

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

TESIS

“Bifurcaciones de ondas en espiral”

***que para obtener el grado de:
Doctora en Ciencias (Matemáticas)***

PRESENTA

Alexandra Guzmán Velázquez

Matrícula: 2172801466

ORCID: 0009-0008-3637-0691

Correo electrónico: alexandra.velazquez29@gmail.com

COMITÉ TUTORAL

Director: Dr. Joaquín Delgado Fernández

JURADO

Presidente:

Dr. José Luis Aragón Vera

Secretario:

Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Vocal:

Dr. Guillermo Chacón Acosta

Dr. Luis Franco Pérez

Dr. Aldo Ledesma Durán

Iztapalapa, Ciudad de México a 2 de junio de 2025

Índice general

Resumen	5
Introducción	9
1. Ondas espirales en modelos de reacción-difusión	13
1.1. Ondas Espirales	13
1.1.1. Ondas en sistemas de Reacción-Difusión	16
1.1.2. Ondas en medios excitables: <i>FHN</i> y <i>BVAM</i>	18
1.1.3. Trayectoria de la punta de una onda en espiral	25
1.2. Ondas en Stuart-Landau y Ginzburg-Landau	33
1.2.1. La ecuación de Stuart Landau	33
1.2.2. La ecuación de Ginzburg Landau	35
1.3. Método de Múltiples escalas	37
2. Propiedades de ondas y patrones	45
2.1. Estabilidad en ondas 1D	46
2.1.1. Inestabilidades absoluta y convectiva	48
2.1.2. Construcción de la gráfica del espacio de parámetros (α, β)	51
2.2. Espirales y Antiespirales en ondas 1D	53
2.3. Persistencia en ondas 1D	56
2.4. Estabilidad de onda en espiral con un brazo	57
2.5. Las distintas fases solución de la CGLE	62
3. Resultados de la simulaciones numéricas	69
3.1. Estabilidad en ondas 2D	70
3.2. Espirales y antiespirales en ondas 2D	77
3.3. Persistencia en ondas 2D	83
3.3.1. Efecto del tamaño del dominio en la estabilidad espiral	85
3.4. Comportamientos y Fases en ondas 2D	88
Conclusiones y perspectivas	95
Referencias	97
Apéndices	104
Apéndice A. Brusselator y BVAM por método multiescalas	104
Apéndice B. Método de descenso pronunciado	112

Apéndice C. COMSOL Multiphysics y Elemento finito	116
Apéndice D. Diferencias Finitas en Matlab	123

Resumen

La ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE) es esencial para describir la dinámica de sistemas oscilatorios y patrones espaciales cerca del umbral de aparición de oscilaciones. Este trabajo desarrolla un análisis matemático detallado de la CGLE, deduciendo heurísticamente sus coeficientes para sistemas de reacción-difusión a través del método de multiescala. Este método, fundamental en el tratamiento de sistemas no lineales, permite separar las contribuciones en distintas escalas espaciales y temporales, garantizando una descripción precisa de las dinámicas emergentes.

El estudio inicia con una revisión de modelos clásicos en medios excitables y oscilatorios —como FitzHugh-Nagumo, BVAM y Stuart-Landau— que permiten explorar el comportamiento espiral en distintos contextos biológicos y físicos. Se analiza la trayectoria de la punta espiral, retomando clasificaciones previas (Winfrey y Barkley) que describen una rica variedad de soluciones como ondas rotatorias, moduladas, serpenteantes y florales, a través de bifurcaciones tipo Hopf.

El análisis matemático se centra en la diferenciación y caracterización de las inestabilidades convectiva y absoluta en ondas espirales. Estas se abordan mediante herramientas teóricas avanzadas, evaluando su impacto en la formación y persistencia de patrones bidimensionales. Se demuestra que la estabilidad convectiva y absoluta diverge significativamente de los resultados obtenidos en configuraciones unidimensionales o en ondas planas, proporcionando una nueva perspectiva sobre la estabilidad de las ondas espirales en sistemas bidimensionales. Además, se identifican las condiciones matemáticas bajo las cuales estas inestabilidades se manifiestan y cómo estas dependen de los parámetros del sistema, validando estas conclusiones mediante simulaciones numéricas.

A través de simulaciones en dominios circulares, implementadas en COMSOL Multiphysics usando el método de elementos finitos, se evita el efecto de bordes irregulares y se utiliza una espiral de Arquímedes como condición inicial. Este tipo de espiral, en un medio homogéneo e infinito con dinámica estacionaria estable, genera frentes de onda que, a gran distancia del núcleo, se comportan localmente como ondas planas, lo que permite aproximaciones analíticas y comparaciones con soluciones conocidas. Esto facilita un análisis detallado de la dinámica espiral y de la influencia del tamaño del dominio en la estabilidad y evolución de las soluciones. Se construyen mapas en el espacio de parámetros que revelan la aparición de espirales y antiespirales, así como regiones de persistencia y transiciones entre distintas fases aportando nueva evidencia sobre la dependencia topológica y dinámica del sistema.

Este estudio no solo proporciona un marco teórico robusto para el análisis de las inestabilidades convectiva y absoluta en ondas espirales, sino que también destaca la importancia de técnicas matemáticas avanzadas, como el método de multiescala, las simulaciones en dominios curvos y los modelos con simetría euclidiana, para comprender la interacción entre condiciones iniciales, estabilidad y geometría del dominio. Los resultados obtenidos sientan las bases para futuras investigaciones que busquen predecir y analizar patrones complejos en sistemas de reacción-difusión en diversas aplicaciones físicas.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), agradezco la beca de doctorado con la que se pudo llevar a cabo esta tesis, así como el invaluable apoyo para mi formación académica y profesional.

Introducción

La ecuación de Ginzburg-Landau compleja (CGLE) es una ecuación no lineal que describe comportamientos universales que se pueden aplicar a la explicación de diferentes tipos de sistemas tales como ondas no lineales, vórtices, transiciones de fase de segundo orden, superconductividad, superfluidez y condensación de Bose-Einstein, entre otros, [1]. Esta versatilidad se debe a su variado espectro de comportamiento dinámico cuando se modifican sus parámetros, reflejando la interacción entre la disipación, la dispersión y la no linealidad, [2]. La CGLE está dada por

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - (1 + i\alpha)|A|^2 A + (1 + i\beta)\nabla^2 A. \quad (1)$$

En esta ecuación $A(\mathbf{r}, t)$ es una función compleja, α y β son parámetros y ∇^2 es el operador laplaciano, para nuestro caso, en el espacio bidimensional. La CGLE se puede ver como una ecuación del tipo universal o genérica para los diferentes tipos de fenómenos oscilatorios del sistema espacialmente extendido, en la vecindad de la bifurcación de Hopf o para describir el inicio de la formación de patrones en medios activos [50].

Dentro de este espectro de soluciones, las ondas espirales son una forma específica de autoorganización con una estabilidad notable. Estos patrones se han estudiado en una amplia variedad de procesos físicos, químicos y biológicos, tanto en medios excitables como oscilatorios, [67], desde el trabajo pionero sobre la reacción química de Belousov-Zhabotinsky, [102] y el artículo precursor sobre las espirales de Winfree, [98], entre otros. Entre las aplicaciones de las ondas espirales se encuentra una de gran importancia práctica que son las espirales que pueden ocurrir en el músculo cardíaco y que es la base de arritmias peligrosas, incluida la fibrilación, [74].

Para dar lugar a vórtices o espirales, ya sea en sistemas excitables u oscilatorios extendidos en dos dimensiones, es necesario inducir defectos puntuales [12]. Si se escribe la amplitud en la forma $A = Re^{i\theta}$, donde R es el módulo y θ la fase, un defecto puntual es un cero de A , donde también hay una singularidad de la fase. La carga topológica del defecto viene dada por $m = (1/2\pi) \oint_C \nabla\theta \cdot d\mathbf{l}$, donde C es cualquier trayectoria cerrada que rodea el defecto, [7]. Las soluciones como vórtices o espirales correspondientes a los casos $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq \beta$, respectivamente, son topológicamente estables. En el primer caso, las líneas de fase constante son rayos que emanan del origen. En el segundo caso, las líneas de fase constante emanan como espirales de Arquímedes, excepto cerca del centro [2].

La comprensión actual de la dinámica, la estabilidad y la ley del movimiento para la solución en espiral de CGLE es insuficiente debido a la complicación del problema, incluso para un solo defecto. Por ejemplo, actualmente se han estudiado diferentes leyes de movimiento para la interacción de dos espirales en [4] bajo varios enfoques, principalmente cuando la separación

entre espirales es mayor que el radio del núcleo exterior. Las espirales y antiespirales que son fuentes de ondas rotatorias que se distinguen solo por el signo de la velocidad de fase de las ondas emitidas se estudian en [73] para “espirales” unidimensionales. La deriva o desplazamiento espontáneo de la onda espiral en medios excitables y oscilatorios se atribuye a la interacción del defecto con el límite del medio y se estudia numéricamente en [56]. También se ha establecido que el número de onda asintótico $q = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial\theta/\partial r$ de una sola espiral está determinado únicamente por el llamado parámetro de torsión $\tau = (\alpha - \beta)/(1 + \alpha\beta)$, [45]. Muchos aspectos del diagrama de fase de la CGLE bidimensional, incluidos los estados congelados, la fase y la turbulencia de defectos, se clasificaron por primera vez en el diagrama clásico de [7, 24]. Para esta clasificación, los resultados para ondas unidimensionales basados en [96] se utilizan nuevamente para mostrar que la inestabilidad espiral de Eckhaus es de naturaleza convectiva y no conduce necesariamente a una inestabilidad absoluta. En las referencias [8, 103], se sugieren estrategias de control de turbulencia sin una fuerza de gradiente, mediante el desarrollo de ondas espirales con y sin inyección de retroalimentación local.

Dada la gran importancia de CGLE en el modelado de medios oscilatorios y (con algunos ajustes, [69], en medios excitables), en este trabajo se realiza un estudio detallado sobre soluciones espirales en un dominio bidimensional finito de forma circular, inicializado con un único defecto. Hay pocos resultados sobre la selección del número de onda y la predicción de la estabilidad en este dominio. Por ejemplo, en [66], se investigaron las soluciones de la CGLE en un dominio circular, encontrando patrones *target* y espirales y se dieron cuenta que el origen de este tipo de espirales radica exactamente en el mismo dominio circular. En un trabajo reciente, [29], se demuestra teóricamente la existencia de estas ondas espirales en CGLE y se percataron que éstas pueden girar lentamente y torcerse ligeramente debido a las perturbaciones. Sin embargo, no se sabe mucho más sobre la formación de las espirales de la CGLE en dominios circulares. Por lo tanto, en esta tesis, se hace uso de las simulaciones numéricas para encontrar las ondas espirales en un dominio circular, para diferentes valores de (α, β) de CGLE cuando el radio R es varias veces la longitud de onda característica de la espiral proporcional a q^{-1} . Esto permitirá estudiar la estabilidad de las soluciones en espiral considerando que, lejos del núcleo, estas pueden interpretarse como fuentes locales de ondas planas viajeras. Desde esta perspectiva, es posible explorar propiedades como la selección del número de onda y la estabilidad en distintas regiones del espacio de parámetros, comparándolas con los resultados conocidos del caso unidimensional. Si bien esta analogía no implica una equivalencia total —especialmente en lo que respecta a la persistencia o la evolución global del patrón—, sí ofrece una base útil para trazar un espacio de fase numérico en el que se identifiquen comportamientos estables y transiciones dinámicas en espirales bidimensionales.

La organización de este trabajo es la siguiente, en el primer capítulo se discuten las ondas en espiral, se exhiben algunos modelos que describen las trayectorias de la punta de las ondas en espirales y se construye la ecuación cúbica compleja de Ginzburg-Landau, partiendo desde la teoría física y utilizando el método de múltiples escalas. En el segundo capítulo se revisan los resultados analíticos y numéricos conocidos para ondas espirales unidimensionales y los que se extienden a ondas de dos dimensiones, lo que incluye la teoría de la estabilidad, la dinámica de espirales y antiespirales, la persistencia, la espiral de un brazo y las regiones del espacio de parámetros. En el tercer capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas de la ecuación de Ginzburg-Landau compleja (CGLE), considerando

distintas configuraciones paramétricas. Las simulaciones se realizaron en un dominio circular utilizando el software COMSOL, que implementa el método de elementos finitos, a partir de una condición inicial tipo espiral. Se analizan las propiedades de las espirales aisladas y se discute en qué medida las predicciones formuladas para sistemas unidimensionales resultan válidas en contextos bidimensionales. Finalmente, se examinan las implicaciones del modelo CGLE y se concluye resaltando la necesidad de desarrollar teoría analítica que fundamente los fenómenos observados numéricamente.

Capítulo 1

Ondas espirales en modelos de reacción-difusión

En este capítulo se estudiarán las soluciones de onda tipo espiral en sistemas de reacción-difusión. Se presentarán los fundamentos de estos sistemas, describiendo cómo la difusión y las reacciones locales interactúan para formar patrones en medios continuos según las leyes de Fick. Se distinguirán dos tipos de sistemas principales en la formación de patrones oscilatorios: los sistemas excitables, como los modelos como FitzHugh-Nagumo (FHN) y BVAM, que describen medios donde perturbaciones por encima de un umbral desencadenan dinámicas complejas de excitación y recuperación, características de fenómenos biológicos como la propagación de impulsos eléctricos en neuronas o células cardíacas. Y los sistemas oscilatorios, caracterizados por oscilaciones emergentes cerca de una bifurcación de Hopf, modeladas con la ecuación de Stuart-Landau, clave para describir osciladores no lineales.

La extensión espacial de la ecuación de Stuart-Landau, conocida como la ecuación compleja de Ginzburg-Landau, permitirá modelar ondas espirales y patrones espaciales. Su derivación mediante el método de múltiples escalas será fundamental para entender la formación y estabilidad de patrones espirales en medios bidimensionales. Este desarrollo teórico, desde los sistemas básicos hasta la ecuación compleja de Ginzburg-Landau, proporcionará las herramientas necesarias para analizar patrones espaciales en sistemas complejos y sustentará los objetivos de la tesis.

1.1. Ondas Espirales

Los patrones espirales han sido objeto de estudio desde hace mucho tiempo. La razón de ello es que los podemos encontrar en múltiples organismos vivos y fenómenos naturales: concha de *nautilus*, cuerno de carnero, girasol, piña, cóclea en el oído humano, nebulosas espirales, huracanes, tornados, por mencionar sólo algunos. Las espirales han sido usadas en la arquitectura, en el diseño y en la artesanía por su belleza y estética y han sido parte fundamental de la solución de muchos problemas científicos, por lo cual podemos decir que las espirales pueden conectar diversas ramas del conocimiento y del arte [78]. Véase la Figura 1.1.

En matemáticas, las espirales se definen como curvas planas que normalmente giran alrededor de un punto (o alrededor de varios puntos), acercándose o alejándose de él (ellos). De acuerdo a la estructura de su ecuación, las espirales se pueden clasificar en dos grandes tipos: espirales

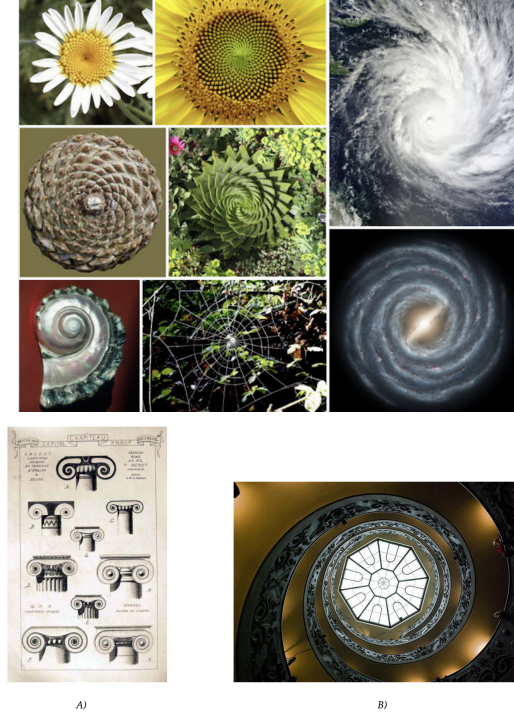


Figura 1.1: Las espirales en la naturaleza y en la arquitectura. Tomadas de [32] y [78].

algebraicas y pseudoespirales. Las espirales algebraicas son aquellas en las que sus ecuaciones en coordenadas polares son algebraicas con respecto a las variables r y θ . Ejemplos de éstas son las espirales: hiperbólica, de Arquímedes, de Galileo, de Fermat, parabólica y de *Lituus*. Las pseudoespirales son espirales cuyas ecuaciones se pueden escribir siempre en la forma $r = as^m$, donde r es el radio de curvatura y s es la longitud del arco. Cuando $m = 1$, se llama espiral logarítmica, cuando $m = -1$, espiral de Cornu, y cuando $m = 1/2$ es la evolvente de un círculo [79]. En el Cuadro 1.1 se pueden ver las espirales mencionadas, su ecuación y su gráfica en la Figura 1.2.

La espiral en la que se centra este trabajo es la arquimediana, por lo cual es importante hablar de ella. Arquímedes (287 a.C. - 212 a.C.) realizó un estudio exhaustivo de la dinámica de la espiral, la definió como una curva plana en la que la trayectoria del punto M se mueve uniformemente a lo largo del rayo OV con origen en O , véase la Figura 1.2 (a), mientras que el rayo OV gira uniformemente alrededor de O . La ecuación de la espiral de Arquímedes en el sistema de coordenadas polares se escribe de la siguiente manera:

$$r = k\theta, \quad (1.1)$$

donde k es el desplazamiento del punto M a lo largo del rayo r , con una rotación de un ángulo θ igual a un radián. Cuando el rayo gira en sentido contrario a las agujas del reloj, se obtiene la espiral a la derecha, mientras que al girar en el sentido de las agujas del reloj, se obtiene la espiral a la izquierda. Ambas ramas de la espiral (derecha e izquierda) están descritas por la misma ecuación.

Las ondas espirales aparecen también en los sistemas químicos, fisiológicos y biológicos, por lo que los modelos matemáticos que generan este tipo de soluciones de ondas son relevantes para estudiar estos fenómenos. Los modelos también permiten un estudio más riguroso en los

Nombre	Tipo	Autor	Ecuación
De Arquímedes	Algebraica	Arquímedes	$r = k\theta$
Logarítmica	Algebraica	Varignon, 1704	$r = ab^\theta$
Hiperbólica	Algebraica	Varignon, 1704	$r = a/\theta$
Parabólica	Algebraica	Fermat, 1636	$r = a\sqrt{\theta} + l, l > 0$
De Fermat	Algebraica	Fermat, 1636	$r = a\theta^2$
Galileana	Algebraica	Galileo, 1683	$r = a\theta^2 - l, l \geq 0$
De Lituus	Algebraica	Cotes, 1722	$r = a/\sqrt{\theta}$
Golden	Pseudoespiral	Fibonacci	$r = \phi^{2\theta/\pi}$
Fibonacci	Pseudoespiral	Fibonacci	$r = \phi^{2\theta/\pi}$
Cornu	Pseudoespiral	Euler, 1744	$r = b/2$
Involuta	Pseudoespiral	Huygens, 1673	$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$ $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$
Cochleoid	Pseudoespiral	Wallis, 1685	$r = a \sin \theta / \theta$

Cuadro 1.1: Algunas espirales, su tipo, autor y ecuación.

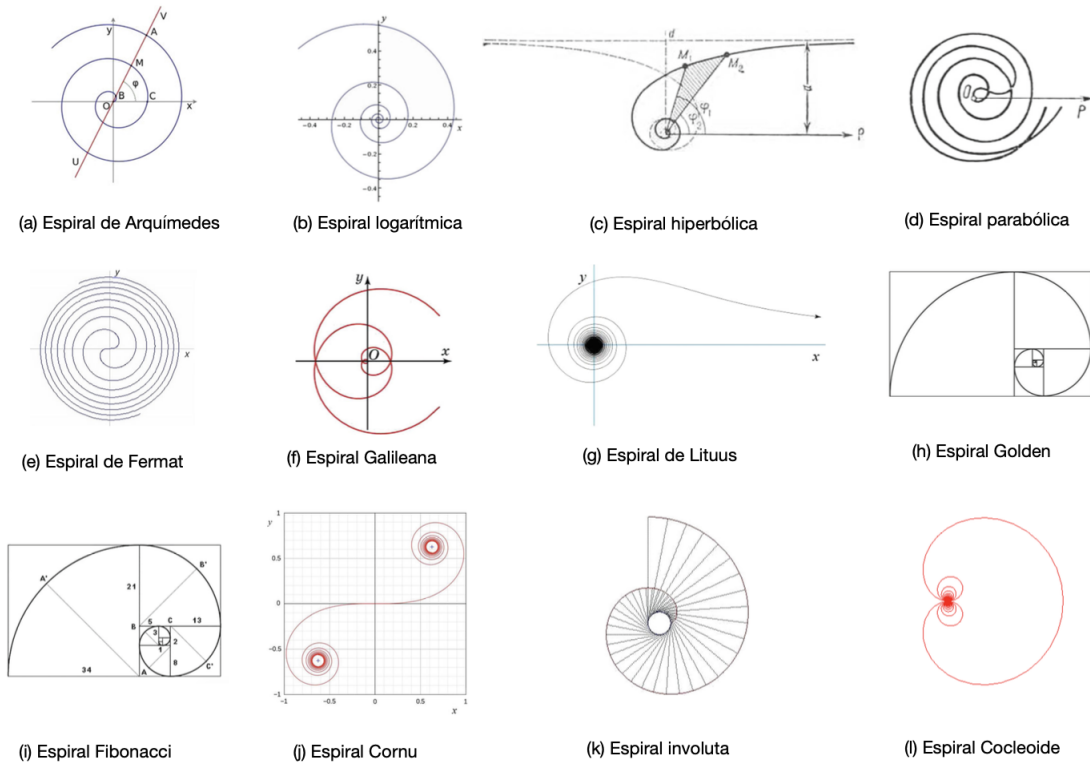


Figura 1.2: Gráfica de las espirales descritas en la Tabla 1. Figuras tomadas de [79].

sistemas en los que la recopilación de datos se ve obstaculizada o limitada. Algunos ejemplos de sistemas en los que se producen espirales en dos dimensiones son: las reacciones de Belousov–Zhabotinsky (BZ), algunas reacciones de oxidación catalítica de superficie, las ondas de cAMP en *Dictyostelium discoideum*, las ondas de calcio en las células beta pancreáticas, las ondas electroquímicas en el tejido cerebral o en el cardíaco [55, 71]. A continuación se presentan modelos matemáticos que usan ecuaciones diferenciales parciales de reacción difusión para su descripción.

1.1.1. Ondas en sistemas de Reacción-Difusión

Sea $u = u(x, t)$, la variable de estado que puede describir la densidad o concentración de una sustancia, una población, etc., en la posición $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Ω es un conjunto abierto), al tiempo t , dentro de un contenedor y $f(u)$ la producción o disminución de u en el dominio. Además puede existir un proceso de transporte de u , representado por el vector J . Este flujo, denotado por $J(x, t) \in \mathbb{R}^3$, es decir, un vector que apunta en la dirección general del movimiento y cuya norma es proporcional a la cantidad de partículas que fluyen en esa dirección por unidad de tiempo y de área transversal. Se elige un volumen de prueba Ω , con frontera $d\Omega$. El cambio en la masa en Ω es,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \, dV = - \int_{d\Omega} J(x, t) \, dS + \int_{\Omega} f(u, x, t) \, dV, \quad (1.2)$$

donde f describe la velocidad de producción de u dentro del volumen, dV denota el diferencial de volumen y dS el diferencial de superficie. El Teorema de divergencia de Gauss establece que,

$$\int_{d\Omega} J(x, t) \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x, t) \, dV,$$

Por lo cual, (1.2) se puede reescribir como,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} u + \operatorname{div} J - f(u, x, t) \right) \, dV = 0,$$

Dado que esta ecuación se cumple para todos los volúmenes de prueba Ω , la integral se puede omitir, lo que lleva a

$$\frac{d}{dt} u + \operatorname{div} J - f(u, x, t) = 0. \quad (1.3)$$

Esta es la segunda ley de Fick que establece la conservación de la cantidad extensiva relacionada con u . La primera ley de Fick establece que el flujo difusivo tiene la dirección opuesta al gradiente, esto es,

$$J = -D \nabla u. \quad (1.4)$$

Si se sustituye (1.4) en (1.3) se obtiene la ecuación de reacción-difusión (RD),

$$u_t = D \Delta u + f(u, x, t).$$

Los sistemas modelo de dos densidades o sustancias químicas que reaccionan y se difunden, con concentraciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$, se escriben en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \nabla^2 u \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v \quad (1.6)$$

El vector de posición x puede ser bidimensional o tridimensional dependiendo de si la formación del patrón se lleva a cabo en una capa delgada o en un gran volumen. Los términos $f(u, v)$ y $g(u, v)$ describen las reacciones químicas, mientras que la difusión de u y v está modelada por los términos laplacianos, siendo D_u y D_v las constantes de difusión positivas.

Los sistemas de reacción-difusión pueden exhibir un rango amplio de comportamientos espacio-temporales como: patrones de Turing, ondas viajeras, en espiral, rotor, serpenteantes, hiper-serpenteantes, etc., esto dependiendo de las funciones f y g y de los valores de las constantes de difusión [87].

La solución de onda en espiral aparece en dos tipos de sistemas de reacción-difusión: los excitables y los oscilatorios, [51]. En los primeros, la ocurrencia de pequeñas perturbaciones de un estado estable desaparecen de forma rápida, las perturbaciones deben ser mayores a un cierto valor umbral y éstas persisten durante un tiempo antes de que se restablezca el estado estacionario. La definición precisa de un medio excitable se hace en la sección 1.1.2. y se ejemplifica con los modelos de FitzHugh-Nagumo y BVAM. En los sistemas oscilatorios, la solución se desarrolla cerca del inicio de una bifurcación de Hopf, la descripción se desarrollará en la sección 1.1.3 dónde se revisarán los modelos de Stuart-Landau y Ginzburg-Landau.

Las ondas espirales obtenidas como soluciones de este tipo de sistemas se mueven periódicamente de formas distintas, desplazándose o serpenteando, generando patrones muy específicos. La punta de cada espiral puede describir círculos o flores con pétalos, según los valores de los parámetros del modelo estudiado. Así las espirales pueden moverse en distintos marcos, algunos que giran al mismo ritmo que la espiral, marcos co-rotatorios y cuasiperiódicos. Arthur Winfree, notó el movimiento y el retorcimiento de la punta de la espiral en la reacción de Belousov-Zhabotinsky y usó el término meandro para describirlo [98]. En la referencia [99], se estudiaron los distintos comportamientos de las ondas solución de los modelos Oregonator y FitzHugh-Nagumo, al variar ciertos parámetros, intentando generalizar los resultados para los sistemas excitables de reacción difusión al proponer un diagrama de bifurcación universal. Los diagramas son un catálogo de patrones florales. Esto fue retomado por Dwight Barkley en los 90's, quién encontró que el serpenteo de la espiral era consecuencia directa de la bifurcación de Hopf y la simetría euclídeana [13], [14] y [15]. Barkley transformó un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales (*EDPs*) de *RD* en otro compuesto por cinco ecuaciones diferenciales ordinarias (*EDOs*), con lo que obtuvo los mismos patrones florales y también planteó su propio diagrama universal. Este enfoque no solo permitió simplificar la complejidad inherente a los sistemas de *RD*, sino que también abrió la puerta para explorar aplicaciones más amplias. En particular, el estudio de las trayectorias de las espirales, derivadas de estos sistemas, tiene sustento fisiológico, dado que se observan experimentalmente en fenómenos como la dinámica cardíaca, y además posee relevancia matemática, en el análisis de bifurcaciones de sistemas equivariantes. Esto último conecta los modelos de *RD* con la teoría de grupos de simetría de Lie, abordando *EDPs* con simetría euclídeana en el plano [42].

A continuación se describirán algunos ejemplos de sistemas excitables y oscilatorios en donde aparecen ondas de tipo espiral, así como el estudio de los patrones que se obtienen moviendo las puntas de estas espirales.

1.1.2. Ondas en medios excitables: *FHN* y *BVAM*

Un sistema excitable se caracteriza por las siguientes etapas [87]:

1. Estado de reposo en el cual el sistema no presenta cambios significativos.
2. Valor umbral que alcanza la variable de estado, a partir del cual el sistema o fenómeno va a cambiar radicalmente de un valor de reposo a uno que está muy lejano a éste.
3. Estado de excitación, cambio brusco de la dinámica (puede ser ocasionado externa o internamente).
4. Retorno al estado de reposo.
5. Periodo refractario o tiempo de recuperación.

En una neurona, el potencial de acción o potencial electroquímico cumple con las características de un sistema excitable, ya que su comportamiento puede describirse en un estado de reposo estable, con un potencial de membrana negativo, generalmente alrededor de -72 mV. Al recibir una señal eléctrica que alcanza un valor umbral (aproximadamente de -50 mV), se produce un cambio drástico que desencadena un estado de excitación. Este proceso, caracterizado por una rápida despolarización que eleva el potencial de membrana a valores positivos ($+30$ a $+40$ mV) ocurre en un lapso de aproximadamente 1-2 milisegundos. Posteriormente, la neurona retorna al estado de reposo mediante un proceso de repolarización, que toma entre 2-3 milisegundos adicionales. Finalmente, atraviesa un período refractario, que dura entre 1 y 5 milisegundos, asegurando la recuperación antes de poder responder a nuevos estímulos [37].

Onda despolarizadora como potencial de acción

La gráfica de este potencial de acción representa el paso de una corriente eléctrica de una célula neuronal a otra, a partir del intercambio de iones (Na^+ , K^+ , corriente L o “leak”, variable que representa a otros iones como el Cl^-) entre el interior y exterior de la célula. Véase Figura 1.3 (a). El potencial de acción (PA) en una neurona es excitable puesto que:

1. El estado de reposo se define cuando en la neurona no hay un cambio importante de iones, a este valor se le conoce como potencial en reposo. Generalmente hay mayor cantidad de iones K^+ al interior y de Na^+ al exterior. En la gráfica de la Figura 1.3 (a), el estado de reposo sería cuando el potencial o voltaje está en -62 mV.
2. El valor umbral en la neurona se produce con la apertura de las compuertas de los canales iónicos del sodio ubicados en la membrana celular. En la gráfica, este valor sería cuando el voltaje es de aproximadamente -50 mV.
3. El cambio brusco en la célula neuronal se caracteriza por la entrada abrupta de iones Na^+ al interior de la célula, lo que cambia la polaridad de ésta, siendo que en estado de reposo siempre es negativa, es por eso que a la onda despolarizadora se le denomina positiva. En la gráfica se puede observar que la curva de el voltaje cambia instantáneamente de -50 mV a 40 mV.
4. Finalmente, el potencial regresa a su valor de reposo (repolarización), el cual recupera lentamente. En la célula neuronal o cardiaca esto ocurre cuando los iones K^+ salen suavemente de la célula por los canales iónicos correspondientes. En la gráfica de la Figura 1.3 (a) se ve el fenómeno cuando la curva comienza a descender.

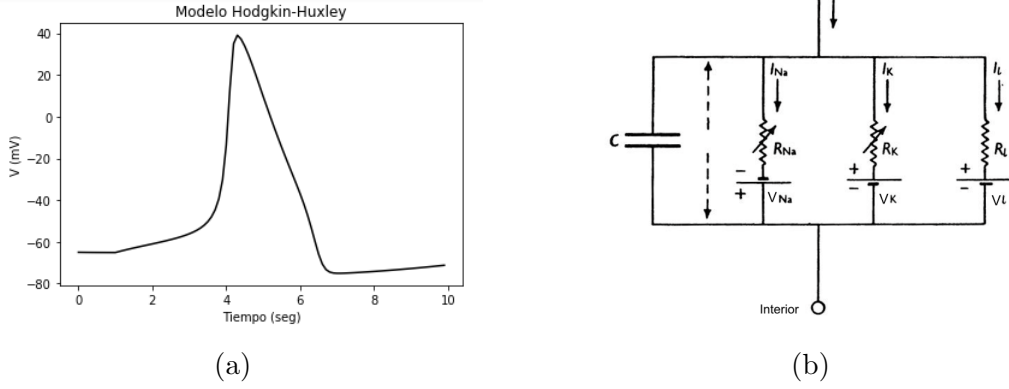


Figura 1.3: (a) Gráfica del *PA* del modelo *H-H*, ecuaciones 1.7 y 1.8. (b) Circuito eléctrico propuesto por Hodgkin y Huxley como modelo electrónico de la membrana neuronal. En éste se incluyen las corrientes I_{Na} , I_K e I_L , donde L o corriente “leak” representa a todas las corrientes iónicas presentes que no son Na^+ y K^+ como el Cl^- ; la aplicación de una corriente externa, I_{ext} ; la capacitancia y el potencial de membrana. Figura adaptada de [49].

5. La recuperación total se identifica cuando los iones sodio y potasio se reestablecen a sus valores originales por medio de mecanismos electrofisiológicos que tiene la membrana celular, cuando la curva del voltaje regresa de -78 mV a -62 mV aproximadamente. En este periodo de refracción, la célula no puede ser re-excitada.

El primer modelo matemático de este fenómeno fue planteado en 1952 por el biofísico Alan Lloyd Huxley y el fisiólogo Sir Andrew Fielding Hodgkin en [49]. En una serie de cinco artículos describieron los experimentos que realizaron para determinar las leyes del movimiento de los iones en las células nerviosas durante un *PA*. Propusieron un circuito eléctrico que simulaba la capacitancia de la membrana de una sola célula, con resistencias como canales iónicos, corriente como el paso de iones y voltaje como el *PA*. La figura 1.3 (b) mapea este sistema de ecuaciones diferenciales. El sistema de Hodgkin y Huxley, *H-H*, está compuesto por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, la primera mide la dinámica del voltaje y es obtenida con las leyes de Kirchoff y la ley de Ohm. Las corrientes que se toman en cuenta son: sodio (Na^+), potasio (K^+), L (leak), que incluye iones cloro (Cl^-) y otros aniones y la corriente externa:

$$C_m \frac{dV}{dt} + I_{Na} + I_K + I_L = I_{ext}. \quad (1.7)$$

Las otras tres ecuaciones representan los procesos de apertura y cierre de las compuertas de los canales iónicos, en respuesta a los cambios en el potencial de membrana, las funciones $\alpha_j(V)$ y $\beta_j(V)$, donde $j = m, h, n$. Estas funciones describen las tasas de transición de estados abiertos y cerrados de las compuertas y, se obtienen empíricamente ajustando curvas a los datos experimentales.

$$\frac{dj}{dt} = \alpha_j(V)(1 - j) - \beta_j(V)j, \quad (1.8)$$

m es la compuerta activadora del canal de sodio, h es la compuerta inactivadora del canal de sodio y n es la compuerta activadora del canal de potasio. De este modo el modelo de Hodgkin y Huxley representa la dinámica de las corrientes iónicas I_{Na} , I_K e I_L (corriente de fuga), en términos de estas variables de compuerta y del potencial de membrana.. La gráfica del *PA* de *H-H* se puede ver en la Figura 1.3 (a).

Modelo de FitzHugh-Nagumo

Usando el modelo de Van der Pol, el biofísico Richard FitzHugh en 1961 y el físico Jin-Ichi Nagumo, junto con otros investigadores, en 1962, idearon una versión simplificada de las cuatro ecuaciones $H-H$, que describe las características esenciales del impulso nervioso con únicamente dos ecuaciones diferenciales [37, 72].

La idea esencial del modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) fue reproducir la misma dinámica de excitación y propagación, observada en las células nerviosas, con una simplificación sustancial respecto al modelo de HH , al usar menos ecuaciones y parámetros. Este modelo está compuesto por dos variables principales:

- $u(x, t)$ representa el potencial eléctrico a lo largo de la célula en función del tiempo t y del punto x ,
- $v(x, t)$ representa la variable de recuperación o reactivación, asociada a la permeabilidad iónica de la membrana.

La primera EDO del modelo de FitzHugh Nagumo describe la evolución de u y rescata las características esenciales de un sistema excitable: un estado de reposo (equilibrio estable $u = 0$), un umbral de activación (punto inestable $u = a$) y un segundo estado de reposo (equilibrio estable $u = 1$) al que el sistema retorna después de ser activado. Para ello, se utiliza una función cúbica $f(u)$ que presenta la forma de una curva en “S”, como la curva roja de la Figura 1.4(a), cumpliendo $f(u) = v$.

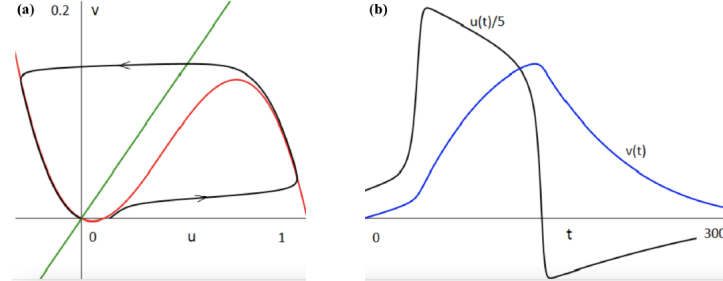


Figura 1.4: Parámetros de las simulaciones: $c_1 = c_2 = 1$, $a = 0.1$, $\epsilon = 0.01$, $\gamma = 3.33$ e $I_{ext} = 0$, (a) Isoclinas y una trayectoria. (b) Gráfica de las variables de excitación $u(t)$ (negro) y de recuperación $v(t)$ (azul). Tomada de [35]

Cuando v aumenta, el nodo inestable y el estable de $f(u)$ se acercan hasta colisionar en una bifurcación silla-nodo, dejando un único punto estable. La segunda EDO describe la dinámica de v , la cual depende de la permeabilidad iónica asociada a los canales de potasio, sodio y otros. Esta evolución es más lenta que la de la u , regulada por el parámetro ϵ , y gráficamente corresponde a la recta verde en la Figura 1.4(a). En este contexto, el sistema queda escrito por:

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - v = c_1 u(u - a)(1 - u) - c_2 v + I_{ext} = F(u, v), \\ v_t &= \epsilon(u - \gamma v) = G(u, v). \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $c_1, c_2, \gamma, \epsilon \leq 1$, y I_{ext} es la corriente externa aplicada. La variable u reacciona rápidamente ante estímulos, mientras que v actúa como un mecanismo de retroalimentación

lenta que permite el retorno al estado de reposo.

Los resultados del modelo *FHN* se grafican en la Figura 1.4 (b) mostrando las características de un medio excitable y de la gráfica del potencial del modelo *H-H*. El sistema representa el ciclo de excitación y se dirige al punto fijo estable $(0,0)$. Para valores pequeños de ϵ , la variable de excitación u es rápida con pasos abruptos y la recuperación v es lenta.

La simplicidad del modelo de *FHN* permite un análisis matemático cualitativo detallado de importantes fenómenos biológicos relacionados con la excitabilidad neuronal y el mecanismo generador de picos [37, 53, 71, 83].

El modelo *FHN* espacio-temporal se construye a partir del sistema definido previamente, al que se le agrega un término de transporte espacial difusivo en la primera ecuación. Este término representa la propagación del potencial eléctrico a través del tejido neuronal, modelada mediante la constante difusiva D . De este modo, el sistema se transforma en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), que describen cómo viaja el potencial de acción $u(x, t)$ y la variable de recuperación $v(x, t)$ a lo largo de varias células, conservando su forma:

$$\begin{aligned} u_t &= D\nabla^2 u + c_1 u(u - a)(1 - u) - c_2 v + I_{ext}, \\ v_t &= \epsilon(u - \gamma v). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Este sistema generaliza el modelo original (1.9) al incorporar explícitamente el efecto espacial, como ocurre en el tejido biológico donde la señal se propaga en el espacio además del tiempo. Dependiendo de las condiciones iniciales y de frontera, así como la geometría del dominio, se pueden obtener distintas configuraciones de propagación. Por ejemplo, en el estudio reportado en [82], trabajando con un modelo similar y condiciones específicas, se observaron soluciones en forma de espirales. El sistema se escribe como:

$$\begin{aligned} u_t &= D_x u_{xx} + D_y u_{yy} + u + c_1 u(u - a)(1 - u) - c_2 uv + I_{ext} \\ v_t &= \epsilon(u - \gamma v) \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde D_x y D_y son las constantes difusivas en cada dirección espacial. En dicho trabajo, se utilizaron coordenadas cartesianas, polares y esféricas junto con diferencias finitas para resolver el sistema, observando de nuevo la aparición de estructuras espirales bajo distintas condiciones geométricas. El resultado se puede ver en la Figura 1.5.

Cabe mencionar que el modelo FHN también puede usarse para estudiar la propagación del potencial eléctrico en las células miocárdicas. Otro modelo que hace lo mismo es el siguiente, el BVAM.

Modelo *BVAM*

El siguiente modelo puede describir la actividad eléctrica del corazón, ya que presenta características de un medio excitable. Se trata del modelo *BVAM* por las iniciales de Barrio-Varea-Aragón-Maini, [17].

El modelo *BVAM* es un sistema de reacción-difusión diseñado para unificar distintos modelos en el estudio de patrones periódicos espacio-temporales en sistemas biológicos complejos. Su

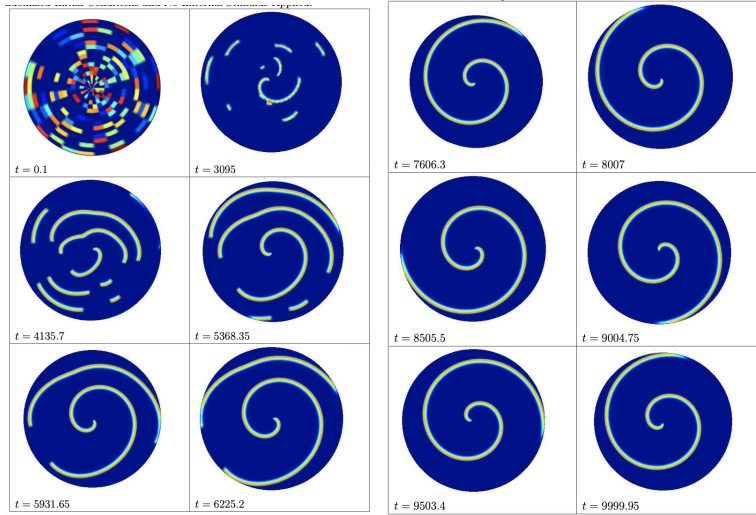


Figura 1.5: Espirales del sistema FHN en coordenadas Polares, con condiciones iniciales aleatorias y sin estímulo externo aplicado, se muestra la rotación de la espiral en sentido antihorario. Tomada de [82].

forma general es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + \eta(u + g(1 - f)v - Cuv - uv^2) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + \eta(g(f + h)v + hu + Cuv + uv^2) \quad (1.13)$$

donde u y v son los morfógenos o reactivos, D_u y D_v son los coeficientes de difusión, η es un parámetro de escala y f , g , h y C son parámetros de la reacción [30]. Este sistema presenta una gran variedad de comportamientos dinámicos, incluyendo regiones de patrones estacionarios, oscilatorios y caos determinista, lo cual ha sido ampliamente estudiado, tanto analítica y numéricamente [6, 18, 75].

En la Figura 1.6 se ilustra que, dependiendo del valor de los parámetros g y h , el sistema puede presentar patrones de Turing, así como dos tipos importantes de bifurcaciones:

- La bifurcación de Hopf, en la cual un estado estacionario pierde estabilidad y da lugar a una solución oscilatoria periódica (ciclo límite).
- La bifurcación de silla-nodo, que ocurre cuando dos puntos de equilibrio —uno estable y otro inestable— colisionan y desaparecen.
- Los patrones de Turing, por su parte, emergen cuando un equilibrio homogéneo es estable sin difusión, pero se vuelve inestable al incluirla, dando origen a estructuras espaciales fijas.

Estas tres regiones aparecen delimitadas en el diagrama de bifurcación del plano (g, h) , para parámetros fijos $h = -2.5$, $C = 0$ y $\eta = 0.5$. La curva roja representa la bifurcación de Hopf, mientras que la recta azul indica la bifurcación silla-nodo. Entre ambas se identifican zonas donde emergen distintos tipos de patrones: solitones regulares e irregulares, patrones de Turing, y una región donde se ha identificado un posible comportamiento caótico determinista

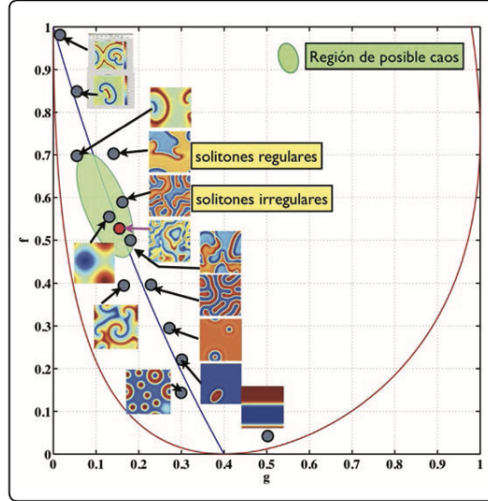


Figura 1.6: Diagrama de bifurcación del sistema *BVAM* sin difusión, en el plano (g, h) para $h = -2.5$, $C = 0$ y $\eta = 0.5$. La curva roja es una bifurcación de Hopf y la recta azul es una bifurcación silla-nodo. Sobre este diagrama se muestran patrones en puntos cercanos a la bifurcación de silla-nodo: solitones, ondas, patrones de Turing, etc. En todos los cálculos se tiene que $D_u = D_v = 1$, excepto en el punto rojo, donde se usó $C = 0.2$ y $D_u = 0.77D_v$. Tomado de [30].

(área verde sombreada).

Este modelo se puede usar para simular la actividad eléctrica en el corazón, haciendo una comparación del comportamiento de las soluciones en las regiones del espacio de parámetros y la dinámica de la electrofisiología [75], como se observa la Figura 1.7. No obstante la riqueza del modelo permite modelar sistemas acoplados de formas distintas. Este tipo de sistemas son útiles para modelar la pigmentación en la piel de algunos vertebrados, véase la Figura 1.8. Además, este trabajo ha sido utilizado por otros investigadores para estudiar distintos problemas: el patrón de puntos de las catarinas, las alas de las mariposas y la morfogénesis de los erizos marinos, las aves y reptiles, entre otros. Cabe mencionar que estos sistemas y otros semejantes presentan características similares. De aquí que surgen aproximaciones que permiten captar la generalidad de estos modelos en formas normales.

La siguiente sección combina enfoques teóricos y computacionales para el estudio de trayectorias de la punta espiral: por un lado, se abordan los aportes de Winfree y Barkley; por otro, se presenta una metodología para localizar y seguir la punta en simulaciones del modelo *FHN*.

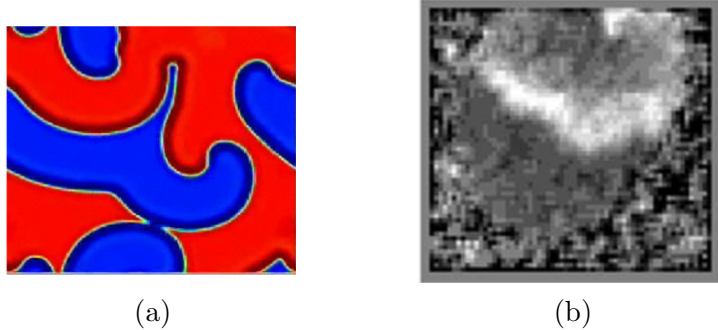


Figura 1.7: (a) Ondas viajeras en dos dimensiones, la primera imagen se obtiene del *BVAM*, tomada de [75]. (b) La segunda es una onda eléctrica que ocurre el corazón del pollo, tomada de [21].

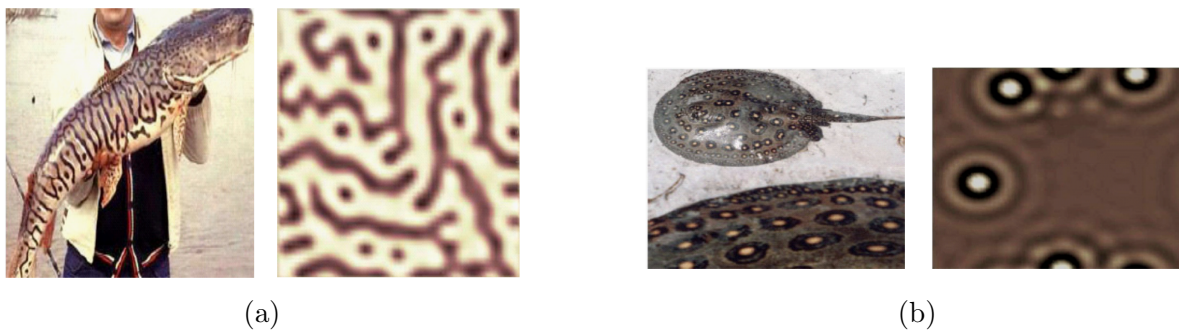


Figura 1.8: Patrones de Turing en el sistema BVAM que se asemeja a: (a) *Pseudoplatystoma fasciatum* (Surubím pintado) o especie de pez gato originario del Amazonas. Tomada de [6]. (b) *Potamotrygon schroderei* o Mantaraya de agua dulce del Amazonas. Tomada de [6].

1.1.3. Trayectoria de la punta de una onda en espiral

Clasificación de trayectorias, Winfree

Como se mencionó en la sección 1.1.1, Winfree presentó un análisis numérico de los modelos de *RD*: Oregonator y *FHN*, considerando dominios bidimensionales. Las ideas principales de Winfree fueron: estudiar los distintos comportamientos de las ondas que emergen como solución de ambos sistemas de *EDPs*, al variar ciertos parámetros; proponer un diagrama de bifurcación universal en donde se identifican diferentes tipos de trayectoria de onda; y generalizar éste para otros medios excitables [99].

Al estudiar las soluciones de sistemas de *RD*, se identifica la punta de la onda, de igual manera la trayectoria que define al paso del tiempo. En el diagrama de bifurcación del modelo tipo *FHN* que describe, ecuación (1.14), se distinguen diversas regiones de comportamiento dinámico, determinadas por el tipo de solución y los parámetros involucrados en el modelo: β y ϵ . Véase la Figura 1.9.

$$\begin{aligned} u_t &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \frac{u^3}{3} - v \\ v_t &= \epsilon(u + \beta - \gamma v) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Aunque la ecuación (1.14) representa una versión unidimensional del modelo tipo *FHN*, el diagrama mostrado se basa en simulaciones bidimensionales. Sin embargo, se incluye aquí como referencia porque las regiones de bifurcación y las trayectorias observadas (espirales, flores, cicloides, etc.) tienen analogías claras con las soluciones en 1D cuando se generaliza el modelo al caso bidimensional.

A continuación, se definen en breve estas regiones:

1. ∂P , denota la frontera a partir de la cual ocurre la propagación continua ya sea de un pulso unidimensional o de ondas planas bi o tridimensionales.
2. ∂R , es la frontera adyacente a ∂P , denominada rotor, es decir, a partir de esa curva aparecen soluciones rotatorias, circunferencias de radios distintos.
3. ∂M , es la frontera de transición de circunferencias a ondas serpenteantes. Estas últimas surgen por la presencia de una bifurcación de Hopf. Las trayectorias de los puntos de inicio (*tip*) de las ondas son diversas: curvas espirales que siguen una línea recta o que se mueven hacia la derecha o izquierda, cicloide, flores cerradas de tres o incluso cuatro pétalos.
4. ∂C , es la frontera de cambio de ondas serpenteantes a hiper-serpenteantes. Las trayectorias en ese caso son flores cerradas con muchos más pétalos, muchas veces indefinidos.

En resumen, Winfree observó que la punta de la onda puede trazar círculos y patrones florales, para ciertos valores de los parámetros, véase la Figura 1.10. Los patrones florales son movimientos cuasiperiódicos de dos frecuencias. Éstos pueden verse como epicicloides superpuestos sobre los círculos, cuando el movimiento de la epicicloide está en la misma orientación que el del círculo (a favor o en contra de las manecillas del reloj), entonces los pétalos de las flores apuntan hacia adentro; en orientación opuesta, los pétalos apuntan hacia afuera. La

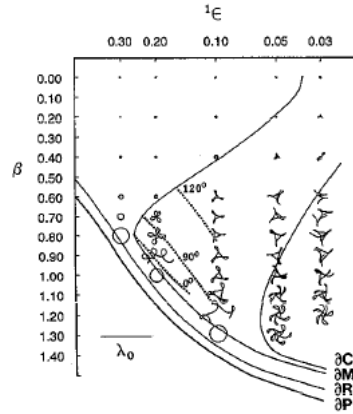


Figura 1.9: Diagrama de bifurcación de Winfree para el modelo de FitzHugh–Nagumo en dos dimensiones. Aunque se utiliza aquí como referencia visual, debe notarse que estos resultados se obtuvieron en un contexto bidimensional, a diferencia del modelo 1D presentado en la ecuación (1.14). Tomado de [99].

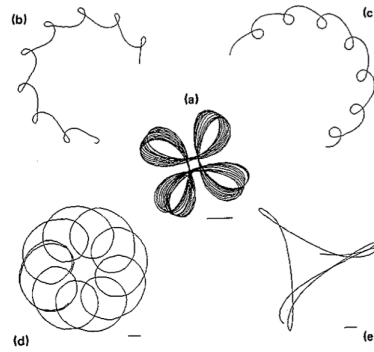


Figura 1.10: Tipo de ondas en espiral. Tomada de [99].

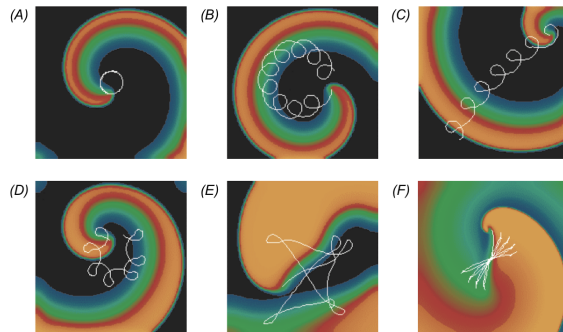


Figura 1.11: Seis tipos diferentes de trayectorias de punta de onda espiral, que incluyen (a) circular, (b) epicicloidial, (c) cicloidial, (d) hipocicloidial, (e) hipermeandrante y (f) lineal. Se utilizó el modelo de 3 variables de Fenton y Karma. Tomada de [25].

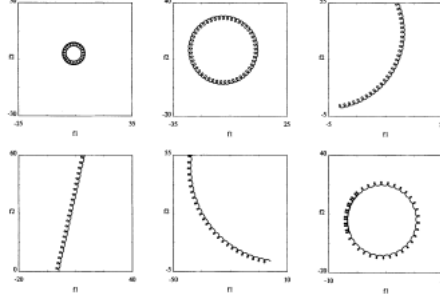


Figura 1.12: Tipos de ondas en espiral. Tomada de [41].

transición entre trayectorias (circular, epicicloidal, cicloidal, hipocicloidal, hipermeándrica y lineal) puede obtenerse variando los parámetros del modelo Fenton-Karma. Experimentalmente, estas trayectorias también se han observado en tejido cardíaco. El modelo Fenton-Karma, un modelo iónico simplificado con tres corrientes de membrana, describe de manera precisa las características dinámicas del potencial de acción eléctrico en las células cardíacas. En este contexto, presentan simulaciones numéricas que ilustran estas trayectorias, como se muestra en la Figura 1.11 [25], [33].

Diversos estudios han presentado experimentos y simulaciones en los que se observan distintos tipos de onda, clasificados en dos grandes familias: RW y TW (equilibrios relativos) y MRW y MTW (soluciones periódicas relativas). Estos trabajos se destacan por la identificación y clasificación de estos patrones, los cuales se pueden ver en la Figura 1.12. Para más detalles, véanse las referencias [15], [81], [40].

1. Ondas rotatorias (RW). Soluciones rotatorias que aparecen a partir de la frontera ∂R en el Diagrama de Winfree, Figura 1.12.
2. Ondas viajeras (TW). Soluciones que se propagan linealmente. La trayectoria de la punta de la espiral es una línea recta.
3. Ondas rotatorias moduladas (MRW) u ondas serpenteantes (*meandering*). Soluciones cuasiperiódicas que parecen periódicas en un sistema rotatorio. La trayectoria de la punta de la espiral es un epicicloide cerrado.
4. Ondas viajeras moduladas (MTW). Soluciones que rotan superimpuestas con un movimiento de propagación lineal. La trayectoria de la punta de la espiral es una curva helicoidal de dos dimensiones.

La clasificación anterior proporciona un marco conceptual para entender los distintos comportamientos de la punta espiral. A continuación, se describe el método numérico para localizar dicha punta y se presenta un ejemplo representativo basado en simulaciones del modelo FHN .

Dinámica de la punta de una espiral en el modelo FHN

Una estrategia eficaz para determinar la trayectoria de la punta de una espiral consiste en localizar la intersección de las isolíneas $u = 0$ y $v = 0$ en el dominio numérico. Para ello, se utiliza una malla discreta y aproximaciones bilineales que permiten interpolar los valores de u y v entre nodos. Este procedimiento asegura una localización precisa del punto (x_{tip}, y_{tip}) ,

incluso dentro de las celdas de la cuadrícula. La intersección de isolíneas se calcula de forma iterativa, lo cual permite seguir de manera detallada la evolución temporal y espacial de la punta sin necesidad de utilizar mallas excesivamente refinadas. Una descripción completa del algoritmo se encuentra en el Apéndice D.

Este método ha sido aplicado en diversos estudios para visualizar la dinámica de ondas espirales. Un ejemplo representativo se encuentra en el estudio de las soluciones de ondas en espiral y la trayectoria de su punta en el modelo *FHN*, ecuación (1.14), donde se emplea un método de diferencias finitas semiimplícito en un dominio rectangular, como se describe en el Apéndice D [5]. La ecuación para u se resuelve mediante un esquema mixto: explícito para los términos no lineales e implícito para los de difusión. Para y se emplea un esquema explícito, al no contener difusión.

Las condiciones iniciales introducen un defecto en el dominio rectangular, dividiendo el espacio en dos subregiones diferenciadas [5] y [13]. Estas regiones se definen de la siguiente manera:

- Para $u(x, y)$: Se asignan valores opuestos (u^* y $-u^*$) por encima y por debajo de la línea $y = L/2$.
- Para $v(x, y)$: Se asignan valores opuestos (v^* y $-v^*$) a la derecha y a la izquierda de la línea $x = L/2$.

Esta configuración inicial inhomogénea permite que el sistema evolucione rápidamente hacia una onda en espiral. Las expresiones correspondientes son:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u^* & y \geq 1/2 \\ -u^* & y < 1/2 \end{cases}$$

$$v_0(x, y) = \begin{cases} v^* & x \geq 1/2 \\ -v^* & x < 1/2 \end{cases}$$

Se implementan condiciones de frontera de Neumann homogéneas ($\partial u / \partial n = \partial v / \partial n = 0$) en todos los bordes del dominio rectangular, con el fin de evitar el flujo de información hacia el exterior y simular un sistema cerrado. El dominio espacial considerado tiene dimensiones $[0, L] \times [0, L]$, lo que permite la propagación de ondas en espiral en un entorno controlado, donde las interacciones con los bordes no alteran significativamente la dinámica interna gracias a las condiciones de frontera impuestas.

Las visualizaciones generadas permiten identificar componentes clave como el frente, el revés de onda, la longitud de onda y la trayectoria espaciotemporal de la punta. Estos resultados ilustran el potencial del método descrito para analizar patrones espirales en medios excitables. Las figuras 1.14 a 1.16, adaptadas de [5], ilustran de manera clara la estructura de una onda espiral, la técnica de identificación de la punta mediante isolíneas, la evolución de la condición inicial tipo Barkley y los distintos regímenes de propagación obtenidos, como la rotación rígida y el patrón floral (meander), de acuerdo con la clasificación propuesta por Winfree.

Para interpretar los distintos patrones de movimiento de la punta espiral observados en simulaciones, resulta útil recurrir a modelos teóricos simplificados de EDOs como el de Barkley. Este modelo permite clasificar las trayectorias en función de bifurcaciones y simetrías, y se describe a continuación.

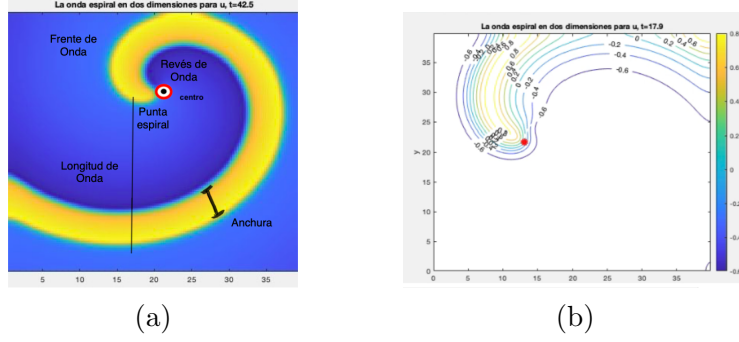


Figura 1.13: (a) Simulación de una onda en espiral del modelo FitzHugh-Nagumo (FHN) realizada en Matlab, mostrandos sus principales componentes: frente, revés y punta de onda, longitud y anchura. (b) Gráfica de isolíneas correspondientes a las variables u (líneas continuas) y v (líneas punteadas) para el mismo patrón espiral. La ubicación de la punta $(x_{\text{tip}}, y_{\text{tip}})$ se determina mediante la intersección de las isolíneas $u = 0$ y $v = 0$. Visualización adaptada de [5].

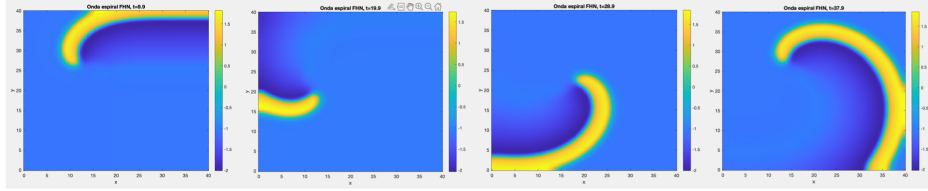


Figura 1.14: Evolución de la condición inicial (3.5) que muestra la generación de ondas espirales utilizando la condición inicial de Barkley, [13]. Los cuatro diagramas indican el componente u . Visualización adaptada de [5].

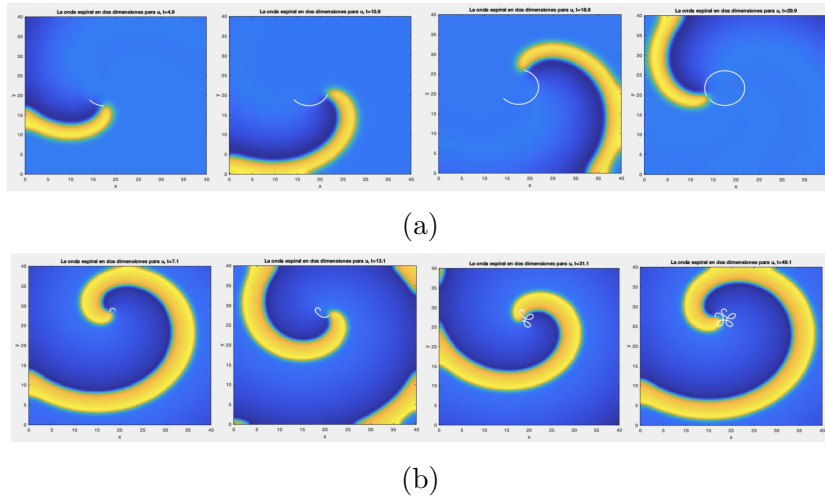


Figura 1.15: Soluciones numéricas del sistema FHN para u componente, con condición inicial una onda espiral. (a) Se muestra una rotación rígida. (b) Se muestra una onda en espiral meander (un patrón floral). Visualización adaptada de [5].

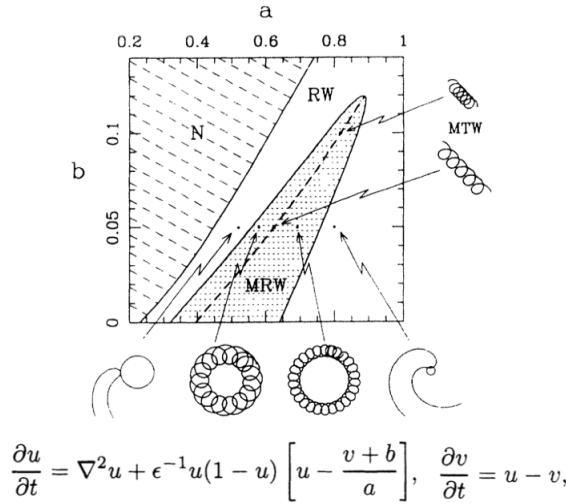


Figura 1.16: Diagrama de fase para la dinámica de ondas en espirales y modelo de Barkley. Tomada de [15].

Clasificación de trayectorias, Barkley

El Diagrama de bifurcación genérico de Barkley, Figura 1.16, describe el comportamiento de las ondas en espiral en medios excitables mencionado antes. En la región N no existe propagación de espirales, en RW ocurren las ondas tipo circunferencia con frecuencia ω_1 , la transición de la región RW a MRW aparece a partir de la ocurrencia de una bifurcación de Hopf, RW se vuelve inestable cuando el par de valores propios conjugados complejos cruza el eje imaginario. Esta bifurcación introduce otra frecuencia ω_2 que da lugar a las ondas serpenteantes. Las ondas *meandering* se encuentran en la región MRW que se subdivide en dos, a partir de la curva MTW , el número de valores propios se conserva en ambas regiones pero el orden de éstos cambia y los patrones que resultan en ambas son distintos: de hipocicloides ($\omega_1 < \omega_2$) a epicicloides ($\omega_1 > \omega_2$). Las ondas en MTW surgen a partir del punto de codimension 2 (la intersección del lugar geométrico de la bifurcación de Hopf supercrítica, la curva de las ondas viajeras moduladas y la región de las ondas rotatorias). Este punto es denominado la bifurcación de Hopf resonante es el centro de organización de toda la dinámica de las ondas en espiral en los medios excitables, ahí donde las frecuencias coinciden, $\omega_1 = \omega_2$.

Dadas las siguientes características del diagrama de bifurcación, Barkley propone un modelo de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias que tendrá como solución las mismas ondas en espiral descritas: en toda la curva de Hopf, excepto en el punto de codimension 2, existen cinco valores propios distintos sobre el eje imaginario, el orden de éstos varía si $\omega_1 < \omega_2$ o $\omega_1 > \omega_2$, pero no hay diferencias cualitativas en el espectro. Todos los valores propios tienen parte real negativa. Hay un par de valores propios complejo asociado a la bifurcación de Hopf, $\lambda = \pm i\omega_2$. Hay otro par de valores propios complejo debido a la simetría traslacional, $\lambda = \pm i\omega_1$. Existe un valor propio real debido a la simetría rotacional: $\lambda = 0$. En el punto de codimension 2, donde $\omega_1 = \omega_2$, el operador de estabilidad tiene valores propios $\pm i\omega_1$, cada uno con multiplicidad 2, además del valor propio 0. La dinámica no lineal descrita por las ecuaciones ocurre en una vecindad de la bifurcación de Hopf resonante, donde los valores propios de Hopf interactúan con los resultantes de la simetría euclídeana.

Modelo de Barkley

El modelo escogido por Barkley captura la bifurcación de Hopf mencionada [15] y [16]. Un sistema de 5 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que satisface: es invariante bajo transformaciones que preservan la distancia en el plano, tiene como soluciones ondas que rotan las cuales experimentan una bifurcación de Hopf, ajustando los parámetros del modelo, es posible llevar los valores propios de Hopf en coincidencia con los valores propios neutrales debido a la simetría traslacional.

El sistema es el siguiente, [15],

$$\begin{aligned}\dot{p} &= v, \\ \dot{v} &= v \cdot \{f(|v|^2, \omega^2) + i\omega \cdot h(|v|^2, \omega^2)\}, \\ \dot{\omega} &= \omega \cdot g(|v|^2, \omega^2),\end{aligned}\tag{1.15}$$

donde $p, v \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$, f, g y h son funciones reales. Para cualquier f, g y h , las ecuaciones son invariantes bajo rotaciones de ángulo γ , R_γ , reflexiones κ y traslaciones por $\alpha + i\beta$, $T_{\alpha\beta}$. Siendo $p = x + iy$ la posición de la punta de la espiral, $v = se^{i\phi}$ la velocidad lineal de la espiral con $s \geq 0$ la velocidad de la punta y $\phi = \gamma_0\omega$ es la frecuencia rotacional instantánea, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales queda como,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(\cos(\phi)) \\ \dot{y} &= s(\sin(\phi)) \\ \dot{\phi} &= \omega \cdot h(s^2, \omega^2) \\ \dot{s} &= s \cdot f(s^2, \omega^2) \\ \dot{\omega} &= \omega \cdot g(s^2, \omega^2)\end{aligned}\tag{1.16}$$

Las expansiones de orden menor para f, g y h que Barkley propone para dar la bifurcación de codimensión 2 deseada y que producen trayectorias acotadas para el modelo son:

$$\begin{aligned}h(s^2, \omega^2) &= \gamma_0 \\ f(s^2, \omega^2) &= \alpha_0 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 \omega^2 - s^4 \\ g(s^2, \omega^2) &= -1 + \beta_1 s^2 - \omega^2\end{aligned}\tag{1.17}$$

El subsistema (s, w) del sistema de cinco EDOs se desacopla de las otras tres ecuaciones. Sean $\xi = s^2$ y $\zeta = w^2$, por lo cual deja el sistema de dos variables,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2\xi f(\xi, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= 2\zeta g(\xi, \zeta)\end{aligned}\tag{1.18}$$

Barkley hace el análisis del sistema (1.18) fijando $\alpha_0 = -\frac{1}{4}$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_0 = 5.4$ y el resultado es el diagrama de bifurcaciones, en el espacio de parámetros (α_2, α_1) de la Figura 1.17. Este último es equivalente al presentado por el mismo Barkley para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, donde se definen las mismas regiones RW , TW , MRW y MTW y se observan los mismos tipos de ondas en cada zona. Véanse las figuras 1.17, y 1.18. Las ondas en espiral del sistema corresponden al comportamiento periódico de $s(t)$ y $\omega(t)$ y se pueden ver en la Figura 1.18. Dado que las ondas serpenteantes inician a partir de la bifurcación de Hopf, es importante mencionar que la curva de Hopf está definida por las ecuaciones

$$u_H = \frac{\alpha_1 - 1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_1 + 9}}{4} \quad \alpha_2 = \frac{3 - 2(\alpha_1 + 1)u_H}{4(u_H - 1)}.$$

Además de la frecuencia $\omega_1 = \gamma_0 w_1$ definida en el punto crítico (s_1, ω_1) , existe otra frecuencia ω_2 donde ocurre la bifurcación de Hopf. Cuando $\omega_1 = \omega_2$, se da la bifurcación de Hopf resonante. Sin embargo, al variar los parámetros que Barkley fija, existe una dinámica más rica de bifurcaciones de codimensión dos que pudiera ser analizada.

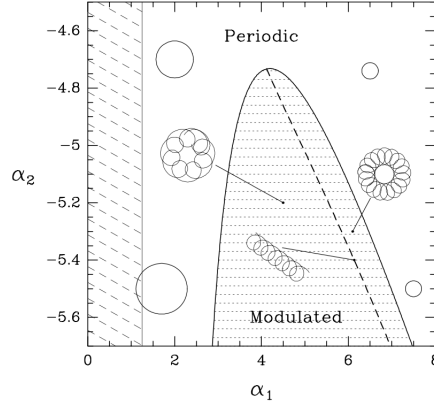


Figura 1.17: Espacio de parámetros obtenido con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Tomada de [16].

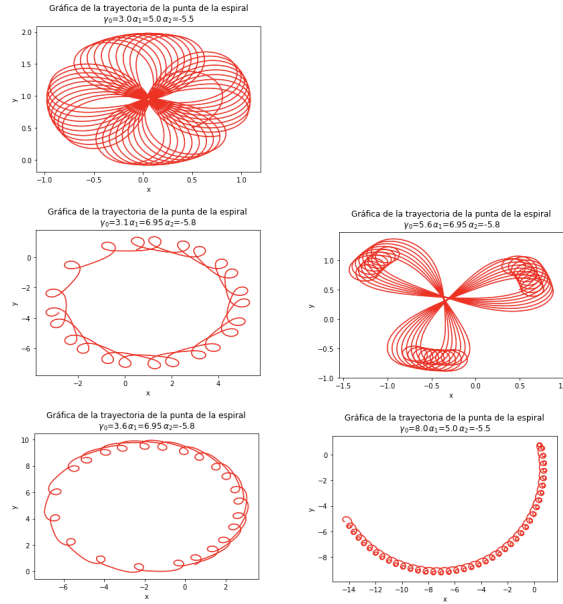


Figura 1.18: Gráfica de las distintas trayectorias de la punta de la espiral, para distintos valores de los parámetros. Reproducidas usando las ecuaciones diferenciales ordinarias y parámetros de Barkley.

Además de los avances iniciales en el estudio de ondas en espiral, diversos investigadores han integrado los modelos de reacción-difusión con la teoría de grupos de simetría para desarrollar un marco matemático que describe estas ondas y sus bifurcaciones. Este enfoque permite relacionar la simetría que fija la trayectoria de una solución de una ecuación diferencial parcial con la forma de una onda en espiral en el espacio físico. Para más detalles, véanse las

referencias [60], [39], [40], [41], [42], [100].

A continuación se revisarán las formas normales de los sistemas oscilantes, las ecuaciones de Stuart-Landau y Ginzburg-Landau, piezas claves en este trabajo.

1.2. Ondas en Stuart-Landau y Ginzburg-Landau

Esta sección sigue de cerca la referencia [38]. Oscilar significa variar repetitivamente o periódicamente, en el tiempo, una medida específica sobre un valor central (un punto de equilibrio), o bien entre dos o más estados distintos. Existen varios ejemplos de sistemas oscilatorios en la naturaleza: las ondas en el agua, el movimiento periódico de los planetas, la subida y bajada de las mareas, el péndulo de un reloj, las ondas sonoras, las ondas electromagnéticas, el latido del corazón humano, ciclos económicos, ciclos de población depredador-presa en ecología, géiseres geotérmicos en geología, la vibración de las cuerdas en la guitarra, etc. La mayoría de éstos son osciladores no lineales, que a diferencia de los lineales, al ocurrir una perturbación que aleje al oscilador de su estado estable, ésta decae con el tiempo y el sistema vuelve a la misma amplitud que se autorregula después de cierto tiempo. Muy cerca de donde inician las oscilaciones, todos los osciladores no lineales pueden describirse mediante un mismo modelo matemático, la llamada ecuación Stuart-Landau, una ecuación diferencial ordinaria de un parámetro de orden complejo. Para ser más precisos, la ecuación de Stuart-Landau describe en general un único oscilador no lineal, pero también podría hacerlo con un sistema espacialmente extendido con un acoplamiento fuerte de forma tal que oscile en sincronía. En la siguiente sección se obtendrá la ecuación de Stuart-Landau partiendo de un oscilador lineal básico.

1.2.1. La ecuación de Stuart Landau

El oscilador armónico es el modelo universal por excelencia que describe a las oscilaciones de menor amplitud. La trayectoria de este sistema es periódica, esto es, $x(t + T) = x(t)$ para t el tiempo y T el periodo que pasa entre oscilación y oscilación. Los ejemplos más característicos de este sistema son: el péndulo simple, un resorte con masa o un circuito electrónico, véase la Figura 1.19(a).

La generalización de la dinámica del oscilador lineal armónico de R , fase ϕ y frecuencia angular ω_0 , en coordenadas polares, se escribe como,

$$\dot{R} = 0, \tag{1.19}$$

$$\dot{\phi} = \omega_0. \tag{1.20}$$

Las soluciones del sistema son $R = R_0$ y $\phi = \omega_0 t + \phi_0$, con R_0 y ϕ_0 la amplitud inicial y la fase de las oscilaciones, respectivamente.

La descripción del sistema compuesto por (1.19) y (1.20) también se puede hacer usando la variable en su forma compleja W , $W = Re^{i\phi}$, donde R es el módulo de la variable W , y ϕ el ángulo. La ecuación diferencial en (1.19) y (1.20) se escribe como,

$$\dot{W} = i\omega_0 W \tag{1.21}$$

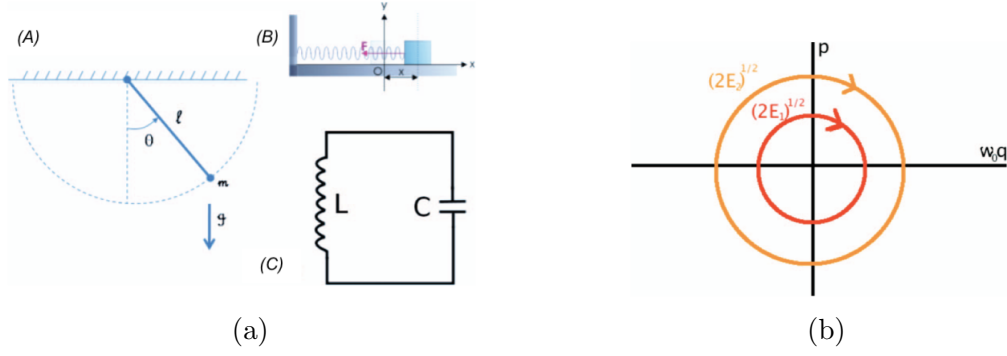


Figura 1.19: (a) Ejemplos de sistemas que describen un oscilador: (A) péndulo, (B) resorte, (C) circuito electrónico. Tomada de [38]. (b) Trayectorias del oscilador armónico en el espacio fase con coordenadas $(\omega_0 q, p)$ para distintos valores de la energía $E_2 > E_1$. Tomada de [38]

Se deriva ambos lados de la ecuación con respecto a t , se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{W} = -\omega_0^2 W$, invariante bajo rotaciones.

El Hamiltoniano re-escalado por unidad de masa se puede escribir como,

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2 = E, \quad (1.22)$$

donde p y q describen las coordenadas de momento y posición, m es la masa. La energía total E se conserva y es igual al Hamiltoniano. Las trayectorias que se describen en el plano fase corresponden a círculos concéntricos de radio $(2E)^{1/2}$ en el plano $(\omega_0 q, p)$, véase la Figura 1.19(b).

Las ecuaciones de movimiento están dadas por,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad (1.23)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega_0^2 q. \quad (1.24)$$

Estas variables de movimiento p y q pueden ligarse con la variable W encontrada antes de la siguiente manera si definimos ahora W como,

$$W = \omega_0 q - ip = (\omega_0^2 q^2 + p^2)^{1/2} e^{i\phi} = (2E)^{1/2} e^{i\phi}$$

con $\phi = \arctan(-p/\omega_0 q)$. W se mueve sobre la circunferencias concéntricas de radio $(2E)^{1/2}$. Si se derivan ambos lados de la ecuación de amplitud y usando las ecuaciones (1.23) y (1.24), se encuentra la expresión

$$\dot{W} = \omega_0 \dot{q} - i\dot{p} = \omega_0 p + i\omega_0^2 q = i\omega_0(\omega_0 q - ip) = i\omega_0 W \quad (1.25)$$

La simetría rotacional hace explícita la simetría de las trayectorias sobre el plano fase, ésta es una propiedad necesaria en el oscilador armónico lineal, esto es, la energía del oscilador depende sólo del cuadrado de la amplitud de las oscilaciones ($|W|^2$), pero no de la fase.

Para introducir la no linealidad del oscilador se propone la ecuación,

$$\dot{W} = i\omega_0 W + f(W, \bar{W}) \quad (1.26)$$

Para que se preserve bajo la transformación $W \rightarrow We^{i\chi}$ ($\bar{W}$ denota conjugación compleja), la simetría rotacional debe ser invariante y la función debe satisfacer que $f(We^{i\chi}, \bar{W}e^{-i\chi}) = f(W, \bar{W})e^{i\chi}$. Se expande $f(W, \bar{W})$ en potencias de W y $\bar{W}$ (oscilaciones de menor amplitud),

$$f(W, \bar{W}) = \alpha_1 W + \alpha_2 |W|^2 W, \quad (1.27)$$

donde $\alpha_1 = \alpha_{1_r} + i\alpha_{1_i}$ y $\alpha_2 = \alpha_{2_r} + i\alpha_{2_i}$ son números complejos. Se reemplaza esta forma en la ecuación compleja (1.26), se transforma a coordenadas polares y se usa un marco de referencia rotado con la frecuencia del oscilador lineal original $\phi = \varphi + \omega_0 t$, la ecuación (1.26) se divide en dos ecuaciones reales para el módulo y la fase,

$$\dot{R} = \alpha_{1_r} R + \alpha_{2_r} R^3, \quad (1.28)$$

$$\dot{\phi} = \alpha_{1_i} + \alpha_{2_i} R^2. \quad (1.29)$$

Para que ocurran oscilaciones sostenidas bajo el efecto de la no linealidad, se requiere que el valor estacionario de la amplitud exista y sea estable $R^{(\text{est})} = (-\alpha_{1_r}/\alpha_{2_r})^{1/2}$, la existencia de este estado está garantizada si α_{1_r} y α_{2_r} tienen signos opuestos, además de $\alpha_{1_r} > 0$.

Ahora se escriben estas ecuaciones en su forma estándar. Sea μ un parámetro pequeño y $\alpha_{1_r} = \mu\sigma_1$ con $\sigma_1 > 0$ y $\alpha_{1_i} = \mu\omega$. Dado que $\alpha_{2_r} < 0$, $\alpha_{2_r} = -g_r$ ($g_r > 0$) y $\alpha_{2_i} = -g_i$. Con estas propuestas las ecuaciones (1.28) y (1.29) quedan como:

$$\dot{R} = \mu\sigma_1 R - g_r R^3, \quad (1.30)$$

$$\dot{\phi} = \mu\omega - g_i R^2. \quad (1.31)$$

Al cambiar de nuevo al plano complejo $Re^{i\phi} \rightarrow W$, la siguiente es la ecuación de Stuart Landau (SL), la cual constituye el modelo universal de osciladores con no linealidad débil.

$$\dot{W} = \mu(\sigma_1 + i\omega_1)W - (g_r + ig_i)|W|^2 W. \quad (1.32)$$

De las ecuaciones 1.30 y 1.31 se puede observar que si $\sigma_1 = 0$, $g_r = 0$ y $g_i = 0$, el oscilador lineal de frecuencia ω_0 se recupera. Cuando $\mu < 0$ las oscilaciones son amortiguadas y $W \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Si $\mu > 0$, el sistema conduce a oscilaciones regulares con un valor absoluto de la amplitud de la variable compleja $|W| = (\mu\sigma_1/g_r)^{1/2}$ y frecuencia $\omega_0 + \mu(\omega_1 - g_i\sigma_1/g_r)$. Si μ cruza el cero, la dinámica cambia de un punto fijo estable a una fase oscilatoria estable. Este escenario corresponde a una bifurcación supercrítica de Hopf. Así pues la ecuación Stuart Landau, SLE , es el modelo general de osciladores cercanos a esta bifurcación.

1.2.2. La ecuación de Ginzburg Landau

Si ahora en cada punto x hay una propiedad física que presenta oscilaciones, la ecuación SLE se puede generalizar para considerar la extensión espacial. Sea $W(x, t)$ la amplitud compleja en cada punto del dominio, que representa el estado dinámico del sistema. Cuando existen

variaciones espaciales en dicha amplitud, se introduce un término difusivo a la ecuación de Stuart-Landau (1.21). Considerando solamente la parte lineal, se obtiene de la siguiente forma:

$$\partial_t W = i\omega_0 W + D\partial_x^2 W, \quad (1.33)$$

donde $D = d_r + id_i$ es una constante compleja que representa la difusión del sistema. Para resolver esta ecuación, se considera que la función $W(x, t)$ está definida en un dominio unidimensional de longitud L , es decir, $x \in [0, L]$, y se imponen condiciones de frontera periódicas:

$$W(0, t) = W(L, t), \quad \partial_x W(0, t) = \partial_x W(L, t).$$

Bajo estas condiciones, la solución puede expresarse en términos de una serie de Fourier de la forma:

$$W(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(t) e^{i2\pi n x/L}, \quad (1.34)$$

la cual es invariante bajo traslaciones espaciales del tipo $x \rightarrow x + L$. Cada término n en la suma representa un modo espacial periódico con número de onda $\hat{q} = 2\pi n/L$. En particular, el modo $n = 0$ corresponde a la solución homogénea, mientras que $n \neq 0$ describe perturbaciones periódicas en el espacio. La evolución temporal de cada modo $W_n(t)$ puede calcularse al sustituir la expansión en serie de Fourier (1.34) en (1.33). Esto conduce a la ecuación diferencial ordinaria para cada coeficiente modal:

$$\partial_t W_n = i\omega_0 W_n - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 D W_n, \quad (1.35)$$

cuya solución general es,

$$W_n(t) = W_n(0) e^{-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 d_r t} e^{i\omega_n t}, \quad (1.36)$$

donde $\omega_n = \omega_0 - (2\pi n/L)^2 d_i$ representa la frecuencia corregida por el término difusivo imaginario, y el exponente real contiene d_r , que controla amortiguación o crecimiento del modo n en el tiempo. En particular, si $d_r > 0$, los modos con $n \neq 0$ se atenúan exponencialmente con el tiempo, dejando como dominante a largo plazo la solución homogénea $W_0(t)$, asociada a las oscilaciones masivas con frecuencia ω_0 . Además, dado que el término amortiguador es proporcional a n^2 , los modos de alta frecuencia espacial (de menor longitud de onda) se disipan más rápidamente que los modos de baja frecuencia. Esto implica que los modos de Fourier con n grande son más fuertemente amortiguados que aquéllos con n pequeño.

Así, la ecuación (1.33) considerando ahora también las no linealidades, puede generalizarse como,

$$\partial_t W = \mu(\sigma_1 + i\omega_1)W - (g_r + ig_i)|W|^2 W + (d_r + id_i)\partial_x^2 W, \quad (1.37)$$

donde se han introducido los coeficientes complejos que controlan el crecimiento lineal, la saturación no lineal y la difusión de la amplitud.

La ecuación de Ginzburg Landau compleja (CGLE) describe de forma genérica la dinámica de sistemas oscilatorios y espacialmente extendidos cerca del comienzo de las oscilaciones. Para un sólo oscilador no lineal o para un sistema espacialmente extendido en el que todo el medio oscila en sincronía, se utiliza una ecuación diferencial ordinaria de un parámetro de orden complejo, la ecuación de *SL* o la ecuación de Ginzburg-Landau real. En esta sección

hemos presentado una deducción heurística de la CGLE que presenta los aspectos básicos de su forma funcional para obtener los coeficientes que tiene esta ecuación para cada sistema reacción-difusión, cerca del umbral de aparición de oscilaciones puede usarse el método de multiescalas que se detallará a continuación.

1.3. Método de Múltiples escalas

Dado que las ecuaciones de reacción-difusión (RD) pueden contener varios parámetros específicos dependiendo del sistema que se esté estudiando, esto limita la capacidad de hacer predicciones generales sobre la formación de patrones en medios oscilatorios. Sin embargo, el método de multiescalas ha demostrado ser una herramienta eficaz para abordar este problema, ya que permite reducir ecuaciones RD con una dinámica oscilatoria cercana al umbral de inestabilidad a un modelo universal: la CGLE, la cual se analizará en la siguiente sección. Este método utiliza distintas escalas temporales y espaciales para aproximar un sistema de ecuaciones: una escala rápida para describir las oscilaciones de alta frecuencia y una escala lenta para capturar la evolución gradual de su amplitud o fase. Esta separación facilita la simplificación del sistema, permitiendo predecir de manera más efectiva el comportamiento de patrones en sistemas complejos.

$$\begin{aligned} u_t &= f(u, v; \mu) + D_u \nabla^2 u \\ v_t &= g(u, v; \mu) + D_v \nabla^2 v \end{aligned}$$

donde $f(u, v; \mu)$ determina cómo cambia la variable u por reacciones locales entre u , v y el parámetro μ ; de manera análoga, $g(u, v; \mu)$ para la variable v . El parámetro μ representa un parámetro de control (o conjunto de parámetros) que influye en la dinámica del sistema.

La estabilidad del punto crítico del sistema de RD se analiza mediante el espectro de valores propios λ del sistema linealizado asociado, es decir, del sistema $\mathbb{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ donde $\mathbb{L}$ es el operador lineal obtenido al linealizar el lado derecho del sistema original alrededor del equilibrio. En este contexto, el punto crítico se define como el estado estacionario donde $u'(t) = v'(t) = 0$. Si todos los valores propios tienen parte real negativa, el equilibrio es linealmente estable. Si alguno de ellos posee parte real positiva, entonces el equilibrio es inestable.

En el caso crítico, cuando un parámetro de bifurcación $\mu = 0$ se aproxima a cero, puede ocurrir que al menos un valor propio cruce el eje imaginario en el plano complejo. Dado que los valores propios son raíces de un polinomio característico de grado n con coeficientes reales, existen dos posibilidades principales: que un único valor propio real cruce el eje imaginario o que lo hagan simultáneamente un par de valores propios complejos conjugados. En ambos casos, se requiere que el cruce ocurra de manera transversal, esto es, con una velocidad no nula. Esta condición se expresa como: $\left. \frac{d\text{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0$.

La escritura de esta sección sigue de cerca la referencia [61], dos ejemplos bien desarrollados de los modelos BVAM y Brusselator, los cuales se puede consultar en el Apéndice A de este trabajo. Sin embargo, aquí se explica a grandes rasgos en qué consiste este procedimiento.

Deducción de la ecuación de Stuart-Landau

Este método se aplica a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, sin dependencia espacial, de la forma $\mathbf{u}_t = \mathbf{F}(\mathbf{u}; \mu)$. Se considera una expansión en serie de Taylor alrededor del punto crítico y desplazado hacia el origen, lo que conduce a una forma normal en la que los términos se agrupan por orden:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u} + \dots, \quad (1.38)$$

donde $\mathbf{L}$ representa la matriz jacobiana evaluada en el equilibrio, $\mathbf{M}$ es un operador bilineal que proviene de las derivadas de segundo orden de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{N}$ es un operador trilineal asociado a las derivadas de tercer orden, y así sucesivamente. Este desarrollo permite construir una aproximación ordenada para estudiar la bifurcación del sistema y deducir, bajo ciertas condiciones de no degeneración, la ecuación de Stuart-Landau para la amplitud de la solución oscilante.

Para la expansión, las distintas cantidades se expondrán como potencias de un parámetro positivo y pequeño, que puede ser denominado ϵ y que es proporcional a la distancia a la bifurcación. Expandiendo en el parámetro la parte lineal, el valor propio y la solución escalada con respecto a $\epsilon^2 = \mu$, se tiene

$$L = L_0 + \epsilon^2 L_1 + \epsilon^4 L_2 + \dots, \quad (1.39)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots, \quad (1.40)$$

donde $\lambda_0 = \sigma_0 + i\omega_0$. Se asume que $\sigma_0 \geq 0$ y vale justo cero en la bifurcación de Hopf.

La solución se expande igualmente en términos de ϵ

$$\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u}_1 + \epsilon^2\mathbf{u}_2 + \dots \quad (1.41)$$

Para comenzar este análisis, se calcula la matriz jacobiana L_0 , que corresponde al operador lineal evaluado en el origen, ya que esta matriz captura la dinámica linealizada del sistema cerca del punto de equilibrio y se obtienen traza y determinante para encontrar el valor del parámetro en el cual la traza es igual a cero (parámetro de bifurcación) y se calcula λ_0 . Sean U y U^I los vectores propios derecho e izquierdo de L_0 correspondiente al valor propio λ_0 , ambos satisfacen las propiedades de ortogonalidad y ortonormalidad como se puede ver en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Dada L_0 , la matriz jacobiana evaluada en el origen, el vector derecho U de L_0 correspondiente al valor propio $\lambda_0 (= i\omega_0)$,*

$$L_0 U = \lambda_0 U, \quad L_0 \bar{U} = \bar{\lambda}_0 \bar{U} \quad (1.42)$$

De forma similar, el vector izquierdo U^I queda como,

$$U^I L_0 = \lambda_0 U^I, \quad \bar{U}^I L_0 = \bar{\lambda}_0 \bar{U}^I \quad (1.43)$$

Ambos vectores propios normalizados deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$U^I U = \bar{U}^I \bar{U} = 1, \quad U^I \bar{U} = \bar{U}^I U = 0.$$

Entonces, se pueden calcular λ_0 y λ_1 de la siguiente forma,

$$\lambda_0 = i\omega_0 = U^I L_0 U \quad (1.44)$$

$$\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1 = U^I L_1 U \quad (1.45)$$

Demostración,

$$(L_0 + \mu L_1 + \dots)U = (\lambda_0 + \mu \lambda_1 + \dots)U$$

La expansión en serie de potencias de μ (método perturbativo) es:

$$L_0 U + \mu L_1 U + \dots = \lambda_0 U + \mu \lambda_1 U + \dots$$

Los términos de orden cero y de orden uno (sin μ) deben coincidir,

$$L_0 U = \lambda_0 U \quad L_1 U = \lambda_1 U$$

Esto da lugar a las ecuaciones del tercer renglón, que son las condiciones de compatibilidad para cada orden de la perturbación.

$$U^I L_0 U = \lambda_0 U^I U = \lambda_0$$

$$U^I L_1 U = \lambda_1 U^I U = \lambda_1$$

Se concluye que los autovalores λ_0 y λ_1 pueden obtenerse proyectando las ecuaciones sobre el modo propio U^I , es decir, usando la ortonormalidad o biortogonalidad de los modos, lo cual es útil para calcular correcciones perturbativas de autovalores.

Para encontrar la siguiente matriz L_1 correspondiente al valor propio λ_1 , retomamos las expresiones (1.39), (1.40) y (1.41), y usamos el parámetro de bifurcación para definir a ϵ^2 como la distancia a este punto.

También se introduce un tiempo lento t escalando por ϵ^2

$$\tau = \epsilon^2 t. \quad (1.46)$$

Lo importante de esta herramienta multiescalas es que las variables temporales se consideran independientes, de tal manera que

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.47)$$

Definición 1.3.1. El sistema en general tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u} + \dots$$

donde como vimos L es la matriz jacobiana cuyo ij -ésimo elemento está dado por $L_{ij} = \frac{\partial F_i(X_0)}{\partial X_{0j}}$. Se expande a M y a N de igual forma que a L ,

$$M = M_0 + \epsilon^2 M_1 + \dots, \quad (1.48)$$

$$N = N_0 + \epsilon^2 N_1 + \dots, \quad (1.49)$$

M_{uv} y N_{uvw} son funciones simétricas de u , v y w .

$$(M_{uu})_i = \sum_{j,k} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F i(X_0)}{\partial X_{0j} \partial X_{0k}} u_j u_k$$

$$(N_{uuu})_i = \sum_{j,k,l} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 F i(X_0)}{\partial X_{0j} \partial X_{0k} \partial X_{0l}} u_j u_k u_l$$

Luego, a partir de los términos no lineales f y g , del sistema de RD, se expande a M y a N de la misma forma en como lo hicimos con L , (1.48) y (1.49). Como se menciona en la definición, las matrices se calculan como,

$$M_0 = [M_{0x}, -M_{0x}]$$

$$(M_0(ab))_x = (1/2!)(f_{xx}a_x b_x + f_{xy}a_x b_y + f_{yx}a_y b_x + f_{yy}a_y b_y)$$

$$N_0 = [N_{0x}, -N_{0x}]$$

$$(N_0(abc))_x = (1/3!)(f_{xxx}a_x b_x c_x + f_{xxy}a_x b_x c_y + f_{xyx}a_x b_y c_x + f_{xyy}a_x b_y c_y + f_{yxx}a_y b_x c_x + f_{yxy}a_y b_x c_y + f_{yyx}a_y b_y c_x + f_{yyy}a_y b_y c_y)$$

Los paréntesis cuadrados de M_0 y N_0 indican que las matrices correspondientes se construyen concatenando columnas (o bloques de matrices). M_0 se forma con una primera columna (o bloque) que es M_{0x} y una segunda columna (o bloque) que es $-M_{0x}$.

Sustituyendo en 1.38 las ecuaciones 1.39, 1.40, 1.41, 1.47, 1.48 y 1.49 se tiene,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - L_0 - \epsilon^2 L_1 - \dots \right) (\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) = \epsilon^2 (M_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1)) + \epsilon^3 (2(M_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)) + (N_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1))) + O(\epsilon^4) \quad (1.50)$$

Igualando las distintas potencias de ϵ , se obtiene una jerarquía de ecuaciones. Estas ecuaciones tienen la forma general, diferencial y lineal,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{L}_0 \right) \mathbf{u}_\nu = \mathbf{B}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (1.51)$$

donde los $\mathbf{B}_\nu(\mathbf{u}_{\nu-1}, \dots, \mathbf{u}_0)$ dependen de las soluciones de los pasos anteriores. Para los primeros ordenes se tiene que,

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

$$\mathbf{B}_2 = (M_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1))$$

$$\mathbf{B}_3 = 2(M_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)) + (N_0(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1)) - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 \right) \mathbf{u}_1$$

La condición de solubilidad está dada por el siguiente Teorema.

Teorema 1.3.2. Sea $\mathbf{u}_\nu(t, \tau)$ una solución periódica de periodo $2\pi/\omega_0$ de la siguiente ecuación¹, entonces se satisface la condición de solvencia (alternativa de Fredholm):

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \mathbf{U}^I \cdot \mathbf{B}_\nu e^{-i\omega_0 t} dt = 0$$

¹Conocida como ecuación homológica, la cual surge al igualar los términos de orden ϵ^ν en un análisis de perturbaciones múltiples.

En particular, $\mathbf{B}_\nu(t, \tau)$ puede ser expandido en series de Fourier,

$$\mathbf{B}_\nu(t, \tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_\nu^{(l)} e^{il\omega_0 t} \quad (1.52)$$

Así, la condición queda escrita como,

$$U^I \cdot \mathbf{B}_\nu^{(1)}(\tau) = 0. \quad (1.53)$$

Demostración,

El enunciado (1.54) se sigue de (1.52), ya que al multiplicar por $e^{-i\omega_0 t}$ e integrar, todos los términos desaparecen excepto el de $l = 1$, y para que este término desaparezca (1.52) debe mantenerse. Para probar (1.52) se usa (1.51) y el hecho de que $U^I L_0 = \lambda_0 U^I$ e integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_0} U^I \cdot \mathbf{B}_\nu e^{-i\omega_0 t} dt &= \int_0^{2\pi/\omega_0} U^I \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_0} U^I \cdot \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial t} - L_0 u_\nu \right) e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega_0} U^I \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial t} e^{-i\omega_0 t} - U^I \cdot L_0 u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= U^I \cdot [u_\nu e^{-i\omega_0 t}]_0^{2\pi/\omega_0} + U^I \cdot \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 U^I \cdot u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= U^I \cdot [u_\nu(2\pi/\omega_0, \tau) - u_\nu(0, \tau)] + U^I \cdot \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 U^I \cdot u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt \\ &= U^I \cdot \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt - \int_0^{2\pi/\omega_0} i\omega_0 U^I \cdot u_\nu e^{-i\omega_0 t} dt = 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.3.3. Las soluciones hasta de tercer orden de la ecuación $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) \mathbf{u}_\nu = \mathbf{B}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, junto con la condición de solubilidad descrita en el Teorema 1.3.2 son:

- De primer orden, para $\nu = 1$ la solución es la neutral,

$$\mathbf{u}_1 = W(\tau)Ue^{i\omega_0 t} + \text{complejo conjugado}.$$

- De segundo orden, para $\nu = 2$,

$$\mathbf{u}_2 = V_+ W^2 e^{2i\omega_0 t} + V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + |W|^2 V_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_1 \quad (1.54)$$

donde,

$$V_+ = (2i\omega_0 - L_0)^{-1} M_0[U, U] \quad (1.55)$$

$$V_- = -(2i\omega_0 + L_0)^{-1} M_0[\bar{U}, \bar{U}] \quad (1.56)$$

$$V_0 = -2L_0^{-1} M_0[U, \bar{U}] \quad (1.57)$$

■ De tercer orden,

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \lambda_1 W - g|W|^2 W, \quad (1.58)$$

donde $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1 = U^* L_1 U$, $g = g_r + ig_i = -2U^* M_0 U V_0 - 2U^* M_0 \bar{U} V_+ - 3U^* N_0 U U \bar{U}$, $\chi = 1$. (Los índices r e i corresponden a la parte real e imaginaria de la g).

Demostración,

* La solución de primer orden, para $\nu = 1$ la solución es la neutral,

$$\mathbf{u}_1(t, \tau) = W(\tau) U e^{i\omega_0 t} + \text{complejo conjugado}.$$

* De segundo orden, para $\nu = 2$, la condición de solución se cumple trivialmente, ya que $\mathbf{B}_2 = M_0[u_1, u_1]$ entonces la expansión de Fourier produce $\mathbf{B}_2^{(1)}(\tau) = 0$, el coeficiente de $e^{i\omega_0 t}$.

Expandiendo,

$$\mathbf{B}_2 = W^2 M_0[U, U] e^{2i\omega_0 t} + \bar{W}^2 M_0[\bar{U}, \bar{U}] e^{-2i\omega_0 t} + 2|W|^2 M_0[U, \bar{U}] \quad (1.59)$$

El cual muestra que $\mathbf{B}_2$ contiene solo términos constantes y términos doblemente periódicos, por lo que no hay resonancia. Por lo tanto se busca la solución de (1.51) para $\mathbf{u}_2$ en la forma

$$\mathbf{u}_2 = V_+ W^2 e^{2i\omega_0 t} + V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + |W|^2 V_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_1 \quad (1.60)$$

Sustituyendo en $(\partial/\partial t - L_0)\mathbf{u}_2 = \mathbf{B}_2$ (aplicar la primera derivada, luego L_0 en cada término en la izquierda y luego factorizar en cada término)

$$(2i\omega_0 - L_0)V_+ W^2 e^{2i\omega_0 t} + (-2i\omega_0 - L_0)V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} - |W|^2 L_0 V_0 + \mathbf{v}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) \mathbf{u}_1 \quad (1.61)$$

$$= W^2 M_0[U, U] e^{2i\omega_0 t} + \bar{W}^2 M_0[\bar{U}, \bar{U}] e^{-2i\omega_0 t} + 2|W|^2 M_0[U, \bar{U}] \quad (1.62)$$

El término $(\partial/\partial t - L_0)\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}_1 = 0$, por (1.51) y (1.52). Igualando términos con las mismas frecuencias y usando la simetría de M_0 ,

$$(2i\omega_0 - L_0)V_+ = M_0[U, U] \quad (1.63)$$

$$-(2i\omega_0 + L_0)V_- = M_0[\bar{U}, \bar{U}] \quad (1.64)$$

$$-L_0 V_0 = 2M_0[U, \bar{U}] \quad (1.65)$$

Resolviendo formalmente,

$$V_+ = (2i\omega_0 - L_0)^{-1} M_0[U, U] \quad (1.66)$$

$$V_- = -(2i\omega_0 + L_0)^{-1} M_0[\bar{U}, \bar{U}] \quad (1.67)$$

$$V_0 = -2L_0^{-1} M_0[U, \bar{U}] \quad (1.68)$$

De tercer orden,

De acuerdo con (1.52), y recordando que $W = W(\tau)$,

$$\mathbf{B}_3 = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 \right) \mathbf{u}_1 + 2M_0[u_1, u_2] + N_0[u_1, u_1, u_1] \quad (1.69)$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 \right) (W U e^{i\omega_0 t} + \bar{W} \bar{U} e^{-i\omega_0 t}) \quad (1.70)$$

$$+ 2M_0[W U e^{i\omega_0 t} + \bar{W} \bar{U} e^{-i\omega_0 t}, V_+ W^2 e^{2i\omega_0 t} + V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + V_0 |W|^2 + v_0 u_1] \quad (1.71)$$

$$+ N_0[W U e^{i\omega_0 t} + \bar{W} \bar{U} e^{-i\omega_0 t}, W U e^{i\omega_0 t} + \bar{W} \bar{U} e^{-i\omega_0 t}, W U e^{i\omega_0 t} + \bar{W} \bar{U} e^{-i\omega_0 t}] \quad (1.72)$$

donde se eligen solo los términos que contienen $e^{i\omega_0 t}$, a saber, el término $\mathbf{B}_3^{(1)}$,

$$\mathbf{B}_3^{(1)} = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 \right) WU + 2|W|^2 W M_0[U, V_0] + 2|W|^2 W M_0[\bar{U}, V_+] + 3|W|^2 W N_0[U, U, \bar{U}] \quad (1.73)$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 \right) WU + |W|^2 W (2M_0[U, V_0]) + 2M_0[\bar{U}, V_+] + 3N_0[U, U, \bar{U}] \quad (1.74)$$

despejando W_t se obtiene exactamente la ecuación de Stuart Landau.

De acuerdo al Teorema 1.3.3, se plantea la solución de primer orden $\mathbf{u}_1$ y para obtener la de segundo orden, como el sistema homogéneo es el mismo, se propone la solución particular por el método de coeficientes indeterminados para construir $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{2H} + \mathbf{u}_{2P}$. Se encuentra el sistema de ecuaciones que va a plantear las matrices V_+ , V_- y V_0 . Para terminar se resuelve ahora el sistema de orden 3 sustituyendo las matrices correspondientes.

Por lo tanto, aplicando la condición de solubilidad a (1.51) se obtiene la ecuación de Stuart-Landau,

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \lambda_1 W - g|W|^2 W, \quad (1.75)$$

donde $\lambda_1 = \bar{U} L_1 U$, $g = -2U^T(M_0(U, V_0)) - 2U^T(M_0(\bar{U}, V_+)) - 3U^T(N_0(U, U, \bar{U}))$.

Deducción de la ecuación de Ginzburg-Landau

Considérese ahora un sistema de reacción difusión, expandiendo en series de Taylor alrededor del punto crítico se tiene,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\mathbf{L} + D\nabla^2)\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u} + \dots, \quad (1.76)$$

La escala de la coordenada espacial es,

$$s = \epsilon r, \quad \nabla \rightarrow \nabla_s,$$

Expandiendo el operador de tiempo como en (1.50) y en potencias de ϵ ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^2 D\nabla_s^2 - L_0 - \epsilon^2 L_1 - \dots \right) (\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) = \epsilon^2 (M_{u_1 u_1})_0 + \epsilon^3 [2(M_{u_1 u_2})_0 + (N_{u_1 u_1 u_1})_0] + O(\epsilon^4) \quad (1.77)$$

Similarmente, se encuentra una jerarquía de ecuaciones diferenciales,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) \mathbf{u}_v = \tilde{\mathbf{B}}_v \quad v = 1, 2, \dots \quad (1.78)$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 0 \\ \tilde{B}_2 &= (M_{u_1 u_1})_0 \\ \tilde{B}_3 &= 2(M_{u_1 u_2})_0 + (N_{u_1 u_1 u_1})_0 - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - L_1 - D\nabla_s^2 \right) u_1 \end{aligned}$$

La condición de solubilidad se obtiene extrayendo el coeficiente en la expansión de Fourier correspondiente a la frecuencia fundamental

$$\tilde{\mathbf{B}}_\nu(t, \tau, s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{B}}_\nu^{(l)}(\tau, s) e^{il\omega_0 t} \quad (1.79)$$

Así, la condición queda escrita como,

$$U^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_\nu^{(1)}(\tau, s) = 0 \quad (1.80)$$

La solución de primer orden del sistema (1.58) es

$$u_1(t, \tau, s) = W(\tau, s) U e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}$$

Se obtiene u_2 en términos de u_1 , y luego $\tilde{B}_3^{(1)}$ en términos de u_1 (y por lo tanto de W). El resultado es

$$\tilde{B}_3^{(1)} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_1 - D \nabla_s^2 \right) W U + [2(M_{UV_0})_0 + 2(M_{\bar{U}V})_0 + 3(N_{UU\bar{U}})_0] |W|^2 W \quad (1.81)$$

Para finalizar, la condición de solubilidad (1.81) para $\nu = 3$ encuentra la ecuación de Ginzburg-Landau,

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \lambda_1 W + d \nabla_s^2 W - g |W|^2 W \quad (1.82)$$

donde $\lambda_1 = U^T L_1 U$, $d = U^T D U$, $g = -2U^T (M_{UV_0})_0 - 2U^T (M_{\bar{U}V_+})_0 - 3U^T (N_{UU\bar{U}})_0$.

Es conveniente trabajar con una versión re-escalada de la ecuación GL, ésta tendrá en cuenta la transformación de escala siguiente,

$$(\tau, s, W) \longrightarrow (\sigma_1^{-1} T, \sqrt{d_r/\sigma_1} r, \sqrt{\sigma_1/|g_r|} \mathbb{W}) \quad (1.83)$$

Para encontrar así,

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial t} = (1 + ic_0) \mathbb{W} + (1 + ic_1) \nabla^2 \mathbb{W} - (1 + ic_2) |\mathbb{W}|^2 \mathbb{W} \quad (1.84)$$

con $c_0 = \omega_1/\sigma_1$, $\beta = d_i/d_r$, $\alpha = g_i/g_r$. Se supone que la bifurcación es supercrítica, esto es $g_r > 0$. Incluso se puede eliminar el término c_0 realizando la transformación $A = \mathbb{W} e^{-ic_0 T}$ quedando la ecuación como,

$$\frac{\partial A}{\partial T} = A + (1 + i\beta) \nabla^2 A - (1 + i\alpha) |A|^2 A. \quad (1.85)$$

Cabe mencionar que la CGLE describe la dinámica lenta del sistema, por lo cual las variables espaciales y temporales que aparecen son aquellas escaladas por ϵ y describen las transiciones cuyos tiempos característicos son los más largos del proceso. Es importante destacar como lo hicimos al inicio que en principio todos los sistema de reacción difusión RD extendidos, cerca de oscilaciones temporales, pueden describirse en general por esta dinámica.

En el siguiente capítulo se describirán las soluciones de la ecuación de Ginzburg-Landau compleja, sus características de estabilidad, dispersión, persistencia y dinámica en general.

Capítulo 2

Propiedades de ondas y patrones

Este segundo capítulo explora en detalle las propiedades de la ecuación de Ginzburg-Landau compleja (CGLE) en el contexto de ondas unidimensionales y patrones espirales, abordando tanto los fundamentos teóricos como los criterios de estabilidad. En la literatura hay varios resultados para CGLE que nos permiten entender cómo interpretarla, hay algunos resultados para espirales y algunos resultados de ondas 1D que se han extrapolado a dos dimensiones. El objetivo de esta tesis es profundizar en los resultados conocidos sobre la ecuación CGLE, y explorar cómo se conectan, adaptan o extienden a situaciones bidimensionales como las ondas espirales.

A partir de lo anterior, es importante aclarar que este capítulo está estructurado para distinguir claramente entre dos enfoques principales:

- *Estudios teóricos que se presentan en las secciones 2.1, 2.2 y 2.3, que corresponden a soluciones de la ecuación en sistemas unidimensionales, algunas de las cuales son extrapoladas parcialmente a bidimensionales.*
- *Estudios heurísticos y numéricos de espirales reales en dos dimensiones, que se abordan en las secciones 2.4 y 2.5. Estos estudios están enfocados en soluciones obtenidas mediante simulaciones y observaciones que reflejan dinámicas más cercanas a sistemas reales.*

Se inicia entonces en la sección 2.1, el análisis con una revisión de las soluciones de onda plana en sistemas unidimensionales, profundizando en los criterios de estabilidad como el de Eckhaus y Benjamin-Feir-Newell (BFN), los cuales delimitan el rango de parámetros en los que estas soluciones son estables o inestables. A través de un análisis de la tasa de crecimiento de los modos de perturbación, se identifican las condiciones para la aparición de inestabilidad convectiva y absoluta en las ondas planas, dos conceptos que juegan un rol crucial en la dinámica de patrones.

Posteriormente, en la sección 2.2, se aborda la diferencia entre ondas espirales y antiespirales en medios oscilatorios, siguiendo la teoría de Nicola y sus colaboradores, [73]. Se introducen conceptos clave como la velocidad de fase y la velocidad de grupo, los cuales determinan la dirección de propagación de las ondas. También se explora la conexión con las soluciones de agujeros de Nozaki-Bekki, que ayudan a entender cómo se propagan las ondas en un medio bidimensional y cómo se puede interpretar el fenómeno de antiespirales en sistemas de

reacción-difusión.

En la sección 2.3 se analiza la persistencia de ondas en sistemas unidimensionales, centrándose en la estabilidad de las ondas planas frente a perturbaciones. Se utiliza el criterio de inestabilidad de Eckhaus para evaluar las condiciones bajo las cuales una onda puede conservar su número inicial a lo largo del tiempo. También se exploran las similitudes teóricas con sistemas bidimensionales, estableciendo la expectativa de que las espirales podrían mantener hasta un número determinado de ondas en un dominio circular bajo ciertas condiciones iniciales y parámetros del modelo.

Además, en la sección 2.4, se expande el estudio a patrones espirales en sistemas bidimensionales, analizando tanto espirales de un solo brazo como espirales de múltiples brazos. De acuerdo a trabajos de referencia como los de Hagan, [45] y, Aranson, [7], se describe cómo las espirales pueden mantenerse estables en función de los parámetros α y β , y cómo la transición entre los comportamientos estables e inestables se ve afectada por el número de onda asintótico Q y las características del núcleo de la espiral.

Finalmente, en la última sección, se estudian los distintos regímenes de comportamiento de la CGLE en sistemas unidimensionales, tales como la turbulencia de fase, la turbulencia de amplitud y la intermitencia espacio-temporal, clasificando las soluciones de acuerdo con sus propiedades espacio-temporales y el tipo de caos presente. Este análisis se estudia en el espacio de parámetros de la ecuación, permitiendo identificar las fronteras que separan los distintos regímenes dinámicos.

Con este desarrollo teórico se prepara el terreno para el siguiente capítulo, donde se abordan simulaciones numéricas utilizando el software COMSOL. Estas simulaciones permitirán visualizar la evolución de las ondas en espiral en dominios bidimensionales bajo condiciones de frontera específicas, proporcionando una representación tangible de los conceptos teóricos discutidos en este capítulo.

2.1. Estabilidad en ondas 1D

En esta sección se analizan las inestabilidades absoluta y convectiva en el contexto de ondas unidimensionales, estableciendo las condiciones matemáticas necesarias para su aparición. Además, se profundiza en los criterios de Eckhaus y *BFN*, delimitando las regiones de estabilidad e inestabilidad en el espacio de parámetros. Esto se ilustra con una gráfica que muestra las fronteras en el plano (α, β) y su relevancia en la dinámica de ondas planas y patrones espirales.

De acuerdo a las simplificaciones de la sección anterior, la ecuación de Ginzburg Landau compleja (CGLE) está dada por la siguiente expresión,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + i\beta)\nabla^2 A - (1 + i\alpha)|A|^2 A \quad (2.1)$$

donde A es la variable que representa la amplitud compleja. La CGLE tiene propiedades genéricas como son: invarianza traslacional ($r \rightarrow r + \text{constante}$), isotropía ($\theta \rightarrow \theta + \text{constante}$), gauge invariante ($A \rightarrow Ae^{i\phi}$ con ϕ constante) e inversión en el espacio de parámetros $[(\alpha, \beta, A) \rightarrow (-\alpha, -\beta, A^*)]$. La variedad de soluciones que puede tener la CGLE son: ondas

planas en 1D, ondas espirales en 2D e incluso filamentos de vórtice en 3D (que no se estudiarán en este trabajo).

Las ondas planas viajeras tienen la forma,

$$A = Fe^{i[\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}-\omega t]},$$

donde $F^2 = 1 - Q^2$ y $\omega = \alpha + (\beta - \alpha)Q^2$. F es la amplitud, Q es el número de onda ($Q^2 < 1$) y ω es la frecuencia de onda. Los coeficientes β y α miden linealmente la dependencia de la frecuencia de onda sobre el número de onda y la dispersión no lineal, respectivamente.

Analizar la estabilidad de la onda espiral significa estudiar la onda plana emitida, ya que su comportamiento nos permite comprender la evolución de perturbaciones en el espacio y el tiempo. Para investigar la estabilidad se considera la tasa de crecimiento compleja λ de la solución de onda plana frente a perturbaciones longitudinales de la forma $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con k paralelo a Q . Esta tasa de crecimiento refleja cómo las perturbaciones se amplifican o decaen en el tiempo, puede clasificarse según el tipo de inestabilidad. En el caso de una inestabilidad absoluta, la perturbación crece y se propaga en todas las direcciones del espacio, como se observa en las líneas continuas de la Figura 2.1 (a), mientras que la curva discontinua indica la trayectoria del pico de las ondas. Por otro lado, en una inestabilidad convectiva, la dinámica se restringe a propagarse en una única dirección creciente, como se muestra en la Figura 2.1 (b). Ambos casos ilustran cómo las perturbaciones evolucionan temporal y espacialmente bajo diferentes condiciones de inestabilidad.

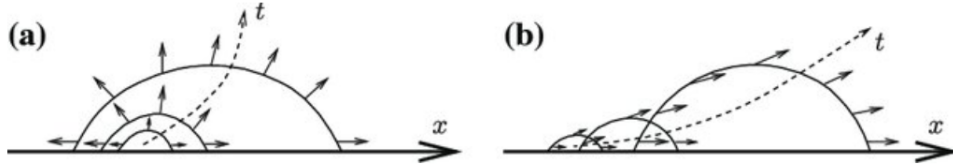


Figura 2.1: (a) Inestabilidad absoluta, la perturbación se propaga en todas direcciones. (b) Inestabilidad convectiva, la dinámica se mueve en la misma dirección creciente. Tomada de [19].

Dada la onda plana viajera $A = Fe^{i(q\cdot r - \omega t)}$ como solución de fondo, se introduce una perturbación de la forma $\delta a_{\pm}e^{\lambda t + ik\cdot r}$, donde k representa el número de onda de la perturbación. Al sustituir $A + \delta a_{\pm}e^{\lambda t + ik\cdot r}$ en la CGLE y linealizar con respecto a δ , se obtiene una ecuación algebraica para $\lambda(k)$, cuya solución corresponde a la siguiente relación de dispersión:

$$\lambda(k) = -k^2 - 2iq\beta k - F^2 \pm [(1 + \alpha^2)F^4 - (\beta k^2 - 2iqk + \alpha F^2)^2]^{1/2}. \quad (2.2)$$

En el límite de longitud de onda larga ($k \rightarrow 0$), donde las perturbaciones tienen una longitud de onda mucho mayor que la escala característica del sistema, es posible realizar una expansión de la ecuación (2.2), que queda expresada como,

$$\lambda(k) = -iv_g k - D_{\parallel} k^2 + O(k^3) \quad (2.3)$$

donde los coeficientes son:

$$v_g = 2(\alpha - \beta)Q, \quad (2.4)$$

$$D_{||} = 1 + \alpha\beta - 2(1 + \alpha^2)Q^2/(1 - Q^2), \quad (2.5)$$

aquí v_g representa la velocidad de grupo, que describe la rapidez con la que las perturbaciones viajan en el espacio, y $D_{||}$ es el término asociado a la difusión de fase, que determina la estabilidad de las perturbaciones en función del número de onda Q .

Este límite es físicamente relevante porque describe el comportamiento de las perturbaciones de baja frecuencia y gran longitud de onda, lo cual es crucial para entender la estabilidad de patrones a gran escala y la propagación de ondas en sistemas extendidos. En particular, las ondas viajeras son estables cuando $D_{||}(Q) > 0$, lo que define la estabilidad de Eckhaus. Es posible determinar el criterio exacto para esta estabilidad al despejar Q , quedando

$$Q^2 < Q_{ECK}^2 = \frac{1 + \alpha\beta}{3 + 2\alpha^2 + \alpha\beta}, \quad (2.6)$$

el cual incluye como caso límite la situación homogénea ($Q = 0$). Un caso particular de interés ocurre cuando $\alpha = \beta$, ya que en este escenario el criterio de Eckhaus se simplifica a $Q^2 < Q_{ECK}^2 = 1/3$. Este resultado se obtiene al sustituir y simplificar $\alpha = \beta$ en la expresión (2.6), mostrando cómo el límite clásico se recupera en este caso especial.

En el caso de las espirales, estas emiten ondas viajeras con una velocidad de grupo $v_g \neq 0$, dirigida hacia afuera. Sin embargo, debido a esta propagación hacia el exterior, el criterio de Eckhaus solo puede considerarse una prueba de inestabilidad convectiva. Esto significa que cualquier perturbación inicial de la onda plana asintótica, aunque se propague en el tiempo hacia afuera, no necesariamente se amplifica en una posición fija del espacio. Este comportamiento refleja una dinámica donde las perturbaciones son arrastradas lejos del sistema central, evitando su crecimiento local.

En la Figura 2.2 se ilustra el rango de estabilidad de Eckhaus en el plano (α, β) , representado por la curva roja, que marca la frontera del dominio estable. Además, se incluye el criterio de *BFN*, cuya ecuación $1 + \alpha\beta = 0$ está representada por la curva azul. Este criterio establece que, bajo esta condición, no existen ondas planas estables.

Además, la Figura 2.2 incluye otras curvas relevantes: la curva naranja (*SP*), que define los límites de estabilidad absoluta para espirales bidimensionales (2D), y la curva magenta (*SN*), que delimita la región hasta la cual existen números de onda inestables por convección. Estas fronteras complementan el análisis de estabilidad, proporcionando una visión integral de los regímenes dinámicos en el plano (α, β) .

En la subsección 2.1.2 se explicará la construcción de esta gráfica, por lo pronto se describirán las ecuaciones fundamentales que permiten calcular las inestabilidades absoluta y convectiva.

2.1.1. Inestabilidades absoluta y convectiva

El análisis de las inestabilidades absoluta y convectiva tiene como objetivo identificar cómo las perturbaciones en un sistema dinámico se comportan a medida que se propagan en el

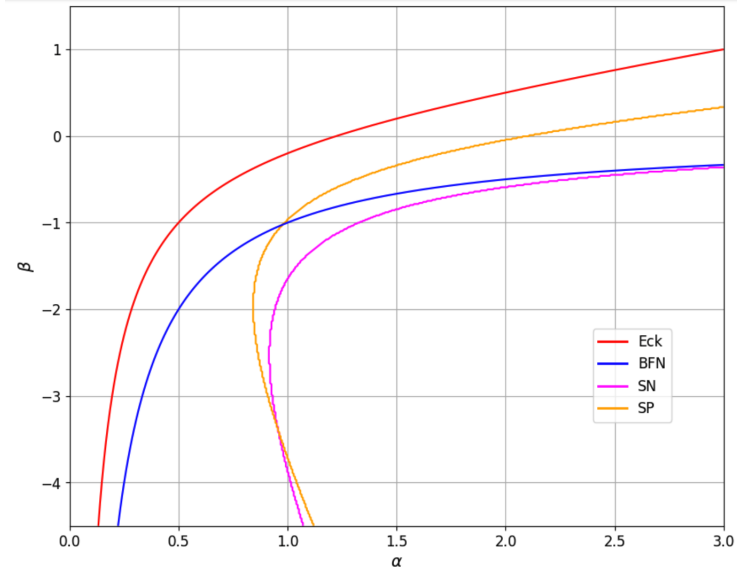


Figura 2.2: Espacio de parámetros donde se pueden ver los límites de estabilidad de las ondas en espiral en el plano (α, β) . Reproducida del artículo de Aranson, [7].

espacio y el tiempo. Estas inestabilidades determinan si una perturbación inicial permanece confinada cerca de su origen (inestabilidad absoluta) o si es arrastrada por el flujo, decayendo lejos de su punto de generación (inestabilidad convectiva). Este tipo de análisis es fundamental para caracterizar la estabilidad de patrones generados en sistemas no lineales, como las ondas emitidas por espirales. Las condiciones de inestabilidad absoluta son las siguientes y en esta sección vamos a encontrarlas [7],

$$\text{Re}[\lambda(k_0)] > 0, \quad \text{con} \quad \frac{\partial \lambda(k_0)}{\partial k} = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial^2 \lambda(k_0)}{\partial k^2} \right] < 0. \quad (2.8)$$

Mientras que la inestabilidad convectiva sólo toma en cuenta que:

$$\text{Re}[\lambda(k_0)] > 0, \quad \text{y}, \quad \text{Im}[\lambda(k_0)] \neq 0. \quad (2.9)$$

Para analizar la inestabilidad absoluta, se considera la evolución temporal de una perturbación localizada en el espacio. Esto se describe mediante la función:

$$S(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk (2\pi)^{-1} \hat{S}_0(k) e^{[ikx + \lambda(k)t]} \quad (2.10)$$

donde $\hat{S}_0(k)$ es la transformada de Fourier de la perturbación inicial. En el límite $t \rightarrow \infty$, la integral está dominada por el punto de silla más relevante de $\lambda(k)$, denotado como k_0 . Esto significa que la dinámica del sistema se concentra cerca de este punto. Para evaluar esta integral, se utiliza el método de descenso pronunciado (o *steepest-descent*, presentado en el Apéndice B), que reduce la complejidad al expandir $\lambda(k)$ alrededor de k_0 mediante una serie de Taylor de segundo orden:

$$\lambda(k) = \lambda(k_0) + \lambda'(k_0)\kappa + \frac{1}{2}\lambda''(k_0)\kappa^2 + \dots, \quad (2.11)$$

donde $\kappa = k - k_0$. Evaluando la integral,

$$S(x, t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} S_0(k) \exp [ikx + \lambda(k)t] dk. \quad (2.12)$$

Utilizando la expresión (2.8) de $\lambda(k)$,

$$S(x, t) \sim \exp [ik_0x + \lambda(k_0)t] \int_{-\infty}^{\infty} S_0(k_0) \exp \left[i\kappa x + \lambda'(k_0)\kappa t + \frac{1}{2}\lambda''(k_0)\kappa^2 t \right] d\kappa. \quad (2.13)$$

Si $\lambda'(k_0) = 0$, se elimina el término lineal en κ . La integral entonces queda como,

$$S(x, t) \sim S_0(k_0) \exp [ik_0x + \lambda(k_0)t] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{2}\lambda''(k_0)\kappa^2 t \right] d\kappa, \quad (2.14)$$

La integral es una Gaussiana estándar, cuyo resultado es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{2}\lambda''(k_0)\kappa^2 t \right] d\kappa = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda''(k_0)t}}, \quad (2.15)$$

siempre que $\lambda''(k_0) < 0$, lo que garantiza la convergencia de la integral. Por tanto, $S(x, t)$ se reduce a,

$$S(x, t) \sim S_0(k_0) \exp [ik_0x + \lambda(k_0)t] \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda''(k_0)t}} \quad (2.16)$$

La expresión para $S(x, t)$ nos permite determinar las condiciones bajo las cuales una perturbación evoluciona de manera inestable. Estas condiciones son:

Inestabilidad absoluta

- La estabilidad absoluta depende de la parte real de $\lambda(k_0)$. Si $\text{Re}[\lambda(k_0)] > 0$, la perturbación crece exponencialmente en el tiempo y el sistema es inestable.
- La primera derivada de $\lambda(k)$ respecto a k debe ser cero en k_0 para evitar un movimiento oscilatorio de la perturbación:

$$\lambda'(k_0) = 0$$

- La segunda derivada debe ser negativa para garantizar la convergencia de la integral:

$$\lambda''(k_0) < 0$$

Inestabilidad convectiva

En este caso, las perturbaciones crecen localmente pero son arrastradas por el flujo hacia regiones alejadas. Las condiciones son:

$$\text{Re}[\lambda(k_0)] > 0, \quad \text{y} \quad \text{Im}[\lambda(k_0)] \neq 0$$

Las condiciones anteriores establecen la diferencia entre una inestabilidad absoluta, donde las perturbaciones permanecen y crecen cerca de su punto de origen, y una inestabilidad convectiva, donde las perturbaciones se propagan hacia el exterior del sistema. En términos físicos, si $\lambda(k_0) > 0$ y $\lambda''(k_0) < 0$, el sistema presenta una inestabilidad absoluta. Si $\lambda(k_0) > 0$

pero no cumple $\lambda'(k_0) = 0$, el sistema es convectivamente inestable.

Mediante este análisis, se muestra de forma analítica y numérica cómo las ondas aisladas pueden permanecer estables cerca de la curva de estabilidad de Eckhaus y, para ciertos parámetros, incluso dentro del rango identificado como inestable bajo el criterio de *BFN*. Esto permite caracterizar completamente las dinámicas de estabilidad en sistemas no lineales, haciendo énfasis en la diferenciación entre inestabilidades absoluta y convectiva.

A partir de la integral de evolución $S(x, t)$, que describe el crecimiento de perturbaciones localizadas en el espacio (ec. 2.10), se obtienen las condiciones necesarias para identificar el tipo de inestabilidad presente en el sistema, ya sea absoluta o convectiva, dependiendo de los términos dominantes en $\lambda(k_0)$. Estas condiciones permiten construir criterios teóricos que definen las fronteras entre diferentes regímenes de estabilidad. En particular, los resultados obtenidos son fundamentales para la construcción de la gráfica del espacio de parámetros (α, β) , donde se visualizan estas fronteras en términos de parámetros como α , β y Q , proporcionando una representación clara de los dominios de estabilidad e inestabilidad en el sistema dinámico. En la siguiente subsección se revisará la construcción de esta gráfica.

2.1.2. Construcción de la gráfica del espacio de parámetros (α, β)

La construcción de la gráfica del espacio de parámetros (α, β) tiene como objetivo identificar las regiones de estabilidad e inestabilidad en el espacio de parámetros α y β , analizando los tipos de inestabilidades ya explicadas, convectiva y absoluta. Para ello, se utiliza un enfoque combinado que incluye herramientas analíticas y numéricas, basadas en las condiciones de inestabilidad previamente derivadas (como las de Eckhaus y *BFN*). Esta gráfica permite visualizar las transiciones entre diferentes regímenes dinámicos del sistema.

El punto de partida es la función de crecimiento de perturbaciones $\lambda(k)$, (1.66), que describe cómo evolucionan las perturbaciones en ondas planas. A partir de la ecuación general de $\lambda(k)$, después de sustituir $F^2 = 1 - Q^2$, se tiene:

$$\lambda(k) = Q^2 - 2iQ\beta k - k^2 + \sqrt{(1 - Q^2)^2(\alpha^2 + 1) - (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2} - 1,$$

y se analiza su comportamiento para distintos valores de k , Q , α , y β . Esta ecuación incluye tanto una parte real como imaginaria que determinan, respectivamente, el crecimiento y la oscilación de las perturbaciones. El análisis de estas partes permite clasificar las perturbaciones en estables o inestables, según las condiciones del sistema.

Para obtener información detallada sobre las inestabilidades, se realiza una expansión de $\lambda(k)$ alrededor de k_0 , que es el número de onda más probable para la inestabilidad. La expansión de Taylor hasta el segundo orden es:

$$\lambda(k) = \lambda(k_0) + \lambda'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\lambda''(k_0)(k - k_0)^2 + \dots$$

donde,

$$\lambda'(k) = -2iQ\beta - 2k - \frac{(-4iQ + 4\beta k)(-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))}{2\sqrt{(1 - Q^2)^2(\alpha^2 + 1) - (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2}},$$

$$\begin{aligned}
\lambda''(k) = & -2\beta \frac{(-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))}{\sqrt{(1 - Q^2)^2(\alpha^2 + 1) - (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2}} \\
& - \frac{(-4iQ + 4\beta k)^2 (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2}{4((1 - Q^2)^2(\alpha^2 + 1) - (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2)^{3/2}} \\
& - \frac{(-4iQ + 4\beta k)(-2iQ + 2\beta k)}{2\sqrt{(1 - Q^2)^2(\alpha^2 + 1) - (-2iQk + \beta k^2 + \alpha(1 - Q^2))^2}} - 2.
\end{aligned}$$

Para calcular las regiones de estabilidad, se implementa un método numérico basado en la resolución de la condición $\lambda'(k_0) = 0$. Este proceso comienza con la elección de rangos específicos para los parámetros $\alpha \in [0, 3]$ y $\beta \in [-4, 1]$, y valores discretos para Q (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7). Una vez definidos esos parámetros, se aplica una aproximación numérica por diferencias finitas para resolver $\lambda'(k_0) = 0$ y determinar los puntos donde esta condición se cumple. Con los resultados obtenidos, se identifican las curvas asociadas a diferentes tipos de inestabilidad. Para la inestabilidad convectiva, se construyen curvas basadas en la intersección de soluciones obtenidas para distintos valores de Q . En el caso de la inestabilidad absoluta, se delimitan las regiones donde se cumplen simultáneamente las condiciones ya descritas en la subsección anterior. Este enfoque numérico permite visualizar de manera clara las fronteras entre los regímenes de estabilidad e inestabilidad en el espacio de parámetros.

Curva de inestabilidad de Eckhaus

El criterio de Eckhaus amplía el análisis de estabilidad al considerar no solo la presencia de inestabilidades, sino también su naturaleza y amplitud en función del número de onda Q . Las ondas planas son estables bajo este criterio si $Q^2 < Q_{ECK}^2$, donde Q_{ECK}^2 se calcula con la ecuación (2.6). Este criterio es particularmente importante para identificar regiones de estabilidad en sistemas que presentan ondas planas moduladas, como aquellas generadas por espirales o defectos topológicos.

En el contexto bidimensional, la interpretación de la curva *ECK* cambia. Mientras que en 1D el criterio de Eckhaus determina la estabilidad de una onda plana con un número de onda inicial Q , en 2D la curva se construye considerando el número de onda asintótico Q_s de una espiral. Este número Q_s depende de los parámetros (α, β) y se obtiene resolviendo las ecuaciones para ondas espirales en coordenadas polares, aplicando condiciones de frontera asintóticas para asegurar la consistencia de la solución, de esto se platicará también en la sección 2.4. [7, 45]. La curva *ECK* en 2D, por lo tanto, representa el límite más allá del cual una espiral pierde estabilidad frente a la inestabilidad de Eckhaus, reflejando un comportamiento más complejo que en el caso unidimensional.

Curva de inestabilidad de *BFN*

El criterio de *BFN*, establece que las ondas planas son inestables cuando $1 + \alpha\beta < 0$, lo que implica que cualquier pequeña perturbación introducida en la onda crecerá exponencialmente con el tiempo. Por otro lado, si $1 + \alpha\beta > 0$, las ondas planas permanecen estables frente a perturbaciones. Matemáticamente, este límite se obtiene evaluando la parte real de la

tasa de crecimiento $\lambda(k)$ asociada a las perturbaciones: cuando esta cambia de signo, marca la frontera entre estabilidad e inestabilidad. Este criterio es esencial para identificar las condiciones bajo las cuales no existen ondas planas estables en sistemas dinámicos.

La Figura 2.2 incluye las curvas de inestabilidades convectiva (en color magenta) y absoluta (en color naranja), junto con las curvas teóricas de Eckhaus (en color rojo) y *BFN* (en color azul). Estas gráficas permiten identificar y visualizar las diferentes regiones de inestabilidad en el espacio de parámetros α y β , con líneas bien definidas que representan las fronteras entre ondas estables e inestables.

En la siguiente sección se revisará la teoría en las que se define cuando aparece una onda en espiral y cuando una antiespiral, más adelante, en el desarrollo también se estudiaron estas soluciones en sentido horario y antihorario con distintas condiciones iniciales para ver su comportamiento.

2.2. Espirales y Antiespirales en ondas 1D

En varios trabajos se han encontrado ondas espirales giratorias que emiten ondas que se alejan del centro a medida que avanza el tiempo, tanto numérica como experimentalmente [98]. Sin embargo, también se han encontrado antiespirales u ondas que se propagan hacia el centro [94]. Este par de soluciones se encuentra en partes complementarias y exclusivas del espacio de parámetros (α, β) , véase Fig. 2.3, [73]. Sus diferencias han sido designadas con diferentes nombres, como ondas giratorias hacia adentro/hacia afuera u ondas con dispersión positiva/negativa [88]. Vale la pena mencionar que esta categoría difiere de las ondas que giran en sentido horario o antihorario. En el caso que nos ocupa (espiral/antiespiral), la diferencia es si la dirección de propagación es hacia o desde el defecto y se verifica como la dirección de propagación del brazo espiral, no por su orientación.

En esta segunda sección se estudian las características dinámicas de las ondas espirales y antiespirales en sistemas unidimensionales, diferenciando su comportamiento según su dirección de propagación y sentido de rotación, para comprender su papel en la estabilidad y formación de patrones en medios oscilatorios.

Las ondas espirales son patrones dinámicos que se caracterizan por la emisión de ondas que se propagan hacia afuera desde el centro a medida que avanza el tiempo. En contraste, las antiespirales son estructuras en las que las ondas se mueven hacia el centro, convergiendo en el núcleo. Además, las espirales pueden clasificarse según su sentido de rotación: aquellas que rotan en el sentido horario (CW, del inglés clockwise) y las que rotan en sentido antihorario (CCW, del inglés counterclockwise). Estas distinciones —entre espirales y antiespirales, y entre los sentidos de rotación— juegan un rol crucial en la dinámica de patrones en sistemas bidimensionales y en su estabilidad.

La principal diferencia entre las ondas espirales y antiespirales radica en la dirección en la que se propagan las ondas. Si las ondas se emiten hacia afuera, es decir, si su velocidad de fase es positiva, se trata de espirales. Por el contrario, si las ondas se propagan hacia adentro, con una velocidad de fase negativa, se tiene una antiespiral. Este comportamiento implica que las espirales organizan el medio circundante al expandirse, mientras que las antiespirales

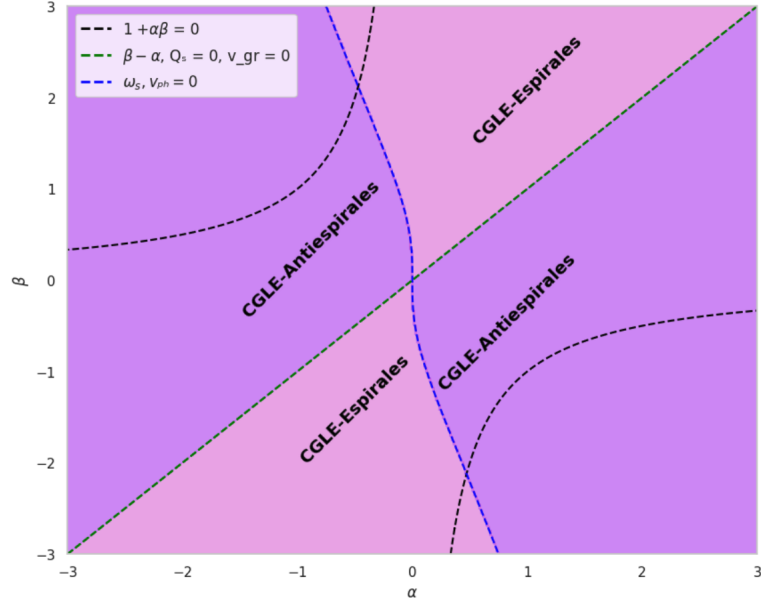


Figura 2.3: Espacio de parámetros (α, β) de la CGLE y dominios donde existen soluciones del tipo onda espiral o antiespiral. Reproducida de [52].

atraen las ondas hacia su núcleo, generando un patrón opuesto.

La ecuación de Ginzburg Landau que se usa es la siguiente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + i\beta)\nabla^2 A - (1 - i\alpha)|A|^2 A \quad (2.17)$$

donde A representa el campo de la onda compleja, β controla la dispersión, y α está relacionado con la no linealidad del sistema.

Nicola y su equipo, [73], realizaron un estudio numérico sobre ondas espirales y antiespirales en medios oscilatorios, en los modelos matemáticos de reacción-difusión de Fitzugh-Nagumo y Brusselator, así como en la ecuación compleja de Ginzburg-Landau. Estas ondas son responsables de definir el patrón que se forma alrededor del núcleo del sistema, presentando características similares a las ondas espirales que se observan en diversos medios oscilatorios. Sin embargo, lo novedoso es que una espiral descrita por la CGLE puede representar una anti-espiral en el sistema original de reacción-difusión RD y viceversa, esto de acuerdo a los autores.

Una de las predicciones más importantes de este trabajo es que las antiespirales aparecen cuando los coeficientes de la CGLE cumplen con la condición $\beta - \alpha > 0$. Es crucial no confundir los términos: las espirales y antiespirales se comportan de manera diferente, y la existencia de una fuente (es decir, un punto desde el cual se propagan las ondas) depende de la velocidad de grupo, no de la velocidad de fase de las ondas. El sumidero (punto hacia el cual llegan las ondas) también depende de la velocidad de grupo.

Dado que no se conocen soluciones analíticas completas para el problema de las ondas espirales en dos dimensiones, Nicola y su equipo utilizaron soluciones conocidas como “agujeros de Nozaki-Bekki” para estudiar la propagación de las ondas en sistemas bidimensionales, modelados mediante la CGLE (2.17), ver Figura 2.4. Las soluciones de tipo Nozaki-Bekki son

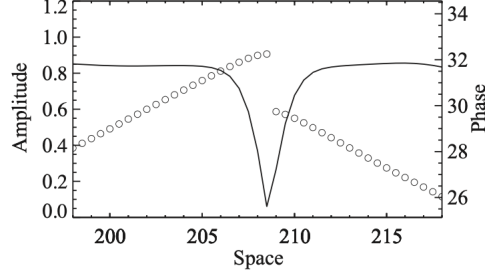


Figura 2.4: Perfil de amplitud y fase del agujero de Nozaki-Bekki. La línea continua representa la amplitud, y los círculos blancos indican la fase. Tomada de [93].

configuraciones específicas de la CGLE donde el campo $A(x, t)$ presenta defectos topológicos, como singularidades centrales donde $|A| = 0$, rodeadas por patrones no triviales de amplitud y fase. Estas soluciones son fundamentales porque, aunque se originan en un contexto unidimensional, permiten explorar cómo se comportan las ondas y defectos en sistemas bidimensionales. La solución general de estas ondas está dada por:

$$A(x, t) = \sqrt{1 - Q^2} \tanh(\kappa x) \exp \left[i \left(\frac{Q}{\kappa} \log(\cosh(\kappa x)) - \omega t \right) \right], \quad (2.18)$$

donde $Q = (1 - 2\kappa^2)/(3\kappa\beta)$, es el número de onda y $\kappa(\alpha, \beta)$ es el parámetro que mide la profundidad del agujero en el patrón de ondas. La solución de (1.83) es la siguiente,

$$2\kappa^4(9\beta^3 + 7\beta + 2\alpha) - \kappa^2(9\alpha\beta^2 + 5\beta + 4\alpha) + (\alpha - \beta) = 0. \quad (2.19)$$

Se resuelve esta ecuación de cuarto grado, la expresión de la cuarta solución es la siguiente,

$$\sqrt{\frac{9\alpha\beta^2}{8\alpha + 36\beta^3 + 28\beta} + \frac{4\alpha}{8\alpha + 36\beta^3 + 28\beta} + \frac{3\beta\sqrt{9\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^2 + 2\alpha\beta + 8\beta^2 + 9}}{8\alpha + 36\beta^3 + 28\beta} + \frac{5\beta}{8\alpha + 36\beta^3 + 28\beta}}$$

El análisis detallado de los signos relativos de Q/κ y ω en un rango de parámetros α y β ($[-3, 3]$) permite dividir el espacio en cuatro regiones: dos donde los signos coinciden (Q/κ y ω positivos o negativos), donde la velocidad de fase es positiva y las ondas derecha e izquierda tienden a alejarse del defecto en el origen; y dos donde los signos son opuestos, provocando que las ondas tiendan a acercarse al defecto.

Para describir esta dinámica, es esencial definir conceptos clave como la frecuencia de la onda, $\omega_s = \alpha + Q^2(\beta - \alpha)$ que determina la frecuencia base de oscilación. Además, las velocidades de fase v_{ph} y de grupo v_{gr} caracterizan el movimiento de las crestas de las ondas y la propagación de grupos de ondas, respectivamente, ambas dependen de los parámetros de ω_s y Q .

La formación de espirales y antiespirales se clasifica según estas velocidades y los signos relativos: las espirales aparecen cuando v_{ph} y v_{gr} son positivas (o cuando los signos de Q/κ y ω tienen el mismo signo); las antiespirales se forman cuando v_{ph} es negativa y v_{gr} es positiva (o cuando los signos de Q/κ y ω son opuestos). En la Figura 2.3 se incluyen funciones clave como $Q_s = 0$, $v_{ph} = 0$, $v_{gr} = 0$ y el criterio BFN , lo que facilita la interpretación del comportamiento de las ondas en diferentes escenarios.

Las soluciones oscilatorias de los agujeros de Nozaki-Bekki en una dimensión se mueven siguiendo esta dinámica. De acuerdo con la referencia [73], se espera que las espirales en la ecuación bidimensional CGLE también sigan un comportamiento similar.

En los sistemas de reacción-difusión cerca de la bifurcación de Hopf, la aparición de antiespirales está regida por el criterio $\alpha < \beta$ (como se describe en [11]). Este criterio contrasta con estudios previos que encontraron antiespirales en la intersección de las regiones $\alpha\beta \geq 0$ y $|\alpha| > |\beta|$ [43]. En esta tesis no se reprodujo lo que ocurre en los sistemas de reacción-difusión mencionados.

Para poder reproducir el espacio de parámetros (c_1, c_3) del artículo original de Nicola y otros [73] se realiza una transformación lineal simple donde: $\alpha = -c_3$ y $\beta = c_1$. Esta transformación permite mapear el espacio de parámetros α y β , utilizados originalmente para describir las soluciones en términos de las interacciones no lineales y la dispersión, al espacio c_1 y c_3 . Este cambio es útil para realizar comparaciones directas en otros contextos donde los parámetros c_1 y c_3 son más comunes, al tiempo que preservamos las características fundamentales del sistema descrito originalmente en términos de α y β .

En la siguiente sección se revisará la teoría para comprender la persistencia de ondas uni y bidimensionales.

2.3. Persistencia en ondas 1D

La persistencia se refiere a la capacidad de un sistema dinámico para conservar alguna característica presente en su configuración inicial [64]. En esta sección se prueba la capacidad de las espirales para conservar un número de onda inicial. Se verifica primero la estabilidad de las ondas cuasi unidimensionales y se compara con la estabilidad de las espirales.

Una onda plana es perturbada si se tiene que:

$$\hat{A} = [F + \delta a_+ \exp(\lambda t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \delta a_- \exp(\bar{\lambda}t + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.20)$$

$$\times \exp i(-\omega t + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.21)$$

el crecimiento lineal de la perturbación se mide por

$$\lambda = -iVk - \left[1 + \beta\alpha + \frac{2(1 + \alpha^2)Q_k^2}{1 - Q^2} \right] k^2 + \dots \quad (2.22)$$

donde Q_k es la proyección del número de onda de la onda original sobre el de la perturbación. En esta ecuación, la velocidad de grupo de la onda es (2.4) y el primer coeficiente real de λ es positivo (inestabilidad de Eckhaus) si el número de onda $\mathbf{Q}$ de la solución no satisface (2.6).

Para una onda plana unidimensional, la forma de demostrar la inestabilidad de Eckhaus es la siguiente. Para un par dado (α, β) tal que $Q_{ECK} > 0$, se elige un dominio de longitud $L \gtrsim 2m\pi/Q_{ECK}$, donde m es un número entero contando el número de ondas que el sistema puede retener. Ese número se conserva siempre para una condición inicial donde el número de ondas es $n \leq m$. Por el contrario, cuando $n > m$, el número de ondas en la condición inicial

original se reduce a medida que el sistema evoluciona.

En el caso de las espirales de la CGLE bidimensional, se espera un resultado similar. Por ejemplo, en la región donde $Q_{ECK} > 0$, se pueden considerar el caso donde $\alpha = \beta$. Para esta combinación la velocidad de grupo de la onda es nula y las perturbaciones no se alejan por convección. En este caso $Q_{ECK} = 1/\sqrt{3}$. Esto significa que al elegir un dominio circular de radio $R \gtrsim m \times 2\pi\sqrt{3}$, con m el número de ondas a cada lado del defecto, entonces se espera que la espiral solución puede retener hasta m ondas a cada lado del defecto.

En el capítulo 3, donde se presentan los resultados se podrán revisar las simulaciones obtenidas para ondas en una y en dos dimensiones.

En la siguiente sección se revisará el trabajo de Hagan, [45], en donde explica la dinámica de las ondas en espiral cuando tienen un único brazo o varios.

2.4. Estabilidad de onda en espiral con un brazo

En esta sección se estudia la estabilidad de las ondas espirales con un solo brazo ($m = \pm 1$) en el marco de la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE). Se analiza cómo las propiedades de la amplitud $F(r)$ y la fase $\psi(r)$ evolucionan en el dominio radial y cómo estas soluciones son influenciadas por los parámetros α y β . Además, se describen los métodos numéricos y analíticos utilizados para resolver las ecuaciones diferenciales asociadas, con un enfoque en la transición entre regímenes estables e inestables, y se presentan resultados relevantes que incluyen la conexión con criterios como el de Eckhaus. Se siguen de cerca las referencias de Hagan, [45] y de Ipsen, Kramer y Preben, [52].

Una onda espiral es una estructura dinámica que rota periódicamente alrededor de un centro, formando patrones característicos en sistemas no lineales. Estas ondas también son conocidas como singularidades de vórtice, defectos topológicos o puntos sin fase. Matemáticamente, una onda espiral se puede describir como:

$$\Psi(r, \theta, t) = F(r)e^{i\phi(r, \theta, t)},$$

donde $F(r)$ es la amplitud de la onda, que depende únicamente de la distancia radial r al centro del vórtice. Suele decrecer hacia el núcleo del vórtice, donde se encuentra el defecto topológico.

$$\phi(r, \theta, t) = -\omega t - m\theta + \psi(r),$$

es la fase de la onda, con ω la frecuencia angular de rotación de la espiral, que determina su velocidad temporal, m es un número entero que indica el número de brazos de la espiral, mientras que el signo de m determina la dirección de rotación (sentido horario o antihorario), $\psi(r)$ describe el perfil radial de la fase, es decir, cómo varía la fase con la distancia r al centro del vórtice. Si se fijan $t = 0$ y se consideran líneas de contorno donde la fase $\phi = 0$, se obtiene $\psi(r) = m\theta$. Esto implica que, dependiendo de la forma de $\psi(r)$, las espirales pueden adoptar diferentes configuraciones geométricas. Entre los ejemplos más comunes están: las espirales arquimedianas ($\psi(r) = k\theta$), generando un patrón con líneas de fase equidistantes y las logarítmicas ($\psi(r) = ab^\theta$), como vimos en el capítulo anterior, que presentan un crecimiento

más rápido de las distancias entre las fases conforme r aumenta.

Al transformar la CGLE, (2.1) a coordenadas polares, se obtiene,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A - (1 + i\alpha)A|A|^2 + (1 + i\beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) A.$$

La solución tiene la siguiente forma,

$$A(r, \phi, t) = F(r)e^{i(-\omega t - m\theta + \psi(r))}.$$

Al sustituir esta solución en la ecuación se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden para $F(r)$ y $\psi(r)$:

$$\Delta_r F - \frac{1}{r^2} m^2 F - \psi_r^2 - \beta(F \Delta_r \psi + 2\psi_r R_r) + F - F^3 = 0,$$

$$\beta \left(\Delta_r F - \frac{1}{r^2} m^2 F - \psi_r^2 \right) + F \Delta_r \psi + 2\psi_r R_r - \alpha R^3 + \omega = 0,$$

donde $R_r = \partial F / \partial r$, $\psi_r = \partial \psi / \partial r$ y $\Delta_r = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r)(\partial / \partial r)$. Estas ecuaciones pueden resolverse con condiciones de frontera:

$$F(r) \rightarrow F_Q, \quad \psi'(r) \rightarrow Q^m \quad \text{para } r \rightarrow \infty,$$

Cuando el radio r tiende a infinito, es decir, a grandes distancias del centro de la espiral, el sistema se aproxima a una onda plana. Esto se interpreta como un estado asintótico donde las variaciones locales de amplitud y fase desaparecen, y el comportamiento de la onda se estabiliza. Matemáticamente, la amplitud se describe con las siguientes condiciones asintóticas:

$$F(r) \approx F_Q = \sqrt{1 - Q^2},$$

donde Q es el número de onda asintótica. Este valor caracteriza la amplitud de la onda plana que domina a grandes distancias del núcleo del vórtice. Y la función de fase $\psi(r)$ se comporta linealmente como

$$\psi(r) \approx Qr.$$

Esto indica que, a grandes distancias del centro de la espiral, el sistema se comporta como una onda plana, ya que las variaciones en la amplitud se han suavizado y la fase varía linealmente con el radio:

$$F(r) \rightarrow r, \quad \psi'(r) \rightarrow 0 \quad \text{para } r \rightarrow 0.$$

Por otro lado, cuando r tiende a 0 (es decir, cerca del centro de la espiral), la amplitud $F(r)$ decrece hasta 0, lo que asegura que la solución no diverge cerca del núcleo de la espiral. Matemáticamente, se tiene:

$$F(r) \approx r.$$

Y la fase $\psi(r)$ sigue una relación cuadrática con el radio, lo cual ocurre debido a las condiciones de simetría y la naturaleza del campo de la onda espiral en esta región

$$\psi(r) = \frac{1}{2} r^2.$$

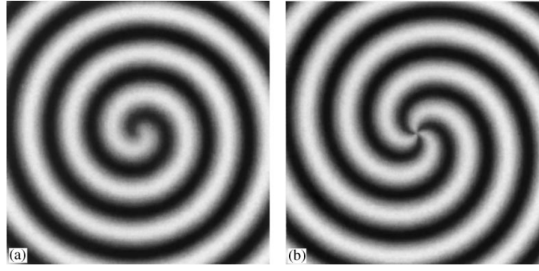


Figura 2.5: Ejemplos de ondas espirales de Arquímedes para $m = 1$ y $m = 3$. Las cifras se obtuvieron trazando $R(r) \cos(\phi)$ usando $\phi = \Omega t - m\theta + \psi(r)$, $R(r) = r/(r + 1)$ y $\psi(r) = r^2/(r + 1)$. Las expresiones fraccionarias se utilizan para evitar problemas con la singularidad en el centro de la espiral. Tomada de [52].

Esto implica una curvatura mucho mayor en las líneas de fase cerca del centro, comparado con la variación lineal en el límite $r \rightarrow \infty$.

Estas dos soluciones límite están conectadas a través de la continuidad del campo de la onda espiral en todo el dominio radial. La transición entre el comportamiento cerca del núcleo ($r \rightarrow 0$) y el comportamiento asintótico ($r \rightarrow \infty$) se refleja en cómo la amplitud y la fase de la espiral se ajustan para mantener la estabilidad en ambos extremos. Esto se debe a que las soluciones en ambos regímenes satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales de Ginzburg-Landau, aunque con diferentes condiciones límite en cada caso. Cerca del núcleo, la espiral debe tener una amplitud que crezca de manera controlada para evitar que se desestabilice por valores demasiado pequeños o una divergencia en el centro. Esta estructura asegura que la espiral sea bien comportada y no sufra inestabilidades en su origen. A grandes distancias, la onda se comporta como una onda plana, que tiende a una amplitud constante y una fase lineal. En este régimen, la onda satisface las condiciones de estabilidad de Eckhaus y *BFN*, lo que garantiza que la espiral no se descompone en distancias largas.

La transición suave entre el comportamiento local de una espiral y el de una onda plana es fundamental para garantizar la estabilidad de la espiral en todo el dominio radial. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan $F(r)$ y $\psi(r)$ deben asegurar que no existan discontinuidades que induzcan inestabilidades. Este análisis, que combina condiciones en ambos extremos del espacio radial, permite entender por qué las espirales de un solo brazo ($m = \pm 1$) pueden ser estables bajo ciertos valores de los parámetros α y β ; mientras que las espirales con múltiples brazos ($|m| \geq 2$) tienden a ser inestables en todo el dominio. Este fenómeno fue estudiado por Hagan mediante un análisis heurístico en el contexto de la CGLE, identificando que la inestabilidad en espirales con múltiples brazos proviene de la competencia entre estos, lo que introduce inestabilidades de fase y amplitud. Esta relación sugiere que, a grandes distancias, las espirales estables pueden aproximarse al comportamiento de ondas planas. Si esta conexión es válida, podría aplicarse de forma consistente criterios de estabilidad bien conocidos como los de Eckhaus y Benjamin-Feir-Newell (BFN), originalmente desarrollados para ondas planas. En esta tesis, se investiga si dichos criterios pueden extenderse y utilizarse para evaluar la estabilidad de espirales. Véanse las Figuras 2.2 y 2.5, [7].

El análisis de Hagan probó que las espirales con $m = \pm 1$ pueden mantener su forma bajo ciertas condiciones de los parámetros α y β . Esta estabilidad se debe a la simetría inherente de

las espirales de un solo brazo, que permite que las perturbaciones sean absorbidas o disipadas sin inducir inestabilidad significativa. El número de onda asintótico Q , que determina la frecuencia espacial de la espiral a grandes distancias del centro, juega un papel crucial en esta estabilidad. Valores apropiados de Q para un solo brazo están ligados a soluciones estables en el espacio de parámetros de α y β . Por otro lado, para espirales con $m \geq 2$, las inestabilidades de fase y amplitud no se compensan tan fácilmente debido a la complejidad de la interacción entre múltiples brazos, lo que lleva a su descomposición y pérdida de coherencia estructural. Esto se traduce en la incapacidad de estas espirales para mantener un perfil estable en el tiempo.

Ipsen y sus colaboradores [52] profundizaron en el análisis de las espirales de un solo brazo usando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) asociadas con la transformación de la CGLE en coordenadas polares. Utilizaron una combinación de técnicas numéricas y analíticas, como la perturbación y la continuación numérica, para describir la estructura de las espirales.

En particular, emplearon una técnica llamada disparo múltiple, que permite resolver EDOs mediante la subdivisión del dominio radial en segmentos más pequeños. Esta técnica es útil cuando las condiciones de frontera son conocidas en puntos distintos y se desea integrar la solución en todo el dominio. En el caso de las espirales, subdividieron la trayectoria de la solución desconocida en N puntos $x^1, \dots, x^N$, espaciados equidistantemente en el radio r . Esto dio lugar a un sistema de ecuaciones acopladas que involucra tanto la amplitud $F(r)$ como la fase $\psi(r)$, con un total de $3(N - 1)$ ecuaciones diferenciales y el mismo número de incógnitas. Estas ecuaciones fueron resueltas numéricamente con los programas *CONT* y *AUTO97*, [52], herramientas especializadas en la continuación de soluciones de ecuaciones diferenciales. El software *AUTO97*, por ejemplo, fue diseñado para seguir trayectorias de soluciones a lo largo de bifurcaciones, permitiendo explorar cómo cambian las soluciones a medida que se varían los parámetros α y β . A través de esta técnica, Ipsen *et al.* determinaron la variación del número de onda Q como una función de α y β , lo que permitió trazar curvas de estabilidad y regiones de inestabilidad, como la frontera de Eckhaus.

Los resultados de estos cálculos se presentan en las figuras correspondientes del artículo, Figuras 2.6 y 2.7. En la Figura 2.6(a), se muestran las trayectorias de las funciones $F(r)$, $F'(r)$ y $\psi(r)$ para los parámetros $\alpha = 5/3$ y $\beta = -2/3$, conocidos como el modelo de Gray con $D = 2$, tal como fue utilizado en [51]. Estas curvas reflejan la evolución de la amplitud y la fase a lo largo del dominio radial.

En la Figura 2.6(b), se presenta la variación del número de onda Q como una función de β , junto con la curva frontera de inestabilidad de Eckhaus, que está determinada por el criterio $D_{||}(\beta) = 0$. Esta curva separa las regiones del espacio de parámetros donde las ondas espirales son estables (región *ES*) y donde son inestables (región *EU*). El punto de intersección entre la curva de inestabilidad de Eckhaus y la variación de Q indica el valor crítico de β a partir del cual las ondas espirales pierden estabilidad y entran en un régimen inestable.

Al introducir el parámetro libre $D_{||} = 0$ en el problema de continuación, Ipsen *et al.* permitieron la variación continua del punto de intersección de la frontera de Eckhaus, explorando cómo este punto cambia en función de α y β . Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 2.7(a), donde se representa la curva de inestabilidad de Eckhaus para las ondas

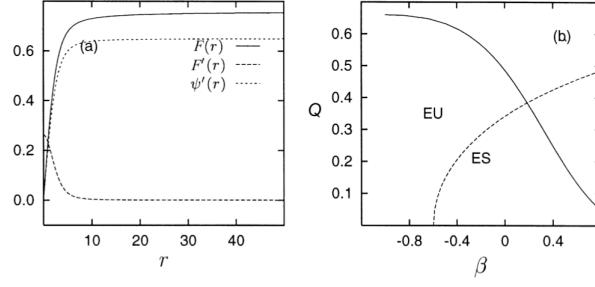


Figura 2.6: Continuación de la onda en espiral. (a) Curvas de amplitud $F(r)$, la derivada de la amplitud $F'(r)$ y la derivada de la fase $\psi'(r)$ para una onda en espiral con parámetros $\alpha = 5/3$ y $\beta = -2/3$ tomadas del modelo de Gray, como se presenta en [51]. (b) Número de onda espiral seleccionado $Q(\beta)$ y la frontera de la inestabilidad de Eckhaus determinada por $D_{||}(\beta) = 0$. Las regiones de estabilidad e inestabilidad son denotadas por ES y EU , respectivamente. Tomada de [52].

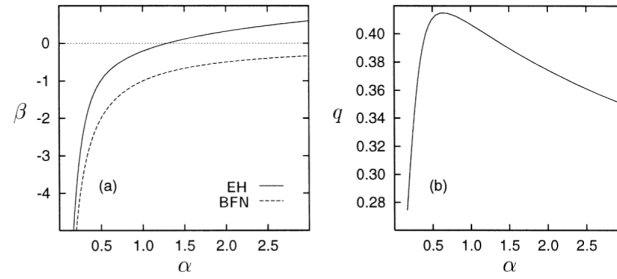


Figura 2.7: (a) Curvas frontera de inestabilidad de Eckhaus y BFN para las ondas en espiral de la CGLE. (b) Variación del número de onda espiral Q a lo largo de la curva de Eckhaus. Tomada de [52].

espirales, junto con la frontera de inestabilidad de BFN .

Finalmente, la Figura 2.7(b) muestra la variación del número de onda espiral asintótico a lo largo de la curva de Eckhaus (ECK), revelando las condiciones bajo las cuales las soluciones espirales permanecen estables incluso en el régimen inestable de Eckhaus o de BFN . Estos resultados numéricos sugieren que las ondas espirales pueden ser localmente estables incluso en regiones que son inestables según los criterios tradicionales de Eckhaus o BFN .

En la siguiente sección se describirán las distintas fases de las soluciones de CGLE, clasificadas de acuerdo a diversas propiedades de las ondas en espiral.

2.5. Las distintas fases solución de la CGLE

En esta sección se analizarán las distintas fases dinámicas del modelo CGLE descritas por Chaté, [24], clasificadas en función de su comportamiento espacio-temporal, estabilidad y presencia de defectos. Estas fases, delimitadas en el espacio de parámetros $(-1/\alpha, \beta)$, incluyen regiones como la turbulencia de amplitud, la fase de turbulencia, la intermitencia espacio-temporal, los estados congelados y el régimen sin caos. A través de esta clasificación, se definirán las características principales de cada fase, incluyendo cómo varían la amplitud, la fase y la formación de defectos, proporcionando una visión completa de las soluciones del modelo.

Dividiendo la amplitud de la ecuación (2.1) entre $\sqrt{-\alpha}$, la expresión de la CGLE quedaría como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + i\beta)\nabla^2 A + (1/\alpha + i)|A|^2 A \quad (2.23)$$

Cuando $\beta = 0$ y $1/\alpha \rightarrow \infty$, se obtiene la ecuación de Ginzburg-Landau real, la cual posee un funcional de Lyapunov y exhibe una dinámica de relajación. Esto significa que el sistema tiende naturalmente a estados estables, disipando las perturbaciones con el tiempo. Por otro lado, cuando $\beta \rightarrow \infty$ y $1/\alpha \rightarrow 0$, la dispersión toma un rol crucial y la ecuación se aproxima a la ecuación de Schrödinger no lineal, usada para describir fenómenos como los solitones [24].

Retomando la teoría anterior, se hacen los cambios pertinentes a las ecuaciones más importantes. La CGLE aborda el problema de estabilidad lineal de su familia de soluciones planas $A = F e^{i(kx + \omega_k t)}$, con $F^2 = \alpha(1 - k^2)$ y $\omega_k = -\alpha - (\beta - \alpha)k^2$. Todas estas soluciones son inestables ahora para $\beta > -1/\alpha$, según el criterio de Newell, que define la recta *BFN*. Esta curva, como se observa en la Figura 2.8, marca el límite donde las soluciones planas se vuelven caóticas o inestables. Para $\beta < -1/\alpha$, las soluciones planas con $k^2 < k_{\text{máx}}^2 = \frac{1+\alpha\beta}{3+\alpha\beta+2\alpha^2}$ son linealmente estables [24], lo que significa que las perturbaciones no crecen exponencialmente y las ondas planas pueden existir sin perder estabilidad.

En la Figura 2.8, se observa el espacio de parámetros de la CGLE, representado en el plano $(-1/\alpha, \beta)$. Este fue establecido mediante exploración numérica de las soluciones, llevada a cabo en un dominio rectangular cuyo lado es mucho mayor que la longitud característica de las estructuras espaciotemporales resultantes, y bajo condiciones iniciales aleatorias en un dominio rectangular relativamente grande comparado con el tamaño característico de los brazos de espiral. A través de este estudio, se distinguieron seis regiones, de acuerdo con las características de las soluciones espirales: su módulo, fase, número de onda y los defectos asociados.

Antes de comenzar, es importante definir lo siguiente: un defecto es un punto en el espacio-tiempo donde la amplitud del campo A se anula ($|A| = 0$) y, como consecuencia, la fase ϕ no está definida, ya que no es posible asignar un argumento a un número complejo de módulo cero. Este fenómeno ocurre de manera puntual y local, siendo una singularidad en el patrón dinámico. Nota: La fase ϕ de un campo complejo $A = |A|e^{i\theta}$ está bien definida solo cuando $|A| \neq 0$. Cuando $|A| = 0$, no se puede determinar un ángulo ϕ , ya que el número complejo colapsa al origen del plano complejo, donde todos los ángulos son indistinguibles. Por esta

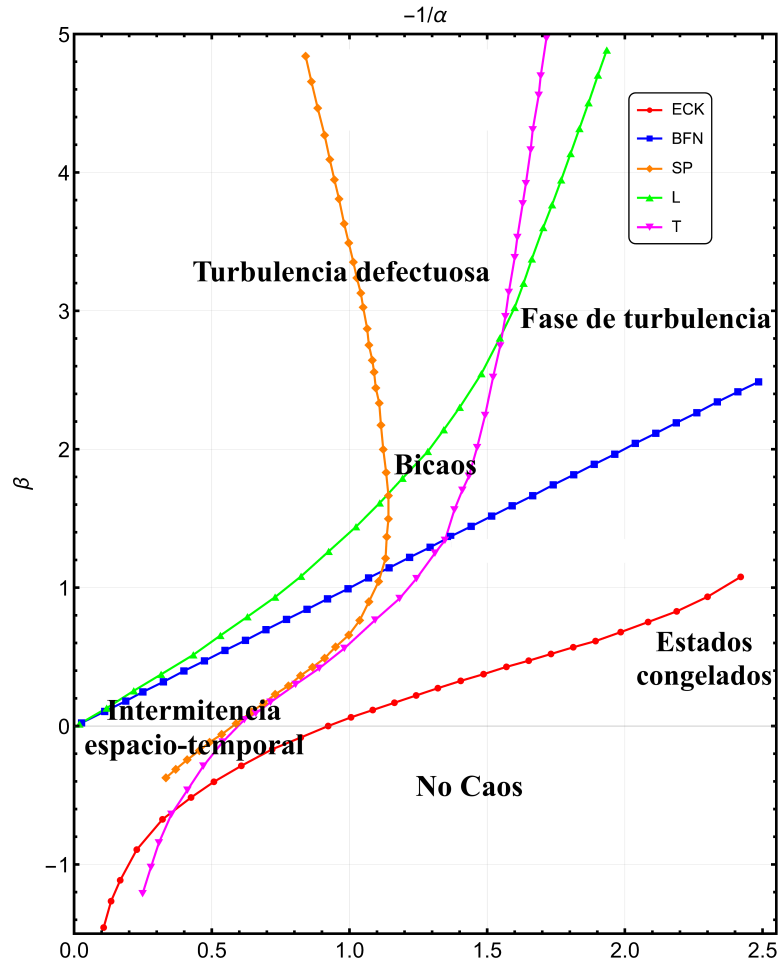


Figura 2.8: Espacio de parámetros de la ecuación (2.23). Se pueden ver las distintas regiones encontradas numéricamente: fase de turbulencia, turbulencia de fase o de amplitud, intermitencia espacio-temporal, estados congelados, bicaos y no caos. Imagen adaptada de Chate y Maneville [24].

razón, los defectos son considerados singularidades de fase.

Por otro lado, una línea de choque es una región donde la fase ϕ experimenta un cambio abrupto, formando discontinuidades suaves o pronunciadas en el gradiente de fase. A diferencia de los defectos, las líneas de choque no requieren que la amplitud sea cero, pero reflejan transiciones rápidas en la estructura del campo. En un patrón dinámico, los defectos suelen ser el núcleo de espirales, mientras que las líneas de choque conectan o delimitan regiones de fase distinta. A continuación, se describen las dinámicas en estas fases:

- * **Fase de Turbulencia:** En esta región, delimitada por las curvas BFN y L (ver Figura 2.8), el comportamiento de las soluciones es caótico tanto en el espacio como en el tiempo. No se observan defectos, es decir, el campo A nunca se anula, y la fase ϕ está bien definida en todo el dominio. Las soluciones en esta fase consisten en una estructura celular desordenada, donde las variaciones de amplitud son suaves y el tamaño típico de las células aumenta a medida que se aproxima a la curva BFN , esto se puede observar bien en las Figuras 2.9(a) y 2.10(a). Esto indica una transición gradual hacia un régimen más ordenado.
- * **Turbulencia Defectuosa o Turbulencia de Amplitud:** Esta fase, ubicada a la izquierda de la curva magenta T , se caracteriza por la aparición de defectos, puntos donde la amplitud se anula $A = 0$ y la fase ϕ no está definida. En dominios rectangulares, estos defectos aparecen y desaparecen en pares. Para valores pequeños de β , las soluciones pueden incluir espirales y vértices de líneas de choque; mientras que para valores grandes de β , la densidad de defectos aumenta significativamente y las espirales son menos comunes. En la Figura 2.9(b) se pueden observar estos defectos y en la 2.10(b) se detectan bien las líneas de choque. Esta es la fase más caótica del CGLE en 2D, donde las variaciones de amplitud son drásticas y los patrones de fase son altamente desordenados.
- * **Intermitencia Espacio-Temporal:** Ubicada entre las curvas T y BFN , esta región presenta soluciones que alternan entre estados irregulares (turbulentos) y estados laminares (regulares). En la Figura 2.9(c) se puede ver que la amplitud A cambia entre fases de calma y fases caóticas, mientras que la fase ϕ exhibe transiciones entre estas dos dinámicas. La transición de un estado turbulento a laminar ocurre por fluctuaciones intrínsecas, mientras que la transición inversa requiere la influencia de dominios turbulentos vecinos. En esta fase, las variaciones de amplitud y fase son periódicas y caóticas. Véase la Figura 2.10(c).
- * **Estados Congelados:** Aparecen a la derecha de la curva T , principalmente a la derecha de la curva ECK . En esta región, el campo $|A|$ permanece estacionario en el tiempo, con estructuras celulares que adoptan configuraciones casi congeladas. Estas soluciones asintóticas presentan defectos espirales rodeados por líneas de choque, esto se puede observar bien en la Figura 2.9(d), en la Figura 2.10(d) hay un único defecto rodeado por estas líneas. Aunque las variaciones de amplitud son estáticas, la fase ϕ sigue mostrando patrones estructurados y bien definidos. Estos estados solo son observables en dominios suficientemente grandes.
- * **Bicaos:** En esta región, delimitada por las curvas BFN , T , SP y L , coexisten dos estados estables: la fase de turbulencia y un estado turbulento de amplitud con densidad finita de defectos. Aquí, la amplitud A puede ser intermitente y coexistir con configuraciones más

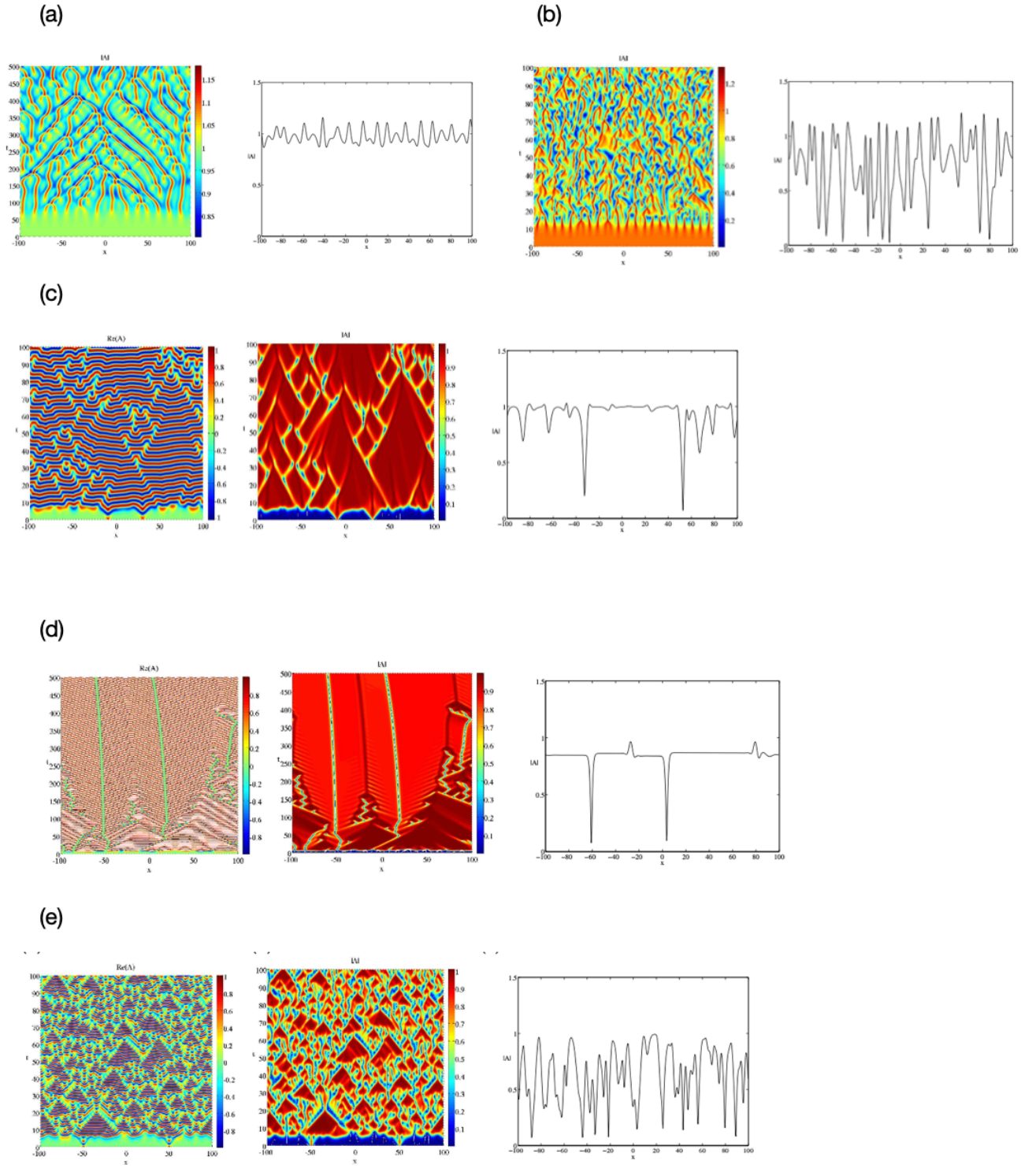


Figura 2.9: Gráfico espacio-temporal unidimensional $|A|$ a la izquierda y la configuración final de $|A|$ a la derecha: (a) turbulencia de fase y (b) turbulencia defectuosa. Gráfico espacio-temporal unidimensional de $\text{Re}(A)$ a la izquierda, gráfico espacio-temporal $|A|$ en medio y la configuración final de $|A|$ a la derecha, (c) intermitencia espacio-temporal, (d) varios agujeros separados por líneas de choque, (e) formación de dominios espacio-temporales regulares separados por discontinuidades de fase. Gráficas tomadas de: [107].

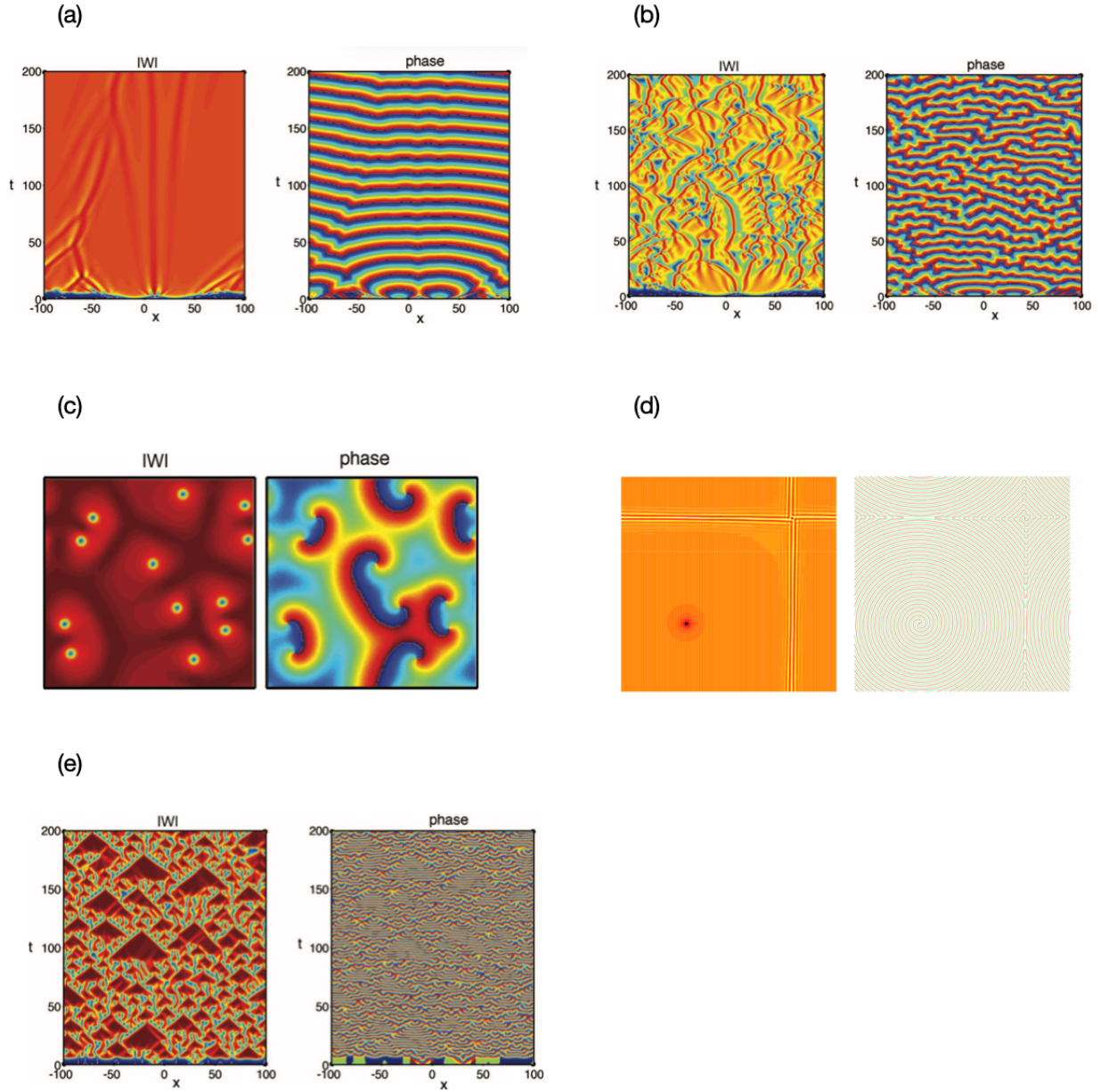


Figura 2.10: Evolución espacio-temporal bidimensional de la amplitud compleja $|A|$ (izquierda) y fase ϕ (derecha) en las fases: (a) turbulencia de fase, (b) turbulencia defectuosa, (c) intermitencia espacio-temporal y (e) bicaos. Las imágenes (a), (b), (c) y (e) fueron tomadas de [38]; (d) estado congelado simple con un defecto en espiral y una línea de choque, a la izquierda la imagen de $|A|$ y a la derecha las líneas $\text{Re}(A) = 0$ (verde) e $\text{Im}(A) = 0$ (rojo), fue tomada de [24].

ordenadas. Según Chaté [23], también puede aparecer intermitencia espacio-temporal en esta región, donde tanto la amplitud como la fase oscilan entre estados caóticos y ordenados. Véanse las Figuras 2.9(e) y 2.10(e).

- * **Sin Caos:** Por debajo de la curva *ECK*, las soluciones espirales son estables y bien definidas. En esta región, la amplitud A no presenta oscilaciones significativas, mientras que la fase ϕ exhibe patrones regulares y predecibles. Este es el régimen más ordenado del CGLE en 2D, donde tanto la amplitud como la fase alcanzan configuraciones estacionarias.

Las propiedades de estabilidad de la solución de onda plana estudiadas en el apartado anterior dan lugar a las curvas en rojo y en naranja, *ECK* y *SP*, respectivamente, en el plano $(-\alpha^{-1}, \beta)$. La curva *ECK* define la región de estabilidad lineal de la onda. A la izquierda de *ECK*, la onda es linealmente inestable ya que las perturbaciones crecen exponencialmente en el espacio fase, a lo que se le denomina la región de inestabilidad convectiva.

De acuerdo con Aranson [7], a la derecha de la curva *ECK* se espera que la espiral sea capaz de resistir una cantidad considerable de ruido debido a su núcleo completamente lineal y la estabilidad de sus brazos. Entre las curvas *ECK* y *SP*, la convección amplifica las perturbaciones, pero estas se alejan del centro, permitiendo que la espiral mantenga cierta estabilidad. Hacia la izquierda de la curva *SP*, se encuentra la región de inestabilidad absoluta, ya que cualquier perturbación inicial no solo crece en su posición original, sino que también se propaga a lo largo de la dirección de la onda. Aranson obtuvo numéricamente las curvas *L* (verde) y *T* (magenta) en un dominio rectangular y separan las fases de turbulencia de fase y turbulencia de amplitud, respectivamente. En la región entre las curvas *SP* y *T*, coexisten los estados de defecto, turbulencia y congelación. En este caso, la ruptura del equilibrio podría conducir a cualquiera de estos estados, dependiendo de las condiciones iniciales y las perturbaciones presentes.

Las curvas *ECK*, *SP*, *BFN*, *L* y *T* que se observan en el espacio de parámetros de la Figura 2.8 se obtuvieron mediante una transformación simple de las curvas mostradas en estudios anteriores, lo que proporciona los mismos resultados cualitativos para sistemas grandes.

Una vez terminado el segundo capítulo, en el siguiente se revisará el material de simulaciones numéricas con el software de COMSOL que hace uso de elemento finito para obtener los resultados de las ondas en espiral en un medio circular y con condiciones iniciales específicas.

Capítulo 3

Resultados de la simulaciones numéricas

Dado que no se conocen soluciones analíticas en espiral para la CGLE, en este trabajo se estudian sus propiedades por medio de simulaciones numéricas. En este capítulo se analiza la estabilidad, persistencia, dispersión y el comportamiento de fase de espirales aisladas utilizando dichas simulaciones. De inicio se separan las partes real e imaginaria de la amplitud $A = A_1 + iA_2$ en (1), resultando en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial t} &= \nabla^2 A_1 - \beta \nabla^2 A_2 + [A_1 - |A|^2(A_1 - \alpha A_2)], \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} &= \beta \nabla^2 A_1 + \nabla^2 A_2 + [A_2 - |A|^2(\alpha A_1 + A_2)].\end{aligned}\tag{3.1}$$

En estos términos, el módulo cuadrático es $|A|^2 = A_1^2 + A_2^2$ y la fase es $\phi = \tan^{-1}(A_2/A_1)$. Para inhibir la presencia de líneas de choque que normalmente se encuentran en dominios rectangulares se utiliza un dominio circular de radio R , y por lo tanto ∇^2 es el operador Laplaciano, en coordenadas polares. Se usan las condiciones de frontera de flujo nulo para ambas funciones, $\partial_r A_1 = \partial_r A_2 = 0$, garantizando que el módulo y la fase de la solución se conserven.

Para inducir el comportamiento espiral se introduce un único defecto en las condiciones iniciales similar a las utilizadas en [28]:

$$A(r, \theta, t = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i(Q_i r + \theta) \right]\tag{3.2}$$

donde σ^2 es un parámetro que mide el ancho del pulso (el valor de σ^2 fue elegido para cubrir 1/3 del radio total), y el parámetro Q_i está asociado con el número de onda inicial ($Q_i = 0.2$). Se utiliza el software COMSOL Multiphysics [27] para la mayor parte de las simulaciones, y a menos que se establezca explícitamente lo contrario usaremos una malla adaptativa inicializada con 1000 nodos y un paso de tiempo de $\Delta t = t_{max}/1000$, donde R y t_{max} , el radio total del círculo y el tiempo total de simulación, respectivamente. Estos radios y tiempos para cada conjunto de parámetros fueron elegidos por prueba y error: para el tamaño, intentamos hacer que la longitud característica de las espirales (ancho del brazo) fuera unas cuantas veces la longitud característica del dominio (el radio); para el tiempo, se eligió uno lo suficientemente largo como para ver las transiciones de estabilidad o para corroborar la

persistencia de alguna solución dentro de los límites de tiempo computacionales.

COMSOL Multiphysics es un software que utiliza el método de elementos finitos para resolver problemas físicos y de ingeniería de forma eficiente. Su uso en este trabajo se detalla en el Apéndice C, donde se describe cómo configurar y realizar simulaciones con este software, mientras que los fundamentos del método de elementos finitos se explican en el mismo Apéndice. COMSOL fue empleado como una alternativa rápida frente a algunos métodos previamente utilizados, como diferencias finitas en un dominio cuadrado y diferencias finitas en un dominio circular, cuyos códigos fueron programados en MATLAB, la explicación de la metodología se puede revisar en el Apéndice D.

En la primera sección se analizarán las propiedades de estabilidad en ondas bidimensionales en un dominio circular, enfocándose en la transición de estabilidad e inestabilidad de las espirales bajo los criterios de Eckhaus y BFN, y se estudiarán cómo las características espaciales y el valor del radio R influyen en la dinámica y configuración de estos patrones.

3.1. Estabilidad en ondas 2D

En la sección 2.1, se explicaron las inestabilidades absoluta y convectiva en el contexto de ondas unidimensionales, estableciendo las condiciones matemáticas fundamentales para su aparición y delimitando las regiones de estabilidad e inestabilidad mediante los criterios de Eckhaus y *BFN*. Estos análisis permitieron comprender cómo las perturbaciones afectan la dinámica de las ondas planas, y se ilustraron gráficamente en el plano (α, β) , destacando su relevancia en la formación de patrones espirales.

En esta sección, se va a estudiar el caso bidimensional, enfocándose en la estabilidad de ondas espirales. Analizar su estabilidad requiere estudiar el comportamiento de la onda plana emitida, ya que esto permite comprender la evolución de perturbaciones en el espacio y el tiempo. Las predicciones de estabilidad para fuentes de ondas planas en un medio infinito se extrapolan a espirales, entendidas como fuentes de ondas, como se detalla en la referencia [7]. En la Figura 3.1, se presenta la misma curva que se obtuvo en la sección 2.1, mostrando nuevamente la curva *BFN* (azul), el límite de Eckhaus de longitud de onda larga (rojo) y los límites de inestabilidad absoluta para espirales 2D (naranja). Además, la curva *SN* (en magenta) indica el límite hasta el cual existen números de onda convectivos inestables. A través de simulaciones numéricas con *CGLE*, se investigarán las configuraciones de estabilidad y cómo las inestabilidades de Eckhaus y *BFN* se manifiestan y afectan los patrones emergentes en sistemas bidimensionales.

Las figuras 3.1 y 3.2 ilustran los resultados sobre la estabilidad de espirales con un brazo obtenidos mediante simulaciones numéricas de la *CGLE* en un dominio circular. En la figura 3.1 se presenta el espacio de parámetros (α, β) como se mencionó antes. Cada punto en esta figura está asociado a una simulación específica cuyos parámetros se detallan en el Cuadro 3.1. El color y la posición de los puntos reflejan el comportamiento cualitativo de las soluciones numéricas obtenidas.

En la Figura 3.2, se ilustran ejemplos representativos de las simulaciones numéricas correspondientes a estos puntos. Se observan tres grandes regiones principales en el espacio de parámetros:

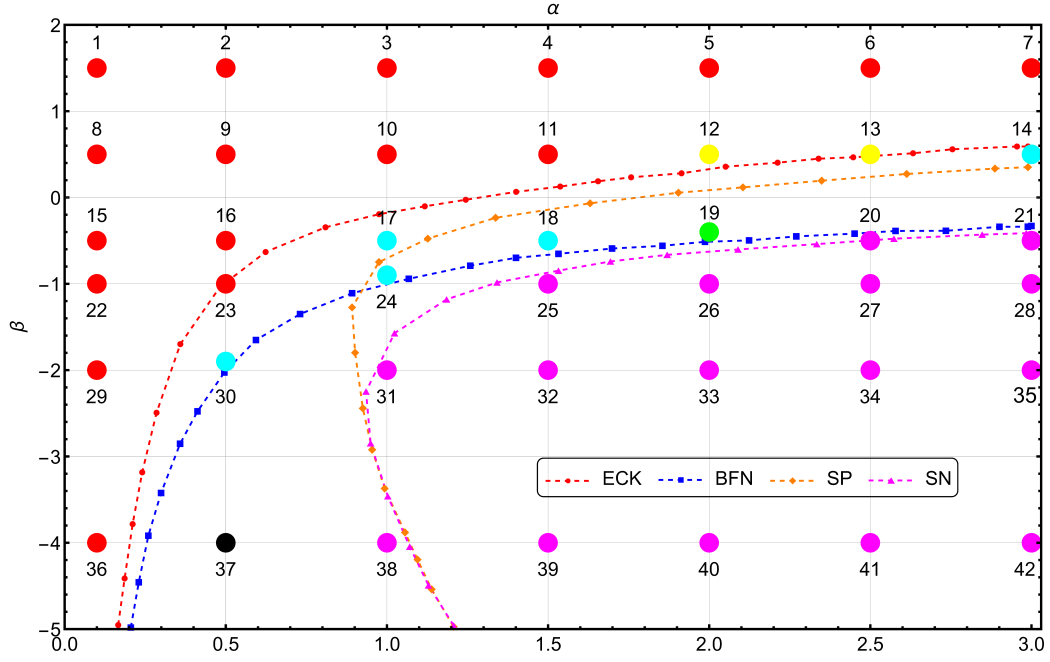


Figura 3.1: Curvas de estabilidad de una onda plana unidimensional en un medio infinito de la CGLE en el plano (α, β) .

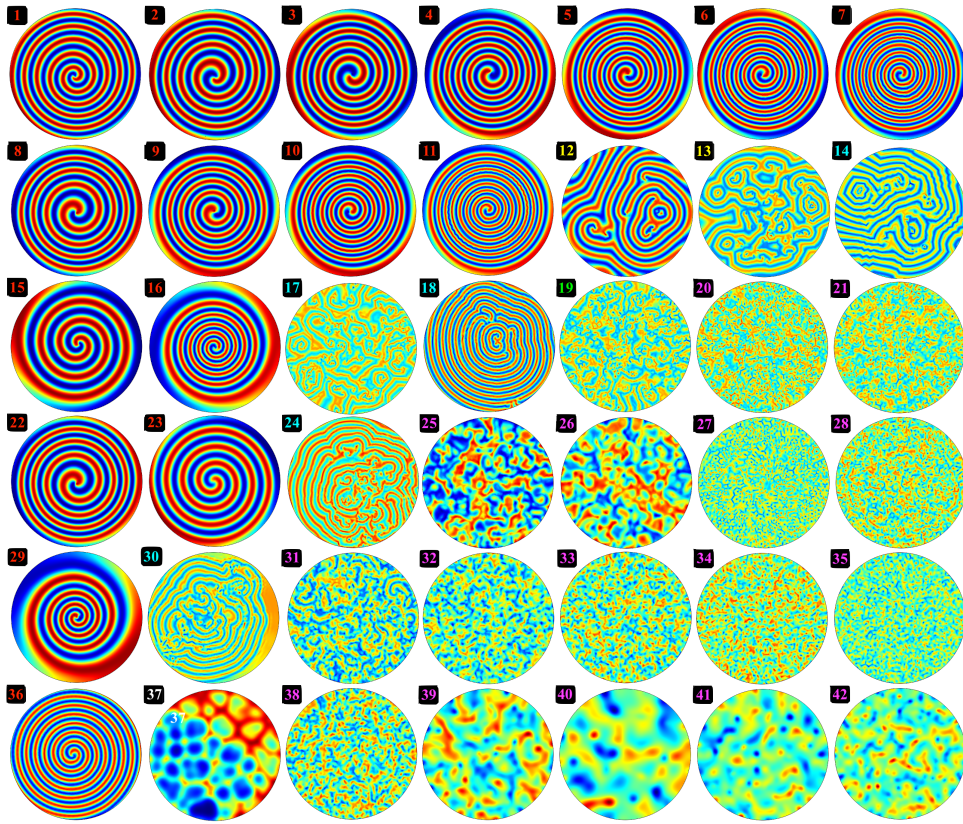


Figura 3.2: Simulaciones numéricas de espirales de la CGLE en un dominio circular.

Num	(α, β)	T_{max}	R	Num	(α, β)	T_{max}	R
1	(0.1, 1.5)	164.5	173.2	22	(0.1, -1)	2000	203.85
2	(0.5, 1.5)	109.68	152.6	23	(0.5, -1)	400	62.8
3	(1, 1.5)	83.87	163.36	24	(1, -0.9)	1000	257
4	(1.5, 1.5)	66.67	188.5	25	(1.5, -1)	300	75.4
5	(2, 1.5)	53.85	219.9	26	(2, -1)	1000	56.5
6	(2.5, 1.5)	44.4	254.63	27	(2.5, -1)	1000	544.54
7	(3, 1.5)	37.36	291.31	28	(3, -1)	1000	200
8	(0.1, 0.5)	422.28	183.71	29	(0.1, -2)	201.72	221.5
9	(0.5, 0.5)	200	188.5	30	(0.5, -1.9)	2000	300
10	(1, 0.5)	115.8	230.4	31	(1, -2)	300	188.5
11	(1.5, 0.5)	77.64	296.2	32	(1.5, -2)	32.7	141.37
12	(2, 0.5)	5000	377	33	(2, -2)	26.9	146.6
13	(2.5, 0.5)	5000	468	34	(2.5, -2)	23.73	164.93
14	(3, 0.5)	5000	565.5	35	(3, -2)	21.4	188.5
15	(0.1, -0.5)	5000	197	36	(0.1, -4)	1000	274.4
16	(0.5, -0.5)	371.43	272.3	37	(0.5, -4)	5000	94.24
17	(1, -0.5)	5000	283	38	(1, -4)	300	188.5
18	(1.5, -0.5)	1000	169.7	39	(1.5, -4)	50	50
19	(2, -0.4)	5000	320.4	40	(2, -4)	1000	26.9
20	(2.5, -0.5)	1000	188	41	(2.5, -4)	50	38.4
21	(3, -0.5)	1000	2450.5	42	(3, -4)	8.65	51.4

Cuadro 3.1: Datos de las simulaciones de la Figura 3.2.

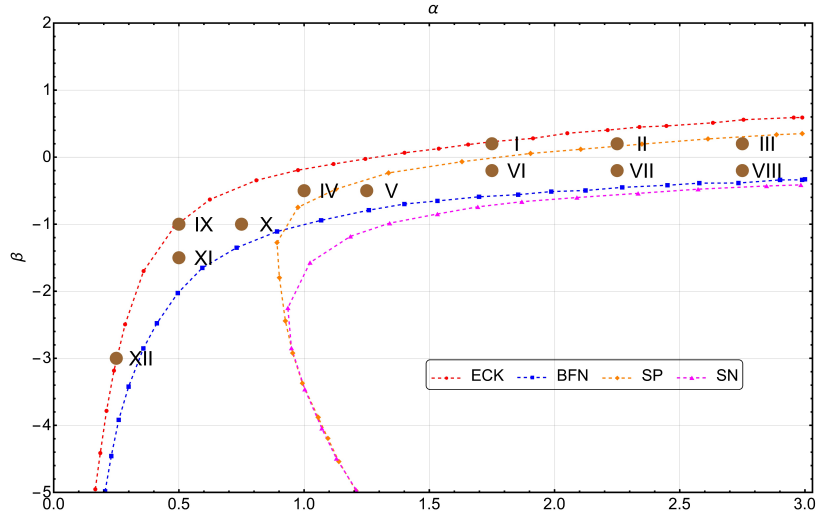
- Por encima de la curva roja de Eckhaus, las espirales mantienen su forma, centradas en el origen (simulaciones 1-7, 8-11, 15-16, 22-23, 29 y 36). Estas soluciones son típicamente estables y presentan patrones bien definidos. Sin embargo, en las simulaciones 12-13, cercanas al borde, la espiral se fragmenta en varios subdominios con ondas giratorias.
- Entre las curvas de Eckhaus y *BFN*, aparecen transiciones donde las espirales se dividen en múltiples segmentos alargados o subestructuras más caóticas. Este comportamiento se observa en las simulaciones 14, 17-18, 24 y 30. Una excepción notable es la simulación 19, donde la espiral pierde su estructura definida.
- Por debajo de la curva *BFN*, las soluciones son altamente inestables y presentan turbulencia de fase o defectos caóticos, como en las simulaciones 20-21, 25-28, 31-35 y 38-42. En particular, la simulación 37 exhibe un comportamiento peculiar, con las soluciones separándose en dos subdominios de formas tipo burbuja.

Estas simulaciones muestran que los resultados obtenidos para ondas unidimensionales permiten capturar de manera cualitativa la estabilidad de espirales en sistemas bidimensionales, aunque algunas transiciones no se describen completamente con este modelo.

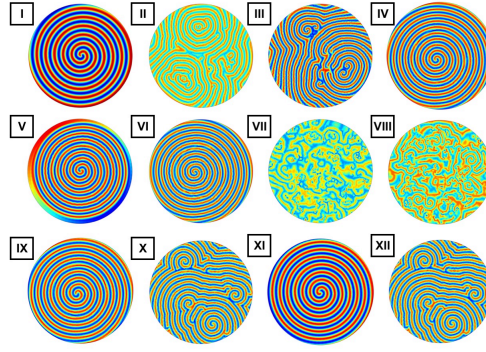
Finalmente, es importante destacar que la curva *ECK* en el contexto bidimensional tiene un significado diferente al caso de ondas planas unidimensionales, así como lo platicamos en la sección 2.1. Para ondas unidimensionales, la inestabilidad de Eckhaus establece que si una solución se inicializa con un número de onda Q y los parámetros están por encima de la curva *BFN*, la onda será estable frente a la inestabilidad de Eckhaus, manteniendo su número de onda. Sin embargo, en el caso bidimensional, la curva *ECK* se construye a partir del número de onda asintótico de la espiral, Q_s , que depende de los parámetros (α, β) . Según [7], Q_s , se calcula resolviendo las ecuaciones que describen la onda espiral en coordenadas polares, aplicando condiciones de frontera asintóticas para garantizar una solución consistente [45]. En la Figura 3.1, esta curva representa el límite más allá del cual las espirales bidimensionales pierden estabilidad frente a la inestabilidad de Eckhaus. Las simulaciones numéricas mostradas en la Figura 3.2 respaldan cualitativamente estas predicciones teóricas, demostrando que la estructura de las espirales y sus transiciones de estabilidad son consistentes con los modelos analíticos para sistemas bidimensionales.

Más simulaciones entre las curvas *ECK* y *BFN*

Los estados entre las curvas *ECK* y *BFN* para espirales reflejan estados intermedios entre las soluciones que mantienen su brazo inicial y aquellas que presentan cierta turbulencia persistente, ver la Fig. 3.3 y el Cuadro 3.2. Las simulaciones I, IV, V, VI, IX y XI parecen reflejar la estabilidad de las soluciones, mientras que II, III, X y XII presentan subdominios, y VII y VIII presentan turbulencia.



(a)



(b)

Figura 3.3: Soluciones numéricas tomadas en la región entre *ECK* y *BFN*. (a) Plano (α, β) . (b) Simulaciones que corresponden a la región ejemplificada, los datos de las simulaciones se especifican en el Cuadro 3.2.

Num	(α, β)	R	Num	(α, β)	R
I.	(1.75, 0.2)	220.5	VII	(2.25, -0.2)	287
II.	(2.25, 0.2)	294	VIII	(2.75, -0.2)	245.4
III.	(2.75, 0.2)	230.4	IX	(0.5, -1)	188.5
IV	(1, -0.5)	282.7	X	(0.75, -1)	212
V	(1.25, -0.5)	230.4	XI	(0.5, -1.5)	172.8
VI	(1.75, -0.2)	212	XII	(0.25, -3)	298.5

Cuadro 3.2: Datos de las simulaciones probando estabilidad en la Fig. 3.3. Aquí $t_{max} = 5000$ tiene un valor fijo.

Influencia del valor de R en la estabilidad

De acuerdo con los datos obtenidos en el Cuadro 1, se eligen tres valores diferentes de R para evaluar su influencia en la estabilidad: 75, 200 y 450, y un valor de t_{max} de 1000. Usando estos parámetros, se realizan simulaciones numéricas alrededor de la región entre ECK y BFN , mostrándonos que si el radio es lo suficientemente pequeño, se obtienen simulaciones estables en la región correspondiente; por otro lado, para un radio lo suficientemente grande, se observa la persistencia de la inestabilidad (Fig. 3.4).

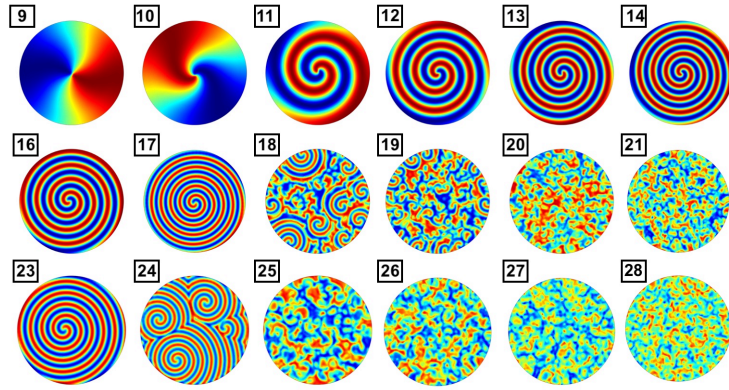
Brazos de la espiral

Aunque los resultados de estabilidad estudiados en este trabajo se enfocan en espirales inicializadas con un solo brazo, se realizaron algunas simulaciones preliminares con espirales de dos y tres brazos para mostrar que éstas también permanecen estables, ubicándose por encima de la curva de Eckhaus, ver la Fig. 3.5 y el Cuadro 3.1. Por otro lado, simulaciones numéricas realizadas por debajo de la curva BFN muestran que las espirales con carga topológica mayor a 1 evolucionan hacia estructuras que son indistinguibles de aquellas inicializadas con un solo brazo. La estabilidad de estas soluciones no ha sido explorada a profundidad y representa una línea importante de investigación para trabajos futuros.

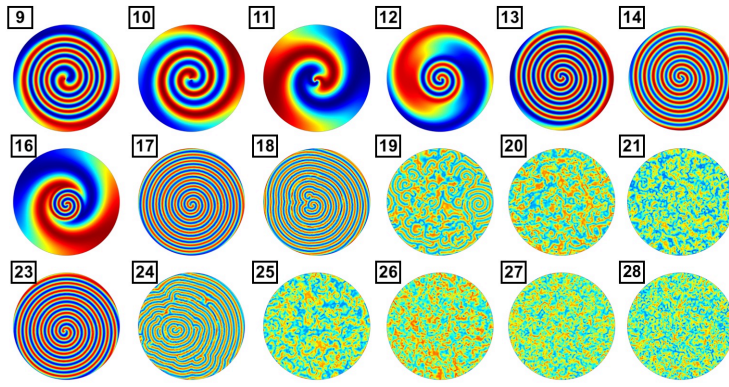
Es importante mencionar que existen resultados analíticos sobre espirales logarítmicas o de Arquímedes en sistemas $\lambda - \omega$, a los cuales se reduce la CGLE cuando $\beta = 0$. Estas espirales, conocidas como ondas “pinwheel”, y su evolución hacia espirales bien definidas en el tiempo, se esperan cerca del eje α (cuando $\beta = 0$) y con valores pequeños de α . Para más detalles sobre estos sistemas en dominios infinitos, ver Refs. [45], [44], [26]; y en dominios finitos, ver Refs. [4], [92], [76]. Según el apéndice B de [4], estos resultados pueden extenderse a valores de β distintos de cero. Esto concuerda con nuestros experimentos numéricos, donde encontramos la presencia de estas soluciones “pinwheel” tanto para $\beta = 0$ como para valores pequeños de β y α . Cabe destacar que en nuestro trabajo fue necesario un ajuste fino en la selección de las condiciones iniciales para obtener espirales bien desarrolladas con un solo brazo.

En conclusión, las predicciones de estabilidad basadas en resultados para ondas planas unidimensionales capturan bien la estabilidad de espirales bidimensionales de manera cualitativa, aunque estos modelos aproximados podrían describir algunas transiciones de manera más precisa.

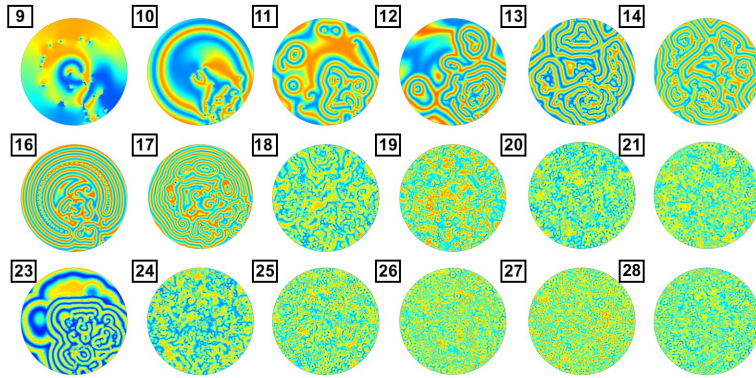
En la siguiente sección 3.2, se analizarán las dinámicas de espirales y antiespirales en sistemas bidimensionales utilizando simulaciones numéricas, con el objetivo de identificar cómo las condiciones iniciales y los parámetros del sistema afectan la orientación relativa y la dispersión de estas ondas, ampliando los resultados obtenidos previamente en sistemas unidimensionales.



(a) $R = 75$



(b) $R = 200$



(c) $R = 450$

Figura 3.4: Simulaciones numéricas del CGLE variando R . (a) $R = 75$, (b) $R = 200$ y (c) $R = 450$. Los datos del par (α, β) se pueden ver en el Cuadro 3.1.

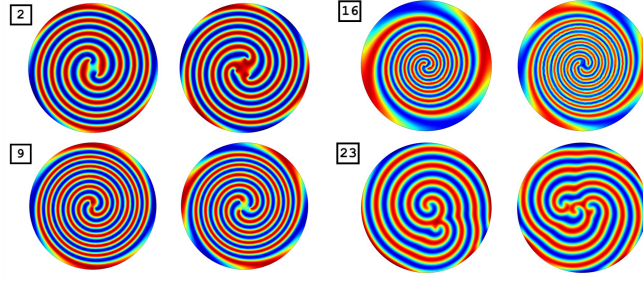


Figura 3.5: Simulaciones numéricas de algunas espirales por encima de la curva de Eckhaus con carga topológica 2 y 3. Ver Cuadro 3.1.

3.2. Espirales y antiespirales en ondas 2D

En la sección 2.2, se analizaron las características dinámicas de las ondas espirales y antiespirales en sistemas unidimensionales, clasificando su comportamiento según la dirección de propagación (hacia o desde el núcleo) y el sentido de rotación (horario o antihorario). Este estudio permitió identificar cómo estas ondas influyen en la estabilidad y formación de patrones, proporcionando un marco fundamental para comprender las dinámicas espacio-temporales en medios oscilatorios. Estos resultados destacan las diferencias entre espirales y antiespirales, y su relación con las condiciones iniciales y los parámetros del sistema.

Dado este conocimiento, las simulaciones en sistemas bidimensionales tienen como objetivo ampliar la comprensión obtenida en 1D al explorar cómo estas características se manifiestan en configuraciones más complejas y realistas. Las simulaciones realizadas en dominios 2D buscan observar la interacción entre las espirales y antiespirales con condiciones iniciales específicas y determinar cómo las diferencias en la dispersión y la orientación relativa afectan la estabilidad y formación de patrones en el espacio de parámetros (α, β) .

En este trabajo se realizaron las simulaciones, analizando combinaciones específicas de espirales y antiespirales bajo diferentes condiciones iniciales, como se muestra en el Cuadro 3.3 y las Figuras 3.6 a 3.9. Estos resultados demuestran que las configuraciones de estabilidad dependen no solo de los parámetros del sistema, sino también de las condiciones iniciales. En particular, se observaron combinaciones exclusivas de espirales/antiespirales con rotaciones horarias o antihorarias que permiten evaluar cómo se delimitan las regiones de estabilidad en medios bidimensionales, aportando un panorama más completo de las dinámicas de las soluciones del modelo CGLE en 2D.

Para explorar la región del espacio de parámetros (α, β) en la que emergen espirales y antiespirales como soluciones del modelo CGLE, se realizaron cuatro tipos de simulaciones cuyos resultados se muestran en las Figuras 3.6 a 3.9.

- En (CI), la condición inicial A_0 , definida en la Ec. (3.2), genera una espiral estándar (ver Fig. 3.6).
- En (CII), se invierte la orientación de la espiral aplicando el *complejo conjugado* de la condición inicial, es decir, se toma $\hat{A}_0 = \overline{A}_0$, lo cual invierte la dirección de rotación de la espiral (ver Fig. 3.7).

#	(α, β)	T	R	IC_1		IC_2		IC_3		IC_4	
				S/AS	CW/CCW	S/AS	CW/CCW	S/AS	CW/CCW	S/AS	CW/CCW
I	(1, 2)	60.4	95.9	S	CW	AS	CCW	S	CCW	AS	CW
I	(2, 2)	50	108.8	S	CW	AS	CCW	S	CCW	AS	CW
I	(0.5, 0.5)	200	108.8	S	CW	AS	CCW	S	CCW	AS	CW
I	(1, 1)	100	108.8	S	CW	AS	CCW	S	CCW	AS	CW
II	(-0.5, 1)	889.9	153.9	AS	CCW	S/AS	CW	AS	CW	S/AS	CCW
II	(-0.25, 0.5)	64.5	116.3	AS	CCW	S/AS	CW	AS	CW	S/AS	CCW
II	(-2, 0.4)	60	224.4	AS	CCW	S	CW	AS	CW	S	CCW
II	(-1, 0.5)	200	188.5	AS	CCW	S/AS	CW	AS	CW	S/AS	CCW
III	(-1, -1)	100	108.8	AS	CCW	S	CW	AS	CW	S	CCW
III	(-0.5, -0.5)	200	108.8	AS	CCW	S	CW	AS	CW	S	CCW
III	(-2, -2)	50	108.8	AS	CCW	S	CW	AS	CW	S	CCW
III	(-1, -2)	60.4	95.9	AS	CCW	S	CW	AS	CW	S	CCW
IV	(1, -0.5)	200	188.5	S/AS	CW	AS	CCW	S/AS	CCW	AS	CW
IV	(2, -0.4)	60	224.4	S	CW	AS	CCW	S	CCW	AS	CW
IV	(0.25, -0.5)	64.5	116.3	S/AS	CW	AS	CCW	S/AS	CCW	AS	CW
IV	(0.5, -1)	889.9	153.9	S/AS	CW	AS	CCW	S/AS	CCW	AS	CW

Cuadro 3.3: Datos para simulaciones de las Figuras 3.10-3.13.

- En (CIII) y (CIV), se modifican las fases relativas de la espiral usando las mismas combinaciones de signos anteriores, como se muestra en las Figuras 3.8 y 3.9.

Estas condiciones iniciales se resumen de forma compacta como:

$$\{A_1, A_2\}_0 = A_0 \{\sin(s_1 Q_i r + \theta), s_2 \cos(s_1 Q_i r + \theta)\}, \quad (3.3)$$

donde los pares (s_1, s_2) toman los valores $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ correspondientes a las condiciones iniciales CI, CII, CIII y CIV, respectivamente.

En estos cuatro gráficos se presentan cuatro cuadrantes y en cada uno se pueden observar algunos perfiles espacio-temporales para las simulaciones de las espirales que corresponden a los parámetros (α, β) de la Figura 3.6. Para cada perfil, en el eje horizontal se grafica la solución espacial, medida a lo largo de una línea en el eje x , y el eje vertical corresponde al tiempo. Se eligen parámetros en la región estable de Eckhaus para descartar efectos de turbulencia.

Las espirales son ondas que se alejan del centro a medida que avanza el tiempo, mientras que las antiespirales se propagan hacia el centro, por lo cual sus gráficas espacio-temporales tienen forma de $\vee$ y de $\wedge$, respectivamente. En la Figura 3.7 aparecen espirales que rotan en sentido horario (etiquetada como CW) en los cuadrantes I y IV; mientras que ocurren antiespirales en sentido antihorario (etiquetada como CCW) en los cuadrantes II y III. Pero en 3.6 aparecen antiespirales que rotan en sentido antihorario en I y IV y espirales en sentido horario en II y III. Curiosamente en las condiciones iniciales III y IV las espirales y antiespirales se conservan como en I y II, en cada cuadrante, respectivamente; pero no así la rotación, ésta es contraria a lo que se acaba de decir.

El resultado general es que cambiar las condiciones iniciales y la región en el espacio de parámetros afecta la orientación en sentido horario/antihorario y la dispersión positiva/negativa de espirales y antiespirales (etiquetadas S o AS , entre I y II, así como entre III y IV) de las soluciones. Estos resultados y los valores de los parámetros utilizados para cada simulación se resumen en el Cuadro 3.3.

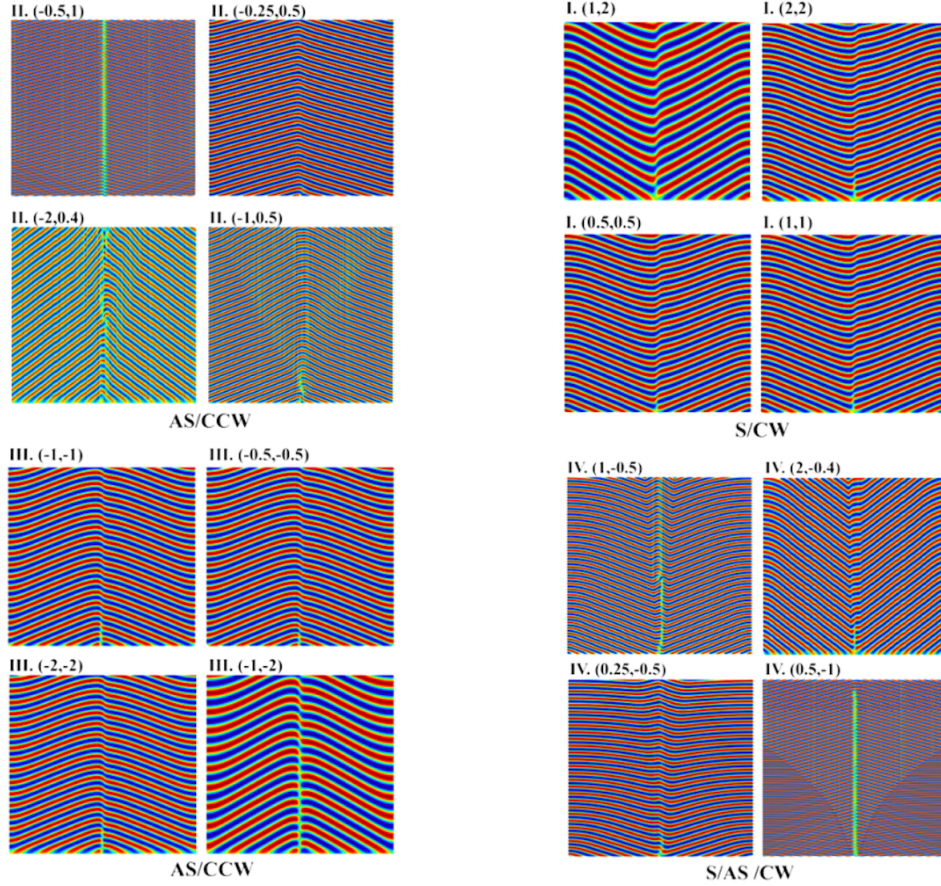


Figura 3.6: Condiciones iniciales I. $u_1 = n + A \sin(\theta + kr)$, $u_2 = n + A \cos(\theta + kr)$, donde n representa el valor promedio del campo inicial, A es la amplitud de las oscilaciones, θ es la fase angular que define el estado de la onda en su ciclo, y k es el número de onda que determina su periodicidad espacial.

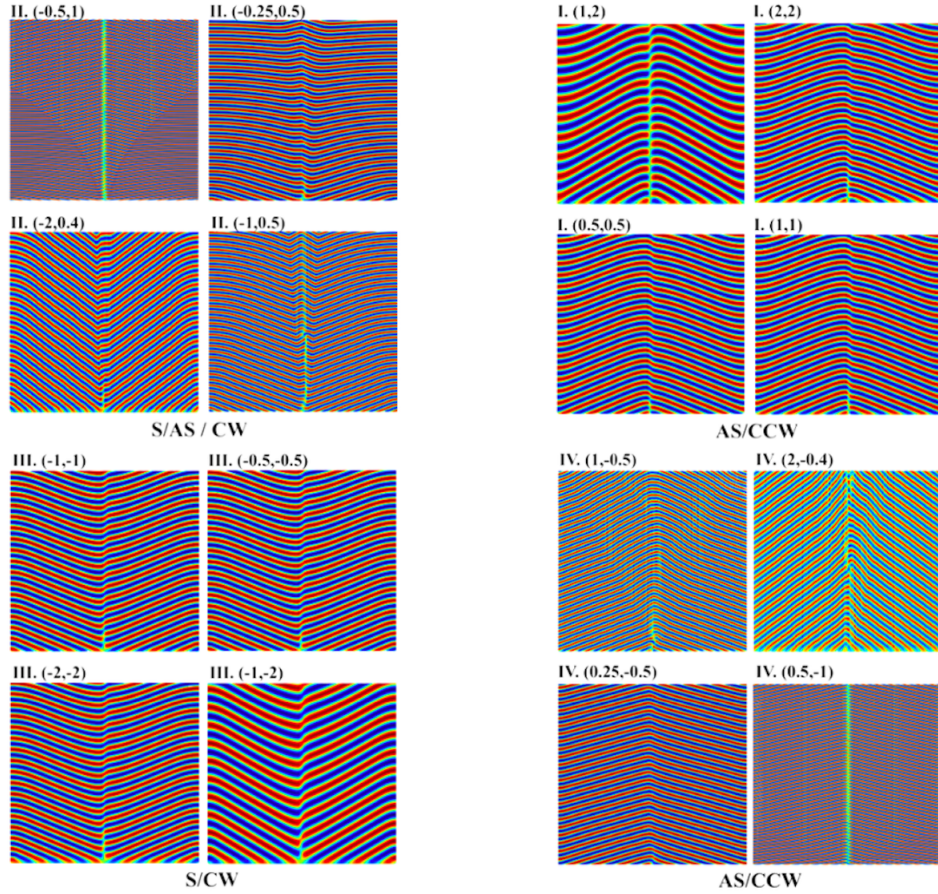


Figura 3.7: Condiciones iniciales II. $u_1 = n + A \sin(\theta + kr)$, $u_2 = n - A \cos(\theta + kr)$, donde n representa el valor promedio del campo inicial, A es la amplitud de las oscilaciones, θ es la fase angular que define el estado de la onda en su ciclo, y k es el número de onda que determina su periodicidad espacial.

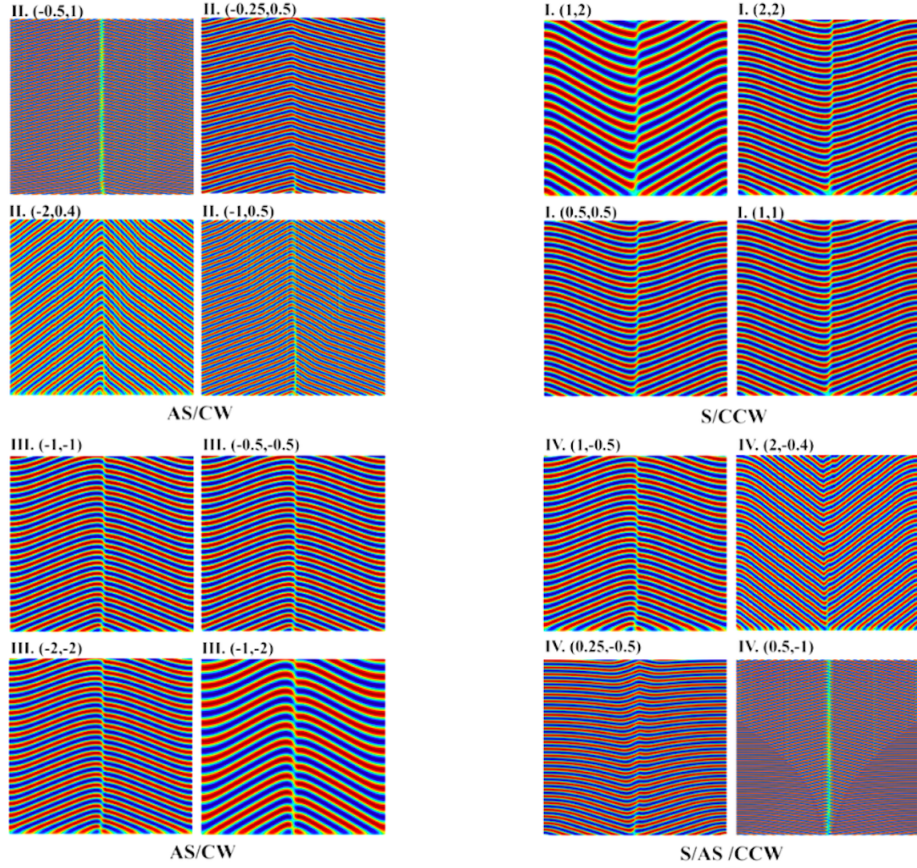


Figura 3.8: Condiciones iniciales III. $u_1 = n + A \sin(\theta - kr)$, $u_2 = n - A \cos(\theta - kr)$, donde n representa el valor promedio del campo inicial, A es la amplitud de las oscilaciones, θ es la fase angular que define el estado de la onda en su ciclo, y k es el número de onda que determina su periodicidad espacial.

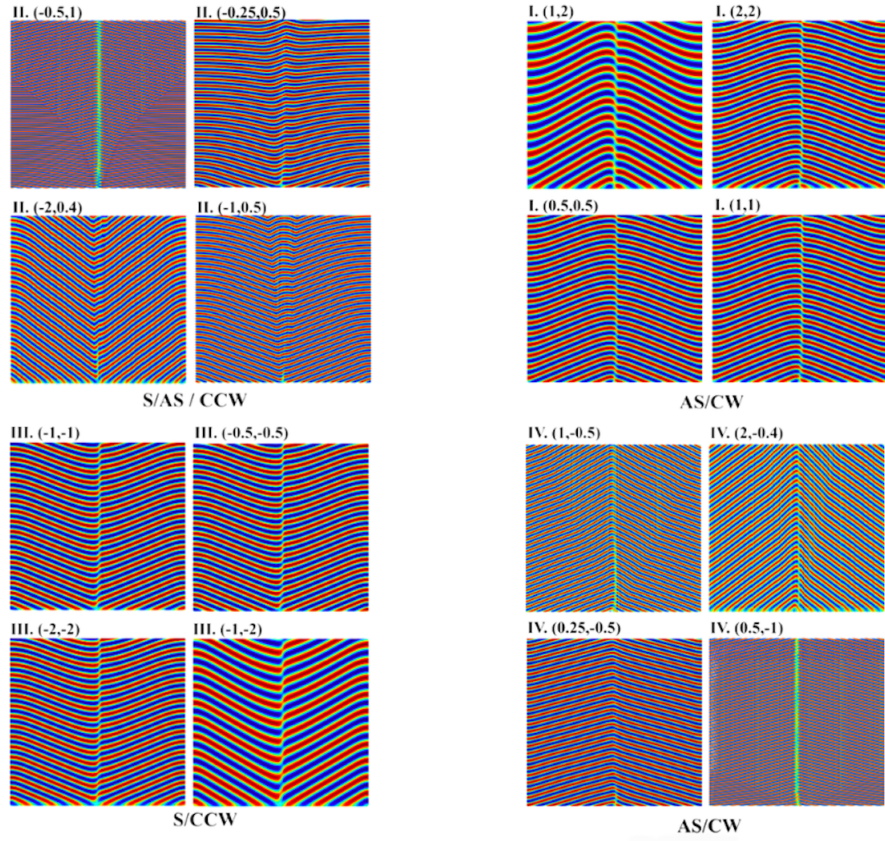


Figura 3.9: Condiciones iniciales IV. $u_1 = n + A \sin(\theta - kr)$, $u_2 = n + A \cos(\theta - kr)$, donde n representa el valor promedio del campo inicial, A es la amplitud de las oscilaciones, θ es la fase angular que define el estado de la onda en su ciclo, y k es el número de onda que determina su periodicidad espacial.

Se encontraron casos de transición en los que se producen espirales y antiespirales en el mismo plano, para el mismo conjunto de parámetros y en la misma simulación; esto sucede solo para los cuadrantes II (para las condiciones iniciales IC2 e IC4, Figuras 3.7 y 3.9) y IV (para las condiciones iniciales IC1 e IC3, Figuras 3.6 y 3.8), al menos en los parámetros que elegimos para realizar las simulaciones numéricas. Estos casos están etiquetados como S/AS y solo ocurren de S a AS, no viceversa.

En trabajos previos se había asumido que las combinaciones de espiral/antiespiral en medios gobernados por la ecuación CGLE estaban determinadas principalmente por los parámetros del sistema, como (α, β) , y que ciertas configuraciones solo eran posibles en cuadrantes específicos de ese espacio (resumido en la sección 2.2). Sin embargo, los resultados presentados en este trabajo demuestran que todas las combinaciones posibles (espiral/antiespiral con rotación horaria/antihoraria) pueden observarse en cualquier cuadrante, siempre que se elija adecuadamente la condición inicial. Este hallazgo refuta parcialmente lo asumido anteriormente y resalta el papel crítico de las condiciones iniciales en la dinámica espiral.

En la sección siguiente se explorará la persistencia de las ondas en espiral en sistemas bidimensionales, evaluando su estabilidad frente a perturbaciones bajo diferentes condiciones iniciales y tamaños de dominio. Este análisis se centrará en comprender cómo las transiciones observadas en 1D se extienden a configuraciones bidimensionales, analizando las características espacio-temporales y los patrones emergentes.

3.3. Persistencia en ondas 2D

En la sección 2.3 se explicó la persistencia de las ondas planas del modelo CGLE. Este análisis se centró en evaluar la capacidad de estas ondas para conservar su configuración inicial, en particular su número de onda Q , frente a perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales. Se demostró que la estabilidad de estas ondas está directamente relacionada con el criterio de Eckhaus, según el cual las soluciones unidimensionales son estables si $Q^2 < Q_{ECK}^2$. Se propuso un marco analítico para comprender cómo la longitud del dominio y el número inicial de ondas influyen en la dinámica de persistencia. Para hacer este experimento, la condición inicial está dada por

$$A_n(r, \theta, 0) = A_0 \exp \left[i \left(\frac{2n\pi}{R} r + \theta \right) \right] \quad (3.4)$$

Como se describe en la sección 2.1, la estabilidad de las ondas planas frente a las perturbaciones de banda lateral está dictada por el criterio de Eckhaus. Para verificar esto, en estas simulaciones se seleccionan algunos parámetros por encima de la curva de Eckhaus en la Figura 2.1. Para cada par (α, β) , se calcula el número de onda crítico Q_{ECK} en (2.6) y se estima un tamaño de dominio capaz de preservar $m = 5$ ondas según $L = 2 \cdot m\pi/Q_{ECK}$. En un dominio unidimensional, se inicializa el sistema usando una onda bien definida dada en la ecuación (3.4). Los resultados de la evolución de la solución se resumen en la Figura 3.10 y en el Cuadro 3.4. En todos los casos, se conservan los números de onda iniciales $Q_i = 2n\pi/L$ en la región estable de Eckhaus. Aquellos que se encuentran en la región inestable, el patrón ajusta su número de onda hasta que encaje en la región estable. Esta transición se visualiza a través de una serie de rupturas y fusiones de las líneas de fase constante en los perfiles de

espacio-tiempo. Véase la Figura 3.10.

Cuadro 3.4: Datos de las simulaciones numéricas 1D de Eckhaus de la Figura 3.14.

(α, β)	T	L	R	Q	(α, β)	L	T	R	Q
(0.5, 1.5)	87.6	48.9	49	0.6417	(0.5, 0.6)	179	53.7	55	0.5849
n	k	S	NS		n	k	S	NS	
1	0.1282	✓			1	0.1163	✓		
2	0.2564	✓			2	0.2327	✓		
3	0.3846	✓			3	0.3490	✓		
4	0.5129	✓			4	0.4654	✓		
5	0.6411	✓			5	0.5818	✓		
6	0.7693		✓		6	0.6981		✓	
7	0.8976		✓		7	0.8145		✓	
8	1.0258		✓		8	0.9308		✓	
9	1.1541		✓		9	1.0472		✓	
10	1.2823		✓		10	1.1636		✓	
(1, 0.5)	135.3	60.1	62	0.5222	(1.5, 0.5)	96.2	70	68.2	0.4606
n	k	S	NS		n	k	S	NS	
1	0.1013	✓			1	0.0897	✓		
2	0.226	✓			2	0.1795	✓		
3	0.3040	✓			3	0.2692	✓		
4	0.4053	✓			4	0.3590	✓		
5	0.5067	✓			5	0.4488	✓		
6	0.6080		✓		6	0.5385		✓	
7	0.7093		✓		7	0.6283		✓	
8	0.8107		✓		8	0.7180		✓	
9	0.9120		✓		9	0.8078		✓	
10	1.0134		✓		10	0.8976		✓	
(0.5, -0.5)	50.9	65.4	66	0.4804	(0.1, 0.5)	299.5	53.7	54	0.5848
n	k	S	NS		n	k	S	NS	
1	0.0952	✓			1	0.1163	✓		
2	0.1904	✓			2	0.2327	✓		
3	0.2856	✓			3	0.3490	✓		
4	0.3808	✓			4	0.4654	✓		
5	0.476	✓			5	0.5817	✓		
6	0.5712		✓		6	0.6981		✓	
7	0.6664		✓		7	0.8144		✓	
8	0.7616		✓		8	0.9308		✓	
9	0.8568		✓		9	1.0472		✓	
10	0.9520		✓		10	1.1636		✓	

Extender este análisis al contexto bidimensional resulta crucial para comprender cómo la persistencia de las espirales en el modelo CGLE varía en relación con el criterio de Eckhaus. En 2D, las espirales emiten ondas desde su núcleo, y su estabilidad depende tanto del radio del dominio como del número de ondas que se pueden mantener alrededor del defecto. Estas características son fundamentales para evaluar si las transiciones de persistencia observadas en 1D se traducen a configuraciones bidimensionales más complejas y si surgen nuevas dinámicas espacio-temporales.

En este caso, se espera que las soluciones A_n con $n = 1, 2, \dots, m$ sean estables, y las que tienen $n \geq m$ son inestables de Eckhaus. Diferentes escenarios pueden resultar de esta inestabilidad de ruptura en espiral. En los sistemas de reacción-difusión abordados en trabajos anteriores, la desestabilización puede resultar en una desestabilización completa

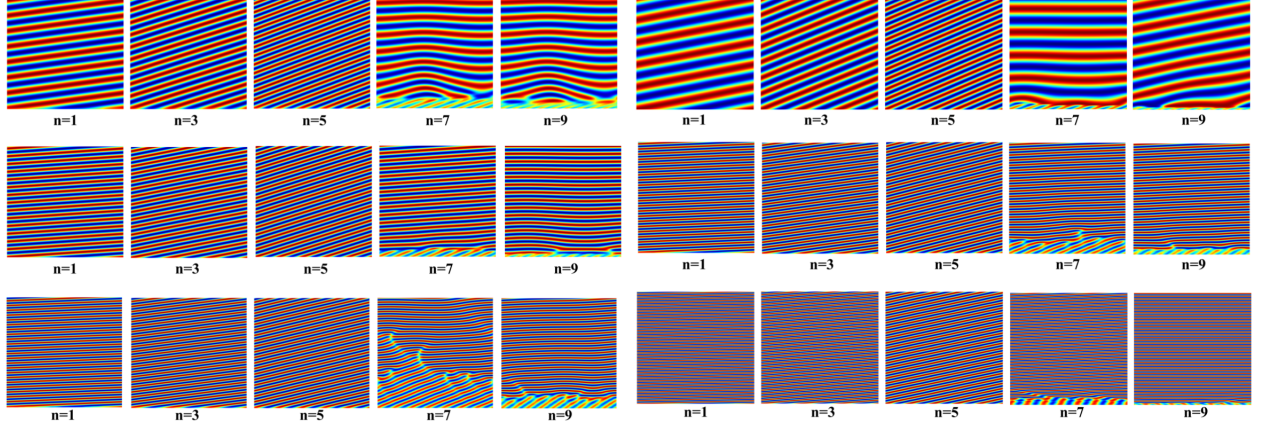


Figura 3.10: Gráfica del espacio tiempo de las simulaciones realizadas con la CGLE en 1D y parámetros específicos por arriba de la curva de Eckhaus. Los datos se presentan en el Cuadro 3.4.

en todo el dominio, presencia de alternancia, fragmentación lamelar en espirales más pequeñas, etc. [104, 11, 101, 10]. Sin embargo, esto no ha sido estudiado en detalle para la CGLE.

Ahora, se realizan las simulaciones en un dominio circular bidimensional real con las condiciones dadas en (3.2). El radio del círculo es $R \approx L$ fue tomado de las simulaciones anteriores por lo que, al menos para el caso $\alpha \approx \beta$, se esperaría que el número de ondas que mantendría el sistema cada lado del defecto sería aproximadamente igual que para las ondas planas, el número que elegimos es $m = 5$. Los parámetros (α, β) son los mismos que para un dominio unidimensional, y los resultados para la estabilidad en espiral están en la Figura 3.11 y en el Cuadro 3.5. En este caso, la columna Iw expresa el número de ondas enteras a cada lado del defecto y la columna Fw el número final.

Como se puede ver tanto en la figura como en el cuadro mencionados, efectivamente el número de vueltas completas que la espiral puede retener desde su configuración inicial es de 1 a 5. Después de este número de onda, el número de vueltas completas ya no es el mismo que en la condición inicial. A diferencia del caso unidimensional, ocurren dos fenómenos interesantes. El primero es que la pérdida de un giro (el equivalente a la pérdida de una onda completa en 1D) no parece producir un quiebre en las líneas de fase constante sino que simplemente cambia su pendiente en los perfiles espacio-temporales, véase la Figura 3.11. La otra diferencia es que esta transición entre estados con diferentes giros parece ocurrir gradualmente. Esto significa que, a diferencia del caso unidimensional donde la transición del número de onda puede ser abrupta, en el caso bidimensional esta transición ocurre (al menos para las simulaciones estudiadas) por etapas. Ver Fig. 3.10. Esto se deduce del cuadro que se tiene en tiempos cortos y del estado final en tiempos largos.

3.3.1. Efecto del tamaño del dominio en la estabilidad espiral

Los resultados muestran que el criterio de estabilidad de Eckhaus, definido por Q_{ECK} , no se cumple directamente para ondas en espiral en dos dimensiones. En particular, las ondas

pueden permanecer estables para valores de número de onda Q_i considerablemente menores que Q_{ECK} . Por ejemplo, en el caso de $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.5)$, si $R = 200$, las ondas espirales conservan su número de vueltas $I\omega = F\omega$ hasta $Q_i \leq 0.1571$, aunque $Q_{ECK} = 0.6417$, indicando que la inestabilidad ocurre mucho antes del umbral teórico previsto por el criterio. De forma análoga, para $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.6)$, con $R = 350$, se observa estabilidad hasta $Q_i \leq 0.0897$, aunque $Q_{ECK} = 0.5849$. En ambos casos, las ondas pierden estabilidad conforme el número de onda aumenta, y esta pérdida coincide con el punto en el que el número de vueltas comienza a cambiar. Estos resultados indican que el criterio de Eckhaus no se aplica directamente a espirales en 2D; sin embargo, al incrementar el radio R , el sistema tiende a estabilizarse, acercándose al comportamiento unidimensional donde sí se satisface dicho criterio. Véase la Fig. 3.12 y el Cuadro 3.6.

(α, β)	t_{max}	R	Q_{ECK}	(α, β)	t_{max}	R	Q_{ECK}
2. (0.5, 1.5)	87.6	49	0.6417	9. (0.5, 0.6)	179	54	0.5849
n	Q_i	$I\omega$	$F\omega$	n	Q_i	$I\omega$	$F\omega$
1	0.1282	1 & 1	1 & 1	1	0.1163	1 & 1	1 & 1
2	0.2564	2 & 2	2 & 1	2	0.2327	2 & 2	1 & 1
3	0.3846	3 & 3	2 & 1	3	0.3490	3 & 3	1 & 1
4	0.5129	4 & 4	1 & 2	4	0.4654	4 & 4	1 & 2
5	0.6411	5 & 5	1 & 2	5	0.5818	5 & 5	2 & 2
6	0.7693	6 & 6	1 & 2	6	0.6981	6 & 6	2 & 1
7	0.8976	7 & 7	1 & 1	7	0.8145	7 & 7	0 & 1
8	1.0258	8 & 8	1 & 0	8	0.9308	8 & 8	1 & 1
9	1.1541	9 & 9	1 & 0	9	1.0472	9 & 9	1 & 0
10	1.2823	10 & 10	1 & 0	10	1.1636	10 & 10	1 & 0

Cuadro 3.5: Datos para las simulaciones que prueban la estabilidad de espirales de Eckhaus (4 & 5 significa 4 giros a la izquierda y 5 giros a la derecha). La gráfica de estos datos se puede ver en la Fig. 3.11.

(α, β)	t_{max}	R	Q_{ECK}	(α, β)	t_{max}	R	Q_{ECK}
2. (0.5, 1.5)	87.6	200	0.6417	9. (0.5, 0.6)	179	350	0.5849
n	Q_i	$I\omega$	$F\omega$	n	Q_i	$I\omega$	$F\omega$
1	0.0314	1 & 1	1 & 1	1	0.0179	1 & 1	1 & 1
2	0.0628	2 & 2	2 & 2	2	0.0359	2 & 2	2 & 2
3	0.0942	3 & 3	3 & 3	3	0.0538	3 & 3	3 & 3
4	0.1256	4 & 4	4 & 4	4	0.0718	4 & 4	4 & 4
5	0.1571	5 & 5	5 & 5	5	0.0897	5 & 5	5 & 5
6	0.1885	6 & 6	5 & 5	6	0.1077	6 & 6	6 & 5
7	0.2199	7 & 7	6 & 6	7	0.1256	7 & 7	6 & 6
8	0.2513	8 & 8	6 & 7	8	0.1436	8 & 8	7 & 7
9	0.2827	9 & 9	8 & 8	9	0.1615	9 & 9	8 & 8
10	0.3141	10 & 10	8 & 8	10	0.1795	10 & 10	9 & 9

Cuadro 3.6: Datos para las simulaciones que prueban la estabilidad de las espirales aumentando el valor de R (4 & 5 significa 4 giros a la izquierda y 5 giros a la derecha). La gráfica de estos datos se puede ver en la Fig. 3.12.

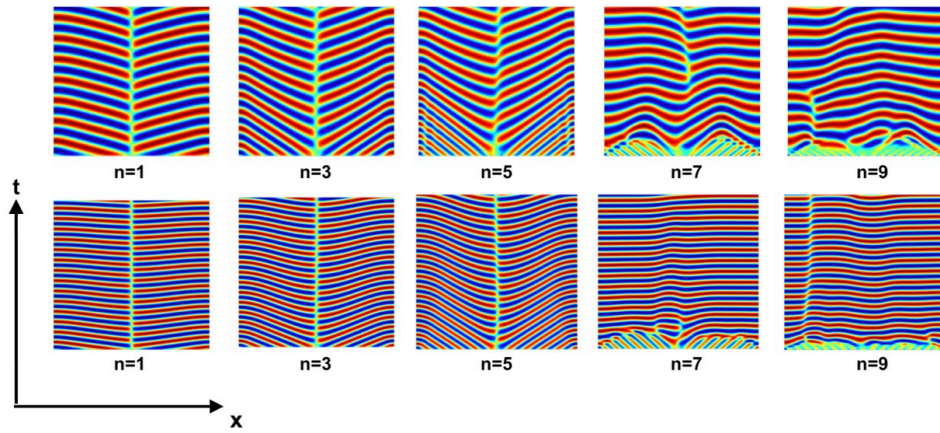


Figura 3.11: Gráfica del espacio tiempo de las simulaciones realizadas con la CGLE en 2D y parámetros específicos por arriba de la curva de Eckhaus, Figura 3.1. Los datos de estas simulaciones se pueden ver en el Cuadro 3.5.

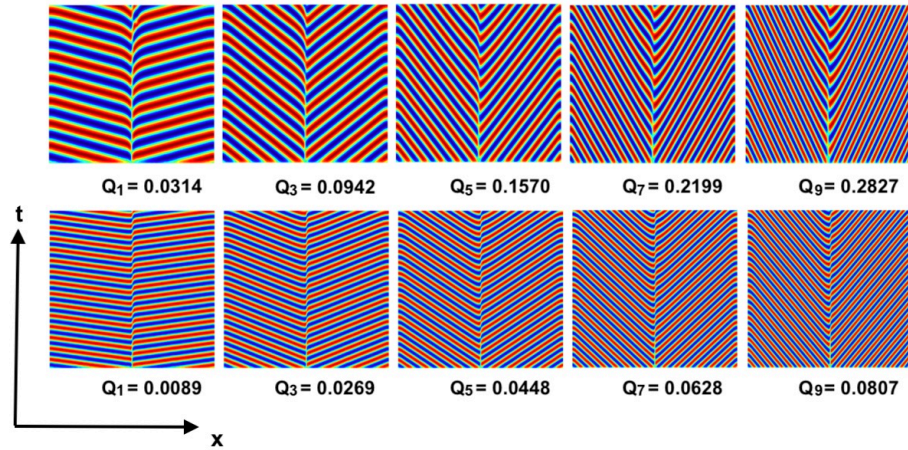


Figura 3.12: Mapas espacio-temporales de las soluciones de la CGLE en dos dimensiones, correspondientes a los parámetros $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.5)$ y $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.6)$ a lo largo del eje x , n denota el número de ondas a cada lado del defecto, relacionado con el número de onda inicial $Q_n = 2n\pi/L$. En estos mapas, se modifica el valor de L para estabilizar las ondas cuando n varía de 1 a 5. Los datos de estas simulaciones se pueden ver en el Cuadro 3.6.

En la siguiente sección se estudiará la relación entre las distintas fases dinámicas del modelo CGLE, mediante simulaciones numéricas en un dominio circular. Se analizará cómo estas fases se manifiestan y evolucionan en función de los parámetros y las condiciones iniciales, explorando su impacto en la estabilidad y la dinámica de las espirales.

3.4. Comportamientos y Fases en ondas 2D

En el capítulo 2.5, se analizaron las distintas fases dinámicas del modelo CGLE según la clasificación de Chaté, [24], caracterizando regiones como la turbulencia de amplitud, la turbulencia de fase, la intermitencia espacio-temporal, los estados congelados y el régimen sin caos. Estas fases, delimitadas en el espacio de parámetros $(-1/\alpha, \beta)$, fueron descritas en términos de su estabilidad, comportamiento espacio-temporal y la formación de defectos, proporcionando un marco teórico esencial para comprender las soluciones del modelo.

En esta tesis, se analiza lo que ocurre en un dominio circular mediante simulaciones numéricas, explorando cómo las espirales representan dinámicamente estas fases. El propósito de este enfoque es observar directamente cómo varía la evolución espacio-temporal y cómo estas fases cambian en función de los parámetros. Estas simulaciones se realizaron con el objetivo de verificar la transición entre regiones descritas teóricamente y estudiar cómo las condiciones iniciales y de contorno afectan la estabilidad y la dinámica de las espirales, proporcionando así un contexto más amplio y detallado de las fases del modelo CGLE.

En la Figura 3.13 se pueden observar cinco regiones y un trío de simulaciones representando cada región, la solución u , su módulo y su fase. En estas simulaciones, se identifican cualitativamente las regiones con comportamientos similares como se vió en la sección 2.4. La fase de estados congelados no aparece porque no se puede reproducir con las condiciones iniciales dadas que parten de un único defecto. Sin embargo, aunque existen cualitativamente las simulaciones parecidas a las presentadas en la Figura 2.8, la forma de dominio y las condiciones iniciales específicas utilizadas en este trabajo parecen agrandar las regiones de estabilidad de las espirales. Esto nos permite concluir que las distintas regiones de comportamiento dinámico en el espacio de parámetros (α, β) no están determinadas únicamente por los coeficientes de la ecuación CGLE. En realidad, estas fases también dependen de las condiciones iniciales y de contorno utilizadas en las simulaciones. Por ello, no pueden definirse de manera única o sin ambigüedad, ya que su forma y ubicación pueden variar significativamente según la configuración específica del sistema.

En la Fig.3.13, se muestran algunas soluciones de la CGLE con diferentes regiones cualitativas según Ref. [24], ilustrando distintos comportamientos de la amplitud, el módulo y la fase. Para detallar las regiones de transición, se realizan múltiples simulaciones para diferentes valores de $(-\alpha^{-1}, \beta)$. Cada punto en la Fig. 3.14 corresponde a una simulación cuyos detalles se presentan en el Cuadro 3.7. Como en los casos anteriores, el color de cada punto en el espacio de parámetros de la Fig. 3.14 está asociado al comportamiento cualitativo, el cual ilustramos con ejemplos en la Figura 3.15.

En la parte superior derecha del gráfico de la Figura 3.14. y, a la derecha de la curva L , se observan en las simulaciones 5, 8, 9 y 14 (puntos amarillos) una espiral única cuya forma de Arquímedes es casi completamente regular pero con el ancho del brazo oscilando

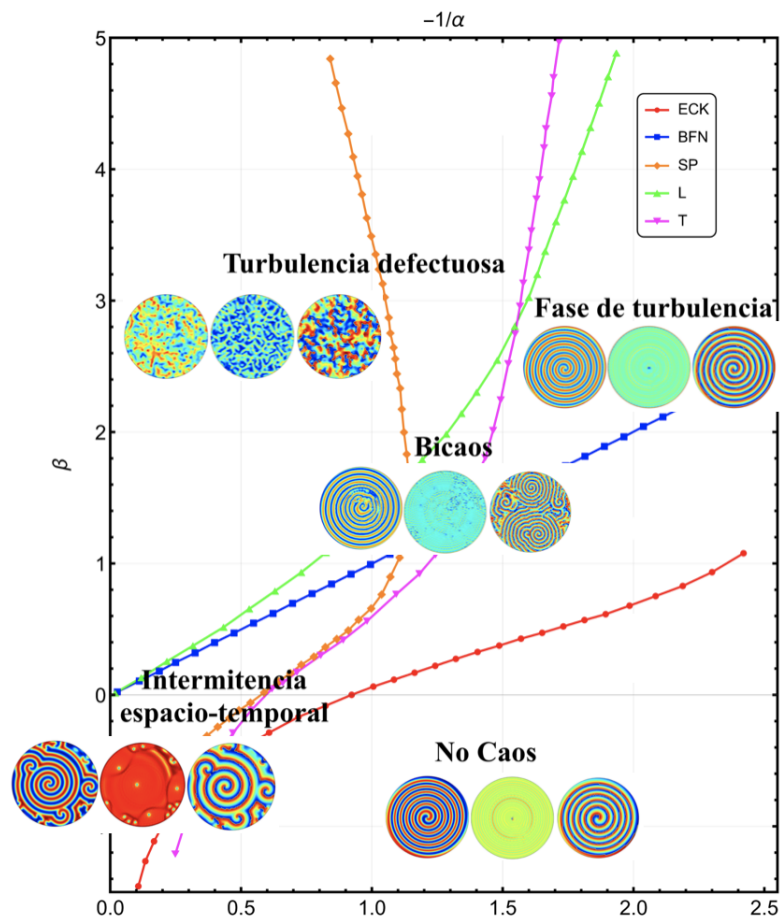


Figura 3.13: Diagrama donde se pueden ver las fases de Chate y las simulaciones de las espirales para valores específicos de los parámetros elegidos en cada región.

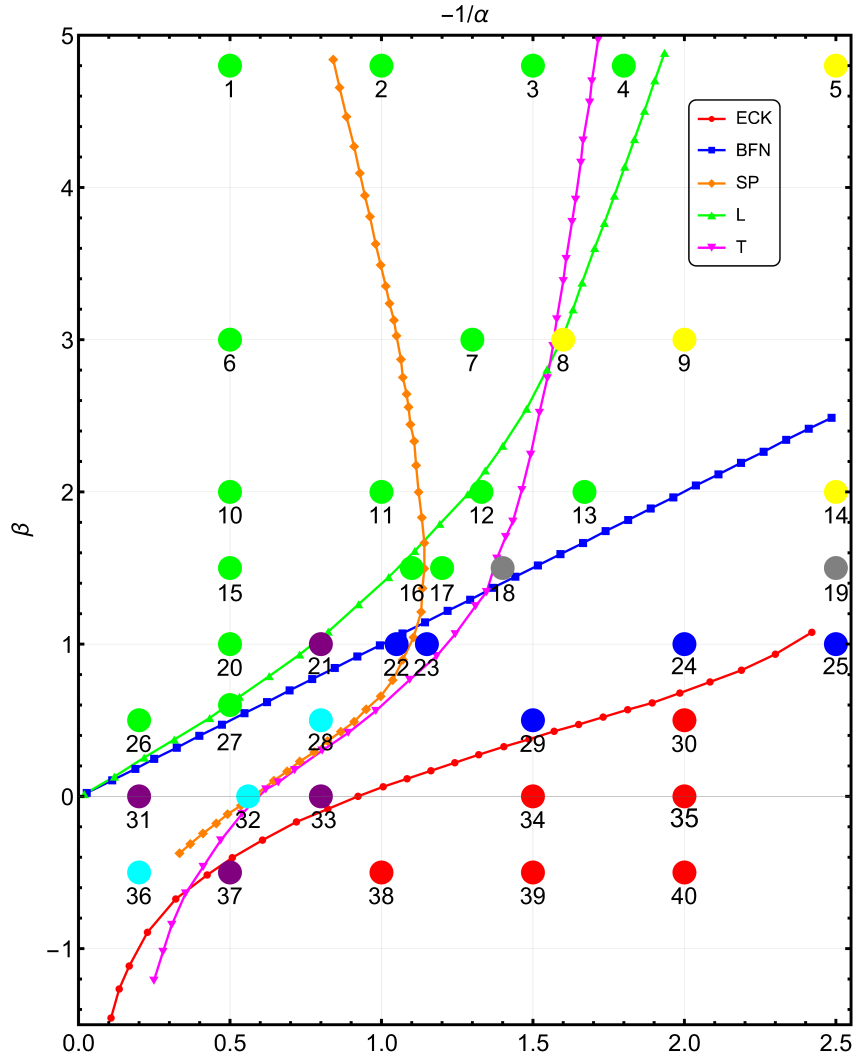


Figura 3.14: Espacio de fase $(-1/\alpha, \beta)$ de espirales como lo representa Chaté en la Ref. [24]

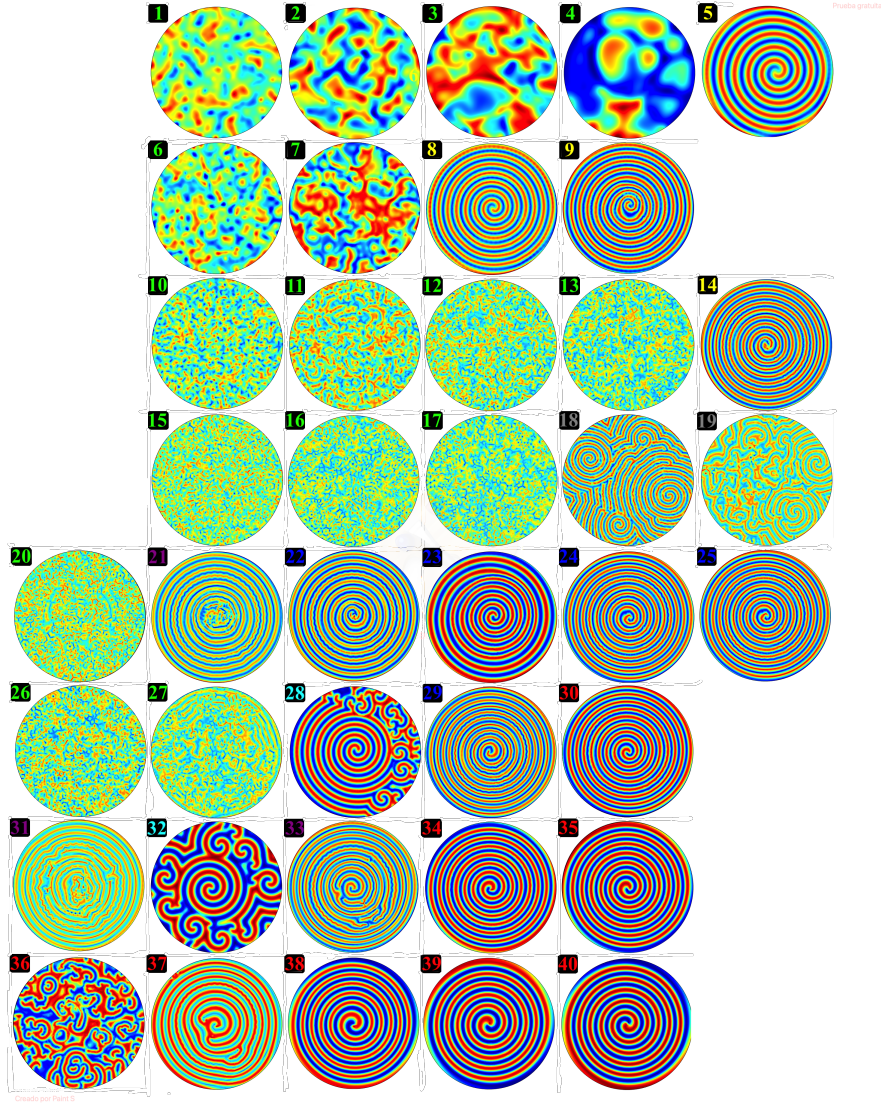


Figura 3.15: Soluciones numéricas de espirales en un dominio circular para diferentes valores de los parámetros de los parámetros $(-\alpha^{-1}, \beta)$. Los datos se presentan en el Cuadro 3.7.

Num	$(-\alpha^{-1}, \beta)$	T	R	Num	$(-\alpha^{-1}, \beta)$	T	R
1	(0.5, 4.8)	50	50	21	(0.8, 1)	126.62	122.5
2	(1, 4.8)	50	50	22	(1.05, 1)	95.3	5095
3	(1.5, 4.8)	300	50	23	(1.15, 1)	87.4	176
4	(1.8, 4.8)	1000	50	24	(2, 1)	45.6	305.78
5	(2.5, 4.8)	101.2	95.6	25	(2.5, 1)	45.63	305.8
6	(0.5, 3)	50	62.83	26	(0.2, 0.5)	523.3	216
7	(1.3, 3)	5000	90.125	27	(0.5, 0.6)	200.82	3078.8
8	(1.6, 3)	5000	136.88	28	(0.8, 0.5)	128.3	921.53
9	(2, 3)	57.2	251.3	29	(1.5, 0.5)	76.2	335.1
10	(0.5, 2)	700	146.6	30	(2, 0.5)	60.5	272.3
11	(1, 2)	150	188.5	31	(0.2, 0)	509.6	3330.1
12	(1.33, 2)	5000	327.6	32	(0.56, 0)	199.9	59
13	(1.67, 2)	60.8	80.1	33	(0.8, 0)	1000	385.86
14	(2.5, 2)	40.65	791.7	34	(1.5, 0)	89.7	244.35
15	(0.5, 1.5)	400	251.3	35	(2, 0)	70	219.9
16	(1.1, 1.5)	5000	568.34	36	(0.2, -0.5)	641.6	99.5
17	(1.2, 1.5)	5000	788.9	37	(0.5, -0.5)	300	376.9
18	(1.4, 1.5)	5000	2594.1	38	(1, -0.5)	169.23	230
19	(2.5, 1.5)	42.5	428	39	(1.5, -0.5)	115.15	198.97
20	(0.5, 1)	225	57	40	(2, -0.5)	85.72	188.5

Cuadro 3.7: Datos de las simulaciones de la Figura 3.14.

principalmente cerca del núcleo. Curiosamente, en la simulación número 5, el núcleo se mueve desde el centro incluso con estas condiciones iniciales y de contorno simétricas.

En el centro y hacia la derecha de la curva BFN , en las simulaciones 18 y 19 (puntos grises) se puede ver que la espiral se divide en múltiples espirales. Debajo de esta región (curva BFN) hay una línea horizontal de espirales simples con un solo brazo que cambia de ancho más un núcleo irregular, en las simulaciones 22-25, incluyendo la 29 (puntos azules). La simulación 21 (punto morado) parecería tener este mismo comportamiento, pero en el centro se empieza a disolver la espiral.

Por debajo de esta franja, y debajo de la curvas ECK y T , las espirales de Arquímedes simples aparecen bien formadas y estables, simulaciones 30, 34-35, 38-40 (puntos rojos). Moviéndose hacia la izquierda, las espirales en todo el dominio comienzan a romperse, pasando de estados de transición en simulaciones con espirales en subdominios celulares separados en 33 y 37 (puntos morados) a estados de turbulencia de defecto bien definidos en simulaciones 28, 32 y 36 (puntos color cian). En la 31 (punto morado) pareciera de nuevo estarse formando una espiral.

Principalmente por encima de la curva T , se pueden identificar múltiples estados turbulentos, todos los puntos de color verde. Entonces se puede concluir al comparar los resultados esperados en las Figuras 2.9, 2.10 y 3.15, que las fases identificadas en la Ref. [24] deducidas de simulaciones presentan similitudes cualitativas en comparación con estos resultados.

Las simulaciones numéricas desarrolladas en este capítulo permitieron explorar la dinámica de ondas en espiral en un dominio bidimensional circular, resolviendo la ecuación de Ginzburg–Landau compleja bajo distintas configuraciones paramétricas. Se identificaron regiones de estabilidad, la aparición de espirales y antiespirales, así como la persistencia y transición entre diferentes fases espaciotemporales. Además, se analizó el efecto del tamaño del dominio en la estabilidad de las ondas espirales, revelando su influencia en la selección del número de onda y en la estructura de los patrones. Estos resultados no solo respaldan las predicciones teóricas obtenidas en capítulos anteriores, sino que también ponen de manifiesto la necesidad de desarrollar herramientas analíticas más precisas para entender el comportamiento complejo de las ondas espirales en medios bidimensionales.

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se estudiaron las propiedades dinámicas de las soluciones espirales aisladas de la ecuación compleja de Ginzburg–Landau (CGLE) mediante simulaciones numéricas en dominios bidimensionales. Dada la complejidad inherente a la CGLE y la dificultad de obtener soluciones analíticas o aproximaciones formales completas, el análisis se enfocó en un abordaje computacional detallado, con especial énfasis en los comportamientos emergentes de ondas espirales en diferentes regiones del espacio de parámetros.

Para evitar efectos no deseados relacionados con bordes irregulares, geometrías artificiales o condiciones iniciales no controladas, se optó por un dominio circular con un radio suficientemente grande como para permitir el desarrollo completo de las ondas espirales, pero suficientemente contenido como para reducir el impacto de inestabilidades secundarias. Se utilizó una espiral de tipo Arquímedes como condición inicial, dado que, en medios homogéneos e infinitos con dinámica estacionaria, este tipo de espiral genera frentes de onda que a gran distancia del núcleo se comportan localmente como ondas planas. Este enfoque permitió el análisis preciso de características individuales como la persistencia, la dispersión y la estabilidad de las espirales. Las simulaciones fueron realizadas en COMSOL Multiphysics, empleando el método de elementos finitos, lo cual garantizó un control refinado sobre la resolución espacial y la implementación de condiciones de frontera.

Los resultados mostraron que las propiedades de las espirales, en particular, su frecuencia, número de onda y estabilidad, dependen de manera sensible de las condiciones iniciales. Esta observación resalta la importancia de controlar cuidadosamente dichas condiciones para predecir correctamente el comportamiento del sistema. Aunque se observan patrones estables en ciertas regiones del espacio de parámetros, no se cuenta aún con un criterio analítico que permita anticipar de forma general la transición entre estabilidad e inestabilidad. Esta ausencia constituye una pregunta abierta en el estudio de sistemas oscilatorios complejos y subraya la necesidad de nuevos marcos teóricos.

Respecto a la estabilidad, se identificaron al menos tres regiones diferenciadas en el espacio de parámetros (α, β) . En algunas de ellas, por encima de curvas críticas como la de Eckhaus, las espirales se mantienen estables, mientras que en otras surgen transiciones hacia estados turbulentos o con defectos topológicos. El tamaño del dominio y el número inicial de onda demostraron tener un impacto crucial en estas transiciones, lo que sugiere que los criterios tradicionales de estabilidad (como el de Eckhaus) no siempre son aplicables a sistemas bidimensionales, y que es necesario desarrollar enfoques más robustos y específicos para estos escenarios.

Otro hallazgo importante fue la aparición de espirales y antiespirales en distintas regiones del

espacio de parámetros. Estas no se distribuyen de manera simétrica, y su formación depende no solo de los valores paramétricos, sino también de las condiciones iniciales impuestas. En algunas configuraciones, se identificaron incluso regiones de coexistencia, donde espirales y antiespirales emergen simultáneamente en el mismo dominio. Este fenómeno evidencia una alta sensibilidad del sistema y la presencia de dinámicas bifásicas que aún no han sido completamente descritas en la literatura.

Respecto a la persistencia, los resultados muestran que, aunque las espirales estables pueden mantenerse en ciertos regímenes de parámetros, no siempre satisfacen los criterios tradicionales, como el criterio de Eckhaus. En particular, para números de onda iniciales menores a un valor crítico, se observan inestabilidades significativas que afectan la evolución de las espirales.

De forma general, este trabajo contribuye al entendimiento de las dinámicas de ondas espirales en sistemas oscilatorios, ofreciendo nuevas perspectivas sobre su estabilidad y comportamiento en distintos regímenes de parámetros. Los resultados obtenidos subrayan la necesidad de desarrollar marcos teóricos robustos que consideren las particularidades de las soluciones bidimensionales y su interacción con las condiciones iniciales y las características del dominio. Además, se destaca la importancia de emplear métodos matemáticos avanzados, como el método de multiescalas, para capturar adecuadamente las complejas interacciones espaciales y temporales presentes en estos sistemas.

Como perspectivas futuras, se concluye que las espirales bidimensionales requieren nuevos resultados analíticos. Es necesario profundizar en simulaciones numéricas en regiones más amplias y realizar análisis detallados sobre las inestabilidades convectivas y absolutas. En particular, el uso de la teoría de multiescalas puede proporcionar un marco teórico sólido para verificar las regiones de estabilidad de la CGLE, así como para mapearla a modelos más sencillos, como el BVAM, lo que abriría la posibilidad de analizar las propiedades de estabilidad de este modelo utilizando las herramientas desarrolladas en esta tesis. Además, es fundamental extender el desarrollo de métodos numéricos y matemáticos para calcular con precisión las trayectorias de las puntas de las espirales en diferentes modelos de reacción-difusión, permitiendo explorar cómo estos métodos pueden aplicarse de manera más general.

Adicionalmente, se recomienda extender este enfoque numérico al estudio de trayectorias de punta de espiral en diferentes modelos de reacción-difusión, para comprender cómo varían bajo diferentes condiciones estructurales. También se sugiere profundizar en la descripción de las transiciones entre espirales y antiespirales, y comenzar a explorar configuraciones tri-dimensionales. Estas direcciones futuras podrían no solo enriquecer la teoría de patrones en medios oscilatorios, sino también facilitar aplicaciones en biología, química y física donde estos fenómenos tienen lugar de forma natural.

Referencias

- [1] K. I. Agladze and V. I. Krinsky, “Multi-armed vortices in an active chemical medium,” *Nature*, vol. 296, no. 5856, pp. 424–426, 1982.
- [2] M. Aguares, S. J. Chapman, and T. Witelski, “Motion of spiral waves in the complex Ginzburg–Landau equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 239, no. 7, pp. 348–365, 2010.
- [3] M. Aguares, “The effect of boundaries on the asymptotic wavenumber of spiral wave solutions of the complex Ginzburg–Landau equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 278, pp. 1–12, 2014.
- [4] M. Aguares, S. J. Chapman, and T. Witelski, “Dynamics of spiral waves in the complex Ginzburg–Landau equation in bounded domains,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 414, pp. 132699, 2020.
- [5] S. Almuaddi, “Control of spiral waves in reaction diffusion systems using response function,” PhD thesis, University of Exeter, 2019.
- [6] J. L. Aragón, R. A. Barrio, T. E. Woolley, R. E. Baker, and P. K. Maini, “Nonlinear effects on Turing patterns: Time oscillations and chaos,” *Physical Review E*, vol. 86, no. 2, pp. 026201, 2012.
- [7] I. S. Aranson, L. Aranson, L. Kramer, and A. Weber, “Stability limits of spirals and traveling waves in nonequilibrium media,” *Physical Review A*, vol. 46, no. 6, pp. R2992, 1992.
- [8] I. Aranson, H. Levine, and L. Tsimring, “Controlling spatiotemporal chaos,” *Physical review letters*, vol. 72, no. 16, pp. 2561, 1994.
- [9] I. S. Aranson and L. Kramer, “The world of the complex Ginzburg-Landau equation,” *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, pp. 99, 2002.
- [10] M. Bär and M. Or-Guil, “Alternative scenarios of spiral breakup in a reaction-diffusion model with excitable and oscillatory dynamics,” *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 6, pp. 1160, 1999.
- [11] M. Bär and L. Brusch, “Breakup of spiral waves caused by radial dynamics: Eckhaus and finite wavenumber instabilities,” *New Journal of Physics*, vol. 6, no. 1, pp. 5, 2004.
- [12] M. Bär, “Reaction-diffusion patterns and waves: From chemical reactions to cardiac arrhythmias,” *Spirals and Vortices*, pp. 239–251, 2019.

- [13] D. Barkley, M. Kness, and L. S. Tuckerman, “Spiral-wave dynamics in a simple model of excitable media: The transition from simple to compound rotation,” *Physical Review A*, vol. 42, no. 4, pp. 2489, 1990.
- [14] D. Barkley, “Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media,” *Physical Review Letters*, vol. 68, no. 13, pp. 2090, 1992.
- [15] D. Barkley, “Euclidean symmetry and the dynamics of rotating spiral waves,” *Physical Review Letters*, vol. 72, no. 1, pp. 164, 1994.
- [16] D. Barkley, “Spiral meandering,” in *Chemical waves and patterns*, Springer, pp. 163–189, 1995.
- [17] R. A. Barrio, C. Varea, J. L. Aragón, and P. K. Maini, “A two-dimensional numerical study of spatial pattern formation in interacting Turing systems,” *Bulletin of mathematical biology*, vol. 61, no. 3, pp. 483–505, 1999.
- [18] R. A. Barrio, I. Dominguez-Roman, M. A. Quiroz-Juárez, O. Jiménez-Ramírez, R. Vázquez-Medina, and J. L. Aragón, “Modelling the electrical activity of the heart,” in *Mathematical Biology and Biological Physics*, World Scientific, pp. 51–59, 2017.
- [19] L. Brevdo and O. A. Cirpka, “Absolute/convective instability dichotomy in a Soret-driven thermosolutal convection induced in a porous layer by inclined thermal and vertical solutal gradients,” *Transport in Porous Media*, vol. 95, no. 2, pp. 425–446, 2012.
- [20] L. Brusch, E. M. Nicola, and M. Bär, “Comment on “Antispiral waves in reaction-diffusion systems”,” *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 8, pp. 089801, 2004.
- [21] G. Bub, A. Shrier, and L. Glass, “Spiral wave generation in heterogeneous excitable media,” *Physical review letters*, vol. 88, no. 5, pp. 058101, 2002.
- [22] H. Chaté and P. Manneville, “Transition to turbulence via spatio-temporal intermittency,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 2, pp. 112, 1987.
- [23] H. Chate, “Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation,” *Nonlinearity*, vol. 7, no. 1, pp. 185, 1994.
- [24] H. Chaté and P. Manneville, “Phase diagram of the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 224, no. 1-2, pp. 348–368, 1996.
- [25] E. M. Cherry and F. H. Fenton, “Visualization of spiral and scroll waves in simulated and experimental cardiac tissue,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 12, pp. 125016, 2008.
- [26] D. S. Cohen, J. C. Neu, and R. R. Rosales, “Rotating spiral wave solutions of reaction-diffusion equations,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 35, no. 3, pp. 536–547, 1978.
- [27] COMSOL AB, *COMSOL Multiphysics® v6.0*, Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2024. [Software]. Available: <https://www.comsol.com>. El uso del software se realizó bajo la licencia académica registrada a nombre de Aldo Ledesma Durán, del Laboratorio de Biofísica y Materiales Complejos, UNAM.

- [28] L.-C. Crasovan, B. A. Malomed, and D. Mihalache, “Stable vortex solitons in the two-dimensional Ginzburg-Landau equation,” *Physical Review E*, vol. 63, no. 1, pp. 016605, 2000.
- [29] J.-Y. Dai, “Ginzburg–Landau Spiral Waves in Circular and Spherical Geometries,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 53, no. 1, pp. 1004–1028, 2021.
- [30] I. Domínguez, R. A. Barrio, C. Varea, and J. L. Aragón, “Modelo de propagación de ondas solitarias en el corazón,” *TIP Revista Especializada en Ciencias Químico-Biológicas*, vol. 16, no. 2, pp. 79–92, 2013.
- [31] A. Duran Ledesma, “Patrones de turing en sistemas biológicos,” PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2012.
- [32] Studio7, “Espirales de la Naturaleza,” 2011. [Online]. Available: <http://figurasyformasgeometricas.blogspot.com/2011/07/espiales-de-la-naturaleza.html>. [Accessed: 15-Oct-2022].
- [33] F. Fenton and A. Karma, “Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation: Filament instability and fibrillation,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 8, no. 1, pp. 20–47, 1998.
- [34] J. A. Fernandez, *Los secretos de la vida: breve historia de la biología*, Critica, 2015.
- [35] E. Demidov, “The FitzHugh-Nagumo (FHN) model,” 2011. [Online]. Available: <https://www.ibiblio.org/e-notes/html5/fhn.html>. [Accessed: 21-Oct-2022].
- [36] D. Reich, “The Fibonacci sequence, spirals and the golden mean,” Temple University. [Online]. Available: <https://math.temple.edu/~reich/Fib/fibo.html>. [Accessed: 22-Oct-2022].
- [37] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane,” *Biophysical journal*, vol. 1, no. 6, pp. 445–466, 1961.
- [38] V. García-Morales and K. Krischer, “The complex Ginzburg–Landau equation: an introduction,” *Contemporary Physics*, vol. 53, no. 2, pp. 79–95, 2012.
- [39] M. Golubitsky, V. G. LeBlanc, and I. Melbourne, “Meandering of the spiral tip: an alternative approach,” *Journal of Nonlinear Science*, vol. 7, no. 6, pp. 557–586, 1997.
- [40] M. Golubitsky, V. G. LeBlanc, and I. Melbourne, “Hopf bifurcation from rotating waves and patterns in physical space,” *Journal of Nonlinear Science*, vol. 10, no. 1, pp. 69–101, 2000.
- [41] M. Golubitsky and I. Stewart, *The symmetry perspective: from equilibrium to chaos in phase space and physical space*, vol. 200, Springer Science & Business Media, 2003.
- [42] M. Golubitsky and I. Stewart, “Recent advances in symmetric and network dynamics,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 9, pp. 097612, 2015.
- [43] Y. Gong and D. J. Christini, “Antispiral waves in reaction-diffusion systems,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 8, pp. 088302, 2003.

- [44] J. M. Greenberg, “Spiral waves for λ - ω systems,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 39, no. 2, pp. 301–309, 1980.
- [45] P. S. Hagan, “Spiral waves in reaction-diffusion equations,” *SIAM journal on applied mathematics*, vol. 42, no. 4, pp. 762–786, 1982.
- [46] P. Hammer, “Spiral waves in monodomain reaction-diffusion model,” 2008.
- [47] N. Hartmann, M. Bär, I. G. Kevrekidis, K. Krischer, and R. Imbuhl, “Rotating chemical waves in small circular domains,” *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 8, pp. 1384, 1996.
- [48] J. Hirschberger, *Historia de la filosofía I: Antigüedad. Edad Media. Renacimiento*, Herder Editorial, 2015.
- [49] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve,” *The Journal of physiology*, vol. 117, no. 4, pp. 500, 1952.
- [50] P. C. Hohenberg and A. P. Krekhov, “An introduction to the Ginzburg–Landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns,” *Physics Reports*, vol. 572, pp. 1–42, 2015.
- [51] R. B. Hoyle, *Pattern formation: an introduction to methods*, Cambridge University Press, 2006.
- [52] M. Ipsen, L. Kramer, and P. G. Sørensen, “Amplitude equations for description of chemical reaction–diffusion systems,” *Physics Reports*, vol. 337, no. 1-2, pp. 193–235, 2000.
- [53] E. M. Izhikevich, *Dynamical systems in neuroscience*, MIT press, 2007.
- [54] B. Janiaud, A. Pumir, D. Bensimon, V. Croquette, H. Richter, and L. Kramer, “The Eckhaus instability for traveling waves,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 55, no. 3-4, pp. 269–286, 1992.
- [55] D. S. Jones, M. Plank, and B. D. Sleeman, *Differential equations and mathematical biology*, Chapman and Hall/CRC, 2009.
- [56] Z. J. Yang and Z. Mei, “Drift of Spiral Waves in Complex Ginzburg–Landau Equation,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 45, no. 4, pp. 647, 2006.
- [57] O.-U. Kheowan, C.-K. Chan, V. S. Zykov, O. Rangsiman, and S. C. Müller, “Spiral wave dynamics under feedback derived from a confined circular domain,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 3, pp. 035201, 2001.
- [58] N. Kopell and L. N. Howard, “Plane wave solutions to reaction-diffusion equations,” *Studies in Applied Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 291–328, 1973.
- [59] N. Kopell and L. N. Howard, “Target pattern and spiral solutions to reaction-diffusion equations with more than one space dimension,” *Advances in Applied Mathematics*, vol. 2, no. 4, pp. 417–449, 1981.
- [60] M. Krupa, “Bifurcations of relative equilibria,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 21, no. 6, pp. 1453–1486, 1990.

- [61] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Courier Corporation, 2003.
- [62] A. Ledesma-Duran and J. L. Aragón, “Primary and secondary instabilities of the mixed mode solution in a reaction diffusion system near the codimension-two Turing-Hopf point,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 124, pp. 68–77, 2019.
- [63] A. Ledesma-Duran and J. L. Aragón, “Spatio-temporal secondary instabilities near the Turing-Hopf bifurcation,” *Scientific reports*, vol. 9, no. 1, pp. 1–11, 2019.
- [64] A. Ledesma-Duran, E. A. Ortiz-Duran, J. L. Aragón, and I. Santamaria-Holek, “Eckhaus selection: The mechanism of pattern persistence in a reaction-diffusion system,” *Physical Review E*, vol. 102, no. 3, pp. 032214, 2020.
- [65] A. Ledesma-Duran and J. L. Aragón, “Spatio-temporal numerical solutions of the coupled real and complex Ginzburg-Landau amplitude equations for one-dimensional systems near the Turing-Hopf bifurcation,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 83, pp. 105145, 2020.
- [66] B.-W. Li, X. Gao, Z.-G. Deng, H.-P. Ying, and H. Zhang, “Circular-interface selected wave patterns in the complex Ginzburg-Landau equation,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 91, no. 3, pp. 34001, 2010.
- [67] J. Ma, J.-H. Gao, C.-N. Wang, and J.-Y. Su, “Control spiral and multi-spiral wave in the complex Ginzburg-Landau equation,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, no. 2, pp. 521–530, 2008.
- [68] P. Manneville and H. Chaté, “Phase turbulence in the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 96, no. 1-4, pp. 30–46, 1996.
- [69] S. C. Müller, P. Coulet, and D. Walgraef, “From oscillations to excitability: A case study in spatially extended systems,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 4, no. 3, pp. 439–442, 1994.
- [70] J. D. Murray, “Method of steepest descents”, *Asymptotic Analysis*, Springer New York, 40–71, 1984.
- [71] J. D. Murray, *Mathematical biology: I. An introduction*, Springer, 2002.
- [72] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, “An active pulse transmission line simulating nerve axon,” *Proceedings of the IRE*, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070, 1962.
- [73] E. M. Nicola, L. Brusch, and M. Bär, “Antispiral Waves as Sources in Oscillatory Reaction-Diffusion Media,” *The Journal of Physical Chemistry B*, vol. 108, no. 38, pp. 14733–14740, 2004.
- [74] S. V. Pandit and J. Jalife, “Rotors and the dynamics of cardiac fibrillation,” *Circulation research*, vol. 112, no. 5, pp. 849–862, 2013.
- [75] R. A. Barrio and others, “Aplicaciones del modelo BVAM a sistemas complejos,” *Revista Digital Universitaria*, vol. 11, pp. 3–17, 2010.

- [76] J. Paultet, B. Ermentrout, and W. Troy, “The existence of spiral waves in an oscillatory reaction-diffusion system,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 54, no. 5, pp. 1386–1401, 1994.
- [77] M. C. Rusiñol Pautas, *Pitágoras, número, armonía y esferas*, Punto Rojo Libros, 2017.
- [78] D. C. Pintos, M. C. Escribano Ródenas, J. C. Garro, J. Rojo, J. T. Freixenet, and S. Victoria, “Un trabajo con espirales,” *Pensamiento Matemático*, vol. 6, no. 2, pp. 47–62, 2016.
- [79] A. Polezhaev, “Spirals, Their Types and Peculiarities,” in *Spirals and Vortices*, Springer, pp. 91–112, 2019.
- [80] R. W. Pryor, *Multiphysics modeling using COMSOL: a first principles approach*. Jones and Bartlett Publishers, 2009.
- [81] D. Rand, “Dynamics and symmetry. Predictions for modulated waves in rotating fluids,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 79, no. 1, pp. 1–37, 1982.
- [82] K. B. Roberson, “Spiral Waves in Cartesian, Polar and Spherical Geometries,” PhD thesis, University of North Carolina Wilmington, 2010.
- [83] C. Rocsoreanu, A. Georgescu, and N. Giurgiteanu, *The FitzHugh-Nagumo model: bifurcation and dynamics*, vol. 10, Springer Science & Business Media, 2012.
- [84] J. M. Rogers and A. D. McCulloch, “A collocation-Galerkin finite element model of cardiac action potential propagation,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 41, no. 8, pp. 743–757, 1994.
- [85] W. van Saarloos, P. E. Cladis, and P. Palffy-Muhoray, “The complex Ginzburg-Landau equation for beginners,” 1994.
- [86] H. Sakaguchi, “Instability of the hole solution in the complex Ginzburg-Landau equation,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 85, no. 3, pp. 417–421, 1991.
- [87] S. Sinha and S. Sridhar, *Patterns in excitable media: Genesis, dynamics, and control*, CRC Press, 2014.
- [88] M. Stich and A. S. Mikhailov, “Complex pacemakers and wave sinks in heterogeneous oscillatory chemical systems,” *Z. Phys. Chem*, vol. 216, no. 4, pp. 521, 2002.
- [89] J. T. Stuart and R. C. DiPrima, “The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 362, no. 1708, pp. 27–41, 1978.
- [90] F. Sánchez-Garduño and J. L. Gutiérrez-Sánchez, “Las transformaciones de Thompson y las formas biológicas,” *Ciencias*, no. 126, 2017.
- [91] BBC Science Stories, “El catálogo de maravillas de D’Arcy Thompson que 100 años después sigue inspirando a los científicos,” 2017. [Online]. Available: <https://www.bbc.com/mundo/noticias-40533532>. [Accessed: 22-Oct-2022].

- [92] J.-C. Tsai, “Rotating spiral waves in λ - ω systems on circular domains,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 239, no. 12, pp. 1007–1025, 2010.
- [93] Uchiyama, Y. (2014). Stochastic Dynamics for Large Deviations and Long-memory in One-dimensional Defect Turbulence.
- [94] V. K. Vanag and I. R. Epstein, “Inwardly rotating spiral waves in a reaction-diffusion system,” *Science*, vol. 294, no. 5543, pp. 835–837, 2001.
- [95] C. Varea, D. Hernández, and R. A. Barrio, “Soliton behaviour in a bistable reaction diffusion model,” *Journal of Mathematical Biology*, vol. 54, pp. 797–813, 2007.
- [96] A. Weber, L. Kramer, I. S. Aranson, and L. Aranson, “Stability limits of traveling waves and the transition to spatiotemporal chaos in the complex Ginzburg-Landau equation,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 61, no. 1-4, pp. 279–283, 1992.
- [97] K. Williams, “Spirals and rosettes in architectural ornament,” *Nexus Network Journal*, vol. 1, no. 1, pp. 129–138, 1999.
- [98] A. T. Winfree, “Spiral waves of chemical activity,” *Science*, vol. 175, no. 4022, pp. 634–636, 1972.
- [99] A. T. Winfree, “Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist approach to the theory of excitable media,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 1, no. 3, pp. 303–334, 1991.
- [100] C. Wul, “Theory of meandering and drifting spiral waves in reaction-diffusion systems,” PhD thesis, FU Berlin, 1996.
- [101] F. Xie, D. Xie, and J. N. Weiss, “Inwardly rotating spiral wave breakup in oscillatory reaction-diffusion media,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 2, pp. 026107, 2006.
- [102] A. N. Zaikin and A. M. Zhabotinsky, “Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system,” *Nature*, vol. 225, no. 5232, pp. 535–537, 1970.
- [103] H. Zhang, B. Hu, G. Hu, Q. Ouyang, and J. Kurths, “Turbulence control by developing a spiral wave with a periodic signal injection in the complex ginzburg-landau equation,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 4, pp. 046303, 2002.
- [104] L. Q. Zhou and Q. Ouyang, “Experimental studies on long-wavelength instability and spiral breakup in a reaction-diffusion system,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 8, pp. 1650, 2000.
- [105] O.C., Zienkiewicz, R.L., Taylor, J. Z. Zhu, “The finite element method: its basis and fundamentals..^{El}sevier, 2005.
- [106] V. S. Zykov, G. Bordiougov, H. Brandtstädter, I. Gerdes, and H. Engel, “Global Control of Spiral Wave Dynamics in an Excitable Domain of Circular and Elliptical Shape,” *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 1, pp. 018304, 2004.
- [107] The Ginzburg-landau Equation 5.1 the Real Ginzburg-landau Equation. University of Münster

Apéndice A. *BVAM* y Brusselator por método multiescalas

Ecuación de CGLE del *BVAM*

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sigma \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} + a\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{b}) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{v} + b\mathbf{v} + h\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{b}) \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \mathbf{b}) = \mathbf{C}\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{v}^2$, b es el parámetro de control y a es una constante que acopla linealmente las variables u y v , h modula el acoplamiento cruzado de u en la evolución de v , y C regula la intensidad del término no lineal. Este sistema fue propuesto por Barrio et al. como una extensión del modelo de Oregonator, incorporando términos polinómicos para capturar dinámicas oscilatorias complejas [18].

La metodología se basa en aplicar el método de múltiples escalas para transformar un sistema de ecuaciones diferenciales de reacción-difusión en un sistema del tipo CGLE (Ecuación Compleja de Ginzburg-Landau). Para ello, primero se considera la expansión en términos de un parámetro pequeño, lo cual permite descomponer las variables en escalas temporales y espaciales lentas y rápidas. Posteriormente, se introduce la aproximación mediante series de potencias para los valores propios y las soluciones del sistema. A través del análisis de estabilidad lineal, se determina la matriz Jacobiana y se identifican los valores propios críticos. Se imponen condiciones de solvencia que eliminan resonancias, llevando finalmente al sistema reducido del tipo CGLE, el cual describe las dinámicas no lineales y oscilatorias del sistema original. Para más detalles, véase la sección 1.3 y [61].

A continuación se deriva la ecuación de amplitud $\partial_T A$ utilizando el método de multiescalas:

(a) Descomposición inicial y expansión multiescala

A partir del sistema general de reacción-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \nabla^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v.$$

1. Se identifica el punto de equilibrio del sistema y se linealiza, obteniendo el operador jacobiano L_0 . 2. Se define un parámetro pequeño ϵ asociado a la distancia al punto de bifurcación y se expande la solución.

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$L = L_0 + \epsilon^2 \chi L_1 + \epsilon^4 L_2 + \dots$$

3. Se introducen escalas temporales lentas y rápidas.

$$t \rightarrow t, \quad \tau = \epsilon^2 t,$$

y se reescribe la derivada temporal como:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

(b) Cálculo de L_0 y sus propiedades

El operador L_0 se calcula como:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ h & b \end{pmatrix},$$

con las propiedades:

$$\text{Traza}(L_0) = b + 1, \quad \text{Det}(L_0) = b - ah.$$

Para el punto crítico, se impone $\text{Traza}(L_0) = 0$, obteniendo b_c , y los valores propios son:

$$\lambda_0 = \pm i\omega, \quad \omega^2 = -1 - ah.$$

Los vectores propios derechos (U) e izquierdos (U^I) se calculan y normalizan para cumplir la ortogonalidad y la ortonormalización.

$$U^I U = 1, \quad U^I \bar{U} = 0.$$

(c) Expansión de L y cálculo de L_1

1. Se introduce la distancia al punto de bifurcación como $\mu = \epsilon^2 \chi$, donde $\chi = \text{sgn}(\mu)$, y expandimos L :

$$L = L_0 + \epsilon^2 \chi L_1 + \dots$$

2. Calculamos L_1 :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{\partial b}{\partial \mu}.$$

(d) Expansión de los términos no lineales

Los términos no lineales del sistema se escriben como:

$$\tilde{f}(X, Y; b) = cXY + X^2Y,$$

y se expanden en potencias de ϵ . Para calcular los coeficientes M_0 y N_0 , se parte de una base ortonormal $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ en el espacio de fases, donde cada vector se escribe en componentes como:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}.$$

Estas componentes corresponden a las direcciones en las que se proyectan las derivadas parciales de los términos no lineales del sistema. Utilizando estas proyecciones, los términos de segundo y tercer orden se calculan como:

$$M_0 = \begin{pmatrix} -\frac{ca_x b_y}{2} - \frac{ca_y b_x}{2} \\ \frac{ca_x b_y}{2} + \frac{ca_y b_x}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$N_0 = \begin{pmatrix} -\frac{a_x b_y c_y}{3} - \frac{a_y b_x c_y}{3} - \frac{a_y b_y c_x}{3} \\ \frac{a_x b_y c_y}{3} + \frac{a_y b_x c_y}{3} + \frac{a_y b_y c_x}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

(e) Derivación de las ecuaciones acopladas

Las ecuaciones en cada orden se plantean como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right) u_\nu = \mathcal{B}_\nu.$$

$$\tilde{B}_1 = 0$$

$$\tilde{B}_2 = M_0 u_1 u_1$$

$$\tilde{B}_3 = 2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1 - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 - \sigma \nabla_s^2\right) u_1$$

Las condiciones de solubilidad eliminan términos resonantes y permiten obtener soluciones en cada orden.

Primer orden, cálculo de u_1 .

En el primer orden en ϵ , se obtiene,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right) u_1 = 0. \quad (\text{A.5})$$

Asumimos una solución oscilatoria de la forma:

$$u_1(t, \tau) = W e^{i\omega_0 t} U + \bar{W} e^{-i\omega_0 t} \bar{U}, \quad (\text{A.6})$$

donde W es la amplitud compleja y U es el vector propio derecho asociado al valor propio $\lambda_0 = i\omega_0$.

Segundo orden, cálculo de u_2 .

Para encontrar u_2 , se parte de la ecuación diferencial asociada al segundo orden en el parámetro ϵ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right) u_2 = M_0 u_1 u_1, \quad (\text{A.7})$$

donde M_0 representa los términos no lineales y u_1 ya ha sido calculado en el primer orden. La solución u_2 se descompone en dos partes: una homogénea ($u_{2,H}$) y una particular ($u_{2,P}$):

$$u_2 = u_{2,H} + u_{2,P}. \quad (\text{A.8})$$

Para resolver u_2 , se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Esto implica proponer una forma general para $u_{2,P}$, que incluye términos dependientes de $W^2 e^{2i\omega_0 t}$, $\bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t}$ y $|W|^2$:

$$u_{2,P} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} W^2 e^{2i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} |W|^2. \quad (\text{A.9})$$

$$u_{2,P} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} W^2 e^{2i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \bar{W}^2 e^{-2i\omega_0 t} + \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} |W|^2. \quad (\text{A.9})$$

Los coeficientes $a_1, b_1, a_2, b_2, a_0, b_0$ representan las componentes reales e imaginarias de los modos forzados generados por las no linealidades del sistema. En particular:

- (a_1, b_1) : coeficientes del término resonante a frecuencia $2\omega_0$,
- (a_2, b_2) : coeficientes del término a frecuencia $-2\omega_0$,
- (a_0, b_0) : coeficientes del modo constante (sin oscilación temporal).

Cada uno de estos términos surge de las combinaciones cuadráticas de u_1 y se asocia con una contribución específica a la solución particular $u_{2,P}$.

Sustituyendo u_1 en la ecuación original, se generan términos que se proyectan en las bases ortogonales del sistema. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones para los coeficientes $a_1, b_1, a_2, b_2, a_0, b_0$, los cuales están relacionados con los parámetros V_+ , V_- y V_0 :

$$\begin{aligned} V_+ &= \left(\begin{array}{c} -\frac{c(1+\omega^2)(1-\omega i)(-2\omega^2-2\omega h i-h-1)}{3\omega^2 h^2} \\ -\frac{c(1+\omega^2)(1-\omega i)(-2\omega i-1-h)}{3\omega^2 h} \end{array} \right), \\ V_- &= \left(\begin{array}{c} -\frac{c(1+\omega^2)(1+\omega i)(-2\omega^2+2\omega h i-h-1)}{3\omega^2 h^2} \\ -\frac{c(1+\omega^2)(1+\omega i)(-2\omega i+1-h)}{3\omega^2 h} \end{array} \right), \\ V_0 &= \left(\begin{array}{c} -\frac{2c(\omega^2+1)(\omega^2+h+1)}{\omega^2 h} \\ 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, se resuelve $u_{2,H}$ a partir del sistema homogéneo asociado. La solución completa u_2 se obtiene sumando ambas contribuciones:

$$u_2 = u_{2,H} + u_{2,P}. \quad (\text{A.7})$$

Este cálculo es fundamental porque establece la base para el ajuste en el tercer orden y la derivación de términos no lineales más complejos.

Tercer orden, ajuste para W .

La resolución de la ecuación de tercer orden permite refinar las soluciones del sistema al considerar términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^3)$, obteniendo una descripción precisa de la dinámica de la amplitud W . La ecuación planteada es:

$$B_3^{(1)} = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 - \sigma \nabla^2 \right) WU + (2M_0 UV_0 + 2M_0 \bar{U} V_+ + 3N_0 UU\bar{U}) |W|^2 W.$$

La condición de solubilidad es esencial para asegurar la existencia de soluciones regulares y evitar términos resonantes en la ecuación diferencial. En este contexto, se usa para eliminar los términos que no son compatibles con el comportamiento de la solución en órdenes superiores. Esta condición garantiza que la solución proyectada sea compatible con las bases ortogonales del sistema, simplificando la ecuación de amplitud derivada.

En esta etapa, los coeficientes no lineales del sistema reducido se obtienen proyectando las matrices simétricas M_0 y N_0 , definidas a partir de derivadas parciales de segundo y tercer orden del término no lineal, sobre los vectores propios izquierdo y derecho del operador lineal L_0 . Para mayor claridad, se utiliza la notación abreviada $M_0 UV_0$, $M_0 \bar{U} V_+$, $N_0 UU\bar{U}$, entre otras, para representar las componentes relevantes de estas matrices evaluadas sobre

combinaciones específicas de direcciones del espacio de soluciones. Esta notación es consistente con la utilizada en Barrio et al. (2002), y permite expresar de forma concisa los términos involucrados en la ecuación de amplitud.

Mediante proyecciones sobre los vectores propios izquierdo y derecho del operador L_0 , se eliminan términos resonantes, dejando únicamente los términos relevantes. Se calculan explícitamente los coeficientes no lineales M_0UV_0 , $M_0\bar{U}V_+$ y $N_0UU\bar{U}$ como:

$$M_0UV_0 = \begin{pmatrix} \frac{c^2(1+\beta^2)(-1+\beta i)(2+2h+\beta^2+\beta i+\beta hi)}{\beta^2 h^2} \\ -\frac{c^2(1+\beta^2)(-1+\beta i)(2+2h+\beta^2+\beta i+\beta hi)}{\beta^2 h^2} \end{pmatrix}$$

$$M_0\bar{U}V_+ = \begin{pmatrix} \frac{c^2(1+\beta^2)^2(2h-\beta^2+2-3\beta i+\beta hi)}{6\beta^2 h^2} \\ -\frac{c^2(1+\beta^2)^2(2h-\beta^2+2-3\beta i+\beta hi)}{6\beta^2 h^2} \end{pmatrix}$$

$$N_0UU\bar{U} = \begin{pmatrix} \frac{(-1+\beta i)^2(-\beta^2+3+4\beta i)}{3h} \\ -\frac{(-1+\beta i)^2(-\beta^2+3+4\beta i)}{3h} \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación para W (CGLE), que describe la evolución espacio-temporal de la amplitud:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \chi \lambda_1 W + d \nabla_s^2 W - g |W|^2 W,$$

donde los parámetros son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\omega}, \quad d = \frac{\sigma\omega + \omega - \sigma i + i}{2\omega}, \quad g = g' + ig''.$$

Con:

$$g' = \frac{(1+\omega^2)(\omega^2 c^2 + \omega^2 h^2 - 2\omega^2 h - c^2 h^2 + c^2)}{2\omega^2 h^2},$$

$$g'' = \frac{(1+\omega^2)(10\omega^2 h - 9\omega^2 h + 10c^2 + 4\omega^2 c^2 + \omega^2 c^2 h + \omega(h+1)(7\omega c^2 - 3i\omega^3 h))}{6\omega^3 h^2}.$$

Con la condición de solubilidad encontramos la ecuación de Stuart Landau: $U^I \cdot B_3^1(\tau) = 0$.

(f) Expresión final de la ecuación buscada

Finalmente, mediante reescalado y ajustes de términos, se incorpora el efecto de la no linealidad y la difusión, lo que lleva a una forma compacta de la ecuación de amplitud. Así, se obtiene la ecuación de Ginzburg-Landau, que describe la dinámica espacio-temporal del sistema cerca de una bifurcación de Hopf, integrando de manera precisa los efectos críticos del sistema.

$$\frac{\partial A}{\partial T} = A + (1+i\beta)\nabla^2 A - (1+i\alpha)|A|^2 A, \quad (\text{A.8})$$

donde los coeficientes α y β están dados por:

$$\alpha = \frac{a^2\omega^2c^2 + 10a^2c^2 + 3a\omega^4 - 8a\omega^2c^2 + 9a\omega c^2 - 20a^2c^2 + \omega^4c^2 - 9\omega c^2 + 11\omega^2c^2 + 9a^2 + 10c^2}{\omega(a^2c^2 + 2a\omega^2 + \omega^4 - \omega^2c^2 + \omega^2 - c^2)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\beta = -\frac{\sigma - 1}{\omega(\sigma + 1)}. \quad (\text{A.10})$$

Esta ecuación describe la dinámica de la amplitud compleja en sistemas de reacción-difusión cercanos a una bifurcación de Hopf.

Ecuación de CGLE del *Brusselator*

(a) Descomposición inicial y expansión multiescala

El modelo Brusselator describe la evolución temporal de las concentraciones X y Y en un sistema de reacción-difusión. Las ecuaciones base son:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2Y + D_X \nabla^2 X, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + D_Y \nabla^2 Y,$$

donde A y B son parámetros de control. Las soluciones estacionarias son $(X_0, Y_0) = (A, B/A)$.

Se realiza la expansión multiescala:

$$X = X_0 + \epsilon x, \quad Y = Y_0 + \epsilon y,$$

y se expande x, y en series de ϵ :

$$x = \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots, \quad y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots$$

El parámetro $\epsilon^2 = (B - B_c)/B_c$ mide la distancia al punto de bifurcación $B_c = 1 + A^2$. Se definen escalas lentas $\tau = \epsilon^2 t$.

(b) Cálculo de L_0 y sus propiedades

Se linealizan las ecuaciones en torno a (X_0, Y_0) , obteniendo el operador:

$$L_0 = \begin{pmatrix} B - 1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}.$$

Evalando en $B = B_c$, se encuentra L_0 :

$$L_0 = \begin{pmatrix} A^2 & A^2 \\ -(1 + A^2) & -A^2 \end{pmatrix}.$$

El valor propio asociado es $\lambda_0 = iA$, indicando oscilaciones. Los vectores propios son:

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i/A \end{pmatrix}, \quad U^* = \frac{1}{2}(1 - Ai, -1 - iA).$$

(c) Expansión de L y cálculo de L_1

El operador se expande como:

$$L = L_0 + \epsilon^2 \chi L_1 + \dots, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Expansión de términos no lineales

Los términos no lineales $f(x, y), g(x, y)$ se expanden como:

$$f(x, y) = (B/A)x^2 + 2Axy + x^2y,$$

donde el control B se sustituye por B_c .

Los coeficientes de no linealidad son:

$$M_0 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{B}{A}\right) & 2A \\ 2Ay & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1+A^2}{A}\right) & 2A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_0 ab)_x = -(M_0 ab)_y = \frac{1+A^2}{A} a_x b_x + A(a_x b_y + a_y b_x)$$

Cálculo de N_0 :

$$(N_0 abc)_x = -(N_0 abc)_y = \frac{1}{3}(a_x b_x c_y + a_x b_y c_x + a_y b_x c_x)$$

(e) Derivación de ecuaciones acopladas

Primer orden:

$$(\partial_t - L_0)u_1 = 0, \quad u_1(t, \tau) = W e^{i\omega_0 t} U + \bar{W} e^{-i\omega_0 t} \bar{U}.$$

Segundo orden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right)u_2 = B_2,$$

donde

$$B_2 = M_0 u_1 u_1.$$

Para calcular u_2 , se expande en dos contribuciones:

$$u_2 = u_{2H} + u_{2P},$$

donde u_{2H} representa la solución homogénea y u_{2P} es la solución particular. Por el método de coeficientes indeterminados, proponemos que la solución particular tiene la forma:

$$u_{2P} = V_+ W^2 e^{2i\omega t} + V_- \bar{W}^2 e^{-2i\omega t} + V_0 |W|^2,$$

donde los coeficientes V_+ , V_- , y V_0 se obtienen resolviendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0\right)u_{2P} = B_2.$$

Resolviendo para V_+ , V_- , y V_0 , se encuentran:

$$\bar{V}_+ = V_- = \frac{(1 - iA)^2}{3A^3} \begin{pmatrix} 2iA \\ 1 - 2iA \end{pmatrix},$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2(A^2 - 1)}{A^3} \end{pmatrix}.$$

Tercer orden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_0 \right) u_3 = B_3,$$

donde B_3 incluye términos generados en los órdenes previos:

$$B_3 = 2M_0 u_1 u_2 + N_0 u_1 u_1 u_1 - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \chi L_1 \right) u_1.$$

$$M_{0UV_0} = \begin{pmatrix} \frac{1+A^2}{A} U_x V_{0x} + A(U_x V_{0y} + U_y V_{0x}) \\ - \left(\frac{1+A^2}{A} U_x V_{0x} + A(U_x V_{0y} + U_y V_{0x}) \right) \end{pmatrix},$$

$$M_{0\bar{U}V_+} = \begin{pmatrix} \frac{1+A^2}{A} \bar{U}_x V_{+x} + A(\bar{U}_x V_{+y} + \bar{U}_y V_{+x}) \\ - \left(\frac{1+A^2}{A} \bar{U}_x V_{+x} + A(\bar{U}_x V_{+y} + \bar{U}_y V_{+x}) \right) \end{pmatrix},$$

$$N_{0UU\bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (U_x^2 \bar{U}_x + U_x U_y \bar{U}_y + U_y^2 \bar{U}_x) \\ - \frac{1}{3} (U_x^2 \bar{U}_x + U_x U_y \bar{U}_y + U_y^2 \bar{U}_x) \end{pmatrix}.$$

(f) Expresión final de la ecuación buscada

La amplitud W satisface la CGLE:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = (1 + i\omega_0)W + (1 + ic_1)\nabla^2 W - (1 + ic_2)|W|^2 W,$$

donde los coeficientes c_1, c_2 están definidos en términos de los parámetros del sistema.

Apéndice B. Método de descenso pronunciado

El Método de Descenso pronunciado (o Método de Punto de Silla) es una técnica utilizada para evaluar integrales en el plano complejo, especialmente en el contexto de integrales que involucran funciones complejas. Este método es particularmente útil para obtener la expansión asintótica de integrales complejas a medida que un parámetro tiende a infinito [70].

La idea principal detrás del método es deformar la curva de integración de manera que se mantenga constante la parte imaginaria de la función $h(z)$. Esto permite aplicar el método de Laplace para calcular la expansión asintótica. Se considera una integral de la forma:

$$F(\lambda) = \int_C e^{\lambda h(z)} g(z) dz = \int_a^b e^{\lambda h(z(t))} g(z(t)) z'(t) dt,$$

cuando $t \rightarrow \infty$, donde C es una curva suave en el plano complejo y $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, es una parametrización del contorno. $h(z)$ y $g(z)$ son funciones enteras de valor complejo z .

Escribiendo $h(z) = R(x, y) + iI(x, y)$ para $z = x + iy$, y suponiendo que $I(x, y)$ es constante a lo largo de C , se puede reescribir $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = e^{i\lambda I} \int_a^b e^{\lambda R(x(t), y(t))} u(t) dt + ie^{i\lambda I} \int_a^b e^{\lambda R(x(t), y(t))} v(t) dt,$$

donde $u(t) = \operatorname{Re}(g(z(t)))z'(t)$ y $v(t) = \operatorname{Im}(g(z(t)))z'(t)$.

La expansión asintótica de cada una de las integrales se puede evaluar usando el método de Laplace ya que son reales. En general es inusual que una integral tenga la propiedad de que $I(x, y)$ sea constante desde el principio, por lo que en la mayoría de los casos no es posible utilizar el método de Laplace directamente. Cuando $I(x, y)$ no es constante a lo largo de C , se busca deformar C en un nuevo contorno C' donde la parte imaginaria de $h(z)$ sea constante. Según el teorema de Cauchy, es posible realizar estas deformaciones sin afectar el valor de la integral.

Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto en el plano complejo y supongamos que $h(z) = R(x, y) + iI(x, y)$ es analítico en z_0 . Cuando el valor de $R(x, y)$ disminuye desde su valor en el punto z_0 en una dirección que comienza en z_0 , esa dirección es una dirección de descenso. Una curva que emana de z_0 con las tangentes como direcciones de descenso para cada punto de la curva es un camino de descenso. Los senderos de descenso con el descenso más rápido se denominan senderos de descenso más pronunciados. Se desean encontrar estas trayectorias porque resulta que las curvas donde $I(x, y)$ es constante son las trayectorias de descenso más pronunciadas.

El gradiente de una función indica la dirección en la que la función aumenta más rápidamente. Como $I(x, y)$ es constante en C' , entonces el gradiente de $I(x, y)$,

$$\nabla I(x, y) = \frac{\partial I}{\partial x}(x, y)i + \frac{\partial I}{\partial y}(x, y)j,$$

es normal a C' . Ya que $h(z)$ es analítica las ecuaciones de Cauchy-Riemann satisfacen,

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y),$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial I}{\partial x}(x, y).$$

Lo cual implica que,

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x, y) \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial R}{\partial y}(x, y) \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Lo cual define que $\nabla R(x, y)$ es perpendicular a $\nabla I(x, y)$. Esto es, $\nabla R(x, y)$ es tangente a C' . Por lo tanto, una curva correctamente orientada $I(x, y) = I(x_0, y_0)$ representa una curva de descenso más pronunciado de $R(x, y)$.

Ahora, si se considera un punto crítico t_0 , donde:

$$\left. \frac{d}{dt} R(x(t), y(t)) \right|_{t=t_0} = 0,$$

o equivalentemente,

$$\nabla R(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) \Big|_{t=t_0} = 0,$$

ya que $(x'(t), y'(t)) \neq \vec{0}$, $\nabla R(x_0, y_0) = \vec{0}$ donde $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

se deduce que tanto $\nabla R(x_0, y_0)$ como $\nabla I(x_0, y_0)$ son cero en este punto, así, $h'(z_0) = 0$. De ello se deduce que la contribución principal proviene de los puntos críticos de $h(z)$. En particular, si $R(x, y)$ tiene un máximo en C' donde n es cualquier número impar $n = 1, 3, 5, \dots, 2p - 2$. Las direcciones de ascenso más pronunciadas se obtienen a partir de los números pares $n = 0, 2, \dots, 2p - 2$. Solo nos interesa el caso de puntos silla simples, es decir, $p = 2$.

En los puntos críticos donde la derivada de $R(x, y)$ se anula, se encuentran los puntos silla. Estos son cruciales porque contribuyen significativamente a la integral en el límite cuando el parámetro tiende a infinito.

Al deformar el contorno a uno donde la parte imaginaria es constante a lo largo de un camino de descenso y a través de un punto crítico, se obtiene:

$$F(\lambda) = e^{\lambda h(z_0)} \int_a^b e^{\lambda(h(z(t)) - h(z_0))} g(z(t)) z'(t) dt.$$

El comportamiento asintótico se puede expresar como:

$$F(\lambda) = \lambda^{-1/2} e^{\lambda h(z_0)} \left(e^{i\theta(z_0)} 2\pi |h''(z_0)| g(z_0) + O(\lambda^{-1}) \right),$$

a medida que $\lambda \rightarrow +\infty$.

Este método proporciona una herramienta poderosa para analizar integrales complejas al aprovechar las propiedades analíticas de las funciones involucradas y su comportamiento en puntos críticos.

Para analizar la inestabilidad absoluta de ondas viajeras en sistemas físicos, es necesario evaluar el crecimiento de perturbaciones localizadas. El objetivo es encontrar la tasa de crecimiento de perturbaciones en ondas planas y determinar si estas perturbaciones se amplifican o no con el tiempo, lo que indicaría una inestabilidad. El procedimiento sería el siguiente:

1. Evolución de la perturbación.

El análisis comienza considerando una perturbación localizada sobre una onda plana viajera. Esta perturbación puede ser descrita en términos de una integral sobre modos de número de onda k :

$$S(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{S}_0(k) e^{ikx + \lambda(k)t}.$$

Aquí, $\hat{S}_0(k)$ es la transformada de Fourier de la perturbación inicial y $\lambda(k)$ es la tasa de crecimiento de los modos de modulación k .

2. Aplicación del método de steepest descent.

El método de *steepest descent* se utiliza para aproximar el comportamiento asintótico de esta integral cuando $t \rightarrow \infty$. En el límite de tiempos largos, la integral estará dominada por las contribuciones cercanas a los puntos críticos (o puntos de silla) de la función $\lambda(k)$, es decir, los puntos donde:

$$\frac{\partial \lambda(k)}{\partial k} = 0.$$

Este es un paso clave en el análisis, ya que los puntos de silla determinan las condiciones bajo las cuales la perturbación se amplifica o se atenúa con el tiempo.

3. Condiciones de inestabilidad absoluta

Para que haya inestabilidad absoluta, se deben cumplir las siguientes condiciones en el punto crítico k_0 (el punto de silla más largo):

- **Crecimiento exponencial:** La parte real de $\lambda(k_0)$ debe ser positiva para garantizar que la perturbación se amplifique con el tiempo:

$$\text{Re}[\lambda(k_0)] > 0.$$

- **Punto crítico:** La derivada de $\lambda(k)$ con respecto a k debe anularse en k_0 :

$$\frac{\partial \lambda(k_0)}{\partial k} = 0.$$

- **Máximo local:** La segunda derivada de $\lambda(k)$ debe ser negativa en k_0 para asegurar que el crecimiento sea máximo y esté localizado:

$$\text{Re} \left[\frac{\partial^2 \lambda(k_0)}{\partial k^2} \right] < 0.$$

4. Cálculo de $\lambda(k)$

La expresión para $\lambda(k)$ incluye términos que describen el crecimiento de las perturbaciones y dependen de los parámetros del sistema, como α y β (que representan efectos lineales y no lineales en la dispersión). En el límite de longitudes de onda largas ($k \rightarrow 0$), la expansión de $\lambda(k)$ toma la forma:

$$\lambda(k) = -iv_g k - D_{\parallel} k^2 + O(k^3).$$

Aquí, v_g es la velocidad de grupo de las ondas y $D_{\parallel}$ es un coeficiente que describe la difusión de fase. La estabilidad de las ondas viajeras depende de que $D_{\parallel}(Q) > 0$.

5. Resultado

Si todas las condiciones se cumplen, se concluye que la perturbación es inestable de manera absoluta, lo que significa que crece exponencialmente con el tiempo y permanece localizada. Si no se cumplen, la perturbación puede dispersarse o decaer, lo que indicaría estabilidad.

En resumen, el método de *steepest descents* proporciona una herramienta para analizar las perturbaciones en ondas planas y determinar si estas se amplifican en una posición fija (inestabilidad absoluta) o se propagan hacia afuera (inestabilidad convectiva).

Apéndice C. COMSOL Multiphysics y Elemento finito

COMSOL Multiphysics

De acuerdo a las referencias [27], [80], COMSOL Multiphysics es un software que tiene como fin modelar y simular problemas físicos. En particular, permite resolver ecuaciones diferenciales parciales por medio del método de elemento finito, especificando las condiciones iniciales y de frontera de manera sencilla. En la Figura 2.8 se puede observar la ventana principal de este programa.

La forma en la que se resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en 2D, en el COMSOL Multiphysics, con condiciones de frontera de Neumann y condiciones iniciales específicas es la siguiente:

- Al ingresar al software se elige la opción de **Asistente de modelo** para dos dimensiones para obtener las espirales.
- Se selecciona **Matemática**, a continuación **Interfaces de EDP's** y al final **EDP en forma de coeficientes (c)** con dos variables dependientes, u_1 y u_2 .
- Se da clic en **Estudio**. Ya que las variables cambian con el tiempo el estudio debe ser **Temporal**.
- Se define la **Geometría 1** como un **círculo** de radio R para las soluciones espirales.
- El mallado se elige como **Malla 1** de tamaño **“Más fina”**.
- Ya que se eligió la EDP en forma de coeficientes, COMSOL la describe de la siguiente forma,

$$\mathbf{e}_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d}_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{u} + \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (\text{C.1})$$

donde $\mathbf{u} = [u, v]^T$, $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$, $\mathbf{e}_a$ es el coeficiente de masa, $\mathbf{d}_a$ el coeficiente de masa o amortiguación, $\mathbf{c}$ coeficiente de difusión, $\boldsymbol{\alpha}$ coeficiente de convección del flujo conservativo, $\boldsymbol{\gamma}$ fuente de flujo conservativo, $\boldsymbol{\beta}$ coeficiente de convección, $\mathbf{a}$ coeficiente de absorción y $\mathbf{f}$ el término fuente. Véase la Figura 2.9.

El sistema CGLE expuesto por Aranson, ecuación (1.71), quedaría definido entonces como,

$$\mathbf{e}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} u_1 - (u_1^2 + u_2^2)(u_1 - cu_2) \\ u_2 - (u_1^2 + u_2^2)(cu_1 + u_2) \end{pmatrix}$$

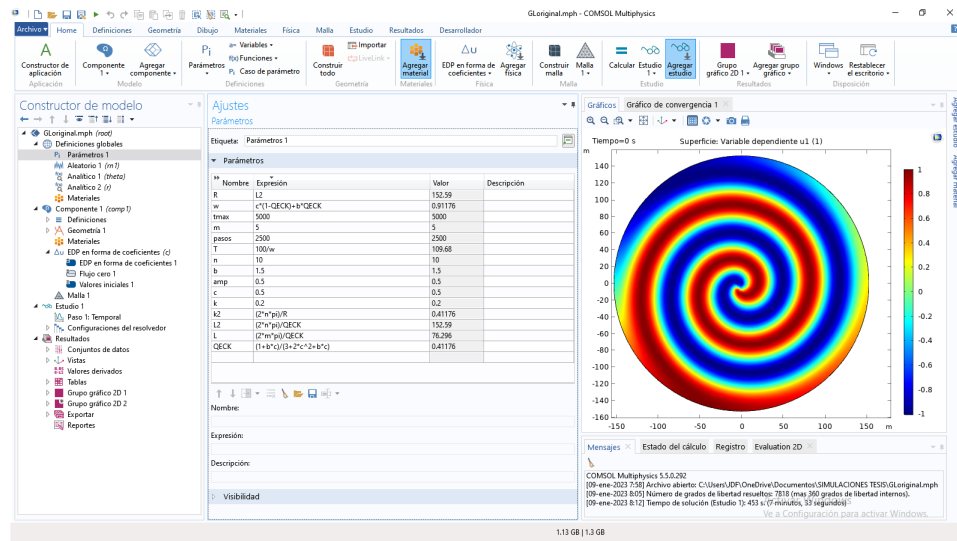


Figura C.1: COMSOL Multiphysics, a la derecha se observa la simulación correspondiente, al centro se describen los parámetros del sistema a resolver y del lado superior izquierdo, las funciones que se describen en Definiciones globales.

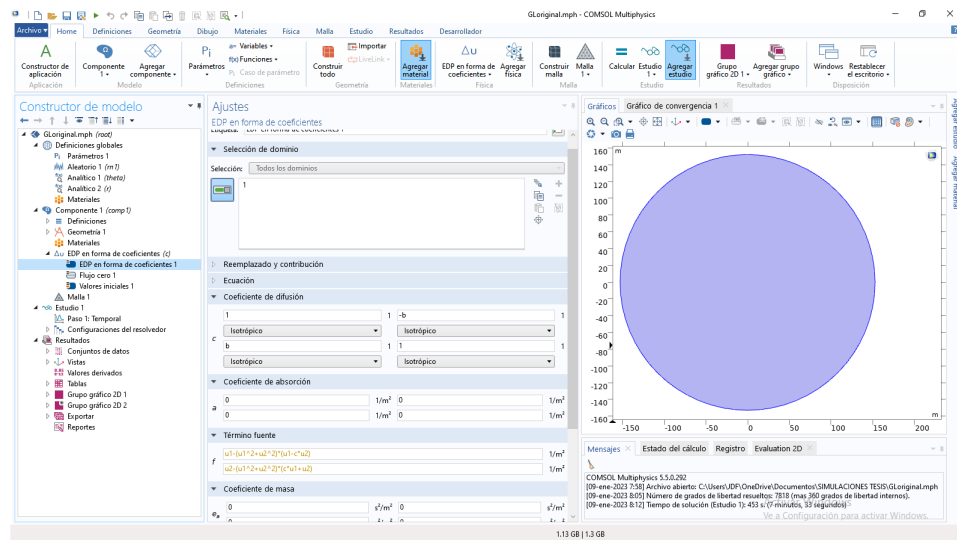


Figura C.2: COMSOL Multiphysics, al centro se puede observar dónde escribir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se va a resolver.

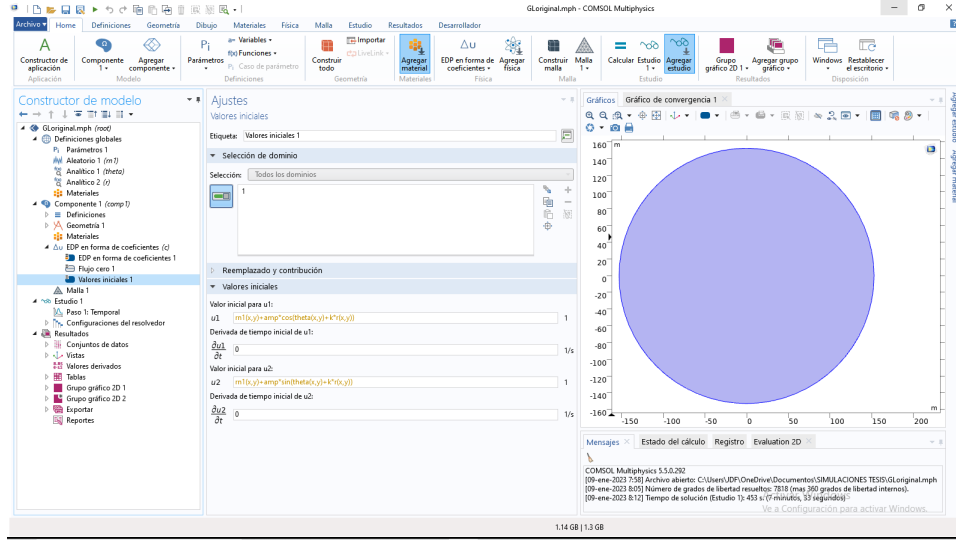


Figura C.3: COMSOL Multiphysics, al centro se puede apreciar el lugar dónde se encuentran las condiciones iniciales.

- Los parámetros α y β pueden agregarse en el apartado de **Definiciones globales y parámetros**, véase la Figura 2.8.
- En **Definiciones globales** se agregan varias funciones: **Aleatorio 1** ($rn1$) que describe una distribución uniforme con un intervalo entre 0 y 0.1; **Analítico 1** (θ) que define el ángulo θ y finalmente; **Analítico 2** (r) que define el ángulo r . Véase el apartado superior izquierdo de la Figura 2.8.
- Las condiciones iniciales se agregan en la sección de **EDP en forma de coeficientes** y en **Valores iniciales**. Para la CGLE (1.71), son las siguientes,

$$u_1 = \pm \text{amp}(\cos(\theta(x, y)) \pm kr(x, y)),$$

$$u_2 = \pm \text{amp}(\sin(\theta(x, y)) \pm kr(x, y)),$$

donde amp es la amplitud de las ondas que se fija en 0.5, k se puede fijar también o calcular como $\frac{2n\pi}{R}$, con R el radio del círculo, ambas descritas en **Parámetros**. Véase la Figura 2.9.

- Ahí mismo en **EDP en forma de coeficientes** vienen definido **Flujo cero 1**.
- Para correr el programa se da clic en **Paso 1: Temporal** y en **Calcular**.
- En **Resultados** se abre un **Grupo gráfico 2D 1** y de ahí **Superficie** donde se pueden visualizar las soluciones del sistema, las ondas en espiral en el caso del sistema CGLE para parámetros específicos. Véase el apartado inferior izquierdo de la Figura 2.8, ahí se abre el grupo gráfico correspondiente a la onda espiral que se observa del lado derecho.

Para el estudio espacio-temporal de las ondas en 2D, se abre en **Conjunto de datos** una **Línea de corte en 2D 1** con datos de entrada de **Dos puntos**: $(-R, 0)$ y $(R, 0)$. Después se abre una **Extrusión paramétrica 1D 1** que tenga como conjunto de datos la línea de corte en 2D 1. Finalmente, después de correr el programa, se abre un **Grupo gráfico 2D 2**

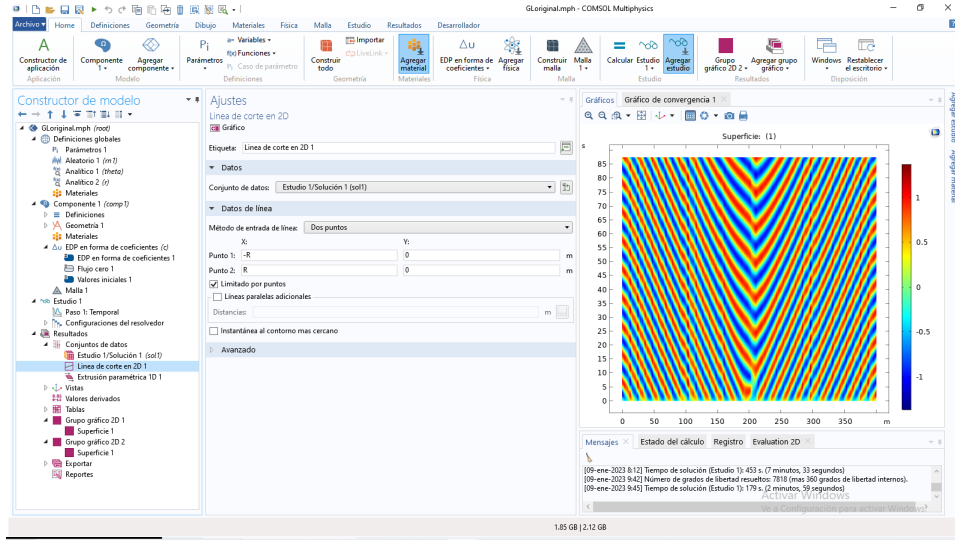


Figura C.4: COMSOL Multiphysics, en esta imagen se puede observar del lado derecho la gráfica espacio-temporal de una onda en espiral en 2D y del izquierdo dónde se define la línea de corte y la extrusión paramétrica.

que inicie como conjunto de datos la Extrusión paramétrica 1D 1. La gráfica espacio-temporal para ciertos parámetros de la CGLE (1.71) se puede apreciar del lado derecho de la Figura 2.11.

Si ahora se quiere resolver el mismo sistema CGLE en 1D, lo que cambia es lo siguiente,

- En **Asistente de modelo** se selecciona 1D.
- Se define la **Geometría 1** como un **intervalo** de longitud R . Véase la Figura 2.12.
- Las EDPs se eligen de la misma forma, al igual que los parámetros.
- Se agregan los valores iniciales, el flujo cero y la condición periódica en **EDP en forma de coeficientes (c)**. Para la CGLE (1.71), la condición inicial es,

$$u_1 = \pm \text{amp}(\cos(kr(x, y))),$$

$$u_2 = \pm \text{amp}(\sin(kr(x, y))).$$

- En **Resultados** se abre un **Grupo gráfico 2D** y de ahí **Superficie** donde se pueden visualizar el diagrama espacio-temporal de la solución en 1D para parámetros específicos de la CGLE. Véase la Figura 2.13.

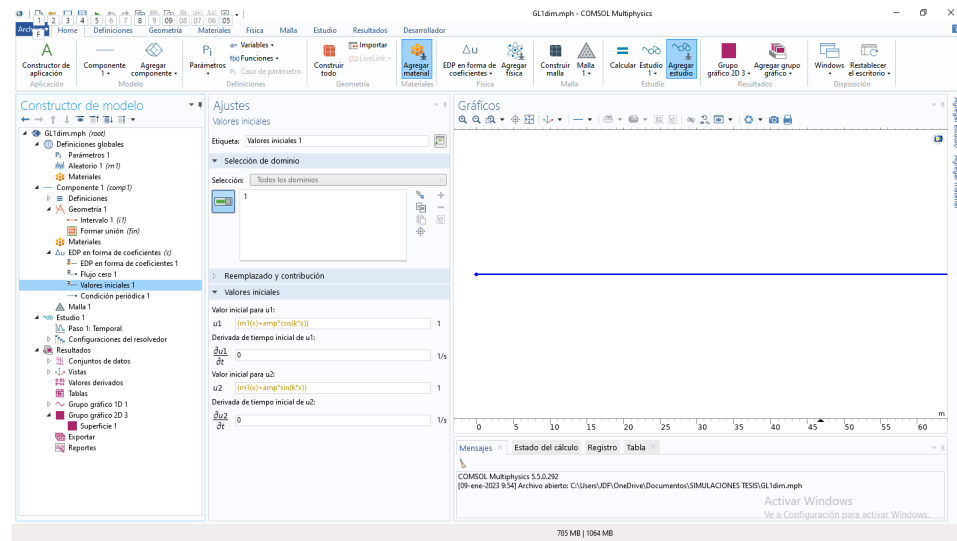


Figura C.5: COMSOL Multiphysics, en el centro se muestran las condiciones iniciales y a la derecha se puede ver el intervalo de tamaño R .

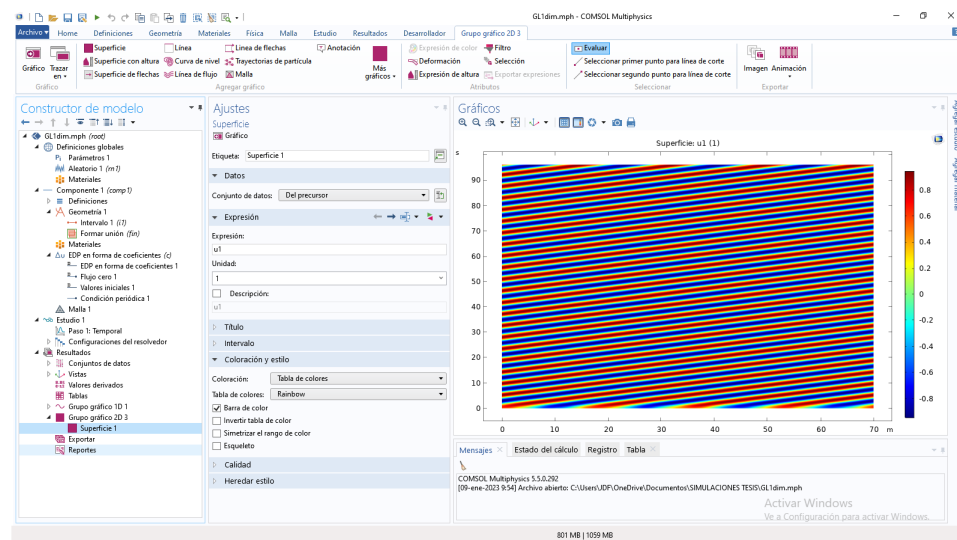


Figura C.6: COMSOL Multiphysics, a la derecha se puede observar el diagrama espacio-temporal de la solución en 1D para parámetros específicos de la CGLE.

Fundamentos del Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (MEF) es una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) en dominios arbitrarios. Su fundamento consiste en reformular el problema original en términos de una ecuación variacional, y luego buscar una solución aproximada dentro de un subespacio finito-dimensional del espacio de funciones adecuado [105].

Dado un problema elíptico del tipo:

$$-\nabla \cdot (D \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

su forma variacional consiste en hallar $u \in V$ tal que:

$$\int_{\Omega} D \nabla u \cdot \nabla \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} f \psi \, d\Omega \quad \forall \psi \in V,$$

donde $V \subset H_0^1(\Omega)$ es un espacio de funciones de prueba.

Para aproximar la solución, se construye una partición del dominio (triangulación τ_h) y se define el espacio aproximante $V_h \subset V$ generado por funciones base $\{\phi_i\}$. La solución aproximada $u_h \in V_h$ se expresa como:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x),$$

y el problema variacional queda reducido a resolver el sistema lineal:

$$K\alpha = b,$$

donde la matriz de rigidez K y el vector de carga b se definen como:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} D \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, d\Omega, \quad b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, d\Omega.$$

Este procedimiento puede extenderse a problemas con múltiples variables y términos de reacción y difusión, como los sistemas de tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + g(u, v),$$

mediante una discretización temporal (por ejemplo, implícita hacia atrás o Crank-Nicolson) y aplicación del MEF en cada paso temporal.

La Figura C.7 ilustra gráficamente los componentes esenciales del método, incluyendo la triangulación del dominio y la forma de las funciones base.

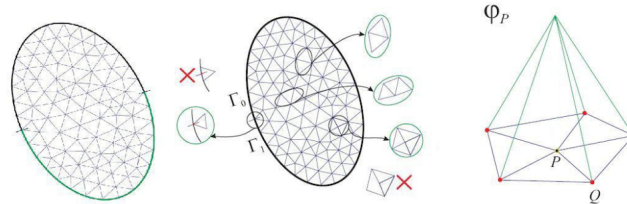


Figura C.7: De izquierda a derecha se observan: una triangulación del dominio, los requisitos geométricos para la malla, y una función base de tipo piramidal ϕ_P , que vale uno en el nodo P y cero en los nodos vecinos Q . Esta figura ilustra los componentes fundamentales del método de elementos finitos. Imagen adaptada de [31].

Implementación numérica con elementos finitos para el modelo CGLE

Para resolver numéricamente el modelo CGLE en un dominio bidimensional, se emplea el método de elementos finitos mediante una formulación variacional, junto con un esquema semiimplícito en el tiempo. Este enfoque fue implementado utilizando el software COMSOL Multiphysics, permitiendo el uso de mallas no estructuradas en dominios circulares.

El sistema se discretiza en el tiempo de la forma:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = D_u \nabla^2 u^{n+1} + f^n(u, v),$$

bajo condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneas. Esta expresión se reescribe como:

$$u - \nu \nabla^2 u = \bar{f}, \quad \nu = D_u \Delta t.$$

La formulación variacional correspondiente es:

$$\int_{\Omega} u \psi \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f} \psi \, d\Omega,$$

donde ψ es una función de prueba. La solución u_h se aproxima sobre una malla triangular, usando funciones base piramidales $\phi_P(x)$. Esto conduce a un sistema algebraico:

$$(\mathbb{M} + \nu \mathbb{K})U = \vec{b},$$

con matrices de masa $\mathbb{M}$, rigidez $\mathbb{K}$, y vector de carga $\vec{b}$ definidos a partir de las funciones base.

Este esquema fue particularmente útil para estudiar la evolución espacio-temporal de ondas espirales en dominios irregulares, evaluando la estabilidad bajo diversas condiciones iniciales y parámetros del modelo.

Apéndice D. Diferencias Finitas en Matlab

Diferencias finitas

El métodos de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas parciales reemplazando las derivadas en la ecuación mediante cocientes de diferencias. El dominio espacial y temporal se subdivide en intervalos discretos donde se aproxima la solución. Estas secciones siguen de cerca la referencia [31].

El concepto principal detrás de cualquier esquema de diferencias finitas está relacionado con la definición de la derivada de una función suave u en un punto $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

y al hecho de que cuando h tiende a 0, el cociente de la derecha proporciona una “buena” aproximación de la derivada. La aproximación se dice buena cuando el error cometido (es decir, al sustituir la derivada por el cociente diferencial) tiende a cero cuando h tiende a cero. Si la función u es lo suficientemente suave en la vecindad de x , es posible cuantificar el error usando una expansión de Taylor.

Ecuaciones en diferencias finitas

La derivada temporal de una función $u(t)$ podría utilizar esquemas de primer y segundo orden, dependiendo del orden de convergencia que se requiera. Por ejemplo, la que se usa en este trabajo es la siguiente,

$$\frac{du}{dt}(\tau) = \frac{u(\tau + \Delta t) - u(\tau)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (\text{D.1})$$

donde $\mathcal{O}(\cdot)$ es el error que ocurre en cada aproximación. Con respecto a la aproximación del operador de la segunda derivada hay varios esquemas que se utilizan, el más usado es el diferencias centrales.

$$\frac{d^2u}{dx^2}(\chi) = \frac{u(\chi+h) - 2u(\chi) + u(\chi-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{D.2})$$

Discretización espacial y temporal

Sea Ω el dominio, cada uno de los lados de Ω se divide en $M - 1$ subintervalos de lado $h = p/(M - 1)$ esto forma una malla de cuadros con M^2 nodos y p el tamaño del dominio. Los índices i e j numeran los nodos en dirección horizontal y vertical respectivamente. De forma análoga ocurre la discretización temporal, dividiendo el tiempo total T en N subintervalos de tamaño $\Delta t = T/N$, numerados con el índice n . La solución $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se discretiza de la siguiente forma,

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \tilde{\mathbf{u}}(ih, jh, n\Delta t) = \mathbf{u}_{ij}^n.$$

Donde $\mathbf{u}(x, y, t)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial y $\mathbf{u}_{ij}^n$ la aproximada, o bien la solución de ecuaciones en diferencias finitas. Así, la discretización queda como,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(n\Delta t) \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \quad \text{para } n = 0, \dots, N-1, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}(ih, jh) \approx \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}}{h^2} \quad \text{para } i = 1, \dots, M-1, \quad (\text{D.4})$$

Esta última expresión se puede simplificar usando el operador de diferencias centrales que se define como,

$$\delta_x \mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i+1/2,j} - \mathbf{u}_{i-1/2,j},$$

del cual se puede definir que,

$$\delta_x^2 \mathbf{u}_{i,j} = \delta_x(\mathbf{u}_{i+1/2,j} - \mathbf{u}_{i-1/2,j}) = \mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}.$$

Al definir también el operador δ_y para el subíndice j , el laplaciano se puede escribir de esta forma,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dx^2} + \frac{d^2 \mathbf{u}}{dy^2} \right) \\ &\approx \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i,j-1}}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} (\mathbf{u}_{i+1,j} + \mathbf{u}_{i,j+1} - 4\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{u}_{i,j-1}) \\ &= \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) \mathbf{u}_{i,j} \quad \text{para } i, j = 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Condiciones de frontera

La ecuación que describe la discretización del operador Laplaciano es válida para los puntos interiores. Dado un punto interior, el Laplaciano se calcula usando la información de ese nodo y la de los 4 nodos vecinos. Para los puntos frontera, que solo tienen 2 o 3 vecinos es necesario usar las condiciones de frontera. Véase la figura D.1.

Condiciones de flujo nulo

Si lo que se requiere son condiciones de flujo nulo se explicará el procedimiento general, Si la condición es, $\nabla u(t) \cdot \hat{n} = 0$, $x \in \Gamma$ en la frontera definida,

$$\nabla u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{para } x = 0.$$

que quiere decir que $\frac{du}{dx}(x=0, y) = 0$. La derivada de la izquierda quedaría como,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(0, y) = \frac{\mathbf{u}(h, y) - \mathbf{u}(-h, y)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

en la frontera definida por $i = 1, \forall j$ la expresión queda como,

$$\mathbf{u}_{0,j} = \mathbf{u}_{2,j} \quad \text{para } j = 1 \dots, M.$$

El esquema tiene una columna de nodos extra que (para $i = 0$), para las tres fronteras restantes se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{u}_{M+1,j} = \mathbf{u}_{M-1,j} \quad \text{para } j = 1 \dots, M,$$

$$\mathbf{u}_{i,0} = \mathbf{u}_{i,2} \quad \text{para } i = 1 \dots, M,$$

$$\mathbf{u}_{i,M+1} = \mathbf{u}_{i,M-1} \quad \text{para } i = 1 \dots, M.$$

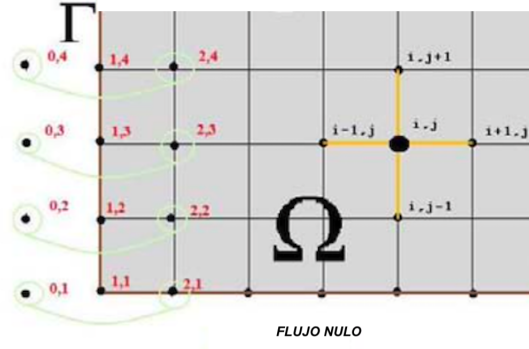


Figura D.1: Aquí se muestra una discretización de un dominio Ω . Si se usa el esquema de diferencias centrales, el Laplaciano en un punto se estima a partir de cuatro vecinos. En la figura se representan los nodos “fantasma” que permiten completar las condiciones de flujo nulo. Adaptada de [31].

Esquema de diferencias finitas para la ecuación de reacción difusión

La discretización de la ecuación depende del orden de esquema temporal y del tiempo en el que se evalúa el Laplaciano, puede ser un esquema hacia atrás o hacia adelante.

Método explícito

En este esquema explícito, la derivada temporal se evalúa con la aproximación a primer orden, mientras que los términos de la derecha se evalúan al tiempo n .

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_{i,j}^n) + \frac{\mathbb{D}}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)\mathbf{u}_{i,j}^n,$$

despejando $\mathbf{u}_{i,j}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{u}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{u}_{i,j}^n) + \mu(\delta_x^2 + \delta_y^2)\mathbf{u}_{i,j}^n, \\ n &= 1, 2, \dots, N, \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

con μ matriz definida por $\left(\frac{\Delta t}{h^2}\right) \mathbb{D}$. La solución al tiempo $n = 1$ se encuentra sustituyendo los valores de $\mathbf{u}$ y de $\mathbf{R}$ al tiempo cero y se obtienen a partir de la condición inicial $\mathbf{u}_{i,j}^0$. Para el tiempo $n + 1$ entonces es necesario sustituir lo obtenido en el tiempo inmediato anterior n de forma iterativa. Es un método simple pero con estabilidad limitada, para una malla muy fina se necesitan pasos de tiempo más pequeños y más iteraciones.

Esquema semi-implícito de primer orden

El método semi-implícito tienen la ventaja de que no tiene restricciones tan severas en la elección del paso del tiempo para mantener la estabilidad, pero el costo es distinto, ya que en vez de hacer una simple sustitución, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales en cada iteración.

En este esquema se usa la misma derivada temporal a primer orden, la discretización del Laplaciano se evalúa al tiempo $n + 1$; mientras que los términos de reacción se evalúan en el

tiempo n .

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j}^n}{\Delta t} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_{i,j}^n) + \frac{\mathbb{D}}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)\mathbf{u}_{i,j}^{n+1},$$

si se substituyen los operadores de diferencias centrales se obtiene,

$$-\mu\mathbf{u}_{i,j-1}^{n+1} - \mu\mathbf{u}_{i-1,j}^{n+1} + (1 + 4\mu)\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - \mu\mathbf{u}_{i,j+1}^{n+1} - \mu\mathbf{u}_{i+1,j}^{n+1} = \Delta t\mathbf{R}(\mathbf{u}_{i,j}^n) + \mathbf{u}_{i,j}^n$$

$$i, j \in \{1, \dots, M\}.$$

Si $k(i, j) = (M - 1)i + j$, entonces estas ecuaciones se pueden expresar en un sólo vector $\hat{u}$.

$$-\mu\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^{n+1} - \mu\hat{\mathbf{u}}_{k-M+1}^{n+1} + (1 + 4\mu)\hat{\mathbf{u}}_k^{n+1} - \mu\hat{\mathbf{u}}_{k+M-1}^{n+1} - \mu\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{n+1} = \Delta t\mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}}_k^n) + \hat{\mathbf{u}}_k^n.$$

para cada componente del vector $\hat{u}$, se tiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbb{A}\hat{u}_l = \vec{b}$ donde $\mathbb{A}$ es una matriz *sparse* y $\vec{b}$ es un vector con la información del sistema al tiempo anterior. Se resuelve este sistema y se aplica la transformación inversa para regresar a los índices i, j y se encuentra la solución al tiempo $n + 1$.

Esquema para resolver el modelo CGLE

Para resolver numéricamente la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE) en un rectángulo primero se descompone la amplitud compleja A en sus componentes reales e imaginarias, U y V , lo que permite reescribir la ecuación original como un sistema de ecuaciones acopladas.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2 U - \beta \nabla^2 V + U - (U^2 + V^2)(U - \alpha V),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \beta \nabla^2 U + \nabla^2 V + V - (U^2 + V^2)(\alpha U + V).$$

Se define al sistema en un dominio cuadrado $(x, y) \in [0, L]^2$, $L \in \mathbb{R}^+$ con condiciones iniciales $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $v(x, y, 0) = v_0(x, y)$ y las condiciones de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(L, y, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u(x, L, t)}{\partial y} = 0,$$

El método numérico empleado es semi-implícito, donde en cada paso temporal se resuelve un sistema lineal acoplado para las variables U y V . Este método descompone el sistema original en componentes de difusión y reacción, calculando primero la matriz de difusión M . La discretización se reescribe en forma matricial como $S^{-1}Y$, donde S contiene los coeficientes del sistema lineal resultante y Y representa los términos no lineales y conocidos del paso anterior.

El sistema resultante se puede expresar en forma matricial como:

$$S \cdot X = Y,$$

donde:

$$S = \begin{pmatrix} 1 - \Delta t M & b \Delta t M \\ -b \Delta t M & 1 - \Delta t M \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} U^{m+1} \\ V^{m+1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} f(U^m, V^m) + U^m \\ g(U^m, V^m) + V^m \end{pmatrix}.$$

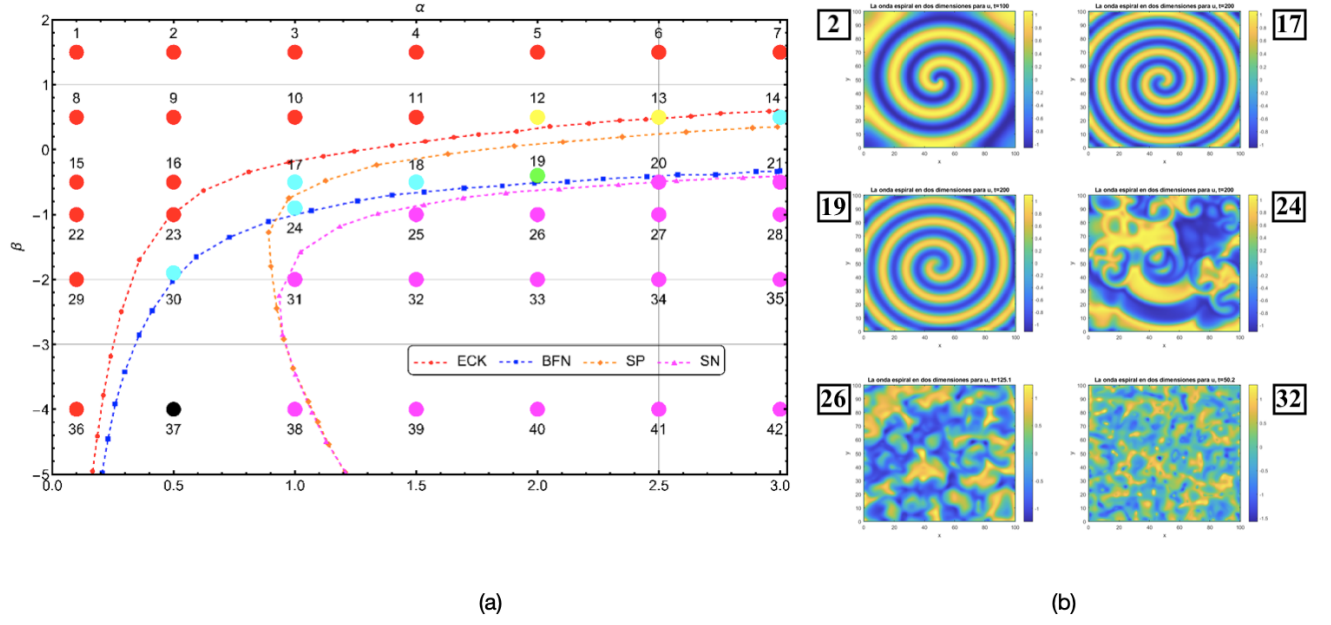


Figura D.2: Simulaciones numéricas de espirales de la ecuación CGLE en un dominio rectangular.

Resolviendo el sistema $S \cdot X = Y$, se obtiene:

$$X = S^{-1}Y,$$

lo que permite calcular iterativamente U^{m+1} y V^{m+1} .

Las simulaciones resultantes, mostradas en la Figura D.2, ilustran la dinámica de las ondas espirales en diferentes regiones del espacio de parámetros (α, β) descrito en la sección 2.1, destacando configuraciones específicas de estabilidad y comportamiento. Esto permite explorar cómo varían las soluciones espirales según los parámetros del modelo y cómo emergen estructuras complejas, como espirales simples, bifurcaciones, o estados turbulentos [7]. En este trabajo se ha decidido no realizar simulaciones numéricas en un dominio rectangular, ya que estas suelen estar influenciadas por los efectos de bordes irregulares que distorsionan las propiedades geométricas de las ondas. Además, los dominios rectangulares tiende a favorecer inestabilidades laterales y secundarias que complican el análisis de espirales. Por esta razón, se priorizó el uso de dominios circulares, que permitan un análisis más preciso en las propiedades intrínsecas de las ondas, eliminando así cualquier sesgo asociado a la geometría del dominio.

Método para encontrar la trayectoria de la punta de la espiral

Sean U y V , descritas a continuación, las líneas isopotenciales para u y v , con $(x_{\text{tip}}, y_{\text{tip}}) = U \cap V$, se utilizan las líneas para $u = 0$ y $v = 0$. Se encuentra numéricamente la intersección $(x_{\text{tip}}, y_{\text{tip}})$ y la localización depende de los valores escogidos. Esto con ayuda de la Interpolación bilineal, dado que se quieren encontrar la ubicación de la punta de la onda en una malla basada en celdas de cuadrículas cercanas.

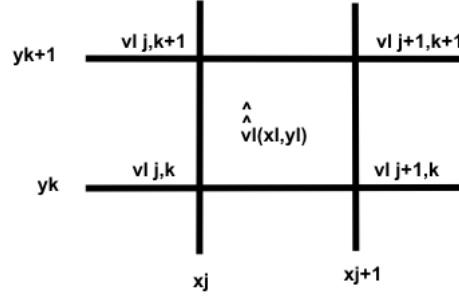


Figura D.3: Cuadrícula $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$.

$$U = \{(x, y) | u(x, y, t) = u_{\text{iso}} \quad x, y \in R, t \geq 0, u_{\text{iso}} \in R\}, \quad (\text{D.6})$$

$$V = \{(x, y) | v(x, y, t) = v_{\text{iso}} \quad x, y \in R, t \geq 0, v_{\text{iso}} \in R\}, \quad (\text{D.7})$$

Las aproximaciones numéricas para u y v se definen de la siguiente manera,

$$\hat{u} \approx u(x, y, t_1), \quad \hat{v} \approx v(x, y, t_1),$$

para $(x, y) \in [0, L]^2$ y t_1 fija. Esto es,

$$\hat{u}(x_j, y_k) = \hat{u}(j\Delta x, k\Delta y), \quad \hat{v}(x_j, y_k) = \hat{v}(j\Delta x, k\Delta y).$$

Entonces, la aproximación de la u -isolínea es tal que $(\hat{x}_l, \hat{y}_l) \in U$ y $l \in N$, para cada punto los valores escogidos (j, k) son $(\hat{x}_l, \hat{y}_l) \in [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, véase la figura 3.2.

Se utiliza la interpolación bilineal del valor $\hat{v}_l(\hat{x}_l, \hat{y}_l)$, esto es,

$$\hat{v}_l(x_l, y_l) = r_1 + e_1 \hat{x}_l + f_1 \hat{y}_l + g_1 \hat{x}_l \hat{y}_l = \hat{v}_l(\hat{x}_l, \hat{y}_l),$$

con $r_1, e_1, f_1, g_1 \in \mathbb{R}$, tal que $\hat{v}_l > 0$ y $\hat{v}_{l+1} < 0$. Dada la ecuación lineal $v = mx + c$, $m, c \in \mathbb{R}$ se puede encontrar x_{tip} ,

$$c = v_l - \left(\frac{v_l - v_{l+1}}{\hat{x}_l - \hat{x}_{l+1}} \right) \hat{x}_l,$$

$v_l > v_{l+1}$, $v_l > 0$, $v_{l+1} < 0$. Así que la pendiente es.

$$m = \frac{v_l - v_{l+1}}{\hat{x}_l - \hat{x}_{l+1}}.$$

Ya que la isolínea para el componente v es cero,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{v_l - v_{l+1}}{\hat{x}_l - \hat{x}_{l+1}} \right) \hat{x}_{\text{tip}} + v_l - \left(\frac{v_l - v_{l+1}}{\hat{x}_l - \hat{x}_{l+1}} \right) \hat{x}_l, \\ \Rightarrow x_{\text{tip}} &= -v_l \left(\frac{\hat{x}_l - \hat{x}_{l+1}}{v_l - v_{l+1}} \right) + \hat{x}_l, \end{aligned}$$

donde $x_{\text{tip}} \in (\hat{x}_l, \hat{x}_{l+1})$.

De la misma forma se encuentra

$$y_{\text{tip}} = -v_l \left(\frac{\hat{y}_l - \hat{y}_{l+1}}{v_l - v_{l+1}} \right) + \hat{y}_l,$$

donde $y_{\text{tip}} \in (\hat{y}_l, \hat{y}_{l+1})$.

Condiciones para aparición de ondas en espiral en una EDP de RD

El modelo FitzHugh-Nagumo (FHN) con términos de difusión está dado por las siguientes ecuaciones de reacción-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \nabla^2 u, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v, \quad (\text{D.9})$$

donde u y v representan las variables de estado, D_u y D_v son los coeficientes de difusión, y las funciones $f(u, v)$ y $g(u, v)$ definen la dinámica reactiva.

Estabilidad del estado estacionario sin difusión.

Para que el estado estacionario sea estable en ausencia de difusión, las siguientes condiciones deben cumplirse:

- $\text{traza}(\mathbf{J}) < 0$,
- $\det(\mathbf{J}) > 0$,

donde $\mathbf{J}$ es la matriz jacobiana evaluada en el estado estacionario (u_0, v_0) , y está dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = c_1 u_0 (1 - u_0) - c_1 u_0 (-a + u_0) + c_1 (1 - u_0) (-a + u_0), \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -c_2, \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \epsilon, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = -\epsilon \gamma. \quad (\text{D.12})$$

Inestabilidad con difusión

Para que surjan patrones inestables con difusión, el sistema debe cumplir con las siguientes condiciones adicionales:

- $D_v \frac{\partial f}{\partial u} + D_u \frac{\partial g}{\partial v} > 0$,
- $(D_v \frac{\partial f}{\partial u} + D_u \frac{\partial g}{\partial v})^2 - 4D_u D_v \det(\mathbf{J}) > 0$.

Estas condiciones garantizan que existan modos de onda k en un rango definido $k_1^2 < k^2 < k_2^2$, donde las soluciones son linealmente inestables. Los límites k_1^2 y k_2^2 están dados por:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2 \det(\mathbf{D})} \left[D_v \frac{\partial f}{\partial u} + D_u \frac{\partial g}{\partial v} \pm \sqrt{\left(D_v \frac{\partial f}{\partial u} + D_u \frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 - 4 \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{J})} \right],$$

donde $\det(\mathbf{D}) = D_u D_v$. El intervalo $[k_1^2, k_2^2]$ corresponde a los modos inestables que generan patrones espaciales.

Estas condiciones matemáticas permiten predecir la aparición de ondas en espiral en el modelo FHN mediante el ajuste de los parámetros del sistema y la evaluación de las derivadas parciales en el estado estacionario. Este análisis establece las bases para la generación de patrones espaciales en sistemas de reacción-difusión.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00095

Matrícula: 2172801466

Bifurcaciones de ondas en
espiral.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas
del día 2 del mes de junio del año 2025 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE LUIS ARAGON VERA
DR. LUIS FRANCO PEREZ
DR. ALDO LEDESMA DURAN
DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA
DR. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron a la presentación de la
Disertación Pública cuya denominación aparece al margen,
para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: ALEXANDRA GUZMAN VELAZQUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento
de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma
Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la
interesada el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.

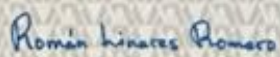


ALEXANDRA GUZMAN VELAZQUEZ
ALUMNA

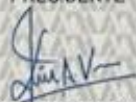
REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

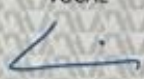
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI


DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE


DR. JOSE LUIS ARAGON VERA

VOCAL


DR. LUIS FRANCO PEREZ

VOCAL


DR. ALDO LEDESMA DURAN

VOCAL


DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA

SECRETARIO


DR. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA