UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# "SISTEMAS CUÁNTICOS EN MODELOS COSMOLÓGICOS ISÓTROPOS Y NO ISÓTROPOS"

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física) presenta:

Fís. Flavio Joao Pineda Arvizu
Matrícula: 2181801394

Asesor:
Dr. Luis Octavio Pimentel Rico

Jurado calificador:
Presidente: Dr. Luis Octavio Pimentel Rico
Secretario: Dr. Jorge Luis Cervantes Cota
Vocal: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Ciudad de México, 14 de Septiembre de 2020

# AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis más profundos agradecimientos a tres personas importantes que sin ellas esta tesis no se hubiera podido realizar: A Octavio Pimentel, el asesor de este trabajo, que sin él, sin su guía, sus consejos y su conocimiento no hubiera sido posible realizar este proyecto; a mi novia, amor de mi vida y cómplice Areli, que siempre estuvo a mi lado con su apoyo incondicional, escuchando y discutiendo sobre mi trabajo; y el agradecimiento más importante se lo debo a mi madre, mi héroe, que sin ella, sin su apoyo emocional y sin todo el esfuerzo que ha hecho a lo largo de su vida, yo no estaría aquí escrbiendo estas palabras; te amo con todo mi corazón, mamá. También debo dar un agradecimiento especial a CONACyT por el apoyo económico que me brindó a lo largo de mis estudios de posgrado. También le debo un agradecimiento especial a mis sinodales, los doctores Jorge Cervantes Cota y Marco Maceda Santamaría, por tomarse el tiempo y la dedicación de leer este trabajo y hacer observaciones fundamentales sobre el mismo; a todos ustedes, gracias de todo corazón.

# NOTACIÓN Y CONVENCIONES

- Unidades. Se toma la velocidad de la luz $c$, la constante de planck $\hbar$ y la constante de gravitación igual a la unidad $c = \hbar = G = 1$ así como la constante de Einstein $8\pi G = 1$.
- Punto en el espacio-tiempo. Se designa como $x$ a un punto cualquiera del espacio-tiempo. Es decir, el evento $(t, x, y, z)$ se designa simplemente como $x$.
- Signatura de la métrica. Se asigna el signo $-$ a la componente temporal y el signo $+$ a las componentes espaciales de la metrica. Por ejemplo, la métrica de Minkowski en cuatro dimensiones tendría la forma $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Es decir, escogemos la signatura de la métrica $s = +2$.
- Índices. Se emplea la convención de suma de Einstein; índices repetidos arriba y abajo en un término indican suma en todos sus posibles valores.
  - Índices griegos $\mu, \nu, \lambda, \sigma, \cdots$ están asociados a componentes de tensores escritos en una base coordenada $\{\partial_\mu\}$ para vectores y la base dual $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ para vectores duales. El intercambio entre las componentes covariantes y contravariantes de un tensor definido en una base coordenada se da por medio de la métrica $g$ del espacio-tiempo general

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda} = g_{\sigma\lambda} A^{\mu\nu\sigma}\,.$$

  - Índices latinos (índices de espacio-tiempo plano) están asociados a componentes de tensores en una base no coordenada ortonormal local $\{e_a\}$ para vectores y la base dual $\{e^a\}$ para vectores duales. El intercambio entre las componentes covariantes y contravariantes de un tensor definido en una base no coordenada local se da por medio de la métrica plana $\eta$

$$A^{ab}{}_{c} = \eta_{dc} A^{abd}\,.$$

- Matrices de Dirac. Se toma la convención usada en [11] para signatura $s = +2$. Es decir, que el factor $i$ se absorbe en las matrices de Dirac para que se cumpla el álgebra de Dirac

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = +2\,\eta^{ab}\,\mathbb{I}_4\,, \quad (\gamma^0)^2 = -\mathbb{I}_4\,, \quad (\gamma^j)^2 = \mathbb{I}_4\,.$$

# RESUMEN

En este trabajo se estudia una familia de soluciones de un parámetro a las ecuaciones de Einstein para un modelo de Bianchi I con simetría rotacional local con un campo escalar libre sin masa. La simetría rotacional local es equivalente a 4 vectores de Killing linealmente independientes que generan tres traslaciones espaciales y una rotación local, que se considera en el plano $XY$. A su vez, se estudia la propagación de campos cuánticos de prueba, tanto escalares como espinoriales en modelos cosmológicos isótropos de Friedman y modelos no isótropos de Bianchi I. Esta dinámica se representa por nuevas soluciones exactas a las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac para los casos $m \neq 0$ y $m = 0$. Una consecuencia muy interesante de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo es la producción de partículas debida a campos gravitacionales muy intensos como los campos producidos por agujeros negros o la propia expansión del universo. La solución a las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac nos permite obtener el número promedio de producción de partículas creadas por las fluctaciones cuánticas del vacío creadas por la expansión del universo de Bianchi I con simetría rotacional local. Para ello se debe encontrar un método para definir el estado de vacío en un espacio-tiempo con una singularidad en el Big Bang ($t = 0$), ya que el método usual para definir el estado de vacío en un espacio-tiempo curvo no estático falla en la singularidad. Se presenta el método de la aproximación WKB para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa en los límites asintóticos $t \to 0$, $t \to \infty$ de un universo homogéneo anisótropo en expasión con una singularidad inicial en $t = 0$ para así poder definir el vacío en los tiempos correspondientes. La relación que existe entre el vacío en el universo temprano y en el futuro infinito se da mediante las transformaciones de Bogolubov que se presentan con todo detalle en el capítulo 1. Finalmente, se estudia la producción de partículas escalares y de neutrinos no masivos para modelos de Bianchi I con simetría rotacional local y se analizan los resultados obtenidos para el número promedio de partículas creadas por la expansión del universo.

# INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica junto con la teoría de la relatividad son dos de las teorías físicas con mayor impacto en la actualidad. La mecánica cuántica describe por medio de la ecuación de Schrödinger, todos los sistemas físicos microscópicos no relativistas, como partículas elementales, átomos y moléculas. La teoría de la relatividad desarrollada por Einstein en el periodo de 1905-1915 es una teoría sobre el espacio-tiempo, los sistemas de referencia y el carácter absoluto de las leyes de la física. La unificación de ambas teorías (mecánica cuántica y relatividad especial), gracias al desarrollo de la teoría relativista del electrón de Dirac, abrió paso a lo que se conoce hoy en día como teoría cuántica de campos, uno de los mayores logros intelectuales de la humanidad. Describe de manera cuántica y consistente con los postulados de la relatividad especial, las interacciones entre partículas por medio de campos cuánticos. La electrodinámica cuántica, teorías de norma como el modelo de Weinberg-Salam o la cromodinámica cuántica, o inlcuso la mecánica cuántica de sistemas de muchas partículas en interacción que es de gran importancia para la materia condensada, tienen como fundamento base los principios de la relatividad especial; es decir, son teorías escritas bajo la suposición que el espacio-tiempo es el de Minkowski (espacio-tiempo plano). A pesar de que hoy en día no se tiene una teoría satisfactoria sobre los fenómenos cuánticos de la gravedad, no existe ningún impedimento en desarrollar una teoría de campos en un espacio-tiempo que no sea plano; se puede desarrollar la teoría cuántica de campos incluyendo fenómenos gravitacionales sin la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad, tratando la gravitación de manera clásica, es decir, dada una métrica Lorentziana que se obtiene mediante las ecuaciones de Einstein. El esquema que se tiene es una teoría que describe la dinámica de campos cuánticos que se propagan en un fondo de espacio-tiempo curvo, descrito por una variedad Lorentziana dotada de una métrica clásica $g_{\mu\nu}$ general. De esta manera se puede ir bastante lejos generalizando la teoría cuántica de campos sin tener en consideración las dificultades y problemas que conlleva cualquier teoría cuántica del campo gravitacional. El efecto Unruh, la radiación Hawking, la producción de partículas en el universo temprano, la generación de ondas gravitacionales primordiales o incluso la explicación de la isotropía del universo son algunas de las consecuencias de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo.

Uno de los efectos más increíbles que es una predicción de la teoría cuántica de campos es la creación de partículas a partir del vacío. El primer científico en anticipar este efecto fue el físico austro-germano Fritz Sautera, y posteriormente el efecto fue estudiado por Heisenberg y Hans Heinrich Euler, pero no fue hasta que Julian Schwinger le dio un fundamento teórico más sólido. El *efecto Schwinger* que es como se conoce hoy en día, consiste en la producción de pares partícula-antipartícula a partir del vacío por causa de un campo eléctrico muy intenso[38]. En teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo existe el mismo fenómeno de producción de partículas, pero a diferencia del efecto Schwinger, la producción se debe a la presencia de campos gravitacionales muy intensos como la expansión del universo, efecto que fue anticipado por Schrödinger [37], o por el campo producido por un agujero negro, efecto estudiado por Hawking [18]. La teoría predice creación de partículas en etapas muy tempranas de la expansión del universo [26] que es posible que esté caracterizada por las constantes fundamentales $c, \hbar, G$. Esta creación es consistente con la entropía demandada por la radiación cósmica de fondo con temperatura de $2{,}7\,\mathrm{K}$. Sin embargo, existe un problema relacionado con la creación de partículas por campos gravitacionales y es la ambigüedad en la definición del estado de vacío: en relatividad general, cada observador tiene su propio estado de vacío que en general no son iguales, por lo que la propia definición de partícula no es clara. Existen diversos métodos para estudiar el estado de vacío en relatividad general, tales como la aproximación adiabática [26], el método WKB para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa [1, 46], la diagonalización del Hamiltoniano en una hipersuperficie de Cauchy a tiempo constante [6, 17] o el método de integrales de trayectoria [10]. Todos los métodos, salvo el primero, son aplicables a modelos cosmológicos con una singularidad presente en $t=0$. En particular el modelo de Bianchi I estudiado en el capítulo dos de este trabajo tiene una singularidad en $t=0$, lo que hace que la definición del estado de vacío se complique.

El trabajo de esta tésis esta estructurado de la siguiente manera: el primer capítulo está dedicado al desarrollo de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo; se presenta la generalización de la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac a espacio-tiempo curvo y se discute a detalle la descomposición de un campo escalar y espinorial en sus modos de frecuencia positiva y negativa, haciendo énfasis en la dificultad que existe en la definición del estado de vacío. A su vez, se presenta el método de las transformaciones de Bogolubov para la producción de partículas escalares y espinoriales. En el capítulo dos, se introducen los modelos de Bianchi, en particular se discute el modelo Bianchi I con simetría rotacional local como una familia de soluciones de un parámetro a las ecuaciones de Einstein con un campo escalar libre sin masa como fuente de campo gravitacional. Posteriormente en el capítulo tres se estudia la propagación de campos escalares y espinoriales en modelos cosmológicos y se dan algunas soluciones exactas a las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon. El capítulo cuatro está destinado para la producción de partículas escalares de espín cero y espín $1/2$ sin masa en modelo solución de Bianchi I encontrado en el capítulo 2; en particular, se analiza el modelo con parámetro $q=0$ y $q=1$. Se presenta el método de aproximación WKB como criterio para identificar y definir los estados de frecuencia positiva y negativa en las cercanías de la singularidad inicial $t=0$ y en el futuro infinito $t\to\infty$; se define el vacío en cada región asintótica y se calcula el número promedio de producción de partículas por medio de las transformaciones de Bogolubov. Finalmente, el capítulo cinco está destinado para la discusión de las conclusiones, el trabajo que queda pendiente y las perspectivas a futuro.

# Índice general

AGRADECIMIENTOS . . . . . . . . . . I
NOTACIÓN Y CONVENCIONES . . . . . . . . . . III
RESUMEN . . . . . . . . . . V
INTRODUCCIÓN . . . . . . . . . . VII

**1. Teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo** **1**
1.1. Campo escalar en espacio-tiempo de Minkowski . . . . . . . . . . 1
1.1.1. Solución a la ecuación de Klein-Gordon . . . . . . . . . . 2
1.1.2. Segunda cuantización del campo escalar . . . . . . . . . . 6
1.2. Campo escalar en espacio-tiempo curvo . . . . . . . . . . 8
1.2.1. Tensor energía-momento . . . . . . . . . . 10
1.2.2. Estado de vacío en espacio-tiempo curvo . . . . . . . . . . 12
1.3. Ecuación de Dirac en espacio-tiempo de Minkowski . . . . . . . . . . 16
1.3.1. Matrices de Dirac . . . . . . . . . . 17
1.3.2. Segunda cuantización del campo de Dirac . . . . . . . . . . 20
1.4. Ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo . . . . . . . . . . 22
1.4.1. Transformaciones de Bogolubov para el campo de Dirac . . . . . . . . . . 25

**2. Modelos cosmológicos** **27**
2.1. Universos de Friedmann . . . . . . . . . . 28
2.2. Universo Bianchi I con simetría rotacional local . . . . . . . . . . 29
2.2.1. Modelo con campo escalar . . . . . . . . . . 29
2.2.2. Solución a las ecuaciones de campo . . . . . . . . . . 32

**3. Campos escalares y espinoriales en modelos cosmológicos** **37**
3.1. Ecuación de Klein-Gordon para el universo de Friedmann . . . . . . . . . . 37
3.1.1. Soluciones exactas para dos modelos diferentes . . . . . . . . . . 38
3.2. Ecuación de Klein-Gordon para el universo de Bianchi I . . . . . . . . . . 43
3.2.1. Soluciones exactas . . . . . . . . . . 45
3.3. Ecuación de Dirac para el universo de Friedmann . . . . . . . . . . 48
3.4. Ecuación de Dirac para el universo de Bianchi I . . . . . . . . . . 52
3.4.1. Solución exacta para $q = 0$ . . . . . . . . . . 56
3.4.2. Soluciones exactas para $m = 0$ . . . . . . . . . . 58

**4. Producción de partículas escalares y neutrinos no masivos en modelos de Bianchi I** **63**
4.1. Aproximación WKB como método para definir los estados de energía positiva y negativa . . . 64
4.1.1. Método WKB para el campo de Klein-Gordon . . . 64
4.1.2. Método WKB para el campo de Dirac . . . 66
4.2. Creación de partículas escalares en universos de Bianchi I . . . 67
4.2.1. Caso $q = 0$ . . . 67
4.2.2. Caso $q = 1$ . . . 72
4.3. Creación de neutrinos en universos de Bianchi I . . . 76
4.3.1. Caso $q = 0$ . . . 77
4.3.2. Caso $q = 1$ . . . 79

**5. Conclusiones y perspectivas** **83**

**APÉNDICES** **85**

**A. Covariancia de la ecuación de Dirac** **85**

**B. Bases ortonormales** **89**
B.1. Transformaciones locales de Lorentz . . . 91

**C. Conexión de espín** **93**

**BIBLIOGRAFÍA** **97**

# CAPÍTULO 1

# Teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo

La ecuación de Klein-Gordon es el primer resultado de la unificación entre la mecánica cuántica y la relatividad especial; es un intento de tener una ecuación que cumpla las reglas de la covariancia de Lorentz y que sea compatible con la mecánica cuántica. Fue propuesta por primera vez por Schrödinger como una ecuación que describiera el comportamiento cuantico-relativista de una partícula libre. Posteriormente, Oskar Klein y Walter Gordon propusieron que dicha ecuación explicara el comportamiento de las partícuas elementales, como los electrones. Sin embargo, Schrödinger se dio cuenta que la interpretación probabilística de la teoría cuántica se perdía y por esta razón consideró una ecuación no relativista para la mecánica cuántica. Hoy en día, la ecuación de Klein-Gordon es la ecuación que describe la dinámica de campos escalares de espín cero y es fundamental para la teoría cuántica de campos.

SECCIÓN 1.1

## Campo escalar en espacio-tiempo de Minkowski

La manera usual de deducir la ecuación de Klein-Gordon (KG a partir de ahora), es usar el *principio de correspondencia* para la relación de dispersión relativista

$$E^2 = m^2 + p^2 \,, \tag{1.1}$$

donde $E$ es la energía de la partícula y $\mathbf{p}$ su 3-momento. En términos del vector de onda $\mathbf{k}$ y la frecuencia $\omega$, se tiene

$$\omega^2 = k^2 + m^2 \,. \tag{1.2}$$

Esta relación se se puede obtener haciendo el producto invariante del 4-momento $p^a = (E\,,\mathbf{p})$ o del 4-vector de onda $k^a = (\omega\,,\mathbf{k})$. El invariante formado por $p^a$ consigo mismo es

$$\eta_{ab}p^a p^b = p^a p_a = -m^2 = -E^2 + p^2 \,, \tag{1.3}$$

donde $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1\,,1\,,1\,,1)$ es la métrica de Minkowski. La ecuación de KG se obtiene después de hacer la correspondencia

$$p^a \to i\,\partial^a\,,$$

en (1.3) y aplicar el resultado a un campo escalar $\Phi(x)$, donde $\partial^a = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\,,\nabla\right)$ es la derivada ordinaria. El resultado es

$$p_a\,p^a\,\Phi(x) = -\eta_{ab}\,\partial^a\,\partial^b\Phi(x) = -m^2\,\Phi(x)\,. \tag{1.4}$$

La ecuación de KG se escribe usualmente como

$$(\Box - m^2)\Phi(x) = 0\,, \tag{1.5}$$

donde $\Box = \eta_{ab}\,\partial^a\,\partial^b$ es el operador D'Alambertiano. La cantidad $m$ se interpreta como la masa del campo escalar $\Phi(x)$ cuando la teoría se cuantiza, vía segunda cuantización o integrales de trayectoria. El mayor problema de la ecuación de KG es que predice densidades de probabilidad negativas

$$\rho = \Phi^*\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Phi\,\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}\,. \tag{1.6}$$

Esta densidad no es positiva definida, un cambio muy abrupto en el tiempo de $\Phi^*$ puede llevar a un instante en el que $\rho < 0$, algo sin sentido si se le da la interpretación de densidad de probabilidad. Hoy en día a $\rho$ se le da una interpretación de densidad de carga eléctrica asociada al campo.

SUBSECCIÓN 1.1

## Solución a la ecuación de Klein-Gordon

La solución a la ecuación de KG para partícula libre son, evidentemente, ondas planas. El conjunto solución $u_{\mathbf{k}}(x)$, también conocido como base fundamental en el espacio solución de la ecuación de KG, o simplemente *modos base*, se esciben como

$$u_{\mathbf{k}}(x) = A_{\mathbf{k}}\,\exp(i\,k^a\,x_a) = A_{\mathbf{k}}\,\exp(-i\,\omega\,t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,, \tag{1.7}$$

donde $x^a = (t\,,\mathbf{r})$ y $A_{\mathbf{k}}$ es una constante de normalización. Al sustituir en (1.5) se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = m^2 + k^2\,. \tag{1.8}$$

Claramente hay una solución (1.7) diferente para cada valor diferente de $k$. El conjunto solución a la ecuación de KG sirve para establecer la segunda cuantización del campo $\Phi(x)$ y para definir los estados de frecuencia positiva y negativa, algo fundamental para entender el estado de vacío en teoría cuántica de campos, tanto en espacio-tiempo plano como curvo. Los modos base forman el conjunto completo de modos ortonormales linealmente independientes de la ecuación de KG, por lo que la solución más general se pueda expresar como una combinación lineal de éstos. Para enteder la ortonormalidad de cualquier par de modos diferentes $u_{\mathbf{k}_1}$, $u_{\mathbf{k}_2}$ se debe intoducir el producto interno en el espacio solución de la ecuación de KG. Éste se define en una hipersuperficie $\Sigma_t$ a tiempo $t = \text{cte}$ como

$$(\Phi_1\,,\Phi_2) = -i\int_{\Sigma_t}(\Phi_1\,\partial_t\Phi_2^* - \Phi_2^*\,\partial_t\Phi)\,\mathrm{d}^3x = -i\int_{\Sigma_t}(\Phi_1\,\overleftrightarrow{\partial_t}\,\Phi_2^*)\,\mathrm{d}^3x\,, \tag{1.9}$$

donde $\Phi_1\,\overleftrightarrow{\partial_t}\,\Phi_2^* = \Phi_1\,\partial_t\Phi_2^* - \Phi_2^*\,\partial_t\Phi$. Para la solución de ondas planas, el producto interior (1.9) resulta

$$\begin{aligned}
(e^{ik^a{}_1x_a}\,,e^{ik^a{}_2x_a}) &= -i\int_{\Sigma_t}(e^{ik^a{}_1x_a}\,\overleftrightarrow{\partial_t}e^{-ik^a{}_2x_a})\,\mathrm{d}^3x \\
&= \omega_1\int_{\Sigma_t}\exp i[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}-(\omega_1-\omega_2)\,t]\,\mathrm{d}^3x+ \\
&\quad +\omega_2\int_{\Sigma_t}\exp i[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}-(\omega_1-\omega_2)\,t]\,\mathrm{d}^3x \\
&= (\omega_1+\omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\int_{\Sigma_t}e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,\mathrm{d}^3x \\
&= (\omega_1+\omega_2)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\,(2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la representación de Fourier de la delta de Dirac

$$\int_{\Sigma_t}e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}\,\mathrm{d}^3x = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,.$$

De este cálculo se ve que el producto interior (1.9) de los modos $u_{\mathbf{k}_1}$ y $u_{\mathbf{k}_2}$ es cero a menos que tanto el vector de onda $\mathbf{k}$ como la frecuencia $\omega$ sean iguales para ambos modos. Para hacer ortonormales los modos, la constante de normalización se escoge

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\,\omega_{\mathbf{k}}}}\,, \tag{1.10}$$

por lo que los modos (1.7) se escriben como

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{\exp(ik^a\,x_a)}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\,\omega_{\mathbf{k}}}}\,. \tag{1.11}$$

Con esta elección de la constante de normalización, los modos son ortonormales

$$(u_{\mathbf{k}_1}, u_{\mathbf{k}_2}) = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,. \tag{1.12}$$

Los estados de frecuencia positiva-negativa se definen a partir de los modos (1.11). Para $\omega > 0$

$$\omega = +\sqrt{k^2 + m^2}\,, \tag{1.13}$$

se definen los estados de frecuencia positiva y negativa, respectivamente como

$$\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega\, u_{\mathbf{k}}\,, \quad \partial_t u^*_{\mathbf{k}} = i\omega\, u^*_{\mathbf{k}}\,, \tag{1.14}$$

donde $u^*_{\mathbf{k}}(x)$ es la solución complejo conjugada de (1.7). Estas expresiones definen ecuaciones de eingevalores, donde $u_{\mathbf{k}}$, $u^*_{\mathbf{k}}$ son las eigenfunciones del operador $\partial_t$ con eingevalores $\mp i\,\omega$, respectivamente. Vemos que los estados de frecuencia positiva y negativa están relacionados con la existencia del operador derivada $\partial_t$, el cual está definido en un sistema de coordenadas en particular $(t\,,x\,,y\,,z)$ donde la métrica de Minkowski tiene la forma

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\,. \tag{1.15}$$

Formalmente, el operador $\partial_t$ es un vector de Killing tipo tiempo del espacio-tiempo de Minkowski (1.15) que es ortogonal a hipersuperficies $\Sigma_t$ a tiempo $t = \mathrm{cte}$ [ver 4, capítulo 3]. La existencia de vectores de Killing tipo tiempo dependerá, claro está, del tipo de espacio-tiempo bajo estudio. En un espacio-tiempo estático o asintóticamente plano se pueden definir vectores de Killing tipo tiempo sin ninguna ambigüedad, y por tanto, los estados de frecuencia positiva y negativa. Pero en espacio-tiempo generales esto no es válido, por lo que en general no es posible asociar vectores de Killing tipo tiempo para definir los estados de frecuencia positiva y negativa. Esto sin duda es un problema, porque como veremos en las próximas secciones, los estados de frecuencia positiva y negativa están relacionados con la definición del estado de vacío. Definir el estado de vacío en relatividad general es escencial para estudiar el fenómeno de creación de partículas debida a campos gravitacionales muy intensos, como los que produce un agujero negro o la propia expansión del universo.

La ecuación de KG se puede deducir a partir del Lagrangiano de un campo escalar libre

$$\mathscr{L}_{\mathrm{KG}}(x) = -\frac{1}{2}\left(\eta^{ab}\,\partial_a\Phi\,\partial_b\Phi + m^2\,\Phi^2\right) \tag{1.16}$$

construyendo la acción

$$S_{\mathrm{KG}}[\Phi] = \int_\Omega \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}(x)\,\mathrm{d}^4x \tag{1.17}$$

y usando el principio de mínima acción. En efecto, la variación de la acción respecto al campo $\Phi$ debe ser cero

$$\delta S_{\mathrm{KG}}[\phi] = \delta \int_{\Omega} \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}(x)\, \mathrm{d}^4x = 0\,. \tag{1.18}$$

Explícitamente la variación de la acción resulta

$$\begin{aligned} \delta S_{\mathrm{KG}}[\Phi] &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(2\,\eta^{ab}\,\partial_a\Phi\,\delta(\partial_b\Phi) + 2m^2\,\Phi)\,\mathrm{d}^4x = 0 && (1.19)\\ &= -\,\eta^{ab}\,\partial_a\partial_b\Phi\,\delta\Phi\Big|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega}(\eta^{ab}\,\partial_a\partial_b\,\Phi - m^2\,\Phi)\,\delta\Phi\,\mathrm{d}^4x\,. && (1.20)\end{aligned}$$

Al fijar la variación del campo en la frontera de $\Omega$, $\delta\Phi(\partial\Omega) = 0$ se obtiene la ecuación de KG

$$\frac{\delta S_{\mathrm{KG}}}{\delta\Phi} = \eta^{ab}\,\partial_a\partial_b\Phi - m^2\Phi = (\Box - m^2)\Phi = 0\,. \tag{1.21}$$

El formalismo Lagrangiano para campos permite pasar al formalismo canónico de Hamilton, que es crucial para la segunda cuantización. La densidad Hamitoniana $\mathscr{H}$ del campo $\Phi$ se define como

$$\mathscr{H}_{\mathrm{KG}} = \pi(x)\,\partial_t\Phi(x) - \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}(x)\,, \tag{1.22}$$

donde $\pi(x)$ es el momento canónico conjugado del campo $\Phi$ que se define como

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\Phi)} = \partial_t\Phi(x)\,, \tag{1.23}$$

donde se ha usado (1.16). Explícitamente, la densidad Hamiltoniana de un campo escalar $\Phi(x)$ es

$$\mathscr{H}_{\mathrm{KG}}(x) = \pi^2 + \frac{1}{2}(\eta^{ab}\,\partial_a\Phi\,\partial_b\Phi + m^2\,\Phi^2)\,, \tag{1.24}$$

o bien

$$\mathscr{H}_{\mathrm{KG}}(x) = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\,\Phi^2)\,. \tag{1.25}$$

El Hamiltoniano total del campo se obtiene por integración directa de la expresión (1.25)

$$H_{\mathrm{KG}} = \int_{\Omega} \mathscr{H}_{\mathrm{KG}}\, \mathrm{d}^3x = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2)\, \mathrm{d}^3x\,. \tag{1.26}$$

El formalismo canónico de Hamilton en teoría de campos sirve para la segunda cuantización, que es la manera más sencilla de cuantizar un campo. El operador (1.26) representa el operador de Hamilton asociado al campo $\Phi$, y sus eingenvalores los posibles estados de energía del campo.

SUBSECCIÓN 1.1

## Segunda cuantización del campo escalar

El método de segunda cuantización es una descripción cuántica en términos de operadores de sistemas de muchas partículas que se pueden formular como una teoría de campo; consiste en convertir el campo $\Phi(x)$ y el momento conjugado asociado al campo $\pi(x)$ a operadores que cumplan las *reglas de conmutación canónicas a tiempos iguales*

$$[\Phi(t\,,\mathbf{r})\,,\pi(t\,,\mathbf{r}')] = i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \quad [\Phi(t\,,\mathbf{r})\,,\Phi(t\,,\mathbf{r}')] = [\pi(t\,,\mathbf{r})\,,\pi(t\,,\mathbf{r}')] = 0\,. \tag{1.27}$$

La reglas de conmutación (1.27) son similares a las reglas de cuantización de la mecánica cuántica ordinaria; la diferencia radica en que ahora se trata de *operadores de campo* y no de variables dinámicas representadas como operadores. Se dice que un campo cuantizado $\Phi(x)$ cumple la estadística de Bose si cumple (1.27).

La solución más general a la ecuación de KG se puede escribir como combinación lineal de (1.11) pues estos modos forman una base completa en el espacio solución de la ecuación de KG. El operador de campo $\Phi(t\,,\mathbf{r})$ también se puede escribir como combinación lineal de (1.11)

$$\Phi(t\,,\mathbf{r}) = \int [a_{\mathbf{k}}\, u_{\mathbf{k}}(t\,,\mathbf{r}) + a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\, u_{\mathbf{k}}{}^{*}(t\,,\mathbf{r})]\, \mathrm{d}^3k\,, \tag{1.28}$$

donde los coeficientes $a_{\mathbf{k}}$, $a^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ son *operadores* a determinar. El operador de momento canónico asociado al campo es

$$\pi(t\,,\mathbf{r}) = \partial_t\Phi(t\,,\mathbf{r}) = \int (-i\omega)[a_{\mathbf{k}}\, u_{\mathbf{k}}(t\,,\mathbf{r}) - a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\, u_{\mathbf{k}}{}^{*}(t\,,\mathbf{r})]\, \mathrm{d}^3k\,. \tag{1.29}$$

Para que las reglas de conmutación (1.27) sean consistentes con (1.28) y (1.29), los operadores deben cumplir las reglas de conmutación [7]

$$[a_{\mathbf{k}}\,, a^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,, \quad [a_{\mathbf{k}\,,a'_{\mathbf{k}}}] = [a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\,, a^{\dagger}_{\mathbf{k}'}] = 0\,. \tag{1.30}$$

Estas reglas de conmutación son equivalentes a (1.27), además de que son similares a las reglas de conmutación de los operadores de creación-aniquilación del oscilador armónico. La diferencia es que en teoría cuántica de campos, existe un número infinito de estos operadores, uno por cada valor de $\mathbf{k}$. Los estados de frecuencia positiva y negativa (1.14) son relevantes para definir estos operadores: el operador de creación $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ es el coeficiente de los modos de frecuencia negativa $u^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{r})$ y el operador de aniquilación $a_{\mathbf{k}}$ es el coeficiente de los modos de frecuencia positiva $u_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{r})$. En términos de estos operadores, el operador de Hamilton, que no es más que (1.26) pero convertido en operador, resulta [16].

$$H = \frac{1}{2}\int \omega_{\mathbf{k}}\,(a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{k}})\,\mathrm{d}^3 k \tag{1.31}$$

Al establecer los operadores de creación y aniquilación podemos usarlos para definir la *base de Fock*, que es la base de eigenestados del operador de número $N_{\mathbf{k}}$ que está definido como

$$N_{\mathbf{k}} = a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\,. \tag{1.32}$$

Estos eigenestados denotados por $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ son el número de excitaciones en los niveles de energía por cada vector de onda $\mathbf{k}$. Estas excitaciones se interpretan como creación o aniquilación de partículas con el vector de onda $\mathbf{k}$ dado. El estado de vacío del campo, denotado por $|0\rangle$ se define como el estado que aniquila el operador $a_{\mathbf{k}}$

$$a_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = 0\,. \tag{1.33}$$

El estado $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ que contiene $n$ partículas con vector de onda $\mathbf{k}$ se obtiene de aplicar de manera sucesiva el operador de creación $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ al estado de vacío

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}(a^\dagger_{\mathbf{k}})^{n_{\mathbf{k}}}\,|0\rangle\,. \tag{1.34}$$

Si cada partícula tiene un vector de onda diferente $\mathbf{k}_i$, entonces se tienen los *estados de muchas partículas*

$$\left|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots n_{\mathbf{k}_i}, \cdots, n_{\mathbf{k}_f}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_1}!\,n_{\mathbf{k}_2}!\cdots n_{\mathbf{k}_f}!}}\,(a_{\mathbf{k}_1})^{n_{\mathbf{k}_1}}\,(a_{\mathbf{k}_2})^{n_{\mathbf{k}_2}}\cdots(a_{\mathbf{k}_f})^{n_{\mathbf{k}_f}}\,|0\rangle\,. \tag{1.35}$$

Esto quiere decir que existen $n_{\mathbf{k}_1}$ partículas con vector de onda $\mathbf{k}_1$, $n_{\mathbf{k}_2}$ partículas con vector de onda $\mathbf{k}_2$, etc. Los eigenestados del operaddor de número (1.32) definen la base de Fock del espacio de Hilbert de la segunda cuantización

$$N_{\mathbf{k}_i}\left|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots n_{\mathbf{k}_i}, \cdots, n_{\mathbf{k}_f}\right\rangle = n_{\mathbf{k}_i}\left|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots n_{\mathbf{k}_i}, \cdots, n_{\mathbf{k}_f}\right\rangle\,. \tag{1.36}$$

Estos eigenestados son comunes al Hamiltoniano (1.31) ya que conmuta con (1.32). La base de Fock, y por tanto el estado de vacío es invariante ante transformaciones del grupo de Lorentz. Eso significa que dos observadores inerciales medirán las mismas propiedades del mismo estado de vacío. Recordar que los operadores de creación y aniquilación son los coeficientes de los modos de frecuencia positiva y negativa, que están relacionados con las simetrías del espacio-tiempo de Minkowski (en concreto, con la asignación de vectores de Killing tipo tiempo); se tiene la habilidad de poder diferenciar y definir estos estados en el espacio de Minkowski gracias a las simetrías que presenta.

Supongamos que se tienen dos observadores inerciales $\mathscr{O}$ y $\mathscr{O}'$ cuya velocidad relativa es $\mathbf{V}$. Los modos de frecuencia positiva y negativa se transformarán para el par de observadores. En efecto, la derivada parcial $\partial_a$ y el 4-vector de onda $k^a = (\omega, \mathbf{k})$ se transforman ante transformaciones de Lorentz como

$$\partial_a{}' = \Lambda_a{}^b \partial_b\,, \quad k^{a\prime} = \Lambda^a{}_b k^b\,. \tag{1.37}$$

En particular, la frecuencia en el sistema del observador primado es

$$\omega' = \Lambda^0{}_b k^b = \Lambda^0{}_0 k^0 + \Lambda^0{}_j k^j = \gamma(\omega - \mathbf{V}\cdot\mathbf{k})\,. \tag{1.38}$$

Por lo tanto, los modos de frecuencia negativa y positiva en el sistema del observador primado serán

$$\partial_0' u_{\mathbf{k}} = \Lambda_0{}^a\, \partial_a u_{\mathbf{k}} = \Lambda_0{}^0\, \partial_0 u_{\mathbf{k}} + \Lambda_0{}^i\, \partial_i u_{\mathbf{k}} = \gamma(-i\,\omega + i\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} = -i\,\omega'\, u_{\mathbf{k}}\,. \tag{1.39}$$

Si se tiene un sistema con $n_{\mathbf{k}}$ partículas con vector de onda $\mathbf{k}$ y frecuencia $\omega$, al pasar a un sistema de referencia inercial con velocidad relativa $\mathbf{V}$, se tiene el mismo número de partículas pero con su vector de onda y frecuencia transformadas según una transformación de Lorentz. Entonces, la elección del sistema de referencia es irrelevante en el espacio-tiempo de Minkowski. La descomposición en los modos de frecuencia positiva y negativa (1.28) es invariante; la base de Fock descrita por los eigenestados del operador de número (1.32) y por tanto el estado de vacío, coicidirán para cualquier observador inercial.

SECCIÓN 1.2

## Campo escalar en espacio-tiempo curvo

La generalización de la teoría del campo escalar a espacio-tiempo curvo es de manera directa respetando el principio de covariancia general para que la teoría se mantenga invariante ante cambios generales de coordenadas. Formalmente, la teoría del campo escalar en espacio-tiempo curvo se obtiene del siguiente Lagrangiano

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + m^2\,\Phi^2 + \xi\, R\Phi^2\right), \tag{1.40}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo general, $R = R_\mu{}^\mu$ el escalar de curvatura, $\nabla_\mu$ la derivada covariante asociada a la métrica $g_{\mu\nu}$ y $\xi$ es un parámetro adimensional. Como $\mathscr{L}$ es un escalar, para construir la acción correspondiente se debe multiplicar por la raíz cuadrada el determinante de la métrica e integrar sobre un 4-volumen $\Omega$. La acción asociada a (1.40) es

$$S[\Phi, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + m^2\Phi^2 + \xi R\Phi^2)\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{1.41}$$

La ecuación de campo se obtiene al variar (1.41) respecto al campo escalar $\Phi$

$$\begin{aligned}
\delta_\Phi S &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{-g}\,[2g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\,\delta(\nabla_\nu\Phi) + 2(m^2+\xi R)\Phi\,\delta\Phi]\,\mathrm{d}^4x \\
&= -\int_\Omega \sqrt{-g}\,[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu(\delta\Phi) + (m^2+\xi R)\,\Phi\,\delta\Phi]\,\mathrm{d}^4x \\
&= -\int_\Omega \sqrt{-g}\,[-\Box\Phi\,\delta\Phi + \nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\Phi\,\delta\Phi) + (m^2+\xi R)\Phi\,\delta\Phi]\,\mathrm{d}^4x\,.
\end{aligned}$$

El segundo término se anula en virtud del teorema de Gauss por ser un término de frontera. Por lo tanto, la variación (1.41) resulta

$$\delta_\Phi S = -\int_\Omega [-\Box\Phi + (m^2+\xi R)\Phi]\,\delta\Phi\,\mathrm{d}^4x \;\Rightarrow\; (\Box - m^2 - \xi R)\Phi(x) = 0\,, \tag{1.42}$$

Esta es la generalización a la ecuación de KG (1.5) en espacio-tiempo curvo. El operador $\Box$ es el operador de Laplace-Beltrami

$$\Box\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\Phi) = (-g)^{-1/2}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu\Phi)\,.$$

En términos de este operador, la ecuación de KG para espacio-tiempo curvo es

$$[(-g)^{-1/2}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu) - m^2 - \xi R]\Phi(x) = 0\,. \tag{1.43}$$

El resto de este trabajo se centra en la solución de esta ecuación para modelos cosmológicos. Nótese que si la métrica es plana, el Lagrangiano se reduce al caso plano, (1.16), y por tanto la ecuación (1.43) se reduce a (1.5). El término que es proporcional al escalar de curvatura tiene justificación; existen por lo menos dos razones; [ver 15, capítulo 6]

1. Invariancia conforme de la teoría cuando $m = 0$ y $\xi = \dfrac{1}{6}$
2. Renormalización de la teoría con término de interacción $\lambda\,\Phi^4$

La invariancia conforme quiere decir que si se tiene una solución a (1.43) en un espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}(x)$, también será solución con una métrica $\Omega^2(x)\,g_{\mu\nu}$ donde $\Omega^2(x)$ es una función positiva arbitraria del espacio-tiempo. En otras palabras, al hacer las transformaciones de la métrica $g_{\mu\nu} \to \Omega^2(x)\,g_{\mu\nu}$ y del campo $\Phi \to \Omega^2(x)\,\Phi$, la acción (1.41) y la ecuación (1.43) se mantienen invariante de forma para el caso de $m = 0$ y $\xi_{\text{conf}} = \dfrac{1}{6}$ en cuatro dimensiones; en $n$ dimensiones, el parámetro $\xi_{\text{conf}}$ tiene el valor $\xi_{\text{conf}} = \dfrac{n-2}{4(n-1)}$. En particular, existen dos valores de interés del parámetro $\xi$: un campo escalar que satisface (1.43) en un espacio-tiempo 4-dimensional se dice que es *mínimamente acoplado* si $\xi = 0$ y *conformalmente acoplado* si $\xi_{\text{conf}} = \dfrac{1}{6}$. En este sentido, el parámetro $\xi$ es un parámetro libre de la teoría, no existe ninguna justificación de preferir el acoplamiento mínimo sobre el acoplamiento conforme. La invariancia conforme no es una simetría fundamental de la naturaleza, existen teorías que no manifiestan esta simetría, como por ejemplo la cromodinámica cuántica.

SUBSECCIÓN 1.2

## Tensor energía-momento

El Lagrangiano (1.40) describe la dinámica del campo escalar $\Phi(x)$ *per se*, así como la influencia que tiene sobre el comportamiento de un campo gravitacional. Este hecho se ve reflejado en las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}\,, \tag{1.44}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de todas las formas de materia-energía presentes, excepto el propio campo gravitacional. Para determinar el tensor energía-momento de un campo escalar, se construye la acción de materia asociada al campo, que no es más que (1.41)

$$S_{\text{mat}} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + m^2\Phi^2 + \xi R\Phi^2)\,\mathrm{d}^4x\,.$$

Para obtener $T_{\mu\nu}$ de manera general se debe variar la acción respecto a la métrica; la definición general el tensor energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}\,.$$

Explícitamente, se tiene que

$$\delta S_{\text{mat}} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \{\delta(\sqrt{-g})[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + (m^2 + \xi R)\Phi^2] + \sqrt{-g}[\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi + \\ + (m^2 + \xi\,\delta R)\Phi^2]\}\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{1.45}$$

Usando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \\ \delta R &= \delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{1.46}$$

y la identidad de Palatini

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu})\,, \tag{1.47}$$

se llega al resultado ([ver 30, capítulo 2])

$$\delta R = -R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma}\,g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\,\nabla_\nu\delta g_{\rho\sigma} - \nabla_\rho\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu})\,. \tag{1.48}$$

Sustituyendo en la variación de la acción y haciendo cero los términos de frontera, se tiene que el tensor energía-momento de la teoría es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi + m^2\Phi^2) + \xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\Phi^2 + \\ +\xi(g_{\mu\nu}\Box\Phi^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi^2)\,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

En el siguiente capítulo se da una solución a las ecuaciones de Einstein para un modelo de Bianchi I con un campo escalar libre sin masa como fuente de campo gravitacional, cuyo tensor energía-momento se deduce de (1.49) al hacer $m = 0$, $\xi = 0$

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,\nabla^\alpha\Phi\nabla_\alpha\Phi\,. \tag{1.50}$$

El tensor energía-momento (1.49) cumple su respectiva ley de conservación

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.51}$$

y tiene traza nula en el caso de invariancia conforme cuando aún no se ha cuantizado la teoría. La traza de este tensor se obtiene de manera directa de la expresión (1.49):

$$T = T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - 2m^2\,\Phi^2 - \xi\,R\Phi^2 + 3\xi\,\Box\Phi^2\,. \tag{1.52}$$

Además se tiene el resultado

$$\Box\Phi^2 = \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi^2 = 2\,\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + 2\Phi\Box\Phi \tag{1.53}$$

que con ayuda de (1.43) que satisface el campo $\Phi$ el resultado anterior se reduce a

$$\Box\Phi^2 = 2\,\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + 2(m^2 + \xi\,R)\,\Phi^2\,, \tag{1.54}$$

por lo que la traza del tensor (1.49) resulta

$$\begin{aligned} T &= -\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - 2m^2\,\Phi^2 - \xi\,R\,\Phi^2 + 6\xi\,\nabla_\mu \Phi\,\nabla^\mu \Phi + 6\xi\,(m^2 + \xi\,R)\Phi^2 & (1.55) \\ &= (6\xi - 1)\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + m^2 \Phi^2 (6\xi - 2) + \xi\,R(6\xi - 1)\Phi^2\,. & (1.56) \end{aligned}$$

Si el campo escalar está conformalmente acomplado, se tiene trivialmente que la traza es cero cuando la masa es nula

$$T = 0\,, \quad \xi_{\text{conf}} = \frac{1}{6}\,, \quad m = 0\,. \tag{1.57}$$

Como muestra Parker [30, capítulo 3], al calcular el valor esperado de $T^\mu{}_\nu$ en el estado de vacío, existe una discrepancia con el valor (1.57) y el que se obtiene por la teoría cuántica. En el límite de $m \to 0$, el resultado $\langle 0|\,T^\mu{}_\mu\,|0\rangle$ es diferente de cero. Esto se conoce como anomalía de la traza para un campo escalar.

SUBSECCIÓN 1.2

## Estado de vacío en espacio-tiempo curvo

Formalmente la cuantización canónica del campo escalar en espacio-tiempo curvo es análoga a la segunda cuantización en espacio-tiempo plano presentada en la sección anterior. La diferencia radica en que la segunda cuantización debe ser escrita de manera covariante. Las reglas de cuantización para espacio-tiempo curvo son análogas a la reglas de la segunda cuantización (1.27) y se deben de mantener.

El producto interior en el espacio solución de la ecuación de KG, (1.9) se debe generalizar a espacio-tiempo curvo, siempre y cuando se respete la invariancia de la expresión. El producto interior en espacio-tiempo curvo en el espacio solución de la ecuación de KG (1.43) debe ser invariante ante cambios generales de coordenadas. Para una hipersuperficie de Cauchy tipo espacio $\Sigma$ con vector unitario normal $n^\mu$ definida a tiempo constante $t = \text{cte}$, el prodcuto interior en el espacio solución de (1.43) se define como

$$(\Phi_1\,, \Phi_2) = -i \int_\Sigma (\Phi_1\,\overleftrightarrow{\partial_\mu} \Phi_2^*)\,\sqrt{-\gamma}\,n^\mu\,\mathrm{d}^3x\,, \tag{1.58}$$

donde $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ es el determinante de la métrica espacial definida en la hipersuperficie $\Sigma^{\mu}$. Con este producto interior, los modos solución a (1.43) son ortogonales

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0, \tag{1.59}$$

donde los índices $i, j$ pueden ser discretos o continuos, y representan una etiqueta para los diferentes modos solución a (1.43). Evidentemente, para el caso general éstos no son ondas planas como en el caso de espacio-tiempo de Minkowski. Si los modos solución $\{u_i(x)\}$ se escogen como conjunto completo, cualquier solución a (1.43) se puede expresar como combinación lineal de los elementos de este conjunto

$$\Phi(x) = \int (a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x))\, \mathrm{d}\tilde{\mu}(i), \tag{1.60}$$

donde la integración se hace respecto a la etiqueta $i$ que representa los modos solución, los cuales dependen de la forma funcional de la ecuación (1.43). Si el índice $i$ es discreto, la integral es una suma sobre los diferentes modos

$$\Phi(x) = \sum_i (a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)). \tag{1.61}$$

En adelante se hace la suposición que $i$ es discrteto. Al igual que en el caso plano, los coeficientes de los modos son los operadores de creación y aniquilación de los estados de partículas del operador de número, por lo que la manera de construir la base de Fock y por tanto el estado de vacío, es idéntica al caso de espacio-tiempo plano. Sin embargo, existe una diferencia fundamental relacionada con la unicidad del estado de vacío en espacio-tiempo curvo. En espacio-tiempo plano se puede descomponer el operador de campo en sus modos de frecuencia positiva y negativa según (1.28); los coeficientes resultan en los operadores de creación y aniquilación en el espacio de Fock lo que permitía definir el estado de vacío. Estos modos de frecuencia positiva y negativa están definidos en un sistema de referencia particular en el que la métrica de Minkowski posee un vector de Killing tipo tiempo. Además, se mostró que al hacer una transformación de Lorentz, el estado de vacío se mantiene invariante, es decir, que cualquier observador inercial observa el mismo vacío.

En espacio-tiempo curvo existe una ambigüedad en la definición de los modos de frecuencia positiva y negativa, y en consecuencia en la definición del estado de vacío. Esto se debe a que en general un espacio-tiempo no presenta vectores de Killing tipo tiempo, por lo que no podremos, en general, encontrar una solución a (1.43) que se pueda separar en sus modos de frecuencia positiva y negativa. Se puede encontrar un conjunto solución de modos base de (1.43) pero el problema es que tal conjuto no es único, cada observador puede definir su propio conjunto solución de modos base de (1.43). Esto es una dificultad a la hora de definir la base de Fock y el estado de vacío; el vacío y el concepto de partícula dependerá de la elección del conjunto de modos base. Existen casos especiales de espacios-tiempo en los que se pueden definir vectores de Killing tipo tiempo y así recuperar la descomposición del operador de campo en sus modos de frecuencia positiva y negativa, como espacio-tiempo que sea asintóticamente plano.

Consideremos dos observadores $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ , cada uno define un conjuto solución de modos base de la ecuación (1.43), digamos $\{f_i(x)\}$ y $\{g_i(x)\}$ respectivamente. El operador de campo $\Phi$ se puede desarrollar en cada uno de estos modos base

- Observador $\mathscr{F}$:

$$\Phi(x) = \sum_i (a_i f_i(x) + a_i^\dagger f_i^*(x)) \tag{1.62}$$

- Observador $\mathscr{G}$:

$$\Phi(x) = \sum_i (b_i g_i(x) + b_i^\dagger g_i^*(x))) \,. \tag{1.63}$$

Los coeficientes del desarrollo del operador de campo en términos de los modos $\{g_i(x)\}$ definen una nueva base de Fock con operador de número

$$N_{(g)\,i} = b_i^\dagger b_i \,. \tag{1.64}$$

Cada observador define su estado de vacío y son igualmente válidos, no existe ningún argumento físico para preferir uno sobre otro.

Para el observador $\mathscr{F}$ el estado de vacío es

$$a_i \left|0_f\right\rangle = 0 \,, \tag{1.65}$$

mientras que para el observador $\mathscr{G}$ el estado de vacío es

$$b_i \left|0_g\right\rangle = 0 \,. \tag{1.66}$$

Los modos base $\{f_i(x)\}$ y $\{g_i(x)\}$ se relacionan entre sí por medio de unas transformaciones lineales conocidas como *transformaciones de Bogolubov*. Dicho de otra manera, las transformaciones de Bogolubov permiten desarrollar los modos $\{f_i(x)\}$ en términos de $\{g_i(x)\}$ y visceversa

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j(x) - \beta_{ji} g_j^*(x)) \\ g_i(x) &= \sum_j (\alpha_{ji} f_j(x) + \beta_{ji} f_j^*(x)) \,. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Los coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ se conocen como *coeficientes de Bogolubov*. De las condiciones de ortonormalidad (1.59) de los modos base $\{f_i(x)\}$, $\{g_i(x)\}$ se encuentra que dichos coeficientes están dados por

$$\alpha_{ij} = (g_i, f_j), \quad (g_i, f_j^*) = -\beta_{ij}. \tag{1.68}$$

Además, éstos coeficientes cumplen las propiedades

$$\begin{aligned} \sum_k (\alpha_{ik}\alpha_{jk}^* - \beta_{ik}\beta_{jk}^*) &= \delta_{ij} \\ \sum_k (\alpha_{ik}\beta_{jk}^* - \beta_{ik}\alpha_{jk}^*) &= 0. \end{aligned} \tag{1.69}$$

De la descomposición del operador de campo en los modos $\{f_i(x)\}$, $\{g_i(x)\}$, de (1.68) y de la relación (1.59) para los modos base, se pueden escribir los operadores de creación-aniquilación del observador $\mathscr{G}$ en términos de los operadores del observador $\mathscr{F}$

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_j (a_i\alpha_{ij}^* - a_i^\dagger \beta_{ij}^*) \\ a_i &= \sum_j (\alpha_{ij} b_j + \beta_{ij}^* b_j^\dagger). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Es claro que la base de Fock no coincide para ambos operadores si al menos una componente de $\beta_{ij}$ es diferente de cero; es de esperarse que el estado de vacío tampoco coincida.

Supongamos que el observador $\mathscr{F}$ define el estado de vacío $|0_f\rangle$ según (1.65) en el que no hay partículas

$$\langle N_{(f)i}\rangle_{0_f} = n_i(k) = \langle 0_f| a_i^\dagger a_i |0_f\rangle = 0 \tag{1.71}$$

¿Cómo ve el observador $\mathscr{G}$ este estado, usando la descomposición del operador de campo en sus modos base $\{g_i(x)\}$? Lo que se requiere es el valor esperado del operador de número (1.64) en el vacío del observador $\mathscr{F}$

$$\langle 0_f| N_{(g)i} |0_f\rangle = \langle 0_f| b_i^\dagger b_i |0_f\rangle = \langle N_{(g)i}\rangle_{0_f} = \int n_i(k)\, \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}^3k. \tag{1.72}$$

Se usa (1.70) para expresar los operadores $b_i, b_i^\dagger$ en términos de $a_i, a_i^\dagger$ para así obtener

$$\langle N_{(g)i}\rangle_{0_f} = \sum_{j,k}\langle 0_f|\,(a_i^\dagger\,\alpha_{ij}-a_i\,\beta_{ij})(a_k\,\alpha_{ik}^*-a_i^\dagger\,\beta_{ik}^*)\,|0_f\rangle \tag{1.73}$$

$$= \sum_{j,k}\beta_{ij}\,\beta_{ik}^*\,\langle 0_f|\,a_j\,a_k^\dagger\,|0_f\rangle \tag{1.74}$$

$$= \sum_{j,k}\beta_{ij}\,\beta_{ik}^*\,\delta_{jk}\,. \tag{1.75}$$

La densidad del número de partículas que observa $\mathscr{G}$ en el vacío $|0_f\rangle$ se expresa en términos de uno de los coeficientes de Bogolubov

$$n_i(k) = \sum_j |\beta_{ij}|^2\,. \tag{1.76}$$

Claramente no es cero si al menos una de las componentes de $\beta_{ij}$ es no nula; el vacío del observador $\mathscr{G}$ no coincide con el vacío de $\mathscr{F}$. Se dice que el vacío en el sistema de referencia de $\mathscr{G}$ contiene $\sum_j |\beta_{ij}|^2$ partículas en el vacío $|0_f\rangle$; hubo *creación de partículas* para el observador $\mathscr{G}$. Esto se puede entender de la siguiente manera: si se da el caso de poder definir los modos de frecuencia positiva y negativa respecto algún vector de Killing tipo tiempo, entonces $\beta_{ij}$ es una mezcla de modos de frecuencia positiva y negativa según la descomposición del operador de campo en los modos $\{g_i(x)\}$. La mezcla de modos de frecuencia positiva y negativa es lo que ocasiona la creación de partículas en espacio-tiempo curvo. Esta mezcla ocurre por la dependencia temporal del campo o por la curvatura del espacio asociada con la métrica.

SECCIÓN 1.3

## Ecuación de Dirac en espacio-tiempo de Minkowski

La ecuación de Dirac es la ecuación que describe de manera adecuada el comportamiento de partículas de espín $1/2$, y es completamente consistente con la mecánica cuántica y la relatividad especial. Incluye de manera natural el espín de las partículas, algo que no era posible con la mecánica cuántica ordinaria, pues el espín se debe introducir a mano, lo que da lugar a la teoría del espín de Pauli. Además, no presenta el problema de interpretación de probabilidades negativas como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon. Dirac se dio cuenta que el mayor problema que presenta la ecuación de KG eran las segundas derivadas temporales ya que éstas son las que hacen que la densidad de probabilidad no sea positiva definida. Así que propuso que el operador de la ecuación de KG,

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \left(-\nabla^2+m^2\right)\Psi \tag{1.77}$$

tenía que ser lineal en las derivadas temporales y también en las derivadas espaciales:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\,\Psi\,, \tag{1.78}$$

donde $\vec{\alpha}$ y $\beta$ son coeficientes indeterminados. Esta ecuación se reescribe de la siguiente manera,

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} \;=\; -i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\beta\,\psi = H_D\,\Psi \tag{1.79}$$

donde

$$H_D = -i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta\,m = \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta\,m\,, \tag{1.80}$$

es el Hamiltoniano de Dirac. Este Hamiltoniano aplicado dos veces a la función $\psi$ debe recuperarse la ecuación de Klein-Gordon, por construcción. En efecto, aplicando dos veces $H$ se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \;&=\; \left(-i\alpha^i\partial_i + m\beta\right)\left(-i\alpha^j\partial_j m\beta\right)\Psi \\ &=\; \left[-\alpha^i\alpha^j\partial_i\partial_j - i\,m\left(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i\right) + m^2\beta^2\right]\Psi \end{aligned}$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación de Klein-Gordon, obtenemos que, dado que $\partial_i\partial_j$ es simétrico, solo la parte simétrica del producto $\alpha^i\alpha^j$ debe aparecer y que junto con $\beta$ cumplen el álgebra siguiente:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = \{a^i, a^j\} = 2\delta^{ij}\,, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = \{\alpha^i, \beta\} = 0\,, \quad \beta^2 = \mathbb{I}\,. \tag{1.81}$$

De esta álgebra vemos que los coeficientes $\alpha^i$ y $\beta$ deben ser tal que su cuadrado nos de la unidad y que anticonmuten entre ellos. Estas propiedades son imposibles que las cumplan números, ya sean reales o complejos; deben ser matrices.

SUBSECCIÓN 1.3

## Matrices de Dirac

Las matrices $\alpha$ y $\beta$ deben ser Hermitianas ya que el Hamiltoniano de Dirac es Hermitiano. Otra propiedad interesante de estas matrices es que tienen traza nula; esta propiedad se deduce directamente de (1.81)

$$\begin{gathered} \alpha^i\,\beta = -\beta\,\alpha^i \quad \Rightarrow \mathrm{Tr}(\alpha^i) = -\alpha^{\mathrm{i}} \\ \mathrm{Tr}(\alpha^i) = 0\,. \end{gathered} \tag{1.82}$$

El mismo procedimiento se hace para la matriz $\beta$. Los coeficientes $\alpha^i$ y $\beta$ se tratan de matrices Hermitianas, sin traza de dimensión par. Esto conlleva a $n^2-1$ grados de libertad para una martiz con estas propiedades, donde $n$ es la dimensionalidad. Automáticamente $n=2$ queda descartado porque sólo existen tres matrices Hermitianas sin traza de $2\times 2$, las *matrices de Pauli*, y tenemos cuatro matrices (tres matrices $\alpha$ y $\beta$). Por lo tanto, el orden más bajo de la dimensión de las marices debe ser 4. Entonces se tratan de matrices sin traza, Hermitianas de por lo menos $4\times 4$. La definición de las matrices en la *representación de Dirac-Pauli o estándar* es

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}\,, \tag{1.83}$$

donde $\sigma^i$ son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

y $\mathbb{I}$ es la identidad de $2\times 2$. De esta manera la función de onda en la ecuación de Dirac, $\psi$, debe ser un vector columna de 4 componentes llamado *espinor de Dirac*:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}\,. \tag{1.85}$$

Para mostrar explícitamente la covariancia de la ecuación de Dirac, se deben definir otras matrices $\gamma^a$ conocidas como *matrices de Dirac*. En la representación estándar, estas matrices se definen como

$$\gamma^0 = \beta\,, \quad \gamma^i = \gamma^0\alpha^i\,, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \tag{1.86}$$

de tal manera que $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i)$. $\gamma^5$ es la quinta matriz de Dirac y sirve para definir la simetría quiral y la simetría $\mathscr{CPT}$. Al multiplicar por la izquierda la ecuación (1.78) por $\gamma^0 = \beta$ y empleando la defінción de las matrices $\gamma^a$ se llega a la forma covariante estándar de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^a\partial_a - m)\Psi = 0\,. \tag{1.87}$$

Esta forma de la ecuación de Dirac resulta útil al momento de estudiar las simetrías de la ecuación, como lo son la conjugación de carga, paridad e inversión temporal usando las matrices $\gamma^a$, mientras que la forma (1.78) sirve para estudiar problemas de dinámica, como el átomo de hidrógeno o partícula libre.

Las matrices $\gamma^a$ cumplen con relaciones similares a (1.81), además de ser matrices sin traza $\mathrm{Tr}(\gamma^a) = 0$. El álgebra que cumplen las marices de Dirac, que se conoce como *álgebra de Dirac* que se obtiene directamente de (1.86) y de (1.81)

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{I}. \tag{1.88}$$

Se deduce que

$$(\gamma^0)^2 = -\mathbb{I}, \quad (\gamma^j)^2 = \mathbb{I}, \tag{1.89}$$

para $i = 1, 2, 3$. Además se tiene que el adjunto Hermitiano de cada matriz es

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j. \tag{1.90}$$

Esto se resscribe en una sola expresión

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma^0 \gamma^a \gamma^0. \tag{1.91}$$

La representación estándar de las matrices de Dirac no cumple (1.88), lo que se debe hacer es absorber el factor $i$ en la definición de las $\gamma^a$

$$(\gamma^a \partial - m)\Psi(x) = 0, \tag{1.92}$$

o bien, multiplicar las matrices por $-i$

$$(\gamma^a \partial_a + m)\Psi(x) = 0. \tag{1.93}$$

La representación de Jauch-Rohrlich [20]

$$\gamma^0 = -i\beta, \quad \gamma^j = \alpha^j \tag{1.94}$$

cumple (1.88). Otra representación que cumple (1.88) es la representación usada por Parker [28]

$$\gamma^0 = -i\beta, \quad \gamma^j = -i\beta\,\alpha^j. \tag{1.95}$$

Para ambas representaciones la ecuación de Dirac es (1.93). En lo que resta de este trabajo se usará la ecuación de Dirac (1.93).

SUBSECCIÓN 1.3

## Segunda cuantización del campo de Dirac

Como en el caso de campos escalares, el método de segunda cuantización para el campo de Dirac consiste en escribir el campo $\Psi(x)$ y el momento conjugado $\pi_\Psi$ en términos de operadores de sistemas de muchas partículas, siempre y cuando cumplan las *reglas de anticonmutación canónicas a tiempos iguales*

$$\{\Psi_a(t,\mathbf{r}),\Psi_b^\dagger(t,\mathbf{r}')\} = \delta_{ab}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,, \tag{1.96}$$

donde $a,b = 1,2,3,4$ son los índices que corresponden a los cuatro espinores de Dirac. Todo campo que cumpla estas reglas de anticonmutación se dice que cumple la *estadística de Fermi-Dirac*. La solución a la ecuación de Dirac se puede escribir como combinación lineal de sus modos solución base, los cuales se escriben como ondas planas

$$\Psi_\mathbf{k}^+(x) = u(k)\,e^{-ik_a x^a}\,, \quad \Psi_\mathbf{k}^-(x) = v(k)\,e^{ik_a x^a}\,, \tag{1.97}$$

donde $u(k)$, $v(k)$ son espinores constantes de cuatro componentes. $\Psi_\mathbf{k}^+(x)$ representa las soluciones de energía positiva mientras que $\Psi_\mathbf{k}^-(x)$ son las soluciones de energía negativa. El desarrollo del operador de campo de Dirac en términos de los modos base se escribe de manera similar al caso del operador de campo de Klein-Gordon

$$\Psi(x) = \int \mathrm{d}^3k\,[a_\mathbf{k}\,u(k)\,e^{-ik_a x^a} + b_\mathbf{k}^\dagger\,v(k)\,e^{ik_a x^a}] = \int \mathrm{d}^3k\,[a_\mathbf{k}\Psi_\mathbf{k}^+(x) + b_\mathbf{k}^\dagger\Psi_\mathbf{k}^-(x)]\,. \tag{1.98}$$

Como en el caso de KG, $a_\mathbf{k}$ y $b_\mathbf{k}^\dagger$ son operadres de creación-aniquilación; $a_\mathbf{k}$ es el operador de aniquilación de partículas correspondiente al estado de frecuencia positiva $\Psi^+(x)$ y $b_\mathbf{k}^\dagger$ es el operador de creación de *antipartículas* correspondiente al estado de frecuencia negativa $\Psi^-(x)$. Los modos solución base son ortonormales respecto al producto interior definido en el espacio solución de la ecuación de Dirac. Si $\psi$ y $\chi$ son solución a la ecuación de Dirac, se dice que son ortonormales si

$$\langle\psi,\chi\rangle = \int_\Sigma \bar{\psi}\,\gamma^0\,\chi\,\mathrm{d}^3x, \tag{1.99}$$

donde el producto interior está definido en una hipersuperficie de Cauchy $\Sigma$ a tiempo constante. Los modos solución son ortormales respecto a (1.99) en el sentido

$$\left\langle\Psi_\mathbf{k}^+,\Psi_\mathbf{q}^+\right\rangle = \left\langle\Psi_\mathbf{k}^-,\Psi_\mathbf{q}^-\right\rangle = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\,. \tag{1.100}$$

Las reglas de anticonmutación (1.96) en términos de los operadores $a_\mathbf{k}$ y $b_\mathbf{k}^\dagger$ se escriben como

$$\{a_{\mathbf{k}}^{j}, a_{\mathbf{q}}^{\ell\dagger}\} = \{b_{\mathbf{k}}^{j}, b_{\mathbf{q}}^{\ell\dagger}\} = (2\pi)^3\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\, \delta^{j\ell}\,. \tag{1.101}$$

El resto de anticonmutadores entres dichos operadores son cero. El espacio de Fock para el campo de Dirac se construye de manera idéntica al caso del campo de KG. Se comienza por definir el estado de vacío como

$$a_{\mathbf{k}}^{j}\,|0\rangle = b_{\mathbf{k}}^{j}\,|0\rangle = 0\,. \tag{1.102}$$

El operador de número de partículas para el estado $\Psi_{\mathbf{k}}^{+}(x)$ se define de manera análoga al caso de KG

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{par}} = \sum_{j} a_{\mathbf{k}}^{j\dagger}\, a_{\mathbf{k}}^{j}\,, \tag{1.103}$$

mientras que el operador de número de antipartículas para el estado $\Psi_{\mathbf{k}}^{-}(x)$ se define como

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{antipar}} = \sum_{l} b_{\mathbf{k}}^{l\dagger}\, b_{\mathbf{k}}^{l}\,, \tag{1.104}$$

donde los índices $j, l$ indican las soluciones independientes de la ecuación de Dirac: $j = 1,2$, $l = 3,4$. El operador de número total de partículas y antipartículas es la suma de $N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{antipar}}$ y $N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{par}}$:

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{par}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{antipar}}\,. \tag{1.105}$$

Para construir la base de Fock y por consiguiente el estado de vacío para el campo de Dirac se necesita, al igual que el caso de KG, los modos base solución. Los estados de frecuencia positiva y negativa son fundamentales para definir el estado de vacío, como ha quedado claro con la exposición de la segunda cuantización para los campos de KG y de Dirac.

La aplicación simultánea ordenada de los operadores $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ al estado de vacío $|0\rangle$ permite la construcción de los estados que continene un número arbitrario de partículas y antipartículas; claro está, estos estados deben respetar y estar en acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Finalmente, por completez se escribe el operador Hamiltoniano $H$ para el campo de Dirac en términos de los operadores de número $N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{antipar}}$ y $N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{par}}$

$$H = \frac{1}{2}\int \omega_{\mathbf{k}}\,(N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{antipar}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{par}}) = \frac{1}{2}\int \omega_{\mathbf{k}}\, N_{\mathbf{k}}^{\mathrm{tot}}\, \mathrm{d}^3k\,. \tag{1.106}$$

Evidentemente, los estados de partículas y antipartículas son eigenestados del Hamiltoniano ya que éste conmuta con el operador de número de partículas y antipartículas.

SECCIÓN 1.4

## Ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo

La generalización de la ecuación de Dirac a espacio-tiempo curvo no es tan directa como en el caso de la ecuación de KG. Se debe construir una conexión que nos permita derivar de manera covariante a los espinores de Dirac, respetando la covariancia de Lorentz al pasar a una región local del espacio-tiempo. Esto se logra escogiendo una base ortonormal local $\{e^a\}$ que nos ayuda a relacionar cantidades tensoriales entre dos bases diferentes. El desarrollo del formalismo de bases ortonormales se presenta en el apéndice B. La generalización de la ecuación de Dirac para espacio-tiempo curvo es

$$(\tilde{\gamma}^\mu(x)\,\nabla_\mu + m)\Psi(x) = 0\,, \tag{1.107}$$

donde $\nabla_\mu$ debe ser una adecuada conexión que generaliza la conexión de Levi-Civita; $\tilde{\gamma}^\mu(x)$ son las matrices de Dirac que depende de las coordenadas del espacio-tiempo, la cuáles están relacionadas con las matrices de Dirac del espacio-tiempo de Minkowski $\gamma^a$ por medio de las componentes de la tétrada $e^\mu{}_a$

$$\tilde{\gamma}^\mu(x) = e^\mu{}_a(x)\,\gamma^a\,. \tag{1.108}$$

$\tilde{\gamma}^\mu(x)$ cumplen con la regla de anticonmutación

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{I}_4 \tag{1.109}$$

Para los cálculos de esta sección, se está siguiendo la convención de signos de [11]. Otra excelente referencia para ver la generalización de la ecuación de Dirac a espacio-tiempo curvo es [9].

Consideremos el caso general de un campo $\Psi(x)$ que puede ser escalar, tensorial o espinorial, que bajo transformaciones locales de Lorentz transforme como

$$\Psi'(x) = S(\Lambda)\,\Psi(x)\,, \tag{1.110}$$

donde $S(\Lambda)$ es alguna representación del grupo de Lorentz. Por ejemplo, si $\Psi(x)$ es un campo vectorial, entonces $S(\Lambda)$ es simplemente $\Lambda$, la matriz de Lorentz. Para el espinor de Dirac, la regla de transformación es (A.4), con $S(\Lambda)$ dada por (A.20) o (A.21). Sea

$$\nabla_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu - \Gamma_\mu)\,\Psi(x) \tag{1.111}$$

tal que transforme bajo transformaciones locales como

$$\nabla'_\mu \Psi'(x) = S(\Lambda)\, \nabla_\mu \Psi(x)\,. \tag{1.112}$$

Esto implica que $\Gamma_\mu$ transforme de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(\partial_\mu - \Gamma'_\mu)\, \Psi'(x) &= S(\Lambda)(\partial_\mu - \Gamma_\mu)\Psi(x)\\ (\partial_\mu - \Gamma'_\mu)\, S(\Lambda)\, \Psi(x) &= S(\Lambda)(\partial_\mu - \Gamma_\mu)\Psi(x)\,.\end{aligned}$$

Simplificando se llega a la regla de transformación de $\Gamma_\mu$ ante tranformaciones locales de Lorentz dada una representación $S(\Lambda)$

$$\Gamma'_\mu = S(\Lambda)\, \Gamma_\mu\, S^{-1}(\Lambda) - \partial_\mu (S(\Lambda))\, S^{-1}(\Lambda)\,. \tag{1.113}$$

Para nuestros propósitos, basta considerar una tranformación local infinitesimal de Lorentz como

$$\Lambda^a{}_b = \delta^a{}_b + \delta\varepsilon^a{}_b\,,$$

tal que la matriz $S(\Lambda)$ sea de la forma

$$S(\mathbb{I}_4 + \delta\varepsilon) = \mathbb{I}_4 + \delta\varepsilon^{ab}\, \Sigma_{ab}\,, \tag{1.114}$$

donde $\Sigma_{ab}$ es una matriz antisimétrica independiente de las coordenadas y $\delta\varepsilon^a{}_b$ es la matriz $\delta\omega^a{}_b$ que dé lugar a la covariancia de Lorentz de la ecuación de Dirac, solo que se ha cambiado la notación por conveniencia. Para una tranformación local infinitesimal de Lorentz dada la representación $S(\Lambda)$, (1.113) resulta a primer orden en $\delta\varepsilon_{ab}$:

$$\begin{aligned}\Gamma'_\mu &= \left(\mathbb{I}_4 + \delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab}\right)\Gamma_\mu \left(\mathbb{I}_4 - \delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab}\right) - \partial_\mu \left[\mathbb{I}_4 + \delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab}\right]\left(\mathbb{I}_4 - \delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab}\right)\\ &= \Gamma_\mu + \delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab}\Gamma_\mu - \delta\varepsilon^{ab}\Gamma_\mu\Sigma_{ab} - \Sigma_{ab}\,\partial_\mu(\delta\varepsilon^{ab})\\ \Gamma'_\mu &= \Gamma_\mu + \delta\varepsilon^{ab}\,[\Sigma_{ab}\,,\Gamma_\mu] - \partial_\mu(\delta\varepsilon^{ab}\Sigma_{ab})\,.\end{aligned} \tag{1.115}$$

Supongamos que $\Gamma_\mu$ se puede escribir como

$$\Gamma_\mu = \omega_\mu{}^{ab}\, \Sigma_{ab}\,, \tag{1.116}$$

tal que los coeficientes $\omega_\mu{}^{ab}$ sean antisimétricos en los índices latinos $a\,,b$. Dichos coeficientes se conocen como *coeficientes de rotación de Ricci* (Ver apéndice C).

Escribir de esta manera $\Gamma_\mu$ es tomar como base las matrices $\Sigma_{ab}$. Entonces $\omega_\mu{}^{ab}$ son las componentes de $\Gamma_\mu$ sobre la base de $\Sigma_{ab}$. Al introducir este resultado en (1.115), los coeficientes de rotación de Ricci $\omega_\mu{}^{ab}$ se transforman de la siguiente manera:

$$\omega_\mu{}'^{ab} = \omega_\mu{}^{ab} + \delta\varepsilon^{ca}\,\omega_\mu{}^b{}_c - \delta\varepsilon^{cb}\,\omega_\mu{}^a{}_c - \partial_\mu\,\delta\varepsilon^{ab}\,. \tag{1.117}$$

$\Gamma_\mu$ es una generalización de la conexión de Levi-Civitta $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ que se usa comunmente en relatividad general y geometría diferencial; recibe el nombre de *conexión de espín*. Todos los cálculos relacionados con la conexión de espín están detallados en el apéndice C.

Finalmente se puede escribir la ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo. La representación espinorial del grupo de Lorentz permite hacer la identificación

$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{4}\,\gamma_a\,\gamma_b = -\frac{i}{4}\,\sigma_{ab}\,, \tag{1.118}$$

donde $\sigma_{ab}$ es el tensor de espín definido en (A.19). La derivada covariante sobre espinores de Dirac, de acuerdo con (1.116) y (1.118)

$$\nabla_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu - \Gamma_\mu)\Psi(x) = (\partial_\mu - \omega_{\mu\,ab}\Sigma^{ab}) = \left(\partial_\mu - \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\,ab}\,\gamma^a\,\gamma^b\right)\Psi(x)\,. \tag{1.119}$$

La ecuación de Dirac para espacio-tiempo curvo se contruye con los resultados (1.108), (1.119)

$$\left[e^\mu{}_a\,\gamma^a\left(\partial_\mu - \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\,cd}\,\gamma^c\,\gamma^d\right) + m\right]\Psi(x) = 0\,. \tag{1.120}$$

Los factores $e^\mu{}_a\,\Gamma_\mu$ se conocen como *coeficientes de Fock-Ivanenko*

$$\Gamma_a = e^\mu{}_a\,\Gamma_\mu = \frac{1}{4}\,e^\mu{}_a\,\omega_{\mu\,cd}\,\gamma^c\,\gamma^d\,. \tag{1.121}$$

Para ver más detalles sobre la conexión de espín se recomienda ver [30, 35]. Por lo tanto, para construir la ecuación de Dirac para un espacio-tiempo curvo se debe construir la base de tétradas $e^a{}_\mu$ y los coeficientes de Fock-Ivanenko. La ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo se puede reescribir en una forma más compacta

$$[\tilde{\gamma}^\mu(x)(\partial_\mu - \Gamma_\mu) + m]\Psi(x) = 0\,, \tag{1.122}$$

donde $\tilde{\gamma}^\mu = e^\mu{}_a\,\gamma^a$ son las matrices de Dirac en espacio-tiempo curvo. En el capítulo tres se construye la ecuación de Dirac y se dan algunas soluciones exactas para algunos modelos cosmológicos.

SUBSECCIÓN 1.4

## Transformaciones de Bogolubov para el campo de Dirac

Para terminar este capítulo, se expondrá el método de las transformaciones de Bogolubov que relacionan los diferentes estados de vacío de dos observadores arbitrarios para el caso del campo de Dirac. Este método es completamente idéntico al que se emplea en el caso de campo escalar, aunque los coeficientes de Bogolubov son ligeramente diferentes del caso de campo escalar.

El producto interior en el espacio solución de la ecuación de Dirac se debe generalizar a espacio-tiempo curvo, respetando la invariancia de forma de la expresión, ya que el producto interior del espacio solución de (1.122) debe ser invariante ante cambios generales de coordeandas. Siguiendo a Parker [28], el producto escalar invariante en el espacio solución de la ecuación de Dirac se define como

$$\langle \phi \,, \psi \rangle = -\int_{\Sigma} \sqrt{-g}\, \bar{\phi}\, \tilde{\gamma}^0(x)\, \psi\, \mathrm{d}^3 x\,, \tag{1.123}$$

donde $\tilde{\gamma}^0(x) = e^0{}_a \gamma^a$ y $g$ es el determinante de la metrica $g_{\mu\nu}$. La integración se realiza en una hipersuperficie de Cauchy $\Sigma$ a tiempo constante $x^0 = \text{cte}$. Con (1.123), los modos solución de la ecuación (1.122) son ortonormales

$$\big\langle u_i(k)\,, u_j(k) \big\rangle = \big\langle v_i(k)\,, v_j(k) \big\rangle = \delta_{ij}\,, \quad \big\langle u_i(k)\,, v_j(k) \big\rangle = 0\,. \tag{1.124}$$

Supongamos que existen dos obervadores, cada uno con su respectivo conjunto de modos solución a la ecuación de Dirac (1.122). El observador $\mathscr{F}$ mide los estados de partícula-antipartícula $U_i$, $V_i$ mientras que el observador $\mathscr{G}$ mide los estados $U_i'$, $V_i'$. Como se trata de modos solución base de la ecuación de Dirac, el operador de campo de Dirac $\Psi$ se puede escribir como una combinación lineal de los estados del observador $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$:

$$\Psi(x) = \sum_i [a_i U_i(x) + b_i^{\dagger} V_i(x)]\,, \quad \Psi(x) = \sum_i [c_i U_i'(x) + d_i^{\dagger} V_i']\,, \tag{1.125}$$

donde el índice $i$ incluye los índices de espín y del índice continuo del vector de onda $\mathbf{k}$. El observador $\mathscr{F}$ mide un vacío $\left|0_f\right\rangle$ definido como

$$a_i \left|0_f\right\rangle = 0\,, \quad b_i \left|0_f\right\rangle = 0\,, \tag{1.126}$$

mientras que el observador $\mathscr{G}$ asocia el estado de vacío $\left|0_g\right\rangle$ definido como

$$c_i \left|0_g\right\rangle = 0\,, \quad d_i \left|0_g\right\rangle = 0\,. \tag{1.127}$$

Los modos base $\{U_i\,, V_i\}$, $\{U_i'\,, V_i'\}$ se relacionan por las transformaciones de Bogolubov

$$U_i' = \sum_j (\alpha_{ij} U_j + \beta_{ij} V_j)\,, \quad V_i' = \sum_j (\beta_{ij}^* U_j + \alpha_{ij}^* V_j)\,, \tag{1.128}$$

donde $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$ son los coeficientes de Bogolubov. Por la ortonormalidad de los modos base $\{U_i, V_i\}$, $\{U_i', V_i'\}$ respecto al producto interior (1.123), los coeficientes de Bogolubov están determinados por le producto interior de los modos

$$\alpha_{ij} = \left\langle U_j', U_i' \right\rangle\,, \quad \beta_{ij} = \left\langle V_j, U_i' \right\rangle\,. \tag{1.129}$$

Nótese que hay una diferencia en un signo respecto al caso del campo de KG del coeficiente $\beta_{ij}$, que se manifiesta en la condición de ortnogonalidad de los coeficientes

$$\sum_k (\alpha_{ik}^* \alpha_{jk} + \beta_{ik}^* \beta_{jk}) = \delta_{ij}\,, \quad \sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} + \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0\,. \tag{1.130}$$

Al calcular el número promedio de partículas $\left\langle N_{(g)\,i} \right\rangle = n_i$ que observa el observador $\mathscr{G}$ usando el estado de vacío $\left|0_f\right\rangle$ del observador $\mathscr{F}$ se llega al resultado de que no es cero, es decir, hubo producción de partículas por efectos del campo gravitacional, al igual que en el caso del campo de KG. Si $N_{(f)\,i}$ es el operador de número que define el observador $\mathscr{F}$, en su estado de vacío $\left|0_f\right\rangle$ observa que no existen partículas

$$\left\langle N_{(f)\,i} \right\rangle_{0_f} = \left\langle 0_f \right| a_i^\dagger a_i + b_i^\dagger b_i \left|0_f\right\rangle = 0\,. \tag{1.131}$$

Lo mismo ocurre para el observador $\mathscr{G}$

$$\left\langle N_{(g)\,i} \right\rangle_{0_g} = \left\langle 0_g \right| c_i^\dagger c_i + d_i^\dagger d_i \left|0_g\right\rangle = 0\,. \tag{1.132}$$

Sin embargo, al calular el valor esperado del número de partículas del observador $\mathscr{G}$ en el estado $\left|0_f\right\rangle$ no es cero

$$\left\langle 0_f \right| c_i^\dagger c_i + d_i^\dagger d_i \left|0_f\right\rangle = 2 \sum_k |\beta_{ik}|^2\,. \tag{1.133}$$

Este es el número total de partículas y antipartículas de $\mathscr{G}$ usando el vacío $\left|0_f\right\rangle$. Es el doble del resultado de KG debido a que en el caso de Dirac se incluyen los operadores de creación y aniquilación de anitpartículas; si sólo tratamos el caso de producción de partículas, el resultado coincide con el caso de KG.

# CAPÍTULO 2

# Modelos cosmológicos

La cosmología estándar es el modelo teórico-observacional del Big Bang que concuerda con las observaciones de la física de la radiación cósmica de fondo, de la estructura a gran escala, de la expansión acelerada del universo así como la composición de materia y energía del mismo. A pesar de que este modelo no puede explicar el origen del universo, nos da una explicación de la evolución e historia del universo desde que éste tenía una edad de aproximadamente trescientos ochenta mil años, la época del desacoplo de la radiación con la materia. La cosmología estándar está basada en el Principio Cosmológico y en las ecuaciones de Einstein de la relatividad general. El principio Cosmológico establece que el universo, a escalas cósmicas del orden de $100\,\mathrm{Mpc}$, el universo presenta homogeneidad e isotropía espacial. La homogeneidad significa que cada punto del espacio es estadísticamente equivalente, es decir, que no existe lugar privilegiado en el universo. La isotropía quiere decir que cualquier dirección en la que se realicen observaciones, el universo es estadísticamente equivalente, es decir, que se miden las mismas magnitudes termodinámicas (presión, temperatura, densidad de materia, entre otras). Existe fuerte evidencia observacional de la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala que está basada en las observaciones de la temperatura de la radiación cósmica de fondo y en la distribución de cúmulos y súper cúmulos de galaxias. Aceptar que somos obervadores típicos, que no ocupamos ningún lugar privilegiado en el cosmos se combina con la isotropía que observamos, que implica estrictamente homogeneidad, se convierte en un principio muy poderoso.

Sin embargo, y aunque existe fuerte evidencia observacional sobre el principio cosmológico, hay modelos cosmológicos alternativos a la cosmología estándar como los modelos cosmológicos homogéneos no isótropos de Bianchi. En estos universos no se asume que el universo sea igual en todas las direcciones en cualquier punto; sólo se asume que cualquier punto es equivalente, es decir que el universo no es isótropo, pero sí homogéneo. ¿Qué sentido tiene estudiar universos que no son isótropos, si el nuestro lo es? Principalmente porque no se sabe si siempre ha sido así y siempre lo será. Estudiar una clase de universos más generales que el nuestro quizás permita entender la estructura del universo en sus orígenes, ya que es muy probable que tuviese un comportamiento altamente caótico y todo lo contrario a isótropo. Uno podría pensar que las geometrías o estructuras homogéneas de tres dimensiones posibles son pocas y sencillas, pero por su complejidad fue en primer lugar necesaria una clasificación que fue llevada a cabo por Luigi Bianchi [3].

SECCIÓN 2.1

## Universos de Friedmann

Los modelos de Friedmann son modelos cosmológicos que describen un universo isótropo, homogéneo y en expansión; cumplen el Principio Cosmológico y la dinámica del universo está gobernada por las ecuaciones de Einstein. La métrica de Friedmann en coordenadas comóviles se escribe como

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right), \tag{2.1}$$

donde $(r,\theta,\phi)$ son coordenadas comóviles y $t$ es el tiempo cósmico, el tiempo que mide un observador en reposo respecto a la expansión del universo, mientras que $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$ es el elemento diferencial de ángulo sólido, $\kappa$ es una medida de la curvatura de las hipersuperficies isótropas y puede tomar tres valores: $\kappa = -1, 0, 1$, describiendo un universo espacialmente abierto, plano o cerrado, respectivamente[1]. $a(t)$ es el factor de escala que es el que describe la evolución del universo a lo largo del tiempo cósmico $t$. Es común describir la evolución del universo en términos de otro parámetro, el *tiempo conforme* $\eta$ que no es más que la distancia comóvil que ha viajado la luz desde el Big-Bang hasta nuestros días. Este parámetro se define como

$$\eta = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}. \tag{2.2}$$

La métrica de Friedmann en términos de $\eta$ resulta

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(-\mathrm{d}\eta^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right). \tag{2.3}$$

De esta expresión para la métrica se puede ver por qué se llama tiempo conforme, porque la métrica de Friedmann es conformalmente plana cuando $\kappa = 0$ con una función conforme $a(\eta) > 0$. El caso más simple es el universo de Friedmann plano $\kappa = 0$ en coordenadas comóviles cartesianas

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{2.4}$$

El factor de escala $a(t)$ depende de la materia considerada en el universo, que va desde materia bariónica, radiación, materia y energía oscura, campos escalares o materia exótica, y queda determinado por las ecuaciones de Friedmann y la conservación del tensor energía-momento.

[1]Para ver más detalles sobre la cosmología estándar [ver 31]

SECCIÓN 2.2
## Universo Bianchi I con simetría rotacional local

Además de los modelos cosmológicos de Friedmann, existe una gran variedad de modelos que tratan de describir de la mejor manera posible el univero. Sin embargo, el modelo de Friedmann es el más reconocido debido a que todas las observaciones que se han realizado concuerdan con la teoría basada en la cosmología estándar. Los llamados *modelos de Bianchi* son modelos cosmológicos que a diferencia de los modelos de Friedmann, no cumplen el principio cosmológico, es decir, describen universos *homogéneos anisótropos* en expansión. Los modelos de Bianchi son una clasificación algebráica de todas las álgebras de Lie reales en tres dimensiones sobre una variedad 3-dimensional semi-Riemanniana. La clasificación consiste en ver las constantes de estructura del álgebra de Lie de los vectores de Killing del grupo de isometrías de cada modelo. En total son 11 modelos, 9 de ellos contienen un álgebra de Lie simple y dos de ellos tienen un álgebra de Lie de tamaño continuo. En cosmología, la clasificación de Bianchi es usada para describir universos espacialmente homogéneos, donde la métrica correspondiente satisface las ecuaciones de Einstein para algún modelo de materia particular. Para ver más detalles de modelos cosmológicos homogéneos se recomienda el excelente libro [36].

De los 9 modelos con álgebra de Lie simple, el tipo I es el más sencillo; la métrica del modelo tiene la forma

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\,\mathrm{d}x^2 + b(t)^2\,\mathrm{d}y^2 + c(t)^2\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{2.5}$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son los distintos factores de escala en las direcciones espaciales $x$, $y$ y $z$, que son funciones exclusivamente del tiempo cósmico $t$. El modelo de Bianchi tipo I se caracteriza por tener tres vectores de Killing linealmente independientes, los cuáles son los generadores de las traslaciones espaciales

$$\xi_{(1)} = \partial_x\,, \quad \xi_{(2)} = \partial_y\,, \quad \xi_{(3)} = \partial_z\,, \tag{2.6}$$

que cumplen el álgebra de Lie

$$[\xi_{(i)}\,, \xi_{(j)}] = 0\,. \tag{2.7}$$

Las constantes de estructura asociadas son cero. Se han encontrado numerosas soluciones a las ecuaciones de Einstein para los modelos de Bianchi, entre las más reconocidas se encuentra [19], [21], [22] o las soluciones presentadas por [13].

SUBSECCIÓN 2.2
### Modelo con campo escalar

Los modelos cosmológicos estudiados por [43] son modelos de Bianchi I y la característica que poseen es que tiene dos direcciones equivalentes en cada punto del espaio-tiempo; dos direcciones transversales en común y una dirección longitudinal diferente; además, no tienen rotación. La métrica para un modelo espacialmete plano con estas características es de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + c(t)^2\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{2.8}$$

donde $a(t)$ y $c(t)$ son factores de escala que sólo dependen del tiempo cósmico $t$, los cuáles miden el ritmo de expansión o contracción del modelo en la dirección transversal $x, y$ y dirección longitudinal $z$. Estos modelos homogénenos se conocen en la literatura como *modelos de Bianchi con simetría rotacional local* (*LRS symmetry*), cuyas siglas en inglés significan *locally rotationally symmetric*, han sido objeto de estudio en numerosos artículos que van desde la formación de elementos primordiales [43], modelos cosmológicos homogéneos con fluido perfecto y energía oscura [19] hasta soluciones exactas a la ecuación de KG [33]. El modelo cosmológico de este trabajo asume que contiene un campo escalar $\psi$ libre sin masa que cumple la ecuación de Klein-Gordon (1.43) para $m = 0$. El campo escalar es la fuente de campo gravitacional; la dinámica del modelos cosmológico queda determinado por los factores de escala de (2.8) que se determinan por la solución a las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon en unidades relativistas $c = 1$, $8\pi G = 1$

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}\,, \tag{2.9}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento del campo escalar y $T$ su traza. El tensor energía-momento para un campo escalar libre sin masa viene dado por, según (1.50)

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \psi \nabla_\alpha \psi\,. \tag{2.10}$$

Como la derivada covariante sobre campos escalares se reduce a derivadas ordinarias, el tensor $T_{\mu\nu}$ se reescribe como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \psi \partial_\alpha \psi, . \tag{2.11}$$

La traza de este tensor es simplemente

$$T = T_\mu{}^\mu = -\partial_\mu \psi\, \partial^\mu \psi\,. \tag{2.12}$$

Por lo que las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon se escriben como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi\, \partial_\nu \psi\,, \tag{2.13}$$

junto con la ecuación de KG que cumple el campo escalar

$$(-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu]\psi = 0\,. \tag{2.14}$$

Para la métrica (2.8), las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$R_{tt} \;=\; -\left(\frac{\ddot{c}}{c}+2\,\frac{\ddot{a}}{a}\right) \tag{2.15}$$

$$R_{xx} \;=\; R_{yy} = \dot{a}^2 + \frac{a\,\dot{a}\,\dot{c}}{c} + a\,\ddot{a} \tag{2.16}$$

$$R_{zz} \;=\; c\left(\ddot{c}+2\,\frac{\dot{a}\,\dot{c}}{a}\right), \tag{2.17}$$

donde el punto indica derivación respecto al tiempo cósmico $t$. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein resultan:

$$-\left(\frac{\ddot{c}}{c}+2\,\frac{\ddot{a}}{a}\right) = (\partial_t\psi)^2 \tag{2.18}$$

$$\dot{a}^2 + \frac{a\,\dot{a}\,\dot{c}}{c} + a\,\ddot{a} = (\partial_x\psi)^2 = 8\pi\,(\partial_y\psi)^2 \tag{2.19}$$

$$c\left(\ddot{c}+2\,\frac{\dot{a}\,\dot{c}}{a}\right) = (\partial_z\psi)^2\,. \tag{2.20}$$

Como los factores de escala son funciones exclusivamente del tiempo cósmico $t$, el miembro izquierdo de cada ecuación define una ecuación diferencial ordinaria, esto implica que el campo escalar sólo puede ser función del tiempo $t$. Así, las derivadas parciales respecto a $x$, $y$ y $z$ del campo escalar son cero, por lo que las ecuaciones de Einstein se simplifican

$$-\left(\frac{\ddot{c}}{c}+2\,\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \dot{\psi}^2 \tag{2.21}$$

$$\dot{a}^2 + \frac{a\,\dot{a}\,\dot{c}}{c} + a\,\ddot{a} = 0 \tag{2.22}$$

$$c\left(\ddot{c}+2\,\frac{\dot{a}\,\dot{c}}{a}\right) = 0\,. \tag{2.23}$$

El campo escalar $\psi$ se obiene de la ecuación de Klein-Gordon; como sólo depende de $t$, la ecuación resulta

$$-(c\,a^2)^{-1}\,\partial_t\,[(c\,a^2)\,\dot{\psi}] = 0\,, \tag{2.24}$$

SUBSECCIÓN 2.2

## Solución a las ecuaciones de campo

La ecuación de Klein-Gordon (2.24) acepta una primera integral de movimiento

$$(c\,a^2)\,\dot{\psi} = \text{cte} = \kappa\,, \tag{2.25}$$

lo que permite resolver las ecuaciones de Einstein. Sustituyendo (2.25) en (2.21) resulta

$$-\left(\frac{\ddot{c}}{c} + 2\,\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{\kappa}{c^2\,a^4}\,, \tag{2.26}$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.23) se pueden integrar, lo que nos da una relación entre los factores de escala $a(t)$ y $c(t)$. Por ejemplo, (2.22) es equivalente a

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = 0\,, \tag{2.27}$$

que se obtiene después de dividir por $a\,\dot{a}$ toda la ecuación. Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log a + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log c + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log \dot{a} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(a\,\dot{a}\,c) &= 0 \\
\therefore \quad a\,\dot{a}\,c = \text{cte} &= A\,. 
\end{aligned} \tag{2.28}$$

La ecuación (2.23) es equivalente a

$$\frac{\ddot{c}}{\dot{c}} + 2\,\frac{\dot{a}}{a} = 0\,, \tag{2.29}$$

que integrando resulta

$$\dot{c}\,a^2 = \text{cte} = B\,. \tag{2.30}$$

De (2.28) y (2.30) se elimina $c(t)$ y se sustituye en (2.26) para encontrar una ecuación para $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + r\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0\,, \tag{2.31}$$

donde $\dfrac{\kappa}{A^2} - \dfrac{B}{A} = r$ es una constante. Una primera integración de esta ecuación se puede obtener si se integra respecto a $a$

$$\ddot{a} = \dot{a}\,\frac{\mathrm{d}\dot{a}}{\mathrm{d}a}\,. \tag{2.32}$$

La ecuación (2.31) resulta

$$\frac{\mathrm{d}\dot{a}}{\mathrm{d}a} + r\,\frac{\dot{a}}{a} = 0\,. \tag{2.33}$$

Integrando se obtiene

$$\dot{a} = a^{-r} + A\,, \tag{2.34}$$

donde $A$ es una constante de integración. Volviendo a integrar, ahora respecto al tiempo cósmico $t$ se encuentra $a = a(t)$:

$$a(t) = (Bt + C)^{1/r+1}\,, \tag{2.35}$$

donde $B, C$ son constantes de integración. Si impone la condición inicial $a(0) = 0$, el comportamiento del factor de escala $a(t)$ es

$$a(t) \sim t^{1/(r+1)} = t^q\,, \tag{2.36}$$

donde $q = (r+1)^{-1}$ es otra constante. El factor de escala $c(t)$ se obtiene de (2.28) o (2.30)

$$\begin{aligned} a\,\dot{a}\,c = q t^q t^{q-1} c = q t^{2q-1} c = \mathrm{cte} \\ \therefore \quad c(t) \sim t^{1-2q}\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por lo tanto, el espacio-tiempo que genera un campo escalar libre sin masa es

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2q}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + t^{2(1-2q)}\,\mathrm{d}z^2\,. \tag{2.38}$$

Este universo es interesante por diversas razones, una de ellas es que para ciertos valores de $q$ se obtienen modelos cosmológicos interesantes. Algunos ejemplos se enlistan a continuación

$$q = 0\,, \quad \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + t^2\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{2.39}$$

$$q = 1/3\,, \quad \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2/3}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\,, \tag{2.40}$$

$$q = 1/5\,, \quad \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2/5}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + t^{6/5}\,\mathrm{d}z^2\,. \tag{2.41}$$

El modelo presenta una singularidad en $t = 0$; esto se puede ver del escalar de curvatura $R$

$$R = \frac{2q\,(3q-2)}{t^2}\,. \tag{2.42}$$

Salvo los casos $q = 0$, $q = 2/3$, que son espacio plano, para cualquier valor de $q$ presenta una singularidad a $t = 0$. Estos modelos son tipo Kasner en el sentido que la suma de los exponentes es igual a uno pero la suma de los cuadrados no es igual a uno. El comportamiento cualitativo de la expansión de este universo depende del valor de $q$ de la siguiente manera: para $q > 1/2$ el universo se expande desde una singularidad tipo *cigarro*; para $q = 1/2$ la expansión es transversal desde una barrera inicial; para $0 < q < 1/2$ la singularidad es como un punto. El caso $q = 0$ es un caso particular de la solución de Kasner [22]

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2p_1}\,\mathrm{d}x^2 + t^{2p_2}\,\mathrm{d}y^2 + t^{2p_3}\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{2.43}$$

donde se debe cumplir $\sum_i p_i = \sum_i p_i^2 = 1$. La métrica (2.38) con $q = 0$ se obtiene haciendo $p_1 = p_2 = 0$ y $p_3 = 1$ en la solución de Kasner. El caso $q = 1/3$ es un universo de Friedmann espacialmente plano con un fluido rígido (*stiff* en inglés) que cumple la ecuación de estado barotrópica $\rho = p$, donde $\rho$ es la densidad de materia y $p$ la presión del fluido. Cabe mencionar que la métrica (2.38) es un grupo uniparamétrico de soluciones a las ecuaciones de Einstein con un fluido perfecto rígido, donde el parámetro $q$ está relacionado con la densidad de energía del fluido por

$$\rho = p = \frac{q\,(2-3q)}{t^2}\,. \tag{2.44}$$

La métrica (2.38) fue encontrada por primera vez por Jacobs en [19] con un modelo de fluido rígido perfecto con ecuación de estado barotrópica $\rho = p$ y posteriormente por Vajk y Eltgroth [44] bajo consideraciones similares. Madsen [23] demostró que un campo escalar libre en relatividad general tiene un tensor energía-momento equivalente a un fluido rígido y Pimentel [32] lo demostró para las teorías tenso-escalares que ya tienen incorporado un campo escalar.

Finalmente, el comportamiento del campo escalar $\psi$ en el espacio-tiempo (2.38) se obtiene de la ecuación de Klein-Gordon (2.24)

$$\dot{\psi} = \frac{\kappa}{c\,a^2} = \frac{\kappa}{t^{1-2q}\,t^{2q}} = \frac{\kappa}{t} \tag{2.45}$$

$$\therefore \quad \psi(t) = \kappa \log t + \text{cte}\,. \tag{2.46}$$

La constante $\kappa$ queda en términos de la constante $q$ debido a la definición de la constante $r$, y que ésta está relacionada con $q$. Nótese que las constantes $A$ y $B$ se obtienen directamente de (2.28) y (2.30).

Para la relación (2.28) se obtiene

$$a\,\dot{a}\,c = q\,t^q\,t^{q-1}\,t^{1-2q} = A = \text{cte}$$

$$\therefore \quad A = q\,. \tag{2.47}$$

Para (2.30) se tiene algo similar:

$$\dot{c}\,a^2 = (1-2q)\,t^{-2q}\,t^{2q} = B = \text{cte}$$

$$\therefore \quad B = 1-2q\,. \tag{2.48}$$

Por lo tanto, la constante $\dfrac{\kappa}{A^2} - \dfrac{B}{A} = r$ en términos de $q$ resulta:

$$\frac{\kappa}{A^2} - \frac{B}{A} = \frac{\kappa}{q^2} - \frac{1-2q}{q} = r\,.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1 + \dfrac{\kappa}{q^2} - \dfrac{1-2q}{q}} = q\,.$$

Simplificando, se tiene

$$\kappa = q(2-3q)\,. \tag{2.49}$$

Para cualquier valor de $q$, se tiene el valor de la constante $\kappa$, y por tanto, la solución a la ecuación de Klein-Gordon se escribe como

$$\psi(t) = q(2-3q)\,\log t + \text{cte}\,. \tag{2.50}$$

El comportamiento del campo escalar es monótonamente creciente en función del tiempo, y en la singularidad diverge, al igual que la curvatura.

# CAPÍTULO 3

# Campos escalares y espinoriales en modelos cosmológicos

La dinámica de campos escalares y espinoriales en espacios-tiempo curvos está descrita por las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, respectivamente, estudiadas en el primer capítulo. En este capítulo se deducen las ecuaciones correspondientes a campos escalares y espinoriales en modelos cosmológicos isótropos y no isótropos, como el modelo de Bianchi I estudiado en el capítulo anterior. Se analizan casos de interés físico y se encuentran soluciones exactas a las ecuaciones de KG y de Dirac. Los campos estudiados en este capítulo son campos de prueba, no autoconsistentes; es decir, no son fuente de campo gravitacional pero sí se ven afectados por la expansión del universo, que es causada por otras fuentes de materia, como materia bariónica, materia oscura fría, radiación u otros campos cuánticos. En este sentido, las soluciones presentadas son un caso aproximado debido a que no se considera otra fuente de materia-energía que no sean los campos escalares que cumplen la ecuación de KG y campos espinoriales que cumplen la ecuación de Dirac.

SECCIÓN 3.1

## Ecuación de Klein-Gordon para el universo de Friedmann

Buscar solución a la ecuación de KG para la métrica (2.3) puede ser muy complicado, de hecho sólo existe solución analítica para casos muy particulares del factor de escala. El caso más sencillo es cuando $\kappa = 0$ y se usan coordenadas espaciales comóviles $(x, y, z)$, es decir, la métrica (2.4). Si se redefine el factor de escala como $C(\eta) = a^2(\eta)$, el determinante de (2.4) y el escalar de curvatura son respectivamente

$$g = -C^4(\eta)\,, \quad R(\eta) = 3C^{-1}(\eta)\left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{1}{2}\frac{\dot{C}^2}{C^2}\right)\,, \tag{3.1}$$

donde el punto indica derivación respecto al tiempo conforme. El escalar de curvatura se introduce al final de todo el cálculo para simplificar. Para la ecuación de KG se pueden separar variables si se notan las simetrías de (2.4). Este espacio-tiempo posee 6 vectores de Killing, tres asociados a traslaciones espaciales y tres asociados a rotaciones. Debido a la invariancia traslacional, el campo se puede escribir como

$$\Phi(x) = C^{-1/2}(\eta)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, u_{\mathbf{k}}(\eta)\,. \tag{3.2}$$

El factor $C^{-1/2}(\eta)$ se introduce para eliminar la primera derivada de $\eta$, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ refleja la invariancia traslacional de (2.4) y $u_{\mathbf{k}}(\eta)$ es una función a determinar que eventualmente describirá el comportamiento del campo respecto a la expansión del universo. Es decir, $u_{\mathbf{k}}$ definirá los modos base de la solución, y si es posible de alguna manera, definirá los modos de frecuencia positiva y negativa. Introduciendo todo lo necesario en la ecuación de KG se otiene la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(C^{-1/2}u_{\mathbf{k}})\right] + [k^2 C(\eta) + C^2(\eta)(m^2 + \xi R(\eta))]C^{-1/2}u_{\mathbf{k}}(\eta) = 0\,. \tag{3.3}$$

Simplificando

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}\eta^2} + \left[k^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{C}}{C}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\ddot{C}}{C} + C(\eta)(m^2 + \xi R(\eta))\right] u_{\mathbf{k}}(\eta) = 0\,. \tag{3.4}$$

Introduciendo el escalar de curvatura dado en (3.1) se obtiene finalmente la ecuación para el modo $u_{\mathbf{k}}(\eta)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}\eta^2} + \left[k^2 + C(\eta)\left(m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R(\eta)\right)\right] u_{\mathbf{k}}(\eta) = 0\,, \tag{3.5}$$

donde $R(\eta)$ está dado en (3.1). Esta es la ecuación diferencial que se debe resolver dado un factor de escala $C(\eta)$ para determinar la dinámica de un campo escalar que se propaga en la métrica (2.4).

SUBSECCIÓN 3.1

## Soluciones exactas para dos modelos diferentes

Hay casos muy específicos de la forma de $C(\eta)$ para los que se puede resolver (3.5) de manera exacta. En este trabajo se analizan los siguientes casos

1. Universo de Sitter con ley de expansión $a(t) = e^{H_0 t}$
2. Universo con ley de expansión $a(t) = t^s$ con $s$ una constante

Para el universo de Sitter, el tiempo conforme está dado por

$$\eta H_0 = -e^{-H_0 t}\,, \tag{3.6}$$

donde $H_0$ es la constante de Hubble. El factor de escala $a(\eta)$ resulta

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_0\,\eta}\,, \tag{3.7}$$

por lo que la métrica de Friedmann se escribe como

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{H_0{}^2\,\eta^2}(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\,. \tag{3.8}$$

El escalar de curvatura $R = R(\eta)$ resulta constante en el tiempo conforme $\eta$

$$R = 12H_0\,. \tag{3.9}$$

Por consiguiente la ecuación de KG para el universo de Sitter resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}\eta^2} + \left[k^2 + \frac{1}{(H_0\,\eta)^2}\left(m^2 + 12H_0\,(\xi - 1/6)\right)\right] u_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{3.10}$$

Esta ecuación se puede llevar a la ecuación general de Bessel

$$x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + (1-2\alpha)\,x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + [\beta\,\gamma^2\,x^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2\,\gamma^2]\,y(x) = 0\,, \tag{3.11}$$

que tiene como solución

$$y(x) = A\,x^{\alpha}\,H_\nu^{(1)}(\beta\,x^\gamma) + B\,x^\alpha\,H_\nu^{(2)}(\beta\,x^\gamma)\,, \tag{3.12}$$

donde $H_\nu^{(1,2)}$ son funciones de Hankel. Haciendo $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, la solución a (3.10) resulta

$$u_{\mathbf{k}}(\eta) = \sqrt{\eta}\,Z_\nu(k\,\eta)\,, \quad \nu = \frac{\sqrt{H_0^2 - 4[m^2 + 12H_0\,(\xi - 1/6)]}}{2H_0} \tag{3.13}$$

donde $Z_\nu(k\,\eta)$ es una función de Bessel arbitraria que satisface (3.10), en este caso, $Z_\nu(k\,\eta)$ son funciones de Hankel $H_\nu{}^{(12)}$.

Para un universo que cumpla la ley de expansión $a(t) \sim t^s$, el tiempo conforme está dado por

$$\eta = (1-s)^{-1}\,t^{-s+1}\,, \quad s \neq 1\,. \tag{3.14}$$

El caso $s=1$ corresponde al Univero de Milne con factor de escala $a(t)=t$ y tiempo conforme $\eta =, \log t$; este caso queda fuera para el análisis del factor de escala en términos del tiempo conforme $\eta$; el factor de escala $a(\eta)$ y la métrica (2.4) se escribe como

$$a(\eta) \sim \eta^{r}\,, \quad r = \frac{s}{1-s}\,, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \eta^{2r}\,(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\,. \tag{3.16}$$

El escalar de curvatura para esta métrica es

$$R(\eta) = 6r(1-r)\,\eta^{-2(1+r)}\,. \tag{3.17}$$

El escalar de curvatura sólo es cero si $r=1$, que implica a $s=1/2$ con ley de expansión $a(t)=\sqrt{t}$, lo cual corresponde a un universo dominado por radiación. La ecuación de KG para un universo con ley de expansión $a(t)=t^s$ en términos del tiempo conforme es

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + \left[k^2 + \eta^{2r}\,(m^2 + 6r(1-r)\,\eta^{-2(1+r)}(\xi - 1/6))\right] u_k(\eta) = 0 \tag{3.18}$$

Para un universo dominado por radiación, $s=1/2$, para materia oscura fría $s=2/3$ y para un fluido rígido, $s=1/3$, que corresponden a los valores $r=1$, $r=2$, $r=1/2$ respectivamente. La ecuación de KG para cada caso es, respectivamente

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + (k^2 + (m\,\eta)^2)u_k = 0\,, \quad s=1/2\,, \quad r=1\,, \tag{3.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + (k^2 + m^2\,\eta^4 - 12(\xi - 1/6)\,\eta^{-2})u_k(\eta) = 0\,, \quad s=2/3\,, \quad r=2\,, \tag{3.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 + m^2\,\eta + \frac{3}{2}\,\eta^{-2}\,(\xi - 1/6)\right) u_k(\eta) = 0\,, \quad s=1/3\,, \quad r=1/2\,. \tag{3.21}$$

Nótese que para el caso $r=1$ el factor $\xi - 1/6$ desaparece.

1. Caso $r=1$, universo dominado por radiación. La ecuación (3.19) acepta solución exacta con el cambio de variable $z = im\,\eta^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}\eta} &= 2\sqrt{imz}\,\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}z} & (3.22)\\ \frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} &= 4imz^{1/2}\left(\frac{1}{2}z^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} + z^{1/2}\,\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}t^2}\right)\,. & (3.23) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.19) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2u_k}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{2z}\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}z}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k^2}{4imz}\right)u_k(z)=0\,. \tag{3.24}$$

Si se hace el cambio de variable $u_k(z)=z^{-1/4}f_k(z)$ se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2f_k}{\mathrm{d}z^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{16z^2}+\frac{k^2}{4imz}\right)f_k(z)=0\,. \tag{3.25}$$

Esta ecuación es la ecuación de Whittaker cuya solución son funciones de Whittaker [25]

$$f_k(z)=AM_{\kappa\mu}(z)+BW_{\kappa\mu}(z)\,, \tag{3.26}$$

con $\mu=1/4$, $\kappa=-ik^2/4m$. Por lo tanto, la solución de (3.19) es

$$u_k(\eta)=\eta^{-1/2}\left[AM_{\kappa\mu}(im\eta^2)+BW_{\kappa\mu}(im\eta^2)\right]. \tag{3.27}$$

El comportamiento asintótico de las funciones de Whittaker es [25]

Para $z\to 0$

$$M_{\kappa\mu}(z)z^{1/2+\mu}\,,\quad W_{\kappa\mu}(z)\sim\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}z^{1/2-\mu}\,. \tag{3.28}$$

Para $z\to\infty$

$$M_{\kappa\mu}(z)\sim\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}e^{z/2}z^{-\kappa}\,,\quad W_{\kappa\mu}(z)\sim e^{-z/2}z^{\kappa}\,. \tag{3.29}$$

2. Caso $r=2$, universo dominado por materia oscura fría. La ecuación (3.20) sólo tiene soluciones exactas en el caso de $m=0$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_k}{\mathrm{d}\eta^2}+(k^2-12(\xi-1/6)\,\eta^{-2})u_k(\eta)=0\,. \tag{3.30}$$

La solución de esta ecuación son funciones de Bessel

$$u_k(\eta) = \sqrt{\eta}\,(A H_\nu^{(1)}(k\eta) + B H_\nu^{(2)}(k\eta))\,, \tag{3.31}$$

donde $\nu = \pm\sqrt{9-48\xi}/2$. Recordando que si $\xi = 1/6$ y $m = 0$, se tiene el caso de invariancia conforme, para este caso, la ecuación (3.20) se reduce a la ecuación del oscilador armónico y su solución son funciones periódicas del tiempo conforme, igual que el caso en espacio-tiempo plano. La situación es que no hay creación de partículas ya que se tiene un campo escalar conformalmente invariante que se propaga en un espacio-tiempo que es conformalmente plano [27].

3. Caso $r = 1/2$, universo con fluido rígido. La ecuación (3.21) sólo tiene solución exacta si $m = 0$ o $\xi = 1/6$. Si $m = 0$, la ecuación es

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 + \frac{3}{2}\eta^{-2}(\xi - 1/6)\right)u_k(\eta) = 0\,. \tag{3.32}$$

La solución son funciones de Bessel

$$u_k(\eta) = \sqrt{\eta}\,(A H_\nu^{(1)}(k\eta) + B H_\nu^{(2)}(k\eta))\,, \quad \nu = \sqrt{2-6\xi}/2\,. \tag{3.33}$$

Para el caso $\xi = 1/6$, $m \neq 0$, la ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}\eta^2} + (k^2 + m^2\eta)u_k(\eta) = 0\,. \tag{3.34}$$

Si se hace el cambio de variable $z = -m^{-4/3}(m^2\eta + k^2)$, la ecuación se reduce a la ecuación de Airy

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}z^2} - z u_k(z) = 0\,, \tag{3.35}$$

que tiene por solución funciones de Airy

$$u_k(\eta) = A\,\mathrm{Ai}[-m^{-4/3}(m^2\eta + k^2)] + B\,\mathrm{Bi}[-m^{-4/3}(m^2\eta + k^2)]\,. \tag{3.36}$$

El comportamiento asintótico de estas funciones en el límite $z \to \infty$ es

$$\mathrm{Ai}(\zeta) \sim \frac{z^{-1/4}e^{-\zeta}}{2\sqrt{\pi}}\,, \quad \mathrm{Bi}(\zeta) \sim \frac{z^{1/4}e^{\zeta}}{\sqrt{\pi}}\,, \tag{3.37}$$

donde $\zeta = \dfrac{2}{3}z^{3/2}$. Las fórmulas asintóticas son válidas si $|\arg z| \leq \pi - \delta$ donde $\delta$ denota un valor pequeño constante.

SECCIÓN 3.2

## Ecuación de Klein-Gordon para el universo de Bianchi I

Al igual que en el caso de Friedman, buscar soluciones exactas a la ecuación de KG para modelos de Bianchi I puede resultar muy complicado, por lo que es natural recurrir a métodos perturbativos [49] para resolver la ecuación de KG de manera aproximada. Sin embargo, es posible resolver la ecuación de KG de manera exacta para la solución (2.38) para ciertos casos de interés de físico (ciertos valores de $q$). Primero, se deduce la ecuación de KG para (2.8) y después se hace el caso particular de la solución (2.38).

Como la métrica es diagonal el determinante de la misma es

$$g = g(t) = -(a^2 c)^2 . \tag{3.38}$$

La ecuación de Klein-Gordon se escribe, para esta métrica, de la siguiente manera:

$$(a^2 c)^{-1} \partial_\mu (a^2 c g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - (m^2 + \xi R)\Phi = 0$$
$$(a^2 c)^{-1}[-\partial_t (a^2 c \partial_t \phi) + \partial_i (a^2 c g^{ij} \partial_j \phi)] - (m^2 + \xi R)\Phi = 0 ,$$

donde los índices $i$, $j$ son espaciales. Entonces, la ecuación resulta

$$-(a^2 c)^{-1}\partial_t (a^2 c \partial_t \phi) + \partial_i (g^{ij} \partial_j \phi) - (m^2 + \xi R)\Phi = 0$$
$$-(a^2 c)^{-1}\partial_t (a^2 c \partial_t \phi) + a^{-2} (\partial_{xx} + \partial_{yy})\phi + c^{-2} \partial_{zz}\phi - (m^2 + \xi R)\Phi = 0 , \tag{3.39}$$

donde se ha usado que $g^{xx} = g^{yy} = a^{-2}(t)$ y $g^{zz} = c^{-2}(t)$. La ecuación que se obtiene, (3.39), no depende de $(x,y,z)$ debido a la homogeinedad del espacio. Entonces es posible separar las variables $(t,x,y,z)$ proponiendo una solución de onda plana por una función que depende sólo del tiempo

$$\Phi(x) = (a^2 c)^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f_k(t) , \tag{3.40}$$

donde el factor $(a^2 c)^{-1/2}$ se introduce para eliminar la primera derivada de $t$, igual que para el caso de Friedmann. Sustituyendo en (3.39) se obtiene:

$$-(a^2 c)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( a^2 c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[ (a^2 c)^{-1/2} f_k(t) \right] \right) +$$
$$-(a^2 c)^{-1/2} \left[ a^{-2}({k_x}^2 + {k_y}^2) + c^{-2} {k_z}^2 + m^2 + \xi R \right] f_k(t) = 0 .$$

Desarrollando las derivadas que aparecen en la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2 c\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(a^2 c)^{-1/2} f_k(t)\right]\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{f_k(t)}{2}\,(a^2 c)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2 c) + (a^2 c)^{1/2}\,\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_k(t)}{4}\,(a^2 c)^{-3/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2 c)\right)^2 - \frac{1}{2}\,(a^2 c)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(a^2 c)\,\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t} + \\
&+ \frac{1}{2}\,(a^2 c)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(a^2 c)\,\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t} - \frac{f_k(t)}{2}\,(a^2 c)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,(a^2 c) + (a^2 c)^{1/2}\,\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} \\
&= (a^2 c)^{1/2}\,\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a^2 c)^{-3/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(a^2 c)\right)^2 - (a^2 c)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,(a^2 c)\right] f_k(t)\,.
\end{aligned}$$

Con la propuesta solución (3.40) se ha logrado eliminar la primera derivada de $f_k(t)$, por lo que la ecuación que se obtenga estará escrita en su forma canónica o forma de Liouville. Por consiguiente, la ecuación diferencial que se obtiene para $f_k(t)$ resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{4}\,(a^2 c)^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(a^2 c)\right)^2 - \frac{1}{2}\,(a^2 c)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,(a^2 c) + a^{-2}{k_\perp}^2 + c^{-2}{k_z}^2 + m^2 + \xi R\right] f_k(t)\,,$$

o bien

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \omega(t)\,f_k(t) = 0\,, \tag{3.41}$$

donde

$$\omega(t) = \frac{1}{4}\,(a^2 c)^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(a^2 c)\right)^2 - \frac{1}{2}\,(a^2 c)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,(a^2 c) + a^{-2}{k_\perp}^2 + c^{-2}{k_z}^2 + m^2 + \xi R\,,$$

con ${k_\perp}^2 = {k_x}^2 + {k_y}^2$. El escalar de curvatura se calcula hasta que se tenga una forma funcional de los factores de escala, esto para simplificar la notación. Nótese que tanto (3.5) como (3.41) tienen la forma de la ecuación del oscilador armónico con frecuencia que depende del tiempo $\eta$ o $t$, respectivamente. Sin embargo, buscar soluciones exactas a dicha ecuación resulta muy complicado, y en la mayoría de los casos, no habrá solución. Para el caso que nos interesa, que es la métrica (2.38), la ecuación (3.41) se simplifica considerablemente. Si

$$a(t) \sim t^q\,, \quad c(t) \sim t^{1-2q} \tag{3.42}$$

la ecuación a resolver en este caso es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + 2q\,\xi\,(3q-2)\right) + t^{-2q}\,{k_\perp}^2 + t^{4q-2}\,{k_z}^2 + m^2\right] f_k(t) = 0\,, \tag{3.43}$$

donde se ha usado la forma del escalar de curvatura $R$ dada en (2.42). El campo escalar para este caso es

$$\Phi(x) = t^{-1/2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, f_k(t)\,. \tag{3.44}$$

SUBSECCIÓN 3.2

## Soluciones exactas

Pimentel [33] encontró soluciones exactas a (3.43) para los valores $q = 0\,, q = 1/3\,, q = 1/2$ y $q = 1$ para $\xi$ arbitrario. En esta tesis se estudian los casos $q = 0$, $q = 1/5$ y $q = 1$. Los casos $q = 0$ y $q = 1$, aunque ya estén registrados en la literatura, es conveniente presentar las soluciones exactas ya que se utilizarán en el próximo capítulo para calcular el número promedio de partículas creadas; la solución al caso $q = 1/5$ es una nueva solución exacta a la ecuación de KG.

1. Caso $q = 0$. Este caso corresponde al universo de Kasner

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + t^2\mathrm{d}z^2\,, \tag{3.45}$$

con parámetros $p_1 = p_2 = 0$ y $p_3 = 1$. La ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + {k_z}^2\right) + {k_\perp}^2 + m^2\right] f_k(t) = 0\,. \tag{3.46}$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación general de Bessel (3.11) con $\alpha = 1/2$, $\beta = \sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}$ y $\gamma = 1$. Solución exacta

$$f_k(t) = \sqrt{t}\,[A_1\, H^{(1)}_{ik_z}(\sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\, t) + B_1\, H^{(2)}_{ik_z}(\sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\, t)]\,, \tag{3.47}$$

por lo que la solución a la ecuación de KG para este modelo se escribe como

$$\Phi(x) = e^{i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}}\,[A_1\, H^{(1)}_{ik_z}(\sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\, t) + B_1\, H^{(2)}_{ik_z}(\sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\, t)]\,. \tag{3.48}$$

2. Caso $q=1$. Este caso corresponde a un modelo de Bianchi I con métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + t^{-2}\,\mathrm{d}z^2 \tag{3.49}$$

La ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + 2\xi + {k_\perp}^2\right) + t^2\,{k_z}^2 + m^2\right] f_k(t) = 0\,. \tag{3.50}$$

Al hacer el cambio de variable $z = i\,k_z\,t^2$ la ecuación toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{2\,z}\,\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}z} + \left[\frac{1}{4\,{k_z}^2}\left(\frac{1}{4} + 2\xi + {k_\perp}^2\right) - \frac{1}{4} - \frac{im^2}{4\,k_z\,z}\right] f_k(z) = 0\,. \tag{3.51}$$

Si se define una nueva función $u_k(z) = z^{-1/4}\,f_k(z)$ la ecuación que se obtiene para $u_k(z)$ es la función de Whittaker

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}z^2} + + \left[\frac{1}{4\,{k_z}^2}(1 + 2\xi + {k_\perp}^2) - \frac{1}{4} - \frac{im^2}{4\,k_z\,z}\right] u_k(z) = 0\,. \tag{3.52}$$

La solución son funciones de Whittaker

$$u_k(z) = A_1\,M_{\kappa,\mu}(z) + B_1\,W_{\kappa,\mu}(z)\,, \tag{3.53}$$

donde

$$\kappa = -\frac{im^2}{4\,k_z}\,, \quad \mu = \frac{i}{2}\sqrt{{k_\perp}^2 + 2\xi}\,. \tag{3.54}$$

La función $f_k(t)$ resulta en

$$f_k(t) = t^{-1/2}[A_1\,M_{\kappa,\mu}(ik_z t^2) + B_1\,W_{\kappa,\mu}(ik_z t^2)]\,. \tag{3.55}$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación de KG para este modelo de Bianchi es

$$\Phi(x) = t^{-1}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,[A_1\,M_{\kappa,\mu}(ik_z t^2) + B_1\,W_{\kappa,\mu}(ik_z t^2)]\,. \tag{3.56}$$

3. Caso $q = 1/5$. La métrica correspondiente este modelo es

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^{2/5}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + t^{6/5}\,\mathrm{d}z^2\,. \tag{3.57}$$

La ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_k}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{14\xi}{25}\right) + \frac{{k_\perp}^2}{t^{2/5}} + \frac{{k_z}^2}{t^{6/5}} + m^2\right] f_k(t) = 0\,. \tag{3.58}$$

Esta ecuación se puede llevar a la forma de la ecuación de Whittaker con un cambio de variable y haciendo $m = 0$; para $m \neq 0$, la ecuación no tiene solución exacta. El cambio de variable que nos lleva a la ecuación de Whittaker es

$$z = \frac{5ik_\perp}{2}\,t^{4/5}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= 2ik_\perp\left(\frac{2z}{5ik_\perp}\right)^{-1/4}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} &= -4{k_\perp}^2\left(\frac{2}{5ik_\perp}\right)^{-1/2}\left(z^{-1/2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - \frac{z^{-3/2}}{4}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en (3.58) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - \frac{1}{4z}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{4{k_\perp}^2}\left[\left(\frac{5ik_\perp}{2z}\right)^2\left(\frac{1}{4} - \frac{14\xi}{25}\right) + {k_\perp}^2 + \frac{5i{k_z}^2 k_\perp}{2z}\right] f(z) = 0\,.$$

Si convertimos esta ecuación en su forma canónica (forma de Liouville) se tiene qué hacer la sustitución

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}z}{z}\right) u(z) = z^{1/8}\,u(z)\,, \tag{3.59}$$

lo cual implica la siguiente ecuación para $u(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{14\xi}{16}\right)-\frac{1}{4}-\frac{5ik_z{}^2}{8k_\perp}\frac{1}{z}\right]u(z)=0\,. \tag{3.60}$$

Se trata de la ecuación de Whittaker con parámetros

$$\kappa=-\frac{5ik_z{}^2}{8k_\perp}\,,\quad \mu=\frac{14\xi}{16}=\frac{7\xi}{8}\,,\quad z=\frac{5ik_\perp}{2\alpha}\,(t)^{4/5}\,. \tag{3.61}$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial para $u(z)$ es

$$u(z)=A_1\,M_{\kappa\mu}(z)+A_2\,W_{\kappa\mu}(z)\,, \tag{3.62}$$

donde $M_{\kappa\mu}(z)$, $W_{\kappa\mu}(z)$ son las funciones de Whittaker de primera y segunda especie, respectivamente, y $A_1$, $A_2$ son constantes de integración. Con (3.62) obtenemos la función $f_k(z)$

$$f_k(z)=z^{1/8}\left(A_1\,M_{\kappa\mu}(z)+A_2\,W_{\kappa\mu}(z)\right). \tag{3.63}$$

En terminos del tiempo cósmico la solución es

$$f_k(t)=t^{1/10}\left[A_1\,M_{\kappa\mu}\left(\frac{5ik_\perp}{2}\,t^{4/5}\right)+A_2\,W_{\kappa\mu}\left(\frac{5ik_\perp}{2}\,t^{4/5}\right)\right]. \tag{3.64}$$

Por consiguiente, la solución a la ecuación de KG para este modelo de Bianchi es

$$\Phi(x)=t^{-2/5}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left[A_1\,M_{\kappa\mu}\left(\frac{5ik_\perp}{2}\,t^{4/5}\right)+A_2\,W_{\kappa\mu}\left(\frac{5ik_\perp}{2}\,t^{4/5}\right)\right]. \tag{3.65}$$

SECCIÓN 3.3

## Ecuación de Dirac para el universo de Friedmann

La ecuación de Dirac se complica más que la ecuación de KG en modelos cosmológicos debido a que se trata de un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. En la siguiente sección se presenta un método general para separar variables de la ecuación de Dirac que servirá para buscar soluciones exactas para el modelo de Bianchi I; para el modelo de Friedmann espacialmente en coordenadas comóviles cartesianas no es necesario separar vairbales, como se verá a continuación.

Según lo expuesto en el capítulo 1, para deducir la ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo se debe calcular la conexion de espín $\Gamma_\mu$ que está asociada a una base de tétradas $\{e^a\}$. Para la métrica (2.4), a elección de la base de tétradas es directa ya que la métrica es diagonal; la tétrada se elige diagonal

$$e^0 = a(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,, \quad e^1 = a(\eta)\,\mathrm{d}x\,, \quad e^2 = a(\eta)\,\mathrm{d}y\,, \quad e^3 = a(\eta)\,\mathrm{d}z\,, \tag{3.66}$$

de tal manera que la métrica de Friedmann se escribe

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e^a{}_\mu\, e^b{}_\nu\,, \tag{3.67}$$

donde $\eta_{ab}$ es la métrica de Minkowski. Para obtener las componentes de la conexión de espín (C.7) se neeceistan las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel asociados a la métrica de Friedmann; éstos son

$$\Gamma^x{}_{\eta x} = \Gamma^y{}_{\eta y} = \Gamma^z{}_{\eta z} = \Gamma^\eta{}_{xx} = \Gamma^\eta{}_{yy} = \Gamma^\eta{}_{zz} = \Gamma^\eta{}_{\eta\eta} = \frac{\dot{a}}{a}\,, \tag{3.68}$$

donde $\dot{a}$ indica derivación respecto al tiempo conforme. Por medio de (C.7) se encuentran las componentes no nulas de los coeficientes de rotación de Ricci

$$\omega_{x10} = \omega_{y20} = \omega_{z30} = \frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{3.69}$$

Por lo tanto, las componentes de la conexión de espín son

$$\Gamma_0 = 0\,, \quad \Gamma_x = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\gamma^1\gamma^0\,, \quad \Gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\gamma^2\gamma^0\,, \quad \Gamma_z = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\gamma^3\gamma^0\,. \tag{3.70}$$

Las matrices de Dirac en espacio-tiempo curvo (1.108) quedan explícitamente determinadas por medio de

$$\tilde{\gamma}^\eta(x) = a^{-1}(\eta)\,\gamma^0\,, \quad \tilde{\gamma}^x(x) = a^{-1}(\eta)\,\gamma^1\,, \quad \tilde{\gamma}^y(x) = a^{-1}(\eta)\,\gamma^2 \quad \tilde{\gamma}^z(x) = a^{-1}(\eta)\,\gamma^3\,. \tag{3.71}$$

Con las conexiones de espín calculadas, la ecuación de Dirac para el modelo de Friedmann en consideración es

$$\left[\frac{1}{a}\gamma^0\left(\partial_\eta + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{1}{a}(\gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y + \gamma^3\partial_z) + m\right]\Psi(x) = 0\,. \tag{3.72}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en el tiempo conforme. Sea $\Psi(x) = a^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Psi_0(\eta)$, donde $\Psi_0(\eta)$ es un espinor que sólo depende del tiempo conforme; el factor $a^{-3/2}$ se introduce para cancelar la contribución de la conexión de espín. Sustituyendo, se obtiene la ecuación

$$\left(\gamma^0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} + i\gamma^j k_j + ma(\eta)\right)\Psi_0(\eta) = 0\,. \tag{3.73}$$

Se escoge la representación de Jauch-Rohrlich para las matrices de Dirac

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

y se descompone el espinor $\Psi_0(\eta)$ en dos biespinores

$$\Psi_0(\eta) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

donde $\psi_1$ y $\psi_2$ son biespinores

$$\psi_1(\eta) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_2(\eta) = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

De esta manera se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales para $\psi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} + ima\right)\psi_1 &= \mathbf{k}\cdot\vec{\sigma}\,\psi_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} - ima\right)\psi_2 &= -\mathbf{k}\cdot\vec{\sigma}\,\psi_1\,, \end{aligned} \tag{3.77}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli. Despejando $\psi_2$ de la primera ecuación, usando la propiedad $(\mathbf{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = k^2$, sustituyendo en la segunda se encuentra una ecuación para $\psi_1$; se hace el mismo procedimiento para encontrar una ecuación para $\psi_2$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(\mp im\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta} + m^2 a^2 + k^2\right)\psi_1(\eta) = 0\,. \tag{3.78}$$

El problema de encontrar una solución a la ecuación de Dirac en el universo de Friedmann (2.4) se reduce a encontrar soluciones a (3.78) para un factor de escala $a(\eta)$ dado. El signo $-$ en el primer término corresponde a la primer componente de $\psi_1$, mientras que el signo $+$ a la segunda componente de $\psi_1$. Como en el caso de Klein-Gordon, se analizan los casos

1. Universo de Sitter $a(\eta) = -\dfrac{1}{H_0\,\eta}$

2. Universo con ley de expansión $a(\eta) = \eta^r$.

Barut y Duru [2] obtienen soluciones exactas de la ecuación de Dirac para un modelo de Friedmann espacialmente plano en coordenadas cartesianas en términos del tiempo cósmico $t$ para los casos del universo de Sitter, para un universo dominado por radiación y para el modelo con ley de expansión $a(t) = t$.

Para el universo de Sitter, la ecuación (3.78) resulta

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(\frac{m^2}{H_0^2} \mp \frac{im}{H_0}\right)\frac{1}{\eta^2} + k^2\right]\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0\,. \tag{3.79}$$

La solución a esta ecuación son nuevamente funciones de Bessel.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\eta) &= \sqrt{\eta}\,(A H_\nu^{(1)}(k\eta) + B H_\nu^{(2)}(k\eta))\,, \quad \nu = \frac{1}{2} + \frac{im}{H_0}\\ \varphi_2(\eta) &= \sqrt{\eta}\,(A H_{\nu-1}^{(1)}(k\eta) + B H_{\nu-1}^{(2)}(k\eta))\end{aligned} \tag{3.80}$$

Para un universo con ley de expansión $a(\eta) = \eta^r$, la ecuación (3.78) resulta

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \mp im\,r\,\eta^{r-1} + m^2\,\eta^{2r} + k^2\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0 \tag{3.81}$$

La ecuación correspondiente para los casos $r = 1/2$, $r = 1$ y $r = 2$, los mismos que se analizaron en KG son, respectivamente

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2} + \pm\frac{im}{2\,\eta^{1/2}} + m^2\,\eta + k^2\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0\,, \tag{3.82}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \pm im + k^2 + m^2\,\eta^2\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0\,, \tag{3.83}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}\eta^2} + \pm 2im\,\eta + m^2\,\eta^4 + k^2\right)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0\,. \tag{3.84}$$

Desafortunadamente, solo el caso $r = 1$ tiene solución exacta, que corresponde a un universo dominado por radiación. La ecuación para este caso es idéntica a (3.19) por lo que la solución es

$$\begin{aligned}\varphi_1(\eta) &= \eta^{-1/2}\,(A M_{\kappa,\mu}(im\eta^2) + B W_{\kappa,\mu}(im\eta^2))\\ \varphi_2(\eta) &= \eta^{-1/2}\,(A M_{\kappa-1/2,\mu}(im\eta^2) + B W_{\kappa-1/2,\mu}(im\eta^2))\end{aligned} \tag{3.85}$$

donde $\kappa = 1/4 - ik^2/4m$, $\mu = 1/4$.

SECCIÓN 3.4

## Ecuación de Dirac para el universo de Bianchi I

Para la métrica (2.8), la elección de la base de la tétrada también es trivial de elegir, ya que la métrica es diagonal, por lo que escoge diagonal igual que el caso de Friedmann.

$$e^0 = \mathrm{d}t\,, \quad e^1 = a(t)\,\mathrm{d}x\,, \quad e^2 = a(t)\,\mathrm{d}y\,, \quad e^3 = c(t)\,\mathrm{d}z\,. \tag{3.86}$$

Los símbolos de Christoffel correspondientes son

$$\Gamma^x{}_{tx} = \Gamma^y{}_{ty} = \frac{\dot{a}}{a}\,, \quad \Gamma^z{}_{tz} = \frac{\dot{c}}{c}\,, \quad \Gamma^t{}_{xx} = \Gamma^t{}_{yy} = a(t)\,\dot{a}(t)\,, \quad \Gamma^t{}_{zz} = c(t)\,\dot{c}(t)\,. \tag{3.87}$$

Por medio de (C.7) se obtienen las componentes no nulas de los coeficientes de rotación de Ricci

$$\omega_{x10} = \omega_{y20} = \dot{a}(t)\,, \quad \omega_{z30} = \dot{c}(t)\,. \tag{3.88}$$

Por lo tanto las componentes de la conexiones de espín $\Gamma_\mu$ no nulas son

$$\Gamma_t = 0\,, \quad \Gamma_x = \frac{1}{2}\dot{a}(t)\,\gamma^1\gamma^0\,, \quad \Gamma_y = \frac{1}{2}\dot{a}(t)\,\gamma^2\gamma^0\,, \quad \Gamma_z = \frac{1}{2}\dot{c}(t)\,\gamma^3\gamma^0\,. \tag{3.89}$$

Por otro lado, las matrices de Dirac en espacio-tiempo curvo son

$$\tilde{\gamma}^t(x) = \gamma^0\,, \quad \tilde{\gamma}^x(x) = a^{-1}(x)\gamma^1\,, \quad \tilde{\gamma}^y(x) = a^{-1}(x)\gamma^2\,, \quad \tilde{\gamma}^z(x) = c^{-1}(x)\gamma^3\,. \tag{3.90}$$

Se tiene todo lo necesario para construir la ecuación de Dirac para el modelo de Bianchi I con simetría rotacional local; la ecuación a resolver es

$$\left[\gamma^0\left(\partial_t + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2}\frac{\dot{c}}{c}\right) + a^{-1}\left(\gamma^1\,\partial_x + \gamma^2\,\partial_y\right) + c^{-1}\,\gamma^3\,\partial_z + m\right]\Psi(x) = 0\,. \tag{3.91}$$

Si se propone $\Psi(x) = (a^2\,c)^{-1/2}\,\Psi_0(x)$, las contribuciones de las conexiones de espín se cancelan y se obtiene la ecuación

$$\left[\gamma^0\,a\,\partial_t + \gamma^1\,\partial_x + \gamma^2\,\partial_y + a\,c^{-1}\,\gamma^3\,\partial_z + a\,m\right]\Psi_0(x) = 0 \tag{3.92}$$

Nótese que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, sin embargo el hecho de que se tengan dos direcciones de propagación iguales y una diferente hace que al desacoplar la ecuaciones sea muy complejo de hacer. Existe un método general para separar variables en la ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo desarrollado por Shishkin y Villalba en [40, 42] y en [41] encuentran nuevas soluciones a la ecuación de Dirac en diferentes coordenadas. Básicamente el método consiste en escribir la ecuación de Dirac en términos de la suma dos operadores diferenciales de primer orden $K_i$, $K_j$ que satisfagan las relaciones

$$\{H\}\Psi_0(t) = \{H\}\Gamma\Gamma^{-1}\Psi_0(t) = 0 \Rightarrow (K_i + K_j)\Phi(x) = 0\,, \quad [K_i\,,K_j] = 0\,, \tag{3.93}$$

donde $\Phi(x) = \Gamma^{-1}\Psi(x)$ es un espinor auxiliar y $\Gamma$ es una matriz de separación no singular que se puede escribir como productos de matrices de Dirac cuya elección depende del conjunto de variables a separar, con el requisito que dicha elección cumpla (3.93). La ecuación matricial para $\Gamma$ se obtiene del conmutador de los operadores $K_i$. Shishkin propone dos maneras de separar variables en la ecuación de Dirac:

1. Separando coordenadas de manera sucesiva $\{x^i,x^j,x^m,x^n\} \to x^i/\{x^j,x^m,x^n\} \to x^j/\{x^m,x^n\} \to x^m/x^n$, donde / indica que una coordenada fue separada del resto.

   Bajo este esquema, los operadores $K$ que se eligen según la forma de la ecuación de Dirac, dependen de la variable que se quiere separar del resto. Por ejemplo

   $$K_i = K_i(x^i)\,, \quad K_{jmn} = K_{jmn}(x^j,x^m,x^n)\,, \tag{3.94}$$

   tal que

   $$[K_i\,,K_{jmn}] = 0\,, \quad (K_i + K_{jmn})\Phi(x) = 0\,. \tag{3.95}$$

   Las posibilidades de la forma de $\Gamma$ son

   $$\Gamma = \gamma^j\,, \quad \Gamma = \gamma^j\gamma^m\gamma^n\,, \tag{3.96}$$

   donde $\gamma$ son matrices de Dirac.

2. Separando por pares de coordenadas $\{x^i,x^j,x^m,x^n\} \to \{x^i,x^j\}/\{x^m,x^n\}$. Bajo este esquema, los operadores $K$ que se eligen según la forma de la ecuación de Dirac, dependen de la variable que se quiere separar del resto. Por ejemplo

   $$K_{ij} = K_{ij}(x^i,x^j)\,, \quad K_{mn} = K_{mn}(x^m,x^n)\,, \tag{3.97}$$

   tal que

$$[K_{ij}, K_{mn}] = 0\,, \quad (K_{ij} + K_{mn})\Phi(x) = 0\,. \tag{3.98}$$

Las posibilidades de la forma de $\Gamma$ son

$$\Gamma = \gamma^{i}\gamma^{j}\,, \quad \Gamma = \gamma^{m}\gamma^{n} \tag{3.99}$$

donde $\gamma$ son matrices de Dirac. Cabe mencionar que las posibilidades de escoger la matriz de separación $\Gamma$ son válidas para el caso $m \neq 0$ y $m = 0$.

Para la ecuación (3.92) conviene separar $(z,t)/(x,y)$. Los operadores $K$ para esta ecuación son

$$K_1 = a(t)[\gamma^0\partial_t + c^{-1}\gamma^3\partial_z + m]\gamma^3\gamma^0\,, \quad K_2 = (\gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y)\gamma^3\gamma^0\,, \tag{3.100}$$

donde se ha elegido $\Gamma = \gamma^3\gamma^0$. La ecuación de Dirac (3.92) se recupera si

$$(K_1 + K_2)\Theta(t) = 0\,, \quad \Theta = \gamma^3\gamma^0\Psi_0(t)\,, \tag{3.101}$$

donde $\Theta = \Theta(t)$ es un espinor auxiliar que tiene la estructura

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}\,, \quad \Theta_1 = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\,, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix}\xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}\,. \tag{3.102}$$

Como el modelo de Bianchi I es homogéneo, se puede proponer como solución

$$\Theta(x) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Theta_0(t)\,, \tag{3.103}$$

donde $\Theta_0$ es un espinor que sólo depende del tiempo. Como las variables quedan separadas de acuerdo con (3.101), entonces

$$K_1\Theta_0 = -K_2\Theta_0 = -k\Theta_0\,, \tag{3.104}$$

donde $k$ es una constante de separación. La constante $k$ se obtiene de la ecuación

$$K_2\Theta_0 = i(\gamma^1 k_x + \gamma^2 k_y)\gamma^3\gamma^0\Theta_0 = k\Theta_0\,. \tag{3.105}$$

Conviene usar la siguiente representación de las matrices de Dirac [39]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & -\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = -\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

La ecuación (3.105) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (k_x + i k_y)\Theta_1 &= k\sigma^2\Theta_2 \\ (k_x - i k_y)\sigma^2\Theta_2 &= k\Theta_1 , \end{aligned} \tag{3.107}$$

lo que implica que $k = \sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2} = k_\perp$, y a su vez

$$\Theta_2 = \frac{k_x + ik_y}{k_\perp}\sigma^2\Theta_1 . \tag{3.108}$$

Por tanto el espinor auxiliar $\Theta_0$ tiene la siguiente estructura

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \dfrac{k_x + i k_y}{k_\perp}\Theta_1 \end{pmatrix} . \tag{3.109}$$

Para determinar $\Theta_0$ se debe resolver la ecuación

$$(\gamma^3\partial_t + i c^{-1} k_z \gamma^0 + m\gamma^3\gamma^0 + a^{-1}k_\perp)\Theta_0 = 0 \tag{3.110}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + i k_z c^{-1}\right)\Theta_1 &= \sigma^1 (m - i k_\perp a^{-1})\Theta_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + i k_z c^{-1}\right)\Theta_1 &= \sigma^1 (m - i k_\perp a^{-1})\Theta_2 . \end{aligned} \tag{3.111}$$

Desacoplando el sistema, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\Theta_1}{\mathrm{d}t^2} & -i k_\perp a^{-2}\dot{a}(m - i k_\perp a^{-1})^{-1}\frac{\mathrm{d}\Theta_1}{\mathrm{d}t} + \\ & +[m^2 + {k_\perp}^2 a^{-2} + k_z^2 c^{-2} - i k_z c^{-2}\dot{c} + k_z k_\perp c^{-1} a^{-2}\dot{a}(m - ik_\perp a^{-1})]\,\Theta_1 = 0 , \\ \frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}t^2} & +i k_\perp a^{-2}\dot{a}(m + i k_\perp a^{-1})^{-1}\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}t} + \\ & +[m^2 + {k_\perp}^2 a^{-2} + k_z^2 c^{-2} + i k_z c^{-2}\dot{c} + k_z k_\perp c^{-1} a^{-2}\dot{a}(m + i k_\perp a^{-1})]\,\Theta_2 = 0 \end{aligned}$$

Por la estructura del biespinor $\Theta_2$, ambas ecuaciones son equivalentes, consecuentemente el problema de resolver la ecuación de Dirac para el universo de Bianchi (2.38) se reduce a resolver las ecuaciones para las componentes $\xi_1$ y $\xi_2$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} \quad & \mp i k_\perp a^{-2}\dot{a}(m \mp i k_\perp a^{-1})^{-1}\frac{\mathrm{d}\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t} + \\ & + [m^2 + {k_\perp}^2 a^{-2} + k_z^2 c^{-2} \mp i k_z c^{-2\dot{c}} + k_z k_\perp c^{-1} a^{-2}\dot{a}(m \mp i k_\perp a^{-1})]\,\xi_{1,2} = 0\,,\end{aligned} \tag{3.112}$$

donde el signo de arriba corresponde a la ecuación de $\xi_1$, mientras que el signo de abajo corresponde a la ecuación para $\xi_2$. Al hacer $a(t) = t^q$ y $c(t) = t^{1-2q}$ la ecuación (3.112) resulta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} \quad & \mp \frac{i q k_\perp}{m \mp i k_\perp t^{-q}} t^{-(q+1)}\frac{\mathrm{d}\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t} + \\ & + \left[m^2 + k_\perp t^{-2q} \mp i k_z (1-2q) t^{2q-2} + k_z^2 t^{4q-2} + \frac{k_\perp k_z q}{m \mp i k_\perp t^{-q}} t^{q-2}\right]\xi_{1,2} = 0\,.\end{aligned} \tag{3.113}$$

Se pudo haber empezado directamente con la forma funcional de los factores de escala dados por la solución (2.38) y se hubiera obtenido (3.113) como es de esperarse, e incluso el cálculo habría sido más sencillo. Sin embargo, haber obtenido la ecuación de Dirac general para el modelo de Bianchi I con simetría LRS permite analizar soluciones exactas de la ecuación de Dirac (si es que las hay) en modelos cosmológicos homogéneos de Bianchi I con simetría LRS que sean solución a las ecuaciones de Einstein para diferentes modelos de materia, y no solo para el modelo de campo escalar analizado en el capítulo 2.

SUBSECCIÓN 3.4

## Solución exacta para $q = 0$

Ahora se procede a encontrar soluciones exactas a a ecuación (3.113). Lamentablemente, sólo existe una solución exacta y corresponde para $q = 0$. Este caso es el universo de Kasner (3.45) con parámetros $p_1 = p_2 = 0$ y $p_3 = 1$. La ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} + \left[m^2 + {k_\perp}^2 + k_z(k_z \mp i)t^{-2}\right]\xi_{1,2}(t) = 0\,. \tag{3.114}$$

La ecuación de Dirac en el espacio-tiempo plano tipo Kasner fue considerada por Shishkin y Andrushkevich [39]; se trata de un caso particular de la ecuación diferencial de Bessel (3.11). Si se asigna $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, $\beta = \sqrt{m^2 + {k_\perp}^2}$ y $\nu_\pm = 1/2 \pm i k_z$ en la ecuación de Bessel, se obiene (3.114), por lo que la solución a (3.114) es

$$\xi_{1,2}(t) = \sqrt{t}\left[A_{1,2}H_{\nu_\mp}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_{1,2}H_{\nu_\mp}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t)\right], \tag{3.115}$$

donde $A_{1,2}, B_{1,2}$ son constantes de integración y

$$\nu_+ = \frac{1}{2} + ik_z, \quad \nu_- = \frac{1}{2} - ik_z, \tag{3.116}$$

por lo que el biespinor auxiliar $\Theta_1$ se escribe como

$$\Theta_1(t) = \sqrt{t}\begin{pmatrix} A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \end{pmatrix}. \tag{3.117}$$

Este resultado implica que la forma de $\Theta_2$ sea de la forma

$$\Theta_2(t) = \frac{k_x + ik_y}{k_\perp}\sqrt{t}\begin{pmatrix} A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \end{pmatrix}. \tag{3.118}$$

Esto resuleve la ecuación de Dirac para el espinor $\Theta(x)$ y por lo tanto la ecuación de Dirac para el espinor de Dirac $\Psi(x)$. El espinor auxiliar resulta

$$\Theta(x) = \sqrt{t}\begin{pmatrix} A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ \dfrac{k_x+ik_y}{k_\perp}\left[(A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k^2}\,t) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k^2}\,t)\right] \\ \dfrac{k_x+ik_y}{k_\perp}\left[A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t)\right] \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{3.119}$$

Las constantes de integración $A_{1,2}, B_{1,2}$ se determinan imponiendo condiciones iniciales en la solución, sin embargo, no es necesario determinarlas para estudiar la producción de partículas como veremos en el capítulo siguiente. El caso de partículas no masivas se encuentra al hacer el caso límite $m \to 0$ en la solución (3.119). Esto simplemente modifica el argumento de las funciones de Hankel

$$\lim_{m\to 0}\Theta(x) = \sqrt{t}\begin{pmatrix} A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(k_\perp t) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(k_\perp t) \\ A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(k_\perp t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(k_\perp t) \\ \dfrac{k_x+ik_y}{k_\perp}\left[(A_1 H_{\nu_-}{}^{(1)}(kt) + B_1 H_{\nu_-}{}^{(2)}(kt)\right] \\ \dfrac{k_x+ik_y}{k_\perp}\left[A_2 H_{\nu_+}{}^{(1)}(k_\perp t) + B_2 H_{\nu_+}{}^{(2)}(k_\perp t)\right] \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{3.120}$$

Esta solución fue encontrada por Pimentel [34] por medio de la solución a la ecuación de Weyl en el modelo de Bianchi (2.38).

SUBSECCIÓN 3.4

## Soluciones exactas para $m = 0$

Existen diferentes maneras de abordar el problema de buscar soluciones exactas a la ecuación de Dirac para partículas de espín $1/2$ sin masa; este caso corresponde a neutrinos no masivos (se cree que el neutrino electrónico $\nu_e$ tiene una masa un millón de veces menor que la del electrón, por lo que en primera aproximación se puede considerar de masa nula). Para encontrar soluciones exactas a la ecuación de Dirac para neutrinos sin masa se puede proceder de tres formas distintas, todas equivalentes:

1. Encontrar soluciones exactas a la ecuación de Dirac para $m \neq 0$ y después hacer el límite de masa nula $m \to 0$ en las soluciones encontradas, como en el caso de $q = 0$. Lamentablemente, es la única solución encontrada que acepta la ecuación de Dirac para $m \neq 0$.

2. Resolver la ecuación de Weyl para espinores de dos componentes imponiendo la condición de quiralidad

$$(\mathbb{I}_4 + \gamma^5)\Psi = 0\,, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,. \tag{3.121}$$

   Este método fue empleado por Pimentel [34] para encontrar las soluciones exactas de la ecuación de Weyl para la métrica (2.38).

3. Imponer desde el principio $m = 0$ en la ecuación de Dirac y emplear el método de separación de variables.

En este trabajo se usará la tercer alternativa para emplear el método de separación de varibables. En la sección anterior se ha deducido la ecuación de Dirac para $m \neq 0$ para el universo de Bianchi I (2.38) empleando el método de separación de variables. Para el caso de neutrinos sin masa, basta hacer $m = 0$ en (3.113), lo que simplifica notablemente la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{t}\frac{\mathrm{d}\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t} + \left[{k_\perp}^2 t^{-2q} \mp i k_z (1-3q)\, t^{2q-2} + k_z^2 t^{4q-2}\right] \xi_{1,2}(t) = 0\,. \tag{3.122}$$

Se buscarán soluciones exactas para los casos $q = 1/2$ y $q = 1$; el caso $q = 0$ se obtuvo para $m \neq 0$ (por lo que también se tiene el caso $m = 0$). Estos casos fueron estudiados por Pimentel [34] además del caso $q = 1/3$. Salvo el caso $q = 1/3$, que corresponde a un universo de Friedmann conformalmente plano (no hay creación de partículas para $m = 0$) con fluido rígido, las soluciones exactas de los distintos casos nos ayudarán en el siguiente capítulo para estudiar la producción de neutrinos no masivos debido a la expansión del universo (2.38).

1. Caso $q = 1/2$. La ecuación a resolver es

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t} + \left[(k_\perp \pm i k_z/2)t^{-1} + k_z^2\right]\xi_{1,2}(t) = 0\,. \tag{3.123}$$

Al hacer el cambio de variable $\xi = t^{-1/4}U(t)$, la ecuación se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{3}{16}t^{-2} + ({k_\perp}^2 \pm i k_z/2) + k_z^2\right]U(t) = 0\,. \tag{3.124}$$

Con otro cambio de variable $z = 2k_z t$ se obtiene la ecuación de Whittaker

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{3}{16}\frac{1}{z^2} - \left(\frac{i{k_\perp}^2}{2k_z} \mp \frac{1}{4}\right)\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\right]U(z) = 0\,. \tag{3.125}$$

La solución son funciones de Whittaker

$$U(t) = A M_{\kappa\mu}(2k_z t) + B W_{\kappa\mu}(2k_z t)\,, \quad \kappa_\mp = \frac{i{k_\perp}^2}{2k_z} \mp \frac{1}{4}\,, \quad \mu = 3/2\,, \tag{3.126}$$

por lo que la solución a (3.123) es

$$\xi_{1,2}(t) = t^{-1/4}\left(A_\mp M_{\kappa_\mp,\mu}(2k_z t) + B_\mp W_{\kappa_\mp,\mu}(2k_z t)\right). \tag{3.127}$$

Con la solución (3.127), el espinor $\Theta_1(t)$ resulta

$$\Theta_1(t) = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = t^{-1/4}\begin{pmatrix}A_- M_{\kappa_-,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_-,\mu}(2k_z t)\\ A_+ M_{\kappa_+,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_+,\mu}(2k_z t)\,,\end{pmatrix} \tag{3.128}$$

donde $A_\pm, B_\pm$ son constantes de integración que se determinan por medio de las condiciones iniciales. El espinor $\Theta_2$ (3.108) será

$$\Theta_2(t) = \frac{k_x + i k_y}{k_\perp}t^{-1/4}\begin{pmatrix}A_- M_{\kappa_-,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_-,\mu}(2k_z t)\\ A_+ M_{\kappa_+,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_+,\mu}(2k_z t)\,,\end{pmatrix}. \tag{3.129}$$

por lo que la solución a la ecuación de Dirac para este modelo de Bianchi en términos del espinor auxiliar (3.103) es

$$\Theta(x) = t^{-1/4} \begin{pmatrix} A_- M_{\kappa_-,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_-,\mu}(2k_z t) \\ A_+ M_{\kappa_+,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_+,\mu}(2k_z t) \\ \dfrac{k_x + ik_y}{k_\perp} \left[A_- M_{\kappa_-,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_-,\mu}(2k_z t)\right] \\ \dfrac{k_x + ik_y}{k_\perp} \left[A_+ M_{\kappa_+,\mu}(2k_z t) + B_- W_{\kappa_+,\mu}(2k_z t)\right] \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \tag{3.130}$$

2. Caso $q = 1$. La ecuación de Dirac correspondiente a este caso es

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}\xi_{1,2}}{\mathrm{d}t} + \left[{k_\perp}^2 t^{-2} \pm 2ik_z + k_z^2 t^2\right] \xi_{1,2}(t) = 0 . \tag{3.131}$$

   Con la nueva función $\xi_{1,2}(t) = t^{-1/2}\,\Xi_{1,2}(t)$ la ecuación se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}^2\Xi_{1,2}}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + {k_\perp}^2\right) \pm 2ik_z + k_z^2 t^2\right] \Xi_{1,2}(t) = 0 . \tag{3.132}$$

   Al hacer el cambio de variable $z = ik_z t^2$ la ecuación toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\Xi_{1,2}}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{2z}\frac{\mathrm{d}\Xi_{1,2}}{\mathrm{d}z} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4z^2}\left(\frac{1}{4} + {k_\perp}^2\right) \pm \frac{1}{2z}\right] \Xi_{1,2}(z) = 0 . \tag{3.133}$$

   Finalmente si se hace $\Xi_{1,2}(z) = z^{-1/4}\,\Omega_{1,2}(z)$ se obtiene la ecuación de Whittaker

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega_{1,2}}{\mathrm{d}z^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4z^2}\left(1 + {k_\perp}^2\right) \pm \frac{1}{2z}\right] \Omega_{1,2}(z) = 0 . \tag{3.134}$$

   La solución son funciones de Whittaker

$$\Omega_{1,2}(z) = A_\pm M_{\kappa_\pm\mu}(z) + B_\pm W_{\kappa_\pm\mu}(z) , \quad \kappa_\pm = \pm\frac{1}{2} , \quad \mu = \pm\frac{ik_\perp}{2} . \tag{3.135}$$

   Por lo tanto la solución a (3.131) es

$$\xi_{1,2}(t) = t^{-1}\left[A_\pm M_{\pm 1/2, ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_\pm W_{\pm 1/2, ik_\perp/2}(ik_z t^2)\right] . \tag{3.136}$$

Con esta solución, se obtienen los biespinores $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$

$$\begin{aligned}
\Theta_1(t) &= t^{-1}\begin{pmatrix} A_+ M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_+ W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ A_- M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_- W_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \end{pmatrix}, \\
\Theta_2(t) &= \frac{k_x + ik_y}{k_\perp} t^{-1}\begin{pmatrix} A_+ M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_+ W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ A_- M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_- W_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2). \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.137}$$

La solución a la ecuación de Dirac para la métrica (3.49) en términos del espinor auxiliar $\Theta(x)$ es

$$\Theta(x) = t^{-1}\begin{pmatrix} A_+ M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_+ W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ A_- M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_- W_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ \frac{k_x + ik_y}{k_\perp}\left[A_+ M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_+ W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\right] \\ \frac{k_x + ik_y}{k_\perp}\left[A_- M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_- W_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\right] \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{3.138}$$

Las soluciones exactas (3.119), (3.127) y (3.138) las usaremos en el siguiente capítulo para estudiar los efectos cuánticos de la expansión del universo (2.38) sobre los campos de prueba; en específico, para determinar la producción de neutrinos no masivos en el universo temprano.

# CAPÍTULO 4

# Producción de partículas escalares y neutrinos no masivos en modelos de Bianchi I

En el capítulo anterior se encontraron soluciones exactas a las ecuaciones de KG y de Dirac en diversos modelos cosmológicos, concretamente en el modelo de Bianchi I estudiado en el capítulo dos y en modelos de Friedmann. Esas soluciones servirán para estudiar la producción de partículas escalares y de espín $1/2$ a causa de la expansión del universo en dichos modelos, una vez que se haya dado una definición del estado de vacío. Si es posible tener un criterio para definir el estado de vacío, es posible dar una interpretación de partículas a las soluciones encontradas en el capítulo anterior. Existen diversos métodos para identificar el vacío en teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo. Si un espacio-tiempo es asintóticamente estático en $\eta \to \pm\infty$, el espacio-tiempo es plano. En estas regiones se puede definir el vacío tal y como se hace en teoría cuántica de campos usual, definiendo los estados de frecuencia positiva y negativa como eigenestados de vectores de Killing tipo tiempo, por lo que no existe ambigüedad para definir dicho estado. Un ejemplo creación de partículas en modelos cosmológicos asintóticamente planos se encuentra en [24]. Sin embargo, modelos cosmológicos con esta característica son poco realistas por diversas razones, una de ellas es que no presentan Big Bang; son modelos en los que se *apaga*, en el pasado y futuro, el campo gravitacional de la expansión. Otro método es suponer que la expansión del universo es adiabática, lo suficientemente lenta para hacer un desarrollo adiabático a la ecuación de KG [4, 26]; el vacío definido por esta aproximación se conoce como *vacío adiabático*. El problema con este método es que sólo es aplicable a modelos cosmológicos que no tienen singularidad; la apoximación adiabática diverge para cualquier modelo con una singularidad física en $t = 0$. Un diferente enfoque al problema está basado en la idea de la diagonalización del Hamiltonino en una hipersuperficie de Cauchy a tiempo constante, definiendo a ese tiempo los estados de frecuencia positiva y negativa, en analogía con la definición en espacio-tiempo de Minkowski [17]. Chitre y Hartle [10] usan el método de integral de trayectoria para definir el estado de vacío en espacio-tiempo curvo y analizan la producción de partículas escalares para el modelo $a(t) \sim t$ analizado por Schrödinger [37]. Este método pone de manifiesto que la aproximación adiabática falla para modelos cosmológicos singulares. Existe otra alternativa para definir los estados de frecuencia positiva y negativa que consiste en usar el método semiclásico o WKB para la ecuación de Schrödinger; este método es el que se analiza a continuación.

SECCIÓN 4.1

# Aproximación WKB como método para definir los estados de energía positiva y negativa

En esta sección se describe de manera detallada la aproximación WKB para el campo de Klein-Gordon como para el campo de Dirac como una alternativa a los métodos tradicionales que se emplean para la identificación y definición de los estados de frecuencia positiva y negativa y del estado de vacío. El método para Dirac y Klein-Gordon es muy similiar, de hecho, todo se resume a resolver la ecuación de la aproximación semiclásica que corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi.

SUBSECCIÓN 4.1

## Método WKB para el campo de Klein-Gordon

La aproximación WKB de la teoría de KG consiste en escribir el campo escalar $\Phi(x)$ como

$$\Phi^{\mathrm{WKB}}(x) \approx a_0(x)\, e^{iS}\,, \tag{4.1}$$

donde $S(x)$ es una función escalar desconocida y $a_0$ otra función arbitraria que debe satisfacer la ecuación de KG en espacio-tiempo curvo. Sustituyendo (4.1) en (1.42) se obtiene la ecuación

$$\Box a_0 - \xi\, R a_0 + i\, g^{\mu\nu}\, \nabla_\mu (a_0^2\, \nabla_\nu S) - a_0(g^{\mu\nu} \nabla_\mu S \nabla_\nu S + m^2) = 0\,. \tag{4.2}$$

La aproximación WKB (4.1) es solución a la ecuación de KG si se satisfacen las *ecuaciones WKB* en la aproximación semiclásica $\Box a_0 << g^{\mu\nu} \nabla_\mu S \nabla_\nu S + m^2$

$$g^{\mu\nu}\, \nabla_\mu (a_0^2\, \nabla_\nu S) = 0\,, \quad g^{\mu\nu} \nabla_\mu S \nabla_\nu S + m^2 = 0\,, \tag{4.3}$$

siempre y cuando se satisfaga

$$\Box a_0 - \xi\, R a_0 = 0\,. \tag{4.4}$$

La ecuación que cumple la función $S$ es la ecuación covariante de Hamilton-Jacobi para la acción clásica $S$

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu S\, \partial_\nu S + m^2 = 0\,, \tag{4.5}$$

donde $\nabla_\mu S = \partial_\mu S$. Esto quiere decir que si se cumple el método semiclásico la función $S$ se puede aproximar mediante la acción clásica dada por la ecuación de Hamilton-Jacobi.

La ecuación que cumple la función $a_0$ no es necesario resolverla debido a que no interesa encontrar soluciones aproximadas a la ecuación de KG; el interés en este método de aproximación radica en la alternativa que nos da para definir los estados de frecuencia positiva y negativa, así que sólo es necesario resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Para dar una definición de partículas a la solución exacta de la ecuación de KG se debe usar un enfoque generalmente covariante, que es basado en soluciones de la ecuación WKB en el espacio-tiempo respectivo [1].

Si un sistema a un tiempo $t_0$ (o en un régimen asintótico) la aproximación WKB es completa respecto al producto interior en el espacio solución de la ecuación de KG y cumple la dinámica de la ecuación de campo, es decir, es solución a la ecuación de KG, describe partículas en el tiempo respectivo. Para definir los estados de partículas de frecuencias positivas y negativas, se procede de la siguiente manera

1. Se encuentra solución exacta a la ecuación de campo correspondiente para un modelo cosmológico particular

2. Se resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi para el modelo cosmológico respectivo

3. Se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones exactas de la ecuación de campo correspondiente y de la ecuación de Hamilton-Jacobi

4. Los estados de frecuencia positiva y negativa se obtienen comparando las soluciones asintóticas de (1.43) y (4.5) según la correspondencia

$$\Phi(x) \sim \begin{cases} e^{-iS} & \text{Estados de frecuencia positiva} \\ e^{iS} & \text{Estados de frecuencia negativa}\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

   Esta correspondencia se elige con base en la definición de los estados de frecuencia positiva y negativa dada en (1.14). Además, permite descomponer el operador de campo $\Phi$ en sus estados de frecuencia positiva y negativa tal y como se hace en espacio-tiempo de Minkowski

$$\Phi(x) = \sum_i (a_k \Phi_k^{\mathrm{WKB}} + a_k^\dagger (\Phi_k^{\mathrm{WKB}})^*)\,, \tag{4.7}$$

   donde, recordemos, el operador de aniquilación $a_k$ es el coeficiente de los estados de freecuencia positiva mientras que el operador de creación es el coeficiente de los estados de frecuencia negativa. El campo se debe descomponer en sus estados de frecuencia positiva y negativa correspondientes al tiempo $t_0$, o en los límites asintóticos $t \to 0, t \to \infty$; los estados en $t \to 0$ y $t \to \infty$ se relacionan entre sí mediante las transformaciones de Bogolubov (1.67) expuestas en el primer capítulo.

El método WKB ha sido aplicado en distintos escenarios [12, 46, 47] dando resultados positivos si se compara con los resultados que se obtienen mediante los otros métodos usuales que se usan para definir los estados de partículas.

SUBSECCIÓN 4.1

## Método WKB para el campo de Dirac

El método WKB para las soluciones de la ecuación de Dirac es similar a la aproximación WKB de la teoría de KG desarrollada en la primera sección de este capítulo. Consiste en escribir el campo espinorial $\Psi(x)$ como

$$\Psi^{\mathrm{WKB}}(x) \approx b_0(x)\, e^{iS}\,, \tag{4.8}$$

donde nuevamente, $S$ es una función escalara a determinar y $b_0$ un espinor arbitrario que debe satisfacer la ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo.

Sustituyendo (4.8) en la ecuación de Dirac, se obtiene la ecuación

$$e^{iS}(\tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\, b_0 + i\, b_0\, \tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\, S + m) = 0\,, \tag{4.9}$$

donde $\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}$ y $\Gamma_{\mu}$ es la conexión de espín. La aproximación WKB consiste en el límite semiclásico, es decir

$$\tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\, b_0 << i\, b_0\, \tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\, S + m\,. \tag{4.10}$$

La ecuación que debe satisfacer el espinor $b_0$ es

$$\tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu} b_0 = 0\,, \tag{4.11}$$

mientras que la función $S$ debe satisfacer la ecuación

$$(i\,\tilde{\gamma}^{\mu}\,\nabla_{\mu} S + m)\, b_0 = 0\,. \tag{4.12}$$

Elevando al cuadrado para eliminar $\tilde{\gamma}^{\mu}$ es obtiene

$$\left[\frac{1}{2}\,(\tilde{\gamma}^{\mu}\,\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\,\tilde{\gamma}^{\mu})\,\partial_{\mu} S\,\partial_{\nu} S + m^2\right] b_0 = 0\,. \tag{4.13}$$

Finalmente, al usar la regla de anticonmutación de las matrices de Dirac (1.109) se llega a que la función $S$, al igual como en el caso de KG, debe satisfacer la ecuación covariante de Hamilton-Jacobi

$$g^{\mu\nu}\,\partial_\mu S\,\partial_\nu S + m^2 = 0\,. \tag{4.14}$$

Al igual que el caso de la ecuación de KG, la ecuación para el espinor $b_0$ no es necesaria resolver para la producción de partículas; el criterio para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa es el mismo que se usó para el caso de producción de partículas escalares (4.6).

SECCIÓN 4.2

## Creación de partículas escalares en universos de Bianchi I

El método WKB nos permite definir el estado de vacío en tiempos asintóticos de la expansión del universo, siempre y cuando se satisfaga la ecuación de Hamilton-Jacobi. Se aplicará este método de correspondencia de los estados de partículas para estudiar la producción de partículas en el modelo cosmológico de Bianchi I (2.38) para dos casos distintos, $q = 0$ y $q = 1$ . Villalba [46, 47] analiza la producción de partículas escalares y de espín $1/2$ en un universo anisótropo de Bianchi I con métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + \mathrm{d}z^2\,. \tag{4.15}$$

Este modelo no corresponde a ningún caso concreto de la solución (2.38) obtenida en el capítulo dos. Sin embargo, para ciertos valores de $q$ se puede analizar la creación de partículas. Por ejemplo, Duru [14] analiza los casos $q = 0$, $q = 1/2$ y $q = 1$ usando el método de integrales de trayectoria para el cálculo de las amplitudes de probabilidad de partículas escalares creadas. En primer tiempo se calcula la solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi para la métrica correspondiente para posteriormente estudiar el comportamiento asintótico de la solución y poder comparar con la solución exacta de la ecuación de KG (3.13). Posteriormente, se construyen los estados de frecuencia positiva y negativa.

SUBSECCIÓN 4.2

### Caso $q = 0$

Se procede a calcular la solución asintótica de la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.5) del caso $q = 0$ para poder identificar los estados de frecuencia positiva y negativa en los límites asintóticos $t \to 0$, $t \to \infty$ según el método de indentificación que proporciona la aproximación WKB.

El universo de Bianchi I (2.38) para $q = 0$ tiene por métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + t^2\mathrm{d}z^2\,. \tag{4.16}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente es

$$-(\partial_0 S)^2 + (\partial_x S)^2 + (\partial_y S)^2 + t^{-2}\,(\partial_z S)^2 + m^2 = 0\,. \tag{4.17}$$

Debido a las simetrías del modelo (4.16), la ecuación de Hamilton-Jacobi permite separar variables de la forma

$$S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + f(t)\,, \tag{4.18}$$

donde $f(t)$ es una función a determinar. Al sustituir $S$ en la ecuación (4.17) se obtiene precisamente la ecuación que satisface la función $f(t)$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + {k_\perp}^2 + t^{-1}\,k_z^2 + m^2 = 0\,. \tag{4.19}$$

La solución está dada a una cuadratura

$$f(t) = \pm\int \sqrt{{k_\perp}^2 + t^{-2}\,{k_z}^2 + m^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.20}$$

Interesa el comportamiento asintótico de $f(t)$ en $t \to 0$ y en $t \to \infty$, por lo que no es necesario resolver la integral. En la singularidad incial, la solución $f(t)$ presenta el siguiente comportamiento asintótico

$$f(t) \sim \pm\log t^{k_z}\,, \quad t \to 0\,. \tag{4.21}$$

Este resultado es el término dominante del desarrollo en serie de potencias de $t$ de la función $f(t)$. Por otro lado, en el futuro infinito, $f(t)$ presenta el siguiente comportamiento

$$f(t) \sim \pm\sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\,t\,, \quad t \to \infty\,. \tag{4.22}$$

Por lo tanto, la acción clásica para este modelo de Bianchi tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$S(\mathbf{k},\mathbf{r},t) \sim \begin{cases} \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \log t^{k_z}\,, & t \to 0 \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \sqrt{{k_\perp}^2 + m^2}\,t\,, & t \to \infty\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

La aproximación WKB del campo escalar en las regiones asintóticas de la expansión es

$$\Phi^{\mathrm{WKB}} \sim \begin{cases} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,t^{\pm i k_z}\,, & t \to 0 \\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,e^{\pm i\sqrt{{k_\perp}^2+m^2}\,t}\,, & t \to \infty\,. \end{cases} \tag{4.24}$$

La solución exacta de la ecuación de KG para este universo está dada por (3.48). Para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa en las regiones asintóticas $t \to 0$, $t \to \infty$, se debe dar el comportamiento asintótico de (3.48) para comparar con la solución del método WKB (4.24). Por comodidad, se reescribe la solución (3.48)

$$\Phi(x) = e^{i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}}[A_1 H^{(1)}_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t) + B_1 H^{(2)}_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t)]\,.$$

El comportamiento asintótico de la de la función de Bessel $J_\nu(z)$ en las cercanías de la singularidad inicial $t = 0$ está dado por la fórmula asintótica

$$J_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}\,. \tag{4.25}$$

Para $\nu = ik_z$ y $z = \sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t$, se tiene que

$$J_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t) \sim \frac{t^{ik_z}}{2^{ik_z}\Gamma(1+ik_z)} \sim t^{ik_z}\,, \quad t \to 0\,. \tag{4.26}$$

Al comparar con (4.24) se ve que el comportamiento de la función de Bessel en la singularidad $t = 0$ es idéntico al comportamiento dado por la aproximación WKB en $t \to 0$ con el signo $+$. Por lo tanto, los estados de frecuencia negativa en $t \to 0$ corresponden a la función de Bessel $J_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t)$. Si se denota este estado por $f^-_{(0)}(t)$, entonces

$$f^-_{(0)}(t) = A^-_{(0)} J_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t)\,, \tag{4.27}$$

donde $A^-_{(0)}$ es una constante de normalización. El estado de frecuencia positiva $f^+_{(0)}(t)$ es el complejo conjugado de (4.27)

$$f^+_{(0)}(t) = [f^-_{(0)}(t)]^* = A^+_{(0)} J_{-ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}t)\,. \tag{4.28}$$

Los estados (4.27) (4.28) definen los modos base $\{f^\pm_{(0)}(t)\}$ en las cercanías de la singularidad $t = 0$. Por consiguiente, el campo escalar se puede descomponer en sus modos base en $t \to 0$

$$\Phi(x) = \sum_k [a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f^+_{(0)}(t) + a^\dagger_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f^-_{(0)}(t)]\,, \tag{4.29}$$

donde $a_k, a^\dagger_k$ son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, en las cercanías de la singularidad inicial $t = 0$. Esto nos permite definir el estado de vacío en $t \to 0$; si dicho estado se denota por $|0_0\rangle$, entonces

$$a_k\,|0_0\rangle = 0\,. \tag{4.30}$$

Por otro lado, el comportamiento asintótico de la función de Hankel $H_\nu^{(2)}(z)$ para $z \to \infty$ es

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp[-i(z - \nu\pi/2 - \pi/4)]\,. \tag{4.31}$$

Si $\nu = ik_z$ y $z = \sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}\,t$, entonces se tiene lo siguiente

$$H_{ik_z}^{(2)}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}\,t) \sim t^{-1/2} e^{-i\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t}\,, \quad t \to \infty \tag{4.32}$$

Si se compara con (4.24), el comportamiento en $t \to \infty$ de la solución exacta es idéntico al dado por la aproximación WKB con el signo $-$. Por tanto, los estados de frecuencia positiva en $t \to \infty$ corresponden a la función de Hankel $H_{ik_z}^{(2)}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}\,t)$. Si se denota este estado por $f_{(\infty)}^+(t)$, entonces

$$f_{(\infty)}^+(t) = B_{(\infty)}^+ H_{ik_z}^{(2)}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}\,t)\,, \tag{4.33}$$

donde $B_{(\infty)}^+$ es una constante de normalización, que se determina mediante el producto interior (1.58) en $t \to \infty$. El estado de frecuencia negativa es el complejo conjugado de $f_{(\infty)}^+(t)$:

$$f_{(\infty)}^-(t) = [f_{(\infty)}^+(t)]^* = B_{(\infty)}^- [H_{ik_z}^{(2)}(\sqrt{k_\perp{}^2 + m^2}\,t)]^*\,. \tag{4.34}$$

Estos estados definen los modos base $\{f_{(\infty)}^\pm(t)\}$ del campo en $t \to \infty$. Por lo tanto, el campo escalar se puede descomponer en sus modos de frecuencia positiva y negativa en $t \to \infty$

$$\Phi(x) = \sum_k [b_k e^{i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}} f_{(\infty)}^+(t) + b_k^\dagger e^{-i\mathrm{k}\cdot\mathrm{r}} f_{(\infty)}^-(t)]\,, \tag{4.35}$$

donde $b_k\,, b_k^\dagger$ son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente, en el futuro infinito. Esto nos permite definir el estado de vacío en $t \to \infty$; si dicho estado se denota por $|0_\infty\rangle$, entonces

$$b_k\,|0_\infty\rangle = 0\,. \tag{4.36}$$

El método WKB nos proporciona un criterio para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa cerca de la singularidad inicial $t = 0$ y en el futuro infinito $t \to \infty$ y así definir el estado de vacío en dichas regiones. Esto nos permite calcular el número promedio de partículas escalares creadas en el futuro infinito usando el vacío $|0_0\rangle$; o bien, el número promedio de partículas escalares creadas en el universo temprano usando el vacío $|0_\infty\rangle$. Los modos $f^{+}_{(\infty)}(t)$ están relacionados con $f^{\pm}_{(0)}(t)$ por medio de las transformaciones de Bogolubov lo que nos permite escribir

$$f^{+}_{(\infty)}(t) = \alpha\, f^{+}_{(0)}(t) + \beta\, f^{-}_{(0)}(t)\,, \tag{4.37}$$

donde $\alpha\,,\beta$ son coeficientes de Bogolubov que cumplen la relación de ortogonalidad (1.69)

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\,. \tag{4.38}$$

El número promedio de partículas escalares creadas está dado por (1.76). Gracias a la fórmula de conexión de las funiones de Bessel

$$H^{(2)}_{\nu}(z) = \frac{e^{i\pi\nu}J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i\sin\pi\nu}\,, \tag{4.39}$$

es posible calcular el coeficiente $\beta$. Sustituyendo (4.27) (4.28), (4.33) en (4.37) y usando la fórmula de conexión (4.39), se obtiene

$$\begin{aligned} iB^{+}_{(\infty)}\csc(i\pi k_z)[J_{-ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t) - e^{-\pi k_z}J_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t)] = \alpha A^{+}_{(0)}J_{-ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t) \\ +\beta A^{+}_{(0)}J_{ik_z}(\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t)\,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Los coeficientes $\alpha\,,\beta$ resultan

$$\alpha A^{+}_{(0)} = iB^{+}_{(\infty)}\csc(i\pi k_z)\,, \quad \beta A^{+}_{(0)} = -iB^{+}_{(\infty)}e^{-\pi k_z}\csc(i\pi k_z)\,. \tag{4.41}$$

Entonces

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{2\pi k_z}\,. \tag{4.42}$$

Por lo tanto, el número promedio de partículas escalares creadas en el universo (4.16) es

$$n(k) = \left(\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} - 1\right)^{-1} = (e^{2\pi k_z} - 1)^{-1}\,. \tag{4.43}$$

Este resultado, que es la distribución de Bose-Einstein (BE), coincide con el resultado de Duru [14] obtenido por medio del método de integrales de trayectoria, lo que reafirma el método WKB para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa en regiones asintóticas de la expansión. La dependencia en la dirección $k_z$ indica que la densidad de partículas creadas se distribuye de manera unifrome a lo largo de $k_z$, es decir, que la expansión del universo tiene una dirrección privilegiada para crear partículas escalares.

SUBSECCIÓN 4.2

## Caso $q = 1$

El universo de Bianchi I (2.38) para $q = 1$ tiene por métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + t^{-2}\mathrm{d}z^2 \,. \tag{4.44}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi (4.5) resulta

$$-(\partial_t S)^2 + t^{-2}((\partial_x S)^2 + (\partial_y S)^2) + t^2(\partial_z S)^2 + m^2 = 0 \,. \tag{4.45}$$

Debido a la simetría traslacional del modelo, la ecuación anterior permite separar variables de la forma

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + f_k(t) \,, \tag{4.46}$$

donde $f_k(t)$ es una función a determinar. Sustituyendo en (4.45) se obtiene la ecuación diferencial para $f_k(t)$, y por tanto, la solución a (4.45)

$$\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{k_\perp^2 t^{-2} + t^2 {k_z}^2 + m^2} \,, \quad k_\perp^2 = {k_x}^2 + {k_y}^2 \,. \tag{4.47}$$

La solución está dada a una cuadratura

$$f_k(t) = \pm \int \sqrt{m^2 + t^{-2} k_\perp^2 + t^2 k_z^2}\, \mathrm{d}t \,. \tag{4.48}$$

En la singularidad inicial $t = 0$, la solución a $f_k(t)$ presenta el siguiente comportamiento asintótico

$$f_k(t) \sim \pm \log t^{k_\perp} \,, \quad t \to 0 \,, \tag{4.49}$$

mientras que en futuro infinito $t \to \infty$ la solución $f_k(t)$ tiene un comportamiento

$$f_k(t) \sim \pm \frac{k_z t^2}{2} \pm \frac{k_z m^2}{2} \log t \,, \quad t \to \infty \,. \tag{4.50}$$

Por lo tanto, la acción clásica presenta el siguiente comportamiento asintótico

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) \sim \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \log t^{k_\perp} \,, & t \to 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \dfrac{k_z t^2}{2} \pm \dfrac{k_z m^2}{2} \log t \,, & t \to \infty \,. \end{cases} \tag{4.51}$$

La aproximación WKB en los límites asintóticos para el campo escalar $\Phi(x)$ es

$$\Phi_k^{\mathrm{WKB}} \sim \begin{cases} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, t^{\pm ik_\perp}, & t \to 0 \\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, e^{\pm ik_z t^2/2}\, t^{\pm ik_z m^2/2}, & t \to \infty . \end{cases} \tag{4.52}$$

La solución exacta a la ecuación de KG para este modelo cosmólogico de Bianchi I está dada en (3.56)

$$\Phi(x) = t^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (A\, W_{\kappa\mu}(ik_z t^2) + B\, M_{\kappa\mu}(ik_z t^2)) , \tag{4.53}$$

donde $M_{\kappa\mu}$, $W_{\kappa\mu}$ son funciones de Whittaker y

$$\kappa = -\frac{im^2}{4k_z}, \quad \mu = \frac{i}{2}\sqrt{k_\perp^2 + 2\xi} . \tag{4.54}$$

Como se muestra en el capítulo 3, el comportamiento asintótico de las funciones de Whittaker es [25]

Para $z \to 0$

$$M_{\kappa\mu}(z) \sim z^{1/2+\mu}, \quad W_{\kappa\mu}(z) \sim \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}\, z^{1/2-\mu} . \tag{4.55}$$

Para $z \to \infty$

$$M_{\kappa\mu}(z) \sim \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}\, e^{z/2} z^{-\kappa}, \quad W_{\kappa\mu}(z) \sim e^{-z/2} z^{\kappa} . \tag{4.56}$$

Nótese que el comportamiento asintótico del campo de la solución exacta de la ecuación de KG en la singularidad inicial $t = 0$ para la función $M_{\kappa\mu}(ik_z t^2)$ corresponde a $\Phi_k^{\mathrm{WKB}}$ para $t \to 0$ con el signo $-$; es decir, de acuerdo con (4.6), los estados de frecuencia positiva en las cercanías de la singularidad inicial $t = 0$ corresponden a la función de Whittaker $M_{\kappa\mu}(ik_z t^2)$. Si se denota este estado por $u_{(0)}^+(t)$, entonces

$$u_{(0)}^+(t) = A_{(0)}^+ t^{-1/2} M_{\kappa\mu}(ik_z t^2) , \tag{4.57}$$

donde $A_{(0)}^+$ es una constante de normalización que se determina por medio del producto interior (1.58). El estado de frecuencia negativa es el complejo conjugado de $u_{(0)}^+$

$$u_{(0)}^-(t) = [u_{(0)}^+(t)]^* = A_{(0)}^- t^{-1/2} (e^{i\pi})^{1/2-\mu} M_{\kappa,-\mu}(ik_z t^2) . \tag{4.58}$$

Esto define los modos base $\{u^{\pm}_{(0)}(t)\}$. Por lo tanto, el campo escalar se puede descomponer en los modos base $\{u^{\pm}_{(0)}(t)\}$ cerca de la singularidad $t \to 0$

$$\Phi(x) = t^{-1/2} \sum_k (a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u^{+}_{(0)}(t) + a^{\dagger}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u^{-}_{(0)}(t)) , \tag{4.59}$$

donde $a_k$, $a^{\dagger}_k$ son los operadores de aniquilación y creación cerca de la singularidad. Esto nos permite definir el estado de vacío en $t \to 0$. Si denotamos el estado de vacío como $|0_0\rangle$ cerca de la singularidad, entonces

$$a_k |0_0\rangle = 0 . \tag{4.60}$$

El comportamiento asintótico del campo escalar de la solución exacta de la ecuación de KG en el futuro infinito $t \to \infty$ para la función $W_{\kappa\mu}(ik_z t^2)$ corresponde a $\Phi^{\mathrm{WKB}}_k$ para $t \to \infty$ con el signo $-$ de acuerdo con (4.52). Es decir, los estados de frecuencia positiva en $t \to \infty$ corresponden a la función de Whittaker $W_{\kappa\mu}(ik_z t^2)$. Si este estado se denota por $u^{+}_{(\infty)}(t)$, entonces

$$u^{+}_{(\infty)}(t) = B^{+}_{(\infty)} t^{-1/2} W_{\kappa\mu}(ik_z t^2) , \tag{4.61}$$

mientras que el estado de frecuencia negativa es el complejo conjugado de $u^{+}_{(\infty)}(t)$

$$u^{-}_{(\infty)}(t) = [u^{+}_{(\infty)}(t)]^* = B^{-}_{(\infty)} t^{-1/2} M_{-\kappa\mu}(-ik_z t^2) . \tag{4.62}$$

Esto define los modos base $\{u^{\pm}_{(\infty)}(t)\}$. Por lo tanto, el campo escalar se puede descomponer en los modos base $\{u^{\pm}_{(\infty)}(t)\}$ de partículas en el futuro infinito $t \to \infty$

$$\Phi(x) = t^{-1/2} \sum_k (b_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u^{+}_{(\infty)}(t) + b^{\dagger}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u^{-}_{(\infty)}(t)) , \tag{4.63}$$

donde $b_k$, $b^{\dagger}_k$ son los operadores de aniquilación y creación en el futuro infinito. El estado de vacío $|0_\infty\rangle$ en $t \to \infty$ cumple

$$b_k |0_\infty\rangle = 0 . \tag{4.64}$$

Gracias al método WKB fue posible encontrar los estados de frecuencia positiva y negativa cerca de la singularidad inicial $t = 0$ y en el futuro infinito $t \to \infty$ y así definir el estado de vacío en dichas regiones. Esto nos permite calcular el número promedio de partículas escalares creadas en el futuro infinito usando el vacío $|0_0\rangle$; o bien, el número promedio de partículas escalares creadas en el universo temprano usando el vacío $|0_\infty\rangle$. Los modos base $\{u^{\pm}_{(0)}(t)\}$, $\{u^{\pm}_{(\infty)}(t)\}$ están relacionados mediante las transformaciones de Bogolubov. El estado $u^{+}_{(\infty)}$ se puede expresar en términos de los modos base $\{u^{\pm}_{(0)}(t)\}$

$$u^{+}_{(\infty)}(t) = \alpha\, u^{+}_{(0)}(t) + \beta\, u^{-}_{(0)}(t)\,, \tag{4.65}$$

donde $\alpha\,,\beta$ son los coeficientes de Bogolubov. La densidad promedio de partículas creadas en $t \to 0$ usando los modos $\{u^{\pm}_{(\infty)}(x)\}$ está dado por (1.76)

$$n_i(k) = |\beta_i^2|\,. \tag{4.66}$$

Para calcular los coeficientes de Bogolubov se usa la fórmula de conexión de las funciones de Whittaker [25]

$$W_{\kappa\mu}(ik_z t^2) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu-\kappa)} M_{\kappa\mu}(ik_z t^2) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)} M_{\kappa,-\mu}(ik_z t^2)\,. \tag{4.67}$$

Sustituyendo en (4.65) y comparando se obtiene

$$\alpha = \frac{B^{+}_{(\infty)}}{A^{+}_{(0)}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu-\kappa)}\,, \quad \beta = \frac{B^{+}_{(\infty)}}{A^{-}_{(0)}} e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (e^{i\pi})^{1/2-\mu} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)}\,. \tag{4.68}$$

Entonces

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}} \frac{|\Gamma(1/2-\mu-\kappa)|^2}{|\Gamma(1/2+\mu-\kappa)|^2}\,. \tag{4.69}$$

De la ortonormalidad de los coeficientes de Bogolubov (1.69)

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\,, \tag{4.70}$$

se obtiene el promedio de número de partículas creadas cerca de la singularidad

$$n(k) = |\beta|^2 = \left(\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} - 1\right)^{-1} = \left(e^{-\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}} \frac{|\Gamma(1/2+\mu-\kappa)|^2}{|\Gamma(1/2-\mu-\kappa)|^2} - 1\right)^{-1}\,. \tag{4.71}$$

Se puede simplificar este resultado usando la siguiente propiedad de la función gamma [25]

$$|\Gamma(1/2+iz)|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi z)}\,. \tag{4.72}$$

Definiendo las siguientes variables

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{k_\perp^2 + 2\xi + \frac{m^2}{4k_z}}, \quad \tilde{y} = -\frac{1}{2}\sqrt{k_\perp^2 + 2\xi + \frac{m^2}{4k_z}}, \tag{4.73}$$

la densidad de partículas escalares creadas (4.71) resulta

$$n(k) = \left(e^{-\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}}\,\frac{\cosh\pi\tilde{y}}{\cosh\pi y} - 1\right)^{-1}. \tag{4.74}$$

Simplificando

$$e^{-\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}}\,\frac{\cosh\pi\tilde{y}}{\cosh\pi y} = e^{\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}}. \tag{4.75}$$

Por lo tanto, el número promedio de partículas escalares creadas con vector de onda **k** en un universo de Bianchi I (4.44) debido a la expasión del universo está dado por

$$n(k) = (e^{\pi\sqrt{k_\perp^2+2\xi}} - 1)^{-1}. \tag{4.76}$$

Esta relación muestra que la densidad de partículas creadas es la distribución de Bose-Einstein, además coincide, una vez más, con el resultado de Duru [14] obtenido mediante el método de integrales de trayectoria. Si se tiene el caso del campo escalar mínimamente acoplado, el número promedio de partículas escalares es simplemente

$$n(k) = (e^{\pi k_\perp} - 1)^{-1}, \tag{4.77}$$

lo cual indica que la dirección transversal $k_\perp$ es en la que se lleva a cabo la producción de partículas escalares para este modelo de universo anisótropo.

SECCIÓN 4.3

## Creación de neutrinos en universos de Bianchi I

Uno de los trabajos pioneros de la producción de neutrinos sin masa en campos gravitacionales es el trabajo de Brill y Wheeler [5]; estudian soluciones exactas a la ecuación de Dirac en un campo gravitacional esféricamente simétrico y encuentran la creación de pares de neutrinos. Posteriormente, Chandrasekhar [8] encuentra soluciones exactas a la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Kerr usando el formalismo de Newman-Penrose. Después de la publicación de los trabajos de Brill y Wheeler y Chandrasekhar, han aparecidos numerosos artículos que tratan el problema de la separación de variables y creación de partículas de espín $1/2$ en diferentes métricas, todas diagonales. Audretsch [1], usando la aproximación

WKB encuentra la producción térmica de partículas de espín $1/2$ en un univeso de Friedman espacialmente plano dominado por radiación; Villalba [45, 46, 47] estudia la producción de partículas de espín $1/2$ en el modelo de Bianchi (4.15) y en el univero De Sitter, incluyendo un campo eléctrico constante, todos los casos abordados por el método WKB. En esta sección se estudia la producción de neutrinos no masivos en el modelo de Bianchi I (2.38) para los casos $q=0$ y $q=1$, empleando el método WKB para identificar los estados de frecuencia positiva y negativa del neutrino.

SUBSECCIÓN 4.3

## Caso $q=0$

La solución (3.119) a la ecuación de Dirac para el universo (4.16) está dada por las dos componentes del espinor $\Theta_1$. Por comodidad, se reescribe la solución (3.119)

$$\xi_{1,2}(t)=\sqrt{t}\left[A_{1,2}H_{\nu_\mp}{}^{(1)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}t)+B_{1,2}H_{\nu_\mp}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}t)\right] \tag{4.78}$$

Para identificar los modos base en las regiones asintóticas $t\to 0$, $t\to\infty$, se debe resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi para (4.16). En la sección de producción de partículas escalares se da la solución (4.20)

$$S(\mathbf{k},\mathbf{r},t)\sim\begin{cases}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\log t^{k_z}, & t\to 0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t, & t\to\infty.\end{cases} \tag{4.79}$$

La aproximación WKB del campo de Dirac es

$$\Psi^{\mathrm{WKB}}\sim\begin{cases}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}t^{\pm ik_z}, & t\to 0\\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{\pm i\sqrt{k_\perp{}^2+m^2}\,t}, & t\to\infty.\end{cases} \tag{4.80}$$

El comportamiento de las funciones de Bessel en $t\to 0$, $t\to\infty$ está dado en las expresiones (4.25) y (4.31), respectivamente. Si se compara el comportamiento asintótico en $t\to 0$ de la función de Bessel $J_{\nu_-}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}t)$ con $\nu_-=-1/2-ik_z$

$$J_{\nu_-}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}t)\sim\frac{t_-^{\nu}}{2_-^{\nu}\,\Gamma(\nu_-+1)}\sim t^{1/2-ik_z}, \quad t\to 0,. \tag{4.81}$$

Con el comportamiento dado por la aproximación WKB (4.80), se observa que es idéntico para $t\to 0$ con el signo $-$, por lo que los estados de frecuencia positiva en la singularidad inicial $t=0$ corresponden a la función de Bessel $J_{\nu_-}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}t)$. Si se denota este estado como un biespinor $\Theta^+_{1(0))}(t)$, entonces

$$\Theta^{+}_{1\,(0)}(t) = A^{+}_{(0)}\,\sqrt{t}\begin{pmatrix} J_{\nu_-}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ J_{\nu_+}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \end{pmatrix}\,, \tag{4.82}$$

donde $A^{+}_{(0)}$ es una constante de normalización. Los estados de frecuencias negativa es el complejo conjugado de $\Theta^{+}_{1\,(0)}(t)$

$$\Theta^{-}_{1\,(0)}(t) = A^{-}_{(0)}\,\sqrt{t}\begin{pmatrix} J_{-\nu_-}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ J_{-\nu_+}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \end{pmatrix}\,. \tag{4.83}$$

De igual manera se construyen los estados de frecuencias positiva y negativa en la región $t \to \infty$. El comportamiento asintótico de la función de Hankel $H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t)$ en $t \to \infty$ es, según (4.31)

$$H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \sim t^{-1/2}\,e^{-i\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t}\,e^{\pi k_z/2} \sim t^{-1/2}\,e^{-i\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t}\,. \tag{4.84}$$

Si se compara con (4.80), se llega a la conclusión que la función de Hankel $H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t)$ corresponde al estado de frecuencia positiva del campo de Dirac con el signo $-$. Los estados de frecuencia positiva, expresados por un biespinor $\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t)$ son

$$\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t) = B^{+}_{(\infty)}\,\sqrt{t}\begin{pmatrix} H_{\nu_-}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \\ H_{\nu_+}{}^{(2)}(\sqrt{m^2+k_\perp{}^2}\,t) \end{pmatrix}\,. \tag{4.85}$$

La aproximación WKB permitió encontrar los estados de frecuencia positiva y negativa cerca de la singularidad $t=0$ y en el futuro infinito $t \to \infty$, lo que implica definir el estado de vacío para el campo de Dirac en el universo (4.16) en los tiempos correspondientes. El cálculo del número promedio de partículas creadas de espín $1/2$ es similar al cálculo empleado para el caso de partículas escalares. Ahora, usando la fórmula de conexión de las funciones de Bessel (4.39), se puede expresar $\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t)$ en términos de $\Theta^{\pm}_{1\,(0)}(t)$ con ayuda de las transformaciones de Bogolubov

$$\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t) = \alpha\,\Theta^{+}_{1\,(0)}(t) + \beta\,\Theta^{-}_{1\,(0)}(t)\,. \tag{4.86}$$

Con esta relación junto con las fórmula de conexión de las funciones de Bessel se obtienen los coeficientes de Bogolubov:

$$\alpha = -\frac{iC^{+}_{(\infty)}}{D^{+}_{(0)}}\csc(\pi\nu_-)\,e^{i\pi\nu_-}\,, \quad \beta = \frac{iC^{+}_{(\infty)}}{D^{-}_{(0)}}\csc(\pi\nu_-)\,. \tag{4.87}$$

Con los coeficientes de Bogolubov calculados, se tiene

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{2\pi k_z}. \tag{4.88}$$

Estos coeficientes deben cumplir la relación de ortonormalidad (1.130). Por lo tanto, el número promedio de neutrinos debido a la expansión del universo (4.16) viene dada por la expresión

$$n(k) = |\beta|^2 = (e^{2\pi k_z} + 1)^{-1}. \tag{4.89}$$

El número promedio de neutrinos resulta en la distribución de Fermi-Dirac con potencial químico $\mu_{\nu_e} = 0$, lo que quiere decir que la expansión del universo (4.16) crea partículas de estas características de manera térmica. Este resultado era de esperarse, ya que para el caso de partículas escalares se obtuvo la distribución de Bose-Einstein (4.43). De hecho, nótese que la temperatura a la que se crean los neutrinos es la misma que se tiene para el caso de producción de partículas escalares para el acomplamiento mínimo $\xi = 0$.

SUBSECCIÓN 4.3

## Caso $q = 1$

Finalmente se analiza el caso de la producción de partículas sin masa de espín $1/2$ para el universo (4.44). Para identificar los estados de frecuencia de positiva y negativa se procede como en los casos anteriores; se debe resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi con el término de masa $m = 0$. El comportamiento asintótico de la ecuación de Hamilton-Jacobi con el término de masa $m = 0$ se obtiene directamente de (4.51)

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) \sim \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \log t^{k_\perp}, & t \to 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \dfrac{k_z t^2}{2}, & t \to \infty. \end{cases} \tag{4.90}$$

Con este comportamiento asíntotico, se obtiene la aproximación WKB en los límites $t \to 0$, $t \to \infty$

$$\Psi_k^{\mathrm{WKB}} \sim \begin{cases} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} t^{\pm i k_\perp}, & t \to 0 \\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{\pm i k_z t^2/2}, & t \to \infty \end{cases} \tag{4.91}$$

El signo $+$ $(-)$ corresponde a los estados de frecuencia negativa (positiva) cerca de la singularidad $t \to 0$ y en el futuro infinito $t \to \infty$. Se compara el comportamiento asintótico de la solución exacta de la ecuación de Dirac (3.131) con la aproximación WKB (4.91) del campo de Dirac. La solución exacta a la ecuación de Dirac para este universo está dada en términos de las dos componentes del biespinor auxiliar $\Theta_1(t)$

$$\xi_{1,2}(t) = t^{-1}\left[A_{\pm}M_{\pm 1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) + B_{\pm}W_{\pm 1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\right]. \tag{4.92}$$

El comportamiento asintótico de las funciones de Whittaker en $t \to 0$ y $t \to \infty$ está dado por (4.55) y (4.56), respectivamente. Los estados de frecuencia negativa en la singularidad inicial $t \to 0$ corresponde a la función de Whittaker $M_{\pm 1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)$. Para comprobarlo, en el límite $t \to 0$, la función $M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)$ se comporta como

$$M_{\pm 1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \sim t^{1+ik_z}. \tag{4.93}$$

Al comparar con (4.91) se nota que tienen el mismo comportamiento en $t \to 0$. Por consiguiente, los estados de frecuencia negativa en la singularidad $t \to 0$ corresponden a la función de Whittaker $M_{\pm 1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)$. Se denota este estado por el biespinor $\Theta^-_{1(0)}(t)$

$$\Theta^-_{1(0)}(t) = C^-_{(0)}\, t^{-1}\begin{pmatrix} M_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\end{pmatrix} \tag{4.94}$$

donde $C^-_{(0)}$ es una constante de normalización. Los estados de frecuencia positiva en $t \to 0$ son el complejo conjugado de $\Theta^-_{1(0)}(t)$

$$\Theta^+_{1(0)}(t) = C^+_{(0)}\,(e^{i\pi})^{1/2-\mu}\, t^{-1}\begin{pmatrix} M_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ M_{+1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\end{pmatrix} \tag{4.95}$$

En el límite $t \to \infty$, los estados de frecuencia positiva corresponden a la función de Whittaker $W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)$ ya que en dicho límite tiene un comportamiento dado por la fórmula

$$W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \sim t\, e^{-ik_z t^2/2}, \tag{4.96}$$

que si se compara con (4.91) en $t \to \infty$, el comportamiento es idéntico. Por lo tanto, el estado de frecuencias positivas en la región $t \to \infty$ está dado por el espinor

$$\Theta^+_{1(\infty)}(t) = D^+_{(\infty)}\, t\begin{pmatrix} W_{1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2) \\ W_{-1/2,ik_\perp/2}(ik_z t^2)\end{pmatrix} \tag{4.97}$$

donde $D^+_{(\infty)}$ es una constante de normalización. La aproximación WKB permitió encontrar los estados de frecuencia positiva y negativa cerca de la singularidad $t = 0$ y en el futuro infinito $t \to \infty$, lo que implica definir el estado de vacío para el campo de Dirac en el universo (4.44) en los tiempos correspondientes.

Los espinores $\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t)$, $\Theta^{-}_{1\,(0)}(t)$ se relacionan mediante las transformaciones de Bogolubov

$$\Theta^{+}_{1\,(\infty)}(t) = \alpha\,\Theta^{+}_{1\,(0)}(t) + \beta\,\Theta^{-}_{1\,(0)}(t)\,, \tag{4.98}$$

donde $\alpha$, $\beta$ son los coeficientes de Bogolubov. Al usar la relación de conexión de las funciones de Whittaker (4.67) y (4.98) se obtienen los siguientes coeficientes

$$\alpha = \frac{D^{+}_{(\infty)}}{C^{+}_{(0)}}\,\frac{\Gamma(-ik_z)}{\Gamma(-ik_z/2)}\,e^{\pi k_{\perp}/2}\,e^{-i\pi/2}\,, \quad \beta = \frac{D_{(\infty)}}{C^{-}_{(0)}}\,\frac{\Gamma(ik_z)}{\Gamma(ik_z/2)}\,. \tag{4.99}$$

Usando $|\Gamma(z)|^2 = \Gamma(z)\,\Gamma(z^*)$, se obtiene

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{\pi k_{\perp}}\,. \tag{4.100}$$

Los coeficientes de Bogolubov deben cumplir la relación de ortonormalidad (1.130), por lo que el número promedio de partículas sin masa de espín $1/2$ en el universo de Bianchi (4.44) está dado por la relación

$$n(k) = |\beta|^2 = \left(\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} + 1\right)^{-1} = (e^{\pi k_{\perp}} + 1)^{-1}\,. \tag{4.101}$$

Esta relación muestra que el número promedio de neutrinos sin masa en el universo (4.44) es nuevamente la distribución de Fermi-Dirac con potencial químico igual a cero, igual que para el caso $q = 0$. La producción de neutrinos no masivos en este modelo se lleva a cabo en la dirección transversal $k_{\perp}$, igual que el caso de partículas escalares. De hecho, la forma funcional de $|\alpha|^2/|\beta|^2$ es idéntica al caso de partículas escalares (**??**), lo que significa que la temperatura a la que se crean las partículas es la misma para ambos casos.

# CAPÍTULO 5

# Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se discutió la propagación de campos escalares y espinoriales como soluciones exactas a las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac en modelos cosmológicos isótropos y no isótropos, en particular, en un modelo de Bianchi I con simetría rotacional local que se encontró como una familia de soluciones de un parámetro a las ecuaciones de Einstein con campo escalar libre y sin masa como fuente de campo gravitacional. Esta familia de soluciones fue encontrada por Jacobs [19] con un modelo de fluido rígido perfecto con ecuación de estado barotrópica $\rho = p$ y posteriormente por Vajk y Eltgroth [44] bajo consideraciones similares encontró una familia de soluciones más general. En esta tesis nos limitamos a dar la misma solución, de una manera más sencilla, con otro modelo de materia para el mismo universo de Bianchi I. Las soluciones exactas encontradas en el capítulo tres a las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac (en especial las soluciones a la ecuación de Dirac) son nuevas soluciones exactas que podrán servir en trabajos futuros; para el campo de Klein-Gordon, la nueva solución exacta es el caso de $q = 1/5$.

Con la soluciones exactas encontradas para las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, se analizó el problema de la producción de partículas escalares y de espín $1/2$ sin masa debido a la expansión del universo, en particular en un universo de Bianchi I, por medio del método de aproximación WKB para identificar y definir los estados de energía positiva y negativa de los campos en los límites asintóticos de la expansión $t \to 0$, $t \to \infty$. Para el caso de partículas escalares, se obtuvieron los mismos resultados que obtuvo Duru con el método de integrales de trayectoria [14]. El resultado fue, para los casos de $q = 0$ y $q = 1$ del modelo de Bianch I previamente obtenido, la distribución de Bose-Einstein, algo que era de esperarse, mientras que para el caso de partículas de espín $1/2$ sin masa el resultado que se obtiene es la distribución de Fermi-Dirac. Este cálculo corrobora que el método semiclásico WKB coincide con el método más sofisticado de integrales de trayectoria para definir el estado de vacío en relatividad general, lo cual lo hace más eficiente y accesible en muchos casos de interés.

Finalmente, como trabajo a futuro, se espera analizar la producción de partículas cargadas eléctricamente en presencia de un campo electromagnético externo cuando el espacio-tiempo es curvo. Se espera que el campo eléctrico modifique los resultados obtenidos en este trabajo, y que la distribución de partículas sea más compleja que la de Bose-Einstein para partículas escalares, y la de Fermi Dirac para partículas de espín $1/2$. También se desea, como una aplicación de la ecuación de Dirac en espacio-tiempo curvo, estudiar el corrimiento de los niveles de energía del átomo de hidrógeno bajo un espacio-tiempo que no sea plano. Para este problema se hace la suposición que el átomo está en caída libre a lo largo de geodésicas radiales durante el proceso de emisión. Se usan coordenadas normales de Fermi para describir el movimiento geodésico y se hace un desarrollo en serie de potencias de la métrica y de los símbolos de Christoffel en éstas coordenadas. También se escribe la ecuación de Dirac como una ecuación tipo Schrödinger, con el Hamiltoniano de Dirac escrito en en coordenadas de Fermi y se usa teoría de perturbaciones independiente del tiempo para el caso degenerado para resolver la ecuación de Dirac y encontrar el corrimiento de los niveles de energía inducidos por la curvatura del espacio-tiempo, trabajando a primer orden en el tensor de Riemann escrito en coordenadas de Fermi. Con el trabajo pionero de Parker [28] y poestriormente con el trabajo de Pimentel y Parker [29] se logró determinar de manera aproximada el corrimiento de las líneas espectrales de un átomo en presencia de campos gravitacionales, en particular en el espacio-tiempo de Schwarszchild y en métricas tipo PPN. Conociendo de manera detallada la dependencia de los niveles de energía con la curvatura del espacio vía el tensor de Riemann puede servir como una prueba en búsqueda de regiones de curvatura significativa que pueden existir en una escala menor que la que se haya estudiado previamente.

# APÉNDICE A

# Covariancia de la ecuación de Dirac

Consideremos dos observadores inerciales $\mathscr{O}$ y $\mathscr{O}'$ que ven una partícula de espín $1/2$ que cumple la ecuación de Dirac. Se deben imponer dos requisitos para establecer la covariancia de Lorentz de la teoría:

1. Debe existir una manera explícita para el observador $\mathscr{O}'$, dado $\Psi(x)$ medido por el observador $\mathscr{O}$, para calcular $\Psi'(x')$ que describe el mismo estado físico de la partícula.
2. De acuerdo al principio de covariancia de Lorentz, $\Psi'(x')$ debe ser solución a la ecuación de Dirac en el sistema del observador $\mathscr{O}'$

$$(\gamma'^a \partial'_a + m)\Psi'(x') = 0\,, \tag{A.1}$$

donde las matrices $\gamma'^a$ deben cumplir el álgebra de Dirac

$$\{\gamma'^a, \gamma'^b\} = 2\eta^{ab} \tag{A.2}$$

Los observadores inerciales $\mathscr{O}$ y $\mathscr{O}'$ están relacionados por transformaciones correspondientes al grupo de Lorentz $x' = \Lambda x$

$$\Psi'(x') = \Psi'(\Lambda x)\,, \tag{A.3}$$

donde $\Lambda$ es una transformación de Lorentz, que puede ser un bost o una rotación. Supongamos que $\Psi'(x')$ y $\Psi(x)$ están relacionados por una tranformación lineal relacionada con la transformación de Lorentz $\Lambda$

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)\,, \quad \Psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\Psi'(x')\,. \tag{A.4}$$

Sustituyendo $\Psi(x)$ dado por (A.4) en la ecuación de Dirac y multiplicando a la derecha por $S(\Lambda)$ se obtiene

$$(iS(\Lambda)\gamma^a S^{-1}(\Lambda)\partial_a - m)\Psi'(x') = 0\,, \tag{A.5}$$

o bien

$$(iS(\Lambda)\gamma^a S^{-1}(\Lambda)\,\Lambda_a{}^b\,\partial'_b - m)\Psi'(x') = 0\,. \tag{A.6}$$

Esta es una forma invariante y es equivalente a (A.1), por lo que si se comparan ambas ecuaciones, se muestra que $\gamma'^a$ puede ser obtenida por medio de la relación

$$\gamma'^a = S(\Lambda)\,\Lambda^a{}_b\,\gamma^b\,S^{-1}(\Lambda)\,, \tag{A.7}$$

o de manera equivalente

$$S(\Lambda)\,\gamma^b\,S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^b{}_a\,\gamma^a\,. \tag{A.8}$$

Esta es la relación fundamental que permite calcular de manera explícita la transformación $S(\Lambda)$. Para encontrar la forma funcional de la transformación $S(\Lambda)$, se hace una transformación infinitesimal de Lorentz

$$\Lambda_a{}^b = \delta_a{}^b + \delta\omega_a{}^b\,, \tag{A.9}$$

donde $\delta\omega_a{}^b$ son parámetros relacionados con la transformación de Lorentz tal que $|\delta\omega_a{}^b| << 1$. Por la propiedad de $\Lambda$

$$\Lambda_a{}^b\,\Lambda_b{}^c = \delta_a{}^c\,, \tag{A.10}$$

se llega al resultado

$$\delta\omega^{ab} = -\delta\omega^{ba}\,. \tag{A.11}$$

Es decir, existen 6 parámetros independientes asociados a la transformación de Lorentz $\Lambda$. Se desarrolla $S(\Lambda)$ en potencias de $\delta\omega_a{}^b$ despreciando términos de potencias de orden dos o mayor

$$S(1+\delta\omega_{ab}) \approx \mathbb{I}_4 + S_1(1+\delta\omega_{ab})\,, \tag{A.12}$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad 4 y $S_1$ es el primer término del desarrollo, el cual dependerá del parámetro $\omega_{ab}$. Sustituyendo las correspondientes transformaciones infinitesimales en la relación (A.7) se obtiene, a primer orden en $\delta\omega_a{}^b$

$$[\gamma^a, S_1] = \gamma^b\, \delta\omega_b{}^a = \eta^{ab}\, \gamma^c\, \delta\omega_{bc}\,. \tag{A.13}$$

Por la antisimetría de $\delta\omega_{ab}$, se tiene que

$$\delta\omega_{ab} = \delta\omega_{[ab]} = \frac{1}{2}\,(\delta\omega_{ab} - \delta\omega_{ba})\,, \tag{A.14}$$

por lo que al sustituir en (A.13) se tiene

$$[\gamma^a, S_1] = \frac{1}{2}\left(\eta^{ab}\, \gamma^c - \gamma^b\, \eta^{ac}\right) \delta\omega_{bc}\,. \tag{A.15}$$

Utilizando el álgebra de Dirac se llega al resultado

$$[\gamma^a, S_1] = \frac{1}{4}\left(\gamma^a\, \gamma^b\, \gamma^c - \gamma^b\, \gamma^c\, \gamma^a\right) \delta\omega_{bc} = \frac{1}{4}\,[\gamma^a\,, \gamma^b\, \gamma^c]\, \delta\omega_{bc}\,. \tag{A.16}$$

Si se comparan los conmutadores, se obtiene

$$S_1 = \frac{1}{4}\, \gamma^b\, \gamma^c\, \delta\omega_{bc} = \frac{1}{8}\,[\gamma^b\,, \gamma^c]\, \delta\omega_{bc}\,, \tag{A.17}$$

donde se ha utilizado el álgebra de Dirac nuevamente para obtener la segunda igualdad. Por lo tanto, el operador $S(\Lambda)$ infinitesimal dada una transformación de Lorentz infinitesimal resulta

$$S(\mathbb{I} + \delta\omega) = \mathbb{I}_4 + \frac{1}{4}\, \gamma^a\, \gamma^b\, \delta\omega_{ab}\,, \tag{A.18}$$

o bien, introduciendo el tensor de espín $\sigma^{ab}$ definido por

$$\sigma^{ab} = \frac{i}{2}\,[\gamma^a\,, \gamma^b] = i\, \gamma^a\, \gamma^b \tag{A.19}$$

se tiene finalmente

$$S(\mathbb{I} + \delta\omega) = \mathbb{I}_4 - \frac{i}{4} \sigma^{ab}\, \delta\omega_{ab} \tag{A.20}$$

para una transformación inifitesimal de Lorentz y

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma^{ab}\, \omega_{ab}\right) \tag{A.21}$$

para una transformación finita. Así, los espinores de Dirac transforman ante transformaciones de Lorentz como

$$\Psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^{ab}\,\omega_{ab}\right)\Psi(x)\,. \tag{A.22}$$

Se dice que $S(\Lambda)$ es la representación del grupo de Lorentz sobre los espinores de Dirac $\Psi(x)$; las componentes del tensor de espín $\sigma^{ab}$ son los generadores de la representación y $\omega_{ab}$ los parámetros de la transformación de Lorentz. La covariancia de la ecuación es particularmente útil al momento de generalizar la ecuación de Dirac a espacio-tiempo curvo.

# APÉNDICE B

# Bases ortonormales

En relatividad general, una base ortonormal es una generalización de una base coordenada definida en el espacio tangente de una variedad Lorentziana que consiste de 4 vectores linealmente independientes, ortonormales entre sí, uno tipo tiempo y tres tipo espacio llamados tétrada. Es conveniente trabajar en el formalismo de bases ortonormales sobre el formalismo de bases coordenadas por el hecho de que se puede escoger un sistema de referencia local en el que el espacio-tiempo sea plano; la base de vectores en ese sistema de referencia es local, pero las componentes de los vectores se pueden expresar en términos de una base coordenada. Incluso se puede encontrar un sistema de referencia en el que el espacio-tiempo sea plano a lo largo de toda una geodésica, tal sistema es inercial y se conoce como de Fermi-Walker. En tal sistema, las bases ortnormales son más convenientes de usar. También es conveniente a la hora de generalizar la ecuación de Dirac para espacios curvos.

En el estudio de las variedades diferenciales, es común trabajar con una base coordenada $\{X_\mu = \partial_\mu\}$ en cada punto del espacio tangente $V_p$; también es posible elegir una base coordenada en el espacio dual (contangente) $V_p^*$ denotada por $\{\mathrm{d}x^\mu\}$. Cualquier vector $v \in V_p$ puede ser escrito como combinación lineal de los elementos de la base coordenada $\{X_\mu = \partial_\mu\}$

$$v = v^\mu X_\mu \,,$$

mientras que cualquier 1-forma $\omega \in V_p^*$ se escribe como combinación lineal de la base dual $\{\mathrm{d}x^\mu\}$

$$\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \,.$$

Los elementos del espacio dual $V_p^*$ son aplicaciones lineales $\omega : V_p \to \mathbb{R}$ tal que se cumple

$$\mathrm{d}x^\mu \left(\partial_\nu\right) = \delta^\mu{}_\nu \,.$$

La métrica $g$ puede desarrollarse en la base coordenada dual $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ en términos de sus componentes $g_{\mu\nu}$

$$g = \mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,. \tag{B.1}$$

La base coordenada junto con su base dual no son en general ortonormales, salvo el caso de que se trate de coordeandas cartesianas. Por otro lado, por el principio de equivalencia, un observador en caída libre es localmente equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad, es decir, que en cada punto de una variedad diferenciable es posible construir un sistema localmente plano. En el mismo punto, existe coordenadas generales $x^\mu$ asociadas con la métrica (B.1). En el sistema localmente plano, se puede construir una base local ortonormal no coordenada $\{e_a\}$, con su correspondiente base dual $\{\omega^a\}$ tal que la métrica se escribe

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\,\omega^a\,\omega^b\,, \tag{B.2}$$

donde $\eta_{ab}$ es la métrica plana. $\{\omega^a\}$ son el conjunto de diferenciales en el sistema localmente plano, los cuales están relacionados con la base coordenada dual $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ por

$$\omega^a = e^a{}_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \tag{B.3}$$

Los coeficientes $e^a{}_\mu = e^a{}_\mu(x)$ forman una matriz de $4\times 4$ invertible; estos coeficientes se conocen como tetradas o vierbein. Los elementos inversos de las tetradas se denotan por $e^\mu{}_a$ y satisfacen

$$e^a{}_\mu\,e^\mu{}_b = \delta^a{}_b\,, \quad e^\mu{}_a\,e^a{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu\,. \tag{B.4}$$

Al sustituir (B.3) en (B.2) se obtiene

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\,e^a{}_\mu\,e^b{}_\nu\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,.$$

La invariancia del intervalo espacio-tiempo para la base coordenada $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ y para la base local ortonormal $\{\omega^a\}$ permite la comparación con (B.1), obteniendo la importante relación

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\,e^a{}_\mu\,e^b{}_\nu = e^a{}_\mu\,e_{a\nu}\,, \quad \eta_{ab} = e_a{}^\mu\,e_b{}^\nu\,g_{\mu\nu}\,. \tag{B.5}$$

Los elementos inversos de las tetradas sirven como componentes de la base coordenada $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ en términos de la base local ortonormal

$$\mathrm{d}x^\mu = e^\mu{}_a\,\omega^a\,.$$

Nótese que las tetradas $e^a{}_\mu$ sirven como componentes de la base local ortonormal de 1-formas $\{\omega^a\}$ en términos de la base coordenada dual, mientras que los elementos inversos

$e^{\mu}{}_{a}$ sirven como componentes de la base local ortonormal de vectores en términos de la base coordenada

$$e_a = e^{\mu}{}_{a} X_{\mu} \,.$$

En general cualquier vector puede ser expresado en términos de sus componentes en la base ortonormal. Si $\{e_a\}$ es la base local ortonormal de vectores y $\{X_{\mu}\}$ la base coordenada, entonces el vector $v \in V_p$ se escribe en ambas bases como

$$v = v^{\mu} X_{\mu} \,, \quad v = V^a e_a = V^a e_a{}^{\mu} X_{\mu} \,.$$

Las componentes de $v$ eb la base local y base coordenada se relacionan por

$$V^{\mu} = e^{\mu}{}_{a} V^a \,, \quad V^a = e^a{}_{\mu} V^{\mu} \,. \tag{B.6}$$

La tetrada cambia índices griegos en índices latinos y visceversa. Es por eso que los ínidices latinos se conocen como índices planos y los índices griegos como curvos, haciendo referencia a que están asociados a la base coordenada asociada con el siste de coordeandas generales $x^{\mu}$.

SECCIÓN B.1

## Transformaciones locales de Lorentz

En el sistema localmente plano se cumple la relatividad especial, por lo que se pueden hacer transformaciones locales que permitan pasar de una tetrada $e^a{}_{\mu}$ a otra $e'^a{}_{\mu}$. Es posible expresar la nueva tetrada como combinación lineal de la vieja tetrada

$$e^a{}_{\mu} \rightarrow e'^a{}_{\mu} = \Lambda^a{}_b(x)\, e^b{}_{\mu} \tag{B.7}$$

tal que ambas tetradas deben cumplir (B.5)

$$\eta_{ab} = e_a{}'^{\mu}\, e_b{}'^{\nu}\, g_{\mu\nu} \,.$$

Sustituyendo (B.7) en esta expresión, se obtiene

$$\eta_{ab} = \Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d e_c{}^{\mu} e_d{}^{\nu} g_{\mu\nu} = \Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d \eta_{cd}$$

o bien como matrices

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \,. \tag{B.8}$$

Esto muestra que la transformación local que relaciona las dos tetradas pertenece al grupo de Lorentz, por lo que en relatividad general, el grupo de Lorentz se considera como el grupo de rotaciones de las tetradas.

El hecho de que tanto $e^{a}{}_{\mu}$ como $e'^{a}{}_{\mu}$ cumplan (B.5), quiere decir que ambas tetradas determinan la misma métrica del espacio-tiempo, y por ende las mismas ecuaciones de campo, que es equivalente a decir que la métrica (B.1) es invariante ante tranformaciones locales de Loremtz. Al hacer un cambio general de coordenadas $x \to x'$, esta tranformación induce un cambio local en las transformaciones locales de Lorentz, entonces ante un cambio general de coordenadas, $e^{a}{}_{\mu}(x)$ debe transformar como un vector covariante hasta una tranformación local de Lorentz

$$e^{a}{}_{\mu}(x) \to e'^{a}{}_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \Lambda^{a}{}_{b}(x) \, e^{b}{}_{\nu}(x) \,, \tag{B.9}$$

mientras que las componentes $V^{a}$ del vector $v$ en la base local ortonormal deben transformar como escalares ante un cambio general de coordenadas

$$V^{a}(x) \to V'^{a}(x') = \Lambda^{a}{}_{b}(x) \, V^{b}(x) \,. \tag{B.10}$$

En general, un tensor mixto del tipo $T^{a\mu}{}_{b\nu}$ transforman ante cambios generales de coordenadas como

$$T'^{a\mu}{}_{b\nu} = \Lambda^{a}{}_{c} \Lambda^{d}{}_{b} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} T^{c\lambda}{}_{d\sigma} \tag{B.11}$$

# APÉNDICE C

# Conexión de espín

En geometría diferencial, asociamos un operador derivada covariante a una base coordenada $\{X_\mu\}$ como una aplicación lineal que toma elementos del espacio dual $V_p^*$ y da un tensor del tipo $(0,2)$

$$\nabla_\mu \, \omega_\nu = \partial_\mu \, \omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \, \omega_\lambda \,, \tag{C.1}$$

una vez se haya escogido una base coordenada $\{X_\mu\}$. Para un vector, la derivada covariante actúa como

$$\nabla_\mu \, t^\nu = \partial_\mu \, t^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \, t^\lambda \,, \tag{C.2}$$

donde $\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ es la conexión de Levi-Civitta, símbolos de Christoffel; el cálculo de las componentes de la conexión requiere del conocimiento de las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$. En una base ortonormal local $\{e^a\}$ se generaliza la conexión de Levi-Civitta por la conexión de espín $\Gamma_\mu$ cuyos coeficientes se conocen como *coeficientes de rotación de Ricci $\omega_\mu{}^a b$*. Se pide que la métrica $\eta_{ab}$ sea compatible con el operador derivada covariante $\nabla_\mu \eta_{ab} = 0$. Por cada índice latino se debe incluir un coeficiente de Ricci contraído con el vector. Por ejemplo

$$\nabla_\mu \, V^a{}_b = \partial_\mu \, V^a{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b \, V^a{}_c + \omega_\mu{}^a{}_c \, V^c{}_b \,. \tag{C.3}$$

La derivada covariante $\nabla_\mu \, V^a$ debe tranformar covariantemente ante cambios generales de coordenadas como

$$\nabla'_\mu \, V'^a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \, \Lambda^a{}_b \, \nabla_\nu \, V^b \,. \tag{C.4}$$

Esto implica que los coeficientes de Ricci transformen ante cambios generales de coordenadas de la siguiente manera:

$$\partial'_\mu V'^a + \omega_\mu{}'^a{}_c \, V'^c = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \, \Lambda^a{}_b \, (\partial_\nu V^b + \omega_\nu{}^b{}_c \, V^c) \,.$$

El vector $V^a$ y la derivada ordinaria $\partial_\mu$ transforman como

$$V'^a = \Lambda^a{}_b V^b\,, \quad V'^c = \Lambda^c{}_d V^d\,, \quad \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\partial_\nu\,,$$

por lo que (C.4) resulta:

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\partial_\nu\,(\Lambda^a{}_b) + \omega_\mu{}'^a{}_c\,\Lambda^c{}_d V^d = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\Lambda^a{}_b\,(\partial_\nu V^b + \omega_\nu{}^b{}_e V^e)\,.$$

Simplificando, se llega a la regla de transformación de los coeficientes de Ricci ante cambios generales de coordenadas

$$\omega_\mu{}'^a{}_b = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left[\Lambda^a{}_c\,\omega_\nu{}^c{}_d\,(\Lambda^{-1})^d{}_b - (\partial_\nu\,\Lambda^a{}_c)\,(\Lambda{-}1)^c{}_b\right]. \tag{C.5}$$

Para transformaciones infinitesimales de Lorentz, se tiene la siguiente regla de transformación para $\omega_\mu{}^a{}_b$

$$\omega_\mu{}'^{ab} = \omega_\mu{}^{ab} - \delta\varepsilon^b{}_d\,\omega_\mu{}^{ad} + \delta\varepsilon^a{}_c\,\omega_\mu{}^{cb} - \partial_\nu\,\delta\varepsilon^{ab}\,.$$

Para calcularlos se requieren ciertos resultados de bases ortonormales, como el *postulado de la tétrada*. La acción de la derivada covariante sobre $V^a$ se obtiene con ayuda de la ecuación (B.6):

$$\begin{aligned}\nabla_\mu V^a = \nabla_\mu\,(e^a{}_\nu V^\nu) &= (\nabla_\mu e^a{}_\nu)V^\nu + e^a{}_\nu(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\,V^\lambda) = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b \\ &= \partial_\mu(e^a{}_\nu V^\nu) + \omega_{\mu b}\,e^b{}_\nu V^\nu\,.\end{aligned}$$

Comparando, se obtiene la derivada covariante de la tetrada $e^a{}_\nu$

$$\nabla_\mu\, e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b\, e^b{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\, e^a{}_\lambda\,. \tag{C.6}$$

La acción de la derivada covariante sobre la tetrada $e^a{}_\nu$ es cero, resultado que se conoce como *postulado tetrada* [48]. Para demostrarlo, se considera la derivada covariante escrita en la base coordenada dual $\{\mathrm{d}x^\mu\}$

$$\nabla = \nabla_\mu\,\mathrm{d}x^\mu\,.$$

Ahora el vector $V = V^\mu X_\mu$; entonces

$$\begin{aligned}\nabla V &= (\nabla_\mu V^\nu)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes X_\nu \\ &= (\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\, V^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes X_\nu\,.\end{aligned}$$

Ahora expresamos el vector $V$ en la base local ortonormal

$$V = V^a\, e_a = e^a{}_\mu\, V^\mu\, e_a = e^a{}_\mu\, V^\mu\,(e^\nu{}_a X_\nu)\,.$$

La acción de la derivada covariante sobre el vector $V$ escrito en la base ortonormal resulta:

$$\nabla V = (\partial_\mu V^\nu + e^\nu{}_a V^\sigma\, \partial_\mu e^a{}_\sigma + e^\nu{}_a\, e^b{}_\sigma\, \omega_\mu{}^a{}_b\, V^\sigma)\mathrm{d}x^\mu \otimes X_\nu\,.$$

Comparando con $\nabla V$, con $V$ escrito en la base coordenada, se obtiene el resultado

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} = e^\nu{}_a\, \partial_\mu e^a{}_\sigma + e^\nu{}_a\, e^b{}_\sigma\, \omega_\mu{}^a{}_b\,,$$

o bien

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e^\sigma{}_b\,(e^a{}_\nu\, \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} - \partial_\mu e^a{}_\sigma)\,. \tag{C.7}$$

Esta es la expresión general para el cálculo de los coeficientes de rotación de Ricci, que como se muestra, depende de manera implícita de las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ por medio de las componentes de la conexión de Levi-Civitta. Si ahora se sustituye este resultado en (C.6) se obtiene

$$\nabla_\mu\, e^a{}_\nu = 0\,. \tag{C.8}$$

Por el requisito de compatibilidad de la métrica plana con la derivada covariante se muestra fácilmente que las componentes de la conexión de espín son antisimétricas en los índices latinos

$$\nabla_\mu\, \eta_{ab} = \partial_\mu\, \eta_{ab} - \omega_\mu{}^c{}_a\, \eta_{cb} - \omega_\mu{}^d{}_b\, \eta_{ad} = 0$$

$$\omega_{\mu\, ab} = -\omega_{\mu\, ba}\,. \tag{C.9}$$

Esta es la gran diferencia que existe entre los coeficientes de Ricci y las componentes de la conexión de Levi-Civitta: $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ es simétrica en los índices covariantes, mientras que $\omega_{\mu\, ab}$ es antisimétrico en los índices latinos, lo que reduce considerablemente el número de componentes independientes.

# Bibliografía


[1] Audretsch, J. and Schafer, G. (1978). Thermal particle production in a radiation dominated robertson-walker universe. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 11(8):1583.

[2] Barut, A. and Duru, I. (1987). Exact solutions of the dirac equation in spatially flat robertson-walker space-times. *Physical Review D*, 36(12):3705.

[3] Bianchi, L. (1902). Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di riemann. *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 11(5):3–7.

[4] Birrell, N. D., Birrell, N. D., and Davies, P. (1984). *Quantum fields in curved space*. Number 7. Cambridge university press.

[5] Brill, D. R. and Wheeler, J. A. (1957). Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Reviews of Modern Physics*, 29(3):465.

[6] Bukhbinder, I. (1980). Production of scalar particles in cosmological models. *Soviet Physics Journal*, 23(7):545–548.

[7] Carroll, S. M. (2005). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison Wesley.

[8] Chandrasekhar, S. (1976). The solution of dirac's equation in kerr geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 349(1659):571–575.

[9] Chapman, T. C. and Leiter, D. J. (1976). On the generally covariant dirac equation. *American Journal of Physics*, 44(9):858–862.

[10] Chitre, D. M. and Hartle, J. (1977). Path-integral quantization and cosmological particle production: An example. *Physical Review D*, 16(2):251.

[11] Collas, P. and Klein, D. (2018). The dirac equation in general relativity, a guide for calculations. *arXiv preprint arXiv:1809.02764*.

[12] Costa, I. (1989). Separable coordinates and particle creation. ii: Two new vacua related to accelerating observers. *Journal of mathematical physics*, 30(4):888–891.

[13] Doroshkevich, A. (1965). Model of a universe with a uniform magnetic field. *Astrophysics*, 1(3):138–142.

[14] Duru, I. (1994). Particle production in a class of anisotropic cosmologies. *General Relativity and Gravitation*, 26(10):969–978.

[15] Fulling, S. A. et al. (1989). *Aspects of quantum field theory in curved spacetime*, volume 17. Cambridge university press.

[16] Greiner, W. and Reinhardt, J. (2013). *Field quantization*. Springer Science & Business Media.

[17] Grib, A., Mamayev, S., and Mostepanenko, V. (1976). Particle creation from vacuum in homogeneous isotropic models of the universe. *General Relativity and Gravitation*, 7(6):535–547.

[18] Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220.

[19] Jacobs, K. C. (1968). Spatially homogeneous and euclidean cosmological models with shear. *The Astrophysical Journal*, 153:661.

[20] Jauch, J. M. and Rohrlich, F. (2012). *The theory of photons and electrons: the relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half*. Springer Science & Business Media.

[21] Kantowski, R. and Sachs, R. K. (1966). Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, 7(3):443–446.

[22] Kasner, E. (1921). Geometrical theorems on einstein's cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, 43(4):217–221.

[23] Madsen, M. S. (1988). Scalar fields in curved spacetimes. *Classical and quantum gravity*, 5(4):627.

[24] Moradi, S. (2009). Particle creation in asymptotically minkowskian spacetimes. *Journal of Geometry and Physics*, 59(2):173–184.

[25] Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., and Clark, C. W. (2010). *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. Cambridge university press.

[26] Parker, L. (1969). Quantized fields and particle creation in expanding universes. i. *Physical Review*, 183(5):1057.

[27] Parker, L. (1977). The production of elementary particles by strong gravitational fields. In *Asymptotic structure of space-time*, pages 107–226. Springer.

[28] Parker, L. (1980). One-electron atom as a probe of spacetime curvature. *Physical Review D*, 22(8):1922.

[29] Parker, L. and Pimentel, L. O. (1982). Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Physical Review D*, 25(12):3180.

[30] Parker, L. and Toms, D. (2009). *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. Cambridge university press.

[31] Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of physical cosmology*. Princeton university press.

[32] Pimentel, L. O. (1989). Energy-momentum tensor in the general scalar-tensor theory. *Classical and Quantum Gravity*, 6(12):L263.

[33] Pimentel, L. O. (1992). The klein-gordon equation in some anisotropic cosmologies. *General relativity and gravitation*, 24(9):985–989.

[34] Pimentel, L. O. (1993). Weyl equation in some anisotropic stiff fluid universes. *International journal of theoretical physics*, 32(6):979–984.

[35] Poplawski, N. J. (2007). Covariant differentiation of spinors for a general affine connection. *arXiv preprint arXiv:0710.3982*.

[36] Ryan, M. P. and Shepley, L. C. (2015). *Homogeneous relativistic cosmologies*. Princeton University Press.

[37] Schrödinger, E. (1939). The proper vibrations of the expanding universe. *Physica*, 6(7-12):899–912.

[38] Schwinger, J. (1951). On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82(5):664.

[39] Shishkin, G. V. and Andrushkevich, I. E. (1985). Some exact solutions of the dirac equation in the kasner space-time. *Physics Letters A*, 110(2):84–86.

[40] Shishkin, G. V. and Cabos, W. D. (1991). The dirac equation in external fields: Variable separation in cartesian coordinates. *Journal of mathematical physics*, 32(11):3184–3188.

[41] Shishkin, G. V. and Villalba, V. M. (1989a). Dirac equation in external vector fields: New exact solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 30(10):2373–2381.

[42] Shishkin, G. V. and Villalba, V. M. (1989b). Dirac equation in external vector fields: Separation of variables. *Journal of Mathematical Physics*, 30(9):2132–2142.

[43] Thorne, K. S. (1967). Primordial element formation, primordial magnetic fields, and the isotropy of the universe. *The Astrophysical Journal*, 148:51.

[44] Vajk, J. P. and Eltgroth, P. G. (1970). Spatially homogeneous anisotropic cosmological models containing relativistic fluid and magnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, 11(7):2212–2222.

[45] Villalba, V. M. (1995). Creation of spin-1/2 particles by an electric field in de sitter space. *Physical Review D*, 52(6):3742.

[46] Villalba, V. M. (1997). Particle creation in a cosmological anisotropic universe. *International Journal of Theoretical Physics*, 36(6):1321–1328.

[47] Villalba, V. M. and Greiner, W. (2001). Creation of scalar and dirac particles in the presence of a time varying electric field in an anisotropic bianchi type i universe. *Physical Review D*, 65(2):025007.

[48] Yepez, J. (2011). Einstein's vierbein field theory of curved space. *arXiv preprint arXiv:1106.2037*.

[49] Zeldovich, Y. B. and Starobinsky, A. (1977). Rate of particle production in gravitational fields. *JETP Lett*, 26(5).

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00088
**Matrícula: 2181801394**

SISTEMAS CUÁNTICOS EN MODELOS COSMOLÓGICOS ISÓTROPOS Y NO ISÓTROPOS

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 17:00 horas del día 14 del mes de septiembre del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: FLAVIO JOAO PINEDA ARVIZU

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES

FLAVIO JOAO PINEDA ARVIZU
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

VOCAL

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

SECRETARIO

DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella