Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIA

CONSERVATIVIDAD DE LA SOLUCIÓN MINIMAL DE LA ECUACION DE LINDBLAD

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

PRESENTA

MAXIMINO CRUZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

México, D.F., A 19 DE MARZO DE 2004.

Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa.
División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

" CONSERVATIVIDAD DE LA SOLUCIÓN MINIMAL DE LA ECUACIÓN DE LINDBLAD "

Tesis que para obtener el grado de Maestro
en Ciencias (Matemáticas) presenta:

Maximino Cruz Martínez

Julio César G.

Director de Tesis:
Dr. *Julio César García Corte*

México. D. F. a 19 de Marzo de 2004

Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa.
División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

" CONSERVATIVIDAD DE LA SOLUCIÓN MINIMAL DE LA ECUACIÓN DE LINDBLAD "

Tesis que para obtener el grado de Maestro
en Ciencias (Matemáticas) presenta:

Maximino Cruz Martínez

Julio César G.

Director de Tesis:
Dr. *Julio César García Corte*

México. D. F. a 19 de Marzo de 2004

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo está dedicado a las siguientes personas:

Mi hermano:

Tiburcio Cruz Martínez.
Gracias a su apoyo económico incondicional, fue posible que concluyese la maestría.

Dr*. *Julio Cesar García Corte.
Investigador de tiempo completo, en el área de probabilidad, U. A. M. I.
Gracias a su ardua labor e interés inagotable por el trabajo fue posible que éste se concluyese con éxito.

A los doctores :
Dr*. *Jorge A*. *León Vázquez.
Dr*. *Roberto Quezada Batalla.
Dr*. *Juan Ruíz de Chavez Somosa.
Por aceptar ser mis sinodales.

Mis padres:
Angel Cruz Arias.
Juana Martínez Ramírez.

Mis hermanos:
Aurelio, ***Herminia***, ***Angel Jr*. *Matilde y Mariana***.

Mis sobrinos:
Edi y Griselda.
Todos ellos aun en la distancia, nunca dejaron de apoyarme moralmente.

vfil eject

INTRODUCCION

El propósito del presente trabajo es exponer la teoría de los semigrupos dinámicos cuánticos (S.D.C.). Los resultados que se exponen se encuentran en [8], aquí los hemos desarrollado incluyendo sus respectivos detalles con al intención de que este trabajo sirva de motivación y apoyo a otros sobre esta misma área de investigación. La proposición 3.2.11 es una extensión de la proposición 3.33 pág 64 de [8] y se demuestra por primera vez en [12]. En el primer capítulo se exponen los antecedentes necesarios para comprender en qué consiste la teoría de los semigrupos dinámicos cuánticos. Habrá quizás uno que otro resultado que no esté demostrado en esta primera parte, pero se incluyen referencias donde el lector podrá consultar las demostraciones necesarias.

Un problema importante de esta teoría es determinar cuándo un semigrupo dinámico cuántico (S.D.C.) es conservativo. El semigrupo dinámico cuántico minimal (S.D.C.M.)) que en este trabajo se construye en capítulo 3 a partir de un semigrupo de contracciones y cuando éste es conservativo, es decir, preserva a el operador identidad, es la única solución a la ecuación de Lindblad, ecuación (3.6) Capítulo 3, pág. 49 de este trabajo. También en el capítulo 3 se dan condiciones necesarias y suficientes para la conservatividad del S.D.C.M. Posteriormente en el capítulo 4 bajo la hipótesis **AA** y **C**, (págs. 69-84) se desarrollan los principales criterios (condiciones suficientes) que garantizan la conservatividad del S.D.C.M. Por último en el capítulo 5 se exponen ejemplos en los cuales aplicamos la teoría desarrollada

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo desarrollamos los prerrequisitos necesarios para el resto del trabajo. Aunque no demostramos todos los resultados aquí enunciados indicaremos las referencias donde el lector podrá encontrar más detalles y las demostraciones correspondientes.

Definición 1.0.1 *Sea U un espacio vectorial con coeficientes en los complejos $\mathbb{C}$. El espacio U es llamado un* álgebra *si existe una operación tal que a cada par de elementos $a, b \in U$ se le asocia un elemento denotado por ab. Esta operación tiene las siguientes propiedades.*

1) $a(bc) = (ab)c$
2) $a(b + c) = ab + ac$
3) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$, *con* $\alpha \in \mathbb{C}$.

El álgebra U es llamada conmutativa o abeliana si $ab = ba$; para todo $a, b \in U$.

Definición 1.0.2 *El álgebra U es normada si a cada elemento $a \in U$ hay asociado un número real positivo $\|a\|$; donde $\|\cdot\|$ satiface:*

1) $\|a\| \geq 0$; *y* $\|a\| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.
2) $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$.
3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.
4) $\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\|$; *con* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 1.0.3 *Una* $*$-álgebra *es una álgebra compleja U con una* involución *denotada por * con las siguientes propiedades:*

$$
\begin{aligned}
(a^*)^* &= a. \\
(ab)^* &= b^* a^*. \\
(\lambda a + \mu b)^* &= \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*;
\end{aligned}
$$

donde λ y $\mu \in \mathbb{C}$.

Definición 1.0.4 *Una* $*$-álgebra *U normada completa con la propiedad $\|a^*\| = \|a\|$, para $a \in U$; se llama *-álgebra de Banach.*

Definición 1.0.5 *Una C*-álgebra es una $*$-álgebra U de Banach con la propiedad de que para todo $a \in U$ $\|aa^*\| = \|a\|^2$.*

Ejemplo 1.0.6 *Sea h un espacio de Hilbert y denotemos por $B(h)$ el espacio de todos los operadores acotados en h. Las operaciones de suma y productos de elementos de $B(h)$ son las usuales. La norma de operadores $\|\cdot\|_\infty$ en $B(h)$ es la siguiente, sea $Z \in B(h)$*

$$\|Z\|_\infty = \sup\{\|Z(a)\| : a \in h, \|a\| = 1\}$$

y la involución es el adjunto. Claramente se tiene que $(B(h), \|\cdot\|_\infty)$ es una C^*-álgebra.

Ejemplo 1.0.7 *Sea X un espacio localmente compacto, $C_0(X;\mathbb{C})$ el espacio de las funciones continuas sobre X que se anulan en el infinito, es decir dado $f \in C_0(X;\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K^c$, el complemento de K. Definamos una norma en $C_0(X;\mathbb{C})$ de la siguiente forma*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

*como involución * tómese $f(x)^* = \overline{f(x)}$. Así $C_0(X;\mathbb{C})$ es una C^*-álgebra y además es conmutativa.*

Definición 1.0.8 *Sea U un álgebra con identidad y $a \in U$, el conjunto **resolvente** de a es:*

$$\rho_U(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - a \text{ es invertible}\}$$

*y el **espectro** de a es el complemento de $\rho_U(a)$.*

Proposición 1.0.9 *Cualquier $a \in B(h)$ C^*-álgebra tiene una descomposición única en términos de elementos autoadjuntos a_1 y a_2,*

$$a_1 = \frac{a + a^*}{2} \quad y \quad a_2 = \frac{a - a^*}{2i}$$

donde $a = a_1 + ia_2$. Además a_1 y a_2 se pueden expresar como combinación lineal de dos positivos.

Demostración.

Ver.[3], pág.38. ■

Definición 1.0.10 *Un *-morfismo entre dos *-álgebras U y V, es una tranformación lineal $\pi : U \to V$ tal que:*

1) $\pi(uv) = \pi(u)\pi(v)$.

2) $\pi(u^*) = (\pi u)^*$

para todo $u, v \in U$.

*Si además $\pi(I) = I$ entonces π se llama ***-homomorfismo**.*

Definición 1.0.11 *Una representación de una U C^*-álgebra es una pareja $(h;\pi)$; donde h es un espacio de Hilbert y π es un * -morfismo de U a $B(h)$:*

Definición 1.0.12 *Un elemento $a \in U$ C^*álgebra es llamado positivo$(a \geq 0)$ si existe $b \in U$ tal que $a = b^*b$; o si es combinación lineal con coeficientes positivos de elementos de esta forma, y es estrictamente positivo si es distinto de cero.*

Definición 1.0.13 *Sean U, V dos C^*-álgebras y $T : U \to V$ lineal, T es llamado n positivo si para cada $a_1; \ldots; a_n \in U$ y $b_1; \ldots; b_n \in V$ se tiene lo siguiente:*

$$\sum_{i;j=1} b_i^* T(a_i^* a_j) b_j \geq 0. \qquad (1;1)$$

T es llamado positivo si es 1 positivo, es decir manda elementos positivos en positivos: T es **Completamente Positivo (CP)** *si es n positivo para cada $n \geq 1$:*

Proposición 1.0.14 *Sea $U; V$ dos C^*álgebras y $T : U \to V$ completamente positivo entonces se cumple que*

$$T(a^*) = T(a)^*:$$

Demostración.
a) Sea $a \geq 0$ entonces $a = a^*$. Pero siendo T CP se sigue que $T(a) \geq 0$, de lo cual se deduce

$$T(a^*) = T(a) = T(a)^*:$$

b) Si a es autoadjunto entonces $a = a^+ - a^-$ con $a^+; a^- \geq 0$: De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} T(a^*) &= T\left(a^+\right) - T\left(a^-\right) \\ &= T\left(a^+\right)^* - T\left(a^-\right)^* \\ &= \left(T\left(a^+\right) - T\left(a^-\right)\right)^* \\ &= T(a)^*: \end{aligned}$$

c) Si a es arbitrario entonces

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i\frac{a - a^*}{2i}$$

donde $\frac{a+a^*}{2};\frac{a-a^*}{2i}$ son autoadjuntos. Por lo tanto también se tiene que

$$\begin{aligned} T(a^*) &= T\left(\frac{a+a^*}{2}\right) - iT\left(\frac{a-a^*}{2i}\right) \\ &= \left(T\left(\frac{a+a^*}{2}\right) + iT\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)\right)^* \\ &= T(a)^*. \end{aligned}$$

∎

Proposición 1.0.15 *Sean $U;V$ dos C^* álgebra y $\pi: U \to V$ un $*$-morfismo entonces π es completamente positivo.*

Demostración. Sea $n \geq 1$, $a_1;...;a_n \in U$ y $b_1;...;b_n \in V$

$$\begin{aligned} \sum_{i;j=1} b_i^*\pi(a_i^*a_j)b_j &= \sum_{i;j=1} b_i^*\pi(a_i)^*T(a_j)b_j \\ &= \sum_{i=1} b_i^*\pi(a_i)^* \sum_{j=1} \pi(a_j)b_j \\ &= \left(\sum_{i=1} \pi(a_i)b_i\right)^* \left(\sum_{j=1} \pi(a_j)b_j\right) \geq 0. \end{aligned}$$

∎

Definición 1.0.16 *a) Sea U una C^* álgebra. Para cada $n \geq 1$ denotamos por $U \otimes M_n$ a la $*$-álgebra de matrices $n \times n$ con entradas en U. Así cada $x \in U \otimes M_n$ es de la forma*

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i;j \leq n} x_{ij} \otimes E_{ij}$$

donde E_{ij} es la matriz de $n \times n$ con ceros en todas sus entradas excepto en la ij-ésima entrada donde hay un 1. Las operaciones de suma, resta , multiplicación y tranpuesta conjugada de matrices en $U \otimes M_n$ son las usuales en el álgebra lineal. Sólo que aquí las entradas son elementos de la C^*álgebra U.

b) Sea V otra C^*álgebra y $T: U \to V$ una transformación lineal. Para cada $n \in N$; T induce un operador lineal $T_n: U \otimes M_n \to V \otimes M_n$ dado por,

$$T_n(x) = \begin{pmatrix} T(x_{11}) & ... & T(x_{1n}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ T(x_{n1}) & \cdots & T(x_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.0.17 *Sea U una C^* álgebra contenida en $B(h)$ para algún espacio de Hilbert h y $x \in U \otimes M_n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *x es positivo ;*

2) *x es una suma finita de matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} a_1^* a_1 & \cdots & a_1^* a_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n^* a_1 & \cdots & a_n^* a_n \end{pmatrix} \text{ con } a_1, \ldots, a_n \in U;$$

3) *Para todo $a_1, \ldots, a_n \in U$ se tiene que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i^* x_{ij} a_j \geq 0$.*

Demostración. Seguimos [8], pág.18.

1) implica 2)

Como x es positivo entonces $x = y^* y$ con $y \in U \otimes M_n$;

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}; \quad y^* = \begin{pmatrix} y_{11}^* & \cdots & y_{n1}^* \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{1n}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= y^* y = \begin{pmatrix} y_{11}^* & \cdots & y_{n1}^* \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{1n}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n y_{\ell 1}^* y_{\ell 1} & \cdots & \sum_{\ell=1}^n y_{\ell 1}^* y_{\ell n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n y_{\ell n}^* y_{\ell 1} & \cdots & \sum_{\ell=1}^n y_{\ell n}^* y_{\ell n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\ell=1} \begin{pmatrix} y_{\ell 1}^* y_{\ell 1} & \cdots & y_{\ell 1}^* y_{\ell n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{\ell n}^* y_{\ell 1} & \cdots & y_{\ell n}^* y_{\ell n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) implica 3)
Como x tiene la representación dado por 2) entonces claramente se tiene que $x_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} y_{\ell i}^{*} y_{\ell j}$; con lo cual

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1} \alpha_i^{*} x_{ij} \alpha_j
&= \sum_{i,j=1} \alpha_i^{*} \left(\sum_{\ell=1} y_{\ell i}^{*} y_{\ell j} \right) \alpha_j \\
&= \sum_{\ell=1} \left(\sum_{i,j=1} \alpha_i^{*} I (y_{\ell i}^{*} y_{\ell j}) \alpha_j \right) \\
&= \sum_{\ell=1} \left(\sum_{i=1} y_{\ell i} \alpha_i \right)^{*} \left(\sum_{i=1} y_{\ell i} \alpha_i \right) \geq 0
\end{aligned}
$$

3) implica 1)
Sea h en subespacios cíclicos ortogonales y $\xi \in h$ un vector cíclico, es decir $\{a\xi : a \in U\}$ es denso en $h.$ Ver [3] Teorema 2.1.10, pág.60.
Por hipótesis se tiene que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle a_i \xi, x_{ij} a_j \xi \rangle \geq 0;$$

ahora sean $\xi_1, \ldots, \xi_n \in h$ entonces existe $\{a_{ik}\xi\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_{ik}\xi \xrightarrow[k \to \infty]{} \xi_i$ para $i = 1, \ldots, n.$ Con lo cual se tiene que

$$\langle \xi_i, x_{ij} \xi_j \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle a_{ik} \xi, x_{ij} a_{jk} \xi \rangle$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, x \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i,j=1} \langle \xi_i, x_{ij} \xi_j \rangle = \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1} \langle \xi, a_{ik}^{*} x_{ij} a_{jk} \xi \rangle \geq 0$$

lo cual dice que x es positivo. ■

Proposición 1.0.18 *Sea $T : B(h) \to B(h)$ una transformación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *T es CP;*

2) *Para cada $n \geq 1$; la transformación lineal T_n es positiva.*

Demostración. Seguiremos [8], pág.18.
1) implica 2)
Sea x cualquier elemento positivo entonces por 1) y 2) de la Proposición anterior tenemos que

$$x = \sum_{\ell=1} \sum_{1\le i,j\le n} y_{\ell i}^* y_{\ell j} \otimes E_{ij},$$

y como T es CP

$$\sum_{\ell=1} \sum_{1\le i,j\le n} T(y_{\ell i}^* y_{\ell j}) \otimes E_{ij}$$

es positivo. Con lo cual resulta que $T_n(x)$ es positiva, por lo tanto T_n es positiva.
2) implica 1)
Supongamos que para cada $n \ge 1$; T_n es positiva entonces usando 2) y 3) de la proposición anterior tenemos que

$$x = \sum_{\ell=1} \sum_{1\le i,j\le n} y_{\ell i}^* y_{\ell j} \otimes E_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^*x_1 & \cdots & x_1^*x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n^*x_1 & \cdots & x_n^*x_n \end{pmatrix}$$

es un elemento positivo en $B(h) \otimes M_n; T_n(x) \ge 0$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} b_1\xi \\ \vdots \\ b_n\xi \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} T(x_1^*x_1) & \cdots & T(x_1^*x_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ T(x_n^*x_1) & \cdots & T(x_n^*x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\xi \\ \vdots \\ b_n\xi \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \sum_{i,j}^n \langle b_i\xi; T(x_i^*x_j) b_j\xi \rangle$$
$$= \left\langle \xi; \sum_{i,j}^n b_i^* T(x_i^*x_j) b_j \xi \right\rangle \ge 0$$

donde $b_i \in B(h); \xi \in h;$ resultando así T CP. ∎

Proposición 1.0.19 *Sea $T : B(h) \to B(h)$ una transformación lineal. Entonces T es completamente positiva si y sólo si para cada $n \ge 1$ y cada $u_1, \ldots, u_n \in B(h)$, $k_1, \ldots, k_n \in h$ se tiene lo siguiente*

$$\sum_{1\le i,j\le n} \langle k_i, T(u_i^*u_j) k_j \rangle \ge 0.$$

Demostración. Seguimos [8], pág.19.
Sean $b_1, \ldots, b_n$, $u_1, \ldots, u_n \in B(h)$ y $k \in h$ entonces el resultado se tiene como consecuencia de las siguientes igualdades:
$\langle k; \sum_{1\le i,j\le n} b_i^* T(u_i^*u_j) b_j k \rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \langle k; b_i^* T(u_i^*u_j) b_j k \rangle$
$= \sum_{1\le i,j\le n} \langle b_i k; T(u_i^*u_j) b_j k \rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \langle k_i; T(u_i^*u_j) k_j \rangle \ge 0;$
donde hemos tomado la correspondencia de $b_i k = k_i;\ 1 \le i \le n$. ∎

Proposición 1.0.20 *Sea $T : B(h) \to B(h)$ una tranformación lineal 2-positiva. Entonces se tiene lo siguiente:*

1) *Si $T(1)$ es invertible en $B(h)$ entonces para todo $u \in B(h)$ se tiene la siguiente desigualdad*

$$T(u^*)\,T(1)^{-1}\,T(u) \leq T(u^*u). \qquad (1.2)$$

2) *Para todo $u \in B(h)$ se tiene la desigualdad*

$$T(u^*)\,T(u) \leq \|T(1)\|_\infty\, T(u^*u). \qquad (1.3)$$

3) *T es continuo y*

$$\|T\|_{B(B(h))} = \|T(1)\|_\infty. \qquad (1.4)$$

Demostración. Ver. [8], Prop.2,10, págs.19 − 20. ■

1.1. El espacio $\tau(h)$

En esta pequeña sección $\tau(h)$ denota al espacio de los operadores de traza finita en el espacio de Hilbert h. Cada $\rho \in \tau(h)$ tiene la expresión

$$\rho = \sum_n \alpha_n |e_n\rangle\langle f_n| \qquad (1.1.1)$$

donde $\alpha_n \geq 0$ con la propiedad, $\sum_n \alpha_n < \infty$ y $\{e_n\}_n, \{f_n\}_n$ son sistemas ortonormales de h.

El operador $|e_n\rangle\langle f_n|$ evaluado en $\psi \in h$ tiene la expresión, $|e_n\rangle\langle f_n|\psi = \langle\psi, f_n\rangle e_n$, y además $|e_n\rangle\langle f_n|^* = |f_n\rangle\langle e_n|$. Como caso particular cuando $f_n = e_n$, ρ resulta ser un operador positivo y $\rho^* = \rho$. Una función sobre estos operadores que se usa para definir a la topología σ-débil en $B(h)$ es la función traza en $\tau(h)$. Existen muchos resultados referentes a $\tau(h)$ que por el momento no se examinan aquí, pero se pueden consultar en [21] pág.7, [18] Capítulo I, dos de estos resultados útiles son: $\tau(h)$ es un ideal bilateral en $B(h)$, es decir dado $\rho \in \tau(h)$ y $x \in B(h)$, $\rho x, x\rho \in \tau(h)$. El segundo resultado afirma que $tr(\rho x) = tr(x\rho)$. La relación existente entre $\tau(h)$ y $B(h)$ (Teorema de Schatten)[18], pág.51,es $\tau(h)^* = B(h)$ aunque no es cierto que $B(h)^* = \tau(h)$, pues $\tau(h)$ no es reflexivo [17] págs.64-77 y 167.

Definición 1.1.1 *La función traza tr en $\tau(h)$ se define de la siguiente forma*

$$tr(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \rho\xi_m, \xi_m\rangle,$$

con $\{\lambda_m\}_m$ *sistema ortonormal de* h *y* $\rho \in \tau(h)$.

Proposición 1.1.2 *Para cada* $X \in B(h)$ *y* $\rho \geq 0$ *se tiene que*

$$tr(\rho X) = \sum_n \alpha_n \langle X e_n, e_n \rangle . \qquad (1.1.2)$$

Demostración. Sea $\{e_n\}_n$ sistema ortonormal de h completo,

$$\begin{aligned} tr(\rho X) &= \sum_m \langle \rho X e_m, e_m \rangle = \sum_m \left(\sum_n \alpha_n \langle \langle X e_m, e_n \rangle e_n, e_m \rangle \right) \\ &= \sum_m \alpha_m \langle \langle X e_m, e_m \rangle e_m, e_m \rangle = \sum_m \alpha_m \langle X e_m, e_m \rangle . \end{aligned}$$

■

Proposición 1.1.3 *Dado* $\rho \in \tau(h)$ *entonces* $|\rho| = (\rho^* \rho)^{\frac{1}{2}} \in \tau(h)$ *y la asociación* $\rho \to tr\ (\rho^* \rho)^{\frac{1}{2}}$ *define una norma en* $\tau(h)$, *el cual hace a* $\tau(h)$ *un espacio de Banach.*

Demostración. Ver. [18], págs.43 − 53. ■

Teorema 1.1.4 *(Schatten) Sea* h *algún espacio de Hilbert complejo separable.*
1) $\|\rho\|_1 = tr(|\rho|)$ *y el espacio* $\tau(h)$ *es isométricamente isomorfo al dual de* $C(h)$, *espacio de los operadores compactos en* h *con la norma de operadores, bajo la correspondencia* $f_\rho(X) = tr(\rho X)$ *con* $\rho \in \tau(h)$ *fijo y* $X \in C(h)$.
2) $B(h)$ *es isométricamente isomorfo al dual de* $\tau(h)$ *con la norma* $\|.\|_1$, *bajo la correspondencia* $f_X(\rho) = tr(\rho X)$ *con* $\rho \in \tau(h)$ *y* $X \in B(h)$ *fijo.*
Demostración. Ver. [18], pág.51. ■

1.2. Topologías en B(*h*)

Para una exposición de conceptos de topológicos como conjunto dirigido y red, el lector puede consultar [22], Capítulo I.

Definición 1.2.1 *Un espacio topológico es un par* (X, τ) *donde* X *es un conjunto y* τ *es una familia de subconjuntos de* X, *a para la cual se satisfacen las siguienrtes condiciones:*

(1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;
(2) Si A y $B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$;
(3)Si $U \subset \tau$, entonces $\cup U \in \tau$.
Los elementos de X se llaman puntos de (X, τ) y los elementos de la familia τ se llaman subconjuntos abiertos del espacio (X, τ). Recuérdese que el conjunto $\cup U$ es la unión de la familia U.

Definición 1.2.2 *Sea Δ un conjunto no vacío. Una relación $\mathcal{R}$ en $\Delta \times \Delta$ (o sea un conjunto $\mathcal{R} \subset \Delta \times \Delta$) se llama dirección en Δ; si*

(1) $s\mathcal{R}s$, para todo $s \in \Delta$;
(2) $s\mathcal{R}t$ y $t\mathcal{R}\upsilon$ implica $s\mathcal{R}\upsilon$, para todo $s, t, \upsilon \in \Delta$;
(3) Para todo $s, t \in \Delta$ existe un $\upsilon \in \Delta$ tal que $s\mathcal{R}\upsilon$ y $s\mathcal{R}t.$
Si $\mathcal{R}$ es una dirección en Δ, entonces Δ se llama dirigido por $\mathcal{R}$.

Definición 1.2.3 *Sea X un espacio topológico. Una red $\mathcal{S}$ en X es cualquier mapeo de un conjunto dirigido(que se llama dominio) en X.*

Si el conjunto dirigido es de los número naturales con el orden usual, entonces $\mathcal{S}$ se llama sucesión.En muchas ocaciones una red en X se denota por $(X_t)_{t\in\Delta}$ donde Δ es el dominio de $\mathcal{S}$.

Definición 1.2.4 *Dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$, diremos que una red $\mathcal{S} = (X_t)_{t\in\Delta}$ converge a x_0 $\mathcal{S} \underset{t}{\to} x_0$ si para toda vecindad U de x_0 en X existe $t_0 \in \Delta$ tal que $X_t \in U$ para todo $t \geq t_0.$*

Definición 1.2.5 *La topología fuerte en $B(h)$, es la topología inducida por la familia de seminormas $\{P_\upsilon : \upsilon \in h\}$ definidas por $P_\upsilon(X) = \|X(\upsilon)\|_h.$*

Definición 1.2.6 *La topología débil en $B(h)$; es la topología inducida por la familia de seminormas $\{P_{\upsilon,\nu} : \upsilon, \nu \in h\}$ definidas por $P_{\upsilon,\nu}(X) = |\langle X\upsilon, \nu\rangle_h|.$*

Definición 1.2.7 *La topología ultradébil (σ-débil) en $B(h)$; es la topología inducida por la familia de seminormas $\{P_\rho : \rho \in \tau(h)\}$ definidas por*

$$P_\rho(X) = |tr(\rho X)|.$$

Cabe mencionar que $P_\rho(X)$ está bién definida porque como ya mencionamos antes $\tau(h)$ es un ideal bilateral en $B(h)$.

Proposición 1.2.8 *Sea Λ un conjunto dirigido. Una red $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ en $B(h)$ converge a $X \in B(h)$:*

1) Fuertemente si y sólo si $\|X_i(\xi) - X(\xi)\|_h \underset{i}{\to} 0$; para todo $\xi \in h$.

2) Débilmente si y sólo si $|\langle X_i\eta,\xi\rangle_h - \langle X\eta,\xi\rangle_h| \underset{i}{\to} 0$; para todo $\xi,\eta \in h$.

3) Ultradébilmente si y sólo si $|tr(\rho(X_i - X))| \underset{i}{\to} 0$; para todo $\rho \in h$.

Demostración. Es inmediata de las definiciones 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3. ■

Proposición 1.2.9 *La red $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ converge ultradébilmente a $X \in B(h)$ si y sólo si para cualesquiera $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ sucesiones en h tales que $\sum_n \|\xi_n\|_h^2 < \infty$ y $\sum_n \|\eta_n\|_h^2 < \infty$ se tiene que*

$$\sum_n \langle X_i\xi_n,\eta_n\rangle_h \underset{i}{\to} \sum_n \langle X\xi_n,\eta_n\rangle_h. \qquad (1.2.1)$$

Demostración. Tomando $\rho = \sum_n \alpha_n |e_n\rangle\langle e_n|$ y $\xi_n = \eta_n = \alpha^{\frac{1}{2}} e_n$ se obtiene el resultado. ■

Lema 1.2.10 *(Dini) Sea Λ un conjunto dirigido. Sean $f_\alpha, f : K \to \mathbb{R}$ continuas, $\alpha \in \Lambda$; donde K es un conjunto compacto. Si $f_\alpha \le f_{\alpha'}$ para $\alpha < \alpha'$ y $f_\alpha(x) \underset{\alpha}{\to} f(x)$; $x \in K$; entonces esta convergencia es uniforme.*

Demostración. Sea $x \in K$; tomemos $g_\alpha = f - f_\alpha \ge 0$; así $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es decreciente y
$\lim_\alpha g_\alpha(x) = 0$. Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U de x y algún α_x tal que $g_\alpha(x) < \varepsilon$; para $\alpha \ge \alpha_x$. Ahora para este $\varepsilon > 0$; considérese $\{U_x : x \in K\}$ una cubierta de K, por la compacidad de K existe un $n \in \mathbb{N}$ y $x_1,\ldots,x_n \in K$ tal que $K = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$; sea $\alpha_0 = \max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \in \Lambda$. Tomemos $x \in K$ arbitrario y sea $\alpha \ge \alpha_0$ entonces existe i tal que $x \in U_{x_i}$ de donde se deduce que $g_\alpha(x) < \varepsilon$; lo cual quiere decir que $|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$; el cual es la propia convergencia uniforme. ■

Teorema 1.2.11 *La topología ultradébil y la débil coinciden en subconjuntos acotados de $B(h)$.*

Demostración. Seguimos [8], pág.9.
Sea $B(0;1) = \{x \in B(h) : \|x\|_1 \le 1\}$, como $\tau(h)' = B(h)$ entonces resulta que $(B(0;1);\tau_{\sigma-débil})$ es compacto por el Teorema de Alaoglu y por el teorema del mapeo abierto basta tomar

$$I : (B(0;1);\tau_{\sigma-débil}) \to (B(0;1);\tau_{débil});$$

claramente I la función identidad, es una biyección continua y como las topologías son de Hausdorff, se tiene que ambas topologías coinciden. ■

Definición 1.2.12 *Un álgebra de von Neumann U es una C*-subálgebra de $B(h)$ con identidad la cual es cerrada en la topología débil.*

Ejemplo 1.2.13 *Toda álgebra de von-Neumann es una C^*-álgebra, pero no inversamente. Para ello tómese el siguiente ejemplo.*

Sea $C^0 = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f$ es continua$\} \subset B(h)$, donde $h = L^2([0,1], \mu)$ siendo μ la medida de Lebesgue. Ahora con $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$ y $f^*(x) = \overline{f(x)}$ se tiene que C^0 es una C^*-subálgebra de $B(h)$. Ahora sea $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, claramente se tiene que $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} \notin C^0$. Pero existe $\{f_n\} \subset C^0$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ puntualmente, donde

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]}(x) \\ -n\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}.$$

Para ver que C^0 no es un álgebra de von Neumann, veámoslo contenido en $B(h)$ mediante el mapeo que asocia $f \in C^0$, $f \to m(f) \in B(h)$ siendo $m(f)$ el operador de multiplicación por f. De aquí se sigue que $m(f_n) \xrightarrow{s} m\left(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\right)$ pero esto implica que $m\left(\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\right)$ está en $m\left(C^0\right)$ cosa que no puede ser ya que $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} \notin C^0$; resultando así que C^0 no es álgebra de von Neumann.

Proposición 1.2.14 *Sea U un álgebra de von Neumann de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert h. Sea $\triangle$ un conjunto dirigido y $\{X_i\}_{i\in\Delta}$ una red creciente de elementos de U tales que $\sup_{i\in\Delta}\|X_i\|_\infty < \infty$. Entonces existe $X \in U$ tal que $X_i \xrightarrow{i} X$ en la topología débil, ultradébil y fuerte. A X se le denota también con $X = \sup_{i\in\Delta} X_i$.*

Demostración. Ver. [3] Teorema 2.4.21, pág. 76. ∎

Definición 1.2.15 *Sea U un álgebra de von Neumann y φ funcional lineal positiva en U. Se dice que φ es normal si*

$$\sup_{i\in\Delta}\varphi(X_i) = \varphi\left(\sup_{i\in\Delta} X_i\right). \tag{1.2.2}$$

Teorema 1.2.16 *Sea $T : B(h) \to B(h)$ lineal, positivo y $\sigma-$débil continuo entonces existe $S : \tau(h) \to \tau(h)$ tal que*

$$tr(S(\rho)x) = tr(\rho T(x)) \tag{1.2.3}$$

para todo $\rho \in \tau(h)$ y $x \in B(h)$.

Demostración. Ver. [3] Teorema 2.4.20, págs. 76 $-$ 78. ∎

Proposición 1.2.17 a) *Sean $T, E : B(h) \to B(h)$ transformaciones lineales completamentes positivas entonces $E + T$ es completamente positiva.*

b) $E \circ T : B(h) \to B(h)$ es completamente positiva.

c) Sea K un espacio de Hilbert y $\{T_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión transformaciones completamentes positivas, $T_m : B(h) \to B(K)$. Supóngase que para cada $u \in B(h)$ la sucesión $\{T_m(u)\}_{m \geq 1}$ converge débilmente. Entonces la transformación lineal $T : B(h) \to B(K)$ definida por $T(u) = \lim_{m \to \infty} T_m(u)$ es completamente positiva.

Demostración. Seguimos [8], págs.20-21.

a) Sean $b_1, ..., b_n$ y $u_1, ..., u_n \in B(h)$ entonces

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i^* [E + T](u_i^* u_j) b_j$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i^* E(u_i^* u_j) b_j + \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i^* T(u_i^* u_j) b_j \geq 0.$$

b) Para esto únicamente veremos que $(E \circ T)_n = E_n \circ T_n$,
donde $(E \circ T)_n : B(h) \otimes M_n \to B(h) \otimes M_n$.
Sea $u \otimes E_{ij} \in B(h) \otimes M_n$ entonces se tiene lo siguiente:

$$(E \circ T)_n (u \otimes E_{ij}) = (E \circ T)(u) \otimes E_{ij} = E(T(u)) \otimes E_{ij}$$

$$= E_n (T(u) \otimes E_{ij}) = E_n (T_n (u \otimes E_{ij})) = E_n \circ T_n (u \otimes E_{ij})$$

con lo cual resulta que $(E \circ T)_n = E_n \circ T_n$.

c) Sea $n \geq 1$, $u_1, ..., u_n \in B(h)$ y $k_1, ..., k_n \in K$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle k_i, T(u_i^* u_j) k_j \rangle = \lim_{m \to \infty} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle k_i, T_m(u_i^* u_j) k_j \rangle \geq 0.$$

■

Teorema 1.2.18 *(Stinespring) Sea h un espacio de Hilbert. $\varphi : B(h) \to B(h)$ es lineal y completamente positivo si y sólo si existe K espacio de Hilbert y $L : h \to h \otimes K$ lineal tal que*

$$\varphi(x) = L^* (x \otimes 1) L.$$

Nota 1.2.19 *El operador $x \otimes 1 : h \otimes K \to h \otimes K$, que se define como $(x \otimes 1)(\xi \otimes \eta) = x(\xi) \otimes \eta$, se llama la ampliación de x en $h \otimes K$.*
Para hacer la demostración de este teorema haremos uso de 4 resultados cuyas demostraciones se pueden encontrar en [18]*; pág.*251 $-$ 254.

1) **Proposición 29.2.** Sea $T : B(h_2) \to B(h_1)$ *completamente positivo, defínase*

$$K(x_1, y_1, u_1; x_2, y_2, u_2) = \langle u_1, y_1^* T(x_1^* x_2) y_2 u_2 \rangle$$

donde $(x_i,y_i,u_i) \in B(h_2)\times B(h_1)\times h_1$ *para* $i=1,2$. *Entonces* K *es definido positivo en* $B(h_2)\times B(h_1)\times h_1$ *; es decir dado* $n\in\mathbb{N}$*; para todo* $(x_i,y_i,u_i) \in B(h_2)\times B(h_1)\times h_1$*;* $i=1,\ldots,n$ y $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$*;*

$$\sum_{i,j=1} \overline{\lambda_i}\lambda_j K(x_i,y_i,u_i;x_j,y_j,u_j) \geq 0.$$

2) Proposición 29.3. Sea $T : B(h_2) \to B(h_1)$ *completamente positivo entonces existe un espacio de Hilbert* h *y* $\lambda : B(h_2)\times h_1 \to h$ *tal que se tiene lo siguiente:*

i) $\{\lambda(x,u) \mid x \in B(h_2), u \in h_1\}$ *es total en* h.

ii) λ *es lineal en cada variable* x, u.

iii) $\langle \lambda(x_1,u_1), \lambda(x_2,u_2)\rangle = \langle u_1, T(x_1^* x_2) u_2\rangle$.

iv) *En particular* $\gamma_0(u) = \lambda(1,u)$ *es una isometría de* $h_1 \to h$.

3) Proposición 29.4. *A partir de* 2) *para* T*,* λ*, y* γ_0 *existe un *- homomorfismo unital* $\pi : B(h_2) \to B(h)$*;* $(\pi(1)=1)$ *tal que*

$$\lambda(x,u) = \pi(x)\gamma_0 u;\ x \in B(h_2), u \in h_1.$$

4) Proposición 29.5. *Ahora para el* π *construido en* 3) *existe un espacio de Hilbert* K *y un isomorfismo unitario* $\tau : h \to h_2 \otimes K$ *tal que* $\pi(x) = \tau^{-1}\, x \otimes 1\, \tau$ *con* $x \in B(h_2)$ *y* 1 *es el operador identidad en* K.

Ahora si ya podemos demostrar el Teorema 2.1.16.

Demostración. Demostremos la condición suficiente. Siendo ϕ es completamente positivo
de $B(h)$ a $B(h)$ mismo y usando los 4 resultados anteriores todos con $h = h_1 = h_2$ y $L = \tau\gamma_0$, $T = \varphi$ se tiene que para $u_1, u_2 \in h$

$$\begin{aligned}
\langle u_1, L^*(x\otimes 1)Lu_2\rangle &= \left\langle u_1, \gamma_0^*\tau^{-1}(x\otimes 1)\tau\gamma_0 u_2\right\rangle \\
&= \langle \gamma_0 u_1, \pi(x)\gamma_0 u_2\rangle \\
&= \langle \pi(1)\gamma_0 u_1, \pi(x)\gamma_0 u_2\rangle \\
&= \langle \lambda(1,u_1), \lambda(x,u_2)\rangle \\
&= \langle u_1, \phi(1^* x) u_2\rangle \\
&= \langle u_1, \phi(x) u_2\rangle ;
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\phi(x) = L^{*}(x - 1) L.$$

Ahora veamos la necesidad.
$\phi(x) = L^{*}(x - 1) L.$
La linealidad es fácil, sean x y $y \in B(h)$ entonces

$$\begin{aligned}
\phi(x + y) &= L^{*}((x + y) - 1) L \\
&= L^{*}((x - 1) + (y - 1)) L \\
&= L^{*}(x - 1) L + L^{*}(y - 1) L \\
&= \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}$$

ϕ es completamente positivo. Sea $n \geq 1$ y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B(h)$. Tomemos $u \in h$; entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left\langle u, \sum_{i,j=1} y_i^{*} \phi(x_i^{*} x_j) y_j u \right\rangle &= \sum_{i,j=1} \langle y_i u, \phi(x_i^{*} x_j) y_j u \rangle \\
&= \sum_{i,j=1} \langle y_i u, L^{*}((x_i^{*} x_j) - 1) L y_j u \rangle \\
&= \sum_{i,j=1} \left\langle L y_i u, (x_i - 1)^{*} (x_j - 1) L y_j u \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1} \langle (x_i - 1) L y_i u, (x_j - 1) L y_j u \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1} (x_i - 1) L y_i u, \sum_{j=1} (x_j - 1) L y_j u \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{j=1} (x_j - 1) L y_j u \right\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

ϕ es σ-débil continuo.
Sea $x_\alpha - 1 \xrightarrow[\alpha]{\sigma w} x - 1$, es decir dado $\rho \in \tau(h)$, $tr(\rho(x_\alpha - 1)) \xrightarrow[\alpha]{} tr(\rho(x - 1))$

$$\begin{aligned}
tr(\rho\phi(x_\alpha)) &= tr(\rho L^{*}(x_\alpha - 1) L) \\
&= tr(L \rho L^{*}(x_\alpha - 1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha} (\rho\phi(x_\alpha)) &= \lim_{\alpha} tr(L\rho L^{*}(x_\alpha - 1)) = tr(L\rho L^{*}(x - 1)) \\
&= tr(\rho L^{*}(x - 1) L) = tr(\rho\phi(x))
\end{aligned}$$

por lo tanto ϕ es σ-débil continuo. ■

Teorema 1.2.20 *(Krauss) La transformación lineal $T : B(h) \to B(h)$ es normal y completamente positiva si y sólo si puede ser expresada en la forma*

$$T(a) = \sum_{j=1}^{\infty} V_i^{*} a V_j. \qquad (1{,}2{,}4)$$

Donde $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ son operadores acotados de h en h mismo y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} V_i^{*} V_j$ converge debilmente.

Demostración. Ver. [8], pág. 24, [13], págs. 311 – 335. ∎

Capítulo 2

Semigrupos dinámicos cuánticos(S.D.C.)

En este capítulo se proporciona la forma explícita que debe tener el generador infinitesimal de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo. Los dos resultados importantes que garantizan esto y con los cuales se finaliza este capítulo son: el *Teorema de Linblad* $2{;}1{;}17$ y el *Teorema de Linblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan* $2{;}1{;}18{:}$

2.1.

Definición 2.1.1 *Un Semigrupo Dinámico Cuántico(S. D. C) en $B(B(h))$ es una familia $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$ de operadores acotados con las siguientes propiedades:*

1) $T_0(x) = x, \quad x \in B(h)$;
2) $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x)), \quad$ *para* $s, t \geq 0; x \in B(h)$;
3) T_t *es completamente positivo para todo* $t \geq 0$;
4) T_t *es* σ*-débil continuo en* $B(h)$ *para todo* $t \geq 0$ *fijo*;
5) *Para cada* $x \in B(h)$ *fijo, el mapeo* $t \to T_t(x)$ *es continuo respecto a la topología* σ*-débil en* $B(h)$: [8], *pág.28.*

Definición 2.1.2 *El generador infinitesimal de un Semigrupo Dinámico Cuántico T. Es el operador ϖ ,cuyo dominio $D(\varpi)$ es el espacio de los elementos de $B(h)$ para los cuales existe un elemento $b \in B(h)$ tal que*

$$b = \lim_{t \to 0} \frac{T_t(x) - x}{t} \tag{2.1}$$

en la topología σ-débil, y para $a \in D(\varpi)$; $\varpi(a) = b$.

Definición 2.1.3 *Un semigrupo $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$ en $B(h)$, es decir T satisface 1) y 2) de la Definición 2.1.1: Es de contracciones si $\|T_t\|_{B(B(h))} \leq 1$; donde $\|T_t\|_{B(B(h))} = \sup\limits_{\substack{x \in B(h) \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\|_{B(h)}$.*

Nota 2.1.4 *T es llamado uniformemente continuo si*

$$\lim_{t \to 0} \|T_t - T_0\|_{B(B(h))} = 0.$$

Proposición 2.1.5 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio medible con μ medida finita sobre Σ, y $\{U(t, x)\}_{t \geq 0, x \in \Omega}$ una familia de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert h tal que:*

1) *Para todo $x \in \Omega$; la transformación $t \to U(t, x)$ es fuertemente continua, es decir para cada $\psi \in h$; $t \to U(t, x)\psi$ es continua;*
2) *Para todo $t \geq 0$; la transformación $x \to U(t, x)$ es fuertemente medible, es decir dado dado $\psi \in h$; $x \to U(t, x)\psi$ es medible;*([17] *Teorema IV.*22, *págs.*116 − 117).
3) *Para todo $t \geq 0$, existe una función positiva g_t sobre Ω integrable con respecto a μ; tal que*

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|U(s, x)\|^2 \leq g_t(x); \quad \text{con } g_t \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu).$$

Entonces la transformación $\Phi : [0, \infty) \times B(h) \to B(h)$ definida por la inte-

gral

$$\Psi(t;a) = \int_\Omega U(t;x)^* a U(t;x)\, d\mu(x) \qquad (2.2)$$

es σ-débil continua en ambos argumentos y completamente positiva en la segunda variable.

Demostración.
Seguimos [8], págs.32-33.
Observemos que

$$0 \le \langle U(t;x)\nu, aU(t;x)\nu\rangle \le \|U(t;x)\nu\|\|aU(t;x)\nu\| \le \|a\|_\infty \|U(t;x)\nu\|^2$$
$$\le \|a\|_\infty \|\nu\|^2 \|U(t;x)\|^2 \le \|a\|_\infty \|\nu\|^2 g_t(x),$$

así como función de x resulta integrable, y por lo tanto

$$\int_\Omega \langle U(t;x)\nu, aU(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x)$$

define una forma sesquilineal acotada que está representada por un operador al que denotaremos por $\Psi(t;a)$ o por $\int_\Omega U(t;x)^* aU(t;x)\, d\mu(x)$. Veamos que Ψ es completamente positivo en la segunda variable, para eso tomando t fijo, sea $n \ge 1; a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \in B(h)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \nu, \sum_{i,j=1} b_i^* \Psi(t; a_i^* a_j) b_j \nu \right\rangle &= \sum_{i,j=1} \langle b_i\nu, \Psi(t;a_i^*a_j) b_j\nu\rangle \\
&= \sum_{i,j=1} \int_\Omega \left\langle b_i\nu, U(t;x)^* a_i^* a_j U(t;x) b_j \nu\right\rangle d\mu(x) \\
&= \sum_{i,j=1} \int_\Omega \langle a_i U(t;x) b_i\nu, a_j U(t;x) b_j\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1} \langle a_i U(t;x) b_i\nu, a_j U(t;x) b_j\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \int_\Omega \Big\| \sum_{i=1} a_i U(t;x) b_i\nu\Big\|^2 d\mu(x) \ge 0
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que Ψ es completamente positivo, en la segunda variable operador.
Enseguida demostramos que es σ-débil continuo en el tiempo. Para ello tomemos $s, t \in [0, r]$:

$$\begin{aligned}
|\langle \nu, \Psi(t;a)\nu\rangle - \langle \nu, \Psi(s;a)\nu\rangle| &= |\langle \nu, (\Psi(t;a) - \Psi(s;a))\nu\rangle| \\
&= \left|\int_\Omega (\langle U(t;x)\nu, aU(t;x)\nu\rangle - \langle U(s;x)\nu, aU(s;x)\nu\rangle)\, d\mu(x)\right| \\
&\le \int_\Omega |\langle U(t;x)\nu, a(U(t;x) - U(s;x))\nu\rangle|\, d\mu(x) + \\
&\quad \int_\Omega |\langle (U(t;x) - U(s;x))\nu, aU(s;x)\nu\rangle|\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

el primer sumando de esta desigualdad lo estimamos por

$$\le \int_\Omega \|U(t;x)\nu\| \|a\|_\infty \|(U(t;x) - U(s;x))\nu\| \, d\mu(x)$$

$$\le \|a\|_\infty \left(\int_\Omega \|U(t;x)\nu\|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \|(U(t;x) - U(s;x))\nu\|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \|a\|_\infty \left(\int_\Omega g_r(x) \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \|(U(t;x) - U(s;x))\nu\|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

pero de aquí mismo obsérvese que
$\|(U(t;x) - U(s;x))\nu\|^2 \le 2\left(\|U(t;x)\|^2 + \|U(s;x)\|^2\right)\|\nu\|_h^2 \le 2g_r(x)\|\nu\|_h^2$, entonces por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se concluye que el primer sumando tiende a $0;$ conforme $t \to s$; un análisis similar muestra que el segundo sumando también tiende a 0 conforme $t \to s.$

Enseguida demostramos que Ψ es σ-débil continuo en el segundo parámetro. Bastará ver que $\Psi(t;a)$ es normal, es decir que $\langle \Psi(t;a)\nu, \nu\rangle = tr(\rho a)$ donde ρ es un operador de traza finita en $\tau(h)$ y $\nu \in h$, para ello tomemos

$$\rho = \int_\Omega |U(t;x)\nu\rangle\langle U(t;x)\nu| \, d\mu(x)$$

y comprobemos que en verdad este ρ es el adecuado, sea $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ una base ortonormal para nuestro $h.$ Vamos a demostrar que

$$\sum_{i=1}^\infty \langle e_i, \rho e_i\rangle < \infty.$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle e_i, \rho e_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \langle e_i, |U(t;x)\nu\rangle\langle U(t;x)\nu| e_i\rangle \, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \langle e_i, \langle U(t;x)\nu, e_i\rangle U(t;x)\nu\rangle \, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\langle U(t;x)\nu, e_i\rangle|^2 \, d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n |\langle U(t;x)\nu, e_i\rangle|^2 \, d\mu(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty |\langle U(t;x)\nu, e_i\rangle|^2 \, d\mu(x)$$

y usando la fórmula de Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle e_i, \rho e_i\rangle &= \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty |\langle U(t;x)\nu, e_i\rangle|^2 d\mu(x) = \int_\Omega \|U(t;x)\nu\|^2 d\mu(x) \\
&\le \|\nu\|_h^2 \int_\Omega \|U(t;x)\|^2 d\mu(x) \le \|\nu\|_h^2 \int_\Omega g_r(x) \, d\mu(x) < \infty;
\end{aligned}$$

así $\rho \in \tau(h).$

Pero por otra parte recordemos que:
$\langle \nu, \Psi(t;a)\nu \rangle = tr\left(|\nu\rangle\langle \Psi(t;a)\nu|\right) = \int_\Omega \langle U(t;x)\nu, aU(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x)$
por lo tanto

$$
\begin{aligned}
tr(\rho a) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \langle e_i, \langle U(t;x)\nu, ae_i\rangle U(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \langle U(t;x)\nu, ae_i\rangle \langle e_i, U(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \langle a^* U(t;x)\nu, e_i\rangle \langle e_i, U(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \langle U(t;x)\nu, aU(t;x)\nu\rangle\, d\mu(x) \\
&= \langle \nu, \Psi(t;a)\nu\rangle .
\end{aligned}
$$

Así $\langle \nu, \Psi(t;a)\nu\rangle = tr(\rho a)$; lo que prueba que Ψ es normal. ■

Definición 2.1.6 *Un Semigrupo Dinámico Cuántico $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es llamado conservativo si $T_t(1) = 1$ $\forall\, t \geq 0$.*

Definición 2.1.7 *El predual de un Semigrupo Dinámico Cuántico T que actúa sobre $B(h)$ es el semigrupo S actuando sobre $\tau(h)$ definido por:*

$$tr(S_t(\rho))(x) = tr(\rho T_t(x)) \qquad (2.3)$$

para cada $\rho \in \tau(h)$ y $x \in B(h)$. Ver Teorema 1.2.11, Capítulo 1.

Proposición 2.1.8 *Sea T un S.D.C sobre $B(h)$ entonces los siguientes son equivalentes:*

1) *Existen dos números reales $M \geq 1$ y $\beta \geq 0$ tal que* $\|T_t\|_{B(B(h))} \leq M \exp(\beta t)$, *para* $t \geq 0$;

2) *El generador infinitesimal $\pounds$ es densamente definido y cerrado en la topología σ-débil;*

3) *Si* $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ *entonces el rango de $\lambda 1 - \pounds$ coincide con $B(h)$ y se tiene la desigualdad siguiente*

$$\left\|(\lambda 1 - \pounds)^{-1}(a)\right\|_{B(B(h))} \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \beta}\|a\|; \qquad (2.4)$$

4) *El operador resolvente $(\lambda 1 - \pounds)^{-1}$, está dado por la transformada de Laplace*

$$(\lambda 1 - \pounds)^{-1}(a) = \int_0^\infty T_t(a)\exp(-\lambda t)\, dt \qquad (2.5)$$

para cada $a \in B(h)$ y cada número complejo λ con $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$.

Demostración.

Ver. [3] Teorema $3,1,6$, págs.$166 - 167$. ∎

Definición 2.1.9 *Sea E un espacio de Banach con norma $||.||$. Un semigrup $T : E \to E$ es fuertemente continuo si $T_t\mu \xrightarrow[t \to 0]{||.||} \mu$, y es uniformemente continuo si $||T_t - I||_{B(E)} \underset{t\to 0}{\to} 0$.*

Proposición 2.1.10 *Sea T_t un semigrupo de operadores acotados sobre un espacio de Banach E con norma $||.||$.*

Los siguientes son equivalentes:

1) *La transformación lineal $t \to T_t$ es uniformemente continua;*

2) *La transformación lineal $t \to T_t$ es uniformemente diferenciable;*

3) *El generador infinitesimal ϖ es un operador acotado y*

$$T_t = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \varpi^n \tag{2,7}$$

donde la serie converge en la norma de operadores para cada t real.

Si estas condiciones son satisfechas entonces T puede ser extendido a un grupo uniformemente continuo de operadores sobre E que satisface

$$\|T_t\|_{B(E)} \leq \exp\left(|t|\,\|\varpi\|_{B(E)}\right).$$

Demostración. Seguimos [3],Prop.3.1.6 pág.166.

3) implica 2)

$$\left\| \frac{T_t - I}{t} - \varpi \right\|_{B(E)} = \left\| \frac{\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\varpi^n - I}{t} - \varpi \right\|_{B(E)} = \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{t\, n!}\varpi^n - \varpi \right\|_{B(E)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{n \ge 2} \frac{t^n}{t\, n!} \$^n \right\|_{B(E)} \le \sum_{n \ge 2} \frac{\|\$^n\|_{B(E)}\, t^n}{n!} \\
&\le \sum_{n \ge 2} \frac{\|\$\|^{n-2}_{B(E)}\, \|\$\|^2_{B(E)}\, t^{n-2} t^2}{n!} \\
&= t^2\, \|\$\|^2_{B(E)} \sum_{n \ge 2} \frac{\|\$\|^{n-2}\, \|\$\|^2\, t^{n-2}}{n\,(n-1)\,(n-2)!} \\
&\le t^2\, \|\$\|^2_{B(E)} \sum_{n \ge 2} \frac{\|\$\|^{n-2}_{B(E)}\, \|\$\|^2_{B(E)}\, t^{n-2}}{(n-2)!} \\
&= t^2\, \|\$\|^2_{B(E)} \sum_{k \ge 0} \frac{\|\$\|^k_{B(E)}\, t^k}{k!} \\
&= t^2 \|\$\|^2_{B(E)} e^{t\|\$\|} \underset{t \to 0}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

Así T es uniformemente diferenciable.

2) implica 1)

$$\|T_t - T_0\|_{B(E)} = \left\| \frac{T_t - T_0}{t} \right\|_{B(E)} t \underset{t \to 0}{\to} \|\$\|_{B(E)}\,(0) = 0$$

porque

$$\left\| \frac{T_t - T_0}{t} \right\|_{B(E)} \underset{t \to 0}{\to} \|\$\|_{B(E)}\,.$$

Así resulta que T es uniformemente continuo.

1) implica 2)

Como $\|T_t - T_0\|_{B(E)} \underset{t \to 0}{\to} 0$; entonces tomando $X_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_s ds$; claramente se tiene que $\|X_t - T_0\|_{B(E)} \underset{t \to 0}{\to} 0$; existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < s$ entonces $\|X_t - I\|_{B(E)} < 1$ con lo cual resulta que $X_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_s ds$ es invertible, acotado y tiene inverso acotado

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\right) X_t &= \left(\frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\right) \frac{1}{t}\int_0^t T_s ds = \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_0^t T_{s+\varepsilon} ds - \int_0^t T_s ds\right] \\
&= \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} T_s ds - \int_0^t T_s ds\right] \\
&= \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_0^{t+\varepsilon} T_s ds - \int_0^\varepsilon T_s ds - \int_0^t T_s ds\right] \\
&= \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_0^{t+\varepsilon} T_s ds - \int_0^t T_s ds - \int_0^\varepsilon T_s ds\right] \\
&= \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_t^{t+\varepsilon} T_s ds - \int_0^\varepsilon T_s ds\right] \\
&= \frac{1}{t\varepsilon}\left[\int_0^\varepsilon T_{s+t} ds - \int_0^\varepsilon T_s ds\right] \\
&= \left(\frac{T_t - I}{t}\right) \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_s ds = \frac{1}{t}(T_t - I) X_\varepsilon
\end{aligned}
$$

por lo tanto se tiene que

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon} = \frac{1}{t}(T_t - I)\ X_t^{-1}
$$

es decir

$$
\left\| \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon} - \frac{1}{t}(T_t - I)\ X_t^{-1} \right\|_{B(E)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0
$$

resultando así que T_ε es uniformemente diferenciable para todo $\varepsilon \geq 0$.
2) implica 3)
Denotemos por ϖ el generador de T_ε, entonces ϖ resulta acotado y además por la parte 2) se tiene que $\varpi = \frac{1}{t}(T_t - I) X_t^{-1}$ de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\varpi X_t &= \frac{T_t - I}{t} \\
t\varpi X_t &= T_t - I \\
T_t &= I + \varpi \int_0^t T_s ds.
\end{aligned}
$$

Iterando se obtiene que

$$
T_t = I + \varpi t + \frac{\varpi^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\varpi^n t^n}{n!} + \varpi^{n+1} \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} T_{s_n} ds_n \cdots ds_1
$$

el último elemento de ésta suma se puede estimar porque existen $M \geq 1$

y $\beta \geq 0$ tales que $\|T_t\|_{B(E)} \leq M e^{\beta t}$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left\| \$^{n+1} \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} T_{s_n} ds_n \cdots ds_1 \right\|_{B(E)} &\leq \left\| \$^{n+1} \right\|_{B(E)} M e^{\beta t} \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} T_{s_n} ds_n \cdots ds_1 \\
&= \frac{\left\| \$^{n+1} \right\|_{B(E)} M e^{\beta t} t^{n+1}}{n!} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

de donde concluimos que $T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \$^n}{n!}$. ■

Proposición 2.1.11 *Sea $\{T_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo cualquiera(no necesariamente dinámico cuántico) uniformemente continuo de operadores acotados en $B(h)$ con generador infinitesimal $\$$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *T_t es σ-débil continuo para cada $t \geq 0$;*
2) *$\$$ es σ-débil continuo .*

Demostración. Seguimos [8], pág.37.

1) implica 2)

Como T_t e I son σ-débil continuos entonces $\frac{T_t - I}{t}$ es σ-débil continuo y $\$ = \lim_{t \to 0} \frac{T_t - I}{t}$ en la norma de $B(B(h))$, con lo cual resulta que $\$$ es σ-débil continuo, pues el conjunto de los operadores σ-débil continuo es cerrado bajo la topología σ-débil.

2) implica 1)

Como $\$$ es σ-débil continuo entonces cualquier potencia de éste es σ-débil-continuo, así se tiene que

$$T_t = e^{t\$} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(t\$)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \$^n}{n!}$$

es el límite de una sucesión de sumas parciales de operadores σ-débil continuos, con lo cual T_t resulta σ-débil continuo. ■

Proposición 2.1.12 *Sea $\$$ un operador acotado sobre $B(h)$ tal que $\$(a^*) = (\$(a))^*$ para cada $a \in B(h)$. Los siguientes son equivalentes:*

1) *Para todo $a \in B(h)$ y $t \geq 0$*

$$\exp(t\$)(a^*) \exp(t\$)(a) \leq \exp(t\$)(a^* a); \qquad (2.8)$$

2) *Para todo $a \in B(h)$ $a^* \$(a) + \$(a^*) a \leq \$(a^* a)$.* $\qquad (2.9)$

Demostración. 1) implica 2)

$$\exp(t\mathcal{L})(a^*)\exp(t\mathcal{L})(a) - a^*a \le \exp(t\mathcal{L})(a^*a) - a^*a$$

$$\frac{e^{t\mathcal{L}}a^*e^{t\mathcal{L}}a - a^*e^{t\mathcal{L}}a + a^*e^{t\mathcal{L}}a - a^*a}{t} \le \frac{e^{t\mathcal{L}}(a^*a) - a^*a}{t}$$

$$\frac{\left(e^{t\mathcal{L}}a^* - a^*\right)e^{t\mathcal{L}}a + a^*\left(e^{t\mathcal{L}}a - a\right)}{t} \le \frac{e^{t\mathcal{L}}a^*a - a^*a}{t}$$

por lo tanto cuando $t \to 0$

$$a^*\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(a^*)a \le \mathcal{L}(a^*a):$$

2) implica 1)
Observemos primero que para $a; b \in B(h)$, tal que $ab = 0$, se tiene lo siguiente:

$$b^*\mathcal{L}(a^*a)b \ge b^*a^*\mathcal{L}(ab) + b^*\mathcal{L}(a^*)ab = (ab)^*\mathcal{L}(a)b + b^*\mathcal{L}(a^*)(ab) = 0$$

Demostraremos que $(\lambda - \mathcal{L})^{-1}$ es no negativo para cada $\lambda > \|\mathcal{L}\|_{B(B(h))}$, para ello se demostrará que si $a \in B(h)$ es autoadjunto tal que $(\lambda - \mathcal{L})(a)$ es no negativo entonces a es no negativo. Sea $a = x - y$ su descomposición en la parte positiva y negativa. Claramente se tiene que $xy = 0$ y usando la observación de arriba se obtiene que $y\mathcal{L}(x)y \ge 0$, así también se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\le y\left(\left(1 - \lambda^{-1}\mathcal{L}\right)(a)\right)y \\ &= -y^3 - \lambda^{-1}y\mathcal{L}(x)y + \lambda^{-1}y\mathcal{L}(y)y \\ &\le -y^3 + \lambda^{-1}y\mathcal{L}(y)y \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$0 \le -y^3 + \lambda^{-1}y\mathcal{L}(y)y$$

con lo cual,

$$y^3 \le \lambda^{-1}y\mathcal{L}(y)y \text{ y } \|y\|^3 \le \lambda^{-1}\|\mathcal{L}\|_{B(B(h))}\|y\|^3$$

ya que $\lambda^{-1}\|\mathcal{L}\| < 1$ se obtiene que $y = 0$; así $a = x$ es no negativo. Ahora usando el hecho de que $e^{t\mathcal{L}}$ es positivo y lineal se tiene que,

$$e^{t\mathcal{L}}(a^*) = \left(e^{t\mathcal{L}}(a)\right)^*$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)\mathcal{L}}e^{s\mathcal{L}}(a^*)\,e^{s\mathcal{L}}(a)\right)$$

$$= e^{(t-s)\mathcal{L}}\left[-\mathcal{L}\left(e^{s\mathcal{L}}(a^*)\,e^{s\mathcal{L}}(a)\right)+\mathcal{L}e^{s\mathcal{L}}(a^*)\,e^{s\mathcal{L}}(a)+e^{s\mathcal{L}}(a^*)\,\mathcal{L}e^{s\mathcal{L}}(a)\right]$$

$$\leq a^*\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(a^*)\,a.$$

integrando esta desigualdad sobre el intervalo $[0,t]$ $(t\geq 0)$ se obtiene que $\exp(t\mathcal{L})(a^*)\exp(t\mathcal{L})(a) \leq \exp(t\mathcal{L})(a^*a).$ ■

Definición 2.1.13 *Un operador acotado $\mathcal{L}$ sobre $B(h)$ es llamado* **condicionalmente completamente positivo**, *si para cada $n\geq 1$ la transformación lineal $\mathcal{L}^n$ sobre $B(h)\otimes M_n$ definido por:*

$$\mathcal{L}^n(a\otimes E_{ij}) = \mathcal{L}(a)\otimes E_{ij}\,(1\leq i,j\leq n)$$

satisface la desigualdad

$$\mathcal{L}^n(x^*x)-x^*\mathcal{L}^n(x)-\mathcal{L}^n(x^*)\,x+x^*\mathcal{L}^n(I)\,x\geq 0 \qquad (2.10)$$

para cada $x\in B(h)\otimes M_n$.

Proposición 2.1.14 *Sea T un semigrupo uniformemente continuo sobre $B(h)$ con generador infinitesimal $\mathcal{L}$. Entonces T_t es completamente positivo para cada $t\geq 0$ si y sólo si $\mathcal{L}$ es condicionalmente completamente positivo y $\mathcal{L}(a^*) = (\mathcal{L}(a))^*$ para cada $a\in B(h)$.*

Demostración. Seguimos [8], págs.39-40.
Sea T un semigrupo dinámico cuántico. Claramente con la notacion de los $T_{t,n}$ para cada T_t, $\{T_t^n\}_{t\geq 0}$ resulta ser un semigrupo uniformemente continuo en $B(h)\otimes M_n$. Ahora usando la Ecuación (1.2) del Capítulo 1 se tiene que

$$T_t^n(x^*)\,(T_t^n(1))^{-1}\,T_t^n(x)\leq T_t^n(x^*x);\quad x\in B(h)\ \ y\ \ t\geq 0$$

al derivar esta desigualdad en $t=0$ se obtiene que,

$$\mathcal{L}^n(x^*x)-x^*\mathcal{L}^n(x)-\mathcal{L}^n(x^*)\,x+x^*\mathcal{L}^n(I)\,x\geq 0$$

resultando así que $\mathcal{L}$ es condicional completamente positivo.
Para ver que $\mathcal{L}(a^*) = (\mathcal{L}(a))^*$ obsérvese que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a^*) &= \lim_{t\to 0}\frac{T_t(a^*)-a^*}{t} = \left(\lim_{t\to 0}\frac{T_t(a)-a}{t}\right)^*\\ &= (\mathcal{L}(a))^*\end{aligned}$$

pues la operación * es continua en la norma de $B(h)$.
Recíprocamente, supongamos primero que $\mathcal{L}(1)\leq 0$; pues de no ser

el caso así, es suficiente considerar el operador $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - c;$ donde $c = \|\mathcal{L}(1)\|_{B(h)}.$ Claramente se tiene que la Ecuación $(2;1)$ se cumple tanto para $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1;$ así $T_t = e^{t\mathcal{L}} = e^{ct+t\mathcal{L}_1} = e^{tc}e^{t\mathcal{L}_1};$ resultando que T_t es completamente positivo si $e^{t\mathcal{L}_1}$ lo es. Así pues supóngase que $\mathcal{L}(1) \leq 0.$ Entonces para cada $n \geq 1;$ la Desigualdad $(2;10)$ dice que

$$
\begin{aligned}
x^*\mathcal{L}^n(x) + \mathcal{L}^n(x^*)x &\leq \mathcal{L}^n(x^*x)\\
e^{t\mathcal{L}^n}(x^*)e^{t\mathcal{L}^n}(x) &\leq e^{t\mathcal{L}^n}(x^*x)\,; \text{ por la ecuación } 2;8)
\end{aligned}
$$

así los T_t^n son positivos con lo cual los T_t son completamente positivos. ■

Lema 2.1.15 *Sea $\mathcal{L} : B(h) \to B(h)$ condicionalmente completamente positivo. Entonces para cada $n \geq 1$ y $a_1;:::;a_n \in A;$ $u_1;:::;u_n \in h,$ tal que $\sum_{j=1}^n a_j u_j = 0$, se tiene lo siguiente*

$$\sum_{i;j=1} \langle u_i; \mathcal{L}(a_i^*a_j)u_j\rangle \geq 0. \qquad (2;11)$$

Demostración. Seguimos [8], pág.40.
Sea $x \in B(h) \otimes M_n$ que tenga la forma

$$
x = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\quad \text{y} \quad
x^* = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 & \dots & 0 \\ a_2^* & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_n^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
$$

$$
\text{Sea} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix};\quad
x^*x = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 & \dots & 0 \\ a_2^* & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ a_n^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1^*a_1 & a_1^*a_2 & \dots & a_1^*a_n \\ a_2^*a_1 & a_2^*a_2 & \dots & a_2^*a_n \\ & & \vdots & \\ a_n^*a_1 & a_n^*a_2 & \dots & a_n^*a_n \end{pmatrix}
$$

$$
\text{y} \qquad \mathcal{L}^n(x^*x) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(a_1^*a_1) & \mathcal{L}(a_1^*a) & \dots & \mathcal{L}(a_1^*a_n) \\ \mathcal{L}(a_2^*a_1) & \mathcal{L}(a_2^*a_2) & \dots & \mathcal{L}(a_2^*a_n) \\ & \vdots & & \\ \mathcal{L}(a_n^*a_1) & \mathcal{L}(a_n^*a_2) & \dots & \mathcal{L}(a_n^*a_n) \end{pmatrix}.
$$

Por hipótesis tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle u; (\mathcal{L}^n(x^*x) - x^*\mathcal{L}^n(x) - \mathcal{L}^n(x^*)x + x^*\mathcal{L}^n(1)x)u\rangle\\
&= \langle u; \mathcal{L}^n(x^*x)u\rangle - \langle xu; \mathcal{L}^n(x)u\rangle - \langle u; \mathcal{L}^n(x^*)xu\rangle + \langle xu; \mathcal{L}^n(1)xu\rangle.
\end{aligned}
$$

Por separado se puede demostrar que en esta desigualdad el único término que no es 0 es

$$\langle u, \varpi^{n}(x^{*}x)\,u\rangle,$$

es decir $0 \leq \langle u, \varpi^{n}(x^{*}x)\,u\rangle = \sum_{i,j}^{n} \langle u_i, \varpi(a_i^{*}a_j)\,u_j\rangle$. ∎

Teorema 2.1.16 *Sea $\varpi : B(h) \to B(h)$ operador lineal con la propiedad $\varpi(a^{*}) = (\varpi(a))^{*}$ para cada $a \in B(h)$. ϖ es condicionalmente completamente positivo si y sólo si existe una transformación completamente positiva ϕ en $B(h)$ y un operador $G \in B(h)$ tal que para cada $a \in B(h)$*

$$\varpi(x) = \phi(a) + G^{*}a + aG. \qquad (2.12)$$

Además G satisface la desigualdad $G + G^{*} \leq \varpi(1)$.

Demostración. Seguimos [8], págs.40-42.
Supongamos que $\varpi(a) = \phi(a) + G^{*}a + aG$. La linealidad de ϖ es obvia y es claro que $\varpi(a^{*}) = (\varpi(a))^{*}$ por la positividad de ϕ. Ahora veremos que esta transformación ϖ es condicionalmente completamente positiva. Fijemos un n entero positivo y denotemos por G_n al operador $G \otimes 1$ en $B(h) \otimes M_n$. Para cada $x \in B(h) \otimes M_n$ tenemos que

$$\varpi^{n}(x) = \phi^{n}(x) + G_n^{*}x + xG_n.$$

Ahora usando la Desigualdad (2.10) obtenemos que:

$$\phi^{n}(x^{*}x) - \phi^{n}(x^{*})\,x - x^{*}\phi^{n}(x) + x^{*}\phi^{n}(1)\,x \geq 0.$$

Ya que ϕ es completamente positiva, entonces ϕ^{n} es positiva para cada $n \geq 1$ y como para cada $t \geq 0$ $e^{t\phi^{n}}$ es positivo, concluimos que $e^{t\phi}$ es completamente positivo. Se sigue de la desigualdad (2.10) que ϕ condicionalmente completamente positivo. Por la igualdad arriba de ϖ^{n} tenemos que ϖ es condicionalmente completamente positivo.

Recíprocamente, supóngase que ϖ escondicionalmente completamente positivo y que $\varpi(a^{*}) = (\varpi(a))^{*}$ con $a \in B(h)$. Fijemos un vector unitario $\eta \in h$ y consideremos el operador G en h con su adjunto definido por

$$G^{*}u = \varpi(|u\rangle\langle\eta|)\,\eta - \frac{1}{2}\langle\eta, \varpi(|\eta\rangle\langle\eta|)\,\eta\rangle\, u$$

para cada $u \in h$. Ahora para cada $n \geq 1$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, $u_1, \ldots, u_n \in h$ hagamos $u_{n+1} = \eta$, $\nu = -\sum_{j=1}^{n} a_j u_j$, $a_{n+1} = |\nu\rangle\langle\eta|$. Con estas notaciones tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j u_j = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j + a_{n+1}u_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j + |\nu\rangle\langle\eta|\eta$$

$$= \sum_{j=1} a_j u_j + \langle \eta, \eta \rangle \nu = \sum_{j=1} a_j u_j + \left(- \sum_{j=1} a_j u_j \right) = 0$$

con lo cual ahora aplicando la desigualdad $(2{,}11)$;

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \sum_{i,j=1}^{n+1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1}^{n+1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_{n+1}) u_{n+1} \rangle + \\
& \sum_{j=1}^{n+1} \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_j\right) u_j \right\rangle - \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_{n+1}\right) u_{n+1} \right\rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_{n+1}) u_{n+1} \rangle + \\
& \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_{n+1}\right) u_{n+1} \right\rangle + \sum_{j=1} \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_j\right) u_j \right\rangle + \\
& \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_{n+1}\right) u_{n+1} \right\rangle - \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_{n+1}\right) u_{n+1} \right\rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_{n+1}) u_{n+1} \rangle + \\
& \sum_{j=1} \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_j\right) u_j \right\rangle + \left\langle u_{n+1}, \varpi\left(a_{n+1}^* a_{n+1}\right) u_{n+1} \right\rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* |\nu\rangle\langle\eta|) \eta \rangle + \\
& \sum_{j=1} \left\langle \eta, \varpi\left(|\nu\rangle\langle\eta|^* a_j\right) u_j \right\rangle + \left\langle \eta, \varpi\left(|\nu\rangle\langle\eta|^* |\nu\rangle\langle\eta|\right) \eta \right\rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \varpi(|a_i^* \nu\rangle\langle\eta|) \eta \rangle + \\
& \sum_{j=1} \langle \eta, \varpi(|\eta\rangle\langle\nu| a_j) u_j \rangle + \langle \eta, \varpi(|\eta\rangle\langle\nu| |\nu\rangle\langle\eta|) \eta \rangle \\
= & \sum_{i,j=1} \langle u_i, \varpi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \varpi(|a_i^* \nu\rangle\langle\eta|) \eta \rangle +
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1} \left\langle \xi, \phi\left(\left|\xi\right\rangle\left\langle o a_j^*\right|\right) u_j \right\rangle + \left\langle \xi, \phi\left(|\xi\rangle\langle\xi|\right)\|o\|^2 \xi\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1} \langle u_i, \phi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \phi(|a_i^* o\rangle\langle\xi|)\xi\rangle +$$

$$\sum_{j=1} \left\langle \xi, \phi\left(\left|\xi\right\rangle\left\langle o a_j^*\right|\right) u_j \right\rangle + \langle \xi, \phi(|\xi\rangle\langle\xi|)\xi\rangle \|o\|^2.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \sum_{i,j=1} \langle u_i, \phi(a_i^* a_j) u_j \rangle + \sum_{i=1} \langle u_i, \phi(|a_i^* o\rangle\langle\xi|)\xi\rangle +$$

$$\sum_{j=1} \left\langle \xi, \phi\left(\left|\xi\right\rangle\left\langle o a_j^*\right|\right) u_j \right\rangle + \langle \xi, \phi(|\xi\rangle\langle\xi|)\xi\rangle \|o\|^2.$$

Al recordar la definición de G^*, los últimos tres términos se pueden escribir como

$$\sum_{i=1} \langle u_i, G^* a_i^* o\rangle + \sum_{j=1} \langle G^* a_i^* o, u_j\rangle$$
$$= -\sum_{i,j=1} \langle u_i, G^* a_i^* a_j u_j\rangle - \sum_{i,j=1} \langle u_i, a_i^* a_j G u_j\rangle$$

de donde obtenemos la desigualdad

$$0 \leq \sum_{i,j=1} \langle u_i, (\phi(a_i^* a_j) - G^* a_i^* a_j - a_i^* a_j G) u_j\rangle.$$

Definamos Ψ de la siguiente forma,

$$\Psi(a) = \phi(a) - G^* a - aG$$

así Ψ es completamente positivo. Finalmente tenemos que,

$$G + G^* = \phi(1) - \Psi(1) \leq \phi(1)$$

lo que finaliza la demostración. ■

Teorema 2.1.17 *(Lindblad) Un operador acotado $\$$ sobre $B(h)$ es el generador in…nitesimal de un Semigrupo Dinámico Cuántico uniformemente continuo si y sólo si existen un espacio de Hilbert $K;$ un operador $' : h \ ! \ h - K$ y un operador G en h acotado tales que*

$$\$ (x) = \ '^{¤} (x - 1) \ ' + G^{¤} x + xG$$

para $x \ \mathbf{2} \ B(h):$ El operador $\$$ puede ser elegido de tal forma que

$$\mathbf{f}(x - 1) \ ' u : x \ \mathbf{2} \ B(h) ; u \ \mathbf{2} \ h\mathbf{g}$$

es total en $h - K$.

Demostración.

Sea T semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo. Entonces su generador in…nitesimal $\$$ es condicionalmente completamente positivo, por lo tanto puede ser presentado como $\$ (x) = Á(x) + G^{¤} x + xG$, $x \ \mathbf{2} \ B(h)$ (Teorema 2.1.15). Pero, por otra, parte $Á$ es completamente positiva de $B(h)$ a $B(h)$ mismo. Así usando el Teorema de Stinespring se tiene que existe un espacio de Hilbert K y $L : h \ ! \ h - K$ lineal tal que

$$Á(x) = L^{¤} (x - 1) L$$

por lo tanto se tiene así, $\$ (a) = L^{¤} (x - 1) L + G^{¤} x + xG:$

Para demostrar el recíproco, supóngase que

$$\$ (x) = L^{¤} (x - 1) L + G^{¤} x + xG$$

entonces por el Teorema de Krauss, ecuación $(1;2;4)$, $L^{¤} (x - 1) L$ es ¾-débil continuo. Entonces $\$$ es condicionalmente completamente positivo y ¾-débil continuo. Además para todo $x \ \mathbf{2} \ B(h)$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \$ (x^{¤}) &= L^{¤} (x^{¤} - 1) L + G^{¤} x^{¤} + x^{¤} G \\ &= L^{¤} (x - 1)^{¤} L + (G^{¤} x)^{¤} + (xG)^{¤} \\ &= (L^{¤} (x - 1) L)^{¤} + (G^{¤} x + xG)^{¤} \\ &= (\$ (x))^{¤} : \end{aligned}$$

Claramente se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{o}; \$ (1) \ {}^{o}\mathbf{i} &= \mathbf{h}^{o}; L^{¤} (1) L^{o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{¤ o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{o}\mathbf{i} \\ &= \mathbf{h}L^{o}; L^{o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{¤ o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{o}\mathbf{i} \\ &= \mathbf{jj}L^{o}\mathbf{jj}^{2} + \mathbf{h}^{o}; G^{¤ o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{o}\mathbf{i} \\ &¸ \ \mathbf{h}^{o}; G^{¤ o}\mathbf{i} + \mathbf{h}^{o}; G^{o}\mathbf{i} : \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\$ (1) \ ¸ \ G^{¤} + G:$$

Resultando así que $\$$ es el generador in…nitesimal de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo. ■

Corolario 2.1.18 (*Lindblad-Gorini-Kossakowski-Sudarshan*) *Si $\mathcal{L}$ es el generador infinitesimal de un S.D.C $\{T_t\}_t$ uniformemente continuo que actúa sobre $B(h)$ entonces existe una sucesión $\{L_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, $L_\ell \in B(h)$ tal que $\sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell^* L_\ell < \infty$ en la topología fuerte y existe $G \in B(h)$ tal que*

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell^* x L_\ell + G^* x + xG.$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Lindblad se tiene que

$$\mathcal{L}(x) = \phi(x) + G^* x + xG$$

con $G \in B(h)$. Por el Teorema de Stinespring, ϕ es completamente positivo y σ-débil continuo, y usando el Teorema de Krauss, $\phi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell^* x L_\ell$ donde $\sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell^* L_\ell < \infty$ en la topología débil. De donde se deduce que

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell^* x L_\ell + G^* x + xG.$$

■

Para la construcción del Semigrupo Dinámico Cuántico minimal que en el próximo capítulo se lleva acabo. La ecuación de la parte ii) de la Hipótesis A que se usa en gran parte de ese capítulo resulta ser una condición necesaria para la contracción de este semigrupo minimal; es decir si se tiene que

$$0 \le T_t^{\min}(I) \le I$$

entonces

$$T_t^{\min}(I) - I \le 0;$$

$$\frac{T_t^{\min}(I) - I}{t} \le 0$$

y siendo $\mathcal{L}^{\min}$ el generador infinitesimal de este semigrupo dinámico cuántico minimal, también se cumple que en la topología σ-débil(σ_ω)

$$\mathcal{L}^{\min}(I) = \sigma_{\mathcal{L}} \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t^{\min}(I) - I}{t}$$

de donde resulta así que

$$\mathcal{L}^{\min}(I) \le 0$$

Por otra parte, más adelante en ese mismo capítulo se demuestra que $D\left(\mathcal{L}^{\min}\right) \subset D(\mathcal{L})$,

donde $D(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{array}{l} x \in B(h) : \upsilon, u \in D(G) \subset D(L_\ell),\ \ell = 1, 2, \ldots \\ \mathcal{L}(x)[\upsilon, u] = \langle G\upsilon, u\rangle + \langle \upsilon, Gu\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell \upsilon, L_\ell u\rangle \end{array} \right\}$

$$\mathcal{L}(I)[\upsilon, u] = \langle \upsilon, \mathcal{L}(I) u\rangle = \langle \upsilon, \mathcal{L}^{\min}(I) u \rangle \le 0$$

de donde se deduce que

$$\mathcal{L}(I)[\rho; u] = \langle \rho, \mathcal{L}(I)u \rangle = \langle G\rho, u \rangle + \langle \rho, Gu \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell \rho, L_\ell u \rangle \leq 0$$

que es la ecuación en la parte ii) de la Hipótesis A.

La fórmula de Leibniz ([1], pág. 274) del Cálculo elemental será ampliamente usada en este trabajo, dice la siguiente:
Sea $E = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t\}$ *y sea* $f : E \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $\frac{\partial}{\partial t} f$ *es una función continua entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t, s)\, ds = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, s)\, ds. \qquad (2.13)$$

Capítulo 3

El Semigrupo Dinámico Cuántico Minimal (S.D.C.M.)

Este capítulo es el más importante de todo el trabajo, debido a que es aquí donde se presenta por primera vez a la Ecuación de Lindblad, cuya solución es única cuando el semigrupo dinámico cuántico minimal que la resuelve es conservativo. Para garantizar la existencia de una solución se lleva acabo la construcción del semigrupo dinámico cuántico minimal (S.D.C.M.) *Teorema* 3.1.7, el cual es denotado por $T^{min} = \left(T_t^{min}\right)_{t \geq 0}$ y que no necesariamente es conservativo. Por último el *Corolario* 3.1.8, muestra que el semigrupo dinámico cuántico minimal cuando es conservativo es la única solución de la Ecuación de Lindblad. El resultado más importante de este capítulo el cual proporciona un criterio para la conservatividad de este semigrupo minimal y que usaremos posteriormente en los ejemplos del Capítulo 5, es el *Teorema* 3.2.7.

3.1. Hipótesis A

i) Sea G el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ en h.
ii) Sean $\{L_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ operadores no necesariamente acotados de tal forma que $D(G) \subset \bigcap_{\ell=1}^{\infty} D(L_\ell)$ y para cada $u \in D(G)$

$$\langle u, Gu\rangle + \langle Gu, u\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell u, L_\ell u\rangle \leq 0. \qquad (3.2)$$

Lema 3.1.1 *Supóngase que se tienen las Hipótesis A. Entonces para cada $\ell \geq 1$ las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) *La transformación $t \to L_\ell P_t u$ es continua en la norma de h para cada $u \in D(G)$.*
2) *La transformación $t \to L_\ell P_t u$, es derivable en la norma para cada $u \in D\left(G^2\right)$ y*

$$\frac{d}{dt} L_\ell P_t u = L_\ell P_t G u. \qquad (3.3)$$

3) *La transformación $t \to \sum_{\ell=1}^{\infty} \|\alpha L_\ell P_t u\|_h^2$, es derivable para cada $u \in D\left(G^2\right)$ y $\alpha \in B(h)$. Es decir se tiene lo siguiente*

$$\frac{d}{dt} \sum_{\ell=1}^{\infty} \|\alpha L_\ell P_t u\|_h^2 = 2Re \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell P_t G u\rangle. \qquad (3.4)$$

Demostración. Seguimos [8], págs.44.
Para demostrar 1), bastará ver que si $s \to 0$ entonces

$$\|L_\ell P_{t+s} u - L_\ell P_t u\|_h^2 = \|L_\ell (P_{t+s} u - P_t u)\|_h^2 \to 0.$$

Para verlo, haremos uso de la Hipótesis A y el hecho de que $D(G)$ es invariante bajo la acción de P_t

$$\begin{aligned}
\|L_\ell (P_{t+s} u - P_t u)\|_h^2 &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \|L_\ell (P_{t+s} u - P_t u)\|_h^2 \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell (P_{t+s} - P_t) u, L_\ell (P_{t+s} u - P_t) u\rangle \\
&\leq -2Re\langle (P_{t+s} - P_t) u, (P_{t+s} - P_t) G u\rangle \underset{s \to 0}{\to} 0
\end{aligned}$$

porque $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo.

Así tenemos que $L_\ell P_{t+s}u \underset{s\to 0}{\longrightarrow} L_\ell P_t u.$

Para probar 2), observemos que debido a que $D\left(G^2\right)$ es invariante bajo $\{P_t\}_{t\geq 0}$, tenemos por la Hipótesis A

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{L_\ell\left((P_{t+s}-P_t)u\right)}{s} - L_\ell P_t G u \right\|^2 \\
&\leq -2Re\left\langle \frac{(P_{t+s}-P_t)u}{s} - P_t G u; G\left(\frac{(P_{t+s}-P_t)u}{s} - P_t G u\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
= -2\,\mathrm{Re}\left\langle P_t\left(\frac{(P_s-I)u}{s} - Gu\right); P_t\left(\frac{(P_s-I)Gu}{s} - G^2u\right)\right\rangle \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0.
$$

Aquí hemos hecho uso de que si $u \in D\left(G^2\right);\ Gu \in D(G)$ y

$$
\frac{(P_s-I)Gu}{s} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} G^2u;
$$

por lo tanto tenemos que:

$$
\frac{d}{dt}L_\ell P_t u = L_\ell P_t G u.
$$

La prueba de 3) es como sigue:

Sean $s,t \geq 0$, $u \in D\left(G^2\right)$ y $\alpha \in B(h)$; entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell P_{t+s}u\|_h^2 \\
=&\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell P_{t+s}u - \alpha L_\ell P_t u + \alpha L_\ell P_t u\|_h^2 \\
=&\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u + \alpha L_\ell P_t u\|_h^2 \\
=&\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u + \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u + \alpha L_\ell P_t u\rangle \\
=&\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\rangle + \\
&2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\rangle + \sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell P_t u\rangle \\
=&\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\|_h^2 + 2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\rangle + \\
&\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell P_t u\|_h^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que

$$
\sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell P_{t+s}u\|_h^2 - \sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell P_t u\|_h^2
$$

$$
= \sum_{\ell=1} \|\alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\|_h^2 + 2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\rangle .
$$

Ahora desarrollemos

$$
\begin{aligned}
&2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(P_{t+s} - P_t\right) u\rangle \\
=&\ 2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \left\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \int_t^{t+s} P_r G u dr \right\rangle \\
=&\ 2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1} \left\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \left(\int_t^{t+s} P_r G u dr - P_t s G u + P_t s G u\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\left\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell\left(\int_t^{t+s} P_r G u\,dr - P_t G u\right) + \alpha L_\ell P_t s G u\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\left\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \int_t^{t+s} (P_r - P_t)\, G u\,dr\right\rangle \\
&\quad + 2s\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell P_t G u\rangle .
\end{aligned}$$

De donde podemos ver que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}\|\alpha L_\ell P_{t+s} u\|_h^2 - \sum_{\ell=1}\|\alpha L_\ell P_t u\|_h^2 \qquad (3.4)\\
&= \sum_{\ell=1}\|\alpha L_\ell (P_{t+s} - P_t)\, u\|_h^2 + \\
&\quad 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=}\left\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell \int_t^{t+s} (P_r - P_t)\, G u\,dr\right\rangle \\
&\quad + 2s\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\langle \alpha L_\ell P_t u, \alpha L_\ell P_t G u\rangle .
\end{aligned}$$

De la última expresión, analicemos cada sumando acotándolos si es necesario con la Hipótesis A y la desigualdad (3.2):

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty}\|\alpha L_\ell (P_{t+s} - P_t)\, u\|_h^2 &\le \sum_{\ell=1}^{\infty}\|\alpha\|_\infty^2 \|L_\ell (P_{t+s} - P_t)\, u\|_h^2 \\
&\le -2\|\alpha\|_\infty^2\, \mathrm{Re}\langle (P_{t+s} - P_t)\, u, (P_{t+s} - P_t)\, G u\rangle \\
&\le 2\|\alpha\|_\infty^2\, \|(P_{t+s} - P_t)\, u\|_h \|(P_{t+s} - P_t)\, G u\|_h \\
&= 2\|\alpha\|_\infty^2 \left\|\int_t^{t+s} P_r G u\,dr\right\|_h \left\|\int_t^{t+s} P_k G^2 u\,dk\right\|_h
\end{aligned}$$

$$\leq 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\int_{t}^{t+s}\|P_{r}Gu\|_{h}\,dr\int_{t}^{t+s}\left\|P_{k}G^{2}u\right\|_{h}dk$$

$$\leq 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\int_{t}^{t+s}\|Gu\|_{h}\,dr\int_{t}^{t+s}\left\|G^{2}u\right\|_{h}dk$$

$$= 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\,\|Gu\|_{h}\left\|G^{2}u\right\|_{h}s^{2}.$$

Es decir, hemos probado que:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\|\alpha L_{\ell}\left(P_{t+s}-P_{t}\right)u\|_{h}^{2}\leq 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\,\|Gu\|_{h}\left\|G^{2}u\right\|_{h}s^{2}.$$

Para el segundo sumando, dividimos entre s;

$$\frac{2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle \alpha L_{\ell}P_{t}u,\alpha L_{\ell}\int_{t}^{t+s}\left(P_{r}-P_{t}\right)Gu\,dr\right\rangle}{s}$$

$$= 2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle \alpha L_{\ell}P_{t}u,\alpha L_{\ell}\frac{1}{s}\int_{t}^{t+s}\left(P_{r}-P_{t}\right)Gu\,dr\right\rangle$$

$$\leq 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\|L_{\ell}P_{t}u\|_{h}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\|L_{\ell}\frac{1}{s}\int_{t}^{t+s}\left(P_{r}-P_{t}\right)Gu\,dr\right\|_{h}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\|\alpha\|_{\infty}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\|L_{\ell}P_{t}u\|_{h}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2}}\left\|L_{\ell}\int_{t}^{t+s}\left(P_{r}-P_{t}\right)Gu\,dr\right\|_{h}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De donde tenemos que:

$$\frac{2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle \alpha L_{\ell}P_{t}u,\alpha L_{\ell}\int_{t}^{t+s}\left(P_{r}-P_{t}\right)Gu\,dr\right\rangle}{s}\xrightarrow[s\to 0]{}0.$$

Inmediatamente dividiendo la ecuación $\left(3.5\right)$ por s tenemos que:

$$\frac{\sum_{\ell=1}^{\infty}\|\alpha L_{\ell}P_{t+s}u\|_{h}^{2}-\sum_{\ell=1}^{\infty}\|\alpha L_{\ell}P_{t}u\|_{h}^{2}}{s}\xrightarrow[s\to 0]{}2\operatorname{Re}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle \alpha L_{\ell}P_{t}u,\alpha L_{\ell}P_{t}Gu\right\rangle$$

lo que demuestra la parte 3). ■

Ahora consideraremos la forma sesquilineal $\mathcal{L} : B(h) \times D(G) \times D(G)$ dada por la siguiente regla:

$$\mathcal{L}(x)[u,\upsilon] = \langle u, xG\upsilon\rangle + \langle Gu, x\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1} \langle L_\ell u, xL_\ell \upsilon\rangle \quad (3.5)$$

claramente $\mathcal{L}$ es lineal en el operador x y es sesquilineal en $D(G) \times D(G)$ con las condiciones de la Hipótesis A. $\mathcal{L}$ se le llama el generador formal, generador de Lindblad o Lindbladiano.

Nuestra meta es construir un Semigrupo Dinámico Cuántico que satisfaga la siguiente ecuación, dados $u,\upsilon \in D(G)$

$$\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \langle u, x\upsilon\rangle + \int_0^t \mathcal{L}(T_s(x))[u,\upsilon]\, ds \quad (3.6)$$

o en forma equivalente

$$\frac{d}{dt}\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \mathcal{L}(T_t(x))[u,\upsilon] \quad (3.6')$$

con valor inicial $\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle|_{t=0} = \langle u, x\upsilon\rangle.$ Esta última ecuación es llamada Ecuación de Lindblad.

Definición 3.1.2 *Sea Ψ operador lineal densamente definido(es decir con dominio denso) en un espacio de Banach β y Q subespacio vectorial de β entonces Q es esencia de Ψ si $Q \subset D(\Psi)$ y para cada $x \in D(\Psi)$ existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $\Psi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Psi(x).$*

Proposición 3.1.3 *Supóngase que se satisface la Hipótesis A y que $x \in B(h).$ Sea $\{T_t(x)\}_{t\geq 0}$ una familia de elementos de $B(B(h))$ σ-débil continua respecto al tiempo tal que*

$$\|T_s(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \langle u, x\upsilon\rangle + \int_0^t \mathcal{L}(T_s(x))[u,\upsilon]\, ds,$ *se tiene para cada* $u,\upsilon \in D(G)$;

2) *Para cada* $u,\upsilon \in D(G)$ *tenemos que*

$$\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \langle P_t u, P_t x\upsilon\rangle + \sum_{\ell=0} \int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle\, ds \quad (3.7)$$

Demostración. Seguimos [8], pág.46.
1) implica 2)
Tomemos $t \geq 0$ fijo, entonces para $\upsilon, u \in D(G)$

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}\langle P_{t-s}u, T_s(x)\, P_{t-s}\upsilon\rangle \\
= \;& \langle -GP_{t-s}u, T_s(x)\, P_{t-s}\upsilon\rangle + \varpi\left(T_s(x)\right)[P_{t-s}u, P_{t-s}\upsilon] + \\
& \langle P_{t-s}u, T_s(x)\,(-GP_{t-s}\upsilon)\rangle \\
= \;& \langle -GP_{t-s}u, T_s(x)\, P_{t-s}\upsilon\rangle + \langle P_{t-s}u, T_s(x)\,(-GP_{t-s}\upsilon)\rangle \\
& + \langle GP_{t-s}u, T_s(x)\, P_{t-s}\upsilon\rangle + \langle P_{t-s}u, T_s(x)\, GP_{t-s}\upsilon\rangle \\
& + \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle \\
= \;& \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle
\end{aligned}
$$

es decir tenemos que,

$$\frac{d}{ds}\langle P_{t-s}u, T_s(x)\, P_{t-s}\upsilon\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle .$$

Ahora integrando esta última igualdad sobre $[0, t]$, deducimos lo siguiente:

$$\langle u, T_t(x)\,\upsilon\rangle - \langle P_t u, T_0(x)\, P_t\upsilon\rangle = \int_0^t \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle\, ds,$$

con lo cual

$$\langle u, T_t(x)\,\upsilon\rangle = \langle P_t u, xP_t\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle\, ds.$$

2) implica 1)
Sean $u, \varphi \in D\left(G^2\right)$ y $T_s(x) \geq 0$, usaremos las ecuaciones (12.12) y (3.7) al igual que la identidad de polarización compleja([3]$,$ pág. 38).

$$\frac{d}{dt}\langle u, T_t(x)\varphi\rangle = \frac{d}{dt}\left[\langle P_t u, x P_t \varphi\rangle + \sum_{\ell=1}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s} u, T_s(x) L_\ell P_{t-s}\varphi\rangle\, ds\right]. \quad (3.7)$$

Como $T_s(x) \geq 0$ entonces existe $y \in B(h)$ tal que $y^* y = T_s(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s} u, T_s(x) L_\ell P_{t-s}\varphi\rangle\, ds \\
&= \frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right), y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right)\right\rangle ds
\end{aligned}$$

así se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle u, T_t(x)\varphi\rangle = \langle P_t G u, x P_t \varphi\rangle + \langle P_t u, x P_t G\varphi\rangle \\
&+ \frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right), y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right)\right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Pero desarrollando el segundo término de esta última igualdad se tiene que este es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\| y L_\ell P_{t-t}\left(u + i^k\varphi\right)\right\|_h^2 \\
&+ \int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\left\| y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right)\right\|_h^2 ds.
\end{aligned}$$

Así, por la Ecuación (3.4) tenemos que la última expresión en el extremo derecho de la última igualdad es igual a,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle y L_\ell\left(u + i^k\varphi\right), y L_\ell\left(u + i^k\varphi\right)\right\rangle \\
&+ \int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\, 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\left\langle y L_\ell P_{t-s}\left(u + i^k\varphi\right), y L_\ell P_{t-s} G\left(u + i^k\varphi\right)\right\rangle ds;
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
= &\sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell u, T_s(x)\, L_\ell \psi\right\rangle \\
&+\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k} 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(o+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}G\left(o+i^k\psi\right)\right\rangle ds.
\end{aligned}$$

Sin embargo, al desarrollar

$$\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k} 2\,\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}G\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds;$$

Se tiene que es igual a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle yL_\ell P_{t-s}G\left(u+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
&+\int_0^t \sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}G\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
= &\int_0^t \sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle L_\ell P_{t-s}G\left(u+i^k\psi\right), y^*yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
&+\int_0^t \sum_{\ell=1}\frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right), y^*yL_\ell P_{t-s}G\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
= &\int_0^t \sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell P_{t-s}Gu, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\psi\right\rangle ds \\
&+\int_0^t \sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}G\psi\right\rangle ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{\ell=1}\int_0^t \frac{1}{4}\sum_{k=0} i^{-k}\left\langle yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right), yL_\ell P_{t-s}\left(u+i^k\psi\right)\right\rangle ds \\
= &\sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell u, T_s(x)\, L_\ell \psi\right\rangle + \int_0^t \sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell P_{t-s}Gu, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}\psi\right\rangle ds + \\
&\int_0^t \sum_{\ell=1}\left\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)\, L_\ell P_{t-s}G\psi\right\rangle ds
\end{aligned}$$

Poniendo todas estas igualdades en $(3,7)$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle &= \langle P_tGu, xP_t\upsilon\rangle + \langle P_tu, xP_tG\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell\upsilon, T_s(x)L_\ell\upsilon\rangle \\
&+ \int_0^t \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}u, T_s(x)L_\ell P_{t-s}G\upsilon\rangle\, ds \\
&+ \int_0^t \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_{t-s}Gu, T_s(x)L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle\, ds.
\end{aligned}
$$

Al sumar el primer término y el quinto se obtiene que es igual a

$$\langle u, T_t(x)G\upsilon\rangle;$$

análogamente la suma del segundo témino con el cuarto nos da

$$\langle Gu, T_t(x)\upsilon\rangle.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle &= \langle u, T_t(x)G\upsilon\rangle + \langle Gu, T_t(x)\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell u, T_s(x)L_\ell\upsilon\rangle \\
&= \langle u, \varpi T_t(x)\upsilon\rangle;
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\frac{d}{ds}\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \langle u, \varpi T_s(x)\upsilon\rangle$$

al integrar sobre el intervalo $[0, t]$;

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle\, ds &= \int_0^t \varpi(T_s(x))[u,\upsilon]\, ds \\
\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle - \langle u, x\upsilon\rangle &= \int_0^t \varpi(T_s(x))[u,\upsilon]\, ds;
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que,

$$\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \langle u, x\upsilon\rangle + \int_0^t \varpi(T_s(x))[u,\upsilon]\, ds.$$

Ya que $D\left(G^2\right)$ ([20], Lema $3,2$, $3,3$, págs.$9-10$) es una esencia de G, la demostración vale en todo $D(G)$. $\blacksquare$

Proposición 3.1.4 *Supóngase que se tiene la Hipótesis A. Definimos para cada $t \geq 0$, la siguiente sucesión de transformaciones lineales de $B(h)$ en sí mismo;*

$$\left\langle \xi, T_t^0(x)\eta \right\rangle = \langle P_t\xi, xP_t\eta\rangle \tag{3.8}$$

Suponiendo que se ha definido T_t^n para algún $n \in \mathbb{N}$, se define T_t^{n+1}

$$\left\langle u, T_t^{n+1}(x)\eta \right\rangle = \langle P_t u, xP_t\eta\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x)L_\ell P_{t-s}\eta\rangle\, ds$$

para $t \geq 0$, $x \in B(h)$, y $u, \eta \in D(G)$.

Entonces para cada $t \geq 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

1) *T_t^n es contracción, lineal, completamente positivo y normal.*

2) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in B(h)$ la transformación $t \to T_t^n(x)$ es σ-débil continuo.*

3) *La sucesión $\{T_t^n(x)\}_{n \geq 0}$ es creciente para cada $x \in B(h)$ que sea positivo.*

4) *$T_t^n(1) \leq 1$ para cada $t \geq 0$ y cada $n \geq 0$.*

Demostración. Seguimos [8], págs.47.

Claramente la transformación T_t^0, está bien definida y tiene todas las propiedades arriba mencionadas. Sólo falta ver que $T_t^0(1) \leq 1$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle u, T_t^0(1)u \right\rangle &= \langle P_t u, 1P_t u\rangle = \langle P_t u, P_t u\rangle = \|P_t u\|_h^2 \leq \|P_t\|_{B(h)}^2 \|u\|_h^2 \\
&\leq \|u\|_h^2 = \langle u, 1u\rangle
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$T_t^0(1) \leq 1.$$

Supongamos que los T_t^n son contracciones sobre $B(h)$ y que satisfacen la primera condición para un $n \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces demostraremos que T_t^{n+1} tiene las mismas propiedades.

Para cada $x \in B(h)$ positivo y $\xi, \eta \in D(G)$, la integral en el lado derecho de (3.8) está bien definida por las propiedades de los T_t^n y además por la positividad de éste mismo, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x)L_\ell P_{t-s}\eta\rangle\, ds \right| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|T_s^n(x)\|_{B(h)}\|L_\ell P_{t-s}u\|\|L_\ell P_{t-s}\eta\|\, ds \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|T_s^n(1)\|_{B(h)}\|x\|_{\infty}\|L_\ell P_{t-s}u\|\|L_\ell P_{t-s}\eta\|\, ds \\
&\leq \|x\|_{\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|L_\ell P_{t-s}u\|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|L_\ell P_{t-s}\eta\|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad $(3;2)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|L_\ell P_{t-s}u\|^2\,ds &\le -\int_0^t 2\,\mathrm{Re}\langle P_{t-s}u, GP_{t-s}u\rangle\,ds\\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}\|P_{t-s}u\|_h^2\,ds\\ &= \|u\|_h^2 - \|P_tu\|_h^2 .\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \|L_\ell P_{t-s}\varphi\|^2\,ds = \|\varphi\|_h^2 - \|P_t\varphi\|^2$$

por lo tanto,

$$\left|\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x)\,L_\ell P_{t-s}\varphi\rangle\,ds\right| \le \|x\|_\infty\left(\|u\|_h^2-\|P_tu\|_h^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\varphi\|_h^2-\|P_t\varphi\|_h^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Recordemos la siguiente propiedad

$$a \ge b;\ c \ge d \text{ implica que } \left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-d^2\right)^{\frac{1}{2}} \le ac-bd.$$

Tenemos así que:

$$\left|\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x)\,L_\ell P_{t-s}\varphi\rangle\,ds\right| \le \|x\|_\infty\left(\|u\|_h\cdot\|\varphi\|_h - \|P_tu\|_h\cdot\|P_t\varphi\|_h\right);$$

como además

$$|\langle P_tu, xP_t\varphi\rangle| \le \|P_tu\|_h\cdot\|P_t\varphi\|_h\,\|x\|_\infty ;$$

se tiene que,

$$\left|\langle u, T_t^{n+1}(x)\varphi\rangle\right| \le \|P_tu\|_h\cdot\|P_t\varphi\|_h\,\|x\|_\infty + \|x\|_\infty\left(\|u\|_h\cdot\|\varphi\|_h - \|P_tu\|_h\cdot\|P_t\varphi\|_h\right).$$

Por lo tanto, $\left|\langle u, T_t^{n+1}(x)\varphi\rangle\right| \le \|u\|_h\cdot\|\varphi\|_h\,\|x\|_\infty .$

Ahora veamos que T_t^{n+1} es contracción.

$$\left\|T_t^{n+1}\right\|_{B(B(h))} = \sup_{\substack{\|x\|_\infty\le 1\\ \|u\|=\|\varphi\|\le 1}} \left|\langle u, T_t^{n+1}(x)\varphi\rangle\right| \le \|u\|_h\cdot\|\varphi\|_h\,\|x\|_\infty \le 1$$

lo que implica que $\left\|T_t^{n+1}\right\| \le 1$; resultando así ser contracción.

Enseguida probamos la normalidad de T_t^{n+1}. Es claro que T_t^0 es normal y completamente positivo pues tiene la forma de Kraus.

Supongamos que se ha establecido que T_t^n es normal se probará que T_t^{n+1} también es normal.

Tomemos $\rho \in D(G)$ y $\{x_\alpha\}_\alpha$ una red creciente de elementos positivos en $B(h)$ tal que $x_\alpha \xrightarrow[\sigma w]{} x \in B(h)$.

Para cada α, considérese la función $s \to \sum_\ell \langle L_\ell P_{t-s}\rho, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle$. La familia es creciente respecto al parámetro α y converge puntualmente respecto a α a la función continua $s \to \sum_\ell \langle L_\ell P_{t-s}\rho, T_s^n(x) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle$. Ahora aplicando el Lema de Dini (1,2,10) a
$f_\alpha(s) = \sum_\ell \langle L_\ell P_{t-s}\rho, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle$ que es continua y convergente a
$f(s) = \sum_\ell \langle L_\ell P_{t-s}\rho, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle$ esta convergencia es uniforme sobre el intervalo compacto $[0,t]$, de donde se deduce que
$\int_0^t f_\alpha(s)\,ds \xrightarrow[\alpha]{} \int_0^t f(s)\,ds$; pues es sabido que no existe Teorema de convergencia monótona para redes, por lo tanto se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle\, ds \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \sup_\alpha \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle\, ds \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\sup_\alpha\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle\, ds \\
&= \sup_\alpha\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle\, ds \\
&= \lim_\alpha\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}\rho\rangle\, ds
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
&\langle u, T_t^{n+1}(x)\, u\rangle \\
&= \sup_\alpha \langle P_t u, x_\alpha P_t \rho\rangle + \sup_\alpha \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds \\
&= \lim_\alpha \langle P_t u, x_\alpha P_t u\rangle + \lim_\alpha \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds \\
&= \lim_\alpha \left(\langle P_t u, x_\alpha P_t u\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(x_\alpha) L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds\right) \\
&= \lim_\alpha \langle u, T_t^{n+1}(x_\alpha)\, u\rangle
\end{aligned}
$$

resultando así que T_t^{n+1} es normal.

De una forma similar se demuestra la Propiedad 2) para T_t^{n+1}. Para ello basta tomar $\rho \in \tau(h)$ y ver que $tr(\rho T_t^{n+1}) \xrightarrow[t \to 0]{} tr(\rho T_0^{n+1})$.

Ahora veamos que T_t^{n+1} es completamente positiva: Supongamos que T_t^n es completamente positiva, sea $m \geq 1$ y sean $x_1, \ldots, x_m \in B(h)$; $\xi_1, \ldots, \xi_m \in D(G)$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{m} \left\langle \xi_i, T_t^{n+1}(x_i^* x_j)\xi_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \langle P_t\xi_i, x_i^* x_j P_t\xi_j \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}\xi_i, T_t^n(x_i^* x_j) L_\ell P_{t-s}\xi_j \rangle \, ds \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle \xi_i, T_t^0(x_i^* x_j)\xi_j \right\rangle \\
&+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{m} \int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}\xi_i, T_t^n(x_i^* x_j) L_\ell P_{t-s}\xi_j \rangle \, ds \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle \xi_i, T_t^0(x_i^* x_j)\xi_j \right\rangle \\
&+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^t \sum_{i,j=1}^{m} \langle L_\ell P_{t-s}\xi_i, T_t^n(x_i^* x_j) L_\ell P_{t-s}\xi_j \rangle \, ds \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que T_t^{n+1} es completamente positivo.

Para la propiedad 4) supongamos que $T_t^n \geq T_t^{n-1}$, entonces

$$\left\langle \xi, \left(T_t^{n+1}(x) - T_t^n(x) \right) \xi \right\rangle$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-s}\xi, \left(T_s^n(x) - T_s^{n-1}(x) \right) L_\ell P_{t-s}\xi \right\rangle ds \geq 0$$

por lo tanto

$$T_t^{n+1}(x) \geq T_t^n(x).$$

La propiedad 5); se demuestra así;

Tomemos $u \in D(G)$ y supóngase como hipótesis de inducción que

$T_t^n(1) \le 1.$

$$
\begin{aligned}
\left\langle u, T_t^{n+1}(1)\,u\right\rangle &= \langle P_t u, P_t u\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, T_s^n(1)\, L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds \\
&\le \langle P_t u, P_t u\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds \\
&= \langle P_t u, P_t u\rangle + \int_0^t \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell P_{t-s}u, L_\ell P_{t-s}u\rangle\, ds \\
&\le \langle u, u\rangle - \int_0^t 2\,\mathrm{Re}\,\langle P_{t-s}u, P_{t-s}Gu\rangle\, ds \\
&= \langle u, u\rangle - \int_0^t \frac{d}{ds}\|P_{t-s}u\|^2\, ds \\
&= \langle u, u\rangle - \|u\|^2 + \|P_t u\|^2 \\
&= \langle u, u\rangle - \langle u, u\rangle + \|P_t u\|_h^2 \\
&\le \|P_t\|^2\, \|u\|^2 \\
&\le \langle u, u\rangle .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$T_t^{n+1}(1) \le 1$$

Esto termina la demostración. ■

El siguiente Lema nos dice cómo construir el Semigrupo Dinámico Minimal, a partir de la proposición anterior. Pues aun cuando los T_t^n no forman un semigrupo dinámico cuántico, a partir de estos el minimal resulta ser semigrupo dinámico cuántico y además resulta ser de contracciones.

Lema 3.1.5 *Supongamos la Hipótesis A. Entonces existe una familia $\{T_t\}_{t\ge 0}$ de transformaciones lineales contractivas sobre $B(h)$ tal que :*

1) *T_t es completamente positiva para cada $t \ge 0.$*
2) *T_t es normal para cada $t \ge 0.$*
3) *La familia de operadores lineales $\{T_t(x)\}_{t\ge 0}$ sobre $B(h)$ resuelve la ecuación (3.7) y (3.8) para todo $x \in B(h)$.*
4) *Para cada $x \in B(h)$ la transformación $t \to T_t(x)$ es continua con respecto a la topología σ-débil en $B(h)$.*

Demostración. Seguimos [8], págs.49-50.
Fijemos $t \ge 0$ y sea $\{T_t^n\}_{n\ge 0}$ la sucesión de transformaciones lineales positivas como en la proposición anterior. Ahora, para cada $x \in B(h)$ positivo, $0 \le T_t^n(x) \le \|T_t^n(x)\|_\infty . I \le \|x\|_\infty . I,$ lo cual muestra que la sucesión $\{\langle u, T_t^n(x)u\rangle\}_{t\ge 0}$ de números reales positivos, es creciente y acotada, es decir $\langle u, T_t^n(x)u\rangle \le \|x\|_\infty \|u\|_h^2.$ Así denotamos ahora el $\lim_{n\to\infty} \langle u, T_t^n(x)u\rangle = \left\langle u, T_t^{\text{mín}}(x)u\right\rangle$, para cada $u \in h.$ Para el caso general sólo usamos la Identidad de Polarización que dice lo siguiente:

$$4\langle u, T_t(x)\upsilon\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^{-k}\left\langle u + i^k\upsilon, T_t(x)\left(u + i^k\upsilon\right)\right\rangle.$$

para cada $u, \upsilon \in h.$ Y para $x \in B(h)$ arbitrario, sólo lo escribimos como combinación lineal de 4 operadores positivos.
Claramente cada $T_t^{\text{mín}}$ es una contracción pues T_t^n lo es al igual que goza de la propiedad 1.
Ahora para probar la Propiedad 2), Sea $\triangle$ un conjunto dirigido y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\triangle}$ una red de operadores positivos en $B(h)$ con supremo x; ya que las transformaciones T_t^n $(n \ge 0)$ son σ-débil continuas, para cada $\upsilon \in h$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sup_\alpha \langle \upsilon, T_t(x_\alpha)\upsilon\rangle \\
=\ &\sup_\alpha \sup_n \langle \upsilon, T_t^n(x_\alpha)\upsilon\rangle \\
=\ &\sup_n \sup_\alpha \langle \upsilon, T_t^n(x_\alpha)\upsilon\rangle \\
=\ &\sup_n \langle \upsilon, T_t^n(x)\upsilon\rangle \\
=\ &\langle \upsilon, T_t(x)\upsilon\rangle
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $T_t^{\text{mín}} = T_t$ es normal.
En la Ecuación (3.8), si hacemos $n \to \infty$ se obtiene la Ecuación (3.7) y a la vez la Ecuación (3.6), pues ambas son equivalentes.
Finalmente para cada $u, \upsilon \in h$ y $x \in B(h)$ la función $t \to \langle u, T_t(x)\upsilon\rangle$ es continua por la Ecuación (2.5), pero como $\|T_t(x)\|_\infty \le \|x\|_\infty$, entonces resulta uniformemente acotado por lo que la continuidad se da tanto en la topología débil como en la σ-débil. ■

Proposición 3.1.6 *Consideremos $(W_t^n)_{n\geq 0}$ la sucesión de transformaciones lineales positivas en $B(h)$ definidas inductivamente por*

$$\begin{aligned} W_t^0 &= T_t^0 \\ W_t^{n+1} &= T_t^{n+1} - T_t^n \end{aligned}$$

entonces para cada $n \geq 0$ se tiene la siguiente identidad:

$$W_{t+s}^{n+1}(x) = \sum_{k=0} W_t^k\left(W_s^{n-k}(x)\right) \qquad (3.9)$$

Demostración. Seguimos [8], págs.51-52.
Claramente de la ecuación (3.8) se tiene que

$$\left\langle u, \left(T_t^{n+1} - T_t^n\right)(x)v\right\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, W_s^n(x) L_\ell P_{t-s}v\rangle\, ds.$$

Entonces,

$$\left\langle u, W_t^{n+1}(x)v\right\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}u, W_s^n(x) L_\ell P_{t-s}v\rangle\, ds \qquad (3.9')$$

para cada $u, v \in D(G);\ x \in B(h)$ y $n \geq 0.$
Para $n = 0$ no hay nada que mostrar pues

$$\begin{aligned} W_{t+s}^0(x) &= T_{t+s}^0 = T_t^0\left(T_s^0(x)\right) \\ &= W_t^0\left(W_s^0(x)\right). \end{aligned}$$

Así que supongamos que la ecuación (3.9) se cumple para algún $n \in \mathbb{N}.$
Usando (3.9′) para cada $u, v \in D(G)$ y $x \in B(h)$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1}\left\langle u, W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)v\right\rangle \\ = &\left\langle u, W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)v\right\rangle + \sum_{k=1}^{n+1}\left\langle u, W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)v\right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle + \sum_{j=0}^{n-1}\left\langle u; W_t^{j+1}\left(W_s^{n-j}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u; W_r^j\left(W_s^{n-j}(x)\right) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u; W_r^j\left(W_s^{n-j}(x)\right) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \sum_{j=0}^{n-1}\left\langle L_\ell P_{t-r}u; W_r^j\left(W_s^{n-j}(x)\right) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u; \sum_{j=0}^{n-1} W_r^j\left(W_s^{n-j}(x)\right) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u; W_{r+s}^n(x) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr\,;
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\left\langle u; W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle u; W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right)\varphi\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u; W_r^j\left(W_s^{n-j}(x)\right) L_\ell P_{t-r}\varphi\right\rangle dr
\end{aligned}
$$

pero volviendo a la definición de W_t^0; el primer sumando de esta igualdad es igual a

$$
\begin{aligned}
&W_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right) \\
&= T_t^0\left(W_s^{n+1}(x)\right) = P_t^*\left(W_s^{n+1}(x)\right)P_t;
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}\left\langle u, W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)\upsilon\right\rangle \\
&= \left\langle u, P_t^{*}\left(W_s^{n+1}(x)\right)P_t\upsilon\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u, W_{r+s}^n(x)\, L_\ell P_{t-r}\upsilon\right\rangle dr \\
&= \left\langle P_t u, W_s^{n+1}(x)\, P_t\upsilon\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-r}u, W_{r+s}^n(x)\, L_\ell P_{t-r}\upsilon\right\rangle dr \\
&= \left\langle P_t u, W_s^{n+1}(x)\, P_t\upsilon\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_s^{t+s} \left[L_\ell P_{t+s-r}u, W_r^n(x)\, L_\ell P_{t+s-r}\upsilon\right] dr \\
&= \left\langle P_t u, W_s^{n+1}(x)\, P_t\upsilon\right\rangle - \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^s \left[L_\ell P_{s-r}P_t u, W_r^n(x)\, L_\ell P_{s-r}P_t\upsilon\right] dr \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{t+s} \left[L_\ell P_{t+s-r}u, W_r^n(x)\, L_\ell P_{t+s-r}\upsilon\right] dr \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{t+s} \left[L_\ell P_{t+s-r}u, W_r^n(x)\, L_\ell P_{t+s-r}\upsilon\right] dr \\
&= \left\langle u, W_{t+s}^{n+1}(x)\,\upsilon\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Así se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\left\langle u, W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)\upsilon\right\rangle &= \left\langle u, W_{t+s}^{n+1}(x)\,\upsilon\right\rangle \\
\left\langle u, \sum_{k=0}^{n+1} W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)\upsilon\right\rangle &= \left\langle u, W_{t+s}^{n+1}(x)\,\upsilon\right\rangle \\
W_{t+s}^{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} W_t^k\left(W_s^{n+1-k}(x)\right)
\end{aligned}
$$

lo que termina la prueba. ■

Teorema 3.1.7 $\left\{T_t^{\min}\right\}_{t\geq 0}$ *es un S. D. C que resuelve las Ecuaciones* (3.6) *y* (3.7) *con la siguiente propiedad: Para cualquier otra familia σ-débil continua* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *de transformaciones lineales positivas en* $B(h)$ *que satisfaga las ecuaciones* (3.6), (3.7) *y* $x\in B(h)$ *positivo, se tiene*

$$T_t^{\min}(x)\leq T_t(x)$$

para todo $t\geq 0$.

Demostración. Seguimos [8], pág.51.

Demostraremos que este es un Semigrupo Dinámico Cuántico, es decir que satisface la propiedad

$$T_{t+s}^{\min}(x)=T_t^{\min}\left(T_s^{\min}(x)\right)$$

para $x\in B(h)$ postivo y $s,t\geq 0$.

Por el lema anterior, tenemos la siguientes identidades

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \upsilon, T_{t+s}^{n}(x)\upsilon\right\rangle\\
=&\sum_{k=0}\left\langle \upsilon, W_{t+s}^{k}(x)\upsilon\right\rangle\\
=&\sum_{k=0}\sum_{j=0}\left\langle \upsilon, W_t^{j}\left(W_s^{k-j}(x)\right)\upsilon\right\rangle\\
=&\sum_{j=0}\sum_{k=j}\left\langle \upsilon, W_t^{j}\left(W_s^{k-j}(x)\right)\upsilon\right\rangle
\end{aligned}
$$

para cada $\upsilon\in h$, y $x\in B(h)$. Es decir

$$\left\langle \upsilon, T_{t+s}^{n}(x)\upsilon\right\rangle=\sum_{j=0}\left\langle \upsilon, W_t^{j}\left(T_s^{n-j}(x)\right)\upsilon\right\rangle$$

como los W_t^j son σ-débil continua, hagamos $n \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi, T_{t+s}^{\text{mín}}(x)\,\psi \right\rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\langle \psi, W_t^j \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle \\
\left\langle \psi, T_{t+s}^{\text{mín}}(x)\,\psi \right\rangle &= \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m} \left\langle \psi, \left(T_t^j - T_t^{j-1}\right)\left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle \\
&= \lim_{m \to \infty} \left\langle \psi, \left[W_t^0 + \sum_{j=1}^{m} \left(T_t^j - T_t^{j-1}\right) \right] \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle \\
&= \lim_{m \to \infty} \left\langle \psi, \left\{ \begin{array}{c} W_t^0 + \left(T_t^1 - T_t^0\right) + \cdots \\ + \left(T_t^m - T_t^{m-1}\right) \end{array} \right\} \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle \\
&= \lim_{m \to \infty} \left\langle \psi, T_t^m \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \psi, T_t^{\text{mín}} \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle
\end{aligned}$$

así se tiene que una vez más por la identidad de Polarización, y descomponiendo a x como suma de 4 operadores positivos

$$\left\langle \phi, T_{t+s}^{\text{mín}}(x)\,\psi \right\rangle = \left\langle \phi, T_t^{\text{mín}} \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right) \psi \right\rangle$$

por lo tanto

$$T_{t+s}^{\text{mín}}(x) = T_t^{\text{mín}} \left(T_s^{\text{mín}}(x)\right).$$

Pero por la parte (4) de la Proposición $(3.1.4)$ se tiene también lo siguiente

$$T_t^{\text{mín}}(1) \leq 1,$$

y de la parte (2) de ésta misma Proposición $(3.1.4)$, es claro que

$$T_t(x) \geq P_t^* x P_t = T_t^0(x).$$

Si suponemos $T_t(x) \geq T_t^n(x)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $\psi \in h$ se tiene que

$$\begin{aligned}
& \left\langle \psi, \left(T_t(x) - T_t^{n+1}(x)\right) \psi \right\rangle \\
= & \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^t \left\langle L_\ell P_{t-s}\psi, \left(T_s(x) - T_s^n(x)\right) L_\ell P_{t-s}\psi \right\rangle ds \geq 0,
\end{aligned}$$

esto muestra que

$$T_t^{n+1}(x) \leq T_t(x)$$

con lo cual haciendo $n \to \infty$ se tiene que $T_t^{\min}(x) \le T_t(x)$ para $t \ge 0$. ■

El siguiente corolario nos revela que la propiedad de conservatividad es una condición suficiente, para la unicidad de la solución de la ecuación de Lindblad, es decir la Ecuación (3.7). para ello recordemos que un semigrupo dinámico cuántico $\{T_t\}_{t \ge 0}$ es conservativo si $T_t(I) = I$.

Corolario 3.1.8 *Supóngase que* $\left\{T_t^{\min}\right\}_{t \ge 0}$ *es conservativo. Entonces es la única familia* $\{T_t\}_{t \ge 0}$ *de transformaciones lineales,* σ*-débil continuas, positivas y contractivas sobre* $B(h)$ *que satisface la ecuación* (3.6).

Demostración. Seguimos [8], pág.53.
Sea $T = \{T_t\}_{t \ge 0}$ una familia de transformaciones lineales positivas, σ-débil continuas que satisface la Ecuación (3.6). Aplicando el Teorema anterior para cada $x \in B(h)$ tal que $0 \le x \le 1$ y cada $t \ge 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
T_t^{\min}(x) &\le T_t(x) \\
&= T_t(1) - T_t(1-x) \\
&\le 1 - T_t(1-x) \\
&\le 1 - T_t^{\min}(1-x) \\
&= 1 - T_t^{\min}(1) + T_t^{\min}(x) = T_t^{\min}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T_t^{\min}(x) = T_t(x)$ para todo $x \ge 0$. Para $x \in B(h)$ arbitrario lo expresamos como combinación lineal de 4 operadores positivos. ■

3.2. El Resolvente del Semigrupo Minimal

En la sección anterior se construyó el semigrupo dinámico cuántico minimal, asociado a los operadores G y L_ℓ que satisfacen la Hipótesis A. Como se habrá observado este semigrupo satisface las ecuaciones (3.6) y (3.7), pero en general este semigrupo no está caracterizado por tal propiedad, nos gustaría conocer el dominio del generador infinitesimal de $T^{\min}$, cosa que no resulta nada fácil conociendo simplemente a los operadores G y L_ℓ.

Proposición 3.2.1 *Supóngase que se tiene la Hipótesis A. Las transformaciones lineales positivas* $F_\lambda : B(h) \to B(h)$ *y* $Q_\lambda : B(h) \to B(h)$ *definidas por*

$$\begin{aligned}
\langle u, F_\lambda(x) v\rangle &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle P_s u, x P_s v\rangle \, ds \\
\langle u, Q_\lambda(x) v\rangle &= \sum_{\ell=0} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle L_\ell P_s u, x L_\ell P_s v\rangle \, ds
\end{aligned}$$

para $\lambda > 0$; $x \in B(h)$, $\xi, \psi \in D(G)$ *son normales y completamente positivas. Además* $\|F_\lambda\|_{B(B(h))} \leq \lambda^{-1}$, $\|Q_\lambda\|_{B(B(h))} \leq 1$.

Demostración. Ver. [8] Págs. $54 - 56$; [5] Pág.104. ∎

Definición 3.2.2 *Se define el* resolvente minimal $\left(R^{min}_\lambda\right)_{\lambda>0}$ *del semigrupo dinámico cuántico minimal(SDCM) por medio de su forma sesquilineal:*

$$\left\langle \xi, R^{min}_\lambda(x)\psi \right\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\left\langle \xi, T^{min}_s(x)\psi\right\rangle ds \qquad (3.10)$$

con $x \in B(h)$ *y* $\psi, \xi \in h$.

Teorema 3.2.3 *Para cada* $\lambda > 0$ *y* $x \in B(h)$ *se tiene lo siguiente:*

$$R^{min}_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k_\lambda(F_\lambda(x)) \qquad (3.11)$$

donde la serie converge en la topología fuerte de operadores.

Demostración. Seguimos [8], pág.55.
Sea $(R^n_\lambda)_{n\geq 0}$ la sucesión de tranformaciones lineales completamente positivas $R^n_\lambda : B(h) \to B(h)$ dadas por

$$\langle \xi, R^n_\lambda(x)\psi\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle \xi, T^n_s(x)\psi\rangle ds$$

donde los T^n_s están definidos por la Ecuación (3.8), Proposición 3.1.4.
Ya que las transformaciones T^n_s son contracciones las R^n_λ están bien definidas, además para cada $0 \leq x \in B(h)$;

$$\begin{aligned}
&\langle u, R^n_\lambda(x)\psi\rangle \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle u, T^n_s(x)\psi\rangle ds \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda s}\left\langle u, T^{n+1}_s(x)\psi\right\rangle ds \\
&= \left\langle u, R^{n+1}_\lambda(x)\psi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Así para cada $\lambda > 0$ y $0 \leq x \in B(h)$, $\{R^n_\lambda(x)\}_{\lambda \geq 0}$ es no decreciente.
Por lo tanto por la definición del S. D. C. M., para todo $\psi \in h$ y todo $0 \leq x \in B(h)$ se tiene lo siguiente,

$$\sup_{n\geq 0}\langle \psi, R^n_\lambda(x)\psi\rangle = \left\langle \psi, R^{min}_\lambda(x)\psi\right\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\left\langle \psi, T^{min}_s(x)\psi\right\rangle ds$$

y otra vez por la Ecuación (3.8) se tiene que

$$\left\langle \upsilon, R^{n+1}_\lambda(x)\upsilon\right\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle P_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle dt + \sum_{\ell=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \int_0^t \langle L_\ell P_{t-s}\upsilon, T^n_s(x) L_\ell P_{t-s}\upsilon\rangle ds$$

para todo $\upsilon, u \in D(G)$.
Ahora con el cambio de variable $(r, s) = (t - s, s)$, en la integral doble de arriba, se tiene que la suma de los terminos de la derecha es igual a

$$\langle \upsilon, F_\lambda(x)\upsilon\rangle + \sum_{\ell \geq 0} \int_0^\infty e^{-\lambda r}\langle L_\ell P_r\upsilon, R^n_\lambda(x) L_\ell P_r\upsilon\rangle dr;$$

es decir, tenemos la siguiente fórmula recursiva

$$R^{n+1}_\lambda(x) = F_\lambda(x) + Q_\lambda(R^n_\lambda(x))$$

que, al iterarla n veces nos da ,

$$R^{n+1}_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n+1} Q^k_\lambda(F_\lambda(x)).$$

Al hacer $n \to \infty$, se tiene que $R^{min}_\lambda(x) = \sum_{k=0}^\infty Q^k_\lambda(F_\lambda(x))$. Para generalizar esto a todo $x \in B(h)$, recordemos que x se expresa como combinación lineal de 4 operadores positivos y acotados. ■

Ahora consideramos el predual de nuestro S. D. C. M. El *Teorema* $1.2.11$ del Capítulo 1 nos garantiza que tal semigrupo existe y lo denotaremos por $\left(S^{min}\right)$, éste actúa sobre el espacio de los operadores de traza fínita $\tau(h)$ (Ver. [3] Capítulo3). Otra forma de caracterizar la conservatidad del semigrupo dinámico cuántico minimal es que su predual conserve a la traza, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4 *Supongamos la Hipótesis A. Entonces para cada $t \geq 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) $T^{min}_t(I) = I$, *para todo* $t \geq 0$
2) $tr\left(S^{min}_t(\rho)\right) = tr(\rho)$ *para cada* $\rho \in \tau(h)$, *y todo* $t \geq 0$.

Demostración. Seguimos [8], pág.56.
1) implica 2)
$tr\left(S^{min}_t(\rho)\right) = tr\left(IS^{min}_t(\rho)\right) = tr\left(\rho T^{min}_t(I)\right) = tr(\rho I) = tr(\rho).$

2) implica 1)

Supongamos que

$$tr\left(S_t^{\min}(\rho)\right) = tr(\rho)\,:\ \text{para cada } \rho \in \tau(h) \text{ y todo } t \geq 0;$$

entonces

$$tr\left(\rho T_t^{\min}(I)\right) = tr(\rho I)\,;$$

por lo tanto

$$tr\left(\rho\left(T^{\min}(I) - I\right)\right) = 0$$

para todo $\rho \in \tau(h)$. Pero el único elemento de $B(h)$ que tiene esta propiedad es el operador 0; lo que prueba que $T_t^{\min}(I) = I$: ■

Sean $u, \upsilon \in D(G)$; si $T_t^{\min}$ es conservativo, es decir $T_t^{\min}(I) = I$; para todo $t \geq 0$ entonces se tiene que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T_t^{\min}(I) - I}{t} = 0;$$

entonces $I \in D\left(\varpi^{\min}\right)$ y

$$\varpi^{\min}(1) = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ \sigma w}} \frac{T_t^{\min}(I) - I}{t}$$

por lo tanto se tiene así que

$$\left\langle o, \varpi^{\min}(1)\upsilon\right\rangle = 0$$

pero otra parte también se tiene

$$\langle u, \varpi(1)\upsilon\rangle = \left\langle u, \varpi^{\min}(1)\upsilon\right\rangle$$

por lo tanto

$$\langle u, \varpi(I)\upsilon\rangle = \langle Gu, \upsilon\rangle + \langle u, G\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell u, L_\ell \upsilon\rangle = 0$$

que es la ecuación de la parte ii) en la Hipótesis AA, que a continuación se presenta.

Hipótesis AA.

i) *Sea G el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuos $\{P_t\}_{t \geq 0}$ en h:*

ii) *Sea* $\{L_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ *operadores no necesariamente acotados de tal forma que*

$$D(G)\subset\bigcap_{\ell=1}^{\infty}D(L_\ell)\ ;$$

y para cada $u\in D(G)$

$$\langle u,Gu\rangle+\langle Gu,u\rangle+\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell u,L_\ell u\rangle=0. \qquad (3.12)$$

Hay que observar que hemos convertido en igualdad a la desigualdad de la parte ii) de la Hipótesis A. Esta igualdad es una condición necesaria, aunque no suficiente para que el semigrupo minimal sea conservativo. Para estudiar condiciones equivalentes a la conservatividad empezamos por demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.5 *Supongamos que se tiene la Hipótesis AA y fijemos* $\lambda>0$*. Para todo* $n\geq 1$ *se tiene lo siguiente:*

$$\lambda\sum_{k=0}^{n}Q_\lambda^{k}(F_\lambda(1))+Q_\lambda^{n+1}(1)=1. \qquad (3.13)$$

Demostración.
Seguimos [8], pág.57.
Para cada $\xi\in D(G)$, $P_t\xi\in D(G)$. Por lo que usando la Hipótesis AA se tiene

$$\langle GP_t\xi,P_t\xi\rangle+\langle P_t\xi,GP_t\xi\rangle+\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_t\xi,L_\ell P_t\xi\rangle=0$$

y

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_t\xi,L_\ell P_t\xi\rangle=-\left[\langle GP_t\xi,P_t\xi\rangle+\langle P_t\xi,GP_t\xi\rangle\right]=-2\,\mathrm{Re}\langle P_t\xi,GP_t\xi\rangle$$

al multiplicar por $e^{-\lambda t}$ e integrar ,

$$\begin{aligned}\langle\xi,Q_\lambda(1)\xi\rangle &= \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left(-2\,\mathrm{Re}\langle P_t\xi,GP_t\xi\rangle\right)dt\\ &= -\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}\|P_t\xi\|_h^2\,dt\\ &= \|\xi\|_h^2-\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\|P_t\xi\|_h^2\,dt\\ &= \|\xi\|_h^2-\lambda\langle\xi,F_\lambda(1)\xi\rangle;\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lambda F_\lambda(1) + Q_\lambda(1) = 1.$$

Supongamos que (3.13) se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$; al aplicar Q_λ a la hipótesis de inducción obtenemos,

$$\begin{aligned}
Q_\lambda\left(\lambda \sum_{k=0}^{n} Q_\lambda^k(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+1}(1)\right) &= Q_\lambda(1)\\
\lambda \sum_{k=0}^{n} Q_\lambda^{k+1}(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+2}(1) &= 1 - \lambda F_\lambda(1)\\
\lambda Q_\lambda(F_\lambda(1)) + \ldots + \lambda Q_\lambda^{n+1}(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+2}(1) &= 1 - \lambda F_\lambda(1)\\
\lambda F_\lambda(1) + \lambda Q_\lambda(F_\lambda(1)) + \ldots + \lambda Q_\lambda^{n+1}(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+2}(1) &= 1\\
\lambda\left[F_\lambda(1) + Q_\lambda(F_\lambda(1)) + \ldots + Q_\lambda^{n+1}(F_\lambda(1))\right] + Q_\lambda^{n+2}(1) &= 1\\
\lambda \sum_{k=0}^{n+1} Q_\lambda^k(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+2}(1) &= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.14) vale para todo n entero no negativo. ■

La representación del resolvente minimal por medio de la ecuación (3.13), ahora nos permite probar una condición necesaria y suficiente para la conservatividad, debida a A. M. Chebotarev y a F. Fagnola.

Teorema 3.2.6 *Supongamos que tenemos la Hipótesis AA y sea $\lambda > 0$ fijo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $T_t^{\min}$ *es conservativo, para todo* $t \geq 0$;

2) $\lim_{n \to \infty} Q_\lambda^n(1) = 0$;

3) *El único elemento* $x \in B(h)$ *que cumple con la ecuación* $Q_\lambda(x) = x$ *es* $x = 0$.

Demostración.

Seguimos [8], pág.58.

1) implica 2)

Como $T_t^{\min}(1) = 1$; de la definición de $R_\lambda^{\min}(1)$ se deduce que:

$$\left\langle u, R_\lambda^{\min}(1)u\right\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\langle u, T_t^{\min}(1)u\right\rangle dt = \frac{\|u\|_h^2}{\lambda} = \left\langle u, \frac{u}{\lambda}\right\rangle;$$

por lo tanto

$$R_\lambda^{\min}(1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Pero en vista de la ecuación (3.11), también se tiene que

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} Q_{\lambda}^{k}\left(F_{\lambda}(1)\right) = 1,$$

por lo tanto en la ecuación (3.13) haciendo $n \to \infty$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} Q_{\lambda}^{k}\left(F_{\lambda}(1)\right) + \lim_{n\to\infty} Q_{\lambda}^{n+1}(1) &= 1 \\ 1 + \lim_{n\to\infty} Q_{\lambda}^{n+1}(1) &= 1 \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\lim_{n\to\infty} Q_{\lambda}^{n+1}(1) = 0$.

2) implica 1)

Como

$$\lim_{n\to\infty} Q_{\lambda}^{n+1}(1) = 0,$$

entonces de la ecuación (3.13) se deduce también que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} Q_{\lambda}^{k}\left(F_{\lambda}(1)\right) = 1$$

pero ésto último unicamente indica que

$$\lambda R_{\lambda}^{\text{mín}}(1) = 1$$

o sea que expresada en su forma cuadrática, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle u, R_{\lambda}^{\text{mín}}(1)\, u\right\rangle &= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} \left\langle u, T_{t}^{\text{mín}}(1)\, u\right\rangle dt \\ \frac{1}{\lambda}\|u\|_{h}^{2} &= \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} \left\langle u, T_{t}^{\text{mín}}(1)\, u\right\rangle dt. \end{aligned}$$

Pero por otra parte obsérvese lo siguiente

$$\frac{1}{\lambda}\|u\|_{h}^{2} = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}\|u\|_{h}^{2}\, dt;$$

y

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}\|u\|_{h}^{2}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}\left\langle u, T_{t}^{\text{mín}}(1)\, u\right\rangle dt$$

lo cual nos indica que

$$\langle u, u\rangle = \left\langle u, T_{t}^{\text{mín}}(1)\, u\right\rangle;$$

es decir $T_t^{\text{mín}}(1) = 1.$
2) implica 3)
Supongamos que $Q_\lambda(x) = x.$ Vamos a demostrar que $x = 0.$
Como Q_λ es completamente positivo(Proposición.1.0.15), se tiene que

$$Q_\lambda(x^*) = (Q_\lambda(x))^*.$$

Gracias a esta igualdad, basta con suponer que x es autoadjunto.
Puesto que

$$-\|x\|_\infty 1 \leq x \leq \|x\|_\infty 1$$

Empecemos por suponer que

$$\|x\|_\infty \leq 1$$

por lo tanto $-1 \leq x \leq 1;$ y al aplicar Q_λ iteraramente

$$-Q_\lambda(1) \leq x = Q_\lambda(x) \leq Q_\lambda(1)$$

$$-Q_\lambda^2(1) \leq x \leq Q_\lambda^2(1)$$

$$\vdots$$

$$-Q_\lambda^n(1) \leq x \leq Q_\lambda^n(1)$$

si hacemos $n \to \infty;$ concluimos que $x = 0.$
3) implica 2)
Como

$$\lambda \sum_{k=0} Q_\lambda^k(F_\lambda(1)) + Q_\lambda^{n+1}(1) = 1$$

y $\lambda \sum_{k=0}^n Q_\lambda^k(F_\lambda(1))$ es una sucesión creciente y acotada de operadores acotados entonces converge σ-débilmente. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} Q_\lambda^{n+1}(1)$ existe, llamemos $x = \lim_{n\to\infty} Q_\lambda^{n+1}(1)$; entonces $Q_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} Q_\lambda^{n+1}(1) = x$; pero como por hipótesis tenemos que $x = 0;$ entonces $\lim_{n\to\infty} Q_\lambda^{n+1}(1) = 0.$ ■

Proposición 3.2.7 *Supongamos la Hipótesis AA y sea $\lambda > 0$ fijo. Entonces para todo $x \in B(h)$ se tiene que $\mathcal{L}(x) = \lambda x$ si y sólo si $Q_\lambda(x) = x.$ Donde $\mathcal{L}(x) = \lambda x;$ se entiende como igualdad entre formas sesquilineales, es decir para cada $u, \upsilon \in D(G);$ $\mathcal{L}(x)[\upsilon; u] = \lambda\langle\upsilon; xu\rangle.$*

Demostración. Seguimos [8], pág.61.
Sea $x \in B(h)$ positivo tal que $\mathcal{L}(x) = \lambda x$ entonces para cada $\upsilon \in D(G)$ y cada $t \geq 0$; tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}(x)[P_t\upsilon; P_t\upsilon] = \langle P_t\upsilon; xGP_t\upsilon\rangle + \langle GP_t\upsilon; xP_t\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1} \langle L_\ell P_t\upsilon; xL_\ell P_t\upsilon\rangle.$$

Pero, por otra parte:

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_t\upsilon, xL_\ell P_t\upsilon\rangle &= \langle P_t\upsilon, \varpi(x)P_t\upsilon\rangle - \langle P_t\upsilon, xGP_t\upsilon\rangle - \langle GP_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle \\ &= \lambda\langle P_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle - \langle P_t\upsilon, xGP_t\upsilon\rangle - \langle GP_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle.\end{aligned}$$

Ahora bién, al tomar transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell P_t\upsilon, xL_\ell P_t\upsilon\rangle\, dt \\ =& \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\lambda\langle P_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle - \langle P_t\upsilon, xGP_t\upsilon\rangle - \langle GP_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle\right) dt \\ =& -\int_0^\infty \frac{d}{dt}e^{-\lambda t}\langle P_t\upsilon, xP_t\upsilon\rangle\, dt = \langle \upsilon, x\upsilon\rangle.\end{aligned}$$

En otros términos tenemos que $\langle\upsilon, Q_\lambda(x)\upsilon\rangle = \langle\upsilon, x\upsilon\rangle$; pero como x, $Q_\lambda(x)$ son operadores acotados y $D(G)$ es denso en h entonces se tiene que $Q_\lambda(x) = x$. Ahora veamos el recíproco: Sea $R\left(\frac{\lambda}{2}; G\right)$ el operador resolvente $\left(\frac{\lambda}{2} - G\right)^{-1}$. Nótese que para $\ell \geq 1$, el operador $L_\ell R\left(\frac{\lambda}{2}; G\right)$ tiene una extensión acotada y el operador $GR\left(\frac{\lambda}{2}; G\right)$ puede ser extendido al operador acotado $\frac{\lambda}{2}R\left(\frac{\lambda}{2}; G\right) - 1$. Obsérvese que,

$$\frac{d}{dt}L_\ell P_t R\left(\tfrac{\lambda}{2}; G\right)\upsilon = L_\ell R\left(\tfrac{\lambda}{2}; G\right)\frac{d}{dt}P_t\upsilon = -L_\ell P_t\upsilon + \tfrac{\lambda}{2}L_\ell P_t R\left(\tfrac{\lambda}{2}; G\right)\upsilon \qquad (3.13)$$

para cada $\upsilon \in D(G)$. Por lo tanto, para cada $\upsilon, \nu \in D(G)$. Sean $u' = R\left(\frac{\lambda}{2}; G\right)u$, $\upsilon' = R\left(\frac{\lambda}{2}; G\right)\upsilon$, entonces se tiene que $u = \left(\frac{\lambda}{2}1 - G\right)u'$, $\upsilon = \left(\frac{\lambda}{2}1 - G\right)\upsilon'$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo se obtiene lo siguiente

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell \tilde u, xL_\ell \tilde v\rangle$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\langle L_\ell P_t\tilde u, xL_\ell P_t\tilde v\rangle\right)dt$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\left(\langle L_\ell P_t\tilde u, xL_\ell P_t\tilde v\rangle\right)dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}\langle L_\ell P_t\tilde u, xL_\ell P_t\tilde v\rangle dt$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle \frac{d}{dt}L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t\left(R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)\right)v\right\rangle dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, \frac{d}{dt}xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle -L_\ell P_t u + \frac{\lambda}{2}L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$-\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, x\left\{-L_\ell P_t v + \frac{\lambda}{2}L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\}\right\rangle dt$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle -L_\ell P_t u, xL_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)v\right\rangle dt$$
$$+\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left\langle L_\ell P_t R\left(\frac{\lambda}{2};G\right)u, -xL_\ell P_t v\right\rangle dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell u_\varphi, xL_\ell \upsilon_\varphi\rangle &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\langle L_\ell P_t u_\varphi, xL_\ell P_t\upsilon\rangle\, dt \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\langle L_\ell P_t u, xL_\ell P_t\upsilon_\varphi\rangle\, dt \\
&= \langle u, Q_\lambda(x)\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, Q_\lambda(x)\upsilon\rangle .
\end{aligned}$$

Pero como $Q_\lambda(x) = x$; se tiene que esto último es igual a:

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2}\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle - \langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \frac{\lambda}{2}\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle - \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle \\
= \ &\lambda\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle - [\langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle] .
\end{aligned}$$

Deduciéndose así que,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell u_\varphi, xL_\ell \upsilon_\varphi\rangle = \lambda\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle - [\langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle]$$

y usando ahora la definición de $\varpi(x)$; se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle u_\varphi, \varpi(x)\upsilon_\varphi\rangle &= \langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_\ell u_\varphi, xL_\ell\upsilon_\varphi\rangle \\
&= \langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle + \lambda\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle \\
&\quad - [\langle Gu_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle + \langle u_\varphi, xG\upsilon_\varphi\rangle] \\
&= \lambda\langle u_\varphi, x\upsilon_\varphi\rangle ;
\end{aligned}$$

es decir, hemos probado que $\langle u_\varphi, \varpi(x)\upsilon_\varphi\rangle = \langle u_\varphi, \lambda x\upsilon_\varphi\rangle .$
Como ν, υ son arbitrarios en $D(G)$ entonces $\upsilon_\varphi, u_\varphi$ son arbitrarios en $D\left(G^2\right)$ y puesto que $D\left(G^2\right)$ es esencia de G concluimos que $\langle u, \varpi(x)\upsilon\rangle = \langle u, \lambda x\upsilon\rangle$; es decir $\varpi(x) = \lambda x.$ ■

Proposición 3.2.8 *Supongamos que se tiene la Hipótesis AA, para $\lambda > 0$ fijo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) *El Semigrupo Dinámico Cuántico $T^{mín}$ es conservativo;*
2) *No existe $x \in B(h)$ distinto de 0 tal que $\varpi(x) = \lambda x.$*

Demostración. Seguimos [8], pág.62.
1) implica 2)
Supongamos que $T^{mín}$ es conservativo entonces por el Teorema 3.2.7,

$$Q_\lambda(x) = x \quad \text{si y sólo si } x = 0.$$

y por la Proposición anterior no existe $x \in B(h)$ distinto de 0 tal que

$\mathcal{L}(x) = \lambda x.$

2) implica 1)

Supongamos que la única solución $x \in B(h)$ a la ecuación $\mathcal{L}(x) = \lambda x$ es $x = 0;$ entonces por 2) del Teorema anterior la afirmación 1) queda demostrada. ∎

Finalizamos esta sección y por consiguiente el capítulo, con dos importantes proposiciones sobre Semigrupos Dinámicos Cuánticos Conservativos.

Proposición 3.2.9 *Supongamos la Hipótesis AA. El subespacio lineal V generado por $|\upsilon\rangle\langle u|;\, u, \upsilon \in D(G)$ está contenido en el dominio del generador infinitesimal $\mathcal{L}_*$ del semigrupo predual $S^{\min}$ de $T^{\min}$ y*

$$\mathcal{L}_*(|\upsilon\rangle\langle u|) = |G\upsilon\rangle\langle u| + \sum_{\ell=1}^{\infty} |L_\ell \upsilon\rangle\langle L_\ell u| + |\upsilon\rangle\langle Gu|$$

donde la serie converge en la norma de la traza. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) *El subespacio lineal generado V es esencia de $\mathcal{L}_*$;*

2) *El Semigrupo Dinámico Cuántico Minimal $T^{\min}$ es conservativo.*

Demostración.

Seguimos [8], págs.62-64.

Para cada $\upsilon; u \in D(G)$ y cada $x \in B(h)$, la ecuación:

$$\langle \upsilon; T_t(x) u\rangle = \langle \upsilon; xu\rangle + \int_0^t \mathcal{L}(T_s(x))[\upsilon; u]\, ds \qquad (3;14)$$

puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} & tr\left(S_t^{\min}(|\upsilon\rangle\langle u|)\, x\right) \\ = \;& tr(|\upsilon\rangle\langle u|\, x) + \int_0^t \mathcal{L}\left(T_s^{\min}(x)\right)[\upsilon; u]\, ds \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{t}\left\{ tr\left(S_t^{\min}(|\upsilon\rangle\langle u|)\, x\right) - tr(|\upsilon\rangle\langle u|\, x)\right\}$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \left(\left\langle G\nu; T_s^{\min}(x)\upsilon\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\langle L_\ell u; T_s^{\min}(x) L_\ell \upsilon\right\rangle + \left\langle u; T_s^{\min}(x) G\upsilon\right\rangle \right) ds$$

ahora haciendo $t \to 0^+$, y por la continuidad de las funciones, $s \to \left\langle Gu; T_s^{\min}(x)\upsilon\right\rangle;\ s \to \left\langle u; T_s^{\min}(x) G\upsilon\right\rangle;\ s \to \left\langle L_\ell u; T_s^{\min}(x) L_\ell \upsilon\right\rangle;$ para $\ell \geq 1$ tenemos que:

$$\lim_{t \to 0^+} tr\left(\frac{\left(S_t^{\min}(|\upsilon\rangle\langle u|) - |\upsilon\rangle\langle u|\right)}{t}\, x \right) = \mathcal{L}(x)[u; \upsilon]:$$

Esto muestra que $|\psi\rangle\langle u|$ está en el dominio del generador débil de $\left\{S_t^{\min}\right\}_{t\geq 0}$ que actua sobre $\mathcal{T}(h)$; y como el generador fuerte y el generador débil coinciden ([20] Teorema 1;4, pág.43) entonces $|\psi\rangle\langle\psi| \in D(\mathcal{L}_*)$, así $V \subset D(\mathcal{L}_*)$.

Ahora demostramos que:
1) implica 2)
Nótese que para cada $\rho \in V$; se tiene que $tr(\mathcal{L}_*(\rho)) = 0$; pues usando la Hipótesis AA, $0 = \langle\psi, \mathcal{L}(1)u\rangle = tr(1\mathcal{L}_*|\psi\rangle\langle u|) = tr(\mathcal{L}_*|\psi\rangle\langle u|)$ donde $\psi, u \in D(G)$. Pero siendo V una esencia de $\mathcal{L}_*$, es claro que también se tiene para todo $\rho \in D(\mathcal{L}_*)$. Pues estos ρ pueden ser aproximados por elementos de V.
Con lo cual se tiene que:

$$\frac{d}{dt}tr\left(S_t^{\min}(\rho)\right) = tr\left(\mathcal{L}_*\left(S_t^{\min}(\rho)\right)\right) = 0$$

lo cual demuestra que

$$tr\left(S_t^{\min}(\rho)\right) = Cte$$

pero Cte $= tr\left(S_0^{\min}(\rho)\right) = tr(\rho)$; se tiene así que $tr\left(S_t^{\min}(\rho)\right) = tr(\rho)$; por lo tanto resulta que $T^{\min}$ es conservativo.

2) implica 1)
Ahora supongamos que $T^{\min}$ es conservativo. Vamos a demostrar que V es esencia de $\mathcal{L}_*$. Pero esto es cierto si y sólo si $(\lambda I - \mathcal{L}_*)(V)$, es denso en $\mathcal{T}(h)$. Pues supongamos que $(\lambda I - \mathcal{L}_*)(V)$ es denso en $\mathcal{T}(h)$ entonces dado $\rho \in D(\mathcal{L}_*)$, $(\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho) \in \mathcal{T}(h)$ y $(\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho)$ con $\{\rho_n\}_n \subset V$, por lo tanto:

$$R_\lambda(\mathcal{L}_*)(\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_\lambda(\mathcal{L}_*)(\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho)$$

lo cual implica que

$$\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho \quad \text{y} \quad (\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho_n) = \lambda(\rho_n) - \mathcal{L}_*(\rho_n);$$

pero de esto último se tiene que:

$$\mathcal{L}_*(\rho_n) = \lambda(\rho_n) - (\lambda I - \mathcal{L}_*)(\rho_n)$$

así $\mathcal{L}_*(\rho_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_*(\rho)$; por lo tanto V es esencia de $\mathcal{L}_*$.
Ahora sea $x \in B(h)$ entonces tomemos φ_x el funcional en $\mathcal{T}(h)$ definido por $\varphi_x((\lambda I - \mathcal{L}_*)|u\rangle\langle\psi|) = tr((\lambda I - \mathcal{L}_*)(x)|u\rangle\langle\psi|)$; veremos que φ_x es el fun-

cional 0. Sea $\varphi_x((\lambda I - \mathcal{L}_*)|u\rangle\langle\psi|) = tr((\lambda I - \mathcal{L}_*)(x)|u\rangle\langle\psi|) = 0$; esto implica que

$$tr(\lambda x|u\rangle\langle\psi|) = tr(\mathcal{L}_*(x)|u\rangle\langle\psi|)$$

es decir

$$\langle u, \lambda x\psi\rangle = \langle u, \mathcal{L}_*(x)\psi\rangle.$$

Lo cual dice que $\mathcal{L}_*(x) = \lambda x$, pero siendo T^{min} conservativo esto es cierto si $x = 0$; así el anulador de $(\lambda - \mathcal{L}_*)(V)$ es igual a $\{0\}$. ■

Lema 3.2.10 *Considerando $\mathcal{L}^{min}$ y su predual $\mathcal{L}_*^{min}$. Se tiene que $D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right) = D(\mathcal{L}^{min})$.*

Demostración. Primero vamos a demostrar, $D(\mathcal{L}^{min}) \subset D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$.
Sea $x \in D(\mathcal{L}^{min})$ y sea $\rho \in D(\mathcal{L}_*^{min})$; tenemos que demostrar que

$$\rho \to tr\left(\mathcal{L}_*^{min}(\rho)\, x\right)$$

es una funcional lineal acotada.
Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}
tr\left(tr\left(\mathcal{L}_*^{min}(\rho)\, x\right)\right) &= \lim_{t \to 0^+} tr\left(\left(\frac{S_t^{min} - I}{t}\right)(\rho)\, x\right)\\
&= \lim_{t \to 0^+} tr\left(\rho\left(\frac{T_t^{min} - I}{t}\right) x\right)\\
&= tr\left(\rho\mathcal{L}^{min}(x)\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|tr\left(\rho\mathcal{L}^{min}(x)\right)\right| \leq \|\rho\|_{tr}\|\mathcal{L}^{min}(x)\|$$

resultando así que la funcional

$$\rho \to tr\left(\mathcal{L}_*^{min}(\rho)\, x\right)$$

es acotada y por lo tanto $x \in D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$; y $tr\left[\rho\left(\mathcal{L}_*^{min}\right)^* x\right]$ $= tr\left(\mathcal{L}_*^{min}(\rho)\, x\right) = tr\left(\rho\mathcal{L}^{min}(x)\right)$.
Ahora veamos que $D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right) \subset D\left(\mathcal{L}^{min}\right)$.
En este caso haremos uso del Teorema de Hille Yosida ([3]; Pág. 170).
Como $D\left(\mathcal{L}^{min}\right) \subset D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$; y puesto que $\mathcal{L}^{min}$ genera un semigrupo, $D\left(\mathcal{L}^{min}\right)$ es denso así $D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$ es denso en $\mathcal{B}(h)$. Demostramos que $\Gamma\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$ (gráfica de $(\mathcal{L}_*^{min})^*$) es cerrada.

$$\Gamma\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right) = \left\{\left(f, (\mathcal{L}_*^{min})^*(f)\right) : f \in D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)\right\}.$$

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una red tal que $f_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\sigma} f$ y $\left(f_\alpha, (\mathcal{L}_*^{min})^*(f_\alpha)\right) \xrightarrow[\alpha]{\sigma w} (f, g)$, veamos que $f \in D\left((\mathcal{L}_*^{min})^*\right)$ y $(\mathcal{L}_*^{min})^*(f) = g$.

Tomemos $\rho \in D\left((\mathcal{L}^{\min}_*)\right)$ y sea la funcional $\rho \to tr\left((\mathcal{L}^{\min}_*(\rho) f\right)$;

$$\begin{aligned} tr\left((\mathcal{L}^{\min}_*(\rho) f\right) &= \lim_{\alpha} tr\left(\mathcal{L}^{\min}_*(\rho) f_\alpha\right) \\ &= \lim_{\alpha} tr\left(\rho\left(\mathcal{L}^{\min}_*\right)^*(f_\alpha)\right) \\ &= tr(\rho g); \end{aligned}$$

así la funcional $\rho \to tr\left((\mathcal{L}^{\min}_*(\rho) f\right)$ resulta acotada, con lo cual $f \in D\left((\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)$ y $(\mathcal{L}^{\min}_*)^*(f) = g$; deduciéndose que $G\left((\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)$ es cerrada. Sea $\upsilon \in D\left((\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)$, recuérdese que $R^{\min}_\alpha : B(h) \to D\left(\mathcal{L}^{\min}\right)$. Vamos a demostrar que

$$R^{\min}_\alpha\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*(\upsilon)\right) \in D\left(\mathcal{L}^{\min}\right).$$

Tomemos $\rho \in \tau(h)$ arbitrario.

$$tr\left(\rho R^{\min}_\alpha\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)(\upsilon)\right) = tr\left(R^{\min *}_\alpha(\rho)\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)(\upsilon)\right)$$

donde $R^{\min *}_\alpha(\rho) \in D\left(\mathcal{L}^{\min}_*\right)$; así que

$$\begin{aligned} tr\left(R^{\min *}_\alpha(\rho)\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)(\upsilon)\right) &= tr\left(\left(\alpha I - \mathcal{L}^{\min}_*\right) R^{\min *}_\alpha(\rho)\,\upsilon\right) \\ &= tr\left(\left(\alpha I - \mathcal{L}^{\min}_*\right)\left(\alpha I - \mathcal{L}^{\min}_*\right)^{-1}(\rho)\,\upsilon\right) \\ &= tr(\rho\upsilon) \end{aligned}$$

lo cual es cierto si y sólo si $tr\left(\rho R^{\min}_\alpha\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)(\upsilon)\right) = tr(\rho\upsilon)$, de donde $R^{\min}_\alpha\left(\alpha I - (\mathcal{L}^{\min}_*)^*\right)\upsilon = \upsilon$; por lo tanto $\upsilon \in D\left(\mathcal{L}^{\min}\right)$ el cual implica que $D\left(\left(\mathcal{L}^{\min}_*\right)^*\right) \subset D\left(\mathcal{L}^{\min}\right)$: Por lo tanto tenemos que $D\left(\left(\mathcal{L}^{\min}_*\right)^*\right) = D\left(\mathcal{L}^{\min}\right)$: ∎

Proposición 3.2.11 *Supóngase que se tiene la Hipótesis AA. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) $T^{\min}$ es conservativo;
2) $D(\mathcal{L}^{\min}) = \{x \in B(h) : \mathcal{L}(x)$ es una forma sesquilineal acotada$\}$.

Demostración. 1) implica 2)
Tomemos $x \in B(h)$ tal que $x \in D\left(\mathcal{L}^{\min}\right)$ entonces $\mathcal{L}^{\min}(x) \in B(h)$ y se tiene que $\mathcal{L}^{\min}\left(T^{\min}_t(x)\right) = \frac{d}{dt} T^{\min}_t(x)$, donde la derivada se toma en la topología σ-débil. Esto implica que para todo $\upsilon, u \in D(G)$

$$\left\langle u, \mathcal{L}^{\min}\left(T^{\min}_t(x)\right)\upsilon\right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle u, T^{\min}_t(x)\,\upsilon\right\rangle.$$

Por otra parte también se tiene que:

$$\left\langle u, \pounds^{min}(x)\upsilon\right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle u, T_t^{min}(x)\upsilon\right\rangle|_{t=0} = \pounds(x)[u,\upsilon], \text{ para } t \geq 0$$

de donde se deduce fácilmente que

$$\left\langle u, \pounds^{min}(x)\upsilon\right\rangle = \pounds(x)[u,\upsilon].$$

Por lo tanto la forma sesquilineal de $\pounds(x)$ coincide sobre $D(G) \times D(G)$ con la forma sesquilineal del operador $\pounds^{min}(x)$, por lo tanto $\pounds(x)$ es acotada.
Esto demuestra
$D(\pounds^{min}) \subset \{x \in B(h) : \pounds(x)$ es una forma sesquilineal acotada$\}$.
Recíprocamente, si $\pounds(x)$ es acotada entonces existe $Y \in B(h)$ tal que:

$$\pounds(x)[u,\upsilon] = \langle u, Y\upsilon\rangle$$

para todo $u, \upsilon \in D(G)$.
Para probar que $x \in D(\pounds^{min})$. Considérese la funcional $\rho \to tr\left(\pounds_*^{min}(\rho)x\right)$ con $\rho \in D(\pounds_*^{min})$. Bastará ver que ésta funcional es continua, sea $\rho \in V$ el siguiente operador de traza finita

$$\rho = \sum_{i=1} |u_i\rangle\langle\upsilon_i|$$

con $u_i, \upsilon_i \in D(G)$.
Entonces

$$\begin{aligned} tr\left(\pounds_*^{min}(\rho)x\right) &= \sum_{i=1} tr\left(\pounds_*^{min}(|u_i\rangle\langle\upsilon_i|)x\right) = \sum_{i=1} \pounds(x)[u_i,\upsilon_i] \\ &= \sum_{i=1} \langle u_i, Y\upsilon_i\rangle = \sum_{i=1} tr\left(Y|u_i\rangle\langle\upsilon_i|\right) = tr(Y\rho) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|tr\left(\pounds_*^{min}(\rho)x\right)\right| \leq \|Y\|_{B(B(h))}\|\rho\|_{tr}$$

lo cual indica que $x \in \left(D(\pounds_*^{min})\right)^*$, usando el lema anterior se tiene que $x \in D(\pounds^{min})$.
Siendo V esencia de $\pounds_*^{min}$ el resultado se extiende a todo $D(\pounds_*^{min})$.

2) implica 1)
Como $\pounds(I)[u,\upsilon] = 0$, por la Hipótesis AA, $u, \upsilon \in D(G)$ se deduce que $I \in D\left(\pounds^{min}\right)$.
Ahora para todo $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} R_\lambda^{min}\left(\lambda + \pounds^{min}(I)\right) &= I \\ R_\lambda^{min}\left(\lambda 1 + \pounds^{min}(I)\right) &= I \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\lambda R_{\lambda}^{min}(I) = I.$$

Para todo $u \in h$

$$\begin{aligned} \|u\|_h^2 &= \langle u, 1u \rangle = \lambda \left\langle u, R_{\lambda}^{min}(I)\, u \right\rangle \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \left\langle u, T_s^{min}(I)\, u \right\rangle ds \\ \text{y} \qquad \frac{\|u\|_h^2}{\lambda} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \left\langle u, T_s^{min}(I)\, u \right\rangle ds \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que

$$\left\langle u, T_s^{min}(I)\, u \right\rangle = \|u\|_{h.}^2 = \langle u, I u \rangle ;$$

por lo tanto se tiene

$$T_s^{min}(I) = I; \text{ para todo } s \geq 0.$$

■

Capítulo 4

Criterios de Conservatividad

En este capítulo damos condiciones su…cientes para la conservatividad de un S.D.C.M. Además de la hipótesis AA usada en el capítulo anterior supondremos válida la hipótesis C(pág.82). Ambas hipótesis permiten demostrar la conservatividad de un S.D.C.M.

4.1. Hipótesis C

Sean $G;\ L_\ell$ $(\ell \geq 1)$ operadores que satisfacen la Hipótesis AA. Estos operadores satisfacen la Hipótesis C si existe un operador, densamente definido, positivo, autoadjunto, C y un subespacio lineal D con las siguientes propiedades:

1) *D está contenido en el dominio de G.*
2) *D es esencia de $C^{\frac{1}{2}}$.*
3) *D es invariante bajo el semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ y el subespacio $R(\lambda;G)(D)$ está contenido en el dominio de $C^{\frac{1}{2}}$ para cada $\lambda > 0$.*
4) *Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, el subespacio $L_\ell R(\lambda;G)(D) \subset D(C^{\frac{1}{2}})$.*
5) *Existe una constante positiva b tal que:*

$$2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi, C^{\frac{1}{2}}G\varphi\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi\right\rangle \leq b\,\|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2 \qquad (4.1)$$

para cada $\varphi \in R(\lambda;G)(D)$ y para algún $\lambda > 0$.

Nota:
Obsérvese que de la identidad $GR(\lambda;G) = \lambda R(\lambda;G) - 1$ ([18], págs. 36 − 37), se tiene que el subespacio lineal $GR(\lambda;G)(D)$ está contenido en el dominio de $C^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto si $u \in R(\lambda;G)(D)$, existe $\varphi \in D$ tal que

$$u = R(\lambda;G)\varphi \text{ y } Gu = GR(\lambda;G)\varphi \in D(C^{\frac{1}{2}}).$$

Como consecuencia $C^{\frac{1}{2}}G\cdot$ tiene sentido en (4.1). También denotamos por $\|\cdot\|_{C^{\frac{1}{2}}}$ la norma en el dominio de $C^{\frac{1}{2}}$ dada por

$$\|\varphi\|_{C^{\frac{1}{2}}}^2 = \|\varphi\|_h^2 + \left\|C^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_h^2.$$

Esta norma proviene del producto interno:

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{C^{\frac{1}{2}}} = \langle\varphi,\psi\rangle + \left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi, C^{\frac{1}{2}}\psi\right\rangle$$

$\varphi,\psi \in D(C^{\frac{1}{2}})$, que hace de $D(C^{\frac{1}{2}})$ un espacio de Hilbert. Esta nueva norma induce una topología estrictamente más fuerte que la que induce la norma original. Denotemos por $\|\cdot\|_{C,\infty}$, la norma de operadores en este nuevo espacio de Hilbert.

El siguiente resultado es una estimación sobre $R(n;G)$, el operador resolvente $(nI - G)^{-1}$ en h.

Proposición 4.1.1 *El operador* $\sum_{\ell=1}^{\infty}(nL_\ell R(n;G))^*(nL_\ell R(n;G))$ *; definido en* h*; satisface:*

$$\left|\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle nL_\ell R(n;G)\varphi, nL_\ell R(n;G)\varphi\rangle\right| \le 4n\|\varphi\|_h^2.$$

Demostración.

Seguimos [8], pág.66.

Sea $\varphi \in D(G)$; entonces se tiene debido a la Hipótesis A,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle nL_\ell R(n;G)\varphi, nL_\ell R(n;G)\varphi\rangle\right| &\le 2\left|\langle nR(n;G)\varphi, nGR(n;G)\varphi\rangle\right| \\
&\le 2\|nR(n;G)\varphi\|_h \|nGR(n;G)\varphi\|_h \\
&\le 2\|\varphi\|_h^2\left[n^2\|R(n;G)\varphi\|_h + n\right] \\
&\le 2\|\varphi\|_h^2 ,2n \\
&= 4n\|\varphi\|_h^2.
\end{aligned}$$

Ahora denotemos por J_n el operador positivo que satisface

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle nL_\ell R(n;G)\varphi, nL_\ell R(n;G)\varphi\rangle = \langle\varphi, J_n\varphi\rangle.$$

■

Proposición 4.1.2 *Supongamos la Hipótesis AA. Para cada* $\varphi \in h$*; se tiene lo siguiente:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\varphi, Q_\lambda^k(1)\varphi\right\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\left\langle\varphi, R_\lambda^{\min}(J_n)\varphi\right\rangle. \qquad (4.2)$$

Demostración. Seguimos [8], pág.66.

Para $\varphi \in D$ y $n \ge 1$ se satisface:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, F_\lambda(J_n)\varphi\rangle &= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\langle P_s\varphi, J_nP_s\varphi\rangle ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle nL_\ell P_sR(n;G)\varphi, nL_\ell P_sR(n;G)\varphi\rangle ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\sum_{\ell=1}^{\infty}\|nL_\ell R(n;G)P_s\varphi\|_h^2 ds \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\|nL_\ell R(n;G)P_s\varphi\|_h^2 ds \\
&= \langle nR(n;G)\varphi, nQ_\lambda(1)R(n;G)\varphi\rangle \\
&= \left\langle\varphi, n^2R(n;G^*)Q_\lambda(1)R(n;G)\varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

resultando así que $F_\lambda(J_n) = n^2R(n,G^*)Q_\lambda(1)R(n,G).$
También tenemos acotación es uniforme para $F_\lambda(J_n),$ pues

$$\begin{aligned}
\|F_\lambda(J_n)\|_{B(h)} &= \|n^2R(n,G^*)Q_\lambda(1)R(n,G)\| \\
&\leq n^2\|R(n,G^*)\|.\|Q_\lambda(1)\|_{B(h)}.\|R(n,G)\| \\
&\leq n^2\frac{1}{n^2}\|Q_\lambda(1)\|_{B(h)} \\
&\leq \|Q_\lambda\|_{B(B(h))} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\|F_\lambda(J_n)\|_{B(h)} \leq 1.$

Como $n^2R(n,G^*)Q_\lambda(1)R(n,G) = nR(n,G^*)Q_\lambda(1)nR(n,G)$
y $nR(n,G)$, $nR(n,G^*)$ ambos convergen fuertemente a $I,$ cuando $n \to \infty$
([20], Lema 3.2, pág.9). Entonces $Q_\lambda(1)nR(n,G) \underset{n\to\infty}{\to} Q_\lambda(1)$ fuertemente,
así resulta que $F_\lambda(J_n) \underset{n\to\infty}{\to} Q_\lambda(1)$ fuertemente.
Ahora sea $\nu \in D$ y usando que Q_λ^k es normal se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \nu, Q_\lambda^k F_\lambda(J_n)\nu\right\rangle = \left\langle \nu, Q_\lambda^{k+1}(1)\nu\right\rangle.$$

Pero por el Lema de Fatou, se deduce también que:

$$\sum_{k=0}\left\langle \nu, Q_\lambda^{k+1}(1)\nu\right\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=0}\left\langle \nu, Q_\lambda^k F_\lambda(J_n)\nu\right\rangle$$

obteniéndose así,

$$\sum_{k=1}\left\langle \nu, Q_\lambda^k(1)\nu\right\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\left\langle \nu, R_\lambda^{\text{mín}}(J_n)\nu\right\rangle \qquad (*)$$

y como D es denso en h, el resultado se extiende a todo h. ■

Con esta proposición demostrada podemos preguntarnos ¿Cuándo la serie en $(*)$ converge?. Para ello sólo será necesario estimar a $R_\lambda^{\text{mín}}(J_n).$ Pero esto es posible si para $\varepsilon > 0$ se tiene que $J_n \leq C_\varepsilon$ y

$$Sup_{n\geq1}\left\langle \phi, R_\lambda^{\text{mín}}(J_n)\phi\right\rangle \leq \underset{\varepsilon>0}{Sup}\left\langle \phi, R_\lambda^{\text{mín}}(C_\varepsilon)\phi\right\rangle < \infty$$

para ϕ en un subconjunto denso de $h,$ siendo C un operador positivo autoadjunto y los C_ε operadores acotados,

$$C_\varepsilon = C(1+\varepsilon C)^{-1}.$$

Los operadores C_ε son las aproximaciones de Yosida para $C.$

Lema 4.1.3 *Supongamos la Hipótesis AA y la Hipótesis C . Entonces para cada $\lambda > b$; $D(C^{\frac{1}{2}})$ es invariante bajo $R(\lambda;G)$ y además se tiene que:*

$$\|R(\lambda;G)\|_{C;\infty} \le (\lambda - b)^{-1}.$$

Demostración. Seguimos [8], pág.68.
Ahora pasamos a demostrar primero la desigualdad. Para ello tomemos $\varphi \in D$, y sea $u = \lambda R(\lambda;G)\varphi = \lambda(\lambda I - G)^{-1}\varphi$ entonces $\varphi = \frac{1}{\lambda}(\lambda I - G)u = \left(1 - \lambda^{-1}G\right)u$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|C^{\frac12}\varphi\|_h^2 &= \|C^{\frac12}\left(I - \lambda^{-1}G\right)u\|_h^2 \\
&= \left\langle C^{\frac12}u - \lambda^{-1}C^{\frac12}Gu, C^{\frac12}u - \lambda^{-1}C^{\frac12}Gu\right\rangle \\
&= \|C^{\frac12}u\|_h^2 - 2\lambda^{-1}\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac12}u, C^{\frac12}Gu\right\rangle + \lambda^{-2}\|C^{\frac12}Gu\|_h^2 \\
&\ge \|C^{\frac12}u\|_h^2 - \lambda^{-1}b\|C^{\frac12}u\|_h^2 + \lambda^{-2}\|C^{\frac12}Gu\|_h^2 \\
&\ge \left(1 - \lambda^{-1}b\right)\|C^{\frac12}u\|_h^2 \\
&= \left(1 - \lambda^{-1}b\right)\|C^{\frac12}\lambda R(\lambda;G)\varphi\|_h^2 \\
&= \lambda^2\left(1 - \lambda^{-1}b\right)\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h^2 \\
&= \lambda(\lambda - b)\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\lambda(\lambda - b)\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h^2 \le \|C^{\frac12}\varphi\|_h$$

con lo cual,

$$\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h^2 \le \frac{\|C^{\frac12}\varphi\|_h^2}{\lambda(\lambda - b)}\text{ , con } \lambda > b$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h &\le \left(\frac{1}{\lambda(\lambda - b)}\right)^{\frac12}\|C^{\frac12}\varphi\|_h \\
\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h &\le \frac{1}{(\lambda - b)}\|C^{\frac12}\varphi\|_h;
\end{aligned}$$

puesto que D es esencia de $C^{\frac12}$ también se tiene que

$$\|C^{\frac12}R(\lambda;G)\varphi\|_h \le \frac{1}{(\lambda - b)}\|C^{\frac12}\varphi\|_h \quad para\ \varphi \in D(C^{\frac12}).$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\|R(\lambda;G)\|_{C;\infty} &= \inf\left\{ M>0; \|R(\lambda;G)\varphi\|_{C^{\frac{1}{2}}} \le M\|\varphi\|_{C^{\frac{1}{2}}}; \varphi \in D(C^{\frac{1}{2}})\right\} \\
&= \inf\left\{ M>0; \begin{array}{c} \sqrt{\|R(\lambda;G)\varphi\|_h^2 + \|C^{\frac{1}{2}}R(\lambda;G)\varphi\|_h^2} \\ \le M\sqrt{\|\varphi\|_h^2 + \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2}; \varphi \in D(C^{\frac{1}{2}}) \end{array} \right\} \\
&\le \frac{1}{\lambda - b}.
\end{aligned}
$$

Ahora demostramos la invarianza de $D(C^{\frac{1}{2}})$ bajo la acción de $R(\lambda;G).$ Tomemos $\varphi \in D$ y sea $\psi = R(\lambda;G)\varphi.$ Claramente se tiene que $\psi \in D(C^{\frac{1}{2}})$, por lo tanto existe $\{\psi_n\}_{n\geq 0} \subset D$ tal que $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi$ y $C^{\frac{1}{2}}\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C^{\frac{1}{2}}\psi;$ y

$$
R(\lambda;G)\psi = \lim_{n\to\infty} R(\lambda;G)\psi_n
$$

pues $R(\lambda;G)\psi_n \in D(C^{\frac{1}{2}})$ $\forall n \geq 0$, lo cual implica que $R(\lambda;G)\psi \in D(C^{\frac{1}{2}})$, resultando que $R(\lambda;G)D(C^{\frac{1}{2}}) \subset D(C^{\frac{1}{2}}).$ ■

Corolario 4.1.4 *$R(\lambda;G)(D)$ es denso en $D(C^{\frac{1}{2}})$ con la norma $\|.\|_{C^{\frac{1}{2}}}.$*

Demostración.
Tomemos $\mu \in D(C^{\frac{1}{2}})$ tal que se tenga:

$$
0 = \langle \mu; R(\lambda;G)\varphi\rangle_{C^{\frac{1}{2}}} = \langle \mu; R(\lambda;G)\varphi\rangle + \left\langle C^{\frac{1}{2}}\mu; C^{\frac{1}{2}}R(\lambda;G)\varphi\right\rangle
$$

con $\varphi \in D$. Vamos a demostrar que $\mu = 0.$ Claramente, de la igualdad de arriba se tiene lo siguiente:

$$
\left\langle C^{\frac{1}{2}}\mu; C^{\frac{1}{2}}R(\lambda;G)\varphi\right\rangle = -\langle \mu; R(\lambda;G)\varphi\rangle
$$

pero recordando que D es denso en $D(C^{\frac{1}{2}});$ se tiene que existe $\{\varphi_n\}_n \subset D$ tal que $\varphi_n \xrightarrow[n]{} \mu;$ $C^{\frac{1}{2}}\varphi_n \xrightarrow[n]{} C^{\frac{1}{2}}\mu;$ $\lambda R(\lambda;G)\varphi_n \xrightarrow[n]{} \lambda R(\lambda;G)\mu$, $\lambda > 0$ y $C^{\frac{1}{2}}\lambda R(\lambda;G)\varphi_n \xrightarrow[n]{} C^{\frac{1}{2}}\lambda R(\lambda;G)\mu$. Por lo tanto se cumple también lo siguiente $\left\langle C^{\frac{1}{2}}\mu; C^{\frac{1}{2}}\lambda R(\lambda;G)\varphi_n\right\rangle = -\langle \mu; \lambda R(\lambda;G)\varphi_n\rangle$ y

$$
\begin{aligned}
\left\langle C^{\frac{1}{2}}\mu; C^{\frac{1}{2}}\lambda R(\lambda;G)\mu\right\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}\mu; C^{\frac{1}{2}}\lambda R(\lambda;G)\varphi_n\right\rangle \\
&= -\lim_{n\to\infty}\langle \mu; \lambda R(\lambda;G)\varphi_n\rangle \\
&= -\langle \mu; \lambda R(\lambda;G)\mu\rangle.
\end{aligned}
$$

Recordando que $\lambda R(\lambda;G) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{s} I$, ésta última igualdad nos muestra que

$$\left\langle C^{\frac{1}{2}}\psi, C^{\frac{1}{2}}\psi\right\rangle = -\langle\psi,\psi\rangle$$
$$\left\langle C^{\frac{1}{2}}\psi, C^{\frac{1}{2}}\psi\right\rangle + \langle\psi,\psi\rangle = 0$$

lo cual quiere decir que

$$\|\psi\|_{C^{\frac{1}{2}}} = 0$$

pero esto es posible si y sólo si $\psi = 0.$ Por lo tanto resulta que $R(\lambda;G)(D)$ es denso en $D(C^{\frac{1}{2}}).$ ∎

Proposición 4.1.5 *Supongamos que se tiene la Hipótesis C. Entonces $D(C^{\frac{1}{2}})$ es invariante bajo P_t, para cada $t \geq 0$, y la restricción de los operadores P_t a $D(C^{\frac{1}{2}})$ forman un semigrupo fuertemente continuo sobre el espacio de Hilbert $(D(C^{\frac{1}{2}}), \|\cdot\|_{C,\infty}).$ Además se tiene que*

$$\|P_t\|_{C,\infty} \leq e^{bt}.$$

Demostración. Seguimos [8], pág.69.
De la siguiente identidad, válida para cada $\lambda, \mu > b$

$$R(\lambda;G) - R(\mu;G) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda;G)\, R(\mu;G),$$

se obtiene una familia de resolventes en el espacio de Hilbert $(D(C^{\frac{1}{2}}), \|\cdot\|_{C,\infty}),$ y $\ker(R(\lambda;G)) = \{0\},$ pues $R(\lambda;G)(\lambda;G) = 1$ implica que $R(\lambda;G)$ es inyectiva, por el corolario de arriba, ahora usando [20] Teorema 9.3 pág.36, se tiene que $\{R(\lambda;G)\}_{\lambda>b}$ es el resolvente de un operador cerrado y densamente definido en $D(C^{\frac{1}{2}}),$ llamémosle $\mathcal{A}.$ Por el Teorema de Hille-Yosida-Phillips-Miyadera-Feller.([17], pág.72) y la proposición anterior se tiene que $\mathcal{A}$ genera un semigrupo de contracciones $\{S_t\}_{t\geq 0}$ de clase $C_0(1,b)$, es decir $\|S_t\|_{C,\infty} \leq e^{bt},$ y como

$$S_t = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};G\right)\right)^n$$

fuertemente en $D(C^{\frac{1}{2}})$ entonces para todo $\phi \in D(C^{\frac{1}{2}})$ ([19], Teorema 8.3, pág.33)

$$S_t\phi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};G\right)\right)^n \phi = P_t\phi$$
$$\mathcal{A}\phi = \lim_{t\to 0^+}\frac{S_t\phi - \phi}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{P_t\phi - \phi}{t} = G\phi,$$

resultando así que $\mathcal{A}$ es la parte de G en $D(C^{\frac{1}{2}})$ ([19], Def. 10.3, pág.39). Por lo tanto P_t deja invariante a $D(C^{\frac{1}{2}}),$ resultando a la vez que es semigrupo, y además $\|P_t\|_{C,\infty} \leq e^{bt}$. ∎

Corolario 4.1.6 *Supongamos que tenemos la Hipótesis C. Entonces para cada $\upsilon \in R(\lambda, G)(D)$ con $\lambda > b$, la función $t \to \|C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\|_h^2$ es diferenciable y además:*

$$\frac{d}{dt}\|C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\|_h^2 = 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, C^{\frac{1}{2}}GP_t\upsilon\right\rangle.$$

Demostración. Seguimos [8], pág.69.
De la Teoría de semigrupos de contracciones, aplicada a

$$P_t : D\left(C^{\frac{1}{2}}\right) \to D\left(C^{\frac{1}{2}}\right)$$

se sigue que $R(\lambda, G)\left(D\left(C^{\frac{1}{2}}\right)\right) = D(\Psi)$ y además para $\upsilon \in D(\Psi)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|P_t\upsilon\|_{C^{\frac{1}{2}}}^2 &= \frac{d}{dt}\langle P_t\upsilon, P_t\upsilon\rangle_{C^{\frac{1}{2}}} = \langle P_t\Psi\upsilon, P_t\upsilon\rangle + \left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\Psi\upsilon, C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\right\rangle \\
&\quad + \langle P_t\upsilon, P_t\Psi\upsilon\rangle_{C^{\frac{1}{2}}} + \left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, C^{\frac{1}{2}}P_t\Psi\upsilon\right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\|P_t\upsilon\|_h^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, C^{\frac{1}{2}}P_t\Psi\upsilon\right\rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado como $\Psi\upsilon = G\upsilon$ para $\upsilon \in D(\Psi)$

$$\begin{aligned}
\|C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\|_h^2 &= \|P_t\upsilon\|_{C^{\frac{1}{2}}}^2 - \|P_t\upsilon\|_h^2 \\
\frac{d}{dt}\|C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\|_h^2 &= \frac{d}{dt}\|P_t\upsilon\|_{C^{\frac{1}{2}}}^2 - \frac{d}{dt}\|P_t\upsilon\|_h^2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, C^{\frac{1}{2}}P_t\Psi\upsilon\right\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que

$$\frac{d}{dt}\|C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\|_h^2 = 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, C^{\frac{1}{2}}P_t\Psi\upsilon\right\rangle.$$

■

Proposición 4.1.7 *Supongamos que tenemos la Hipótesis C. Entonces para cada $\lambda > b$ y $\upsilon \in D(C^{\frac{1}{2}})$ se tiene lo siguiente:*

$$(\lambda - b)\operatorname*{Sup}_{\varepsilon>0}\left\langle \upsilon, R_\lambda^{(n)}(C_\varepsilon)\upsilon\right\rangle \leq \|C^{\frac{1}{2}}\upsilon\|_h^2 \qquad (4.3)$$

donde

$$C_\varepsilon = (1+\varepsilon C)^{-1}C.$$

Demostración. Seguimos [8], pág.70.
Sea $\{R_\lambda^n\}_{n>0}$ la sucesión de transformaciones lineales positivas consideradas en el Teorema 3.2.4. Será suficiente demostrar que para todo $n \geq 0$, $\lambda > b$ y

$\varphi \in D(C^{\frac{1}{2}})$ el operador $R^n_\lambda(C_\varepsilon)$ satisface:

$$(\lambda - b)\, \underset{\varepsilon>0}{Sup} \langle \varphi, R^n_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \rangle \leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2.$$

Veamos que la desigualdad se vale para $n = 0$ y $\varphi \in R(\lambda, G)(D)$. Procedemos por inducción. Del hecho de que D es invariante bajo P_t y que P_t conmuta con $R(\lambda, G)$ se tiene lo siguiente

$$P_t R(\lambda, G)(D) = R(\lambda, G) P_t(D) \subset R(\lambda, G)(D).$$

Con métodos de Teoría espectral se tiene que $\langle \varphi, C_\varepsilon \varphi \rangle \leq \langle \varphi, C\varphi \rangle$ para todo $\varphi \in D(C)$; y como $D(C)$ es denso en $C^{\frac{1}{2}}$ ([15], Teorema 3.35, pág. 281) también se tiene que $\langle \varphi, C_\varepsilon \varphi \rangle \leq \left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi, C^{\frac{1}{2}}\varphi \right\rangle$. Ahora integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle P_t\varphi, C_\varepsilon P_t\varphi \rangle\, dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\langle C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_t\varphi, C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_t\varphi \right\rangle dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \|C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_t\varphi\|^2 dt \\
&= \|C_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 + \int_0^\infty 2 \operatorname{Re} e^{-\lambda t} \left\langle C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_t\varphi, C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} G P_t\varphi \right\rangle dt \\
&\leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2 + b \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|C_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_t\varphi\|^2 dt \\
&\leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2 + b \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle \\
&\leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2 + b\, \underset{\varepsilon>0}{Sup} \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Así se tiene que,

$$\lambda\, \underset{\varepsilon>0}{Sup} \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle \leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2 + b\, \underset{\varepsilon>0}{Sup} \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle$$

lo cual implica que,

$$(\lambda - b)\, \underset{\varepsilon>0}{Sup} \left\langle \varphi, R^0_\lambda(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle \leq \|C^{\frac{1}{2}}\varphi\|_h^2.$$

Por la densidad de $R(\lambda, G)(D)$ en $D(C^{\frac{1}{2}})$ se extiende el resultado en $D(C^{\frac{1}{2}})$. Supongamos que la proposición se tiene para algún n y para cada $\varphi \in D(C^{\frac{1}{2}})$. Es fácil ver que para cada $\varphi \in R(\lambda, G)(D)$, $L_\ell P_t\varphi \in D(C^{\frac{1}{2}})$ de donde por la segunda ecuación de (3.9), y de la definición de R^n_λ del Teorema 3;2;4; se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \varphi, R_\lambda^{n+1}(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle &= \langle \varphi, F_\lambda(C_\varepsilon)\varphi\rangle \\
&\quad + \sum_{\ell=1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle L_\ell P_t\varphi, R_\lambda^n(C_\varepsilon)\, L_\ell P_t\varphi\rangle\, dt \\
&\le \langle \varphi, F_\lambda(C_\varepsilon)\varphi\rangle + \frac{1}{\lambda - b} \sum_{\ell=1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} L_\ell P_t\varphi\|_h^2 dt
\end{aligned}
$$

ahora usando la desigualdad 4;1) e integrando por partes nuevamente se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} L_\ell P_t\varphi\|_h^2 dt &= \int_0^\infty \sum_{\ell=1} e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} L_\ell P_t\varphi\|_h^2 dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{\ell=1} e^{-\lambda t} \left\langle C^{\frac12} L_\ell P_t\varphi, C^{\frac12} L_\ell P_t\varphi \right\rangle dt \\
&\le \int_0^\infty b e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} P_t\varphi\|_h^2 dt \\
&\quad - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac12} P_t\varphi, C^{\frac12} G P_t\varphi \right\rangle dt \\
&= \int_0^\infty b e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} P_t\varphi\|_h^2 dt \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(-\frac{d}{dt} \| C^{\frac12} P_t\varphi\|_h^2 \right) dt \\
&= \| C^{\frac12}\varphi\|_h^2 - (\lambda - b) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| C^{\frac12} P_t\varphi\|_h^2 dt \\
&\le \| C^{\frac12}\varphi\|_h^2 - (\lambda - b) \langle \varphi, F_\lambda(C_\varepsilon)\varphi\rangle
\end{aligned}
$$

por lo que se deduce que,

$$
\left\langle \varphi, R_\lambda^{n+1}(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle \le \langle \varphi, F_\lambda(C_\varepsilon)\varphi\rangle + \frac{\| C^{\frac12}\varphi\|_h^2}{\lambda - b} - \langle \varphi, F_\lambda(C_\varepsilon)\varphi\rangle
$$

con lo cual

$$
(\lambda - b) \operatorname*{Sup}_{\varepsilon > 0} \left\langle \varphi, R_\lambda^{n+1}(C_\varepsilon)\varphi \right\rangle \le \| C^{\frac12}\varphi\|_h^2
$$

y por ser $R(\lambda; G)(D)$ denso en $D(C^{\frac12})$; la prueba vale en todo $D(C^{\frac12})$: ■

Los siguientes tres resultados son los más importantes de este capítulo y son consecuencias de la Hipótesis C.

Teorema 4.1.8 *Supongamos que hay un operador C que satisface la Hipótesis C , la Hipótesis AA y tal que*

$$\langle \upsilon, J_n \upsilon \rangle \leq \langle \upsilon, C\upsilon \rangle$$

para cada $\upsilon \in D(C)$; $n \geq 1$.
Entonces el semigrupo dinámico cuántico minimal es conservativo.

Demostración. Seguimos [8], pág.72.
Sea $\lambda > b$; bajo las hipótesis del mismo teorema tenemos que los operadores acotados $(J_n)_\varepsilon$ y C_ε son crecientes cuando ε decrece y además satisfacen la desigualdad

$$(J_n)_\varepsilon \leq C_\varepsilon$$

([16], pág. 317) con lo cual para $\upsilon \in D(C)$ se tiene que:

$$\left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda (J_n)_\varepsilon \upsilon \right\rangle \leq \left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda (C_\varepsilon)\upsilon \right\rangle$$

$$\operatorname*{Sup}_{\varepsilon>0} \left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda (J_n)_\varepsilon \upsilon \right\rangle \leq \operatorname*{Sup}_{\varepsilon>0} \left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda (C_\varepsilon)\upsilon \right\rangle \leq (\lambda - b)^{-1} \|C^{\frac{1}{2}}\upsilon\|^2_h$$

y así debido a la Proposición 4.1.2

$$\begin{aligned}\sum_{k=0} \left\langle \upsilon, Q^k_\lambda (1)\upsilon \right\rangle &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \inf \operatorname*{Sup}_{\varepsilon>0} \left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda ((J_n)_\varepsilon)\upsilon \right\rangle \\ &= \lim_n \inf \left\langle \upsilon, R^{\text{mín}}_\lambda (J_n)\upsilon \right\rangle < \infty\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle \upsilon, Q^k_\lambda (1)\upsilon \right\rangle = 0$$

y como $\|Q^k_\lambda(1)\|_\infty \leq 1$, por lo tanto tenemos que $Q^k_\lambda(1) \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$; resultando así que $T^{\text{mín}}$ es conservativo. Siendo $D(C)$ esencia de $C^{\frac{1}{2}}$ ([14] Teorema 2.1, pág. 322; Teorema 2.23, pág.331) la demostración se extiende a todo $D(C^{\frac{1}{2}})$. ■

Teorema 4.1.9 *Ahora supongamos que tenemos la Hipótesis AA y que existe un operador positivo autoadjunto ϕ en h tal que :*

1) $D(G) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$ *y que para cada $\upsilon \in D(G)$ se tiene lo siguiente:*

$$-2\,\mathrm{Re}\langle \upsilon, G\upsilon \rangle = \sum_{\ell=1} \langle L_\ell \upsilon, L_\ell \upsilon \rangle = \left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon, \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon \right\rangle .$$

2) *Existe un operador positivo autoadjunto C satisfaciendo la Hipótesis* C

tal que $D(C) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$ *y para cada* $\upsilon \in D(C)$ *se tiene que*

$$\left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon, \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon \right\rangle \leq \left\langle C^{\frac{1}{2}}\upsilon, C^{\frac{1}{2}}\upsilon \right\rangle .$$

Entonces el semigrupo dinámico cuántico minimal $T^{(min)}$ *es conservativo.*

Demostración. Seguimos [8], pág.72.

Sea $\lambda > b$ y $\upsilon \in D(\phi)$. Para $\varepsilon > 0$, los operadores acotados ϕ_ε y C_ε satisfacen $\phi_\varepsilon \leq C_\varepsilon$. Así la sucesión de números positivos $\langle \upsilon, F_\lambda \phi_\varepsilon \upsilon \rangle$ es creciente conforme ε decrece, veamos que los $F_\lambda \phi_\varepsilon$ están acotados uniformemente. Para ello sea $\upsilon \in D(G) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$. Obtenemos que $P_s\upsilon \in D(G) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \upsilon, F_\lambda \phi_\varepsilon \upsilon \rangle &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle P_s\upsilon, \phi_\varepsilon P_s\upsilon \rangle \, ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left\langle \phi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_s\upsilon, \phi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} P_s\upsilon \right\rangle ds \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left\langle \phi^{\frac{1}{2}} P_s\upsilon, \phi^{\frac{1}{2}} P_s\upsilon \right\rangle ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(-2 \operatorname{Re} \langle P_s\upsilon, G P_s\upsilon \rangle \right) ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \left(-\frac{d}{ds} \|P_s\upsilon\|_h^2 \right) ds \\
&= \left[e^{-\lambda s} \left(-\|P_s\upsilon\|_h^2 \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} \|P_s\upsilon\|_h^2 ds \\
&= \|\upsilon\|_h^2 - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} \|P_s\upsilon\|_h^2 ds \\
&\leq \|\upsilon\|_h^2 .
\end{aligned}$$

Como $\|F_\lambda \phi_\varepsilon\|_{B(h)} = Sup\{ |\langle \upsilon, F_\lambda \phi_\varepsilon \upsilon \rangle| : \upsilon \in D(G);\ \|\upsilon\|_h \leq 1 \}$; se tiene que $\|F_\lambda \phi_\varepsilon\|_{B(h)} \leq 1$; lo cual implica que $F_\lambda \phi_\varepsilon$ está uniformemente acotado por 1. Ahora haciendo uso del Teorema de convergencia monótona tenemos

$$
\begin{aligned}
Sup_{\epsilon}\langle \upsilon, F_{\lambda}\phi_{\epsilon}\upsilon\rangle &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\langle \upsilon, F_{\lambda}\phi_{\epsilon}\upsilon\rangle = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\langle P_t\upsilon, \phi_{\epsilon}P_t\upsilon\rangle\, dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\langle \phi_{\epsilon}^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon, \phi_{\epsilon}^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon\right\rangle dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,||\phi^{\frac{1}{2}}P_t\upsilon||^2 dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sum_{\ell=1}^{\infty}\langle L_{\ell}P_t\upsilon, L_{\ell}P_t\upsilon\rangle\, dt \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\langle L_{\ell}P_t\upsilon, L_{\ell}P_t\upsilon\rangle\, dt \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,||L_{\ell}P_t\upsilon||_h^2 dt \\
&= \langle \upsilon, Q_{\lambda}(1)\upsilon\rangle
\end{aligned}
$$

entonces $F_{\lambda}\phi_{\epsilon}\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} Q_{\lambda}(1)$ fuertemente, debilmente y σ-debilmente.

Por otra parte recordemos que los Q_{λ}^{k} son σ-débiles continuos. Entonces $Q^{k}(F_{\lambda}\phi_{\epsilon})\xrightarrow[\epsilon\to 0]{w} Q_{\lambda}^{k+1}(1)$, es decir dado $\upsilon\in D\left(C^{\frac{1}{2}}\right)$;

$$
\left\langle \upsilon, Q^{k}(F_{\lambda}\phi_{\epsilon})\upsilon\right\rangle \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \left\langle \upsilon, Q_{\lambda}^{k+1}(1)\upsilon\right\rangle .
$$

Ahora tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle \upsilon, Q_{\lambda}^{k+1}(1)\upsilon\right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left\langle \upsilon, Q^{k}(F_{\lambda}\phi_{\epsilon})\upsilon\right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle \upsilon, Q^{k}(F_{\lambda}\phi_{\epsilon})\upsilon\right\rangle \\
&= Sup_{\epsilon>0}\left\langle \upsilon, R_{\lambda}^{\text{mín}}(\phi_{\epsilon})\upsilon\right\rangle \\
&\leq Sup_{\epsilon>0}\left\langle \upsilon, R_{\lambda}^{\text{mín}}(C_{\epsilon})\upsilon\right\rangle \\
&\leq \frac{1}{\lambda - b}||C^{\frac{1}{2}}\upsilon||_h^2;
\end{aligned}
$$

así se tiene que $\left\langle \upsilon, Q_{\lambda}^{k+1}(1)\upsilon\right\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$ Como $D(C^{\frac{1}{2}})$ es denso en h tenemos que $Q_{\lambda}^{k+1}(1)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ y por lo tanto $T^{\text{mín}}$ es conservativo. ∎

Proposición 4.1.10 *Supongamos que se tiene la Hipótesis AA y que existe un operador autoadjunto C con dominio coincidiendo con el de G. Sea D_1 una esencia para C con las siguientes propiedades:*

1) $L_\ell(D_1) \subseteq D(C^{\frac{1}{2}})$ *para* $\ell \geq 1.$

2) *Existe un operador autoadjunto ϕ tal que $D_1 \subset D(\phi)$ y además*

$$-2\,\mathrm{Re}\langle \upsilon, G\upsilon\rangle = \langle \upsilon, \phi\upsilon\rangle \leq \langle \upsilon, C\upsilon\rangle$$

para todo $\upsilon \in D_1.$

3) *Existe una constante positiva b tal que la desigualdad*

$$2\,\mathrm{Re}\langle C\upsilon, G\upsilon\rangle + \sum_{\ell=1} \left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon\right\rangle \leq b\langle \upsilon, C\upsilon\rangle \qquad (4,4)$$

se tiene para todo $\upsilon \in D_1.$

Entonces el semigrupo dinámico cuántico minimal es conservativo.

Demostración. Seguimos [8], pág.74.

Consideremos $D(G)$ y $D(C)$ como espacios de Hilbert con sus respectivas normas

$$\begin{aligned} \|u\|_G &= \sqrt{\|u\|_h^2 + \|Gu\|_h^2}, \\ \|u\|_C &= \sqrt{\|u\|_h^2 + \|Cu\|_h^2}. \end{aligned}$$

Con éstas dos normas se tiene que la identidad $i : D(G) \to D(C),$ es una transformación cerrada y además es un homeomorfismo. Resultando así que las dos normas son equivalentes y por lo tanto existen constantes $c_1,$ c_2, c_3, c_4 tales que:

$$\begin{aligned} \|G\upsilon\|_h &\leq c_1\|C\upsilon\|_h + c_2\|\upsilon\|_h \\ \|C\upsilon\|_h &\leq c_3\|G\upsilon\|_h + c_4\|\upsilon\|_h\ , \end{aligned}$$

ya que D_1 es una esencia de C y de $G,$ para cada $\upsilon \in D(C) = D(G)$ existe $\{\upsilon_n\}_{n\geq 1} \subset D_1$ tal que $\upsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \upsilon$ y $\{G\upsilon_n\}_{n\geq 1}$, $\{C\upsilon_n\}_{n\geq 1}$convergen fuertemente a $G\upsilon$ y a $C\upsilon.$ Vamos a demostrar que se cumple la condición 1) del Teorema $4,1,9$; recordemos que en esta hipótesis se requiere que $D(G) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$ y para todo $\upsilon \in D(G)$

$$-2\,\mathrm{Re}\langle \upsilon, G\upsilon\rangle = \sum_{\ell=1} \langle L_\ell\upsilon, L_\ell\upsilon\rangle = \left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon, \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle.$$

Sea $\upsilon \in D(G)$, por demostrar que $\upsilon \in D(\phi^{\frac{1}{2}}).$

Existe $\{\upsilon_n\}_{n\geq 1} \subset D_1$ tal que $\upsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \upsilon$, $G\upsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} G\upsilon$ y $C\upsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C\upsilon$

así por la Hipótesis 2)

$$-2\operatorname{Re}\langle \upsilon_n; G\upsilon_n\rangle = \langle \upsilon_n; \phi\upsilon_n\rangle$$

$$-2\operatorname{Re}\langle \upsilon; G\upsilon\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \upsilon_n; \phi\upsilon_n\rangle$$

y como $\langle \upsilon_n; \phi\upsilon_n\rangle = \left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\right\rangle = \|\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\|^2;$ ahora resta demostrar que $\left\{\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\right\}_{n\geq 1}$ es convergente. Obsérvese lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\phi^{\frac{1}{2}}(\upsilon_n - \upsilon_m)\|^2 &= \left\langle \phi^{\frac{1}{2}}(\upsilon_n - \upsilon_m); \phi^{\frac{1}{2}}(\upsilon_n - \upsilon_m)\right\rangle \\
&= \langle(\upsilon_n - \upsilon_m); \phi(\upsilon_n - \upsilon_m)\rangle \\
&\leq \langle(\upsilon_n - \upsilon_m); C(\upsilon_n - \upsilon_m)\rangle \\
&\leq \|\upsilon_n - \upsilon_m\|_h \|C(\upsilon_n - \upsilon_m)\|_h \underset{n;m\to\infty}{\longrightarrow} 0;
\end{aligned}$$

por lo tanto $\left\{\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\right\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y en consecuencia es convergente.

Supongamos que $\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu$ y $\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \upsilon.$ Como $\phi = \phi^{\ast}$ entonces es cerrado y se tiene que $\upsilon \in D(\phi^{\frac{1}{2}})$ y $\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon = \nu$. Con lo cual $D(G) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}});$ deduciéndose también que,

$$\begin{aligned}
-2\operatorname{Re}\langle \upsilon; G\upsilon\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(-2\operatorname{Re}\langle \upsilon_n; G\upsilon_n\rangle\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\right\rangle \\
&= \left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle
\end{aligned}$$

para todo $\upsilon \in D(G).$ Así hemos probado que se cumple la Condición 1) del Teorema $4;1;9.$

Ahora como $D(C) \subset D(\phi^{\frac{1}{2}})$ ya que $D(C) = D(G);$ sea $\upsilon \in D(G)$ entonces existe $\{\upsilon_n\}_{n\geq 1} \subset D_1$ tal que $\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \upsilon$, $G\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G\upsilon$, $C\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C\upsilon$ y $\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n\right\rangle \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\langle \upsilon_n; C\upsilon_n\rangle = \langle \upsilon; C\upsilon\rangle = \left\langle C^{\frac{1}{2}}\upsilon; C^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle
\end{aligned}$$

lo cual quiere decir que

$$\left\langle \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon; \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle \leq \left\langle C^{\frac{1}{2}}\upsilon; C^{\frac{1}{2}}\upsilon\right\rangle:$$

Para finalizar la demostración de éste teorema veamos que se satisfacen las condiciones de la Hipótesis C:

1) Tomando $D = D(G)$ se cumple la primera condición.

2) $D(G)$ es esencia de $C^{\frac{1}{2}}$ ([15] ,Teorema $2{;}1{;}$ pág. 322 y Teorema $2{;}23{;}$ pág. 331).

3) Siempre se cumple.

4) Para verificar, $L_\ell R(\lambda;G)(D(G)) \subset D(C^{\frac{1}{2}}).$ Veamos que $R(\lambda;G)(D(G)) \subset D(L_\ell)$ y que $L_\ell\upsilon \in D(C^{\frac{1}{2}})$, para $\upsilon \in R(\lambda;G)(D(G))$:

Por hipótesis tenemos,

$$D(G) \subset \cap_{\ell=1}^{\infty} D(L_\ell)$$

lo cual implica que

$$R(\lambda;G)(D(G)) \subset D(G) \subset D(L_\ell) \text{ para todo } \ell \geq 1.$$

Así, sólo falta verificar que $L_\ell\upsilon \in D(C^{\frac{1}{2}})$: Por otra parte existe $\{\upsilon_n\}_{n\geq 1} \subset D_1$ tal que $\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} \upsilon$, $G\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} G\upsilon$, $C\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} C\upsilon$ y $\phi^{\frac{1}{2}}\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} \phi^{\frac{1}{2}}\upsilon$.

Gracias a la ecuación de la Hipótesis AA) también se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &< \langle L_\ell(\upsilon - \upsilon_n); L_\ell(\upsilon - \upsilon_n)\rangle \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell(\upsilon - \upsilon_n); L_\ell(\upsilon - \upsilon_n)\rangle \\ &= -2\,\mathrm{Re}\langle(\upsilon - \upsilon_n); G(\upsilon - \upsilon_n)\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0; \end{aligned}$$

de donde se deduce que $L_\ell\upsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} L_\ell\upsilon$:

Ahora veamos que $\left\{C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon_n\right\}_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy

$$\begin{aligned} \|C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon_n - C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon_m\|_h &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell(\upsilon_n - \upsilon_m); C^{\frac{1}{2}}L_\ell(\upsilon_n - \upsilon_m)\right\rangle \\ &\leq b\langle(\upsilon_n - \upsilon_m); C(\upsilon_n - \upsilon_m)\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle C(\upsilon_n - \upsilon_m); G(\upsilon_n - \upsilon_m)\rangle \underset{n,m\to\infty}{\to} 0: \end{aligned}$$

Sea $\nu = \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon_n$; como $C^{\frac{1}{2}}$ es cerrado entonces $L_\ell\upsilon \in D(C^{\frac{1}{2}})$ y $C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon = \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{2}}L_\ell\upsilon_n$:

Para ver que se cumple la parte 5) de la Hipótesis C, tomemos $\varphi \in R(\lambda;G)(D(G)) \subset D(C) \subset D\left(C^{\frac{1}{2}}\right)$, obsérvese lo siguiente

$$
\begin{aligned}
& 2\,\mathrm{Re}\left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi, C^{\frac{1}{2}}G\varphi\right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi\right\rangle \\
= \; & \lim_{n\to\infty} 2\,\mathrm{Re}\langle C\varphi_n, G\varphi_n\rangle + \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n\right\rangle \\
\leq \; & \lim_{n\to\infty} 2\,\mathrm{Re}\langle C\varphi_n, G\varphi_n\rangle + \lim_{n\to\infty}\inf\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n\right\rangle \\
= \; & \lim_{n\to\infty}\inf\left(2\,\mathrm{Re}\langle C\varphi_n, G\varphi_n\rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\langle C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}L_\ell\varphi_n\right\rangle\right) \\
\leq \; & \lim_{n\to\infty}\inf b\langle\varphi_n, C\varphi_n\rangle \\
= \; & \lim_{n\to\infty}\inf b\left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}\varphi_n\right\rangle \\
= \; & \lim_{n\to\infty} b\left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}\varphi_n\right\rangle \\
= \; & b\left\langle C^{\frac{1}{2}}\varphi_n, C^{\frac{1}{2}}\varphi_n\right\rangle < \infty .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto C satisface la Hipótesis C, y por el teorema anterior $T^{\text{mín}}$ es conservativo. ■

Capítulo 5

Ejemplos de S. D. C.

Aqui se exponen algunos ejemplos en los que el correspondiente semigrupo dinámico cuántico minimal asociado resulta ser conservativo en algunos casos, un ejemplo en el cual el minimal es conservativo es el 5;1;4 y otro en donde no lo es, es el ejemplo 5;1;6 con ¯¤ < ¯ . Este último ejemplo muestra que la condición A A es necesaria pero no su…ciente para la conservatividad.

5.1. Ejemplos

Ejemplo 5.1.1 *([8]; pág. 30:) Sea h cualquier espacio de Hilbert complejo separable, y sea $P = \{P_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo de contracciones en h. La familia de operadores $T_t : B(h) \to B(h)$ definidos por*

$$T_t(a) = P_t^* a P_t$$

es un Semigrupo Dinámico Cuántico uniformemente continuo, cuyo generador infinitesimal es $\mathcal{L}(a) = G^* a + aG$ donde G es el generador de P:

Veamos que T_t es un SDC.

1) $T_0(a) = P_0^* a P_0 = a$

2) $T_{t+s}(a) = P_{t+s}^* a P_{t+s} = P_t^*(P_s^* a P_s)P_t = P_t^*(T_s a)P_t = T_t((T_s a))$
$= (T_t T_s)(a)$

3) *Por Kraus; Capítulo 1: Teorema 1;2;15, T_t resulta σ-débil continuo.*

4) *Ahora veamos que es σ-débil continuo en el tiempo t; para ello tomemos $\rho \in \tau(h)$ tal que*

$$\rho = \sum_{n=1} \alpha_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

donde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal de h, y los $\alpha_n \geq 0$ con la propiedad de que

$$\sum_{n=1} \alpha_n < \infty:$$

Lo que vamos a demostrar aquí, es $tr(\rho T_t a) \underset{t \to 0}{\to} tr(\rho a)$:

Es claro que,

$$tr(\rho T_t a) = \sum_{n=1} \alpha_n \langle T_t a e_n; e_n\rangle \qquad (\text{por la Prop.1.1.2}):$$

Pero, para todo $n \in N$;

$$\begin{aligned} |\alpha_n \langle T_t a e_n; e_n\rangle| &\leq \alpha_n \|T_t a\|_\infty \|e_n\|_h^2 \\ &= \alpha_n \|P_t^* a P_t\|_\infty \leq \alpha_n \|a\|_\infty \end{aligned}$$

y $\alpha_n \langle P_t a e_n; P_t e_n\rangle \underset{t \to 0}{\to} \alpha_n \langle a e_n; e_n\rangle$, porque P_t es uniformemente continuo. Entonces, tenemos que por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\sum_{n=1} \alpha_n \langle P_t a e_n; P_t e_n\rangle \underset{t \to 0}{\to} \sum_{n=1} \alpha_n \langle a e_n; e_n\rangle:$$

Pero como,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \alpha_n \langle a e_n; e_n\rangle &= \sum_{m=1} \left\langle \sum_{n=1} \alpha_n |e_n\rangle\langle e_n| a e_m; e_m \right\rangle \\ &= \sum_{m=1} \langle \rho a e_m; e_m\rangle = tr(\rho a) \end{aligned}$$

por lo tanto $tr(\rho T_t a) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} tr(\rho a)$.

De la continuidad uniforme de P_t, *se tiene que para todo* $a \in B(h)$ *con* $\|a\|_\infty = 1$;

$$
\begin{aligned}
\|T_t a - a\|_\infty &= \|P_t^* a P_t - a\|_\infty \\
&= \|P_t^* a P_t - aP_t + aP_t - a\|_\infty \\
&= \|(P_t^* a - a)P_t + a(P_t - I)\|_\infty \\
&\leq \|(P_t^* a - a)P_t\|_\infty + \|a(P_t - I)\|_\infty \\
&\leq \|(P_t^* - I)\|_\infty \|a\|_\infty \|P_t\|_\infty + \|a\|_\infty \|(P_t - I)\|_\infty \\
&\leq \|(P_t^* - I)\|_\infty + \|(P_t - I)\|_\infty \\
&= 2\|(P_t - I)\|_{B(h)}.
\end{aligned}
$$

Ahora $\|T_t - I\|_{B(B(h))} = \underset{a\in B(h);\ \|a\|=1}{Sup} \|T_t a - a\|_\infty \leq 2\|(P_t - I)\|_\infty$;
así se tiene que $\|T_t - I\|_{B(B(h))} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. De donde se deduce que T_t es uniformemente continuo para todo $t \geq 0$.
Ahora calculamos $\delta(a)$:

$$
\begin{aligned}
\delta(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{T_t(a) - a}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^* a P_t - a}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{P_t^* a P_t - aP_t + aP_t - a}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(P_t^* - I)aP_t + a(P_t - I)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{P_t^* - I}{t}\right) aP_t + \lim_{t\to 0} a\left(\frac{P_t - I}{t}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{P_t - I}{t}\right)^* aP_t + \lim_{t\to 0} a\left(\frac{P_t - I}{t}\right) \\
&= \left(\lim_{t\to 0} \frac{P_t - I}{t}\right)^* \lim_{t\to 0} aP_t + \lim_{t\to 0} a\left(\frac{P_t - I}{t}\right) \\
&= G^* a + aG.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\delta(a) = G^* a + aG$.

Ejemplo 5.1.2 ([9], *pág.*198) *Sea h espacio de Hilbert.*

$$T_t(a) = e^{-tiH} a e^{tiH}$$

con H autoadjunto, es decir $H = H^*$ y acotado en h.
Entonces T_t en $B(h)$ es un semigrupo dinámico cuántico con generador infinitesimal

$$\mathcal{L}(a) = -i[H,a].$$

Como se trata de un caso particular del ejemplo anterior, con $G = iH$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(a) &= G^*a + aG \\
&= (iH)^* + a(iH) \\
&= -iHa + aiH \\
&= -i[H,a].
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.3 ([8], *págs.*58 $-$ 59) *El Semigrupo asociado al proceso de nacimiento puro.*
Sea

$$h = l_2\left(\mathbb{N} \cup \{0\}\right) = \left\{ \{\psi_n\}_n \subset \mathbb{C} : \sum_n |\psi_n|^2 < \infty \right\}$$

y $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{C}$ tal que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ahora sean S y f operadores en h, definidos por

$$\begin{aligned}
D(f) &= \left\{ \xi \in h : \sum_n |\lambda_n|^2 |\xi_n|^2 < \infty \right\} \\
f(\xi) &= \sum_n \lambda_n \xi_n e_n = (\lambda_0\xi_0, \lambda_1\xi_1, \ldots) \\
S(\xi) &= S(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (0, \xi_0, \xi_1, \ldots), \\
G &= -\frac{|f|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tomando ahora $L_1 = S \circ f$, $L_\ell = 0$, operador cero para $\ell \geq 2$, claramente tenemos que

$$\langle G\psi, \psi \rangle + \langle \psi, G\psi \rangle + \langle L_1\psi, L_1\psi \rangle = 0$$

es decir se satisface la ecuación de la Hipótesis AA, además $D(G) \subset D(L_1)$ y para todo $\psi \in h$ se cumple que

$$\mathcal{L}(m(\xi)) = m(A(\xi))$$

con $\xi \in l_\infty(\mathbb{N} \cup \{0\})$; el álgebra de las sucesiones complejas acotadas, $m(\xi)$ es el operador de multiplicación por ξ; A es el generador infinitesimal del proceso de nacimiento clásico actuando de la siguiente manera,

$$A(\xi)_n = |\lambda_n|^2 (\xi_{n+1} - \xi_n).$$

Donde $D(A) = \left\{ \xi \in l_\infty(\mathbb{N} \cup \{0\}) : \left(|\lambda_n|^2 (\xi_{n+1} - \xi_n) \right) \in l_\infty(\mathbb{N} \cup \{0\}) \right\}.$

La forma cuadrática de Q_1 satisface

$$\langle e_m, Q_1(1)\, e_n \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ \frac{|\lambda_m|^2}{1+|\lambda_m|^2} \text{ si } n = m \end{cases},$$

y por inducción se demuestra que

$$\left\langle e_m, Q_1^k(1)\, e_m \right\rangle = \prod_{j=0} \frac{|\lambda_{m+j}|^2}{1+|\lambda_{m+j}|^2}.$$

De acuerdo con el Teorema 3.2.7, el S.D.C., correspondiente es conservativo si y sólo si $Q_1^k(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y esto sucede si y sólo si

$$\sum_{j=0} \frac{1}{|\lambda_{n+j}|^2} = \infty.$$

Ejemplo 5.1.4 ([8]*; pág.87)Un semigrupo dinámico cuántico minimal asociado al proceso de nacimiento y muerte con intensidades lineales.*

Sea

$$h = l_2\left(\mathbb{N} \cup \{0\}\right) = \left\{ \{\psi_n\} \subset \mathbb{C} : \sum_n |\psi_n|^2 < \infty \right\}$$

y N, a^+, a, los operadores de número, creación y aniquilación en h, definidos mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$\begin{aligned} a^+(e_j) &= \sqrt{j+1}\, e_{j+1} \\ a(e_j) &= \sqrt{j}\, e_{j-1} \\ N(e_j) &= j e_j = a^+ a(e_j); \end{aligned}$$

donde $\{e_j\}_j$ es una base ortonormal de h;sus respectivos dominios son:

$$\begin{aligned} D\left(a^+\right) &= \left\{ \psi \in h : \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\psi_n|^2 < \infty \right\} \\ D(a) &= \left\{ \psi \in h : \sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_{n-1}|^2 < \infty \right\} \\ D\left(a^+ a\right) &= D(N) = \left\{ \psi \in h : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |\psi_n|^2 < \infty \right\} \end{aligned}$$

donde $\{e_j\}_j$ es la base canónica de h.

Sea $\mathcal{L}(x)$ con $x \in B(h)$ igual a

$$-\frac{\lambda}{2}\left(aa^+x - 2axa^+ + xaa^+\right) - \frac{\mu}{2}\left(a^+ax - 2a^+xa + xa^+a\right) - i\omega\left[a^+a, x\right]$$

y dominio $D(N)$, $\lambda, \mu, \omega \in \mathbb{R}$; $\lambda, \mu \geq 0$. Si $\omega = 0$ entonces este ejemplo corresponde a una extensión cuántica del semigrupo asociado al proceso de nacimiento y muerte con intensidades lineales. Ahora para $\mathcal{L}(x)$ definimos los siguientes operadores G, L_1 y L_2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G &= -\frac{\lambda}{2}(N+1) - \frac{\mu}{2}N + i\omega N, \\ L_1 &= \sqrt{\lambda}\, a^+, \\ L_2 &= \sqrt{\mu}\, a, \end{aligned}$$

con

$$D(G) = \left\{ u \in h : \sum_n \left| \left(-\frac{\lambda}{2}(n+1) - \frac{\mu}{2}n + i\omega n \right) u_n \right|^2 < \infty \right\}$$

de esta forma podemos escribir a $\mathcal{L}(x)$ como

$$\mathcal{L}(x) = G^*x + xG + \textstyle\sum_{\ell=1}^{2} L_\ell^* x L_\ell .$$

Ahora tomemos

$$D_1 = \{ u \in h : \exists\, n_0 \text{ y } u_n = 0 \;\forall\, n > n_0 \}$$

claramente se tiene que D_1 es un subespacio denso de h. Pero como $D(L_1) = D(a^+)$, $D(L_2) = D(a)$ y $D(a^+) = D(a)$ se tiene que $D(G) \subset D(L_\ell)$ para $\ell = 1, 2$. Nos bastará trabajar todo este ejemplo sobre D_1, pues siendo este denso en h y esencia de a, a^+ y G, todo lo que se haga aquí con los operadores arriba mencionados lo mismo se seguirá valiendo sobre h. Vamos a demostrar que se satisface la ecuación de la Hipótesis AA, tomemos $e_j, e_k \in D_1$ básicos. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\langle Ge_j, e_k\rangle + \langle e_j, Ge_k\rangle + \langle L_1e_j, L_1e_k\rangle + \langle L_2e_j, L_2e_k\rangle \\
&= \left\langle \left(-\frac{\lambda}{2}(N+1) - \frac{\mu}{2}N + i\omega N \right) e_j, e_k \right\rangle + \left\langle e_j, \left(-\frac{\lambda}{2}(N+1) - \frac{\mu}{2}N + i\omega N \right) e_k \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sqrt{\lambda}\, a^+e_j, \sqrt{\lambda}\, a^+e_k \right\rangle + \langle \sqrt{\mu}\, ae_j, \sqrt{\mu}\, ae_k \rangle \\
&= \left\langle \left(-\frac{\lambda}{2}(j+1) - \frac{\mu}{2}j + i\omega j \right) e_j, e_k \right\rangle + \left\langle e_j, \left(-\frac{\lambda}{2}(k+1) - \frac{\mu}{2}k + i\omega k \right) e_k \right\rangle \\
&\quad + \lambda \left\langle \sqrt{j+1}\, e_{j+1}, \sqrt{k+1}\, e_{k+1} \right\rangle + \mu \left\langle \sqrt{j}\, e_{j-1}, \sqrt{k}\, e_{k-1} \right\rangle \\
&= \lambda\sqrt{j+1}\sqrt{k+1} + \mu\sqrt{j}\sqrt{k} - \lambda(j+1) - \mu j \\
&= 0, \text{ si } j = k.
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle Ge_j, e_k\rangle + \langle e_j, Ge_k\rangle + \sum_{\ell=1} \langle L_\ell e_j, L_\ell e_k\rangle = 0$$

el cual es la propia ecuación de la Hipótesis AA, y como cualquier otro elemento del espacio es combinación lineal de estos básicos entonces tenemos que esta ecuación es válida en todo el espacio. G genera al semigrupo de contracciones $\{P_t\}_{t\geq 0}$ dadas por la siguiente regla

$$P_t(\xi)_n = e^{\left(-\frac{\lambda}{2}(n+1)-\frac{\mu}{2}n+i\omega n\right)t}\xi_n$$

donde $\xi \in D(G)$. Si el lector no se convence de esto puede intentar calcular

$$\left\langle \xi, \frac{d}{dt}P_t\xi \right\rangle_h = \langle \xi, G\xi\rangle_h \text{ en } t = 0.$$

3) Ahora sea ϕ el operador en D_1 definido por

$$\phi = L_1^* L_1 + L_2^* L_2.$$

Vamos a demostrar que ϕ es esencialmente autoadjunto,
es decir $Ker(\phi^* \pm i) = \{0\}.$
Sea $\upsilon \in Ker(\phi^* + i)$ entonces

$$\langle \nu, (\phi^* + i)\upsilon\rangle = 0, \text{ para todo } \nu \in D_1,$$

en general para los elementos de la base resulta que $\langle e_j, (\phi^* + i)\upsilon\rangle = 0.$ Con lo cual se tiene también lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle (\phi - i)e_j, \upsilon\rangle &= 0\\
\langle ([L_1^* L_1 + L_2^* L_2] - i)e_j, \upsilon\rangle &= \langle (\lambda(j+1) + \mu j - i)e_j, \upsilon\rangle\\
&= \lambda(j+1) + \mu j - i\langle e_j, \upsilon\rangle\\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que υ es ortogonal al subespacio generado por $\{e_j\}_j$, pero esto quiere decir que $\upsilon = 0$, análogamente se hace para $Ker(\phi^* - i) = \{0\}.$
Por lo tanto tenemos que $Ker(\phi^* \pm i) = \{0\}.$
4) Ahora definimos el operador C en h, de la siguiente forma

$$D(C) = \left\{ u \in h : \sum_\ell \left(\ell^2 + 1\right)|u_\ell|^2 < \infty \right\}$$

con

$$C = cN$$

donde N es el operador de número y $c > 2(\lambda + \mu).$
Claramente se tiene que $C^* = C$ y además D_1 es una esencia para C, pues este

es multiplo del operador de número N.
Veremos que se satisface $\langle u, \phi u\rangle \leq \langle u, Cu\rangle$. Tómese $u \in D_1$

$$
\begin{aligned}
\langle u, \phi u\rangle &= \langle u, (L_1^* L_1 + L_2^* L_2) u\rangle \\
&= \left\langle u, \left(\lambda a a^+ + \mu a^+ a\right) u\right\rangle \\
&= \left\langle u, \left[\lambda\left(a^+ a + 1\right) + \mu a^+ a\right] u\right\rangle \\
&= \sum_k \bar{u}_k \left[\lambda (k+1) + \mu k\right] u_k \\
&= (\lambda + \mu) \sum_k k|u_k|^2 + \sum_k \lambda |u_k|^2 \\
&\leq (\lambda + \mu) \sum_k k|u_k|^2 + (\lambda + \mu) \sum_k k|u_k|^2 \\
&= 2(\lambda + \mu) \sum_k k|u_k|^2 \\
&\leq c \sum_k k|u_k|^2 = \langle u, Cu\rangle .
\end{aligned}
$$

Así hemos probado lo que se había planteado y por lo tanto el semigrupo dinámico cuántico minimal asociado a los operadores G, L_1 y L_2 es conservativo.

Ejemplo 5.1.5 ([7], *págs.* 361 − 367) *El Semigrupo asociado a la martingala de Azéma.*

Ahora en este ejemplo tomemos a $h = L^2(\mathbb{R}, dx)$ *y los* P_t, *para todo* $t \geq 0$, *en* $B(h)$ *definidos por*

$$
(P_t f)(x) = \left(1 + \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{-\frac{(1+\beta)}{4}} f\left(x\sqrt{\left(1 + \frac{2t}{\beta x^2}\right)}\right) \chi_{\tau_t}(x)
$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\beta \neq 0$,

$$
\tau_t = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq -\frac{2t}{\beta}\right\},
$$

con χ_{τ_t} *función indicadora de* τ_t. *Es fácil verificar a partir de* P_t, *que*

$$
(P_t^* f)(x) = \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{\frac{1-\beta}{4}} f\left(x\sqrt{\left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)}\right) \chi_{\tau_{-t}}(x).
$$

Sea D *el espacio de todos los* $f \in h$ *tales que son infinitamente diferenciables, con soportes compacto y que se anulan en una vecindad del* 0. *El operador* G *con dominio* D *dado por la siguiente expresión se extiende al generador* *infinitesimal del semigrupo de contracciones en h dado por P_t; [7]:*

$$
\begin{aligned}
(Gf)(x) &= \frac{f'(x)}{\beta x} - \frac{1+\beta}{2\beta^2 x^2} f(x) \\
&\quad y \\
(G^* f)(x) &= -\frac{f'(x)}{\beta x} + \frac{\beta - 1}{2\beta^2 x^2} f(x).
\end{aligned}
$$

Considérese el operador M en h definido por

$$
D(M) = \left\{ u \in h : \frac{u(x)}{x} \in h \right\} \quad y \quad (Mu)(x) = \frac{1}{\beta x} u(x).
$$

Sea S operador unitario en h dado por

$$
(Su)(x) = \frac{1}{\sqrt{|c|}} u\left(\frac{x}{c}\right);
$$

donde $c = 1 + \beta$ con $\beta \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ y $L_1 = S \circ M$, $L_\ell = 0$ el operador cero para $\ell \geq 2$.
Ahora sea ϖ en D, dado por

$$
\varpi(f)(x) = \left(\frac{1}{\beta^2 x^2} \right) \left(f(cx) - f(x) - \beta x f'(x) \right)
$$

con f acotada y derivable. Se cumple también que

$$
\begin{aligned}
\langle \nu(x), \varpi(1)\upsilon(x) \rangle &= \langle G^* \nu(x), \upsilon(x) \rangle + \langle (S \circ M)\nu(x), (S \circ M)\upsilon(x) \rangle \\
&\quad + \langle \nu(x), G\upsilon(x) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

por lo que se verifica la ecuación de la Hipótesis AA. *Ahora para estudiar la conservatividad del* S.D.C. *minimal asociado; calculemos los operadores Q_λ para todo $\lambda \geq 0$(* [12] *Lema* 2;1, *pág.*361 − 367)*; Q_1 viene dado por los siguientes casos,*
a) si $\beta < 0$

$$
(Q_1 f)(x) = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\beta x^2 \xi} f\left(cx\sqrt{1+\xi} \right) \right]
$$

donde ξ es una variable aleatoria positiva con función de distribución

$$
P(\xi \leq s) = 1 - (1+s)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.1}
$$

con $s \geq 0$; siendo E la función esperanza matemática.

b) Si $\beta > 0$

$$
(Q_1 f)(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\beta x^2 \xi} f\left(cx\sqrt{1-\xi} \right) \right]
$$

donde ξ *es un variable aleatoria con valores en* $(0;1)$ *y su función de distribución es dada por*

$$P(\xi \leq s) = 1 - (1 - s)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1. \qquad (5.2)$$

Por inducción se tiene también que para $\{\xi_i\}_i$ *sucesión de variables aleatorias independientes positivas e identicamente distribuidas en R, con distribución por* (5.1) *ó* (5.2) $Q_1^n(1)$*; para cada caso viene dado por*

a) $\beta < 0$

$$(Q_1^n 1)(x) = E\, e^{\frac{1}{2}\beta x^2 \{\xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k}(1+\xi_\ell)\}}.$$

b) $\beta > 0$

$$(Q_1^n 1)(x) = E\, e^{-\frac{1}{2}\beta x^2 \{\xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k}(1-\xi_\ell)\}}.$$

Ahora el paso crucial es la conservatividad del semigrupo dinámico cuántico minimal asociado a todas estas condiciones, para ello se hace uso de dos resultados importantes de [12] *Teorema 2.3.1 y Teorema* $2.3.2$*, págs.* $37 - 38$*. Analicemos el caso* $\beta < 0$*: Por lo tanto, sólo será necesario ver la convergencia o divergencia de la serie*

$$\sum_{k=1}^{n-1} c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k}(1+\xi_\ell)$$

el cual a la vez depende del parámetro c:

Si $|c| \geq 1$ *entonces* $|1+\beta| \geq 1$ *y por lo tanto* $\beta \leq -2$ *pues* $\beta < 0$*; y además se tiene que*

$$\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k} c^2(1+\xi_\ell) \geq \xi_{k+1}$$

pero siendo las variables ξ_{k+1} *positivas, independientes e idénticamente distribuidas se sigue que la serie formada por*

$$c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k}(1+\xi_\ell)$$

diverge con probabilidad 1, obteniéndose así que el semigrupo minimal es conservativo.

Si $|c| < 1$ *entonces* $-2 < \beta < 0$ *y aplicamos* [9] *Lema* $2.3.2$*; págs.* $38 - 39$*, que dice*

$$\sum_{k=1}^{n-1} c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^{k}(1+\xi_\ell) \text{ diverge si y sólo si } \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \prod_{\ell=1}^{k}(1+\xi_\ell) \text{ diverge.}$$

Tomando logaritmo natural y aplicando la Ley Fuerte de los Grandes Números a esta última serie obtenemos que

$$\frac{1}{k}\sum_{\ell=1} \ln c^2(1+\xi_\ell) \xrightarrow[k\to\infty]{} E\ln c^2(1+\xi_\ell) = \ln(1+\beta)^2 - 2\beta$$

con probabilidad 1, donde $\ln c^2(1+\xi_\ell)$ *tiene distribución exponencial con parámetro* $+\frac{1}{2}$.

Considerando la ecuación $(1+\beta)^2 e^{-2\beta} = 1$, *el cual tiene dos raices* $\beta = 0$ *y* $\beta^* = -1{,}278\ldots$ *la cual es la única raíz negativa, analizamos los casos siguientes:*

a) $\beta^* < \beta$; *tomemos* $\beta^* < -1 < \beta < 0$.

Derivando a $\ln(1+\beta)^2 - 2\beta$ *obtenemos que*

$$\frac{d}{d\beta}\left(\ln(1+\beta)^2 - 2\beta\right) = -\frac{2\beta}{(1+\beta)}.$$

Claramente para todo $\beta \in (-1, 0)$ *se tiene que* $\ln(1+\beta)^2 - 2\beta$ *es una función creciente. Pero como* $\ln(1+0)^2 - 2(0) = 0$ *entonces se tiene que* $\ln(1+\beta)^2 - 2\beta < 0$. *Por lo tanto se deduce que si* $k \to \infty$

$$\left(\prod_{\ell=1} c^2(1+\xi_\ell)\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{c\,d} e^{\ln(1+\beta)^2 - 2\beta} < 1$$

resultando por lo tanto que

$$\sum_{k=1} c^{2k} \prod_{\ell=1} (1+\xi_\ell)$$

es convergente debido al criterio de la raíz, con lo cual el semigrupo minimal no es conservativo. Esto demuestra que la Hipótesis AA es necesaria pero no es suficiente para la conservatividad.

b) Consideremos $\beta^* < \beta < -1$. Ahora resulta que para todo $\beta \in (\beta^*, -1)$, $\ln(1+\beta)^2 - 2\beta$ es una función decreciente y como $\ln(1+\beta^*)^2 - 2\beta^* = 0$, tenemos otra vez que $e^{\ln(1+\beta)^2 - 2\beta} < 1$ y así

$$\sum_{k=1} c^{2k} \prod_{\ell=1} (1+\xi_\ell)$$

es convergente.

c) Ahora tomemos $\beta < \beta^* < -1$. Tenemos que $\ln(1+\beta)^2 - 2\beta$ es una función decreciente, de donde se deduce que $e^{\ln(1+\beta)^2 - 2\beta} > 1.$ Lo cual implica que

$$\sum_{k=1} c^{2k} \prod_{\ell=1} (1+\xi_\ell)$$

es divergente, resultando así que el semigrupo minimal es conservativo.

d) El caso crítico lo tenemos cuando $\beta = \beta^*.$ Aquí se tiene que

$$\left(\prod_{\ell=1} (1+\xi_\ell) \right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$$

con probabilidad 1, lo cual en este caso el criterio de la raíz no nos proporciona información alguna sobre esta serie. Entonces consideremos la caminata aleatoria

$$\left\{ \sum_{\ell=1} \ln c^2 (1+\xi_\ell) : \; K = 1, 2, \ldots \right\}$$

donde $\ln c^2(1+\xi_\ell)$ son v.a.i.i.d, $\ell \geq 1$ y $\ln(1+\xi_\ell) \in L^1$ porque tiene distribución exponencial con parámetro $+\frac{1}{2}.$ Tenemos así lo siguiente

$$E \ln c^2(1+\xi_\ell) = \ln(1+\beta) + E\ln(1+\xi_\ell) = \ln(1+\beta^*) - 2\beta^* = 0;$$

entonces resulta que la caminata aleatoria es recurrente ([4] Teorema 3.38, pág.56). Así que la serie

$$\sum_{k=1} \prod_{\ell=1} c^2(1+\xi_\ell)$$

es divergente casi seguramente por la ley 0-1 de Hewitt-Savage ([4], pág.63). Resultando así que el semigrupo minimal es conservativo.

Ahora sólo nos resta ver qué pasa cuando $\beta > 0$. Tomando el respectivo $Q_1^n(1)$ y las distribuciones dada por (5.2) obtenemos que $-\ln(1-\xi_\ell)$ tiene distribución exponencial con parámetro $\frac{1}{2}.$ Ahora auxiliándonos de la función $f(\beta) = (1+\beta)e^{-\beta};$ claramente se tiene que $f(\beta) > 0$ para todo $\beta \geq 0$ y a la vez $f(\beta)$ es decreciente. Por lo tanto se tiene que $0 < f(\beta) \leq 1$ es decir, f alcanza su máximo en $\beta = 0$ y además

$$\ln f(\beta)^2 = \ln(1+\beta)^2 - 2\beta.$$

Denotemos por

$$\varphi_\ell = c^2(1-\xi_\ell);$$

entonces tenemos que

$$\left|c^{2k}\xi_{k+1}\prod_{\ell=1}(1-\xi_\ell)\right| = \left|\xi_{k+1}\prod_{\ell=1}c^2(1-\xi_\ell)\right| \le \prod_{\ell=1}c^2(1-\xi_\ell) = \prod_{\ell=1}\psi_\ell$$

con lo cual, al aplicar el criterio de la raíz, tomando logaritmo natural y aplicando la ley de los grandes números se tiene lo siguiente

$$\left(\prod_{\ell=1}\psi_\ell\right)^{\frac{1}{k}} \to e^{E\ln\psi_1} < 1$$

pues

$$\begin{aligned} E\ln\psi_\ell &= E\ln c^2(1-\xi_\ell) = \ln(1+\beta)^2 + E\ln(1-\xi_\ell) \\ &= \ln(1+\beta)^2 - 2\beta = \ln f^2(\beta) < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$\sum_{k=1}\prod_{\ell=1}\psi_\ell\,,$$

converge con probabilidad 1, y por consiguiente se tiene que

$$\sum_{k=1}c^{2k}\xi_{k+1}\prod_{\ell=1}(1-\xi_\ell)$$

converge con probabilidad 1, resultando así que el semigrupo minimal no es conservativo.

Bibliografía

[1] Bartle R. G., The Elements of Real Analysis. Second Edition 1976 (Jhon Willey & Sons).

[2] Berberian S. K., *Lectures in Functional Analysis and Operators Theory*,1998 (Springer-Verlag. New York).

[3] Bratteli O. and Robinson D.W., *Operators Algebras and Quantum Statistical Mechanics* 1. Texts and Monograph in Physics.

[4] Breiman Leo., *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company.1968.

[5] Chevotarev A. M., *Lectures on Quantum Probability*.Aportaciones Matemáticas, 2000 (SMM).

[6] Chevotarev A. M. and Fagnola F., *Su¢cient Conditions for Conservativity of Minimal Quantum Dynamical Semigroups*. J. Funct. Anal.118(1993).

Págs.131-135.

[7] Chevotarev A. M. and Fagnola F., *On Quantum Extensions of the Azéma Martingale Semigroup*, Sém. Prob. XXIII (1989) ; págs.67-68.

[8] Fagnola F., *Quantum Markov Semigroups and Quantum Flows*. Proyecciones Revista Matemática. 1991. N± 3.

[9] Fagnola F and Rebolledo R., *Stochastic Partial Di¤erential Equations and Aplications*, págs.197-207 (Marcel Decker, Inc.) 2002.

[10] García J. C., *Una clase de transformaciones completamente positivas no acotadas y conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra*. (Tesis doctoral).

[11] García J. C and Quezada Roberto., *Conditions for Nonconservativity in Quantum Dynamical Semigroups. Contemporary Mathematics.* 136; 161 ¡ 169; 2003:

[12] García J. C and Quezada Roberto., *Hille-Yosida estimate and nonconservativity of quantum dyanamical semigroups, to appear.*

[13] García J. C., *Divergence criteria for Series related to the Azéma-Emery Martingale process*, Mathematical Notes. Vol. 57, N±.4, 1995.

[14] Krauss K., *General States Changes in Quantum Theory*, 1971 (Ann. Phys. 64), págs. 311-335

[15] Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*,1966 (Springer-Verlag).

[16] Lamperti J., *Stochastic Processes*,1977 (Springer-Verlag. New York).

[17] McBride A. C., *Semigroups of Linear Operators*,1987 (Longman Scenti…c-Technical).

[18] Reed M. Simon., *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1, Functional Analysis, 1975 (Academic-Press).

[19] Parthasaraty K. R., *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*,1992 (Birhäuser-Verlag).

[20] Pazy A., *Semigroups of linear Operators and Aplication to Partial Di¤erential Equations*,1983 (Springer-Verlag. New York).

[21] Stinespring W. P., *Positive Functions on C*algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 1995, pág.211-216.*

[22] Sunders V. S., *An Invitations to von Newmann Algebras*, 1986 (Springer-Verlag).

[23] Vladimir Tkachuck., Topología General . U.A.M.I, Agosto 1999.

[24] Weidman J., *Linears Operators in Hilbert Spaces*, 1980 (Springer-Verlag. New York).

[25] Yosida K., *Functional Analysis*, 1980 (Springer).