

Hipersuperficies mínimas invariantes bajo el grupo de Lie $O(m) \times O(n)$

Mat. Victor Alberto Cruz Barrigueté

Director de tesis:

Dr. J. Guadalupe Reyes Victoria

15 de junio de 2006

*La matemática es la más grande
aventura del pensamiento.
Jesús Mosterín.*

A mi madre y hermana por el apoyo para seguir mi aventura. A la memoria de mi Padre y mis abuelitos Lucrecia y Gilberto. A los que me animaron en esta parte de la aventura, J. Guadalupe Reyes y Oscar Palmas. A mi familia por su apoyo para seguir en esta aventura. Muy en especial a Francisco Kreitler, Gabriela Corres, Josefina Zárate, Victor Cruz, Gloria Castillo, Maria Isabel Domínguez, Raúl Chin, Clara Barriguete, Cristina Barriguete, Lucia Cruz, Yolanda Herrera, Natalia Godina, Maria del Carmen González, Antonia González y Marcelina Barrita. A los profesores del Posgrado de la Universidad Autónoma Metropolitana que ayudaron en mi formación, en especial a los profesores, J. Guadalupe Reyes, Mario Pineda, Shirley Bromberg, Joaquín Delgado, Felipe Zaldivar y Gustavo Izquierdo. A los profesores cuyos consejos me animaron a seguir adelante, J. Guadalupe Reyes, Oscar Palmas, José Antonio Gómez, César Sousa, Leopoldo Morales e Isaul Pineda. A los consejos para poder presentar este trabajo de Oscar Palmas, Federico Sánchez, Laura Hidalgo, Felipe Zaldivar y Antoni Warwryńczyk. A los amigos cuyo apoyo no faltó al proseguir esta aventura; Jaime Lugo, Yuval Matarasso, Oziel Martínez, Rocío Meza, Alejandro Aguilar, Libertad Becerra, Ismael Velázquez, Rosa Maria Flores, Joel Vázquez, Ignacio González, Leonardo Faustinos, Edgar Campos, Israel Villagómez, Jazmín Ibarra, Martha Barrios, David González, Tizoc Villalobos, Claudia Reyes, Luis Ríos, Clarissa Zárate, Hugo Jiménez, Vicente Prieto y Leonel Gutiérrez. A mis compañeros de posgrado y a los alumnos que he confundido dando clases en la Facultad de Ciencias y UAM-Iztapalapa. Al CONACYT por el apoyo económico para poder realizar el posgrado y a la disposición de la coordinación del posgrado de la UAM. A todos los que han pasado por mi vida y me han enseñado algo valioso. Gracias.

Índice general

Prólogo	5
1. Elementos de Geometría Diferencial y Sistemas Dinámicos	7
1.1. Geometría Diferencial	7
1.2. Estabilidad de Hipersuperficies Inmersas y Completas	18
1.3. Sistemas Dinámicos	22
2. Hipersuperficies Invariantes bajo $O(m) \times O(n)$	29
2.1. Ecuación de Curvatura	29
2.2. El Campo Vectorial Asociado	32
2.3. Las Curvas de Perfil	45
2.4. Clasificación de las Hipersuperficies Mínimas Invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ en \mathbb{R}^{m+n}	49
2.5. Estabilidad de Hipersuperficies Mínimas Invariantes bajo $O(m) \times O(n)$. .	51
Conclusiones	57
Bibliografía	59
Índice Alfabético	61

Prólogo

El estudio de las hipersuperficies en espacios Euclidianos y, particularmente el de las superficies mínimas, tiene una larga historia. Su importancia en esta área radica en la construcción de ejemplos que proveen pruebas para conjeturas y teoremas sobre ciertas características que tienen tales objetos. Dentro de tales características es de principal importancia observar si son encajadas, completas y estables (véase el trabajo de Hsiang y Lawson [1]).

De manera intuitiva, una hipersuperficie está encajada en \mathbb{R}^N si no se autointersecta; es completa si sus geodésicas están definidas para cualquier valor del parámetro t y por último estables si las variaciones normales de su encaje o inmersión que preservan volumen cumplen que la segunda variación de la funcional del área es mayor o igual a cero.

En 1914 Sergei Bernstein probó el siguiente resultado.

Teorema (Bernstein). Una superficie mínima completa y estable en un espacio euclidiano de dimensión 3 es un plano.

La generalización de dicho resultado llevó a la formulación de la siguiente pregunta: *¿La única hipersuperficie mínima M^n inmersa y completa en \mathbb{R}^{n+1} es un hiperplano?*

La respuesta a dicha pregunta fue dada por De Giorgi en [2] para el caso $n = 3$, por Almgren en [3] para $n = 4$ y por Simons en [4] para $n \leq 7$, quienes confirmaron que dicha hipersuperficie es efectivamente un hiperplano. Finalmente Bombieri, de Giorgi y Giusti probaron en [5] que para $n \geq 8$ existen hipersuperficies mínimas completas que no son hiperplanos.

Las hipersuperficies con curvatura media constante G -invariantes, es decir, invariantes bajo la acción de algún subgrupo de isometrías G , han demostrado ser manejables y útiles. El trabajo seminal de Delauney [6] estudia las superficies rotacionales con curvatura media constante, es decir, las que son invariantes bajo el grupo de Lie $O(2)$ y el trabajo [7] estudia la clasificación de hipersuperficies invariantes bajo $O(n)$ en una forma espacial.

Generalizando la idea de Delauney, se tenía que clasificar a las acciones de subgrupos de isometrías de un espacio euclidiano y estudiar la codimensión de las órbitas. La dimensión mayor de tales órbitas, se entiende como la cohomogeneidad del subgrupo que actúa

en tal espacio euclidiano. La clasificación de subgrupos de isometrías de cohomogenidad baja fue establecida por Hsiang y Lawson en [1]. El siguiente paso fue el estudio de hipersuperficies mínimas con curvatura media constante las cuales son invariantes bajo el grupo de Lie $O(m) \times O(n)$. Por ejemplo, en Hsiang *et al* [8] se construye una familia de tales hipersuperficies para el caso $m = n$, inmersas en \mathbb{R}^{2n+1} .

Técnicas desarrolladas por Bombieri-Giusti-de Giorgi en [5] demuestran la existencia de hipersuperficies completas en \mathbb{R}^{m+n} las cuales son invariantes bajo el grupo $O(m) \times O(n)$.

Utilizando estas técnicas, Alencar en [9] analiza tales hipersuperficies en el caso $m = n$ y da una clasificación para $m \geq 3$. Estas ideas han sido utilizadas para estudiar el caso con curvatura escalar nula en [9] y [10].

El resultado principal en este trabajo, extiende los resultados de Alencar [9] y se enuncia de la siguiente manera.

Teorema. Existen hipersuperficies mínimas estables, completas y encajadas en \mathbb{R}^{m+n} para $m + n \geq 8$ con $m, n \geq 3$, que no son homeomorfas a \mathbb{R}^{m+n-1} .

Tal resultado fue obtenido por Alencar, Barros, Palmas, Reyes y Santos en [11] para m, n arbitrarios y presenta nuevos ejemplos para responder la pregunta de la generalización del teorema de Bernstein.

Esta tesis pretende mostrar los elementos necesarios para poder entender el trabajo [11] de manera sencilla. También puede considerarse una introducción al estudio de hipersuperficies con curvatura media constante donde pueden estudiarse características importantes antes mencionadas y mediante una inmersión sencilla.

Capítulo 1

Elementos de Geometría Diferencial y Sistemas Dinámicos

En este capítulo mencionaremos los resultados referentes a la Geometría Diferencial y a los Sistemas Dinámicos que serán útiles para el desarrollo de este trabajo. Debido al corto espacio en el documento, el lector será referido a textos y artículos para la mayoría de las pruebas.

En este trabajo entenderemos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es una *región* si es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n .

Denotamos por $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase continuamente diferenciables o de clase \mathcal{C}^1 en $U \subset \mathbb{R}^n$.

Dada una función vectorial (curva diferenciable) $x: I = [a, b] \rightarrow U$, denotamos su derivada como $\frac{dx}{dt}(t)$ o en ocasiones como \dot{x} o x' si no existe confusión.

1.1. Geometría Diferencial

En esta sección definiremos algunos objetos de la geometría diferencial que utilizaremos a lo largo del trabajo. El lector interesado en profundizar en estos tópicos puede consultar a los textos [12], [13], [14] y [15].

Definición 1. Un espacio topológico M se denomina *de Hausdorff* si dados dos puntos distintos, existen vecindades ajenas que los separan.

Definición 2. Sea M un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que M es una *variedad topológica n -dimensional* si para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta U de p en M que es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Si $\phi: U \rightarrow \Omega$ es el homeomorfismo, siendo Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces la pareja (U, ϕ) es llamada una *carta*. Al

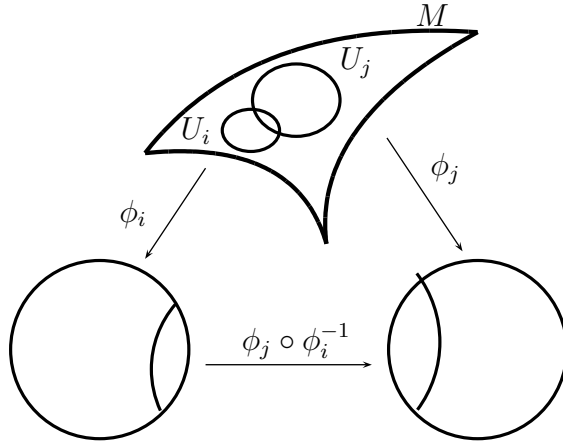


Figura 1.1: Variedad

conjunto de cartas, $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ tal que $M = \cup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ donde \mathcal{I} es un conjunto de índices, se le llama un *atlas* para M .

Con base en el concepto de *variedad*, se tiene la siguiente definición.

Definición 3. A un subconjunto $N \subset M$ que tiene una estructura de variedad topológica con la topología heredada de M se le denomina *subvariedad de M* . En el caso que la dimensión de la subvariedad N sea de dimensión n satisfaciendo que $m - n = 1$ y siendo m la dimensión de M , diremos que N es una *hipersuperficie de M* . Es decir, la *codimensión de N en M* es 1.

Definición 4. Decimos que M es una *variedad diferenciable*, si para toda pareja de cartas (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$ se tiene que la aplicación $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual (véase, por ejemplo, [15]).

De la misma manera podemos considerar *subvariedades diferenciables e hipersuperficies diferenciables*.

En nuestro contexto, entenderemos una *variedad*, *subvariedad* e *hipersuperficie* como *variedad diferenciable*, *subvariedad diferenciable* e *hipersuperficie diferenciable* respectivamente.

Definición 5. Una aplicación $f: M \rightarrow N$ entre variedades es llamada *de clase C^k en $x_0 \in M$* , si para cada pareja de cartas (U, ϕ) alrededor de x_0 y (V, ψ) alrededor de $f(x_0) \in V$, $f(x) \in V$ se cumple que $(\psi \circ f \circ \phi^{-1}): \Omega \rightarrow \Lambda$ es una aplicación ordinaria de clase C^k

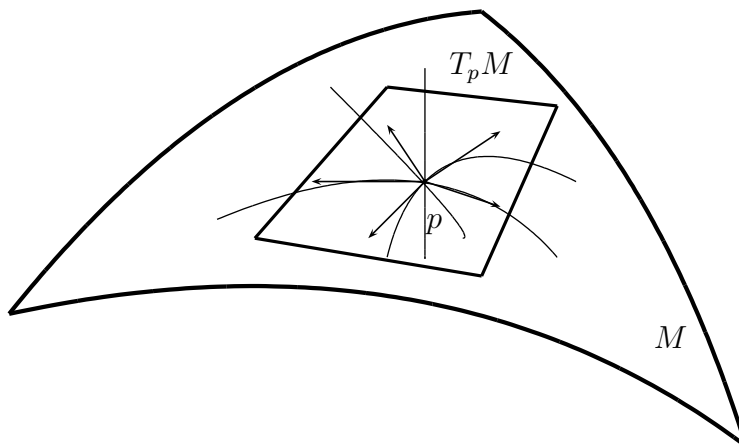


Figura 1.2: Espacio tangente

entre los dominios euclidianos $\Omega = \phi(U)$ y $\Lambda = \psi(V)$. Si f es de clase \mathcal{C}^k en cada $x_0 \in M$, se dice que f es de clase \mathcal{C}^k . Denotamos por $\mathcal{C}^k(M, N)$ es espacio de todas la aplicaciones \mathcal{C}^k de M a N .

Definición 6. Una aplicación $f: M \rightarrow N$ se dice *difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k* , si es una aplicación biyectiva de clase \mathcal{C}^k y $f^{-1}: N \rightarrow M$ es también de clase \mathcal{C}^k . Dos variedades se dicen *difeomorfas* si existe un difeomorfismo entre ellas.

Naturalmente, si M y N son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.

Definición 7. Sea M una variedad diferenciable.

1. Decimos que una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es *diferenciable* si para alguna carta local (U_i, ϕ_i) tal que $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset U_i$, la composición $\phi_i \circ \alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.
2. Decimos que dos curvas α y β son *equivalentemente tangentes en el punto $p \in M$* si $\alpha(0) = p = \beta(0)$ y $(\phi_i \circ \alpha)'(0) = (\phi_i \circ \beta)'(0)$.
3. Definimos el *vector tangente de α en $\alpha(0) = p$* como la clase de curvas diferenciables $\beta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\beta(0) = p$ y $\frac{d}{dt}(\phi_i \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}(\phi_i \circ \alpha)(0)$.

Es fácil ver que la definición de vector tangente no depende de la carta escogida (U_i, ϕ_i) .

Definición 8. El *espacio tangente a M en p* , denotado por $T_p M$, es el conjunto de vectores tangentes de todas las curvas diferenciables que pasan por p .

Naturalmente $T_p M$ es isomorfo al espacio lineal \mathbb{R}^n donde $\dim M = n$.

Sean M y N variedades diferenciables y $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable. Consideramos la pareja (M, f) como la variedad M y la aplicación $f: M \rightarrow N$.

La *diferencial de una aplicación entre dos variedades* M y N , $f: M \rightarrow N$ en cada punto $p \in M$ es la transformación lineal $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ de tal forma que aplica vectores tangentes de T_pM en vectores tangentes de $T_{f(p)}N$ de la siguiente manera. Consideremos $v \in T_pM$ y tomemos una curva diferenciable representante $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ en la carta (U_i, ϕ_i) con $p \in U_i$. Consideremos la carta (V_j, ψ_j) en N tal que $f(U_i) \subset V_j$ y $f(p) \in V_j$. Observemos que la aplicación $(f \circ \alpha): (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ es una curva diferenciable pues la aplicación $(\psi_j \circ f \circ \alpha): (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \psi_j(V_j)$ lo es y además $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Entonces para la curva $(\phi \circ \alpha)$ en $\phi(U_i)$ consideramos la aplicación $(\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1}): \phi_i(U_i) \rightarrow \psi_j(V_j)$. Así, la transformación lineal a $(\phi \circ \alpha)'(0)$ le asocia $D(\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1})(\phi(p))((\phi \circ \alpha)'(0))$ donde D denota la derivada usual. Consideramos la clase de equivalencia de las curvas $(f \circ \beta)$ en N tales que $(f \circ \alpha)(0) = f(p) = (f \circ \beta)(0)$ y $D(\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1})(\phi(p))((\phi \circ \alpha)'(0)) = D(\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1})(\beta(p))((\phi \circ \beta)'(0))$. De esta manera tenemos que la aplicación $df: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es tal que si $v \in T_pM$, entonces $df(v) = df[\alpha]_p = [f \circ \alpha]_{f(p)}$, donde $[\]_q$ denota la clase correspondiente en los espacios dados.

Definición 9. Para $p \in M$, el *espacio tangente* $T_p f$ y el *espacio normal* $N_p f$ asociado a la pareja (M, f) son los subespacios lineales de \mathbb{R}^n definidos por

$$T_p f := \text{Im } df_p \quad \text{y} \quad N_p f := [\text{Im } df_p]^\perp$$

donde \perp denota el complemento ortogonal en \mathbb{R}^n con su producto escalar ordinario.

Definición 10. Decimos que la pareja (M, f) es una *inmersión en la variedad* N si la aplicación $df_p: T_pM \rightarrow T_p f$ es una transformación lineal inyectiva para toda $p \in M$.

En el caso que M es una subvariedad de \mathbb{R}^n y f es la inclusión en $N = \mathbb{R}^n$, la aplicación df_p es la identificación usual de T_pM con un subespacio lineal de \mathbb{R}^n . En este caso escribiremos T_pM y N_pM en lugar de $T_p f$ y $N_p f$ respectivamente.

En lo consecutivo consideraremos M como una variedad y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ como una *inmersión* denotada por (M, f) .

Ejemplo 1.1. Sea $S_r(m) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\|^2 = r^2\}$, la esfera de dimensión m de radio r en \mathbb{R}^{m+1} . Tenemos que $S_r(m)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^{m+1} bajo su inclusión, $T_p S_r(m) = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : \langle x, y \rangle = 0\}$ y $N_x M \cong \mathbb{R}$.

Definición 11. Una *inmersión* (M, f) que es inyectiva y propia¹ se le llama *encaje*.

¹Sean X y Y espacios topológicos. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es *propia* si la imagen inversa de todo conjunto compacto en Y es compacto en X .

Otro concepto que utilizaremos es el de curva parametrizada por un parámetro natural y que definimos a continuación.

Definición 12. Sea (M, f) una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^n . Una curva $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ es *regular* si es continua y $(f \circ \gamma)'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Definición 13. Consideremos $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva suave diferenciable a pedazos, es decir, existe una división del intervalo $a = t_0 < \dots < t_n = b$ de tal forma que la restricción $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es suave para $1 < i < n$. Definimos la *longitud de arco o longitud de la curva* γ denotada por $L(\gamma)$ como

$$L(\gamma) = \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt.$$

Si $\|(f \circ \gamma)'(t)\| = 1$ decimos que la curva está parametrizada por *longitud de arco o parámetro natural*.

Definición 14. La *Primera Forma Fundamental o métrica Riemanniana* de (M, f) en un punto $p \in M$ denotada por $G_p = (g_{ij})_p$, es el producto interior sobre $T_p M$ definido mediante la igualdad

$$G_p(v, w) = \langle df(p) \cdot v, df(p) \cdot w \rangle$$

para $v, w \in T_p M$.

Si consideramos una carta coordenada $\phi: U \rightarrow V$ de (M, f) , entonces para todo punto $p \in U$ el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$$

es una base para $T_p M$ y los coeficientes de la matriz $g_{ij} = g_{ij}(p)$ de la primera forma fundamental con respecto a esta base están dados por

$$g_{ij}(p) = \left\langle df(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p), df(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle. \quad (1.1)$$

En consecuencia los coeficientes g_{ij} son funciones suaves en U .

Definición 15. A una variedad diferenciable M provista de una métrica Riemanniana se le llama *variedad Riemanniana*.

Para definir la *Segunda Forma Fundamental* nos restringiremos al caso de hipersuperficies inmersas en \mathbb{R}^n . Sean M una variedad de dimensión n y $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión. Para cada $p \in M$ existen precisamente dos vectores normales unitarios en $N_p f$. Elegimos uno de estos vectores al cual denotaremos por η .

Definición 16. La *Segunda Forma Fundamental de una inmersión* (M, f) en p con respecto a η es la matriz, denotada por B , que tiene por entradas

$$b_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p), \eta \right\rangle. \quad (1.2)$$

En adelante nos referiremos por B a la *Segunda Forma Fundamental de (M, f) en p con respecto a η* . Para más detalles se sugiere consultar [16].

Definición 17. Las *curvaturas principales de una variedad M en un punto p* son los valores propios de la ecuación matricial $B - \lambda G = 0$.

Tales valores propios se calculan mediante la ecuación polinomial

$$\det(B - \lambda G) = 0,$$

es decir, son las raíces de este polinomio.

Definición 18. Definimos la *curvatura media de M en p* denotada por $H_1(p)$ como el promedio de las curvaturas principales, es decir,

$$nH_1(p) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$$

donde $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$ son las curvaturas principales.

Definición 19. Una inmersión es *mínima* si para cada $p \in M$ se tiene que $H_1(p) = 0$. En tal caso, M se dice una *hipersuperficie mínima*. (Para más detalles se sugiere consultar [1] o [16]).

Definición 20. Una curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow M$ es una *geodésica en $t_0 \in I$* si la derivada covariante² $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ en t_0 . Si γ es geodésica para todo $t \in I$, decimos que γ es una *geodésica*.

Definición 21. Una variedad Riemanniana M es *completa* si para todo $p \in M$ las geodésicas $\gamma(t)$ que inician en p están definidas para todos los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

Definición 22. Una variedad G se denomina *grupo de Lie* si tiene estructura de grupo y las aplicaciones que definen la estructura de grupo son diferenciables (suaves). En otras palabras, las aplicaciones $\varphi: G \rightarrow G$ tal que $\varphi(g) = g^{-1}$ y $\psi: G \times G \rightarrow G$ dada por $\psi(g, h) = gh$, son suaves.

Un ejemplo de un grupo de Lie es el grupo *ortogonal real a dimensión n* , denotado por $O(n)$ y definido por

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = 1\}.$$

En [13],[14] y [15] pueden verse propiedades de este grupo de Lie.

²Véase [13] ó [16].

Definición 23. Sean M una variedad y G un grupo de Lie. Una *acción izquierda de G en M* o una *G -acción izquierda en M* es una aplicación diferenciable $\phi: G \times M \rightarrow M$ tal que

- $\phi(e, x) = x$ para toda $x \in M$, siendo e el elemento neutro de G .
- $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ para toda $x \in M$ y cualesquiera $g, h \in G$.

De manera análoga se define la *acción derecha*. En adelante, entenderemos por *acción* a una *acción izquierda*.

Denotaremos a $\phi(g, x)$ por gx .

Definición 24. Decimos que G *actúa transitivamente en M* si para cualesquiera $x_1, x_2 \in M$ existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$.

Definición 25. Una variedad M en la cual está definida una acción transitiva de un grupo G , se denomina *espacio homogéneo de G* .

Sean, M una variedad y G un grupo de Lie que actúa en M . Consideremos $x \in M$ y $g \in G$. Entonces tenemos los siguientes conjuntos importantes:

$$\begin{aligned} M_g &= \{x \in M : gx = x\} \subset M, \\ G_x &= \{g \in G : gx = x\} \subset G. \end{aligned}$$

El primer conjunto no es más que el conjunto de puntos fijos para la transformación dada $g \in G$.

Lema 1. El conjunto G_x es un subgrupo de G llamado *el subgrupo de isotropía o estabilizador del punto x* .

Proposición 1. Para todo punto $x \in M$ el grupo de isotropía es un subconjunto cerrado de G . Más aún, si M es conexo por trayectorias, entonces para $x \neq y$ en M se tiene que $G(x) \cong G(y)$.

Teorema 1. Sean, M una variedad diferenciable y G un grupo que actúa en M . Para los puntos $x_1, x_2 \in M$, diremos que $x_1 \sim x_2$, si y sólo si existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$.

Es fácil ver que la relación \sim definida es de equivalencia y por tanto divide a M en subconjuntos ajenos.

Definición 26. A cada clase de equivalencia en M le llamaremos una *órbita bajo la acción del grupo G* . Si $x \in M$, la clase que contiene a x es la *órbita de x* . Denotamos la órbita como $G(x)$.

De esta manera, la variedad queda dividida en las clases de equivalencia que son las órbitas obtenidas bajo G .

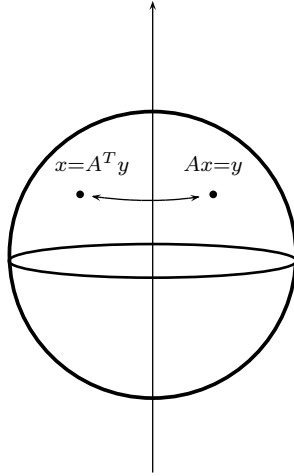


Figura 1.3: Transitividad del grupo $O(n)$

Proposición 2. Para cada $x \in M$ existe un homeomorfismo

$$\beta: G/G_x \rightarrow G(x).$$

En otras palabras G/G_x es homeomorfo a $G(x)$.

Para ver más detalles sobre acciones de grupos, orbitas y sistemas dinámicos se recomienda consultar [17] y [18].

Sea M una variedad diferenciable con una acción de un grupo de Lie compacto G . Dada una G -acción, ésta nos da una descomposición de M en órbitas que son espacios homogéneos de G con ciertas características. Tal descomposición se le llama *la estructura de la órbita de la G -acción* dada y el espacio de descomposición es llamado *el espacio de órbitas* M/G . (Para mas detalles se sugiere consultar [1]).

Ejemplo 1.2. Si $G = \mathbb{R}$ y $M = \mathbb{R}^n$, una acción $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada *flujo en M* .

Ejemplo 1.3. Consideremos $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y la acción $: O(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por

$$A \cdot x = Ax.$$

Claramente, la acción es transitiva debido a que dados x y y en \mathbb{S}^{n-1} existe una rotación (una matriz A en $O(n)$) tal que lleva a x en y y recíprocamente (véase la figura 1.3).

Si consideramos el polo norte $x = (1, 0, \dots, 0)$ de la esfera \mathbb{S}^{n-1} , el grupo de isotropía de x está formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde $B \in O(n-1)$. Por tanto se tiene que $S^{n-1} = O(n)/O(n-1)$. También se tiene que el grupo $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ es un grupo de Lie que actúa transitivamente en la esfera S^{n-1} y su grupo de isotropía es $SO(n-1)$. Por tanto, tenemos que $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$. Para más detalles se sugiere consultar [14].

Ejemplo 1.4. El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ se construye tomando las rectas que pasan por el origen en el espacio \mathbb{R}^{n+1} (véase [14]). El grupo de Lie $O(n+1)$ actúa transitivamente sobre el espacio $\mathbb{R}P^n$. Consideremos la recta con vector director $(1, 0, \dots, 0)$. Las transformaciones que dejan fija la recta anterior, tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde $B \in O(n)$. De esta manera el grupo de isotropía de la clase en $\mathbb{R}P^n$ de éste vector es isomorfo a $O(1) \times O(n)$ y por tanto se tiene que

$$\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(1) \times O(n).$$

Definición 27. Consideremos $\Phi: G \times M \rightarrow M$ y $\Psi: H \times N \rightarrow N$ las acciones de los grupos G y H en M y N respectivamente. Definimos el *producto directo de las dos acciones* $\Phi \otimes \Psi: ((G \times H), (M \times N)) \rightarrow (M, N)$ mediante la regla

$$\Phi \otimes \Psi((g, h), (p, q)) = (\Phi(g, p), \Psi(h, q)).$$

Cuando $G = H$ la acción se llama *diagonal*.

Ejemplo 1.5. Sea $G = O(m) \times O(n)$ el producto cartesiano de los grupos ortogonales reales a dimensión m y n respectivamente. Entonces G actúa diagonalmente en \mathbb{R}^{m+n} de la forma $O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, mediante la regla $(A, B) \cdot (x, y) = (Ax, By)$.

Un tipo de hipersuperficies importantes en \mathbb{R}^3 son las de superficies de revolución, las cuales se obtienen de hacer actuar un grupo de rotaciones en un espacio Euclidiano.

Ejemplo 1.6 (Superficies de revolución). Sean $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ (con $t \in I$) una curva regular en el plano x, z . Definimos una inmersión $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante

$$f(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi, x(t) \sin \varphi, z(t)), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

y se llama la *superficie de revolución* $S \subset \mathbb{R}^3$ obtenida al hacer girar la curva γ alrededor del eje z . Las curvas tales que φ es constante se les llaman *curvas de perfil* o *meridianos de S* y a las curvas tales que t es constante se les llaman *paralelos de S* . Claramente, los paralelos de la superficie S se obtienen de hacer rotar los puntos $(x(t), y(t))$ alrededor del eje z , mediante el ángulo φ . En otras palabras, esto se realiza mediante la acción del grupo $O(2)$ en cada punto al hacer girar alrededor del eje vertical como se muestra en la figura.

Este concepto puede extenderse a dimensiones mayores.

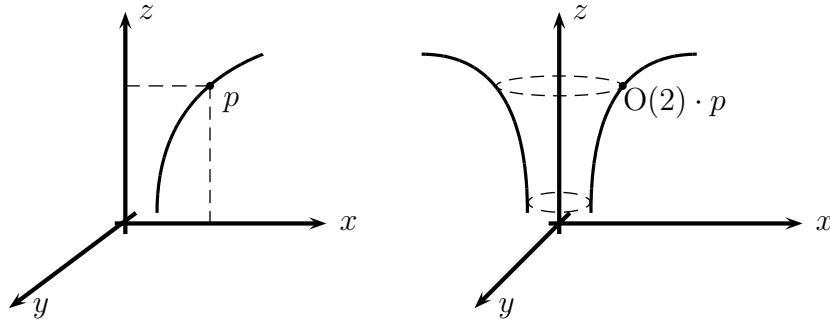


Figura 1.4: Superficies de Revolución

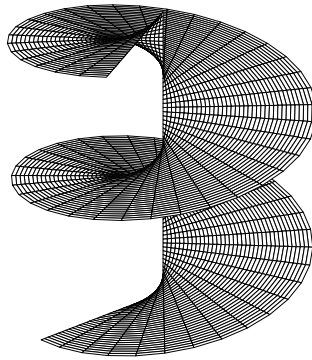


Figura 1.5: Helicoide

Definición 28. Sea γ una curva en el plano. Decimos que γ es una *curva de perfil* de una hipersuperficie S en \mathbb{R}^N si genera a S bajo la acción de un subgrupo de isometrías G de \mathbb{R}^N .

Ejemplo 1.7. Consideremos una curva regular $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in I$ en el plano x, y y un número real $a > 0$. Consideremos la siguiente superficie de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 determinada por la inmersión:

$$f(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi - y(t) \operatorname{sen} \varphi, x(t) \operatorname{sen} \varphi + y(t) \cos \varphi, a\varphi).$$

La curva γ es una *curva de perfil* de esta superficie. Un ejemplo particular de este tipo de superficies, es cuando se considera $\gamma(t) = (t, 0)$ y $a = 1$. En este caso tenemos la superficie llamada *helicoide* (véase la Figura 1.5).

Derivando parcialmente a la inmersión f tenemos

$$\begin{aligned} f_t &= (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, 0) \\ f_\varphi &= (-x \sin \varphi - y \cos \varphi, x \cos \varphi - y \sin \varphi, a) \end{aligned}$$

Observemos que las funciones vectoriales anteriores son linealmente independientes pues $f_t \neq 0$ y $a > 0$. Los coeficientes de la matriz de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} g_{tt} &= (x')^2 + (y')^2 > 0, \\ g_{t\varphi} &= g_{\varphi t} = xy' - x'y, \\ g_{\varphi\varphi} &= x^2 + y^2 + a^2. \end{aligned}$$

Notamos la independencia de la primera forma fundamental (métrica) con respecto al parámetro φ .

Con base a lo anterior, consideremos la nueva inmersión en \mathbb{R}^3 definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t, \varphi + \alpha(t)).$$

Un cálculo directo prueba que las derivadas parciales de \tilde{f} están dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(t, \varphi) &= f_t(t, \varphi + \alpha) + \alpha' f_\varphi(t, \varphi + \alpha), \\ \tilde{f}_\varphi(t, \varphi) &= f_\varphi(t, \varphi + \alpha), \end{aligned}$$

y consecuentemente, los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{tt} &= (x')^2 + (y')^2 + 2\alpha'(xy' - x'y) + (\alpha')^2(x^2 + y^2 + a^2), \\ \tilde{g}_{t\varphi} &= \tilde{g}_{\varphi t} = xy' - x'y + \alpha'(x^2 + y^2 + a^2), \\ \tilde{g}_{\varphi\varphi} &= x^2 + y^2 + a^2. \end{aligned}$$

Supongamos que \tilde{f} tiene primera forma fundamental como la de una superficie de revolución, entonces $\tilde{g}_{t\varphi} = \tilde{g}_{\varphi t} = 0$ y $\tilde{g}_{\varphi\varphi} = r^2$ donde la curva de perfil de la superficie de revolución está dada por $\gamma = (r, h)$. Entonces

$$\alpha' = \frac{x'y - xy'}{r^2}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$. Así,

$$\frac{xx' + yy'}{r^2} + (h')^2 = (r')^2 + (h')^2 = \tilde{g}_{tt} = (x')^2 + (y')^2 - \frac{(xy' - x'y)^2}{r^2},$$

de donde obtenemos

$$h' = \pm \frac{a}{r} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

y por tanto

$$h = \pm \int \frac{a}{r} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Si la curva de perfil está parametrizada por longitud de arco tenemos

$$h = \pm \int \frac{a}{r} dt.$$

Cuando elegimos $\alpha = 0$ tenemos que $r(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ y $h(t) = \operatorname{arcsenh} t$ y entonces $t = \sinh h$ y $r = \cosh h$, lo cual corresponde a una superficie de revolución llamada *catenoide* (véase la Figura 1.6).

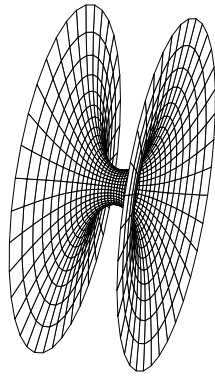


Figura 1.6: Catenoide

1.2. Estabilidad de Hipersuperficies Inmersas y Completas

En toda esta sección daremos los resultados importantes para el estudio de la estabilidad de hipersuperficies inmersas de curvatura constante. Para más detalles se sugiere consultar el trabajo de Do Carmo y Barbosa [19].

Sea (M, ϕ) una inmersión de una variedad orientable de dimensión n en \mathbb{R}^{n+1} . Consideremos $D \subset M$ un dominio relativamente compacto con frontera ∂D suave.

Denotemos por

$$A_D(\phi) = \int_D dM$$

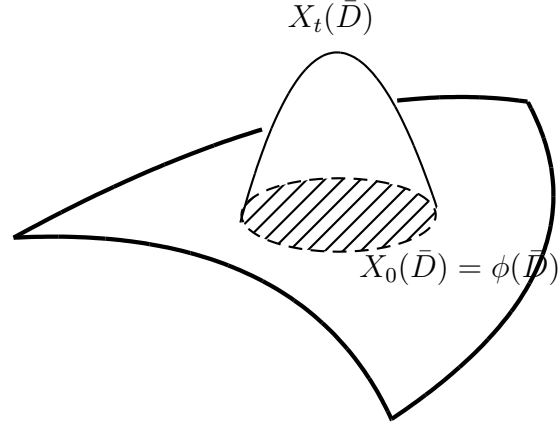


Figura 1.7: Variación que preserva volumen y fija la frontera

el n -área de D en la métrica inducida en M y por

$$V_D(\phi) = \frac{1}{n+1} \int_D \langle \phi, N \rangle dM$$

el volumen de D en ϕ , donde N es un campo vectorial normal unitario a lo largo de la inmersión (M, ϕ) , dM es el elemento de n -área en la métrica inducida y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en \mathbb{R}^{n+1} .

Definición 29. Una *variación de la inmersión* (D, ϕ) es una familia de funciones diferenciables $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $X_0 = \phi$ y para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ la aplicación (D, X_t) es una inmersión.

Sean $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ una *variación de D* y $A_D(t) := A_D(X_t)$ y $V_D(t) := V_D(X_t)$ el n -área y n -volumen correspondientes a la variación.

Definición 30. Decimos que una variación de la inmersión (D, ϕ) *preserva volumen* si $V_D(t) = V_D(0)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ y decimos que *fija la frontera* si $X_t(p) = X_0(p)$ para toda $p \in \partial D$ y todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ (véase la figura 1.7).

Denotamos por

$$\xi(p) = \left. \frac{dX_t(p)}{dt} \right|_{t=0}, \quad p \in \bar{D}$$

al vector de variación de X_t en $t = 0$.

Definición 31. Una variación de (M, ϕ) es *normal* si para todo $p \in \bar{D}$ se tiene que $\xi(p) = f(p)N(p)$ donde $f(p)$ es un número real.

Dada una variación $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de (M, ϕ) que fije la frontera, es bien sabido que

$$A'_D(0) = - \int_D nHf dM$$

y

$$V'_D(0) = \int_D f dM$$

donde la $(')$ denota la derivada con respecto de t , H es la curvatura media de (M, ϕ) y fN es la componente normal del vector de variación.

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ podemos definir el área como $A(t) = A(X_t)$ y el volumen como $V(t) = V(X_t)$. Veremos más adelante que las hipersuperficies mínimas son los extremales de la funcional del área. Es decir, las hipersuperficies mínimas anulan la primera variación del área $A'(0) = 0$. Esto nos dice que la funcional del área tiene un máximo, mínimo o punto de inflexión. Para analizar más profundamente esto estudiamos la segunda variación del área $A''(0)$. De esta manera definimos que la inmersión (M, ϕ) es *estable en D* si $A''(0) \geq 0$. Es decir, de entre las hipersuperficies mínimas tomamos aquellas que son mínimos locales de la funcional del área.

De ésta manera tenemos que una hipersuperficie mínima es localmente mínima en D , es decir, para cada variación suave en D suficientemente pequeña, no se admite que el área de la hipersuperficie disminuya. Ahora bien, diremos que (M, ϕ) es *estable* si para todo dominio relativamente compacto $D \subset M$ la segunda variación del área es mayor o igual que cero, $A''(0) \geq 0$.

Lema 1.1. Sea $f: \bar{D} \rightarrow M$ una función diferenciable a trozos tal que $\int_D f dM = 0$. Entonces existe una variación normal de la inmersión (M, ϕ) que preserva volumen y cuyo vector de variación es fN . Si además, $f \equiv 0$ en ∂D , la variación puede elegirse de manera que fije la frontera ∂D .

Para una variación dada $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de la inmersión (M, ϕ) , consideremos

$$H_1 = A^{-1} \int_D H dM, \quad A = A_D(0)$$

y definimos la *funcional (operador de Jacobi)* $J_D: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J_D(t) = A_D(t) + nH_1V_D(t).$$

Proposición 1.1. Sea (M, ϕ) una inmersión de una variedad de dimensión n en \mathbb{R}^{n+1} . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. (M, ϕ) tiene curvatura media constante H_1 .

2. Para cada dominio relativamente compacto $D \subset M$ con frontera suave y cada variación $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que preserva volumen y que fija la frontera ∂D , se tiene que $A'_D(0) = 0$.
3. Para todo dominio relativamente compacto $D \subset M$ y cada variación que fija la frontera se tiene $J'_D(0) = 0$.

Observamos que los puntos críticos de $J(t)$ son las hipersuperficies con curvatura media constante en \mathbb{R}^{n+1} .

Consideremos ahora una inmersión (M, ϕ) de una variedad de dimensión n en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media constante H_1 . Sea $X_t: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una variación de $D \subset M$ que fije la frontera y fN la componente normal del vector de variación de X_t . Denotemos Δf el laplaciano de f en la métrica inducida y $\|B\|^2 = \sum_i \lambda_i^2$ de la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental B de ϕ , donde λ_i son las curvaturas principales de ϕ .

Lema 1.2. La segunda variación del operador de Jacobi $J''_D(0)$ depende sólo de la componente de variación normal f y está dada por

$$J''_D(0)(f) = \int_D (-f \Delta f - \|B\|^2 f^2) dM$$

Sea \mathfrak{F} el conjunto de todas las funciones $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables a trozos que satisfacen $f \equiv 0$ en ∂D y $\int_D f dM = 0$.

Proposición 1.2. $A''_D(0) \geq 0$ para toda variación de (M, ϕ) que preserva volumen y que fijan ∂D si y sólo si $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.

Definición 32. Sean (M, ϕ) una inmersión en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media constante y $D \subset M$ un dominio relativamente compacto con frontera suave ∂D . El dominio D es estable si $A''_D(0) \geq 0$ para toda variación de (M, ϕ) que preserva volumen y que fija ∂D . La inmersión (M, ϕ) es estable si lo es para todo dominio D relativamente compacto.

Corolario 1.3. El dominio relativamente compacto $D \subset M$ es estable si y sólo si $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}$.

La estabilidad de un dominio relativamente compacto $D \subset M$ puede definirse pidiendo únicamente que $J''_D(0)(f) \geq 0$ para variaciones que fijan la frontera.

De manera análoga al estudio de curvas geodésicas, en una variedad Riemanniana se construyen los campos de Jacobi para estudiar las regiones extremas del problema variacional del área.

Definición 33. Sean, (M, ϕ) una inmersión en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media constante y $D \subset M$ un dominio relativamente compacto con frontera suave. Un *campo de Jacobi* en D es un campo vectorial normal $\tilde{J} = fN$ con $f \in C^\infty$ y $f \in \mathfrak{F}_D$ que satisface la *ecuación de Jacobi*

$$T(f) = \Delta f + \|B\|^2 f = 0.$$

Una frontera ∂D de un dominio $D \subset M$ es una *frontera conjugada* si existe un campo de Jacobi no nulo en \bar{D} que se anula sobre ∂D . Si además, no existe un dominio $D' \subset D$, $D' \neq D$, tal que $\partial D'$ es una frontera conjugada, entonces decimos que ∂D es la *primera frontera conjugada*.

En el trabajo de Barbosa y do Carmo [19] se prueba el siguiente resultado importante.

Proposición 1.4. Sean (M, ϕ) una inmersión de una variedad de dimensión n con curvatura media constante en \mathbb{R}^{n+1} y ν un vector fijo unitario en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces la función $f = \langle \nu, N \rangle$ satisface la ecuación de Jacobi $T(f) = \Delta f + \|B\|^2 f = 0$.

Consideremos el operador T dado por la regla $T(f) = \Delta f + \|B\|^2 f$. En el mismo trabajo [19] se demuestra el siguiente resultado.

Lema 1.3. Sean, $\phi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión de una variedad Riemanniana conexa y orientable M en \mathbb{R}^{n+1} y $h(p) = \langle f(p), N(p) \rangle$ la función soporte de la inmersión ϕ . Supongamos que la inmersión ϕ tiene curvatura $H_1 = 0$. Entonces la función soporte h asociada a ϕ satisface que

$$T(h) = 0.$$

Para demostrar la estabilidad de una hipersuperficie M inmersa en \mathbb{R}^n en la sección 2.5, se utilizará la función soporte h de su inmersión (M, ϕ) .

1.3. Sistemas Dinámicos

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mathfrak{X}(x) \tag{1.3}$$

donde $x(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ es una función vectorial que depende del parámetro t y $\mathfrak{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 34. Bajo las hipótesis anteriores, decimos que la función \mathfrak{X} que define a la ecuación diferencial (1.3) es un *campo vectorial*.

Teorema 2. Consideremos un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, un campo vectorial $\mathfrak{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y un punto $x_0 \in U$. Entonces existe una constante real $c > 0$ y una única solución $x: (-c, c) \rightarrow U$ que satisface la ecuación diferencial $\dot{x} = \mathfrak{X}(x)$ con condición inicial $x(0) = x_0$.

De esta manera (véase [18]) el campo vectorial \mathfrak{X} genera un *flujo en* U el cual denotamos mediante $\phi: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si se escribe $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ como una función suave definida para toda $x \in U$ y para toda t en algún intervalo de la forma $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces la aplicación ϕ satisface la ecuación (1.3), es decir,

$$\frac{d}{dt}\phi(x, t)|_{t=\tau} = \mathfrak{X}(\phi(x, \tau))$$

para toda $x \in U$ y $\tau \in I$. En otras palabras, para un argumento fijo x_0 , la curva dada por $\phi(x_0, t) = \phi_{x_0}(t) = x(t)$ es una *curva integral* o *solución de* (1.3).

Al considerar la condición inicial para la ecuación diferencial (1.3) dada por

$$\phi(x_0, 0) = x_0 \in U \tag{1.4}$$

la solución $\phi(x_0, t)$ cumple que $\phi(x_0, 0) = x_0$.

Definición 35. Para x_0 dado, la aplicación $\phi(x_0, t)$ define la aplicación vectorial $\phi_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la que llamamos la *órbita*, *curva integral*, *curva solución* o *trayectoria* de la ecuación (1.3) con condición inicial x_0 .

Por otro lado, cada $t \in I$ define una aplicación $\phi_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual es un difeomorfismo en su imagen $\phi_t(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Se sabe que $\{\phi_t\}_{t \in I}$ es un *grupo a un parámetro (local)* pues satisface:

1. $\phi_0 = Id$.
2. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, para aquellos $t, s \in I$ tal que $t + s \in I$.

En adelante, si no hay confusión, escribiremos indistintamente $\phi(x_0, t) = \phi_{x_0}(t)$ para denotar una solución de (1.3) que pasa por el punto $x_0 \in U$.

Definición 36. Una *singularidad* o *punto singular* del campo vectorial \mathfrak{X} de la ecuación (1.3) es un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathfrak{X}(p) = 0.$$

Definición 37. A la derivada $D\mathfrak{X}(p)$ del campo vectorial \mathfrak{X} en el punto singular p se le llama *la parte lineal de \mathfrak{X} en p* .

Definición 38. Sea $x = p$ una singularidad del campo vectorial (1.3). Llamamos a p un *punto singular hiperbólico* si ninguno de los valores propios de $D\mathfrak{X}(p)$ tiene parte real igual a cero.

Diremos además que punto crítico singular hiperbólico p se llama:

1. *Punto silla*: si alguno, pero no todos, de los valores propios de $D\mathfrak{X}(p)$ tienen parte real mayor que cero y el resto de los valores propios tienen parte real menor que cero.
2. *Punto nodo estable*: si todos los valores propios tienen parte real negativa.
3. *Punto nodo inestable*: si todos los valores propios tienen parte real positiva.

Definición 39. Decimos que p es un *punto centro* si los valores propios son imaginarios puros diferentes de cero.

Observamos que una órbita del campo vectorial (1.3) es invariante bajo traslaciones con respecto al parámetro t . Es decir, soluciones cuyas condiciones iniciales están dadas en $t_0 \neq 0$ pueden llevarse a soluciones que dependan de $t_0 = 0$. De esta manera y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el intervalo I donde se define el flujo del campo vectorial contiene al 0.

Definición 40. Decimos que una órbita $\{\phi_{x_0}\}$ de campo vectorial \mathfrak{X} es *cerrada* si existen $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 < t_2$ tal que $\phi_{x_0}(t_1) = \phi_{x_0}(t_2)$.

Definición 41. Decimos que un campo vectorial es *completo* si el flujo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

En lo subsecuente entenderemos que los campos vectoriales dados son completos.

Definición 42. Consideremos un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que \mathcal{S} es *invariante bajo el flujo* $\phi(x, t)$ del campo vectorial (1.3) si para cada $x_0 \in \mathcal{S}$ se tiene que $\phi_t(x) \in \mathcal{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si restringimos a valores $t \geq 0$, entonces diremos que \mathcal{S} es un *conjunto positivamente invariante* y al hacer la restricción de la definición anterior sólo para valores $t \leq 0$ diremos que es un *conjunto negativamente invariante*.

Definición 43. Consideremos la órbita $\phi_t(x)$ con $t \in \mathbb{R}$. Un punto $p \in U$ es un ω -*punto límite* de la órbita $\phi_t(x)$ asociada al campo vectorial (1.3) si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = p.$$

De manera análoga, decimos que $q \in U$ es un α -*punto límite* de la órbita $\phi_t(x)$ asociada al campo vectorial (1.3) si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x, t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = q.$$

El conjunto de todos los ω -puntos límites de una órbita ϕ_t es llamada el ω -*conjunto límite* y se denota por ω . El conjunto de todos los α -puntos límites de una órbita ϕ_t es llamada el α -*conjunto límite* y se denota por α . El conjunto de todos los puntos límites de γ dado por $\alpha \cup \omega$ se le llama *conjunto límite de γ* .

No es difícil ver que el ω -conjunto límite y el α -conjunto límite son invariantes bajo el flujo de \mathfrak{X} .

Definición 44. Para el punto $p \in U$ y su única órbita solución $\phi_t(p)$ del campo vectorial \mathfrak{X} , definimos el ω -límite de p como el ω -límite de su órbita. De igual manera definimos α -límite de p como el α -límite de su órbita.

Consideremos el campo vectorial \mathfrak{X} en \mathbb{R}^n con la ecuación diferencial asociada

$$\dot{x} = \mathfrak{X}(x); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

y con el flujo inducido $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sea $p \in \mathbb{R}^n$ una singularidad de \mathfrak{X} , esto es $\mathfrak{X}(p) = 0$. Al linealizar el problema (1.5) en p se obtiene

$$\dot{\xi} = D\mathfrak{X}(p)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

donde $D\mathfrak{X} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ es la matriz Jacobiana de derivadas parciales de la función

$$\mathfrak{X}(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

donde $x = p + \xi$ para $|\xi| < 1$. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (1.6) es lineal. En particular el *flujo lineal* de (1.5) en \mathbb{R}^n , dado por $D\phi_t(p)\xi$, se origina a partir del punto crítico p mediante (1.6) por integración, es decir,

$$\psi_t(p) = D\phi_t(p)\xi = e^{tD\mathfrak{X}(p)}\xi. \quad (1.7)$$

Alrededor de un punto singular hiperbólico, estudiar el problema (1.6) nos da información del problema (1.5) mediante el siguiente resultado.

Teorema 3 (Hartman-Grobman). Consideremos un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n que contienen al origen. Sea $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}^1(U)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (1.5). Supongamos que $\mathfrak{X}(0) = 0$ y que la matriz $A = D\mathfrak{X}(0)$ no tiene valores propios con parte real igual a cero. Entonces existe un homeomorfismo h de un subconjunto abierto \tilde{U} que contiene al origen y un abierto V que contiene al origen tal que para todo $x_0 \in \tilde{U}$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para toda $x_0 \in \tilde{U}$ y $t \in I_0$

$$h \circ \phi_t(x_0) = e^{-At}h(x_0).$$

En otras palabras, h aplica trayectorias de (1.5) cerca del origen en trayectorias de (1.6) cerca del origen y preserva la parametrización de t .

En tal caso se dice que ambos flujos son *localmente (topológicamente) conjugados*.

Es bien conocido que si la parte real de algunos de los valores propios son cero, entonces no necesariamente el comportamiento del flujo puede determinarse por la linealización.

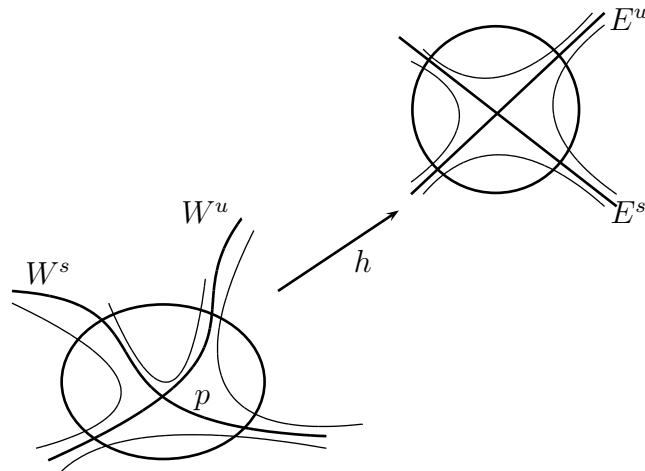


Figura 1.8: Teorema de Hartman-Grobman

Ejemplo 1.8. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La linealización de este sistema en el punto singular $(0, 0)$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0 \\ \dot{v} &= -v. \end{aligned} \tag{1.9}$$

La Figura (1.9) muestra los retratos fase del sistema cerca del origen. Para una discusión más profunda, se sugiere consultar [20].

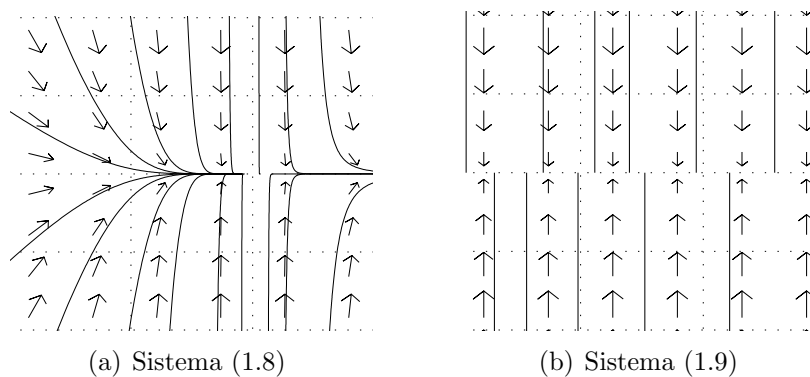


Figura 1.9: Retratos fase del Ejemplo (1.8).

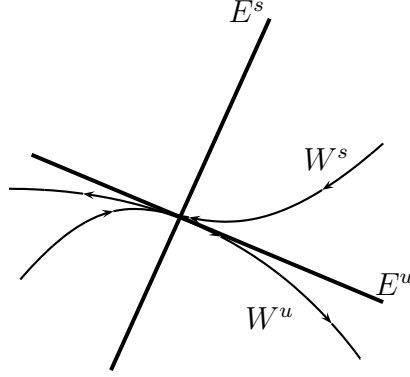


Figura 1.10: Teorema de la variedad estable local

Definición 45. Para un punto singular hiperbólico de un campo vectorial \mathfrak{X} , definimos las *variedades locales estables e inestables* de p , denotadas por $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ respectivamente, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(p) &= \{x \in U : \phi_t(x) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ y } \phi_t(x) \in U\} \\ W_{loc}^u(p) &= \{x \in U : \phi_t(x) \rightarrow p \text{ cuando } t \rightarrow -\infty \text{ y } \phi_t(x) \in U\} \end{aligned}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad del punto crítico p . Las variedades $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ tienen sus análogos en el problema lineal (1.6), es decir, los *espacios estable e inestable*, E^s y E^u respectivamente (véase [21]).

El siguiente resultado garantiza que $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ son variedades suaves encajadas en \mathbb{R}^n cuyos espacios tangentes en p son E^s y E^u respectivamente.

Teorema 4 (de la variedad estable local). Supongamos que el campo vectorial (1.5) tiene un punto singular hiperbólico p . Entonces existen subvariedades $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ de la misma dimensión de los subespacios E^s y E^u del sistema linealizado (1.6), que son tangentes a E^s y E^u respectivamente en p , las cuales son invariantes bajo el flujo asociado al campo vectorial.

Las variedades localmente invariantes $W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ tienen análogas globales definidas mediante las igualdades

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(p)), \\ W^u(p) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(p)). \end{aligned}$$

El siguiente resultado demuestra la existencia de tales variedades, invariantes bajo el flujo del campo vectorial

Teorema 5 (de la Variedad estable). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al origen y $\mathfrak{X} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Consideremos el flujo ϕ_t del sistema (1.3). Supongamos que $\mathfrak{X}(p) = 0$ y que $D\mathfrak{X}(p)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces existe una subvariedad diferenciable de dimensión k denotada $W^s(p)$, tangente al espacio E^s del sistema lineal (1.3) en $x = p$, tal que para toda $t \geq 0$ se tiene que $\phi_t(W^s(p)) \subset W^s(p)$ y para cualquier $x_0 \in W^s(p)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = p. \quad (1.10)$$

Análogamente, existe una subvariedad de dimensión $n - k$ denominada $W^u(p)$ tangente al espacio inestable E^u de (1.3) en p tal que para todo $t \leq 0$ se tiene $\phi_t(W^u(p)) \subset W^u(p)$ y para todo $x_0 \in W^u(p)$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = p. \quad (1.11)$$

A continuación presentamos algunos resultados acerca de campos vectoriales en el plano que utilizaremos durante el desarrollo de este trabajo. Omitimos sus pruebas pues escapan a los fines del mismo. Para más detalles, sugerimos al lector consultar [22], [18], [20] ó [21].

Teorema 6 (Criterio de Bendixson). Sean $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Consideremos el campo $\mathfrak{X} = (f, g)$. Si en una región $U \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexa la expresión $\text{Div } \mathfrak{X} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy}$ no se anula y no cambia de signo, entonces el campo vectorial plano \mathfrak{X} no tiene como soluciones a órbitas cerradas contenidas en U .

Teorema 7 (Bendixson-Poincaré). Sea \mathcal{S} una región positivamente invariante para un campo vectorial en $U \subset \mathbb{R}^2$ que contiene un número finito de puntos singulares. Sea $p \in \mathcal{S}$ y consideremos el conjunto $\omega(p)$. Entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones.

1. $\omega(p)$ es un punto singular.
2. $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
3. $\omega(p)$ consiste de un número finito de puntos fijos p_1, \dots, p_n y órbitas γ con $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$.

Teorema 8 (Bendixson-Poincaré). Si $U \in \mathbb{R}^2$ es una región simplemente conexa que contiene una órbita cerrada γ del campo vectorial \mathfrak{X} , entonces dentro de la región encerrada por γ existe un punto singular de \mathfrak{X} .

El lector puede consultar las demostraciones de estos Teoremas en [23] o [20].

Capítulo 2

Hipersuperficies Invariantes bajo

$O(m) \times O(n)$

En esta parte daremos la construcción de la ecuación de curvatura media y estudiaremos un campo vectorial asociado mediante las transformaciones de Bombieri-de Giorgi-Gusti. Esto nos llevará a una clasificación de las curvas de perfil que generan a las hipersuperficies mínimas invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ y en consecuencia la clasificación de dichas hipersuperficies. También estudiamos la estabilidad de las hipersuperficies invariantes obtenidas. Por último se muestra el teorema 2.19 del trabajo [11] sobre hipersuperficies mínimas, estables, completas y encajadas en \mathbb{R}^{m+n-1} que son invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ el cual generaliza el trabajo de Alencar [9] y presenta nuevos ejemplos para la generalización del Teorema de Bernstein.

2.1. Ecuación de Curvatura

Consideremos la acción diagonal del grupo de Lie $G = O(m) \times O(n)$ en $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $(A, B) \cdot (z, w) = (Az, Bw)$. Sea $\Pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida mediante $\Pi(z, w) = (\|z\|, \|w\|)$. Debido a que cada $(A, B) \in O(m) \times O(n)$ y $(z, w) \in \mathbb{R}^{m+n}$ se tiene que $\Pi(Az, Bw) = (\|Az\|, \|Bw\|) = (\|z\|, \|w\|) = \Pi(\|z\|, \|w\|)$ y el espacio de órbitas puede representarse mediante

$$\Omega := \mathbb{R}^{m+n}/O(m) \times O(n) = \Pi(\mathbb{R}^{m+n}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Observemos que a cada punto $(x, y) \in \Omega$ bajo la acción le corresponde el producto de esferas $\mathbb{S}^{m-1}(x) \times \mathbb{S}^{n-1}(y)$ de radios x y y , es decir, $\Pi^{-1}(x, y) = \mathbb{S}^{m-1}(x) \times \mathbb{S}^{n-1}(y)$ (véase la Figura 2.1).

De esta manera, una hipersuperficie M de \mathbb{R}^{m+n} invariante bajo la acción de G está generada por una *curva de perfil* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ contenida en Ω . Es decir, la hipersuperficie M está parametrizada mediante la inmersión $\Gamma: I \times \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$

dada por

$$\begin{aligned}\Gamma(t, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) &= (x(t)\Phi(\phi_1, \dots, \phi_{m-1}), y(t)\Psi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})) \\ &= (x(t)\Phi(a), y(t)\Psi(b))\end{aligned}$$

donde Φ y Ψ son las parametrizaciones de las esferas unitarias de dimensión $m-1$ y $n-1$ respectivamente siendo a y b sus parámetros respectivos.

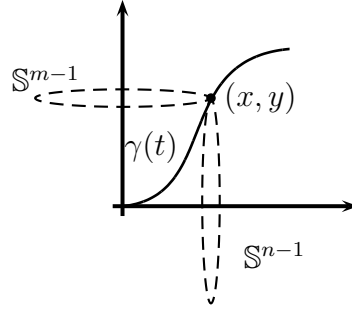


Figura 2.1: Curva de perfil de una hipersuperficie en \mathbb{R}^{m+n} invariante bajo el grupo $O(m) \times O(n)$

Por cálculos directos tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= (x'\Phi, y'\Psi), & \Gamma_a &= (x\Phi_a, 0), \\ \Gamma_b &= (0, y\Psi_b), & \Gamma_{tt} &= (x''\Phi, y''\Psi), \\ \Gamma_{ta} &= (x'\Phi_a, 0), & \Gamma_{tb} &= (0, y'\Psi_b), \\ \Gamma_{aa} &= (x\Phi_{aa}, 0), & \Gamma_{bb} &= (0, y\Psi_{bb}).\end{aligned}$$

donde $x' = \frac{\partial x}{\partial t}(t)$, $y' = \frac{\partial y}{\partial t}(t)$, $\Phi_a = \frac{\partial \Phi}{\partial a}(a)$ y $\Psi_a = \frac{\partial \Psi}{\partial b}(b)$.

Un vector normal unitario para Γ está dado por

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(-y'(t)\Phi(a), x'(t)\Psi(b)).$$

La *primera forma fundamental* está dada por

$$G = \begin{pmatrix} (x')^2 + (y')^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 I_m & 0 \\ 0 & 0 & y^2 I_n \end{pmatrix}$$

y la *segunda forma fundamental* es ta dada por

$$B = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \begin{pmatrix} -x''y' + x'y'' & 0 & 0 \\ 0 & -xy'I_m & 0 \\ 0 & 0 & yx'I_n \end{pmatrix}$$

donde I_m e I_n son las matrices identidad de dimensión m y n respectivamente.

Las curvaturas principales están dadas por las raíces de la ecuación polinomial $\det(B - \lambda G) = 0$. Así, las curvaturas principales están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \lambda_i &= \frac{y'}{x\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \lambda_j &= -\frac{x'}{y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Consecuentemente, la curvatura media para la hipersuperficie M está dada por

$$\begin{aligned}(m+n-1)H_1 &= \sum_{k=0}^{m+n-2} \lambda_k \\ &= \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(m-1)y'}{x\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} - \frac{(n-1)x'}{y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.\end{aligned}$$

Las hipersuperficies mínimas satisfacen que la curvatura media es nula, es decir, $H_1 = 0$. Por lo tanto, el problema de encontrar las hipersuperficies mínimas invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ es equivalente a encontrar las curvas de perfil, soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(m-1)y'}{x} - \frac{(n-1)x'}{y} = 0. \quad (2.1)$$

Observemos que si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una solución de la ecuación (2.1), entonces al considerar la familia de curvas $\gamma_c(t) = (cx(t), cy(t))$ para $c \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{c^2(x'y'' - x''y')}{c^2[(x')^2 + (y')^2]} + \frac{(m-1)cy'}{cx} - \frac{(n-1)cx'}{cy} &= \\ \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{(m-1)y'}{x} - \frac{(n-1)x'}{y} &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, toda *curva homotética* $\gamma_c(t) = (cx(t), cy(t))$ a γ es también solución de (2.1).

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ está parametrizada por longitud de arco, entonces se cumple que $(x')^2 + (y')^2 = 1$ y entonces

$$\eta = (-y'(t)\Phi(a), x'(t)\Psi(b))$$

es un vector normal a la hipersuperficie generada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Derivando la relación $(x')^2 + (y')^2 = 1$ obtenemos

$$x'x'' + y'y'' = 0. \quad (2.2)$$

Por otro lado la ecuación (2.1) se transforma en

$$x'y'' - x''y' + (m-1)\frac{y'}{x} - (n-1)\frac{x'}{y} = 0. \quad (2.3)$$

Así, de las relaciones (2.2) y (2.3) podemos escribir las variables x'' y y'' en términos de las otras variables x , x' , y y y' obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{(m-1)yy' - (n-1)xx'}{xy}y' \\ y'' &= -\frac{(m-1)yy' - (n-1)xx'}{xy}x'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Supongamos que $y = y(x)$, entonces $y'(x) = x'\frac{dy}{dx}$ y por tanto la ecuación (2.3) se reduce a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{(m-1)y\frac{dy}{dx} - (n-1)x}{xy} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

De la misma manera, al suponer que $x = x(y)$ y dado que $x'(y) = y'\frac{dx}{dy}$ se tiene que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \mp \frac{(m-1)y - (n-1)x\frac{dx}{dy}}{xy} \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) indican que no existen puntos singulares de la ecuación (2.1) en Ω .

2.2. El Campo Vectorial Asociado

Utilizando el método de Bombieri-de Giorgi-Giusti desarrollado en [5], hacemos la transformación de coordenadas $(x, y) \mapsto (u, v)$ dada por

$$\begin{aligned} \tan u &= \frac{y}{x} \\ \tan v &= \frac{y'}{x'} \end{aligned} \quad (2.7)$$

definidas en $(u, v) \in \bar{D}$ donde $D = (0, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$.

De esta manera, al derivar con respecto al parámetro t tenemos

$$u' = \frac{y'x - x'y}{x^2 + y^2} \quad y \quad v' = x'y'' - x''y'.$$

Multiplicando la ecuación (2.3) por el factor $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}u'$ y utilizando el cambio de coordenadas se tiene

$$v'[-\cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(u - v)] + u'[(m - 1) \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u - (n - 1) \cos v \cos u] = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) provee de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para u y v , y un campo vectorial $\mathfrak{X}(u, v) = (\mathfrak{X}_1(u, v), \mathfrak{X}_2(u, v))$ definido en \bar{D} dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1(u, v) &= u' = \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(u - v), \\ \mathfrak{X}_2(u, v) &= v' = (m - 1) \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u - (n - 1) \cos v \cos u. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Lema 2.1. El campo vectorial \mathfrak{X} satisface las siguientes propiedades:

1. \mathfrak{X}_1 se anula en las rectas $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = u$ y $v = u - \pi$.
2. \mathfrak{X}_2 se anula en la imagen de las funciones

$$\begin{aligned} v_1(u) &= \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right), \\ v_2(u) &= \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi \end{aligned}$$

definido para $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Más aún, las funciones v_1 y v_2 son decrecientes y se tiene

- a) $\lim_{u \rightarrow 0} v_1(u) = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} v_1(u) = 0$.
- b) $\lim_{u \rightarrow 0} v_2(u) = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} v_2(u) = -\pi$.
- c) Si $n < m$ ($n = m$ o $n > m$), entonces v_1 y v_2 son cóncavas hacia arriba (rectas ó cóncavas hacia abajo respectivamente).
- d) $v'_1(0) = v'_2(0) = -\frac{m-1}{n-1}$ y $v'_1(\frac{\pi}{2}) = v'_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{n-1}{m-1}$.

Demostración. Procedemos a demostrar el Lema.

1. Del sistema (2.9) tenemos que

$$\mathfrak{X}_1(u, v) = \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(u - v) = 0$$

si y sólo si $\cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(u - v) = 0$. Es decir, cuando $\cos u = 0$, $\operatorname{sen} u = 0$ o $\operatorname{sen}(u - v) = 0$. Lo cual sucede en \bar{D} si $u = \frac{\pi}{2}$, $u = 0$ o $u - v = \pi$.

2. Ahora

$$\mathfrak{X}_2(u, v) = (m - 1) \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u - (n - 1) \operatorname{cos} v \operatorname{cos} u = 0$$

si y sólo si

$$\tan v = \frac{n - 1}{m - 1} \cot u.$$

Por lo tanto, dentro de \bar{D} se tienen dos soluciones

$$\begin{aligned} v_1(u) &= \arctan \left(\frac{n - 1}{m - 1} \cot u \right), \\ v_2(u) &= \arctan \left(\frac{n - 1}{m - 1} \cot u \right) - \pi \end{aligned}$$

Las afirmaciones (2a) y (2b) se siguen de la definición de la función $\arctan x$. Para demostrar (2c) y (2d) notemos que para $i = 1, 2$ se tiene

$$\frac{dv_i}{du} = -\frac{\frac{n-1}{m-1}}{\operatorname{sen}^2 u + \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^2 \operatorname{cos}^2 u} \quad (2.10)$$

y

$$\frac{d^2v_i}{du^2} = \frac{2 \frac{n-1}{m-1} \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u}{\left(\operatorname{sen}^2 u + \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^2 \operatorname{cos}^2 u\right)^2} \left(1 - \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^2\right). \quad (2.11)$$

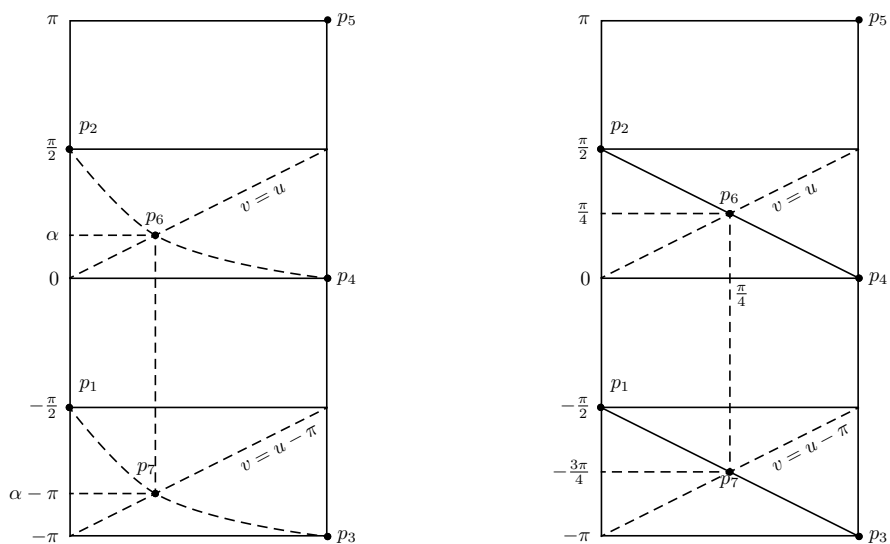
Como $\frac{n-1}{m-1} > 0$ y $\operatorname{sen}^2 u + \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^2 \operatorname{cos}^2 u > 0$ entonces $\frac{dv_i}{du} < 0$ para $i = 1, 2$ y por tanto las funciones v_i con $i = 1, 2$ son decrecientes. De la relación $\frac{d^2v_i}{du^2} = 0$, obtenemos los puntos de inflexión de las funciones v_i con $i = 1, 2$. Es decir, tenemos que $\frac{d^2v_i}{du^2} = 0$ si y sólo si $\operatorname{cos} u = 0$ o $\operatorname{sen} u = 0$. Esto es, cuando $u = 0$ o $u = \frac{\pi}{2}$ en \bar{D} .

Observemos que $\operatorname{cos} u > 0$ y $\operatorname{sen} u > 0$ en $(0, \frac{\pi}{2})$. Así se tiene que $\frac{d^2v}{du^2} > 0$ para $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ si y sólo si $\left(1 - \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^2\right) > 0$. Esto es equivalente a que $m - 1 > n - 1$ o bien $m > n$. De manera análoga tenemos que $\frac{d^2v}{du^2} \leq 0$ si y sólo si $m \leq n$. Evaluando directamente en (2.10) tenemos que $\frac{d^2v}{du^2}(0) = -\frac{m-1}{n-1}$ y $\frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{n-1}{m-1}$ para $i = 1, 2$. Esto termina la demostración. \square

Con la información del Lema 2.1 obtenemos las gráficas de las posibles v_1 y v_2 que mostramos en la Figura 2.2.

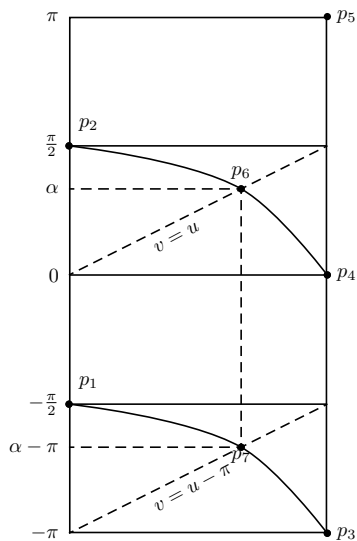
De la demostración del Lema 2.1 se siguen los siguientes corolarios.

Corolario 2.1. Los puntos singulares del campo vectorial \mathfrak{X} en la región $\bar{D} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$ son $p_1 = (0, -\frac{\pi}{2})$, $p_2 = (0, \frac{\pi}{2})$, $p_3 = (\frac{\pi}{2}, -\pi)$, $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $p_5 = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $p_6 = (\alpha, \alpha)$, $p_7 = (\alpha, \alpha - \pi)$, donde $\alpha = \arctan \sqrt{\frac{n-1}{m-1}} \in (0, \frac{\pi}{2})$.



(a) $n < m$

(b) $n = m$



(c) $n > m$

Figura 2.2: Gráfica de las funciones $v_1 = v_1(u)$ y $v_2 = v_2(u)$

De la continuidad del campo vectorial \mathfrak{X} se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.2. El campo vectorial \mathfrak{X} satisface

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(0, v) &= \begin{cases} (0, \mathfrak{X}_2^+) & \text{para } v \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}); \\ (0, \mathfrak{X}_2^-) & \text{para } v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ (0, \mathfrak{X}_2^+) & \text{para } v \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases} \\ \mathfrak{X}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= \begin{cases} (0, \mathfrak{X}_2^-) & \text{para } v \in (-\pi, 0); \\ (0, \mathfrak{X}_2^+) & \text{para } v \in (0, \pi). \end{cases} \\ \mathfrak{X}(u, u) &= \begin{cases} (0, \mathfrak{X}_2^-) & \text{para } 0 < u < \alpha; \\ (0, \mathfrak{X}_2^+) & \text{para } \alpha < u < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\ \mathfrak{X}(u, u - \pi) &= \begin{cases} (0, \mathfrak{X}_2^+) & \text{para } 0 < u < \alpha; \\ (0, \mathfrak{X}_2^-) & \text{para } \alpha < u < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\ \mathfrak{X}(u, v_1(u)) &= \begin{cases} (\mathfrak{X}_1^-, 0) & \text{para } 0 < u < \alpha; \\ (\mathfrak{X}_1^+, 0) & \text{para } \alpha < u < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\ \mathfrak{X}(u, v_2(u)) &= \begin{cases} (\mathfrak{X}_1^-, 0) & \text{para } 0 < u < \alpha; \\ (\mathfrak{X}_1^+, 0) & \text{para } \alpha < u < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{X}_i^+ > 0$ y $\mathfrak{X}_i^- < 0$.

Proposición 2.3. Para todo $m, n > 0$, los puntos singulares p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 del campo vectorial \mathfrak{X} son puntos silla. Si $m + n \leq 7$, p_6 es un nodo inestable (repulsor) y p_7 es un nodo estable (atractor). Si $m + n \geq 8$, entonces p_6 es un nodo inestable y p_7 es un nodo estable.

Demostración. Para demostrar lo requerido, consideremos la parte lineal del campo vectorial dada por la matriz de derivadas parciales $D\mathfrak{X}_p = (a_{ij})$ donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos 2u \sin(u - v) + \cos u \sin u \cos(u - v) \\ a_{12} &= -\cos u \sin u \cos(u - v) \\ a_{21} &= (m - 1) \sin v \cos u + (n - 1) \cos v \sin u \\ a_{22} &= (m - 1) \cos v \sin u + (n - 1) \sin v \cos u \end{aligned}$$

Sustituyendo los puntos singulares p_i con $i = 1, \dots, 7$ en la matriz $D\mathfrak{X}_p$ tenemos

$$\begin{aligned} D\mathfrak{X}_{p_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m-1 & -(n-1) \end{pmatrix} \\ D\mathfrak{X}_{p_2} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ m-1 & n-1 \end{pmatrix} \\ D\mathfrak{X}_{p_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) & -(m-1) \end{pmatrix} \\ D\mathfrak{X}_{p_4} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n-1 & m-1 \end{pmatrix} \\ D\mathfrak{X}_{p_5} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) & -(m-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $p_6 = (\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, se tiene que $\cos \alpha > 0$ y $\sin \alpha > 0$ y por tanto

$$D\mathfrak{X}_{p_6} = \sin \alpha \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m+n-2 & m+n-2 \end{pmatrix}.$$

Llamemos $\beta = m + n - 2$, entonces tenemos que

$$D\mathfrak{X}_{p_6} = \sin \alpha \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

y los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

están dados por

$$\mu_1 = \frac{1}{2}[\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}]$$

y

$$\mu_2 = \frac{1}{2}[\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}].$$

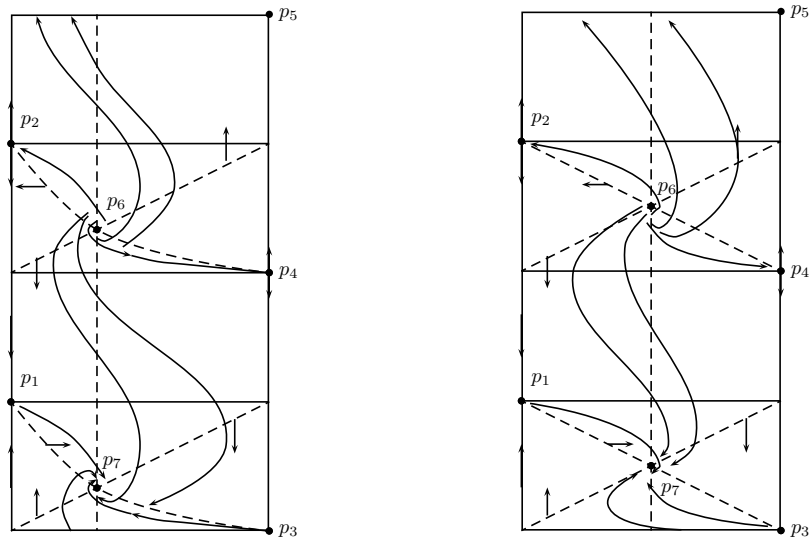
Observemos que $\mu_2 \geq 0$ si y sólo si $(\beta + 1)^2 \geq (\beta + 1)^2 - 8\beta$. Además, el discriminante $(\beta + 1)^2 - 8\beta^2$ es un número real si y sólo si $\beta \geq 3 + 2\sqrt{2}$, es decir, $m + n \geq 8$. Por tanto $\mu_1\mu_2 > 0$ y entonces p_6 es un punto nodo repulsor.

Para el caso $p_7 = (\alpha, \alpha - \pi)$ tenemos que

$$D\mathfrak{X}_{p_7} = \sin \alpha \cos \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}$$

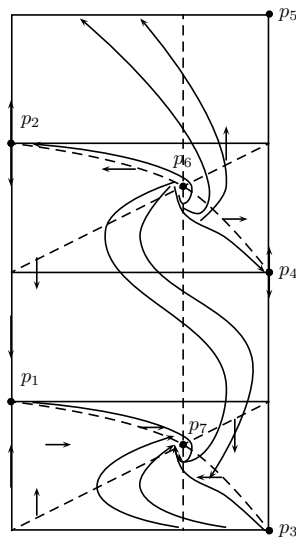
y en este caso los valores propios de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix}$$



(a) $n < m$

(b) $n = m$



(c) $n > m$

Figura 2.3: Planos Fase

están dados por

$$\nu_1 = -\frac{1}{2}[\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}] = -\mu_1$$

y

$$\nu_2 = -\frac{1}{2}[\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}] = -\mu_2.$$

Así, los valores propios cumplen $\nu_1 < 0$ y $\nu_2 < 0$. Por tanto, siguiendo un razonamiento análogo al anterior y bajo la hipótesis de que $m + n \geq 8$ tenemos que p_7 es un punto nodo atractor. Esto termina la prueba. \square

Para hacer un análisis más detallado del campo \mathfrak{X} consideremos las regiones D_1^+ , D_2^+ , D_1^- y D_2^- definidas mediante

$$\begin{aligned} D_1^+ &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ D_2^+ &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ D_1^- &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ D_2^- &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Lema 2.2. Para cualesquiera dos enteros $m, n \geq 3$, el campo \mathfrak{X} no tiene órbitas periódicas en las regiones D_1^+ , D_2^+ , D_1^- y D_2^- .

Demostración. Para el caso donde consideramos la región D_1^+ , las funciones $\sin u$, $\cos u$, $\sin v$ y $\cos v$ son positivas. Por otro lado, la divergencia del campo vectorial \mathfrak{X} está dada por

$$\text{Div } \mathfrak{X} = [3 \cos^2 u + (m - 2)] \sin u \cos v + [3 \sin^2 u + (n - 1)] \cos u \sin v.$$

Si $m, n \geq 3$, el signo de Div depende de $f(u, v) = \sin u \cos v$ y $g(u, v) = \cos u \sin v$. Por lo tanto, en la región D_1^+ se tiene

$$\text{Div } \mathfrak{X} > 0.$$

De esta forma, el criterio de Bendixson (véase Teorema 6, página 28) implica que no hay órbitas periódicas en D_1^+ .

Para D_2^- las funciones $\sin v$ y $\cos u$ son negativas, lo que implica que en esta región,

$$\text{Div } \mathfrak{X} < 0.$$

Nuevamente, utilizando el criterio de Bendixson se sigue la afirmación en D_2^- . Observemos que $\mathfrak{X}_2(u, v) > 0$ para

$$\arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) < v < \pi$$

y $\mathfrak{X}_2(u, v) < 0$ para

$$-\frac{\pi}{2} < v < \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right).$$

Esto implica que \mathfrak{X} no tiene órbitas periódicas en la región D_1^- . De manera similar se sigue la afirmación para \mathfrak{X} en D_2^+ . Esto termina la prueba. \square

Corolario 2.4. Para cualesquiera $m, n \geq 3$, el conjunto $(0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ está contenido en la variedad inestable $W^u(p_6)$ del punto singular p_6 .

Corolario 2.5. Para cualesquiera $m, n \geq 3$, el conjunto $(0, \frac{\pi}{2}) \times [-\pi, 0]$ está contenido en la variedad estable $W^s(p_7)$ del punto singular p_7 .

Proposición 2.6. El campo vectorial \mathfrak{X} tiene una única curva integral $\phi(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 = (\alpha, \alpha)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Es decir, se tiene que $\{\phi(t)\} \subset W^s(p_2)$.

Demostración. El Teorema 5 de la variedad estable en dimensión 2 implica la existencia de una variedad estable de dimensión 1 para p_2 . El espacio tangente de esta variedad está generado por un vector propio $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ asociado al valor propio -1 de $D\mathfrak{X}_{p_2}$. Un cálculo directo muestra que podemos elegir

$$\xi = \left(1, -\frac{m-1}{n}\right).$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{dv_1}{du}(0) = -\frac{m-1}{n-1} < -\frac{m-1}{n}.$$

Por tanto $W^s(p_2)$ es transversal a la gráfica de la función v_1 en p_2 . Además, el vector ξ apunta por encima de la gráfica.

Así la parte de $W^s(p_2)$ contenida en $(0, \frac{\pi}{2}) \times [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ también lo está en $W^u(p_6)$. Como estas variedades son de dimensión 1, podemos elegir una curva integral $\phi(t)$ de \mathfrak{X} que está definida para toda $t \in \mathbb{R}$ porque \mathfrak{X} está acotado en $[0, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Entonces tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_2,$$

lo que termina la prueba. \square

De manera similar, existen variedades de dimensión 1 invariantes bajo el flujo de \mathfrak{X} que conectan cada punto silla p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 con p_6 y p_7 . En lo posterior, $W^u(p_i), W^s(p_i), i = 1, 2, \dots, 5$ denotarán la parte de tales variedades invariantes contenida en $\bar{D} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$.

Por otra parte, como \bar{D} es compacto y \mathfrak{X} continuo, se sigue que cada órbita es completa, es decir, está definida para toda $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.7. Para $m, n \geq 3$, cada órbita $\{\phi(t)\}$ de \mathfrak{X} contenida en \bar{D} está definida para toda $t \in \mathbb{R}$, y además es de uno de los siguientes tipos:

1. $\{\phi(t)\}$ está contenida en el eje v y tiene a p_1 o p_2 como α -límite o bien como ω -límite. (Las singularidades p_1 y p_2 corresponden a este caso.)
2. $\{\phi(t)\}$ está contenida en la línea $\frac{\pi}{2}$ y tiene a p_3, p_4 o p_5 como α -límites o bien como ω -límites. (Las singularidades p_3, p_4 y p_5 corresponden a este caso.)
3. $\phi(t) \equiv p_6$ o $\phi(t) \equiv p_7$.
4. $\{\phi(t)\} \subset W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_7.$$

5. $\{\phi(t)\} \subset W^u(p_6) \cap W^s(p_8)$, con $p_8 = (\alpha, \alpha - \pi)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_8.$$

6. $\{\phi(t)\} \subset W^u(p_9) \cap W^s(p_7)$, con $p_9 = (\alpha, \alpha - 2\pi)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_9 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_7.$$

7. $\{\phi(t)\} = W^s(p_2) \subset W^u(p_6)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_2.$$

8. $\{\phi(t)\} = W^s(p_4) \subset W^u(p_6)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_6 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_4.$$

9. $\{\phi(t)\} = W^u(p_1) \subset W^s(p_7)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_7.$$

10. $\{\phi(t)\} = W^u(p_3) \subset W^s(p_7)$. Esto es,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = p_3 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_7.$$

Ahora describiremos todas las órbitas no verticales de \mathfrak{X} contenidas en la cerradura $\overline{W^u(p_6) \cap W^s(p_7)}$. Ya que el comportamiento de los puntos singulares en las otras 2-variedades invariantes es el mismo que en $\overline{W^u(p_6) \cap W^s(p_7)}$, el comportamiento global de \mathfrak{X} está representado en \bar{D} .

Lema 2.3. Cada órbita $\{\phi(t)\} \subset W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ interseca a la recta $v = u$ o la recta $v = u - \pi$.

Demostración. Cada órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$ contenida en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ puede ser reparametrizada por $t = t(\tau)$ con $\tau \in (0, 1)$. Así, obtenemos la curva $\psi(\tau) = \phi(t(\tau)) = (\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau))$ con $\psi(0) = p_6$ y $\psi(1) = p_7$. Como $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = \alpha$, por el teorema del valor medio, existe $\tau_0 \in (0, 1)$ tal que $\frac{d\tilde{u}}{d\tau}(\tau_0) = 0$. Pero $\frac{d\tilde{u}}{d\tau}(\tau_0) = \frac{du}{dt}(t_0) \frac{dt}{d\tau}(\tau_0)$, donde $t_0 = t(\tau_0)$. Esto implica que $\frac{du}{dt}(t_0) = 0$ pues $\frac{dt}{d\tau}(\tau_0) \neq 0$ y $t = t(\tau)$ es una reparametrización.

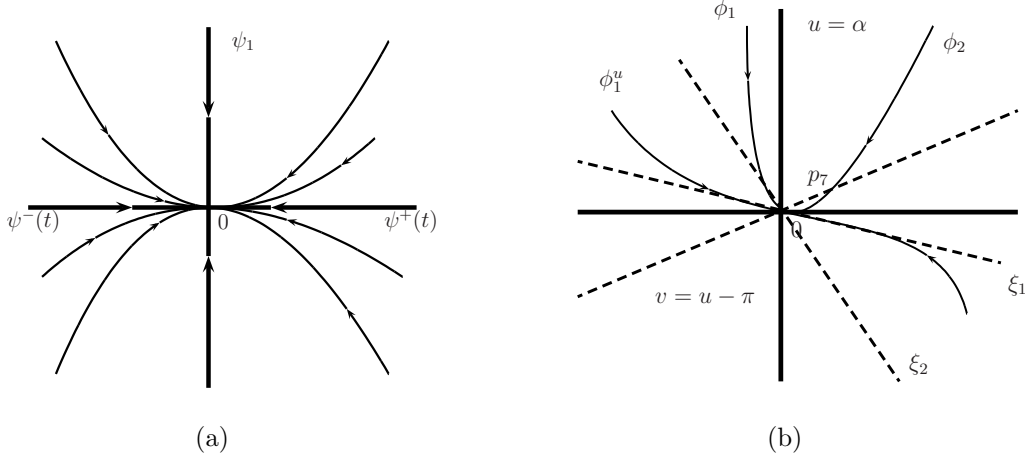
De la misma manera, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u'(t_0) = 0$. Pero la primera coordenada del campo \mathfrak{X} se anula en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ solamente sobre las líneas $v = u$ y $v = u - \pi$, lo cual implica que $\phi(t_0)$ está en alguna de las líneas. \square

Corolario 2.8. Dados $m, n \geq 3$ enteros tales que $m+n \leq 7$, cada órbita $\{\phi(t)\}$ contenida en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$, interseca a las líneas $v = u$ o $v = u - \pi$ una infinidad numerable de veces. Más aun, cada órbita sale espiraleando de p_6 y entra espiraleando a p_7 .

Demostración. Esto se sigue de que p_6 y p_7 son nodos hiperbólicos. \square

Proposición 2.9. Para cualesquiera enteros $m, n \geq 3$ tales que $m+n \geq 8$, dada órbita $\{\phi(t)\}$ contenida en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ tiene una y sólo una de las siguientes propiedades:

1. $\{\phi(t)\}$ interseca a la línea $v = u$ y no interseca a la línea $v = u - \pi$. Más aún, $\{\phi(t)\}$ interseca a la curva $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right)$ y no interseca a la curva $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi$.
2. $\{\phi(t)\}$ interseca a la línea $v = u$ e interseca a la línea $v = u - \pi$. Más aún, $\{\phi(t)\}$ interseca a las curvas $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right)$ y $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi$.
3. $\{\phi(t)\}$ interseca a la línea $v = u - \pi$ y no interseca a la línea $v = u$. Más aún, $\{\phi(t)\}$ interseca a la curva $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi$ y no interseca la curva $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right)$.


 Figura 2.4: Conjugación de los campos \mathfrak{X} y \mathfrak{Y} .

Demostración. Sea $\beta = m + n - 2$ como en la demostración de la Proposición 2.3. Si consideramos el campo $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{Y}_1(z, w), \mathfrak{Y}_2(z, w))$, la linealización de \mathfrak{X} , y el punto p_7 , obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} z' &= \mu_1 z = \mathfrak{Y}_1(z, w), \\ w' &= \mu_2 w = \mathfrak{Y}_2(z, w), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{1}{2}[\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}] \\ \mu_2 &= -\frac{1}{2}[\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}] \end{aligned}$$

son los valores propios obtenidos en la demostración de la Proposición 2.3 asociados a los correspondientes vectores propios

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\xi_1^1, \xi_1^2) = \left(1, \frac{-2\beta}{3\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}} \right), \\ \xi_2 &= (\xi_2^1, \xi_2^2) = \left(1, \frac{-2\beta}{3\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}} \right). \end{aligned}$$

Observemos que las segundas coordenadas de estos vectores son negativas y $\xi_1^2 < \xi_2^2$, esto implica que los puntos ξ_1 de la región están sobre ξ_2 .

En un sistema de coordenadas (z, w) relativa a la base $\{\xi_1, \xi_2\}$, el flujo de \mathfrak{Y} alrededor del origen se comporta como en la Figura 2.4.

El Teorema 3 implica que el campo \mathfrak{X} en una vecindad de p_7 es \mathcal{C}^1 -conjugado del campo \mathfrak{Y} cerca del origen.

Como las órbitas $\psi^-(t)$ y $\psi^+(t)$ sobre el eje z son separatrices para el campo \mathfrak{Y} , bajo la conjugación éstas corresponden localmente a las separatrices de \mathfrak{X} , llamadas $\phi_1^u(t) = W^u(p_1)$ y $\phi_2^u(t) = W^u(p_3)$ respectivamente. Estas órbitas están contenidas en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ y convergen a p_7 cuando $t \rightarrow \infty$ con la misma dirección ξ_1 , esto es, con pendiente

$$\frac{-2\beta}{3\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}}$$

La órbita $\psi^-(t)$ converge a cero con la misma pendiente, junto con la familia de órbitas del campo \mathfrak{Y} , como se observa en la Figura 2.4. La conjugación implica la existencia de una familia de órbitas de \mathfrak{X} que junto con $\phi_1^u(t)$ convergen a p_7 con la misma pendiente $\frac{-2\beta}{3\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}}$. Tal familia no interseca a la línea $u = \alpha$ y tampoco interseca la línea $v = u - \pi$. Del Lema 2.3 se sigue que tal familia sólo interseca a $v = u$.

Por otra parte, como \mathfrak{X} es continuo y transversal a la línea $u = \alpha$, entonces existe una órbita $\{\phi_1(t)\} \subset W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ acotando a la familia antes mencionada, que además converge a p_7 con dirección ξ_2 , esto es, con pendiente

$$\frac{-2\beta}{3\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}}.$$

Esta órbita ϕ_1 corresponde bajo la conjugación con la órbita vertical ψ_1 de \mathfrak{Y} en la parte superior del plano $z - w$. Observemos que ϕ_1 no interseca transversalmente a $u = \alpha$ y por tanto las órbitas de esta clase intersecan únicamente a la línea $v = u$.

Una linealización cerca del nodo hiperbólico p_6 muestra que la familia de órbitas consideradas divergen al acercarse a p_6 con dirección ξ_1 . En particular, aquellas órbitas de la familia corresponden a la región izquierda de $u = \alpha$ (o la parte inferior izquierda del plano $z - w$) cruzan la línea horizontal $v = \alpha$ saliendo de $p_6 = (\alpha, \alpha)$. Esto implica la existencia de un punto $v' = 0$, o $\mathfrak{X}_2 = 0$. Por el Lema 2.1 obtenemos un punto (u, v) de la órbita donde $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right)$. Como la órbita no interseca a $u = \alpha$, tampoco interseca a $v = v_2(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi$.

Un análisis similar cerca del nodo hiperbólico p_6 prueba la existencia de otra familia de órbitas de \mathfrak{X} en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$ tal que cada órbita satisface (3) en la Proposición 2.9, más aún, ésta familia está acotada por una órbita $\{\phi_2(t)\}$ simultáneamente con la familia que converge a p_7 en la dirección ξ_2 , esto es, con pendiente

$$\frac{-2\beta}{3\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 8\beta}}.$$

La continuidad de \mathfrak{X} y su transversalidad relativa con $v = u$, $u = \alpha$ y $v = u - \pi$ implica que cada órbita en la región acotada por $\{\phi_1(t)\}$ y $\{\phi_2(t)\}$ satisface la condición (2), lo que concluye la demostración. \square

La Proposición 2.9 completa la descripción global de los flujos para el campo vectorial \mathfrak{X} . La Figura 2.5 muestra los flujos en el caso $m + n \geq 8$.

2.3. Las Curvas de Perfil

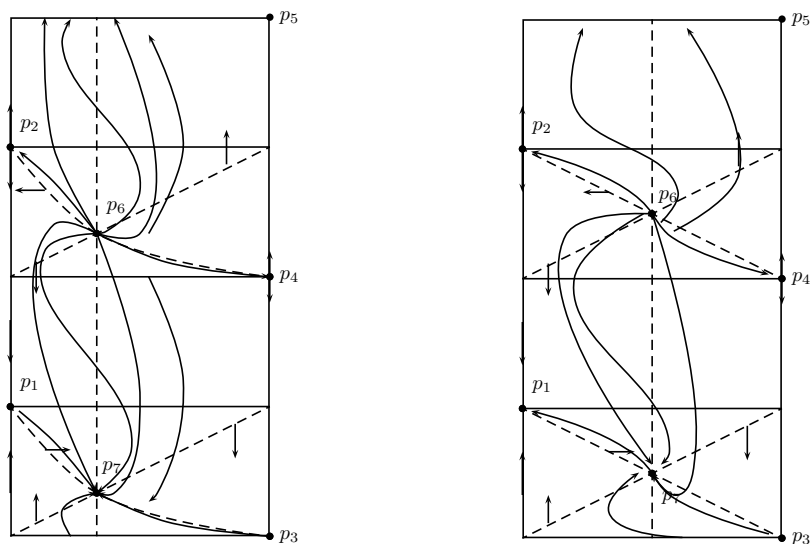
En esta sección veremos algunas de las propiedades de las curvas de perfil γ obtenidas mediante la Proposición 2.7 .

Proposición 2.10. Para $m, n \geq 3$, consideremos $\phi(t) = (u(t), v(t))$ una órbita de \mathfrak{X} contenida en \bar{D} , definida para toda $t \in \mathbb{R}$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la correspondiente curva de perfil. Entonces γ corresponde a uno de los siguientes tipos numerados de acuerdo a la Proposición 2.7.

- 1 γ está contenida en el eje x .
- 2 γ está contenida en el eje y .
- 3 γ es un rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$.
- 4-6 γ es doblemente asintótica al rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$.
- 7-8 γ es asintótica a $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ y entra ortogonalmente al eje x . Más aún, es una gráfica sobre su proyección en el eje x .
- 9-10 γ es asintótica a $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ y entra ortogonalmente al eje y . Más aún, es una gráfica sobre su proyección en el eje y .

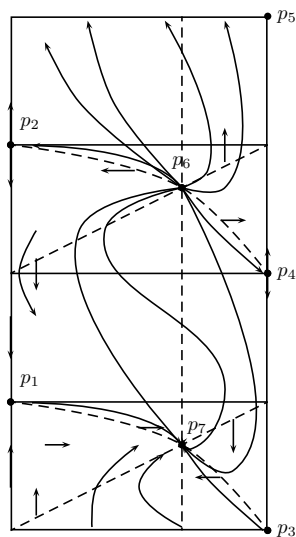
Demostración. Primero analizaremos las singularidades de \mathfrak{X} dadas por el Corolario 2.1. Se tiene que $u(t) = 0$ para p_1 y p_2 , de las ecuaciones (2.7) se tiene que $y(t) = 0$. De manera similar tenemos que $u(t) = \frac{\pi}{2}$ para p_3, p_4 y p_5 y por tanto $x(t) = 0$. Esto demuestra los casos (1) y (2). Para p_6 y p_7 se tiene que $u(t) = \alpha$, esto es $y(t) = (\tan \alpha)x(t)$. Resolviendo tenemos que $\alpha = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1}\right)$ que corresponde al caso (3). Ahora analizaremos el caso (4). De la Proposición 2.7 tenemos que $\{\phi(t)\}$ está contenida en $W^u(p_6) \cap W^s(p_7)$, puesto que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u(t), v(t)) = (\alpha, \alpha) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), v(t)) = (\alpha, \alpha - \pi).$$



(a) $n < m$

(b) $n = m$



(c) $n > m$

Figura 2.5: Flujos para los casos $m + n \geq 8$

Esto implica que la curva de perfil $\gamma(t)$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \tan \alpha \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \tan \alpha,$$

lo cual muestra que $\gamma(t)$ es asintótica a $y(t) = (\tan \alpha)x(t)$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Por otra parte, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \tan \alpha \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \tan(\alpha - \pi).$$

Como $\tan \alpha = \tan(\alpha - \pi)$ tenemos que γ es asintótica a $y(t) = (\tan \alpha)x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto prueba el caso (4). Los casos (5) y (6) pueden tratarse de manera similar. Veamos los casos (7)-(10). En el caso de (7) de la Proposición 2.7 tenemos que $\{\phi(t)\} \subset W^s(p_2) \cap W^u(p_6)$, esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

la cual cumple

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dy}{dx} = \tan \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Este hecho implica la ortogonalidad en el caso (7). Para mostrar que la curva de perfil es la gráfica sobre esta proyección sobre el eje x , notemos que la órbita asociada $(u(t), v(t))$ está contenida en el conjunto $D_1^+ = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Como $\tan v(t) = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$, tenemos que para cada punto en la curva de perfil $\frac{dy}{dx} > 0$. El teorema de la función implícita implica que la curva de perfil es una gráfica con respecto del eje x .

Los casos (8) al (10) pueden tratarse de manera similar. □

Lema 2.4. La curva de perfil γ tiene un punto de inflexión si y sólo si $\{\phi(t)\}$ interseca a la curva $v = v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right)$ o interseca a la curva $v = v_2(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi$.

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que $\frac{d^2y}{dx^2}$ o $\frac{d^2x}{dy^2}$ en las ecuaciones (2.6) y (2.5) cambian de signo si y sólo si

$$(m-1)y \frac{dy}{dx} - (n-1)x = 0 \quad \text{o} \quad (m-1)y - (n-1) \frac{dx}{dy} x = 0.$$

Cada una de las ecuaciones anteriores equivale, al hacer la transformación en el plano (u, v) a las relaciones

$$v_1(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) \quad \text{o} \quad v_2(u) = \arctan\left(\frac{n-1}{m-1} \cot u\right) - \pi.$$

□

Ahora estudiaremos el caso cuando $m + n \leq 7$.

Proposición 2.11. Sean $m, n \geq 3$ tales que $m + n \leq 7$. Las curvas de perfil correspondientes a los casos (4)-(10) en la Proposición 2.7 intersecan al rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ una infinidad de veces.

Demostración. Por el Corolario 2.8, cada órbita $\{\phi(t)\}$ es de cierto modo una espiral en p_7 que corta una infinidad de veces a la línea $u = \alpha$. Esta línea corresponde al rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$, lo que demuestra la Proposición. \square

Ahora veremos el caso cuando $m + n \geq 8$.

Proposición 2.12. Sean $m, n \geq 3$ enteros tales que $m + n \geq 8$. Las curvas de perfil de los casos (4)-(10) en la Proposición 2.7

1. Estas curvas de perfil corresponden a las órbitas $\{\phi(t)\}$ que satisface (a) en la Proposición 2.9, están siempre debajo del rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ y tienen un único punto de inflexión.
2. Estas curvas de perfil corresponden a las órbitas $\{\phi(t)\}$ que satisface (2) en la Proposición 2.9, son encajadas y tienen solamente dos puntos de inflexión.
3. Estas curvas de perfil corresponden a las órbitas $\{\phi\}$ que satisfacen (3) en la Proposición 2.9, están siempre sobre el rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ y tienen solamente un punto de inflexión.

Demostración. Las afirmaciones (1) y (3) son reformulaciones del comportamiento de los casos correspondientes en la Proposición 2.9, usando también el Lema 2.4.

Por otra parte, para el caso (2) de la Proposición 2.9 y el Lema 2.4 tenemos que una curva del perfil γ de tipo (2) en la Proposición actual tiene solamente dos puntos de la inflexión.

Probaremos ahora que la curva de perfil γ no tiene autointersecciones. Sea $\{\phi(t)\}$ una órbita asociada a γ . Por (3) en la Proposición 2.9, existen $t_0 < t_1$ tal que $u'(t_0) = u'(t_1) = 0$ y $u(t_0) = u(t_1)$.

Afirmamos que $\{\phi(t)\}$ restringida a $[t_0, t_1]$ se anula también en cada línea $u = \beta$ para $u(t_0) < \beta < u(t_1)$. Si no fuera el caso entonces existirían β y $t_0 < t_2 < t_3 < t_1$ tales que $u(t_2) = u(t_3) = \beta$. Por el teorema del valor medio existe $t^* \in (t_2, t_3)$ tal que $u'(t^*) = 0$. Por tanto $\{\phi(t^*)\}$ está en la recta $v = u$ o en la recta $v = u - \pi$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Esta afirmación implica que γ restringida a $[t_0, t_1]$ se anula en cada línea $y = (\tan \beta)x$ para $u(t_0) < \beta < u(t_1)$ y así, la curva $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ está encajada en el plano x, y . Observemos que los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ están en lados opuestos de la línea $y = (\tan \beta)x$, pues $\{\phi(t)\}$ interseca solamente una vez $u = \alpha$. De manera similar, los conjuntos $\gamma(-\infty, t_0]$ y $\gamma[t_1, \infty)$

están en lados opuestos de la recta $y = (\tan \alpha)x$.

De esta misma forma, si la curva suave γ tiene autointersecciones, éstas deben ocurrir del mismo lado de la recta $y = (\tan \alpha)x$. Pero la existencia de tales autointersecciones implica la existencia de más de tres puntos de inflexión en γ , lo cual contradice lo probado anteriormente. \square

2.4. Clasificación de las Hipersuperficies Mínimas Invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ en \mathbb{R}^{m+n}

En esta sección finalmente traducimos el comportamiento de las trayectorias del campo \mathfrak{X} y mostraremos que las curvas de perfil dan la clasificación de nuestras hipersuperficies. Aquí utilizamos los siguientes resultados referentes a hipersuperficies M en \mathbb{R}^{m+n} invariantes bajo $O(m) \times O(n)$: M está encajada si y sólo si la curva de perfil asociada a la curva de perfil $\gamma(t)$ está encajada en el espacio de órbitas. Más aún, si la órbita de \mathfrak{X} asociada a la curva de perfil $\gamma(t)$ está definida para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces la hipersuperficie correspondiente es completa (véase [10]).

Utilizaremos como herramienta principal la Proposición 2.7. Está claro que los primeros dos casos en la Proposición dan lugar a múltiples variedades degeneradas de dimensiones m o n .

Antes de indicar y probar nuestros teoremas de clasificación, está claro que los casos $m+n \leq 7$ y $m+n \geq 8$ se deben tratar por separado. Ahora describimos el primer caso, que se prueba con mucho detalle en [9].

Teorema 2.13. Dados enteros $m, n \geq 3$ tales que $m+n \leq 7$, toda hipersuperficie mínima $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ no extendible invariante bajo $O(m) \times O(n)$ es una de los siguientes tipos

1. M es un cono $\mathcal{C}_{m,n}$ con vértice en el origen, generado por el rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$.
2. M es una hipersuperficie completa inmersa que tiene autointersecciones e interseca una infinidad numerable de veces a $\mathcal{C}_{m,n}$ y se aproxima a tal cono asintóticamente.
3. M es una hipersuperficie completa encajada que interseca a $\mathcal{C}_{m,n}$ una infinidad numerable de veces, se aproxima a tal cono asintóticamente e interseca ortogonalmente a $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ o $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Demostración. El caso (1) se sigue de la Proposición 2.10. La prueba para el caso (2) es similar a la del Lema 3.6 (ii) de [9].

Para el caso (3), las curvas de perfil corresponden a las separatrices e las singularidades de \mathfrak{X} contenidas en $(0, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$. La afirmación se sigue de los Corolarios 2.8 y los casos 7-10 de la Proposición 2.10. Véase la Figura 2.6. \square

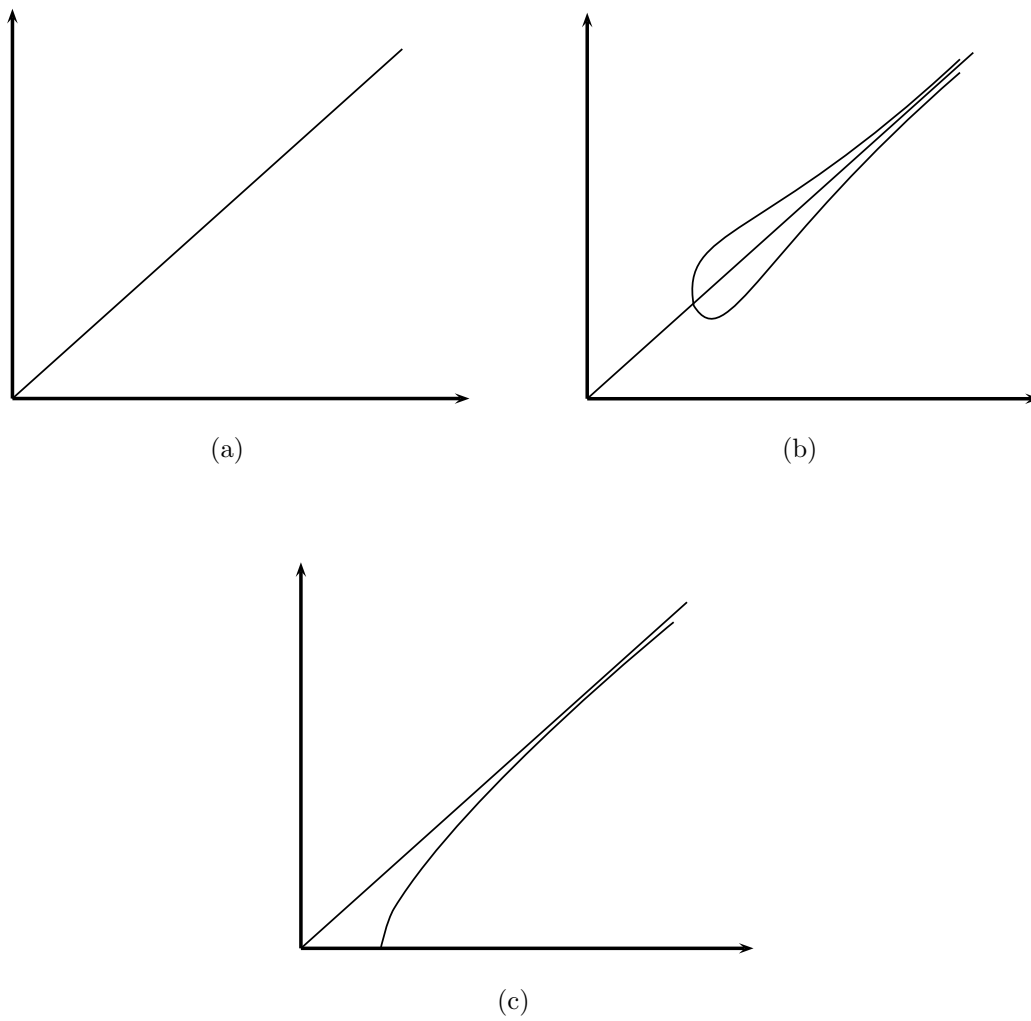


Figura 2.6: Curvas de perfil que generan las hipersuperficies del Teorema 2.13

Ahora consideraremos el caso $m + n \geq 8$.

Teorema 2.14. Dados enteros $m, n \geq 3$ tales que $m + n \geq 8$, toda hipersuperficie mínima $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ no extendible e invariante bajo $O(m) \times O(n)$ es de uno de los siguientes tipos:

1. M es un cono $\mathcal{C}_{m,n}$ con vértice en el origen, generado por el rayo $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$.
2. M es una hipersuperficie completa inmersa que no interseca a $\mathcal{C}_{m,n}$ y que se aproxima al cono $\mathcal{C}_{m,n}$ de manera asintótica.
3. M es una hipersuperficie completa encajada que interseca al cono $\mathcal{C}_{m,n}$ una vez y se aproxima a tal cono de manera asintótica.
4. M es una hipersuperficie encajada completa la cual no interseca a $\mathcal{C}_{m,n}$, se aproxima de manera asintótica al cono $\mathcal{C}_{m,n}$ e interseca ortogonalmente a $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ o a $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

(Véase la Figura 2.7.)

Demostración. El caso (1) se sigue de la Proposición 2.10. En el caso (2), las curvas de perfil están asociadas a los casos (1) y (3) dados en la Proposición 2.12. La Proposición 2.12 implica que tales curvas de perfil no intersecan la línea $y = \sqrt{\frac{n-1}{m-1}}x$ y son doblemente asintóticas a esta línea. Esto implica que la hipersuperficie asociada es asintótica al cono $\mathcal{C}_{m,n}$.

El caso (3) corresponde a las órbitas $\{\phi(t)\}$ que satisfacen (2) en la Proposición 2.12. Por lo ya desarrollado en esta sección tenemos que las curvas están encajadas en el plano y por lo tanto sus hipersuperficies asociadas también lo están en \mathbb{R}^{m+n} .

Para el caso (4), consideremos la curvas de los casos (7)-(10) en la Proposición 2.10. También estas curvas encajadas corresponden a hipersuperficies encajadas.

En los casos (2)-(4), las curvas de perfil son completas en el espacio de órbitas y entonces las correspondientes órbitas de \mathfrak{X} son completas. \square

2.5. Estabilidad de Hipersuperficies Mínimas Invariantes bajo $O(m) \times O(n)$

A continuación resumiremos las definiciones y los resultados de la sección 1.2 para proceder a estudiar la estabilidad de hipersuperficies mínimas invariantes bajo $O(m) \times O(n)$.

Al considerar el problema variacional de minimizar el área de una hipersuperficie inmersa $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$A(\phi) = \int_D dM \tag{2.12}$$

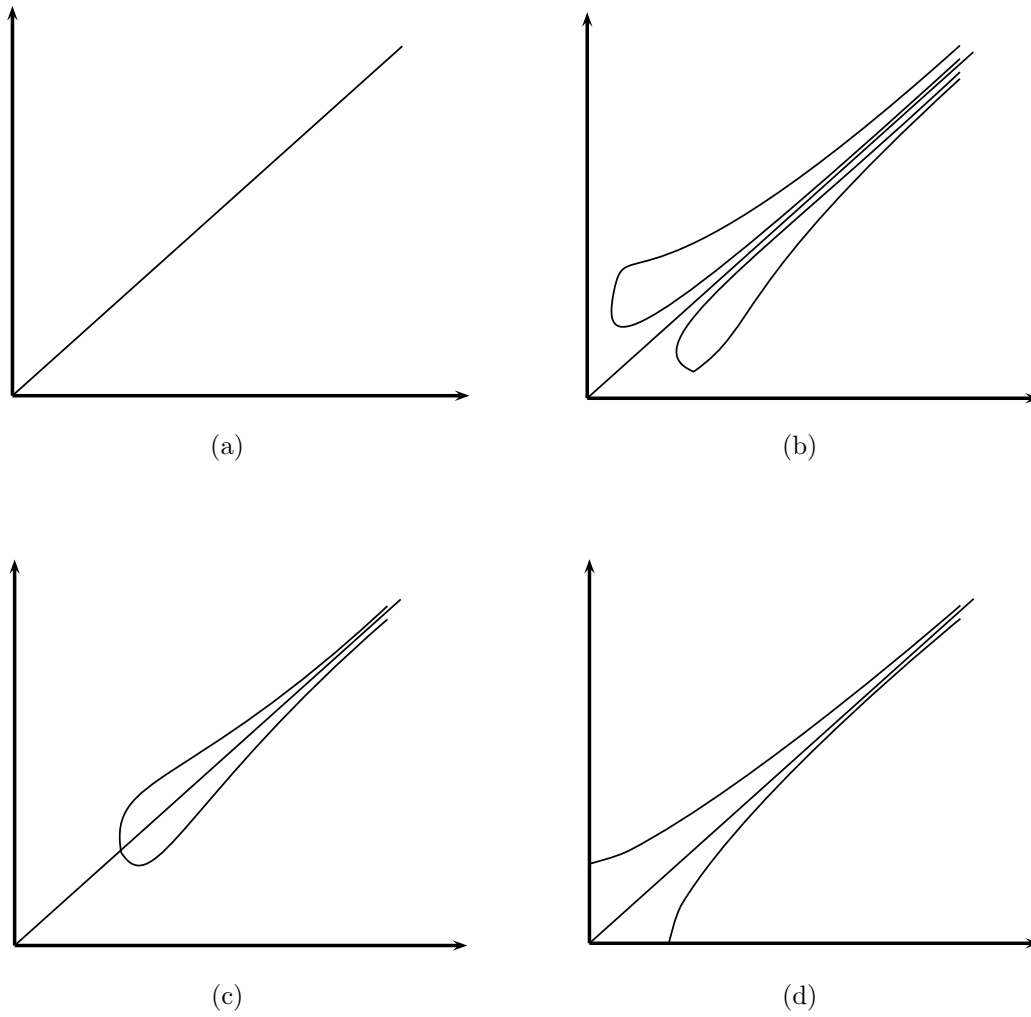


Figura 2.7: Curvas de perfil para $m + n \geq 8$

para las variaciones que preservan volumen y cuya componente normal f posee soporte compacto, se obtiene que

$$A'(t) = - \int_D H_1(t) f(t) dM_t$$

donde $f(t)$ es la componente normal de la variación.

Para estas variaciones con soporte compacto y que preservan volumen, la segunda derivada de A en $t = 0$ está dada por

$$A''(0)f = - \int_D (f \Delta f + \|B\|^2 f^2) dM$$

donde Δ denota el operador de Laplace, $\|B\|^2$ es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de la inmersión ϕ y f es la componente normal de la variación X .

Definición 46. Decimos que la inmersión ϕ es *estable* si y sólo si $A''(0) \geq 0$ para toda $g \in C_c^\infty(D)$.

Asociada a la fórmula de la segunda variación tenemos el operador diferencial de segundo orden

$$T = \Delta + \|B\|^2 I.$$

El operador T es elíptico y se le conoce como *operador de Jacobi*.

Del Lema 1.3 obtenemos la siguiente proposición cuyos detalles pueden consultarse en [10].

Proposición 2.15. El operador de Jacobi T asociado a las hipersuperficies M de \mathbb{R}^{m+n} invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ con curvatura $H_1 = 0$, es un operador elíptico.

La siguiente Proposición se demuestra también en [10].

Proposición 2.16. Una inmersión mínima ϕ es estable si y sólo si existe una función positiva $h \in C_c^\infty(D)$ definida en M que satisface $Th = 0$.

Por el Lema 1.3, dada una inmersión mínima orientable (M, ϕ) con campo vectorial normal η , la función soporte $h = \langle \phi, \eta \rangle$ satisface $Th = 0$.

Definición 47. El *índice del operador T en D* es la dimensión maximal del subespacio de $C_c^\infty(D)$ donde la forma cuadrática

$$I(g, g) = - \int_D g T g dM$$

es definida negativa. El *índice de T en M^k* se define como

$$\text{Ind}(T, M^k) = \sup_{D \subset M^k} \text{Ind}(T, D),$$

donde el supremo es tomado sobre todos los dominios D relativamente compactos en M^k .

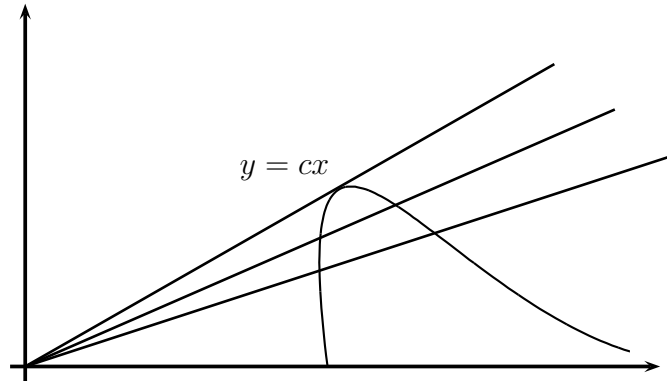


Figura 2.8: Inestabilidad de una curva

Observemos que la función soporte $h(t) = \langle \phi, \eta \rangle$ se anula si y sólo si $y'x - x'y = 0$. Resolviendo la ecuación diferencial, tenemos que es equivalente que $y = cx$. Es decir, para que esto suceda, las rectas que pasan por el origen deben ser tangentes a la curva de perfil en los puntos donde se intersecan. De esta manera, las curvas de perfil que tengan alguna tangencia a alguna recta de la forma $y = cx$ no pueden ser estables. Consecuentemente, las curvas candidatas a ser estables son aquellas que no tienen tangencia con las rectas $y = cx$ (véase la figura 2.8).

Usando la transformación de Bombieri-de Giorgi- Giusti se tiene que $h(t) = y'x - x'y = u'(t)(x^2 + y^2)$. Así, traducimos el hecho de que h se anule a que $u'(t) = 0$ y por tanto aquellas hipersuperficies que sean candidatas a ser estables deberán cumplir que $u'(t) \neq 0$ para toda t .

Con las observaciones anteriores, procedemos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.17. Sean $m, n \geq 3$ tales que $m + n \leq 7$. Cada hipersuperficie mínima M completa e invariante bajo $O(m) \times O(n)$ en \mathbb{R}^{m+n} tiene índice infinito.

Demostración. Por las parametrizaciones de la inmersión f se tiene que la función soporte h de M puede expresarse como

$$h(t) = -u'(t)(x(t)^2 + y(t)^2)$$

la cual depende únicamente de la curva de perfil. Basta estudiar el conjunto donde $u'(t) = 0$.

Para el caso de los puntos singulares p_6 y p_7 (que son focos hiperbólicos), cada trayectoria en $W^u(p_6)$ interseca un número infinito numerable de veces a la línea $u = v$. Entonces existe una sucesión creciente y acotada de puntos t_k tal que $u'(t_k) = 0$. Esto implica la existencia de una sucesión creciente de conjuntos compactos

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_k \subset \cdots \subset M$$

tal que $h|_{\partial D_k} = 0$, donde ∂D_k es la órbita de $\gamma(t_k)$ bajo la acción del grupo de Lie $O(m) \times O(n)$. El teorema del índice de Morse (véase [10]) implica que $\text{Ind}(T, M)$ es infinito. \square

Teorema 2.18. Sean $m, n \geq 3$ tales que $m + n \geq 8$. Las únicas hipersuperficies mínimas estables e invariantes bajo $O(m) \times O(n)$ son las de tipo (4) dadas en el Teorema 2.14.

Demostración. En este caso los puntos singulares hiperbólicos son nodos. Las curvas separatrices $\phi(t)$ dadas en la Proposición 2.6 nunca intersecan a las rectas $u = v$ y $v = u - \pi$ y por tanto $u'(t) \neq 0$ para toda t . Esto implica que las funciones soporte asociadas nunca se anulan a lo largo de la curva. Por la Proposición 2.16, las hipersuperficies son estables. La unicidad se sigue de las Proposiciones 2.6 y 2.7. \square

De ésta manera ya que las hipersuperficies asociadas a las curvas de perfil de tipo (4) en el Teorema 2.14, son homeomorfas a $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{n-1}$ o a $\mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{R}^n$, se tiene el importante resultado:

Teorema 2.19. Existen hipersuperficies mínimas estables, completas y encajadas en \mathbb{R}^{m+n} para $m + n \geq 8$ con $m, n \geq 3$, que no son homeomorfas a \mathbb{R}^{m+n-1} .

Conclusiones

Mediante técnicas clásicas de geometría diferencial equivariante y sistemas dinámicos, el trabajo presentado muestra ejemplos de hipersuperficies mínimas estables, completas y encajadas en \mathbb{R}^{m+n} para $m+n \geq 8$ con $m, n \geq 3$, que no son homeomorfas a \mathbb{R}^{m+n-1} .

Dichas hipersuperficies muestran la existencia de soluciones a la pregunta del teorema generalizado de Bernstein que poseen la característica de ser estables, completas y la propiedad de estar encajadas.

El siguiente paso en el estudio de hipersuperficies en \mathbb{R}^{m+n} es mostrar ejemplos de hipersuperficies con curvatura media constante no nula que posean propiedades similares a las obtenidas en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Hsiang W., Lawson B., *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, J. Differential Geometry, tomo 5, (1971), páginas 1–38
- [2] De Giorgi E., *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, tomo 19, (1965), páginas 79–85
- [3] Almgren F.J., *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. Math., tomo 74, (1966), páginas 277–292
- [4] Simons J., *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. Math., tomo 88, n° 1, (1968), páginas 62–105
- [5] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., *Minimal cones and Bernstein problem*, Invent. Math., tomo 7, (1969), páginas 243–269
- [6] Delaunay C., *Sur la surface de revolution dont la courbature moyenne est constante.*, J. Math. Pure Appl., tomo 16, (1841), páginas 309–321
- [7] do Carmo M.P., Dajczer M., *Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature.*, Trans AMS, tomo 277, n° 2, (1983), páginas 685–709
- [8] Hsiang Wu-Yi, *Generalized Rotational Hypersurfaces of constant mean curvature in the euclidean spaces I*, Journal of Differential Equations, tomo 17, (1982), páginas 337–356
- [9] Alencar H., *Minimal Hypersurfaces of \mathbb{R}^{2m} invariant by $SO(m) \times SO(m)$* , Transactions of the American Mathematical Society, tomo 337, n° 1
- [10] Sato J., *Stability of $O(p + 1) \times O(p + 1)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature in Euclidean space*, Ann. Global Anal. Geom., tomo 22, (2002), páginas 135–153
- [11] Alencar H., Barros A., Palmas O., Reyes J., Santos W., *$O(m) \times O(n)$ -Invariant minimal hypersurfaces in \mathbb{R}^{m+n}* , Annals of Global Analysis and Geometry, tomo 7, (2004), páginas 243–269
- [12] do Carmo M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitarios, Sociedade Brasileira de Matemática, **2005**, primera edición

- [13] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Nóvikov S. P., *Geometría Moderna. Métodos y aplicaciones.*, tomo I, URSS, **2000**, cuarta edición
- [14] Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Nóvikov S. P., *Geometría Moderna. Métodos y aplicaciones.*, tomo II, URSS, **2000**, cuarta edición
- [15] Palmas O., Reyes J., *Curso de Geometría Diferencial*, tomo Parte 1., Las Prensas de Ciencias, **2005**, primera edición
- [16] do Carmo M. P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, **1992**
- [17] Fraleigh J. B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison Wesley, **2002**, séptima edición
- [18] Irwin M.C., *Smooth Dynamical Systems*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, **1980**
- [19] Barbosa J.L., do Carmo M.P., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z., , n^o 185, (1984), páginas 339–353
- [20] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, Springer, **1996**, segunda edición
- [21] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, **1990**, primera edición
- [22] Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, tomo 42, Springer-Verlag, **1986**, segunda edición
- [23] Palis J., De Melo W., *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction*, Springer-Verlag, **1980**, primera edición

Índice alfabético

- G -acción, 13
- α -conjunto límite, 24
- α -límite de p , 25
- α -punto límite, 24
- $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, 7
- ω -conjunto límite, 24
- ω -límite de p , 25
- ω -punto límite, 24
- órbita, 13
 - cerrada, 24
- índice
 - del operador T en D , 53
- acción, 13
 - derecha, 13
 - diagonal, 15
 - izquierda, 13
 - transitiva, 13
- atlas, 8
- campo
 - vectorial, 22
 - vectorial completo, 24
- carta, 7
- conjunto
 - límite de γ , 24
 - negativamente invariante, 24
 - positivamente invariante, 24
- curva
 - de perfil, 16
 - diferenciable, 9
 - geodésica, 12
 - integral, 23
 - parametrizada por longitud de arco, 11
 - regular, 11
 - solución, 23
 - vector tangente, 9
- curvas
 - equivalentes, 9
 - curvatura media, 12
 - curvaturas principales, 12
- de clase \mathcal{C}^k , 8
- difeomorfismo
 - de clase \mathcal{C}^k , 9
- diferencial, 10
- ecuación
 - de Jacobi, 22
- el subgrupo de isotropía, 13
- encaje, 10
- espacio
 - de órbitas, 14
 - estable, 27
 - homogéneo, 13
 - inestable, 27
 - normal, 10
 - tangente, 9, 10
 - topológico
 - de Hausdorff, 7
- estabilizador del punto x , 13
- estable, 21
- estructura de la órbita de la G -acción, 14
- flujo, 14, 23
 - lineal, 25
- frontera conjugada, 22
- función vectorial, 7
- grupo
 - a un parámetro, 23
 - de Lie, 12
 - $O(m) \times O(n)$, 29

- hipersuperficie, 8
 - diferenciable, 8
 - mínima, 12
- inmersión, 10
 - mínima, 12
- invariante
 - bajo el flujo, 24
- longitud de arco, 11
- operador
 - de Jacobi, 20
- ortogonal real a dimensión n , 12
- Primera Forma Fundamental, 11
- primera frontera conjugada, 22
- producto directo de las dos acciones, 15
- punto
 - centro, 24
 - nodo estable, 24
 - nodo inestable, 24
 - silla, 24
 - singular, 23
 - singular hiperbólico, 23
- región, 7
- Segunda Forma Fundamental, 11
 - de una inmersión, 11
- singularidad, 23
- subvariedad, 8
 - diferenciable, 8
- superficie
 - catenoide, 18
 - de revolución, 15
 - helicoides, 16
- Teorema
 - criterio de Bendixson, 28
 - de Bendixson-Poincaré, 28
 - de Hartman-Grobman, 25
 - de la variedad local estable, 27
- topológicamente conjugados, 25
- transformación
 - de Bombieri-de Giorgi-Giusti, 32
 - trayectoria, 23
- variedad
 - diferenciable, 8
 - local estable, 27
 - local inestable, 27
 - Riemanniana, 11
 - Riemanniana completa, 12
 - topológica, 7
- variedades
 - difeomorfismos, 9

**Hipersuperficies mínimas
invariantes bajo el grupo
de Lie $O(m) \times O(n)$**

Mat. Victor Alberto Cruz Barriguete

Director de tesis:

Dr. J. Guadalupe Reyes Victoria

14 de junio de 2006

