

Árboles semánticos para algunas lógicas alético-epistémico-doxásticas

Tesis que para obtener el título de Maestro en
Filosofía de las Ciencias y del Lenguaje
por la

Universidad Autónoma Metropolitana



Casa abierta al tiempo

Unidad Iztapalapa

presenta

Lic. Juan Carlos Sánchez Hernández

Asesor: Dr. Max Fernández de Castro Tapia

30 de septiembre de 2022

Índice general

<i>Nota sobre publicaciones previas</i>	3
<i>Agradecimientos</i>	4
<i>Introducción</i>	5
<i>1.. Lógicas aléticas, doxásticas y epistémicas normales</i>	9
<i>2.. Semánticas para $T_{\square}/T_K/D_B^*$</i>	17
<i>3.. Árboles semánticos para $T_{\square}/T_K/D_B^*$</i>	20
<i>4.. Algunas afirmaciones spinozianas</i>	25
<i>5.. Temporalización de $T_{\square}/T_K/D_B^*$</i>	31
<i>6.. Sobre el principio de cerradura estricta para el conocimiento</i>	44
<i>7.. Lógicas epistémico-doxásticas condicionales</i>	51
<i>8.. Lógicas alético-epistémico-doxásticas anormales</i>	59
<i>9.. Lógica epistémica intuicionista</i>	69
<i>10.. $T_{\square}/T_K/D_B^*$ de primer orden con identidad invariable</i>	81
<i>11.. Prueba de los teoremas</i>	92
<i>Apéndice A: Notaciones y definiciones para las lógicas modales</i>	109
<i>Apéndice B: Principios revisados</i>	111
<i>Apéndice C: (SH) y (SHC) como análogos a las fórmulas Barcan</i>	115

NOTA SOBRE PUBLICACIONES PREVIAS

La idea de desarrollar árboles semánticos para lógicas alético-epistémico-doxásticas surgió como una analogía con el desarrollo de árboles semánticos para lógicas alético-temporales. En este sentido, la raíz del presente trabajo se encuentra en mi artículo *Tableaux For Some Modal-Tense Logics Graham Priest Style* [47] publicado por la revista *Studia Logica*. Agradezco a la revista *Studia Logica* por permitirme reproducir algunos fragmentos de dicho artículo, especialmente para mi capítulo 5, en el cuál desarrollo cómo surgió el sistema alético-temporal *MT* y cómo se modificó posteriormente para dar el sistema $T_{\square}/T_K/D_B^*$.

Como un adelanto, algunos pasajes de los capítulos 2, 3, 4, 6, 7 y del apéndice C fueron publicados en la revista *Signos filosóficos* bajo el título *Árboles semánticos para una lógica alético-epistémico-doxástica y sus versiones condicionales* [46]. Agradezco a la revista *Signos filosóficos* por permitirme reproducir mi trabajo, el cual se encuentra suplementado para esta versión. Los capítulos 1, 5, 8, 9 y 10 son nuevos para esta versión.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por su apoyo en todo el proceso; por ayudarme a hacer este proyecto no solamente posible, sino real.

A Velia Caamal Maldonado, pilar en mi decisión de estudiar filosofía.

A mi asesor, Dr. Max Fernández de Castro Tapia, por su guía, aliento y disposición para hablar de lógica incluso en vísperas de la vísperas de Navidad.

A la Dra. Yolanda Torres Falcón, por sus enseñanzas y enriquecedores seminarios.

Al Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea, lector invaluable para este proyecto.

A Balam Hidalgo López, por leer atentamente mi artículo de *Studia logica* y por sus oportunas observaciones.

A mis amigos de la EPOANCI, compañías fieles en todas las circunstancias.

A Mariana Melissa González Caamal, amiga de inicios a fines.

A Luis David Perez Vázquez, amigo infalible a través de los años.

A Elizabeth Soto López, quien me impulsa con su cariño e inspira con sus conversaciones.

A Pedro Alberto del Prado Aguilar, Javier Vázquez Millán y Andrés Leyva Gómez, compañeros gratos en este viaje.

A la Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Iztapalapa, por acogerme en su posgrado.

INTRODUCCIÓN

Desde la invención de las semánticas de mundos posibles, la lógica modal ha encontrado campos de aplicación dando lugar a gran variedad de lógicas aléticas, epistémicas, temporales, deónticas, etc.; sin embargo, también se ha reconocido que una lógica que sólo usa una o dos modalidades es muy restringida. Danna Scott una vez dijo:

Aquí está lo que considero es uno de los grandes errores en todas las lógicas modales: la concentración en un sistema modal con sólo un operador modal. La única forma de obtener resultados significativamente filosóficos en la lógica deóntica o la lógica epistémica es combinar estos operadores con: operadores temporales, (si no, ¿cómo podrías formular los principios del cambio?), operadores lógicos (si no, ¿cómo podrías comparar lo relativo con lo absoluto?), operadores para la necesidad histórica o física (si no, ¿cómo podrías relacionar a un agente con su entorno?), y así sucesivamente. [49, p. 161; mi traducción].

Las lógicas multimodales surgen con la intención de captar los más ámbitos posibles involucrados en la validez de una inferencia, tales como la situación, tiempo, conocimientos y creencias del agente, y aún mas. En este trabajo, desarrollo distintos sistemas multimodales que involucran a la lógica alética, la epistémica y la doxástica y les doto de sistemas de árboles.

En el capítulo 1, doy un breve recorrido por las lógicas aléticas, epistémicas y doxásticas normales; su función es principalmente introductoria, ya que en ella explico la notación que usaré en el trabajo, presento los sistemas axiomáticos de las lógicas normales básicas y pongo en discusión algunos problemas que normalmente se atribuyen a las lógicas epistémico-doxásticas, propiamente, la omnisciencia lógica, el paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica negativa y las creencias consistentes de los agentes.

En el capítulo 2, presento el sistema axiomático del sistema multimodal $T_{\square}/T_K/D_B^*$ y le doto de semánticas de fusión. Aquí hay un breve comentario sobre una de las características más distintivas de las semánticas que propongo: que naturalmente dan una interpretación actualista de la lógica modal alética al tratar a la semántica de mundos posibles dentro de la mente de agentes.

En el capítulo 3, desarrollo un sistema de árboles apropiado para $T_{\square}/T_K/D_B^*$ y ofrezco algunos ejemplos de aplicación, uno viendo a un teorema originalmente demostrado por von Wright y otro viendo la invalidez de pasar de una posibilidad epistémica a una alética.

En el capítulo 4, reviso algunas ideas de Spinoza sobre los pensamientos modales a la luz del nuevo aparato formal. Propiamente, desarrollo su afirmación de que algunas de nuestras ideas modales sólo se deben a un error de nuestra cognición.

Los capítulos que restan en el trabajo revisan variaciones de $T_{\square}/T_K/D_B^*$. En los capítulos 5, 6, 7 y 10 reviso extensiones de $T_{\square}/T_K/D_B^*$, mientras que en los capítulos 8 y 9 reviso sublógicas de $T_{\square}/T_K/D_B^*$.

En el capítulo 5, reviso brevemente la lógica temporal, el sistema alético-temporal MT y cómo éste dio lugar a las semánticas para $T_{\square}/T_K/D_B^*$, luego desarrollo la fusión de éste con la lógica Q_t y su sistema de árboles.

En el capítulo 6, desarrollo una crítica al principio de cerradura para el conocimiento y la creencia; para esto, preciso desarrollar sistemas con base doble en $S5$, lo cual da lugar a una crítica sobre la equivalencia $[K]\Box p \equiv \Box[K]p$ desde la distinción entre conocimiento absoluto y relativo, la cual, hasta donde tengo noticia, se desarrolla por primera vez en este trabajo.

En el capítulo 7, desarrollo un par de lógicas condicionales epistémico-doxásticas y cómo éstas pueden usarse para analizar cuestiones escépticas.

En el capítulo 8, desarrollo las semánticas y árboles para lógicas anormales; el asunto filosófico principal a revisar es la omnisciencia lógica tanto material como estrictamente, cómo las lógicas multimodales la enfrentan y cuáles son algunas soluciones posibles.

En el capítulo 9, desarrollo algunas lógicas epistémico-doxásticas con base en la lógica intuicionista; al tener un tratamiento distinto para la negación, en estos sistemas fallan las equivalencias entre los operadores universales con los particulares, siendo así que evitan el problema del paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica negativa, $\rightarrow [K]p$ no implica $\langle K \rangle \rightarrow p$. Hasta donde tengo noticia, éste es el primer sistema en la literatura que combina ambas lógicas con semánticas de fusión, aún si algunos resultados eran de esperarse dado el comportamiento de los cuantificadores en la lógica intuicionista.

En el capítulo 10, desarrollo la versión de primer orden de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ con el predicado de identidad; como asuntos filosóficos se aborda cómo esta lógica nos permite hablar de nuestro conocimiento y creencias de las modalidades *de re* y *de dicto*, aunque no tenga el poder para distinguir entre la validez de la identidad invariable en lo alético y la supuesta invalidez de ésta en los casos epistémico y doxástico, *i.e.*, $\forall\eta\forall\gamma(\eta = \gamma \supset \Box\eta = \gamma)$ puede aceptarse como válido, pero $\forall\eta\forall\gamma(\eta = \gamma \supset [B]\eta = \gamma)$ y $\forall\eta\forall\gamma(\eta = \gamma \supset [K]\eta = \gamma)$ no deberían serlo, pero lo son.

El capítulo 11 consta de las pruebas de metateoremas de las lógicas revisadas en el trabajo, a saber, los teoremas de corrección y completitud para los sistemas de árboles.

Aunque hay cierta conexión entre los capítulos, cada uno puede verse como un ensayo con base en distintos sistemas multimodales.

La notación que he optado para los lenguajes de las lógicas alética, epistémica, doxástica, temporal y condicional (y sus combinaciones) no es unívoca en la literatura; no obstante, sí es la que mejor se ajusta a los diversos propósitos en este trabajo. El lector interesado en realizar una comparación puede consultar el [apéndice A](#). Muchas veces en el trabajo también opte por una nomenclatura técnica para ciertos principios, por el ejemplo, me refiero al axioma T en su versión alética como $(T\Box)$ mientras que me refiero a su versión epistémica como (TK) ; sin embargo, pese a las buenas intenciones, la cantidad de principios revisados y su repartición a lo largo de distintos capítulos también es una jungla en la que es fácil perderse. Como una especie de remedio, he enlistado los principios revisados a lo largo de este trabajo en el [apéndice B](#). Finalmente, la equivalencia $\Box[K]p \equiv [K]\Box p$ no es la única inferencia problemática en los sistemas con base en $S5_{\Box}/S5_K$, una analogía sobre los principios válidos en esta lógica puede obtenerse al considerar el comportamiento de las fórmulas Barcan en los sistemas de dominio constante. Esto se revisa en el [apéndice C](#).

1. LÓGICAS ALÉTICAS, DOXÁSTICAS Y EPISTÉMICAS NORMALES

Cuando C. I. Lewis [23] introdujo la modalidad a la lógica simbólica, su objetivo no era hablar sobre ésta en sí misma, sino usarla para formular su condicional estricto. Así pues, desde sus inicios la lógica modal ha suscitado la pregunta: ¿Cómo se le interpreta? Aquí se opta por dos lecturas: una alética, *i.e.*, cómo se comporta lógicamente la verdad, y una epistémica-doxástica, *i.e.*, cómo se comportan el conocimiento y la creencia lógicamente. En la literatura, hay varios sistemas para ambas opciones. Las aproximaciones estándares a éstas se dan por semánticas relacionales o de Kripke, aunque cada vez son más comunes las semánticas de vecindades, de las cuales David Lewis es un precursor reconocido por su sistema de esferas para la lógica condicional. En este capítulo, daré una revisión a sistemas con semánticas relacionales, los cuales serán básicos para los siguientes capítulos. En el capítulo 7, conocemos algunos sistemas condicionales con bases más débiles que los sistemas de Lewis en [24] y al final del capítulo 8 veremos brevemente algo de semánticas de vecindades.

Antes de la invención de las semánticas de mundos posibles, los términos modales de ‘necesidad’, ‘posibilidad’ y ‘contingencia’ eran difíciles de comprender dada su naturaleza intencional. Inicialmente, Carnap [6] equiparó a las oraciones necesarias, $\Box\varphi$, con las oraciones L -verdaderas, aquellas verdaderas en todas las interpretaciones del lenguaje L de la lógica clásica; oraciones de este tipo pueden ser las analíticas como ‘los solteros son hombres no casados’, son verdaderas en virtud del significado de sus componentes. Con las semánticas de Kripke, se pudo sugerir tanto una explicación extensional de la modalidad como necesidades no analíticas al decir que algo es necesario cuando es verdadero en todos los mundos posibles y posible si lo es en alguno (cf. Menzel [25, sec.2]). Claro, lo analítico sigue siendo necesario, pero no siempre sucede lo converso.

Pasemos a los detalles técnicos desarrollando a K_{\Box} ,¹ la lógica alética normal básica (conocemos sistemas anormales en el capítulo 8). El lenguaje de la lógica modal alética, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, consta de un conjunto, \mathcal{P} , de parámetros proposicionales, p, q, r, \dots , las conectivas proposicionales \neg y \wedge , paréntesis, $(,)$, y el operador modal \Box . Sean φ, ψ y χ fórmulas bien formadas. La gramática de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ se rige por las siguientes reglas de formación:

$$p : p \in \mathcal{P} \quad | \quad \neg(\varphi) \quad | \quad (\varphi \wedge \psi) \quad | \quad \Box(\varphi)$$

¹ Normalmente se le conoce sólo como K , pero el índice nos ayudará a distinguir al sistema alético.

Omitiré paréntesis donde no haya ambigüedad. \forall , \supset , \equiv , \diamond , \neg , \top y \perp se definen como es usual. $p \mid q =_{def} \neg(p \wedge q)$, y se lee ‘ p es incompatible con q ’.

Un modelo de Kripke para interpretar a $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ es una tupla $\langle W, R, \nu \rangle$. W es un conjunto no vacío de mundos posibles. Hablaré un poco sobre estos en los capítulos 2, 4 y 5. R es una relación binaria de accesibilidad, $R \subseteq W \times W$, de forma que Rww' significa que w accede a w' .² ν es una función de tuplas de mundos posibles y parámetros proposicionales al conjunto de valores clásicos de verdad, $\nu : W \times \mathcal{P} \mapsto \{1, 0\}$, de forma que $\nu_w(p) = 1$ quiere decir que en w , p es verdadera.

Las condiciones de verdad de los elementos de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ son las siguientes:

$$\begin{array}{llll} \nu_w(\neg\varphi) = 1 & \text{sii (si y sólo si)} & \nu_w(\varphi) = 0 & \\ \nu_w(\varphi \wedge \psi) = 1 & \text{sii} & \nu_w(\varphi) = \nu_w(\psi) = 1 & \\ \nu_w(\Box\varphi) = 1 & \text{sii} & \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } Rww', \nu_{w'}(\varphi) = 1 & \\ \nu_w(\Diamond\varphi) = 1 & \text{sii} & \text{para algún } w' \in W \text{ tal que } Rww', \nu_{w'}(\varphi) = 1 & \end{array}$$

Sea Σ un conjunto de fórmulas bien formadas. La validez semántica (\models) se define por la preservación de la verdad a través de mundos:

$$\begin{array}{ll} \Sigma \models \varphi & \text{sii para toda } \langle W, R, \nu \rangle \text{ y para todo } w \in W: \text{ si para toda } \psi \in \Sigma, \text{ si} \\ & \nu_w(\psi) = 1, \text{ entonces } \nu_w(\varphi) = 1. \\ \models \varphi & \text{sii } \emptyset \models \varphi, \text{ i.e., para toda } \langle W, R, \nu \rangle \text{ y para todo } w \in W: \nu_w(\varphi) = 1. \end{array}$$

Para la validez sintáctica o teoría de la demostración, \vdash , podemos usar tanto sistemas axiomáticos como de árboles. En este capítulo, sólo veré aproximaciones axiomáticas.

El sistema axiomático de K_{\Box} consta de:

- (LC) Todos los axiomas y teoremas, $\vdash \varphi$, de la lógica clásica proposicional
- (SU) Si $\vdash \varphi$ y p forma parte de φ , entonces la fórmula resultante, φ' , al sustituir uniformemente p por ψ , $[p/\psi]$, también es válida, $\vdash \varphi'$
- (MP) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
- (N \Box) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash \Box\varphi$
- (C \Box) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

(MP) es *modus ponens* para el condicional material. (N \Box) se conoce como la regla de *necesidad* (alética), e indica que una verdad lógica (analítica) es una verdad necesaria. Si φ es una verdad lógica, φ es verdadera en cualquier mundo posible en el que se le evalúe. (C \Box) se conoce como el *principio de cerradura*, es el axioma característico de K_{\Box} y es válido en todas las lógicas modales normales.³

² Usualmente Rww' se escribe como wRw' , pero esto luego nos dará una notación más manejable.

³ En la literatura, los axiomas (C) se conocen de forma estándar como (K), pero se usa (C) para evitar confusiones con principios relativos a la lógica epistémica más abajo.

K_{\square} puede hacerse más fuerte agregándole axiomas, los más comunes son:

- (D \square) $\square p \supset \diamond p$ Lo necesario es posible
- (T \square) $\square p \supset p$ Lo necesario es verdadero
- (B \square) $p \supset \square \diamond p$ Lo verdadero es necesariamente posible
- (4 \square) $\square p \supset \square \square p$ Lo necesario es necesariamente necesario
- (5 \square) $\diamond p \supset \square \diamond p$ Lo posible es necesariamente posible

Para obtenerlos semánticamente, R debe ser respectivamente:

- Serial:* Para $w \in W$, hay un w' tal que Rww'
- Reflexiva:* Para todo $w \in W$, Rww
- Simétrica:* Para todo $w, w' \in W$, $Rww' \text{ sii } Rw'w$
- Transitiva:* Para todo $w, w', w'' \in W$, si Rww' y $Rw'w''$, entonces Rww''
- Euclídeana:* Para todo $w, w', w'' \in W$, si Rww' y Rww'' , entonces $Rw'w''$ y $Rw''w'$

El diagrama de la figura 1.1 presenta los sistemas aléticos normales ordenados según su fuerza, *i.e.*, su capacidad para validar inferencias. Éste se explica por sí mismo hasta llegar a D_{\square} , que es K_{\square} más (D \square). T_{\square} es K_{\square} más (T \square), y es una extensión de D_{\square} . $S4_{\square}$ es T_{\square} más (4 \square); B_{\square} , T_{\square} más (B \square); y $S5_{\square}$, T_{\square} más (5 \square).

$S5_{\square}$ es la lógica más fuerte de todas. Al tener no sólo a (5 \square), sino también a (4 \square), al que llega sólo en conjunción con (T \square), $S5_{\square}$ ha sido vista por algunos lógicos como el sistema que defiende que todas las propiedades modales son necesarias (cualquier sistema con (4 \square) sólo acepta que lo son las propiedades necesarias) [16, pp. 49-50].

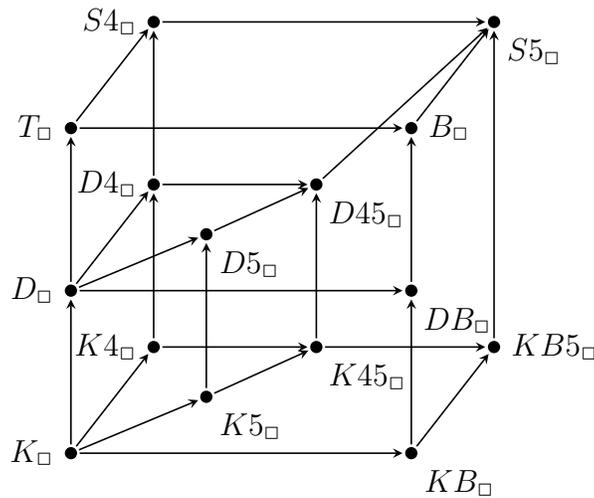


Fig. 1.1: Relaciones entre las lógicas aléticas normales (re-elaboración propia del esquema en la entrada *Modal logic* de la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [13, sec. 8])

Un atractivo semántico de $S5_{\Box}$ es que éste da una noción absoluta de la necesidad, *i.e.*, no relativa R , al ser ésta una relación de equivalencia en W , todos los mundos se relacionan entre sí. Un modelo de Kripke para $S5$ puede ser sólo la tupla $\langle W, \nu \rangle$, donde las condiciones de los operadores modales son:

$$\begin{aligned} \nu_w(\Box\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W, \nu_{w'}(\varphi) = 1 \\ \nu_w(\Diamond\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para algún } w' \in W, \nu_{w'}(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Ahora bien, para finalizar con la lógica alética, podemos añadir a $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ los siguientes operadores:⁴

$$\begin{aligned} \nabla p &=_{def} \Diamond p \wedge \Diamond \neg p && \text{Es contingente que } p \\ \Delta p &=_{def} \Box p \vee \Box \neg p && \text{No es contingente que } p \end{aligned}$$

Nótese que $\Delta p \equiv \neg \nabla p$. Independientemente al desarrollo de las semánticas de Kripke, Blanché planteó el hexágono de oposición de las modalidades que se ve en la figura 1.2:

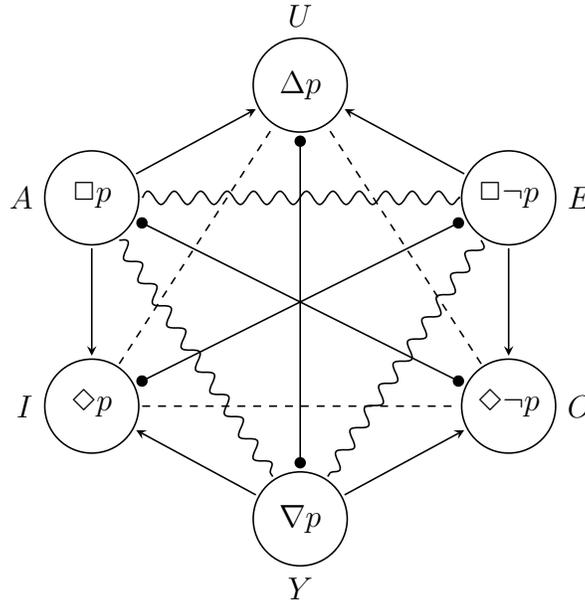


Fig. 1.2: Re-elaboración propia del hexágono de oposiciones modales de Blanché [3, p. 105]

El hexágono es una variación del cuadro de oposición aristotélico y todas las relaciones son válidas para cualquier sistema tanto o más fuerte que D_{\Box} . Las flechas, \rightarrow , indican relaciones *subalternas* y se pueden leer como \supset , por ejemplo, $\Box p \supset \Diamond p$, lo necesario es posible, pero no lo converso. Las líneas con nodos, $\bullet\text{---}\bullet$, indican relaciones *contradictorias*, *i.e.*, que con equivalencias se llega a $\varphi \wedge \neg\varphi$, por ejemplo, lo posible es

⁴ ∇ y Δ se deben a Montgemoery y Routley [28], pero las definiciones ya están en Carnap [6, § 39].

contradictorio con lo necesariamente falso, $\diamond p \wedge \Box \neg p$, porque $\Box \neg p \equiv \neg \diamond p$. Las líneas punteadas, $----$, indican relaciones *contrarias*, *i.e.*, que no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo (aunque no sean *strictu sensu* una contradicción), pero ambas sí pueden ser falsas al mismo tiempo; si algo es necesario, no puede ser imposible, $\Box p \mid \Box \neg p$, o contingente, $\Box p \mid \nabla p$, pero algo no tiene por qué ser o necesario o imposible, a saber, cuando es contingente. Las líneas onduladas, $\sim\sim\sim$, indican relaciones *compatibles* o *subcontrarias*, *i.e.*, que pueden ser verdaderas al mismo tiempo, pero no falsas al mismo tiempo, por ejemplo, lo posible puede ser no contingente, a saber, cuando es necesario, y puede que la posibilidad sobre algo no entre en conflicto con la posibilidad de su negación, pero es falso que algo sea contingente sin que sea posible.⁵

Los sistemas lógicos que hasta ahora hemos visto pueden adoptar otro par de interpretaciones: la doxástica y la epistémica. Estas lógicas sirven para pensar cómo se comporta lógicamente el conocimiento y la creencia. La lógica epistémica es básicamente lo mismo que la lógica modal alética. Su lenguaje, $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, simplemente cambia a \Box y \diamond por $[K]$ y $\langle K \rangle$, los cuales se leen respectivamente como ‘(alguien) sabe que’ y ‘(para alguien) es posible epistémicamente que’.⁶ Un modelo de Kripke para la lógica epistémica puede ser lo mismo que un modelo para la lógica alética, *i.e.*, $\langle W, R, \nu \rangle$; no obstante, a mi consideración, podemos modificar esta práctica. Cuando utilizamos modelos de Kripke para las lógicas temporales (las cuales conoceremos en el capítulo 5), modificamos sutilmente nuestra interpretación de los modelos usando un conjunto de tiempos, T , y no mundos, W . La intuición es clara: los mundos posibles son distintos al tiempo (propriadamente, a los momentos que lo conforman), aun si ambos se comportan de forma similar. Por analogía, al trabajar con lógicas para el pensamiento, también deberíamos modificar nuestra interpretación de los modelos utilizando *estados epistémicos o mentales*, E . Un modelo de Kripke sería entonces una tupla $\langle E, \Psi^K, \nu \rangle$,⁷ donde los detalles son los mismos *mutatis mutandis* que en la lógica modal alética. Aun con todo, algo notable es que, en tanto que $\langle K \rangle p =_{def} \neg [K] \neg p$, $\langle K \rangle p$ nos sirve también para describir qué no se sabe. La lógica doxástica es básicamente lo mismo que la lógica epistémica. Su lenguaje, $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, simplemente cambia a $[K]$ y $\langle K \rangle$ por $[B]$ y $\langle B \rangle$.⁸ En un modelo de Kripke, sólo cambiamos a Ψ^K por Ψ^B , $\langle E, \Psi^B, \nu \rangle$.

⁵ Para ahondar más sobre el hexágono, véase a Beziau [2].

⁶ Algunas notaciones alternas son respectivamente K y M o K y \widehat{K} , pero la notación de corchetes da dos ventajas. La primera es que nos permite distinguir fácilmente operadores universales de particulares; la segunda es que, cuando pasamos a la lógica de primer orden, podemos distinguir los operadores de los predicados fácilmente. También es usual que se suscriban a , b y c a los operadores para que $[K]_a$ se lea como ‘ a sabe que’, pero eso generaría cúmulos innecesarios dado que no trabajamos con lógicas de multiagentes, las cuales también son lógicas multimodales con una relación de accesibilidad epistémica para cada agente a considerar.

⁷ El índice K no es estándar, sino una idea propia introducida por motivos prácticos.

⁸ Otras notaciones son B y N o B y \widehat{B} .

Al usar lógicas epistémicas y doxásticas es rutinario decir que, si una fórmula se encuentra en el alcance de un operador epistémico o doxástico, hablamos de un *hecho epistémico* o *doxástico*, caso contrario, hablamos de uno *objetivo* [26, p. 2].

Los sistemas axiomáticos de las lógicas epistémicas y doxásticas, a las que distinguimos por un subíndice de K y B respectivamente, son básicamente los mismos que el de la lógica alética. Como es ordinario que las lógicas epistémicas y doxásticas vayan juntas, lo cual se logra haciendo que Ψ^K y Ψ^B estén en el mismo modelo, $\langle E, \Psi^K, \Psi^B, \nu \rangle$, el sistema axiomático de K_K/K_B puede plantearse de la siguiente forma:

- (LC) Todos los axiomas y teoremas, $\vdash \varphi$, de la lógica clásica proposicional.
- (SU) Si $\vdash \varphi$ y p forma parte de φ , entonces la fórmula resultante, φ' , al sustituir uniformemente p por ψ , $[p/\psi]$, también es un axioma o teorema, $\vdash \varphi'$
- (MP) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
- (NK) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [K]\varphi$
- (NB) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [B]\varphi$
- (CK) $[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$
- (CB) $[B](p \supset q) \supset ([B]p \supset [B]q)$

(NK) afirma que si φ es un axioma o teorema, el agente de la lógica lo sabe. (CK) afirma que, si el agente sabe una implicación, entonces, si sabe el antecedente, sabe el consecuente. En conjunto, (NK) y (CK) suelen negarse en la literatura porque dan lugar al problema de la *omnisciencia lógica epistémica*, un agente sabe todas las implicaciones lógicas de lo que sabe. Comentarios similares se aplican a (NB) y (CB) con respecto a lo doxástico. En el capítulo 6, veremos cómo pueden fallar las versiones estrictas de (CK) y (CB), y habrá un comentario breve al final del capítulo 7 sobre la versión condicional de (CK). En el capítulo 8, desarrollaré a más detalle cómo las lógicas multimodales y las lógicas anormales afrontan el problema de la omnisciencia lógica.

Al igual que en el caso alético, las lógicas epistémico-doxásticas pueden extenderse al aceptar más principios haciendo las modificaciones apropiadas a Ψ^K y Ψ^B . Los principios normalmente aceptados en la literatura son:

- (TK) $[K]p \supset p$ El conocimiento es verdadero
- (4K) $[K]p \supset [K][K]p$ Si un agente sabe algo, sabe que lo sabe
- (5K) $\neg[K]p \supset [K]\neg[K]p$ Si un agente no sabe algo, sabe que no lo sabe
- (DB) $[B]p \supset \neg[B]\neg p$ Las creencias de un agente son consistentes
- (4B) $[B]p \supset [B][B]p$ Si un agente cree algo, cree que lo cree
- (5B) $\neg[B]p \supset [B]\neg[B]p$ Un agente no cree algo, cree que no lo cree

(TK) indica una propiedad del conocimiento, no tanto el poder de un agente para afirmar ‘lo que sabe’. En el lenguaje natural, a veces decimos saber cosas que luego

descubrimos que son falsas, por ejemplo, uno puede decir ‘sé que esta calle lleva a la plaza’, pero luego equivocarse en la afirmación (aunque en tales casos el agente no sabe como tal, *i.e.*, el antecedente es falso); no obstante, cuando sabemos algo de verdad, *i.e.*, no sólo lo creemos, nuestro conocimiento no puede (no debería) errar. No podemos exigir el principio (TB), $[B]p \supset p$, porque las creencias sí pueden ser falsas, $[B]p \wedge \neg p$ no es inconsistente;⁹ no obstante, al menos se puede exigir que las creencias sean consistentes, que es (DB). (4K) y (5K) son formas de introspección, una sobre lo que sabemos y la otra sobre lo que no, y lo mismo aplica *mutatis mutandis* para (4B) y (5B). Tendremos la oportunidad de discutir sobre la plausibilidad general y contextual del axioma (5K) en el capítulo 6 y la plausibilidad general de (5K) y (5B) en el capítulo 9.

Para hacer justicia al análisis tradicional del conocimiento (cf. Feldman [12, cap. 2] e Ichikawa y Steup [17, sec. 1]), usualmente se acepta que el conocimiento implica la creencia:

$$(KB) \quad [K]p \supset [B]p$$

Distinguimos al sistema con este principio con un índice de * a la lógica doxástica, por ejemplo, K_K/K_B^* . Semánticamente, para este principio necesitamos la siguiente restricción:

$$\Psi^B \subseteq \Psi^K$$

Tanto en la lógica epistémica como en la doxástica, podemos añadir los operadores análogos a Δ y ∇ .¹⁰

$$\begin{array}{ll} /K \setminus p =_{def} [K]p \vee [K]\neg p & \text{El agente sabe si } p \\ \setminus K / p =_{def} \neg[K]p \wedge \neg[K]\neg p & \text{El agente no sabe si } p \\ /B \setminus p =_{def} [B]p \vee [B]\neg p & \text{El agente tiene una creencia definitiva sobre } p \\ \setminus B / p =_{def} \neg[B]p \wedge \neg[B]\neg p & \text{El agente no tiene una creencia definitiva sobre } p \end{array}$$

$\setminus B / p$ también puede verse como una suspensión del juicio (cf. [12, p. 16]). Si la base de las lógicas epistémica y doxástica es la lógica clásica, $\setminus K / p \equiv (\langle K \rangle p \wedge \langle K \rangle \neg p)$ y $\setminus B / p \equiv (\langle B \rangle p \wedge \langle B \rangle \neg p)$. Salvo por el capítulo 9, en el que tomamos la definición inicial, plantear a los operadores de una u otra forma no afecta en nada a la validez.

⁹ Que las creencias pueden ser falsas, pero no el conocimiento, puede rastrearse hasta Platón (*Gorgias*, 454d). Véase a Herrera González [14, pp. 234s].

¹⁰ La lectura de $/B \setminus$ y $\setminus B /$ proviene de Zolin [60], y la de $\setminus K /$ y $/K \setminus$ es usual en la literatura, aunque la notación para guardar una conexión con ∇ y Δ es mía y no hay, que yo sepa, otras notaciones alternas en la literatura.

Debido a que vamos a trabajar con varias lógicas al mismo tiempo, algunas veces será útil usar los operadores abstractos $[O]$ y $\langle O \rangle$ para referir a cualesquiera par de operadores correspondientes, *i.e.*, \Box y \Diamond , $[K]$ y $\langle K \rangle$ o $[B]$ y $\langle B \rangle$. También usaremos $\backslash O/$ y $/O\backslash$ para operadores de contingencia abstractos cuando sea provechoso hacerlo.

Antes de concluir este capítulo, valga apuntar un par de asuntos con respecto al comportamiento de $[K]$ y $[B]$ y sus duales.

Con base en la negación clásica, debido a que $\forall\gamma\varphi \equiv \neg\exists\gamma\neg\varphi$ y a que semánticamente $[K]$ y $\langle K \rangle$ son cuantificadores sobre estados epistémicos, tenemos que $[K]p \equiv \neg\langle K \rangle\neg p$ y $\langle K \rangle p \equiv \neg[K]\neg p$. Hay partes de estas equivalencias que no son problemáticas, por ejemplo, si nuestro agente sabe algo, él no puede tener la posibilidad epistémica de la negación, $[K]p \supset \neg\langle K \rangle\neg p$. Ahora, supóngase que nuestro agente no sabe que Homero no narra en la *Ilíada* que los espartanos entraron a Troya en un caballo de madera. Si nuestro agente sabe del caballo de Troya y de Homero (aunque no lo haya leído), a él le es posible pensar que Homero sí hable del caballo de Troya en la *Ilíada*, *i.e.*, $\neg[K]\neg p$ puede implicar a $\langle K \rangle p$. Caso contrario, si nuestro agente no sabe ni de Homero ni del caballo de Troya, es difícil ver cómo podría tener la posibilidad epistémica de que Homero hable del caballo de Troya en la *Ilíada*, por lo cual $\neg[K]\neg p$ no implica que $\langle K \rangle p$. Ante objeciones de este tipo normalmente se dice que nuestros agentes operan en discursos acotados, digamos, un juego de naipes (cf. Gomez-Caminero [33, p. 27]); si yo no sé si tú tienes el siete de tréboles, $\neg[K]\neg p \wedge \neg[K]p$, me es posible plantear un escenario en el que lo tienes y uno en el que no, $\langle K \rangle p \wedge \langle K \rangle\neg p$. Comentarios similares se aplican a lo doxástico. Tendremos la oportunidad de revisar este tema desde las lógicas anormales en el capítulo 8 y desde la lógica intuicionista en el capítulo 9.

El segundo asunto que vale la pena apuntar es relativo a (DB) –las creencias son consistentes. Si hablamos de creencias racionales, esto puede ser aceptable. Si racionalmente creo que la luna no es queso, se sigue que no creo que la luna sea queso. Aun con todo, es frecuente que nos encontremos con casos que nos llevan a creer una y otra cosa. Supongamos que soy relativamente nuevo en un trabajo y que alguien me dice que el gerente, g , a quien no conozco, es muy estricto con las reglas del comedor, otro me dice que g no es lo es, y ambas son personas creíbles; en esta situación, tendría motivos para creer tanto que g es estricto como que no lo es.

Ninguna de las consecuencias señaladas suceden en las semánticas de vecindades. Daré un vistazo breve a éstas y cómo se enfrentan a estas dificultades al final del capítulo 8.

2. SEMÁNTICAS PARA $T_{\square}/T_K/D_B^*$

El sistema básico para esta tesis combina a T_{\square} , T_K y D_B junto con el axioma (KB), por lo que se le puede llamar $T_{\square}/T_K/D_B^*$.¹ Su sistema axiomático consta de:

- (LC) Todos los axiomas y teoremas, $\vdash \varphi$, de la lógica clásica proposicional
- (SU) Si $\vdash \varphi$ y p forma parte de φ , entonces la fórmula resultante, φ' , al sustituir uniformemente p por ψ , $[p/\psi]$, también es un axioma o teorema, $\vdash \varphi'$
- (MP) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
- (N \square) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash \square\varphi$
- (NK) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [K]\varphi$
- (NB) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [B]\varphi$
- (C \square) $\square(p \supset q) \supset (\square p \supset \square q)$
- (CK) $[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$
- (CB) $[B](p \supset q) \supset ([B]p \supset [B]q)$
- (T \square) $\square p \supset p$
- (TK) $[K]p \supset p$
- (DB) $[B]p \supset \neg[B]\neg p$
- (KB) $[K]p \supset [B]p$

Los modelos que propongo para interpretar el lenguaje de $T_{\square}/T_K/D_B^*$, $\mathcal{L}_{AD\mathcal{E}}$, que es $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ (véase el capítulo anterior), son de la forma $\langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$.

W y E son conjuntos no vacíos de mundos posibles y estados epistémicos –mentales– respectivamente.

R_e es una relación ternaria entre mundos posibles y estados epistémicos, $R_e \subseteq E \times W \times W$, e indica que los mundos posibles se relacionan dentro de estados epistémicos; de esta forma, $eRww'$ significa que ‘en e , w accede a (se relaciona con) w' ’.²

¹ Ciertamente, pude haber optado por algún otro sistema, aunque considero que los sistemas involucrados en $T_{\square}/T_K/D_B^*$ son los más aceptables para la intuición filosófica (y aun así hay principios dudosos para los agentes de carne y hueso, como (DB) y (KB), aunque pueda decirse que los esperamos de un agente cuando está siendo razonable).

² Por convención, lo más apropiado sería que $eRww'$ se escribiera como $wR_e w'$, pero esta notación es poco manejable. Con la notación propuesta, a la izquierda de R va la relativización y a la derecha la relación de accesibilidad (véase la nota 2 del capítulo 1). Lo mismo se aplica para las demás relaciones. Las ventajas de la notación se vuelven más patentes para los sistemas en el capítulo 5.

Para tener a (T_{\square}) , R_e es relativamente

Reflexiva: Para todo $w \in W$ y $e \in E$, $eRww$

Ahora bien, usualmente la discusión sobre la ontología de los mundos posibles se divide entre realistas modales –o platónicos modales, como prefiere Read [37, cap. 4]–, quienes afirman que los mundos posibles son mundos aislados causalmente que son tan reales como el nuestro, y actualistas, quienes creen que los mundos posibles sólo son entidades mentales distintas al mundo real, bien que sean conjuntos consistentes o reorganizaciones del mundo real (cf. Menzel [25]).³ Al usar a R *simpliciter*, uno puede optar por la posición de su preferencia dadas sus razones filosóficas, la cuestión es externa a la lógica; sin embargo, con R_e uno se ve obligado a aceptar una forma de actualismo porque los mundos posibles no pueden verse aislados de los estados epistémicos. Sobre la plausibilidad de esto, ofrezco una breve discusión en el capítulo 4 y hago algunos comentarios sobre las semánticas de fusión para $T_{\square}/T_K/D_B^*$ en el capítulo 5.

Ψ_w^K es una relación ternaria, $\Psi_w^K \subseteq W \times E \times E$, e indica que las relaciones epistémicas suceden dentro de mundos posibles. Así pues, $w\Psi^K ee'$ quiere decir ‘en w , e accede epistémicamente a e' ’.

Para tener a (TK) , Ψ_w^K es relativamente

Reflexiva: Para todo $w \in W$ y $e \in E$, $w\Psi^K ee$

Ψ_w^B es similar a Ψ_w^K .

Para tener a (DB) , Ψ_w^B es relativamente:

Serial: Para todo $w \in W$ y $e \in E$ hay un e' tal que $w\Psi^B ee'$

Puede suceder que $e = e'$, una relación reflexiva también es serial.

Por facilidad, a veces es útil tratar a las relaciones equivalentemente como funciones, por ejemplo, $\Psi^K : W \mapsto \wp(E^2)$, de forma que $\langle e, e' \rangle \in \Psi_w^K$ sii $w\Psi^K ee'$.⁴

Para tener a (KB) , aceptamos que:

Para todo $w \in W$, $\Psi_w^B \subseteq \Psi_w^K$

ν es una función de tuplas de mundos posibles, estados epistémicos y parámetros proposicionales a valores clásicos de verdad, $\nu : W \times E \times \mathcal{P} \mapsto \{1, 0\}$. $\nu_{w/e}(p) = 1$ quiere decir que ‘en w de e , p es verdadera’.

³ Otra posición es el meiningnismo, los mundos posibles son cosas que no existen (cf. Priest [36, secc. 2.8, 2.10 y 2.11]), pero esta postura no es relevante a nuestra discusión.

⁴ Por convención, sería más propio decir que $\langle e, e' \rangle \in \Psi^K(w)$, pero reservamos el paréntesis para las fórmulas que determinan las relaciones con cláusulas *ceteris paribus* en los sistemas del capítulo 7.

Las condiciones de verdad de las conectivas simplemente se relativizan a pares w/e .

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\neg\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\varphi) = 0 \\ \nu_{w/e}(\varphi \wedge \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\varphi) = \nu_{w/e}(\psi) = 1 \end{aligned}$$

Las condiciones de operadores modales, epistémicos y doxásticos se relativizan de forma apropiada a estados epistémicos y mundos posibles:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\Box\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{w'/e}(\varphi) = 1 \\ \nu_{w/e}([K]\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } e' \in E \text{ tal que } w\Psi^K ee', \nu_{w/e'}(\varphi) = 1 \\ \nu_{w/e}([B]\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } e' \in E \text{ tal que } w\Psi^B ee', \nu_{w/e'}(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Las condiciones para \diamond , $\langle K \rangle$ y $\langle B \rangle$ cambian ‘todo’ por ‘algún’. Debido a que las condiciones sólo están relativizadas, para todos los operadores $[O]\varphi \equiv \neg\langle O \rangle\neg\varphi$.

La validez se define por la preservación de la verdad:

$$\begin{aligned} \Sigma \models \varphi & \quad \text{sii} \quad \text{para toda } \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle, \text{ para todo } w \in W \text{ y } e \in E: \text{ si para} \\ & \quad \text{toda } \psi \in \Sigma, \text{ si } \nu_{w/e}(\psi) = 1, \nu_{w/e}(\varphi) = 1 \\ \models \varphi & \quad \text{sii} \quad \emptyset \models \varphi, \text{ i.e., para toda } \langle W, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle \text{ y para todo } w \in W \text{ y} \\ & \quad e \in E: \nu_{w/e}(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

$T_{\square}/T_K/D_B^*$ es una extensión propia de todos los sistemas que lo componen, ya que la relativización de las condiciones de verdad no afecta en nada a la validez de los elementos del sistema axiomático. Una interpretación de T_{\square} es lo mismo que una de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ en la que $E = \{e_0\}$ y una interpretación de T_K/D_B^* es lo mismo que una de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ en la que $W = \{w_0\}$. Este último hecho nos sugiere que usualmente se ve a la lógica alética de forma impersonal y que a la lógicas epistémico-doxásticas no se les ve más allá de una sola circunstancia.

El lenguaje de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ es más expresivo que el de las lógicas que lo componen. Éste nos permitirá evaluar, por una parte, nuestras actitudes epistémicas y doxásticas con respecto a la modalidad alética, y, por otra, las condiciones aléticas de nuestros conocimientos y creencias.

3. ÁRBOLES SEMÁNTICOS PARA $T_{\square}/T_K/D_B^*$

Sean i, j y k números naturales, así como también lo son x, y y z (posiblemente, los mismos). Los árboles semánticos de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ tienen cuatro tipos de nodos: $\varphi, w_i/e_x$ quiere decir que φ es verdadera en el mundo i del estado epistémico x ; $e_x R w_i w_j$, que en el estado epistémico x , el mundo i accede al mundo j ; $w_i \Psi^K e_x e_y$, que en el mundo i , el estado x accede epistémicamente al estado y ; $w_i \Psi^B e_x e_y$, que en el mundo i , el estado x accede doxásticamente al estado y . Una lista inicial para una inferencia consta de un nodo $\psi, w_0/e_0$ para cada premisa (si hay alguna) y $\neg\varphi, w_0/e_0$ para la conclusión. Una rama de un árbol se cierra, \otimes , si en ella aparecen $\varphi, w_i/e_x$ y $\neg\varphi, w_i/e_x$.

Las reglas de árboles para las conectivas proposicionales son las mismas que las de los árboles del cálculo proposicional excepto porque llevan índices de mundos y estados que se conservan en las extensiones:

$$\begin{array}{c}
 \varphi \wedge \psi, w_i/e_x \qquad \neg(\varphi \wedge \psi), w_i/e_x \\
 \downarrow \qquad \swarrow \qquad \searrow \\
 \varphi, w_i/e_x \qquad \neg\varphi, w_i/e_x \qquad \neg\psi, w_i/e_x \\
 \psi, w_i/e_x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \varphi \vee \psi, w_i/e_x \qquad \neg(\varphi \vee \psi), w_i/e_x \\
 \swarrow \qquad \searrow \qquad \downarrow \\
 \varphi, w_i/e_x \qquad \psi, w_i/e_x \qquad \neg\varphi, w_i/e_x \\
 \neg\psi, w_i/e_x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \varphi \supset \psi, w_i/e_x \qquad \neg(\varphi \supset \psi), w_i/e_x \\
 \swarrow \qquad \searrow \qquad \downarrow \\
 \neg\varphi, w_i/e_x \qquad \psi, w_i/e_x \qquad \varphi, w_i/e_x \\
 \neg\psi, w_i/e_x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \varphi \equiv \psi, w_i/e_x \qquad \neg(\varphi \equiv \psi), w_i/e_x \\
 \swarrow \qquad \searrow \qquad \swarrow \qquad \searrow \\
 \varphi, w_i/e_x \qquad \neg\varphi, w_i/e_x \qquad \varphi, w_i/e_x \qquad \neg\varphi, w_i/e_x \\
 \psi, w_i/e_x \qquad \neg\psi, w_i/e_x \qquad \neg\psi, w_i/e_x \qquad \psi, w_i/e_x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \neg\neg\varphi, w_i/e_x \\
 \downarrow \\
 \varphi, w_i/e_x
 \end{array}$$

Para los operadores hay dos tipos de reglas. Primero, tenemos las reglas de equivalencia para los operadores negados:

$$\begin{array}{ccc} \neg[O]\varphi, w_i/e_x & \neg\langle O \rangle\varphi, w_i/e_x \\ \downarrow & \downarrow \\ \langle O \rangle\neg\varphi, w_i/e_x & [O]\neg\varphi, w_i/e_x \end{array}$$

Segundo, las reglas de inferencias para los operadores afirmados:

$$\begin{array}{ccc} \square\varphi, w_i/e_x & \diamond\varphi, w_i/e_x \\ e_x R w_i w_j & \downarrow \\ \downarrow & e_x R w_i w_j \\ \varphi, w_j/e_x & \varphi, w_j/e_x \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} [K]\varphi, w_i/e_x & \langle K \rangle\varphi, w_i/e_x & [B]\varphi, w_i/e_x & \langle B \rangle\varphi, w_i/e_x \\ w_i \Psi^K e_x e_y & \downarrow & w_i \Psi^B e_x e_y & \downarrow \\ \downarrow & w_i \Psi^K e_x e_y & \downarrow & w_i \Psi^B e_x e_y \\ \varphi, w_i/e_y & \varphi, w_i/e_y & \varphi, w_i/e_y & \varphi, w_i/e_y \end{array}$$

Los nodos arriba de las flechas son aquellos necesarios para dar lugar a una extensión. En la regla de \square , por ejemplo, $\square\varphi, w_i/e_x$ y $e_x R w_i w_j$ deben estar en la rama (independientemente del orden) para dar lugar a $\varphi, w_j/e_x$; en la regla de \diamond , si $\diamond\varphi, w_i/e_x$ está en la rama, para algún j nuevo en la rama, $e_x R w_i w_j$ y $\varphi, w_j/e_x$ están en la rama. Comentarios similares se aplican a las reglas de $[K]$ y $[B]$; en reglas las de $\langle K \rangle$ y $\langle B \rangle$, y es un número de estado mental nuevo en la rama. Nótese que en las reglas inferiores se corresponden las letras de operadores y de relaciones, por ejemplo, $[K]$ requiere líneas de Ψ^K . En todas las reglas, siempre se mantiene un índice igual: en las de \square y \diamond , e_x ; y en las de operadores epistémicos y doxásticos, w_i . Un consejo para la introducción de líneas de relaciones es primero escribir a qué esta relativizada la relación y luego la relación apropiada, por ejemplo, se escribe primero e_x y luego $R w_i w_j$.

Para cualesquiera operadores, O , las reglas para contingencia y no contingencia son las siguientes:

$$\begin{array}{cccc} \neg\backslash O / \varphi, w_i/e_x & \neg/O \backslash \varphi, w_i/e_x & \backslash O / \varphi, w_i/e_x & /O \backslash \varphi, w_i/e_x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \quad \searrow \\ /O \backslash \varphi, w_i/e_x & \backslash O / \varphi, w_i/e_x & \langle O \rangle\varphi, w_i/e_x & [O]\varphi, w_i/e_x \quad [O]\neg\varphi, w_i/e_x \\ & & \langle O \rangle\neg\varphi, w_i/e_x & \end{array}$$

Las primeras dos reglas son equivalencias. En las otras dos reglas sólo hay que tener cuidado de poner el operador correspondiente en las extensiones, por ejemplo, si se tiene $\nabla\varphi$, las ramas son $\diamond\varphi$ y $\diamond\neg\varphi$.

El orden en que se apliquen las reglas no afecta en que un árbol se cierre o siga abierto, ésta es una consecuencia inmediata del teorema 11.12. Por mor a la simplicidad, es mi uso desarrollar primero las reglas que no generan bifurcaciones.

Para las restricciones a las relaciones, requerimos las siguientes reglas:

$$\begin{array}{cccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & w_i\Psi^B e_x e_y \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 e_x R w_i w_i & w_i \Psi^K e_x e_x & w_i \Psi^B e_x e_y & w_i \Psi^K e_x e_y
 \end{array}$$

Las reglas con \bullet no requieren un nodo específico para generar una extensión, sino información en la rama. Las primeras dos reglas se aplican a cada i y x en la rama; es recomendable aplicarlas tan pronto aparezca un número nuevo en la rama y apenas comienza un árbol se pueden aplicar inmediatamente a w_0 y a e_0 . La tercera se aplica a cada x e i en la rama siendo y un número de estado epistémico nuevo, lo recomendable es aplicarla cuando ya no se pueda aplicar ninguna otra regla porque puede generar ramas infinitas. La cuarta regla se aplica a cada línea $w_i \Psi^B e_x e_y$, es de mi preferencia siempre introducir una línea $w_i \Psi^K e_x e_y$ cada vez que ha aparecido una nueva de $w_i \Psi^B e_x e_y$.

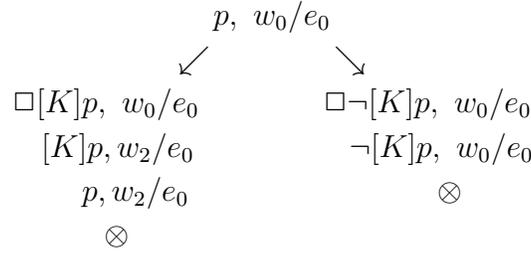
Un árbol se dice *completo* si todas las reglas que han podido aplicarse han sido aplicadas. Un árbol puede decirse completo aunque sea infinito por tener una rama infinita, digamos, si se sabe que aplicar una regla ya no tiene efecto en la clausura.

Como un ejemplo, consideremos la siguiente inferencia descubierta por Von Wright [59, p. 68] como la reformula Costa-Leite [9, p. 527]:

$$(3.1) \quad \nabla p \wedge [K]p \vdash \nabla[K]p$$

Aquí está el árbol que lo demuestra:

$$\begin{array}{l}
 \nabla p \wedge [K]p, w_0/e_0 \\
 \neg \nabla[K]p, w_0/e_0 \\
 e_0 R w_0 w_0 \\
 w_0 \Psi^K e_0 e_0 \\
 \Delta[K]p, w_0/e_0 \\
 \nabla p, w_0/e_0 \\
 [K]p, w_0/e_0 \\
 \diamond p, w_0/e_0 \\
 \diamond \neg p, w_0/e_0 \\
 e_0 R w_0 w_1 \\
 p, w_1/e_0 \\
 e_0 R w_1 w_1 \\
 w_1 \Psi^K e_0 e_0 \\
 e_0 R w_0 w_2 \\
 \neg p, w_2/e_0 \\
 e_0 R w_2 w_2 \\
 w_2 \Psi^K e_0 e_0
 \end{array}$$



La rama de la derecha se cierra debido a que $[K]p, w_0/e_0$ ya está en la rama, pero aún si se le siguieran aplicando reglas, la rama se cerraría.

En su momento, Von Wright demostró (3.1) de forma axiomática. En la tabla 3.1 presento una reconstrucción propia de su demostración (la numeración romana es para no interferir con el resto del trabajo). Se puede apuntar que $\diamond p$ sobra en (3.1) a comparación de (XII), pero no hay problema porque $[K]p \supset \diamond p$ resulta de un silogismo hipotético entre (I) y (VIII).

(I)	$[K]p \supset p$	(TK)
(II)	$\Box([K]p \supset p)$	(N \Box) a (I)
(III)	$\Box[K]p \supset \Box p$	(MP) a (II) y (C \Box)
(IV)	$\neg\Box p \supset \neg\Box[K]p$	Contraposición a (III)
(V)	$\diamond\neg p \supset \diamond\neg[K]p$	Definición de \diamond a (IV)
(VI)	$\Box\neg p \supset \neg p$	$[p/\neg p]$ a (T \Box)
(VII)	$p \supset \neg\Box\neg p$	Contraposición a (VI)
(VIII)	$p \supset \diamond p$	Definición de \diamond a (VII)
(IX)	$[K]p \supset \diamond[K]p$	$[p/[K]p]$ a (VIII)
(X)	$(p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset ((p \wedge r) \supset (q \wedge s)))$	Tautología clásica
(XI)	$(\diamond\neg p \wedge [K]p) \supset (\diamond\neg[K]p \wedge \diamond[K]p)$	(MP) por (V), (IX) y (X)
(XII)	$(\diamond\neg p \wedge [K]p) \supset \nabla[K]p$	Definición de ∇ a (IX)

Tab. 3.1: Reconstrucción propia de la demostración axiomática de Von Wright para (3.1).

Un debate contemporáneo sobre la lógica epistémica es *en qué consiste que algo sea una posibilidad epistémica y si puede coincidir con la posibilidad metafísica* (cf. Egan y Weatherson [11], que es una compilación de escritos al respecto). Si esto se formula de la siguiente forma:

$$(3.2) \quad \langle K \rangle p \supset \diamond p$$

entonces la implicación es inválida en $T_{\square}/T_K/D_B^*$. Aquí está el árbol:

$$\begin{array}{c}
\neg(\langle K \rangle p \supset \diamond p), w_0/e_0 \\
e_0 R w_0 w_0 \\
w_0 \Psi^K e_0 e_0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\langle K \rangle p, w_0/e_0 \\
&\neg \diamond p, w_0/e_0 \\
&\square \neg p, w_0/e_0 \\
&\neg p, w_0/e_0 \\
&w_0 \Psi^K e_0 e_1 \\
&w_0 \Psi^K e_1 e_1 \\
&e_1 R w_0 w_0 \\
&p, w_0/e_1 \\
&w_0 \Psi^B e_1 e_2 \\
&w_0 \Psi^K e_1 e_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

El árbol se vuelve infinito por la regla para la serialidad de Ψ^B , pero es completo porque se sabe que, no importa cuántas veces se aplique la regla, el árbol no se cierra.

Los contramodelos para una inferencia pueden obtenerse a partir de una rama abierta. Para todo w_i y e_x en la rama, $w_i \in W$ y $e_x \in E$. $R_{e_x} = \{\langle w_i, w_j \rangle : e_x R w_i w_j \text{ aparece en la rama}\}$. Ψ_w^B y Ψ_w^K se determinan de forma similar. Si $p, w_i/e_x$ aparece en la rama, $\nu_{w_i/e_x}(p) = 1$; si $\neg p, w_i/e_x$ aparece, $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$; si no aparece ninguno, $\nu_{w_i/e_x}(p)$ puede ser lo que uno quiera, llamaremos a esto último una *condición sin importancia*.

El contramodelo del árbol de (3.2) es infinito; no obstante, a prueba y error, puede encontrarse un contramodelo finito. Un par de técnicas generalmente buenas para ello son o permitir que, para algún e_x en un w_i , $w_i \Psi^B e_x e_x$, o que, para algún w_i , $\Psi_{w_i}^B = \Psi_{w_i}^K$, aunque esto hace que $[B]p \equiv [K]p$ y $\langle B \rangle p \equiv \langle K \rangle p$ sean válidos ahí. Suponiendo que $\Psi_{w_0}^K = \Psi_{w_0}^B$, un contramodelo finito para (3.2) es: $W = \{w_0\}$; $E = \{e_0, e_1\}$; $R_{e_0} = \{w_0 w_0\}$ y $R_{e_1} = \{w_0 w_0\}$; $\Psi_{w_0}^K = \Psi_{w_0}^B = \{e_0 e_0, e_0 e_1, e_1 e_1\}$; $\nu_{w_0/e_0}(p) = 0$ y $\nu_{w_0/e_1}(p) = 1$. Éste puede ilustrarse como en la figura 3.1 (R_e y Ψ_w^K son las flechas completas y Ψ_w^B las punteadas). Comprobar que funciona se deja al lector.

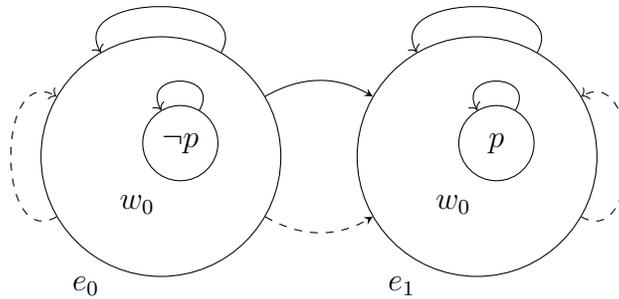


Fig. 3.1: Contramodelo finito de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ para (3.2).

Los árboles de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas. Véanse los teoremas 11.1 y 11.2.

4. ALGUNAS AFIRMACIONES SPINOZIANAS

Es bien sabido que en la historia de la filosofía Baruj Spinoza (1632-1670) creía que todo es metafísicamente necesario. Explícitamente, él decía que:¹

En la naturaleza no se da nada contingente, sino que todas las cosas son determinadas a existir y a operar de un cierto modo en virtud de la necesidad de la naturaleza divina. [54, p. 79 (E1/29)]

Las cosas no han podido ser producidas por Dios de otro modo ni según otro orden que como han sido producidas. [54, p. 84 (E1/33)]

La razón obvia es que, si sólo hay una sustancia –un único mundo posible–, entonces las cosas existentes en ella sólo pueden ser de una forma. El punto de vista según el cual todo es necesario se conoce como *necesarismo*.² Los comentaristas concuerdan en que Spinoza es un necesarista, aunque difieren en cómo pueda afirmar la necesidad regente en la realidad, que no es tan obvio qué significa que algo sea contingente, siendo así que debaten el grado de su afirmación (cf. Newlands [30]). Independientemente de cuál sea el estatus ontológico de la contingencia para Spinoza (a mi parecer nulo),³ él da una respuesta a qué es ésta no desde la metafísica sino desde la epistemología:

Se dice necesaria una cosa, o bien en razón de su esencia, o bien en razón de su causa. Pues la existencia de una cosa cualquiera se sigue necesariamente o bien de su misma esencia y definición, o bien de una causa eficiente dada. Y además, por esto mismo se dice una cosa imposible, o bien porque su esencia, o sea, su definición, implica contradicción, o bien porque no se da ninguna causa externa determinada a producir tal cosa. *Pero una cosa no se dice contingente por ninguna otra causa, a no ser por un defecto de nuestro conocimiento*. Pues una cosa de cuya esencia ignoramos implica contradicción, o de la que sabemos bien que no implica ninguna contradicción,

¹ Entre paréntesis refiero a la obra de Spinoza de la misma forma que en *De la necesidad a la contingencia. La modalidad según Spinoza (DNC)* [44, p. viii].

² No se le confunda con el *fatalismo*, el cual involucra la voluntad de Dios en la selección de un destino. Para un breve comentario sobre la distinción, véase *DNC* [44, pp. xviii-xix y 98ss].

³ En *DNC* [44, sec. 1.2.4], sugiero con evidencia textual que Spinoza negaba que la contingencia sea real; aun con todo, Miller [27] sugiere que Spinoza sí tiene un entendido metafísico de la posibilidad y que incluso lo requiere para establecer su necesarismo.

pero de la que tampoco podemos afirmar nada cierto acerca de su existencia por ocultársenos el orden de las causas, esa cosa nosotros no podemos verla nunca de como necesaria ni como imposible. Y por eso la llamamos o contingente o posible. [54, pp. 84s (E1/33e1), mis cursivas]

Aunque distante en el tiempo, el entendido de necesidad de Spinoza se parece al nuestro. Esto es más claro si empezamos con la imposibilidad (de hecho, en [53, pp. 121s (TIE, §53)], éste es, por así decirlo, el término modal básico). Para Spinoza, todo aquello que sea una contradicción por su sola definición es imposible; de cierta forma, esto se parece a la regla ($N\Box$): si $\vdash \neg\varphi$, entonces $\vdash \Box\neg\varphi$, *i.e.*, $\vdash \neg\Diamond\varphi$. El ejemplo favorito de Spinoza era considerar un círculo cuadrado; al ser éste una contradicción por su sola definición, es imposible que exista. Con respecto a lo necesario, él consideraba que es posible demostrar la existencia de Dios; si la demostración es válida, es una contradicción que Dios no exista, y, por equivalencia, ello vuelve a su existencia no sólo verdadera sino necesaria. Valga decir que las tres demostraciones para «Dios [...] existe necesariamente» [54, p. 52 (E1/11)] son reducciones al absurdo.⁴

Con respecto a los modos finitos de Dios –las cosas como nosotros, los animales, las estrellas–, estos no son ni necesarios ni imposibles como se ha dicho hasta ahora, *i.e.*, por definición. Digamos, mi existencia no es una contradicción en sí misma (de hecho, existo), pero tampoco lo es que no exista (es perfectamente consistente pensar en un mundo/escenario en el que yo nunca nací por uno u otro motivo).⁵ Spinoza sigue pareciéndose a nosotros, $\nabla p \equiv (\neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p)$, aunque difiere en lo siguiente: aún si algo es contingente por definición, si existe, ello se debe a una causa por la que es necesario que exista, y si no existe, es imposible que lo haga porque no se dieron las causas para ello. No es meramente posible que yo exista, es necesario dada una serie causal; y, además, es imposible que exista un hermano biológico menor a mí por cinco años porque no se dieron las causas apropiadas para ello. Que sólo haya una sustancia y una sola cadena causal le parece suficiente a Spinoza para afirmar que todo es necesario, incluso lo aparentemente contingente. Si conociéramos la naturaleza de todo y la serie causal por la cual sucede todo, dejaríamos de pensar en las cosas como posibles o contingentes

⁴ Como es de esperarse, ha habido intentos por formalizar la *Ética*, por ejemplo, el de Jarrett [19], sin embargo, no es necesario fijar tanto los detalles.

⁵ Para conciliar la existencia necesaria de Dios con lo existente en él, una interpretación reciente que ha tomado valor afirma que las cosas contingentes por definición existen necesariamente de forma colectiva. En cualquier consideración, parece falso que ‘si Dios existe necesariamente, Juan existe necesariamente’, pero, en el marco de la ontología spinoziana (donde los modos –finitos e infinitos– son expresiones de la sustancia), es plausible que ‘si Dios existe necesariamente, existe necesariamente la totalidad de las cosas predicables de él (entre las cuales está Juan no aisladamente)’. Esto se conoce en la literatura como *necesitarismo reivindicado* (cf. Newlands [30, 1.2.5]). Algo interesante sobre éste es que éste permite una especie de necesitarismo circunstancial: dadas ciertas circunstancias, $\Box p$. Dado mi entorno actual y mi condición corporal, vivo y es imposible que no viva.

y sólo nos quedaríamos con lo necesario para lo verdadero y lo imposible para lo falso.

En honor a las ideas de Spinoza, introduzcamos la siguiente definición:

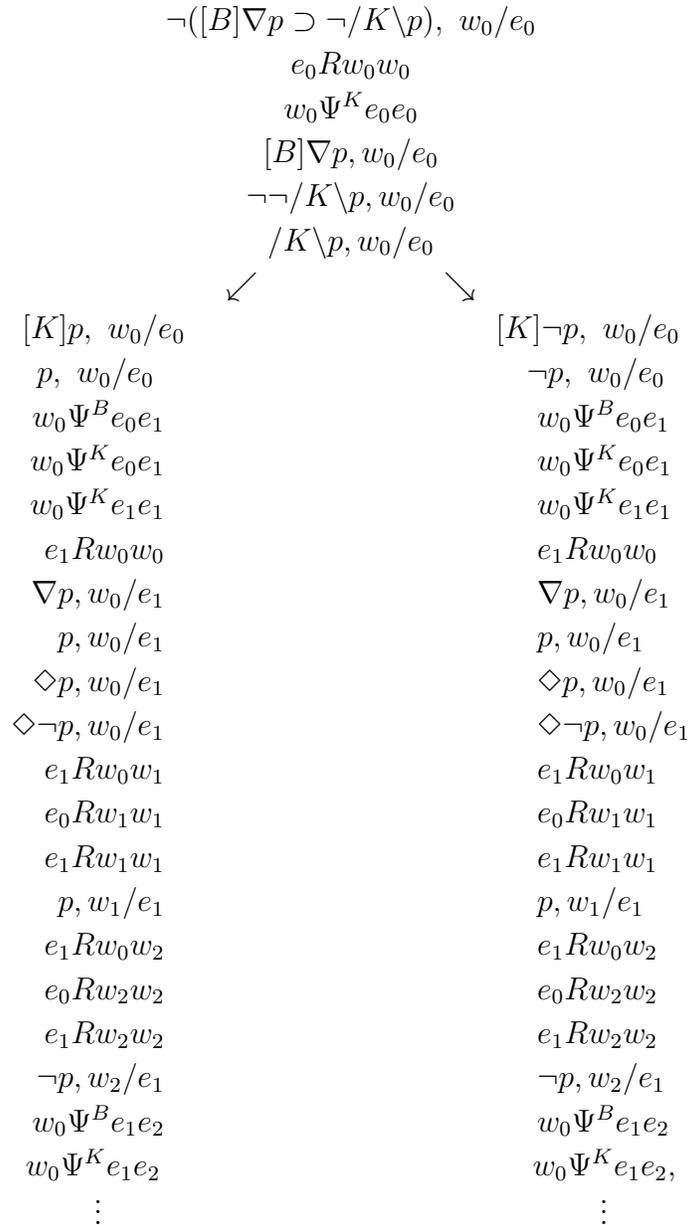
Una fórmula es una modalidad spinoziana sii se cierra bajo una implicación y la creencia o conocimiento de una modalidad alética implica la negación o de un conocimiento o de una creencia.

Todas las inferencias en este capítulo serán modalidades spinozianas.

Por lo que se ha expuesto, parece que Spinoza aceptaría:

$$(4.1) [B]\nabla p \supset \neg/K \setminus p$$

Aquí está el árbol que muestra que ésta no es una verdad lógica:



Cualquiera de las ramas se extiende *ad infinitum* y los contramodelos que dan también son infinitos. Con base en la rama izquierda se puede ilustrar el primer contramodelo de la figura 4.1. Eventualmente pude encontrar uno finito, el segundo de la figura 4.1. En éste, no sólo $[B]\nabla p$, sino que $[K]\nabla p$; también $[K]p$, siendo así que $\neg [K]\neg p$. Nótese que ambos modelos también validan $[B]\nabla p$ sin ir en contra de $[B]p \supset \neg[B]\neg p$. Volviendo a las consideraciones finales del capítulo 1, si no conozco a g , bien podría creer que es posible que g sea estricto y también que es posible que no lo sea sin que la creencia sea inconsistente. Considero que ésta es una de las características más atractivas de $T_{\square}/T_K/D_B^*$: permite creencias consistentes sobre contingencias, incluso conocimiento.

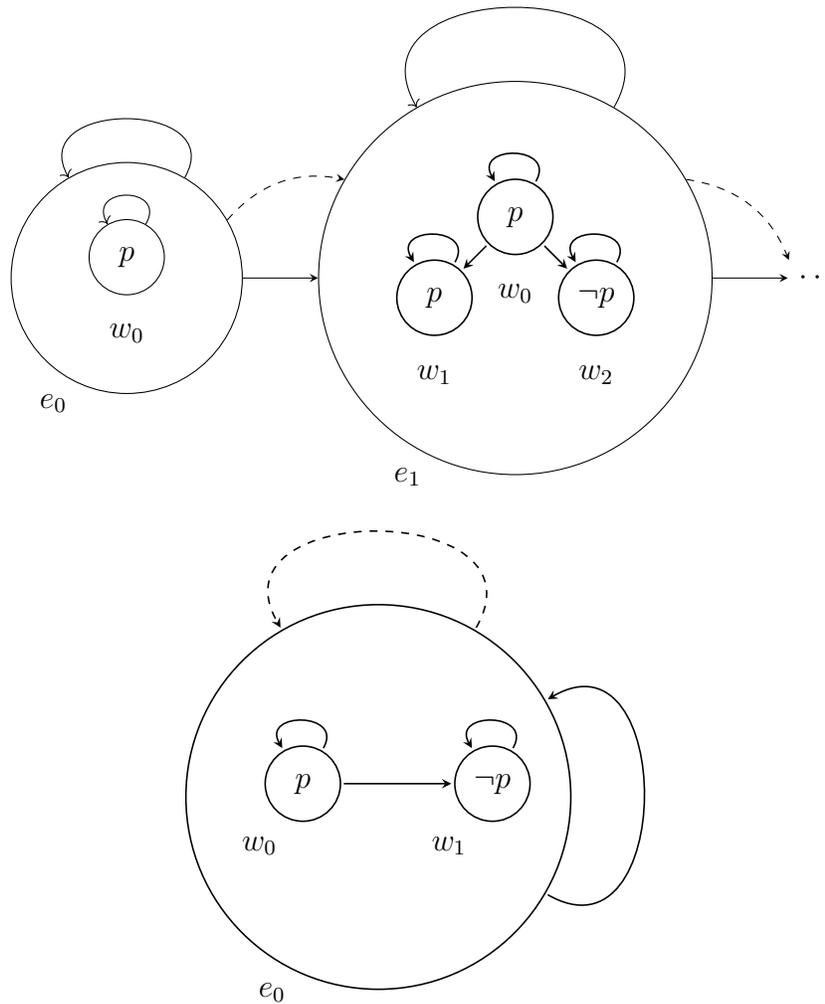


Fig. 4.1: Contramodelos para (4.1)

Si Spinoza viera estos modelos, lo más seguro es que él diría que esto no sucede porque sólo hay una sustancia –o mundo posible. Si fuera el caso de que $W = \{w_0\}$, la inferencia sería válida. De hecho, ello validaría que $p \supset \square p$ y $\diamond p \supset p$, pero junto con (T_{\square})

tenemos que $\Box p \equiv p$ y $\Diamond p \equiv p$, por lo que la lógica alética queda trivializada, los operadores son meros adornos [16, pp. 60s]. Si así se respondiera, uno puede preguntar ¿Por qué deberíamos aceptar que sólo hay un mundo posible? A lo cual Spinoza o un spinozista podría preguntar de vuelta ¿Por qué deberíamos aceptar que hay más de uno? A favor de que sólo hay uno, los monistas, como los materialistas, tienen por motivo dar cuenta de la cuenta de la causalidad (cf. Papineau [32, secc. 1.1s]). Si hubiera dos ámbitos completamente distintos, nada de lo que pasara en uno podría afectar al otro. La interacción sería imposible. Ésta era una consideración importante de los estoicos y epicúreos para negar el platonismo [50, p. 51], y parece que nosotros podemos aplicarla al tema de la pluralidad de mundos ¿Cómo tenemos conocimiento de algo con lo que no podemos interactuar (porque, de interactuar, habría algo en común, y hablaríamos entonces de un solo mundo)? En la obra de Spinoza, hay un esfuerzo constante por disolver aparentes oposiciones, como infinito-finito, humano-naturaleza, humano-divino, Dios-Naturaleza (o mundo) [34, p. 36], y quizá la que más llama la atención a comentaristas sea la de mente-cuerpo, ya que Spinoza creía que ontológicamente son una misma cosa, pero que conceptualmente no son reducibles el uno al otro (cf. Schmidt [48]).

Ahora bien, aun si se acepta que sólo hay un mundo posible ¿De ello se sigue que no es provechoso estudiar la modalidad? Aunque es debatible, parece que Spinoza no creía que sean incompatibles el necessitarismo metafísico y el pensamiento modal.⁶ En una de sus cartas escribió: «En la vida diaria, nos vemos obligados a seguir lo más verosímil, pero en la especulación, la verdad» [52, p. 329 (Ep56: 260)]. Si nos ponemos estrictos en cuanto a si las cosas pueden ser realmente contingentes o si realmente existe más de un mundo posible, Spinoza diría que hay razones para creer que no; sin embargo, aun si sólo hay un mundo posible, éste no es el único que concibe nuestra mente, las posibilidades que pensamos son verosímiles y muchas veces en la vida nos vemos obligados a seguirlas como si fueran verdaderas. Spinoza no veía que la modalidad fuera algo a evitar en nuestra vida, sino que incluso habría que conocerla para guiarnos lo mejor posible. El arrepentimiento es una tristeza por lo que pudo haber sido; la esperanza, una alegría inconstante sobre lo que puede suceder; la soberbia, un resultado de pensar más favorablemente sobre nosotros; y el menosprecio, un odio que surge al pensar lo peor posible de los otros. Habría que conocer el pensamiento modal para usarlo a nuestro favor. En última instancia, Spinoza consideraba que «[e]n la medida en que la mente entiende todas las cosas como necesarias, en esa medida tiene una mayor potencia sobre los afectos, o sea, menos padece por ellos» [54, p. 390 (E5/6)]; negativamente: *En la medida en que la mente entiende a las cosas como contingentes o posibles, en esa medida tiene menor potencia sobre los afectos, o sea, más padece*

⁶ La defensa de este punto se desarrolla más ampliamente en DNC [44, sec. 2.4].

por ellos.⁷ Desde luego, éstas son consideraciones prácticas, pero ello no resta valor a una formulación epistémica a su base; de hecho, en el orden geométrico de la *Ética*, la metafísica y la epistemología anteceden a la ética.

Para concluir este capítulo, consideremos algunas modalidades spinozianas más. Debido a que Spinoza afirma que todo es o necesario o imposible, *i.e.*, no contingente, es plausible modificar (4.1) para tener:

$$(4.2) [B]\nabla p \supset \neg[K]\Delta p$$

Esta inferencia también es inválida.

Aun con todo, hay una fórmula parecida que sí es válida

$$(4.3) [B]\nabla p \supset \neg[K]\Box p$$

aunque es más intuitiva su contraposición.

$$(4.4) [K]\Box p \supset \neg[B]\nabla p$$

Demostrar a ambas, ya sea con árboles o axiomáticamente, es fácil y se deja al lector. A modo de conclusión, (4.3) nos sugiere que la intuición de Spinoza no estaba del todo errada, hay creencias sobre modalidades aléticas que implican un desconocimiento.

⁷ Sobre la relación entre los pensamientos modales y las emociones véase *DNC* [44, sec. 3.3].

5. TEMPORALIZACIÓN DE $T_{\square}/T_K/D_B^*$

El sistema $T_{\square}/T_K/D_B^*$ originalmente surgió como una modificación del sistema aléxico temporal K_{\square}/K_t .¹ En este capítulo, primero doy un recorrido general por la lógica temporal K_t para luego explicar cómo funciona K_{\square}/K_t , cómo K_{\square}/K_t dio lugar a $T_{\square}/T_K/D_B^*$ y cómo pueden fusionarse $T_{\square}/T_K/D_B^*$ y K_t . Posteriormente desarrollo el sistema de árboles para la lógica fusionada. Para finalizar, hago algunos comentarios sobre la relativización de $<$ a mundos posibles y estados epistémicos.

La lógica temporal, K_t , es una modificación de la lógica modal. En K_t , hay cuatro operadores temporales: $[F]$, ‘en todo momento futuro’; $\langle F \rangle$, ‘en algún momento futuro’; $[P]$, ‘en todo momento pasado’; $\langle P \rangle$, ‘en algún momento pasado’.² El lenguaje de K_t , $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, es el mismo *mutatis mutandis* que el de la lógica modal. Una interpretación para $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ es una tupla $\langle T, <, \nu \rangle$. T es un conjunto no vacío de tiempos. $<$ es una relación binaria, $< \subseteq T \times T$, que representa un orden temporal; $t < t'$ significa que ‘ t precede a t' ’. ν es una función de pares de tiempos y parámetros a valores de verdad, $\nu : T \times \mathcal{P} \mapsto \{1, 0\}$; $\nu_t(p) = 1$ significa que ‘en t , p es verdadera’.

Las condiciones de verdad de las conectivas proposicionales son las mismas que en la lógica modal excepto porque w es t .

$$\begin{aligned} \nu_t(\neg\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \nu_t(\varphi) = 0 \\ \nu_t(\varphi \wedge \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \nu_t(\varphi) = \nu_t(\psi) = 1 \end{aligned}$$

Las condiciones de verdad para los operadores temporales son similares a las de \square y \diamond , aunque en los casos de $[P]$ y $\langle P \rangle$ el orden de $<$ se invierte:

$$\begin{aligned} \nu_t([P]\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } t' \in T \text{ tal que } t' < t, \nu_{t'}(\varphi) = 1 \\ \nu_t(\langle P \rangle\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para algún } t' \in T \text{ tal que } t' < t, \nu_{t'}(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Al lenguaje podemos agregar las siguientes definiciones:³

$$\begin{aligned} [T]\varphi &=_{def} [P]\varphi \wedge \varphi \wedge [F]\varphi && \text{Siempre } \varphi - \text{En todo momento, } \varphi \\ \langle T \rangle\varphi &=_{def} \langle P \rangle\varphi \vee \varphi \vee \langle F \rangle\varphi && \text{A veces } \varphi - \text{En algún momento, } \varphi \end{aligned}$$

¹ En [36, 3.7a-3.7b], K_t se llama K^t , y en [47], la fusión se llama K/K^t ; la modificación a los nombres se da para mantener una coherencia con el resto del trabajo.

² La notación histórica original es G , F , H y P respectivamente.

³ La notación histórica original es A y S respectivamente.

Donde $[O]$ es cualquier operador temporal universal (*i.e.*, $[F]$, $[P]$ o $[T]$) y $\langle O \rangle$ su dual particular (*i.e.*, $\langle F \rangle$, $\langle P \rangle$ o $\langle T \rangle$), $[O]A \equiv \neg \langle O \rangle \neg A$.

La validez semántica se define en términos de la preservación de la verdad como en la lógica modal *mutatis mutandis*.

El sistema axiomático de K_t es el siguiente:

- (LC) Todos los axiomas y teoremas, $\vdash \varphi$, de la lógica clásica proposicional
- (SU) Si $\vdash \varphi$ y p forma parte de φ , entonces la fórmula resultante, φ' , al sustituir uniformemente p por ψ , $[p/\psi]$, también es un axioma o teorema, $\vdash \varphi'$
- (MP) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
- (NP) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [P]A$
- (NF) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [F]A$
- (CP) $[P](p \supset q) \supset ([P]p \supset [P]q)$
- (CF) $[F](p \supset q) \supset ([F]p \supset [F]q)$
- (PF) $p \supset [P]\langle F \rangle p$
- (FP) $p \supset [F]\langle P \rangle p$

K_t puede extenderse añadiendo restricciones a $<$ y lo apropiado al sistema axiomático.

Para tener todas las relaciones del hexágono de Blanché (véase la figura 1.2), se pide:

- Serialidad hacia atrás:* Para todo $t \in T$, hay un t' tal que $t' < t$
- Serialidad hacia adelante:* Para todo $t \in T$, hay un t' tal que $t < t'$

Entonces son válidos respectivamente:

- (DP) $[P]p \supset \langle P \rangle p$
- (DF) $[F]p \supset \langle F \rangle p$

Ahora bien, un supuesto normalmente aceptado en la literatura es que el orden del tiempo debe ser lineal, *i.e.*, tiene que satisfacer las restricciones:

- Conectividad:* Para todo $t, t' \in T$, $t < t'$ o $t' < t$ o $t = t'$
- Transitividad:* Para todo $t, t', t'' \in T$, si $t < t'$ y $t' < t''$, entonces $t < t''$
- Antisimetría:* Para todo $t, t' \in T$, si $t < t'$ entonces $t' \not< t$
- Antirreflexividad:* Para todo $t \in T$, $t \not< t$.

La restricción de conectividad implica formalmente a dos restricciones:

- Convergencia retrospectiva:* Para todo $t, t', t'' \in T$, si $t' < t$ y $t'' < t$, entonces $t' < t''$ o $t'' < t'$ o $t' = t''$
- Convergencia adelantada:* Para todo $t, t', t'' \in T$, si $t < t'$ y $t < t''$, entonces $t' < t''$ o $t'' < t'$ o $t' = t''$

Estas restricciones a $<$ respectivamente hacen válidos a los axiomas:

- (HP) $(\langle P \rangle p \wedge \langle P \rangle q) \supset ((\langle P \rangle (\langle P \rangle p \wedge q) \vee \langle P \rangle (p \wedge q) \vee \langle P \rangle (p \wedge \langle P \rangle q))$
 (HF) $(\langle F \rangle p \wedge \langle F \rangle q) \supset ((\langle F \rangle (\langle F \rangle p \wedge q) \vee \langle F \rangle (p \wedge q) \vee \langle F \rangle (p \wedge \langle F \rangle q))$

Estos axiomas se llaman (H) por Hintikka [5, p. 19].

Si $<$ satisface transitividad, entonces tenemos los axiomas:

- (4P) $[P]p \supset [P][P]p$
 (4F) $[F]p \supset [F][F]p$

Otro supuesto usual que puede hacerse sobre $<$ es que éste puede satisfacer la restricción:

Densidad: Para todo $t, t' \in T$ hay un t'' tal que, si $t < t'$, entonces $t < t''$ y $t'' < t'$

Si $<$ satisface esta restricción, entonces tenemos los axiomas:

- (DEP) $[P][P]p \supset [P]p$
 (DEF) $[F][F]p \supset [F]p$

La lógica que satisface (HP), (HF), (4P) y (4F) normalmente se conoce como L_t , y aunque no satisface la restricción de conectividad (que no es implicada por ninguna restricción de convergencia, ni siquiera juntas), poner dicha restricción a $<$ no da más principios válidos, tampoco aumentan las inferencias si se satisfacen las restricciones de antisimetría y antireflexividad, sólo evitamos algunas inferencias, por ejemplo, $[F]p \supset p$; si a L_t se le agregan (DP), (DF), (DEP) y (DEF), el sistema se conoce como Q_t (cf. Goranko y Rumberg [15, sec. 3.6]).

Ahora bien, ciertos planteamientos filosóficos requieren que puedan unirse tanto las nociones modales como las temporales. Aquí hay uno con respecto a la restricción de convergencia adelantada planteada por Priest:

... es natural suponer que el futuro es un camino abierto de una forma en la que no lo es el pasado. Que p describa algún evento futuro que está en mi poder hacer verdadero y que está en mi poder hacer falso (digamos, que p sea 'tendré tres hijos' –bueno, con la pequeña ayuda de otra persona), entonces

pareciera que hay diferentes futuros, unos en los que p es verdadera, otros en los que p no lo es. Lo mismo no sucede en el caso de q para el pasado (por ejemplo, ‘tengo dos hijos’). Ahora no está en mi poder decidir si esto es verdadero o falso a voluntad. Por tanto, uno podría suponer que el tiempo satisface la condición β de la convergencia en retrospectiva, aunque no la condición φ de la convergencia adelantada.

Sin embargo, esto no es para nada claro. Concedamos que hay dos futuros posibles al respecto de p ; no se sigue que haya dos futuros reales. Ciertamente, $\diamond\langle P\rangle p \wedge \diamond\langle P\rangle\neg p$; pero no es claro que $\langle P\rangle p \wedge \langle P\rangle\neg p$. El primero de estos es bastante compatible con la convergencia futura; sin embargo, para establecer esto se requiere una semántica para un lenguaje tanto con operadores temporales como modales. Dejo los detalles como un ejercicio no trivial. [36, sec. 3.7b.11s, mi traducción]

Inspirado en este pasaje, en una ocasión previa desarrollé tanto las semánticas como los sistemas de árboles de algunas lógicas alético-temporales. La lógica básica de este tipo la llamé MT por ‘Modal-Tense Logic’, aunque un nombre técnico más apropiado sería K_{\square}/K_t (cf. Sánchez Hernández [47]). Una interpretación para el lenguaje de MT , $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, es una tupla $\langle W, T, R_t, <_w, \nu \rangle$. W y T son conjuntos no vacíos de mundos posibles y tiempos respectivamente. R_t es una relación ternaria entre mundos posibles conforme a tiempos, $R_t \subseteq T \times W \times W$, e indica que las relaciones entre mundos suceden en momentos determinados; $tRww'$ significa que ‘en t , w accede a w' ’.⁴ La motivación detrás de R_t son oraciones del tipo ‘en 1932, a Inglaterra le era posible impedir la guerra con Alemania, pero fue imposible en 1937’. $<_w$ es una relación ternaria entre tiempos conforme a mundos, $<_w \subseteq W \times T \times T$, e indica que cada mundo tiene su propio orden temporal; $(w) t < t'$ significa que ‘en w , t precede a t' ’. ν es una función de tuplas de mundos posibles, tiempos y parámetros proposicionales a valores de verdad, $\nu : W \times T \times \mathcal{P} \mapsto \{1, 0\}$; de esta forma, $\nu_{w/t}(p) = 1$ significa que ‘en w en t , p es verdadera’. Las condiciones de verdad y la validez son las mismas *mutatis mutandis* que las de $T_{\square}/T_K/D_B^*$.

Algo especial de MT es que permite que los mundos difieran en qué tiempos les pertenecen al diferir en sus órdenes temporales. Considérese:

$$(5.1) [T]\langle F\rangle\top \supset \square[T]\langle F\rangle\top$$

Esta inferencia es inválida en MT . Como apuntan Correia y Rosenkranz [8, p. 9], el antecedente indica que siempre hay un momento futuro en el tiempo, pero el consecuente puede ser falso si en algún otro mundo posible el tiempo se detiene con respecto al futuro. Aun si (5.1) fuera válida aceptando la restricción de serialidad adelantada apropiada,

⁴ Sobre la precisión de esta notación, véase la nota 2 del capítulo 2.

i.e., relativa a mundos, no hay una garantía de que los mundos compartan los mismos tiempos. Esto puede cambiar si el orden deja de ser relativo: $\langle W, T, R_t, <, \nu \rangle$. El sistema resultante lo llamé *MOT* por ‘Modality of Ordered Tense’ (modalidad del tiempo ordenado) y es una extensión de *MT* al validar (5.1). Para distinguir a los sistemas con esta característica marcamos a la lógica temporal con un índice de *, por ejemplo, sin restricciones *MOT* se llamaría K_{\square}/K_t^* . K_{\square}/L_t^* da un modelo interesante con respecto a lo dicho por Priest sobre la convergencia adelantada (véase la figura 5.1). Que haya dos posibilidades con respecto al futuro no implica que haya dos futuros reales; y esto no es incompatible con que el tiempo satisfaga la restricción de convergencia adelantada incluso entre mundos.

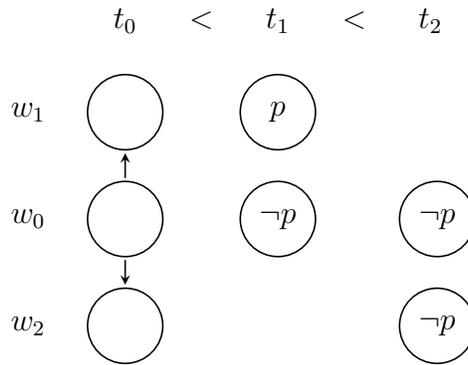


Fig. 5.1: Modelo de K_{\square}/L_t^* para un problema planteado en por Priest sobre la convergencia hacia adelante en [36, 3.7b.11-12], re-elaboración de la figura en [47, p. 14].

Ahora bien, $T_{\square}/T_K/D_B^*$ es una invención propia que hace algunas modificaciones a las semánticas de *MT*.⁵ Así como *MT* permite que cada relación suceda a un tiempo, R_t , y cada mundo tenga su propio orden temporal, $<_w$, $T_{\square}/T_K/D_B^*$ permite que las relaciones sucedan en estados epistémicos, R_e , y que cada relación entre estados epistémicos sea relativa a un mundo posible, Ψ_w^K y Ψ_w^B . Al inicio, sólo formulé el sistema como una analogía, pero luego me di cuenta de su verdadera implicación filosófica: como mencioné en el capítulo 2, R_e parece forzar a una lectura actualista de la lógica modal, ya que los mundos posibles y sus relaciones se relativizan a estados epistémicos. Hay sistemas lógicos que no consiguen forzar el actualismo. En la última década, Daniel Rönnedal ha desarrollado varios sistemas multimodales [39, 40, 41, 42], pero su sistema más ambicioso [43] es una fusión que es doxástica, alética, temporal, volitiva (*boulesic*) y

⁵ Ciertamente, no es único en su clase. Alexandre Costa Leite [9] ha desarrollado el sistema alético epistémico $S5^{\Delta} \oplus S5^*$, pero los axiomas y las semánticas son distintos, él usa semánticas de productos mientras que las mías son fusiones. Sobre los distintos métodos para combinar lógicas, véase a Carnielli y Coniglio [7, sec. 4]. Aun con todo, Costa-Leite afirma que sus semánticas tienen dos conjuntos, W y S , que pueden o no ser lo mismo; así pues, puede ser que su sistema también se preste para una interpretación actualista.

con cuantificadores de primer orden. En estos sistemas, los mundos aléticos, doxásticos y volitivos sólo se distinguen por las relaciones en las que se encuentran. Digamos, el análogo a Ψ^B , \mathfrak{D} , no es una relación entre estados epistémicos, $\mathfrak{D} \subseteq E \times E$, sino entre mundos, $\mathfrak{D} \subseteq W \times W$. Que haya relaciones que coincidan en su origen y difieran en su extensión no es raro si hablamos de operadores de la misma clase, por ejemplo, Ψ^B y Ψ^K son subconjuntos de $E \times E$ y ambas se usan para operadores relativos a conceptos epistémicos; sin embargo, cuando se trabaja con lógicas multimodales, parece prudente tener conjuntos distintos si los operadores trabajan en ámbitos distintos. Digamos, en una lógica como MT podemos distinguir entre los miembros de W y los de T , y sería raro que no lo hiciéramos; así pues ¿Por qué en una lógica como la propuesta por Rønneidal debería usarse W indistintamente tanto para lo alético como para lo doxástico? Considero que lo más natural es distinguir entre los miembros de W y E .⁶

Para una formulación axiomática del sistema $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$, añadimos al sistema axiomático del capítulo 2 todos los principios temporales arriba revisados. Sobre (5.1) hablaremos al final del capítulo.

Por lo dicho sobre distinguir entre las categorías de operadores, me parece que una interpretación apropiada para el lenguaje de la fusión, que es $\mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_T \cup \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_D$, es una tupla $\langle W, T, E, R_{t/e}, <_{w/e}, \Psi_{w/t}^K, \Psi_{w/t}^B, \nu \rangle$ (relativizaremos a MT con E , así la lógica alético-temporal será relativa a un agente epistémico).

W, T y E son conjuntos no vacíos de mundos posibles, tiempos y estados epistémicos respectivamente.

$R_{t/e}$ es una relación cuádruple, $R_{t/e} \subseteq T \times E \times W \times W$, que representa una relación de accesibilidad entre mundos posibles de estados epistémicos relativizada a tiempos; de esta forma, $teRww'$ significa que ‘en t , en e , w accede a w' ’.

⁶ La lógica deóntica no goza de una aceptación tan amplia como las lógicas que hemos revisado hasta ahora. En parte, sin planteamientos multimodales es muy rígida, por ejemplo, sin temporalizarla se tiene que suponer que la ley es ahistórica, pero bien puede suceder que las obligaciones del pasado no sean las mismas que las del presente [55, pp. 209s]. De ser correcta mi consideración de distinguir las relaciones según el ámbito en el que se desarrollan sus operadores, creo que uno de los desafíos que tiene la lógica deóntica es determinar justamente cuál es su ámbito. Parece claro, por ejemplo, que los conceptos volitivos –i.e., querer, rechazar, etc.– son ámbitos de E , pero no es claro a qué ámbito pertenezcan las nociones deónticas. A mi parecer la opción más plausible es que W sea lo más adecuado, los deberes y permisos dependen de las situaciones en que nos encontremos, pero esto sería comprometernos demasiado al hacer que los conceptos funcionen al nivel de la realidad, lo cual nos lleva a una discusión sobre la dicotomía entre las cuestiones de hecho y las de valoración. Una discusión sobre esto último se desarrolla en [7, sec. 1]. Aun con todo, considero es deseable saber cómo abordar esta cuestión para asuntos prácticos, por ejemplo, para hablar del derecho a saber (cf. Watson [58] para una discusión reciente). A todo esto, valga decir que algunos sistemas de Rønneidal son deónticos multimodales [39, 40, 41].

Para tener a (T_{\square}) , $R_{t/e}$ es relativamente

Reflexiva: Para todo $w \in W$, $t \in T$ y $e \in E$, $teRww$

$<_{w/e}$ es una relación cuádruple, $W \times E \times T \times T$, que representa a una sucesión de tiempos relativizada a mundos de estados epistémicos; de esta forma, $(w/e) t < t'$ significa que ‘en w de e , t precede a t' ’.

Para tener a (DP) y (DF), $<_{w/e}$ tiene que ser relativamente:

Serial hacia el pasado: Para todo $w \in W$, $t \in T$ y $e \in E$, hay un t' tal que $(w/e) t' < t$

Serial hacia el futuro: Para todo $w \in W$, $t \in T$ y $e \in E$, hay un t' tal que $(w/e) t < t'$

Para tener de (HP) y (HF), $<_{w/e}$ que ser relativamente:

Convergente hacia el pasado: Para todo $w \in W$, $t, t', t'' \in T$ y $e \in E$, si $(w/e) t' < t$ y $(w/e) t'' < t$, entonces $(w/e) t' < t''$ o $(w/e) t'' < t'$ o $(w/e) t' = t''$

Convergente hacia el futuro: Para todo $w \in W$, $t, t', t'' \in T$ y $e \in E$, si $(w/e) t < t'$ y $(w/e) t < t''$, entonces $(w/e) t' < t''$ o $(w/e) t'' < t'$ o $(w/e) t' = t''$

Para tener a (4P) y (4F), $<_{w/e}$ tiene que ser relativamente:

Transitiva: Para todo $w \in W$, $t, t', t'' \in T$ y $e \in E$, si $(w/e) t < t'$ y $(w/e) t' < t''$, entonces $(w/e) t < t''$

Las restricciones de antisimetría y antireflexividad se satisfacen sólo con evitar añadir relativamente simetría y reflexividad a $<_{w/e}$.

Para tener a (DEP) y (DEF), $<_{w/e}$ tiene que ser relativamente:

Densa: Para todo $w \in W$, $t, t' \in T$ y $e \in E$, si $(w/e) t < t'$, entonces hay algún t'' tal que $(w/e) t < t''$ y $(w/e) t'' < t$

$\Psi_{w/t}^K$ es una relación cuádruple, $\Psi_{w/t}^K \subseteq W \times T \times E \times E$, que representa una relación epistémica relativizada a mundos y tiempos; de esta forma, $wt\Psi^K ee'$ significa que ‘en w en t , e accede epistémicamente a e' ’.

Para tener a (TK), $\Psi_{w/t}^K$ es relativamente:

Reflexiva: Para todo $w \in W$, $t \in T$ y $e \in E$, $wt\Psi^K ee$

$\Psi_{w/t}^B$ es similar a $\Psi_{w/t}^K$.

Para tener a (DB), $\Psi_{w/t}^B$ es relativamente:

Serial: Para todo $w \in W$, $t \in T$ y $e \in E$, hay un e' tal que $wt\Psi^B ee'$

Para tener a (KB), aceptamos que:

$$\Psi_{w/t}^B \subseteq \Psi_{w/t}^K$$

ν es una función de tuplas de mundos, estados epistémicos, tiempos y parámetros proposicionales a valores de verdad, $\nu : W \times T \times E \times \mathcal{P} \mapsto \{1, 0\}$; de esta forma, $\nu_{w/t/e}(p) = 1$ significa que ‘en w en t de e , p es verdadera’.

Las condiciones de verdad de conectivas proposicionales, operadores modales, epistémicos y doxásticos se relativizan a tiempos apropiadamente; en las de operadores temporales, relativizamos apropiadamente a mundos y estados epistémicos.

$$\begin{array}{ll} \nu_{w/t/e}(\neg A) = 1 & \text{sii } \nu_{w/t/e}(A) = 0 \\ \nu_{w/t/e}(A \wedge B) = 1 & \text{sii } \nu_{w/t/e}(A) = \nu_{w/t/e}(B) = 1 \\ \nu_{w/t/e}(\Box A) = 1 & \text{sii para todo } w' \in W \text{ tal que } etRww', \nu_{w'/t/e}(A) = 1 \\ \nu_{w/t/e}([K]A) = 1 & \text{sii para todo } e' \in E \text{ tal que } wt\Psi^K ee', \nu_{w/t/e'}(A) = 1 \\ \nu_{w/t/e}([B]A) = 1 & \text{sii para todo } e' \in E \text{ tal que } wt\Psi^B ee', \nu_{w/t/e'}(A) = 1 \\ \nu_{w/t/e}([F]A) = 1 & \text{sii para todo } t' \in T \text{ tal que } (w/e) t < t', \nu_{w/e/t'}(A) = 1 \\ \nu_{w/t/e}([P]A) = 1 & \text{sii para todo } t' \in T \text{ tal que } (w/e) t' < t, \nu_{w/e/t'}(A) = 1 \end{array}$$

Las condiciones para \diamond , $\langle K \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle F \rangle$ y $\langle P \rangle$ sólo cambian *todo* por *algún*. Para todo par de operadores $[O]$ y $\langle O \rangle$, $[O]p \equiv \neg \langle O \rangle \neg p$. Debido a que las condiciones sólo están relativizadas, la validez de los elementos del sistema axiomático no se ve afectada. Una interpretación de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ es una de $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$ en la que $T = \{t_0\}$. $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$ es una extensión propia de los sistemas que la componen.

Sean m , n y o números naturales. Los árboles de $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$ son los mismos que los de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ excepto porque se añaden índices de tiempo apropiadamente y las reglas para los operadores temporales y para las restricciones a $<_{w/e}$.

Una lista inicial para una inferencia consta de un nodo $\psi, w_0/t_0/e_0$ para cada premisa (si hay alguna) y $\neg\varphi, w_0/t_0/e_0$ para la conclusión. Una rama se cierra, \otimes , si en ella aparecen $\varphi, w_i/t_m/e_x$ y $\neg\varphi, w_i/t_m/e_x$.

Para las conectivas proposicionales:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi \wedge \psi, w_i/t_m/e_x & & \neg(\varphi \wedge \psi), w_i/t_m/e_x \\
\downarrow & \swarrow & \searrow \\
\varphi, w_i/t_m/e_x & \neg\varphi, w_i/e_x/t_m & \neg\psi, w_i/t_m/e_x \\
\psi, w_i/t_m/e_x & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi \vee \psi, w_i/t_m/e_x & & \neg(\varphi \vee \psi), w_i/t_m/e_x \\
\swarrow & \searrow & \downarrow \\
\varphi, w_i/e_x/t_m & \psi, w_i/t_m/e_x & \neg\varphi, w_i/t_m/e_x \\
& & \neg\psi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi \supset \psi, w_i/t_m/e_x & & \neg(\varphi \supset \psi), w_i/t_m/e_x \\
\swarrow & \searrow & \downarrow \\
\neg\varphi, w_i/e_x/t_m & \psi, w_i/t_m/e_x & \varphi, w_i/t_m/e_x \\
& & \neg\psi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\varphi \equiv \psi, w_i/t_m/e_x & & \neg(\varphi \equiv \psi), w_i/t_m/e_x & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
\varphi, w_i/t_m/e_x & \neg\varphi, w_i/t_m/e_x & \varphi, w_i/t_m/e_x & \neg\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\psi, w_i/t_m/e_x & \neg\psi, w_i/t_m/e_x & \neg\psi, w_i/t_m/e_x & \psi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\neg\neg\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\downarrow \\
\varphi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

Las reglas de equivalencia para los operadores son:

$$\begin{array}{ccc}
\neg[O]\varphi, w_i/t_m/e_x & & \neg\langle O\rangle\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\downarrow & & \downarrow \\
\langle O\rangle\neg\varphi, w_i/t_m/e_x & & [O]\neg\varphi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

Las reglas de contingencia y no contingencia, para cualesquiera par de operadores, O , son:

$$\begin{array}{ccc}
\neg\backslash O/\varphi, w_i/t_m/e_x & & \neg/O\backslash\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\downarrow & & \downarrow \\
/O\backslash\varphi, w_i/t_m/e_x & & \backslash O/\varphi, w_i/t_m/e_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\backslash O/\varphi, w_i/t_m/e_x & & /O\backslash\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\
\langle O\rangle\varphi, w_i/t_m/e_x & [O]\varphi, w_i/t_m/e_x & [O]\neg\varphi, w_i/t_m/e_x \\
\langle O\rangle\neg\varphi, w_i/t_m/e_x & &
\end{array}$$

Las reglas de operadores aléticos, epistémicos y doxásticos son:

$$\begin{array}{cccc}
 \square\varphi, w_i/t_m/e_x & \diamond\varphi, w_i/t_m/e_x & & \\
 t_m e_x R w_i w_j & \downarrow & & \\
 \downarrow & t_m e_x R w_i w_j & & \\
 \varphi, w_j/t_m/e_x & \varphi, w_j/t_m/e_x & & \\
 \\
 [K]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle K \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x & [B]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle B \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x \\
 w_i \Psi^K e_x e_y & \downarrow & w_i t_m \Psi^B e_x e_y & \downarrow \\
 \downarrow & w_i t_m \Psi^K e_x e_y & \downarrow & w_i t_m \Psi^B e_x e_y \\
 \varphi, w_i/t_m/e_y & \varphi, w_i/t_m/e_y & \varphi, w_i/t_m/e_y & \varphi, w_i/t_m/e_y
 \end{array}$$

Lo único nuevo en estas reglas son los índices de tiempo, pero las reglas de aplicación siguen siendo las mismas. Igual que antes, para introducir las líneas de relaciones es útil primero escribir la relativización y luego la relación principal, por ejemplo, escribir primero $w_i t_m$ y luego $\Psi^K e_x e_y$.

La novedad para $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$ es que ahora tenemos operadores temporales. Sus reglas de inferencias son las siguientes:

$$\begin{array}{cccc}
 [F]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle F \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x & [P]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle P \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x \\
 (w_i/e_x) t_m < t_n & \downarrow & (w_i/e_x) t_n < t_m & \downarrow \\
 \downarrow & (w_i/e_x) t_m < t_n & \downarrow & (w_i/e_x) t_n < t_m \\
 \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x
 \end{array}$$

En las reglas de $[F]$ y $[P]$, requerimos las líneas de relaciones en las ramas; en las reglas de $\langle P \rangle$ y $\langle F \rangle$, las líneas se introducen con un número de tiempo, n .

Las reglas para $[T]$ y $\langle T \rangle$ son:

$$\begin{array}{cccc}
 [T]\varphi, w_i/t_m/e_x & & \langle T \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x & \\
 \downarrow & & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\
 [P]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle P \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x & \varphi, w_i/t_m/e_x & \langle F \rangle\varphi, w_i/t_m/e_x \\
 \varphi, w_i/t_m/e_x & & & \\
 [F]\varphi, w_i/t_m/e_x & & &
 \end{array}$$

Las reglas para las restricciones a $R_{t/e}$, $\Psi_{w/t}^K$ y $\Psi_{w/t}^B$ simplemente añaden un índice de tiempo apropiado y se aplican con las mismas reglas y sugerencias que las vistas en el capítulo 3:

$$\begin{array}{cccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & w_i t_m \Psi^B e_x e_y \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 t_m e_x R w_i w_i & w_i t_m \Psi^K e_x e_x & w_i t_m \Psi^B e_x e_y & w_i t_m \Psi^K e_x e_y
 \end{array}$$

Las reglas para las restricciones a $<_{w/e}$ son las siguientes. Para la serialidad hacia adelante y hacia atrás, tenemos respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ (w_i/e_x) t_m < t_n & & (w_i/e_x) t_n < t_m \end{array}$$

donde i , x y m ya están en la rama y n es nuevo.

Para las reglas de las convergencias, requerimos tres reglas nuevas:

$$\begin{array}{ccc} (w_i/e_x) t_m = t_n & (w_i/e_x) t_m = t_n & (w_i/e_x) t_m = t_n \\ \varphi, w_i/t_m/e_x & (w_i/e_x) t_m < t_o & (w_i/e_x) t_o < t_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \varphi, w_i/t_n/e_x & (w_i/e_x) t_n < t_o & (w_i/e_x) t_o < t_n \end{array}$$

Las reglas se explican por sí mismas.

Una vez con estos elementos, la regla para convergencia hacia atrás es:

$$\begin{array}{ccc} & (w_i/e_x) t_m < t_o & \\ & (w_i/e_x) t_n < t_o & \\ & \downarrow & \\ (w_i/e_x) t_m < t_n & (w_i/e_x) t_m = t_n & (w_i/e_x) t_n < t_m \end{array}$$

La regla para la convergencia hacia adelante es:

$$\begin{array}{ccc} & (w_i/e_x) t_o < t_m & \\ & (w_i/e_x) t_o < t_n & \\ & \downarrow & \\ (w_i/e_x) t_m < t_n & (w_i/e_x) t_m = t_n & (w_i/e_x) t_n < t_m \end{array}$$

La reglas para la transitividad y la densidad son respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} (w_i/e_x) t_m < t_n & (w_i/e_x) t_m < t_n & \\ (w_i/e_x) t_n < t_o & \downarrow & \\ \downarrow & (w_i/e_x) t_m < t_o & \\ (w_i/e_x) t_m < t_n & (w_i/e_x) t_o < t_n & \end{array}$$

En la regla para la densidad, o es un número de tiempo nuevo en la rama.

Como el lector se habrá dado cuenta, aunque el sistema de árboles es correcto y completo con respecto a las semánticas de $T_{\square}/Q_t/T_K/D_B^*$ (véase el teorema 11.3), los árboles son difíciles de desarrollar, por lo menos manualmente (crear un algoritmo para que los desarrolle una máquina es posible, aunque laborioso). Por mor a la brevedad, aquí no desarrollaré ningún ejemplo de inferencias válidas o inválidas. En todo caso, proceder axiomáticamente para obtener nuevos teoremas parece una opción sensata.

Así pues, el sistema de árboles se queda como una herramienta en caso de que una inferencia sea dudosa.

Para concluir este capítulo, sólo quiero agregar un comentario sobre la relativización de $<$. Para esto, nos basamos en la lógica temporal básica K_t (si aceptamos la restricción de serialidad hacia adelante, las inferencias son válidas, pero perderíamos el punto de qué pasaría si los mundos/estados mentales compartieran a $<$). Como mencioné antes, MOT difiere de MT en la relativización de $<$; en MOT , $<$ es absoluta. Las reglas de árboles de MOT son las mismas que las de MT excepto porque el índice de mundo puede prescindirse en las líneas de $<$ siempre y cuando la extensión de la rama respete el otro índice de mundo (cf. Sánchez Hernández [47, sec. 2]). Análogamente, si queremos que en el orden no sea relativo a mundos sino sólo a estados epistémicos, *i.e.*, $\langle W, T, E, R_{t/e}, <_e, \Psi_{w/t}^K, \Psi_{w/t}^B, \nu \rangle$, las reglas de árboles serían:

$$\begin{array}{cccc}
[F]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle F \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x & [P]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle P \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x \\
(e_x) t_m < t_n & \downarrow & (e_x) t_n < t_m & \downarrow \\
\downarrow & (e_x) t_m < t_n & \downarrow & (e_x) t_n < t_m \\
\varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x
\end{array}$$

y en las reglas para las restricciones sólo hay que tener cuidado que coincidan las e_x de los nodos. Llámese a este sistema $T_{\square}/K_t^*/T_K/D_B^*$. De tener esta restricción, (5.1) es válida en $T_{\square}/K_t^*/T_K/D_B^*$.

Si queremos que $<$ no sea relativo a estados epistémicos, sino sólo a mundos, *i.e.*, $\langle W, T, E, R_{t/e}, <_w, \Psi_{w/t}^K, \Psi_{w/t}^B, \nu \rangle$, las reglas serían:

$$\begin{array}{cccc}
[F]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle F \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x & [P]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle P \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x \\
(w_i) t_m < t_n & \downarrow & (w_i) t_n < t_m & \downarrow \\
\downarrow & (w_i) t_m < t_n & \downarrow & (w_i) t_n < t_m \\
\varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x
\end{array}$$

y en las reglas para las restricciones sólo hay que tener cuidado que coincidan las w_i de los nodos. Para distinguir a los sistemas con esta característica, marcamos a la lógica temporal con un índice de $+$, por ejemplo, K_K/K_t^+ . De tener esta restricción, en el sistema $T_{\square}/K_t^+/T_K/D_B^*$ (5.1) es inválido, pero es válida

$$(5.2) [T]\langle F \rangle \top \supset [K][T]\langle F \rangle \top$$

así como también lo es

$$(5.3) [T]\langle F \rangle \top \supset [B][T]\langle F \rangle \top$$

Es fácil comprobar que (5.2) y (5.3) son inválidas si se acepta $<_e$ por el mismo motivo por el que (5.1) es válido en MOT pero no en MT .

Finalmente, si no queremos que $<$ sea relativo a nada, sino que sea absoluto, *i.e.*, $\langle W, T, E, R_{t/e}, \Psi_{w/t}^K, \Psi_{w/t}^B, <, \nu \rangle$, las reglas serían:

$$\begin{array}{cccc}
 [F]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle F \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x & [P]\varphi, w_i/t_m/e_x & \langle P \rangle \varphi, w_i/t_m/e_x \\
 t_m < t_n & \downarrow & t_n < t_m & \downarrow \\
 \downarrow & t_m < t_n & \downarrow & t_n < t_m \\
 \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x & \varphi, w_i/t_n/e_x
 \end{array}$$

y en las reglas para las restricciones a $<$ no hay que tener cuidado de ninguna relativización. De aceptar esta condición, en el sistema $T_{\square}/K_t^{*+}/T_K/D_B^*$, (5.1), (5.2) y (5.3) son válidos.

El motivo por el cual podemos prescindir de los índices cuando mundos/estados epistémicos comparten $<$ es que ‘compartir’ es una relación de equivalencia: sólo hay una línea temporal para todos los mundos/estados epistémicos. Los árboles semánticos para $T_{\square}/K_t^*/T_K/D_B^*$, $T_{\square}/K_t^+/T_K/D_B^*$ y $T_{\square}/K_t^{*+}/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas. Véase el teorema 11.4.

En la práctica, muchos lógicos trabajan con $<$ de forma absoluta. Esto simplifica en mucho los árboles, pero también hay que ser consciente de cuáles son los principios que se aceptan. (5.1) es inaceptable ontológicamente hablando, no tenemos por qué suponer que otros mundos tienen el mismo orden temporal que el nuestro, es plausible que difieran y es raro ver cómo una lógica modal, que debería darnos cuenta de cómo pueden ser las cosas, puede negar la idea; (5.2) y (5.3) son inaceptables no por supuestos ontológicos, sino por el problema de la omnisciencia lógica (la cual conoceremos a detalle en el capítulo 8), sea cual sea el orden temporal regente sobre nuestros estados mentales, nosotros lo sabemos y creemos según la lógica con esa restricción. Acaso sea aceptable la restricción por ser oscura la afirmación de que los estados mentales difieren en órdenes temporales; donde parece más plausible la diferencia es en el caso de multiagentes, si a_1 piensa en un futuro t_m , puede suceder que otro agente, a_2 , piense también en un momento futuro t'_m , sin que t_m se relacione con t'_m ; justamente uno de los problemas de trabajar con multiagentes es que estos deben compartir ciertas ideas para hablar sobre las mismas cosas.

6. SOBRE EL PRINCIPIO DE CERRADURA ESTRICTA PARA EL CONOCIMIENTO

Como en el caso de la lógica proposicional a la lógica modal, que un axioma o teorema sea válido con \supset –condicional material– no implica que éste mismo sea válido con \rightarrow –condicional estricto. Es fácil comprobar que (T \square), (TK), (DB) y (KB) son válidos en $T_{\square}/T_K/D_B^*$ si \supset se reemplaza con \rightarrow .

$$\begin{aligned} (\text{T}\square+) & \square p \rightarrow p \\ (\text{TK}+) & [K]p \rightarrow p \\ (\text{DB}+) & [B]p \rightarrow \neg[B]\neg p \\ (\text{KB}+) & [K]p \rightarrow [B]p \end{aligned}$$

Lo mismo no sucede con (CB):

$$(\text{CB}+) [B](p \rightarrow q) \rightarrow ([B]p \rightarrow [B]q)$$

Comprobarlo se deja al lector. Lo mismo tampoco sucede con (CK), el principio respectivo para el conocimiento; no obstante, éste sí puede ser válido si la base tanto para la lógica alética como para la lógica epistémica es $S5$:

$$(\text{CK}+) [K](p \rightarrow q) \rightarrow ([K]p \rightarrow [K]q)$$

Una forma de comprobar esto es por medio de árboles. Una interpretación para $\mathcal{L}_{AD\mathcal{E}}$ con base doble en $S5$ es una tupla $\langle W, E, \{\sim_e^R: e \in E\}, \{\sim_w^K: w \in W\}, \Psi_w^B, \nu \rangle$, donde \sim_e^R es una relación de equivalencia en W en e y \sim_w^K es una relación de equivalencia en E en w . Las condiciones de los operadores aléticos y epistémicos en este tipo de interpretación se pueden plantear de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\square\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W, \nu_{w'/e}(\varphi) = 1 \\ \nu_{w/e}(\diamond\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para algún } w' \in W, \nu_{w'/e}(\varphi) = 1 \\ \nu_{w/e}([K]\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } e' \in E, \nu_{w/e'}(\varphi) = 1 \\ \nu_{w/e}(\langle K \rangle\varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para algún } e' \in E, \nu_{w/e'}(\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Dadas estas condiciones, las líneas sobre relaciones tanto aléticas como epistémicas pueden omitirse en los árboles. Las reglas para los operadores particulares introducen nuevos mundos/estados epistémicos y las de los operadores universales se aplican a todos los mundos/estados epistémicos en la rama:¹

$$\begin{array}{cccc}
\Diamond\varphi, w_i/e_x & \Box\varphi, w_i/e_x & \langle K \rangle\varphi, w_i/e_x & [K]\varphi, w_i/e_x \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\varphi, w_j/e_x & \varphi, \varphi_k/e_x & \varphi, w_i/e_y & \varphi, w_i/e_z
\end{array}$$

En las reglas de \Diamond y $\langle K \rangle$, j y y son números nuevos de mundos/estados epistémicos en la rama; en las reglas de \Box y $[K]$, k y z son cualquier número de mundo/estado epistémico en la rama respectivamente (incluidos i y x).

El sistema de árboles con estas reglas es correcto y completo con respecto a sus semánticas. Véase el teorema 11.5.

Comprobar que (CK+) es válido por medio de árboles se deja al lector, pero podemos ver un ejemplo más sencillo. Considérense las implicaciones:

$$(SH) \quad [K]\Box p \supset \Box[K]p$$

$$(SHC) \quad \Box[K]p \supset [K]\Box p$$

El árbol para el bicondicional formado con ambas fórmulas sería el siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
& \neg(\Box[K]p \equiv [K]\Box p), w_0/e_0 & \\
& \swarrow & \searrow \\
\Box[K]p, w_0/e_0 & & \neg\Box[K]p, w_0/e_0 \\
\neg[K]\Box p, w_0/e_0 & & [K]\Box p, w_0/e_0 \\
\langle K \rangle\neg\Box p, w_0/e_0 & & \Diamond\neg[K]p, w_0/e_0 \\
\neg\Box p, w_0/e_1 & & \neg[K]p, w_1/e_0 \\
\Diamond\neg p, w_0/e_1 & & \langle K \rangle\neg p, w_1/e_0 \\
\neg p, w_1/e_1 & & \neg p, w_1/e_1 \\
[K]p, w_1/e_0 & & \Box p, w_0/e_1 \\
p, w_1/e_1 & & p, w_1/e_1 \\
\otimes & & \otimes
\end{array}$$

En una lógica alético-temporal, cuando una proposición es verdadera en todos los mundos en todo momento, se dice que ésta es *absolutamente necesaria*, $\Box[T]p$, a diferencia de cuando sólo es necesaria en un momento determinado, lo cual se llama *necesidad histórica*, $\Box p$ o $\langle T \rangle\Box p$. Por analogía, cuando un agente sabe una proposición en todas las circunstancias posibles, $\Box[K]p$, podemos llamarlo *conocimiento absoluto* (con

¹ Véase a Priest [36, sec. 3.5] para la versión únicamente modal de estas reglas.

el perdón de Hegel), a diferencia del *conocimiento relativo*, que se da en una situación determinada, $[K]p$, $\diamond[K]p$ o $\nabla[K]p$. Los principios de arriba se leerían entonces así:²

- (SH) El conocimiento de lo necesario implica su conocimiento absoluto, *i.e.*, en toda circunstancia
- (SHC) Lo que se conoce absolutamente, *i.e.*, en toda circunstancia, se conoce como necesario

Sobre la plausibilidad de ambos hablaremos más adelante.

Dado (SH), se puede demostrar (CK+) axiomáticamente.

(I)	$[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$	(CK)
(II)	$\Box([K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q))$	Por (N \Box) a (I)
(III)	$\Box[K](p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q)$	(MP) por (II) y (C \Box)
(IV)	$[K]\Box(p \supset q) \supset \Box[K](p \supset q)$	$[p/p \supset q]$ a (SH)
(V)	$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$	Tautología clásica
(VI)	$[K]\Box(p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q)$	(MP) por (III), (IV) y (V)
(VII)	$\Box([K]\Box(p \supset q) \supset \Box([K]p \supset [K]q))$	(N \Box) a (VI)
(VIII)	$[K](p \neg\supset q) \neg\supset ([K]p \neg\supset [K]q)$	Definición de $\neg\supset$ a (VII)

Tab. 6.1: Demostración axiomática de (CK+)

Ahora bien, en la literatura (CK) se conoce como el *principio de cerradura para el conocimiento*, e indica que, si se conoce una implicación, el conocimiento del antecedente implica el conocimiento del consecuente. Una de las críticas más conocidas a este principio se debe a Fred Dretske [10], quien decía que *las implicaciones epistémicas no son tan penetrantes (penetrating) como las aléticas, i.e.*, aún si se acepta que una proposición necesaria implique a otra necesaria porque una implica a la otra necesariamente, que es (C \Box), esto no sucede con el conocimiento. Un caso intuitivo a favor de su intuición es que los axiomas y definiciones en *Los elementos* implican necesariamente a los teoremas en *Los elementos*, e incluso más teoremas que no llegó a demostrar Euclides, y en todos los mundos donde son verdaderas las definiciones y los axiomas en los *Elementos*, son verdaderos los teoremas en los *Elementos* (y más); pero que uno sepa esta implicación junto las primeras páginas de *Los elementos* no hace uno sepa todo lo que se sigue

² Véase a Thomason [55, sec. 2] para una introducción a la necesidad histórica, a Rönnedal [42, secc. 1 y 3.2] para literatura pertinente y un abordaje semántico y a Sánchez Hernández [47, sec. 3] para una discusión sobre la interacción entre $\Box p$, $[T]p$ y $\Box[T]p$. Hasta donde tengo noticia, (SH) y (SHC) no figuran en la literatura, pero surgen como una analogía con respecto a $\Box[T]p \equiv [T]\Box p$ en $S5_{\Box}/K_t^*$ (véase el capítulo 5), desconozco si en la literatura sobre lógicas alético-temporales se haya dicho algo sobre esta equivalencia. Aun con todo, su comportamiento es similar al de las fórmulas Barcan en las lógicas de dominio constante. En el [apéndice C](#) doy un esquema sobre algunas inferencias en $S5_{\Box}/S5_K$.

de los axiomas y definiciones. Qué signifique que una implicación sea penetrante es algo oscuro en el planteamiento de Dretske, pero las semánticas alético-epistémicas que propongo parecen darle sustancia a sus intuiciones al decir que (SH) falla, y, con ella, (CK+), al haber circunstancias en las que falla nuestro conocimiento así se trate de uno sobre algo necesario, por lo menos cuando trabajamos en sistemas cuya base sea más débil que $S5_{\square}/S5_K$, como lo es justamente $T_{\square}/T_K/D_B^*$. Comentarios similares se aplican *mutatis mutandis* (CB+) con respecto a lo doxástico.

Hay principios aléticos, doxásticos y epistémicos que pueden agregarse a $T_{\square}/T_K/D_B^*$ sin que ello haga válido a (SH) o a (SHC). Si se acepta

$$(4_{\square}) \quad \square p \supset \square \square p$$

entonces el sistema $S4_{\square}/T_K/D_B^*$ nos permite derivar

$$(C_{\square\pm}) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (\square p \rightarrow \square q)$$

Esto se demuestra añadiendo la siguiente regla al sistema del capítulo 3:

$$\begin{array}{c} e_x R w_i w_j \\ e_x R w_j w_k \\ \downarrow \\ e_x R w_i w_k \end{array}$$

Si se insistiera en que el principio de cerradura estricta para la necesidad cambie *todas* las implicaciones materiales en (C \square) por estrictas, *i.e.*:

$$(C_{\square+}) \quad \square(p \rightarrow q) \rightarrow (\square p \rightarrow \square q)$$

entonces el principio es válido incluso en sistemas con base en K_{\square} .

Si Dretske aceptara que \rightarrow es mejor candidato que \supset para modelar al *si* de los lenguajes naturales, cualquier sistema con base en $S4_{\square}$ (o K_{\square} si se opta por (C \square +)) cuya base epistémica sea más débil que $S5_K$ es idóneo para sus intuiciones; (C $\square\pm$) –(C \square +–) es válido, pero (CK+) no lo es. Lo mismo aplica *mutatis mutandis* para la lógica doxástica con (CB+).

Así pues, de los principios conocidos en el capítulo 1, podemos pasar de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ a $S5_{\square}/S4_K/D45_B^*$ aceptando

$$\begin{array}{ll} (5_{\square}) & \diamond p \supset \square \diamond p \\ (4K) & [K]p \supset [K][K]p \\ (4B) & [B]p \supset [B][B]p \\ (5B) & \neg[B]p \supset [B]\neg[B]p \end{array}$$

En las figuras 6.1 y 6.2 se muestran modelos de $S5_{\Box}/S4_K$ que invalidan respectivamente a (SH) y (SHC) (no se ilustran las relaciones aléticas porque todos los mundos se relacionan entre sí, comprobar que los modelos funcionan se deja al lector). (SH) falla porque, aún si uno sabe que algo es necesario, ello no implica saberlo en todas las circunstancias posibles. Esto es algo un tanto decepcionante para el lógico que, tras haber encontrado el santo grial de su teoría, un conocimiento sobre algo necesario, no necesariamente conoce dicha proposición; quizás haya algún mundo en cual que él nunca se preocupó (ni se preocupará) por ella. La falla de (SHC) no es inesperada si se piensa *à la Hume*, que sea necesario saber algo, $\Box[K]p$, no implica conocerlo como necesario, $\neg[K]\Box p$, si puede concebirse un escenario en el que ello no suceda, $\langle K \rangle \Diamond \neg p$; sólo que Hume pensó el asunto con respecto al tiempo para criticar inducción hacia el futuro, que siempre se sepa que el sol sale por oriente, $[T][K]p$, no implica que se sepa que siempre lo hará, $\neg[K][T]p$, si uno puede concebir un escenario en el que, en algún momento en el futuro, ello no pasará, $\langle K \rangle \langle F \rangle \neg p$.

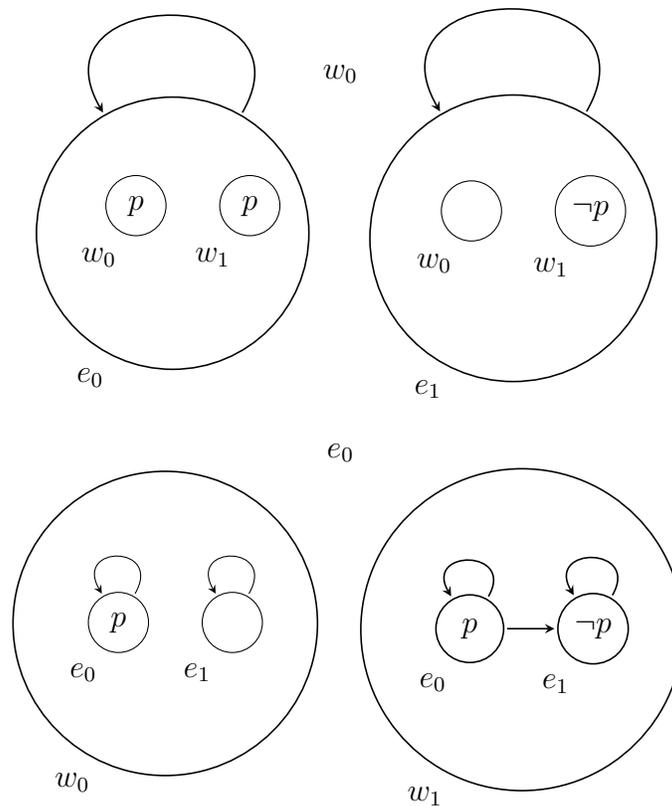


Fig. 6.1: Contramodelo de $S5_{\Box}/S4_K$ para (SH) $- [K]\Box p \supset \Box[K]p$.

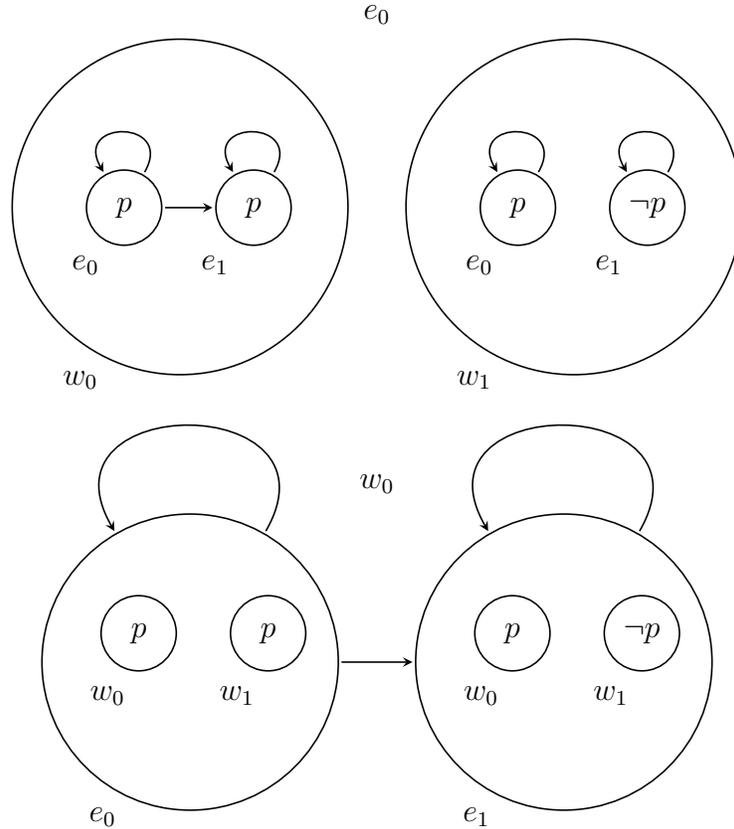


Fig. 6.2: Contramodelo de $S5_{\square}/S4_K$ para $(SHC) - \square[K]p \supset [K]\square p$.

Ahora bien, para tener a $S5$, se requieren dos principios:

- (T) $[O]p \supset p$
- (5) $\neg[O]p \supset [O]\neg[O]p$

Supongamos a $S5_{\square}$ como una base alética adecuada, ya sea por simplicidad, para tener una noción absoluta de la necesidad o por cualquier otro motivo. En el caso doxástico, (CB+) es inválido porque, aún aceptando (5B), (TB) es inaceptable. A diferencia del conocimiento, las creencias no tienen por qué ser verdaderas. En el caso epistémico, (CK+) puede ser inválido ya sea que se rechacen o (TK) o (5K) o ambas. (TK) es aceptable si se interpreta como *el conocimiento es verdadero*. Por descarte, sólo queda como opción negar (5K). Esto sí puede hacerse. Por sí mismo, el principio es implausible en tanto que uno puede desconocer muchas cosas y desconocer que las desconoce; hace algunos años, yo ni sabía quién era el conde Ugolino della Gherardesca ni sabía que no lo sabía. La respuesta ordinaria a esta objeción, igual que en otras ocasiones, es que los agentes operan en discursos acotados; en un juego de cartas, es frecuente que un jugador (sensato) sepa que no sabe cuáles son las cartas de sus oponentes (y entre mayor sea el mazo, todavía peor). Podremos explorar un poco más esta respuesta en

el capítulo 9, donde la base en la lógica intuicionista nos dará un nuevo marco teórico para abordar esta situación. En conexión con otros principios, (5K) también puede dar lugar a inferencias indeseables. Una de las controversias más destacadas de la literatura es la del *creyente perfecto*, $[B]p \equiv [K]p$, *un agente cree una proposición si y sólo si la sabe*. Para demostrar esto, sólo se requiere agregar otro principio de introspección más:

$$(BBK) [B]p \supset [B][K]p$$

Un agente cree saber lo que cree. En la tabla 6.2 se da una demostración axiomática.³

(I)	$\neg[K]p \supset [K]\neg[K]p$	(5K)
(II)	$[K]p \supset [B]p$	(KB)
(III)	$[K]\neg[K]p \supset [B]\neg[K]p$	$[p/\neg[K]p]$ a (II)
(IV)	$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$	Tautología clásica
(V)	$\neg[K]p \supset [B]\neg[K]p$	(MP) por (I), (III) y (IV)
(VI)	$[B]\neg[K]p \supset \neg[B][K]p$	$[p/\neg[K]p]$ a (DB)
(VII)	$\neg[K]p \supset \neg[B][K]p$	(MP) por (IV), (V) y (VI)
(VIII)	$[B][K]p \supset [K]p$	Contraposición a (VII)
(IX)	$[B]p \supset [B][K]p$	(BBK)
(X)	$[B]p \supset [K]p$	(MP) por (IV), (VIII) y (IX)
(XI)	$p \supset (q \supset (p \wedge q))$	Tautología clásica
(XII)	$([K]p \supset [B]p) \wedge ([B]p \supset [K]p)$	(MP) por (II), (X) y (XI)
(XIII)	$[B]p \equiv [K]p$	Definición de \equiv a (XII)

Tab. 6.2: Demostración axiomática de $[B]p \equiv [K]p$.

La línea (VIII), $[B][K]p \supset [K]p$, ya es por sí misma un principio dudoso, si un agente cree saber algo, lo sabe; añadir (BBK) en consideración sólo da el golpe de gracia para trivializar la relación entre creencia y conocimiento. Claro, además de (5K) podrían cuestionarse los demás principios involucrados en la discusión, pero esto no parece tan satisfactorio. (DB) puede negarse al negar que el agente sea racional, pero si lo hacemos por ese motivo, parece incluso más plausible negar (5K). (KB) normalmente es aceptado por análisis tradicionales del conocimiento, y aunque puede negarse, es algo heterodoxo.⁴ Finalmente, (BBK) es también cuestionable, pero parece más próximo a la experiencia cotidiana de lo que lo son la línea (VIII) o, nuevamente, (5K); además de que, valga recordarlo, este principio sólo da el golpe de gracia en la trivialización.

En suma, hay motivos para negar la plausibilidad de (5K), y a estos yo agregaría la validación de (SH), y, por tanto, (CK+), en un sistema con base $S5_{\square}/T_K$.

³ La reconstrucción se basa en la demostración que presenta Gómez-Caminero [33, p. 64].

⁴ Voorbraak ha defendido que (KB) y (5K) son incompatibles, véase a Meyer [26, p. 6].

7. LÓGICAS EPISTÉMICO-DOXÁSTICAS CONDICIONALES

Las lógicas epistémico-doxásticas suelen ser exigentes con lo que piden de los agentes en parte porque éstas se restringen a ciertos ámbitos, en el capítulo 6 vimos que algunas inferencias fallan cuando se les evalúa a lo largo de mundos posibles. En este capítulo, veremos cómo pueden extenderse las semánticas para dar lógicas epistémico-doxásticas condicionales.

Empecemos revisando asuntos técnicos, lo filosófico vendrá después. En aras de la simplicidad, en este capítulo la base alética será $S5_{\square}$. Añadamos a $\mathcal{L}_{AD\mathcal{E}}$ los condicionales contrafácticos $\square\rightarrow$ y $\diamond\rightarrow$ junto con sus reglas de formación (si φ y ψ son fórmulas, también lo son $\varphi \square\rightarrow \psi$ y $\varphi \diamond\rightarrow \psi$). Sea \mathcal{F} el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{AD\mathcal{E}}$ aumentado. Una interpretación es ahora $\langle W, E, \{\sim_e^R: e \in E\}, \{R_e(\varphi) : \varphi \in \mathcal{F}\}, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$. Llámese a este sistema $C_{\square\rightarrow}/T_K/D_B^*$. El cambio principal es que añadimos un conjunto de relaciones *ceteris paribus* para cada fórmula del lenguaje; $eRww'(\varphi)$ indica que ‘en e , w accede *ceteris paribus* φ a w' ’. Por facilidad, agreguemos un par de definiciones: 1) $f_{\varphi}(w, e) = \{w' : eRww'(\varphi)\}$, el conjunto de mundos accesibles desde w en e vía φ ; y 2) $[\varphi]_e = \{w : \nu_{w/e}(\varphi) = 1\}$, el conjunto de mundos en e en los que φ es verdadera.¹

Las condiciones de verdad son las mismas que las del capítulo 2, excepto por las de \square y \diamond , que son las del capítulo 6, y porque añadimos las de los condicionales contrafácticos

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\varphi \square\rightarrow \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww'(\varphi), \nu_{w'/e}(\psi) = 1 \\ \nu_{w/e}(\varphi \diamond\rightarrow \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para algún } w' \in W \text{ tal que } eRww'(\varphi), \nu_{w'/e}(\psi) = 1 \end{aligned}$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\varphi \square\rightarrow \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad f_{\varphi}(w, e) \subseteq [\psi]_e \\ \nu_{w/e}(\varphi \diamond\rightarrow \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad f_{\varphi}(w, e) \cap [\psi]_e \neq \emptyset \end{aligned}$$

Ambos condicionales son interdefinibles:

$$\begin{aligned} \varphi \square\rightarrow \psi & \quad \text{sii} \quad \neg(\varphi \diamond\rightarrow \neg\psi) \\ \varphi \diamond\rightarrow \psi & \quad \text{sii} \quad \neg(\varphi \square\rightarrow \neg\psi) \end{aligned}$$

¹ En [36, cap. 5], $Rww'(\varphi)$ se escribe $wR_{\varphi}w'$ y $R(\varphi)$ como R_{φ} , la notación propuesta aquí intenta ser más manejable. Una notación similar se usa en [47, sec. 4] para tener un subíndice de tiempos en lugar de un subíndice de fórmulas. También se modifica $f_{\varphi_e}(w)$, como aparece en [47, sec. 4], por $f_{\varphi}(w, e)$, la cual me parece más legible.

Aquí están las pruebas. Si $\varphi \Box \rightarrow \psi$, $\neg(\varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi)$, por *reductio*: $f_\varphi(w, e) \cap [\neg\psi]_e \neq \emptyset$, así pues, para algún x , $x \in f_\varphi(w, e)$ y $x \in [\neg\psi]_e$, i.e., $x \notin [\psi]_e$; pero $f_\varphi(w, e) \subseteq [\psi]_e$, por tanto $x \in [\psi]_e$. Si $\neg(\varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi)$, $\varphi \Box \rightarrow \psi$, por *reductio*: $f_\varphi(w, e) \cap [\neg\psi]_e = \emptyset$ y, para algún x , $x \in f_\varphi(w, e)$ y $x \notin [\psi]_e$, i.e., $x \in [\neg\psi]_e$, pero entonces $f_\varphi(w, e) \cap [\neg\psi]_e \neq \emptyset$. Si $\varphi \Diamond \rightarrow \psi$, $\neg(\varphi \Box \rightarrow \neg\psi)$, por *reductio*: $f_\varphi(w, e) \cap [\psi]_e \neq \emptyset$, así pues, para algún x , $x \in f_\varphi(w, e)$ y $x \in [\psi]_e$; pero $f_\varphi(w, e) \subseteq [\neg\psi]_e$, por tanto $x \in [\neg\psi]_e$, i.e., $x \notin [\psi]_e$. Finalmente, si $\neg(\varphi \Box \rightarrow \neg\psi)$, $\varphi \Diamond \rightarrow \psi$: para algún x , $x \in f_\varphi(w, e)$ y $x \notin [\neg\psi]_e$, i.e., $x \in [\psi]_e$, así pues $f_\varphi(w, e) \cap [\psi]_e \neq \emptyset$.

La validez semántica se define en términos de la preservación de la verdad igual que en el capítulo 2. $C_{\Box \rightarrow} / T_K / D_B^*$ es una extensión propia de las lógicas que la componen.

Salvo por las reglas para \Box y \Diamond , para las cuales tomamos las del capítulo 6, las reglas de árboles de $C_{\Box \rightarrow} / T_K / D_B^*$ son las mismas que las del capítulo 3 añadiendo las reglas para los condicionales contrafácticos:

$$\begin{array}{cccc}
\varphi \Box \rightarrow \psi, w_i / e_x & \varphi \Diamond \rightarrow \psi, w_i / e_x & \neg(\varphi \Box \rightarrow \psi), w_i / e_x & \neg(\varphi \Diamond \rightarrow \psi), w_i / e_x \\
e_x R w_i w_j (\varphi) & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\downarrow & e_x R w_i w_j (\varphi) & \varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi, w_i / e_x & \varphi \Box \rightarrow \neg\psi, w_i / e_x \\
\psi, w_j / e_x & \psi, w_j / e_x & &
\end{array}$$

Las reglas de $\Box \rightarrow$ se parecen a las de \Box , sólo que ahora φ debe ser la misma en ambos nodos; las de $\Diamond \rightarrow$ son como las de \Diamond . Las reglas para condicionales negados se dan por las equivalencias entre condicionales.

La idea de Lewis [24, p. 2] detrás de $\Box \rightarrow$ y de $\Diamond \rightarrow$ era dar cuenta de los condicionales subjuntivos, él los leía así:

$$\begin{array}{ll}
\varphi \Box \rightarrow \psi & \text{si } \varphi, \textit{sería} \text{ (would be) el caso que } \psi \\
\varphi \Diamond \rightarrow \psi & \text{si } \varphi, \textit{podría ser} \text{ (might be) (el caso) que } \psi
\end{array}$$

En el ámbito alético, las semánticas que incluyen relaciones con cláusulas *ceteris paribus* nos sugieren evaluar los condicionales en mundos parecidos al nuestro, w' tal que Rww' , excepto por una afirmación, φ , i.e., $Rww'(\varphi)$; al trabajar multimodalmente, también se evalúan mundos con respecto a afirmaciones de la otra lógica involucrada, por ejemplo, en una lógica condicional temporal, se evalúan mundos con los mismos hechos temporales (cf. Sánchez Hernández [47, sec. 4]), análogamente una lógica condicional epistémico-doxástica nos permite evaluar mundos con los mismos hechos epistémico-doxásticos.

Las lógicas condicionales suelen distinguirse por la falla de tres inferencias:

$$\begin{array}{l}
\text{(RC)} \quad p \Box \rightarrow q \not\equiv (p \wedge r) \Box \rightarrow q \\
\text{(TC)} \quad p \Box \rightarrow q, q \Box \rightarrow r \not\equiv p \Box \rightarrow r \\
\text{(TR)} \quad p \Box \rightarrow q \not\equiv \neg q \Box \rightarrow \neg p
\end{array}$$

Éstas se conocen como refuerzo del condicional (RC), la transitividad de condicional (TC) y la transposición (TR), y todas son válidas con \supset y \neg , pero considérense los contraejemplos puestos por Priest [36, sec. 5.2, mi traducción]:

- Si no llueve mañana, iremos al críquet; entonces, si no llueve mañana y muero en un accidente automovilístico, iremos al críquet.
- Si los demás candidatos se salen de la contienda, Juan obtiene el trabajo; si Juan obtiene el trabajo, los demás candidatos estarán decepcionados; por tanto, si los demás candidatos se salen de la contienda, los demás candidatos estarán decepcionados.
- Si tomamos el carro, entonces no se descompondrá en el camino; por tanto, si el carro se descompone en el camino, entonces no lo tomamos.

Es fácil comprobar que las mismas inferencias son inválidas en contextos epistémicos:

$$\begin{aligned} \text{(RCK)} \quad & [K](p \square \rightarrow q) \not\equiv [K]((p \wedge r) \square \rightarrow q) \\ \text{(TCK)} \quad & [K](p \square \rightarrow q), [K](q \square \rightarrow r) \not\equiv [K](p \square \rightarrow r) \\ \text{(TRK)} \quad & [K](p \square \rightarrow q) \not\equiv [K](\neg q \square \rightarrow \neg p) \end{aligned}$$

A modo de ejemplo, aquí está el árbol de $C_{\square \rightarrow} / T_K / D_B^*$ para (RCK):

$$\begin{aligned} & [K](p \square \rightarrow q), w_0/e_0 \\ & \neg[K]((p \wedge r) \square \rightarrow q), w_0/e_0 \\ & \quad w_0\Psi^K e_0 e_0 \\ & \quad p \square \rightarrow q, w_0/e_0 \\ & \langle K \rangle \neg((p \wedge r) \square \rightarrow q), w_0/e_0 \\ & \quad w_0\Psi^K e_0 e_1 \\ & \quad \neg((p \wedge r) \square \rightarrow q), w_0/e_1 \\ & \quad w_0\Psi^K e_1 e_1 \\ & \quad p \square \rightarrow q, w_0/e_1 \\ & \quad (p \wedge r) \diamond \rightarrow \neg q, w_0/e_1 \\ & \quad e_1 R w_0 w_1 (p \wedge r) \\ & \quad w_1\Psi^K e_0 e_0 \\ & \quad \neg q, w_1/e_1 \\ & \quad w_1\Psi^K e_1 e_1 \\ & \quad w_0\Psi^B e_1 e_2 \\ & \quad w_0\Psi^K e_1 e_2 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Para aplicar una regla a $p \square \rightarrow q, w_0/e_1$ y cerrar el árbol en el par w_1/e_1 necesitaríamos a $e_1 R w_0 w_1(p)$, pero no está y no hay más reglas que aplicar salvo por la de la serialidad

de Ψ_w^B , pero ésta sólo vuelve infinito al árbol. Los contramodelos se obtienen igual que antes, aunque hay que distinguir cuando una relación lleva una fórmula. Uno finito para el refuerzo del condicional en contextos epistémicos puede ilustrarse como en la figura 7.1 ($\xrightarrow{\varphi}$ indica que la accesibilidad se da por φ):

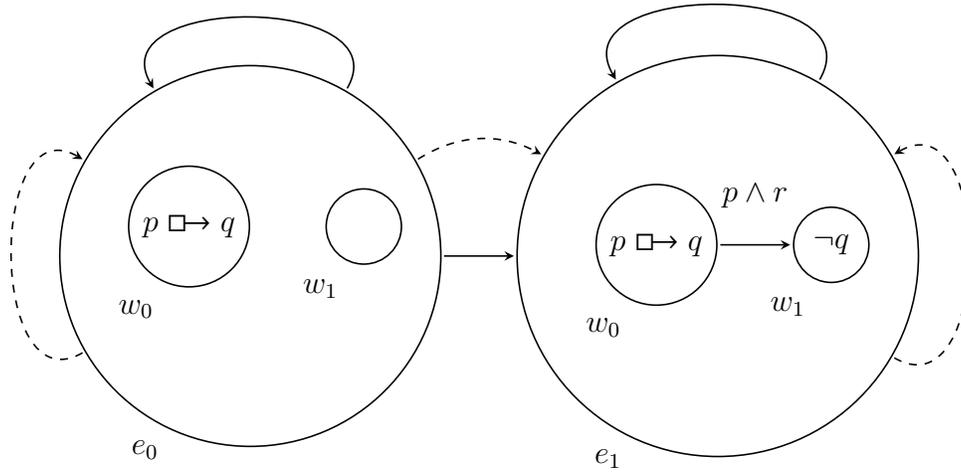


Fig. 7.1: Contramodelo para (RCK)

Algunos planteamientos epistemológicos requieren evaluarse contrafácticamente. Aquí hay uno con respecto al escepticismo. Un escéptico del mundo externo estaría dispuesto a decir que, si fuéramos un cerebro en una cubeta, p , sería el caso de que no lo sabríamos, $\neg[K]p$, así de perfecto es el engaño:

$$(7.1) \quad p \Box \rightarrow \neg[K]p$$

La contraposición de (7.1) junto con la versión contrafáctica de (TK), $[K]p \Box \rightarrow p$, implica que $[K]p \Box \rightarrow (p \wedge \neg p)$, pero si usamos $\Box \rightarrow$ en lugar de \supset o \rightarrow , podemos usar (7.1) sin involucrarnos con su equivalencia clásica.²

Ahora bien, una equivalencia clásica de (T) es $p \supset \neg[O]\neg p$,³ su versión epistémica y contrafáctica sería:

$$(7.2) \quad p \Box \rightarrow \neg[K]\neg p$$

² Sea \rightarrow un condicional conexivo (para una revisión general a la lógica conexiva, véase a Wansing [57]). La tesis de Boecio dice que $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$. Así pues, (TK) implica que $\neg([K]p \rightarrow \neg p)$; en esta consideración, (TK) es incompatible con la transposición de (7.1). Ningún sistema presentado aquí puede validar la tesis de Boecio, aunque considero que un buen inicio para desarrollar las semánticas y sistemas de árboles apropiados sería retomar el trabajo de Priest [36, sec. 9.7a]. Éste es un tema que supera en mucho los propósitos de este trabajo, pero valga mencionarlo.

³ De hecho, obtuvimos a ésta en el paso (VII) de la demostración en la tabla 3.1.

Lo verdadero no se conoce como falso. Si fueras un cerebro en una cubeta, no puedes saberlo como falso. De hecho, más adelante veremos que hay lógicas condicionales en las que (7.2) es una verdad lógica. (7.1) y (7.2) implican formalmente:

$$(7.3) \quad p \Box \rightarrow \backslash K/p$$

Si fueras un cerebro en una cubeta, sería el caso de que no sabrías si eres un cerebro en una cubeta.⁴ Aquí está el árbol:

$$\begin{array}{c}
 p \Box \rightarrow \neg[K]p, w_0/e_0 \\
 p \Box \rightarrow \neg[K]\neg p, w_0/e_0 \\
 \neg(p \Box \rightarrow \backslash K/p), w_0/e_0 \\
 p \Diamond \rightarrow \neg \backslash K/p, w_0/e_0 \\
 e_0 R w_0 w_1 (p) \\
 \neg \backslash K/p, w_1/e_0 \\
 /K \backslash p, w_1/e_0 \\
 \neg[K]p, w_1/e_0 \\
 \neg[K]\neg p, w_1/e_0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 [K]p, w_1/e_0 \quad [K]\neg p, w_1/e_0 \\
 \otimes \quad \quad \quad \otimes
 \end{array}$$

Las ramas se cierran antes de desarrollar las reglas de operadores epistémicos, pero aún si se siguieran aplicando, el árbol se cerraría. La inferencia es válida porque es una instancia de la inferencia:

$$(7.4) \quad p \Box \rightarrow q, p \Box \rightarrow r \vdash p \Box \rightarrow (q \wedge r)$$

Hay otros planteamientos que requieren un sistema condicional más fuerte. Siguiendo con los escépticos (cf. Feldman [12, pp. 112s y 123s]), uno podría afirmar:

(*) Si tuvieras una creencia falsa, no podrías tener conocimiento.

Esta afirmación puede prestarse a una ambigüedad. Por una parte, puede afirmarse que, si la creencia puede ser falsa, entonces no se tiene conocimiento.

$$(7.5) \quad \Diamond([B]p \wedge \neg p) \supset \neg[K]p$$

⁴ Hay un argumento escéptico que se sirve del principio de cerradura para el conocimiento y de nuestra incapacidad para saber si somos cerebros en una cubeta: si a supiera que sus sensaciones son confiables, sería el caso de que a sabría que no es un cerebro en una cubeta, $[K]p \Box \rightarrow [K]\neg q$, pero a no sabe si es un cerebro en una cubeta, $\backslash K/q$, así pues, a no sabe que no lo sea, $\neg[K]\neg q$, así que, por *modus tollens*, a no puede saber que sus sensaciones son confiables, $\neg[K]p$. Una forma de obtener $\backslash K/q$ es aceptar (7.3) junto con $\neg p \Box \rightarrow \backslash K/q$ y $p \vee \neg p$. Así pues, $C_{\Box} / T_K / D_B^*$ (propiamente C_{\Box}^+ / T_K , véase la siguiente página) sirve para montar un argumento escéptico correcto. Esto lo desarrollo en [45].

Esto no es válido, pues que sepas que p no entra en conflicto con que en otras circunstancias te puedas equivocar en tu creencia sobre p . Demostrarlo con un árbol y dar un contramodelo es una tarea fácil.⁵ Ahora bien, uno puede plantear alternamente:

$$(7.6) \quad \neg(([B]p \wedge \neg p) \diamond \rightarrow [K]p)$$

Ésta no es válida en $C_{\square \rightarrow} / T_K / D_B^*$, aunque este sistema puede extenderse para obtener $C_{\square \rightarrow}^+ / T_K / D_B^*$ al añadir las siguientes dos restricciones:

- $f_\varphi(w, e) \subseteq [\varphi]_e$
- Si $w \in [\varphi]_e$, entonces $w \in f_\varphi(w, e)$

Las reglas de árboles correspondientes serían:

$$\begin{array}{ccc}
 e_x R w_i w_j (\varphi) & & \bullet \\
 \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 \varphi, w_j / e_x & \neg \varphi, w_i / e_x & \varphi, w_i / e_x \\
 & & e_x R w_i w_i (\varphi)
 \end{array}$$

La primera regla se explica por sí sola, los mundos accesibles desde w_i vía φ son mundos donde φ es verdadera. La segunda regla se aplica a cada φ que sea el antecedente de un condicional a todos los w_i y e_x en la rama; la restricción a antecedentes de condicionales se da porque es irrelevante para la validez cómo la restricción afecta a otras fórmulas, aunque en los contramodelos obtenidos a partir de ramas abiertas debe cuidarse que se satisfaga la restricción correspondiente.

Aquí está el árbol que demuestra que en $C_{\square \rightarrow}^+ / T_K / D_B^*$ (7.6) es válida:

$$\begin{array}{c}
 \neg \neg (([B]p \wedge \neg p) \diamond \rightarrow [K]p), w_0 / e_0 \\
 w_0 \Psi^K e_0 e_0 \\
 ([B]p \wedge \neg p) \diamond \rightarrow [K]p, w_0 / e_0 \\
 e_0 R w_0 w_1 ([B]p \wedge \neg p) \\
 [K]p, w_1 / e_0 \\
 w_1 \Psi^K e_0 e_0 \\
 p, w_1 / e_0 \\
 [B]p \wedge \neg p, w_1 / e_0 \\
 [B]p, w_1 / e_0 \\
 \neg p, w_1 / e_0 \\
 \otimes
 \end{array}$$

⁵ Piénsese también desde la lógica temporal con el operador $\langle F \rangle$ en lugar de \diamond : puede que ahora sepas que p y que en el futuro sigas creyendo que p , aunque sea falso.

Los árboles de $C_{\Box\rightarrow}/T_K/D_B^*$ y $C_{\Box\rightarrow}^+/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas. Esto se demuestra en los teoremas 11.6 y 11.7.

Ahora bien, que (7.6) sea válida no ayuda al escéptico porque es equivalente a:

$$(7.7) \quad ([B]p \wedge \neg p) \Box\rightarrow \neg[K]p$$

Si tuvieras una creencia falsa, sería el caso de que no tienes conocimiento. Esto no es nada extraordinario; de hecho, lo aceptaría cualquiera que no fuera un escéptico. El escéptico está más comprometido con (7.5), pero ésta es inválida.

Un motivo para aceptar a $C_{\Box\rightarrow}^+/T_K/D_B^*$ es que éste valida *modus ponendo ponens*:

$$(7.8) \quad \varphi, \varphi \Box\rightarrow \psi \vdash \psi$$

Algo característico de $C_{\Box\rightarrow}^+/T_K/D_B^*$ es que si el antecedente de $\varphi \Box\rightarrow \psi$ implica formalmente al consecuente, *i.e.*, $\vdash \varphi \supset \psi$, por lo cual $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ por (N \Box), entonces $\vdash \varphi \Box\rightarrow \psi$. Por esta razón las inferencias (7.2), (7.6) y (7.7) son verdades lógicas. Un problema concomitante es que se cumplen un par de versiones de las paradojas de la implicación estricta:

$$\begin{aligned} (\text{PCE}^*) \quad & \Box p \Box\rightarrow (q \Box\rightarrow p) \\ (\text{PCE}^{*'}) \quad & \Box \neg p \Box\rightarrow (p \Box\rightarrow q) \end{aligned}$$

Esto puede ser insatisfactorio para ciertos planteamientos. Como primera instancia, nótese que es válida la inferencia

$$(7.9) \quad \neg p \Box\rightarrow \neg[K]p \models ([B]p \wedge \neg p) \Box\rightarrow \neg[K]p$$

Ésta es claramente una instancia del refuerzo del condicional, pero se supone que ésta debería fallar en formulaciones contrafácticas o subjuntivas.

Un comentario final, aunque prescindiendo de la lógica doxástica: en el capítulo 6 vimos que tener a $S5_{\Box}/S5_K$ nos llevaba a la validación de (CK+), y que una solución plausible era prescindir del principio (5K); en las lógicas condicionales, no importa si las bases para la lógica alética y la lógica epistémica son $S5$, el principio de cerradura en su versión contrafáctica no es válido.

$$(\text{CK}^*) \quad [K](p \Box\rightarrow q) \Box\rightarrow ([K]p \Box\rightarrow [K]q)$$

Demostrar esto por medio de árboles para la lógica $C_{\Box\rightarrow}^+/S5_K$ es posible añadiendo las reglas para $S5_K$ que vimos en el capítulo 6; sin embargo, es laborioso, además de que hay ramas infinitas (debido a que $[K]p$ es el antecedente de un condicional, por la regla para la segunda restricción, éste debe negarse en alguno de los pares w_i/e_x en la rama, lo cual da lugar a un estado epistémico nuevo, e_y , y debido a ello debe aplicarse nuevamente

la regla de la segunda restricción en el nuevo par w_i/e_y , y así *ad infinitum*). Aun con todo, a prueba y error, pude encontrar el contramodelo finito de la figura 7.2 (por mor a la simplicidad, se omiten las relaciones producidas por la segunda restricción). En w_0 , en todos los estados epistémicos, sólo e_0 , $p \Box \rightarrow q$ y $\neg p$ son verdaderos, por lo cual $[K](p \Box \rightarrow q)$ y $[K]\neg p$ son verdaderos en w_0 ; también lo es que $\neg[K]p$, por lo cual w_0 no accede a sí mismo por $[K]p$. En w_1 , en todos los estados epistémicos, sólo e_0 , p y $\neg q$ son verdaderos, por lo cual $[K]p$ y $[K]\neg q$ son verdaderos en w_1 , como también lo es $\neg[K]q$. Ahora bien, $e_0 R w_0 w_1 ([K]p)$, pero en w_1 es falso que $[K]q$, por lo cual en w_0 en e_0 es falso que $[K]p \Box \rightarrow [K]q$. Finalmente, debido a que $[K](p \Box \rightarrow q)$ es verdadero en w_0 en e_0 , $e_0 R w_0 w_0 ([K](p \Box \rightarrow q))$, pero $[K]p \Box \rightarrow [K]q$ es falso en w_0 en e_0 , por lo cual $[K](p \Box \rightarrow q) \Box \rightarrow ([K]p \Box \rightarrow [K]q)$ es falso ahí.

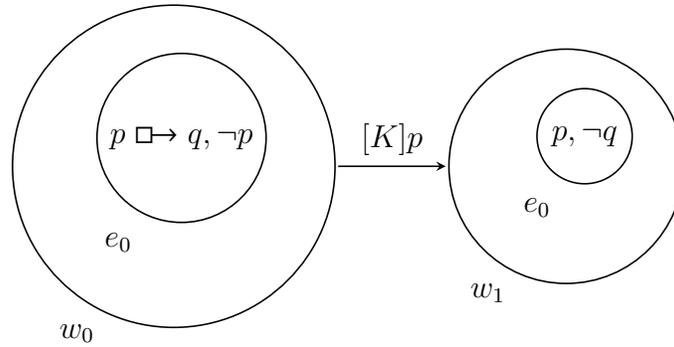


Fig. 7.2: Contramodelo finito para (CCK).

Aun si alguien quisiera afirmar que (CK+) es aceptable, (SH) incluido, las semánticas de $C_{\Box \rightarrow}^+ / S5_K$ nos muestran que el principio de cerradura para el conocimiento debe fallar cuando se le evalúa contrafácticamente –o bien, subjuntivamente.

8. LÓGICAS ALÉTICO-EPISTÉMICO-DOXÁSTICAS ANORMALES

En el capítulo 1 conocimos a las lógicas epistémico-doxásticas normales y algunos de sus problemas, propiamente: (1) que caen en la omnisciencia lógica; (2) que el desconocimiento implica la posibilidad epistémica negativa; y (3) que las creencias son consistentes. En este capítulo veremos como pueden modificarse las semánticas de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ para obtener sus versiones anormales, luego cómo estas afrontan el problema de la omnisciencia y finalmente algunas cuestiones filosóficas que suscitan las semánticas.

El lenguaje a usar es el mismo que el del capítulo 2, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{D}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{E}}$, aunque ahora una interpretación para éste es una tupla $\langle W, E, \overline{W}, \overline{E}, R_e, \Psi_w^B, \Psi_w^K, \nu \rangle$. En lo previo, supusimos que los miembros de W eran todos de la misma naturaleza; sin embargo, en las lógicas anormales, no podemos hacer eso. Ahora \overline{W} es un subconjunto de W , $\overline{W} \subseteq W$, cuyos miembros, \overline{w} , se comportan anormalmente. Por supuesto, $W - \overline{W}$ es el conjunto de mundos normales con los que hemos trabajado hasta ahora. Lo mismo se aplica para E y \overline{E} . R_e, Ψ_w^B, Ψ_w^K y ν son exactamente lo mismo que en el caso normal.

Antes de continuar, valga introducir un par de definiciones. Que v sea w o \overline{w} y que ε sea e o \overline{e} . Si φ es de la forma $\square\psi$ o $\diamond\psi$, diremos que φ es una *fórmula alética*; si es de la forma $[B]\psi$ o $\langle B \rangle\psi$, φ es *doxástica*; y si es de la forma $[K]\psi$ o $\langle K \rangle\psi$, φ es *epistémica*. Las condiciones de verdad de las conectivas proposicionales son básicamente las mismas que las del caso normal, no importa si el mundo/estado epistémico es normal o no:

$$\begin{aligned} \nu_{v/\varepsilon}(\neg\varphi) &= 1 & \text{sii} & \nu_{v/\varepsilon}(\varphi) = 0 \\ \nu_{v/\varepsilon}(\varphi \wedge \psi) &= 1 & \text{sii} & \nu_{v/\varepsilon}(\varphi) = \nu_{v/\varepsilon}(\psi) = 1 \end{aligned}$$

Las condiciones de verdad de operadores aléticos, epistémicos y doxásticos son las mismas si se evalúan en mundos/estados epistémicos normales, pero hay excepciones cuando hay mundos/estados epistémicos anormales:

$$\begin{aligned} \nu_{\overline{w}/\varepsilon}(\square\varphi) &= 0 \\ \nu_{\overline{w}/\varepsilon}(\diamond\varphi) &= 1 \\ \nu_{v/\overline{e}}([K]\varphi) &= 0 \\ \nu_{v/\overline{e}}(\langle K \rangle\varphi) &= 1 \\ \nu_{v/\overline{e}}([B]\varphi) &= 0 \\ \nu_{v/\overline{e}}(\langle B \rangle\varphi) &= 1 \end{aligned}$$

En \bar{w}/\bar{e} , las fórmulas aléticas/epistémicas/doxásticas adquieren un valor específico sin importar qué sea φ . En los mundos anormales, \bar{w} , lo necesario es falso y lo posible es verdadero; en los estados epistémicos anormales, \bar{e} , todo conocimiento o creencia es falso, pero toda posibilidad epistémica o doxástica es verdadera. Aun con todo, es fácil comprobar que, para cualesquiera operadores $[O]$ y $\langle O \rangle$, $\neg[O]\neg\varphi \equiv \langle O \rangle\varphi$.

La validez se define en términos de la preservación de la verdad en los mundos/estados epistémicos normales.

$$\begin{aligned} \Sigma \models \varphi \quad \text{sii} \quad & \text{para toda } \langle W, E, \bar{W}, \bar{E}, R_e, \Psi_w^B, \Psi_w^K, \nu \rangle, \text{ si } w \in W - \bar{W} \text{ y } e \in E - \bar{E}, \\ & \text{entonces, para toda } \psi \in \Sigma, \text{ si } \nu_{w/e}(\psi) = 1, \text{ entonces } \nu_{w/e}(\varphi) = 1. \\ \models \varphi \quad \text{sii} \quad & \emptyset \models \varphi, \text{ i.e., para toda } \langle W, E, \bar{W}, \bar{E}, R_e, \Psi_w^B, \Psi_w^K, \nu \rangle, \text{ si } w \in W - \bar{W} \\ & \text{y } e \in E - \bar{E}, \text{ entonces } \nu_{w/e}(\varphi) = 1. \end{aligned}$$

En la literatura, la versión anormal de T suele llamarse $S2$ [36, sec. 4.2.5]. No hay, que yo sepa, un nombre estándar para la versión anormal de D , pero podemos llamarle aquí ND . Así pues, el sistema que acabamos de caracterizar puede llamarse $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$.

Los árboles para $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$ son básicamente los mismos que los de $T_{\square}/T_K/D_B^*$, excepto porque, si w (o e) tiene un guion superior, entonces es anormal. Debido a que la validez se define en los mundos/estados epistémicos normales, w_0 y e_0 deben ser normales. Así pues, una lista inicial se conforma de $\psi, w_0/e_0$ para cada premisa (si hay alguna) y $\neg\varphi, w_0/e_0$ para la conclusión.

Las reglas para \wedge y \vee son:

$$\begin{array}{ccc} \varphi \wedge \psi, v_i/\varepsilon_x & & \neg(\varphi \wedge \psi), v_i/\varepsilon_x \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \varphi, v_i/\varepsilon_x & \neg\varphi, v_i/\varepsilon_x & \neg\psi, v_i/\varepsilon_x \\ \psi, v_i/\varepsilon_x & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi \vee \psi, v_i/\varepsilon_x & & \neg(\varphi \vee \psi), v_i/\varepsilon_x \\ \swarrow & \searrow & \downarrow \\ \varphi, v_i/\varepsilon_x & \psi, v_i/e_x & \neg\varphi, v_i/\varepsilon_x \\ & & \neg\psi, v_i/\varepsilon_x \end{array}$$

Para distinguir los mundos normales de los anormales, que no sean w_0 o e_0 , cada vez que un operador universal $[O]$ aparezca en un nodo, consideramos a ese mundo/estado epistémico como normal. Esto sucede porque los miembros del árbol deben ser verdaderos y $[O]$ nunca puede serlo en un mundo/estado epistémico anormal. En suma:

$$\begin{array}{ccc} \square\varphi, v_i/\varepsilon_x & [K]\varphi, v_i/\varepsilon_x & [B]\varphi, v_i/\varepsilon_x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \square\varphi, w_i/\varepsilon_x & [K]\varphi, v_i/e_x & [B]\varphi, v_i/e_x \end{array}$$

En la primera regla, se usa v porque puede ser que el mundo ya sea normal, pero si es anormal, *i.e.*, si el nodo es de la forma $\Box\varphi, \bar{w}_i/\varepsilon_x$, entonces debe pasar a ser $\Box\varphi, w_i/\varepsilon_x$; nótese que ε_x se mantiene igual en la extensión. Lo mismo se aplica a las otras dos reglas *mutatis mutandis*. En la práctica, puede que sea más fácil, si uno hace los árboles con lápiz, borrar el guion para hacer a un mundo normal; si se usa pluma, o simplemente no se quiere borrar, puede usarse un guion doble para indicar que un mundo es normal, *i.e.*, $\bar{\bar{w}} = w$. Lo mismo aplica para e .

Las reglas de equivalencias entre operadores siguen siendo las mismas:

$$\begin{array}{ccc} \neg[O]\varphi, v_i/\varepsilon_x & & \neg\langle O\rangle\varphi, v_i/\varepsilon_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle O\rangle\neg\varphi, v_i/\varepsilon_x & & [O]\neg\varphi, v_i/\varepsilon_x \end{array}$$

Las reglas para los operadores universales son básicamente las mismas que antes.

$$\begin{array}{ccc} \Box\varphi, w_i/\varepsilon_x & [K]\varphi, v_i/e_x & [B]\varphi, v_i/e_x \\ \varepsilon_x R w_i v_j & v_i \Psi^K e_x \varepsilon_y & v_i \Psi^B e_x \varepsilon_y \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \varphi, v_j/\varepsilon_x & \varphi, v_i/\varepsilon_y & \varphi, v_i/\varepsilon_y \end{array}$$

En la primera regla, se usa w_i en lugar de v_i debido a que el mundo es normal por tener la presencia de \Box . Lo mismo aplica para las otras reglas con e_x y ε_x .

Las reglas para los operadores particulares también son las mismas, excepto porque sólo se aplican en los mundos/estados epistémicos normales (si el mundo/estado epistémico es anormal, $\langle O\rangle\varphi$ ya es verdadero y no es necesario extender el árbol):

$$\begin{array}{ccc} \Diamond\varphi, w_i/\varepsilon_x & \langle K\rangle\varphi, v_i/e_x & \langle B\rangle\varphi, v_i/e_x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \varepsilon_x R w_i \bar{w}_j & v_i \Psi^K e_x \bar{e}_y & v_i \Psi^B e_x \bar{e}_y \\ \varphi, \bar{w}_j/\varepsilon_x & \varphi, v_i/\bar{e}_y & \varphi, v_i/\bar{e}_y \end{array}$$

Nótese que, aunque las reglas se aplican en mundos/estados epistémicos normales, los nuevos mundos/estados epistémicos tienen que ser anormales.

Las reglas para R_e , Ψ_w^K y Ψ_w^B son básicamente las mismas que antes, sea o no normal el mundo/estado epistémico:

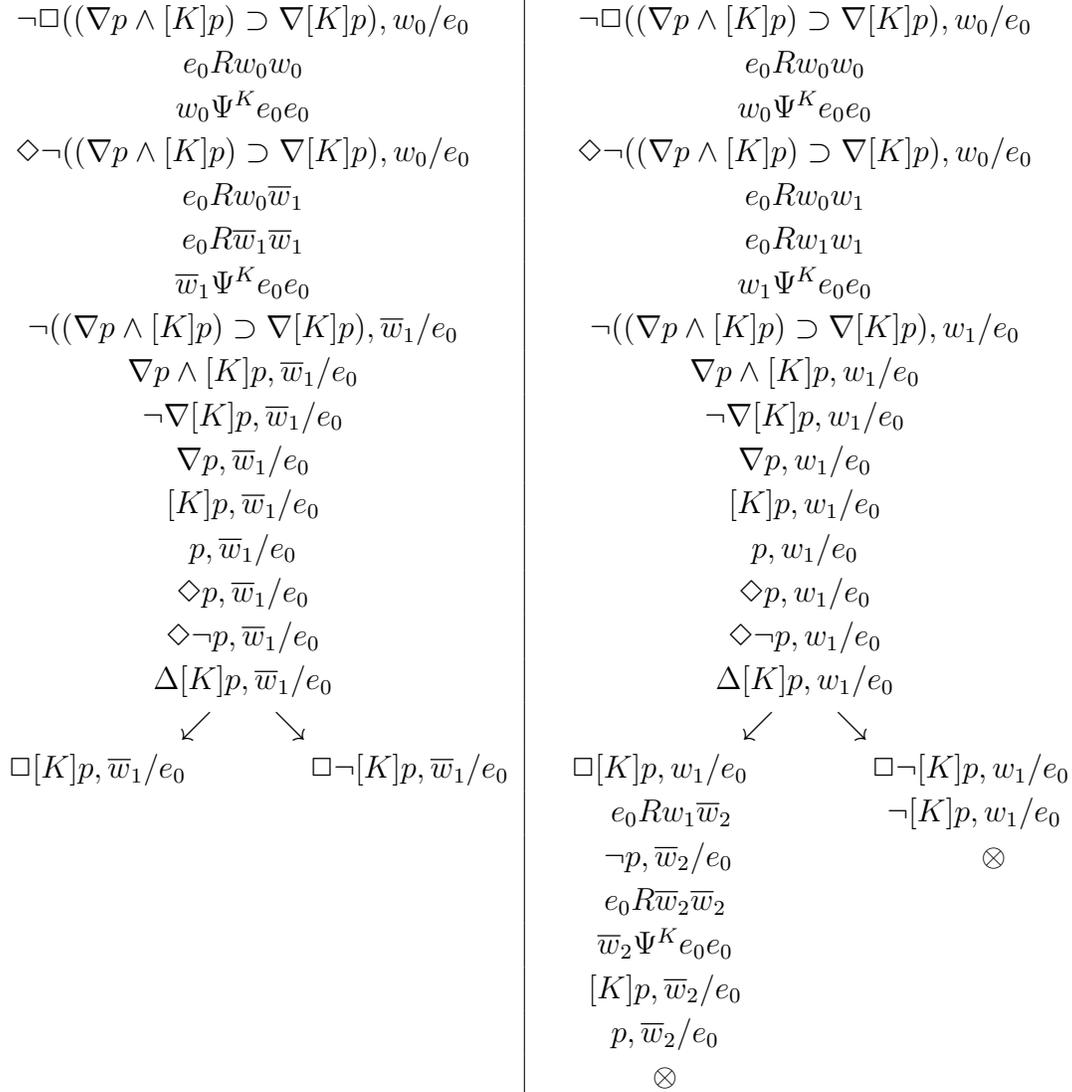
$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & v_i \Psi^B \varepsilon_x \varepsilon_y \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \varepsilon_x R v_i v_i & v_i \Psi^K \varepsilon_x \varepsilon_x & v_i \Psi^B \varepsilon_x \bar{e}_y & v_i \Psi^K \varepsilon_x \varepsilon_y \end{array}$$

Sólo hay que considerar que en la tercera regla el estado epistémico que se introduce debe ser anormal.

A modo de ejemplo, considérese una variante de (3.1):

$$(8.1) \quad \Box((\nabla p \wedge [K]p) \supset \nabla[K]p)$$

Aquí está el árbol que demuestra que (8.1) es una verdad lógica (el árbol de la izquierda se detiene cuando el nodo $\Box[K]p, \bar{w}_1/e_0$ nos fuerza a que \bar{w}_1 pase a ser w_1 (o \bar{w}_1), el árbol de la derecha es entonces el mismo árbol revisado; lo mismo aplica para la rama derecha con el nodo $\Box\neg[K]p, \bar{w}_1/e_0$):



w_1 se supone como anormal hasta que aparece el nodo $\Box[K]p, \bar{w}_1/e_0$ en la rama izquierda (o $\Box\neg[K]p, \bar{w}_1/e_0$ en la rama derecha), es entonces que debemos regresar a revisar el árbol para que el mundo sea normal.¹ El árbol es parecido al de (3.1), excepto porque no se puede aplicar una regla a \diamond hasta que w_1 se descubre como normal.

¹ Si hay más de una rama en el árbol, uno tendría que rehacer el árbol para cada rama. Afortunadamente en el ejemplo aquí mostrado no es necesario hacerlo.

Ahora bien, vamos a demostrar que no es válido en $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$ que:

$$(8.2) \quad \Box[B](p \supset [K](q \vee \neg q))$$

Aquí está el árbol:

$$\begin{array}{l}
\neg\Box[B](p \supset [K](q \vee \neg q)), w_0/e_0 \\
\quad e_0 R w_0 w_0 \\
\quad w_0 \Psi^K e_0 e_0 \\
\Diamond\neg[B](p \supset [K](q \vee \neg q)), w_0/e_0 \\
\quad e_0 R w_0 \bar{w}_1 \\
\neg[B](p \supset [K](q \vee \neg q)), \bar{w}_1/e_0 \\
\quad e_0 R \bar{w}_1 \bar{w}_1 \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^K e_0 e_0 \\
\langle B \rangle \neg(p \supset [K](q \vee \neg q)), \bar{w}_1/e_0 \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^B e_0 \bar{e}_1 \\
\neg(p \supset [K](q \vee \neg q)), \bar{w}_1/\bar{e}_1 \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^K e_0 \bar{e}_1 \\
\quad w_0 \Psi^K \bar{e}_1 \bar{e}_1 \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^K \bar{e}_1 \bar{e}_1, \\
\quad p, \bar{w}_1/\bar{e}_1 \\
\neg[K](q \vee \neg q), \bar{w}_1/\bar{e}_1 \\
\langle K \rangle \neg(q \vee \neg q), \bar{w}_1/\bar{e}_1 \quad (*) \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^B e_0 \bar{e}_2 \\
\quad \bar{w}_1 \Psi^K e_0 \bar{e}_2, \\
\quad \vdots
\end{array}$$

Si ésta fuera un árbol de $T_{\square}/T_K/D_B^*$, podría aplicarse la regla de $\langle K \rangle$ a la línea marcada con (*) y eventualmente el árbol se cerraría, pero esto no sucede en este árbol porque tenemos \bar{e}_1 y no e_1 . Nótese que tampoco hay motivo para suponer que \bar{w}_1 sea w_1 .

Igual que antes, podemos obtener un contramodelo a partir de ramas abiertas, sólo hay que tener cuidado de qué pertenece a W y E y qué a \bar{W} y \bar{E} . El contramodelo que da el árbol para (8.2) es infinito, pero en la figura 8.1 se muestra uno finito (sólo hay que apuntar lo siguiente: el modelo sucede en e_0 ; aunque hay un modelo de mundos para \bar{e}_1 , éste no es relevante para la invalidez; los mundos y estados epistémicos anormales se iluminan de gris para diferenciarlos). Comprobar que funciona es fácil.

Ahora bien, es posible tener un sistema aún más débil que $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$. Al final del capítulo 1, se apuntó que, debido a que $\langle K \rangle p \equiv \neg[K]\neg p$, no saber algo implica tener la posibilidad epistémica negativa, $\neg[K]p \supset \langle K \rangle \neg p$. Esto es importante por dos cosas. En primer lugar, toda lógica epistémica no sólo debe hablar de lo que conocemos, sino

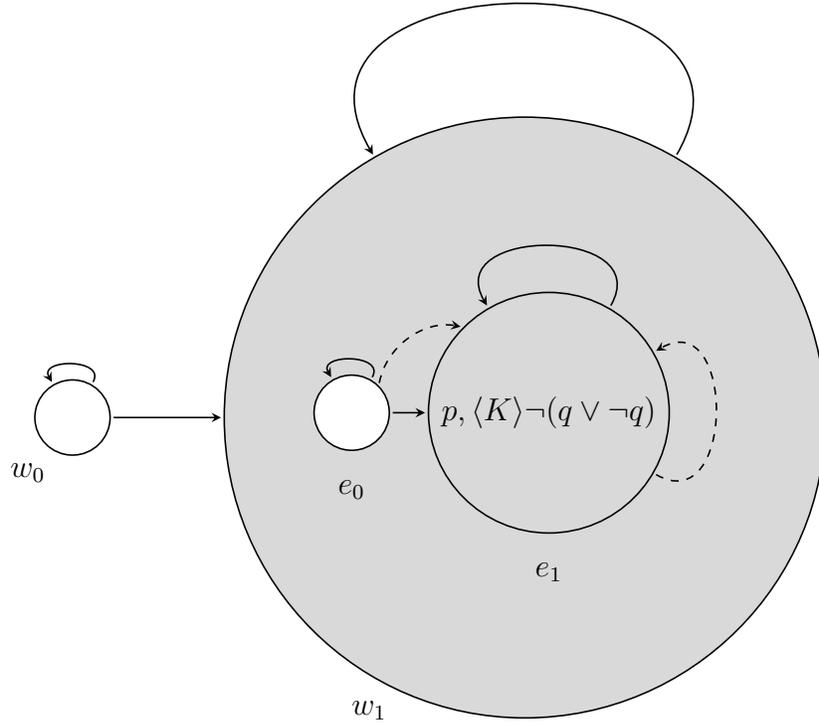


Fig. 8.1: Contramodelo finito de $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$ para (8.2)

también de lo que no, por lo cual la equivalencia puede ser útil; en segundo lugar, en discursos acotados, es posible la equivalencia, si yo no sé si tienes el siete de tréboles, $\backslash K/p$, me es posible pensar tanto que lo tienes, $\langle K \rangle p$, como que no, $\langle K \rangle \neg p$. El problema es que no siempre tenemos esa posibilidad negativa. En el contramodelo de la figura 8.1, puede que q sea ‘hay infinitos números primos’ (en efecto, los hay, y q implica $q \vee \neg q$), pero puede que alguien no lo sepa, que piense la situación está indeterminada, esta persona podría quedarse en $\neg[K](q \vee \neg q)$ sin llegar a afirmar $\langle K \rangle \neg(q \vee \neg q)$. Para hacer justicia a esto, hacemos que los miembros de \overline{W} y \overline{E} no sólo sean anormales sino imposibles: las fórmulas modales/epistémicas/doxásticas tienen valores arbitrarios en mundos/estados epistémicos imposibles. El análogo a $S2$ con mundos/estados imposibles suele llamarse en la literatura $S0.5_{\square}$ [36, sec. 4.4a.7], aunque no hay, que yo sepa, un análogo a D , pero podemos llamarle LD ; así pues, el sistema puede llamarse $S0.5_{\square}/S0.5_K/LD_B^*$. Los árboles para $S0.5_{\square}/S0.5_K/LD_B^*$ son los mismos que los de $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$, excepto porque sólo w_0 es normal y ninguna regla puede aplicarse a fórmulas aléticas en mundos que no sean w_0 y lo mismo aplica *mutatis mutandis* a estados epistémicos con los operadores epistémicos/doxásticos. El árbol de $S0.5_{\square}/S0.5_K/LD_B^*$ para (8.2) es el mismo que para $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$ sin la línea $\langle K \rangle \neg(q \vee \neg q), \overline{w}_1/\overline{e}_1$; el de (8.1) es exactamente el mismo que hicimos antes para evaluarla en $S2_{\square}/S2_K/ND_B^*$ excepto porque nunca se pasa al árbol

de la derecha porque \bar{w}_1 nunca deja de ser imposible ($\nabla\varphi$ y $\Delta\varphi$ no son *strictu sensu* fórmulas modales). Los contramodelos pueden obtenerse naturalmente igual que antes, excepto porque, para cualquier mundo que no sea w_0 , si $\Box\varphi, \bar{w}_i/\varepsilon_x$ aparece en la rama, entonces $\nu_{\bar{w}_i/\varepsilon_x}(\Box\varphi) = 1$, y si $\neg\Box\varphi, \bar{w}_i/\varepsilon_x$ aparece en la rama, entonces $\nu_{\bar{w}_i/\varepsilon_x}(\Box\varphi) = 0$, y lo mismo *mutatis mutandis* para los operadores epistémicos y doxásticos. Obtener un contramodelo para (8.1) se deja al lector.

Los sistemas de árboles para $S2_\Box/S2_K/ND_B^*$ y $S0.5_\Box/S0.5_K/LD_B^*$ son correctos y completos. Véase el teorema 11.8.

Antes de entrar a asuntos filosóficos que suscitan las semánticas anormales, veamos uno de los problemas más señalados de las lógicas epistémico-doxásticas normales: la omnisciencia lógica. Una crítica frecuente a las lógicas epistémicas es que éstas idealizan demasiado la capacidad racional de los agentes epistémicos con respecto a lo que saben [38, sec. 4]; particularmente, es problemática la siguiente regla de inferencia [26, p. 18]:

(OLM) Si $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash [K]\varphi \supset [K]\psi$

Dada una inferencia materialmente válida, es válido que el conocimiento del antecedente implique materialmente el conocimiento del consecuente; esto implica para nuestro agente ideal que, dado cualquier corpus de conocimiento, él conoce todas sus implicaciones lógicas materiales. (OLM) es una consecuencia de (NK) y (CK) juntos, el primer principio hace que el agente sepa todas las tautologías clásicas y el segundo le permite cerrarlo en una implicación. Es claro que $T_\Box/T_K/D_B^*$ cae en (OLM). Ahora bien, así como una inferencia puede ser válida con \supset , pero no con \neg , uno podría esperar que $T_\Box/T_K/D_B^*$ diera una noción distinta de omnisciencia lógica, digamos, una estricta:

(OLE) Si $\vdash \varphi \neg \psi$, entonces $\vdash [K]\varphi \neg [K]\psi$

Todo sistema tanto o más fuerte que $S0.5_\Box$ valida *modus ponens* en su versión estricta:

(MPE) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \neg \psi$, entonces $\vdash \psi$

Dada la validez de (CK+) en $S5_\Box/S5_K$, es fácil ver que cualquier sistema tanto o más fuerte que éste cae en (OLE): dada cualquier $\vdash \varphi \supset \psi$, por (N \Box), entonces $\vdash \varphi \neg \psi$; por (NK), $[K](\varphi \neg \psi)$; por (CK+), $[K](\varphi \neg \psi) \neg ([K]\varphi \neg [K]\psi)$, y (MPE), se infiere que $[K]\varphi \neg [K]\psi$.

Dada la invalidez de (CK+) en cualquier sistema más débil que $S5_\Box/S5_K$, sería de esperar que ninguno de estos sistemas caiga en (OLE); sin embargo, esto no sucede. Si aplicamos (N \Box) a la línea III de la demostración axiomática de (CK+) (véase el capítulo 6), tenemos un principio de cuasi-cerradura:

$$(QCK+) \quad \Box[K](p \supset q) \rightarrow ([K]p \rightarrow [K]q)$$

Dada cualquier $\vdash \varphi \supset \psi$, por $(N\Box)$, $\vdash \varphi \rightarrow \psi$; sin embargo, lo que da el golpe de gracia es que, por (NK) , $\vdash [K](\varphi \supset \psi)$, por $(N\Box)$, $\Box[K](\varphi \supset \psi)$, y por $(QCK+)$ y (MPE) , $[K]\varphi \rightarrow [K]\psi$. $T_{\Box}/T_K/D_B^*$ también cae en (OLE) .

Ahora bien, una propiedad importante de las lógicas anormales en general es que la regla de necesidad no es válida. Veámoslo con $(N\Box)$. Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash \Box\varphi$ porque en todos los mundos, normales o anormales, φ es verdadera en virtud de su solo significado; sin embargo, si $\vdash \Box\varphi$, no puede suceder que $\vdash \Box\Box\varphi$ porque $\Box\varphi$ es falsa en los mundos anormales, no importa qué sea φ [36, sec. 4.4.7]. Comentarios similares se aplican a (NK) y (NB) . La falla de la regla de necesidad en las lógicas doxásticas y epistémicas es particularmente útil porque se evita el problema de la omnisciencia lógica. Si falla $(N\Box)$, falla (OLE) ; y si falla (NK) , fallan (OLM) y (OLE) . $S2_{\Box}/S2_K/ND_B^*$ evita ambos tipos de omnisciencia. $S0.5_{\Box}/S0.5_K/LD_B^*$ también evita ambas omnisciencias y evita el paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica negativa, aunque sólo dentro de contextos epistémicos, *i.e.*, $[K]p \equiv \neg\langle K \rangle\neg p$ es válida, pero no lo son ni $[K]([K]p \equiv \neg\langle K \rangle\neg p)$ ni $[B]([K]p \equiv \neg\langle K \rangle\neg p)$; también evitaría el principio de creencias consistentes si se quita la restricción de serialidad relativa a Ψ_w^B , con lo cual se evitarían todos los problemas que vimos en el capítulo 1, aunque el sistema también sería muy débil, y, de hecho, sería el sistema más débil en este trabajo.

Aun con todo, en $S2_{\Box}/S2_K/ND_B^*$:

$$(8.3) \quad ([K](p \rightarrow q) \wedge [K]p) \rightarrow [K]q$$

Esto quiere decir que nuestro agente puede hacer *modus ponens* estricto. La versión material de (8.3), *i.e.*, sólo con \supset , es equivalente a (CK) , pero con \rightarrow la equivalencia clásica falla porque $(CK+)$ sólo es válido en $S5_{\Box}/S5_K$.

Ahora bien, aunque incorporar \overline{W} y \overline{E} da resultados técnicos, no es fácil responder qué es lo que se incorpora. Al trabajar con una fusión, parece que lo pertinente para seguir es ver qué son los mundos anormales y luego los estados epistémicos anormales.

Sobre qué puedan ser los mundos anormales, Berto y Jargo [1] identifican cuatro propuestas usuales en la literatura, un mundo anormal es aquel en que: (1) sucede algo imposible; (2) las leyes de la lógica fallan; (3) la lógica no es clásica; o (4) las contradicciones son verdaderas. De estas opciones, Priest [35] sugiere que (2) es la mejor opción para una aproximación neutral *-i.e.*, sin considerar la legitimidad de la lógica clásica o miras a aplicaciones como las lógicas relevantes-; (3) y (4) no son puntos de vista neutrales en tanto que presuponen la primacía de la lógica clásica frente a otras lógicas; con respecto a (1), que pueda suceder algo imposible no quiere decir que suceda, aún si hay un mundo en el que es posible los cuerpos aceleren más allá de la velocidad de la luz, quizás aceleran demasiado lento como para alcanzar esa

velocidad antes de que el mundo llegue a su fin (cf. Priest [36, sec. 9.7]). En los mundos anormales (o imposibles), no hay garantía de que las leyes lógicas (expresadas por \neg) sean verdaderas. Considérese a $\neg\neg p \rightarrow p$. Ésta es la ley de doble negación, pero los intuicionistas suelen negar su validez; aún si en este mundo $\neg\neg p \rightarrow p$ es verdadero, en algún otro en el que la lógica intuicionista es la lógica regente $\neg\neg p \rightarrow p$ es falso, así pues $\Box(\neg\neg p \rightarrow p)$ es falso.

Si se acepta el punto previo –los mundos anormales son aquellos en los que las leyes lógicas fallan–, un atractivo de cualquier sistema alético-epistémico que se base en $S2_{\Box}$ (o $S0.5_{\Box}$) es que no sólo hará inválidas a las tautologías de la lógica clásica, sino también a las tautologías de la lógica epistémica en la fusión, $[K]\varphi \rightarrow [B]\psi$ es falsa en un mundo anormal; en este sentido, podemos decir que (OLE) falla porque hay circunstancias extraordinarias en las que, aunque el conocimiento debería cerrarse en implicación, no lo hace. Por supuesto, el problema de negar sólo (N \Box) es que persiste (OLM).

Sobre qué sea un estado epistémico anormal, hay un consenso menos establecido. Una propuesta notable sobre qué sean estos se debe a Hintikka, quien creía que los estados anormales son estados epistémicos del agente en los cuales éste no se da cuenta que afirma una contradicción:

La idea básica es que un agente puede equivocadamente contar entre los mundos consistentes con su conocimiento algunos mundos que contengan contradicciones lógicas. El error es simplemente un producto de los recursos limitados del agente, puede suceder que el agente no esté en posición para detectar la contradicción y puede que erróneamente los considere como posibilidades genuinas. [38, sec. 4; mi traducción]

Rantalla extiende la misma respuesta para los mundos imposibles (cf. Meyer [26, p. 20] y Rendsvig y Symons [38, sec. 4]). Henry Levesque intentó extender su explicación filosófica del aparato formal distinguiendo entre las creencias implícitas y explícitas, para las implícitas es plausible la omnisciencia, pero no así para las explícitas, ya que tener una creencia y ser consciente de ella no implica aceptar todas sus implicaciones lógicas (cf. Herrera González [14, p. 238-239]).

Ahora bien, incorporar mundos/estados epistémicos anormales (o imposibles) no es la única forma de obtener lógicas anormales. En los últimos 30 años, se han desarrollado también semánticas de vecindades; sin embargo, la disciplina es todavía muy joven y no hay, que yo sepa, lógicas multimodales con estas semánticas, y quedaría más allá de los propósitos de este trabajo desarrollar algunas aquí. Aun con todo, podemos ver brevemente cómo en la lógica doxástica estas semánticas permiten que haya creencias inconsistentes y evitan el paso del no creer a la posibilidad doxástica negativa sin incluir mundos anormales. Cómo se evita la omnisciencia lógica no lo desarrollaré aquí.²

² Las bases técnicas, con algunas modificaciones equivalentes, provienen de [31, cap. 1].

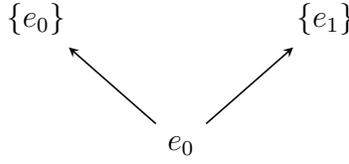
El lenguaje de la lógica doxástica es $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ (véase el capítulo 1). Una interpretación para éste es ahora una tupla $\langle E, N, \nu \rangle$. E y ν son lo mismo que antes, pero N es una función de vecindades que asigna a cada estado epistémico un subconjunto del conjunto potencia de estados epistémicos, $N : E \mapsto \wp(\wp(E))$. Para facilitar las cosas, como en el capítulo 7, introducimos el concepto de conjunto de verdad: $[\varphi] = \{e : \nu_e(\varphi) = 1\}$.

Las condiciones de verdad de los miembros de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ son las siguientes

$$\begin{array}{llll} \nu_e(p) = 1 & \text{sii} & e \in [p] & \text{por lo cual } [\neg p] = E - [p] \\ \nu_e(\varphi \wedge \psi) = 1 & \text{sii} & \nu_e(\varphi) = \nu_e(\psi) = 1 & \text{o bien } e \in [\varphi] \cap [\psi] \\ \nu_e([B]\varphi) = 1 & \text{sii} & [\varphi] \in N(e) & \\ \nu_e(\langle B \rangle \varphi) = 1 & \text{sii} & E - [\varphi] \notin N(e) & \text{o bien } [\neg \varphi] \notin N(e) \end{array}$$

Nótese que, dadas estas condiciones, $\langle B \rangle \varphi$ sigue definiéndose como $\neg[B]\neg\varphi$.

Ahora bien, considérese el siguiente modelo de vecindades: $E = \{e_0, e_1\}$, $N(e_0) = \{\{e_0\}, \{e_1\}\}$, $\nu_{e_1}(p) = 1$. Ilustrado:



Es fácil ver que $[p] = \{e_1\}$. Debido a que $[p] \in N(e_0)$, $[B]p$ es verdadero en e_0 y $e_0 \in [[B]p]$. Debido a que $E - [p] = \{e_0\} = [\neg p]$ y a que $\{e_0\} \in N(e_0)$, $[B]\neg p$ es verdadero en e_0 y $e_0 \in [[B]\neg p]$. Con base en esto, pueden concluirse dos cosas. En primer lugar, que la creencia de algo no implica su posibilidad doxástica; debido a que $[B]\neg p$ es verdadera en e_0 y a que $\langle B \rangle p =_{def} \neg[B]\neg p$, $\langle B \rangle p$ es falsa en e_0 ; por tanto, $[B]p$ no implica necesariamente a $\langle B \rangle p$. En segundo lugar, que uno puede creer en una proposición y creer en su negación sin por ello tener una creencia inconsistente; debido a que $[B]p$ y $[B]\neg p$ son verdaderos en e_0 (o bien, $e_0 \in [[B]p] \cap [[B]\neg p]$), $[B]p \wedge [B]\neg p$ es verdadero en e_0 ; sin embargo, $[p] \cap [\neg p] = \emptyset$ y $\emptyset \notin N(e_0)$, así pues $\neg[B](p \wedge \neg p)$ en e_0 ; por tanto, $[B]p \wedge [B]\neg p$ no implica necesariamente $[B](p \wedge \neg p)$. Dados estos resultados, algunos lógicos no leen a $\langle B \rangle p$ como '(para alguien) p es una posibilidad doxástica', sino como 'la creencia (de alguien) es consistente con p '; de esta forma, $[B]p \wedge \langle B \rangle p$ puede leerse como 'la creencia (de alguien) sobre p es consistente'. Tener información suficiente para creer que p y tener información suficiente para creer que $\neg p$ no implica la creencia en una contradicción. A mi consideración, ésta es una propuesta sensata tanto para evitar el paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica como para tener creencias contrarias no inconsistentes.

9. LÓGICA EPISTÉMICA INTUICIONISTA

En el capítulo 1, conocimos el problema del paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica, y en el capítulo 8, vimos una solución a éste con estados epistémicos imposibles. Aunque esta última es una respuesta técnicamente correcta, también vimos que hay problemas al explicar qué se incorpora a las semánticas. Una respuesta distinta se obtiene al dar un vistazo a la lógica intuicionista, ya que en ella la negación opera de una forma distinta. En este capítulo, veremos cómo pueden fusionarse la lógica intuicionista y la epistémica para evitar las equivalencias clásicas entre $[K]$ y $\langle K \rangle$. Como en otras ocasiones, comenzaremos con detalles técnicos para dejar al final la discusión filosófica. En aras de la simplicidad, la lógica doxástica no aparecerá en este capítulo hasta nuevo aviso.

La lógica intuicionista es una divergencia de la lógica clásica, *i.e.*, difiere con ella en validar algunos principios. Ninguna de las lógicas que hasta ahora hemos revisado contraviene a la lógica clásica, sino que la extiende y admite que ciertos principios fallan al formularlos de otras maneras. Para remarcar la diferencia, sean \rightarrow y \sqsupset la negación y el condicional intuicionistas. El lenguaje de la fusión no podemos verlo siquiera como una unión de lenguajes, como antes lo hemos hecho con otras lógicas, algunos elementos previamente definidos a partir de otros ahora deben considerarse como primitivos. El lenguaje de nuestra lógica a desarrollar, $\mathcal{L}_{\mathcal{IE}}$, contiene un conjunto, \mathcal{P} , de parámetros proposicionales, p, q, r, \dots , los conectivos booleanos \wedge y \vee , la negación y el condicional intuicionistas, \rightarrow y \sqsupset , y los operadores para conocimiento y posibilidad epistémica, $[K]$ y $\langle K \rangle$. La gramática de $\mathcal{L}_{\mathcal{IE}}$ se rige por las siguientes reglas de formación:

$$p : p \in \mathcal{P} \quad | \quad \varphi \wedge \psi \quad | \quad \varphi \vee \psi \quad | \quad \rightarrow \varphi \quad | \quad \varphi \sqsupset \psi \quad | \quad [K]\varphi \quad | \quad \langle K \rangle \varphi$$

Como luego podrá comprobar el lector, en la lógica a desarrollar fallan definiciones que son usuales, notoriamente $p \sqsupset q$ no puede definirse como $\rightarrow p \vee q$.

Una interpretación para $\mathcal{L}_{\mathcal{IE}}$ es una tupla $\langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \nu \rangle$, similar a la que vimos en el capítulo 2. Sólo hay algunas variantes que hacer. R_e debe ser relativamente reflexiva y transitiva, *i.e.*, la base alética es $S4_{\sqsupset}$. Ψ_w^K la aceptamos por ahora sin restricciones. ν es exactamente lo mismo que antes.

Las condiciones de verdad de $\wedge, \vee, [K]$ y $\langle K \rangle$ son exactamente las mismas que antes. Lo único nuevo son las condiciones para \rightarrow y \sqsupset .

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\neg \varphi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{w'/e}(\varphi) = 0 \\ \nu_{w/e}(\varphi \sqsupset \psi) = 1 & \quad \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{w'/e}(\varphi) = 0 \text{ o} \\ & \quad \nu_{w'/e}(\psi) = 1 \end{aligned}$$

Otro cambio importante es que, en la lógica intuicionista ordinaria, es usual tener una condición hereditaria para los parámetros proposicionales (la cual puede extenderse para aplicarse a cualquier fórmula del lenguaje), pero, en el caso de la lógica a desarrollar aquí, necesitamos que también pueda aplicarse a fórmulas epistémicas. Así pues:

Condición hereditaria: si $\nu_{w/e}(\varphi) = 1$ y $eRww'$, $\nu_{w'/e}(\varphi) = 1$

La validez semántica es exactamente la misma que la del capítulo 2.¹ Dadas las características del sistema descrito, podemos llamarle a éste I/K_K .

Los árboles de I/K_K son similares a los del capítulo 3. $\varphi, +w_i/e_x$ significa que φ es verdadera en el par w_i/e_x ; $\varphi, -w_i/e_x$, que φ no es verdadera en el par w_i/e_x (lo cual no debe confundirse con que sea falsa); las líneas para las relaciones de accesibilidad son las mismas. Una lista inicial para una inferencia ahora tiene un nodo $\psi, +w_0/e_0$ para cada premisa (si hay alguna) y $\varphi, -w_0/e_0$ para la conclusión. Una rama se cierra, \otimes , si y sólo si en ella aparecen $\varphi, +w_i/e_x$ y $\varphi, -w_i/e_x$.

Las reglas para la conjunción y la disyunción son:

$$\begin{array}{ccc} \varphi \wedge \psi, +w_i/e_x & & \varphi \wedge \psi, -w_i/e_x \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \varphi, +w_i/e_x & \varphi, -w_i/e_x & \psi, -w_i/e_x \\ \psi, +w_i/e_x & & \\ \\ \varphi \vee \psi, +w_i/e_x & & \varphi \vee \psi, -w_i/e_x \\ \swarrow & \searrow & \downarrow \\ \varphi, +w_i/e_x & \psi, +w_i/e_x & \varphi, -w_i/e_x \\ & & \psi, -w_i/e_x \end{array}$$

Nótese que w_i y e_x se mantienen igual en las extensiones.

¹ Las semánticas que se desarrollan aquí se basan en las presentadas por Priest [36, sec. 6.3], las cuales se basan a su vez en las desarrolladas por Kripke [22]. Algo distintivo de estas semánticas es que son bivaluadas, por lo que falso – el valor 0– puede no interpretarse debidamente como *indeterminado*. También suele decirse que las semánticas fuerzan (*force*) a las proposiciones verdaderas a ser verdaderas en todas las situaciones accesibles, lo cual es la condición hereditaria. Así pues, es discutible que las semánticas desarrolladas por Kripke capten fielmente a los principios del intuicionismo, pero son muy próximas a la teoría clásica de modelos además de que con ellas la lógica intuicionista es correcta y completa. Para una discusión sobre estas semánticas y su relación con otras propuestas, véase a Moschovakis [29, sec. 5]. En su artículo, Kripke también desarrolla un sistema de árboles [22, sec. 2] al estilo de Beth, pero los que aquí se desarrollan se basan en los presentados por Priest [35, sec. 6.4].

Las reglas para los operadores epistémicos son:

$$\begin{array}{cccc}
 [K]\varphi, +w_i/e_x & [K]\varphi, -w_i/e_x & \langle K \rangle \varphi, +w_i/e_x & \langle K \rangle \varphi, -w_i/e_x \\
 w_i\Psi^K e_x e_y & \downarrow & \downarrow & w_i\Psi^K e_x e_y \\
 \downarrow & w_i\Psi^K e_x e_y & w_i\Psi^K e_x e_y & \downarrow \\
 \varphi, +w_i/e_y & \varphi, -w_i/e_y & \varphi, +w_i/e_y & \varphi, -w_i/e_y
 \end{array}$$

En las reglas de los extremos, no importa el orden de los nodos arriba de la flecha. En las dos reglas centrales, y es un número nuevo de estado epistémico en la rama. Nótese que w_i se mantiene igual en las extensiones.

Nótese que las reglas hasta ahora son básicamente las mismas que las del capítulo 3. Una regla para $\varphi, -w_i/e_x$ es casi la misma que la de $\neg\varphi, w_i/e_x$ y una regla para $\varphi, +w_i/e_x$ es casi la misma que la de $\varphi, w_i/e_x$. No tenemos las reglas para equivalencias entre operadores epistémicos porque ahora tendremos nuevas reglas para la negación:

$$\begin{array}{cc}
 \neg\varphi, +w_i/e_x & \neg\varphi, -w_i/e_x \\
 e_x R w_i w_j & \downarrow \\
 \downarrow & e_x R w_i w_j \\
 \varphi, -w_j/e_x & \varphi, +w_j/e_x
 \end{array}$$

En la primera regla, no importa el orden de los nodos arriba de la flecha. En la segunda, j es un número nuevo de mundo posible en la rama. Nótese que e_x se mantiene igual en las extensiones.

Las reglas para el condicional intuicionista son:

$$\begin{array}{cc}
 \varphi \sqsupset \psi, +w_i/e_x & \varphi \sqsupset \psi, -w_i/e_x \\
 e_x R w_i w_j & \downarrow \\
 \swarrow & e_x R w_i w_j \\
 \varphi, -w_j/e_x & \psi, +w_j/e_x \\
 & \searrow \\
 & \varphi, +w_j/e_x \\
 & \psi, -w_j/e_x
 \end{array}$$

En la primera regla, no importa el orden de los nodos arriba de la flecha. En la segunda, j es un número nuevo de mundo posible en la rama. Nótese que e_x se mantiene igual en las extensiones.

La regla para la condición hereditaria es:

$$\begin{array}{c}
 \varphi, +w_i/e_x \\
 e_x R w_i w_j \\
 \downarrow \\
 \varphi, +w_j/e_x
 \end{array}$$

Nótese que e_x se mantiene igual en las extensiones.

Las reglas para las restricciones a R_e las conocimos en los capítulos 3 y 6.

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & e_x R w_i w_j & \\
 \downarrow & e_x R w_j w_k & \\
 e_x R w_i w_i & \downarrow & \\
 & e_x R w_i w_k &
 \end{array}$$

En caso de que la base para la lógica epistémica sea $S5$, en las reglas de los operadores pueden omitirse las líneas sobre Ψ_w^K . y es un número nuevo de estado epistémico y z es cualquier número de estado epistémico en la rama.

$$\begin{array}{cccc}
 [K]\varphi, +w_i/e_x & [K]\varphi, -w_i/e_x & \langle K \rangle \varphi, +w_i/e_x & \langle K \rangle \varphi, -w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \varphi, +w_i/e_z & \varphi, -w_i/e_y & \varphi, +w_i/e_y & \varphi, -w_i/e_z
 \end{array}$$

A modo de ejemplo, aquí está el árbol de I/K_K para

$$(9.1) \vdash \langle K \rangle p \sqsupset \rightarrow [K] \rightarrow p$$

- (1) $\langle K \rangle p \sqsupset \rightarrow [K] \rightarrow p, -w_0/e_0$
- (2) $e_0 R w_0 w_0$
- (3) $e_0 R w_0 w_1$
- (4) $\langle K \rangle p, +w_1/e_0$
- (5) $\rightarrow [K] \rightarrow p, -w_1/e_0$
- (6) $e_0 R w_1 w_1$
- (7) $e_0 R w_1 w_2$
- (8) $[K] \rightarrow p, +w_2/e_0$
- (9) $e_0 R w_2 w_2$
- (10) $e_0 R w_0 w_2$
- (11) $\langle K \rangle p, +w_2/e_0$
- (12) $w_2 \Psi^K e_0 e_1$
- (13) $p, +w_2/e_1$
- (14) $e_1 R w_0 w_0$
- (15) $e_1 R w_1 w_1$
- (16) $e_1 R w_2 w_2$
- (17) $\rightarrow p, +w_2/e_1$
- (18) $p, -w_2/e_1$
- (19) \otimes

No hay premisas, así que en (1) sólo ponemos a la conclusión como no verdadera en el par w_0/e_0 e inmediatamente la línea (2) podemos aplicar la regla para la reflexividad

de R_e . Las líneas (3) a (5) surgen por la regla para condicionales no verdaderos a (1), y la línea (6) se añade por la reflexividad de R_e al nuevo mundo en la rama $-w_1$. Las líneas (7) y (8) surgen al aplicar la regla para negaciones no verdaderas a la línea (5); dado el nuevo mundo en la rama, la línea (9) se da por la reflexividad de R_e y la (10) por su transitividad dadas las líneas (3) y (7). La línea (11) resulta de aplicar la condición hereditaria dadas las líneas (4) y (7). Las líneas (12) y (13) surge por la regla para posibilidades epistémicas verdaderas aplicada a la línea (11). Dado el nuevo estado epistémico en la rama $-e_1-$, surgen las líneas de (14) a (16) por la reflexividad de R_e . La línea (17) surge de una aplicación de la regla para $[K]$ verdadero dadas las líneas (8) y (17). la línea (18) surge de aplicar la regla para \rightarrow verdadera dadas las líneas (16) y (17). La rama en la línea (19) se cierra dadas las líneas (13) y (18).

Aquí está el árbol de $I/S5_K$ que demuestra que

$$(9.2) \not\vdash \rightarrow [K] \rightarrow p \sqsupset \langle K \rangle p$$

- | | |
|------|---|
| (1) | $\rightarrow [K] \rightarrow p \sqsupset \langle K \rangle p, -w_0/e_0$ |
| (2) | $e_0 R w_0 w_0$ |
| (3) | $e_0 R w_0 w_1$ |
| (4) | $\rightarrow [K] \rightarrow p, +w_1/e_0$ |
| (5) | $\langle K \rangle p, -w_1/e_0$ |
| (6) | $e_0 R w_1 w_1$ |
| (7) | $[K] \rightarrow p, -w_1/e_0$ |
| (8) | $\rightarrow p, -w_1/e_1$ |
| (9) | $e_1 R w_0 w_0$ |
| (10) | $e_1 R w_1 w_1$ |
| (11) | $e_1 R w_1 w_2$ |
| (12) | $p, +w_2/e_1$ |
| (13) | $e_0 R w_2 w_2$ |
| (14) | $e_1 R w_2 w_2$ |
| (15) | $p, -w_1/e_0$ |
| (16) | $p, -w_1/e_1$ |

Igual que antes, no hay premisas, así que la conclusión se pone como no verdadera en la línea (1) e inmediatamente obtenemos la línea (2) dada la reflexividad de R_e . Las líneas de (3) a (5) se obtienen por la regla para condicionales no verdaderos y la (6) se obtiene inmediatamente por la reflexividad de R_e dado el mundo nuevo $-w_1$. La línea (7) se obtiene al aplicar la regla para las negaciones verdaderas dadas las líneas (4) y (6). La línea (8) introduce un nodo con un nuevo estado epistémico $-e_1-$ dada la regla para posibilidades epistémicas no verdaderas (como trabajamos con base en $S5$, no hay

necesidad de indicar la línea de Ψ^K). Las líneas (8) a (11) se dan por la reflexividad de R_e dado el nuevo estado epistémico en la rama. La línea (12) surge por la regla para negaciones no verdaderas aplicada a la línea (8). Las líneas (13) y (14) se dan por la reflexividad de R_e dado el nuevo mundo posible en la rama $-w_2$. Por la línea (5), las líneas (15) y (16) surgen al aplicar la regla de posibilidades epistémicas no verdaderas a todos los estados epistémicos en la rama, a saber, sólo e_0 y e_1 . No hay más reglas que aplicar, por lo que el árbol queda abierto.

En caso de que un árbol quede abierto, pueden obtenerse contramodelos a partir de las ramas abiertas igual que en el capítulo 3, excepto porque si $p, +w_i/e_x$ aparece en la rama, $\nu_{w_i/e_x}(p) = 1$, caso contrario, $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$; si aparece $p, -w_i/e_x$ explícitamente en la rama, entonces $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$.

Los sistemas de árboles presentados son correctos y completos con respecto a sus semánticas. Véanse los teoremas 11.9, 11.10 y 11.11.

El contramodelo obtenido a partir de la rama abierta del segundo árbol es el siguiente. $W = \{w_0, w_1, w_2\}$; $E = \{e_0, e_1\}$; $R_{e_0} = \{w_0w_0, w_1w_1, w_2w_2, w_0w_1\}$, $R_{e_1} = \{w_0w_0, w_1w_1, w_2w_2, w_1w_2\}$; para todo $w_i \in W$, $\Psi_{w_i}^K$ es una relación de equivalencia en E ; y $\nu_{w_2/e_1}(p) = 1$ y para todos los demás pares w_i/e_x , $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$. Éste puede ilustrarse como en la figura 9.1. Comprobar que funciona se deja al lector.

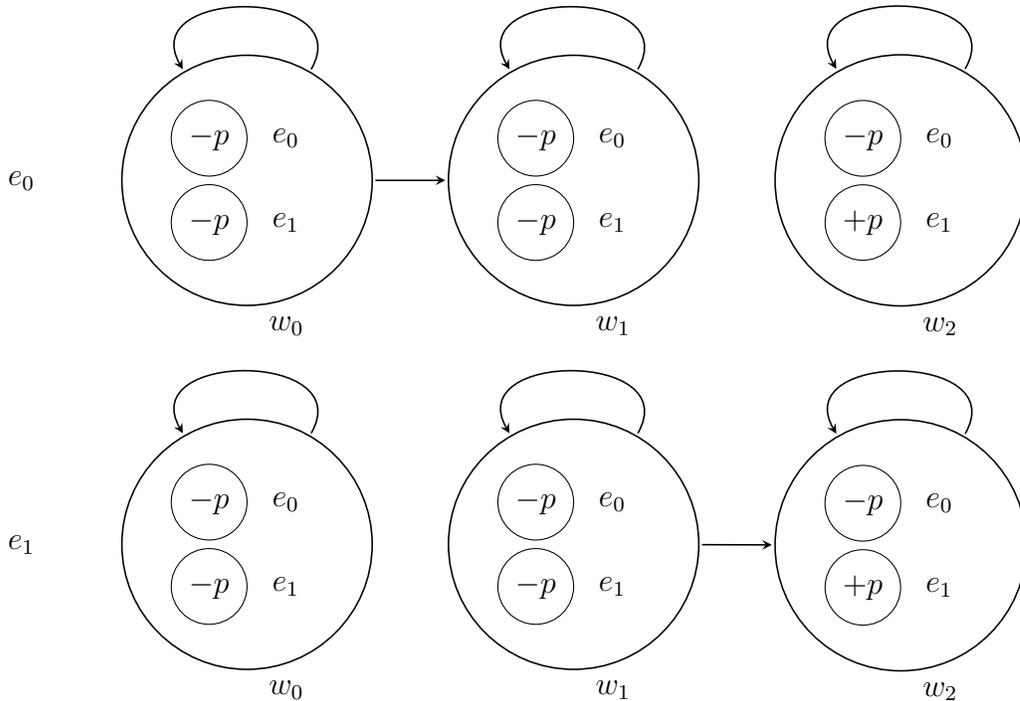


Fig. 9.1: Contramodelo para $\neg [K] \neg p \sqsupset \langle K \rangle p$

$\mathcal{L}_{\mathcal{IE}}$ puede extenderse para incluir operadores aléticos y doxásticos, $\mathcal{L}_{\mathcal{IAD\mathcal{E}}}$, siendo sus condiciones de verdad las que conocimos en el capítulo 2. Las reglas de árboles para los operadores doxásticos son las mismas que las de los operadores epistémicos *mutatis mutandis*. Las reglas para los operadores aléticos son:

$$\begin{array}{cccc}
 \Box\varphi, +w_i/e_x & \Diamond\varphi, +w_i/e_x & \Box\varphi, -w_i/e_x & \Diamond\varphi, -w_i/e_x \\
 e_x R w_i w_j & \downarrow & \downarrow & e_x R w_i w_j \\
 \downarrow & e_x R w_i w_j & e_x R w_i w_j & \downarrow \\
 \varphi, +w_j/e_x & \varphi, +w_j/e_x & \varphi, -w_j/e_x & \varphi, -w_j/e_x
 \end{array}$$

En las reglas de los extremos, no importa el orden de los nodos. En las reglas centrales, j es un número de mundo nuevo. Nótese que en las extensiones e_x se mantiene igual.

Pasemos ahora a asuntos filosóficos que suscitan las semánticas de fusión de la lógica intuicionista con otras lógicas epistémico-doxásticas.

La lógica intuicionista se desarrolló como una herramienta formal para expresar las ideas del intuicionismo, un punto de vista de la filosofía de las matemáticas que surgió en medio de la crisis de la fundamentación de la aritmética a inicios del siglo XX. Mientras que el realismo matemático consiste en afirmar que los elementos de la matemática, *i.e.*, los números, son entidades reales,

[el] intuicionismo se basa en la idea de que las matemáticas son una creación de la mente. La verdad de una afirmación matemática sólo puede concebirse vía una construcción mental que la demuestra como verdadera, y la comunicación entre matemáticos sólo sirve como un medio para crear el mismo proceso mental en diferentes mentes. [18, introducción; mi traducción]

Las semánticas de Kripke captan las ideas del intuicionismo de la siguiente forma:²

Piensa en el mundo como un estado de información en un cierto momento: intuitivamente, las cosas que son verdaderas en él son las cosas que se prueban en este momento. Se piensa que uRv significa que v es una posible extensión de u , obtenida al encontrar algún número (posiblemente cero) de futuras pruebas. Por este entendido, R es claramente reflexiva y transitiva (para [la transitividad]: cualquier extensión de una extensión es una extensión). La condición hereditaria es también intuitivamente correcta, si algo se prueba, se queda como probado, sea lo que sea que probemos.

[Dadas las condiciones de verdad para la lógica intuicionista,] $\varphi \wedge \psi$ se prueba en un momento sii φ se prueba en ese momento y también ψ ; $\varphi \vee \psi$ se prueba en un momento sii φ se prueba en ese momento o se prueba ψ . Si $\rightarrow \varphi$ se prueba en un momento, entonces tenemos una prueba de que no hay

² Por uniformidad, se ha modificado la cita. Priest usa A y B en lugar de φ y ψ respectivamente.

una prueba para φ . Por tanto, φ no se probará en ningún momento posterior posible. Caso contrario, si $\neg \varphi$ no se prueba en algún momento, entonces es al menos posible que una prueba de φ surgirá, de forma que afirmamos que φ será verdadera en un momento futuro posible. Finalmente, si $\varphi \sqsupset \psi$ se prueba en algún momento, entonces tenemos una construcción que puede aplicarse a cualquier prueba de φ para dar una prueba de ψ . Por tanto, en momento futuro posible, o no hay una prueba de φ , o, si la hay, ésta nos da la prueba de ψ . Caso contrario, si $\varphi \sqsupset \psi$ no se prueba en algún momento, entonces al menos es posible que, en algún momento futuro, φ sea probada y ψ no lo sea, *i.e.*, que φ sea verdadera y ψ sea falsa en algún momento futuro posible. [36, secc. 6.3.6-7; mi traducción]

La lógica intuicionista se caracteriza porque: (1) invalida *tercio excluso*, $p \vee \neg p$, pues hay afirmaciones de las cuales es posible que no haya prueba ni de que sean verdaderas ni de que sean falsas; (2) invalida *eliminación de doble negación*, $\neg\neg p \sqsupset p$, que no haya una prueba de que no hay una prueba no implica que haya una prueba; (3) valida la *ley de contradicción*, $(p \sqsupset q) \sqsupset ((p \sqsupset \neg q) \sqsupset \neg p)$, una demostración que sirve para probar otra cosa y su negación siempre es falsa; y (4) valida *ex falso sequitur quod libet*, $\neg p \sqsupset (p \sqsupset q)$; de los rechazos, el más notorio es el de *tercio excluso*, ya que Brouwer, el fundador del intuicionismo, creía que éste parte del supuesto de que todas las proposiciones matemáticas tienen una prueba, lo cual Gödel demostró como falso, y que normalmente éste nos involucra con cuestiones relativas al infinito [29, sec. 1].

La noción de construcción de pruebas es más clara cuando permitimos que el lenguaje incluya cuantificadores, ya que podemos hablar de pruebas que se aplican a todos los números que se hayan de encontrar –construir– y de la existencia de números que satisfacen una cierta prueba. Considérese la conjetura de Goldbach, *todos los números pares mayores a 2 son la suma de dos números primos*. Hoy día no hay prueba de que la conjetura sea verdadera o falsa, así que *tercio excluso* no se cumple en este caso. Hoy día ha podido comprobarse la conjetura de Goldbach para un número relativamente elevado, superior a los 10 dígitos, por lo que, dado el dominio hasta ahora revisado, no hay prueba de que haya un número para el que no haya prueba de que satisface la conjetura de Goldbach (si se considera como prueba siquiera el tanteo del estilo $5 + 3 = 8$), así pues, $\neg \exists \gamma \neg P\gamma$; de ello no se sigue que la conjetura sea verdadera, $\forall \gamma P\gamma$, ya que en algún momento posterior puede aparecer un número para el que no se cumpla la conjetura. La falla de las equivalencias clásicas entre cuantificadores es otra de las marcas distintivas de la lógica intuicionista [56, sec. 2.2.1]. En el caso de la lógica alética, al ser \square y \diamond cuantificadores sobre mundos posibles en las semánticas, debería aceptarse que el hecho de que no todos los mundos posibles hagan falsa a una proposición, $\neg \square \neg p$, no es suficiente para decir que hay alguno en el que la proposición sea verdadera, $\diamond p$ [51, sec. 2.1].

Las observaciones se aplican igual a la lógica epistémica. Si hablamos de discursos acotados, desconocer algo puede llevar a una posibilidad epistémica. En un juego de naipes, que yo no sepa si otro jugador tiene el 7 de tréboles, $\neg[K]p \wedge \neg[K]\neg p$, me permite pensar en el escenario en que lo tiene y en el que no, $\langle K \rangle p \wedge \langle K \rangle \neg p$. Aquí es legítima la cuantificación clásica sobre estados epistémicos. Caso contrario, si le preguntáramos a un agente algo sobre lo que él no tiene ni idea y él responde que no sabe, ello no quiere decir que él tenga la posibilidad epistémica negativa. Supóngase que nuestro agente no sabe que Homero no narra en la *Ilíada* cómo los aqueos entraron a Troya en un caballo de madera, $\neg [K] \neg p$. Si él sabe del caballo de Troya y no ha leído la *Ilíada*, él puede pensar como posible que Homero sí hable sobre el caballo de Troya en la *Ilíada*; pero si él no tuviera ni idea ni de Homero ni del caballo de Troya, es difícil ver cómo podría tener dicha posibilidad epistémica. Ante las posibilidades sin fin de las que no podemos ni hablar, la cuantificación intuicionista parece una opción sensata. Nadie hay que lo sepa todo en este mundo, así que de cierta forma todos somos el desafortunado agente que no sabe cosas y no tiene la mínima posibilidad epistémica negativa sobre lo que ignora. También es pertinente la falla análoga en la lógica doxástica. En el capítulo 1, vimos que $\backslash B/p$ puede leerse como una suspensión del juicio, $\neg[B]\neg p \wedge \neg[B]p$. Cuando suspendemos el juicio respecto a algo, normalmente es porque sentimos que la posibilidad de alcanzar un conocimiento queda muy lejos de nuestro alcance. De nuevo, en discursos acotados puede tener sentido usar la negación clásica. Aunque yo no sea un experto en Aristóteles, sé que hay un debate sobre la existencia del segundo libro de la *Poética* y su contenido. Una suspensión del juicio me permite decir que concibo doxásticamente que pueda existir o no dicho libro, $\langle B \rangle p \wedge \langle B \rangle \neg p$, e incluso me permite tratar de adivinar sobre lo que pudo haber dicho el estagirita en él. Caso distinto, si se me pregunta por un tema como la veracidad de la teoría de cuerdas (la cual apenas conozco de nombre), mi suspensión del juicio no involucra que piense que sí o que piense que no es verdadera, ¿Cómo podría concebirlo desde mi ignorancia?

También falla

$$(9.3) \quad \neg \langle K \rangle \neg p \sqsupset [K]p$$

para tener las equivalencias entre operadores. Lo interesante aquí es que evitamos una forma de omnisciencia lógica. Léase a $\langle K \rangle$ como ‘por todo lo que el agente sabe, le es posible pensar que’. El antecedente de la inferencia dice que hay afirmaciones negativas que nuestro agente no puede pensar como posibles. Supóngase que nuestro agente sabe los axiomas y definiciones de los *Elementos* de Euclides. De estos se sigue el teorema de Pitágoras, y, por la ley de contradicción, $(p \sqsupset q) \sqsupset ((p \sqsupset \neg q) \sqsupset \neg p)$, sólo podríamos decir que el teorema de Pitágoras es inconsistente si los axiomas fueran inconsistentes,³

³ Por lo menos razonando intuicionistamente dado *ex falso sequitur quod libet*, puede que algún lógico que promueva la paraconsistencia niegue esto.

pero esto queda descartado. De esto se sigue que, nuestro agente no puede pensar como posible que el teorema de Pitágoras sea falso, pero de ello no se sigue que sepa el teorema de Pitágoras dado el conocimiento de los axiomas y definiciones de los *Elementos* de Euclides. Dado cualquier *corpus* de conocimiento siempre habrá afirmaciones que no puedan hacerse sin caer en contradicción, pero de ello no se sigue que sepamos la negación de las mismas.

En tanto que la lógica intuicionista trabaja con la noción de construcción, parece que ésta nos ofrece un nuevo marco conceptual para entender el constructivismo del conocimiento, no como la postura filosófica según la cual todas las oraciones son construcciones sociales igualmente verdaderas,⁴ sino según la cual somos capaces de adquirir nuevos conocimientos a partir de los ya disponibles. Ésta parece una lectura bastante natural de la condición hereditaria, y también nos permite entender por qué nuestro desconocimiento no da lugar a nuevas posibilidades epistémicas, ya que si no se sabe algo, no hay nada más que hacer hasta adquirir un nuevo conocimiento.

Ahora bien, aunque puedan hacerse sistemas basados en la lógica intuicionista, estos no están exentos de problemas.

Siguiendo con los principios válidos, si permitimos que el lenguaje incluya operadores aléticos, epistémicos y doxásticos, con los desarrollos semánticos debidos, la condición hereditaria hace válidos a todos los principios de cerradura (aún si ninguna base es $S5$).

$$\begin{aligned} (\text{CI}\Box) \quad & \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q) \\ (\text{CIK}) \quad & [K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q) \\ (\text{CIB}) \quad & [B](p \supset q) \supset ([B]p \supset [B]q) \end{aligned}$$

En el capítulo 8, vimos que las lógicas multimodales permiten ver distintas versiones del problema de la omnisciencia lógica. Dada la validez de (NK) y (CIK), tenemos la omnisciencia intuicionista:

$$(\text{OLI}) \text{ Si } \vdash \varphi \supset \psi, \text{ entonces } \vdash [K]\varphi \supset [K]\psi$$

Una forma inmediata de solucionar esto es involucrar estados epistémicos anormales en las semánticas, \bar{E} . Una ventaja de hacer esto es que pueden evitarse tanto el paso del desconocimiento a la posibilidad epistémica como la omnisciencia lógica sin incluir estados epistémicos imposibles, sólo se requieren los anormales. Si se añade (TK) en su versión intuicionista, el sistema puede llamarse $I/S2_K$; esta incorporación junto con la (DB) y (KB) en sus versiones intuicionistas dependen de restringir apropiadamente a Ψ_w^K y Ψ_w^B . Si se incluyen operadores aléticos al lenguaje, (T \Box) es válido en su versión intuicionista dada la reflexividad de R_e ; también lo es (4 \Box) dada la transitividad de R_e .

⁴ Sobre esta postura y por qué negarla, véase a Boghossian [4]

Consideremos los principios de introspección en sus versiones intuicionistas

- (4IK) $[K]p \sqsupset [K][K]p$
- (4IB) $[B]p \sqsupset [B][B]p$
- (5IK) $\neg [K]p \sqsupset [K] \neg [K]p$
- (5IB) $\neg [B]p \sqsupset [B] \neg [B]p$

Los principios de introspección positiva, (4IK) y (4IB), son válidos si Ψ_w^K y Ψ_w^B son relativamente transitivos, pero ninguno de los principios de introspección negativa es válido aún si su base fuera $S5$. En la figura 9.2, se da un contramodelo de $I/S5_K$ para (5IK) (la comprobación se relega a una nota al pie), otra razón por la cual puede dudarse de este principio en general; de nueva cuenta, el motivo de la falla es que trabajamos con discursos no acotados.⁵

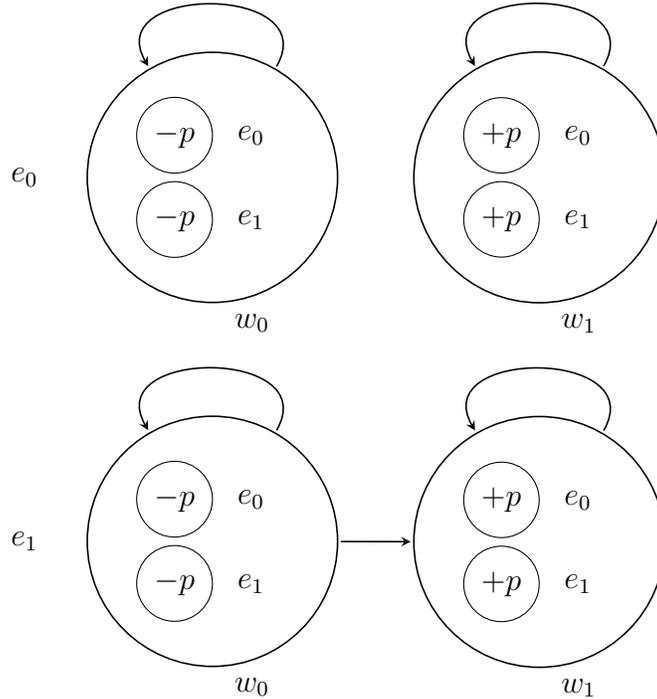


Fig. 9.2: Contramodelo para (5IK) $\neg [K]p \sqsupset [K] \neg [K]p$

⁵ Para interpretar al modelo: $W = \{w_0, w_1\}$; $E = \{e_0, e_1\}$; $R_{e_0} = \{w_0w_0, w_1w_1\}$; $R_{e_1} = \{w_0w_0, w_1w_1, w_0w_1\}$; $\sim_{w_0}^K$ y $\sim_{w_1}^K$; $\nu_{w_0/e_0}(p) = \nu_{w_0/e_1}(p) = 0$ y $\nu_{w_1/e_0}(p) = \nu_{w_1/e_1}(p) = 1$. Es fácil comprobar que esta interpretación satisface la condición hereditaria para los parámetros proposicionales.

Para demostrar la invalidez, nos conviene ir en retrospectiva. En w_1 , p es verdadera en todos los estados epistémicos; así pues, en w_1/e_1 , $[K]p$ es verdadera. Debido a que $e_1Rw_0w_1$, $\neg [K]p$ no es verdadera en w_0/e_1 . Así pues, en w_0 hay un estado epistémico, e_1 , en el que $\neg [K]p$ no es verdadera, por lo cual en w_0/e_0 no es verdadero que $[K] \neg [K]p$. Ahora, en w_0 , hay un estado epistémico, e_1 (o e_0), en el que p no es verdadera; por tanto, no es verdadero que $[K]p$ en w_0 . Debido a que $e_0Rw_0w_0$ y a que w_0 no se relaciona con nada más en e_0 , $\neg [K]p$ es verdadera en el par w_0/e_0 .

Como nota final, valga decir que, aunque se rompe con las equivalencias clásicas entre $[K]$ y $\langle K \rangle$, no sucede lo mismo con \Box y \Diamond .

- (I) $\Box p \Box \rightarrow \Diamond \rightarrow p$
- (II) $\Diamond p \Box \rightarrow \Box \rightarrow p$
- (III) $\rightarrow \Diamond \rightarrow p \Box \Box p$
- (IV) $\rightarrow \Box \rightarrow p \Box \Diamond p$

(I) y (II) son válidas así como (III) es inválida, esto era de esperarse dado el comportamiento de los cuantificadores en la lógica intuicionista; sin embargo, (IV) es válida, y arriba vimos que no debería serlo. Aun más, siendo $A \Box \Box B$ la equivalencia intuicionista, $\Diamond p \Box \Box \rightarrow \Box \rightarrow p$. Así pues, la lógica desarrollada aquí no hace justicia intuicionista a los operadores aléticos.

Si juntamos las técnicas del capítulo 5 y las de éste, hay una forma relativamente sencilla para hacer que fallen $\rightarrow \langle O \rangle \rightarrow p \Box [O]p$ y $\rightarrow [O] \rightarrow p \Box \langle O \rangle p$ tanto para los operadores aléticos como para los operadores epistémicos y doxásticos. Tomemos un modelo $\langle W, T, E, R_{t/e}, <_{w/e}, \Psi_{w/t}^K, \Psi_{w/t}^B, \nu \rangle$, y cambiemos a T y $<_{w/e}$ por S y $\#_{w/e}$, i.e., $\langle W, S, E, R_{e/s}, \#_{w/e}, \Psi_{w/s}^K, \Psi_{w/s}^B, \nu \rangle$. $\#_{w/s}$ nos sirve para definir las condiciones de verdad de \rightarrow y \Box ; $R_{e/s}$, las de \Box y \Diamond ; $\Psi_{w/s}^K$, las de $[K]$ y $\langle K \rangle$; y $\Psi_{w/s}^B$, las de $[B]$ y $\langle B \rangle$. A cualquier relación se le pueden imponer restricciones, pero $\#_{w/e}$ debe ser relativamente reflexiva y transitiva. El desarrollo de sistemas de árboles es laborioso, pero posible. La intuición detrás de la inclusión de S y $\#_{w/e}$ a las semánticas es que sólo usar W y R_e tanto para lo alético como para lo intuicionista nos traía resultados desfavorables.⁶

La obtención del resultado técnico no es una dificultad mayor, pero el problema filosófico proviene cuando tenemos que distinguir a los miembros de W de los de S . De hecho, el mismo problema lo tenemos para los sistemas de este capítulo, pero de otra manera. El problema al que ahora nos enfrentamos es que la lógica intuicionista ve a los miembros de W como ciertas situaciones epistémicas, por lo cual, si alguna vez hubo la intuición de que W y E son diferentes, aquí se desdibuja. Si haya una propuesta que nos diga que debemos mantener la diferencia, más allá de los resultados técnicos, yo la desconozco en este momento.

⁶ También es problemático que la lógica intuicionista y la alética se basen sólo en W porque, al involucrar operadores epistémicos, la condición hereditaria hace absoluto a todo tipo de conocimiento, $[K]p \Box \Box [K]p$, lo cual es aún más implausible que (SH), $[K]\Box p \supset \Box [K]p$ (véase el capítulo 6).

10. $T_{\square}/T_K/D_B^*$ DE PRIMER ORDEN CON IDENTIDAD INVARIABLE

Algunas discusiones filosóficas surgen al tener las versiones cuantificacionales de las lógicas que componen a $T_{\square}/T_K/D_B^*$, y éstas se aplican también a la fusión y dan lugar a otras nuevas. En este capítulo, extiendo $\mathcal{L}_{\mathcal{AD}\mathcal{E}}$ para que incluya cuantificadores de primer orden y el predicado de identidad.

El vocabulario de nuestro lenguaje extendido, \mathcal{L}^+ , consta de: constantes, k_1, \dots, k_n ; variables, v_1, \dots, v_n ; predicados de n lugares para cualquier $n > 0$, $P_n^0, P_n^1, P_n^2, \dots$; conectivas proposicionales, \neg, \wedge y \vee ; cuantificadores, $\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \forall$ y \exists ; operadores aléticos, epistémicos y doxásticos, $\square, \diamond, [K], \langle K \rangle, [B]$ y $\langle B \rangle$; y paréntesis, $(,)$. Usaré a, b y c como constantes arbitrarias, y γ y η como variables arbitrarias.¹ La gramática es la siguiente:

- Toda constante o variable es un término, t
- Si t_1, \dots, t_n son términos y P es un predicado de n lugares, $Pt_1\dots t_n$ es una fórmula atómica (si P_2 es $=$, $t_1 = t_2$ y $t_1 \neq t_2$ son fórmulas).
- Si φ es una fórmula y γ es una variable, $\mathfrak{A}\gamma(\varphi)$, $\mathfrak{S}\gamma(\varphi)$, $\forall\gamma(\varphi)$ y $\exists\gamma(\varphi)$ son fórmulas.
- Si φ y ψ son fórmulas, también lo son $\neg(\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $[K](\varphi)$, $\langle K \rangle(\varphi)$, $\square(\varphi)$, $\diamond(\varphi)$, $[B](\varphi)$ y $\langle B \rangle(\varphi)$.

Omitiré los paréntesis cuando no haya ambigüedad. Si γ aparece en el alcance de un cuantificador, $\forall\gamma(\dots\gamma\dots)$ o $\exists\gamma(\dots\gamma\dots)$, γ está *ligada*; caso contrario, γ está *libre*. $\varphi_{\gamma}(c)$ es la sustitución de cada aparición libre de γ en φ con c . Si φ no tiene variables libres, φ es una *fórmula cerrada*.

Una interpretación para \mathcal{L}^+ es una tupla $\langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$. W, E, R_e, Ψ_w^K y Ψ_w^B son lo mismo que en el capítulo 2. D es un conjunto no vacío de cuantificación. ν es una función denotativa tal que:

Para toda constante, c , perteneciente al lenguaje, $\nu(c) \in D$

Para todo predicado de n lugares, P , $w \in W$ y $e \in E$, $\nu_{w/e}(P) \subseteq D^n$

¹ No usaré x, y y z para evitar confusiones entre las variables de fórmulas y las de estados epistémicos. No usaré $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ o ζ para evitar confusiones con otras letras latinas.

Puede que los pares w/e difieran en lo que existe en ellos. Para captar esto, consideramos a un predicado monádico de existencia, \mathfrak{E} , tal que su extensión determine el dominio de cada par w/e , i.e., $\nu_{w/e}(\mathfrak{E}) = D_{w/e} \subseteq D$.

Para las condiciones de verdad, extendemos el lenguaje de una interpretación para asegurar que todo miembro en el dominio, d , tenga una constante, k , tal que $\nu(k_d) = d$. Para las oraciones atómicas cerradas:

$$\nu_{w/e}(Pa_1\dots a_n) = 1 \quad \text{sii} \quad \langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \in \nu_{w/e}(P)$$

Las condiciones para los conectivos y los operadores son las mismas que en el caso proposicional. Las condiciones de los cuantificadores son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\mathfrak{S}\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para algún } d \in D, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\forall\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D_{w/e}, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\exists\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para algún } d \in D_{w/e}, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \end{aligned}$$

\mathfrak{A} y \mathfrak{S} dependen de D mientras que \forall y \exists de $D_{w/e}$. Si una fórmula válida sólo usa \forall y \exists , es válida con \mathfrak{A} y \mathfrak{S} ; pero si es inválida con \mathfrak{A} y \mathfrak{S} , también lo es con \forall y \exists . \forall y \exists pueden definirse a partir de \mathfrak{A} y \mathfrak{S} :

$$\begin{aligned} \forall\gamma\varphi &=_{def} \mathfrak{A}\gamma(\mathfrak{E}\gamma \supset \varphi) \\ \exists\gamma\varphi &=_{def} \mathfrak{S}\gamma(\mathfrak{E}\gamma \wedge \varphi) \end{aligned}$$

La forma de leerlos es: $\mathfrak{A}\gamma\varphi$, ‘para todos los γ , φ ’; $\mathfrak{S}\gamma\varphi$, ‘para algún γ , φ ’; $\forall\gamma\varphi$, ‘para todos los γ existentes, φ ’; y, $\exists\gamma\varphi$, ‘existe un γ tal que φ ’.

Debido a que todo miembro en el dominio tiene un nombre, las condiciones de los cuantificadores pueden darse equivalentemente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para todo } c \in C, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(c)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\mathfrak{S}\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para algún } c \in C, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(c)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\forall\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para todo } c \in C, \nu_{w/e}(\mathfrak{E}c \supset \varphi_\gamma(c)) = 1 \\ \nu_{w/e}(\exists\gamma\varphi) &= 1 \quad \text{sii} \quad \text{para algún } c \in C, \nu_{w/e}(\mathfrak{E}c \wedge \varphi_\gamma(c)) = 1 \end{aligned}$$

Esto es un corolario del lema de denotación 11.4 para $T_{\square}/T_K/D_B^*$. Las interpretaciones que obtengamos a partir de árboles son de este segundo tipo.

Para el predicado de identidad, consideramos un predicado de dos lugares, P_2 , cuya denotación sea la misma en todos los pares w/e :

$$\nu_{w/e}(=) = \{\langle d, d \rangle : d \in D\}$$

La consecuencia semántica de esto es que son válidas:

- (II□) $\forall\gamma\forall\eta(\gamma = \eta \supset \square\gamma = \eta)$
- (IIK) $\forall\gamma\forall\eta(\gamma = \eta \supset [K]\gamma = \eta)$
- (IIB) $\forall\gamma\forall\eta(\gamma = \eta \supset [B]\gamma = \eta)$

Discutiré la plausibilidad de estos principios al final del capítulo.

La validez semántica se define en términos de la preservación de la verdad para fórmulas cerradas.

Los árboles de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ de primer orden son los mismos que los capítulo 3 en el caso de las conectivas y los operadores. Sólo se requieren dos adiciones.

En primer lugar, tenemos las reglas para los cuantificadores:

$$\begin{array}{cccc}
 \neg\mathfrak{A}\gamma\varphi, w_i/e_x & \neg\mathfrak{S}\gamma\varphi, w_i/e_x & \neg\forall\gamma\varphi, w_i/e_x & \neg\exists\gamma\varphi, w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathfrak{S}\gamma\neg\varphi, w_i/e_x & \mathfrak{A}\gamma\neg\varphi, w_i/e_x & \exists\gamma\neg\varphi, w_i/e_x & \forall\gamma\neg\varphi, w_i/e_x \\
 \\
 \mathfrak{A}\gamma\varphi, w_i/e_x & \mathfrak{S}\gamma\varphi, w_i/e_x & \forall\gamma\varphi, w_i/e_x & \exists\gamma\varphi, w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \swarrow \quad \searrow & \downarrow \\
 \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x & \varphi_{\gamma}(c), w_i/e_x & \mathfrak{E}a, w_i/e_x \quad \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x & \mathfrak{E}c, w_i/e_x \\
 & & & \downarrow \\
 & & & \varphi_{\gamma}(c), w_i/e_x
 \end{array}$$

Las reglas de la primera fila son reglas de equivalencia entre cuantificadores. En la segunda fila, a es cada constante en la rama (o una nueva si no hay ninguna) y c es una nueva en la rama.

Las reglas para el predicado de identidad son las siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & a = b, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x \\
 a = a, w_i/e_x & a = b, w_j/e_y & \downarrow \\
 & & \varphi_{\gamma}(b), w_i/e_x
 \end{array}$$

La primera regla indica que todo es idéntico a sí mismo en todos los pares w_i/e_x en la rama. Normalmente ésta se aplica para cerrar ramas que contienen un nodo de la forma $a \neq \varphi, w_i/e_x$. En la segunda regla, j y y son números de mundos y estados epistémicos cualesquiera en la rama; esta regla se llama *invariabilidad de la identidad*, e indica que la identidad se mueve libremente entre mundos y estados epistémicos. La tercera regla se llama *sustitución de los idénticos*, e indica que pueden intercambiarse variables entre fórmulas si éstas son idénticas en el mismo par w_i/e_x ; *i.e.*, si $a = b, w_i/e_x$ y $Saa, w_i/e_x$ están en la rama, por lo cual $(Sa\gamma)_{\gamma}(a)$, $(S\gamma a)_{\gamma}(a)$ y $(S\gamma\gamma)_{\gamma}(a)$, entonces también están en la rama $Sab, w_i/e_x$, $Sba, w_i/e_x$ y $Sb, w_i/e_x$.

Para ejemplificar el uso de las reglas de árboles, considérese:

$$(10.1) \quad [K]\Box\mathfrak{A}\gamma(S\gamma \supset T\gamma), [B]\Diamond\mathfrak{S}\gamma(U\gamma \wedge S\gamma) \vdash [B]\mathfrak{S}\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma)$$

$$\begin{array}{c}
[K]\Box\mathfrak{A}\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_0 \\
[B]\Diamond\mathfrak{S}\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_0/e_0 \\
\neg[B]\mathfrak{S}\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_0 \\
e_0 R w_0 w_0 \\
w_0 \Psi e_0 e_0 \\
\langle B \rangle \neg \mathfrak{S}\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_0 \\
w_0 \Psi^B e_0 e_1 \\
w_0 \Psi^K e_0 e_1 \\
w_0 \Psi^K e_1 e_1 \\
e_1 R w_0 w_0 \\
\neg \mathfrak{S}\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_1 \\
\mathfrak{A}\gamma\neg\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_1 \\
\Box\mathfrak{A}\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_1 \\
\Diamond\mathfrak{S}\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_0/e_1 \\
e_1 R w_0 w_1 \\
w_1 \Psi^K e_0 e_0 \\
w_1 \Psi^K e_1 e_1 \\
\mathfrak{S}\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_1/e_1 \\
\mathfrak{A}\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_1/e_1 \\
Ua \wedge Sa, w_1/e_1 \\
\neg\Diamond(Ua \wedge Ta), w_0/e_1 \\
Sa \supset Ta, w_1/e_1 \\
\Box\neg(Ua \wedge Ta), w_0/e_1 \\
\neg(Ua \wedge Ta), w_1/e_1 \\
Ua, w_1/e_1 \\
Sa, w_1/e_1 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg Sa, w_1/e_1 \quad Ta, w_1/e_1 \\
\otimes \quad \swarrow \quad \searrow \\
\neg Ua, w_1/e_1 \quad \neg Ta, w_1/e_1 \\
\otimes \quad \otimes
\end{array}$$

Ahora bien, si se cambia \mathfrak{A} por \forall y \mathfrak{S} por \exists en (10.1), la inferencia es inválida:

$$(10.2) \quad [K]\Box\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), [B]\Diamond\exists\gamma(U\gamma \wedge S\gamma) \not\vdash [B]\exists\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma)$$

$$\begin{array}{c}
[K]\Box\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_0 \\
[B]\Diamond\exists\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_0/e_0 \\
\neg[B]\exists\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_0 \\
e_0Rw_0w_0 \\
w_0\Psi e_0e_0 \\
\Box\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_0 \\
\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_0 \\
\langle B\rangle\neg\exists\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_0 \\
w_0\Psi^B e_0e_1 \\
w_0\Psi^K e_0e_1, \\
w_0\Psi^K e_1e_1 \\
e_1Rw_0w_0 \\
\neg\exists\gamma\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_1 \\
\forall\gamma\neg\Diamond(U\gamma \wedge T\gamma), w_0/e_1 \\
\Box\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_1 \\
\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_0/e_1 \\
\Diamond\exists\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_0/e_1 \\
e_1, Rw_0w_1 \\
w_1\Psi^K e_0e_0 \\
w_1\Psi e_1e_1 \\
\exists\gamma(U\gamma \wedge S\gamma), w_1/e_1 \\
\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma), w_1/e_1 \\
\mathfrak{E}a, w_1/e_1 \\
Ua \wedge Sa, w_1/e_1 \\
Ua, w_1/e_1 \\
Sa, w_1/e_1 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg\mathfrak{E}a, w_0/e_1 \quad \neg\Diamond(Ua \wedge Ta), w_0/e_1 \\
\vdots \quad \swarrow \quad \searrow \\
\neg\mathfrak{E}a, w_1/e_1 \quad Sa \supset Ta, w_1/e_1 \\
\otimes \quad (*)
\end{array}$$

La línea marcada con (*) se cierra igual que como se cierra el árbol de (10.1), la primera rama no se cierra y eventualmente se vuelve infinita por la regla de Ψ_w^B que se ha de aplicar más adelante; aún peor, por la regla para \forall el árbol de bifurca demasiado rápido.

Un contramodelo puede obtenerse a partir de una rama abierta. W , E , R_e , Ψ_w^B y Ψ_w^K se obtienen de la misma forma que en el caso proposicional. Para obtener D , a cada constante, a , b , c , ..., en la rama, le asignamos un objeto en el dominio, ∂_a , ∂_b , ∂_c , ..., tal que $\nu(a) = \partial_a$. Si $Pa_1\dots a_n, w_i/e_x$ aparece en la rama, entonces $\langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \in$

$\nu_{w/e}(P)$; si $\neg Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en la rama, entonces $\langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \notin \nu_{w/e}(P)$; y si no aparece ninguno de los dos, $\nu_{w/e}(P)$ es una condición sin importancia.²

Con base en la rama abierta, es posible armar el contramodelo finito de la figura 10.1 (éste sucede en w_0 , hay uno para w_1 , pero éste no es relevante para la invalidez).³ Comprobar que el contramodelo funciona se deja al lector.⁴

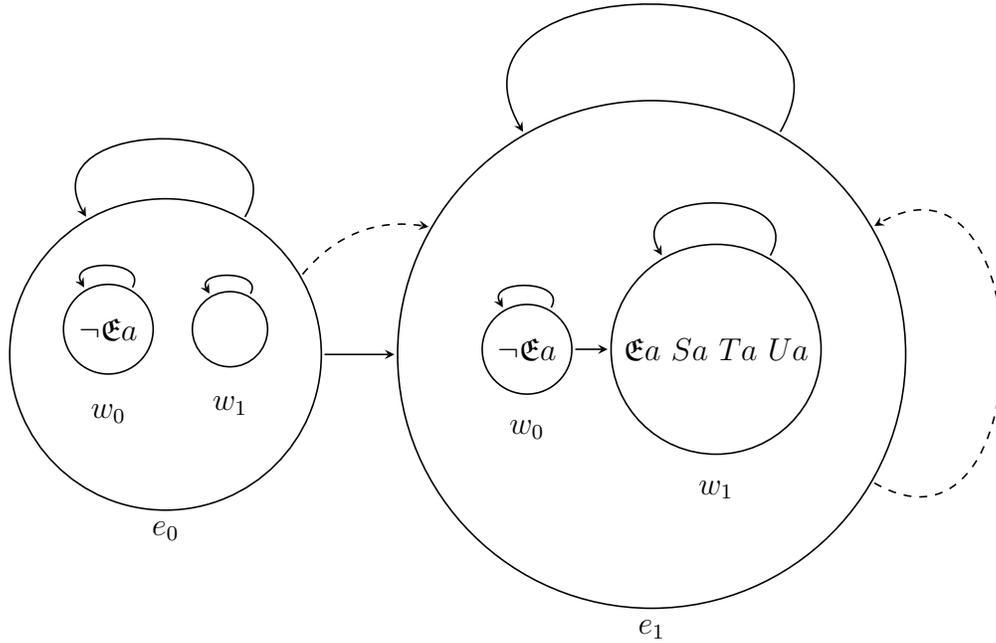


Fig. 10.1: Contramodelo finito para (10.2).

² Es posible tener una regla para \forall que no genera bifurcaciones:

$$\begin{array}{c} \forall \gamma \varphi, w_i/e_x \\ \mathfrak{E}a, w_i/e_x \\ \downarrow \\ \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x \end{array}$$

El precio es que la condición sin importancia se aplica a todos los predicados que no sean \mathfrak{E} : $\langle \nu(a) \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(\mathfrak{E})$ sii $\mathfrak{E}a, w_i/e_x$ aparece en la rama. El sistema de árboles con esta regla es correcto y completo, la prueba para la lógica modal de dominio variable se debe a Johnson [20].

³ Lo ideal en la figura 10.1 sería que la extensión de los predicados pudiera indicarse con matrices, pero no he podido ilustrarlo así. En el caso del par w_1/e_1 , podríamos tener:

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{E} & S & T & U \\ \partial_a & \checkmark & \checkmark & \checkmark \end{array}$$

⁴ Es posible tener un modelo más sencillo si éste valida a $[K] \diamond \exists \gamma (U\gamma \wedge S\gamma)$, pero más adelante veremos que hay razones para preferir que sólo valide $[B] \diamond \exists \gamma (U\gamma \wedge S\gamma)$.

Para ejemplificar las reglas de identidad, haré el árbol de (II \square). Los árboles de (IIK) e (IIB) son básicamente los mismos.

$$\begin{array}{c}
\neg\forall\gamma\forall\eta(\gamma = \eta \supset \square\gamma = \eta), w_0/e_0 \\
e_0Rw_0w_0 \\
w_0\Psi^K e_0e_0 \\
\exists\gamma\neg\forall\eta(\gamma = \eta \supset \square\gamma = \eta), w_0/e_0 \\
\mathfrak{E}a, w_0/e_0 \\
\neg\forall\eta(a = \eta \supset \square a = \eta), w_0/e_0 \\
\exists\eta\neg(a = \eta \supset \square a = \eta), w_0/e_0 \\
\mathfrak{E}b, w_0/e_0 \\
\neg(a = b \supset \square a = b), w_0/e_0 \\
a = b, w_0/e_0 \\
\neg\square a = b, w_0/e_0 \\
\diamond\neg a = b, w_0/e_0 \\
e_0Rw_0w_1 \\
e_0Rw_1w_1 \\
w_1\Psi^K e_0e_0 \\
\neg a = b, w_1/e_0 \\
a = b, w_1/e_0 \\
\otimes
\end{array}$$

La última línea se da por la regla de invariabilidad de la identidad. Debido a que (II \square) es válida con \forall , también lo es con \mathfrak{A} .

Considérese ahora:

$$(10.3) \quad a = b, Qa \not\vdash \neg[K] \diamond \neg Qb$$

$$\begin{array}{c}
a = b, w_0/e_0 \\
Qa, w_0/e_0 \\
\neg\neg[K] \diamond \neg Qb, w_0/e_0 \\
e_0Rw_0w_0 \\
w_0\Psi^K e_0e_0 \\
[K] \diamond \neg Qb, w_0/e_0 \\
\diamond \neg Qb, w_0/e_0 \\
e_0Rw_0w_1 \\
e_0Rw_1w_1 \\
w_1\Psi^K e_0e_0 \\
\neg Qb, w_1/e_0 \\
a = b, w_1/e_0 \\
\neg Qa, w_1/e_0
\end{array}$$

$$\begin{aligned} &w_0\Psi^B e_0 e_1 \\ &w_0\Psi^K e_0 e_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

El árbol se vuelve infinito por la regla de Ψ_w^B , pero es posible encontrar un contramodelo finito. Para obtener un contramodelo a partir de una rama abierta el método es el mismo de antes, excepto porque si tenemos un cúmulo de líneas de la forma $a = b, w_i/e_x, b = c, w_i/e_x, \dots$, escogemos una constante para que su denotación sea la misma que las demás constantes a un único objeto en D . En el caso del árbol para (10.3), $\nu(a) = \nu(b) = \partial_a$. El contramodelo puede ilustrarse como en la figura 10.2. Comprobar que el contramodelo funciona se deja al lector.

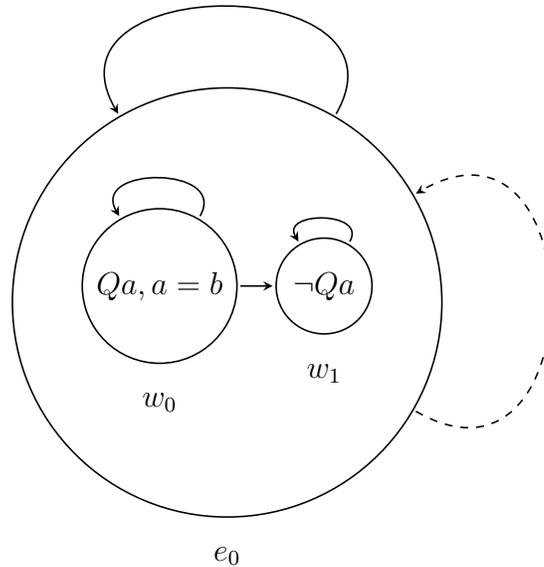


Fig. 10.2: Contramodelo finito para (10.3).

Ahora bien, una de las ventajas que obtenemos al incluir cuantificadores en la lógica modal es que podemos distinguir naturalmente cuando una modalidad versa sobre lo que decimos, que es la modalidad *de dicto*, o si versa sobre un objeto, que es la modalidad *de re*. La distinción es medieval, pero en el ámbito técnico de la lógica modal suele aceptarse la propuesta de Kit Fine [25, nota 12], φ es una modalidad *de re* si una subfórmula de φ de la forma $\square\psi$ o $\diamond\psi$ contiene o un nombre o una variable libre. $\exists\gamma\square P\gamma$ es una modalidad *de re*, porque x está libre en el alcance de \square , aun si está ligada en el alcance de \exists ; por otra parte, $\square\exists\gamma P\gamma$ es *de dicto* porque γ no está libre en el alcance de \square [16, p. 157]. Lo mismo se aplica a la lógica epistémica y la doxástica, a diferencia de que podemos leer a $[K]\mathfrak{S}\gamma P\gamma$ como ‘(alguien) sabe que alguien es P ’ y a $\mathfrak{S}\gamma[K]P\gamma$ como ‘(alguien) sabe quién es P ’ [33, pp. 70s]. Como debiera ser obvio, $T_{\square}/T_K/D_B^*$ nos

permite hablar de nuestros conocimientos y creencias sobre modalidades ya sean *de re* o *de dicto*.

Quizás la mejor forma para comprender las relaciones inferenciales entre las modalidades *de re* y *de dicto* sea considerar el diagrama de la figura 10.3, originalmente desarrollado por Kneale y Kneale [21, p. 571] (reelaboración propia, las letras latinas en paréntesis no figuran en el original); todas las fórmulas en el diamante interior son modalidades *de dicto* mientras que las del diamante exterior son modalidades *de re*. En la figura 10.4, se muestran las modalidades epistémicas respectivas.

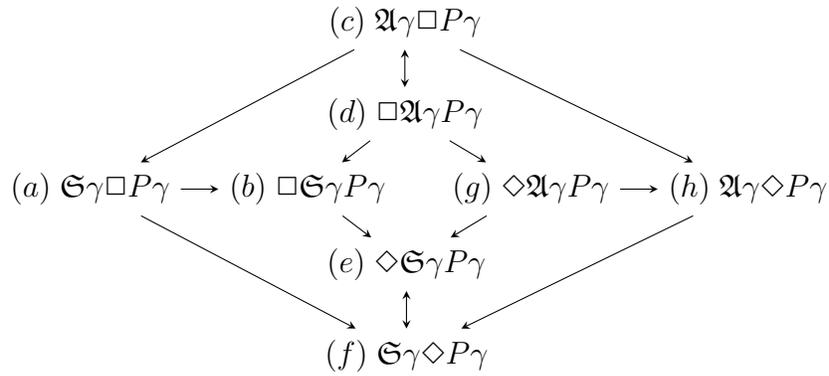


Fig. 10.3: Fórmula Barcan y derivados en K alética

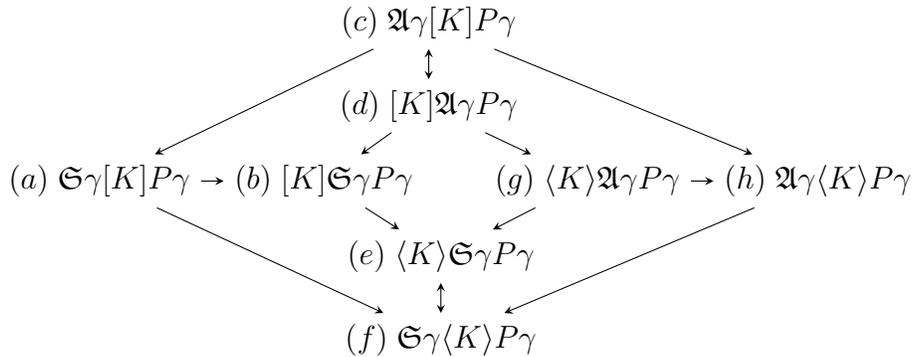


Fig. 10.4: Fórmula Barcan y derivados en K epistémica

Nótese que en ambas figuras las fórmulas usan \mathfrak{A} y \mathfrak{S} . En ambas, es fácil comprobar que la inferencia de (c) a (d) (y viceversa) es inválida si ambas fórmulas se plantean con \forall y \exists ; debido a que todas las relaciones derivan de estas fórmulas, es de esperarse que muchas de ellas fallen (de (d) a (g) es válida si $R_e(\Psi_w^K)$ es serial). La inferencia de (c) a (d) se conoce como la fórmula Barcan y de (d) a (c) como su conversa. El motivo de la falla es que las cosas que existen pueden cambiar de mundo a mundo. Particularmente, nótese que inferir (f) a (e) nos fuerza a aceptar que si es posible que

algo exista, entonces existe lo que es posiblemente esa cosa; pero esto es raro, que sea posible que exista la segunda parte de la *Poética* de Aristóteles no implica que exista lo que posiblemente lo es.

Ahora bien, el sistema que hemos visto hasta el momento coincide con la lógica libre positiva en que algo puede tener propiedades positivas sin por ello mismo existir. Consideremos a (10.2). Yo sé que es necesario que todo ser vivo que existe tiene un ADN, $[K]\square\forall\gamma(S\gamma \supset T\gamma)$; puedo creer que sea posible que exista algún unicornio que sea un ser vivo, $[B]\diamond\exists\gamma(U\gamma \wedge S\gamma)$,⁵ de estas premisas puedo inferir válidamente que creo que es posible que algún unicornio existente tenga un ADN, $[B]\diamond\exists\gamma(U\gamma \wedge T\gamma)$; lo que no puedo hacer es inferir que creo que existe lo que posiblemente es un unicornio con ADN, $[B]\exists\gamma\diamond(U\gamma \wedge T\gamma)$. Aquí pasa lo mismo que con la *Poética* de Aristóteles.

Cuando hablamos de seres ficticios o de posibilidades de cosas que no existen en este mundo, parece legítimo hablar de ellos sin comprometernos a que existan localmente. Al forzar una especie de actualismo, $T_{\square}/T_K/D_B^*$ nos permite decir que tenemos ideas de mundos en los que no sucede así (sea lo que sea que signifique existir). En todo caso, si se quisiera mantener la intuición de que tener una propiedad es suficiente para existir, *i.e.*, si se quisiera trabajar con la versión negativa de $T_{\square}/T_K/D_B^*$, podemos añadir la restricción:

Para todo predicado de n lugares, P , si $\langle\nu(a_1), \dots, \nu(a_n)\rangle \in \nu_{w/e}(P)$, entonces
 $\langle\nu(a_1)\rangle \in \nu_{w/e}(\mathfrak{E})$, ..., y $\langle\nu(a_n)\rangle \in \nu_{w/e}(\mathfrak{E})$

La regla de árbol para la restricción es:

$$\begin{array}{c} Pa_1\dots a_n, w_i/e_x \\ \downarrow \\ \mathfrak{E}a_1, w_i/e_x \\ \vdots \\ \mathfrak{E}a_n, w_i/e_x \end{array}$$

Es fácil comprobar que esta restricción valida algunas inferencias de las figuras 10.3 y 10.4. Particularmente, valida la inferencia de 10.4a a 10.4b; si existe alguien de quién sé que es P , sé que existe alguien que es P .

Para aplicar la restricción al predicado de identidad, hay que cambiar a éste para que su denotación sólo abarque a los objetos que existen, *i.e.*, $\nu_{w/e}(=) = \{\langle d, d \rangle : d \in \nu_{w/e}(\mathfrak{E})\}$. $a = a$ es falsa si a no existe y $a = b$ es falsa si a o b no existe. Las reglas de

⁵ Puedo creerlo, pero no saberlo, de aquí el cuidado mencionado en la nota 4 de este capítulo.

árboles para estas modificaciones son:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{E}a, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x \\
 \downarrow & \mathfrak{E}a, w_j/e_y & \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x \\
 a = a, w_i/e_x & \downarrow & \downarrow \\
 & a = b, w_j/e_y & \varphi_{\gamma}(b), w_i/e_y
 \end{array}$$

La primera regla indica que aquello que existe en un par w_i/e_x es idéntico a sí mismo en ese par w_i/e_x . La segunda regla es la invariabilidad de la identidad restringida a aquellos pares w_i/e_x en los que existe uno de los dos miembros de la identidad; en esta regla, j y y son números cualesquiera en la rama. La tercera regla es la sustitución de los idénticos restringida a un par w_i/e_x .

El principio característico de las lógicas libres con identidad es

$$(10.4) \quad a = b \supset \square(\mathfrak{E}a \supset a = b)$$

Éste también se aplica a las versiones epistémica y doxástica. Comprobarlo se deja al lector.

Como nota final al capítulo, valga un comentario sobre los principios de identidad invariable, *i.e.*, (II \square), (IIK) y (IIB). A lo largo del trabajo, ha sido constante afirmar que no todos los principios lógicos valen para todas las lógicas modales. El caso más evidente es que el axioma T puede valer para la necesidad alética y el conocimiento, pero no para la creencia. (II \square) es aceptable si, por ejemplo, Héspero es Fosforo es sólo otra forma de decir que Venus es Venus, ya que es difícil concebir cómo esto podría ser falso. El problema de verdad llega con (IIK) e (IIB), ya que no siempre supimos ni creímos que Héspero es Fósforo, aun si supiéramos o creyéramos que Venus es venus. En parte, muchas veces tenemos que hacer esfuerzos para conocer identidades, la demostración de teoremas matemáticos que deben mantener la igualdad en una ecuación son muestra de ello. Las semánticas que he presentado en este capítulo no pueden hacer justicia a esta distinción entre la validez de (II \square) y la supuesta invalidez de (IIK) e (IIB), y aunque creo que hay opciones para hacer que un sistema satisfaga estos requerimientos, como usar semánticas de avatares, de vecindades o de matrices para las lógicas anormales, ello requeriría más de lo que ahora pueda ofrecer para este trabajo.

11. PRUEBA DE LOS TEOREMAS

En este último capítulo demuestro la corrección y completitud de los sistemas de árboles presentados en este trabajo. Las pruebas en su mayoría son modificaciones apropiadas a las pruebas en [36, secc. 2.9, 3.7, 4.10, 5.9, 6.7, 14.7, 15.9 y 16.6]. En particular, las pruebas de los teoremas 11.2 y 11.1 son modificaciones *mutatis mutandis* de las pruebas que una vez presenté para el sistema MT presentado en el capítulo 5, del cual omito la prueba justamente por encontrarse en [47, sec. 6]. Algo similar sucede con los teoremas relativos a los sistemas de los capítulos 7 y 10. En [47, sec. 6], sólo indique que las pruebas son las mismas que las presentadas en [36] con algunas modificaciones menores, pero no hice ningún desarrollo; aquí sí lo hago. Lo más importante es mantener la relativización de forma adecuada.

Definición 11.1: Sea $\mathfrak{T} = \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ y b cualquier rama de un árbol. \mathfrak{T} es fiel a b si hay dos funciones, una de los números naturales a W , f , y otra de los números naturales a E , g , tales que:

- Para todo nodo $\varphi, w_i/e_x$ en b , φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T}
- Si $e_x R w_i w_j$ está en b , entonces $g(x) R f(i) f(j)$ en \mathfrak{T}
- Si $w_i \Psi^K e_x e_y$ está en b , entonces $f(i) \Psi^K g(x) g(y)$ en \mathfrak{T}
- Si $w_i \Psi^B e_x e_y$ está en b , entonces $f(i) \Psi^B g(x) g(y)$ en \mathfrak{T}

Entonces decimos que f y g muestran juntas que b es fiel a \mathfrak{T} .

Lema 11.1: Sea b cualquier rama de un árbol y $\mathfrak{T} = \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ cualquier interpretación de $T_\square/T_K/D_B^*$. Si b es fiel a \mathfrak{T} y se le aplica una regla de árbol, entonces se produce al menos una extensión b' tal que b' es fiel a \mathfrak{T} .

Prueba:

Por la definición 11.1, decimos que f y g muestran que b es fiel a \mathfrak{T} .

Para las conectivas proposicionales, procedemos caso por caso. Aquí está el caso para \wedge afirmada: si $\varphi \wedge \psi, w_i/e_x$ está en b , entonces su extensión b' produce dos nodos tales que $\varphi, w_i/e_x$ y $\psi, w_i/e_x$; debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\varphi \wedge \psi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$, por lo cual φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ como lo es también ψ ; por tanto, \mathfrak{T} es fiel a b' . Los demás casos son fáciles de desarrollar y se omiten aquí.

Paso a los casos para los operadores aléticos, los casos para los operadores epistémicos y doxásticos son los mismos *mutatis mutandis*. Si $\neg\Box\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces su extensión b' es un nodo tal que $\Diamond\neg\varphi, w_i/e_x$. Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\Box\varphi, w_i/e_x$ es falsa en $f(i)$ en $g(x)$, por lo cual $\Diamond\neg\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$, que es b' . Dadas las condiciones de verdad de \Box , \mathfrak{T} es fiel a b . El caso para $\neg\Diamond\varphi$ es similar. Si $\Box\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\Box\varphi$ es verdadera $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; si además hay una línea de la forma $e_x R w_i w_j$, por lo cual $g(x) R f(i) f(j)$ en \mathfrak{T} , entonces φ es verdadera en cada $f(j)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Dadas las condiciones de verdad de \Box , \mathfrak{T} es fiel a b . Si $\Diamond\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , su extensión produce dos nodos tales que $e_x R w_i w_j$ y $\Diamond\varphi, w_j/e_x$ aparecen en b . Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\Diamond\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$, así pues, para algún $w \in W$, $g(x) R f(i) w$ y φ es verdadera en w en $g(x)$. Sea f' lo mismo que f excepto porque $f'(j) = w$. f' también demuestra que \mathfrak{T} es fiel a b , ya que f y f' sólo difieren en j y éste no aparece en b . Así pues, $g(x) R f(i) f'(j)$ y φ es verdadera en $f'(j)$. De esta forma, f' muestra que \mathfrak{T} es fiel a b .

Para las reglas de las restricciones, debemos comprobar que éstas cumplen con la fidelidad. Si e_x y w_i aparecen en b , debido a que R_e es relativamente reflexiva, $e_x R w_i w_i$ aparece en b y $g(x) R f(i) f(i)$ en \mathfrak{T} . Si e_x y w_i aparecen en b , debido a que Ψ_w^K es relativamente reflexiva, $w_i \Psi^K e_x e_x$ aparece en b y $f(i) \Psi^K g(x) g(x)$ en \mathfrak{T} . Para la regla de Ψ^B , si e_x y w_i aparecen en b , $w_i \Psi^B e_x e_y$ aparece en b ; sabemos que para algún $e \in E$, $w_i \Psi^B g(x) e$; sea g' lo mismo que g excepto porque $g'(y) = e$; debido a que y no aparece en b , g' demuestra que \mathfrak{T} es fiel a b ; así pues, $w_i \Psi^B g(x) g'(y)$ en \mathfrak{T} . Finalmente, debido a que $\Psi_w^B \subseteq \Psi_w^K$, si $w_i \Psi^B e_x e_y$ aparece en b , entonces $w_i \Psi^K e_x e_y$ aparece en b como su extensión; de esta forma, tanto $f(i) \Psi^B g(x) g(y)$ como $f(i) \Psi^K g(x) g(y)$ están en \mathfrak{T} . ■

Teorema 11.1: Los árboles de $T_\Box/T_K/D_B^*$ son correctos con respecto a sus semánticas, *i.e.*, para un Σ finito, si $\Sigma \vdash \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$.

Prueba:

Trabajemos con la transposición. Si $\Sigma \not\models \varphi$, entonces hay una interpretación, $\mathfrak{T} = \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$, que hace verdadera a cada premisa, ψ , en Σ y falsa a φ en algún w en algún e . Sean f y g dos funciones cualesquiera tales que $f(0) = w$ y $g(0) = e$. Esto demuestra que \mathfrak{T} es fiel a la lista inicial para la inferencia. Por el lema 11.1, las extensiones de cada nodo son fieles a \mathfrak{T} , así que aplicando reiteradamente el lema tiene que quedar una rama abierta, *i.e.*, $\Sigma \not\models \varphi$. ■

Definición 11.2: Sea b una rama abierta de un árbol. La interpretación inducida por b , $\mathfrak{T} = \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$, se define de la misma forma que en el capítulo 3. Si w_i aparece en b , $w_i \in W$. Si e_x aparece en b , $e_x \in E$. $e_x R w_i w_j \in R_e$ sii $e_x R w_i w_j$ está en b . $w_i \Psi^K e_x e_y \in \Psi_w^K$ sii $w_i \Psi^K e_x e_y$ aparece en b . $w_i \Psi^B e_x e_y \in \Psi_w^B$ sii $w_i \Psi^B e_x e_y$ aparece en b . Si $p, w_i/e_x$ aparece en b , $\nu_{w_i/e_x}(p) = 1$; si $\neg p, w_i/e_x$ aparece en b , $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$; si no aparece ninguno en b , $\nu_{w_i/e_x}(p)$ puede ser lo que uno quiera.

Lema 11.2: Sea b cualquier rama abierta completa de un árbol y $\mathfrak{T} = \langle W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ la interpretación inducida por b , entonces:

Si $\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces φ es verdadera en w_i en e_x

Si $\neg\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces φ es falsa en w_i en e_x

Prueba:

La prueba se da por medio de la complejidad de φ . Si φ es atómica, el resultado es verdadero por definición. Si φ es de la forma $\psi \vee \chi$, entonces la regla de \vee ha sido aplicada a $\psi \vee \chi, w_i/e_x$, por lo cual o $\psi, w_i/e_x$ está en b o $\chi, w_i/e_x$ está en b . Por la hipótesis de inducción, o ψ o χ es verdadera en w_i en e_x . De esta forma, $\psi \vee \chi$ es verdadera en w_i en e_x . El caso para el resto de las conectivas es similar.

Si φ es de la forma $\Box\psi$, entonces, si $\Box\psi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces, para todos los w_j tales que $e_x R w_i w_j$, $\psi, w_j/e_x$ está en b ; por construcción y la hipótesis de inducción, para todos los w_j tal que $e_x R w_i w_j$, ψ es verdadera en w_j en e_x , por lo cual $\Box\psi$ es verdadera en w_i en e_x . El caso para \Diamond es similar. Los casos para los operadores doxásticos y epistémicos son los mismos *mutatis mutandis*.

Para las restricciones, sólo debemos comprobar que R_e y Ψ_w^K son relativamente reflexivas, que Ψ_w^B es relativamente serial y que, si $w_i \Psi^B e_x e_y$ está en la rama, también lo está $w_i \Psi^K e_x e_y$. ■

Teorema 11.2: Los árboles de $T_\Box/T_K/D_B^*$ son completos con respecto a sus semánticas, *i.e.*, para un Σ finito, si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \vdash \varphi$.

Prueba:

Probemos la contraposición. Si $\Sigma \not\vdash \varphi$, entonces el árbol completo para la inferencia tiene una rama abierta. Por el lema 11.2, hay una interpretación que vuelve verdaderas a las premisas en Σ y falsa a φ en w_0 en e_0 , *i.e.*, $\Sigma \not\models \varphi$. ■

Teorema 11.3: Los árboles de $T_\Box/T_K/D_B^*/Q_t$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas

Prueba:

La prueba es una modificación trivial a las pruebas para los árboles de $T_{\square}/T_K/D_B^*$. Para la definición para la corrección, a la definición 11.1 se le añade apropiadamente una función, h , de los números naturales a T para que la relativización sea adecuada; para la definición para la completitud, se hacen los cambios pertinentes a la definición 11.2 para inducir la información relevante sobre los tiempos. En los lemas 11.1 y 11.2 añadimos ‘en $h(m)$ /en t_m ’ en los lugares apropiados para que la relativización sea adecuada. Los casos para los operadores temporales en ambos lemas son los mismos *mutatis mutandis* que los casos para los operadores aléticos. Los casos para $[P]$ y $\langle P \rangle$ son modificaciones triviales a los de $[F]$ y $\langle F \rangle$. En el caso de las restricciones a $<_{w/e}$, tomamos las pruebas apropiadas en [36, secc. 3.7.7 y 3.7.8] y añadimos ‘en $f(i)$ en $g(x)$ / en w_i en e_x ’ en los lugares apropiados para que la relativización sea adecuada. El teorema se sigue con modificaciones triviales a las demostraciones de los teoremas 11.1 y 11.2. ■

Teorema 11.4: Los árboles de $T_{\square}/K_t^*/T_K/D_B^*$, $T_{\square}/K_t^+/T_K/D_B^*$ y $T_{\square}/K_t^{*+}/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

Si queremos que $<$ no sea relativo a w o e o a ambos, basta con quitar el índice a las líneas de $<$ y éstas pueden ser usadas por los operadores manteniendo los índices adecuados en las extensiones. La prueba para $<$ relativa sólo a e es la siguiente, la prueba para que sólo sea relativa a w o que no lo sea ni a w ni a e es similar. Supóngase que $(w_i/e_x) t_m < t_n$ está en b , por lo cual $(f(i)/g(x)) h(m) < h(n)$ en \mathfrak{T} . Para que W no sea un conjunto unitario, supóngase que para algún $w \in W$, $f(i) \sim w$ donde \sim es la relación de ‘compartir’. Sea f' es lo mismo que f excepto porque $f'(j) = w$ y j es cualquier otro número de mundo que no esté ya en b . f' muestra es que \mathfrak{T} es fiel a b . Dados $(f(i)/g(x)) h(m) < h(n)$ y $f(i) \sim f'(j)$, tenemos que $(f'(j)/g(x)) h(m) < h(n)$. \sim es una relación de equivalencia. Así pues, la línea en b es $(w_{[i]}/e_x) t_m < t_n$. Sólo hay una orden temporal para todos los mundos. De esta forma, $(w_{[i]}/e_x) t_m < t_n$ es lo mismo que $(e_x) t_m < t_n$. Cuando los operadores temporales hagan uso de las líneas de $<$, sólo es necesario que los índices de w y de e sigan siendo los mismos en la extensión. ■

Teorema 11.5: Los árboles para sistemas con base en $S5$ del capítulo 6 son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

Para la corrección, la prueba es básicamente la misma que la del teorema 11.1. Cuando se trabaja con base en $S5$, pueden omitirse las líneas de las relaciones ya que éstas son relativamente de equivalencia, \sim_w^R y \sim_w^K , por lo que la definición 11.1, se simplifica a:

Para todo nodo $\varphi, w_i/e_x$ en b , φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T}
 Si $w_i\Psi^B e_x e_y$ está en b , entonces $f(i)\Psi^B g(x)g(y)$ en \mathfrak{T}

En el lema 11.1, la prueba para los conectivos proposicionales es exactamente la misma, sólo se deben hacer los cambios para las reglas de los operadores. Aquí están los casos para las reglas de \Box y \Diamond , los casos para $[K]$ y $\langle K \rangle$ son similares y los de $[B]$ y $\langle B \rangle$ son los mismos que antes por no tener base en $S5$. Si $\Box\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\Box\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; así pues, para todos los w_k en la rama, incluido mismo w_i , $\varphi, w_k/e_x$ aparece en b , por lo cual φ es verdadera en todos los $f(k)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Dadas las condiciones de verdad de \Box , y viendo que se respeta la relativización, entonces \mathfrak{T} es fiel a b . Si $\Diamond\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces en la extensión aparece el nodo $\varphi, w_j/e_x$ tal que j es un número de mundo nuevo en la rama. Debido a que $\Diamond\varphi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\Diamond\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; así pues, para algún $w \in W$, φ es verdadera en w en $g(x)$. Sea f' lo mismo que f excepto porque $f'(j) = w$, entonces f' demuestra que la extensión es fiel a \mathfrak{T} . φ es verdadera en $f'(j)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Dadas las condiciones de verdad de \Diamond , \mathfrak{T} es fiel a b .

Para la completitud, simplificamos la definición 11.2 eliminando las líneas sobre las relaciones aléticas y las epistémicas, y en el lema 11.2 cambiamos que si $\Box\varphi, w_i/e_x$ aparece en la rama, entonces $\varphi, w_k/e_x$ está en la rama para todos los k en la rama (i incluido), y que si $\Diamond\varphi, w_i/e_x$ está en la rama, sólo debemos comprobar que haya un nodo de la forma $\varphi, w_j/e_x$ tal que j sea un número nuevo de mundo en la rama, y hacemos lo mismo *mutatis mutandis* con los casos de $[K]$ y $\langle K \rangle$, los casos de $[B]$ y $\langle B \rangle$ quedan inalterados. Dadas estas modificaciones, la prueba del teorema es exactamente la misma que la del teorema 11.2. ■

Teorema 11.6: Los árboles de $C_{\Box\rightarrow}/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

La prueba para la corrección es la misma que la del teorema 11.1, excepto para los operadores aléticos, para lo cual tomamos las pruebas apropiadas del teorema 11.5. Lo único que debemos hacer es modificar la definición 11.1 para que si $e_x R w_i w_j(\varphi)$ aparece en b entonces $g(x)Rf(i)f(j)(\varphi)$ en \mathfrak{T} y añadir los casos de $\Box\rightarrow$ y $\Diamond\rightarrow$ en el lema 11.1.

Primero veamos las reglas de equivalencia. En el capítulo 7, vimos que $(\varphi \Box \rightarrow \psi) \equiv \neg(\varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi)$ y que $(\varphi \Diamond \rightarrow \psi) \equiv \neg(\varphi \Box \rightarrow \neg\psi)$. Si $\neg(\varphi \Box \rightarrow \psi), w_i/e_x$ está en b , su extensión b' añade un nodo tal que $\varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi, w_i/e_x$. Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\neg(\varphi \Box \rightarrow \neg\psi)$ es verdadero en $f(i)$ en $g(x)$, por lo cual $\varphi \Diamond \rightarrow \neg\psi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$. Dadas las condiciones de verdad de $\Box \rightarrow$, \mathfrak{T} es fiel a b . El caso para $\Diamond \rightarrow$ es similar.

Seguimos con las reglas inferenciales de $\Box \rightarrow$ y $\Diamond \rightarrow$. Los casos son parecidos a los de \Box y \Diamond . Si $\varphi \Box \rightarrow \psi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\varphi \Box \rightarrow \psi$ es verdadera en $f(i)$ y $g(x)$ en \mathfrak{T} ; si además hay una línea de la forma $e_x R w_i w_j(\varphi)$, por lo cual $g(x) R f(i) f(j)(\varphi)$, entonces ψ es verdadera en $f(j)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Dadas las condiciones de verdad de $\Box \rightarrow$, \mathfrak{T} es fiel a b . Si $\varphi \Diamond \rightarrow \psi, w_i/e_x$ aparece en b , su extensión b' añade dos nodos de la forma $e_x R w_i w_j(\varphi)$ y $\psi, w_j/e_x$ tal que j es un número nuevo de mundo en la rama. Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\varphi \Diamond \rightarrow \psi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$, así pues, para algún $w \in W$, $g(x) R f(i) w(\varphi)$ y ψ es verdadera en w en $g(x)$. Sea f' lo mismo que f excepto porque $f'(j) = w$. f' también muestra que \mathfrak{T} es fiel a b , ya que f y f' son lo mismo excepto porque j no aparece en b . Así pues, $g(x) R f(i) f'(j)(\varphi)$ y ψ es verdadera en $f'(j)$ en $g(x)$. Dadas las condiciones de verdad de $\Diamond \rightarrow$, \mathfrak{T} es fiel a b .

La prueba para la completitud es la misma que la de $T_{\Box}/T_K/D_B^*$ (teorema 11.2). Lo único que debemos hacer es modificar apropiadamente a la definición 11.2 y considerar los casos de $\Box \rightarrow$ y $\Diamond \rightarrow$ en el lema 11.2. Sea φ de la forma $\psi \Box \rightarrow \chi$. Si $\psi \Box \rightarrow \chi, w_i/e_x$ aparece en b , entonces, para todos los w_j tales que $e_x R w_i w_j(\psi)$, $\chi, w_j/e_x$ aparece en b ; por construcción y la hipótesis de inducción, para todos los w_j tales que $e_x R w_i w_j(\psi)$, χ es verdadera en w_j en e_x . El caso para $\Diamond \rightarrow$ es similar. ■

Teorema 11.7: Los árboles de $C_{\Box \rightarrow}^+/T_K/D_B^*$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

Para la prueba de corrección extendemos la prueba del teorema 11.6 añadiendo los casos para las restricciones a las relaciones de accesibilidad al lema 11.1 extendido.

La primera restricción dice que $f_{\varphi}(w, e) \subseteq [\varphi]_e$. Si $e_x R w_i w_j(\varphi)$ aparece en b , la extensión b' añade un nodo de la forma $\varphi, w_j/e_x$, por lo que $g(x) R f(i) f(j)(\varphi)$ y φ es verdadera en $f(j)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . De esta forma, \mathfrak{T} es fiel a b .

La segunda restricción dice que si $w \in [\varphi]_e$, entonces $w \in f_{\varphi}(w, e)$. Restringimos la regla para aplicarla sólo a antecedentes de condicionales, ya que cómo afecte a otras fórmulas no tiene efecto para la validez. La regla produce dos extensiones. La rama izquierda afirma que φ no es verdadera en un par w_i/e_x tales que w_i y e_x aparecen en la rama; la rama de la derecha, que φ sí es verdadera en un par w_i/e_x tales que w_i y e_x aparecen en la rama, por lo cual φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ y $g(x) R f(i) f(i)(\varphi)$ en \mathfrak{T} . De esta forma, \mathfrak{T} es fiel a b .

Para la completitud, sólo extendemos la prueba para el teorema 11.6 añadiendo los casos de las restricciones al lema 11.2 extendido. Si hay una línea de la forma $e_x R w_i w_j(\varphi)$ en la rama, $\varphi, w_j/e_x$ también está en la rama. Para cualquier φ que sea el antecedente de un condicional, ya sea afirmado o negado, o $\neg\varphi, w_i/e_x$ aparece en la rama o $\varphi, w_i/e_x$ y $e_x R w_i w_i(\varphi)$ aparecen en la rama. ■

Teorema 11.8: Los árboles de $S2_\square/S2_K/ND_B^*$ y $S0.5/S0.5/LD$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

La prueba es una modificación a las pruebas para la del teorema 11.1. Empezaré por las pruebas para $S2_\square/S2_K/ND_B^*$.

Para la corrección, añadimos dos cláusulas a la definición 11.1:

$$\begin{aligned} f(0) &\in W - \overline{W} \\ g(0) &\in E - \overline{E} \end{aligned}$$

En la modificación al lema 11.1, debemos revisar los casos para las reglas para los operadores y las restricciones a las relaciones de accesibilidad; los casos para las conectivas son básicamente los mismos. Revisaré los casos de \square y \diamond , los casos de $[K]$ - $\langle K \rangle$ y $[B]$ - $\langle B \rangle$ son los mismos *mutatis mutandis*. Empecemos con la regla para \square . Si aparece un nodo de la forma $\square\varphi, w_i/\varepsilon_x$ en b , debido a que f y g demuestran que \mathfrak{T} es fiel a b , entonces $f(i) \in W - \overline{W}$ (caso contrario, $\square\varphi$ sería falsa independientemente de lo que sea φ) y $\square\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; si además hay una línea de la forma $\varepsilon_x R w_i w_j$, por lo cual $g(x) R f(i) f(j)$ en \mathfrak{T} , entonces, por construcción y la hipótesis de inducción, φ es verdadera en todos los $f(j)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Seguimos con la regla para \diamond . Si $\diamond\varphi, v_i/e_x$ aparece en la rama, entonces f y g muestran que \mathfrak{T} es fiel a b . Si $i = 0$ o hay un nodo de la forma $\square\psi, w_i/\varepsilon_x$, entonces el mundo es normal y su aplicación es la misma que en el caso de $T_\square/T_K/D_B^*$, excepto porque $f'(j) \in \overline{W}$; caso contrario, no se aplica ninguna regla más, y $\diamond\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} . Las reglas para las restricciones a las relaciones de accesibilidad son las mismas que en el caso normal, excepto porque en la regla para la serialidad de Ψ_w^B el nuevo estado epistémico es anormal. La demostración del teorema de corrección es la misma que la del teorema 11.1 *mutatis mutandis*.

Para la completitud, a la definición 11.2 añadimos que $f(i) \in W - \overline{W}$ sii $i = 0$ o para i hay algún nodo de la forma $\square\varphi, w_i/\varepsilon_x$ y que $g(x) \in E - \overline{E}$ sii $x = 0$ o para x hay algún nodo de la forma $[K]\varphi, v_i/e_x$ o $[B]\varphi, v_i/e_x$. En el lema 11.2, sólo debemos comprobar los casos para los operadores, aquí reviso los casos de \square y \diamond , los casos de $[K]$ - $\langle K \rangle$ y $[B]$ - $\langle B \rangle$ son los mismos *mutatis mutandis*. Sea φ de la forma $\square\psi$. Si $\square\psi, w_i/\varepsilon_x$ aparece en b ,

entonces $w_i \in W - \overline{W}$ y $\Box\psi$ es verdadera en w_i en ε_x ; por construcción y la hipótesis de inducción, si además hay una línea de la forma $\varepsilon_x R w_i v_j$, entonces ψ es verdadera en todos los v_j en ε_x . Sea φ de la forma $\Diamond\psi$. Si $\Diamond\psi, v_i/\varepsilon_x$ aparece en b , entonces v_i o es w_i o es \overline{w}_i ; si es w_i , entonces hay un v_j tal que $\varepsilon_x R w_i v_j$ y ψ es verdadera en v_j en ε_x ; si es \overline{w}_i , entonces $\Diamond\psi$ es verdadera en \overline{w}_i en ε_x . El caso de las restricciones el mismo que el del caso normal *mutatis mutandis* excepto por la regla para la serialidad de Ψ_w^B . La prueba para el teorema de completitud es la misma que la del caso normal *mutatis mutandis*.

Las pruebas para $S0.5/S0.5/LD$ son básicamente las mismas. En el caso de la corrección, las reglas para operadores aléticos sólo se aplican en los nodos con los pares w_0/ε_x y las de los operadores epistémicos y doxásticos en los nodos con los pares w_0/ε_x . En el caso de la completitud, en la interpretación inducida $W - \overline{W} = \{w_0\}$ y $E - \overline{E} = \{e_0\}$; para toda $i > 0$, si $\Box A, \overline{w}_i/\varepsilon_x$ aparece en b , entonces $\nu_{w_i/\varepsilon_x}(\Box A) = 1$, y si $\neg\Box A, \overline{w}_i/\varepsilon_x$ aparece en b , entonces $\nu_{w_i/\varepsilon_x}(\Box A) = 0$, lo mismo aplica *mutatis mutandis* para los operadores epistémicos y doxásticos. ■

Teorema 11.9: Los árboles de I/K_K son correctos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

Primero modificamos una cláusula en la definición 11.1 con dos cláusulas:

Para todo nodo $\varphi, +w_i/e_x$ en b , φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T}

Para todo nodo $\varphi, -w_i/e_x$ en b , φ no es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T}

La prueba del teorema es la misma *mutatis mutandis* que la del teorema 11.1 modificando apropiadamente el lema 11.1 y añadiendo los casos de \rightarrow, \Box , la transitividad de R_e y la condición hereditaria.

Los casos para \wedge, \vee y operadores epistémicos son los mismos que los de antes, cambiando a $\varphi, w_i/e_x$ por $\varphi, +w_i/e_x$ y a $\neg\varphi, w_i/e_x$ por $\varphi, -w_i/e_x$. El caso más difícil de desarrollar es el de $\langle K \rangle$ no verdadera, éste es el siguiente: si $\langle K \rangle\varphi, -w_i/e_x$ aparece en b , entonces, para todos los e_y tales que $w_i\Psi^K e_x e_y$ aparece en b , $\varphi, -w_i/e_y$ aparece en b' ; debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\langle K \rangle\varphi$ no es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$, como se buscaba.

El caso para \rightarrow es el siguiente. Si $\rightarrow\varphi, +w_i/e_x$ está en b , entonces, para todo w_j tal que $e_x R w_i w_j$, $\varphi, -w_j/e_x$ aparece en b' . Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\rightarrow\varphi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$. Si $\rightarrow\varphi, -w_i/e_x$ aparece en b , entonces, para algún j nuevo en la rama, $e_x R w_i w_j$ y $\varphi, -w_j/e_x$ aparecen en b' . Debido a que $\rightarrow\varphi, -w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\rightarrow\varphi$ no es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; así pues, para algún $w \in W$ tal que $e_x R w_i w$, φ no es verdadera en w en $g(x)$. Sea f' lo mismo que f , excepto porque $f'(j) = w$,

entonces f demuestra que la extensión es fiel a \mathfrak{T} . φ no es verdadera en $f'(j)$ en $g(x)$. Dadas las condiciones de verdad de \rightarrow , \mathfrak{T} es fiel a b .

El caso para \sqsupset es el siguiente. Si $\varphi \sqsupset \psi$, $+w_i/e_x$ está en b , entonces, para todo w_j tal que $e_x R w_i w_j$ está en b , o $\varphi, -w_j/e_x$ o $\psi, +w_j/e_x$ aparece en b' . Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , $\varphi \sqsupset \psi$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$. Si $\varphi \sqsupset \psi$, $-w_i/e_x$ aparece en b , entonces, para algún j nuevo en la rama, $e_x R w_i w_j$, $\varphi, +w_j/e_x$ y $\psi, -w_j/e_x$ aparecen en b' . Debido a que $\varphi \sqsupset \psi, -w_i/e_x$ aparece en b , entonces $\varphi \sqsupset \psi$ no es verdadero en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{T} ; así pues, para algún $w \in W$ tal que $e_x R w_i w$, φ es verdadera en w en $g(x)$, pero ψ no lo es. Sea f' lo mismo que f , excepto porque $f'(j) = w$, entonces f demuestra que la extensión es fiel a \mathfrak{T} . En $f'(j)$ en $g(x)$, φ es verdadera, pero ψ no lo es. Dadas las condiciones de verdad de \sqsupset , \mathfrak{T} es fiel a b .

Para las restricciones a R_e , sólo debemos comprobar que, para todo e_x, w_i, w_j y w_k en b , $e_x R w_i w_j$ está en b' , y, si $e_x R w_i w_j$ y $e_x R w_j w_k$ aparecen en b , entonces $e_x R w_i w_k$ aparece en b' . Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , las restricciones se cumplen en la interpretación.

Para la condición hereditaria, decimos que si $\varphi, +w_i/e_x$ y $e_x R w_i w_j$ aparecen en b , entonces $\varphi, +w_j/e_x$ aparece en b' . Debido a que \mathfrak{T} es fiel a b , la restricción se satisface en la interpretación. ■

Teorema 11.10: Los árboles de I/K_K son completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

La prueba es la misma que la del teorema 11.2 modificando la definición 11.2 y el lema 11.2 apropiadamente. Ahora si $p, +w_i/e_x$ aparece en b , $\nu_{w_i/e_x}(p) = 1$ (caso contrario, $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$), y si $p, -w_i/e_x$ aparece en b , $\nu_{w_i/e_x}(p) = 0$. Los casos para \rightarrow y \sqsupset son sencillos si se piensa en ellos con las siguientes definiciones, $\rightarrow \varphi =_{def} \sqsupset \neg \varphi$ y $\varphi \sqsupset \psi =_{def} \sqsupset (\varphi \supset \psi)$. El caso para la condición hereditaria no presenta mayores dificultades. ■

Teorema 11.11: Los árboles de $I/S5_K$ son correctos y completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

La prueba es la misma que la del teorema 11.5 con modificaciones como las de las pruebas para los teoremas 11.9 y 11.10. ■

Las pruebas que siguen corresponden al sistema del capítulo 10. Primero trabajaré bajo el supuesto de que el lenguaje no contiene al predicado de identidad, pero luego haré dicha adición.

Lema 11.3: Sean $\mathfrak{J}_1 = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu_1 \rangle$ y $\mathfrak{J}_2 = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu_2 \rangle$ dos interpretaciones de $T_\square/T_K/D_B^*$; si φ es una fórmula cerrada tal que ν_1 y ν_2 coinciden en las denotaciones de todos los predicados y constantes, entonces para todos los $w \in W$ y $e \in E$:

$$\nu_{1w/e}(\varphi) = \nu_{2w/e}(\varphi)$$

Prueba:

El lema se prueba por inducción sobre la complejidad de las fórmulas.

Para las fórmulas atómicas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nu_{1w/e}(Pa_1\dots a_n) = 1 \quad & \text{sii} \quad \langle \nu_1(a_1), \dots, \nu_1(a_n) \rangle \in \nu_{1w/e}(P) \\ & \text{sii} \quad \langle \nu_2(a_1), \dots, \nu_2(a_n) \rangle \in \nu_{2w/e}(P) \\ & \text{sii} \quad \nu_{2w/e}(Pa_1\dots a_n) = 1 \end{aligned}$$

Para las conectivas, aquí está el caso para la conjunción, los demás casos son similares:

$$\begin{aligned} \nu_{1w/e}(\varphi \wedge \psi) = 1 \quad & \text{sii} \quad \nu_{1w/e}(\varphi) = \nu_{1w/e}(\psi) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{2w/e}(\varphi) = \nu_{2w/e}(\psi) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{2w/e}(\varphi \wedge \psi) = 1 \end{aligned}$$

Para los cuantificadores, aquí está el caso para \mathfrak{A} , el de \mathfrak{S} es similar (los casos para \forall y \exists sólo cambian D por $D_{w/e}$):

$$\begin{aligned} \nu_{1w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) = 1 \quad & \text{sii, para todo } d \in D, \nu_{1w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \\ & \text{sii, para todo } d \in D, \nu_{2w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1 \quad (*) \\ & \text{sii} \quad \nu_{2w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) = 1 \end{aligned}$$

La línea marcada con (*) se sigue por la hipótesis de inducción debido a que $\nu_{1w/e}(k_d) = \nu_{2w/e}(k_d) = d$.

Para los operadores modales, aquí están el caso para \square , el caso para \diamond es similar, así como también lo son los casos para $[K]$, $\langle K \rangle$, $[B]$ y $\langle B \rangle$:

$$\begin{aligned} \nu_{1w/e}(\square\varphi) = 1 \quad & \text{sii, para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{1w'/e}(\varphi) = 1 \\ & \text{sii, para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{2w'/e}(\varphi) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{2w/e}(\square\varphi) = 1 \end{aligned}$$

■

Lema 11.4: sea $\mathfrak{J} = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ una interpretación cualquiera de $T_\square/T_K/D_B^*$; sea φ una fórmula cualquiera con al menos una variable libre, γ , y sean a y b dos constantes tales que $\nu(a) = \nu(b)$, entonces para cualquier $w \in W$ y $e \in E$:

$$\nu_{w/e}(\varphi_\gamma(a)) = \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(b))$$

Prueba:

La prueba se da por recursión sobre la complejidad de φ .

Para las fórmulas atómicas, supóngase que a sólo tiene una aparición en la fórmula:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(Pa_1\dots a\dots a_n) = 1 \quad & \text{sii} \quad \langle \nu_1(a_1), \dots, \nu(a), \dots, \nu_1(a_n) \rangle \in \nu_{w/e}(P) \\ & \text{sii} \quad \langle \nu_1(a_1), \dots, \nu(b), \dots, \nu_1(a_n) \rangle \in \nu_{w/e}(P) \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(Pa_1\dots b\dots a_n) = 1 \end{aligned}$$

Para las conectivas proposicionales, aquí está el caso para la conjunción, los demás casos son similares:

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}((\varphi \wedge \psi)_\gamma(a)) = 1 \quad & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(a)) = \nu_{w/e}(\psi_\gamma(a)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(b)) = \nu_{w/e}(\psi_\gamma(b)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}((\varphi \wedge \psi)_\gamma(b)) = 1 \end{aligned}$$

Para el caso de los cuantificadores, desarrollaré el caso de inducción para \mathfrak{A} , el caso para \mathfrak{S} es similar (los casos para \forall y \exists sólo cambian a D por $D_{w/e}$). Sea φ de la forma $\mathfrak{A}\eta\psi$. Si γ es la misma variable que η , entonces $\varphi_\gamma(a)$ y $\varphi_\gamma(b)$ son simplemente φ , por lo que el resultado es trivial. Supóngase, entonces, que γ y η son variables distintas; en este caso, $(\mathfrak{A}\eta\psi)_\gamma(c)$ es lo mismo que $\mathfrak{A}\eta(\psi_\gamma(c))$ y $(\psi_\gamma(c))_\eta(a)$ es lo mismo que $(\psi_\eta(a))_\gamma(c)$.

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}((\mathfrak{A}\eta\psi)_\gamma(a)) = 1 \quad & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\mathfrak{A}\eta(\psi_\gamma(a))) = 1 \\ & \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D, \nu_{w/e}((\psi_\gamma(a))_\eta(k_d)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D, \nu_{w/e}((\psi_\eta(k_d))_\gamma(a)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D, \nu_{w/e}((\psi_\eta(k_d))_\gamma(b)) = 1 \quad (*) \\ & \text{sii} \quad \text{para todo } d \in D, \nu_{w/e}((\psi_\gamma(b))_\eta(k_d)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\mathfrak{A}\eta(\psi_\gamma(b))) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}((\mathfrak{A}\eta\psi)_\gamma(b)) = 1 \end{aligned}$$

La línea marcada por (*) se sigue por la hipótesis de inducción.

El caso de inducción para \square es el siguiente (los casos para \diamond , así como los de $[K]$, $\langle K \rangle$, $[B]$ y $\langle B \rangle$ son similares):

$$\begin{aligned} \nu_{w/e}(\square\varphi_\gamma(a)) = 1 \quad & \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{w'/e}(\varphi_\gamma(a)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } eRww', \nu_{w'/e}(\varphi_\gamma(b)) = 1 \\ & \text{sii} \quad \nu_{w/e}(\square\varphi_\gamma(b)) = 1 \end{aligned}$$

■

Corolario 11.1: sea \mathfrak{J} cualquier interpretación de $T_\square/T_K/D_B^*$ y sea C cualquier conjunto de constantes tal que todo objeto en el dominio tiene un nombre en C , entonces:

$$\begin{aligned}
\nu_{w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) &= 1 \text{ sii para todo } c \in C, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(c)) = 1 \\
\nu_{w/e}(\mathfrak{S}\gamma\varphi) &= 1 \text{ sii para algún } c \in C, \nu_{w/e}(\varphi_\gamma(c)) = 1 \\
\nu_{w/e}(\forall\gamma\varphi) &= 1 \text{ sii para todo } c \in C, \nu_{w/e}(\mathfrak{E}c \supset \varphi_\gamma(c)) = 1 \\
\nu_{w/e}(\exists\gamma\varphi) &= 1 \text{ sii para algún } c \in C, \nu_{w/e}(\mathfrak{E}c \wedge \varphi_\gamma(c)) = 1
\end{aligned}$$

Prueba:

Aquí está la prueba para \mathfrak{A} , la de \mathfrak{S} es similar y las de \forall y \exists sólo requieren las modificaciones apropiadas dada la definición por medio de \mathfrak{A} y \mathfrak{S} . Supóngase que $\nu_{w/e}(\mathfrak{A}\gamma\varphi) = 1$. Para todo $d \in D$, $\nu_{w/e}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1$. Considérese cualquier $c \in C$. Para algún $d \in D$, $\nu(c) = d$. Por el lema 11.4, $\nu_{w/e}(\varphi_\gamma(c)) = 1$. El caso para la negación es similar. ■

Definición 11.3: sea $\mathfrak{J} = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ una interpretación de $T_\square/T_K/D_B^*$ y \mathfrak{B} una rama de un árbol, entonces \mathfrak{J} es fiel a \mathfrak{B} si hay una función, f , de W a los números naturales y otra, g , de E a los números naturales, tales que:

- Para todo nodo $\varphi, w_i/e_x$ en \mathfrak{B} , φ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{J}
- Si $e_x R w_i w_j$ está en \mathfrak{B} , entonces $g(x) R f(i) f(j)$ en \mathfrak{J}
- Si $w_i \Psi^K e_x e_y$ está en \mathfrak{B} , entonces $f(i) \Psi^K g(x) g(y)$ en \mathfrak{J}
- Si $w_i \Psi^B e_x e_y$ está en \mathfrak{B} , entonces $f(i) \Psi^B g(x) g(y)$ en \mathfrak{J}

Decimos entonces que f y g muestran que \mathfrak{J} es fiel a \mathfrak{B} .

Lema 11.5: sea \mathfrak{B} una rama de un árbol y $\mathfrak{J} = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$ una interpretación de $T_\square/T_K/D_B^*$; si \mathfrak{J} es fiel a \mathfrak{B} y se le aplica una regla de árbol, entonces hay una $\mathfrak{J}' = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu' \rangle$ y una extensión de \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , tal que \mathfrak{J}' es fiel a \mathfrak{B}' .

Prueba:

Los casos para las conectivas proposicionales, los operadores modales y las restricciones a las relaciones de accesibilidad son básicamente los mismos que los del lema 11.1 *mutatis mutandis*. \mathfrak{J} es lo mismo que \mathfrak{J}' . Sólo debemos considerar son los casos para los cuantificadores. Omitiré las reglas para las equivalencias.

$$\begin{array}{ccc}
(i) & \mathfrak{A}\gamma\varphi, w_i/e_x & \\
& \downarrow & \\
& \varphi_\gamma(a), w_i/e_x &
\end{array}$$

Debido a que \mathfrak{J} vuelve verdadera a $\mathfrak{A}\gamma\varphi$ en $f(i)$ en $g(x)$, para todo $d \in D$, \mathfrak{J} hace verdadera a $\varphi_\gamma(k_d)$. Sea d tal que $\nu(a) = \nu(k_d)$, entonces, por el lema 11.4, $\varphi_\gamma(a)$ es verdadera en $f(i)$ en $g(x)$. Así pues, \mathfrak{J} es lo mismo que \mathfrak{J}' .

$$(ii) \quad \begin{array}{c} \mathfrak{S}\gamma\varphi, w_i/e_x \\ \downarrow \\ \varphi_\gamma(c), w_i/e_x \end{array}$$

Debido a que \mathfrak{J} hace verdadero a $\mathfrak{S}\gamma\varphi$ en $f(i)$ en $g(x)$, para algún $d \in D$, \mathfrak{J} hace verdadera a $\varphi_\gamma(k_d)$ en $f(i)$ en $g(x)$. Sea $\mathfrak{J}' = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu' \rangle$ lo mismo que \mathfrak{J} excepto porque $\nu'(c) = d$. Debido a que c no aparece en $\varphi_\gamma(k_d)$, \mathfrak{J}' vuelve verdadera a $\varphi_\gamma(k_d)$ en $f(i)$ en $g(x)$, por el lema 11.3. Debido a que $\nu'(c) = d = \nu'(k_d)$, \mathfrak{J}' hace verdadera a $\varphi_\gamma(c)$ en $f(i)$ en $g(x)$, por el lema 11.4; y debido a que c no aparece en ninguna otra fórmula en la rama, \mathfrak{J}' vuelve verdadera a todas las demás fórmulas en los demás mundos y estados epistémicos en la rama, por el lema 11.3.

$$(iii) \quad \begin{array}{ccc} & \forall\gamma\varphi, w_i/e_x & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg\mathfrak{E}a, w_i/e_x & & \varphi_\gamma(a), w_i/e_x \end{array}$$

Debido a que \mathfrak{J} hace verdadero a $\forall\gamma\varphi$ en $f(i)$ en $g(x)$, entonces, para todo $d \in D_{f(i)/g(x)}$, $\varphi_\gamma(k_d)$; así pues, para todo $d \in D$, \mathfrak{J} hace verdadero a $\neg\mathfrak{E}k_d$ o a $\varphi_\gamma(k_d)$. Sea d tal que $\nu(a) = \nu(k_d)$. Por el lema 11.4, \mathfrak{J} hace verdadera $\neg\mathfrak{E}a$ o $\varphi_\gamma(a)$ en $f(i)$ en $g(x)$. En suma, \mathfrak{J} es fiel a una rama o la otra, y podemos considerar a \mathfrak{J} como \mathfrak{J}' .

$$(iv) \quad \begin{array}{c} \exists\gamma\varphi, w_i/e_x \\ \downarrow \\ \mathfrak{E}c, w_i/e_x \\ \varphi_\gamma(c), w_i/e_x \end{array}$$

Debido a que \mathfrak{J} hace verdadero a $\exists\gamma\varphi$ en $f(i)$ en $g(x)$, para algún $d \in D_{f(i)/g(x)}$, \mathfrak{J} hace verdaderas a $\mathfrak{E}k_d$ y a $\varphi_\gamma(k_d)$ en $f(i)$ en $g(x)$. Sea $\mathfrak{J}' = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu' \rangle$ lo mismo que \mathfrak{J} excepto porque $\nu'(c) = d$. Debido a que c no aparece en $\varphi_\gamma(k_d)$, \mathfrak{J}' vuelve verdaderas a $\mathfrak{E}k_d$ y $\varphi_\gamma(k_d)$ en $f(i)$ en $g(x)$, por el lema 11.3. Debido a que $\nu'(c) = d = \nu'(k_d)$, \mathfrak{J}' hace verdadera a $\mathfrak{E}c$ y $\varphi_\gamma(c)$ en $f(i)$ en $g(x)$, por el lema 11.4; y debido a que c no aparece en ninguna otra fórmula en la rama, \mathfrak{J}' vuelve verdadera a las demás fórmulas en los demás mundos y estados en la rama, por el lema 11.3. ■

Teorema 11.12: Los árboles para $T_\square/T_K/D_B^*$ con cuantificadores son correctos con respecto a sus semánticas, *i.e.*, para un Σ finito, si $\Sigma \vdash \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$.

Prueba:

La prueba es la misma *mutatis mutandis* que la del teorema 11.1 usando el lema 11.5. ■

Definición 11.4: sea \mathfrak{B} la rama abierta de un árbol y C el conjunto de constantes que aparecen en \mathfrak{B} , la interpretación inducida por \mathfrak{B} , $\mathfrak{J} = \langle D, W, E, R_e, \Psi_w^K, \Psi_w^B, \nu \rangle$, se define de la siguiente forma: $W = \{w_i : w_i \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; $E = \{e_x : e_x \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; $R_{e_x} = \{\langle w_i, w_j \rangle : e_x R w_i w_j \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; $\Psi_{w_i}^K = \{\langle e_x, e_y \rangle : w_i \Psi^K e_x e_y \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; $\Psi_{w_i}^B = \{\langle e_x, e_y \rangle : w_i \Psi^B e_x e_y \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; $D = \{\partial_c : c \in C\}$; $D_{w_i/e_x} = \{\partial_c : \mathfrak{C}c, w_i/e_x \text{ aparece en } \mathfrak{B}\}$; para toda $c \in C$, $\nu(c) = \partial_c$; para todo predicado de n lugares, $\langle \partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_n} \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(P)$ si $Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} y $\langle \partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_n} \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(P)$ si $\neg Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} .

Lema 11.6: dada una interpretación inducida, \mathfrak{J} , como en la definición 11.4, para cualquier fórmula φ :

Si $\varphi, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} , $\nu_{w_i/e_x}(\varphi) = 1$

Si $\neg\varphi, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} , $\nu_{w_i/e_x}(\varphi) = 0$

Prueba:

La prueba se da por recursión sobre la complejidad de φ .

Para las fórmulas atómicas:

$$\begin{aligned} Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow \langle \partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_n} \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(Pa_1 \dots a_n) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ no está en } \mathfrak{B} \\ &\Rightarrow \langle \partial_{a_1}, \dots, \partial_{a_n} \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(Pa_1 \dots a_n) = 0 \end{aligned}$$

Los casos para las conectivas, los operadores modales y las restricciones a relaciones son básicamente los mismos que los del lema 11.2. Para los cuantificadores, omitiré los casos para las equivalencias de los cuantificadores y sólo desarrollaré el caso para \mathfrak{S} , los demás casos son similares. Supóngase que $\mathfrak{S}\gamma\varphi, w_i/e_x$ está en \mathfrak{B} , entonces para algún c , $\varphi_\gamma(c), w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} . Por la hipótesis de inducción, $\nu_{w_i/e_x}(\varphi_\gamma(c)) = 1$. Ahora, para algún $d \in D$, $\nu(c) = \nu(k_d)$, y $\nu(d) = \nu(k_d)$; así pues, por el lema 11.4, $\nu_{w_i/e_x}(\varphi_\gamma(k_d)) = 1$. En suma, $\nu_{w_i/e_x}(\mathfrak{S}\gamma\varphi) = 1$. ■

Teorema 11.13: Los árboles para $T_\square/T_K/D_B^*$ con cuantificadores son completos con respecto a sus semánticas, *i.e.*, para un Σ finito, si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \vdash \varphi$.

Prueba:

La prueba es la misma *mutatis mutandis* que la del teorema 11.2 usando el lema 11.6. ■

Pasamos a considerar la adición del predicado de identidad al lenguaje de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ de primer orden. Los lemas 11.3 y 11.4 no se ven alterados, y, de hecho, requerimos un corolario del lema 11.4:

Corolario 11.2: $a = b, \varphi_{\gamma}(a) \models \varphi_{\gamma}(b)$

Prueba:

Debido a que $a = b$ y $\varphi_{\gamma}(a)$ son verdaderos en una interpretación \mathfrak{J} , $\nu(a) = \nu(b)$, por el lema 11.4, $\varphi_{\gamma}(b)$ es verdadera por la misma interpretación. ■

Teorema 11.14: Los árboles para $T_{\square}/T_K/D_B^*$ con el predicado de identidad son correctos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

Lo único que debemos hacer es extender el lema 11.5 desarrollando los casos para las reglas de identidad. Las reglas son:

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & a = b, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \varphi_{\gamma}(a), w_i/e_x \\
 a = a, w_i/e_x & a = b, w_j/e_y & \downarrow \\
 & & \varphi_{\gamma}(b), w_i/e_x
 \end{array}$$

La primera regla dice que, para cualquier constante en la rama, a , y para todos los w_i y e_x en la rama, $a = a, w_i/e_x$ aparece en la rama; así pues, para todo $w \in W$, $e \in E$ y para toda $d \in D$ tal que $\nu(a) = \nu(k_d)$, $\langle \nu(a), \nu(a) \rangle \in \nu_w/e(=)$ en \mathfrak{J} , como queríamos. Para la segunda regla, debido a que $\nu(a) = \nu(b)$ en $f(i)$ en $g(x)$ en \mathfrak{J} , entonces $\nu(a) = \nu(b)$ en $f(j)$ en $g(y)$ en \mathfrak{J} . La tercera regla se cumple por el corolario 11.2. ■

Teorema 11.15: Los árboles para $T_{\square}/T_K/D_B^*$ con el predicado de identidad son completos con respecto a sus semánticas.

Prueba:

La prueba es la misma que la del teorema 11.13 modificando la definición 11.4. Sea C el conjunto de constantes en \mathfrak{B} . Dígase que $a \sim b$ si $a = b, w_0/e_0$ está en la rama. \sim es una relación de equivalencia. $D = \{[a] : a \in C\}$. R_e , Ψ_w^K y Ψ_w^B siguen siendo lo mismo.

$\nu(a) = [a]$. Para cualquier predicado de n lugares que no sea P , $\langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle \in \nu_{w_i/e_x}$ si $Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} y $\langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}$ si $\neg Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} (esto está bien definido dadas todas las aplicaciones posibles de la regla de invariabilidad de la identidad y de la sustitución de los idénticos). $D_{w_i/e_x} = \nu_{w_i/e_x}(\mathfrak{E})$. Los casos de las conectivas proposicionales, los operadores aléticos, epistémicos y doxásticos así como los de los cuantificadores son los mismos que los del lema 11.6. Lo único que debemos considerar son los casos para las fórmulas atómicas y el predicado de identidad.

Para las fórmulas atómicas, tenemos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow \langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \in \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(Pa_1 \dots a_n) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x \text{ no está en } \mathfrak{B} \\ &\Rightarrow \langle [a_1], \dots, [a_n] \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(P) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(Pa_1 \dots a_n) = 0 \end{aligned}$$

Para el predicado de identidad, tenemos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} a = b, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow a \sim b \text{ (*)} \\ &\Rightarrow [a] = [b] \\ &\Rightarrow \nu(a) = \nu(b) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(a = b) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = b, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow a = b, w_0/e_0 \text{ no está en } \mathfrak{B} \text{ (*)} \\ &\Rightarrow \text{no es el caso de que } a \sim b \\ &\Rightarrow [a] \neq [b] \\ &\Rightarrow \nu(a) \neq \nu(b) \\ &\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(a \neq b) = 1 \end{aligned}$$

Las líneas marcadas con (*) significan que la regla de identidad invariable se ha aplicado cuantas veces ha sido posible aplicarla. ■

Teorema 11.16: Los árboles para la versión negativa de $T_{\square}/T_K/D_B^*$ con identidad son correctos y completos

Prueba:

Lo único que debemos hacer es extender las pruebas de los teoremas 11.14 y 11.15 para las restricciones apropiadas.

Comencemos por la corrección. Son cuatro las reglas que debemos considerar para el lema de corrección.

$$\begin{array}{cccc}
 Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x & \mathfrak{E}a, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x & a = b, w_i/e_x \\
 \downarrow & \downarrow & \mathfrak{E}a, w_j/e_y & \varphi_\gamma(a), w_i/e_x \\
 \mathfrak{E}a_1, w_i/e_x & a = a, w_i/e_x & \downarrow & \downarrow \\
 \vdots & & a = b, w_j/e_y & \varphi_\gamma(b), w_i/e_y \\
 \mathfrak{E}a_n, w_i/e_x & & &
 \end{array}$$

Para la primera regla, si $Pa_1 \dots a_n, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} , entonces $\mathfrak{E}a_1, w_i/e_x, \dots, \mathfrak{E}a_n, w_i/e_x$ aparecen en \mathfrak{B}' . Por la definición 11.3, $\langle \nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \rangle \in \nu_{f(i)/g(x)}(P)$ en \mathfrak{J} , y, por la restricción negativa, $\nu(a_1), \dots, \nu(a_n) \in \nu_{f(i)/g(x)}(\mathfrak{E})$ como se buscaba. La segunda regla dice que, para toda constante, a , tal que $\mathfrak{E}a, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B} , $a = a, w_i/e_x$ aparece en \mathfrak{B}' ; así pues, para todo $w \in W$, $e \in E$ y $d \in D$ tal que $\nu(a) = \nu(k_d)$, $\nu_{w/e}(=) = \{ \langle d, d \rangle : \nu(k_d) \in D_{w/e} \}$. Para la tercera regla, debido a que $\nu(a) = \nu(b)$ y $\nu(a) \in \nu_{f(j)/g(y)}(\mathfrak{E})$, por lo cual $\nu(b) \in \nu_{f(j)/g(y)}(\mathfrak{E})$, entonces $\nu_{f(j)/g(y)}(a = b) = 1$. La cuarta regla se sigue por el corolario 11.2.

Pasemos a completitud. Los casos para el lema de completitud son básicamente los mismos que los del teorema 11.15 considerando que se han aplicado cuantas veces han sido posibles las reglas de la restricción negativa. Aquí están los casos para el predicado de identidad.

$$\begin{aligned}
 a = b, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} & \Rightarrow a \sim b, \text{ y } \mathfrak{E}a, w_i/e_x \text{ y } \mathfrak{E}b, w_i/e_x \text{ están en } \mathfrak{B} \\
 & \Rightarrow [a] = [b] \\
 & \Rightarrow \nu(a) = \nu(b) \\
 & \Rightarrow \nu(a), \nu(b) \in \nu_{w_i/e_x}(\mathfrak{E}) \\
 & \Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(a = b) = 1
 \end{aligned}$$

La primera línea se sigue por la aplicación reiterada de la regla para la restricción negativa.

Si $\neg a = b, w_i/e_x$ está en \mathfrak{B} hay dos casos. Para el primero, supóngase que $\mathfrak{E}a, w_i/e_x$ y $\mathfrak{E}b, w_i/e_x$ están en \mathfrak{B} , entonces:

$$\begin{aligned}
\neg a = b, w_i/e_x \text{ está en } \mathfrak{B} &\Rightarrow \text{ para ningún } w_j \text{ o } e_y, a = b, w_j/e_y \text{ está en } \mathfrak{B} \text{ (*)} \\
&\Rightarrow \text{ y } a \text{ y } b \text{ son términos distintos} \\
&\Rightarrow \text{ no es el caso de que } a \sim b \\
&\Rightarrow [a] \neq [b] \\
&\Rightarrow \nu(a) \neq \nu(b) \\
&\Rightarrow \nu_{w_i/e_x}(a = b) = 0
\end{aligned}$$

La afirmación marcada por (*) se sigue por todas las aplicaciones de la regla de invariabilidad de la identidad que han podido hacerse.

El segundo caso es que o $\mathfrak{E}a, w_i/e_x$ o $\mathfrak{E}b, w_i/e_x$ no está en \mathfrak{B} . Supóngase que $\mathfrak{E}a, w_i/e_x$ no está en \mathfrak{B} (el otro caso es similar), entonces $\nu(a) = [a] \notin \nu_{w_i/e_x}(\mathfrak{E})$; así pues, $\langle \nu(a), \nu(b) \rangle \notin \nu_{w_i/e_x}(=)$, por tanto $\nu_{w_i/e_x}(a = b) = 0$.

■

APÉNDICE A: NOTACIONES Y DEFINICIONES PARA LAS LÓGICAS MODALES

A lo largo del trabajo tuvimos la oportunidad de revisar lógicas aléticas, epistémicas, doxásticas y temporales. En la literatura, todas éstas tienen distintas notaciones y ciertas definiciones útiles. En este apéndice, doy cuenta de la notación que usé para mi trabajo de grado y de otras notaciones usuales. También aprovecho la oportunidad para presentar nuevamente algunas definiciones útiles para ciertas lógicas, aunque recuérdese que algunas de estas definiciones pueden fallar si uno se basa en la lógica intuicionista, lo cual se desarrolla y discute en el capítulo 9.

Lógica alética y condicional

<i>Notación usada</i>	<i>Notaciones alternas</i>	<i>Definición</i>	<i>Lectura</i>
$\Box\varphi$	$L\varphi$	$\neg\Diamond\neg\varphi$	Es necesario que φ
$\Diamond\varphi$	$M\varphi$	$\neg\Box\neg\varphi$	Es posible que φ
$\varphi \rightarrow \psi$		$\Box(\varphi \supset \psi)$	φ implica estrictamente a ψ
$\nabla\varphi$		$\Diamond\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi$	Es contingente que φ
$\Delta\varphi$		$\Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$	No es contingente que φ
$\varphi \Box\rightarrow \psi$	$\varphi > \psi$	$\neg(\varphi \Diamond\rightarrow \neg\psi)$	Si φ , sería el caso de que ψ
$\varphi \Diamond\rightarrow \psi$		$\neg(\varphi \Box\rightarrow \neg\psi)$	Si φ , podría ser el caso de que ψ

Lógica epistémica

<i>Notación usada</i>	<i>Notaciones alternas</i>	<i>Definición</i>	<i>Lectura</i>
$[K]\varphi$	$K\varphi$	$\neg\langle K \rangle\neg\varphi$	Un agente ideal sabe que φ
$\langle K \rangle\varphi$	$M\varphi, \widehat{K}\varphi$	$\neg[K]\neg\varphi$	Para un agente ideal, es posible epistémicamente que φ / Por lo que el agente sabe, es posible que φ
$\backslash K / \varphi$		$\neg[K]\varphi \wedge \neg[K]\neg\varphi$	El agente no sabe si φ
$/ K \backslash \varphi$		$[K]\varphi \vee [K]\neg\varphi$	El agente sabe si φ

Lógica doxástica

<i>Notación usada</i>	<i>Notaciones alternas</i>	<i>Definición</i>	<i>Lectura</i>
$[B]\varphi$ $\langle B \rangle \varphi$	$B\varphi$ $N\varphi, \widehat{B}\varphi$	$\neg \langle B \rangle \neg \varphi$ $\neg [B] \neg \varphi$	Un agente ideal cree que φ Para un agente ideal, es posible doxásticamente que φ / Por lo que el agente cree, es posible que φ
$\setminus B / \varphi$		$\neg [B]\varphi \wedge \neg [B]\neg \varphi$	El agente no tiene un juicio definitivo / suspende su juicio sobre φ
$/B \setminus \varphi$		$[B]\varphi \vee [B]\neg \varphi$	El agente tiene un juicio definitivo sobre φ

Lógica temporal

<i>Notación usada</i>	<i>Notaciones alternas</i>	<i>Definición</i>	<i>Lectura</i>
$[P]\varphi$ $\langle P \rangle \varphi$	$H\varphi$ $P\varphi$	$\neg \langle P \rangle \neg \varphi$ $\neg [P] \neg \varphi$	En todo momento pasado, φ En algún momento pasado, φ
$[F]\varphi$ $\langle F \rangle \varphi$	$G\varphi$ $F\varphi$	$\neg \langle F \rangle \neg \varphi$ $\neg [F] \neg \varphi$	En todo momento futuro, φ En algún momento futuro, φ
$[T]\varphi$ $\langle T \rangle \varphi$	$A\varphi$ $S\varphi$	$[P]\varphi \wedge \varphi \wedge [F]\varphi$ $\langle P \rangle \varphi \vee \varphi \vee \langle F \rangle \varphi$	Siempre / en todo momento, φ A veces / en algún momento, φ

APÉNDICE B: PRINCIPIOS REVISADOS

En aras de una identificación más sencilla, gran parte de las fórmulas, reglas e inferencias presentadas en este trabajo de grado no fueron numeradas según el capítulo, por ejemplo, ($\#.\$$) para la fórmula $\$$ del capítulo $\#$, sino que recibieron una nomenclatura más o menos estándar, por ejemplo, el axioma T en su versión alética fue nombrado ($T\Box$) mientras que su versión epistémica (TK). Aun con todo, y pese a las buenas intenciones, la cantidad de fórmulas y su distribución a lo largo de varios capítulos resultaron en una jungla en la que también es fácil perderse. Como una especie de remedio a esta situación, en este apéndice se compilan las fórmulas, reglas e inferencias no numeradas según donde hayan aparecido por primera vez. Se ponen también las fórmulas numeradas en caso de que alguna llame la atención del lector. El orden se da por aparición.

Capítulo 1. Lógicas aléticas, epistémicas y doxásticas normales

- (LC) Todos los axiomas y teoremas, $\vdash \varphi$, de la lógica clásica proposicional
- (SU) Si $\vdash \varphi$ y p forma parte de φ , entonces la fórmula resultante, φ' , al sustituir uniformemente p por ψ , $[p/\psi]$, también es válida, $\vdash \varphi'$
- (MP) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
- (N \Box) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash \Box\varphi$
- (C \Box) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
- (D \Box) $\Box p \supset \Diamond p$
- (T \Box) $\Box p \supset p$
- (B \Box) $p \supset \Box\Diamond p$
- (4 \Box) $\Box p \supset \Box\Box p$
- (5 \Box) $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$
- (NK) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [K]\varphi$
- (NB) Si $\vdash \varphi$, entonces $\vdash [B]\varphi$
- (CK) $[K](p \supset q) \supset ([K]p \supset [K]q)$
- (CB) $[B](p \supset q) \supset ([B]p \supset [B]q)$
- (TK) $[K]p \supset p$
- (4K) $[K]p \supset [K][K]p$
- (5K) $\neg[K]p \supset [K]\neg[K]p$
- (DB) $[B]p \supset \neg[B]\neg p$

- (4B) $[B]p \supset [B][B]p$
(5B) $\neg[B]p \supset [B]\neg[B]p$
(KB) $[K]p \supset [B]p$

Capítulo 2. Semánticas para $T_{\square}/T_K/D_B^*$

No hay elementos nuevos que mostrar.

Capítulo 3. Árboles para $T_{\square}/T_K/D_B^*$

- (3.1) $\nabla p \wedge [K]p \vdash \nabla[K]p$
(3.2) $\langle K \rangle p \supset \diamond p$

Capítulo 4. Algunas afirmaciones spinozianas

- (4.1) $[B]\nabla p \supset \neg/K \setminus p$
(4.2) $[B]\nabla p \supset \neg/K \setminus \Delta p$
(4.3) $[B]\nabla p \supset \neg[K]\square p$
(4.4) $[K]\square p \supset \neg[B]\nabla p$

Capítulo 5. Temporalización de $T_{\square}/T_K/D_B^*$

- (NP) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [P]A$
(NF) Si $\vdash A$, entonces $\vdash [F]A$
(CP) $[P](p \supset q) \supset ([P]p \supset [P]q)$
(CF) $[F](p \supset q) \supset ([F]p \supset [F]q)$
(PF) $p \supset [P]\langle F \rangle p$
(FP) $p \supset [F]\langle P \rangle p$
(DP) $[P]p \supset \langle P \rangle p$
(DF) $[F]p \supset \langle F \rangle p$
(HP) $(\langle P \rangle p \wedge \langle P \rangle q) \supset (\langle P \rangle (\langle P \rangle p \wedge q) \vee \langle P \rangle (p \wedge q) \vee \langle P \rangle (p \wedge \langle P \rangle q))$
(HF) $(\langle F \rangle p \wedge \langle F \rangle q) \supset (\langle F \rangle (\langle F \rangle p \wedge q) \vee \langle F \rangle (p \wedge q) \vee \langle F \rangle (p \wedge \langle F \rangle q))$
(4P) $[P]p \supset [P][P]p$
(4F) $[F]p \supset [F][F]p$
(DEP) $[P][P]p \supset [P]p$
(DEF) $[F][F]p \supset [F]p$
(5.1) $[T]\langle F \rangle \top \supset \square[T]\langle F \rangle \top$
(5.2) $[T]\langle F \rangle \top \supset [K][T]\langle F \rangle \top$
(5.3) $[T]\langle F \rangle \top \supset [B][T]\langle F \rangle \top$

Capítulo 6. Sobre el principio de cerradura estricta para el conocimiento

- (T \Box +) $\Box p \rightarrow p$
- (TK+) $[K]p \rightarrow p$
- (DB+) $[B]p \rightarrow \neg[B]\neg p$
- (KB+) $[K]p \rightarrow [B]p$
- (CB+) $[B](p \rightarrow q) \rightarrow ([B]p \rightarrow [B]q)$
- (CK+) $[K](p \rightarrow q) \rightarrow ([K]p \rightarrow [K]q)$
- (SH) $[K]\Box p \supset \Box[K]p$
- (SHC) $\Box[K]p \supset [K]\Box p$
- (C \Box \pm) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (C \Box +) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (T) $[O]p \supset p$
- (5) $\neg[O]p \supset [O]\neg[O]p$
- (BBK) $[B]p \supset [B][K]p$

Capítulo 7. Lógicas alético-epistémico-doxásticas condicionales

- (RC) $p \Box \rightarrow q \not\equiv (p \wedge r) \Box \rightarrow q$
- (TC) $p \Box \rightarrow q, q \Box \rightarrow r \not\equiv p \Box \rightarrow r$
- (TR) $p \Box \rightarrow q \not\equiv \neg q \Box \rightarrow \neg p$
- (RCK) $[K](p \Box \rightarrow q) \not\equiv [K]((p \wedge r) \Box \rightarrow q)$
- (TCK) $[K](p \Box \rightarrow q), [K](q \Box \rightarrow r) \not\equiv [K](p \Box \rightarrow r)$
- (TRK) $[K](p \Box \rightarrow q) \not\equiv [K](\neg q \Box \rightarrow \neg p)$
- (7.1) $p \Box \rightarrow \neg[K]p$
- (7.2) $p \Box \rightarrow \neg[K]\neg p$
- (7.3) $p \Box \rightarrow \setminus K/p$
- (7.4) $p \Box \rightarrow q, p \Box \rightarrow r \vdash p \Box \rightarrow (q \wedge r)$
- (7.5) $\Diamond([B]p \wedge \neg p) \supset \neg[K]p$
- (7.6) $\neg((\Box[B]p \wedge \neg p) \Diamond \rightarrow \neg[K]p)$
- (7.7) $([B]p \wedge \neg p) \Box \rightarrow \neg[K]p$
- (7.8) $\varphi, \varphi \Box \rightarrow \psi \vdash \psi$
- (PCE*) $\Box p \Box \rightarrow (q \Box \rightarrow p)$
- (PCE*') $\Box \neg p \Box \rightarrow (p \Box \rightarrow q)$
- (7.9) $\neg p \Box \rightarrow \neg[K]p \models ([B]p \wedge \neg p) \Box \rightarrow \neg[K]p$
- (CK*) $[K](p \Box \rightarrow q) \Box \rightarrow ([K]p \Box \rightarrow [K]q)$

Capítulo 8. Lógicas alético-epistémico-doxásticas anormales

- (8.1) $\Box((\nabla p \wedge [K]p) \supset \nabla[K]p)$
(8.2) $\Box[B](p \supset [K](q \vee \neg q))$
(OLM) Si $\vdash \varphi \supset \psi$, entonces $\vdash [K]\varphi \supset [K]\psi$
(OLE) Si $\vdash \varphi \neg \supset \psi$, entonces $\vdash [K]\varphi \neg \supset [K]\psi$
(MPE) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \varphi \neg \supset \psi$, entonces $\vdash \psi$
(QCK+) $\Box[K](p \supset q) \neg \supset ([K]p \neg \supset [K]q)$
(8.3) $([K](p \neg \supset q) \wedge [K]p) \neg \supset [K]q$

Capítulo 9. Lógica epistémica intuicionista

- (9.1) $\vdash \langle K \rangle p \Box \rightarrow [K] \rightarrow p$
(9.2) $\not\vdash \rightarrow [K] \rightarrow p \Box \langle K \rangle p$
(9.3) $\not\vdash \rightarrow \langle K \rangle \neg p \Box [K]p$
(CI \Box) $\Box(p \Box q) \Box (\Box p \Box \Box q)$
(CIK) $[K](p \Box q) \Box ([K]p \Box [K]q)$
(CIB) $[B](p \Box q) \Box ([B]p \Box [B]q)$
(OLI) Si $\vdash \varphi \Box \psi$, entonces $\vdash [K]\varphi \Box [K]\psi$
(4IK) $[K]p \Box [K][K]p$
(4IB) $[B]p \Box [B][B]p$
(5IK) $\rightarrow [K]p \Box [K] \rightarrow [K]p$
(5IB) $\rightarrow [B]p \Box [B] \rightarrow [B]p$

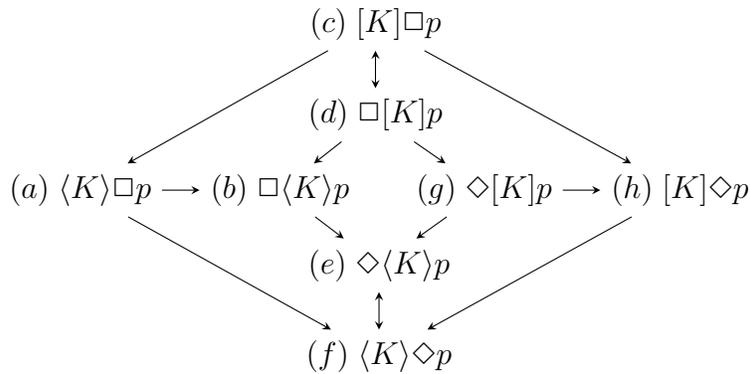
Capítulo 10. $T_{\Box}/T_K/D_B^*$ de primer orden con identidad invariable

En el capítulo hay un par de diagramas dedicados a las fórmulas Barcan.

- (II \Box) $\forall \gamma \forall \eta (\gamma = \eta) \supset \Box \gamma = \eta$
(IIK) $\forall \gamma \forall \eta (\gamma = \eta) \supset [K]\gamma = \eta$
(IIB) $\forall \gamma \forall \eta (\gamma = \eta) \supset [B]\gamma = \eta$
(10.1) $[K]\Box \mathfrak{A}\gamma (S\gamma \supset T\gamma), [B]\Diamond \mathfrak{S}\gamma (U\gamma \wedge S\gamma) \vdash [B]\mathfrak{S}\gamma \Diamond (U\gamma \wedge T\gamma)$
(10.2) $[K]\Box \forall \gamma (S\gamma \supset T\gamma), [B]\Diamond \exists \gamma (U\gamma \wedge S\gamma) \not\vdash [B]\exists \gamma \Diamond (U\gamma \wedge T\gamma)$
(10.3) $a = b, Qa \not\vdash \neg [K]\Diamond \neg Qb$
(10.4) $a = b \supset \Box(\mathfrak{E}a \supset a = b)$

APÉNDICE C: (SH) Y (SHC) COMO ANÁLOGOS A LAS FÓRMULAS BARCAN

En el capítulo 6, conocimos a (SH) y (SHC) como principios válidos de la lógica $S5_{\square}/S5_K$, y en el capítulo 10, conocimos a las fórmulas Barcan y cómo éstas son válidas con dominios constantes (o cuando los cuantificadores no están cargados existencialmente) e inválidas con variables (cuando permitimos que los cuantificadores tengan carga existencial). Valga apuntar que, cuando uno trabaja en $S5_{\square}/S5_K$, (SH) y (SHC) se comparten como las fórmulas Barcan con dominios constantes. Así pues, podemos modificar los esquemas que vimos entonces en el capítulo 10 sobre las interacciones entre las modalidades *de re* y *de dicto* para entender cómo en $S5_{\square}/S5_K$ ciertas actitudes epistémicas (puestas en el diamante exterior) se relacionan con ciertas condiciones aléticas del conocimiento (puestas en el diamante interno), para esto, véase la siguiente tabla. Siendo cuestionables (SH) y (SHC), todas las inferencias mostradas en el diagrama son de dudosa plausibilidad. Particularmente, a mí parece problemática la inferencia de (g) a (h), si es posible conocer algo, lo sabemos como posible; esto lleva demasiado lejos la idealización que se hace de los agentes epistémicos.



Bibliografía

- [1] Francesco Berto and Mark Jago. Impossible Worlds. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2018 edition, 2018.
- [2] Jean-Yves Beziau. Possibility, contingency and the hexagon of modalities. *South American Journal of Logic*, 3:273–290, 2017.
- [3] Robert Blanché. Sur l’opposition des concepts. *Theoria*, 19(3):89–130, 1953.
- [4] Paul Artin Boghossian. *El miedo al conocimiento*. Alianza, 2009.
- [5] Krister Bull, Robert; Segerberg. Basic modal logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 1–82. Springer, 2002.
- [6] Rudolf Carnap. *Meaning and necessity: a study in semantics and modal logic*. University of Chicago Press, 1956.
- [7] Walter Carnielli and Marcelo Esteban Coniglio. Combining Logics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2020 edition, 2020.
- [8] Fabrice Correia and Sven Rosenkranz. On the relation between modality and tense. *Inquiry*, pages 1–19, 2019.
- [9] Alexandre Costa-Leite. Interplays of knowledge and non-contingency. *Logic and Logical Philosophy*, 25(4):521–534, 2016.
- [10] Fred I Dretske. Epistemic operators. *The journal of philosophy*, 67(24):1007–1023, 1970.
- [11] Andy Egan and Brian Weatherson. *Epistemic modality*. Oxford University Press, 2011.
- [12] Richard Feldman. *Epistemology*. Pearson Education, 2003.
- [13] James Garson. Modal Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2021 edition, 2021.

-
- [14] José Rafael Herrera González. Conocimiento e incertidumbre. una aproximación desde la lógica de las modalidades epistémicas. *Contextos*, (45):227–257, 2005.
- [15] Valentin Goranko and Antje Rumberg. Temporal Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2020 edition, 2020.
- [16] G.E. Hughes and M.J. Cresswell. *Introducción a la lógica modal*. Tecnos, 1973.
- [17] Jonathan Jenkins Ichikawa and Matthias Steup. The Analysis of Knowledge. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2018 edition, 2018.
- [18] Rosalie Iemhoff. Intuitionism in the Philosophy of Mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2020 edition, 2020.
- [19] Charles Jarrett. The logical structure of spinoza’s ” ethics”, part i. *Synthese*, pages 15–65, 1978.
- [20] Marilyn Johnson. Tree trimming: Four non-branching rules for priest’s introduction to non-classical logic. *The Australasian Journal of Logic*, 12(2), 2015.
- [21] William Kneale and Martha Kneale. *El desarrollo de la lógica*. Tecnos, 1972.
- [22] Saul A Kripke. Semantical analysis of intuitionistic logic i. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 40, pages 92–130. Elsevier, 1965.
- [23] Clarence Irving Lewis. *A survey of symbolic logic*. University of California Press, 1918.
- [24] David Lewis. *Counterfactuals*. Basil Blackwell, 1973.
- [25] Christopher Menzel. Possible Worlds. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2017 edition, 2017.
- [26] John-Jules Ch Meyer. Modal epistemic and doxastic logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 1–38. Springer, 2003.
- [27] Jon A Miller. Spinoza’s possibilities. *The Review of Metaphysics*, pages 779–814, 2001.
- [28] Hugh Montgomery and Richard Routley. Contingency and non-contingency bases for normal modal logics. *Logique et analyse*, 9(35/36):318–328, 1966.

-
- [29] Joan Moschovakis. Intuitionistic Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2021 edition, 2021.
- [30] Samuel Newlands. Spinoza’s Modal Metaphysics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2018 edition, 2018.
- [31] Eric Pacuit. *Neighborhood semantics for modal logic*. Springer, 2017.
- [32] David Papineau. Naturalism. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2020 edition, 2020.
- [33] Gómez-Camínero Parejo. *Tablas semánticas para lógica epistémica*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2011.
- [34] V. M. Pineda. *Horror vacui. Voluntad y deseo en el pensamiento de Spinoza*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo – Secretaría de Difusión Cultural y Extensión Universitaria Plaza y Valdés, 2009.
- [35] Graham Priest. Mission impossible.
- [36] Graham Priest. *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge University Press, 2008.
- [37] Stephen Read. *Thinking about logic: An introduction to the philosophy of logic*. 1994.
- [38] Rasmus Rendsvig and John Symons. Epistemic Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2021 edition, 2021.
- [39] Daniel Rönnedal. *Extensions of deontic logic: An investigation into some multi-modal systems*. PhD thesis, Department of Philosophy, Stockholm University, 2012.
- [40] Daniel Rönnedal. Temporal alethic–deontic logic and semantic tableaux. *Journal of Applied Logic*, 10(3):219–237, 2012.
- [41] Daniel Rönnedal. Quantified temporal alethic-deontic logic. *Logic and Logical Philosophy*, 24(1):19–59, 2015.
- [42] Daniel Rönnedal. Doxastic logic: a new approach. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 28(4):313–347, 2018.

-
- [43] Daniel Rönnedal. Quantified temporal alethic boulesic doxastic logic. *Logica Universalis*, 15(1):1–65, 2021.
- [44] Juan Carlos Sánchez Hernández. De la necesidad a la contingencia. la modalidad según spinoza. Tesis de licenciatura [Universidad Nacional Autónoma de México].
- [45] Juan Carlos Sánchez Hernández. Examen a un argumento escéptico con una lógica condicional. Manuscrito sin publicar, 2020.
- [46] Juan Carlos Sánchez Hernández. Árboles semánticos para una lógica alético-epistémico-doxásticas y sus versiones condicionales. *Signos filosóficos*, (48), 2022.
- [47] Juan Carlos Sánchez Hernández. Tableaux for some modal-tense logics graham priest’s fashion. *Studia Logica*, <https://doi.org/10.1007/s11225-021-09974-x>, 2022.
- [48] Andreas Schmidt. Substance monism and identity theory in spinoza. *The Cambridge Campanian to Spinozas Ethics*, pages 79–98, 2009.
- [49] Dana Scott. Advice on modal logic. In *Philosophical problems in logic*, pages 143–173. Springer, 1970.
- [50] R. W. Sharples. *Estoicos, epicúreos y escépticos. Introducción a la filosofía helenística*. 2009.
- [51] Sonja Smets and Fernando Velázquez-Quesada. Philosophical Aspects of Multi-Modal Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2019 edition, 2019.
- [52] Baruj Spinoza. *Correspondencia*. Alianza, 1988.
- [53] Baruj Spinoza. *Tratado de la reforma del entendimiento. Principios de la filosofía de René Descartes. Pensamientos metafísicos*. Alianza, 2014.
- [54] Baruj Spinoza. *Ética demostrada según el orden geométrico*. Trotta, 2020.
- [55] Richmond H Thomason. Combinations of tense and modality. In *Handbook of philosophical logic*, pages 205–234. Springer, 2002.
- [56] Gabriel Uzquiano. Quantifiers and Quantification. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2020 edition, 2020.
- [57] Heinrich Wansing. Connexive Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring 2021 edition, 2021.

-
- [58] Lani Watson. *The Right to Know: Epistemic Rights and Why We Need Them*. Routledge, 2021.
- [59] Georg Henrik Von Wright. *Truth, Knowledge and Modality (Philosophical Papers of Georg Henrik Von Wright, Vol 3)*. Basil Blackwell, 1985.
- [60] Evgeni E Zolin. Completeness and definability in the logic of noncontingency. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40(4):533–547, 1999.



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00431

Matrícula: 2203802913

ÁRBOLES SEMÁNTICOS PARA
ALGUNAS LÓGICAS
ALETICO-EPISTÉMICO-DOXÁSTICAS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 30 del mes de septiembre del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. YOLANDA MAGDA TORRES FALCON
DR. FAVIO EZEQUIEL MIRANDA PEREA
DR. JOSE JORGE MAX FERNANDEZ DE CASTRO TAPIA

EXAMEN



JUAN CARLOS SANCHEZ HERNANDEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN HUMANIDADES (FILOSOFIA)

DE: JUAN CARLOS SANCHEZ HERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

A PROBAR

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CSH

MTR. JOSE REGULO MORALES CALDERON

PRESIDENTA

DRA. YOLANDA MAGDA TORRES FALCON

VOCAL

DR. FAVIO EZEQUIEL MIRANDA PEREA

SECRETARIO

DR. JOSE JORGE MAX FERNANDEZ DE
CASTRO TAPIA