right), \\ \dot{\theta} &= r^{-\frac{b}{2}-1}u, \\ \dot{u} &= r^{-\frac{b}{2}-1}\left(\frac{b}{2} - 1\right)uv,\end{aligned} \tag{2.2}$$

con la relación de energía dada por

$$\frac{1}{2}(v^2 + u^2) - r^{b-a} - \mu = hr^b. \quad (2.3)$$

La expresión para el momento angular queda como

$$r^{1-\frac{b}{2}}u = c. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones anteriores tienen una singularidad en $r = 0$. Sin embargo, esta singularidad se elimina al tomar un reescalamiento de tiempo de la forma

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{\frac{b}{2}+1},$$

para con esto obtener como ecuaciones las siguientes,

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= \frac{b}{2}v^2 + u^2 - ar^{b-a} - b\mu, \\ \theta' &= u, \\ u' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)uv, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde (') significa ahora derivación con respecto a τ . En este sistema hemos expresado el problema en Coordenadas de McGehee.

Estas ecuaciones y la relación de energía ahora pueden extenderse a $r = 0$ de manera diferenciable si $b - a \geq 1$. Por lo tanto el flujo es C^1 en estos casos, y es analítico si $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Con el objeto de garantizar unicidad de soluciones y un flujo diferenciable, de ahora en adelante nos restringiremos a los casos $b - a \geq 1$.

Se observa además que $r = 0$ es invariante bajo el flujo, puesto que $r' = 0$ si $r = 0$.

Se define la variedad de colisión total como

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) : r = 0, \theta \in [0, 2\pi], \frac{1}{2}(v^2 + u^2) = \mu\}. \quad (2.6)$$

Esta variedad corresponde a un toro de dimensión 2 en \mathbb{R}^4 , y el flujo en este toro está determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} v' &= \frac{b}{2}v^2 + u^2 - b\mu, \\ \theta' &= u, \\ u' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)uv. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Obsérvese que en Λ , al usar la relación de energía (2.3) con $r = 0$, se obtiene que

$$v' = \left(1 - \frac{b}{2}\right)u^2,$$

luego se tiene que para $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} \text{si } b < 2 & \quad \text{entonces } v' > 0, \\ \text{si } b > 2 & \quad \text{entonces } v' < 0, \\ \text{y si } b = 2 & \quad \text{entonces } v' = 0. \end{aligned}$$

Como para $u = 0$ se cumple que $v^2 = 2\mu$, entonces en este caso el punto es un punto de equilibrio. Se tiene pues que para $b \neq 2$, el flujo sobre Λ es casi-gradiente respecto a la coordenada v , es decir, el flujo crece para $b < 2$ y decrece para $b > 2$ a lo largo de soluciones que no son punto de equilibrio, lo cual no ocurre para $b = 2$, y este es el único caso.

El flujo sobre Λ se puede ver como un flujo lineal en el toro. Si tomamos la variable angular ϕ dada por

$$u = \sqrt{2\mu} \cos \phi \quad v = \sqrt{2\mu} \sin \phi,$$

encontramos que

$$\frac{d\phi}{d\theta} = 1 - \frac{b}{2}.$$

Al “desdoblar” el toro, el flujo se ve como lo ilustra la Fig. 2.1, dependiendo del valor de b .

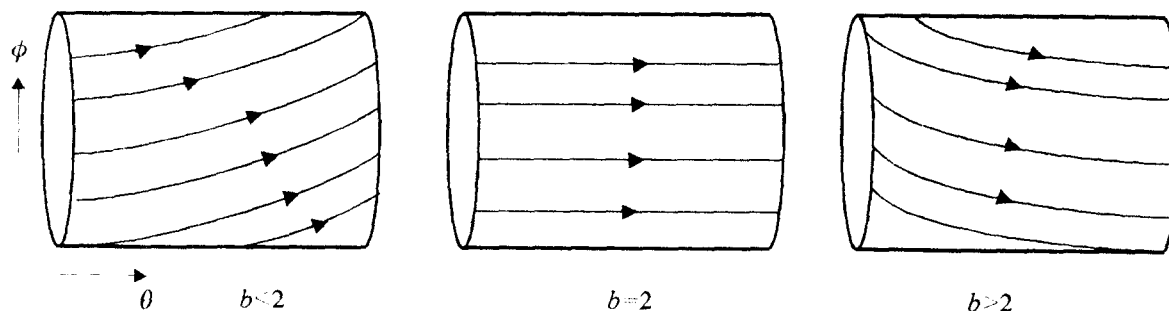


Fig. 2.1. Flujo sobre la variedad de colisión Λ

Observando las ecuaciones que determinan el flujo global (2.5), encontramos que los únicos puntos de equilibrio están sobre la variedad de colisión total, los cuales

tienen coordenadas

$$r = 0, \quad v = \pm\sqrt{2\mu}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad u = 0.$$

Esto corresponde a dos círculos de puntos de equilibrio en el toro. Se encuentra que, para $b \neq 2$, estos puntos de equilibrio son normalmente hiperbólicos; es decir, existe un valor propio cero correspondiente a la subvariedad de puntos de equilibrio, y los dos valores propios restantes tienen parte real diferente de cero.

Más exactamente: fijémonos en un punto de equilibrio de la forma $(r, v, \theta, u) = (0, \sqrt{2\mu}, \theta_0, 0)$; los valores propios que corresponden a la linealización del flujo son

$$\lambda_1 = \sqrt{2\mu}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \text{y} \quad \lambda_3 = \left(\frac{b}{2} - 1\right)\sqrt{2\mu}.$$

λ_1 corresponde a la dirección r , es decir, la que no está sobre Λ , luego para cualquier valor de a y b existe una variedad inestable de dimensión 1 en esta dirección. El valor propio 0 corresponde a la subvariedad de los puntos de equilibrio. Para $b = 2$ se observa que $\lambda_3 = 0$, por lo cual en este caso los puntos de equilibrio no son normalmente hiperbólicos; mientras que para $b < 2$, hay una variedad estable sobre Λ de dimensión 1, y para $b > 2$, hay una variedad inestable de dimensión 1.

Los puntos de equilibrio de la forma $(r, v, \theta, u) = (0, -\sqrt{2\mu}, \theta_0, 0)$ se pueden estudiar de manera análoga.

2. FLUJO GLOBAL

Regresemos a las ecuaciones en coordenadas de McGehee (2.5). Observemos que estas ecuaciones tienen la siguiente simetría,

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r, \\ v &\rightarrow -v, \\ \theta &\rightarrow \theta, \\ u &\rightarrow -u, \\ \tau &\rightarrow -\tau. \end{aligned}$$

Esto nos dice que el flujo es reversible; es decir, que si se conoce una solución, entonces la órbita dada por lo simetría anterior es una solución tomando $-\tau$ en vez de τ .

Ahora usaremos la integral de momento angular constante (2.4) para conocer el flujo global del sistema.

Consideremos una sección transversal de las superficies de energía constante dadas por (2.3), tomando $\theta = \theta_0$.

Si $b \neq 2$, podemos despejar r de la ecuación (2.4),

$$r = \left(\frac{c}{u}\right)^{\frac{2}{2-b}},$$

y de esta forma, r puede ser eliminada de la relación de energía.

Hagamos esto por casos.

- Si $b < 2$, entonces de la relación de energía tenemos

$$v^2 = 2\mu + 2\left(\frac{c}{u}\right)^{\frac{2(b-a)}{2-b}} + 2h\left(\frac{c}{u}\right)^{\frac{2b}{2-b}} - u^2. \quad (2.8)$$

De esta ecuación, podemos conocer la proyección de las superficies de energía constante sobre la región transversal considerada. Esto se muestra en la Fig. 2.2.

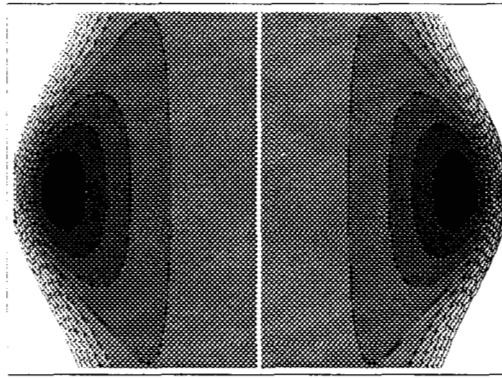


Fig. 2.2. Proyección de las superficies de energía y momento angular constantes, sobre $\theta = \theta_0$

La proyección de la variedad de colisión total Λ es la circunferencia de radio $\sqrt{2\mu}$.

Se observa que la única forma de acceder a Λ es a través de las variedades estable o inestable, según el caso, de los puntos de equilibrio; es decir, con $u = 0$. Esto implica que la colisión binaria ocurre sólo con momento angular $c = 0$. Con esta característica, existe una órbita heteroclínica, para la cual $u = 0$, que parte de colisión y termina en colisión; esta órbita corresponde a movimiento colineal, con $\theta = \theta_0$.

Para $h < 0$, si $v = 0$, existe un valor de c para el cual la parte derecha de la ecuación (2.8) tiene una sola raíz. Esto corresponde a los puntos que cumplen

con $v' = 0$ y r, u constantes. Así que al pegar la variable θ , se obtienen órbitas periódicas.

Las curvas cerradas en la figura corresponden a una foliación por toros, que se ve al considerar la variable θ . Con el propósito de estudiar la naturaleza de las órbitas en alguna de estas superficies invariantes, calcularemos la aplicación de Poincaré asociada.

Tomemos como sección transversal a $v = 0$. En este caso el flujo es efectivamente transversal excepto en los casos en que se satisfaga la ecuación

$$v' = u^2 - a \left(\frac{c}{u} \right)^{\frac{2(b-a)}{2-b}} - b\mu = 0.$$

Tomemos un punto para el cual $v = 0$, $u = u_0$ y $\theta = \theta_0$, y seguiremos el flujo hasta otro punto en el que $v = 0$, $u = u_1$ y $\theta = \theta_1$. En particular, u_0 y u_1 son raíces sucesivas de la ecuación (2.8) al poner $v = 0$. La aplicación de Poincaré queda definida por $\theta_0 \mapsto \theta_1$.

Tenemos de las ecuaciones de movimiento (2.5),

$$\frac{d\theta}{du} = -\left(\frac{2}{2-b} \right) \frac{1}{v},$$

y sustituyendo v a partir de (2.8), se obtiene que

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{2}{2-b} \frac{1}{\sqrt{2\mu + 2 \left(\frac{c}{u} \right)^{\frac{2(b-a)}{2-b}} + 2h \left(\frac{c}{u} \right)^{\frac{2b}{2-b}} - u^2}}.$$

Esta ecuación se puede integrar desde u_0 hasta u_1 . Podemos decir entonces que el movimiento es periódico si el resultado de esta integral es un múltiplo racional de 2π , y será cuasiperiódico en otro caso. Calcular esta integral en general no es posible, por tanto dejaremos este resultado sólo indicado de esta forma.

Si $h = 0$, el movimiento ya es no acotado, consistente en órbitas que llegan y regresan al infinito sin pasar por colisión.

En el resto de las superficies invariantes ($h > 0$), el movimiento es no acotado.

- Si $b = 2$, de la ecuación (2.4) tenemos $u = c$; es decir, u es el valor del momento angular constante.

Nos concentraremos en el caso analítico, es decir, con $a = 1$. Este caso se conoce como el Problema de Maneff, que fue estudiado con detalle en (Delgado, D., L., M., M. P., S., 1996).

Las ecuaciones de movimiento toman la siguiente forma,

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= v^2 - r + c^2 - 2\mu, \\ \theta' &= c, \\ u' &= 0. \end{aligned}$$

La relación de energía es

$$v^2 = 2r + 2hr^2 + 2\mu - c^2. \quad (2.9)$$

Al poner $r = 0$ en esta ecuación, se obtiene la proyección de la variedad de colisión total a una sección $\theta = \theta_0$, que corresponde a la circunferencia de radio $\sqrt{2\mu}$. De las ecuaciones se ve que esta circunferencia está ahora formada por puntos de equilibrio en esta proyección. En particular, si consideramos la variable θ , vemos que la variedad de colisión total está foliada por órbitas periódicas a excepción de los círculos de puntos de equilibrio correspondientes a $u = 0$ y $v = \pm\sqrt{2\mu}$.

Usando la relación de energía en la ecuación para v' , se tiene que $v' = r + 2hr^2$, luego si $r \approx 0$, entonces $v' > 0$ para cualquier valor de la energía. Para mayores valores de r , el signo de v' corresponde al signo de la energía h .

En la ecuación (2.9) se observa que el lado derecho es no negativo, lo que impone restricciones para r en el caso de que h sea negativo. Además se tiene que si $r \rightarrow 0$, entonces debe ser $2\mu \geq c^2$. Se puede observar esto también en la Fig. 2.3: las órbitas con momento angular cumpliendo $2\mu \geq c^2$, son órbitas que nacen y/o mueren en colisión.

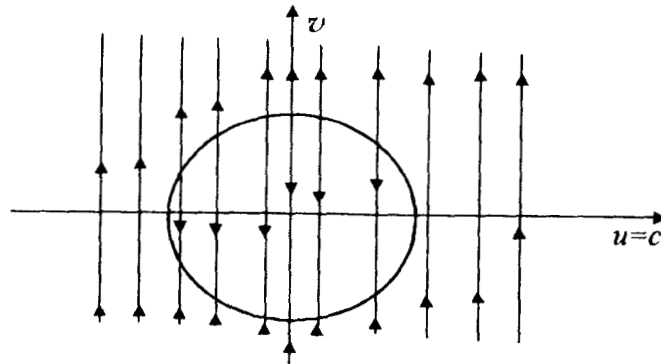


Fig. 2.3. Proyección de las superficies de energía y momento angular constantes sobre $\theta = \theta_0$, con $b=2$.

Podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 6. *En el caso $b = 2$, en particular en el Problema de Maneff, el conjunto de condiciones iniciales que llegan y/o salen de colisión tiene medida positiva.*

Si $h < 0$, escribimos la ecuación (2.9) de la siguiente forma,

$$v^2 + c^2 - 2h\left(r + \frac{1}{2h}\right)^2 = 2\mu - \frac{1}{2h},$$

la cual representa una porción de esfera en las coordenadas (r, v, c) si recordamos que $r \geq 0$. La frontera de esta esfera truncada se encuentra en $r = 0$, que es la circunferencia $v^2 + c^2 = 2\mu$ correspondiente a la variedad de colisión Λ (Ver Fig. 2.4.a). Esta superficie está foliada por curvas en las que el momento angular c se mantiene constante.

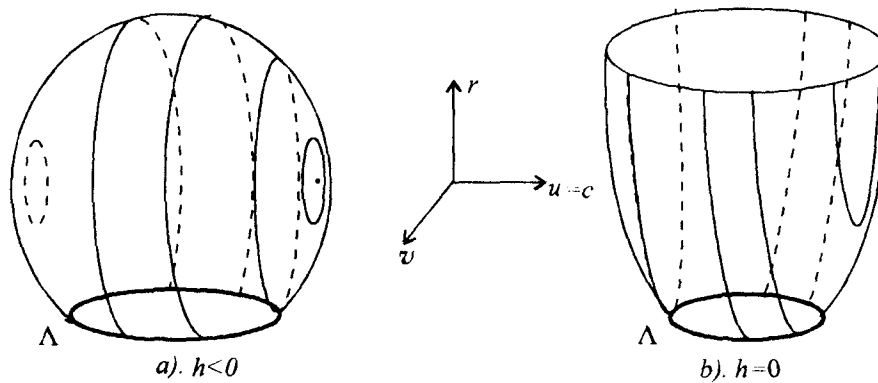


Fig. 2.4. Proyección en las variables (r, v, u) de las superficies invariantes, en el caso $b=2$.

Cuando $c = 0$, la curva correspondiente es un arco de circunferencia, la cual al pegar la variable θ corresponde a una superficie donde están las órbitas colineales que salen y llegan a colisión, puesto que estas órbitas salen y llegan a la variedad de colisión Λ .

En general, cuando $c^2 < 2\mu$ se tienen arcos de circunferencia que salen y llegan a Λ . Al considerar la variable θ , se generan superficies que están llenas de órbitas heteroclínicas, que salen de colisión y llegan a colisión. El hecho de que el momento angular c es distinto de 0, indica que el movimiento puede ser giratorio y aún así colisionar.

Si $c = \pm\sqrt{2\mu}$, se tienen dos circunferencias que tocan a Λ en un punto de equilibrio. Luego al pegar la variable angular θ se generan órbitas homoclínicas que salen y llegan a colisión.

Las circunferencias en la Fig. 2.4.a, con $2\mu < c^2 < 2\mu - 1/2h$, corresponden a toros al considerar el ángulo θ , los cuales están foliados por órbitas que pueden ser periódicas o cuasiperiódicas. Físicamente, las órbitas periódicas corresponden a elipses, o bien a elipses que preceden y que se cierran después de cierto número de rotaciones. De hecho, estas órbitas fueron descubiertas por Newton. Las órbitas cuasiperiódicas son elipses que preceden y que nunca se cierran, las cuales llenan densamente un anillo.

Finalmente consideremos los puntos con coordenadas $r = -1/2h$, $v = 0$, y $c = \pm\sqrt{2\mu - 1/2h}$. De las ecuaciones de movimiento se obtiene que son dos puntos de equilibrio en esta proyección, fuera de la variedad de colisión. Estos puntos corresponden a órbitas periódicas al pegar la variable θ .

Si $h = 0$, la ecuación (2.9) toma la forma

$$v^2 + c^2 = 2r + 2\mu,$$

que geoméricamente representa un paraboloido truncado porque $r \geq 0$, esto en las variables (r, v, c) . Como c es el momento angular constante, el paraboloido está foliado por las curvas mostradas en la Fig. 2.4.b.

Los arcos de parábola que salen o llegan a Λ corresponden a órbitas que salen o llegan a colisión, y que "viven" en la superficie generada al considerar la variable θ . Hay dos parábolas que tocan a Λ , las cuales generan superficies en las que las órbitas llegan a colisión y salen de colisión. También hay parábolas completas que corresponden a movimientos en los que no se llega a colisión. Todas estas órbitas tienden o llegan del infinito con velocidad asintótica cero.

Si $h > 0$, la relación de energía es

$$v^2 + c^2 - 2h\left(r + \frac{1}{2h}\right)^2 = 2\mu - \frac{1}{2h},$$

y dependiendo de los valores de h y μ , es la forma de estas superficies, las cuales se muestran en la Fig. 2.5.

Si $2\mu - \frac{1}{2h} < 0$, la ecuación representa un hiperboloido de una hoja intersectado con $r \geq 0$, que está foliado por arcos de ramas de hipérbolas correspondientes a tomar c constante. Si $2\mu - \frac{1}{2h} = 0$, la ecuación representa un cono intersectado con $r \geq 0$, que está foliado nuevamente por arcos de ramas de hipérbolas o por

rectas. Si $2\mu - \frac{1}{2h} > 0$, se tiene una sola hoja de un hiperboloide de dos hojas intersectado con $r \geq 0$, foliado de manera similar a los casos anteriores. Las órbitas en estas superficies corresponden a órbitas que llegan o salen de colisión y se van al infinito, pero ahora con velocidad asintótica positiva.

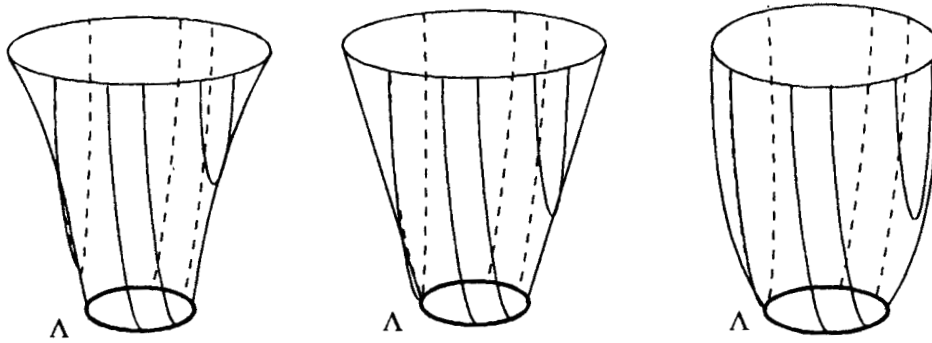


Fig. 2.5. Proyección en las variables (r, v, u) de las superficies invariantes, en el caso $b=2$, con $h<0$.

- Si $b > 2$, al eliminar r de la relación de energía se tiene que

$$v^2 = 2\mu + 2 \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{2(b-a)}{b-2}} + 2h \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{2b}{b-2}} - u^2. \quad (2.10)$$

La gráfica de v^2 en función de u es como se muestra en la Fig. 2.6.

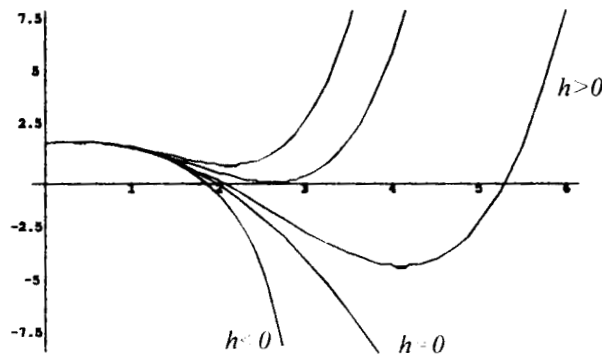


Fig. 2.6. Gráfica de v^2 en función de u .

Como sólo debe tomarse la parte no negativa de las curvas, se observa que para algunos valores de $h > 0$, la superficie de energía consiste en dos regiones disconexas, una que es acotada y otra que no lo es. Luego, dependiendo de las condiciones iniciales, el movimiento puede ser acotado mientras en otros casos el movimiento es no acotado. Esto conduce a enunciar el siguiente resultado:

Proposición 7. *Para $b > 2$, existen valores de la energía h positivos, para los cuales se obtienen órbitas acotadas, que empiezan en colisión y terminan en colisión.*

Este tipo de movimientos no se observan en un problema clásico, puesto que en el caso newtoniano el movimiento es acotado sólo si $h < 0$.

Además, en el problema cuasihomogéneo puede ocurrir colisión con momento angular c distinto de cero, lo cual implica que las colisiones no necesariamente son colineales.

De la ecuación (2.10) se puede obtener la proyección de las superficies de energía constante sobre la región transversal $\theta = \theta_0$. Esto se ve en la Fig. 2.7.

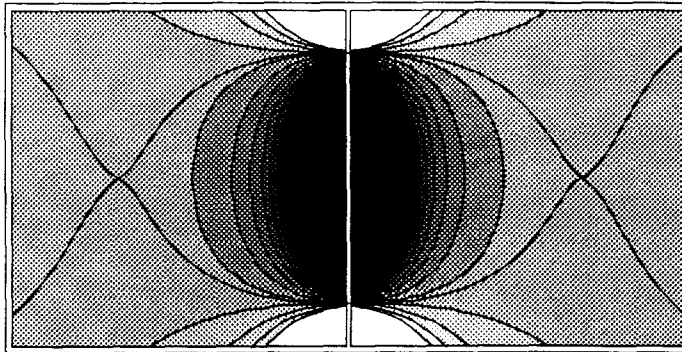


Fig. 2.7. Proyección de las superficies invariantes en las coordenadas (u, v) , para el caso $b > 2$.

En esta proyección se observa que podemos tomar todo un conjunto abierto de condiciones iniciales para las cuales la órbita terminará y/o comenzará en puntos de equilibrio sobre la variedad de colisión total. De esto se concluye el siguiente resultado:

Proposición 8. *Para $b > 2$, el conjunto de condiciones iniciales que producen órbitas de colisión tiene medida positiva.*

Otra característica del flujo la encontraremos al observar las ecuaciones de movimiento en esta proyección:

$$v' = \frac{b}{2}v^2 + u^2 - a \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{2(b-a)}{b-2}} - b\mu,$$

$$u' = \left(\frac{b}{2} - 1\right)uv.$$

Podemos encontrar un punto de equilibrio de este sistema observando que si ponemos $v = 0$, entonces $v' = u^2 - a \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{2(b-a)}{b-2}} - b\mu$ y $u' = 0$. En la ecuación para v' , se puede fijar un valor de c para el cual exista una solución u_0 de $v' = 0$. Este valor aún tiene que satisfacer la relación de energía (2.10), pero si en esta ecuación se sustituye u_0 y $v = 0$, se encontrará un único valor $h > 0$ que la satisfaga. Así hemos obtenido un punto de equilibrio $(u_0, 0)$ en esta proyección que está fuera de Λ . Al considerar la variable θ , este punto de equilibrio corresponde a una órbita periódica circular en el flujo global.

3. REGULARIZACIÓN DE COLISIONES BINARIAS

Decimos que una solución de una ecuación diferencial tiene una singularidad en σ , si el intervalo máximo en el que está definido la solución tiene la forma $(-\infty, \sigma)$ o (σ, ∞) , con σ finito.

Sucede que, cuando ocurre colisión entre dos partículas, las ecuaciones de movimiento dejan de tener sentido, y entonces se obtiene una singularidad de la solución.

En términos generales, el concepto de regularización puede entenderse como el procedimiento mediante el cual se puede continuar una órbita después de colisión. En esta sección, estudiaremos los diferentes sentidos en los que se puede hablar de regularización.

3.1. Regularización en un problema colineal. Consideremos dos partículas restringidas a movimiento sobre una línea, sujetas a la fuerza debida a un potencial cuasihomogéneo. Si $q > 0$ es la distancia entre las dos partículas, y p es el momento asociado, las ecuaciones de movimiento pueden reducirse a las siguientes:

$$\dot{q} = p, \tag{2.11}$$

$$\dot{p} = -\frac{a}{q^{a+1}} - \frac{\mu b}{q^{b+1}}, \quad b \geq 1, \quad b - a \geq 1, \tag{2.12}$$

con la relación de energía dada por

$$\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{q^a} - \frac{\mu}{q^b} = h.$$

Este problema tiene la siguiente simetría:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow q, \\ p &\rightarrow -p, \\ t &\rightarrow -t, \end{aligned}$$

luego, si $(q, p)(t)$ es una solución, entonces $(q, -p)(-t)$ también es una solución.

La singularidad debida a colisión $q = 0$ se elimina realizando un cambio de coordenadas y de tiempo del tipo usado en (Szebehely, 1967), dado por

$$u = q, \quad v = pq^{\frac{b+1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{dt}{d\tau} = u^{\frac{b+1}{2}}.$$

Las ecuaciones en estas variables después de hacer el reescalamiento de tiempo son

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= (b+1)hu^b + (b-a+1)u^{b-a} + \mu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

y la ecuación de la energía es

$$\frac{1}{2}v^2 = hu^{b+1} + u^{b-a+1} + \mu u.$$

De manera esquemática, el retrato fase de este problema se muestra en la Fig. 2.8.

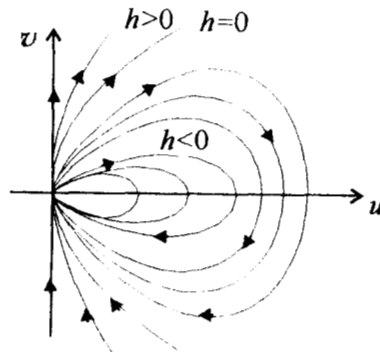


Fig. 2.8. Retrato fase del problema colineal de dos cuerpos regularizado.

Las ecuaciones (2.13) corresponden a un flujo diferenciable en el origen, que es el punto correspondiente a la colisión y no es un punto de equilibrio. La continuación de la órbita que pasa por colisión coincide con la simetría del problema.

Se observa que para $h < 0$ el movimiento es acotado, en el que las órbitas primero se dirigen a colisión, chocan, y después el movimiento es simétrico al salir de colisión.

Para $h \geq 0$, el movimiento es no acotado, consistente en una órbita que viene del infinito, colisiona y escapa al infinito de manera simétrica.

Este tipo de movimiento simétrico respecto al punto de colisión, corresponde a una colisión elástica. Podemos afirmar entonces que la colisión binaria en un movimiento colineal es regularizable para cualquier problema cuasihomogéneo.

3.2. Regularización por ramas. Se expondrá aquí la definición usual de regularización de soluciones, y se darán los valores de b para los cuales el problema colineal de dos cuerpos con potencial cuasihomogéneo es regularizable en este sentido.

Definición 9. Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de una ecuación diferencial tales que ψ_2 comienza en una singularidad en σ y ψ_1 termina en una singularidad en σ . Supongamos que existe una función Ψ definida en el campo de los números complejos, analítica, multivaluada que tiene una rama en σ y que extiende tanto a ψ_1 como a ψ_2 . Entonces decimos que ψ_1 es una extensión de rama de ψ_2 en σ y que ψ_2 es extensión de rama de ψ_1 en σ .

Definición 10. Una solución de una ecuación diferencial ϕ que termina o comienza en singularidad en σ es regularizable por ramas si tiene una única extensión de rama en σ .

Consideremos nuevamente un problema colineal cuasihomogéneo con ecuaciones de movimiento (2.11).

Vimos en el Capítulo 1, Sección 4, que la distancia de separación de las partículas tiene un comportamiento asintótico cerca del momento de colisión t_0 dado por

$$q \sim A(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}, \quad t > t_0.$$

Si ponemos

$$\frac{2}{2+b} = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros positivos, primos relativos con $m < n$, la función $A(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}$ tiene una extensión de rama para $t < t_0$ si y sólo si n es un número impar. La función analítica que da la extensión está dada por

$$\Psi(z) = Az^{\frac{m}{n}};$$

la solución que comienza en singularidad es $\psi_1(t) = A[(t - t_0)^{\frac{1}{n}}]^m$, con $t > t_0$, y la solución que termina en singularidad es $\psi_2(t) = A[-(t_0 - t)^{\frac{1}{n}}]^m$, con $t < t_0$. Ambas son ramas reales de la función Ψ .

Esto nos dice que la singularidad es regularizable por ramas siempre y cuando n sea impar. Además, si m es par, la extensión consiste en una reflexión, puesto que el movimiento antes y después de colisión son simétricos; y si m es impar, la extensión corresponde a una transmisión, en la que el movimiento continúa en la misma dirección después de colisión (Ver Fig. 2.9).

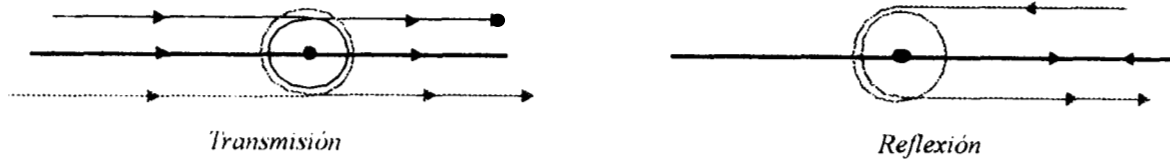


Fig. 2.9. Posibles continuaciones de órbitas de colisión binaria.

Una diferencia sustancial entre la regularización por ramas y la hecha en el punto anterior 3.1, es que la continuación de la órbita no coincide con la simetría del problema, sino que sólo toma en cuenta la dependencia analítica del tiempo.

3.3. Regularización por bloques. En lo que sigue se describirá una regularización geométrica de la singularidad debida a colisión; es decir, la continuación de la órbita de colisión se hace de acuerdo a la forma de las órbitas cercanas. Las ideas que se exponen aquí serán una generalización a problemas cuasihomogéneos de las expuestas en (McGehee,1981), que consisten en un tratamiento un poco distinto a las referentes a bloques aislantes dadas por (Conley,Easton,1971) y regularización por cirugía (Easton,1971).

Sea M una variedad diferenciable, y $\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ un flujo en M .

Un subconjunto $\Lambda \subset M$ es invariante si $\psi(\Lambda, \mathbb{R}) = \Lambda$.

Definición 11. Sea $\Lambda \subset M$ compacto. Se dice que Λ es aislado si existe un conjunto abierto U tal que $\Lambda \subset U$ y

$$\psi(x, \mathbb{R}) \subset U \Rightarrow x \in \Lambda.$$

A este conjunto abierto U se le llama vecindad aislante de Λ .

Sea B un subconjunto compacto de M con interior no vacío y supongamos que $b = \partial B$ es una subvariedad suave de M .

Sean

$$\begin{aligned} b^+ &= \{x \in b : \psi(x, (-\varepsilon, 0)) \cap B = \emptyset \text{ para algún } \varepsilon > 0\}, \\ b^- &= \{x \in b : \psi(x, (0, \varepsilon)) \cap B = \emptyset \text{ para algún } \varepsilon > 0\}, \\ \tau &= \{x \in b : \frac{d\psi}{dt}(x, 0) \text{ es tangente a } b\}. \end{aligned}$$

b^+ puede verse como el conjunto de puntos en b para los cuales la órbita que pasa por ese punto está entrando a B . Análogamente b^- serán los puntos para los cuales la órbita está saliendo de B .

Definición 12. B es un bloque aislante si $\tau = b^+ \cap b^-$.

Definición 13. Si Λ es un conjunto invariante aislado, y B es un bloque aislante, se dice que B aísla a Λ si $\text{int}B$ es una vecindad aislante de Λ .

El siguiente teorema, probado por Conley y Easton (1971), relaciona la existencia entre conjuntos invariantes aislados y bloques aislantes.

Teorema 14. Si Λ es un conjunto invariante aislado, existe un bloque aislante que aísla a Λ . Si B es un bloque aislante, existe un conjunto invariante aislado, posiblemente vacío que es aislado por B .

Definimos ahora,

$$\begin{aligned} a^+ &= \{x \in b^+ : \psi(x, [0, \infty)) \subset B\}, \\ a^- &= \{x \in b^- : \psi(x, (-\infty, 0]) \subset B\}. \end{aligned}$$

a^+ representa el conjunto de puntos en b para los cuales la órbita entra a B y permanece ahí para todo tiempo futuro. Análogamente, a^- consiste en los puntos para los que la órbita está saliendo de B , pero para todo tiempo anterior estaba en él. Observemos que si $x \in b^+ \setminus a^+$, entonces existe $t > 0$ tal que $\psi(x, t) \notin B$.

Definimos

$$T(x) = \inf\{t > 0 : \psi(x, t) \notin B\}.$$

$T(x)$ es el tiempo transcurrido para una órbita en $b^+ \setminus a^+$ antes de su primer salida de B .

Con esto definimos una transformación a través del bloque B :

$$\begin{aligned} \Psi : b^+ \setminus a^+ &\longrightarrow b^- \\ x &\longrightarrow \phi(x, T(x)). \end{aligned}$$

El siguiente resultado fue probado por Conley y Easton (1971) y aquí lo enunciamos sin demostración.

Teorema 15. Si B es un bloque aislante, entonces $\Psi : b^+ \setminus a^+ \longrightarrow b^- \setminus a^-$ es un difeomorfismo.

Definición 16. Un bloque aislante B es trivializable si Ψ se extiende de manera única a un difeomorfismo $b^+ \longrightarrow b^-$.

Conley (1978) probó el siguiente resultado:

Lema 17. Sea Λ un conjunto invariante aislado, y sean B_1 y B_2 bloques aislantes de Λ . Entonces B_1 es trivializable si y sólo si B_2 lo es.

Entonces la siguiente definición no depende del bloque que se use:

Definición 18. Un conjunto invariante aislado es trivializable si existe un bloque aislante trivializable que lo aisle.

Existe una manera analítica de definir un bloque aislante, dada por el siguiente lema (Wilson, Yorke, 1973).

Lema 19. Sea $L : M \rightarrow [0, \infty)$ una función diferenciable. Sea $L^* = M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L^*(x, t) = L(\psi(x, t))$, y sean

$$\dot{L}(x) = \dot{L}^*(x, 0), \quad \ddot{L}(x) = \ddot{L}^*(x, 0).$$

Sea $\delta_0 > 0$. Supongamos que se cumple

$$DL(x) \neq 0, \quad \text{para } 0 < L(x) \leq \delta_0, \\ \text{Si } 0 < L(x) \leq \delta_0 \text{ y } \dot{L}(x) = 0, \quad \text{entonces } \ddot{L}(x) > 0.$$

Entonces $\Lambda = L^{-1}(0)$ es un conjunto invariante aislado y $L^{-1}([0, \delta])$ es un bloque aislante de Λ para $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Regresemos ahora al Problema de dos cuerpos cuasihomogéneo, y veremos que podremos construir un bloque aislante trivializable de la variedad de colisión total Λ .

En lo que sigue construiremos un bloque aislante de la variedad de colisión Λ (2.6) obtenida al usar las coordenadas de McGehee. En estas coordenadas y al reescalar el tiempo obtuvimos un flujo diferenciable cuyas ecuaciones son (2.5).

El flujo sobre Λ está caracterizado básicamente por el valor de b . Y vimos en la Sección 2 que el flujo global también puede caracterizarse también por el valor de b . De lo discutido en esa sección tenemos la siguiente proposición:

Proposición 20. *Para $b = 2$ y $b > 2$ no existe un bloque aislante de Λ , por tanto, la colisión no es regularizable por bloques.*

Demostración Si $b = 2$, puede observarse de la ecuación (2.9), que todas superficies de energía constante y con momento angular cumpliendo $c^2 \leq 2\mu$, llegan a la variedad de colisión Λ . Luego todas las órbitas en estas superficies tocan a Λ , por lo cual es imposible obtener una vecindad aislante de Λ . Esto puede verse también en la Fig. 2.3.

Sucede algo similar si $b > 2$. Se puede ver en la ecuación (2.10), que todas las superficies de energía invariante se intersectan con Λ , luego no podemos encontrar un conjunto abierto que lo aisle (ver Fig. 2.7).

Por tanto, el conjunto invariante Λ no es aislado, y usando el Teorema 14 concluimos que no existe un bloque aislante para Λ .

En lo que sigue nos concentraremos en el caso $b < 2$.

Consideraremos $M = \{(r, v, \theta, u) : \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - r^{b-a} - \mu = hr^b\}$ para un nivel de energía arbitrario h .

Entonces $\Lambda = \{x \in M : r = 0\}$ es un conjunto compacto.

El bloque aislante quedará definido por la siguiente proyección:

$$\begin{aligned} L : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (r, v, \theta, u) &\rightarrow r. \end{aligned}$$

y ponemos $B(h, \delta) = \{x \in M : L(x) \leq \delta\}$.

Lema 21. *Para $b < 2$, dada h , existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(h, \delta)$ es un bloque aislante de Λ si $0 \leq \delta \leq \delta_0$.*

Dem. Estudiemos $DL(x)$, con x en el espacio tangente de M , dado por

$$TM = \{(\dot{r}, \dot{v}, \dot{\theta}, \dot{u}) : u\dot{u} + v\dot{v} - (b-a)r^{b-a-1}\dot{r} = hbr^{b-1}\dot{r}\}.$$

Como $DL(x) = \dot{r}$, se tiene que si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, entonces $\dot{r} \neq 0$, y en consecuencia $DL(x) \neq 0$.

Ahora bien, si $L(x) = \delta$,

$$|u^2 + v^2 - 2\mu| = 2|\delta^{b-a} + h\delta^b|,$$

luego, si δ_0 es suficientemente pequeño, entonces $|u^2 + v^2 - 2\mu| \approx 0$, y de esto se sigue que $u \neq 0$ y $v \neq 0$, para todo $\delta \leq \delta_0$.

Por lo tanto, si δ_0 es suficientemente pequeño, $DL(x) \neq 0$ para $0 < L(x) \leq \delta$, con $\delta \leq \delta_0$.

De las ecuaciones de movimiento (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\tau}(x) &= rv, \\ \frac{d^2L}{d\tau^2}(x) &= r\left(\left(1 + \frac{b}{2}\right)v^2 + u^2 - ar^{b-a} - b\mu\right).\end{aligned}$$

Debe probarse que si $L(x) = \delta$ y $\frac{dL}{d\tau}(x) = 0$, entonces $\frac{d^2L}{d\tau^2}(x) > 0$. Veamos, si $\frac{dL}{d\tau}(x) = 0$, entonces $v = 0$, y luego

$$\frac{d^2L}{d\tau^2}(x) = \delta(u^2 - a\delta^{b-a} - b\mu) = \delta(2h\delta^b + (2-a)\delta^{b-a} + (2-b)\mu).$$

Se tiene que para $b < 2$ se puede encontrar δ_0 suficientemente pequeño para el que $\frac{d^2L}{d\tau^2} > 0$, para todo $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Por lo anterior, y al aplicar el Lema 19, se concluye el resultado requerido.

Para este problema el bloque aislante y sus subconjuntos, definidos en relación al lema anterior, quedan como sigue,

$$\begin{aligned}B(h, \delta) &= \{x \in M : 0 \leq r \leq \delta\}, \\ b &= \{x \in M : r = \delta\}, \\ b^+ &= \{x \in b : v \leq 0\}, \\ b^- &= \{x \in b : v \geq 0\}, \\ \tau &= \{x \in b : v = 0\} = b^+ \cap b^-, \\ a^+ &= \{x \in b^+ : u = 0\}, \\ a^- &= \{x \in b^- : u = 0\}.\end{aligned}$$

Recordar que b^+ son las órbitas que llegan a b , y como $r' = rv$, entonces $v \leq 0$. Análogamente se encuentra b^- . Los puntos en a^+ corresponden a órbitas que una vez que llegan a B , terminan en Λ , y estas son las que tienen $u = 0$. Análogamente podemos encontrar a^- .

Para $h > 0$, el bloque aislante queda proyectado en las variables (u, v) como se muestra en la Fig. 2.10.

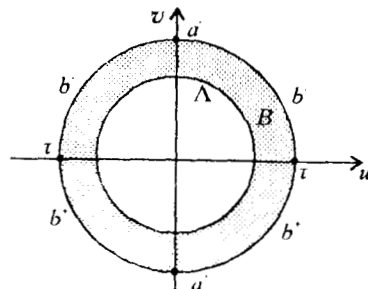


Fig. 2.10. Bloque aislante proyectado a las variables (u, v)

El teorema que sigue nos dará los valores de b para los cuales el bloque aislante es trivializable, y por tanto nos dirá cuándo Λ es un conjunto invariante aislado trivializable.

Teorema 22. *El conjunto invariante aislado Λ es trivializable para las ecuaciones (2.5), si y sólo si*

$$b = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La demostración se hará en dos partes.

1a. parte. Supongamos que Λ es trivializable. Sabemos que si $b \geq 2$, entonces Λ no es un conjunto invariante aislado, luego debe ser $b < 2$. Usando la definición de $B(h, \delta)$, y la relación de energía (2.3), tenemos que

$$b = \{(r, v, \theta, u) \in M : u^2 + v^2 = 2\mu + 2h\delta^b + 2\delta^{b-a}\}.$$

Tomemos como coordenadas de referencia en b a (θ, u) , puesto que $r = \delta$ y v se puede despejar de la relación de energía. Luego el difeomorfismo a través del bloque tiene la forma

$$\begin{aligned} \Psi : b^+ \setminus a^+ &\longrightarrow b^- \setminus a^- \\ (r, v, \theta, u) &\longrightarrow (r, -v, \Psi_\theta(\theta, u), u). \end{aligned}$$

Como en las ecuaciones de movimiento (2.5) no aparece θ , debe ser

$$\Psi_\theta(\theta, u) = \theta + \phi(u),$$

donde ϕ está definida para $0 \leq u \leq 2\mu + 2h\delta^b + 2\delta^{b-a}$, y como el flujo es simétrico, debe ser

$$\phi(-u) = -\phi(u).$$

Ahora bien, por hipótesis, Λ es trivializable, luego el flujo a través del bloque Ψ puede extenderse a a^+ , es decir, a $u = 0$. Entonces debe pasar

$$\theta + \phi(0+) = \theta + \phi(0-) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como sabemos que $\phi(0+) = -\phi(0-)$, entonces debe tenerse que

$$\phi(0+) = n\pi.$$

Ahora calcularemos este límite.

$\phi(u)$ representa el cambio en el ángulo θ de la órbita desde que llega a b^+ y hasta b^- . Nos interesa esta diferencia de ángulo para órbitas cercanas a a^+ , es decir,

con $u \approx 0$. Para entender cómo se hace este cálculo, observemos la Fig. 2.11, que corresponde a un “desdoblamiento” del toro Λ , y donde sólo se presenta la parte correspondiente a $u \geq 0$.

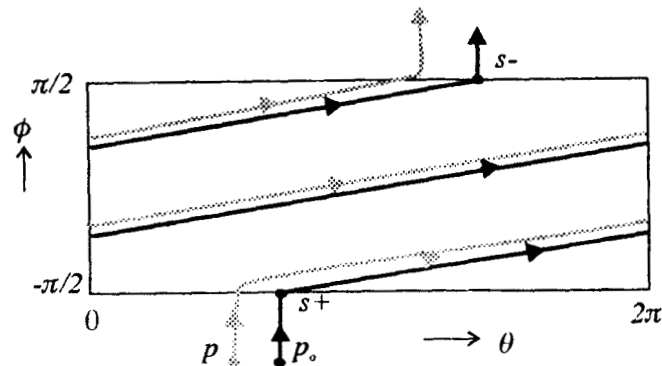


Fig. 2.11. Seguimiento de la órbita que pasa por p .

Tomemos una órbita que pasa por un punto $p \in b^+$, que está cercano a un punto $p_0 \in a^+$. La órbita por p_0 es la variedad estable de un punto de equilibrio $s^+ \in \Lambda$, luego la órbita por p estará cercana a esta variedad. Después, esta órbita tendrá que estar cercana a la variedad inestable de s^+ , que coincide con la variedad estable de otro punto de equilibrio $s^- \in \Lambda$; esta variedad es una curva sobre Λ . Finalmente, la órbita por p estará cercana a la variedad inestable de s^- .

Los puntos s^+ y s^- tienen coordenadas

$$s^+ = (0, -\sqrt{2\mu}, \theta_0, 0) \quad \text{y} \quad s^- = (0, \sqrt{2\mu}, \theta_f, 0);$$

luego, cuando $p \rightarrow p_0$, el valor de $\phi(u)$ tiende a $\phi(0+)$, por lo cual éste es el valor de la diferencia $\theta_f - \theta_0$. Como conocemos el flujo sobre Λ , podemos calcular exactamente el valor de $\phi(0+)$.

Recordemos que el flujo sobre Λ es un flujo lineal con pendiente $1 - \frac{b}{2}$, luego podemos resolver la ecuación de una recta para obtener que

$$\phi(0+) = \frac{\pi}{1 - \frac{b}{2}}.$$

Luego, $\phi(0+) = n\pi$ siempre que

$$b = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

con $n \in \mathbf{N}$.

2a. parte. El recíproco de este teorema está parcialmente demostrado en la parte anterior. Puede verse que si

$$b = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

entonces la extensión de la transformación Ψ a las órbitas que están en a^+ , dada en la parte anterior, es un homeomorfismo.

Para ver que efectivamente esta extensión es un difeomorfismo, se usará un cambio de coordenadas tipo Levi-Civita para eliminar la singularidad en las ecuaciones originales de movimiento, se verá que el bloque definido en estas coordenadas será por tanto trivializable.

Regresemos a las ecuaciones originales del problema de dos cuerpos cuasihomogéneo (2.1), y pensemos ahora que $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{P}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{a\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^{a+2}} - \frac{b\mu\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^{b+2}}.\end{aligned}$$

La relación de energía puede escribirse como

$$\frac{1}{2}|\mathbf{P}^2\mathbf{Q}^b| - |\mathbf{Q}|^{b-a} - \mu = h|\mathbf{Q}|^b.$$

Definamos las variables

$$y = \mathbf{P}\bar{\mathbf{Q}}^{\frac{b}{2}}, \quad x = \mathbf{Q}^\gamma, \quad x, y \in \mathbf{C}.$$

La relación de energía en estas coordenadas queda

$$|y|^2 - 2|x|^{\frac{b-a}{\gamma}} - 2\mu = |x|^{\frac{b}{\gamma}}.$$

Para que la transformación sea canónica, debe preservarse la forma diferenciable canónica en los complejos; es decir, debe cumplirse

$$\text{Im}(d\bar{\mathbf{Q}}d\mathbf{P}) = \text{Im}(d\bar{x}dy).$$

Calculemos:

$$\text{Im}(d\bar{\mathbf{Q}}d\mathbf{P}) = \text{Im}\left(\frac{1}{\gamma}\bar{x}^{\frac{1}{\gamma}-1}d\bar{x}\right)(dy\bar{x}^{-\frac{b}{2\gamma}} + y\left(-\frac{b}{2\gamma}\right)\bar{x}^{-\frac{b}{2\gamma}-1}dx) = \text{Im}\left(\frac{1}{\gamma}\bar{x}^{\frac{2-2\gamma-b}{2\gamma}}d\bar{x}dy\right),$$

si ponemos $2 - 2\gamma - b = 0$, la transformación será canónica con multiplicador $\frac{1}{\gamma}$. Esto corresponde a que

$$\gamma = \frac{2-b}{2}.$$

Poniendo $\frac{1}{\gamma} = n$, $n \in \mathbb{N}$, tendremos que b debe ser de la forma antes requerida:

$$b = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas, al hacer un reescalamiento de tiempo de la forma

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}|x|^{\frac{1}{\gamma}},$$

quedan como sigue,

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \left(\frac{hb}{\gamma}|x|^{\frac{1}{\gamma}-2} + \frac{b-a}{\gamma}|x|^{\frac{b-a}{\gamma}-2}\right)x. \end{aligned}$$

O bien, en términos de $n = \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{2-b}$:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= (2h(n-1)|x|^{2(n-2)} + (2(n-1) - na)|x|^{2(n-2)-an})x, \end{aligned}$$

la relación de energía,

$$\frac{1}{2}|y|^2 - |x|^{2(n-1)-na} - h|x|^{2(n-1)} = \mu,$$

y la expresión para el momento angular,

$$Im(\bar{x}y) = c.$$

Las anteriores expresiones son analíticas, siempre que a sea de la forma

$$a = 2\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{j}{2n}\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien, el bloque aislante definido anteriormente, en estas coordenadas toma la forma,

$$B' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \frac{1}{2}|y|^2 - |x|^{2(n-1)-na} - h|x|^{2(n-1)} = \mu, \quad |x|^n \leq \delta\}.$$

y como las ecuaciones de movimiento no tienen un conjunto invariante dentro de B' , entonces los conjuntos a^+ y a^- para B' son vacíos, luego la transformación a través del bloque es trivialmente extendible a un difeomorfismo. Si nos regresamos a las

coordenadas de McGehee, obtendremos que la transformación Ψ puede extenderse a un difeomorfismo.

El propósito de construir un bloque aislante trivializable de la variedad de colisión Λ , fue la continuación de las órbitas que llegan a Λ , lo cual significa que estamos continuando órbitas de colisión, y además lo hacemos de manera diferenciable.

Sin embargo, la idea original de regularización por cirugía es un poco distinta. Consiste en construir un bloque aislante de una singularidad, y al trivializarlo extender el flujo en este bloque aislante de manera que abarque a la misma singularidad. De esta forma se continúan las órbitas que llegan a la singularidad.

Aquí se vio que la definición de un bloque aislante no depende de la parametrización; lo que nosotros hicimos fue que por medio de una reparametrización transformamos la singularidad debida a colisión en un conjunto invariante, y construimos un bloque aislante trivializable de ese conjunto invariante.

Lo desarrollado aquí es lo que se entiende por regularización por bloques.

Como $Q = x^n$, puede verse que la extensión es una reflexión si n es par, y es una transmisión si n es impar.

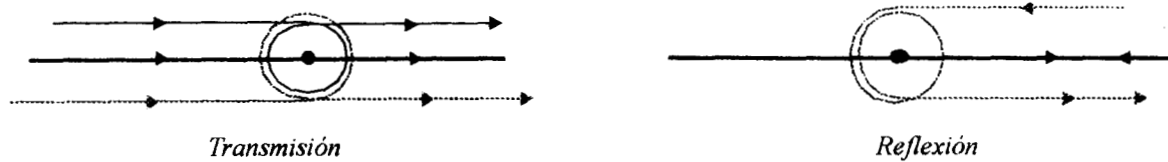


Fig. 2.12. Posibles continuaciones de órbitas de colisión binaria al hacer regularización por bloques.

Observemos que este resultado coincide con la extensión encontrada por la regularización por ramas sólo es posible cuando g fuera impar, que aquí se cumple; y la extensión es reflexión cuando f es par, y transmisión cuando f es impar.

$$\frac{2}{2+b} = \frac{n}{2n+1} = \frac{f}{g}.$$

Habíamos visto que la extensión por ramas sólo es posible cuando g fuera impar, que aquí se cumple; y la extensión es reflexión cuando f es par, y transmisión cuando f es impar.

Capítulo 3

Problema colineal cuasihomogéneo de tres cuerpos

1. COORDENADAS DE MCGEHEE

Estas coordenadas fueron introducidas originalmente por McGehee en su estudio de la colisión total en el Problema de 3 cuerpos colineales (McGehee, 1974), y han sido usadas ampliamente en diversos problemas de Mecánica Celeste a partir de entonces. Estas coordenadas permiten hacer un análisis cualitativo de los movimientos cercanos a colisión total de un sistema de partículas puntuales. Aquí extenderemos las ideas de McGehee para estudiar el Problema de tres cuerpos colineales correspondiente a un potencial cuasihomogéneo.

Recordemos la forma de un potencial cuasihomogéneo para un sistema de tres partículas,

$$\begin{aligned}W(\mathbf{q}) &= U(\mathbf{q}) + V(\mathbf{q}), \\U(\mathbf{q}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^a}, \\V(\mathbf{q}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^b},\end{aligned}$$

donde $0 \leq a < b$, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$, $-a$ es el grado de homogeneidad de la función U , y $-b$ el de la función V . Obsérvese que si $a = 0$, entonces la función U es constante, y en tal caso el potencial coincide con un homogéneo de grado de homogeneidad $-b$.

Definamos el conjunto donde ocurren colisiones como

$$\Delta = \cup_{i < j} \{\mathbf{q} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}.$$

Luego el potencial W está definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \Delta$.

El Problema colineal cuasihomogéneo de tres cuerpos consiste en considerar que las tres partículas están restringidas a moverse en una línea recta, de tal forma que podemos suponer que $q_i \in \mathbb{R}$, y entonces $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, en este caso el conjunto de colisiones contiene dos tipos de colisión binaria y a la colisión total:

$$\Delta = \{\mathbf{q} : q_1 = q_2, \text{ o } q_2 = q_3, \text{ o } q_1 = q_2 = q_3\}.$$

Definiendo la matriz de masas como $M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, y los momentos asociados como $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$, las ecuaciones de movimiento se expresan como sigue,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \nabla W(\mathbf{q}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned}Q &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Delta : m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0\}, \\ P &= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 0\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Es decir, vamos a considerar que el centro de masas está en el origen y que el momento lineal es cero, de tal forma que el sistema anterior está definido en el producto cartesiano de los planos, $Q \times P$. Trabajaremos también en un nivel fijo de energía h , es decir, se cumple

$$\frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p} - W(\mathbf{q}) = h.\tag{3.3}$$

Para estudiar el movimiento del sistema cercano a colisión total, introduciremos unas nuevas coordenadas. La siguiente transformación de variables corresponde a una generalización al espacio de las coordenadas polares que se usan en el plano:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\mathbf{q}^T M \mathbf{q}}, \\ y &= \mathbf{p}^T \mathbf{s}, \\ \mathbf{s} &= \frac{1}{r}\mathbf{q}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{p} - yM\mathbf{s}.\end{aligned}$$

Consideremos el producto interior en \mathbb{R}^3 dado por la matriz masas M ,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T M \mathbf{b}.\tag{3.4}$$

A partir de este producto interior podemos definir la norma y la métrica asociada a esta matriz. En este sentido decimos que r es el tamaño del sistema, mientras que

\mathbf{s} es la posición del sistema en la esfera unitaria dada por esta métrica, es decir, \mathbf{s} representa la forma del sistema. y y \mathbf{x} tienen que ver con las velocidades asociadas a r y \mathbf{s} , o sea que pueden verse como las velocidades radial y tangencial respectivamente. Notemos que $\mathbf{s}^T \mathbf{x} = 0$. Además, los vectores \mathbf{s} se están tomando en el plano Q (3.2). Si tomamos la esfera unitaria en esta métrica intersectada con el plano Q , y su haz tangente como

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{q} \in Q : \mathbf{q}^T M \mathbf{q} = 1\}, \text{ y} \\ T &= \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in S, \mathbf{p}^T \mathbf{q} = 0\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

entonces tenemos que $(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in T$. Así que en estas coordenadas el espacio fase es $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times T$.

Considerando lo anterior, las ecuaciones de movimiento (3.1) se expresan de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{r} \mathbf{x}^T M^{-1} \mathbf{x} - \frac{a}{r^{a+1}} U(\mathbf{s}) - \frac{b}{r^{b+1}} V(\mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} &= \frac{1}{r} M^{-1} \mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{1}{r} \left((\mathbf{x}^T M^{-1} \mathbf{x}) \mathbf{s} + y \mathbf{x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^{a+1}} (\nabla U(\mathbf{s}) + aU(\mathbf{s})M\mathbf{s}) + \frac{1}{r^{b+1}} (\nabla V(\mathbf{s}) + bV(\mathbf{s})M\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

La relación de energía (3.3) es

$$\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T M^{-1} \mathbf{x} + y^2) - \frac{1}{r^a} U(\mathbf{s}) - \frac{1}{r^b} V(\mathbf{s}) = h. \quad (3.7)$$

Con el propósito de hacer una explosión de la colisión total, hacemos un reescalamiento de las velocidades radial y tangencial por el factor $r^{b/2}$,

$$v = r^{\frac{b}{2}} y, \quad \mathbf{u} = r^{\frac{b}{2}} \mathbf{x}.$$

Las ecuaciones de movimiento (3.6) son ahora,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{-\frac{b}{2}} v, \\ \dot{v} &= r^{-\frac{b}{2}-1} \left[\frac{b}{2} v^2 + \mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} - ar^{b-a} U(\mathbf{s}) - bV(\mathbf{s}) \right], \\ \dot{\mathbf{s}} &= r^{-\frac{b}{2}-1} M^{-1} \mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= r^{-\frac{b}{2}-1} \left[\left(\frac{b}{2} - 1 \right) v \mathbf{u} - (\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{s} \right. \\ &\quad \left. + r^{b-a} (\nabla U(\mathbf{s}) + aU(\mathbf{s})M\mathbf{s}) + (\nabla V(\mathbf{s}) + bV(\mathbf{s})M\mathbf{s}) \right]. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene singularidades en $r = 0$, correspondiente a colisión total, y en los vectores $\mathbf{s} \in S$ correspondientes a colisiones binarias. Sin embargo, la singularidad $r = 0$, puede eliminarse haciendo el reescalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{\frac{b}{2}+1}.$$

Las ecuaciones en el nuevo tiempo τ están dadas por

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= \frac{b}{2}v^2 + \mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} - ar^{b-a}U(\mathbf{s}) - bV(\mathbf{s}), \\ \mathbf{s}' &= M^{-1} \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u})\mathbf{s} \\ &\quad + r^{b-a}(\nabla U(\mathbf{s}) + aU(\mathbf{s})M\mathbf{s}) + (\nabla V(\mathbf{s}) + bV(\mathbf{s})M\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

La relación de energía (3.6) puede escribirse ahora como

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} + v^2) - r^{b-a}U(\mathbf{s}) - V(\mathbf{s}) = hr^b. \quad (3.9)$$

El sistema está expresado en lo que se conoce como Coordenadas de McGehee.

Las anteriores ecuaciones (3.8) y (3.9) son diferenciables en $r = 0$ si $b-a \geq 1$. Por lo cual, de aquí en adelante nos restringiremos a estos casos. Si además nos interesa que el flujo sea analítico en $r = 0$, requeriremos que $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

El sistema de ecuaciones se ha extendido al espacio $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times T$. Es decir, al espacio fase del sistema se le ha “pegado” toda una frontera correspondiente a $r = 0$, llamada la colisión total.

Fijamos un nivel de energía h , y definimos la variedad de colisión total como

$$\Lambda = \{(r, v, \mathbf{s}, \mathbf{u}) : r = 0, \frac{1}{2}(\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} + v^2) - V(\mathbf{s}) = 0\}. \quad (3.10)$$

Esta variedad corresponde a poner $r = 0$ en la relación de energía, y su importancia radica en que es invariante bajo el flujo del sistema, puesto que si $r = 0$ entonces $r' = 0$. Luego el flujo sobre Λ está determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} v' &= \frac{b}{2}v^2 + \mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} - bV(\mathbf{s}), \\ \mathbf{s}' &= M^{-1} \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u})\mathbf{s} + (\nabla V(\mathbf{s}) - bV(\mathbf{s})M\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Observemos que sobre Λ ocurre que,

$$v' = \frac{b}{2}[2V(\mathbf{s}) - \mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u}] + \mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} - bV(\mathbf{s}) = (1 - \frac{b}{2})\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u},$$

luego se tiene para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \text{si } b < 2 & \quad \text{entonces } v' > 0 \\ \text{si } b = 2 & \quad \text{entonces } v' = 0 \\ \text{si } b > 2 & \quad \text{entonces } v' < 0. \end{aligned}$$

Se verá en una sección posterior, que de hecho el flujo sobre Λ es casi gradiente, excepto para $b = 2$. Esta propiedad y el estudio del flujo sobre Λ nos dará información importante del comportamiento del sistema cerca de colisión total.

2. REDUCCIÓN DE LAS COORDENADAS

Analicemos un poco la dimensión de nuestro problema. Originalmente, en las variables \mathbf{q} y \mathbf{p} , el espacio fase del sistema es $Q \times P$, donde Q es el plano dado por la ecuación de centro de masas en el origen, y P es el plano dado por la ecuación de momento lineal igual a 0 (ver (3.2)). Luego la dimensión es 4, es decir, es un sistema hamiltoniano con 2 grados de libertad. Por tanto, al fijar la energía, la dimensión del sistema es 3.

Al cambiar a coordenadas de McGehee, el espacio fase es $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times T$, donde S es la esfera unitaria en la métrica dada por M intersectada con el plano Q , y T es su haz tangente contenido en \mathbb{R}^6 (ver (3.5)). La dimensión de T es 2, luego la dimensión del espacio fase es 4, y si se fija la energía, el espacio fase es de dimensión 3.

En lo siguiente se harán las transformaciones necesarias para reducir las ecuaciones (3.8) a un campo vectorial definido en \mathbb{R}^4 .

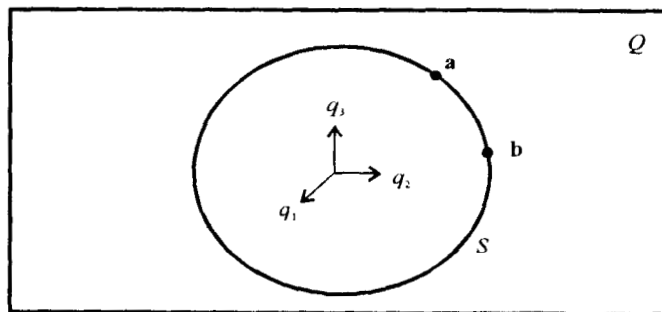


Fig. 3.1. Representación del espacio de configuración del problema colineal de tres cuerpos.

Consideramos el problema colineal con orden

$$q_1 < q_2 < q_3;$$

este orden se mantendrá después de colisiones binarias. Luego podemos restringir el espacio de configuración a los puntos con este orden en S (ver Fig. 3.1).

Veamos que existen únicos puntos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en S tales que

$$a_1 = a_2 < a_3, \quad b_1 < b_2 = b_3.$$

\mathbf{a} debe cumplir simultáneamente

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0, \\ m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 &= 0, \\ m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver para encontrar que la única solución con $a_1 = a_2 < a_3$ es

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &= - \left(\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_3} + m_1 + m_2 \right)^{-1/2}, \\ a_3 &= \frac{m_1 + m_2}{m_3} \left(\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_3} + m_1 + m_2 \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

De la misma forma se puede ver que \mathbf{b} es único. Estos puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} son los extremos del “intervalo” en S en donde se conserva la ordenación $s_1 < s_2 < s_3$, y que corresponden a las colisiones binarias.

Definamos

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\mathbf{s} \in S : s_1 < s_2 < s_3\}, & S_1 &= \{\mathbf{s} \in S : s_1 \leq s_2 \leq s_3\}, \\ T_0 &= \{(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in T : \mathbf{s} \in S_0\}, & T_1 &= \{(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in T : \mathbf{s} \in S_1\}. \end{aligned}$$

S_1 es un intervalo cerrado en S con extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} , y S_0 es el correspondiente intervalo abierto. Notemos que T_1 es homeomorfo a un intervalo cerrado producto cartesiano con la recta real. Con base en esto, definiremos un difeomorfismo entre $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ y T_1 , de tal forma que trabajemos con puntos en \mathbb{R}^2 en vez de \mathbb{R}^6 .

Sean las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto definimos la matriz

$$A = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} A_1 M + \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{\frac{1}{2}} M^{-1} A_2.$$

A define una transformación lineal de Q en Q , y además tiene las siguientes propiedades:

$$A^T M A = M, \quad \mathbf{a}^T A^T M \mathbf{b} > 0, \quad \text{si } \mathbf{q} \in Q, \quad \mathbf{q}^T M A \mathbf{q} = 0 \text{ y } A^2 \mathbf{q} = -\mathbf{q}.$$

Retomando a Q con el producto interior asociado a M (3.4), tenemos que para puntos $\mathbf{q} \in Q$, $\langle \mathbf{q}, A\mathbf{q} \rangle = 0$, luego A puede verse como una rotación de 90° en Q . Además tenemos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$, puesto que estos puntos están en S . Como además

$$\langle A\mathbf{a}, A\mathbf{a} \rangle = \mathbf{a}^T A^T M A \mathbf{a} = \mathbf{a}^T M \mathbf{a} = 1,$$

se tiene que $\{\mathbf{a}, A\mathbf{a}\}$ es una base ortonormal para Q .

A partir de esta base ortonormal, podremos expresar los puntos en S_1 como combinaciones lineales de \mathbf{a} y \mathbf{b} considerando lo que sigue,

$$\mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} + \langle A\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle A\mathbf{a}.$$

Notemos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 1$ y $\langle A\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 1$. Podemos definir

$$\cos 2\lambda = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

para $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, y entonces

$$\sin 2\lambda = \langle A\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Por tanto

$$\mathbf{b} = (\cos 2\lambda) \mathbf{a} + (\sin 2\lambda) A\mathbf{a}.$$

Definamos

$$S: [-1, 1] \rightarrow S_1$$

$$S(s) = \frac{1}{\sin 2\lambda} ([\sin \lambda(1-s)] \mathbf{a} + [\sin \lambda(1+s)] \mathbf{b}). \quad (3.11)$$

Proposición 23. S es un difeomorfismo analítico tal que $S'(s) = \lambda A S(s)$.

Demostración. De la definición se tiene que S es real analítico, y se cumple que $S(-1) = \mathbf{a}$, $S(1) = \mathbf{b}$. Ahora, como \mathbf{a} y \mathbf{b} son puntos del plano Q , entonces $S(s) \in Q$, $\forall s \in [-1, 1]$.

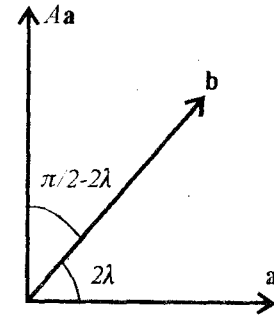


Fig. 3.2.

Usando la expresión para \mathbf{b} como combinación lineal de la base ortonormal, podemos obtener la siguiente expresión para S ,

$$S(s) = \cos \lambda(1+s)\mathbf{a} + \sin \lambda(1+s)A\mathbf{a}. \quad (3.12)$$

Usemos esta ecuación, el hecho de que \mathbf{a} y $A\mathbf{a}$ son ortonormales, y las propiedades de la matriz A , para calcular

$$\begin{aligned} S(s)^T M S(s) &= \cos^2 \lambda(1+s)\mathbf{a}^T M \mathbf{a} + \sin \lambda(1+s) \cos \lambda(1+s)\mathbf{a}^T M A \mathbf{a} \\ &+ \sin \lambda(1+s) \cos \lambda(1+s)\mathbf{a}^T A^T M \mathbf{a} + \sin^2 \lambda(1+s)\mathbf{a}^T A^T M A \mathbf{a} \\ &= \cos^2 \lambda(1+s) + \sin^2 \lambda(1+s) = 1. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} S'(s) &= \lambda(-\mathbf{a} \sin \lambda(1+s) + A\mathbf{a} \cos \lambda(1+s)) \\ &= \lambda(A^2 \mathbf{a} \sin \lambda(1+s) + A\mathbf{a} \cos \lambda(1+s)) = \lambda A S(s). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pongamos $S(s) = (S_1(s), S_2(s), S_3(s))$ en (3.11), y usando el hecho de que $a_1 = a_2 < a_3$ y $b_1 < b_2 = b_3$, se cumple

$$\begin{aligned} S_2(s) - S_1(s) &= \frac{1}{\sin 2\lambda} [(b_2 - b_1) \sin \lambda(1+s)], \\ S_3(s) - S_2(s) &= \frac{1}{\sin 2\lambda} [(a_3 - a_2) \sin \lambda(1-s)], \\ S_3(s) - S_1(s) &= \frac{1}{\sin 2\lambda} [(b_2 - b_1) \sin \lambda(1+s) + (a_3 - a_2) \sin \lambda(1-s)]. \end{aligned}$$

Se tiene que $0 \leq \lambda(1-s) < \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \lambda(1+s) < \frac{\pi}{2}$, para $s \in [-1, 1]$, luego $\sin \lambda(1-s)$ y $\sin \lambda(1+s)$ son positivas y tienen inversas. También, de lo anterior se tiene que las componentes de S están ordenadas, y como son de norma 1, $S(s) \in S_1$, $\forall s \in [-1, 1]$. En consecuencia S es invertible. Del hecho de que S es real analítica y su derivada (3.13) no es cero, se sigue por el Teorema de la función inversa que S es un difeomorfismo real analítico.

El difeomorfismo real analítico $S : [-1, 1] \rightarrow S_1$, nos permitirá la simplificación de las ecuaciones de movimiento (3.8) al tomar puntos con dimensiones más bajas. Para esto, definimos las siguientes variables

$$s = S^{-1}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{s}^T A^T \mathbf{u}, \quad (\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in T_1.$$

Así, en vez de trabajar con puntos $(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in T_1$, lo haremos con $(s, u) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$.

Las nuevas variables son por tanto $(r, v, s, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$.

Definamos ahora las funciones que corresponden a la reducción de dimensión de U y V ,

$$\begin{aligned} \tilde{U} : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} & \tilde{V} : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto U(S(s)) & s &\longmapsto V(S(s)) \end{aligned}$$

De esta forma, las expresiones para las partes del potencial en la dimensión reducida son

$$\begin{aligned} \tilde{U}(s) &= \text{sen}^{a_2\lambda} \left[\frac{m_1 m_2}{[(b_2 - b_1)\text{sen } \lambda(1 + s)]^a} + \frac{m_2 m_3}{[(a_3 - a_2)\text{sen } \lambda(1 - s)]^a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1 m_3}{[(b_2 - b_1)\text{sen } \lambda(1 + s) + (a_3 - a_2)\text{sen } \lambda(1 - s)]^a} \right], \\ \tilde{V}(s) &= \text{sen}^{b_2\lambda} \left[\frac{m_1 m_2}{[(b_2 - b_1)\text{sen } \lambda(1 + s)]^b} + \frac{m_2 m_3}{[(a_3 - a_2)\text{sen } \lambda(1 - s)]^b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1 m_3}{[(b_2 - b_1)\text{sen } \lambda(1 + s) + (a_3 - a_2)\text{sen } \lambda(1 - s)]^b} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

y sus derivadas se encuentran usando la regla de la cadena y (3.13),

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{U}}{ds}(s) &= \lambda \nabla U(S(s))^T AS(s), \\ \frac{d\tilde{V}}{ds}(s) &= \lambda \nabla V(S(s))^T AS(s), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento en estas nuevas variables, observemos antes lo siguiente,

$$(As)^T \mathbf{u} = u = u \mathbf{s}^T M \mathbf{s} = u \mathbf{s}^T A^T M A \mathbf{s} = u (As)^T M (As) = (As)^T (u M A \mathbf{s}),$$

luego $\mathbf{u} = u M A \mathbf{s}$; también se tiene

$$\mathbf{u}^T M^{-1} \mathbf{u} = (u \mathbf{s}^T A^T M) M^{-1} (u M A \mathbf{s}) = u^2 \mathbf{s}^T A^T M A \mathbf{s} = u^2 \mathbf{s}^T M \mathbf{s} = u^2,$$

y aplicando (3.13) al derivar $S^{-1} \circ S(s) = s$ tenemos

$$DS^{-1}(S(s))S'(s) = 1 \implies DS^{-1}(s)As = \frac{1}{\lambda}.$$

Ahora podemos calcular s' a partir de $s = S^{-1}(\mathbf{s})$,

$$s' = DS^{-1}(s)\mathbf{s}' = DS^{-1}M^{-1}\mathbf{u} = DS^{-1}(s)M^{-1}(u M A \mathbf{s}) = u DS^{-1}(s)As = \frac{1}{\lambda}u.$$

Y de $u = (As)^T \mathbf{u}$, encontramos que

$$\begin{aligned} u' &= (As')^T \mathbf{u} + (As)^T \mathbf{u}' \\ &= \mathbf{u}^T M^{-1} A^T \mathbf{u} + \left(\frac{b}{2} - 1\right) v (As)^T \mathbf{u} - u^2 (As)^T M \mathbf{s} \\ &\quad + r^{b-a} [(As)^T \nabla U(\mathbf{s}) + aU(\mathbf{s})(As)^T M \mathbf{s}] + (As)^T \nabla V(\mathbf{s}) + bV(\mathbf{s})(As)^T M \mathbf{s}; \end{aligned}$$

como As y \mathbf{s} son ortonormales, se tiene que $(As)^T M \mathbf{s} = 0$; y por ser $\mathbf{s}^T \mathbf{u} = 0$, entonces $\mathbf{u}^T M^{-1} A^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T M^{-1} A^T (uMAs) = \mathbf{u}^T M^{-1} M \mathbf{s} u = \mathbf{u}^T \mathbf{s} u = 0$, así que

$$u' = \left(\frac{b}{2} - 1\right) v u + r^{b-a} \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{U}}{ds} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{V}}{ds}.$$

En resumen, las ecuaciones (3.8) en las coordenadas reducidas son,

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= \frac{b}{2} v^2 + u^2 - ar^{b-a} \tilde{U}(s) - b\tilde{V}(s), \\ s' &= \frac{1}{\lambda} u, \\ u' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right) v u + r^{b-a} \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{U}}{ds} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\tilde{V}}{ds}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

y la relación de energía queda,

$$\frac{1}{2} (\dot{v}^2 + u^2) - r^{b-a} \tilde{U}(s) - \tilde{V}(s) = hr^b. \tag{3.17}$$

Este es un campo vectorial con singularidades puesto que \tilde{U} y \tilde{V} no están definidas en $s = 1$ y $s = -1$, que son los puntos que corresponden a colisiones binarias. En la siguiente sección se hará una regularización de estas singularidades.

3. REGULARIZACIÓN DE COLISIONES BINARIAS

En esta sección se hará una regularización tipo Sundman de las singularidades debidas a colisión binaria. Entenderemos por regularizar al hecho de transformar el sistema de ecuaciones a uno que sea al menos diferenciable, de tal forma que las soluciones sean continuadas después de colisión binaria de una manera también diferenciable. Sin embargo, como vimos en el Capítulo 2 cuando se habló de los diferentes conceptos de regularización de colisiones binarias, en ocasiones es conveniente reducir las condiciones de tal forma podamos hablar de continuación de soluciones a partir de un campo vectorial que sea continuo. Veremos que en este problema, la posibilidad de continuación de órbitas dependerá del grado de homogeneidad $-b$ de la función V .

En general una regularización tipo Sundman para el sistema (3.16) consiste en definir una nueva velocidad y reescalar el tiempo de la siguiente forma

$$w = \phi(s)u, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \phi(s),$$

donde ϕ es una función no negativa, que debe cumplir una serie de condiciones que veremos enseguida.

Sustituyendo u por w en la relación de energía (3.17), obtenemos

$$w^2 + \phi(s)^2 v^2 - 2r^{b-a} \phi^2(s) \tilde{U}(s) - 2\phi^2(s) \tilde{V}(s) = 2hr^b \phi^2(s), \quad (3.18)$$

de esta ecuación tenemos que se requiere que $\phi^2(s)\tilde{U}(s)$ y $\phi^2(s)\tilde{V}(s)$ sean diferenciables en $[-1, 1]$. Además requeriremos que estas funciones tengan límite 0 cuando $s \rightarrow \pm 1$, los puntos que corresponden a colisión binaria.

La variedad de colisión total (3.10) está ahora definida por la ecuación

$$w^2 + \phi^2(s)v^2 - 2\phi^2(s)\tilde{V}(s) = 0,$$

y si se cumplen los límites mencionados, tendremos que $w \rightarrow 0$ si $s \rightarrow \pm 1$, y estaremos “pegando” los extremos de la variedad correspondientes a colisión binaria. La variedad tiene entonces la forma mostrada en la Fig. 3.3.

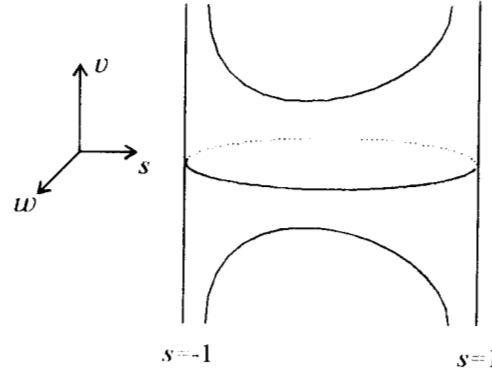


Fig. 3.3. Variedad de colisión total Λ .

Las ecuaciones de movimiento (3.16) después de efectuar el reescalamiento del tiempo y de usar la relación de energía (3.18) quedan como sigue,

$$\begin{aligned}
r' &= \phi(s)rv, \\
v' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)\phi(s)v^2 + (2-a)r^{b-a}\phi(s)\tilde{U}(s) + (2-b)\phi(s)\tilde{V}(s) + 2hr^b\phi(s), \\
s' &= \frac{1}{\lambda}w, \\
w' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)\phi(s)vw - \frac{1}{\lambda}\phi(s)\frac{d\phi}{ds}v^2 + \frac{1}{\lambda}r^{b-a}\left[2\phi(s)\frac{d\phi}{ds}\tilde{U}(s) + \phi^2(s)\frac{d\tilde{U}}{ds}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}\left[2\phi(s)\frac{d\phi}{ds}\tilde{V}(s) + \phi^2(s)\frac{d\tilde{V}}{ds}\right] + 2hr^b\phi(s)\frac{d\phi}{ds}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Aquí, (') significa derivación con respecto al nuevo tiempo σ .

Vemos que para tener un campo diferenciable se requiere que las funciones involucradas sean diferenciables para $s \in [-1, 1]$. Básicamente, necesitamos encontrar una función ϕ que elimine la singularidad de \tilde{V} en -1 y 1 , de tal forma que $\phi(s)\tilde{V}(s)$ sea diferenciable en $[-1, 1]$. Observando la expresión de \tilde{V} (3.14), hay varias elecciones de la función ϕ , por ejemplo

$$\phi(s) = \frac{1}{\tilde{V}(s)}, \quad \phi(s) = (1-s^2)^b, \quad \phi(s) = \frac{(1-s^2)^{\frac{b}{2}}}{[2\tilde{V}(s)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Sin embargo, estas funciones producen características similares en el campo vectorial (3.19). En particular se tiene que el campo es diferenciable sólo para $b \geq 2$ o $b = 1$, y es continuo si $1 < b < 2$.

Escogemos la tercera opción para ϕ y para hacer más fáciles los cálculos la escribimos de la forma siguiente,

$$\phi(s) = \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}},$$

donde

$$\begin{aligned}
W(s) &= 2(1-s^2)^b\tilde{V}(s) \\
&= \frac{2}{\lambda^b} \text{sen}^b 2\lambda \left[\frac{m_1 m_2 (1-s)^b}{[(b_2 - b_1) \frac{\text{sen} \lambda(1+s)}{\lambda(1+s)}]^b} + \frac{m_2 m_3 (1+s)^b}{[(a_3 - a_2) \frac{\text{sen} \lambda(1-s)}{\lambda(1-s)}]^b} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_1 m_3 (1-s^2)^b \lambda^b}{[(b_2 - b_1) \text{sen} \lambda(1+s) + (a_3 - a_2) \text{sen} \lambda(1-s)]^b} \right].
\end{aligned}$$

Tomemos que $\lambda(1-s), \lambda(1+s) \in [0, \pi/2]$. Debido a que la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ puede extenderse a una función real analítica en $[0, \pi/2]$, y aquí es positiva, la función W puede extenderse a una función diferenciable en $[-1, 1]$ si $b \geq 1$.

Con esto, las ecuaciones (3.19) pueden expresarse como sigue,

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}}rv, \\
 v' &= \left(\frac{b}{2}-1\right)W(s)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(1-s^2)^b}{W(s)}v^2-1\right] + \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}}\left[(2-a)r^{b-a}\tilde{U}(s)+2hr^b\right], \\
 s' &= \frac{1}{\lambda}w, \\
 w' &= -\frac{b}{\lambda}s(1-s^2)^{b-1} + \frac{2}{\lambda}bs\frac{(1-s^2)^{2b-1}}{W(s)}[v^2-2r^{b-a}\tilde{U}(s)-2hr^b] \\
 &\quad + \frac{1}{2\lambda}\frac{W'(s)}{W(s)}[(1-s^2)^b-w^2] + \left(\frac{b}{2}-1\right)\frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}}vw + \frac{r^{b-a}(1-s^2)^{2b}}{\lambda}\frac{d\tilde{U}}{ds}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

y la relación de energía es

$$w^2 - (1-s^2)^b + \frac{(1-s^2)^{2b}}{W(s)}[v^2 - 2r^{b-a}\tilde{U}(s) - 2hr^b] = 0. \tag{3.21}$$

Reiteramos que este campo vectorial es analítico para $a, b \in \mathbb{N}$, y diferenciable para $b > 2$, $b - a \geq 1$. Si $1 < b < 2$ y $b - a \geq 1$, las ecuaciones (3.20) representan un campo vectorial que sólo es continuo; por lo que no está garantizada la unicidad de soluciones.

3.1. Caso $b = 2$. Ahora observemos el caso especial $b = 2$. En las ecuaciones (3.19), usando la relación de energía (3.18), se tiene que la ecuación para v' , se puede expresar como

$$v' = v^2 + u^2 - ar^{b-a}\tilde{U}(s) - 2\tilde{V}(s) = (2-a)r^{2-a}\phi(s)\tilde{U}(s) + 2hr^2\phi(s),$$

luego se elimina la condición de que $\phi(s)\tilde{V}(s)$ sea diferenciable, y en tal caso podemos definir la función ϕ como

$$\phi(s) = \frac{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}{W(s)^{\frac{1}{2}}}.$$

De esta forma, obtenemos el campo vectorial regularizado,

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}{W(s)^{\frac{1}{2}}}rv, \\
 v' &= \frac{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}{W(s)^{\frac{1}{2}}}[(2-a)r^{2-a}\tilde{U}(s) + 2hr^2], \\
 s' &= \frac{1}{\lambda}w, \\
 w' &= -\frac{s}{\lambda} + \frac{3s(1-s^2)^2}{\lambda W(s)}[v^2 - 2\tilde{U}(s)r^{2-a} - 2hr^2] \\
 &\quad + \frac{W'(s)}{2\lambda W(s)}[1-s^2-w^2] + \frac{r^{2-a}}{\lambda} \frac{d\tilde{U}}{ds} \frac{(1-s^2)^3}{W(s)},
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

y la relación de energía es

$$w^2 + \frac{(1-s^2)^3}{W(s)}v^2 = (1-s^2) + \frac{(1-s^2)}{W(s)}[2\tilde{U}(s)r^{2-a} + 2hr^2].$$

La ecuación para la coordenada v es diferenciable o no, dependiendo del grado de homogeneidad $-a$ de la función U . Se tiene que si $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, entonces es diferenciable, y si $\frac{1}{2} < a \leq 1$, entonces sólo es continua en $s = \pm 1$. En las demás ecuaciones se conserva la diferenciabilidad. En tal caso es posible reducir las condiciones de regularización para hablar de un campo que ha sido regularizado de manera continua. Sin embargo, no podemos garantizar existencia única de las soluciones que pasan por colisión binaria. Aún así, nosotros nos quedaremos con las ecuaciones (3.22) para estudiar el flujo sobre la variedad de colisión total para el caso $b = 2$, que incluye al caso Maneff, en que $b = 2$ y $a = 1$.

Hemos visto que la regularización de las colisiones binarias depende primariamente del grado de homogeneidad $-b$ de la función V . Esto se explica simplemente por el hecho de que cerca de colisión, es esta parte del potencial la que más contribuye a la fuerza de atracción.

4. FLUJO SOBRE LA VARIEDAD DE COLISIÓN TOTAL

La variedad de colisión total (3.10), en las coordenadas reducidas y una vez que se ha regularizado, corresponde a tomar $r = 0$ en la relación de energía (3.21), de tal forma que queda definida como sigue:

$$\Lambda = \{(r, v, s, w) : r = 0, w^2 - (1-s^2)^b + \frac{(1-s^2)^{2b}}{W(s)}v^2 = 0\}. \tag{3.23}$$

Esta variedad tiene la forma mostrada en la Fig. 3.4.

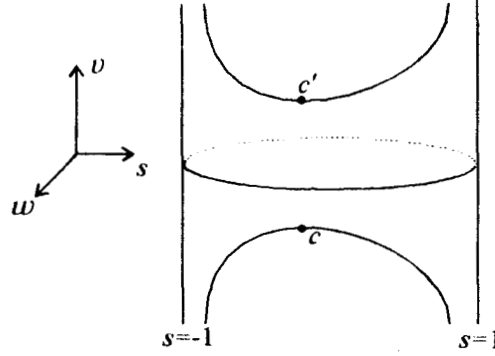


Fig. 3.4. Variedad de colisión total Λ .

Λ es invariante bajo el flujo, puesto que en (3.20) $r' = 0$ si $r = 0$ y éste queda definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} v' &= \left(\frac{b}{2} - 1\right)W(s)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-s^2)^b}{W(s)} v^2 - 1 \right], \\ s' &= \frac{1}{\lambda} w, \\ w' &= -\frac{b}{\lambda} s(1-s^2)^{b-1} + \frac{2}{\lambda} b s \frac{(1-s^2)^{2b-1}}{W(s)} v^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} \frac{W'(s)}{W(s)} [(1-s^2)^b - w^2] + \left(\frac{b}{2} - 1\right) \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}} v w. \end{aligned} \quad (3.24)$$

4.1. Puntos de equilibrio. Para $b \neq 2$, esta variedad tiene como puntos de equilibrio a los puntos $(0, \pm v_c, s_c, w)$ tales que

$$v_c = \sqrt{2\tilde{V}(s_c)}, \quad \frac{d\tilde{V}}{ds}(s_c) = 0, \quad w = 0,$$

y se puede probar que estos son los únicos puntos de equilibrio del flujo global (3.20).

Para $b = 2$, se tiene que si $v' = 0$, entonces los puntos $(0, v, \pm 1, 0)$, que corresponden a las colisiones binarias, son puntos de equilibrio. De hecho, los puntos $(r, v, \pm 1, 0)$ para cualquier r y v , son puntos de equilibrio del flujo global (3.20). Estos puntos son creados a partir de la regularización de las colisiones binarias. Aunque el flujo es diferenciable con esta regularización, realmente no estamos pasando por los puntos de colisión binaria, sino que las órbitas 'mueren' en esos puntos.

Sin embargo, como vimos en la Sección 3, en el caso $b = 2$ se hace otra forma de regularización resultando el campo (3.22). En estas ecuaciones los puntos con $s = \pm 1$, no representan puntos de equilibrio del flujo global, sin embargo el flujo sólo es continuo en esos puntos.

4.2. Casigradiencia del flujo. Definamos el concepto de casigradiencia.

Definición 24. Decimos que un campo vectorial F es casigradiente respecto a una función v , si v es creciente a lo largo de las soluciones de $\dot{x} = F(x)$ que no son puntos de equilibrio.

Observemos la ecuación para la variable v en (3.24). Si $s = \pm 1$, entonces

$$v' = (1 - \frac{b}{2})W(s)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $s \neq \pm 1$, usando la ecuación en (3.23) podemos escribir

$$v' = (1 - \frac{b}{2})W(s)^{\frac{1}{2}} \frac{w^2}{(1 - s^2)^b}.$$

Luego, si $w \neq 0$ se tiene que

- si $1 \leq b < 2$, entonces v es creciente,
- si $b = 2$, entonces v es constante, y
- si $b > 2$, entonces v es decreciente.

Veremos que en $w = 0$, v tiene puntos de inflexión, a excepción de los puntos de equilibrio. Se tiene que en $w = 0$, y $s \neq \pm 1$,

$$v'' = 0, \text{ y } v''' = (2 - b) \frac{W(s)^{\frac{1}{2}}}{(1 - s^2)^b} (w')^2,$$

pero w' se puede expresar como

$$w' = \left(\frac{v^2}{\tilde{V}(s)} - 2 \right) bs(1 - s^2)^{b-1} + \frac{1}{2}(1 - s^2) \frac{\frac{d\tilde{V}}{ds}}{\tilde{V}(s)}.$$

De la relación en (3.23), si $w = 0$ entonces $v^2 = 2\tilde{V}(s)$, luego en este caso se tiene que $v''' = 0$ si y sólo si $\frac{d\tilde{V}}{ds} = 0$.

Luego hemos visto que para $b < 2$, v es creciente en las soluciones sobre Λ , y decreciente si $b > 2$, excepto en los puntos de equilibrio. Por tanto, el flujo es casi-gradiencia en Λ si $b \neq 2$.

4.3. Configuraciones correspondientes a los puntos de equilibrio. Veamos la relación que existe entre los puntos críticos de \tilde{V} y el vector ∇V . Supongamos que s_0 es tal que $\frac{d\tilde{V}}{ds}(s_0) = 0$. Sea $\mathbf{s}_0 = S(s_0)$. De la segunda ecuación en (3.15) se tiene que

$$\lambda \mathbf{s}_0^T A^T \nabla V(\mathbf{s}_0) = 0.$$

Sabemos que $\nabla V(\mathbf{s}_0) \in P$, con P el plano de los momentos (3.2). También sabemos que el plano Q tiene como base a $\{\mathbf{s}_0, A\mathbf{s}_0\}$, y como los momentos son $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$, luego el plano P tiene como base a $\{M\mathbf{s}_0, MA\mathbf{s}_0\}$. Así que existen escalares c_1, c_2 tales que

$$\nabla V(\mathbf{s}_0) = c_1 M\mathbf{s}_0 + c_2 MA\mathbf{s}_0,$$

luego obtenemos que

$$0 = \mathbf{s}_0^T A^T \nabla V(\mathbf{s}_0) = c_1 \mathbf{s}_0^T A^T M\mathbf{s}_0 + c_2 \mathbf{s}_0^T A^T MA\mathbf{s}_0 = c_2,$$

y entonces $\nabla V(\mathbf{s}_0) = c_1 M\mathbf{s}_0$.

Supongamos ahora que $\nabla V(\mathbf{s}_0) = \mu M\mathbf{s}_0$. Luego se tiene

$$\frac{d\tilde{V}}{ds}(s_0) = \lambda \nabla V(\mathbf{s}_0)^T A\mathbf{s}_0 = \lambda \mu \mathbf{s}_0^T M A\mathbf{s}_0 = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d\tilde{V}}{ds}(s_0) = 0 \iff M^{-1} \nabla V(\mathbf{s}_0) = \mu \mathbf{s}_0.$$

Es decir, los puntos críticos en la variedad de colisión total, corresponden a configuraciones en las que la posición \mathbf{q} es paralela al vector $M^{-1} \nabla V$. En un problema homogéneo (por ejemplo en el caso $a = 0$), esto corresponde a la existencia de una configuración central. Sin embargo, para $a > 0$, como veíamos en el Capítulo 1, esto no está necesariamente relacionado con la existencia de configuraciones centrales o equilibrios relativos, debido a la cuasihomogeneidad del problema.

Ahora probaremos que existe un único punto crítico de la función \tilde{V} . Para esto, calculemos la segunda derivada de esta función, a partir de (3.15),

$$\frac{d^2\tilde{V}}{ds^2}(s) = \lambda^2 [AS(s)]^T D^2V(S(s)) [AS(s)] + b\lambda^2 V(S(s)).$$

El segundo término es positivo, y se puede ver que D^2V es una forma cuadrática positiva definida. Por lo tanto, \tilde{V} es una función cóncava hacia arriba, que se hace infinita en -1 y 1 . Luego \tilde{V} tiene un único punto crítico en $[-1, 1]$.

4.4. Linealización alrededor de los puntos de equilibrio. Consideremos el campo vectorial regularizado (3.20), y la relación de energía (3.21).

Tomamos la parte lineal del campo, alrededor del punto de equilibrio $c = (0, -v_c, s_c, 0)$, donde $v_c = \sqrt{2\tilde{V}(s_c)}$, y $\frac{d\tilde{V}}{ds}(s_c) = 0$. Esto corresponde a calcular la matriz jacobiana evaluada en el punto c .

Consideremos tres casos, según varían las potencias de r . En cada caso se calculará la matriz jacobiana en c , el espacio tangente a la superficie invariante de energía dada por (3.21) en ese punto, y la correspondiente matriz representante en una base de este espacio tangente.

- Si $b > 1$ y $b - a > 1$, entonces las potencias de r se anulan, obteniendo que la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(b-2)(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & -\frac{4bs_c(1-s_c^2)^{b-1}}{\lambda v_c} & (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2} & (1-\frac{b}{2})(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} \end{pmatrix}.$$

De la relación de energía (3.21), hacemos

$$F(c) = w^2 - (1-s^2)^b + \frac{(1-s^2)^b}{2\tilde{V}(s)} [v^2 - 2r^{b-a}\tilde{U}(s) - 2hr^b].$$

La superficie invariante de energía está dada por los puntos tales que $F(r, v, s, w) = 0$, y entonces su espacio tangente en c es

$$T_c F = \{(\rho, \gamma, \sigma, \chi) : \nabla F(c) \cdot (\rho, \gamma, \sigma, \chi) = 0\}.$$

En este caso, se obtiene que

$$T_c F = \{(\rho, \gamma, \sigma, \chi) : \gamma = 0\}.$$

Luego, la parte lineal del campo vectorial (3.21) restringida a este espacio es

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}\rho \\ 0 \\ \chi/\lambda \\ (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2} \sigma - (1-\frac{b}{2})(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} \chi \end{pmatrix}.$$

Se propone como base para este espacio tangente a

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y entonces la matriz representante de \bar{J} en esta base es

$$J^* = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2} & (1-\frac{b}{2})(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} \end{pmatrix}.$$

Tenemos pues que ξ_1 es un vector propio con valor propio $-(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} < 0$. Los otros dos valores propios se calculan resolviendo la ecuación cuadrática

$$P(m) = m^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}m - (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda^2 v_c^2} = 0.$$

Como $\tilde{V}''(s_c) > 0$, $P(m)$ y $P(-m)$ tienen un cambio de signo para cualquier $b > 1$, luego se tiene que hay una raíz positiva y una negativa.

Podemos concluir para este caso, que el punto $c = (0, -v_c, s_c, 0)$ es hiperbólico. Además se cumple que su variedad estable asociada tiene dimensión 2, y su variedad inestable tiene dimensión 1.

Para el punto $c' = (0, v_c, s_c, 0)$, se obtienen resultados análogos: existe una variedad inestable de dimensión 2, y una estable de dimensión 1.

- Si $b > 1$, $b - a = 1$, al derivar r^{b-a} el término correspondiente no se anula al evaluar en c . Así es que el espacio tangente a la superficie invariante de energía en el punto c queda

$$T_c F = \{(\rho, \gamma, \sigma, \chi) : \tilde{U}(s_c)\rho + v_c\gamma = 0\},$$

y la parte lineal del campo vectorial (3.21) aplicada a puntos de la forma $(\rho, -\frac{\tilde{U}(s_c)}{v_c}\rho, \sigma, \chi)$ en $T_c F$ es

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}\rho \\ (1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}\rho \\ \chi/\lambda \\ \frac{(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}\tilde{U}'(s_c)}{\lambda v_c^2}\rho + (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2}\sigma - (1-\frac{b}{2})(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}\chi \end{pmatrix}.$$

Se propone como base para este espacio tangente a

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -v_c \\ \tilde{U}(s_c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

entonces la matriz representante de \bar{J} en esta base es

$$J^* = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \\ -(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} \frac{\tilde{U}(s_c)}{\lambda v_c^2} & (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2} & (1-\frac{b}{2})(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como valor propio a $-(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}$. Los restantes valores propios se calculan encontrando las raíces del polinomio cuadrático

$$P(m) = m^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)(1-s_c^2)^{\frac{b}{2}}m - (1-s_c^2)^b \frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda^2 v_c^2} = 0.$$

Este es el mismo polinomio del caso anterior, que como vimos tiene una raíz positiva y una negativa.

Por lo tanto, también en este caso, el punto c tiene una variedad estable de dimensión 2, y una inestable de dimensión 1. Para el punto c' , se obtiene de igual manera que tiene una variedad inestable de dimensión 2, y una estable de dimensión 1.

- Sólo resta ver el caso Newtoniano: $a = 0$, $b = 1$. Aquí la función $\tilde{U} = \text{cte}$. El espacio tangente a la superficie invariante de energía en el punto c es

$$T_c F = \{(\rho, \gamma, \sigma, \chi) : (\tilde{U}(s_c) + h)\rho + v_c \gamma = 0\},$$

renombramos la energía $h' = \tilde{U}(s_c) + h$, y entonces la parte lineal del campo vectorial (3.21) aplicada a puntos de la forma $(\rho, -\frac{h'}{v_c}\rho, \sigma, \chi)$ en $T_c F$ es

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{1}{2}}\rho \\ (1-s_c^2)^{\frac{1}{2}}\frac{h'}{v_c}\rho \\ \chi/\lambda \\ (1-s_c^2)\frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2}\sigma - \frac{1}{2}(1-s_c^2)^{\frac{1}{2}}\chi \end{pmatrix}.$$

Se propone como base para este espacio tangente a

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -v_c \\ h' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la matriz representante de \bar{J} en esta base es

$$J^* = \begin{pmatrix} -(1-s_c^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & (1-s_c^2)\frac{\tilde{V}''(s_c)}{\lambda v_c^2} & \frac{1}{2}(1-s_c^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Al igual que en los dos casos anteriores, existen dos valores propios negativos y uno positivo. Por lo tanto, el punto c es hiperbólico, tiene una variedad estable de dimensión 2, y una inestable de dimensión 1. Para el punto c' , se obtiene que tiene una variedad inestable de dimensión 2, y una estable de dimensión 1.

4.5. Flujo sobre Λ . Hemos visto que el flujo sobre la variedad de colisión total, queda caracterizado de acuerdo al valor del grado de homogeneidad $-b$ de la función V . Este flujo se presenta de manera resumida enseguida.

Si $b < 2$, el flujo es creciente en la coordenada v a lo largo de soluciones y los puntos de equilibrio c y c' son hiperbólicos. Estos son además los únicos puntos de equilibrio del flujo global. Lo anterior se representa esquemáticamente en la Fig. 3.5.a.

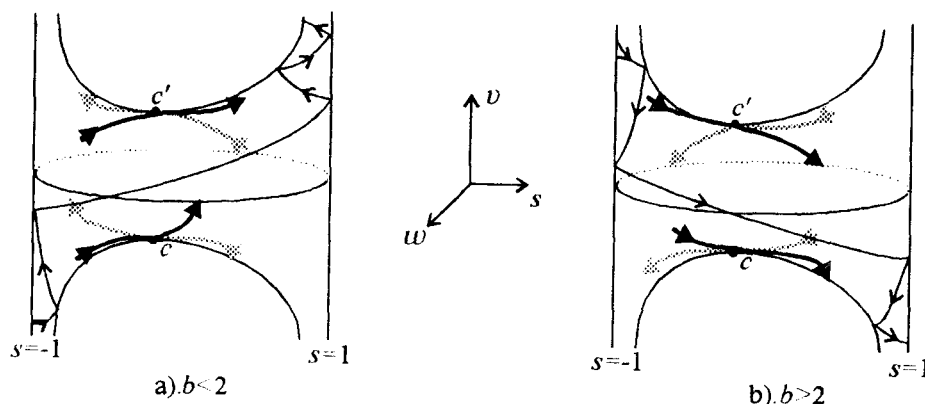


Fig. 3.5. Flujo sobre la variedad de colisión Λ .

Si $b > 2$, el flujo es decreciente en la coordenada v . Los puntos c y c' son los únicos puntos del flujo global, y son hiperbólicos. Este flujo está representado en la Fig. 3.5.b.

Si $b = 2$, entonces $v' = 0$ en esta variedad. Es decir, que v es constante a lo largo de soluciones. Por lo tanto, las órbitas quedan definidas sólo en términos de las coordenadas (s, w) . Los puntos de equilibrio son también hiperbólicos.

Veíamos que en este caso, obtuvimos dos campos vectoriales regularizados ((3.20) y (3.22)). En el primero, se obtiene un flujo diferenciable, pero se crean puntos de equilibrio en las colisiones binarias. Tenemos por tanto que todas las órbitas en Λ son heteroclínicas, o bien homoclínicas.

El segundo campo vectorial no es diferenciable sino sólo continuo. Podemos ver este caso como el caso límite de los anteriores cuando $b \rightarrow 2$. Entonces tenemos que la única manera de continuar las órbitas después de colisión binaria, es siguiendo por

el mismo nivel de $v = cte$ y recorriendo los valores de s y w dados por la relación de energía, lo que produce órbitas periódicas. Con esta idea obtenemos que Λ está foliada por órbitas periódicas, a excepción de las órbitas homoclínicas, que son las que pasan por los puntos c y c' . Esto se ve representado en la Fig. 3.6.

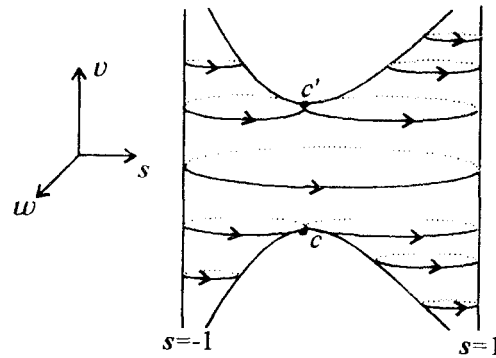


Fig. 3.6. Flujo sobre la variedad de colisión Λ , caso $b=2$.

5. ÓRBITAS DE COLISIÓN O EXPULSIÓN

En esta sección se estudiará el comportamiento de las órbitas de colisión, es decir, las órbitas que llegan a colisión total. Esto corresponde, en las coordenadas de McGehee, a las órbitas que se acercan de manera asintótica a la Variedad de colisión total Λ . Se estudiará entonces el ω -límite de tales órbitas, y esto dará información sobre el conjunto de condiciones iniciales cuyas trayectorias van a colisión.

Primero observemos una característica del flujo de nuestro problema ya regularizado (3.20). Se cumple la siguiente simetría:

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r, \\ v &\rightarrow -v, \\ s &\rightarrow s, \\ w &\rightarrow -w, \\ \sigma &\rightarrow -\sigma. \end{aligned}$$

Es decir, si tenemos que $\phi(\sigma) = (r, v, s, w)(\sigma)$ es una solución de (3.20), entonces $\varphi(\sigma) = (r, -v, s, -w)(-\sigma)$ también es solución. Por lo anterior, se dice que el flujo es reversible.

De esta propiedad del flujo, se sigue que basta sólo estudiar las órbitas de colisión, puesto que las órbitas de expulsión (las que salen de colisión total), pueden encontrarse por la reversibilidad.

Demos algunos antecedentes. Consideremos un espacio X y ϕ un flujo sin singularidades en X .

La órbita que pasa por x es el conjunto $\{\phi(x, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

El ω -límite de un punto x_0 se define como el conjunto

$$\omega(x_0) = \{q : \exists \{t_n\} \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi(x_0, t_n) \rightarrow q\}.$$

Y el α -límite de un punto x_0 es el conjunto

$$\alpha(x_0) = \{q : \exists \{t_n\} \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi(x_0, t_n) \rightarrow q\}.$$

Ahora enunciaremos un lema debido a McGehee.

Lema 25. *Sea X un espacio localmente compacto, y ϕ un flujo en X . Sea $x_0 \in X$ tal que su ω -límite es compacto no vacío. Si ϕ restringido a $\omega(x_0)$ es casi-gradiente, entonces $\omega(x_0)$ es un solo punto.*

La demostración de este lema es muy técnica y puede encontrarse en (McGehee, 1974). Este lema lo usaremos en el estudio del ω -límite de las órbitas de colisión total. Como esto depende del flujo sobre la variedad de colisión total, este estudio se dividirá en casos de acuerdo al valor del grado de homogeneidad $-b$.

5.1. Caso $1 \leq b < 2$. En este caso, el flujo sobre Λ es casi-gradiente con respecto a v ; es decir, la coordenada v es creciente a lo largo de soluciones que no sean puntos de equilibrio.

Se probará el siguiente teorema.

Teorema 26. *Las órbitas de colisión para el caso $b < 2$ alcanzan la variedad de colisión total Λ a través del punto de equilibrio c . Análogamente, las órbitas de expulsión salen de la variedad de colisión total del punto de equilibrio c' .*

Sea $\phi = (r, v, s, w)$ una solución del sistema (3.20) que termina en colisión total. Analizaremos la naturaleza del ω -límite de esta órbita.

Debido a que el flujo en Λ es casi gradiente, si se prueba que el ω -límite es compacto no vacío, entonces aplicando el Lema 25 se obtendría que este conjunto es un solo punto, y por tanto un punto de equilibrio. Como el único punto de equilibrio estable sobre Λ es c , entonces quedaría probada la proposición. Aplicando la reversibilidad del flujo, se obtiene la parte referente a las órbitas de expulsión.

Para probar que el ω -límite es compacto, sólo se requiere probar que r y v son acotados para la órbita ϕ después de un cierto tiempo σ , puesto que $s \in [-1, 1]$ y w se puede obtener de la relación de energía (3.21).

Para esta demostración, se requieren varios resultados previos.

Definamos los siguientes conjuntos:

$$S = \{\phi : r \leq \varepsilon, \text{ la órbita } \phi \text{ satisface la relación de energía (3.21)}\},$$

$$G = \{\phi \in S : |v| \leq \mu\},$$

$$G^+ = \{\phi \in S : v \geq \mu\}, \quad G^- = \{\phi \in S : v \leq -\mu\},$$

$$\gamma^+ = \{\phi \in G^+ : r = \varepsilon\}, \quad \gamma^- = \{\phi \in G^- : r = \varepsilon\},$$

$$\delta^+ = \{\phi \in S : v = \mu\}, \quad \delta^- = \{\phi \in S : v = -\mu\}.$$

La proyección de estos conjuntos al plano (r, v) , se representa en la Fig. 3.7.

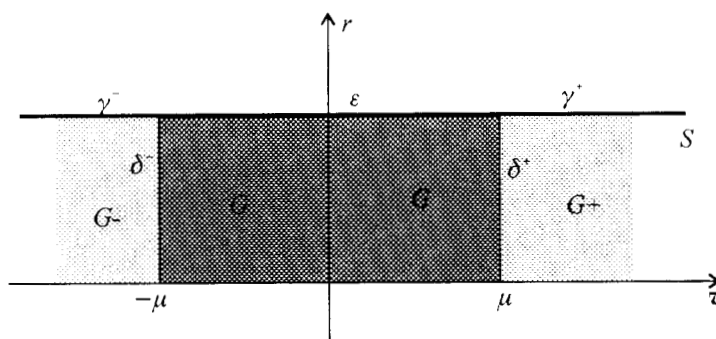


Fig. 3.7. Proyección al plano (v, r) .

Consideremos un intervalo de tiempo $[\sigma_1, \sigma_2]$. Sea $\phi[\sigma_1, \sigma_2]$ un segmento de órbita. Decimos que un segmento de órbita es maximal en un conjunto cerrado K si

- i) $\phi[\sigma_1, \sigma_2] \subseteq K$,
- ii) $\forall I : [\sigma_1, \sigma_2]$ subconjunto propio de I , $\phi(I) \not\subseteq K$.

Usaremos estos conceptos en la demostración del siguiente lema.

Lema 27. a) Para algún ε adecuado, si $\phi[\sigma_1, \sigma_2]$ es maximal en G^+ , entonces

$$\phi(\sigma_1) \in \delta^+, \quad \phi(\sigma_2) \in \gamma^+.$$

b) Para algún ε adecuado, el mismo que el del inciso anterior, si $\phi[\sigma_1, \sigma_2]$ es maximal en G^- , entonces

$$\phi(\sigma_1) \in \gamma^-, \quad \phi(\sigma_2) \in \delta^-.$$

Demostración del Lema 27.

Demostremos el inciso a). Supongamos que $\phi[\sigma_1, \sigma_2]$ es maximal en G^+ , luego en particular $\phi[\sigma_1, \sigma_2] \subseteq G^+$, y así, $v \geq \mu$, $\forall t \in [\sigma_1, \sigma_2]$ y $r \leq \varepsilon$. Ahora, sabemos que $v' > 0$ si $r = 0$, luego, para este intervalo de tiempo compacto, existe un ε tal que $v' > 0$ si $r \leq \varepsilon$. De esta forma, tenemos que para tal ε se cumple que v es creciente en $[\sigma_1, \sigma_2]$.

También observemos, de la ecuación para r' en (3.20), por ser $v \geq \mu > 0$, se tiene que $r' > 0$. Por tanto r es creciente en $[\sigma_1, \sigma_2]$.

De esto y por el hecho de que $[\sigma_1, \sigma_2]$ es maximal en G^+ , debe pasar que los puntos en δ^+ entran a G^+ , y se siguen hasta γ^+ , de donde salen de G^+ . Además, necesariamente $r(\sigma_1) > 0$, puesto que $r = 0$ es invariante bajo el flujo. Por lo tanto debe pasar $\phi(\sigma_1) \in \delta^+$, y $\phi(\sigma_2) \in \gamma^+$.

Demostración del inciso b). Supongamos que $\phi[\sigma_1, \sigma_2]$ es maximal en G^- , luego $v \leq -\mu$ y $r \leq \varepsilon$, $\forall t \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Escogiendo ε como en el inciso anterior, se obtiene que v es creciente en $[\sigma_1, \sigma_2]$. Y de la ecuación para r' en (3.20), por ser $v < 0$, se tiene que $r' < 0$ en este intervalo.

Como el intervalo es compacto y es maximal en G^- , los puntos en γ^- entran a G^- y llegan hasta δ^- . Y como necesariamente $r(\sigma_2) > 0$, entonces debe pasar lo requerido, $\phi(\sigma_1) \in \gamma^-$, y $\phi(\sigma_2) \in \delta^-$.

Demostración del Teorema 26.

Recordemos que ϕ es una órbita que va a colisión total, luego

$$r(\sigma) \rightarrow 0 \text{ si } \sigma \rightarrow \sigma_1,$$

pero como el conjunto de colisión total es invariante bajo el flujo, debe ser que σ_1 es infinito. Es decir,

$$r(\sigma) \rightarrow 0 \text{ si } \sigma \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, para lo que nos interesa podemos tomar $\phi \in S$. Como $v'(\sigma) > 0$ para σ finito pero suficientemente grande, entonces v es creciente, y podemos escoger μ tal que ϕ entra a G en un tiempo finito.

Con la siguiente afirmación completamos la demostración del teorema.

Para la elección de ε del Lema 27 y de μ tal que $\phi(\sigma_0) \in G$, entonces

$$\phi(\sigma) \in G, \quad \forall \sigma > \sigma_0.$$

La demostración se hará por contradicción. Primero supongamos que existe $\sigma_3 > \sigma_0$ tal que $\phi(\sigma_3) \in G^+$. Es decir, se cumple que $v(\sigma_3) \geq \mu$ y $r(\sigma_3) \leq \varepsilon$.

Como $r(\sigma) \rightarrow 0$, entonces no puede pasar $r(\sigma) = \varepsilon$ para σ grande, luego ϕ no entrará a γ^+ . Así que $\phi([\sigma_3, \infty))$ es maximal el G^+ .

Tenemos pues que $v(\sigma) \geq \mu$, $\forall \sigma \geq \sigma_3$. Luego, observando la ecuación para r' en (3.20), se tiene que $r' > 0$, $\forall \sigma \geq \sigma_3$. Se tiene entonces que r es creciente después de σ_3 , lo cual es imposible puesto que $r(\sigma) \rightarrow 0$.

Por lo tanto, $\phi(\sigma) \notin G^+$, $\forall \sigma > \sigma_0$.

Por otro lado, como v es creciente en S , entonces no puede pasar que $\phi(\sigma) \in G^-$ para algún $\sigma > \sigma_0$. Esto prueba la afirmación.

Ahora concluyamos con la demostración del teorema. Como G es compacto, y el ω -límite de la órbita de colisión ϕ es cerrado, entonces es compacto. Es no vacío, puesto que este ω -límite se obtiene como el límite de una sucesión contenida en un compacto, luego tiene al menos una subsucesión convergente y por tanto el límite existe. Además está sobre la variedad de colisión Λ . Aplicando el Lema 25, obtenemos que este ω -límite es un punto, y necesariamente, es un punto de equilibrio.

Por el análisis que se hizo sobre las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio en Λ , entonces este ω -límite es el punto c , el cual tiene una variedad estable de dimensión 2.

De la misma forma concluimos que el α -límite de las órbitas de expulsión es el punto de equilibrio c' , el cual tiene una variedad inestable de dimensión 2.

Así concluye la demostración del teorema. Este resultado nos indica que para $b < 2$, las colisiones totales ocurren asintóticamente con una configuración muy específica, que corresponde a que en el límite, el vector de configuración es paralelo al vector $M^{-1}\nabla V$. En otras palabras, ya que cerca de colisión total la parte del potencial que domina es V , las órbitas terminan en lo que sería una configuración central si sólo se tuviera esta función como potencial.

Del hecho de que la variedad estable del punto de equilibrio c es de dimensión 2, se puede concluir la siguiente proposición:

Proposición 28. *El conjunto de condiciones iniciales que terminan en colisión total, para el caso $b < 2$, es de medida 0.*

5.2. Caso $b > 2$. Aquí, el flujo sobre la variedad de colisión total Λ es casi-gradiante con respecto a la función $-v$; es decir, el flujo decrece en la coordenada v a lo largo de soluciones que no son de equilibrio. Veremos que esto cambia radicalmente el comportamiento de las órbitas de colisión.

Tomaremos una condición inicial (r_0, v_0, s_0, w_0) , en el tiempo σ_0 , que cumpla

$$r_0 \approx 0, \quad v_0 < 0, \quad s_0 \neq \pm 1.$$

Recordemos que la coordenada w_0 se obtiene de la relación de energía (3.21).

Obsérvese que cuando $s = \pm 1$, ocurre un punto de inflexión en r y v .

Puesto que el flujo sobre Λ cumple que $v' < 0$, entonces, por continuidad se tiene que para este tiempo inicial, $v'(\sigma_0) < 0$, y entonces v es negativo y decrece. De la ecuación para r' en (3.20), se tiene que $r'(\sigma_0) < 0$, luego r también decrece, y de esta forma se tiene que $r(\sigma) < r_0$, para $\sigma > \sigma_0$.

Por tanto debe suceder que $r'(\sigma) < 0$ y $v'(\sigma) < 0$, $\forall \sigma > \sigma_0$.

Afirmación. Para esta condición inicial, la órbita resultará en colisión total.

Demostración. Si sucede que esta condición inicial está en la variedad estable del punto de equilibrio c , entonces trivialmente será de colisión, por lo que dejamos fuera este caso.

Supongamos que la órbita no termina en colisión total, es decir, que existe un número $\delta > 0$ tal que $\delta \leq r(\sigma) \leq r_0$ para $\sigma > \sigma_0$.

Supongamos ahora que v es acotado, es decir, que existe μ tal que $|v| < \mu$, entonces se tiene que esta órbita está contenida en un conjunto compacto, y por tanto su ω -límite es un compacto. Además el flujo en este compacto es casi-gradiente, puesto que $v' < 0$, luego aplicando el Lema (25) se sigue que este ω -límite es un punto de equilibrio. Sin embargo, no existen puntos de equilibrio fuera de la variedad de colisión total, así que este caso no puede darse.

Luego, se tiene que $v(\sigma) \rightarrow -\infty$ si $\sigma \rightarrow \infty$.

Las ecuaciones para r' y v' en (3.20), pueden escribirse como sigue,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma} &= \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{b}{2} - 1 \right) \left(v^2 - \frac{W(s)}{(1-s^2)^b} \right) + (2-a)r^{b-a}\tilde{U}(s) + 2hr^b \right], \\ \frac{dr}{d\sigma} &= \frac{(1-s^2)^b}{W(s)^{\frac{1}{2}}} rv. \end{aligned}$$

Si $s \neq \pm 1$, podemos calcular la proyección de la órbita a las coordenadas (v, r) ,

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{b}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{rv} \right) [v^2 - 2\tilde{V}(s)] + \left(\frac{1}{rv} \right) [(2-a)r^{b-a}\tilde{U}(s) + 2hr^b]. \quad (3.25)$$

El objetivo será ahora analizar el límite de esta pendiente cuando $\sigma \rightarrow \infty$, es decir, cuando $v \rightarrow -\infty$.

La relación de energía (3.21), puede escribirse de la siguiente forma,

$$\frac{w^2}{(1-s^2)^b} + \frac{v^2}{2\tilde{V}(s)} = 1 + \frac{(1-s^2)^b}{W(s)} (2r^{b-a}\tilde{U}(s) + 2hr^b),$$

y por ser $\delta \leq r \leq r_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(1-s^2)^b}{W(s)}(2\delta^{b-a}\tilde{U}(s) + 2h\delta^b) &\leq \frac{w^2}{(1-s^2)^b} + \frac{v^2}{2\tilde{V}(s)} \\ &\leq 1 + \frac{(1-s^2)^b}{W(s)}(2r_0^{b-a}\tilde{U}(s) + 2hr_0^b). \end{aligned}$$

Se observa que para cada s fija, w y v están entre dos elipses, las cuales se alargan si $s \approx \pm 1$, y sucede en este caso que $v \rightarrow \pm\infty$ y $w \rightarrow 0$.

Ahora bien, para $r = 0$, se tiene que

$$v^2 - 2\tilde{V}(s) = -\frac{2\tilde{V}(s)w^2}{(1-s^2)^b} \leq 0,$$

luego se tiene que $v^2 \leq 2\tilde{V}(s)$. Si observamos cualquiera de las ramas de la variedad inestable de c sobre Λ , vemos que la diferencia $v^2 - 2\tilde{V}(s)$ es no acotada cada vez que se pasa por colisión binaria ($s = \pm 1$), pero conforme v decrece a $-\infty$, esta diferencia es cada vez menor para cualquier punto en que $s \neq \pm 1$. En el límite, esta diferencia es 0.

En nuestro caso, la órbita por ser muy cercana a Λ ($r \leq r_0$), tendrá que “acompañar” a alguna de las ramas de esta variedad inestable (ver Fig. 3.8), y entonces podemos aplicar continuidad respecto a condiciones iniciales para concluir que $v^2 - 2\tilde{V}(s)$ se mantiene acotada para $s \neq \pm 1$.

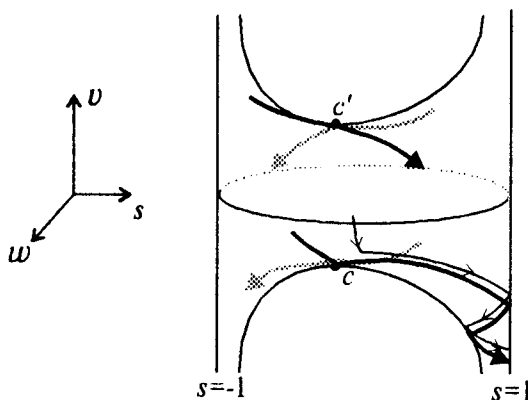


Fig. 3.8. Seguimiento de una órbita cercana a Λ

Por tanto, si tomamos el límite de (3.25) cuando $v \rightarrow -\infty$, considerando que $r \geq \delta$, obtenemos que

$$\frac{dv}{dr} \rightarrow 0.$$

De lo anterior se tiene que

$$\frac{dr}{dv} \rightarrow \infty.$$

Sin embargo esto no es posible, puesto que en esta proyección, al ser r y v decrecientes, y $r > 0$, debe suceder que

$$\frac{dr}{dv} \rightarrow 0.$$

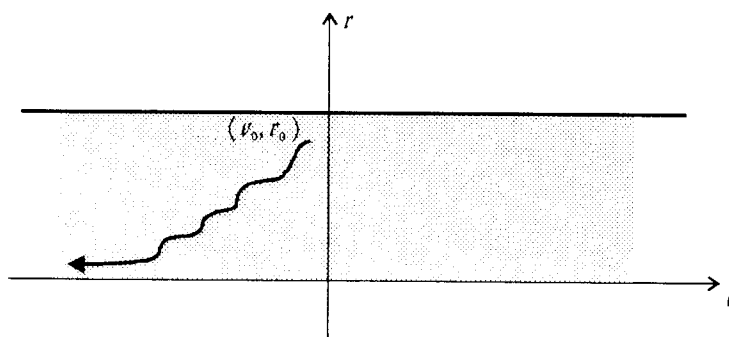


Fig. 3.9. Proyección al plano (v, r) de una órbita cercana a Λ .

Por lo tanto, suponer que la órbita no es de colisión, implica una contradicción. Esta afirmación da lugar al siguiente teorema, que es el principal resultado de la tesis.

Teorema 29. *Para $b > 2$, el conjunto de condiciones iniciales cuyas órbitas respectivas terminan en puntos de equilibrio de Λ tiene medida cero. En este caso, la colisión total es del orden $(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}$. El conjunto de condiciones iniciales cuyas órbitas terminan en colisión total, pero no en puntos de equilibrio, tiene medida positiva.*

Demostración

La variedad estable del punto de equilibrio c es de dimensión 2, y esta variedad corresponde a las condiciones iniciales cuyas órbitas son de colisión y terminan en ese punto de equilibrio. Por tanto la medida de este conjunto es cero. Se vio en la Sección 4 del Capítulo 1 que la determinación del orden de la colisión total depende de la configuración asintótica en el momento de la colisión. Si la colisión ocurre en un punto de equilibrio, entonces la configuración asintótica es paralela al vector $M^{-1}\nabla V$, la cual corresponde a una configuración en la que las distancias mutuas son

proporcionales. Luego se aplica la Proposición 5, para concluir que el orden de la colisión es $(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}$.

Por otra parte, se probó que existen órbitas de colisión para las cuales $v \rightarrow -\infty$, luego de hecho su ω -límite es un conjunto vacío. La condición inicial para la cual se probó la afirmación anterior, se tomó de manera arbitraria con $r \approx 0$ y $v < 0$. Luego, podemos tomar todo un abierto de condiciones iniciales cercanas a ésta para las que se puede seguir un argumento similar y concluir que terminarán en colisión total. De este hecho se sigue lo requerido.

La órbita analizada en este punto, ejemplifica que para $b > 2$ se pueden generar movimientos muy diferentes a los conocidos en el caso newtoniano. En particular, aquí se ha demostrado la existencia de órbitas que colisionan en una configuración totalmente diferente a la de una configuración central. Puede ser que una órbita de colisión se acerque a Λ por cualquiera de las dos ramas, lo cual corresponde a dos movimientos diferentes. Si se acerca a la rama de $s = -1$, entonces las partículas m_1 y m_2 se mantienen chocando mientras la tercera m_3 se acerca para producir colisión total. En el caso de que se acerque a la rama de $s = 1$, entonces se producen muchas colisiones de m_2 y m_3 hasta que m_1 llega a colisión triple.

En un problema Newtoniano, si se produce colisión binaria entonces la tercer partícula obtiene tanta energía cinética que el sistema termina escapando, a diferencia del caso estudiado aquí, en que las partículas si llegan a colisión triple, aún produciéndose muchas colisiones binarias entre dos de las partículas.

5.3. Caso $b=2$. Si $b = 2$, entonces $v' = 0$ en la variedad Λ .

Recordar que en este caso obtuvimos un flujo continuo a partir de las ecuaciones (3.22). Para poder analizar el flujo cerca de colisión total, reducimos las condiciones de regularización a la obtención de un campo continuo, y nos quedamos con este flujo. Así obtenemos que Λ está foliada de órbitas periódicas, con excepción de las órbitas homoclínicas que llegan a los puntos de equilibrio c y c' .

En estas ecuaciones (3.22), la ecuación para v' es

$$v' = \frac{(1 - s^2)^{\frac{3}{2}}}{W(s)^{\frac{1}{2}}} [(2 - a)r^{2-a}\tilde{U}(s) + 2hr^2].$$

Recordar que debe tenerse $a \leq 1$. Luego, aún para $h < 0$, si se toma una condición inicial con r suficientemente pequeño, se obtiene que $v' > 0$, es decir, cerca de la variedad de colisión total, el flujo crece respecto a la coordenada v .

Esta característica del flujo es muy similar a la que se tenía en el caso $b < 2$. Luego, podemos definir el conjunto S como

$$S = \{\phi : r \leq \varepsilon, \text{ la órbita } \phi \text{ está en el nivel de energía fijo } h\},$$

y en este conjunto se cumplirá que $v' > 0$.

Así, podemos proceder de manera totalmente análoga a ese caso, y obtendremos el resultado siguiente:

Teorema 30. *Para $b = 2$, el ω -límite de las órbitas de colisión, es un conjunto compacto no vacío. Análogamente, el α -límite de las órbitas de expulsión, es compacto no vacío.*

Sin embargo, la diferencia en este caso es que el flujo sobre la variedad de colisión total no es casi-gradiente, luego no se aplica el Lema 25.

Entonces el ω -límite de las órbitas de colisión no necesariamente es un punto de equilibrio, pero por ser un compacto de Λ , entonces es un punto de equilibrio, o una órbita periódica, o una órbita homoclínica.

Ahora bien, si tomamos una condición inicial cercana a la variedad de colisión Λ con $v > 0$, se tiene de la ecuación para r' en (3.22) que $r' > 0$, luego esta solución escapará de Λ . Y esto sucede para cualquier condición inicial con r suficientemente pequeño. Por lo tanto el α -límite de las órbitas de expulsión es cualquier órbita periódica u homoclínica en Λ con $v > 0$.

Por la reversibilidad del flujo, se obtiene que el ω -límite de las órbitas de colisión es una órbita periódica u homoclínica de Λ con $v < 0$.

Como la condición inicial considerada es arbitraria con $r \approx 0$, se puede concluir la siguiente proposición.

Proposición 31. *El conjunto de condiciones iniciales que terminan en colisión total, para $b = 2$, es de medida positiva.*

Las órbitas analizadas aquí permiten concluir que también en este caso, al igual que en $b > 2$, se pueden generar una gran variedad de movimientos no conocidos en el caso newtoniano. Las órbitas que colisionan y que tiene como ω -límite a una órbita periódica en Λ con $-v_c < v < 0$ ($-v_c$ es la coordenada del punto c), corresponden a movimientos en que las partículas se acercan a colisión total pero en donde la partícula central se mantiene chocando alternadamente con las partículas m_1 y m_3 . Las que tienen como ω -límite a una órbita periódica con $v < -v_c$, corresponde a cuando la partícula central colisiona con una de las partículas laterales antes de producirse la colisión triple.

Conclusiones

Estudiar la dinámica de un problema cuasihomogéneo dio lugar a la comprensión más profunda de lo que se conoce en general sobre los problemas newtonianos, y de qué forma los movimientos generados quedan determinados por el grado de homogeneidad de las partes del potencial.

En el estudio de un Problema Cuasihomogéneo de los n cuerpos, fue posible en algunos casos generalizar resultados conocidos en problemas clásicos usando las mismas técnicas de Mecánica Celeste, pero su uso debió ser más cuidadoso para entender los cambios que resultan de la diferente geometría del problema. De alguna manera se observó que la homogeneidad del potencial newtoniano permite tener una idea geométrica más clara de ciertos movimientos, mientras que la cuasihomogeneidad da lugar a una gran variedad de movimientos que incrementan la complejidad del problema.

En esta tesis se observó que la cuasihomogeneidad del potencial conserva en algunos casos la dinámica del sistema cerca de colisión, y en otros es posible conocer en términos cualitativos los diferentes tipos de movimiento existentes.

Un primer vistazo a las diferencias que resultan de la cuasihomogeneidad del potencial, es el hecho de que en la Identidad de Lagrange-Jacobi (Cap. 1), se pueden tener expresiones negativas o cero de la segunda derivada del momento de inercia, dependiendo de los grados de homogeneidad de las funciones del potencial. Además, en esta identidad, se obtiene la relación entre la segunda derivada del momento de inercia \ddot{I} , la energía total, y las funciones del potencial; sin embargo, no se puede dar una expresión que relacione a la energía cinética con lo anterior.

Más claramente, en el caso newtoniano, y en general en un caso homogéneo donde el potencial U tiene grado de homogeneidad $-a$, se puede obtener la siguiente expresión,

$$\ddot{I} = (2 - a)U + 2h = (2 - a)T + ah,$$

donde T es la energía cinética y h la energía total.

Esta ecuación es la que permite obtener el Teorema de Sundman para $a < 2$, el cual nos dice que si existe colisión total en un sistema de n partículas, entonces el momento angular del sistema es cero. Sin embargo, para $a \geq 2$, no es posible concluir

este resultado.

Esta misma ecuación se usa en los problemas clásicos para encontrar el comportamiento del momento de inercia cerca de colisión. Se sabe que éste es del tipo $A(t - t_0)^{2/3}$, donde t_0 es el momento de la colisión. Aquí se pretendió generalizar este resultado al caso cuasihomogéneo con una diferente técnica, y se logró una afirmación concluyente para un sistema de dos partículas. Para tres partículas o más, se vio que este resultado depende de la configuración asintótica en el momento de la colisión, y pudo verse que para tres partículas colineales, si la colisión ocurre en un punto de equilibrio de la variedad de colisión Λ , entonces el orden de la colisión es

$$A(t - t_0)^{\frac{2}{2+b}}.$$

Sin embargo, puede pensarse que no existe una expresión general, debido a que para $b > 2$ se generan movimientos en los que la configuración asintótica en la colisión total puede ser muy variada.

Al estudiar el comportamiento cerca de colisión de un problema cuasihomogéneo, se observó que la parte del potencial con mayor grado de homogeneidad es la que determina la dinámica. En este trabajo, se hizo necesario la separación en casos dependiendo del valor del grado de homogeneidad $-b$ de la función V , y se obtuvo que los movimientos se pueden englobar en los casos $b < 2$, $b = 2$ y $b > 2$.

En el Capítulo 2 se usaron las coordenadas de McGehee en el problema cuasihomogéneo de dos cuerpos para estudiar el comportamiento cerca de colisión. Fue posible demostrar la existencia de movimientos que terminan en colisión total (en este caso binaria) aún con momento angular diferente de cero, para $b \geq 2$. También pudo verse que para $b < 2$ y $b - a \geq 1$, si existe colisión entonces el momento angular es cero. Además fue posible describir la dinámica global del sistema puesto que éste es un problema integrable.

Cuando se estudió un sistema de tres partículas con potencial cuasihomogéneo, se requirió hacer la regularización de las colisiones binarias que se producen, lo cual originó la necesidad de comprender bien estos conceptos y lo que ocurre al variar el grado de homogeneidad. Por tanto en el Capítulo 2 se incluyó lo concerniente a regularización de colisiones binarias y sus diferentes conceptos. Aquí se encontró que hay diferentes formas en las que se puede hablar de regularización, y que nuevamente el resultado de la continuación de órbitas depende del grado de homogeneidad $-b$. Como a nosotros nos interesaba un problema en el que las partículas eran colineales, se tomó como base que la continuación de las órbitas debía ser simétrica respecto al momento de colisión, lo cual coincide con la regularización de Sundman que se hizo en el Capítulo 3. También se estudió el caso en que se tuvo que reducir las condiciones de regularización a la continuación de órbitas de una manera sólo continua y no diferenciable.

En el estudio del Problema colineal cuasihomogéneo de tres cuerpos se evidenció la gran variedad de movimientos que pueden generarse cuando se consideran diferentes grados de homogeneidad. Nos concentramos en el estudio del movimiento cerca de colisión triple, y como se mencionó antes, la dinámica se puede separar en los casos $b < 2$, $b = 2$ y $b > 2$. En los casos con $b \geq 2$ se encontraron movimientos en los que las partículas van a colisión triple con una configuración que puede variar mucho de una configuración central, lo cual produce movimientos no conocidos en la mecánica newtoniana, como que dos de las partículas estén colisionando mientras la tercera se acerca para producir colisión triple, o puede pasar que la partícula central tenga choques con ambas partículas antes de la colisión total.

También pudo concluirse que las colisiones totales son más comunes en los casos en que $b = 2$ y $b > 2$, puesto que se probó que la medida del conjunto de condiciones iniciales que van a colisión triple tiene medida positiva en el sistema de tres cuerpos colineales. De hecho puede concluirse que los movimientos más raros son los más comunes, puesto que el conjunto de órbitas que producen colisión triple en configuración muy diferente a configuración central, tiene medida positiva.

El estudio de problemas cuasihomogéneos ofrece aún muchas preguntas, y sobre todo, el empleo de técnicas que pueden llevar a entender mejor los resultados en los problemas clásicos.

Bibliografía

- Conley, C. and Easton, R., *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971) 35-61.
- Delgado-Fernández, J., Pérez-Chavela, E., *Singularidades en Mecánica Celeste*, Aportaciones matemáticas. Comunicaciones 5 (1986), 155-172.
- Delgado, J., Diacu, F., Lacomba, E., Mingarelli, A., Mioc V., Pérez, E., Stoica, C. *The global flow of the Manev Problem*, aparecerá en J. of Math. Phy.
- Easton, R., *Regularization of vector fields by surgery*, J. of Differential Equations 10 (1971), 92-99.
- Estabrook F.M., *Post-newtonian n-body equations of the Brans-Dicke Theory*, Astrophys. J. Vol. 158 (1969), 81-83.
- Levy, B.G., *Nueva evidencia confirma viejas predicciones sobre las fuerzas retardadas*, Adap. Jiménez, L., Aquino, A., ContactoS 9 (1995), 31-34.
- Liboff, R.L., *Dipole and higher multipole particle creation in the steady state universe*, Astrophys. J. 431 (1994), 69-73.
- Liboff, R.L., *Generalized Newtonian force law and hidden mass*, Astrophys. J. 397 (1992) L71-L73.
- Maneff, G., *Die gravitation und das prinzip von wirkung und gegenwirkung*, Zeitschrift für Physik 31 (1925), 786-802.
- Maneff, G., *La gravitation et l'énergie au zéro*, Comptes Rendus 190 (1930), 1374-1377.
- Maneff, G., *La gravitation et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, Comptes Rendus 178 (1924), 2159-2161.

- Maneff, G., *Le principe de la moindre action et la gravitation*, Comptes Rendus 190 (1930), 963-965.
- Margenau, H. *Theory of intermolecular forces*, Pergamon Press, Oxford, (1971).
- McGehee, R., *Double collisions for a classical particle system with nongravitational interactions*, Comment. Math. Helvetici 56 (1981), 524-557.
- McGehee, R., *Triple collision in the collinear three-body problem*, Inventiones Math. 27 (1974) 191-227.
- Mioc, V., *Elliptic-type motion in Fock's gravitational field*, Astron. Nachr. 315 (1994), 175-180.
- Moeckel, R., *Celestial Mechanics (specially central configurations)*, preliminary lecture notes, School and workshop on variational and local methods in the study of hamiltonian systems, en Trieste, Italia (1994).
- Saslaw, W.C. *Motion around a source whose luminosity changes*, Astrophys. J. 226 (1978), 240-252.
- Shih, A., Parsegian, V.A. *VanderWaals forces between heavy alkali atoms and gold surfaces*, Phys. Rev. A 12 (1975), 835-852.
- Szebehely, V.G., *Theory of orbits*, Academic Press, USA (1967).
- Torrens, I.M., *Interatomic potentials*, Academic Press, N.Y. (1972).
- Wilson, F. W. Jr. and Yorke, J., *Lyapunov functions and isolating blocks*, J. of Differential Equations 13 (1973), 106-123.
- Wintner, A., *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press., Princeton NJ (1941).