



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POSGRADO EN FÍSICA**

**Gravitación y Mecánica Cuántica:
Desde un enfoque cosmológico y
una perspectiva fenomenológica.**

Tesis que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Física)

presenta el

Maestro en Ciencias

Luis Fernando Barragán Gil

Asesor de Tesis:

Dr. Abel Camacho Quintana

Vo. Bo.
Abel Camacho Q.

Jurado Evaluador

Dr. Alberto Alejandro García Díaz

Dr. Eckehard Erwin Willi Mielke

Dr. Manuel Fernández Guasti

Dr. Abel Camacho Quintana

Dr. Víctor Manuel Romero Rochín

Junio de 2011

**Gravitación y Mecánica Cuántica:
Desde un enfoque cosmológico y una
perspectiva fenomenológica.**

M. en C. Luis Fernando Barragán Gil

A MI ALMA MATER,
que me ha brindado,
no solo una profesión,
sino las experiencias
que me están
permitiendo
enfrentar
la vida.

A las personas que se han ido,
y que aun permanecen.

A mis padres,
hermanos, amigas y amigos.
que siempre han creído en mi,
más de lo que yo mismo lo hago.

AGRADECIMIENTOS.

- Al Dr. Abel Camacho, por el apoyo, los consejos y todo el tiempo brindado, que me han permitido escribir esta tesis doctoral; además, de las facilidades que permitieron una agradable estancia en la UAM-I durante mis estudios de posgrado.
- Al jurado evaluador por la revisión de éste trabajo, una mención especial al Dr. Manuel Fernández Guasti por la paciencia y la gran cantidad de horas otorgadas para la discusión técnica.
- Mis más sinceros agradecimientos al departamento de Física de la UAM-I que ha sido mi casa en los últimos 7 años de mi vida.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca No. 208211, que me permitió realizar los estudios de doctorado.
- A las personas que han influido en mi, los últimos 30 años, y por las cuales no sería quien soy.

*Los principios y leyes científicas no yacen sobre la superficie de la Naturaleza.
Éstos están escondidos, y deben ser arrebatados de la Naturaleza
por una técnica activa y elaborada de investigación.*
John Dewey (1859-1952)

RESUMEN

Dos elementos que han contribuido a modificar de manera radical nuestra visión del universo son la Mecánica Cuántica y la Teoría General de la Relatividad. La primera surgió como consecuencia de explicar fenómenos que la mecánica newtoniana no podía. La segunda, para unificar en forma consistente la relatividad especial y la interacción gravitacional.

Debido al gran éxito que han tenido cada una de estas teorías en forma independiente, el siguiente paso lógico es unificarlas en una teoría más general que llamamos teoría cuántica de la gravedad; la cuál debería tomar en cuenta, en forma consistente, el comportamiento cuántico y la gravedad. Sin embargo, éste proceso ha llevado casi el mismo tiempo que lleva establecida la Relatividad General y aún no disponemos de dicha formulación.

De principio, las teorías exhiben incompatibilidades, una de ellas, y quizás la más importante, es el concepto del Tiempo. En la Mecánica Cuántica el tiempo es una variable absoluta, como lo es el tiempo newtoniano; en la Relatividad General el tiempo es una variable dinámica local. Al aplicar los métodos de cuantización a la Relatividad General, se hace evidentes más problemas como el hecho de que sea necesario romper la covariancia de la teoría, y que parece no poseer una variable natural de tiempo.

Además, los problemas son no solo conceptuales, sino también están relacionados con la poca información que se tiene del comportamiento de la gravedad a escalas pequeñas, donde la Mecánica Cuántica lleva el rol clave, por lo que es necesario la realización de experimentos a nivel cuántico en presencia de interacción gravitacional.

En el presente trabajo se encararan los dos aspectos del intento de unificar ambas teorías, uno de ellos, completamente teórico, dentro de la cosmología cuántica supersimétrica y el otro asociado con la fenomenología de los fundamentos de las teorías métricas.

En el primer aspecto se resuelven las constricciones supersimétricas y de Lorentz, a diferentes niveles dentro del superespacio, es decir, tomando un modelo que está contenido en el midisuperespacio como lo es el modelo de Gowdy T^3 , y los que yacen en el minisuperespacio como son los modelos de Bianchi. Se muestra que, en efecto, existen estados físicos, tanto en el midi como en el minisuperespacio, lo que contradice lo afirmado en la literatura de que no existen estados físicos, lo que nos indica que esas afirmaciones tienen validez restringida y es necesario revisarlas.

En lo que concierne a la fenomenología, se estudia un condensado de Bose-Einstein y se muestra que la temperatura crítica se ve modificada con la presencia de un potencial gravitacional homogéneo, lo que nos permitiría usar a este sistema como una herramienta experimental para verificar la validez del Principio de Equivalencia de Einstein. Sin embargo, estudios previos en el contexto experimental recurren a una aproximación clásica para hacer la deducción de la temperatura del gas, pero este análisis esta en franca contradicción con la naturaleza del fenómeno. Aquí, se deduce una expresión que relaciona la temperatura del gas y el cambio de fase de un haz láser de referencia que interactúa con la nube atómica, el modelado de la interacción radiación-materia es mecánico-cuántico.

Índice general

1. Introducción General.	1
2. Cosmología Cuántica Supersimétrica	9
2.1. Introducción.	11
2.1.1. SUSY y el modelo estándar de partículas.	11
2.1.2. Estatus de la fenomenología de SUSY.	13
2.2. La Cosmología Cuántica Supersimétrica.	14
2.2.1. Formulación Canónica de la Supergravedad $N = 1$.	16
2.2.2. La Constricción de Lorentz.	28
2.2.3. Midisuperespacio de los modelos cosmológicos de Gowdy T^3 .	30
2.2.4. Minisuperespacio de los modelos de Bianchi.	34
2.2.5. Métrica del Bianchi tipo IX .	36
2.2.6. Los Modelos de Bianchi clase A.	41
3. Sobre los Fundamentos de la Relatividad General.	45
3.1. Los Fundamentos de la Relatividad General.	48
3.1.1. De la universalidad de κ a la validez de las teorías no-gravitacionales.	49
3.2. Experimentos de Alta Precisión sobre el EEP.	50
3.2.1. Experimentos sobre el WEP.	50
3.2.2. Experimentos sobre la Invariancia Local de Lorentz (LLI).	52
3.2.3. Experimentos sobre la Invariancia Local de Posición (LPI).	54
3.2.4. Pruebas de GR en el régimen de campo fuerte.	56
3.2.5. Pruebas Cuánticas sobre el EEP.	57
3.3. El EEP y los Condensados de Bose-Einstein.	61
3.3.1. Termodinámica de un gas ideal de bosones.	61
3.3.2. Un gas de bosones más realista en presencia de un campo gravitacional.	65
3.3.3. La temperatura de un BEC sin conceptos clásicos.	69
3.3.4. La realización del experimento.	77
4. Conclusiones y Perspectivas	80
4.1. Conclusiones.	80
4.2. Perspectivas.	83

Apéndice A. Materiales no-lineales y la generación del segundo armónico óptico	85
Apéndice B. El Bombeo Óptico y el problema del calentamiento.	89
Apéndice C. El uso de pulsos y los problemas experimentales.	91
C.1. La duración y el ancho espectral de un pulso, ¿Cómo se relacionan?	92
C.2. Un pulso propagándose en un medio transparente.	93

Capítulo 1

Introducción General.

*El objetivo real de mi investigación
ha sido siempre la simplificación
y unificación del sistema
de la física teórica.*
Albert Einstein (1879-1955).

Durante el siglo XX se tuvo un desarrollo científico y, en consecuencia, tecnológico que no ha tenido precedente con el cual compararlo; la razón es que éste no solo ha contribuido a cambiar nuestro estilo de vida sino que, además, modificó de manera radical la visión que habíamos tenido del universo mismo.

Dos elementos que han contribuido a dicho cambio fue la aparición de la Mecánica Cuántica (QM) y la Teoría General de la Relatividad (GR); la primera, construida para evitar las inconsistencias y contradicciones generadas al utilizar las ideas Newtonianas para explicar ciertos fenómenos físicos relacionados con la interacción radiación-materia; y la segunda, surgió como consecuencia de la unificación de la teoría especial de la relatividad y la interacción gravitacional de los cuerpos, en una forma consistente. Cabe mencionar que, en ambas teorías físicas, estuvo involucrada la genialidad del muy conocido científico de origen alemán Albert Einstein.

La QM empezó a dar señales de existencia a finales de 1900, cuando el físico alemán Max Planck propuso que el intercambio de energía entre el campo de radiación y la materia, tiene que llevarse a cabo a través de pequeños paquetes o quanta de energía proporcionales a la frecuencia angular de la radiación, lo cual lo llevó a descubrir la ley de radiación del calor, denominada ley de Planck, que explica el espectro de emisión de un cuerpo negro. Sin embargo, la propuesta de M. Planck tenía un error de consistencia (relacionado con la ahora conocida energía del punto cero) que fue corregido por A. Einstein una vez que utilizó las ideas estadísticas del físico hindú Satyendra Nath Bose [18]. En 1905, A. Einstein utilizó la propuesta de M. Planck (los quanta de energía) para darle explicación a un fenómeno que había mantenido en jaque a los físicos de finales del siglo XIX, el efecto fotoeléctrico, ya que después de la publicación de los trabajos de C. Huygens en el siglo XVII se creía que la luz era solamente de naturaleza ondulatoria y dicho comportamiento era inconsistente con lo observado en el laboratorio [78].

Hacia 1913, basando su trabajo en el modelo atómico de E. Rutherford, Niels Bohr cuantizó las órbitas electrónicas a través del momento angular, lo que le permitió deducir el ya bien conocido espectro del átomo de hidrogeno. Lo que motivó a muchos otros a aplicar la idea de Planck a átomos más complicados. En este periodo la mecánica cuántica esta íntimamente relacionada con la formulación de Hamilton y Hamilton-Jacobi, es decir,

muy cercana a la mecánica clásica en la forma de estudiar los problemas.

En 1925, Werner Heisenberg desarrolla un formalismo de la QM en el que subyace un gran pragmatismo, en vez de concentrarse en la evolución de los sistemas físicos de principio a fin, concentra sus esfuerzos en obtener información sabiendo el estado inicial y final del sistema, sin preocuparse demasiado por conocer en forma precisa lo ocurrido en el medio (ya no es importante el concepto de trayectoria). Concibe la idea de agrupar la información en forma de cuadros de doble entrada, que más tarde Max Born identificó con una forma de trabajar que ya había sido estudiada por los matemáticos y no era otra cosa que la teoría de matrices. Uno de los resultados más llamativos es que la multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo que toda asociación de cantidades físicas con matrices tendrá que reflejar este hecho matemático. Esto lleva a Heisenberg a enunciar el Principio de Incertidumbre. Finalmente, en 1926 la teoría cuántica alcanza un punto crucial, el físico austriaco Erwin Schrödinger publicó un trabajo denominado *Quantisierung als Eigenwertproblem* (La Cuantización como un problema de Valores Propios) [127], en donde se formula la QM ondulatoria, y más tarde muestra que esta forma de trabajar es completamente equivalente a la QM matricial de Heisenberg. Estos y muchos más trabajos debidos a Paul Dirac, Max Born y otros [125]; nos permiten formular a la QM en la siguiente forma axiomática [81]:

- Existe un espacio vectorial con campo en los números complejos para un sistema cuántico, cuyos elementos son los estados cuánticos del sistema; dicho espacio está dotado con una norma positivo definida.
- Un observable clásico es reemplazado por un operador Hermitiano que actúa sobre los elementos del espacio. Al medir un observable, el resultado debe coincidir con uno de los eigenvalores del operador en cuestión.
- Si q_i y p_i son las variables del espacio fase del sistema, sus correspondientes operadores cuánticos deben satisfacer $[\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar(\mathbf{1})_{jk}$, $[\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k] = [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = (\mathbf{0})_{jk}$ a un tiempo dado.
- Si un operador \mathbf{A} es, explícitamente, independiente del tiempo, su evolución temporal queda determinada por la ecuación de evolución de Heisenberg $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -i\hbar[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$,

que en la descripción de Schrödinger conduce a la ecuación de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \mathbf{H}|\psi\rangle$, donde \mathbf{H} y $|\psi\rangle$ son el operador hamiltoniano y la función de estado del sistema, respectivamente.

- En general, la medición de una variable física A en un sistema físico a un tiempo fijo produce un resultado aleatorio cuyo valor de expectación ésta dado por $\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | \mathbf{A}(t) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$.

La función de onda ψ , no es más que la amplitud de probabilidad de hallar a la partícula en cierto estado a un tiempo fijo, con respecto a cierto sistema de coordenadas, ya sea en el espacio de *momenta* o en el espacio de configuración. Como lo menciona Jun J. Sakurai al introducir su capítulo sobre la dinámica cuántica [123], el primer punto importante que debemos mantener en mente es que *el tiempo es solo un parámetro, no un operador. El tiempo no es un observable.*

En 1916, apareció publicado un artículo en la revista alemana *Annalen der Physik* bajo el título *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* (Las Bases de la Teoría General de la Relatividad) [48]; en dicho trabajo Albert Einstein estableció las ideas que permean muchos de los modelos que intentan dar una explicación a fenómenos observados en la naturaleza, que van desde los astrofísicos y cosmológicos hasta la física cuántica y de las partículas elementales. Ambas fronteras de la física se vuelven una al tratar de entender el origen del universo mismo, el Big Bang. Sin embargo, es necesario enfatizar que GR es una teoría clásica en el sentido que no se basa en principios de la QM, por lo que es importante conocer la teoría cuántica de la gravitación.

Tan pronto como la teoría cuántica de campos fue formulada, se comenzaron a realizar intentos para aplicarla a otros campos distintos al campo electromagnético. Como se comenta en [42], L. Rosenfeld [119] en 1930, fue el primero en aplicarla al campo gravitacional; notando las dificultades de índole técnica que involucraba el proceso de cuantización de la teoría. Realizó algunos primeros intentos para desarrollar las técnicas que permitieran manejarlas. De este primer intento se pudo pronosticar que una teoría cuántica de la gravitación estaba destinada a estar inextricablemente ligada a dificultades, no solo de índole técnica, sino yacentes en los fundamentos teóricos de la física de

partículas, dichos fundamentos están íntimamente relacionados a los principios de la QM.

Una de dichas dificultades es el problema del tiempo, la interpretación de la QM esta íntimamente relacionada con el carácter de variable absoluta que toma el tiempo, ya que el producto interno es una cantidad conservada en el tiempo y los elementos de matriz de algún operador mecánico-cuántico se calculan a un tiempo fijo; es decir, el tiempo en QM es un tiempo newtoniano. La transición a una teoría de campos cuántica relativista puede realizarse al reemplazar el tiempo newtoniano por un conjunto de parámetros tipo-tiempo asociados a la familia de sistemas inerciales relativistas, aunque continua siendo tratado como un parámetro externo de fondo. Sin embargo, en la GR el tiempo es una variable dinámica local, la geometría del espacio-tiempo influye sobre los relojes para permitirles medir el tiempo propio y estos a su vez reaccionan sobre la métrica cambiando la geometría. GR no parece poseer una variable temporal natural, mientras que la teoría cuántica se asienta sobre un tiempo privilegiado, un análisis más profundo respecto a esto se encuentra en [80].

Mucho trabajo se ha realizado para tratar de cuantizar a GR y acoplarla con campos de materia; en 1975, B. Zumino [144] afirma que la aplicación más interesante de la idea de la Supersimetría es la posibilidad de construir teorías unificadas de la gravitación y la materia. La Supersimetría denota un tipo particular de álgebra de Lie gradada (graded), los elementos de dicha álgebra se distinguen entre elementos pares e impares y su álgebra queda especificada dando para cualesquiera dos elementos su bracket de Lie, el cual de nuevo es un elemento del álgebra. Para dos elementos pares, o para uno par y otro impar el bracket de Lie (conmutador) es impar; para dos impares el bracket de Lie (anticommutador) es par. Un ejemplo sencillo es el siguiente, sea Q_a un espinor de Majorana de cuatro componentes, cuyo adjunto es $\bar{Q}_a = (Q^T \gamma^0)_a$, ahora sea \mathbf{P}_α el operador de 4-*momentum*; entonces, el álgebra de Lie gradada es:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -2(\gamma^\alpha)_{ab} \mathbf{P}_\alpha, \quad [Q_a, \mathbf{P}_\alpha] = [\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha] = 0. \quad (1.1)$$

Claramente los elementos impares del álgebra son los espinores, y los pares los 4-*momentum*. Si se incluyen los operadores de *momentum* angular $M_{\alpha\beta}$, esta nueva álgebra gradada es una extensión del álgebra del grupo de Poincaré.

Sin embargo, para construir una teoría de la gravitación y la materia, deben enfrentarse no solo los problemas subyacentes a la naturaleza altamente no-lineal de la Relatividad General, sino que además, a los que surgen al querer acoplar campos de espín en forma consistente (ver apéndice A en [38]). En [39], se presenta al candidato más simple para la unificación del campo gravitacional con un sistema de espín $3/2$; dicho sistema es la suma de la acción de Einstein-Hilbert y la asociada al campo no-masivo de Rarita-Schwinger, la consistencia esta relacionada a la invariancia de la teoría bajo transformaciones supersimétricas locales. La clave detrás de sus resultados yace en el uso de una formulación a primer orden para la gravitación, en donde tratan a los vierbeine y las conexiones en forma independiente.

A pesar de la consistencia, el modelo no esta libre de problemas, muchos de ellos relacionados con la función de estado del sistema, que van desde su existencia no-trivial, pasando por los problemas de normalización hasta su posible interpretación física; que para el caso de la QM no aparecen o pueden ser manejados adecuadamente.

Lo antes mencionado está completamente enmarcado en el ámbito de la física teórica. Sin embargo, toda teoría física debe tener una contraparte experimental por lo que es muy importante verificar si la aparente incompatibilidad entre la teoría cuántica y la relatividad general tiene como origen una posible incompatibilidad de los fundamentos experimentales que permiten formular cada una de ellas.

En la presente tesis se intenta abordar los dos aspectos:

- La parte experimental al proponer un experimento que, de realizarse, podría decirnos si la gravedad clásica tiene influencia sobre el comportamiento cuántico de la materia.
- La parte teórica, al seguir estudiando los modelos de la cosmología cuántica supersimétrica, y encarar uno de los problemas asociados a los estados del sistema, el de su existencia.

La presentación del trabajo es como sigue, en el capítulo 2 se estudia un modelo cosmológico en el ámbito de la cuantización supersimétrica de la GR, con la intención de hallar estados físicos no-triviales y encararlos con un resultado previo acerca de su

existencia. Este trabajo ya está publicado como *Is the non-physical state conjecture valid?* en *General Relativity and Gravitation* [87].

En el capítulo 3, discutimos los fundamentos de la GR lo más cuidadosamente posible y los experimentos que se han realizado para ponerlo a prueba, y se introduce una propuesta que intenta hacerlo desde un nivel cuántico, parte de este capítulo fue publicado como *Alternative method for the measurement of the temperature of a Bose-Einstein Condensate* en *Central European Journal of Physics* [24].

Capítulo 2

Cosmología Cuántica Supersimétrica

*El gran libro de la naturaleza está
escrito en símbolos matemáticos.*
Galileo Galilei (1564-1642)

2.1. Introducción.

La supersimetría (SUSY) es una simetría entre bosones y fermiones, es decir, esta requiere que el número de estados de helicidad de bosones y fermiones, en un multiplete, sea igual.

Las primeras ideas de supersimetría se consideran que aparecieron a principios de la década de 1970, sin embargo, una SUSY relacionando mesones y bariones fue propuesta en el contexto de la física hadrónica por H. Miyazawa [96] en 1966, pero su trabajo fue ignorado. A principios de la década de 1970, Yu. A. Golfand y E. P. Likhtman [58], D. V. Volkov y V. P. Akulov [136] y J. Wess y B. Zumino [138] redescubrieron la supersimetría, un radicalmente nuevo tipo de simetría del espacio-tiempo y campos fundamentales, la cual establece una relación entre partículas elementales de diferente naturaleza cuántica, bosones y fermiones, y unifica el espacio-tiempo y las simetrías internas del mundo microscópico.

Golfand y Likhtman fueron los primeros en mostrar que el álgebra de Poincaré puede ser extendida a través de la introducción de cuatro generadores espinoriales que anticonmutan (en 4D), los cuales después fueron llamados supercargas.

2.1.1. SUSY y el modelo estándar de partículas.

El modelo estándar (SM) ha pasado un muy gran número de pruebas experimentales y esta actualmente en un excelente acuerdo con los datos. Sin embargo, del lado teórico, muchos aspectos son insatisfactorios, conduciéndonos a sospechar que uno está viendo la manifestación de baja energía de una teoría más fundamental. Algunas de las dificultades son:

1. El modelo estándar tiene 19 parámetros ajustables. Se espera que una teoría fundamental tenga un número más pequeño de parámetros arbitrarios.
2. El rompimiento de $SU(2) \times U(1)$ se inserta a mano, en lugar de ser una consecuencia de principios teóricos del modelo. Es decir, el modelo estándar puede acomodar el rompimiento espontáneo electrodébil, pero no explica el origen.

3. No hay una unificación electrodébil real, ya que, el grupo del modelo estándar es un producto de grupos.
4. Quizás el asunto mas serio es el problema de jerarquías de norma (gauge hierarchy). Las correcciones de lazo a la masa del Higgs son cuadráticamente divergentes. Una posibilidad alterna es elegir la masa para cancelar las correcciones, esto conduce al problema de *fine tuning*.

Una de las principales motivaciones para SUSY viene de las contribuciones cuadráticamente divergentes a la masa cuadrada del Higgs (el problema de jerarquías). Las interacciones mecánico-cuánticas del bosón de Higgs causa una renormalización de la masa del Higgs y a menos que haya una cancelación accidental, el tamaño natural de la masa del Higgs es la mas alta posible. SUSY reduce el tamaño de las correcciones por tener cancelaciones automáticas entre interacciones de Higgs bosónicas y fermiónicas. Si SUSY es restaurada a la escala débil, entonces, la masa del Higgs esta relacionada al rompimiento de SUSY el cual puede ser inducido de efectos no-perturbativos pequeños explicando las muy diferentes escalas en las interacciones débiles y gravitacionales. Otra característica es el hecho de que SUSY proporciona un candidato para la materia oscura y un mecanismo natural para el rompimiento de la simetría electrodébil.

La primera versión SUSY realista del modelo estándar de partículas fue propuesto en 1981 por Savas Dimopoulos y Howard Georgi [45] es llamado Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo o en ingles Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM). Este fue propuesto para resolver el problema de jerarquías y predice super-compañeros con masas entre los 100 GeV y 1 TeV. La incorporación de la supersimetría en el modelo estándar requiere duplicar el número de partículas ya que no hay forma de que alguna de las partículas del modelo estándar pueda ser super-compañera de alguna otra. Con la adición de nuevas partículas, hay muchas posibilidades de nuevas interacciones.

Para obtener un rompimiento espontáneo aceptable de la supersimetría, desde el punto de vista de la fenomenología del problema, parece que es necesario promover a la supersimetría global a un punto de vista local. Lo que resulta en que la gravedad debe ser incluida en el análisis, es decir, supersimetría local es *Supergravedad*, para ver porque la

supersimetría nos obliga a incluir gravedad, en [9] se muestra un análisis con el sistema supersimétrico global mas simple.

2.1.2. Estatus de la fenomenología de SUSY.

SUSY es un blanco ideal para las actuales búsquedas de los colisionadores, ya que estos están dentro de la escala de masa esperada. Se espera que partículas SUSY puedan ser descubiertas en el gran colisionador de electrón -positrón (LEP), Tevatrón [62] o el gran colisionador de hadrones. El rango relevante para resolver el problema de la cancelación fina en la auto-energía del bosón de Higgs es cubierto por estos experimentos.

Análisis de producción de sLeptons, sQuarks, Charginos, Neutralinos y Bosones de Higgs neutros fueron realizados con la colección de datos por los detectores ALEPH, DELPHI y OPAL en el LEP con energías hasta de 209.2 GeV. No se observo evidencia para alguna de las señales [31]. La unión de las tres constantes de acoplamiento del modelo estándar en una sola escala de unificación solo puede ser obtenida suponiendo SUSY, y esta en completo acuerdo con los resultados experimentales del acelerador LEP en el CERN. Sin embargo, la nula evidencia de super-compañeros a las partículas elementales conocidas, indica que SUSY esta rota, conduciendo a la existencia de partículas más masivas que las partículas elementales. Existen argumentos que conducen a la conclusión de que la masa de los super-compañeros debe estar en el rango de los 100 a los 1000 GeV, es decir, 100 a 1000 veces mas pesadas que el protón.

Una de las principales motivaciones de los experimentos del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN), que ya esta realizando colisiones, es la búsqueda de superpartículas, es decir, partículas predichas por el MSSM. La región del MSSM donde SUSY puede ser descubierta esta siendo investigada. Una de las metas del LHC sera descubrir la escala débil SUSY o excluirla.

EL LHC es un un colisionador protón-protón que explora energías de alrededor de 1 TeV, los dos mas grandes experimentos de seis en planeación

- Solenoide Compacto para Muones (CMS) y

- Un Aparato toroidal del LHC (ATLAS).

Tienen una colaboración mutua y seleccionaron cinco puntos en el modelo de supergravedad mínimo para su análisis [1]. Dado el rango de energías es viable que el LHC de resultados contundentes sobre SUSY, como lo analiza S. Khalil [72].

2.2. La Cosmología Cuántica Supersimétrica.

Como hemos visto, una consecuencia de la búsqueda de una teoría unificada de las fuerzas fundamentales ha llevado a considerar modelos de supergravedad, es decir, modelos de gravedad consistentes con SUSY. Sabemos que la gravedad es la fuerza fundamental que domina a escalas cosmológicas, sin embargo, basados en las observaciones y modelos actuales, el universo tuvo un tamaño en que los efectos cuánticos fueron importantes y, en principio, dichos efectos tuvieron una influencia que lo llevaron a ser el que actualmente observamos, es decir, un enfoque mecánico cuántico a los modelos cosmológicos se vuelve necesario en el estudio de la evolución del universo temprano.

La cosmología cuántica es la metodología para hacer este análisis, su objetivo es explicar el Cómo y Por qué nuestro universo es de esta forma, empleando a la Mecánica Cuántica para estudiar al universo como un todo. La investigación en esta área comienza con los trabajos de C. Misner, J. Wheeler y B. DeWitt [9, 93, 94, 139, 42] , que construyen los fundamentos de la gravedad cuántica canónica, establecen las condiciones que debe satisfacer un estado cuántico de universo y definen el espacio de configuración en cuestión (Superespacio). Casi todos los modelos considerados son modelos con un finito número de grados de libertad, el resto son *congelados*, para realizar esto se pide que a los campos ser espacialmente homogéneos, a este sector homogéneo del superespacio, es decir, el conjunto de modelos homogéneos es conocido como el minisuperespacio, termino acuñado por C. Misner [94].

La creencia de que estados físicos no pueden ser hallados en el caso de la supergravedad cuántica (con un numero finito de campos de gravitino) data de 1994 [28], y esta es una afirmación aceptada sin dudar.

Carroll et al. [28] refutan la afirmación de D'Eath acerca de la existencia de funcionales

de estado bosónicas [36]. Esto es realizado al recurrir a un argumento de escalamiento, el cual es aplicado a la restricción supersimétrica. El aspecto relacionado al caso de un número finito de números de Grassmann fue tratado introduciendo un conjunto de ecuaciones, la llamada descomposición en modos del campo del gravitino, sobre una superficie de valores iniciales. La independencia lineal de los términos que aparecen en las ecuaciones de restricción requiere el explícito conocimiento de las funciones de los modos [28]. Ellas se pueden resolver explícitamente solo si el valor inicial de la superficie es una 3-superficie plana, cuando la independencia lineal es fácilmente mostrada. Además, ellos creen, pero no tienen prueba explícita, que esta propiedad se mantiene para una superficie general [28]. Esta conjetura es la parte medular para la generalización de los autores, quienes concluyen que todos los estados físicos en la supergravedad canónicamente cuantizada deben tener un número infinito de números de Grassmann. Tiene que ser enfatizado que su prueba está restringida solo inicialmente a 3-superficies planas y la generalización está basada sobre una conjetura, y no sobre una prueba explícita.

Vale la pena enfatizar el hecho que ésta suposición no fue sujeta a escrutinio, es decir, la relación entre la independencia de las funciones modo con las propiedades de la superficie de valores iniciales permanece como una pregunta abierta. Además, la revisión de la mencionada creencia usando el campo de espín-3/2 libre [28] y la supuesta compatibilidad con un análisis topológico $(1+2)$ -dimensional en una supergravedad $N = 2$ involucra solo 3-superficies planas. Por lo tanto, este argumento implica que la mencionada conjetura solo es eso, una conjetura.

Macías et. al. investigaron la cuantización canónica en el sistema de supergravedad $N = 1$ para el caso de un midisuperespacio muy simple descrito por modelos cosmológicos de Gowdy T^3 . Ellos consideran una cosmología cuántica supersimétrica en el mencionado midisuperespacio, donde se utiliza una representación matricial para el covector-espino del gravitino, encontrando que hay, de hecho, estados físicos en el sector midisuperespacio de la teoría, un hecho que contradice la mencionada conjetura de no-estados físicos. Después de una sugerencia de Matzner, en este trabajo se realiza el corte dimensional del midisuperespacio de los modelos de Gowdy T^3 , para ver si los estados físicos encontrados en los modelos de midisuperespacio mencionados se reducen a estados físicos de

minisuperespacio no-triviales. Debido a que este es de hecho el caso revisamos también los modelos de minisuperespacio Bianchi clase A y encontramos también estados físicos no-triviales.

La presentación de este capítulo es como sigue: en la sección 2.2.1 la formulación canónica de una supergravedad sencilla es revisada brevemente. En la sección 2.2.2, presentamos una solución de la constricción de Lorentz. En la sección 2.2.3, los modelos cosmológicos de Gowdy T^3 y soluciones no-triviales para la constricción supersimétrica son presentados. En la sección 2.2.4, enfatizamos el hecho de que la variable usada para la parametrización de los modelos de Bianchi no es un tiempo real sino un elemento de volumen. En la sección 2.2.5 analizamos los modelos de Bianchi tipo IX y encontramos los correspondientes estados físicos. En la sección 2.2.6, generalizamos nuestros resultados a los modelos Bianchi clase A completos. Y hacia el final de la tesis presentamos las conclusiones y perspectivas.

2.2.1. Formulación Canónica de la Supergravedad $N = 1$.

De acuerdo con [130] P. Dirac, fue el primero en estudiar los métodos para analizar sistemas constreñidos con un número finito de grados de libertad, desde estos primeros años se tuvo en mente la cuantización de estos sistemas. En los años 1960's se dio un gran salto al incorporar las constricciones a la cuantización de integrales de trayectoria de Feynman. Al aparecer la SUSY, creció el interés en generalizar los métodos a grados de libertad fermiónicos.

Cuantización de Sistemas Hamiltonianos con Constricciones.

Para hacer autocontenida esta tesis, en esta sección vamos a discutir que son los Sistemas Dinámicos con constricciones y cuál es el procedimiento para obtener una teoría cuántica de ellos [128].

- Sistemas Dinámicos con Constricciones o Sistemas Singulares.

Una teoría de norma (gauge) se puede pensar como aquella donde las variables dinámicas son especificadas con respecto a un sistema de referencia. Las variables

físicas son aquellas que no dependen de la elección del sistema local de referencia; si realizamos un cambio arbitrario en el sistema de coordenadas se produce una transformación en las variables, éste proceso se conoce como transformación de norma, bajo esta definición las variables físicas son aquellas independientes de la transformación de norma, es decir, son invariantes de norma [64].

La discusión acerca de la dinámica de los sistemas de norma parte del principio de acción en forma Lagrangiana. Las ecuaciones de movimiento clásicas de un sistema son aquellas que hacen que la función

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (2.1)$$

tome un valor *extremal* bajo variaciones $\delta q^n(t)$ de las variables de la Lagrangiana q^n , $n = 1, 2, \dots, N$ y que satisfacen

$$\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Las condiciones para que la acción tome un valor extremal se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange que son [57]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0. \quad (2.3)$$

Si desarrollamos explícitamente el primer término de las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) = \dot{q}^l \frac{\partial^2 L}{\partial q^l \partial \dot{q}^n} + \ddot{q}^l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^n}, \quad (2.4)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma

$$\ddot{q}^l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^l \frac{\partial^2 L}{\partial q^l \partial \dot{q}^n}. \quad (2.5)$$

La ecuación anterior nos dice que la aceleración puede ser expresada en función de las posiciones y velocidades, siempre que el término

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^n} \quad (2.6)$$

sea invertible, una condición necesaria y suficiente para esto, es que

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^n} \right| \neq 0 \quad (2.7)$$

Sin embargo, Relatividad General y teorías que la contienen tienen el problema de que dicho determinante si tiene el valor cero, por lo que es necesario un nuevo método para analizar el problema, a estos sistemas se les conoce como sistemas singulares.

En el formalismo Hamiltoniano definimos los *momenta* canónicos

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \quad (2.8)$$

y la no-invertibilidad de (2.6) es, en este contexto, la condición para la no-invertibilidad de las velocidades como función de las coordenadas y los *momenta*. Lo que nos dice que no todos los *momenta* son independientes, pero existen algunas relaciones

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.9)$$

que vienen de la definición (2.8).

Las condiciones (2.9) se conocen como constricciones primarias, para enfatizar que las ecuaciones de movimiento no son usadas para su obtención y que no implican alguna restricción sobre las coordenadas y sus velocidades.

P. Dirac [43] fue el primero en encarar el asunto de desarrollar una Dinámica Hamiltoniana Clásica consistente para sistemas singulares, después aparecieron trabajos debidos a P. Bergmann et al. [16].

A partir de aquí seguiremos la notación de Dirac, y las constricción primarias (2.9) se escribe en la forma

$$\phi_l(q, p) \approx 0, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.10)$$

el símbolo ≈ 0 se lee como *débilmente cero* y significa que ϕ_m podría tener un paréntesis de Poisson no cero, con alguna de las variables canónicas.

Dada la singularidad del sistema, el hamiltoniano no es único. Podría ser reemplazado por un hamiltoniano efectivo, es decir,

$$\tilde{H} = H_c + u^m \phi_m = \dot{q}^n p_n - L + u^m \phi_m \approx H_c \quad (2.11)$$

El hamiltoniano efectivo, genera nuevas ecuaciones de movimiento

$$\dot{q}_i = \{q_i, \tilde{H}\} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = \{p^i, \tilde{H}\} \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}; \quad (2.12)$$

donde

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \quad (2.13)$$

es el parentesis de Poisson. Las nuevas ecuaciones de movimiento son consistentes con las variaciones y preservan las constricciones.

Para que el sistema sea consistente, las constricciones deben preservarse en el tiempo, es decir,

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, \tilde{H}\} \approx \{\phi_m, H_c\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0. \quad (2.14)$$

Si la ecuación anterior no es cierta, se pueden tener dos posibilidades:

1. Que solo imponga condiciones sobre la forma de las u^n .
2. Podría implicar una nueva relación entre las coordenadas y *momenta*, independiente de las u^n . Estas son conocidas como constricciones secundarias y deben añadirse al conjunto de constricciones primarias.

Se repite el proceso para ver si las constricciones secundarias se preservan en el tiempo, hasta encontrar todas las constricciones independientes y las condiciones sobre las u^m . Supongamos que con éste procedimiento se encontraron M' constricciones adicionales, por lo que ahora tenemos un conjunto de $M + M'$ constricciones independientes, es decir,

$$\phi_a(q, p) \approx 0, \quad a = 1, 2, \dots, M + M' \quad (2.15)$$

Y finalmente, la consistencia de todas las constricciones con las ecuaciones de movimiento requiere la existencia de una solución para u^m , como función del espacio fase, es decir,

$$u^m = u^m(q, p) \quad (2.16)$$

tal que el hamiltoniano \tilde{H} es posible expresarlo en términos de todos los pares (q, p) . Se definen funciones de primera clase $R(q, p)$, como aquellas cuyo paréntesis de Poisson con todas las constricciones sea débilmente cero

$$\{R, \phi_a\} \approx 0, \quad a = 1, 2, \dots, M + M'; \quad (2.17)$$

y cantidades de segunda clase $R(q, p)$, como las que su paréntesis de Poisson con, al menos, una de las constricciones no sea débilmente cero

$$\{R, \phi_a\} \neq 0 \quad a = l. \quad (2.18)$$

Con las definiciones previas, se pueden dividir a las constricciones en dos conjuntos, uno de ellos consistiendo de todas las constricciones de primera clase linealmente independientes

$$\tilde{\phi}_i \approx 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

y el resto de las $N' = M + M' - N$ son constricciones de segunda clase; y en principio en ambos conjuntos puede haber tanto condiciones primarias como secundarias.

Se puede mostrar que el paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase generan una matriz de paréntesis de Poisson no singular de tamaño $N' \times N'$ [44]

$$C_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}. \quad (2.20)$$

Debemos aclarar que para calcular la matriz anterior y todos los paréntesis de Poisson donde aparezca una restricción, la condición de débilmente cero se impone después de realizadas las derivadas. Del álgebra lineal, el determinante de una matriz antisimétrica solo se hace cero si la dimensión es impar, entonces, el número de constricciones de segunda clase es par.

Dada la no singularidad de $C_{\alpha\beta}$, debe existir su inversa que denotamos por $C^{\alpha\beta}$.

Con todo lo anterior se re-define cualquier variable dinámica, digamos $A(q, p)$, por

$$\tilde{A} = A - \{A, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \phi_\beta, \quad (2.21)$$

notando que

$$\{\tilde{A}, \phi_\beta\} \approx \{A, \phi_\beta\} - \{A, \phi_\sigma\} C^{\sigma\alpha} C_{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

dado que $C_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, el parentesis de Poisson de las nuevas variables dinámicas con las constricciones de segunda clase es débilmente cero.

Para evitar cargar con todas las re-definiciones de las variables dinámicas, P. Dirac introdujo un paréntesis de Poisson generalizado, que ahora conocemos como paréntesis de Dirac, y que tiene la siguiente forma

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, B\} \quad (2.23)$$

Notemos que el hamiltoniano, ahora puede ser entendido, como una re-definición del hamiltoniano original, en función de las constricciones de segunda clase, es decir,

$$\tilde{H} = H_c - \{H_c, \phi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \phi_\beta, \quad (2.24)$$

donde hicimos

$$u^\alpha = -\{H_c, \phi_\beta\} C^{\beta\alpha}. \quad (2.25)$$

Sin embargo, la elección del hamiltoniano efectivo aun no esta completamente determinada, ya que las ecuaciones de movimiento no sufren alteración alguna si añadimos a \tilde{H} alguna combinación de las constricciones de primera clase. Entonces, es necesario tomar el hamiltoniano total

$$H = \tilde{H} + v^i \tilde{\phi}_i(q, p), i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.26)$$

donde este hamiltoniano tiene paréntesis cero con todas las constricciones, a pesar del hecho de que éste contiene las N funciones arbitrarias v^i . El papel jugado por las

constricciones de primera clase, es la de generar transformaciones infinitesimales de las coordenadas y *momenta* que no afectan el estado físico, es decir, son generadores de las transformaciones de norma [64]. Las funciones arbitrarias v^i son consecuencia de que el lagrangiano posee N grados de libertad de norma asociados con las constricciones de primera clase. Se podría fijar los valores de $v^i(t)$ al elegir formas explícitas para cada norma (gauge)

$$g_i(q, p, t) \approx 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$

e imponerlas como constricciones que no surgen del lagrangiano. La elección de norma (2.27) debe realizarse en tal forma que las constricciones de primera clase dejan de serlo, es decir, la matriz $\{\tilde{\phi}_i, g_i\}$ debe estar bien definida y no-singular. Entonces, se reemplazarán todos los paréntesis de la teoría por aquellos consistentes con $\phi_i = 0, g_i = 0$, y la arbitrariedad de las v^i .

- Cuantización de Sistemas Singulares con Constricciones

Para cuantizar una teoría en forma estándar, se pide que el conmutador de los operadores asociados a las variables físicas coincida $i\hbar$ veces el parentesis de Poisson evaluado en la trayectoria clásica, es decir,

$$[\hat{X}_a, \hat{X}_b] = i\hbar\{X_a, X_b\}. \quad (2.28)$$

Al considerar sistemas singulares con constricciones, solamente, de segunda clase. Es necesario que para un estado $|\Psi\rangle$, con las constricciones ahora entendidas como operadores, se tenga

$$\hat{\phi}_i|\Psi\rangle = 0, \quad (2.29)$$

que conduce a que cualquier función de las constricciones $f(\phi_i)$, genere el valor esperado cero para todo tiempo

$$\langle f(\phi_i) \rangle = 0, \quad (2.30)$$

cuya consecuencia es

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]|\Psi\rangle = 0, \quad (2.31)$$

y la contraparte clásica sería

$$\{\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j\} = 0 \quad (2.32)$$

Pero partimos de que nuestro sistema solo tiene constricciones de segunda clase, como satisfacer una ecuación del tipo (2.32), la solución es usar el paréntesis de Dirac, ya que ahí se cumple $\{\phi_i, \phi_j\}_D = 0$, entonces, para cuantizar se debe cumplir

$$[\hat{X}_a, \hat{X}_b] = i\hbar\{X_a, X_b\}_D. \quad (2.33)$$

Si el sistema tuviera, solamente, constricciones de primera clase tenemos que imponer

$$\tilde{\phi}_i|\Psi\rangle = 0, \quad (2.34)$$

como una restricción sobre el espacio de Hilbert. Los vectores de estado que satisfacen la ecuación anterior se dicen ser físicos, y el espacio que ellos generan es el espacio físico de estados. El procedimiento anterior es el procedimiento de cuantización de Dirac, que implica que las cantidades clásicas equivalentes a los observables cuánticos son constricciones de primera clase, las cuales son invariantes de norma en el formalismo hamiltoniano; y por lo tanto los estados físicos se interpretan como cantidades invariantes de norma.

Antes de continuar, es necesario enfatizar que existen versiones alternativas a la de nuestro interés, como lo es el caso presentado por E. Mielke et al. [91], donde se propone una reformulación quirral de la supergravedad simple. Esto es debido al uso de un término de Chern-Simons imaginario que actúa como una función generadora la cuál induce la descomposición en partes dual y anti-dual en ambos sectores el bosónico y fermiónico. La primera diferencia aparece en el acoplamiento resultando ser, en contraste a la supergravedad simple [111], mínimo. Además, presenta un análisis de las anomalías de la teoría y compara el tamaño de estas con respecto a los campos de Dirac y SUSY Yang-Mills.

El caso de nuestro interés es la Supergravedad $N = 1$, la densidad lagrangiana esta dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-^{(4)}g} \ ^{(4)}R - \frac{1}{2}i\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\bar{\psi}_\lambda\gamma_5\gamma_\mu D_\nu\psi_\rho. \quad (2.35)$$

Las variables canónicas son las componentes covariantes espaciales de los vierbeine $e^\alpha{}_\alpha$, sus *momenta* conjugados $p_a{}^\alpha$, y las componentes covariantes espaciales del vector-espinor del campo gravitino ψ_α , definido sobre una hipersuperficie genérica tipo espacio [28].

Hay tres diferentes constricciones en el problema, las cuales son: los generadores \mathcal{H}_μ de las translaciones y difeomorfismos, los generadores $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ de rotaciones de Lorentz locales y los generadores supersimétricos de espinores de Majorana \mathcal{S} .

Los multiplicadores de Lagrange que constriñen a los generadores de translaciones, rotaciones y transformaciones de supersimetría son las componentes normales $e^A{}_0$, ω_{0AB} y $\bar{\psi}_0$, respectivamente, de los correspondientes campos de norma $e^A{}_\mu$, $\omega_{\mu AB}$ y $\bar{\psi}_\mu$ con respecto al vector normal tipo tiempo \mathbf{n} . La forma canónica del lagrangiano de supergravedad simple (N=1) puede ser escrito como [111]

$$\begin{aligned} H &= e^A{}_0 \mathcal{H}_A + \frac{1}{2} \omega_0{}^{AB} \mathcal{J}_{AB} + \bar{\psi}_0 \mathcal{S} \\ &= N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i + \frac{1}{2} \omega_0{}^{AB} \mathcal{J}_{AB} + \bar{\psi}_0 \mathcal{S}; \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde \mathcal{H}_A , \mathcal{J}^{AB} y \mathcal{S} son construidos a partir de las variables canónicas solamente y no dependen de los multiplicadores. En forma equivalente del Lagrangiano canónico \mathcal{H}_\perp , \mathcal{H}_i y \mathcal{J}^{AB} son las constricciones Hamiltoniana, difeomorfismos, y rotacional de Lorentz bosónica, respectivamente, y \mathcal{S} es la constricción fermiónica supersimétrica. Ahora la función lapso $N = e_0{}^0$, el vector corrimiento $N_i = e_i{}^0$, ω_{0AB} y $\bar{\psi}_0$ son los correspondientes multiplicadores de Lagrange.

Los generadores de supergravedad satisfacen el álgebra descubierta por Teitelboim [132], que escribimos a continuación

$$\{\mathcal{S}(x), \bar{\mathcal{S}}(x')\} = \delta(x, x') \gamma^A \mathcal{H}_A \quad (2.37)$$

$$\{\mathcal{S}(x), \mathcal{H}_C(x')\} = \frac{1}{2} \delta(x, x') \Sigma_{CAB} \mathcal{J}^{AB} \quad (2.38)$$

$$\{\mathcal{S}(x), \mathcal{J}^{AB}(x')\} = -\delta(x, x') \sigma^{AB} \mathcal{S} \quad (2.39)$$

$$\{\mathcal{H}_A(x), \mathcal{H}_B(x')\} = \delta(x, x') \left(\frac{1}{2} \Omega_{ABCD} \mathcal{J}^{CD} + \bar{H}_{AB} \mathcal{S} \right) \quad (2.40)$$

$$\{\mathcal{H}_c(x), \mathcal{J}^{cd}(x')\} = \delta(x, x') (\delta_c{}^B \mathcal{H}^A - \delta_c{}^A \mathcal{H}^B) \quad (2.41)$$

$$\{\mathcal{J}^{AB}(x), \mathcal{J}^{CD}(x')\} = \delta(x, x') (\eta^{AC} \mathcal{J}^{BD} - \eta^{BC} \mathcal{J}^{AD} + \eta^{BD} \mathcal{J}^{AC} - \eta^{AD} \mathcal{J}^{BC}) \quad (2.42)$$

Nótese que para la ecuación (2.37) el parentesis es simétrico, es decir, el apropiado para variables fermiónicas [29]. El mismo Teitelboim, comenta que la relación (2.37) muestra que la supergravedad es la raíz cuadrada de la Relatividad General. De hecho los estados físicos en la teoría cuántica deben satisfacer

$$\mathcal{S}|\Psi\rangle = 0, \quad \mathcal{H}_A|\Psi\rangle = 0, \quad \mathcal{J}_{AB}|\Psi\rangle = 0. \quad (2.43)$$

y que al tomar en cuenta (2.37) implica

$$(\mathcal{S}\bar{\mathcal{S}} + \bar{\mathcal{S}}\mathcal{S})|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_A|\Psi\rangle = 0, \quad (2.44)$$

por lo que la última es una condición redundante. Entonces, nos concentraremos solo en las constricciones de Lorentz \mathcal{J}_{AB} y la supersimétrica \mathcal{S} .

Cabe mencionar que el álgebra de Teitelboim no es un álgebra de Lie, es decir, para algunos de los paréntesis entre los generadores no existen constantes de estructura sino funciones de estructura en las ecuaciones (2.38) y (2.40). Además, de la presencia mencionada por A. Macías et al. [86] de un término adicional en función de la torsión en la ecuación (2.40).

El problema de no tener un álgebra de Lie es abordado por Brown et al.[23] en el contexto de Relatividad General, ellos acoplan la métrica con un polvo incoherente que introduce en el espacio-tiempo un marco de referencia privilegiado y una foliación temporal. Las coordenadas co-moviles a las partículas de polvo y el tiempo propio a lo largo de las líneas de mundo del polvo se convierten en las coordenadas canónicas en el espacio fase del sistema, el sistema de constricciones estándar puede ser cambiando en tal forma que genera un álgebra de Lie, es importante resaltar que los resultados obtenidos dependen solamente de las variables geométricas, es decir, no dependen de las coordenadas del polvo y el tiempo. El cambio mencionado esta dado por una combinación cuadrática de las constricciones, es decir,

$$G(x) = \mathcal{H}_\perp(x)^2 - g^{ab}\mathcal{H}_a(x)\mathcal{H}_b(x), \quad \{G(x), G(x')\} = 0. \quad (2.45)$$

Ahora, nos preguntamos que pasaría si se tuvieran ecuaciones equivalentes en la Supergravedad, y como estas afectarían al proceso de cuantización. Debido a que en nuestro

caso, aparece la constricción supersimétrica, que no se tiene en el caso de Brown [23], debemos escribir una relación equivalente a la $G(x)$ que la contenga, es decir,

$$\tilde{G}(x) = f_1^{AB}\mathcal{H}_A\mathcal{H}_B + f_2\mathcal{S}^2 + f_3^A\mathcal{H}_A\mathcal{S} + f_4^A\mathcal{S}\mathcal{H}_A. \quad (2.46)$$

Por el método de Dirac, los estados físicos en la teoría cuántica deben satisfacer

$$\tilde{G}|\Psi\rangle = (f_1^{AB}\mathcal{H}_A\mathcal{H}_B + f_2\mathcal{S}^2 + f_3^A\mathcal{H}_A\mathcal{S} + f_4^A\mathcal{S}\mathcal{H}_A)|\Psi\rangle = 0, \quad (2.47)$$

nótese que la solución más simple al caso anterior es, que cada término aniquile al estado físico por separado, es decir,

$$f_1^{AB}\mathcal{H}_A\mathcal{H}_B|\Psi\rangle = 0, \quad (2.48)$$

$$f_2\mathcal{S}^2|\Psi\rangle = 0, \quad (2.49)$$

$$f_3^A\mathcal{H}_A\mathcal{S}|\Psi\rangle = 0, \quad (2.50)$$

$$f_4^A\mathcal{S}\mathcal{H}_A|\Psi\rangle = 0, \quad (2.51)$$

que nos conduce a las primeras ecuaciones en (2.43), por lo tanto, las soluciones a $\mathcal{S}|\Psi\rangle = 0$ y $\mathcal{H}_A|\Psi\rangle = 0$ también lo son de $\tilde{G}|\Psi\rangle$, en este trabajo, nos reducimos a trabajar con el caso más simple.

Para las matrices γ^A usaremos una representación de Majorana

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

que satisfacen las siguientes relaciones de anticommutación $\{\gamma^A, \gamma^B\} = 2\eta^{AB}$, donde σ^i son las matrices de Pauli usuales. Además, usamos $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. El campo de Rarita-Schwinger $\psi := \psi_A\omega^A$, una 1-forma espinor-valuada, que esta sujeta a la condición de Majorana $\bar{\psi} = \psi^T C$, con C la matriz de conjugación de carga. El campo vectorial-espinorial del gravitino puede ser escrito en forma de componentes como

$$\psi_{\mu A} = \begin{pmatrix} \psi_{\mu 1} \\ \psi_{\mu 2} \\ \psi_{\mu 3} \\ \psi_{\mu 4} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

donde μ es un índice vectorial y \mathcal{A} es un índice espinorial. En esta representación la condición de Majorana es $\bar{\psi} = -i\psi^T\gamma^0$.

Las constricciones de Lorentz \mathcal{J}_{AB} son explícitamente dadas como sigue [111]:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{AB} &\equiv p_A^\alpha e_{B\alpha} - p_B^\alpha e_{A\alpha} - \pi^\alpha \sigma_{AB} \psi_\alpha^{\mathcal{A}} \\ &= 2p_{[A}^\alpha e_{B]\alpha} + \tau_{AB0} \\ &= 2p_{[A}^\alpha e_{B]\alpha} + \frac{1}{2}\phi_{[AA}^T \phi_{B]}^{\mathcal{A}},\end{aligned}\tag{2.54}$$

donde

$$\tau_{\mu\nu\lambda} = \frac{i}{4}\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\lambda\psi_{\nu]},\tag{2.55}$$

son las componentes del tensor espinorial, ϕ_{AA} son las componentes locales densitizadas del gravitino, y

$$\pi^\alpha = \frac{i}{2}\varepsilon^{0\alpha\delta\beta}\bar{\psi}_\delta\gamma^5\gamma_\beta,\tag{2.56}$$

es el *momentum* conjugado al campo del gravitino. En el último paso se uso la condición de Majorana [92] En forma equivalente, en términos de los generadores duales

$$\mathcal{J}_A = \frac{i}{2}\epsilon_{0ABC}\mathcal{J}^{BC} \Rightarrow \mathcal{J}_0 = 0,\tag{2.57}$$

la restricción de Lorentz es

$$\mathcal{J}_A = \frac{i}{2}\epsilon_{0ABC}\left(2p^{[B\alpha}e^{C]\alpha} + \frac{1}{2}\phi^{T[B}{}_A\phi^{C]A}\right).\tag{2.58}$$

Es interesante notar que, como se esperaba, debido a la arbitrariedad del tiempo, la condición $\mathcal{J}_0 = 0$ implica que $\mathcal{J}_{0B} \equiv 0$, por lo tanto, reduciendo la restricción de Lorentz a rotaciones espaciales puras sobre la hipersuperficie de tiempo constante.

El generador de la supersimetría es [111]

$$\mathcal{S} = -i\epsilon^{ijk}\gamma_5\gamma_i\nabla_j\psi_k - \frac{i}{2}p^\alpha{}_A\gamma^A\psi_\alpha + \frac{1}{4}{}^{(3)}e\gamma_\perp\psi_\alpha\bar{\psi}^\alpha\gamma^\beta\psi_\beta,\tag{2.59}$$

donde $\gamma_\perp = -N\gamma^0$, con N la función lapso.

Una restricción adicional, la relación de Cartan

$$T_{\mu\nu\lambda} = -4\tau_{\mu\nu\lambda} = -i\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_\lambda\psi_{\nu]},\tag{2.60}$$

relaciona el tensor de torsión al campo de Rarita-Schwinger y es usado para eliminar la torsión de la teoría, dejando a ésta con constricciones de primera clase [80]. Es bastante conveniente usar en lugar del campo de gravitino mismo sus componentes locales densitizadas

$$\phi_i = ee_i^\alpha \psi_\alpha, \quad (2.61)$$

como los campos básicos conmutan con todas las variables no-espinoriales, aquí $e = {}^{(3)}e = \det(e_a^\alpha)$. Esta variable fue encontrada para ser la variable natural para el campo de gravitino [38]. Esta elección sugiere una realización matricial de la $\phi_{i\mathcal{A}}$, obedeciendo

$$\{\phi_{i\mathcal{A}}, \phi_{j\mathcal{B}}\} = -\frac{i}{8}(\gamma_j \gamma_i)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}. \quad (2.62)$$

Aquí \mathcal{A} y \mathcal{B} son índices espinoriales, y las variables gravitacionales no aparecen en algún lado.

2.2.2. La Constricción de Lorentz

Asumiremos la siguiente forma para la función de estado del universo

$$|\Psi\rangle = \Psi_\mu = \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \\ \Psi_{III} \\ \Psi_{IV} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Usando la representación real de Majorana para las matrices γ [71, 101], así como la relación de anticonmutación entre las componentes del campo gravitino, podemos escribir las componentes del generador de Lorentz y las del generador supersimétrico.

Al fijar una base particular para los vierbeine; como ejemplo, la representación $SO(3)$, la constricción de Lorentz se reduce a

$$\mathcal{J}_A = \frac{i}{2}\epsilon_{0ABC} \left(\frac{1}{2}\phi_{[B\mathcal{A}}^T \phi_{C]}^{\mathcal{A}} \right). \quad (2.64)$$

Entonces,

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{i}{2}[\phi_{2\mathcal{A}}\phi_3^{\mathcal{A}} + \phi_{3\mathcal{A}}\phi_2^{\mathcal{A}}], \quad (2.65)$$

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{i}{2}[\phi_{3\mathcal{A}}\phi_1^{\mathcal{A}} + \phi_{1\mathcal{A}}\phi_3^{\mathcal{A}}], \quad (2.66)$$

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{i}{2}[\phi_{1\mathcal{A}}\phi_2^{\mathcal{A}} + \phi_{2\mathcal{A}}\phi_1^{\mathcal{A}}]. \quad (2.67)$$

Por medio del álgebra, la cuál son satisfechas por el campo de gravitino, arribamos a una realización para las componentes de las constricciones de Lorentz en términos de los generadores estándar del grupo de rotación ordinario $O(3)$ [71]

$$\mathcal{J}_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Consecuentemente, por ejemplo, la componente Ψ_{II} de la función de estado debe tener cuatro componentes, es decir, $\Psi_{II} = (\Psi_{II}^1, \Psi_{II}^2, \Psi_{II}^3, \Psi_{II}^4)$. En forma análoga, para el resto de las componentes. Analicemos la condición de Lorentz $\mathcal{J}_{AB}|\Psi\rangle = 0$ la cuál explícitamente es

$$\mathcal{J}_{AB}|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_{12} & \mathcal{J}_{13} \\ 0 & -\mathcal{J}_{12} & 0 & \mathcal{J}_{23} \\ 0 & -\mathcal{J}_{13} & -\mathcal{J}_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \\ \Psi_{III} \\ \Psi_{IV} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.69)$$

Esto implica las siguientes condiciones [85]

$$\mathcal{J}_{12}\Psi_{III} = -\mathcal{J}_{13}\Psi_{IV}, \quad (2.70)$$

$$\mathcal{J}_{12}\Psi_{II} = \mathcal{J}_{23}\Psi_{IV}, \quad (2.71)$$

$$\mathcal{J}_{13}\Psi_{II} = -\mathcal{J}_{23}\Psi_{III}, \quad (2.72)$$

o, en forma equivalente las ecuaciones anteriores pueden ser re-escritas como

$$\mathcal{J}_3\Psi_{III} = \mathcal{J}_2\Psi_{IV}, \quad (2.73)$$

$$\mathcal{J}_3\Psi_{II} = \mathcal{J}_1\Psi_{IV}, \quad (2.74)$$

$$\mathcal{J}_2\Psi_{II} = \mathcal{J}_1\Psi_{III}, \quad (2.75)$$

respectivamente. Estas relaciones son bastantes generales, no dependen del modelo particular en consideración, ver [101]. Es interesante notar que no hay alguna condición que involucre a Ψ_I . Al reemplazar explícitamente la representación de las matrices J_i , en las ecuaciones de arriba, hallamos un sistema algebraico de ecuaciones para las diferentes componentes de la función de estado del universo

$$\Psi_{III}^2 = \Psi_{IV}^2 = 0, \quad \Psi_{III}^2 = -\Psi_{IV}^4, \quad (2.76)$$

$$\Psi_{II}^3 = \Psi_{IV}^3 = 0, \quad \Psi_{II}^2 = -\Psi_{IV}^4, \quad (2.77)$$

$$\Psi_{II}^4 = \Psi_{III}^4 = 0, \quad \Psi_{II}^2 = -\Psi_{III}^3. \quad (2.78)$$

La solución de las ecuaciones anteriores es muy sencilla de obtener, la cuál es

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II}^1 \\ \Psi_{III}^1 \\ \Psi_{IV}^1 \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

y reduce a cada una de las componentes de Ψ_{II} , Ψ_{III} y Ψ_{IV} a solo una componente.

Nótese que el numero de componentes en nuestro análisis difiere del presentado por Obregón [103], ya que restringimos nuestro análisis a la hipersuperficie 3-dimensional, con el uso de los generadores duales. Además, que en la solución de Wigner bosónica tipo *sistema en reposo* para la función de estado del universo ésta es un escalar con solo una componente independiente. Esto finaliza el análisis de la constricción de Lorentz.

2.2.3. Midisuperespacio de los modelos cosmológicos de Gowdy T^3 .

Los modelos cosmológicos de Gowdy son soluciones no-homogéneas dependientes del tiempo de las ecuaciones de vacío de Einstein con hipersuperficies espaciales de Cauchy compactas cuya topología puede ser T^3 o $S^1 \times S^2$ [60, 61]. Otras topologías particulares están contenidas en estas dos como casos especiales. Aquí nos concentraremos en los modelos T^3 que son los modelos inhomogéneos más simples, para los cuales el elemento

de línea puede ser escrito como [95]

$$ds^2 = e^{-\frac{\lambda}{2}+3\tau} d\tau^2 - e^{-\frac{\lambda}{2}-\tau} d\chi^2 - e^{2\tau} \left[e^P (d\sigma + Qd\delta)^2 + e^{-P} d\delta^2 \right], \quad (2.80)$$

donde P, Q, λ , y τ depende de las coordenadas no-ignorables t y χ . Las hipersuperficies espaciales ($t = \text{constante}$) son compactas si requerimos que $0 \leq \chi, \sigma, \delta \leq 2\pi$. La expresión en los paréntesis cuadrados representa a la métrica sobre el subespacio T^2 el cual es generado por los vectores de Killing que conmutan ∂_σ y ∂_δ . La coordenada χ etiqueta los diferentes toros. Cuando los vectores de Killing son ortogonales a la hipersuperficie, el elemento de línea general se vuelve diagonal con $Q = 0$ y los modelos cosmológicos correspondientes son llamados polarizados. Estamos encarando una teoría de campo genuina la cuál es un caso especial de un modelo de midisuperespacio. Nótese que el número infinito de grados de libertad contenidos en este modelo de midisuperespacio puede ser asociado con el carácter no-homogeneo del espacio-tiempo. Si despreciamos las no-homogeneidades presentes en el modelo, obtendríamos un modelo de minisuperespacio con un número finito de grados de libertad, probablemente relacionados a un modelo cosmológico de Bianchi.

Para escribir el elemento de línea de Gowdy en la forma ADM, introducimos la función lapso N y funciones corrimiento N_i como sigue, ver [95]

$$N = g^{-1/2} [g^{00}]^{-1/2} = \exp \left[-\frac{\lambda}{4} - \frac{3}{2}\tau \right] [g^{00}]^{-1/2}, \quad (2.81)$$

$$N_i = g_{0i} = 0, \quad (2.82)$$

donde, como es usual, N y N_i son funciones de norma usualmente fijadas a $N = 1$ y $N_i = 0$, lo que implica una restricción sobre la evolución temporal de las coordenadas para la hipersuperficie inicial. Una restricción adicional es que τ no depende de χ , es decir,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \chi} = 0, \Rightarrow \tau = \tau(t), \Rightarrow \lambda = \lambda(t), \quad (2.83)$$

y es también introducida para reducir el espacio de configuración del problema a uno en el cuál λ tiene solo un grado de libertad, aunque P y Q retienen su infinitos grados de libertad como funciones arbitrarias de χ [83]. Además, para reducir el modelo a su minisuperespacio, vamos a, de manera adicional, asumir que tanto P y Q son solamente

funciones del tiempo. Por lo tanto, el elemento de línea puede ser escrito como

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - e^{-\frac{\lambda}{2} - \tau} d\chi^2 - e^{2\tau} [e^P (d\sigma + Qd\delta)^2 + e^{-P} d\delta^2]. \quad (2.84)$$

La estructura del elemento de línea nos sugiere la siguiente elección para la base

$$\omega^0 = d\tau, \quad \omega^1 = d\chi, \quad \omega^2 = d\sigma + Qd\delta, \quad \omega^3 = d\delta, \quad (2.85)$$

para escribir al elemento de línea de Gowdy en la formulación ADM, i. e. $ds^2 = N^2 d\tau^2 + g_{ij} \omega^i \omega^j$ [121]. Entonces, en esta base la métrica toma la forma

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 - \exp\left(-\frac{\lambda}{2} - \tau\right) (\omega^1)^2 - \exp(2\tau) \left[\exp(P) (\omega^2)^2 + \exp(-P) (\omega^3)^2 \right], \quad (2.86)$$

por lo tanto, el correspondiente co-espacio es

$$e^0 = Nd\tau, \quad e^1 = e^{-\frac{\lambda}{4} - \frac{\tau}{2}} \omega^1, \quad e^2 = e^{\tau + \frac{P}{2}} \omega^2, \quad e^3 = e^{\tau - \frac{P}{2}} \omega^3, \quad (2.87)$$

y éste satisface las condiciones de ortonormalidad estándar $g^{\mu\nu} e^A{}_\mu e^B{}_\nu = \eta^{AB}$, con $e^A = e^A{}_\mu \omega^\mu$.

La Constricción Supersimétrica.

Debido a que $\{S_A, S_B\} = 0$ para $A \neq B$ podemos tomar cada S_A para operar en subespacios ortogonales, y podemos escribir $S_A \Psi = 0$ en la forma

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \\ \Psi_{III} \\ \Psi_{IV} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.88)$$

Descomponiendo el vector-espino gravitino en sus correspondientes componentes

$$\phi_{aA} = \begin{pmatrix} \phi_{a1} \\ \phi_{a2} \\ \phi_{a3} \\ \phi_{a4} \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

podemos escribir la expresión general para la constricción supersimétrica, la cuál se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= -i\epsilon^{abc}\gamma_5\gamma_a\nabla_b e e_c^k \phi_k - \frac{i}{2}p^\alpha{}_A\gamma^A e^{-1}e^a{}_\alpha\phi_a \\
&= i\left\{(\gamma^1\phi_1 - \gamma^3\phi_3)\frac{\Pi_\tau}{4} - (\gamma^2\phi_2 + \gamma^3\phi_3 - \gamma^1\phi_1)\frac{\Pi_\lambda}{8} - (3\gamma^2\phi_2 - 2\gamma^3\phi_3)\frac{\Pi_P}{4} \right. \\
&\quad \left. - (\gamma^2\phi_3 - \gamma^1\gamma^2\gamma^3\phi_1)e^P\frac{\Pi_Q}{2}\right\}, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

donde $\Pi_\tau, \Pi_\lambda, \Pi_P$ y Π_Q son los *momenta* conjugados, en la foliación seleccionada, a τ, λ, P, Q , respectivamente. Para cuantizar el problema esbozado, convertiremos $\Pi_\tau, \Pi_\lambda, \Pi_P, \Pi_Q, P, Q$ en operadores $i\frac{\delta}{\delta\tau}, i\frac{\delta}{\delta\lambda}, i\frac{\delta}{\delta P}, i\frac{\delta}{\delta Q}, \hat{P}, \hat{Q}$, respectivamente. Estos operadores actúan sobre la función de estado del universo Ψ y la constricción supersimétrica \mathcal{S} se vuelve también un operador el cuál de acuerdo al procedimiento de cuantización canónica de Dirac, debe aniquilar la función de estado del universo, es decir,

$$\hat{\mathcal{S}}|\Psi\rangle = 0. \tag{2.91}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.90) se reduce a

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}} = i\Gamma^1\frac{\delta}{\delta\tau} + i\Gamma^2\frac{\delta}{\delta\lambda} + i\Gamma^3\frac{\delta}{\delta P_0} + i\Gamma^4e^{\hat{P}}\frac{\delta}{\delta Q_0}. \tag{2.92}$$

Como puede verse, necesitamos encontrar una realización matricial consistente de un conjunto de cuatro matrices independientes que satisfagan el álgebra $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 0$, para $A \neq B = 1, \dots, 4$. Para resolver las ecuaciones $\hat{\mathcal{S}} = 0$ para el caso polarizado, usamos la siguiente realización matricial 4×4 de las matrices Γ^A :

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.93}$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

esta elección implica que cada $\Psi_{\mathcal{A}}$ se divide a si mismo en un objeto de cuatro componentes. Por lo que, la constricción supersimétrica se reduce al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left[\frac{\delta}{\delta\tau} + \frac{\delta}{\delta\lambda} \right] \Psi_{\mathcal{A}1} = 0, \quad \left[\frac{\delta}{\delta\tau} - \frac{\delta}{\delta\lambda} \right] \Psi_{\mathcal{A}2} = 0, \quad (2.95)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta\tau} + \frac{\delta}{\delta\lambda} \right] \Psi_{\mathcal{A}3} = 0, \quad \left[\frac{\delta}{\delta\tau} - \frac{\delta}{\delta\lambda} \right] \Psi_{\mathcal{A}4} = 0. \quad (2.96)$$

Es fácil ver que la solución a las ecuaciones de arriba es:

$$\Psi_{\mathcal{A}1} = \Psi_{\mathcal{A}10} \exp[m(\lambda - \tau)], \quad (2.97)$$

$$\Psi_{\mathcal{A}2} = \Psi_{\mathcal{A}20} \exp[m(\lambda + \tau)], \quad (2.98)$$

$$\Psi_{\mathcal{A}3} = \Psi_{\mathcal{A}30} \exp[m(\lambda - \tau)], \quad (2.99)$$

$$\Psi_{\mathcal{A}4} = \Psi_{\mathcal{A}40} \exp[m(\lambda + \tau)], \quad (2.100)$$

con m una constante de separación.

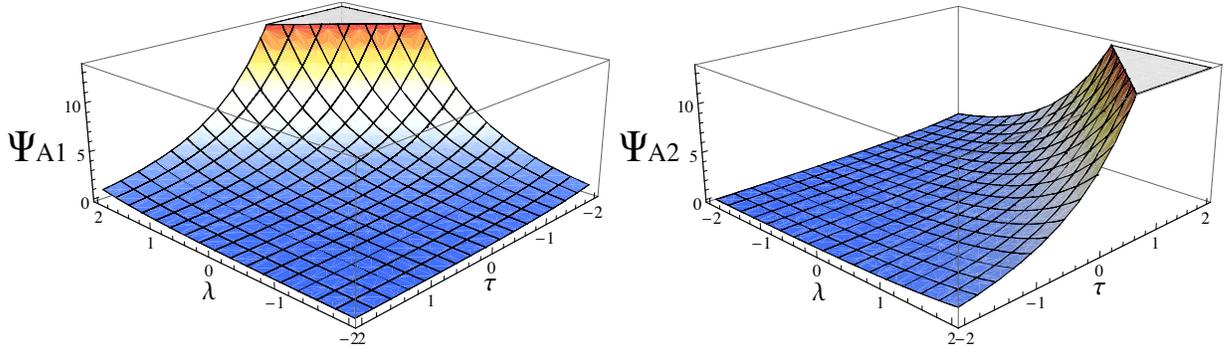


Figura 2.1: Comportamiento de las componentes de la función de estado del universo de Gowdy $T^3 \Psi_{\mathcal{A}i}$ con respecto a λ y τ para las soluciones con el valor de m fijo.

2.2.4. Minisuperespacio de los modelos de Bianchi.

El minisuperespacio es frecuentemente conocido como el sector cosmológico homogéneo, a saber, muchos del infinito número de grados de libertad son artificialmente congelados por las simetrías [75]. Dicha reducción es tan drástica que solo un número finito de grados

de libertad no-físicos es dejado. El requerimiento de la homogeneidad limita las hipersuperficies permitidas a las hojas de una foliación privilegiada, la cuál es etiquetada por una sola variable temporal arbitraria. Uno puede parametrizar tales hipersuperficies de homogeneidad por los ángulos coordenados estándar de Euler y caracterizar la métrica espacial únicamente por los tres parámetros reales, Ω, β_{\pm} . La Ω esta relacionada al volumen de la hipersuperficie Σ como sigue:

$$\Omega = \ln \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|q(x)|}. \quad (2.101)$$

Los parámetros β describen la anisotropía de la hipersuperficie Σ . Debido a la simetría del modelo, las constricciones del super-*momentum* son satisfechas idénticamente, mientras que la constricción del super-Hamiltoniano se reduce a:

$$H_{\perp} = -p_{\Omega}^2 + p_{+}^2 + p_{-}^2 + \exp(-\Omega)[V(\beta_{+}, \beta_{-}) - 1] = 0. \quad (2.102)$$

El potencial $V(\beta_{+}, \beta_{-}) - 1$ es una combinación de términos exponenciales, éste se anula en el origen y es positivo fuera de éste. El parámetro Ω es usualmente considerado como un tipo de *tiempo auxiliar interno*[75, 81]. Un análisis sistemático del problema global del tiempo para modelos cosmológicos homogéneos parece conducir, en general, a la falta de una función temporal global. Incluso el tiempo volumétrico Ω no es globalmente permitido, por ejemplo, en modelos oscilantes, debido a que el universo tendría un valor dado $\Omega < \Omega_{max}$ al menos dos veces, una vez al expandirse y otra al contraerse.

Como ya hemos supuesto, el espacio-tiempo 4D puede ser foliado con secciones espaciales 3D, es decir,

$$M = \mathfrak{R} \times \Sigma \quad (2.103)$$

La \mathfrak{R} es la variable temporal, y cada Σ es etiquetada con un valor del tiempo; por construcción, cada Σ es un espacio 3D homogéneo. Para Σ , se tienen tres diferentes posibilidades

1. $\dim \text{Isom}(M) = 6$: Σ_t es un espacio múltiplemente transitivo de simetría máxima.

Estos son los modelos de Freedman-Robertson-Walker.

2. $\dim \text{Isom}(M) = 4$: Σ_t es múltiplemente transitivo con un subgrupo de isotropía $\mathcal{I}_p(M) = SO(2)$.
3. $\dim \text{Isom}(M) = 3$: Σ_t es simplemente transitivo.

Estamos interesados en el tercer caso, ¿Cuántas álgebras de Lie se tienen en tres dimensiones? esta respuesta fue respondida por Bianchi, y cada una de las álgebras esta etiquetada por un numero I-IX. Al usar una de estas álgebras se construyen los modelos cosmológicos espacialmente homogéneos conocidos como modelos de Bianchi.

Bianchi	Constantes de Estructura
I	$C^i_{jk} = 0, \forall i, j, k.$
II	$C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$
III	$C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$
IV	$C^1_{13} = -C^1_{31} = C^1_{23} = 1$ $-C^1_{32} = C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$
V	$C^1_{13} = -C^1_{31} = C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$
VI	$C^1_{13} = -C^1_{31} = 1,$ $C^2_{23} = -C^2_{32} \neq 0, 1.$
VII	$C^1_{32} = -C^1_{23} = C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$ $C^2_{23} = -C^2_{32} = h \quad (h^2 < 4)$
VIII	$C^1_{23} = -C^1_{32} = C^3_{12} = 1$ $-C^3_{21} = C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$
IX	$C^i_{jk} = \varepsilon_{ijk}$

Cuadro 2.1: Clasificación de los modelos de Bianchi [121].

2.2.5. Métrica del Bianchi tipo IX.

Las variables de campo básicas en la formulación graviton-gravitino de la supergravedad (N=1) son los vierbein e^A_μ y el covector-espinor del campo del gravitino Ψ_μ . Obviamente, ellos obedecen el sistema de Einstein-Cartan-Rarita-Schwinger de Freedman [53, 54]. La métrica tipo Bianchi general puede ser escrita en la forma

$$ds^2 = (N^2 - N^j N_j) dt^2 - 2N_i dt \omega^i - e^{-2\Omega(t)} e^{2\beta(t)}_{ij} \omega^i \omega^j, \quad (2.104)$$

donde $\Omega(t)$ es un escalar y $\beta_{ij}(t)$ es una matriz 3×3 , y las funciones lapso y corrimiento son $N(t)$ y $N_i(t)$, respectivamente. Las 1-formas ω^i son características para un universo

de Bianchi particular, aquí tomaremos [121]

$$\begin{aligned}\omega^1 &= -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2, \\ \omega^2 &= \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2, \\ \omega^3 &= \cos x^1 dx^2 + dx^3,\end{aligned}\tag{2.105}$$

para los modelos tipo IX . Tomaremos también β_{ij} diagonal y usaremos la parametrización de Misner [93, 95], $\beta_{ij} = \text{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+)$. La 1-forma ω^i apropiada para este caso obedece la ecuación Maurer-Cartan

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,\tag{2.106}$$

donde ε_{ijk} son las constantes de estructura del grupo movimientos $SO(3)$ asociados con los modelos de Bianchi tipo IX . Tomaremos a la cosmología cuántica a significar al cuantización de modelos homogéneos con $\psi_\mu = \psi_\mu(t)$ y el conjunto completo de variables dinámicas es $\Omega(t), \beta_{ij}(t)$ y $\psi_{\mu A_i}(t)$.

Vamos a realizar una transformación a las variables naturales para nuestro problema, a saber:

$$u^k := \begin{cases} x = -\Omega + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_- \\ y = \Omega + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_- \\ z = \Omega + \beta_+ - 2\beta_- \end{cases}.\tag{2.107}$$

En términos de las coordenadas y la base, los vierbein $e_\mu{}^A$ están dados por

$$e_0{}^0 = N(t), \quad e_i{}^0 = N_i, \quad e_j{}^\alpha = \delta_j^\alpha \exp[u^{(j)}],\tag{2.108}$$

donde los paréntesis quieren decir no sumar. Por simplicidad trabajaremos en la norma $N_i = 0$. Los correspondientes coeficientes de rotación son [121]

$$\omega_{ijk} = \frac{1}{2} \exp(-u^{(i)}) \varepsilon_{ijk},\tag{2.109}$$

para el Bianchi tipo IX . Nótese que $e = \exp[-(x + y + z)]$, tal que usando, es fácil encontrar la expresión local para el campo del gravitino

$$\phi_a = \exp[-(x + y + z)]\psi_a.\tag{2.110}$$

Usamos para las matrices γ la representación real de Majorana [71, 101], en la cuál todas las matrices γ son puramente imaginarias y las componentes del vector-espinor son, en consecuencia, reales con $C = -i\gamma^0$. La constricción supersimétrica en este caso es

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \exp[-(x + y + z)]i\gamma^0 \left\{ \gamma^1 \left[(\gamma^2\phi_2 + \gamma^3\phi_3)\partial_x - \frac{1}{2} \exp(x)(\gamma^3\phi_2 + \gamma^2\phi_3) \right] \right. \\ \left. + \gamma^2 \left[(\gamma^1\phi_1 + \gamma^3\phi_3)\partial_y + \frac{1}{2} \exp(y)(\gamma^3\phi_1 - \gamma^1\phi_3) \right] \right. \\ \left. + \gamma^3 \left[(\gamma^1\phi_1 + \gamma^2\phi_2)\partial_z + \frac{1}{2} \exp(z)(\gamma^2\phi_1 + \gamma^1\phi_2) \right] \right\}, \quad (2.111) \end{aligned}$$

La constricción Supersimétrica

Debido a $\{S_A, S_B\} = 0$ para $A \neq B$ tomamos una vez más, a cada S_A para operar en subespacios ortogonal. Descomponiendo el vector-espinor gravitino en sus correspondientes componentes las condiciones supersimétricas pueden ser escritas como sigue:

$$S_1\Psi_I = \left[-i\Gamma^1\partial_x + \Gamma^2\frac{1}{2}\exp(x) \right]\Psi_I + \left[i\Gamma^3\partial_y + \Gamma^4\frac{1}{2}\exp(y) \right]\Psi_I + \left[i\Gamma^5\partial_z - \Gamma^6\frac{1}{2}\exp(z) \right]\Psi_I = 0, \quad (2.112)$$

y

$$S_2\Psi_{II} = \left[-i\Gamma^1\partial_x + \Gamma^2\frac{1}{2}\exp(x) \right]\Psi_{II} + \left[i\Gamma^3\partial_y - \Gamma^4\frac{1}{2}\exp(y) \right]\Psi_{II} + \left[i\Gamma^5\partial_z + \Gamma^6\frac{1}{2}\exp(z) \right]\Psi_{II} = 0. \quad (2.113)$$

El álgebra que satisfacen las componentes del campo del gravitino es

$$\{\phi_{i\mathcal{A}}, \phi_{j\mathcal{B}}\} = -\frac{i}{8}(\gamma_i\gamma_j)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \quad (2.114)$$

donde \mathcal{A} y \mathcal{B} son índices espinoriales. Las condiciones implican la siguiente álgebra para las matrices Γ^A : $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = \eta^{AB}$, para $A, B = 1, \dots, 6$. Las otras dos ecuaciones tienen exactamente la misma forma. Para resolver las ecuaciones $\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}\Psi_{\mathcal{A}} = 0$ para el caso Bianchi IX. Usamos la siguiente realización de matrices 8×8 de las matrices Γ^A :

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.115)$$

con γ^i una matriz de Dirac estándar e I la matriz identidad. Esta elección implica que cada $\Psi_{\mathcal{A}}$ se separa en un objeto de ocho componentes. Entonces, la condición supersimétrica $\hat{S}_{\mathcal{I}}\Psi_{\mathcal{I}} = 0$ se reduce al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} - \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}1} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} + \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}1} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} + \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}1} = 0, \quad (2.116)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} - \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}2} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} - \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}2} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} - \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}2} = 0, \quad (2.117)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}3} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} + \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}3} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} - \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}3} = 0, \quad (2.118)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}4} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} - \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}4} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} + \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}4} = 0, \quad (2.119)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} - \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}5} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} - \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}5} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} + \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}5} = 0, \quad (2.120)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} - \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}6} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} + \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}6} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} - \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}6} = 0, \quad (2.121)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}7} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} - \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}7} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} - \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}7} = 0, \quad (2.122)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} + \frac{1}{2}e^x \right] \Psi_{\mathcal{I}8} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta y} + \frac{1}{2}e^y \right] \Psi_{\mathcal{I}8} = 0, \left[\frac{\delta}{\delta z} + \frac{1}{2}e^z \right] \Psi_{\mathcal{I}8} = 0. \quad (2.123)$$

En consecuencia, el estado $\Psi_{\mathcal{I}}^1$ es

$$\Psi_{\mathcal{I}1} = \Psi_{\mathcal{I}10} \exp\left[\frac{e^x - e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.124)$$

$$\Psi_{\mathcal{I}2} = \Psi_{\mathcal{I}20} \exp\left[\frac{e^x + e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.125)$$

$$\Psi_{\mathcal{I}3} = \Psi_{\mathcal{I}30} \exp\left[\frac{-e^x - e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.126)$$

$$\Psi_{\mathcal{I}4} = \Psi_{\mathcal{I}40} \exp\left[\frac{-e^x + e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.127)$$

$$\Psi_{\mathcal{I}5} = \Psi_{\mathcal{I}50} \exp\left[\frac{e^x + e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.128)$$

¹Estas soluciones han sido corregidas con respecto a las presentadas en [87]. Y no cambian la conclusión alcanzada en él.

$$\Psi_{I6} = \Psi_{I60} \exp\left[\frac{e^x - e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.129)$$

$$\Psi_{I7} = \Psi_{I70} \exp\left[\frac{-e^x + e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.130)$$

$$\Psi_{I8} = \Psi_{I80} \exp\left[\frac{-e^x - e^y - e^z}{2}\right]. \quad (2.131)$$

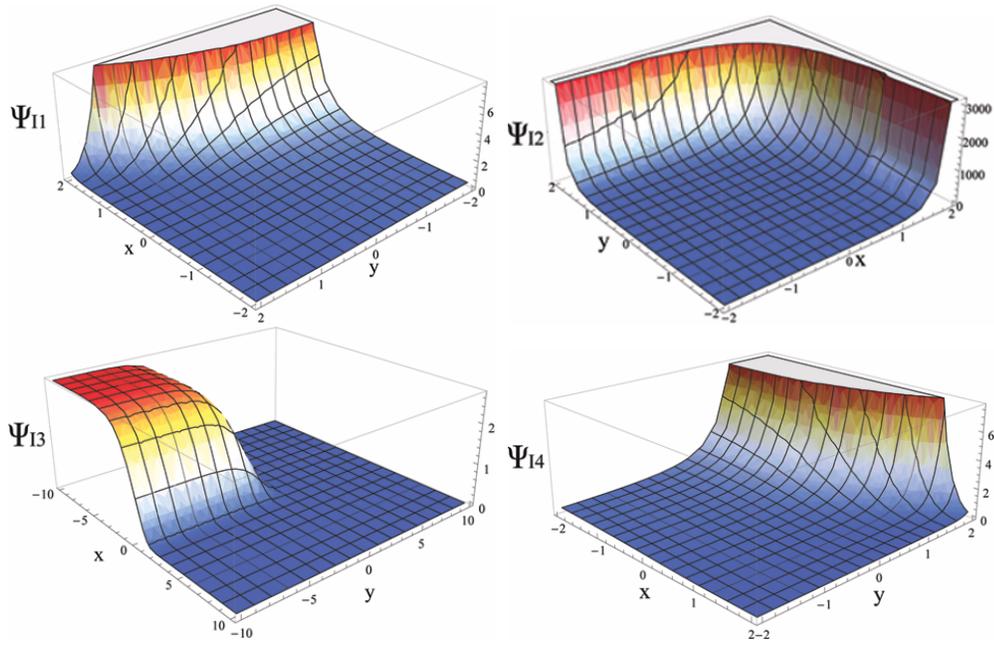


Figura 2.2: Comportamiento de las componentes no-cero de la función de estado del universo del primer Bianchi IX Ψ_{A_i} con respecto a x y y para las soluciones.

Análogamente, la solución para la condición $\hat{S}_{II}\Psi_{II}^2$ es

$$\Psi_{II1} = \Psi_{II10} \exp\left[\frac{e^x + e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.132)$$

$$\Psi_{II2} = \Psi_{II20} \exp\left[\frac{e^x - e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.133)$$

$$\Psi_{II3} = \Psi_{II30} \exp\left[\frac{-e^x + e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.134)$$

$$\Psi_{II4} = \Psi_{II40} \exp\left[\frac{-e^x - e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.135)$$

$$\Psi_{II5} = \Psi_{II50} \exp\left[\frac{e^x - e^y + e^z}{2}\right], \quad (2.136)$$

$$\Psi_{II6} = \Psi_{II60} \exp\left[\frac{e^x + e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.137)$$

$$\Psi_{II7} = \Psi_{II70} \exp\left[\frac{-e^x - e^y - e^z}{2}\right], \quad (2.138)$$

$$\Psi_{II8} = \Psi_{II80} \exp\left[\frac{-e^x + e^y + e^z}{2}\right]. \quad (2.139)$$

2.2.6. Los Modelos de Bianchi clase A

Las variables de campo básicas en la formulación gravitón-gravitino ($N = 1$) de la supergravedad son los vierbein $e^A{}_\mu$ y el covector-espinor del campo de gravitino ϕ_μ , las cuales obedecen el sistema Einstein-Cartan-Rarita-Schwinger de Freedman [40, 53, 54]. La métrica tipo Bianchi general puede ser escrita en la forma

$$ds^2 = (N^2 - N^j N_j) dt^2 - 2N_i dt \omega^i - e^{-2\Omega(t)} e_{ij}^{2\beta(t)} \omega^i \omega^j, \quad (2.140)$$

donde $\Omega(t)$ es un escalar y $\beta_{ij}(t)$ es una matriz 3×3 , y las funciones lapse y shift son $N(t)$ y $N_i(t)$, respectivamente. Las 1-formas ω^i son características para un universo de Bianchi particular, ver [121]. Ellas obedecen la relación $d\omega^i = -\frac{1}{2}C^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$, donde $C^i{}_{jk}$ son las constantes de estructura del grupo particular de movimientos asociados con los modelos de Bianchi. De acuerdo al esquema de clasificación de Ellis y MacCallum [47], las constantes de estructura están escritas en la forma: $C^i{}_{jk} = \epsilon_{jks} m^{si} + \delta_k^i a_j - \delta_j^i a_k$, con la matriz $\mathbf{m} = (m^{ij})$ y el triplete (a_i) . Para la clase A de los modelos se cumple $a_i = 0$ y

²Estas soluciones han sido corregidas con respecto a las presentadas en [87]. Y no cambian la conclusión alcanzada en él.

$$\mathbf{m} = \begin{cases} 0 & \text{type } I \\ \text{diag}(1, 0, 0) & \text{type } II \\ -\alpha & \text{type } VI_{-1} \\ \text{diag}(-1, -1, 0) & \text{type } VII_0 \\ \text{diag}(-1, 1, 1) & \text{type } VIII \\ \delta_{ij} & \text{type } IX \end{cases}, \quad (2.141)$$

con

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Tomaremos una vez más β_{ij} diagonal y usaremos la parametrización de Misner. En términos de las coordenadas y la base ω^i característica del modelo de Bianchi particular en consideración, los vierbeine están dados por $e_0^0 = N(t)$, $e_i^0 = N_i$ y $e_j^\alpha = \exp(u^{(j)})\delta_j^\alpha$, donde los paréntesis quieren decir no-suma. Los correspondientes coeficientes de rotación son [121] $\omega_{ijk} = \frac{1}{2} \exp(u^{(i)})C_{ijk}$ para todos los modelos de Bianchi clase A. Nótese que $e = \exp[-(x + y + z)]$, tal que es fácil encontrar la expresión local para el campo de gravitino $\phi_a = \exp[-(x + y + z)]\Psi_a$.

La constricción supersimétrica para los modelos clase A es

$$\mathcal{S} = e^{-1}i\gamma^0 \left\{ \begin{aligned} & \gamma^1 \left[(\gamma^2\phi_2 + \gamma^3\phi_3)\partial_x - \frac{1}{2} \exp(x)(m_2^2 + m_3^3)(\gamma^3\phi_2 - \gamma^2\phi_3) \right] \\ & + \gamma^2 \left[(\gamma^1\phi_1 + \gamma^3\phi_3)\partial_y + \frac{1}{2} \exp(y)(m_1^1 + m_3^3)(\gamma^3\phi_1 - \gamma^1\phi_3) \right] \\ & + \gamma^3 \left[(\gamma^1\phi_1 + \gamma^2\phi_2)\partial_z + \frac{1}{2} \exp(z)(m_1^1 + m_2^2)(\gamma^2\phi_1 + \gamma^1\phi_2) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.143)$$

La constricción supersimétrica.

En este caso las ecuaciones pueden ser dadas como sigue

$$S_1\Psi_I = \left[-i\Gamma^1\partial_x + \Gamma^2\frac{a}{2} \exp(x) \right] \Psi_I + \left[i\Gamma^3\partial_y + \Gamma^4\frac{b}{2} \exp(y) \right] \Psi_I + \left[i\Gamma^5\partial_z - \Gamma^6\frac{c}{2} \exp(z) \right] \Psi_I = 0, \quad (2.144)$$

y

$$S_2\Psi_{II} = \left[-i\Gamma^1\partial_x + \Gamma^2\frac{a}{2} \exp(x) \right] \Psi_{II} + \left[i\Gamma^3\partial_y - \Gamma^4\frac{b}{2} \exp(y) \right] \Psi_{II} + \left[i\Gamma^5\partial_z + \Gamma^6\frac{c}{2} \exp(z) \right] \Psi_{II} = 0. \quad (2.145)$$

donde las Γ^i son las matrices 8×8 involucrando las componentes del gravitino las cuales aparecen en (2.143), $a = m_2^2 + m_3^3$, $b = m_1^1 + m_3^3$ y $c = m_1^1 + m_2^2$. Las otras dos ecuaciones tienen exactamente la misma forma. Como puede verse, necesitamos encontrar un conjunto de seis matrices independientes que satisfagan el álgebra $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 0$, para $A \neq B = 1, \dots, 6$. Usaremos el mismo conjunto de matrices Γ usadas antes para Bianchi tipo *IX*.

La solución de (2.144) está dada por³

$$\Psi_{I1} = \Psi_{I10} \exp\left[\frac{ae^x - be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.146)$$

$$\Psi_{I2} = \Psi_{I20} \exp\left[\frac{ae^x + be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.147)$$

$$\Psi_{I3} = \Psi_{I30} \exp\left[\frac{-ae^x - be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.148)$$

$$\Psi_{I4} = \Psi_{I40} \exp\left[\frac{-ae^x + be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.149)$$

$$\Psi_{I5} = \Psi_{I50} \exp\left[\frac{ae^x + be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.150)$$

$$\Psi_{I6} = \Psi_{I60} \exp\left[\frac{ae^x - be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.151)$$

$$\Psi_{I7} = \Psi_{I70} \exp\left[\frac{-ae^x + be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.152)$$

$$\Psi_{I8} = \Psi_{I80} \exp\left[\frac{-ae^x - be^y - ce^z}{2}\right]. \quad (2.153)$$

Análogamente, la solución a la condición $\hat{S}_{II}\Psi_{II}$ ⁴ es

$$\Psi_{II1} = \Psi_{II10} \exp\left[\frac{ae^x + be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.154)$$

$$\Psi_{II2} = \Psi_{II20} \exp\left[\frac{ae^x - be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.155)$$

$$\Psi_{II3} = \Psi_{II30} \exp\left[\frac{-ae^x + be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.156)$$

$$\Psi_{II4} = \Psi_{II40} \exp\left[\frac{-ae^x - be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.157)$$

³Estas soluciones han sido corregidas con respecto a las presentadas en [87]. Y no cambian la conclusión alcanzada en dicho trabajo.

⁴Estas soluciones han sido corregidas con respecto a las presentadas en [87]. Y no cambian la conclusión alcanzada en dicho trabajo.

$$\Psi_{II5} = \Psi_{II50} \exp\left[\frac{ae^x - be^y + ce^z}{2}\right], \quad (2.158)$$

$$\Psi_{II6} = \Psi_{II60} \exp\left[\frac{ae^x + be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.159)$$

$$\Psi_{II7} = \Psi_{II70} \exp\left[\frac{-ae^x - be^y - ce^z}{2}\right], \quad (2.160)$$

$$\Psi_{II8} = \Psi_{II80} \exp\left[\frac{-ae^x + be^y + ce^z}{2}\right]. \quad (2.161)$$

Ψ_{IIj0} y Ψ_{IIj} son constantes de integración. Nótese que esta solución a la función de estado es de tipo solitón. Este tipo de soluciones han ya sido obtenidas en la cosmología cuántica supersimétrica, para el generador de rotaciones de Lorentz arbitrario [32, 86], y también ha sido encontrado en el contexto del esquema de Wheeler-DeWitt estándar [13, 75, 97].

Capítulo 3

Sobre los Fundamentos de la Relatividad General.

*Lo que sabemos es una gota de agua;
lo que ignoramos es el oceano.*
Sir Isaac Newton (1642-1726).

Podemos afirmar que la teoría que trata de explicar la atracción entre los cuerpos neutros masivos, esta ligada a la historia misma de la Física.

Galileo Galilei (1564-1642) es considerado el creador de la Física como ciencia moderna, por introducir el método experimental y utilizar a las matemáticas como una herramienta fundamental para la explicación de los fenómenos de la naturaleza. Sin embargo, es mayoritariamente conocido por haber realizado experimentos de caída libre desde lo alto de la torre inclinada de Pisa, en Italia. Aunque la veracidad de éste hecho no se ha corroborado, lo cierto es que, estuvo consciente del problema en cuestión como lo muestra su carta a Pierre Calcavy de 1637 [108],

*Yo discuto **ex suppositione**, imaginando un movimiento hacia un punto alejado de los demás, que se va acelerando, aumentando su velocidad en la misma proporción en que aumenta el tiempo, y a partir de este movimiento demuestro en forma concluyente muchas propiedades. Agrego que si la experiencia mostrara que tales propiedades se verifican en el movimiento de cuerpos pesados cayendo naturalmente, podemos afirmar sin error que se trata del mismo movimiento que yo definí y supuse.*

Muchos años después, Sir Isaac Newton (1642-1727) al introducir el concepto de masa en sus *Principia Mathematica* [100], afirma que llevó a cabo experimentos con péndulos; en 1830 se publicó un trabajo de F. W. Bessel (1784-1846) donde también al usar péndulos mejora la precisión que había obtenido Newton. En 1890, apareció publicado un trabajo del científico húngaro Roland von Eötvös (1848-1919) donde reporta un experimento, en el que utilizó una balanza de torsión, dicho aparato le permitió la mayor precisión de la época (ver tabla (3.1)).

Pero, ¿qué es lo que estos connotados científicos perseguían al llevar al cabo dichos experimentos? La respuesta es: **Verificar que el cociente**

$$\frac{m_g}{m_i} = \kappa \tag{3.1}$$

es una constante universal.

Donde, m_g y m_i , son la masa gravitacional e inercial del mismo cuerpo de prueba, respectivamente. Además, estamos considerando a la masa gravitacional como pasiva, es decir, es la medida de la intensidad de la interacción del objeto con un campo gravitacional externo. Lo que permite que cualquier cuerpo, no importando su composición o estructura interna, caiga con la misma aceleración en un campo gravitacional dado.

3.1. Los Fundamentos de la Relatividad General.

El cociente antes mencionado es pieza clave en las ideas que condujeron a Einstein a su Relatividad General (GR).

Entonces, se me ocurrió ” *die glücklichste Gedanke meines Lebens*”, la idea más feliz de mi vida, en la forma siguiente. El campo gravitacional tiene solo existencia relativa... debido que para un observador cayendo libremente del techo de una casa no existe [al menos en sus alrededores] campo gravitacional. Incluso, sí el observador suelta algunos cuerpos entonces estos permanecen en un estado de reposo o movimiento uniforme relativo a él, independiente de su naturaleza física o química particular. El observador tiene el derecho a interpretar su propio estado como de reposo [105].

La conclusión alcanzada por Einstein, es ahora conocida como el **Principio de Equivalencia Débil** (WEP), y que ahora podemos enunciarlo con un lenguaje moderno:

Sí un cuerpo de prueba neutro es colocado en un evento inicial en el espacio-tiempo y dada una velocidad inicial ahí, entonces, su trayectoria subsecuente será independiente de su estructura y composición interna.

Dejemos en claro un aspecto del párrafo anterior; por cuerpo de prueba neutro, se quiere decir: **un cuerpo electromagnéticamente neutro que tiene energía auto-gravitante despreciable y que es suficientemente pequeño en tamaño, tal que, su acoplamiento a las inhomogeneidades en campos externos puede ser ignorado.** Nótese que el enunciado del WEP, queda completamente restringido a experimentos puramente mecánicos; pero, ¿que sucede con el resto de las interacciones fundamentales

que describe la Física?, como el comportamiento mecánico-cuántico, el electromagnético, etc. Es la restricción mecánica la que le da el adjetivo de débil (weak) al principio.

3.1.1. De la universalidad de κ a la validez de las teorías no-gravitacionales.

Einstein notó que para incluir al resto de la física, era necesaria una generalización del principio obtenido del análisis puramente mecánico. Dicha generalización ahora se conoce como: **Principio de Equivalencia de Einstein** (EEP) [3].

Antes de enunciar al EEP, vamos a introducir la siguiente definición:

- **Experimentos locales no-gravitacionales:** Es cualquier experimento que se lleve a cabo i) en un laboratorio en caída libre que está protegido y es suficientemente pequeño, de tal manera, que las inhomogeneidades en los campos externos pueden ser ignoradas en todo su volumen, y ii) en el cuál efectos autogravitantes son despreciables.

El EEP afirma:

- i) El WEP es válido, ii) el resultado de cualquier experimento local no-gravitacional es independiente de la velocidad del aparato (Invariancia Local de Lorentz), y iii) el resultado de cualquier experimento local no-gravitacional es independiente de dónde y cuando (en el universo) éste es llevado a cabo (Invariancia Local de Posición).

El enunciado del EEP, puede ser parafraseado en una manera menos técnica:

Las leyes de la naturaleza se comportan como en Relatividad Especial, en un sistema en caída libre en un campo gravitacional, al menos en una región suficientemente pequeña.

Suponiendo la validez de EEP, además, de que en aquel tiempo las interacciones fundamentales de la física se reducían a la interacción electrodinámica; Einstein mostró que un rayo de luz que se propague hacia afuera de un pozo de potencial gravitacional sufre

un corrimiento al rojo. Por lo que no es sorprendente que el crecimiento en la precisión de las pruebas experimentales de la universalidad de κ y mediciones del corrimiento al rojo gravitacional permanecen entre las más reconocidas pruebas de la validez de EEP, y aun hoy en día los dos tipos de pruebas continúan siendo refinadas, como se mostrará en la siguiente sección.

3.2. Experimentos de Alta Precisión sobre el EEP.

Como hemos visto, la Relatividad General descansa sobre la validez de EEP, la cual esta conformada por tres ingredientes: la validez de WEP, la invariancia local de Lorentz y la invariancia local de posición. Pero, se espera que la teoría deba fracasar en algún nivel, para poder ser unificada con el resto de los campos completando así el modelo estándar de la física de partículas. Esto obliga a poner a prueba los fundamentos de la teoría con la más alta precisión posible, para poder encontrar esa escala.

3.2.1. Experimentos sobre el WEP.

Al tipo de experimentos que ponen a prueba al WEP, pueden ser organizado en las siguientes categorías:

i) **Experimentos con péndulos,**

ii) **Experimentos tipo Eötvös,** que utiliza balanzas de torsión.

iii) **El método celeste de caída libre ó de Galileo,** donde los cuerpos de prueba pueden ser los planetas mismos y sus lunas, que caen libremente en el campo gravitacional del Sol.

Como puede verse en el cuadro 3.1, el uso de la balanza de torsión ha permitido realizar mediciones muy precisas. En las primeras siete décadas del siglo XX, se logró un incremento muy importante en la precisión de los experimentos en hasta 5 órdenes de magnitud, cabe mencionar que los experimentos de Dicke et. al. y Braginsky et al. se utilizó al Sol como fuente del campo gravitacional.

Año	Experimentador	Instrumento	Precisión
1680	Newton	Péndulo	2×10^{-3}
1827	Bessel	Péndulo	2×10^{-5}
1890	Eötvös	Balanza de Torsión	5×10^{-8}
1922	Eötvös, Pekar, Fekete	Balanza de Torsión	3×10^{-9}
1935	Renner	Balanza de Torsión	2×10^{-10}
1964	Dicke, Roll, Krotkov	Balanza de Torsión	3×10^{-11}
1971	Braginsky, Panov	Balanza de Torsión	9×10^{-13}

Cuadro 3.1: Lista de Experimentos sobre κ , hasta la década de 1970. La precisión esta dada por $|\frac{m_g - m_i}{m_i}|$ [26].

En 1986, las pruebas sobre el WEP entraron en una nueva etapa, la cuál fue iniciada por la aparición de un trabajo de Ephraim Fischbach [51], donde se muestra que los datos del trabajo de Eötvös-Pekar-Fekete de 1922 fueron lo suficientemente sensibles a la composición de los materiales usados y que los resultados soportan la existencia de un acoplamiento entre el campo gravitacional y el número bariónico. En la Universidad de Washington se llevaron a cabo los experimentos conocidos como *Eöt-Wash*, para la búsqueda de esa quinta interacción sugerida por Fischbach, donde usaron una sofisticada balanza de torsión para comparar las aceleraciones de diferentes materiales hacia la topografía local de la tierra, masas movibles en el laboratorio, el Sol y la galaxia, alcanzando niveles de precisión de 4×10^{-13} [131, 11].

Los experimentos tipo Eötvös y Galileo son los que ofrecen una mayor sensibilidad a la fecha. En [126] se presenta los resultados de un experimento tipo Eötvös donde se utilizó una balanza de torsión rotante y se consideraron diferentes fuentes del campo gravitacional, una de ellas es el campo terrestre que les permitió mediciones con una precisión del orden de 10^{-13} y al considerar la aceleración hacia el centro de la galaxia, pudieron estimar una igualdad en las atracciones del orden de 10^{-5} .

Un ejemplo del método de Galileo es presentado en [142], en donde se han alcanzado a medir diferencias en las aceleraciones del orden de 10^{-13} . Este experimento está ligado a la historia del programa espacial APOLLO que permitió la llegada del hombre a la Luna y de las misiones soviéticas; hace uso de arreglos retro-reflectores que permiten que un

pulso láser tenga un viaje de ida y vuelta a la fuente en un laboratorio terrestre, lo que permite medir el tiempo de vuelo, y con ello medir las aceleraciones en caída libre de la Tierra y la Luna hacia el Sol.

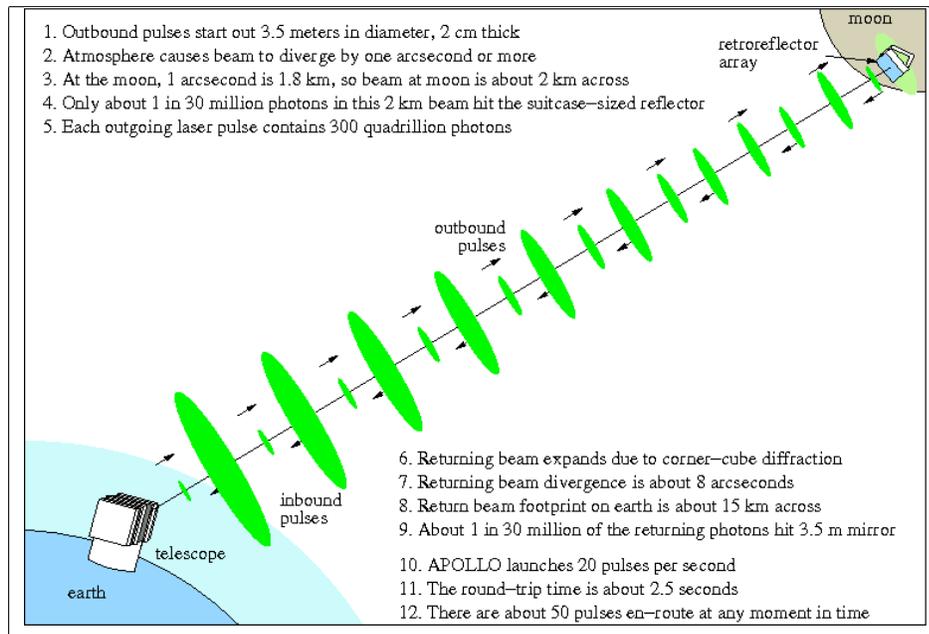


Figura 3.1: Experimento APOLLO (Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation)

Sin embargo, en el trabajo de Overduin et al. [104] se menciona que los métodos anteriormente descritos, han alcanzado un nivel muy avanzado de madurez y es improbable que avancen significativamente más allá de la precisión mencionada en un periodo cercano; por lo que, para obtener mayor grado de precisión proponen el uso del método de Galileo, solo que ahora montado en un satélite que simula una torre de 7000 km. de alto que invierte constantemente su dirección para dar una señal periódica continua, en lugar de una caída de 3 segundos. Además, estiman que su Satellite Test of Equivalence Principle (STEP) avanzara sobre las limitaciones experimentales acerca de las violaciones de WEP de un orden de 10^{-13} hasta un orden de 10^{-18} .

3.2.2. Experimentos sobre la Invariancia Local de Lorentz (LLI)

Este segundo ingrediente de EEP, también ha estado bajo escrutinio experimental incluso antes de la aparición de la teoría de la relatividad especial, con el famoso experi-

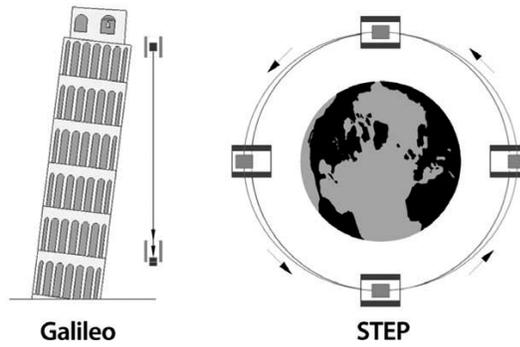


Figura 3.2: Comparativo de la Torre de Pisa y el STEP [104].

mento de Michelson y Morley de 1887 [90], cuyos resultados son considerados la primera evidencia fuerte contra la existencia del Eter lumínico, y la primer evidencia hacia la isotropía del espacio con respecto a la velocidad de la luz.

Las técnicas experimentales introducidas a lo largo del siglo XX condujeron a un continuo mejoramiento en el escrutinio de la relatividad especial (SR). Los experimentos pueden ser clasificados en la siguiente manera:

- i) **Tipo Michelson-Morley (MM)**, buscan anisotropías en la velocidad de la luz;
- ii) **Tipo Kennedy-Thorndike (KT)**, investigan la posible dependencia de la velocidad de la luz con respecto a la velocidad relativa entre el laboratorio y un sistema privilegiado;
- iii) **Tipo Ives-Stilwell (IS)**, ponen a prueba la dilación temporal relativista.

En 1964, Jaseja et al. [70] utilizaron masers de He-Ne infrarrojos altamente monocromáticos colocados en forma perpendicular, lo que les permitió medir una diferencia en las frecuencias de una parte en 10^{13} . Además, probaron que no existe anisotropía del espacio o efecto de arrastre mayor que 10^{-3} del término $(v/c)^2$ asociado a la velocidad orbital de la Tierra; a pesar de ser resultados preliminares, observan un crecimiento en la precisión de tres órdenes de magnitud sobre el experimento de MM.

En 1977, apareció publicado un trabajo de K. Bretcher [21] en donde utilizó datos de fuentes regulares de rayos-X pulsantes en sistemas binarios y suponiendo que la luz se propaga con una velocidad $c' = c + kv$, para un observador en reposo con respecto a la fuente con velocidad v , encontró que el tiempo de arribo de los pulsos indican $k < 2 \times 10^{-9}$.

En 1979, Brillet y Hall [22] pusieron a prueba la teoría de la contracción de Lorentz-Fitzgerald, encontrando que si dicha contracción existe debe encontrarse por debajo de un cambio dado por $\Delta l/l = (1,5 \pm 2,5) \times 10^{-15}$.

A pesar de los altos grados de precisión alcanzados en el siglo pasado, en esta primera década del siglo XXI se han realizado y se continúan planteando proyectos experimentales para poner a prueba a la relatividad especial, ejemplo de éstos se mencionan a continuación.

En 2003 se publicaron los resultados de una versión moderna del experimento de MM, trabajo debido a H. Müller et al. [98], quienes colocaron dos resonadores perpendiculares en el interior de una cámara criogénica, que permite tener un bajo coeficiente de expansión térmica, con lo que pudieron medir una diferencia relativa en la velocidad de la luz de $\Delta c/c = (2,6 \pm 1,7) \times 10^{-15}$

En Alemania se han realizado los experimentos más precisos hasta la fecha, concernientes a los tipo IS y MM; los resultados del primero, debidos al grupo de Novotny et al. [102], aparecieron a mediados del 2009 y consistió en utilizar un haz de iones de ${}^7\text{Li}^+$ como relojes en movimiento a una velocidad de $0,338c$ y con la ayuda de dos láseres, propagándose en una dirección paralela y antiparalela a la de los relojes, se observó una línea espectral de 114 MHz que dentro del modelo de IS corresponde a $|\hat{a}_2| < 1,2 \times 10^{-5}$ que es una limitación 25 veces más rigurosa sobre desviaciones del término de orden $(v/c)^4$ que cualquier otro experimento previo. Los resultados correspondientes al tipo MM aparecieron a finales de 2009, y son del grupo de S. Herrmann et al. [65] quienes utilizaron dos resonadores ópticos montados perpendicularmente sobre un bloque de sílice fundido y que fueron rotados en forma continua sobre una mesa de precisión de soporte de aire, lo que permitió limitar a la anisotropía de la velocidad por debajo del orden de 10^{-17} , lo que constituye a la fecha la prueba de laboratorio más precisa sobre la isotropía de c .

3.2.3. Experimentos sobre la Invariancia Local de Posición (LPI)

Dado que tanto WEP y LLI ha sido puestos a prueba con una gran precisión, experimentos concernientes a la LPI deben llevarse hasta el mismo nivel de precisión.

La LPI esta relacionada con la universalidad del corrimiento al rojo gravitacional,

Año	Experimentador	Instrumento	Cotas
1964	T. Jaseja et al.	Maseres He-Ne	$\frac{\Delta\nu}{\nu} < 1 \times 10^{-3}$
1977	K. Bretcher	Fuentes de Rayos X	$c' = c + kv, k < 2 \times 10^{-9}$
1979	Brillet y Hall	Laseres	$\frac{\Delta l}{l} < (1,5 \pm 2,5) \times 10^{-15} \times 10^{-8}$
2003	H. Müller	Resonadores en cámara criogenica	$\frac{\Delta c}{c} < (2,6 \pm 1,7) \times 10^{-15}$
2009	S. Herrmman et al.	Resonadores ópticos	anisotropía de la luz menor al orden 10^{-17}

Cuadro 3.2: Lista de Experimentos sobre LLI, y cotas medidas.

por lo que violaciones a la LPI implicarían que el *ritmo* de un reloj en caída libre sería diferente cuando es comparado con uno de referencia, por ejemplo sobre la superficie de la tierra.

Violaciones a la LPI pueden ser parametrizadas por la siguiente expresión

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (1 + \mu) \frac{U}{c^2}, \quad (3.2)$$

donde ν, U, c son la frecuencia de luz, el potencial gravitacional y la velocidad de la luz, respectivamente; μ es cero si LPI es válido.

La primera observación del corrimiento al rojo gravitacional fue la que se midió en el corrimiento de las líneas espectrales de la estrella enana blanca Sirius B por el astrónomo norteamericano W. S. Adams en 1925 [137]. Aunque sus mediciones concuerdan con la predicción, dicho corrimiento podía deberse a otras causas, por lo que se prefiere que las pruebas experimentales se lleven a cabo con el campo gravitacional terrestre.

El corrimiento fue verificado en forma concluyente por el experimento de Pound, Rebka y Snider [113, 114, 115]; y fue uno de los primeros experimentos de precisión que puso a prueba a la GR, el experimento hizo uso del efecto Mössbauer entre fuentes y detectores, además, de una torre de 22.5 m en la Universidad de Harvard, obteniendo el siguiente valor

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (2,57 \pm 0,26) \times 10^{-15}, \quad (3.3)$$

que conduce a un valor de la incertidumbre relativa de $\mu \simeq 10^{-2}$.

Vessot et. al. [133, 134] en 1976, realizaron una verificación más precisa de LPI, al comparar las frecuencias de dos Masers de Hidrógeno, uno sobre la superficie terrestre y

el otro en un cohete suborbital que alcanza una altitud de más de 10000 km., verificando que el cambio fraccional en la medición de frecuencias es consistente con la GR hasta un nivel de precisión de 10^{-4} y estableciendo un límite de $|\mu| < 2 \times 10^{-4}$.

La universalidad del corrimiento al rojo gravitacional ha sido verificada usando otro tipo de relojes; en la actualidad, la cota más estricta sobre una posible violación de la LPI es $|\mu| < 2,1 \times 10^{-5}$ [14]. Para este año, la Agencia Espacial Europea tiene planeado lanzar la misión ACES (**A**tomic **C**lock **E**nsemble in **S**pace), que entre otros objetivos se encuentra la medición de corrimiento al rojo gravitacional con una precisión de 2×10^{-6} [124].

Año	Experimentador	Instrumento	$\Delta\nu/\nu = (1 + \mu)U/c^2$
1960	Pound, Rebka y Snider	Effecto Mössbauer y una torre de 22.5 m	$\mu \simeq 10^{-2}$
1976	R. Vessot	Maseres de H, uno terrestre y otro suborbital.	$ \mu < 2 \times 10^{-4}$
2002	A. Bauch y S. Weyers	Atomos de Cesio y Maser de Hidrogeno	$ \mu < 2,1 \times 10^{-5}$

Cuadro 3.3: Lista de Experimentos sobre LPI, y cotas medidas.

3.2.4. Pruebas de GR en el régimen de campo fuerte.

Es muy importante mencionar que toda teoría física debe ser puesta a prueba no solo en sus fundamentos, sino en sus predicciones, los experimentos mencionados han sido realizados o planificados en el contexto del régimen de campo gravitacional débil. Pruebas en el límite de campo fuerte, involucrando particularmente los aspectos radiativos de la GR, deben ser realizados. Se ha mostrado que en sistemas binarios de estrellas con al menos una de ellas neutrálica contiene regiones de campo gravitacional fuerte y, por lo tanto, una base de pruebas alternativa a la detección de ondas gravitacionales, para pruebas en el régimen de campo fuerte [33]

Los pulsares son estrellas de neutrones rotantes altamente magnetizadas, que emiten un haz electromagnético a lo largo de su eje magnético, cuando el eje magnético está inclinado con respecto al eje de rotación actúan como un faro cósmico de un pulso en radio-frecuencia que puede ser detectado una vez por cada rotación cuando el haz se dirige hacia la Tierra. Para los pulsares con frecuencia de rotación muy alta, los llamados

pulsares de milisegundos, la estabilidad del periodo es similar a la alcanzada por los relojes atómicos terrestres. Por lo que son los relojes astronómicos más precisos con muy amplias aplicaciones, una de ellas son las pruebas de precisión de la GR en el régimen de campo fuerte. Sin embargo, los pulsares dobles, es decir, sistemas binarios de pulsares tienen una gran ventaja sobre un solo pulsar en un sistema binario, ya que se tienen acceso a la combinación de dos relojes de alta precisión en un sistema donde las masas de prueba interactúan únicamente en forma gravitacional. Un sistema de pulsares dobles, fue descubierto en 2003 conocido como el sistema PSR J0737-3039 y ha abierto una ventana enorme de investigación, un análisis presentado por M. Kramer [74] muestra que el comportamiento del sistema esta en acuerdo con lo predicho por GR dentro de un error del 0.05 %.

3.2.5. Pruebas Cuánticas sobre el EEP.

De las páginas previas, puede uno quedarse con la idea de que los experimentos solo han sido diseñados tomando en cuenta argumentos puramente clásicos, y por clásicos que-remos decir, basados en principios que no toman en cuenta el comportamiento cuántico de la naturaleza, es decir, se describe a la materia como partículas puntuales y se estudian sus trayectorias. Sin embargo, sabemos que al tomar en cuenta el comportamiento cuántico de la materia, aparecen nuevos grados de libertad que no necesariamente tienen contraparte clásico (espín), nuevas restricciones como las relaciones de Heisenberg, y algunos conceptos pierden sentido físico como el de trayectoria; además, la evolución de un sistema físico queda descrito por la función de onda que se encuentra extendida sobre una cierta región del espacio-tiempo, las partículas no son puntuales. Es necesario implementar experimentos que tomen en cuenta las características cuánticas de la naturaleza.

Hasta la fecha no se dispone de una teoría cuántica de la gravedad en sentido estricto, es decir, todas las teorías que tratan de cuantizar a la gravedad son solo modelos, como supergravedad, gravedad cuántica de lazos, teoría de cuerdas y mundos membrana. Debemos tener en mente que una teoría de la gravedad a nivel cuántico puede ser diferente a la Relatividad General a nivel clásico y deberá basarse, en principio, usando solo Mecánica Cuántica. Por ejemplo, la gravedad a nivel cuántico tiene que estar descrita por más

campos que el campo de la métrica.

Para explicar pruebas experimentales de los fundamentos de la relatividad general a nivel cuántico, uno está obligado a tomar en cuenta que pueden existir más posibilidades de romper la Invariancia Local de Lorentz y la Invariancia Local de Posición a nivel cuántico que a nivel clásico. Esto no quiere decir que estemos cuantizando la gravedad, solo estamos poniendo a prueba el EEP desde el punto de vista cuántico.

Sin embargo, debemos recordar que la LLI no es un ingrediente exclusivo de la GR, sino de las teorías fundamentales de la Física, como el modelo estándar de partículas (SM) con el cuál es incompatible. Un número de teorías tratando de incorporar a la gravedad con las tres fuerzas del SM podrían contener pequeñas correcciones que violan la LLI; lo que obliga a poner a prueba a ésta desde una perspectiva cuántica, como tarea primordial para la búsqueda de una teoría cuántica de la Gravedad.

Existen trabajos y propuestas experimentales que intentan observar los efectos de la GR sobre fenómenos físicos relacionados al aspecto cuántico de la materia, uno de los más importantes es el que pone a prueba a la LLI a muy alta precisión (aunque surgió del contexto de poner a prueba el principio de Mach) cuyas primeras versiones son de los experimentos realizados por los grupos de las Universidades de Yale y Glasgow, encabezados por Hughes y Drever, respectivamente [66, 46]. En la década de 1980 se realizaron versiones muy mejoradas del experimento tipo Hughes-Drever, que incluyó el uso de técnicas para atrapar átomos enfriados por láser. Una manera de interpretar los resultados es la siguiente: *suponer que la interacción electromagnética sufre una ligera violación de LLI, a través de un cambio en la velocidad de la luz, relativa a la velocidad límite de las partículas de prueba. En tal forma que, una violación selecciona un sistema de reposo universal, quizás el de la radiación cósmica de fondo. Dicha interacción no-invariante de Lorentz causaría cambios en los niveles de energía atómicos y nucleares, que dependen de la orientación del eje de cuantización del estado relativo a nuestro vector universal de velocidad. Una manera de hallar dichos cambios, es buscar en los niveles que estén, en general, igualmente espaciados como los cuatro estados $J = 3/2$ del núcleo de Litio-7 en presencia de un campo magnético, que fue donde buscó el experimento de Drever. Otra forma es comparar los niveles de un núcleo mucho más pesado con los niveles hiperfinos*

de un reloj maser de hidrogeno [55].

En los últimos diecisiete años, A. Kostelecky [73] ha desarrollado la extensión al modelo estándar (SME), que es una modificación al SM y la GR. Esta propuesta proporciona una descripción cuantitativa de las violaciones a la LLI y a CPT, al desarrollar un conjunto de coeficientes que pueden ser experimentalmente restringidos, lo que hace posible descartar modelos teóricos que hacen predicciones relacionadas al tamaño de las violaciones. Las pruebas experimentales incluyen comparación de relojes [25, 141], pruebas sobre electrodinámica cuántica en trampas Penning [37, 56], experimentos con fotones [27, 129], mediciones de oscilaciones en neutrinos [10], kaones [68]; experimentos con péndulos de torsión con espín polarizado [63] y otros basados en muones [67].

En 1998, C. Lämmerzahl [76] propuso el uso de una ecuación de Pauli generalizada para describir violaciones tanto para LLI como para LPI, cuyos términos correspondientes pueden ser puestos a prueba por experimentos tipo Hughes-Drever o por interferometría atómica. En 1999, Peters et al. [109] reportan los resultados de usar un interferómetro atómico para medir la aceleración de la gravedad, obteniendo que un objeto macroscópico cae con la misma aceleración que un átomo de cesio, en 7 partes en 10^9 .

En un trabajo de C. Alvarez [2], se presentan los resultados de un enfoque para examinar potenciales violaciones al EEP, debido a efectos radiativos de origen cuántico los cuales incluyen energías de transición del efecto Lamb en átomos hidrogenoides y en momentos magnéticos anómalos de leptones masivos. Al suponer que positrones y electrones no tienen acoplamientos equivalentes al campo gravitacional, encuentran una contribución radiativa adicional debido a la polarización del vacío.

En lo que concierne a propuestas experimentales más recientes, existe una encabezada por W. Ertmer [49] que propone una misión satelital para poner a prueba al WEP, por vez primera, a nivel cuántico; para ello usarían ondas de materia en lugar de cuerpos macroscópicos, ensambles puros de fermiones y bosones, con una precisión de una parte en 10^{16} . Adicionalmente, la misión se puede extender para proporcionar información extra

sobre procesos fundamentales de decoherencia en el contexto de la fenomenología de la gravedad cuántica.

Lo que mostraremos en lo que resta de este trabajo es, la posibilidad de utilizar un fenómeno que solo es posible explicarlo al tener en cuenta el comportamiento cuántico de la materia, y que uno de los parámetros que caracteriza a dicho fenómeno se ve modificado por la presencia de un campo gravitacional.

3.3. El EEP y los Condensados de Bose-Einstein.

En 1995, después de muchas décadas de trabajo en el desarrollo de innovadoras técnicas experimentales en diferentes grupos de investigación, finalmente el grupo de la Universidad de Colorado reportó sus logros al observar que en una nube de gas de Rubidio-87 [4], se puede llevar a un estado que había sido descrito por Einstein, al basarse en las ideas puramente estadísticas de S. N. Bose [18] en 1924 y el comportamiento cuántico de la materia; que ahora conocemos como condensado de Bose-Einstein (BEC). Hasta la fecha, el alcance experimental de los BEC's ha estimulado la generación de muchas preguntas en el ámbito teórico así como en el experimental.

3.3.1. Termodinámica de un gas ideal de bosones.

Consideremos un conjunto N de Bosones idénticos no-interactuantes de masa m , encerrados en una caja de volumen $V = L^3$ y que se encuentra a una temperatura T . De la Mecánica Estadística [106], sabemos que la siguiente expresión es válida para un gas ideal de bosones:

$$N = \sum_{\varepsilon} \Omega_{\varepsilon} \langle n_{\varepsilon} \rangle. \quad (3.4)$$

El número de partículas por estado de energía $\langle n_{\varepsilon} \rangle$, está dado por la expresión

$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{z^{-1} \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) - 1}, \quad (3.5)$$

y Ω_{ε} corresponde a la degeneración del correspondiente estado. Donde k_B es la constante de Boltzmann, ε es la energía de partícula individual (valores que se obtienen al resolver la ecuación de movimiento que describe a la partícula); z es la fugacidad del gas y esta relacionada con el potencial químico del sistema en la forma:

$$z = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right). \quad (3.6)$$

Si la ecuación de movimiento de la partícula es la ecuación de Schrödinger, es decir, si la función de estado satisface la ecuación

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

y el potencial es dado por la expresión

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in (0, L) \times (0, L) \times (0, L) \\ \infty & \text{cualquier otro punto} \end{cases} \quad (3.8)$$

La última expresión nos dice que las partículas no interactúan entre ellas, y que esta encerradas en una caja cubica de volumen $V = L^3$.

Puede mostrarse que los niveles de energía de partícula individual son dados por la expresión [59]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{l_x, l_y, l_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mV^{2/3}} \left[l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 \right]; l_x, l_y, l_z \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.9)$$

Lo que nos indica, que la suma que aparece en las expresiones de la mecánica estadística, en realidad, son tres series sucesivas infinitas:

$$\sum_{\varepsilon} \rightarrow \sum_{l_x=1}^{\infty} \sum_{l_y=1}^{\infty} \sum_{l_z=1}^{\infty}. \quad (3.10)$$

Dada la expresión para la energía de partícula individual, podemos afirmar que si el volumen de la caja, donde esta encerrada la partícula, es suficientemente grande, el espectro de la partícula es, casi, un continuo. Este último argumento, nos permite reemplazar las sumas anteriores por integrales y nos obliga a preguntarnos, ¿cuantos estados de la partícula tienen energía en el intervalo $(\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$?; para poder calcular la degeneración. Notemos que la expresión para la energía describe a una esfera de radio R , en el espacio de los números cuánticos

$$R^2 = \frac{2mV^{2/3}\varepsilon}{\hbar^2\pi^2} = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2. \quad (3.11)$$

Por lo que el número de estados con energía ε , está dado por un octavo del volumen de dicha esfera (ya que los números cuánticos permitidos se encuentran en el primer octante), y que denotamos por

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\frac{2m^3\varepsilon^3}{\pi^4}} \quad (3.12)$$

Ya estamos en condiciones de calcular el número de estados de partícula individual, comprendidos en el intervalo ya mencionado; cantidad dada por la expresión

$$\Delta\sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \sigma(\varepsilon) \approx \Omega(\varepsilon)\Delta\varepsilon, \quad (3.13)$$

donde hemos definido la función

$$\Omega = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\frac{m^3 \varepsilon}{2\pi^4}}, \quad (3.14)$$

que es la degeneración del sistema, que sabemos se define como el número de estados por unidad de energía. Nótese que la expresión anterior tiene la misma forma funcional que la mostrada en [106], pero en nuestro caso la constante de Planck aparece en forma natural, es decir, no fue introducida para tener consistencia dimensional ya que es consecuencia directa de usar la ecuación de Schrödinger.

Cabe enfatizar que, en la mayoría de los libros de texto el análisis anterior lo hacen considerando que la energía de partícula individual en el estado base es cero (quizás, pensando en un comportamiento clásico de la partícula), pero siendo rigurosos un bosón es una partícula sujeta a las leyes de la mecánica cuántica, en particular, limitada al principio de incertidumbre de Heisenberg

La expresión (3.14) no refleja el hecho de que el estado base es el único no-degenerado, por lo que antes de usar la hipótesis del *continuum* debemos separar la suma en dos términos, el que describe al estado base, y al que describe a los estados excitados.

Entonces, bajo el esquema anteriormente desarrollado, la expresión (3.4) toma la forma

$$N = \sum_{\varepsilon \in \text{estados excitados}} \frac{\Omega_\varepsilon}{z^{-1} \exp \frac{\varepsilon}{k_B T} - 1} + \frac{1}{z^{-1} \exp \frac{\varepsilon_{111}}{k_B T} - 1} \approx \int_0^\infty \frac{\Omega(\varepsilon) d\varepsilon}{Z^{-1} \exp \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right) - 1} + \frac{Z}{1 - Z}. \quad (3.15)$$

Donde hemos introducido una fugacidad efectiva, dada por $Z = z \exp \left(- \frac{\varepsilon_{111}}{k_B T} \right)$.

Introduciendo las llamadas funciones de Bose-Einstein [106]

$$g_\nu(Z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{Z^{-1} e^x - 1} = Z + \frac{Z^2}{2^\nu} + \frac{Z^3}{3^\nu} + \dots, \quad (3.16)$$

Nótese que si $Z = 1$, las funciones de Bose se reducen a la función $\zeta(\nu)$ de Riemann,

$$\zeta(\nu) = 1 + \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu} + \dots. \quad (3.17)$$

Finalmente, podemos escribir

$$N_e(T) = \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\frac{m^3}{2\pi^4}} (k_B T)^{3/2} g_{3/2}(Z), \quad (3.18)$$

$$\langle n_0(T) \rangle = \frac{Z}{1-Z}, \quad (3.19)$$

$$Z = z \exp\left(-\frac{\varepsilon_{111}}{k_B T}\right). \quad (3.20)$$

que son el número de estados excitados accesibles a las partículas, en el estado base y la fugacidad efectiva, respectivamente.

Es necesario recordar que la expresión (3.5) que nos da el número de partículas por nivel de energía, fue deducida bajo la condición [106]

$$Z = z \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) < 1, \quad (3.21)$$

la cuál conduce, a que el potencial químico solo toma valores en el intervalo $(-\infty, \varepsilon_{111})$.

Para altas temperaturas $Z \ll 1$, que corresponde a situaciones cercanas al comportamiento clásico, el último término de la expresión (3.15) es del orden de N^{-1} [106], es decir, es despreciable comparado con el resto. Para éste régimen, el número de estados excitados accesibles al sistema es mucho mayor que el número de partículas que conforman al gas. Sin embargo, de la definición de las funciones de Bose-Einstein y de la condición anterior, puede verse que N_e tiene una cota superior, dada por

$$N_e^{max} = \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\frac{m^3}{2\pi^4}} (k_B T)^{3/2} \zeta(3/2). \quad (3.22)$$

Supongamos ahora, que el número de partículas N del gas excede al número máximo de estados excitados accesibles para algún valor de la temperatura, es decir,

$$N > N_e^{max}, \quad (3.23)$$

por lo que el número de partículas que ya no pueden estar en un estado excitado tiene que estar en el estado base, a dicha transición se le conoce como el proceso de condensación.

Pero, ¿cómo caracterizar que dicha transición comienza a ocurrir?. Como ya se mencionó, para altas temperaturas $N_e - N > 0$, pero conforme disminuye la temperatura ésta cantidad se acerca más al cero, entonces, debe existir una temperatura T_c bajo la cuál el proceso de condensación se lleve a cabo, a dicha temperatura de transición se le conoce como temperatura crítica.

Claramente, debe cumplirse que por debajo de la temperatura crítica

$$\langle n_0 \rangle = N - N_e^{max}, \quad (3.24)$$

que justo en la temperatura crítica $\langle n_0 \rangle \sim 0$, que nos permite deducir de la ecuación de arriba el valor de dicha temperatura, y que para este sistema en particular se expresa como

$$T_c = \frac{1}{k_B} \left(\frac{\hbar^3 \rho}{\zeta(3/2)} \sqrt{\frac{2\pi^4}{m^3}} \right)^{2/3}. \quad (3.25)$$

Este fenómeno de condensación también ocurre en un gas ideal clásico, solo que la energía del estado base es cero y la transición se lleva a cabo a una temperatura crítica igual al cero absoluto, lo que nos indica que el comportamiento cuántico de un gas de bosones queda reflejado en una temperatura de transición diferente de cero.

El comportamiento de la fracción condensada del gas de bosones, por debajo de T_c puede expresarse con la ecuación

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = 1 - \frac{N_e(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad (3.26)$$

donde se usó que el hecho de que para la temperatura crítica y por debajo de ella, la fugacidad toma el valor constante correspondiente al valor 1, es decir, el potencial químico toma el valor más grande permitido, $\mu(T_c) = \epsilon_{111}$.

Cabe resaltar que el comportamiento antes descrito, es consecuencia de la estadística de Bose-Einstein, por lo que es un fenómeno completamente cuántico. Lo que nos hace pensar en su posible utilidad para poner a prueba los fundamentos de la Relatividad General a nivel cuántico, y que es un resultado que será presentado en lo que resta del capítulo.

3.3.2. Un gas de bosones más realista en presencia de un campo gravitacional.

Obviamente, el análisis mostrado en la subsección previa es un análisis ideal, en donde se han supuesto muchas aproximaciones, una de ellas está relacionada con el tipo de potencial que se utiliza para confinar a las partículas del gas. Sin embargo, para alcanzar las temperaturas tan bajas en el gas, es necesario utilizar técnicas de confinamiento más elaboradas que permitan enfriarlo suficientemente para la observación del BEC.

Puede verse en [110], que el potencial en el que se ha logrado observar la presencia de un gas condensado es el dado por la expresión

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right) + mgz. \quad (3.27)$$

En la expresión anterior, hemos agregado un potencial gravitacional uniforme, debido a que las dimensiones en las que se llevan a cabo los BECs son despreciables comparadas con el radio terrestre; y se ha agregado pensando en los efectos gravitacionales sobre la termodinámica del gas de bosones. Además, no se han tomado en cuenta las interacciones entre partículas. Para un análisis más completo de la termodinámica de este sistema, sin campo gravitacional, se recomienda [118, 122].

Nótese que el potencial anterior puede ser escrito en la forma

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \left[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{mg^2}{\omega_z^2}. \quad (3.28)$$

La ecuación de Schrödinger, que satisfacen las partículas en forma individual es :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} \left[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{mg^2}{\omega_z^2} \right\} \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (3.29)$$

al tomar el siguiente cambio de variable $x = x', y = y', z + \frac{g}{\omega_z^2} = z'$ y definiendo un nuevo valor de la energía $E' = E + \frac{mg^2}{2\omega_z^2}$, se obtiene la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico anisotrópico usual

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 + \frac{m}{2} \left[\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2 \right] \right\} \psi'(\mathbf{r}') = E'\psi'(\mathbf{r}'), \quad (3.30)$$

Puede mostrarse que la solución para las eigenenergías del problema anterior, son dadas por [59]:

$$E' = \varepsilon'_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) = E + \frac{1}{2} \frac{mg^2}{\omega_z^2}, \quad (3.31)$$

$n_x, n_y, n_z \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Las energías para una partícula individual, en un potencial de oscilador armónico anisotrópico en presencia de un potencial gravitacional homogéneo son

$$E = \varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{mg^2}{\omega_z^2}. \quad (3.32)$$

Siguiendo el análisis ya presentado en la subsección previa, el número de estados accesibles por unidad de energía del sistema esta dado por

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z) - \frac{mg^2}{2\omega_z^2}. \quad (3.34)$$

La última expresión es la energía del estado base del sistema.

Del análisis termodinámico se puede mostrar que el número de estados excitados accesibles al sistema y el estado base, son

$$N_e = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_p} \right)^3 g_3(y), \quad (3.35)$$

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{y^{-1} - 1}, \quad (3.36)$$

$$y(T) = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_0}{k_B T} \right). \quad (3.37)$$

Permitiéndonos deducir la expresión para la temperatura crítica

$$T_c^g = \frac{\hbar \omega_p}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad (3.38)$$

donde $\omega_p = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ es el promedio geométrico entre las frecuencias del oscilador armónico.

A simple vista, podríamos decir que la presencia del campo gravitacional no afecta el valor de la temperatura, pero eso es incorrecto. Recordemos que en la temperatura crítica, la fugacidad toma el valor uno, es decir,

$$\mu(T_c^g) = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z) - \frac{mg^2}{2\omega_z^2}. \quad (3.39)$$

Entonces, es claro que al menos a éste nivel la presencia del potencial gravitacional tiene un efecto sobre las variables termodinámicas del sistema.

Desde el punto de vista experimental, una de las cantidades que afirman medir (por lo menos en forma indirecta) es la temperatura de la nube del gas bajo estudio, en [4]

afirman que el BEC de Rubidio-87 apareció en una temperatura de alrededor de 170 nK. Que nos indica la importancia de verificar si existe una modificación por la presencia del campo gravitacional en la temperatura crítica.

Para mostrar que efectivamente la temperatura de transición se ve modificada por el campo gravitacional, partamos del hecho que el número de partículas en el gas se mantiene constante, y que además, es función de la temperatura y el potencial químico, es decir, se debe satisfacer

$$dN = \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu} dT + \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T d\mu = 0, \quad (3.40)$$

permitiéndonos llegar a la expresión

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_N = - \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu}^{-1} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T = - \frac{\zeta(2)}{3\zeta(3)k_B} = - \frac{0.456144}{k_B} \quad (3.41)$$

entonces,

$$T_c^g - T_c^{g=0} = - \frac{\zeta(2)}{3\zeta(3)k_B} \Delta\mu = \frac{\zeta(2)}{3\zeta(3)k_B} \frac{mg^2}{2\omega_z^2}. \quad (3.42)$$

Si tomamos al Rubidio, que tiene una masa de 1.4048×10^{-25} kg, y que las frecuencias angulares son del orden de $10^3 s^{-1}$ [110] y el campo gravitacional $g = 10 \frac{m}{s^2}$, debemos medir una diferencia en la temperatura de $\Delta T = 232$ nK.

El resultado anterior, nos muestra que un BEC puede ser usado como una herramienta experimental para verificar la presencia de un campo gravitacional en la región donde se encuentre el sistema.

Pero, como ya se ha mencionado, aún existen muchas preguntas que responder acerca del desarrollo experimental de los BEC's, y una de ellas relacionada con la manera en que se deduce la temperatura. De hecho, ésta última siempre se obtiene al recurrir al método conocido en ingles como *absorption imaging* [35], y el cuál consiste que durante el proceso de confinamiento (enfriamiento) de la nube atómica ó después de apagar el potencial de confinamiento, se hace interactuar a la nube con una luz de referencia, una vez que dicha luz atraviesa la nube es captada para obtener imágenes del tiempo de vuelo de los átomos y dichas imágenes son comparadas contra una función de distribución de velocidades de

Maxwell-Boltzmann, y de aquí se deduce el valor de la temperatura.

Es importante mencionar que en el contexto del tema, la deducción de la temperatura siempre se realiza recurriendo a la estadística de Maxwell-Boltzmann, la cuál solo es válida para altas temperaturas, muy por encima de la temperatura crítica de los gases bosónicos, como puede verse en [106]. Para dejar claro este punto, debemos explicarlo en la manera más cuidadosa posible y para ello tomaremos un párrafo de [5], el cuál afirma *la temperatura fue derivada de la raíz cuadrática media (rms) de la velocidad de la componente normal de la nube.*

De entrada, a cada partícula que compone el gas se le asocia una velocidad y con ello es posible definir una velocidad promedio y términos superiores para el análisis del condensado, el cuál es un concepto clásico, el cuál implica el uso de la estadística de Maxwell-Boltzmann como elemento clave en el procedimiento, pues se requiere una expresión que relacione los datos experimentales con la velocidad y temperatura, y la única que presenta ambos conceptos es la muy conocida distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, ya que en este contexto, la temperatura de un gas esta dada por:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T. \quad (3.43)$$

Adicionalmente, en el libro de Pethick [110], se parte de la función de onda del estado base, vía la transformada de Fourier se encuentra una función del espacio de *momenta* y, en consecuencia, del espacio de velocidades; además, de que se ignora a la parte del gas que aun se encuentra en los estados excitados.

3.3.3. La temperatura de un BEC sin conceptos clásicos.

Debe afirmarse que, a pesar de los comentarios anteriores, el método de deducción de la temperatura es una muy buena aproximación. Sin embargo, dicha deducción presenta severos problemas conceptuales pues recurre a modelos que ya no tienen validez en la región de interés (con respecto a la temperatura), y si deseamos utilizar a los BEC's como

una herramienta de prueba cuántica, estos problemas deben ser corregidos, al menos, desde el punto de vista conceptual. Lo que nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta: ¿Puede ser la temperatura de un BEC deducida sin recurrir a conceptos clásicos, y tomar en cuenta la presencia de la llamada nube térmica? La respuesta es afirmativa y a continuación se presenta el análisis.

A. El Experimento Pensado.

Consideremos un haz de luz láser, con longitud de onda λ , que es dividido en dos partes. Una de las cuales será utilizada como el haz de referencia, mientras que el otro lo haremos pasar a través del BEC. Después, ambos haces serán unidos para poder medir la diferencia de fase en un cierto detector y de ahí deducir la temperatura.

B. El Sustento Teórico.

Procedamos a presentar el análisis que nos permite encontrar la diferencia de fase como función de las variables del condensado. Para hacerlo es necesario conocer el correspondiente índice de refracción como función de propiedades mecánico-cuánticas de las partículas que conforman al gas.

1. El índice de refracción y los parámetros de confinamiento. Recordemos que el índice de refracción es una consecuencia de la respuesta que tienen los átomos al interactuar con un campo electromagnético. Debido a que el átomo está conformado por un núcleo positivamente cargado y una nube electrónica cargada negativamente, se espera que debido a la presencia de un campo eléctrico externo y su influencia sobre los átomos vecinos, éste debe adquirir un momento dipolar eléctrico, que podemos escribir en la forma [69]

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \alpha \epsilon_0 (\mathbf{E}_{laser} + \mathbf{E}), \quad (3.44)$$

donde estamos suponiendo que el campo eléctrico efectivo es lo suficientemente débil, para mantener al átomo en el límite elástico. La constante de proporcionalidad α es la polarizabilidad del átomo.

Se puede mostrar (ver [69]) que la polarización del gas esta dada por:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{laser}, \quad (3.45)$$

y que el campo debido a los vecinos como función de la polarización total, es

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (3.46)$$

Además, si el gas tiene un número de partículas por unidad de volumen \tilde{N} , entonces la polarización es

$$\mathbf{P} = \tilde{N} \langle \mathbf{d} \rangle = \alpha \epsilon_0 \tilde{N} (\mathbf{E}_{laser} + \mathbf{E}). \quad (3.47)$$

De las cuatro expresiones de arriba, podemos despejar a la susceptibilidad eléctrica χ_e , dando

$$\chi_e = \frac{\alpha \tilde{N}}{1 - \frac{\alpha}{3} \tilde{N}}, \quad (3.48)$$

esta última expresión esta relacionada con el índice de refracción en la forma

$$\chi_e = \tilde{n}^2 - 1, \quad (3.49)$$

que nos permite escribir a la polarizabilidad en función del índice de refracción

$$\alpha = \frac{3}{\tilde{N}} \frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} \approx \frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{N}}. \quad (3.50)$$

Nótese que hemos usado, el hecho, que nuestro sistema es un gas diluido. Lo que nos resta hacer, es escribir a la polarizabilidad en función de las características cuánticas del átomo en la nube. Debido a la intensidad del campo electromagnético, podemos tratarlo como una perturbación al hamiltoniano del átomo dada por

$$\delta H = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{E}_{laser} + \mathbf{E}) = -\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{laser}. \quad (3.51)$$

Consideremos, ahora, que el campo electromagnético apunta en la dirección y , entonces, la perturbación al hamiltoniano como función del tiempo es

$$\delta H = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ -\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) d_y E_0 \cos(\omega t), t > 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Obviamente, es necesario utilizar una teoría de perturbaciones dependiente del tiempo; sin embargo, aquí presento un análisis alternativo [107]. Antes de introducir el campo electromagnético del láser, claramente, los electrones del átomo en cuestión se encuentran en un estado no perturbado, descrito por

$$\psi_k = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t} \varphi_k, \quad (3.53)$$

y después de ser perturbado, se encuentra en un estado que podemos escribir en la forma

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t} \varphi_k + \delta\psi. \quad (3.54)$$

Y el problema de Schrödinger a resolver es

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad (3.55)$$

al sustituir la función de onda perturbada, encontramos la ecuación para $\delta\psi$

$$\left(H_0 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta\psi = \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \frac{E}{2} d_y \varphi_k \left[e^{-i(\omega_k - \omega)t} + e^{-i(\omega_k + \omega)t} \right], \varepsilon_k = \hbar\omega_k. \quad (3.56)$$

En donde hemos despreciado términos de segundo orden en las perturbaciones; la última expresión nos sugiere escribir la solución como

$$\delta\psi = u_- e^{-i(\omega_k - \omega)t} + u_+ e^{-i(\omega_k + \omega)t}, \quad (3.57)$$

para obtener el siguiente par de ecuaciones independientes del tiempo, para las funciones u_{\pm} ,

$$\left[\hat{H}_0 - \hbar(\omega_k - \omega) \right] u_- = \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \frac{E}{2} d_y \varphi_k, \quad \left[\hat{H}_0 - \hbar(\omega_k + \omega) \right] u_+ = \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \frac{E}{2} d_y \varphi_k. \quad (3.58)$$

El sistema de ecuaciones anterior, se resuelve al escribir a las funciones u_{\pm} , en la forma

$$u_{\pm} = \sum_l a_l^{(\pm)} \varphi_l, \quad (3.59)$$

lo que nos permite obtener

$$a_l^{(\pm)} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \frac{E}{2} \frac{\langle l | d_y | k \rangle}{\hbar(\omega_{lk} \mp \omega)}, \quad \omega_{lk} = \omega_l - \omega_k. \quad (3.60)$$

Y finalmente, la función de onda perturbada es:

$$\psi = e^{-i\omega_k t} \left[\varphi_k + \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \frac{E}{\hbar} \sum_l \varphi_l \frac{\langle l|d_y|k\rangle}{\omega_{lk}^2 - \omega^2} (\omega_{lk} \cos(\omega t) - i\omega \sin(\omega t)) \right], \quad (3.61)$$

por lo tanto, el valor esperado del momento dipolar eléctrico, es:

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \langle d_y \rangle \mathbf{j} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \frac{2}{\hbar} \sum_{l \neq k} \frac{\omega_{lk} |\langle l|d_y|k\rangle|^2}{\omega_{lk}^2 - \omega^2} \mathbf{E}_{laser}. \quad (3.62)$$

De donde, facilmente, puede leerse que la polarizabilidad, esta dada por la expresión:

$$\alpha = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar} \sum_{l \neq k} \frac{\omega_{lk} |\langle l|d_y|k\rangle|^2}{\omega_{lk}^2 - \omega^2} = \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e c^2} \sum_{l \neq k} f_{lk}^y \frac{\lambda_{lk}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{lk}^2}. \quad (3.63)$$

En la expresión anterior, hemos introducido la cantidad adimensional llamada intensidad de oscilador [110],

$$f_{lk}^y = \frac{2m_e \omega_{lk}}{e^2 \hbar} |\langle l|d_y|k\rangle|^2. \quad (3.64)$$

Y esto, nos permite escribir al índice de refracción en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{n}(\mathbf{r}) &= \sqrt{1 + \tilde{N}\alpha} \approx 1 + \frac{\tilde{N}\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{l \neq k} \frac{\tilde{N}e^2}{\pi m_e} f_{lk}^y \frac{\lambda_{lk}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{lk}^2} \\ &= 1 + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{l \neq k} \rho_{lk} \frac{\lambda_{lk}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{lk}^2}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde hemos denotado por ρ_{lk} al número de átomos por unidad de volumen que tienen la probabilidad de tener una transición entre los k y l -ésimos estados [17].

Ahora, debemos recordar que el fenómeno de condensación solo se ha podido conseguir en átomos alcalinos y, por mucho, la principal contribución a la polarizabilidad en éstos surge del electrón de valencia; además, antes de la perturbación el sistema se encuentra en el estado base y como la intensidad del campo electromagnético es pequeña, la probabilidad de provocar una transición del electrón de valencia, en un estado muy excitado es muy baja, comparada con la de encontrarlo en el primero de ellos, pues estamos pensando que el experimento se realiza a una temperatura en la que el sistema completo ya esta manifestando la transición al estado condensado, es decir, el sistema se encuentra por debajo de la temperatura crítica. Dado que para dicho régimen de temperaturas la mayor parte de la energía viene de la contribución del movimiento atómico, esto quiere decir, que

los únicos posibles estados excitados que pueden contribuir al sistema están relacionados al movimiento del centro de masa y no a los de la parte electrónica. Para éste caso, la densidad de partículas en un estado con energía ε_ν esta dada por [110]

$$\rho_\nu = \langle n_\nu \rangle |\phi_\nu(\mathbf{r})|^2, \quad (3.66)$$

donde la función $\phi_\nu(\mathbf{r})$, es la función de onda del átomo, en el ν -ésimo estado debido al potencial (3.27). Con éste último paso, podemos llegar a la siguiente expresión para el índice de refracción de la nube:

$$\tilde{n}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\lambda_{1,0}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{1,0}^2} n(\mathbf{r}), \quad (3.67)$$

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} \langle n_\nu \rangle |\phi_\nu(\mathbf{r})|^2. \quad (3.68)$$

Cabe enfatizar que hasta el momento no hemos introducido algún concepto no-cuántico relacionado con el sistema que estamos estudiando.

2. El cambio de fase de un haz de referencia y la temperatura del BEC. De la expresión (3.35), encontramos que para nuestro sistema, la fracción condensada está dada por

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (3.69)$$

Además, por simplicidad, vamos a suponer que solo está disponible el primer estado excitado del sistema, es decir,

$$\langle n_1 \rangle = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (3.70)$$

Las primeras dos funciones de onda ($\phi_{(0)}(\mathbf{r})$ y $\phi_{(1)}(\mathbf{r})$) asociadas a nuestro caso, y la densidad de probabilidad del estado base, son

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega_p}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \left[\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.71)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \sqrt{2} \frac{z + \frac{g}{\omega_z^2}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}} \left(\frac{m\omega_p}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \left[\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.72)$$

$$|\phi_0(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{m\omega_p}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{\hbar}\left[\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z\left(z + \frac{g}{\omega_z^2}\right)^2\right]\right\}. \quad (3.73)$$

Bajo las cuales la densidad se expresa en la forma

$$n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \left\{1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left[\frac{2m\omega_z}{\hbar}\left(z + \frac{g}{\omega_z^2}\right)^2 - 1\right]\right\}. \quad (3.74)$$

La relación entre el índice de refracción $\tilde{n}(\mathbf{r})$ y la densidad $n(\vec{r})$ es proporcionada por (3.67)

$$\tilde{n}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\lambda^2 \lambda_{1,0}^2}{\lambda^2 - \lambda_{1,0}^2} |\phi_{(0)}(\mathbf{r})|^2 \left\{1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left[\frac{2m\omega_z}{\hbar}\left(z + \frac{g}{\omega_z^2}\right)^2 - 1\right]\right\}. \quad (3.75)$$

Las expresiones anteriores son válidas en y por debajo de la temperatura de transición como consecuencia de que (3.69) y (3.70) son válidas en dicho intervalo. Definamos el parámetro

$$A = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\lambda^2 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \lambda_1 = \lambda_{1,0}. \quad (3.76)$$

El arribo al sistema detector de nuestros haces mostrara una diferencia en el tiempo, consecuencia de que el haz de referencia viaja a la velocidad c y el que cruza al condensado lo hace a una velocidad más baja $v = c/\tilde{n}$.

$$v = c \left[1 + A|\phi_{(0)}(\mathbf{r})|^2 \left\{1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left[2\frac{m\omega_z}{\hbar}\left(z + \frac{g}{\omega_z^2}\right)^2 - 1\right]\right\}\right]^{-1}. \quad (3.77)$$

Claramente, la velocidad a la que se mueve el haz de luz dentro de la nube, depende de la posición en la que cruza. Supongamos que el segundo haz cruza por la zona con coordenadas z y y constantes.

El cálculo de la diferencia en el camino óptico requiere el conocimiento de la distancia que el haz de luz viaja al interior del condensado. Este punto debemos manejarlo con cuidado, originalmente, en [24] habíamos supuesto que dicha distancia se podía manejar como dos veces la longitud característica del oscilador en la dirección x , es decir, $2l_x = \sqrt{\hbar/m\omega_x}$ [34]. Sin embargo, todas las observaciones que se han realizado sobre un BEC, se hacen después de una expansión libre de los átomos [4, 5, 143] alcanzando longitudes del orden de los milímetros [143].

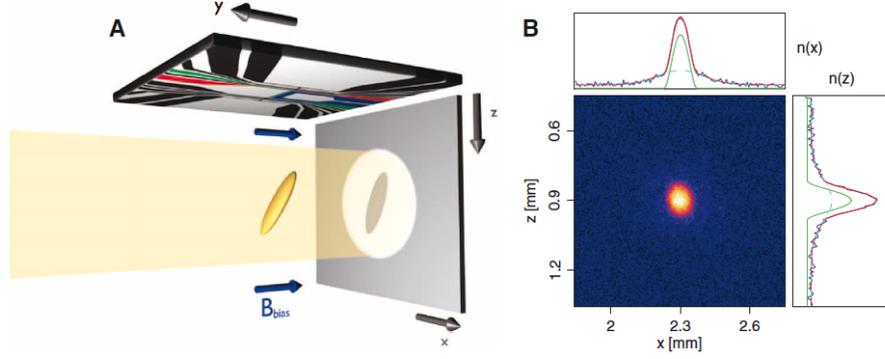


Figura 3.3: Trampa magnéto-óptica del proyecto QUANTUS, y distribución espacial de un BEC.

Entonces, vamos a suponer que la interacción de la nube con la luz se lleva a cabo en un momento dado en que el tamaño de la nube es del orden alcanzado en la figura de arriba, aproximadamente $2l_x = 0.15\text{mm}$, donde se está suponiendo que l_x se mide desde el centro de la nube. Denotando por Δt al tiempo requerido por el segundo haz para moverse de $-l_x$ a l_x . Entonces

$$\Delta t = \int_{-l_x}^{l_x} dx/v. \quad (3.78)$$

Explicítamente,

$$\Delta t = \frac{2l_x}{c} + \frac{AI}{c} \tilde{\alpha}(z, y) \left[1 + \beta(z) \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right], \quad (3.79)$$

donde definimos a las funciones

$$\tilde{\alpha}(z, y) = \left(\frac{m\omega_p}{\pi\hbar} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar} \left[\omega_y y^2 + \omega_z \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.80)$$

$$\beta(z) = \left[2 \frac{m\omega_z}{\hbar} \left(z + \frac{g}{\omega_z^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (3.81)$$

Además, se tiene

$$I = \int_{-l_x}^{l_x} \exp \left\{ -\frac{m\omega_x}{\hbar} x^2 \right\} dx, \quad (3.82)$$

La última expresión I es la probabilidad de encontrar a una partícula en la región $x \in [-l_x, l_x]$. La expresión (3.79) es el resultado principal del capítulo. Nótese que ésta

contiene una relación entre la temperatura del gas y el tiempo de llegada del haz de luz al detector. El tiempo de llegada para el haz de referencia es $2l_x/c$, por lo tanto, la diferencia en el tiempo de arribo al detector entre ambos haces esta dado por

$$\delta t = \frac{AI}{c} \tilde{\alpha}(z, y) \left[1 + \beta(z) \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right]. \quad (3.83)$$

Claramente, hemos podido expresar a la temperatura del sistema como función del cambio de fase del láser utilizado, debido a la presencia del condensado; ahora, nos resta ver la factibilidad de llevar a la practica nuestra propuesta. En este punto es importante recalcar que ningún concepto clásico ha sido empleado, es decir, no fue necesario recurrir a la estadística de Maxwell-Bolztmann.

3.3.4. La realización del experimento.

Nuestra propuesta experimental consiste en lo siguiente:

Hacer uso de un dispositivo láser de longitud de onda λ , que no coincide con alguna longitud de onda asociada con una transición atómica (ver apéndice B); además, que permita la emisión de pulsos ultra-intensos, de intensidad I_0 .

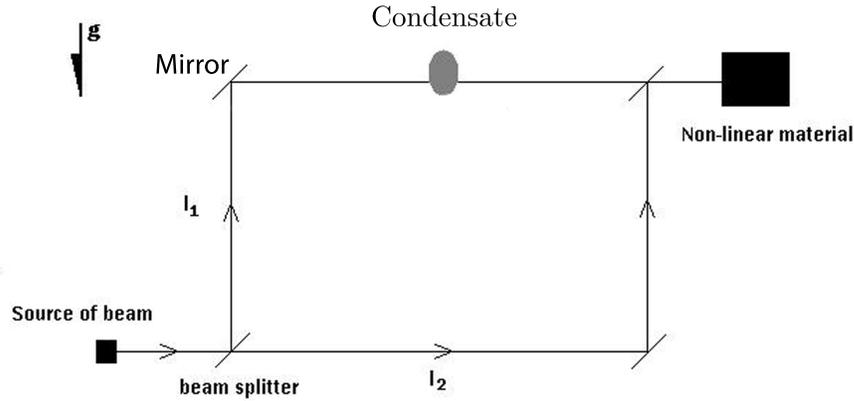


Figura 3.4: Nuestra Propuesta Experimental.

Al emitirse dicho pulso, se divide en dos partes (ver fig. 3.4), una de las cuales se hace viajar a través de un condensado de gas de Rubidio, penetrando en un punto con coordenadas (y_1, z_1) (ver fig. 3.5).

Nube de Gas de Rubidio

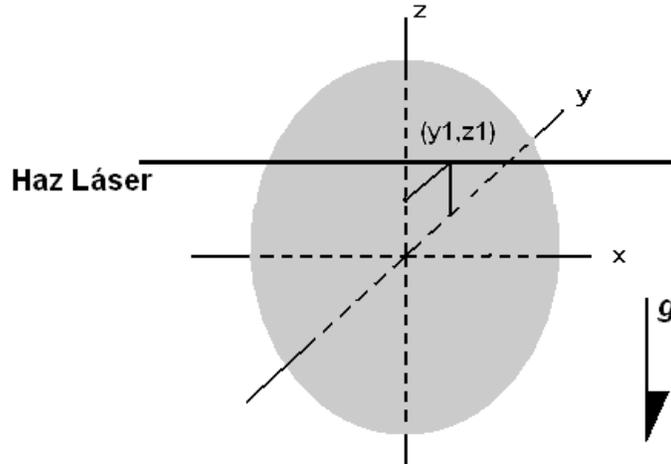


Figura 3.5: El condensado y el haz Láser.

La elección del Rubidio fue motivada por el hecho de que su índice de refracción ya ha sido determinado por métodos interferométricos [79]. En otras palabras, la tecnología que nuestra propuesta requiere está a nuestra disposición en la actualidad.

Una vez que el haz ha cruzado al condensado, ambos son reunidos y dirigidos sobre un material no-lineal, que permite la observación del segundo armónico óptico, cuya intensidad umbral (ver apéndice A) es igual a la intensidad del láser I_0 . La diferencia entre caminos ópticos de ambos haces implica que, en general, éstos no estarán en fase al alcanzar el medio no-lineal. Para una discusión sobre los posibles problemas experimentales debidos al uso de pulsos ver apéndice C.

Para alcanzar dicha intensidad umbral I_0 hace falta que los haces de luz, al alcanzar el material, se encuentren en fase; claramente esto no sucede por la presencia del gas; para recuperar la respuesta no-lineal, debemos modificar la longitud del brazo superior del interferómetro. Al observar el segundo armónico del haz láser generado por material, sabremos que ambos haces están en fase. En éste sentido, sabemos que la diferencia en camino óptico es determinada por dos variables:

1. La diferencia en la longitud entre los brazos del interferómetro, y
2. La presencia del condensado.

Al observar la generación del segundo armónico, podríamos decir que la diferencia en camino óptico es igual a un múltiplo de la longitud de onda del haz láser. Esto nos permite determinar, experimentalmente, la diferencia en camino óptico generada por la presencia del BEC en la trayectoria del haz, y la precisión sobre dicho valor es provista, única y exclusivamente, por la óptica no-lineal; si embargo, en el caso tradicional se tiene el error debido al método de *absorption imaging* y, adicionalmente, otro por el uso de la estadística clásica.

Supongamos que la modificación requerida para recuperar la respuesta no-lineal, en la longitud del brazo superior del interferómetro esta dada por Δl , lo que nos lleva a poder escribir

$$\Delta l + c\delta t = \lambda, \quad (3.84)$$

de la expresión de arriba, sabemos que Δl es una cantidad medible experimentalmente y λ es una característica del haz láser, entonces, con la ayuda de (3.83) podemos afirmar que la temperatura está dada por la expresión:

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\lambda - \Delta l}{AI\tilde{\alpha}} - 1 \right]. \quad (3.85)$$

Capítulo 4

Conclusiones y Perspectivas

En esta tesis se ha visto que existe una cantidad enorme de trabajo, tanto teórico como experimental que se está realizando o en proceso de realización, cuya finalidad es alcanzar un mejor entendimiento de la naturaleza; y que, en consecuencia, nos permitiría lograr la formulación de una teoría cuántica de la gravedad. A pesar de toda la gran cantidad de trabajo, por el momento, no tenemos la certeza de cuanto tiempo nos tome llegar a dicha meta. Sin embargo, si podemos afirmar que cada pequeña aportación, como la del presente trabajo, nos acerca más a ella.

4.1. Conclusiones

Hemos visto que, para el caso de la cosmología cuántica supersimétrica, aunque no logramos aportar algo que nos permita eliminar los problemas asociados a la función de estado del universo, como el problema de la normalización [75] o el problema del tiempo [81]; el análisis ha permitido mostrar en forma muy clara la restringida validez del resultado sobre la no-existencia de estados físicos. El punto inicial en este capítulo ha sido el midisuperespacio asociado a los modelos cosmológicos de Gowdy T^3 , dentro de la supergravedad $N = 1$ [83]. El corte dimensional de estos modelos de midisuperespacio a los correspondientes minisuperespacios fue realizado. La idea detrás de éste corte es la búsqueda de estados físicos no-triviales sobre el minisuperespacio inducido por los estados físicos del midisuperespacio. Las ecuaciones claramente muestran que de hecho hay estados físicos no-triviales asociados a este minisuperespacio. Resultado que contradice la conjetura de estados no-físicos. Dicha conjetura no puede ser llamada una prueba debido

a que se toma por válido un argumento el cuál debió ser sujeto a escrutinio. Es decir, la relación entre la independencia lineal de los términos de las relaciones de constricción y las propiedades geométricas de la superficie de valores iniciales, ver suposiciones (a) y (b) en la pagina 679 [28]. En otras palabras, la relación antes mencionada no es un comportamiento general, y la revisión realizada concerniente a un campo de espín-3/2 libre y la presunta compatibilidad con un análisis topológico $(1 + 2)$ -dimensional en una supergravedad $N = 2$ cae dentro de los casos en el cuál la conjetura es válida. En el mismo sentido que el presente trabajo refleja las propiedades de aquellas situaciones en las cuales la conjetura falla.

Adicionalmente, se realizó el análisis en conexión con los modelos de Bianchi tipo *IX* y clase A, los correspondientes estados físicos no-triviales han sido explícitamente mostrados. En este punto podríamos preguntarnos sí los estados bosónicos obtenidos por D'Eath carecen de significado físico [36], como lo afirma la conjetura de estados no-físicos. Nótese que en el correspondiente argumento la relación entre la independencia lineal de las ecuaciones de constricción y las propiedades geométricas de la superficie de valor inicial no juegan del todo un rol importante. La razón puede ser encontrada en un argumento de escalamiento. En este sentido tenemos claramente que establecer que nuestro trabajo no puede decir algo acerca del trabajo de D'Eath [36].

Con respecto a la parte relacionada a la fenomenología, hemos visto que en principio la gravedad tiene influencia sobre el comportamiento cuántico de la materia, como se mostró en el estudio de un gas de bosones en presencia de un campo gravitacional homogéneo. Dicha influencia se ve reflejada en modificaciones en las variables termodinámicas del sistema, un ejemplo concreto es el incremento, con respecto a un sistema sin campo gravitacional, de la temperatura crítica. Debe recalarse que el análisis se realizó con un potencial realista, es decir, aquel utilizado experimentalmente para conseguir los condensados de Bose-Einstein.

Dado los problemas que aún existen con respecto al marco conceptual en que se deduce la temperatura de los BEC's, es decir, al uso de una aproximación al utilizar la función de distribución de Maxwell-Boltzmann, fue posible encontrar una expresión basada completamente en el comportamiento cuántico de los átomos, que nos puede permitir

deducir la temperatura a partir de medir correcciones sobre las longitudes de los brazos del interferómetro y las características de la luz láser a ser usada.

Enfatizando que nuestra propuesta es cuántica y dado que se observa una modificación en la temperatura crítica del gas de bosones debida al campo gravitacional, se convierte en un excelente candidato para poner a prueba el Principio de Equivalencia de Einstein a nivel cuántico. El experimento completo consistiría en llevar al sistema al estado BEC en un ambiente sin campo gravitacional para deducir la temperatura crítica y comparar esos resultados con las observaciones del mismo sistema pero ahora en presencia del campo gravitacional. Se debe mencionar que la manera de eliminar el campo gravitacional es permitiendo que el sistema se mueva sobre una trayectoria geodésica durante el proceso de condensación, es decir, dejando que tenga un movimiento en caída libre.

Esto permitiría verificar si efectivamente la temperatura de transición se ve modificada por la presencia del campo gravitacional, y en consecuencia la validez del Principio de Equivalencia de Einstein a nivel cuántico, el cuál es el punto de interés en esta parte del trabajo.

4.2. Perspectivas

Una de las perspectivas que se tienen en relación al capítulo 1 de la tesis, es tratar de buscar un argumento que permita discriminar que tipo de modelos de la cosmología cuántica si satisfacen la conjetura de no-estados físicos, es decir, encontrar que condiciones generales deben satisfacer los modelos o que tipo de geometría deben tener las hipersuperficies. Para concentrar los esfuerzos en estudiar solo aquellos sistemas que si tienen estados físicos no-triviales.

En relación a nuestra propuesta experimental, la perspectiva es promover la realización del experimento, el lugar más viable es el Zentrum für Angewandte Raumfahrt Microgravitationen (Centro de Tecnología Espacial Aplicada y Microgravedad) de la Universidad de Bremen en Alemania; que cuenta con una torre de Caída Libre que permite condiciones de microgravedad por un lapso de tiempo de 4.74 s y que desde 2006 forma parte del proyecto de colaboración QUANTUS que persigue la generación de un BEC de Rubidio en condiciones de microgravedad [135].

Aunque el presente trabajo se ha enfocado en afrontar la relación entre la Relatividad General y la Mecánica Cuántica; tanto desde el punto de vista teórico, al estudiar un modelo de la cosmología cuántica en un contexto supersimétrico, como con la fenomenología subyacente, al proponer un experimento que pone a prueba al EEP a nivel cuántico. Siempre es necesario recurrir al resto de las áreas de la Física que están mas allá del objetivo principal de estudio; para el caso de la propuesta experimental fue necesario estudiar los condensados de Bose-Einstein y los problemas relacionados a la parte experimental, que permiten su observación.

Los sistemas donde se han observado los BEC's son gases diluidos de átomos alcalinos [4] y el gran avance tecnológico ha permitido obtener evidencia de que la interacción entre partículas es importante [20], para estos sistemas las longitudes de dispersión son del orden de $100a_0$, donde a_0 es el radio de Bohr, por lo que los efectos predominantes en las interacciones son debidas a interacciones entre pares de partículas, un análisis de un gas interactuante lo presenta Romero-Rochín [117], que obliga a hacer uso de una teoría que permita entender al BEC como un todo, la primera aproximación a ese estudio se relaciona

con la teoría de campo medio que conduce a la ecuación de Gross-Pitaevski [110]; por lo que un punto a perseguir sería encontrar una generalización a dicha ecuación consistente con la relatividad especial. Además, se puede estudiar el asunto anterior en presencia de un campo gravitacional, para buscar posibles diferencias en el comportamiento del sistema.

Apéndice A

Materiales no-lineales y la generación del segundo armónico óptico

La óptica no-lineal se encarga de estudiar la modificación de las propiedades ópticas de la materia debido a la interacción con la luz, y solo un haz láser es lo suficientemente intenso para modificar las propiedades ópticas de la materia. La vez primera que se observó el comportamiento anterior fue por Franken et al. en 1961 [52]. En dicho trabajo se muestra la generación del segundo armónico, es decir, al hacer cruzar un haz láser de frecuencia ω con cierto material transparente a dicha frecuencia (cuarzo en el caso mencionado), detectaron, en el extremo opuesto al de entrada del haz incidente, una señal con el doble de la frecuencia de la incidente 2ω .

Conforme un haz de luz se propaga a través de una pieza de material, la polarización generada en los átomos que lo constituyen aparece como una respuesta a la excitación definida por el correspondiente campo eléctrico, que puede escribirse en la forma (en unidades gaussianas)

$$P(t) = \chi^{(1)} E(t) \left[1 + \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(1)}} E(t) + \frac{\chi^{(3)}}{\chi^{(1)}} E(t)^2 + \dots \right]. \quad (\text{A.1})$$

En la expresión anterior podemos ver que, si la amplitud del campo eléctrico permanece más pequeña que un cierto valor umbral I_0 , la interacción es lineal.

Si el campo eléctrico incidente está dado por

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t}, \quad (\text{A.2})$$

y la amplitud de éste se encuentra por encima del mencionado valor umbral, entonces, el

segundo término de la expresión (A.1) ya no es despreciable, y tiene la siguiente forma

$$P^{(2)}(t) = \chi^{(2)}(2|E_0|^2 + E_0^2 e^{-i2\omega t} + E_0^{*2} e^{i2\omega t}), \quad (\text{A.3})$$

éste término está asociado con una fuente de campo eléctrico dentro del material,

$$\nabla^2 E' - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E' = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(2)}, \quad (\text{A.4})$$

que claramente conduce a la generación de un campo eléctrico con el doble de la frecuencia del haz incidente, y por lo tanto, a un espectro de luz con más de una componente, donde el segundo armónico es a menudo el más importante [19].

Supongamos que se tiene un material no-lineal donde se tienen solo dos componentes, es decir, el campo eléctrico total es:

$$E_T(z, t) = A_1(z) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + A_1^*(z) e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} + A_2(z) e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + A_2^*(z) e^{-i(k_2 z - \omega_2 t)}. \quad (\text{A.5})$$

Además, cada una de dichas componentes satisface la correspondiente ecuación de onda no-homogenea,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_j - \frac{n_j^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_j = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_j^{(2)}(z, t). \quad (\text{A.6})$$

Éste problema fue ya resuelto por J. A. Armstrong et al. [6] en 1962, aquí solo presentare un resumen de los resultados; las ecuaciones a resolver son las siguientes:

$$\frac{du}{d\zeta} = uv \sin \theta, \quad \frac{dv}{d\zeta} = -u^2 \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = \Delta s + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d \ln(u^2 v)}{d\zeta}; \quad (\text{A.7})$$

donde se han introducido las definiciones y realizado los siguientes cambios de variable:

$$l_c = \frac{1}{8\pi\omega_1 d_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{n_1^2 n_2 c^3}{2\pi I_i}}, \quad \Delta k = 2k_1 - k_2, \quad (\text{A.8})$$

$$A_1(z) = \sqrt{\frac{2\pi I_i}{n_1 c}} u e^{i\phi_1}, \quad A_2(z) = \sqrt{\frac{2\pi I_i}{n_2 c}} v e^{i\phi_2}, \quad \zeta = \frac{z}{l_c}, \quad \theta = 2\phi_1 - \phi_2 + \Delta k z, \quad \Delta s = \Delta k l_c; \quad (\text{A.9})$$

l_c es la longitud característica en la cuál los campos intercambian energía y Δk es un parámetro de disparidad entre las fases.

Puede mostrarse que la intensidad total I_i de la luz es una constante, lo que conduce a

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (\text{A.10})$$

La solución más simple, al sistema de ecuaciones, se obtiene cuando se satisface que las velocidades de fase del armónico fundamental y el segundo son iguales, es decir, $\Delta k = 0$; además, esto genera la siguiente constante de integración $\Gamma = u^2 v \cos \theta$. Si $\Gamma = 0$, se tiene la solución

$$u = \tanh(\zeta), \quad v = \operatorname{sech}(\zeta), \quad (\text{A.11})$$

donde se consideró la condición de frontera en que la luz incidente solo esta compuesta por el armónico fundamental, es decir, al interior del material no-lineal se genera a la componente del segundo armónico. Además, la intensidad total I_1 corresponde a la intensidad de la luz incidente.

Una descripción para el caso anterior y diferentes valores de Δs , del comportamiento de la amplitud del segundo armónico, se muestra en las figuras A.1 y A.2, respectivamente.

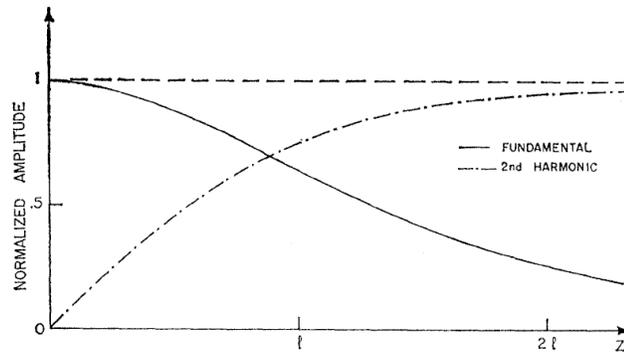


Figura A.1: Amplitud normalizada de los campos al interior del material no-lineal.

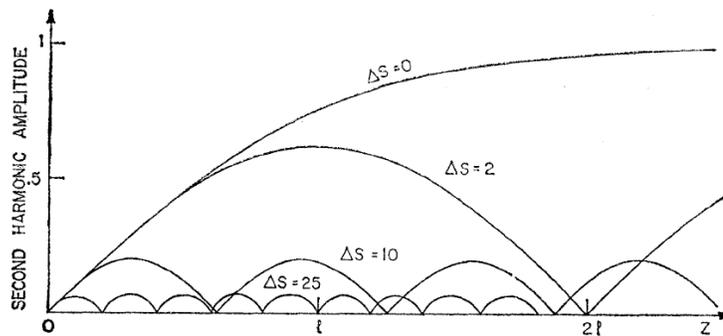


Figura A.2: Comportamiento de la amplitud del segundo armónico para diferentes grados en la disparidad normalizada.

De la figura A.1 puede concluirse que sí el material es lo suficientemente extenso, en la dirección de propagación del haz, la señal de salida estará solo compuesta por el campo del segundo armónico.

Es importante recalcar, por el propósito del presente trabajo, que el comportamiento anterior esta completamente ligado a la intensidad de la luz incidente I_i , ya que hemos supuesto que la amplitud del campo eléctrico incidente esta por encima del valor umbral que permite la observación del fenómeno no-lineal.

Apéndice B

El Bombeo Óptico y el problema del calentamiento.

Es importante que la frecuencia del haz láser, a ser utilizado en la propuesta experimental, no coincida con alguna de las frecuencias de transición del átomo. Esto para evitar fenómenos de resonancia que lo lleven a niveles de energía muy altos, y en consecuencia a un calentamiento de la nube y probablemente a la destrucción de la fase condensada; y por lo tanto, a la medición de una temperatura diferente a la que inicialmente tenía la nube atómica.

Dicho fenómeno es conocido como proceso de bombeo óptico [89] y es el mismo efecto usado, en sentido opuesto, con la finalidad de llevar al átomo a unas condiciones que le permitan la emisión de energía, para alcanzar las temperaturas tan bajas necesarias para la observación de los BECs. Como ya hemos dicho, éste se presenta cuando la frecuencia del láser coincide o su valor es cercano a alguna de las frecuencias de transición del átomo. Lo que implicaría la transferencia de la población atómica de un estado a otro, dicha fracción de átomos es una función de la intensidad de la luz, su frecuencia y la frecuencia de resonancia del átomo [88].

La degeneración del estado base, consecuencia de la estructura hiperfina. Esto implica que después del decaimiento el átomo podría hacerlo a un estado que no sería el base, sino en uno con energía mayor [89]. El fenómeno involucra un proceso de absorción de energía por el átomo, y por lo tanto, el gas será calentado. Dicho incremento de temperatura está relacionado al concepto de parámetro de saturación. Si dicho parámetro es mucho más pequeño que el valor 1, entonces, la población atómica está mayoritariamente en su

estado inicial, y por lo tanto, el calentamiento puede ser despreciado. Este caso se alcanza sí

$$\Omega \ll \left(\delta^2 + \frac{\tau}{4} \right)^2, \quad (\text{B.1})$$

donde Ω y τ^{-1} , son las frecuencia de Rabi y la vida media del estado excitado, respectivamente; δ es la variable de desintonización, que se define como la diferencia entre la frecuencia del láser y la frecuencia asociada a la transición atómica. Dentro del reino de la tecnología de láseres actual, y para gases alcalinos, la condición se satisface. Por lo tanto, el calentamiento del gas debido al bombeo óptico es posible despreciarlo al considerar nuestra propuesta experimental.

Apéndice C

El uso de pulsos y los problemas experimentales.

Es necesario mencionar los problemas experimentales que conlleva la realización de nuestra propuesta, una de ellas es la asociada al uso de un pulso de luz. Para conseguir un pulso de luz *pensado* se parte de una onda plana, dada por [120]

$$E_y(t) = \text{Re}(E_0 e^{i\omega_0 t}). \quad (\text{C.1})$$

La representación en el tiempo del campo eléctrico corresponde a una función coseno no-limitada, es decir, un tren de onda infinito. La construcción de un pulso implica la multiplicación de (C.2) por una función que la límite en el tiempo, digamos una función gaussiana,

$$E_y(t) = \text{Re}(E_0 e^{-\Gamma t^2 + i\omega_0 t}). \quad (\text{C.2})$$

Γ es el factor de forma de la envolvente gaussiana, es proporcional al cuadrado del inverso de la duración del pulso t_0 , $\Gamma \propto t_0^{-2}$.

Nótese que, una onda plana al tener duración infinita su espectro contiene solo una frecuencia angular, es decir, su distribución es una delta de Dirac $\delta(\omega)$, en cambio, un pulso tiene una distribución de frecuencia más amplia. Para calcular el espectro del pulso propuesto, se utiliza la transformada de Fourier, que resulta en una función gaussiana.

Es claro, que el contenido de frecuencias del pulso gaussiano es mayor que el de la onda plana.

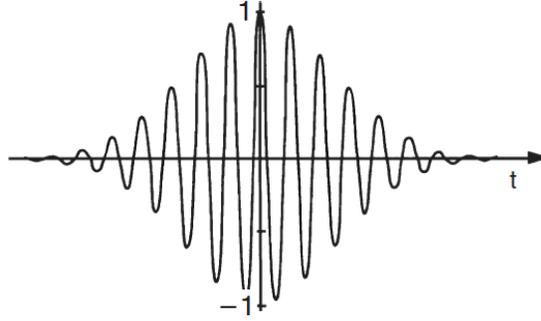


Figura C.1: Pulso con envolvente gaussiana.

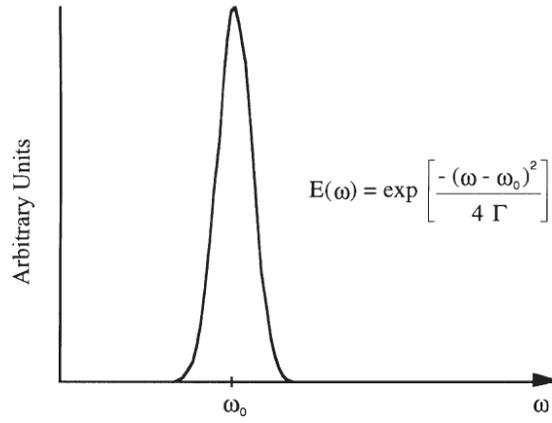


Figura C.2: Distribución espectral del pulso anterior.

C.1. La duración y el ancho espectral de un pulso, ¿Cómo se relacionan?

Partamos de la definición de transformada de Fourier en el tiempo y en el espacio de frecuencias:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt, \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (\text{C.3})$$

De las definiciones estándar,

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |\varepsilon(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)|^2 dt}, \quad \langle \omega^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |E(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega}, \quad (\text{C.4})$$

se calcula el ancho espectral y la duración, que satisfacen la desigualdad

$$\sqrt{\langle \Delta t^2 \rangle} \sqrt{\langle \Delta \omega^2 \rangle} = \Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}, \quad (\text{C.5})$$

ésta es una relación clásica que conduce al principio de incertidumbre de energía-tiempo.

Para tener un pulso con duración $\Delta t \sim \mathcal{O}(1)\text{fs}$ (10^{-15} segundos) será necesario que el ancho espectral $\Delta\omega > \mathcal{O}(10^{13})\text{Hertz}$, casi el tamaño del espectro visible que tiene un ancho del orden de 10^{14} Hertz.

El ancho de banda del pulso es muy importante en nuestro experimento, ya que una de las suposiciones que hemos hecho es, que el pulso de luz este lejos de la frecuencia de transición del átomo, para evitar el calentamiento. Entonces, debe elegirse apropiadamente la duración del pulso, de tal forma que no afecte al condensado, es decir, que el pulso no contenga a la frecuencia de transición. Sin embargo, no es el único problema como veremos a continuación.

C.2. Un pulso propagándose en un medio transparente.

Como ya se ha visto en el capítulo 3, el condensado tiene un índice de refracción dado por (3.75), en la figura de abajo se muestra su comportamiento como función de la frecuencia angular.

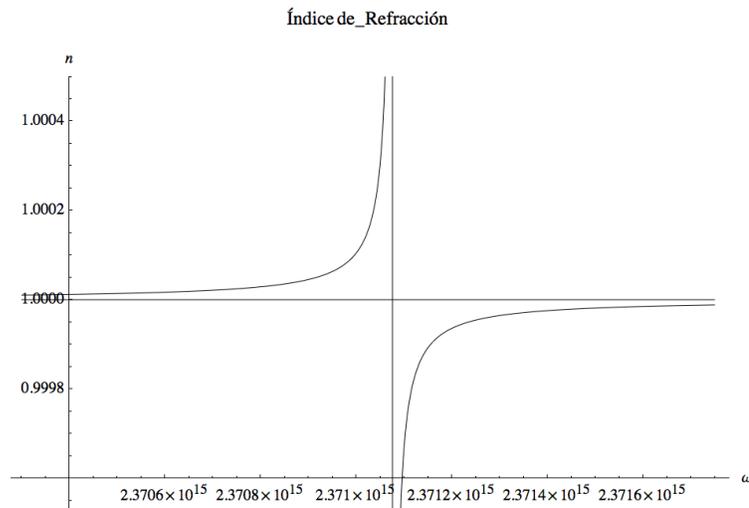


Figura C.3: Índice de refracción, como función de la frecuencia.

Un problema asociado a este comportamiento del condensado y al ancho espectral del pulso, es que éste último sufrirá una distorsión en su fase, lo que incrementara la duración del mismo, es decir, un ensanchamiento del pulso disminuyendo la intensidad del

pulso, además, del retraso esperado. La importancia de la constancia en la intensidad del pulso, radica en que hemos supuesto el uso de un material no-lineal, cuyo comportamiento no-lineal depende de la intensidad umbral (ver apéndice A). Si a la hora de realizar el experimento, no es posible alcanzar la intensidad umbral será necesario cambiar nuestra técnica para medir el retraso del pulso.

En resumen, el ancho espectral del pulso debe ser elegido de tal forma que la frecuencia de resonancia no sea una de sus componentes, y la frecuencia central no debe alejarse demasiado de la resonancia, de tal manera, que sea detectable la presencia del condensado al paso de la luz. Sino, el índice de refracción será, prácticamente, de valor uno. Y no será estrictamente necesario el uso de un material no lineal, esto dependerá de las características de la luz a ser usada.

Bibliografía

- [1] Abdullin, S. et al. *Discovery potential for supersymmetry in CMS* [arXiv:hep-ph/9806366]
- [2] Alvarez, C., Mann, R. *Testing the Equivalence Principle in the Quantum Regime* Gen. Relat. Gravit. **29** pp. 245-250 (1997)
- [3] Anderson, J. L. *Principles of Relativity Physics* Academic Press (1973)
- [4] Anderson, M. H., Ensher J. R., Matthews, M. R., Wieman C. E., Cornell E. A. *Observation of Bose-Einstein Condensation in Dilute Atomic Vapor* Science **269** pp. 198-201 (1995).
- [5] Andrews, M. R., Mewes, M, O., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., Ketterle, W. *Direct, Nondestructive Observation of a Bose Condensate* Science **273** pp. 84-87 (1996)
- [6] Armstrong, J. A. et al. *Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric* Phys. Rev. **127** pp. 1918-1939
- [7] Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C. V. *Canonical variables for general relativity* Phys. Rev. **117** pp.1595-1602 (1960)
- [8] Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C.W. *The dynamics of general relativity*, gr-qc/0405109 (1962)
- [9] Arnowitt, R. and Nath, Pran *Supersymmetry and Supergravity: Phenomenology and Grand Unification* Lectures at VII J. A. Swieca School, Campos do Jordao, Brazil (1993)
- [10] Auerbach, L. B. et al. *Test of Lorentz Violation in $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations* Phys. Rev. D **72** 076004 (2005)
- [11] Baessler, S., Heckel, B. R., Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Schmidt, U., and Swanson, H. E., *Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy* Phys. Rev. Lett. **83** pp. 3585-3588, (1999).
- [12] Ballentine, L. E., *Quantum Mechanics: A Modern Development* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998)

- [13] Barbero, J. F., Ryan, M. P. *Minisuperspace Examples of Quantization Using Canonical Variables of the Ashtekar-Type: Structure and Solutions* Phys. Rev. D **53** 5670 (1996)
- [14] Bauch, A., Weyers, S. *New experimental limit on the validity of local position invariance* Phys. Rev. D **65** 081101 (2002)
- [15] Berger, B. K. *Quantum Graviton Creation in a Model Universe* Ann. Phys. (NY) **83** pp. 458 (1974)
- [16] Bergmann, P. G., Penfield, R., Schiller, R., Zatkis, H. *The Hamiltonian of the General Theory of Relativity with Electromagnetic Field* Phys. Rev. **80** pp. 81-88 (1950)
- [17] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics* Seventh Edition, Cambridge University Press (2005)
- [18] Bose, S. N. *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese* Zeitschrift für Physik **26** pp.178-181 (1924)
- [19] Brabec, T. and Krausz F. *Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics* Rev. Mod. Phys. **72** pp. 545-591 (2000)
- [20] Bradley, C. C., Sackett, C. A., Tollett, J. J. and Hulet, R. G. *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions.* Phys. Rev. Lett. **75** 9 pp. 1687-1690 (1995)
- [21] Bretcher, K. *Is the Speed of Light Independent of the Velocity of the Source* Phys. Rev. Lett. **39** 17 pp. 1051-1054 (1977)
- [22] Brillet, A., Hall, J. L. *Improved Laser Test of Isotropy of Space* Phys. Rev. Lett. **62** 9 pp. 549-552 (1979)
- [23] Brown, J. D., Kuchar, K. V., *Dust as a Standard of Space and Time in canonical Quantum Gravity* Phys. Rev. D **51** (10) (1995)
- [24] Camacho, A. Barragán-Gil, L. F. and Macías, A. *Alternative method for the measurement of the temperature of a Bose-Einstein Condensate* en Central European Journal of Physics **8** (5) pp. 717-725 (2010)
- [25] Cane, F. et al., *Bound on Lorentz and CPT Violating Boost Effects for the Neutron* Phys. Rev. Lett. **93** 230801 (2004)
- [26] Carmeli, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.* John Wiley and Sons (1982)
- [27] Carroll, S. M., Field, G.B. and Jackiw, R. *Limits on a Lorentz -and parity- violating modification of electrodynamics* Phys. Rev. D **41** 1231 (1990)
- [28] Carroll, S. M., Freedman, D. Z., Ortiz, M. E. and Page, D. N. *Physical States in Canonically Quantized Supergravity* Nucl. Phys. B **423** pp. 661-685 (1994)

- [29] Casalbuoni, R. *On the Quantization of Systems with Anticommuting Variables II* Nuovo Cimento **33A** No.1 (1976)
- [30] Chupp, T. E., Hoare, R. J., Loveman, R. A., Oteiza, E. R., Richardson, J. M., Wagshul, M. E. and Thompson, A. K. *Results of a new test of local Lorentz invariance: A search for mass anisotropy in ^{21}Ne* Phys. Rev. Lett. **63** pp.1541-1545 (1989)
- [31] Clerbaux, Barbara *Searches for SUSY particles at LEP* Nucl. Phys. B - Proceedings Supplements **115**, pp. 378-382 (2003)
- [32] Csordás, A., Graham, R. *Hartle-Hawking State in Supersymmetric Minisuperspace* Phys. Lett. B **373** 51 (1996)
- [33] Damour, T. and Esposito-Farese, G. *Gravitational-wave versus binary-pulsar tests of strong-field gravity.* Phys. Rev. D **58** 1 (1998).
- [34] Dalfovo, F., Giorgino, S., Pitaevskii, L. P., Stringari, S. *Theory of Bose-Einstein condensation un trapped gases.* Rev. Mod. Phys. **71** pp. 463-512 (1999)
- [35] Davis, K. B. et al., *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms* Phys. Rev. Lett. **75**, pp. 3969 (1995)
- [36] D'Eath, P. D. *Bosonic physical states in $N = 1$ supergravity* Phys. Lett. B **321** pp. 368 (1994)
- [37] Dehmelt, H. et al., *Past Electron-Positron $g - 2$ Experiments Yielded Sharpest Bound on CPT Violation for Point Particles* Phys. Rev. Lett. **83** 4694 (1999)
- [38] Deser, S., Kay, J. H., Stelle, K. S. *Hamiltonian Formulation of Supergravity* Phys. Rev. D **16** pp. 2448 (1977)
- [39] Deser, S., van Nieuwenhuizen, P. *Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system* Phy. Rev. D **10** pp 411-420
- [40] Deser, S., Zumino, B. *Broken Supersymmetry and Supergravity* Phys. Rev. Lett. **38** 1433 (1977)
- [41] Deser, S., Zumino, B. *Consistent Supergravity* TH. 2164-CERN. Originalmente presentado en Arnowitt, R., Nath, P. *Proceedings of the Conference on Gauge Theories and Modern Field Theories* Northeastern University, MIT Press (1976)
- [42] DeWitt, B. *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory* Phys. Rev. **160** (5) (1967)
- [43] Dirac, P. A. M. *Generalized Hamiltonian Dynamics* Can. J. Math. **2** p.129 (1950)
- [44] Dirac, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964)
- [45] Dimopoulos, S. and Georgi, H. *Softly broken supersymmetry and $SU(5)$* Nuc. Phys. B **193** (1) pp. 150-162 (1981)

- [46] Drever, R. W. P. *A Search for Anisotropy of Inertial Mass Using a Free Precession Technique* Philos. Mag. **6** 683 (1961)
- [47] Ellis, G. F. R., MacCallum, M. A. H. *A Class of Homogeneous Cosmological Models* Comm. Math. Phys. **12** 108 (1969)
- [48] Einstein, A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* Ann. Physik IV. Folge **49** (1916)
- [49] Ertmer, W. et al. *Matter wave explorer of gravity (MWXG)* Exp. Astron. **23** pp. 611-649 (2009)
- [50] Fano U., Fano, L. *Physics of Atoms and Molecules: An Introduction to the Structure of Matter* The University of Chicago Press Ltd. (1972)
- [51] Fischbach E., Sudarsky D, Szafer A., Talmadge, C. *Reanalysis of the Eötvös Experiment* Phys. Rev. Lett. **56** pp. 3-6 (1986)
- [52] Franken, P. A., Hill, A. E. and Weinreich, G. *Generation of Optical Harmonics* Phys. Rev. Lett **7** pp. 118-119 (1961)
- [53] Freedman, D., van Nieuwenhuizen, P. *Properties of Supergravity Theory* Phys. Rev. D **14** 912 (1976)
- [54] Freedman, D., van Nieuwenhuizen, P., Ferrara, S. *Progress Toward a Theory of Supergravity* Phys. Rev. D **13** 3214 (1976)
- [55] Gabriel, M. D., and Haugan, M. P. *Testing the Einstein Equivalence Principle: Atomic Clocks and Local Lorentz Invariance* Phys, Rev. D **41** 10 (1990)
- [56] Gabrielse, G. et al., *Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles* Phys. Rev. Lett. **82** 3198 (1999).
- [57] Goldstein, Herbert *Classical Mechanics* Second Edition, Addison-Wesley (1980)
- [58] Golfand, Yu A. and Likhtman, E. P. *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P Invariance.* JETP Lett. **12** p. 323 (1971)
- [59] Gasiorowicz, S. *Quantum Physics* Second Edition, John Wiley & Sons, Inc (1996)
- [60] Gowdy, R. *Gravitational Waves in Closed Universes* Phys. Rev. Lett. **27** pp. 826 (1971)
- [61] Gowdy, R. *Vacuum Space-Time with Two Parameter Spacelike Isometry Groups and Compact Invariant Hypersurfaces: Topologies and Boundary Conditions.* Ann. Phys. (NY) **83** pp. 203 (1974)
- [62] Hays. C. *Supersymmetry Searches at the Tevatron* Proceedings of the 16th International Conference SUSY08, edited by Hong, D. K. and Ko, P. American Institute of Physics (2008)

- [63] Heckel, B. et al., *New CP-Violation and Preferred-Frame Tests with Polarized Electrons* Phys. Rev. Lett. **97** 021603 (2006)
- [64] Henneaux, Marc and Teitelboim, Claudio *Quantization of Gauge Systems* Princeton University Press (1992)
- [65] Herrmann, S., Senger, A., Möhle, K., Nagel, M. Kovalchuk, E. V. and Peters, A. *Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level* Phys. Rev. D **80** 105011 (2009)
- [66] Hughes, V. W., Robinson, H. G. and Beltran-Lopez, V. *Upper Limit for the Anisotropy of Inertial Mass from Nuclear Resonance Experiments* Phys. Rev. Lett. **4** pp. 342-344 (1960)
- [67] Hughes, V. W. et al., *Test of CPT and Lorentz Invariance from Muonium Spectroscopy* Phys. Rev. Lett. **87** 111804 (2001)
- [68] Hsiung, Y. B. *An Observation Of Direct-CP Violation - ϵ'/ϵ Result From KTeV* Nucl. Phys. Proc. Suppl. **86** 312 (2000).
- [69] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics* Third Edition, John Wiley and Sons, Inc. (1999)
- [70] Jaseja, T. S., Javan, A., Murray, J. and Townes, C. H. *Test of Special Relativity or of the Isotropy of Space by Use of Infrared Masers* Phys. Rev. **133** A1222 (1964)
- [71] Kaku, M. *Quantum Field Theory* Oxford University Press, Oxford (1993)
- [72] Khalil, Shaaban *Supersymmetry at LHC* High Energy Physics and Applications, edited by Ellis, J.; Nasri, S. and Malkawi, E. American Institute of Physics (2008)
- [73] <http://www.physics.indiana.edu/~kostelec/faq.html>
- [74] Kramer, M. and Wex, N. *The double pulsar system: a unique laboratory for gravity.* Class. Quantum Grav. **26** 073001 (2009)
- [75] Kuchar, K. V., Ryan, M. P. *Is Minisuperspace Quantization Valid? Taub and Mixmaster* Phys. Rev. D **40** 3982 (1989)
- [76] Lämmerzahl, C. *Quantum tests of the foundations of general relativity* Class. Quantum Grav. **15** pp. 13-17 (1998)
- [77] Lämmerzahl, C. et. al. *Gyros, clocks, interferometers ... : testing relativistic gravity in space* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2001)
- [78] Lenard, P. *Über die lichtelektrische Wirkung* (The photoelectric effect), Ann. Physik, **8** (1902)
- [79] Libbrecht, K. G. and Libbrecht, M. W. *Interferometric Measurement of the Resonant Absorption and Refractive Index in Rubidium Gas.* Am. J. Phys. **74** (12) pp. 1055-1060 (2006)

- [80] Macías, A. *Chiral ($N = 1$) Supergravity* Class. Quantum Grav. **13** 3163 (1996)
- [81] Macías, A., Camacho, A. *On the Incompatibility Between Quantum Theory and General Relativity* Phys. Lett. **B 663**, 99 (2008)
- [82] Macías, A., Camacho, A., Barragán-Gil, L. F., Lämmerzahl, C. *Is the non-physical state conjecture valid?* Gen. Relativ. Gravit. **42** (3) pp. 489-508. (2010)
- [83] Macías, A., Camacho, A., Kunz, J., Lämmerzahl, C. *Midisuperspace Supersymmetric Quantum Cosmology* Phys. Rev. D **77**, 064009 (2008)
- [84] Macías, A., Mielke, W. E., Socorro, J. *Supersymmetric Quantum Cosmology: The Physical States* Phys. Rev. D **57** pp.1027-1033 (1998)
- [85] Macías, A., Quevedo, H., Sánchez, A. *Local Lorentz Invariance in $N = 1$ Supergravity* Phys. Rev. D **73** 027501 (2006)
- [86] Macías, A. and Ryan, M. P.; in: *Proceedings of the Seventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* R. Ruffini, R.T. Jantzen and G. MacKeiser eds. pp. 304. (1996)
- [87] Macías, A., Obregon, O., Ryan, M. P. *Quantum Cosmology: the supersymmetric square root* Class. Quantum Grav. **4** pp. 1477-1486 (1987)
- [88] McClelland, J. J. *Optical State-Preparation of Atoms* in Dunning, F. B. and Hulet, R. G. *Atomic, Molecular and Optical Physics: Atoms and Molecules* Vol **29B** Academic Press (1996)
- [89] Metcalf, H. J. and van de Strate, P. *Laser Cooling and Trapping* Springer-Verlag, Heidelber, (1999)
- [90] Michelson, A. A., Morley, E. W. *On the Relation of the Earth and the Luminiferous Ether* Am. Jour. Sci. Third Series, **34** No. 203 pp. 333-345 (1887)
- [91] Mielke, E. W. and Macías, A. *Chiral Supergravity and anomalies.* Ann. Phys. **8** (4) pp. 301-317 (1996)
- [92] Mielke, E. W., Macías, A., Morales-Técotl, H. A. *Chiral Fermions Coupled to Chiral Gravity* Phys. Lett. **215** 14 (1996)
- [93] Misner, C. W. *Quantum Cosmology I* Phys. Rev. **186** 1319 (1969)
- [94] Misner, C. V. *Minisuperspace* In J.R. Klauder (Ed.), *Magic Without Magic*, Freeman, San Francisco pp. 441-473 (1972)
- [95] Misner, C. W. *A Minisuperspace Example: The Gowdy T^3 Cosmology* Phys. Rev. D **8** pp. 3271 (1973)
- [96] Miyazawa, Hironari *Baryon Number Changing Currents* Prog. Theor. Phys. Vol. 36 No. 6 pp. 1266-1276 (1966)

- [97] Moncrief, V., Ryan, M. P. *Amplitude-Real-Phase Exact Solutions for Quantum Mixmaster Universes* Phys. Rev. D **44** 2375 (1991)
- [98] Müller, H., Herrmann, S., Braxmaier, C., Schiller, S. and Peter, A. *Modern Michelson-Morley Experiment using Cryogenic Optical Resonators* Phys. Rev. Lett. **91** 020401 (2003)
- [99] Neveu, A. and Schwarz, J. H. *Quark Model of Dual Pions* Phys. Rev. D **4**, pp. 1109-1111 (1971)
- [100] Newton, I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy* University California Press 7th Printing (1973)
- [101] van Nieuwenhuizen, P. *Supergravity* Phys. Rep. **68** pp. 189 (1981)
- [102] Novotny, C. et al. *Sub-Doppler laser spectroscopy on relativistic beams and tests of Lorentz invariance* Phys. Rev. A **80** 022107 (2009)
- [103] Obregón, O. and Ramírez, C. *Dirac-like formulation of quantum supersymmetric cosmology* Phys. Rev D **57** (2) (1998)
- [104] Overduin, J.; Everitt, F.; Mester, J.; Worden, P. *The Science Case For Step* Adv Space Res **43** (10) pp. 1532-1537 (2009)
- [105] Pais, A. *Subtle is the Lord: The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press (2005)
- [106] Pathria, R. K. *Statistical Mechanics* Second Edition, Butterworth-Heinemann (1996)
- [107] De la Peña, L. *Introducción a la Mecánica Cuántica* Fondo de Cultura Económica, UNAM (2006)
- [108] Pérez Tamayo, R. *¿Existe el método científico?* Tercera Edición, Colección La Ciencia Para Todos, Fondo de Cultura Económica, México (2003)
- [109] Peters, A., Chung, K. Y., Chu, S. *Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms* Nature 400 pp. 849-852 (1999)
- [110] Pethick, C. J., Smith, H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* Cambridge University Press (2002)
- [111] Pilati, M. *The Canonical Formulation of Supergravity* Nucl. Phys. B **132** pp. 138 (1978)
- [112] Prestage, J. D., Bollinger, J. J., Itano, W. M. and Wineland, D. J. *Limits for Spatial Anisotropy by Use of Nuclear-Spin-Polarized $^9\text{Be}^+$ Ions* Phys. Rev. Lett. **54** pp. 2387-2390 (1985)
- [113] Pound, R. V., Rebka, G. A. *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance* Phys. Rev. Lett. **3** 439 (1959)

- [114] Pound, R. V., Rebka, G.A. *Apparent Weight of Photons* Phys. Rev. Lett. **4** 337 (1960)
- [115] Pound, R. V., Snider, J. L. *Effect of Gravity on Nuclear Resonance* Phys. Rev. Lett. **13** 539 (1964)
- [116] Ramond, P. *Dual Theory for Free Fermions* Phys. Rev. D **3**, pp. 2415-2418 (1971)
- [117] Romero-Rochín, V. *Equation of state of an interacting Bose gas confined by a harmonic trap: The role of the "harmonic" pressure* Phys. Rev. Lett. **94** 130601 (2005)
- [118] Romero-Rochín, V., Bagnato, V. S. *Thermodynamics of an ideal gas of bosons harmonically trapped: Equation of state and susceptibilities.* Braz. J. Phys. **35** (3A) pp. 607-613 (2005)
- [119] Rosenfeld, L. *Zur Quantelung der Wellenfelder* Ann. Physik **5**, pp. 113-152 (1930)
- [120] Rulliere, C. *Femtosecond Laser Pulses: Principles and Experiments* Second Edition, Advanced Text in Physics, Springer (2005)
- [121] Ryan, M. P. *Hamiltonian Cosmology* Springer, New York (1972)
- [122] Sandoval-Figueroa, N., Romero-Rochín, V. *Thermodynamics of trapped gases: Generalized mechanical variables, equation of state and heat capacity* Phys. Rev. E **78** 061129 (2008)
- [123] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics* Revised Edition Addison-Wesley Publishing Company (1994)
- [124] Salomon, C., Cacciapuoti, L., Dimarcq, *Atomic Clock Ensemble in Space: An Update* Int. J. Mod. Phys. D **16** 2511 (2007)
- [125] Sánchez Ron, J. M. *Historia de la Física Cuántica. I. El período fundacional (1860-1926)* Editorial Crítica (2001)
- [126] Schlamminger, S.; Choi, K.-Y.; Wagner, T. A. ; Gundlach, J. H.; and Adelberger, E. G. *Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance.* Phys. Rev. Lett. **100** 041101 (2008)
- [127] Schrödinger, E. *Quantisierung als Eigenwertproblem* Ann. Phys., **79**, pp. 361-376, (1926).
- [128] Seahra, Sanjeev S. *The Classical and Quantum Mechanics of Systems with Constraints* <http://userweb.port.ac.uk>
- [129] Stanwix, P. L. et al., *Improved test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire oscillators* Phys. Rev. D **74** 081101 (2006)
- [130] Sundermayer, Kurt *Constrained Dynamics* Lectures Notes on Physics, Springer-Verlag (1982)

- [131] Su, Y., Heckel, B. R., Adelberger, E. G., Gundlach, J. H., Harris, M., Smith, G. L., and Swanson, H. E., *New tests of the universality of free fall* Phys. Rev. D **50** pp. 3614-3636 (1994).
- [132] Teitelboim, C. *Supergravity and Square Roots of Constraints* Phys. Rev. Lett. **38** pp. 1106 (1977)
- [133] Vessot, R. F. C., et al. *Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser* Phys. Rev. Lett. **45** 2081 (1980)
- [134] Vessot, R. F. C., Levine, M. W. *A test of the equivalence principle using a space-borne clock* Gen. Relativ. Gravit. **10** pp.181-204 (1979)
- [135] Vogel, A., *Bose-Einstein Condensates in Microgravity* Appl. Phys. B **84** pp. 663-671 (2006)
- [136] Volkov, D. V. and Akulov, V. P. *Is the neutrino a goldstone particle?* Phys. Lett. B **46**, pp. 109-110 (1973)
- [137] Wesemael, F. *A comment on Adams' measurement of the gravitational redshift of Sirius B* Royal Astronomical Society, Quarterly Journal (ISSN 0035-8738), 26, Sept. 1985, 273-278
- [138] Wess, J. and Zumino *Supergauge transformations in four dimensions* Nucl. Phys. B **70**, pp. 39-50 (1974)
- [139] Wheeler, J. A. *On the nature of quantum geometrodynamics* Ann. Phys. **2** pp.604-614 (1957)
- [140] Wheeler, J. A. *Superspace* In Gilbert, R.D. and Newton, R. (Eds.), Analytic Methods in Mathematical Physics, Gordon and Breach, New York pp. 335-378 (1970)
- [141] Wolf, P. et al., *Cold Atom Clock Test of Lorentz Invariance in the Matter Sector* Phys. Rev. Lett. **96** 060801 (2006)
- [142] Williams, J.G., Turyshev, S.F., Boggs, D.H. *Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity.* Phys. Rev. Lett. **93** 261101 (2004)
- [143] van Zoest, T. et al. *Bose-Einstein Condensation in Microgravity* Science **328** pp.1540-1543 (2010)
- [144] Zumino, B *Supersymmetry* TH. 2120-CERN (1976). Originalmente presentado en Smith, J. R. *Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics* Rutherford Laboratory, England (1974)