

070122

DONACION POR:

*U.EDU. ANDRES HERNANDEZ A.
SECRETARIO ACADENICO CBI*

*"DISEÑO DE UNA CELDA PARA MEDIR CONDUCTIVIDAD
TERMICA"*

TESIS QUE PRESENTA EL **U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA**

*FIS. JOEL SUAREZ CANCINO
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE:
MAESTRIA EN FISICA*

ABRIL 23 DE 1986.

*Agradezco a la Dra. Rosa Maria Velazco B., su valiosa
cooperación y paciencia sin las cuales no hubiese sido
posible realizar éste trabajo.*

*Agradezco también al Instituto Mexicano del Petróleo,
por las facilidades dadas para obtener la información
relacionada con el tema de éste trabajo.*

*A Hortencia y Abril que forman parte de la luz que
ilumina el sendero de mi vida ...*

A mis padres y hermanos ...

INDICE	PAGINA
NOTACION	1
INTRODUCCION	3
CAPITULO I.- Métodos para medir la conductividad térmica	5
SECCION I.1 Cilindros concéntricos	7
SECCION I.2 Alambre caliente estacionario	7
SECCION I.3 Alambre caliente no-estacionario	8
SECCION I.4 Placas paralelas	8
SECCION I.5 Comentarios (comparación, tabla y criterios que se usaron en la selección de un método)	9
CAPITULO II.- Modelo para el cálculo de la conductividad térmica en el método del alambre caliente no-estacionario	14
SECCION II.1 Solución ideal	23
SECCION II.2 Corrección causada por las propiedades físicas del alambre	30
SECCION II.3 Corrección por radiación	39
SECCION II.4 Corrección por tamaño finito del alambre	45
SECCION II.5 Otras correcciones	50
CAPITULO III.- Diseño de la celda de conductividad térmica	61
SECCION III.1 Características del alambre	62
SECCION III.2 Características de la celda	70
SECCION III.3 Baño térmico	78
CAPITULO IV.- Equipo periférico	81
SECCION IV.1 Circuito eléctrico (puente de Wheatstone)	82
CAPITULO V.- Tratamiento de datos	97

NOTACION.

La notación usada en éste trabajo involucra algunas cantidades importantes cuyos símbolos se muestran a continuación :

ρ_w, ρ_g densidad del alambre y fluido , respectivamente

C_{pw}, C_{pg} calor específico del alambre y fluido , respectivamente .

$\vec{Q}_{flux}$ vector flujo de calor por unidad de área .

$\underline{\underline{g}}$ tensor viscoso .

T temperatura

t tiempo o temperatura .

λ_w, λ conductividad térmica del alambre y del fluido , respectivamente.

κ_w, κ difusividad térmica del alambre y fluido , respectivamente .

x, y, z coordenadas cartesianas .

∇ operador nabla

∇^2 Laplaciano

$\frac{D}{Dt}$ derivada hidrodinámica = $\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla$

ϕ ángulo acimutal en coordenadas cilíndricas

$\dot{Q}$ magnitud de flujo de calor

$\dot{q}$ magnitud de flujo de calor por unidad de longitud

$\underline{e}_r, \underline{e}_\phi$ vectores unitarios en la dirección radial y acimutal de coordenadas cilíndricas , respectivamente .

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ vectores unitarios en las direcciones x , y , z de coordenadas cartesianas, respectivamente.

$\dot{Q}_{flux}$ magnitud del vector flujo de calor por unidad de área

L , l longitudes lineales

T_0 temperatura del baño térmico

r distancia radial en coordenadas cilíndricas

γ constante de Euler = 0.5772156649...

$\underline{g}$ vector de aceleración gravitacional

g magnitud del vector $\underline{g}$

$\underline{v}$ vector velocidad del fluido

$\underline{P}$ matriz de presiones

m pendiente de la relación lineal ΔT vs. $\ln t$

a radio del alambre

σ_0 constante de Stefan-Boltzmann

$\tilde{\Delta T}$ diferencia de temperaturas promedio

δ error relativo

R resistencia del circuito eléctrico

e energía específica

INTRODUCCION.—

Una de las propiedades de transporte que es muy difícil de obtener experimentalmente es la conductividad térmica de líquidos y gases.

De hecho, en la literatura^[26] se puede encontrar que para una misma sustancia, en las mismas condiciones de temperatura y presión, diferentes autores reportan distintos valores de la conductividad térmica.

Estos resultados han originado que algunas personas (por ejemplo, Kestin) dediquen un cierto esfuerzo para establecer algunos criterios que permitan ponderar, de un modo confiable, los resultados experimentales de un autor.

Uno de estos criterios involucra el conocimiento del funcionamiento del aparato usado^[27,28] incluyendo el modelo teórico del mismo.

Esto es así debido a que solo con este procedimiento es posible conocer, o tener una idea aproximada al menos, el error relativo con que se obtiene la conductividad térmica.

Esta preocupación es razonable ya que en la determinación de ciertas magnitudes útiles en el diseño de equipos relacionados con el trabajo de la industria química, al igual que en algunos trabajos teóricos en los que se requiere confirmar algunas relaciones obtenidas a partir de primeros principios, se hace necesario conocer de una manera que resulte lo más confiable posible los coeficientes de transporte tales como la viscosidad y la conductividad térmica de ciertos fluidos de interés.

Debido a estos motivos, el objetivo del presente trabajo consiste en presentar los detalles del aspecto teórico involucrado con el método experimental conocido como alambre caliente no-estacionario (ACNE) y, al mismo tiempo, diseñar una celda de conductividad que permita determinar de una manera experimental la conductividad térmica de gases con el menor error posible.

El método elegido para tal efecto (ACNE) ha demostrado ser uno de los más efectivos para desprestigiar algunos errores que en otros métodos es muy complicado hacerlo (por ejemplo, los efectos convectivos).

Para conseguir los objetivos mencionados, en el capítulo I se presenta una discusión de los criterios que se siguieron para seleccionar el método ACNE de entre todos los existentes. Esto permite que en el capítulo II se hable solamente del método ACNE para el cual se obtiene los términos de corrección usando la ecuación de balance de la energía. Teniendo ya a la mano los términos de corrección involucrados, se está en posición de discutir en el capítulo III las dimensiones y formas de la celda de conductividad térmica.

Finalmente, los capítulos IV y V se dedican a discutir el circuito eléctrico necesario y el tratamiento de datos experimentales, respectivamente.

CAPITULO I.-

El objetivo de este capítulo consiste en presentar algunos de los métodos experimentales usados para determinar la conductividad térmica y mencionar los criterios seguidos para seleccionar el ACNE.

La experiencia demuestra que algunas sustancias tienen una habilidad mayor que otras para conducir calor. Para cuantificar esta habilidad inherente a cada material se introduce el concepto de conductividad térmica. La conductividad térmica se define como el flujo de calor por unidad de tiempo entre dos caras opuestas de un cubo unitario del material de interés cuando estas caras tienen una diferencia de temperatura unitaria. La conductividad térmica se mide en joules por segundo por metro por grado Kelvin ($J s^{-1} m^{-1} ^\circ K^{-1}$).

Como se discutirá con detalle en el capítulo III, existe una relación entre la temperatura del fluido y la conductividad térmica del mismo.

Esta relación varía en diferentes situaciones físicas y geométricas y es este hecho lo que da origen a los diferentes métodos experimentales para calcular la conductividad térmica. A su vez, en estas situaciones la temperatura puede ser una función del tiempo o no serla.

Así, dentro del problema que interesa, existen dos tipos posibles de comportamiento de la temperatura dependiendo de si se toma el tiempo o no.

Como se verá, en algunos casos la distribución de temperatura en el fluido de estudio permanece constante, al transcurrir el tiempo, en un punto fijo del espacio; sin embargo, dicha temperatura cambia al evaluarla en un punto distinto.

Se dice entonces que la temperatura es solo función de la posición, y en tales casos se habla de un proceso estacionario.

Por otro lado, cuando se encuentra que en un punto fijo del espacio la temperatura cambia al transcurrir el tiempo, además de cambiar con la

posición, se dice entonces que la temperatura es función del tiempo y de la posición y en tales casos se habla de un proceso no-estacionario.

Estas dos consideraciones llevan a dos ecuaciones diferenciales muy importantes, y en las cuales se basa todo el procedimiento de los diferentes métodos usados para determinar la conductividad térmica.

Como se mencionará más abajo, ambas ecuaciones se obtienen a partir de la ecuación de balance de la energía tomando en cuenta algunas suposiciones relacionadas con las propiedades termodinámicas y termofísicas del sistema a estudiar.

La primera ecuación está relacionada con los procesos no-estacionarios y viene dada por la expresión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad [I.1]$$

donde κ es la difusividad térmica del fluido o material.

Esta ecuación se conoce también con el nombre de ecuación de difusión.

La segunda ecuación está relacionada con los procesos estacionarios y viene dada por la expresión

$$\nabla^2 T = 0 \quad [I.2]$$

que es la conocida ecuación de Laplace.

Debe observarse que la ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de difusión en la cual la temperatura no depende del tiempo.

Los métodos usados para determinar la conductividad térmica en forma experimental hacen uso de las dos ecuaciones anteriores para encontrar la distribución de la temperatura.

Normalmente se buscan arreglos geométricos simples, que permitan resolver un problema físico que no se aleje mucho de la realidad (tomando en cuenta las condiciones de frontera e iniciales adecuadas).

Algunos de los métodos experimentales más conocidos, junto con sus comentarios sobre el principio de funcionamiento, se mencionan a continuación.

I.1 Método de cilindros concéntricos (CC).

El arreglo geométrico consiste de dos cilindros concéntricos de radios a y b ($a < b$).

Tal arreglo geométrico deja una abertura anular dentro de la cual se introduce el fluido de interés.

Dentro del cilindro interior se produce un flujo de calor que es constante ya que todo el proceso experimental es estacionario, por lo cual la distribución de temperatura del problema se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace.

A partir de la solución se puede obtener una relación entre las características geométricas del aparato, la diferencia de temperatura entre la pared exterior del cilindro interior y la pared interior del cilindro exterior, el flujo de calor y la conductividad térmica del fluido.

Si bien el método de cilindros concéntricos ha demostrado ser sumamente confiable para determinar conductividades térmicas; las principales desventajas o problemas de este método consisten en la presencia de movimientos convectivos que normalmente requieren de un análisis cuidadoso para poder ser despreciados; otro posible problema resulta cuando están presentes los flujos axiales (esto es un problema puesto que en la solución de la ecuación de Laplace se considera que sólo existen flujos radiales).

I.2 Método de alambre caliente estacionario (ACE).

Este método experimental es similar, en el arreglo geométrico, al anterior;

con las únicas diferencias de que el cilindro interior es un alambre de radio a mucho menor que b ; y que, además de calentarse, este alambre sirve al mismo tiempo como termómetro de resistencia.

Todo el proceso experimental es estacionario.

Los mismos problemas encontrados con el método CC se encuentran en este método.

I.3 Método del alambre caliente no-estacionario (ACNE).

El arreglo geométrico de este método es completamente similar al anterior e inclusive el alambre también se utiliza para calentar y determinar la temperatura del fluido que rodea al mismo.

Al contrario de los dos casos anteriores, el proceso experimental es no-estacionario, por lo cual la distribución de temperatura en el tiempo y el espacio se obtiene a partir de la ecuación de difusión.

Aún cuando una de las principales desventajas del método ACNE consiste en determinar en forma precisa el diámetro del alambre, el gran atractivo de este método es su simplicidad, tiempos de corrida (que normalmente son de uno a dos segundos) y la determinación fácil y precisa de las cantidades involucradas (exceptuando el alambre que para medir su diámetro se requieren técnicas tales como la microscopía electrónica).

I.4 Método de placas paralelas.

El arreglo geométrico consiste de dos placas paralelas colocadas en forma horizontal (perpendiculares a g) y separadas una cierta distancia formando un espacio dentro del cual se coloca el fluido de interés.

Estableciendo una diferencia de temperatura entre las placas, se produce un flujo de calor que es constante ya que todo el proceso experimental es estacionario, por lo cual la distribución de temperatura se obtiene a partir de la ecuación de Laplace.

Otra vez, a partir de esta solución se puede obtener una relación entre

las características geométricas del modelo, la diferencia de temperatura entre ambas placas, el flujo de calor y la conductividad térmica del fluido.

Sin embargo, se ha encontrado que^[20] en el método de placas paralelas sus principales dificultades radican en que no se puede eliminar en una forma sencilla (y a veces sin éxito) las famosas perturbaciones convectivas en ciertas regiones de la placa que se utiliza para calentar el fluido (normalmente se toma la placa superior con el fin de compensar los efectos debidos a la fuerza de sustentación); sin mencionar lo difícil que resulta obtener condiciones isotérmicas sobre las placas. Por otro lado, si se desea obtener una exactitud similar a la de los otros métodos se necesita disponer de un arreglo experimental muy complejo.

I.5 Comentarios.

A continuación se presenta una tabla comparativa entre dos de los métodos experimentales más usados; a saber, ACNE y CC (recuérdese que ACNE es de hecho un modelo de CC), siendo éste último método el que compite más fuertemente con el primero en términos de precisión y exactitud.

Tal comparación se hace para dar una idea de lo poderoso que resulta el método ACNE con otro método ya conocido; a saber, el CC.

En esta tabla las letras A y R en seguida de las siglas ACNE y CC significan mediciones absolutas y relativas.

Una medición absoluta significa que la conductividad térmica se obtiene tomando sólo en cuenta las propiedades físicas del fluido de interés y las propiedades geométricas del aparato usado. Por otro lado, en una medición relativa, se utiliza un fluido de referencia al cual se le conoce la conductividad térmica la cual se puede relacionar de alguna manera con la conductividad térmica del fluido de interés.

Un método relativo se usa frecuentemente para evitar medir cantidades

año	referencia	método	sustancias	intervalo de temperatura	intervalo de presión	exactitud mencionada
1946	[1]	ACNEA	O_2, N_2, CO, NO, H_2 He, N_2O, CO_2, CH_4	$(80, 380) ^\circ K$	100 mmHg	0.5%
1951	[2]	CCR	N_2, CH_4, Ar, H_2, He CO_2	$(100, 150) ^\circ F$	1 a 200 atm	2.25%
1953	[3]	CCR	N_2, CH_4, Ar, C_2H_6 (gases)	$(127, 153) ^\circ F$	1 a 200 atm	2.25%
1960	[4]	CCA	CH_4, C_3H_8, C_5H_{12} C_4H_{10} (gases)	$(50, 150) ^\circ C$	1 atm	no reporta
1963	[5]	CCA	Ar, Kr, Xe, CH_4 (líquidos)	$(90, 253) ^\circ K$	1 a 500 atm	0.5%
1970	[6]	ACNEA	$CH_4, C_6H_5CH_3$ (fluidos densos)	$(200, 300) ^\circ K$	1 a 600 bar	0.5%
1972	[7]	CCA	Ar, He, H_2, CH_4, CO C_2H_6 (gases)	$(25, 700) ^\circ C$	1 a 1000 bar	2.5%
1972	[8]	ACNER	$C_5H_{12}, C_6H_{14}, C_7H_{16}$ C_8H_{18}, C_6H_6, CCl_4 etc. (líquidos)	$(20, 120) ^\circ C$	7.5 atm	1.3%
1973	[9]	ACNEA	He, Ne, Ar, Kr, N_2 CO_2 (gases)	$(55, 195) ^\circ C$	1 atm	0.3%

continúa en la página siguiente...

año	referencia	método	sustancias	intervalo de temperatura °C	intervalo de presión atm	exactitud %
1974	[10]	CCA	H ₂ O (líquido)	(0, 30)	1 a 400 bar	1. %
1974	[16]	ACNEA	Ar, Ne, Kr, He (gases)	(200, 300)	1 a 400 atm	0.2%
1979	[11]	CCA	CH ₄ , N ₂ , CO ₂ (gases)	(220, 250)	1 a 100 atm	no reporta
1979	[12]	ACNEA	N ₂ , CH ₄ , CO ₂	(20, 30)	1 a 35 MPa	no reporta
1980	[13]	ACNEA	C ₆ H ₅ CH ₃ , CCl ₄ (líquidos)	(290, 323)	1 atm	menos de 2. %
1981	[14]	ACNEA	C ₆ H ₅ CH ₃ , C ₇ H ₁₆ (líquidos)	(0, 90)	1 atm	0.5%
1982	[15]	ACNEA	C ₈ H ₁₈ , C ₉ H ₂₀ (líquidos)	(10, 100)	saturación	0.1%
1983	[17]	ACNEA	tolueno (líquido)	(35, 90)	0.8 a 600 MPa	0.3%
1983	[18]	ACNEA	N-octano N-undecano N-tetradecano	(280, 375)	saturación	1.5%

geométricas que necesitan de mucha precisión.

En la tabla puede apreciarse como se ha ido dando preferencia al método del ACNE debido principalmente al desarrollo electrónico logrado en años recientes, lo cual permite medir con mayor exactitud las cantidades involucradas tales como diferencias de potencial, corrientes, resistencias, etc., a intervalos de tiempo del orden de tres milisegundos.

En lo que respecta al tipo de sustancias que se han involucrado en las mediciones se puede observar, teniendo en mente que la presente tabla representa sólo una parte de lo hecho en los últimos años, que el espectro correspondiente al método ACNE es bastante amplio y comprende tanto las regiones líquida y gaseosa (incluyendo en éste último caso gases diluidos y gases densos) así como la región de saturación.

Por otro lado, en la columna de intervalo de temperatura, si bien se muestra el intervalo en el que se obtuvieron los datos experimentales, el diseño de la celda en el método ACNE fué hecho de tal forma que comprendiera un intervalo mayor, llegando incluso en algunos casos hasta $800^{\circ}\text{C}^{[30]}$.

Los intervalos de presión en los que se ha aplicado el método ACNE, según se muestran en la tabla, permiten confiar en que dicho método no tiene limitaciones en éste sentido, exceptuando aquellas que resultan de un modo natural (tales como la resistencia de materiales) al hacer las consideraciones de diseño de la celda.

Finalmente, aunque realmente la exactitud que se desea obtener en la conductividad térmica depende en gran medida de la precisión con que se determinan las diferentes cantidades involucradas en la teoría del experimento; se puede observar que la exactitud es lo suficientemente buena como para asegurar que el método ACNE es confiable en este sentido.

Además de lo anterior, en el proceso de selección se buscaron principalmente las siguientes características:

1. Alta precisión.

Por esta característica debe entenderse un método experimental que proporcione resultados con un error relativo en la conductividad térmica de aproximadamente 1.0 %, de manera que los datos así obtenidos puedan satisfacer los criterios de confiabilidad de datos experimentales que se utilizan en la literatura^[26,27,28].

2. Versatilidad del método.

Cantidad de fluidos a los que sea aplicable el método e intervalos de temperatura y presión.

Con este criterio se buscó, además de generalizar lo más posible el método, definir los intervalos de temperatura y/o presión tratando de que éstos fueran lo suficientemente amplios.

3. Rapidez en la obtención de datos.

Por esta característica debe entenderse que se buscó un método que permitiera obtener la mayor cantidad de datos en el menor tiempo.

Resumiendo, todos los métodos estacionarios requieren de una experimentación cuidadosa con el objeto de minimizar las correcciones asociadas con las pérdidas de calor y para ubicar límites experimentales que detecten la presencia de movimiento convectivo.

Además, obtener el estado estacionario en uno de éstos aparatos, que normalmente son de masa considerable, es un proceso lento que puede ocasionar que se invierta bastante tiempo para obtener un punto experimental.

CAPITULO II.-

El objetivo de este capítulo es el presentar la ecuación de balance de la energía para que posteriormente, a partir de ella, se obtenga la solución ideal del modelo teórico del ACNE y los términos de corrección a ésta solución.

Sea S una superficie que encierra a un volumen V de fluido, para la que se establece la hipótesis de conservación

$$\frac{d \mathcal{E}}{d t} = - \int_S d \underline{A} \cdot \underline{J}_e \quad [II.1]$$

en donde $\mathcal{E}$ es la energía total y $\underline{J}_e$ el flujo de energía total a través de la superficie cerrada S y dA un elemento diferencial de área de S .

Si se introduce la energía específica e (energía por unidad de masa), la ecuación (II.1) en términos de ella es

$$\frac{d}{d t} \int_V d^3 \underline{r} \rho e = - \int_S d \underline{A} \cdot \underline{J}_e \quad [II.2]$$

siendo $d^3 \underline{r}$ un elemento diferencial de volumen de V .

Aplicando el teorema de Gauss al lado derecho de (II.2) y derivando el primer miembro (considerando volumen fijo) se obtiene

$$\int_V d^3 \underline{r} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) = - \int_S d^3 \underline{r} \nabla \cdot \underline{J}_e \quad [II.3]$$

por lo que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot \underline{I}_e = 0 \quad [II.4]$$

Desarrollando (II.4) y usando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad [II.5]$$

se encuentra la relación

$$\rho \frac{D e}{D t} + \nabla \cdot (\underline{I}_e - \rho \underline{v} e) = 0 \quad [II.6]$$

en donde $\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla$ es la derivada hidrodinámica.

Usando el teorema de Reynolds* se puede demostrar que se satisface la misma ecuación para un volumen móvil donde ρ e $\underline{v}$ es la parte de flujo de energía que lleva el fluido y se denomina flujo por convección.

Tomando

$$\underline{I}_q = \underline{I}_e - \rho \underline{v} e$$

entonces la ecuación [II.6] se transforma a

$$\rho \frac{D e}{D t} + \nabla \cdot \underline{I}_q = 0 \quad [II.7]$$

que es la ecuación de balance de la energía total.

* Para cualquier densidad ρ el teorema de Reynolds dice que

$$\frac{d}{d t} \int d^3 \underline{x} \rho f = \int d^3 \underline{x} \rho \frac{D f}{D t}$$

Por otro lado, si se supone que el volumen V está compuesto por partículas discretas, la segunda ley de Newton dice que

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\underline{r}}_i) = \underline{F}_i ; i \in V \quad [\text{II.8}]$$

y sumando sobre todo V

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i ; i \in V \quad [\text{II.9}]$$

Por definición, la velocidad del centro de masa del volumen ΔV es dada por la relación

$$\underline{v} = \frac{\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i}{\sum_i m_i} ; i \in \Delta V \quad [\text{II.10}]$$

y la densidad ρ es

$$\rho = \frac{\sum_i m_i}{\Delta V} ; i \in \Delta V \quad [\text{II.11}]$$

y así

$$\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i = \rho \Delta V \underline{v} ; i \in \Delta V \quad [\text{II.12}]$$

$$\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i = \underline{v} \sum_i m_i = \rho \underline{v} \Delta V ; i \in \Delta V \quad [\text{II.13}]$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, al sumar [II.12] sobre todo V se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i &= \int \sum_j m_j \dot{\underline{r}}_j \\ &= \int_V d^3 \underline{r} \rho \underline{v} ; i \in V \text{ y } j \in \Delta V \end{aligned} \quad [\text{II.14}]$$

La ecuación [II.14] dice que $\underline{v}$ representa la cantidad de momento lineal por unidad de volumen y por lo tanto :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho \underline{v} &= \sum_i \underline{F}_i \\ &= \int_S dA \underline{T} + \int_V d^3x \rho \underline{F} \quad ; i \in V \end{aligned} \quad [II.15]$$

ecuación en la que se puede demostrar que^[29] $\underline{T} = -\underline{n} \cdot (\underline{R} + \rho \underline{v} \underline{v})$ con $\underline{n}$ vector normal a la superficie y $\underline{R}$ la matriz de presiones.

Usando el teorema de Gauss y el de continuidad se obtiene

$$\rho \frac{D \underline{v}}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{R} + \rho \underline{F} \quad [II.16]$$

La ecuación [II.16] permite calcular la ecuación de balance de la energía cinética de la manera siguiente :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 \right) &= \rho \underline{v} \cdot \frac{D \underline{v}}{Dt} \\ &= \underline{v} \cdot (-\nabla \cdot \underline{R} + \rho \underline{F}) \\ &= -(\nabla \cdot \underline{R}) \cdot \underline{v} + \rho \underline{v} \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad [II.17]$$

y como

$$\nabla \cdot (\underline{R} \cdot \underline{v}) = (\nabla \cdot \underline{R}) \cdot \underline{v} + \underline{R}^t : \nabla \underline{v}$$

con $\underline{R}^t$ la matriz transpuesta de $\underline{R}$, entonces

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 \right) = -\nabla \cdot (\underline{R} \cdot \underline{v}) + \underline{R}^t : \nabla \underline{v} + \rho \underline{v} \cdot \underline{F} \quad [II.18]$$

expresión que da la ecuación de balance de la energía cinética.

Finalmente, si se suponen fuerzas conservativas, existe una función potencial Ψ tal que

$$\underline{F} = -\nabla \Psi \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad [\text{II.19}]$$

en donde $\underline{F}$ es la fuerza por unidad de masa.

Entonces

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\Psi}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \Psi \right) \\ &= \rho \underline{v} \cdot \nabla \Psi \\ &= -\rho \underline{v} \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad [\text{II.20}]$$

y así

$$\rho \frac{D\Psi}{Dt} = -\rho \underline{v} \cdot \underline{F} \quad [\text{II.21}]$$

da la ecuación de balance para la energía potencial.

Todo lo anteriormente expuesto permite calcular la ecuación de balance de la energía interna u sabiendo que la energía total e es

$$e = u + \frac{1}{2} \underline{v}^2 + \Psi \quad [\text{II.22}]$$

Así

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho \frac{De}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \underline{v}^2 \right) - \rho \frac{D\Psi}{Dt} \\ &= -\nabla \cdot (\underline{z}_q - \underline{R} \cdot \underline{v}) - \underline{R}^t : \nabla \underline{v} \end{aligned} \quad [\text{II.23}]$$

En la ecuación [II.23] si se define el flujo de calor $\dot{\underline{Q}}_{flux}$ como *

$$\dot{\underline{Q}}_{flux} = \underline{z}_q - \underline{R} \cdot \underline{v} \quad [\text{II.24}]$$

* De esta forma el flujo de energía total es

$$\dot{\underline{z}}_e = \dot{\underline{Q}}_{flux} + \rho \underline{v} e + \underline{R} \cdot \underline{v}$$

entonces

$$\rho \frac{D u}{D t} = - \nabla \cdot \dot{Q}_{flux} - R^t : \nabla \underline{v} \quad [II.25]$$

ésta es la ecuación de balance de la energía interna.

Para la aplicación que interesa en este trabajo, es conveniente tener la ecuación [II.25] en términos de la temperatura del fluido y de la capacidad calorífica del mismo.

Si se toma

$$R^t = p \mathcal{I} + \mathcal{Q} \quad [II.26]$$

en donde p es la presión hidrostática, $\mathcal{I}$ es el tensor unitario y $\mathcal{Q}$ el tensor viscoso, entonces la ecuación [II.25] se transforma a

$$\rho \frac{D u}{D t} = - \nabla \cdot \dot{Q}_{flux} - p \nabla \cdot \underline{v} - \mathcal{Q} : \nabla \underline{v} \quad [II.27]$$

$$\text{Si } u = u \left(\frac{1}{\rho}, T \right)$$

entonces

$$d u = \left(-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho} \right) d \left(\frac{1}{\rho} \right) + C_v d T \quad [II.28]$$

en donde C_v es la capacidad calorífica específica a volumen constante,

De [II.28] se encuentra que :

$$\frac{D u}{D t} = \left\{ -p + T \left\{ \frac{\partial p}{\partial T} \right\}_{\rho} \right\} \frac{D}{D t} \left\{ \frac{1}{\rho} \right\} + C_v \frac{D T}{D t} \quad [II.29]$$

pero debido a la ecuación de continuidad :

$$\rho \frac{D}{D t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \nabla \cdot \underline{v}$$

por lo que sustituyendo en [II.27] :

$$T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\underline{v}} \nabla \cdot \underline{v} + \rho C_v \frac{D T}{D t} = - \nabla \cdot \dot{\underline{Q}}_{flux} - \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \quad [II.30]$$

Si $\rho \neq \rho(T)$ entonces $C_v = C_p$ y

$$\rho C_p \frac{D T}{D t} = - \nabla \cdot \dot{\underline{Q}}_{flux} - \underline{\sigma} : \nabla \underline{v} \quad [II.31]$$

La ecuación de balance de la energía viene dada por la expresión [II.31] en la que se ha supuesto que la presión no depende de la temperatura.

La ecuación [II.31] se puede simplificar aún más si se supone que no existe disipación viscosa y que la conductividad térmica no depende de la temperatura.

Suponiendo esto y usando la ley de Fourier

$$\dot{\underline{Q}}_{flux} = - \lambda \nabla T \quad [II.32]$$

se encuentra la relación

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{D T}{D t} &= \nabla \cdot \lambda \nabla T \\ &= \lambda \nabla^2 T \end{aligned} \quad [II.33]$$

que en términos de la difusividad térmica del fluido es

$$\frac{D T}{D t} = \kappa \nabla^2 T \quad [II.34]$$

Por último, si se supone que no existen corrientes convectivas; es decir, que la velocidad del fluido es cero, se encuentra la ya conocida ecuación de difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad [II.35]$$

En resumen, las suposiciones involucradas (que , como se mencionara más

adelante, introducen varios términos de corrección a la solución ideal) que permiten obtener la ecuación de difusión son:

- i) Presión independiente de la temperatura
- ii) No existe disipación viscosa
- iii) Coeficiente de conductividad térmica independiente de la temperatura
- iv) No existen corrientes convectivas
- v) No existe transferencia de calor por radiación
- vi) No existen fuentes de calor internas.

El hacer estas suposiciones evita resolver un problema mucho más complejo que involucra la solución de las ecuaciones de conservación de masa momento y energía.

Es de suponer que a pesar de que se tomen todas las precauciones o de que se diseñe un aparato muy sofisticado, nunca será posible eliminar de un modo completo corrientes convectivas y la transferencia de calor por radiación que resultan ser los dos tipos de fenómenos asociados a cualquier dispositivo experimental.

Ambos fenómenos afectan la transferencia de energía a través del fluido.

De hecho, la transferencia de calor por radiación depende de las propiedades moleculares del fluido el cual puede ser completamente opaco y no transmitir ninguna radiación (es decir el fluido absorbe totalmente la energía en forma de radiación), completamente transparente a la radiación de cualquier longitud de onda (es decir la radiación atraviesa el fluido como si este no existiera) y absorbedor-emisor de radiación en ciertas bandas de onda.

La última situación se presenta normalmente en gases polares densos y en todos los líquidos orgánicos, investigaciones recientes en las que se ha utilizado el método ACNE^[17,21] han demostrado que en sustancias de este tipo el error en la conductividad térmica aumenta hasta 2.5% si no se toma en cuenta esta corrección.

Por otro lado, el intercambio de calor convectivo es un fenómeno hidrodinámico provocado por el movimiento de bulto de porciones del fluido debido a excesivos gradientes de temperatura o densidad.

Afortunadamente, se pueden predecir en forma confiable, en base a un análisis cuidadoso del problema de convección que involucra las ecuaciones de conservación, las condiciones de operación límites arriba de las cuales ocurren los efectos por convección^[16,20].

Estas condiciones de operación limitan las magnitudes o dimensiones del dispositivo experimental.

II.1 Solución ideal.

Regresando a la ecuación de difusión; se desea encontrar el campo de temperatura, como una función del tiempo y el espacio, producido por una fuente lineal (ubicada en un medio infinito) que pasa por el punto $(0,0,0)$ de un sistema de coordenadas y se extiende hasta $\pm\infty$ a lo largo del eje z .

Es claro que el sistema de coordenadas ideal para solucionar éste problema es el de coordenadas cilíndricas, el cual se muestra en la siguiente figura:

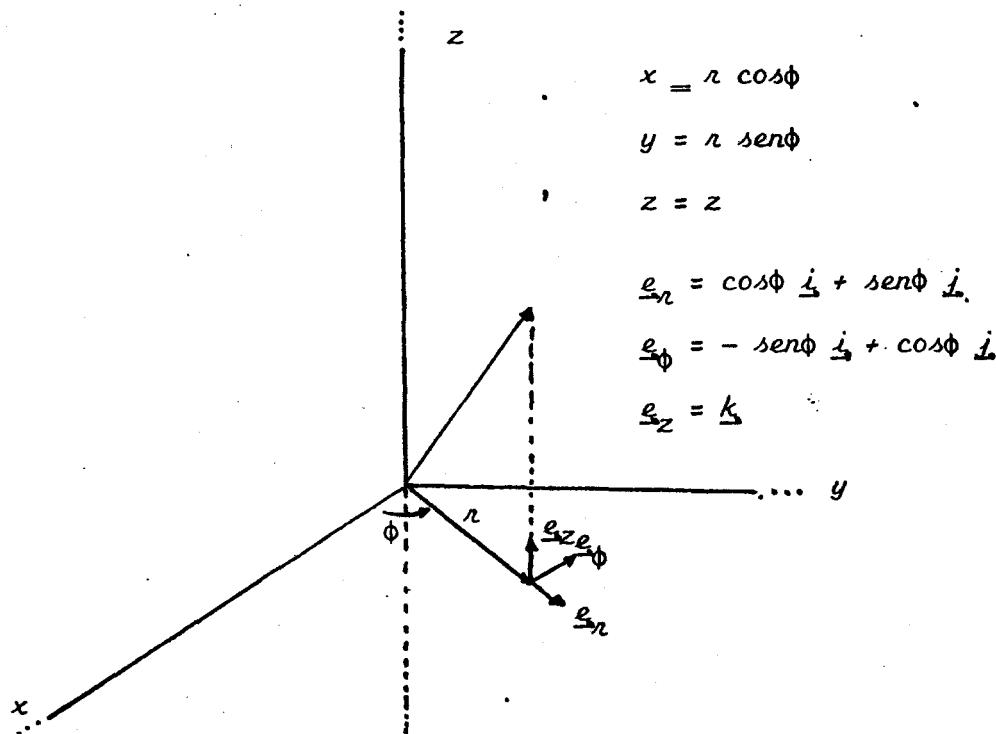


figura 1

coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

Es conveniente escribir ahora la ecuación de difusión en éstas coordenadas sin suponer nada más por el momento:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad [II.36]$$

Además de las suposiciones mencionadas anteriormente y que sirvieron para obtener la ecuación de difusión, se introducen ahora otras suposiciones con el objeto de poder resolver en una forma sencilla (pero sin perder la realidad física) ésta ecuación.

Estas suposiciones son:

- i) Se cuenta con una fuente de calor lineal e infinita.
- ii) El flujo de calor por conducción es solo en la dirección radial, es decir, la temperatura T es solo función del radio y del tiempo (existe simetría axial y acimutal).
- iii) El alambre se encuentra rodeado por un medio infinito e incompresible ($\nabla \cdot \underline{v} = 0$ según la ecuación de continuidad).
- iv) Las propiedades físicas del medio ρ, λ, C_p son constantes, es decir, no dependen de la temperatura y por consiguiente también la difusividad térmica κ .
- v) Se desprecian los efectos terminales con el fin de no tomar en cuenta el calor por conducción axial.
- vi) Se desprecia el diámetro del alambre, es decir, el diámetro del alambre se supone igual a cero.

Aún cuando pueda parecer que éstas suposiciones hacen que la solución ha obtener se aleje mucho del caso real, se observará más abajo que es posible introducir términos a ésta solución en los cuales van incluidas las correcciones que surgen al suponer todo lo anterior.

Al tomar en cuenta éstas últimas simplificaciones, la ecuación de difusión se escribe ahora como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

[II.37]

en la cual $T = T(r, t)$.

Para resolver esta ecuación se necesitan una condición inicial y dos condiciones de frontera sobre la temperatura.

La condición inicial se encuentra sabiendo que al tiempo inicial el sistema se encuentra en equilibrio térmico a la temperatura $T(r, 0)$ que como se verá posteriormente corresponde a la temperatura del baño en la situación física real.

Esta condición inicial se expresa de la siguiente manera^[22,16,30]:

$$t \leq 0, r \geq 0; \Delta T = T(r, t) - T(r, 0) = 0 \quad [\text{II.38}]$$

La primera condición de frontera se obtiene a partir de la suposición de que la línea se encuentra en un medio infinito.

Es natural suponer que para distancias lo suficientemente lejos de la línea y para todo tiempo t la temperatura en estos puntos es la misma que la temperatura inicial $T(r, 0)$.

Esta condición de frontera se expresa de la siguiente forma^[22,16,30]:

$$r \rightarrow \infty, t \geq 0; \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta T(r, t) = 0 \quad [\text{II.39}]$$

y finalmente la segunda condición de frontera se obtiene de la suposición de que la transferencia de calor por conducción es puramente radial (véase apéndice I)^[22,16,30]:

$$r = 0, t \geq 0; 2\pi\lambda \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\dot{q} \quad [\text{II.40}]$$

Utilizando transformadas de Laplace se encuentra que la solución de la ecuación de difusión con estas condiciones es (véase apéndice II)^[31]:

$$\Delta T_{\text{ideal}}(r, t) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{II.41}]$$

Esta relación se conoce como la solución ideal del problema considerado debido a todas las simplificaciones que se han introducido para obtenerla. La integral se conoce como integral exponencial para la que existe un desarrollo en serie en términos de la expresión $\frac{n^2}{4\kappa t}$ [32] que al utilizarlo permite escribir la solución ideal tal como se muestra a continuación:

$$\Delta T_{ideal}(n,t) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(-\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!} \right) \quad [II.42]$$

en donde $x = \frac{n^2}{4\kappa t}$ y γ es la constante de Euler.

En el desarrollo en serie de la solución ideal pueden despreciarse todos los términos que aparecen en la sumatoria puesto que un análisis hecho sobre algunos trabajos muestra que la cantidad x tiene una magnitud promedio del orden de 10^{-4} . A continuación se presentan algunos resultados relacionados con este hecho:

x	referencias
1×10^{-5}	[16,22]
3×10^{-4}	[17]
2×10^{-4}	[21]
2×10^{-5}	[25]
9×10^{-4}	[19,13]
1×10^{-5}	[30]

En estos resultados están incluidas tanto mediciones sobre líquidos como sobre gases. Esto permite tomar solamente los dos primeros términos en la solución ideal para que ésta quede reducida a la expresión

$$\Delta T_{ideal} \approx \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \ln \left(\frac{4\kappa t}{n^2 c} \right) \quad \text{si } x = \frac{n^2}{4\kappa t} \ll 1 \quad [II.43]$$

y en donde $c = e^{\gamma}$.

En esta última ecuación debe tomarse en cuenta el error introducido al truncar la serie, la estimación de este error se puede obtener tomando el valor absoluto del primer término despreciado que en este caso es $\frac{r^2}{4kt}^* [22]$. Es un hecho entonces que en el diseño de la celda debe tenerse presente el mantener la cantidad x lo más pequeña posible para poder disminuir este error.

Para tener una idea del comportamiento cualitativo de la solución ideal, en la figura 2 se presenta la gráfica de la misma en la cual el eje de las ordenadas es la cantidad adimensional $\frac{4\pi\lambda}{q} \Delta T$ y el de las abscisas la cantidad también adimensional x .

La solución ideal se ha graficado solo en el intervalo que cumple la condición anteriormente impuesta; a saber, $x \ll 1$.

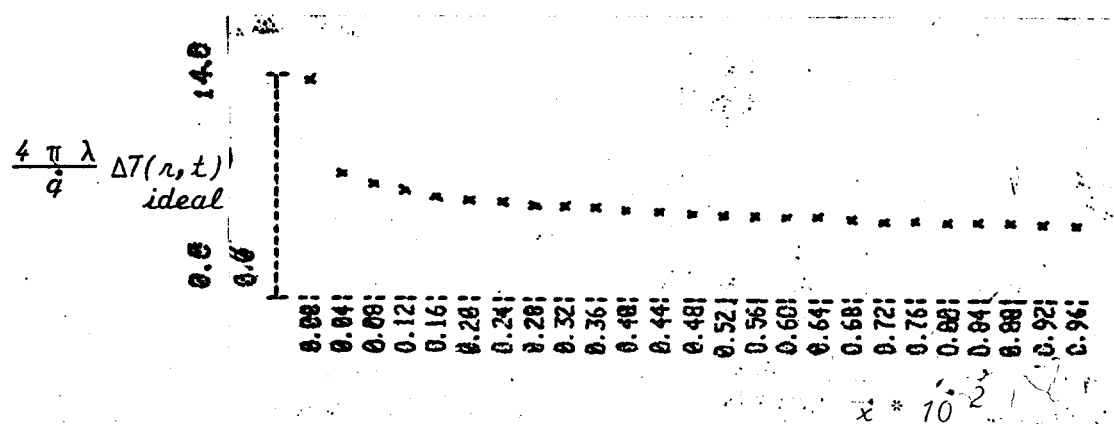


figura 2

Gráfica de la función $\frac{4\pi\lambda}{q} \Delta T$ ideal contra x
que indica el comportamiento cualitativo.

* Se puede demostrar que esto es cierto para cualquier serie alternante convergente, lo cual sucede en este caso.

A una distancia r igual al radio en el que se encuentra la superficie imaginaria del alambre, el cual se denotará por a , la variación temporal de la diferencia de temperaturas es :

$$N(a, t)_{ideal} = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \ln\left(\frac{4\kappa t}{a^2 c}\right) \quad [II.44]$$

En la figura 3 se muestra el comportamiento cualitativo de la variable adimensional $\left(\frac{4\pi\lambda}{\dot{q}}\right) \Delta T(a, t)_{ideal}$ con respecto al inverso de la variable adimensional

$$x_0 = \frac{a^2}{4\kappa t}$$

De nueva cuenta solo se ha tomado el intervalo de interés de la variable $x_0 \ll 1$.

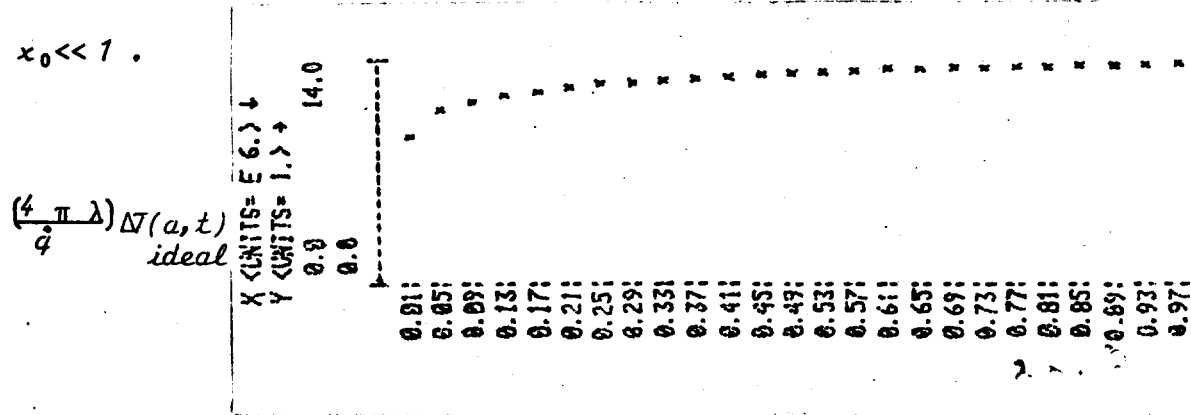


Figura 3.
Comportamiento cualitativo de la función $\left(\frac{4\pi\lambda}{\dot{q}}\right) \Delta T(a, t)_{ideal}$

$$\text{en la que } x_0 = \left(\frac{a^2}{4\kappa t}\right)$$

Debe hacerse notar que en la situación real lo que interesa es solo la historia de la temperatura del alambre sobre la superficie del mismo, de ahí que sea importante el haber obtenido la última expresión.

Un resultado importante relacionado con esta expresión reside en el hecho de que existe una relación lineal entre la diferencia de temperaturas y el logaritmo natural del tiempo.

Suponiendo entonces una situación ideal, el procedimiento para calcular la conductividad térmica consistiría en determinar para cada tiempo t la diferencia de temperaturas $\Delta T(a, t)$.

Este conjunto de valores se ajustan a una relación lineal de la forma ^{ideal}

$$\Delta T = A + m \ln t \quad [\text{II.45}]$$

de la cual puede obtenerse el valor de la pendiente m que está relacionada con la conductividad térmica por medio de la expresión

$$m = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \quad [\text{II.46}]$$

así la conductividad térmica será

$$\lambda = \frac{\dot{q}}{4\pi m} \quad [\text{II.47}]$$

Como se mencionó antes, la temperatura inicial T_0 se toma como la temperatura del baño en que se encuentra sumergido el fluido de interés. Por otro lado, la temperatura de la superficie del alambre se tiene que medir en forma indirecta ya sea usando un procedimiento de calibración u otro similar.

Desafortunadamente, es obvio que las condiciones reales del experimento difieren en la mayoría de las suposiciones que se hicieron para obtener la solución ideal. Esto plantea la situación de considerar el problema con otro punto de vista más real de tal manera que involucre algunos cambios en las condiciones de frontera solamente (dejando inalterada la condición inicial). En otros términos, en una situación física real existen diferentes errores sistemáticos que desvían el sistema de su comportamiento ideal.

Afortunadamente, es posible obtener una expresión analítica para la mayor parte de estos errores lo que permitirá que el procedimiento experimental expuesto anteriormente se pueda seguir.

II.2. Corrección causada por las propiedades físicas del alambre.

Uno de los términos de corrección resulta al modificar la segunda condición de frontera de la solución ideal.

Obsérvese que en la condición [II.40] se está suponiendo que la capacidad calorífica del alambre, la cual se denotaría por C_{pw} , es cero.

Esto supone que todo el calor producido por la fuente lineal se conduce directamente al fluido de interés. Sin embargo, es claro que la capacidad calorífica del alambre es distinta de cero lo que ocasiona que la ecuación de balance de calor que se debe satisfacer debe ser de la forma:

Producción de calor en el alambre = calor absorbido en el volumen del alambre + calor absorbido en el volumen comprendido desde $r = a$ hasta $r = +\infty$.

En donde se ha supuesto también que el radio del alambre tiene un valor a distinto de cero.

Se puede demostrar entonces^[22] (véase apéndice III) que la ecuación de balance anterior se transforma en la nueva segunda condición de frontera:

$$\dot{q} - \pi a^2 \rho_w C_{pw} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{r=a} = -2 \pi a \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad ; \quad t \geq 0 \quad [\text{II.48}]$$

El problema consiste ahora en resolver la ecuación de difusión sin modificar la condición inicial y la primera condición de frontera, pero usando ahora la segunda condición de frontera modificada.

Se encuentra que la distribución de temperatura, como una función del tiempo y del espacio, viene dada por la expresión (véase apéndice IV):

$$\Delta T(r, t) \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) \quad [\text{II.49}]$$

en donde se ha supuesto que $x \ll 1$.

Finalmente la historia de la temperatura sobre la superficie del alambre es:

$$\Delta T(a, t) \approx \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2\lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4\kappa t}{a^2 c} \right) \quad [\text{II.50}]$$

que, en términos de las variables adimensionales ya conocidas, se transforma en la siguiente ecuación:

$$\frac{4\pi\lambda}{\dot{q}} \Delta T(a, t) \approx \left(1 - 2 \left(\frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}} - 1 \right) \left(\frac{a^2}{4\kappa t} \right) \right) \ln \left(\frac{4\kappa t}{a^2 c} \right) \quad [\text{II.51}]$$

El cociente $\frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}}$ presenta sus valores más altos a densidades bajas; cálculos hechos usando datos de la literatura^[19,22,30], muestran que estos valores son del orden de 10^3 .

Para líquidos, este cociente^[21,13,17] toma valores que oscilan normalmente entre dos y cinco.

Como la variable x_0 es del orden de 10^{-4} se puede observar claramente que el término entre corchetes será siempre mayor que cero y menor o igual que uno.

En la figura 4 se muestra el comportamiento cualitativo de dicha función y se compara con el comportamiento de la solución ideal.

De esta figura puede observarse que la distancia de separación entre ambas funciones da la corrección debida a la capacidad calorífica finita del alambre. Basta entonces restar de la solución ideal la solución anteriormente encontrada. Al hacer esto se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta T(a, t)_{\text{ideal}} - \Delta T(a, t) &= \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \ln \left(\frac{4\kappa t}{a^2 c} \right) - \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2\lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4\kappa t}{a^2 c} \right) \right) \\ &= \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2\lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4\kappa t}{a^2 c} \right) \quad [\text{II.52}] \end{aligned}$$

Resumiendo, a la temperatura obtenida experimentalmente se le debe sumar entonces el término de corrección dado por la expresión siguiente:

$$\delta T_1 = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} \right) a^2 \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \quad [II.53]$$

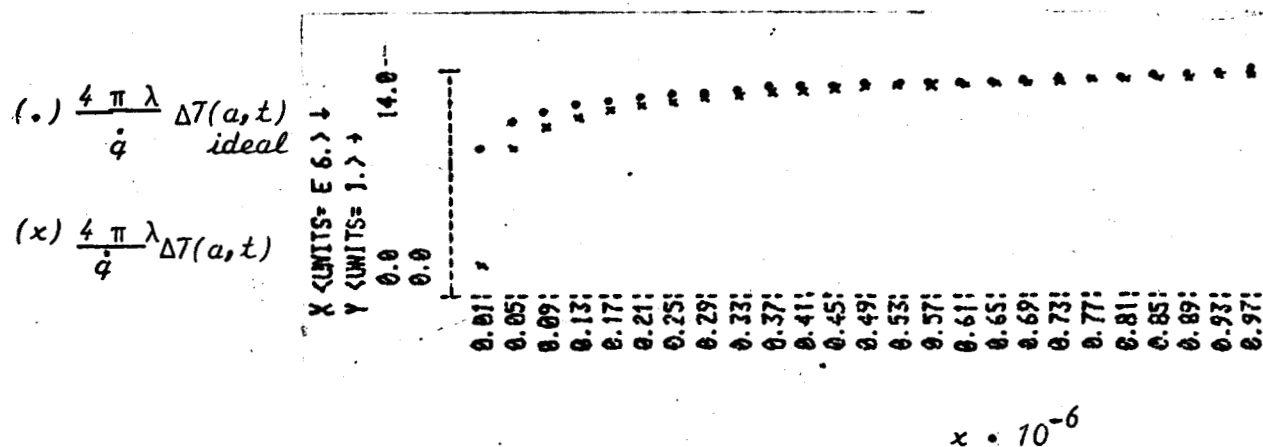


figura 4.

comportamiento cualitativo de las funciones $\frac{4 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T(a, t)_{ideal}$
 y $\frac{4 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T(a, t)$ obtenida esta última
 suponiendo que el alambre tiene capacidad calorífica
 distinta de cero. Se grafican contra x_0^{-1} .

Es muy importante notar que para disminuir este término de corrección es suficiente, según puede observarse en la expresión [II.53], tomar el radio del alambre lo suficientemente pequeño.

Como se comentará más abajo, la magnitud de este radio estará limitada por otros términos de corrección que aumentan cuando el radio disminuye. En la discusión anterior se supuso también que el radio del alambre era distinto de cero, sin embargo se ha obtenido un término de corrección que se relacionó con la capacidad calorífica finita del alambre olvidando, por el momento, cual es el término de corrección introducido por el radio finito.

Realmente es la condición de radio finito el que introduce en la solución ideal el término de corrección debido a la capacidad calorífica finita del alambre y del fluido que lo rodea, como puede observarse.

Para encontrar el término de corrección relacionado con el radio finito, supóngase una fuente lineal con radio a pero con capacidad calorífica cero.

Esta suposición modifica la ecuación de balance de calor de la siguiente manera:

Producción de calor en el alambre = calor absorbido en el volumen comprendido desde $r = a$ hasta $r = +\infty$.

Siguiendo entonces un procedimiento similar al de arriba (vease apéndice III), se puede demostrar que esto modifica la segunda condición de frontera de la manera siguiente:

$$-\frac{\dot{q}}{2\pi a\lambda} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad r = a, \quad t > 0 \quad [II.54]$$

El problema consiste ahora en resolver la ecuación de difusión sin modificar la condición inicial y la primera condición de frontera, pero considerando como segunda condición de frontera a la relación [II.54].

Con estas condiciones se encuentra que la distribución de temperatura en función del tiempo y la posición, viene dada por la relación (vease apéndice V)^[31]:

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(\ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) + \frac{a^2}{2\kappa t} \ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) + \frac{r^2}{4\kappa t} - \frac{a^2}{2\kappa t} \left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2} \right) + \dots \right) \quad [II.55]$$

A primer orden en $x \ll 1$, la solución es idéntica con la solución ideal $\Delta T(r, t)$.

Este resultado garantiza que el suponer un radio de alambre igual a cero no introduce, prácticamente, error.

Por otro lado, también se ha demostrado que es correcto identificar el error introducido por la capacidad calorífica finita con la ecuación [II.53]. Además, de la figura 4 se puede observar que la influencia de la capacidad calorífica del alambre es solamente notable al principio del periodo de calentamiento pudiéndose despreciar para tiempos de operación grandes.

Es posible solucionar un problema un poco más complejo y que es más real. En toda la discusión anterior se ha supuesto que la conductividad térmica del alambre, la cual se denotará por λ_w , es infinita. Esto quiere decir que la velocidad de propagación o difusividad de la energía calorífica dentro del alambre es casi instantánea.

Sin embargo, es claro que tal situación no ocurre en la práctica.

Considérese entonces el siguiente problema:

Se desea determinar la historia de la temperatura, como una función de la posición y el tiempo, producida por una fuente de calor lineal e infinita de radio a , con capacidad calorífica C_{pw} y conductividad térmica λ_w finitas. Esta fuente se encuentra sumergida en un medio infinito con capacidad calorífica C_{pg} y conductividad térmica λ .

La solución de este problema conduce en forma casi directa a identificar el término de corrección relacionado con la suposición de conductividad térmica infinita del alambre.

El problema consiste en determinar la distribución de temperatura, en dos regiones coaxiales de tal forma que en la región interior de radio a se produce calor a una velocidad A por unidad de volumen. Este hecho modi-

fica la ecuación de difusión que da el comportamiento en la región cilíndrica interior de la siguiente manera^[31]:

$$\lambda_w \nabla^2 T_w - \rho_w C_{pw} \frac{\partial T_w}{\partial t} = A \quad (\text{región interior}) \quad [\text{II.56}]$$

Suponiendo que se produce un calor constante por unidad de longitud y por unidad de tiempo igual a $\dot{q}$ dentro de la región interior, no es difícil encontrar una expresión para A en términos de esta cantidad. Puesto que πa^2 da el área de la sección transversal de la región interior, entonces el calor por unidad de tiempo y por unidad de volumen es:

$$A = \frac{\dot{q}}{\pi a^2} \quad [\text{II.57}]$$

Si se supone que también en la región interior existe simetría axial y - acimutal se encuentra que la ecuación [II.56] en esta región es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} w = \frac{1}{\kappa_w} \frac{\partial T}{\partial t} w + \frac{\dot{q}}{\pi a^2 \lambda_w} \quad ; \quad 0 \leq r \leq a \quad [\text{II.58}]$$

Por otro lado, en la región exterior continua satisfaciéndose la ecuación de difusión tal y como se ha venido trabajando con la única diferencia de que ahora es válida para $r > a$.

Así se obtiene dos ecuaciones diferenciales parciales cuyas soluciones requieren del conocimiento de una condición inicial y dos condiciones de - frontera.

La condición inicial se puede obtener sabiendo que antes de efectuar una determinación experimental; el sistema total, que comprende a la fuente lineal y el fluido en el que se encuentra inmerso, se encuentra en equilibrio térmico a la temperatura T_0 :

$$\begin{aligned} \Delta T_w(r, t) &= 0 & ; & & 0 \leq r \leq a & \quad y & \quad t \leq 0 & \quad [\text{II.59}] \\ \Delta T(r, t) &= 0 & ; & & r > a & \quad y & \quad t < 0 \end{aligned}$$

La primera condición de frontera puede obtener suponiendo que la frontera que une a las dos regiones la distribución de temperaturas es continua. En términos de las variables ya conocidas, esta condición se puede poner como:

$$T_w(r, t) = T(r, t) \quad \text{en} \quad r = a \quad \text{y} \quad t > 0 \quad [\text{II.60}]$$

y finalmente, la segunda condición de frontera surge al suponer que en la frontera que une ambas regiones existe igual intercambio de flujo de calor. En términos de la ley de Fourier esto se puede expresar de la manera siguiente:

$$\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{en} \quad r = a \quad \text{y} \quad t > 0 \quad [\text{II.61}]$$

En el proceso experimental sólo importa la historia de la temperatura del alambre. Esto reduce el problema presente a sólo encontrar la solución - $T_w(r, t)$ sin importar como se comporta la distribución $T(r, t)$.

Se puede demostrar entonces que la solución $T_w(r, t)$ viene dada por la expresión siguiente (vease apéndice VI)^[31]:

$$\Delta T_w(r, t) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left(\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2\lambda} a^2 \right) \ln \left(\frac{4\kappa t}{r^2 c} \right) + \frac{a^2}{2\kappa t} - \frac{a^2}{8\kappa_w t} \right) +$$

$$\frac{\dot{q}}{4\pi\lambda_w} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{a^2\lambda_w}{4\kappa_w\lambda t} \right) + \dots \quad [\text{II.62}]$$

Esta ecuación da la distribución de temperatura sobre un círculo de radio a para todo tiempo t . Sin embargo, en la práctica la temperatura experimental obtenida se asocia con una temperatura uniforme de la fuente lineal; lo que significa que esta temperatura uniforme no es otra cosa más que el promedio pesado de la relación [II.62] sobre el área de la sección transversal de la fuente lineal.

Al efectuar el promedio de la distribución [II.62] se obtiene (vease apéndice VI) [22],

$$\Delta T_w(t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg} a^2}{2 \kappa t} \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{d}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{4 \kappa_w t} + \frac{\lambda}{2 \lambda} \right) \quad [\text{II.63}]$$

Introduciendo otra vez la condición $x_0 \ll 1$, y como normalmente $\kappa_w > \kappa$

también $\frac{a^2}{4 \kappa_w t} \ll 1$, se tiene que:

$$\Delta T_w \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg} a^2}{2 \lambda t} \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{\lambda}{2 \lambda_w} \right) \quad [\text{II.64}]$$

Como ya se sabe, el término $\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg} a^2}{2 \lambda t} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right)$ está relacionado con

la corrección debida a la capacidad calorífica finita de la fuente lineal. Sabiendo esto, no es difícil identificar el término de corrección relacionado con la conductividad térmica finita; este término es $\frac{\lambda}{2 \lambda_w}$.

En la relación [II.64] se observa que el término $\frac{\lambda}{\lambda_w}$ desplaza el perfil de la función $\frac{4 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T_{\text{ideal}}$ hacia arriba tal como se muestra en la figura

5. en la que se ha tomado $\frac{\lambda}{2 \lambda_w}$ con un valor demasiado grande, comparado con un valor real, para poder visualizar éste efecto.

La distancia que separa ambas gráficas de la figura 5. da el término de corrección debido a la conductividad térmica finita del alambre que, como se vió antes, es $\frac{\lambda}{2 \lambda_w}$.

Esto significa que si existiese un experimento en el cual sólo hubiera efectos por conductividad térmica finita, el perfil de temperatura sería

el de la gráfica superior en la figura 5 y que para que este perfil se transforme en el de la solución ideal es necesario restarle el término $\frac{\lambda}{2\lambda_w}$.



figura 5.

comportamiento cualitativo de la función $\frac{4\pi\lambda}{\dot{q}} \Delta T(a,t)_{ideal}$ comparado con el comportamiento que toma en cuenta la conductividad térmica finita de la fuente lineal infinita (x).

Las dos se grafican contra x_0^{-1} .

Como podía esperarse este término de corrección es cero cuando se hace la suposición de conductividad térmica infinita de la fuente lineal.

En resumen, a la temperatura que se obtenga en forma experimental se le debe restar el término de corrección debido a la conductividad térmica in-

finita; a saber, $\frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\lambda_w}$.

II.3 Correcciones por radiación.

Considérese ahora uno de los problemas más complejos, para el cual existen suposiciones que lo simplifican grandemente, y que es el problema de efectos de radiación. Como se mencionó antes, para estudiar éste problema se distinguen tres situaciones posibles relacionadas cada una de ellas con las propiedades moleculares del fluido de prueba. Como es de esperarse, no todo el flujo de calor se transmite por conducción si no que parte de éste se transmite por radiación debido a la diferencia de temperaturas existente entre la fuente lineal y la pared que acota la región del fluido de interés, la cual se encuentra a una temperatura igual a la del baño.

La primera situación que puede suceder es que el fluido de prueba sea completamente opaco y que no transmita radiación de ningún tipo.

En este caso la energía calorífica emitida por radiación desde la fuente lineal se absorbe totalmente en el fluido de prueba sin permitir que tal radiación llegue a la pared que se encuentra a la temperatura T_0 . Debido entonces a que no existe transferencia de calor de este tipo entre la fuente lineal y la pared, no existen problemas cuando se presenta esto.

La segunda condición, que normalmente aparece en gases tales como He, Ne, Ar, Xe, etc., es que el fluido de prueba sea completamente transparente a la radiación de cualquier longitud de onda; es decir, que no absorba ningún tipo de radiación emitida por la fuente lineal.

Cuando se presenta este caso es relativamente simple calcular los efectos por radiación si se supone que las superficies que contienen al fluido de interés (fuente lineal y pared a la temperatura T_0) se comportan como cuerpos grises.

Supóngase que se tienen dos paredes separadas, cada una de las cuales se encuentra a las temperaturas T y T_0 ($T > T_0$), respectivamente.

En el espacio que media entre ambas paredes se supone que existe el vacío o que hay un medio completamente transparente a cualquier tipo de radiación.

Se puede demostrar que la transferencia de calor entre dos cuerpos cilíndricos coaxiales y que se consideran grises, tomando la primera absorción, viene dada por la relación:

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon_{12} \sigma_0 A_1 (T_1^4 - T_0^4) \quad [II.65]$$

en donde A_1 es el área del cilindro interior * y

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}} \quad [II.66]$$

con A_2 la superficie interior del cilindro exterior.

ϵ_1, ϵ_2 son las constantes adimensionales de radiación o emisividades de los cilindros con superficies A_1 y A_2 , respectivamente.

La constante σ_0 representa a la constante de Stefan-Boltzmann cuyo valor es aproximadamente igual a 5.67×10^{-8} watts $m^{-2} \text{ } ^\circ K^{-4}$.

En lo que concierne al método ACNE el cociente de áreas es mucho menor que la unidad por lo que el término que predomina es el recíproco de la emisividad del material con que está hecho el alambre.

De este resultado puede deducirse que para reducir los efectos por radiación es conveniente tomar como material del alambre uno que tenga baja emisividad.

Entonces el flujo lineal de calor producido por radiación se obtiene de la manera siguiente:

$$\dot{q}_{rad} = \epsilon_{12} 2 \pi a \sigma_0 (T_1^4 - T_0^4) \quad [II.67]$$

* Igual a $2\pi a L$.

Si se desarrolla la diferencia $T^4 - T_0^4$ se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{q}_{rad} = 8 \pi a \sigma_0 \epsilon_{12} T_0^3 \Delta T \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta T_m}{T_0} \right)^3 + \left(\frac{\Delta T_m}{T_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta T_m}{T_0} \right) + 1 \right\} \quad [II.68]$$

Si se supone que $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$ se obtiene la relación final para calcular el flujo lineal de calor por radiación; a saber

$$\dot{q}_{rad} \approx 8 \pi a \sigma_0 \epsilon_{12} T_0^3 \Delta T \quad [II.69]$$

Observese que el valor del factor ϵ_{12} depende del tipo de material de que estan hechas la fuente lineal y la pared a la temperatura T_0 .

Si estos materiales se comportan como cuerpos negros, para el cual se obtiene el valor más alto de la constante de radiación ($=1$), se encuentra que $\epsilon_{12} = 1$.

Así

$$\dot{q}_{rad} \approx 8 \pi a \sigma_0 T_0^3 \Delta T \quad [II.70]$$

Para obtener el flujo lineal de calor por conducción debe observarse que el flujo lineal de calor que se obtiene en forma experimental tiene entonces dos contribuciones; a saber, por conducción y por radiación.

Este hecho permite escribir el flujo lineal de calor experimental el cual se denotará por $\dot{q}$, en términos del flujo lineal de calor por conducción y del flujo lineal de calor por radiación los que se denotarán por $\dot{q}_{cond}$ y $\dot{q}_{rad}$, respectivamente.

Así

$$\dot{q} = \dot{q}_{cond} + \dot{q}_{rad} \quad [II.71]$$

y por lo tanto, el calor por conducción es

$$\dot{q}_{cond} = \dot{q} - \dot{q}_{rad} \quad [II.72]$$

Entonces la solución para el modelo ideal se sustituye por

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q} - \dot{q}_{rad}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \quad [II.73]$$

Para este tipo de fluidos completamente transparentes y debido a que normalmente se usan pequeñas diferencias de temperaturas, se encuentra en la práctica que $\dot{q} \approx \dot{q}_{cond}$. Esto permite escribir la relación [II.73] en términos de las variables adimensionales ya conocidas:

$$\frac{4 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T(a, t) \approx \frac{\dot{q} - \dot{q}_{rad}}{\dot{q}} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \quad [II.74]$$

En la figura 6. se compara el comportamiento cualitativo de esta función con el de la solución ideal.

La distancia que separa ambas gráficas proporciona el término de corrección debido a los efectos por radiación en fluidos transparentes contenidos entre paredes cuyo comportamiento es de cuerpos grises.

La distancia en la figura 6. está aumentada por un factor de 4/5 con el propósito de visualizar mejor este efecto.

Esta distancia se obtiene restando la función obtenida por efectos de radiación de la solución ideal:

$$\begin{aligned} \delta T_{rad} &\approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) - \frac{\dot{q} - \dot{q}_{rad}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \\ &= \frac{\dot{q}_{rad}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \\ &\approx \left(\frac{\dot{q}_{rad}}{\dot{q}} \right) \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \end{aligned} \quad [II.75]$$

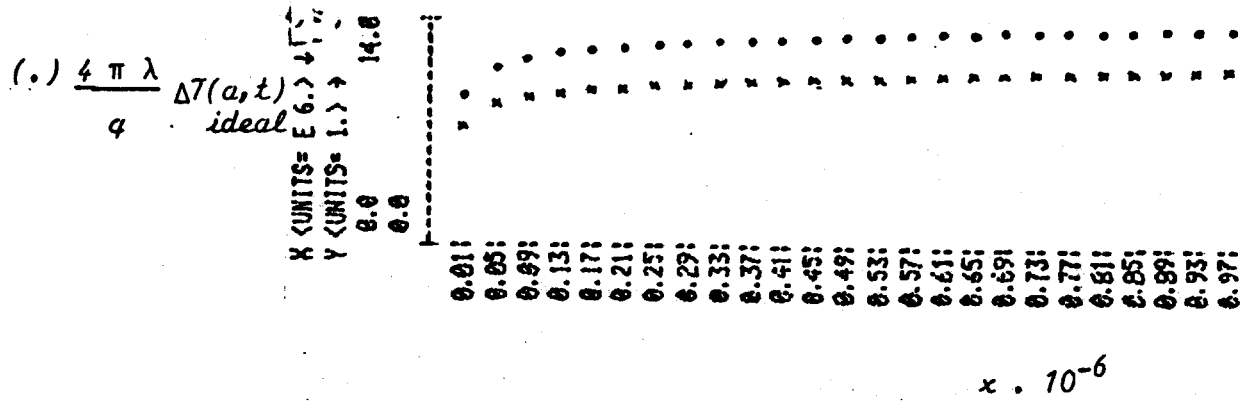


figura 6.

Comportamiento cualitativo del perfil de temperatura que toma en cuenta los efectos de radiación (x) comparado con la solución ideal $\frac{4 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T(a, t)_{ideal} (.)$.
Se grafican contra x_0^{-1} .

Como $\dot{q} \approx \dot{q}_{cond}$, entonces $\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 K t}{a^2 c} \right)$ representa la solución ideal, esto permite escribir la ecuación [II.75] como

$$\delta T_{rad} \approx \frac{\dot{q}_{rad}}{\dot{q}} \Delta T(a, t)_{ideal} \quad [II.76]$$

Finalmente, usando la ecuación [II.70] se obtiene

$$\delta T_{rad} \approx \frac{8 \pi a \sigma_0 T_0^3}{\dot{q}} \left(\Delta T(a, t)_{ideal} \right)^2 \quad [II.77]$$

Resultado en el que se ha hecho la suposición adicional de que la diferencia de temperaturas T es aproximadamente igual a $\Delta T(a, t)_{ideal}$.

Este resultado da el término de corrección que es necesario sumar a la temperatura experimental para obtener un perfil de temperatura similar al

de la solución ideal.

Obsérvese que éste término también depende de una de las propiedades geométricas de la fuente lineal; a saber, el radio a . Esto significa que el error por radiación se puede disminuir si se disminuye a su valor mínimo posible éste radio.

La tercera y última situación que se puede presentar resulta cuando el fluido de prueba absorbe la radiación para algunas longitudes de onda solamente. Este es un problema mucho más complejo que los dos casos anteriores que involucra una ecuación integro-diferencial complicada [21].

De aquí en adelante sólo se considerarán fluidos que cumplen la segunda condición para evitar tanto un problema muy simplificado como es el primer caso, como uno muy complicado que es el tercer caso y que requeriría de más espacio para tratarlo.

La primera situación implicaría que el fluido de prueba es un cuerpo negro ya que su absorcividad es igual a uno. Desgraciadamente parece ser que no existen en la naturaleza sustancias con esta propiedad.

La segunda se presenta normalmente en gases a bajas densidades o a densidades moderadamente altas.

Por último, la tercera situación se ha estudiado en alcanos normales en los cuales se ha visto que se produce absorción de radiación en ciertas longitudes de ondas [21,17,18].

Un comentario final con respecto a la emisividad del material está relacionado con el hecho de que el platino, que es el material que generalmente se usa para la fuente lineal de calor, tiene una emisividad que es muy baja comparada con la mayoría de los materiales comunes.

II.4 Corrección por tamaño finito del alambre.

El hecho de suponer una fuente lineal de calor infinita introduce otro error, puesto que esto no sucede en la realidad.

Desafortunadamente, es difícil proponer un modelo realista adecuado que proporcione la magnitud del error introducido al suponer una fuente infinita.

Sin embargo, existen algunos intentos en los que se han propuesto algunos modelos matemáticos de la situación física real.

En la práctica la temperatura del alambre disminuye en los extremos, y para obtener una estimación de la distancia en la que estos efectos son apreciables se utiliza un modelo estacionario^[31,24].

Se considera un alambre de longitud $2L$ cuyos extremos se mantienen a una temperatura T_0 constante.

Esta situación permite escribir la ecuación de conducción en una dimensión obteniéndose el perfil de temperatura promedio dado por la expresión (véase apéndice VII):

$$\bar{\Delta T} = \frac{\dot{q}}{2\pi a H} \left(1 - \frac{1}{L} \left(\frac{a\lambda_w}{2H} \right)^{1/2} \tanh \left(\left(\frac{2H}{a\lambda_w} \right)^{1/2} L \right) \right) \quad [\text{II.78}]$$

Una aproximación al error relativo δ se puede obtener entonces haciendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta &\approx \frac{\Delta T_{\text{ideal}} - \bar{\Delta T}}{\Delta T_{\text{ideal}}} \\ &= 1 - \frac{\bar{\Delta T}}{\Delta T_{\text{ideal}}} \\ &= 1 - \frac{2\lambda}{a \ln(\frac{4Kt}{a^2 c}) H} \frac{1}{L} \left(1 - \frac{1}{L} \left(\frac{a\lambda_w}{2H} \right)^{1/2} \tanh \left(\left(\frac{2H}{a\lambda_w} \right)^{1/2} L \right) \right) \quad [\text{II.79}] \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que el flujo de calor a través de la superficie es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la superficie del alambre y el medio que lo rodea (vease apéndice VII); entonces

$$\dot{Q} = 2 \pi a L H \Delta T \quad \text{y} \quad \dot{q} = 2 \pi a H \Delta T \quad [\text{II.80}]$$

en donde ΔT representa la diferencia de temperaturas del alambre y el medio que lo rodea.

Esto permite identificar H , de manera aproximada, como *

$$H = \frac{2 \lambda}{a \ln \left(\frac{4 \kappa t_c}{a^2 c} \right)} \quad [\text{II.81}]$$

en donde t_c representa el tiempo final de medición en el cual comienzan a ser importantes los efectos por convección.

Sustituyendo la ecuación [II.81] en [II.79] se obtiene finalmente que:

$$\delta = \frac{1}{L} \left(\frac{a \lambda_w}{2 H} \right)^{1/2} \tanh \left(\left(\frac{2 H}{a \lambda_w} \right)^{1/2} L \right) \quad [\text{II.82}]$$

Tomando diferentes valores en la literatura, en la tabla siguiente se presentan algunos resultados que expresan el orden de magnitud de H .

referencia	$\frac{a^2}{4 \kappa t}$	watts $\text{cm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$	$\frac{a}{\text{cms}}$	watts $\text{cm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$	$\gamma \text{ cm}^{-1}$
[21]	3.778×10^{-4}	1.874×10^{-3}	3.9×10^{-4}	1.219	9.35×10
[19]	1.783×10^{-3}	7.459×10^{-4}	2.0×10^{-3}	0.118	1.29×10
[16]	1.043×10^{-3}	1.617×10^{-3}	2.5×10^{-4}	1.128	1.13×10^2
[25]	2.000×10^{-5}	1.617×10^{-3}	6.4×10^{-4}	0.417	4.58×10
[22]	3.000×10^{-4}	1.617×10^{-3}	2.5×10^{-4}	1.595	1.35×10^2
[17]	5.086×10^{-4}	1.137×10^{-3}	3.9×10^{-4}	0.771	7.49×10

* Recuerdese que para la solución ideal $\dot{q} = \frac{4 \pi \lambda}{\ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right)} \Delta T_{\text{ideal}}$

Tomando un valor de la conductividad térmica del platino (material del que se supondrá está hecha la fuente lineal de calor) de aproximadamente $7.049 \times 10^{-1} \text{ watts cm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ se encuentra que, con los datos de la tabla anterior, el valor promedio de γ es aproximadamente de $.79.1 \text{ cm}^{-1}$. Esto permite determinar la longitud aproximada de la fuente lineal de calor suponiendo que se desea un error relativo, debido a la longitud finita de esta fuente, de aproximadamente 0.2%.

Así con este valor de γ la tangente hiperbólica es casi la unidad lo que permite escribir, a partir de [II.82].

$$L \approx \frac{1}{\gamma(0.002)} \approx 7 \text{ cm} \quad [\text{II.83}]$$

Esto significa que la longitud del alambre debe ser no menor que 14 cms. para poder disminuir los efectos de extremo.

Se han propuesto otros modelos en los cuales se ha resuelto la ecuación de conducción con la contribución axial; es decir

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{II.84}]$$

para distintas condiciones de frontera.

Tales modelos son los siguientes:

1. Fuente lineal de calor infinita rodeada por un fluido infinito.

Existe flujo de calor constante sólo a través de una longitud finita de la fuente lineal manteniéndose aislado el resto de la misma.

Se supone que no hay flujo de calor axial dentro del cilindro, lo cual significa que este sólo existe en el fluido que lo rodea.

La condición inicial es:

$$\Delta T = 0, \quad t = 0, \quad a < r < \infty \quad \text{y} \quad -\infty < z < \infty \quad [\text{II.85}]$$

y las condiciones de frontera

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \dot{q} \quad , \text{ en } r = a , |z| < L \text{ y } t > 0 \quad [II.86]$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad , \text{ en } r = a , |z| > L \text{ y } t > 0$$

En la solución se demuestra que la longitud del alambre no debe ser menor que 8 cms. con el objeto de disminuir los efectos de extremo^[30].

2. Fuente lineal de calor con sus extremos en contacto con dos planos perpendiculares a la misma e infinitos.

Existe flujo de calor constante a través de la superficie del cilindro y los planos se mantienen a una temperatura constante conocida.

Se supone que dentro del cilindro no existe flujo de calor axial.

La condición inicial es :

$$\Delta T = 0 \quad , \quad t = 0 \quad , \quad a < r < \infty \quad \text{y} \quad 0 < z < 2L \quad [II.87]$$

y las condiciones de frontera son :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \dot{q} \quad \text{en } r = a , 0 < z < 2L \quad \text{y } t > 0 . \quad [II.88]$$

y

$$T = T_0 \quad \text{en } r = a , z = 0 \text{ y } z = 2L \quad \text{con } t > 0$$

La solución demuestra que la longitud mínima de la fuente debe ser de 12 cms. para evitar los efectos de extremo^[30].

3. Un cilindro infinitamente largo , con distribución de temperatura uni-

forme en su dirección radial ; inmerso en un medio infinito.

Se proporciona calor solamente a una longitud finita de ésta fuente .

No existe flujo de calor axial dentro de la fuente y las condiciones inicial y de frontera son :

$$\Delta T = 0 \quad , \quad t = 0 \quad , \quad a < r < \infty \quad , \quad -\infty < z < \infty \quad [II.89]$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\dot{q}}{2\pi a} \left(U \left(z + \frac{L}{2} \right) - U \left(z - \frac{L}{2} \right) \right) + \lambda_w \pi a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa_w} \frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

respectivamente, en donde $U(x)$ es la función de Heaveside para la cual $U(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $U(x) = 1$ si $x > 0$.

La solución demuestra de nueva cuenta que la longitud mínima de la parte de la fuente a la cual se proporciona calor no debe ser menor que 12 cms. si se desea evitar mayor ruido debido a los efectos de extremo^[30].

El hecho de que existan tantos modelos demuestra que no es fácil calcular exactamente los efectos debidos a la longitud finita.

Sin embargo, existen métodos experimentales que permiten eliminar estos efectos. Uno de tales métodos consiste en soldar en una región intermedia de la fuente lineal dos alambres separados una cierta distancia mínima determinada por los cálculos hechos arriba. Este método se conoce como - " Método de terminales " .

El otro método consiste en construir un arreglo que contenga por un lado un alambre corto y por el otro un alambre largo lo cual permite que todo el equipo trabaje como si una porción de alambre , de longitud igual a la diferencia entre el largo y el corto , de una fuente lineal infinita estuviera activa.

Otra vez los cálculos hechos arriba limitan las longitudes de ambos alambres. Este método se conoce como el del " alambre compensador " [20, 25, 30].

II.5 Otras correcciones.

En experimentos con gases a bajas presiones el diámetro del alambre es generalmente muy delgado comparado con la trayectoria libre media de las moléculas del gas lo que ocasiona que aumente el número de moléculas que chocan con el alambre en la unidad de tiempo. En éste caso se debe tomar en cuenta un salto de temperatura que existe entre el alambre y el gas que lo rodea. Smoluchowski estudió este efecto y verificó que la diferencia entre la temperatura real y la de la pared es proporcional al gradiente de temperatura. Esta diferencia de temperatura se conoce como salto de temperatura.

Otra interpretación a la existencia de éste salto de temperatura expresa que éste es el resultado de una resistencia al calor producido por la fuente lineal debido a una capa infinitamente delgada concentrada en la superficie del alambre.

Carshaw y Jaeger resuelven la ecuación de difusión incluyendo una resistencia superficial H constante además de tomar en cuenta el radio finito del alambre así como su capacidad calorífica finita, el resultado al que llegan viene dado por la expresión^[24]:

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{2 \lambda}{a H} + \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{\rho_w C_{pw} \lambda}{a H \rho_g C_{pg}} \frac{a^2}{\kappa t} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_g C_{pg} - \rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}} \frac{a^2}{\kappa t} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \dots \right) \quad [II.90]$$

A primera aproximación:

$$\frac{d \Delta T(a, t)}{d \left(\frac{\kappa t}{a^2} \right)} \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left\{ \frac{a^2}{\kappa t} + \frac{\rho_w C_{pw} \lambda}{a H \rho_g C_{pg}} \left(\frac{a^2}{\kappa t} \right)^2 \right\} \quad [II.91]$$

y

070122

$$\frac{d \Delta T(a, t)}{d(\kappa t/a^2)} \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{a^2}{\kappa t} \right) \quad [\text{II.92}]$$

Esto permite calcular el error relativo en la pendiente (que es la que da la conductividad térmica) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{error relativo} &\approx \frac{\frac{d \Delta T}{d(\kappa t/a^2)} - \frac{d \Delta T_{\text{ideal}}}{d(\kappa t/a^2)}}{\frac{d \Delta T_{\text{ideal}}}{d(\kappa t/a^2)}} \\ &\approx \frac{\frac{\rho_w C_{pw} \lambda}{a H \rho_g C_{pg}} \left(\frac{a^2}{\kappa t} \right)}{\frac{d \Delta T_{\text{ideal}}}{d(\kappa t/a^2)}} \quad [\text{II.93}] \end{aligned}$$

Esto da entonces la condición para que la resistencia interfacial H no introduzca ruido en el cálculo de la conductividad térmica; a saber, que [II.93] sea despreciable.

El problema en la evaluación de [II.93] radica en que se necesita un valor de la resistencia interfacial H .

Sin embargo, la teoría cinética predice el valor de esta variable para una superficie plana; es decir

$$H = \frac{\ell}{2 - \ell} \frac{\lambda}{\Lambda} \quad [\text{II.94}]$$

en donde ℓ es el coeficiente de acomodación y Λ la trayectoria libre media de las moléculas.

Observese que si la trayectoria libre media es cero (lo que aproximadamente corresponde a fluidos densos) la resistencia interfacial es infinita lo cual implica que el error relativo es despreciable.

E. McLaughlin y J.F.T. Pitiman calculan la incertidumbre relativa para el gas nitrógeno tomando una trayectoria libre media de 6×10^{-6} cm y un coeficiente de acomodación de 0.8 obteniendo un valor del error relativo aproximadamente igual a 0.015%.

Por otro lado J.W. Haarman desprecia los efectos de interacción de la capacidad calorífica del alambre obteniendo la relación

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{2 \lambda}{a H} + \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right) \quad [\text{II.95}]$$

en la cual se puede observar que el resultado neto del salto de temperatura es desplazar la línea $\Delta T(a, t)$ contra $\ln t$ sin afectar la pendiente de la misma.

Visto así, el error absoluto debido al salto de temperatura es entonces :

$$\text{error absoluto} = \frac{\dot{q}}{2 \pi a H} \quad [\text{II.96}]$$

resultado que se tiene que restar de la temperatura real para poder obtener el perfil de temperatura ideal.

Es evidente que las propiedades del fluido examinado son completamente diferentes de las del material con que está hecha la celda.

Puesto que el fluido no se encuentra en un medio infinito sino en un medio acotado internamente por la fuente lineal de calor y externamente por un cilindro de radio b , existe una perturbación el perfil de temperatura debido a este hecho.

Es necesario entonces obtener el perfil de temperatura perturbado, de tal manera que permita determinar el error introducido por este hecho a la solución ideal.

Fischer (vease apéndice VIII) obtuvo la siguiente relación que da el perfil de temperatura para la situación planteada arriba

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{4}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 \kappa t}}{\alpha_n^2 f_n} \right) \quad [II.97]$$

$$\text{en donde } f_n = \left[\frac{y_1(\alpha_n)}{y_0(b\alpha_n)} \right]^2 - 1$$

Por otro lado, se han usado intervalos de interés de valores de b/a y $\frac{\kappa t}{a^2}$ para líquidos y gases en los que se encontró que los errores debido al efecto de la pared externa son despreciables^[24].

Para líquidos con un error relativo de aproximadamente .125% los intervalos de valores aproximados de b/a y $\frac{\kappa t}{a^2}$ son 200 a 400 y 0.5×10^{-1} y 2.5×10^{-1} , respectivamente.

Para gases, los intervalos aproximados encontrados fueron de 750 a 3000 y 0.25×10^5 a 5×10^5 , respectivamente y con el mismo error aproximadamente.

Esto da entonces un criterio, para determinar el radio mínimo b necesario para hacer despreciables los efectos de la pared externa.

J.J. Healy et al. y Sookiazian H., logran obtener una relación aún más simple que [II.97] suponiendo que $\frac{b}{a} \gg 1$ y $\frac{4 \kappa t}{a^2} \gg 1$, así

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-g_i^2 \kappa t / b^2) (\pi y_0(g_i))^2 \right) \quad [II.98]$$

en donde las g_i denotan las raíces consecutivas de $J_0(g_i) = 0$.

Reescribiendo la solución ideal en términos de b se logra obtener la siguiente relación:

$$\Delta T(a, t)_{\text{ideal}} = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t b^2}{b^2 a^2 c} \right)$$

$$= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \ln \left(\frac{4 \kappa t}{b^2 c} \right) \right)$$

$$= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \ln \left(\frac{4 \kappa t}{b^2 c} \right) \right) \quad [II.99]$$

relación que permite determinar el error absoluto dado por :

$$\text{error absoluto} \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\ln \left(\frac{4 \kappa t}{b^2 c} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-g_i^2 \kappa t / b^2) (\pi y_0(g_i))^2 \right) \quad [\text{II.100}]$$

y que se tiene que sumar a la temperatura experimental del alambre.

Tomando tiempos infinitos, se obtiene una solución estacionaria conocida.

Con esto, los autores mencionados, logran establecer un criterio para seleccionar las dimensiones del radio b . En resumen, con el objeto de obtener un error de 0.01 % a 1.0 %, aproximadamente, es necesario que 2.3

$$2.3 < \frac{b^2}{\kappa t} < 5.8.$$

Otro problema a resolver es el de la presencia de convección y disipación viscosa.

Se han hecho muchos análisis a éste respecto y todos llegan a la conclusión de que existe un tiempo límite t_c , el cual se puede estimar, arriba del cual la solución ideal ya no es válida.

Uno de los criterios de estimación utiliza un resultado conocido para procesos estacionarios [20,19] en el cual esta involucrado el número de Rayleigh $R_a = P_n G_n$ en donde los números de Prandtl P_n y Grashof G_n son dados por las siguientes expresiones:

$$G_n = \frac{g \beta d^3 N}{\nu^2} \quad ; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_g}$$

$$P_n = \frac{\nu}{\kappa} \quad ; \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho_g C_{pg}}$$

con

g = aceleración debida a la gravedad

β = coeficiente de expansión volumétrica

d = dimensión lineal

μ = viscosidad absoluta

ρ = densidad

λ = conductividad térmica

C_{pg} = capacidad calorífica específica

ΔT = diferencia de temperatura entre la superficie del alambre y la parte principal del fluido.

En la transferencia de calor estacionaria entre cilindros coaxiales concéntricos se ha encontrado^[20] que la convección natural es despreciable a números R_a menores que 1000.

Tye aplica éste resultado estacionario al caso no-estacionario suponiendo que existe un estado pseudo-estacionario y que la convección natural ocurre cuando la temperatura de éste estado llega a un valor crítico definido por el número R_a ; a saber, $R_a > 1000$.

El número G_n es la relación de la fuerza de flotación a la fuerza viscosa en la convección natural, e involucra una distancia lineal característica d , para la cual Tye obtiene una estimación utilizando el resultado estacionario que da el perfil de temperatura para dos cilindros concéntricos de radios a y b ($a < b$).

Este resultado se puede obtener a partir de la relación de Fischer (vease apéndice VIII) haciendo tender el tiempo a infinito.

Al hacer ésto se obtiene la ecuación

$$\Delta T_e \approx \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad [\text{II.101}]$$

en ésta expresión r representa el radio de la onda de calor propagándose a través del fluido.

Esto permite definir la distancia característica d de la siguiente manera

$$d = r - a$$

$$= a \left(\exp\left(\frac{2 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T_e\right) - 1 \right) \quad [\text{II.102}]$$

en la que ΔT_e es la diferencia de temperaturas en el equilibrio .

Así el criterio que da la presencia de convección es

$$\frac{g \beta a^3}{\nu \kappa} \Delta T_e \left(\exp\left(\frac{2 \pi \lambda}{\dot{q}} \Delta T_e\right) - 1 \right)^3 \leq 1000 \quad [\text{II.103}]$$

Para extrapolar este resultado al caso no-estacionario , Tye toma ΔT_e - igual al perfil de temperatura dado por la solución ideal del caso no - estacionario :

$$\Delta T_e \approx \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) \quad [\text{II.104}]$$

y el criterio de Rayleigh es [20,19]:

$$\frac{g \beta a^3}{\nu \kappa} \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) \left(\sqrt{\frac{4 \kappa t}{a^2 c}} - 1 \right)^3 \leq 1000 \quad [\text{II.105}]$$

La relación [II.105] permite calcular el tiempo límite t_c cuando la igualdad se satisface.

Rodica Vilcu et. al aplican este resultado a gases y a líquidos.

Sin embargo, J. Pantaloni et. al obtienen un resultado exclusivamente para líquidos .

Ellos deducen experimentalmente que la presencia de efectos convectivos al tiempo t_c es debido , principalmente , a la aparición de una componente axial del gradiente de temperatura , la cual no existe para tiempos meno-

res a t_c .

Entonces obtienen la siguiente relación empírica que da el tiempo característico t_c :

$$t_c^{3/2} \ln\left(\frac{4 \kappa t_c}{a^2 c}\right) = \frac{380 P_r \kappa^{1/2} \lambda}{\beta g \dot{q}} \quad [\text{II.106}]$$

Por otro lado, Sookiasian H. [30,22] da una solución completa de las ecuaciones de Navier-Stokes, para el caso no-estacionario, siguiendo un proceso iterativo. Supone un comportamiento ideal del gas y obtiene entonces el error debido al hecho de suponer un fluido incompresible en la solución ideal.

Encuentra que en dicho error están involucrados los errores debido a la variación de la densidad y a la disipación viscosa.

La solución que él propone para el error absoluto en la temperatura es entonces:

$$\text{error absoluto} \approx -\left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda}\right)^2 \frac{P_r g^2 t^2}{2 C_{pg} T_0^2} - \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{\ln 4}{T_0} \quad [\text{II.107}]$$

en donde el primer término es debido a la disipación viscosa y el último a la variación de la densidad (fluido compresible).

Este resultado se debe sumar al valor experimental de la temperatura del alambre.

En todo lo expuesto arriba se ha supuesto que las propiedades del fluido no dependen de la temperatura.

E. McLaughlin et al. y Sookiazian, suponiendo una dependencia lineal en la temperatura para la capacidad calorífica y la conductividad térmica, resuelven la ecuación de conducción en una forma completamente detallada obteniendo la siguiente expresión del error introducido al suponer ρ_g , C_{pg} y λ no dependientes de la temperatura:

$$\text{error absoluto} \approx \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 - \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 (\zeta - \Phi) \ln^4$$

[II.108]

donde ζ y Φ están dados por las relaciones

$$\rho_g C_{pg} = \rho_0 C_{pg} (1 + \Phi \Delta T)$$

[II.109]

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \zeta \Delta T)$$

dependiendo de la magnitud de este error, la expresión [II.108] se debe sumar a la temperatura experimental del alambre.

Esta expresión Sookiazian la aplica para gases.

Para líquidos, E. McLaughlin et al. obtienen lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{error absoluto} \approx & \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 + \\ & + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 (\zeta - \Phi) \frac{\ln \left(\frac{4 a^2 c}{\kappa t} \right)}{\left(\ln \left(\frac{a^2 c}{\kappa t} \right) \right)^2} \end{aligned}$$

[II.110]

que también se debe sumar a la temperatura.

Sookiazian H., J. J. Healy et al. al tratar este problema llegan a la conclusión de que la temperatura y la densidad asociados al valor experimental de la conductividad térmica son:

$$T_n = T_0 + \frac{1}{2} (\Delta T(t_1) + \Delta T(t_2))$$

[II.111]

y

$$\rho_n = \rho(T_n, p)$$

en donde t_1 y t_2 son los tiempos inicial y final del experimento y p es la presión supuesta constante.

Esta aseveración es motivo de discusión ya que otros autores utilizan una expresión más complicada para el segundo término de la suma [II.111] [18] tal como el siguiente:

$$T_n = T_0 + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^3 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2 \sum_{i=1}^n \Delta T_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \Delta T_i \right)^2} \quad [\text{II.112}]$$

en donde ΔT_i es el incremento al tiempo t_i y n el número de lecturas.

Además, J.J. Healy et al calculan un error debido a una variación adiabática de la presión.

Ellos argumentan que una zona de temperaturas altas se concentra en una región cilíndrica que se amplía en forma radial hacia afuera de la fuente lineal.

El fluido que se encuentra en la capa de esta zona al expandirse efectúa un trabajo de expansión.

Los autores anteriores y Sookiazian H. llegan a demostrar entonces que el término de corrección es dado por

$$\text{error absoluto} = - \frac{\dot{q} L R t}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V} \quad [\text{II.113}]$$

en donde L es la altura de la celda, R la constante universal de los gases, C_{vg} la capacidad calorífica específica del fluido a volumen constante y V el volumen del recipiente que contiene al fluido.

En el cálculo de esta ecuación se supuso el comportamiento de gas ideal.

Este resultado se debe sumar a la temperatura experimental del alambre.

Finalmente, es evidente que el flujo de calor lineal $\dot{q}$ es realmente función del tiempo; sin embargo, siguiendo un procedimiento apropiado que está involucrado con un diseño eléctrico, se obtendrá más adelante que esta dependencia temporal es insignificante.

En resumen, si ΔT_w representa la lectura experimental de la temperatura del alambre es necesario sumarle todos los términos de corrección dados arriba de tal manera que se pueda obtener el perfil de temperatura de la solución ideal, así :

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) &\approx \Delta T_w + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} \right) a^2 \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) - \\
 &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{a^2}{4 \kappa t} \left(2 - \frac{\kappa}{\kappa_w} \right) - \frac{\dot{q}}{8 \pi \lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda_w} \right) + \frac{8 \pi a \sigma_0 T_0^3}{\dot{q}} \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 \\
 &+ \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\ln \left(\frac{4 \kappa t}{b^2 c} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-g_i^2 \kappa t / b^2) (\pi y_0(g_i))^2 \right] - \\
 &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{\lambda}{a H} - \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \frac{\rho_L g^2 t^2}{2 C_{pg} T_0^2} - \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \frac{\ln 4}{T_0} + \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 - \\
 &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} (\zeta - \Phi) \ln 4 - \frac{\dot{q} L R t}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V}
 \end{aligned}
 \tag{II.114}$$

Debe aclararse que al diseñar la celda de conductividad se debe tener presente hacer despreciables algunas de estas correcciones de tal manera que la ecuación [II.114] se simplifique.

CAPITULO III.

El objetivo de este capítulo consiste en determinar las características del alambre así como la forma y dimensiones de la celda de conductividad.

Como se mencionó anteriormente, existen dos métodos experimentales en la determinación no estacionaria de la conductividad térmica que están relacionados con la disminución de los efectos de extremo.

Uno de estos es el conocido "Método del Alambre Compensador" en el cual se hace uso de dos alambres, uno largo y otro corto.

Uno de los principales inconvenientes de este método radica en el hecho de que se necesitan construir dos arreglos experimentales, uno para cada alambre.

si l_1 y l_2 son las longitudes de los alambres largo y corto, respectivamente, se supone entonces que existe una longitud efectiva dada por $l_1 - l_2$ en la que los efectos de extremo son disminuidos.

Es sobre esta longitud efectiva que se plantean las ecuaciones convenientes para obtener la conductividad térmica del fluido de interés.

El segundo método se conoce como "Método de Terminales".

Se utiliza un solo alambre de longitud l sobre el cual se selecciona una longitud intermedia, conocida como longitud activa, y con ella se hacen los cálculos correspondientes para obtener la conductividad térmica.

Debido a que sólo se utiliza un alambre, la ventaja de este método radica en que únicamente se necesita un arreglo experimental.

III.1 Características del alambre.

Es posible obtener una estimación del error experimental introducido al efectuar conexiones intermedias en la longitud total del alambre, como se requiere en el método de terminales.

Para estimar éste error relativo, se supondrá también aquí un proceso estacionario en un arreglo geométrico como el que se muestra en la figura 7.

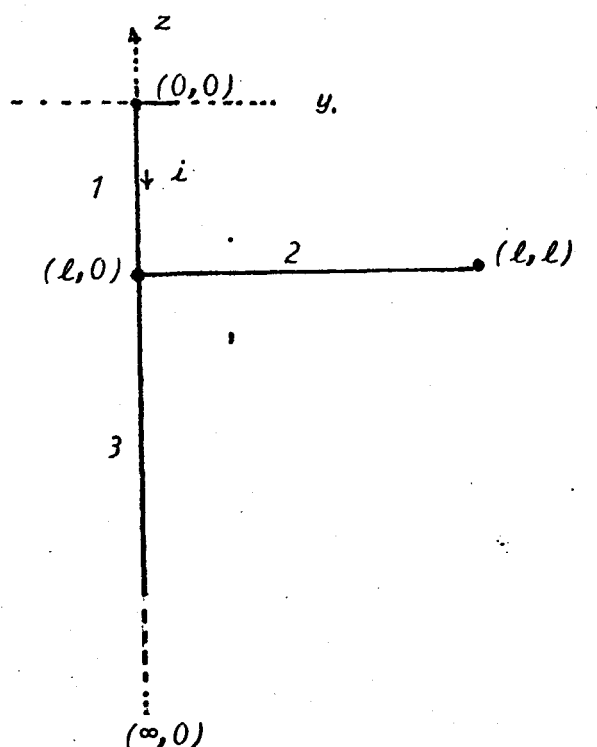


Figura 7.

Carshaw y Jaeger muestran que las ecuaciones diferenciales que gobiernan a cada tramo de alambre son :

$$\frac{d^2 \Delta T_1}{dz^2} + \beta^2 \Delta T_1 = -K \quad ; \quad \Delta T_1 = T_1 - T_0 \quad [III.1]$$

$$\frac{d^2 \Delta T_2}{dy^2} + \beta^2 \Delta T_2 = 0 \quad ; \quad \Delta T_2 = T_2 - T_0$$

y

$$\frac{d^2 \Delta T_3}{dz^2} + \beta^2 \Delta T_3 = -K \quad ; \quad \Delta T_3 = T_3 - T_0$$

en donde
$$K = \frac{i^2}{\lambda_w (\pi a^2)^2 \sigma_0}$$

siendo σ_0 la conductividad eléctrica a la temperatura T_0 del baño y T_1 , T_2 , T_3 las temperaturas de las secciones 1, 2 y 3 del arreglo de alambres mostrado.

T_0 es también la temperatura en los puntos $(0,0)$ y (l,l) .

En términos del flujo lineal de calor $\dot{q}$, K es dada por :

$$K = \frac{1}{\lambda_w \pi a^2} \dot{q} \quad [III.2]$$

y β^2 es, a primera aproximación,

$$\beta^2 = -\gamma^2 = -\frac{2}{a} \frac{H}{\lambda_w} \quad [III.3]$$

donde H es la resistencia de contacto dada por la refacción (vease sección II.4) :

$$H = \frac{2 \lambda}{a \ln \left(\frac{4 \kappa t_c}{a^2 c} \right)} \quad [III.4]$$

siendo t_c el tiempo final de medición.

Se ha supuesto además que la corriente que circula por el alambre 2 es -cero ($K = 0$), ésta suposición es prácticamente cierta ya que éste alambre se conecta con un voltímetro, los cuales son normalmente de resistencia interna muy alta.

Las condiciones de frontera utilizadas para solucionar este conjunto de ecuaciones diferenciales son :

La temperatura en $(0,0)$ es tal que $\Delta T_1(0) = 0$, es decir este punto se encuentra siempre a la temperatura T_0 del baño, algo similar sucede en el punto (l,l) en el cual $\Delta T_2(l) = 0$.

La temperatura en $(l,0)$ es tal que :

$$\Delta T_1(l) = \Delta T_2(0) = \Delta T_3(l) \quad [III.5]$$

es decir, la temperatura en este punto es la misma para los tres alambres. La temperatura $\Delta T_3(z)$ es finita en el punto $(\infty, 0)$ y, por último, - aplicando un balance energético se encuentra que en $(l,0)$ se cumple la siguiente relación :

$$\frac{d \Delta T_1}{dz} \Big|_{z=l} = \frac{d \Delta T_2}{dy} \Big|_{y=0} + \frac{d \Delta T_3}{dz} \Big|_{z=l} \quad [III.6]$$

De hecho la expresión que interesa es la de $\Delta T_3(z)$ para la cual se encuentra que :

$$\Delta T_3(z) = \frac{K}{\gamma^2} \left(1 - \frac{(\exp(\gamma l) + 1)^2}{3 \exp(2\gamma l) + 1} \exp(-\gamma(z-l)) \right) \quad [III.7]$$

o

$$\Delta T_3(z) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t_c}{a^2 c} \right) \left(1 - \frac{(\exp(\gamma l) + 1)}{3 \exp(2 \gamma l) + 1} \exp(-\gamma(z-l)) \right)$$

Obsérvese que para $z \rightarrow \infty$ el comportamiento de la función es dado por :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Delta T_3(z) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t_c}{a^2 c} \right) \quad [III.8]$$

que recuerda el comportamiento ideal del caso no-estacionario .

El error relativo puede calcularse ahora obteniéndose lo siguiente :

$$\delta = \frac{(\exp(\gamma l) + 1)^2}{3\exp(2\gamma l) + 1} \exp(-\gamma (z - l)) \quad [\text{III.9}]$$

y en $z = l$:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(\exp(\gamma l) + 1)^2}{3\exp(2\gamma l) + 1} \quad [\text{III.10}] \\ &= \frac{(1 + \exp(-\gamma l))^2}{3 + \exp(-2\gamma l)} \end{aligned}$$

En la práctica la longitud l es aproximadamente de 1.0 cms. y se ha visto que γ es del orden de 80 cm^{-1} con lo cual las exponenciales se pueden despreciar y se obtiene que :

$$\delta = \frac{1}{3} \approx 33. \% \quad [\text{III.11}]$$

Debe quedar claro que la expresión [III.9] representa el error relativo de la temperatura en el punto z comparada con la temperatura ideal a la que se encuentran los puntos en $z = \infty$.

Por lo tanto , la expresión [III.11] representa el error relativo de la temperatura en $(l,0)$ comparada con los puntos lejanos que se encuentran a una temperatura ideal .

De hecho, E. McLaughlin et al. obtuvieron en forma experimental y analítica, siguiendo en éste último caso un procedimiento estacionario, que el error relativo en la temperatura en éste punto de conexión es del orden del 30.% comparada con las temperaturas de los puntos lejanos al mismo.

Con la expresión [III.7] es posible obtener ahora la temperatura promedio a una distancia $L + l$ sobre el alambre 3

$$\Delta T_3 \approx \frac{1}{L} \int_l^{L+l} \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t c}{a^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \exp(-\gamma (z - l)) \right) dz \quad [III.12]$$

$$= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t c}{a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3 \gamma L} (\exp(-\gamma L) - 1) \right)$$

Para esta longitud L del alambre 3, el error relativo en la temperatura es

$$\delta = \frac{1}{3 \gamma L} (1 - \exp(-\gamma L)) \approx \frac{1}{3 \gamma L} \quad [III.13]$$

Esta relación permite estimar el error relativo debido a los terminales de potencial cuando sólo se cuenta con una fuente de calor con un segmento activo de longitud finita conocida L .

En el presente trabajo se ha tomado una longitud total de la fuente de 12 cms y una longitud de la sección activa de 9 cms lo que conduce a obtener un valor para l de 1.5 cms.

Con el valor promedio estimado para γ esto conduce a un error relativo en la temperatura de aproximadamente 0.1 % debido a efectos de extremo.

Con el objeto de eliminar los efectos de la pared externa de radio b se ha seguido el criterio de J.J.Healy et al y Sookiazian H. (vease sección II.5), siendo éste radio igual a 0.492" (≈ 1.25 cms y los tiempos máximos de duración de una corrida experimental se suponen de 1 segundo).

En la ecuación [II.93] se vió que el error relativo en la pendiente de la gráfica ΔT contra $\ln t$ debido al efecto Knudsen es :

$$\delta = \frac{\rho_w C_{pw} \lambda}{a H \rho_g C_{pg}} \left(\frac{a^2}{\kappa t} \right) \quad [\text{III.14}]$$

en donde H es una resistencia interfacial cuya magnitud, predicha por la teoría cinética de gases es

$$H = \frac{f}{2 - f} \frac{\lambda}{\Lambda} \quad [\text{III.15}]$$

Como se sabe, la trayectoria libre media Λ está relacionada con el número de moléculas por unidad de volumen n y el diámetro molecular de esferas rígidas d por medio de la ecuación

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n d^2} \quad [\text{III.16}]$$

y n se puede calcular con la ecuación

$$n = \frac{m N_0}{M V} \quad [\text{III.17}]$$

en donde m es la masa total del gas, M el peso molecular del mismo, N_0 el número de Avogadro y V el volumen de gas.

Esto permite escribir

$$\frac{1}{H} = \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \frac{M}{\sqrt{2} \pi \lambda \rho_g N_0 d^2} \quad [\text{III.18}]$$

Además, tomando en cuenta que $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_g C_{pg}}$, el error relativo en la pendiente es

$$\delta = \frac{\rho_w C_{pw} a M}{d^2 \lambda \pi \rho_g t \sqrt{2} N_o f} \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \quad [\text{III.19}]$$

Esta relación muy importante permite determinar el intervalo de operación de densidades ρ_g si se conoce el error relativo δ .

Obsérvese que el intervalo de operación depende de algunas propiedades del gas cuya conductividad térmica se va a medir, así como del tiempo de medición t y algunas propiedades físicas del alambre.

J. J. De Groot et al. suponen un error relativo máximo de 0.05 % para poder despreciar el error introducido por el efecto Knudsen.

La densidad mínima con que se puede trabajar es entonces :

$$\rho_g \geq \frac{\rho_w C_{pw} a M}{\lambda \delta t \sqrt{2} \pi N_o d^2 f} \left(\frac{2}{f} - 1 \right) \quad \text{con } \delta = 0.05 \% \quad [\text{III.20}]$$

Como ejemplo, considérense los gases He y Ne para estimar éste intervalo de densidades :

Para el He se tiene que, tomando un radio igual a 6.0×10^{-4} cms y un coeficiente de acomodación f de 0.8, :

$$\begin{aligned} \rho &\geq \frac{(21.37 \text{ gr/cm}^3)(0.133 \times 10^7 \text{ ergios/gr}^\circ \text{K})(6.0 \times 10^{-4} \text{ cm})(4.003 \text{ gr/mol})(1.5)}{(0.1703 \times 10^5 \text{ ergs/cmseg}^\circ \text{K})(0.05 \times 10^{-2})(3 \times 10^{-3}) \sqrt{2} \pi (6.0255 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}) 16 \times 10^{-16} \text{ cm}^2} \\ &\approx 0.96 \times 10^{-3} \text{ gramos/cm}^3 \end{aligned} \quad [\text{III.21}]$$

en donde se ha tomado $n \approx 2 \times 10^{19}$ moléculas/cm³, $\Lambda \approx 6 \times 10^{-6}$ cms y un tiempo de medición mínimo de 3×10^{-3} seg (los tiempos son normalmente del orden de 1 segundo). A una temperatura de 25 °C, a todo esto le corres-

ponde una presión aproximadamente igual a 5 atmósferas .

Para el Ne haciendo idénticas operaciones se encuentra

$$\rho \approx \frac{(21.37 \text{ gr/cm}^3)(0.133 \times 10^7 \text{ ergios/gr}^\circ\text{K})(6.0 \times 10^{-4} \text{ cm})(20.183 \text{ gr/mol})(1.5)}{(0.1 \times 10^5 \text{ ergs/cmseg}^\circ\text{K})(0.05 \times 10^{-2})(3 \times 10^{-3} \text{ seg}) \sqrt{2} \pi (6.0225 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}) 16 \times 10^{-16} \text{ cm}^2}$$

$$\approx 7.2 \times 10^{-3} \text{ gramos/cm}^3$$

[III.22]

A una temperatura de 25 °C , a ésta densidad le corresponde una presión aproximada de 8 atmósferas (J.J. De Groot et al. usando un radio igual a la mitad del dado , obtienen una densidad de $3 \times 10^{-3} \text{ gramos/cm}^3$ y una presión de 5 atmósferas a la misma temperatura usando la ecuación :

$$\rho \approx 10^2 \dot{q} (2 N_0 d^2 \lambda a T)^{-1}).$$

Estos cálculos sugieren entonces un valor aproximado del radio del alambre ; a saber, de $6.0 \times 10^{-4} \text{ cms}$ con el cual se trabajara de ahora en adelante .

Obsérvese que un radio muy grande aumenta el error debido a la capacidad calorífica finita del alambre y un radio muy pequeño aumenta el error debido al salto de temperatura (efecto Knudsen).

III.2 Características de la celda.

Con todo lo anterior, es posible eliminar en la relación [II.114] los términos que contienen información sobre la pared externa finita y el efecto Knudsen.

También en la sección II.5 se dió un criterio para obtener una estimación del tiempo crítico arriba del cual son apreciables los efectos convectivos. En la expresión [II.105] se puede observar que éste tiempo depende totalmente de algunas propiedades físicas del fluido de interés.

Para tener una idea de éste tiempo, se muestran a continuación algunos cálculos hechos sobre los gases He y O en los que se ha supuesto que el coeficiente de expansión volumétrica es $\frac{1}{7}$.

Para el gas He a una temperatura de 15 °C se tiene que :

$$\frac{(9.8\text{m/s}^2)(3 \times 10^{-3}\text{°K})(6.0 \times 10^{-6}\text{m})^3(10^0\text{K})}{(1.5805 \times 10^{-4}\text{m}^2/\text{s})(0.1519 \times 10^{-3}\text{m}^2/\text{s})} \left(\sqrt{\frac{4\kappa t}{a^2 c}} - 1 \right)^3 \leq 1000 \quad [\text{III.23}]$$

relación en la que se ha supuesto que el incremento en temperatura es del orden de 10 °K.

Efectuando los cálculos se encuentra que éste tiempo característico es del orden de 3 segundos.

Finalmente, para el gas oxígeno se tiene la siguiente expresión :

$$\frac{(9.8\text{m/s}^2)(3 \times 10^{-3}\text{°K})(6.0 \times 10^{-6}\text{m})^3(10^0\text{K})}{(1.6 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s})(1.6966403 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s})} \left(\sqrt{\frac{4\kappa t}{a^2 c}} - 1 \right)^3 \leq 1000 \quad [\text{III.24}]$$

y al efectuar los cálculos se encuentra que el tiempo característico es aproximadamente igual a 2 segundos.

Realmente los incrementos en temperatura son un poco más pequeños que 10 °K

lo que ocasiona que el tiempo característico aumente.

Aún cuando sucedan incrementos tales como 10°K esto no debe preocupar - puesto que en condiciones normales los tiempos son del orden de 1 segundo. Además de todo lo anterior, es posible detectar el inicio de éstos efectos convectivos usando los puntos experimentales de temperatura y tiempo obtenidos. Tal detección se basa en el hecho de que en la presencia de convección natural no se cumple ya la relación lineal entre la temperatura y el logaritmo natural del tiempo.

Basados en las condiciones anteriores, se ha diseñado una celda de conductividad térmica para medir la conductividad de gases, cuyos detalles se describen a continuación.

Consiste de un cuerpo principal de acero inoxidable 304 que contiene tres cavidades cilíndricas cada una de ellas con diámetro de $0.984'' (\approx 2.5 \text{ cms})$, $1.968'' (\approx 5 \text{ cms})$ y $2.441'' (\approx 6.2 \text{ cms})$ con profundidades de $6.811'' (\approx 17.3 \text{ cms})$, $0.984'' (\approx 2.5 \text{ cms})$ y $0.787'' (\approx 2 \text{ cms})$, respectivamente. La cavidad más profunda debe de alojar la fuente lineal de calor y las dos cavidades restantes servirán para alojar las conexiones eléctricas, termómetros y conexiones del sistema de presión.

En la figura 8 se muestra la forma de éste cuerpo principal visto de perfil. Si se observa por la parte superior la forma del cuerpo principal es tal y como se muestra en la parte superior de la figura 9. En ésta figura se puede observar que en la pared de la cavidad más profunda existen dos cuñeros de $0.394'' (\approx 1 \text{ cm})$ de ancho y con una profundidad de $6.811'' (\approx 17.3 \text{ cms})$ cada uno.

Estos cuñeros servirán para alojar el soporte de la fuente de calor el cual se describirá más abajo.

En la figura 9 se puede ver también que existen dos pequeñas perforaciones

con un diámetro de 0.196" (≈ 0.5 cms) y una profundidad de 3.406" (≈ 8.65 cms) cada una . Cada orificio servirá para alojar un termómetro que permitirá obtener la temperatura de la pared de la cavidad más profunda.

Por otro lado , en la figura 10 se muestra el soporte de la fuente de calor hecho principalmente de acero inoxidable 304.

Es básicamente un rectángulo con un espacio interior de 0.984" (≈ 2.5 cms) y longitud de 6.299" (≈ 16 cms) que sirve para alojar la fuente de calor . La fuente se sujeta en éste soporte por medio de las dos terminales colocadas en la parte superior las cuales contienen dos pequeños orificios de lado a lado (a lo largo) de tal manera que por ellos se puedan introducir el alambre principal (terminal de enmedio) y el alambre terminal - (terminal izquierda).

Obviamente , éstas dos terminales se deben construir de un material aislante (celorón o teflón *).

En la misma figura se muestra el soporte tal y como se observaría desde la parte superior. En ésta perspectiva deben notarse dos perforaciones de 0.197" de diámetro (≈ 0.5 cms) con una profundidad de 6.417" (≈ 16.3 cms). En cada una de éstas perforaciones se debe introducir un conductor aislado uno de los cuales se conecta con el extremo inferior del alambre principal y el otro con el alambre terminal inferior de tal manera que se pueda tener acceso a ellos fácilmente por medio de los conectores que se describirán a continuación.

Para que el cuerpo principal de la figura 8 se pueda sellar , se necesita un tapón tal como el que se muestra en la figura 9. En la parte media de ésta figura , se observó el tapón desde la parte superior (el material es también acero inoxidable 304).

* Uno de los inconvenientes del celorón con respecto al teflón , radica en que la temperatura máxima que soporta el primero es de 135 °C siendo la del último de aproximadamente 250 °C; Así pues dependiendo de que material se use , se definirá el intervalo de temperatura en que se usa la celda .

En este tapón se conectan siete terminales * dos de las cuales sirven para introducir los termómetros mencionados arriba (en la figura son marcados con los números 1 y 2) y los restantes para hacer conexiones con los terminales mencionados cuando se discutió el soporte de la fuente de calor y con el sistema de presión.

Cuatro de éstos últimos conectores también deben ser de un material aislante . En la parte inferior de ésta figura se muestra el tapón junto con algunos conectores .

Con el fin de evitar deformaciones no axiales de la fuente de calor , se hace necesario unir al extremo inferior de ésta , una pequeña masa cuyo peso debe evitar flexiones del alambre.

Finalmente , en la figura 11 se muestra la celda tal y como se observa en su construcción final . Para obtener el sellado de la misma se hace uso de un sellador tipo "O" ring y un tornillo tipo anillo enroscado en la parte superior del cuerpo principal y que permite oprimir el tapón con el sellador para obtener el sellado deseado.

* Con medidas similares al conector marca HI - SEAL 780 - FSS 1/8 x 1/8 .

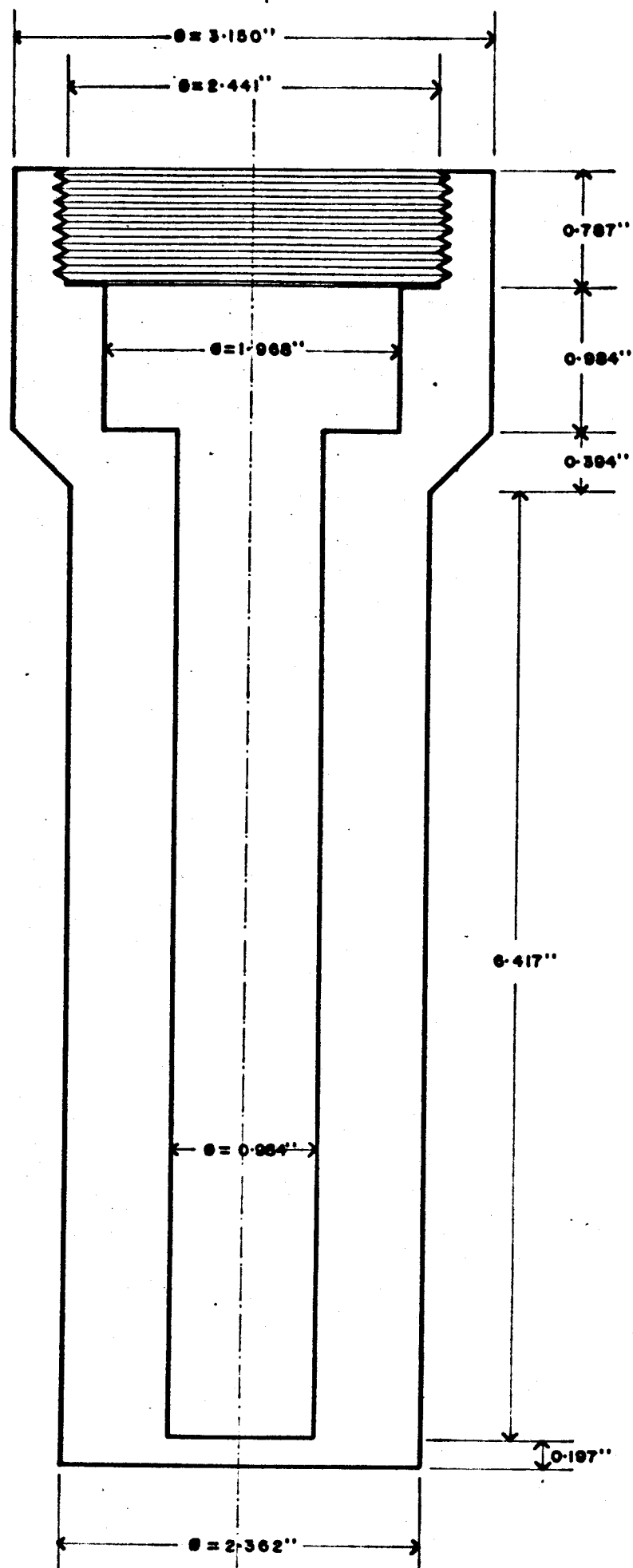


FIG. 8

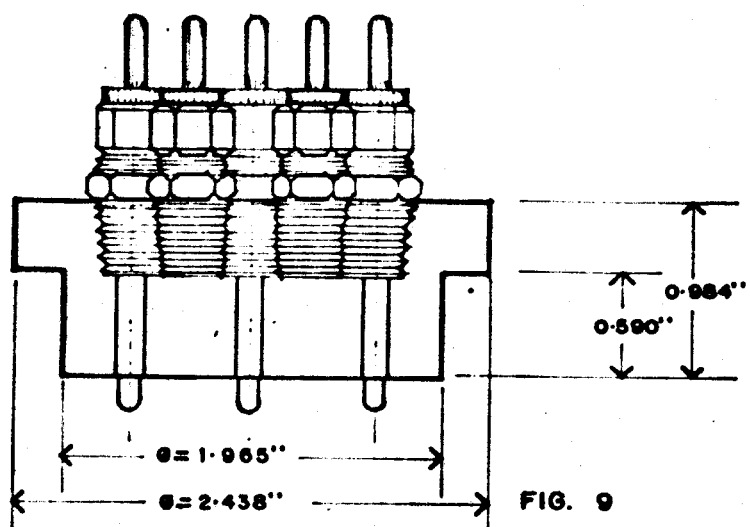
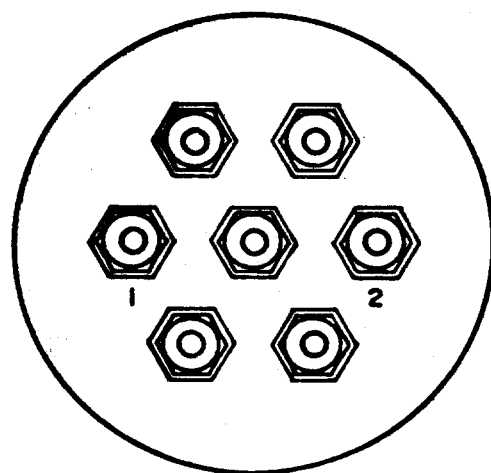
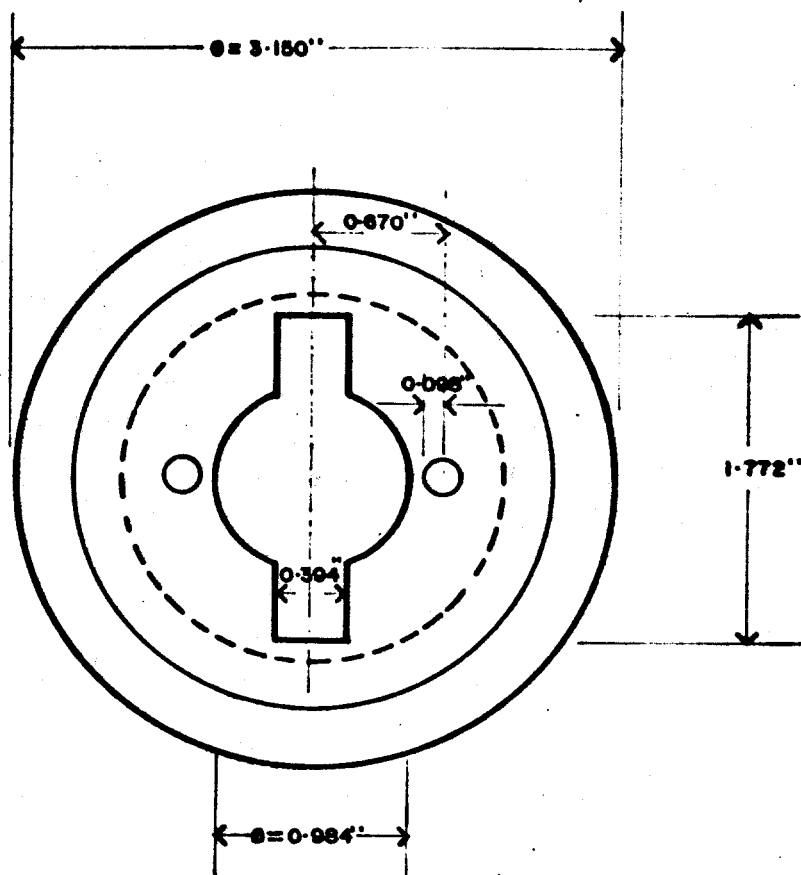
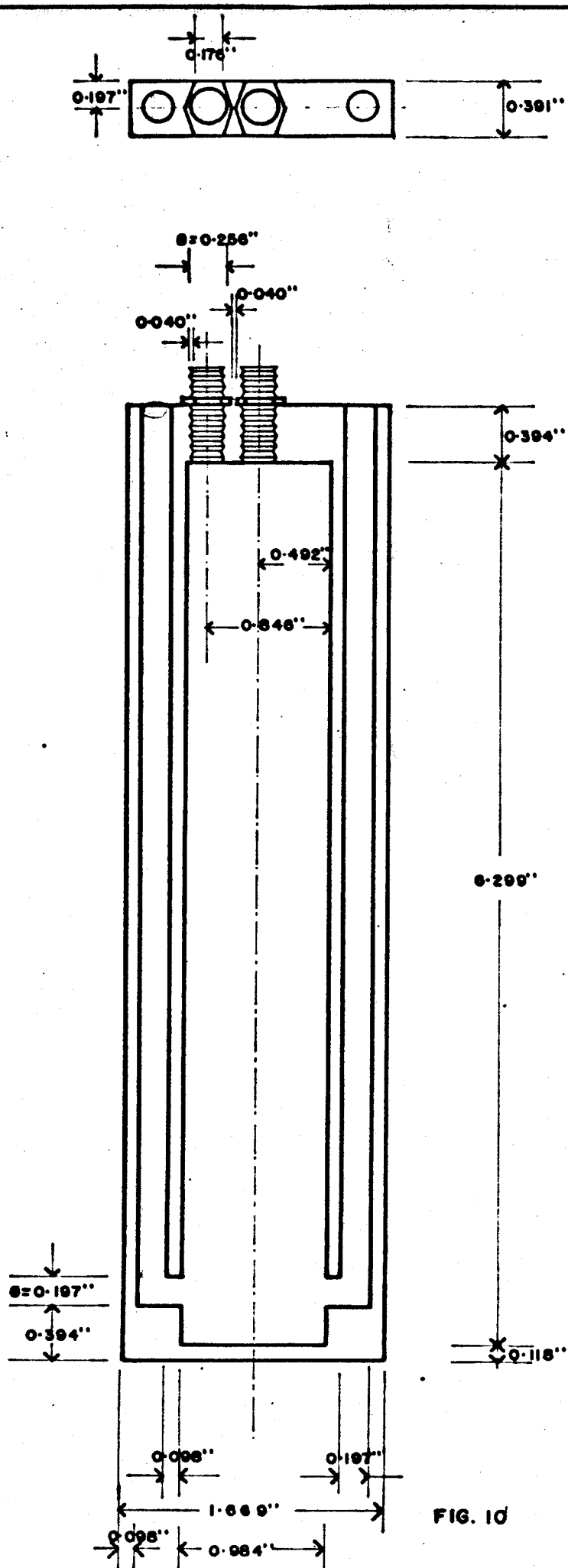


FIG. 9



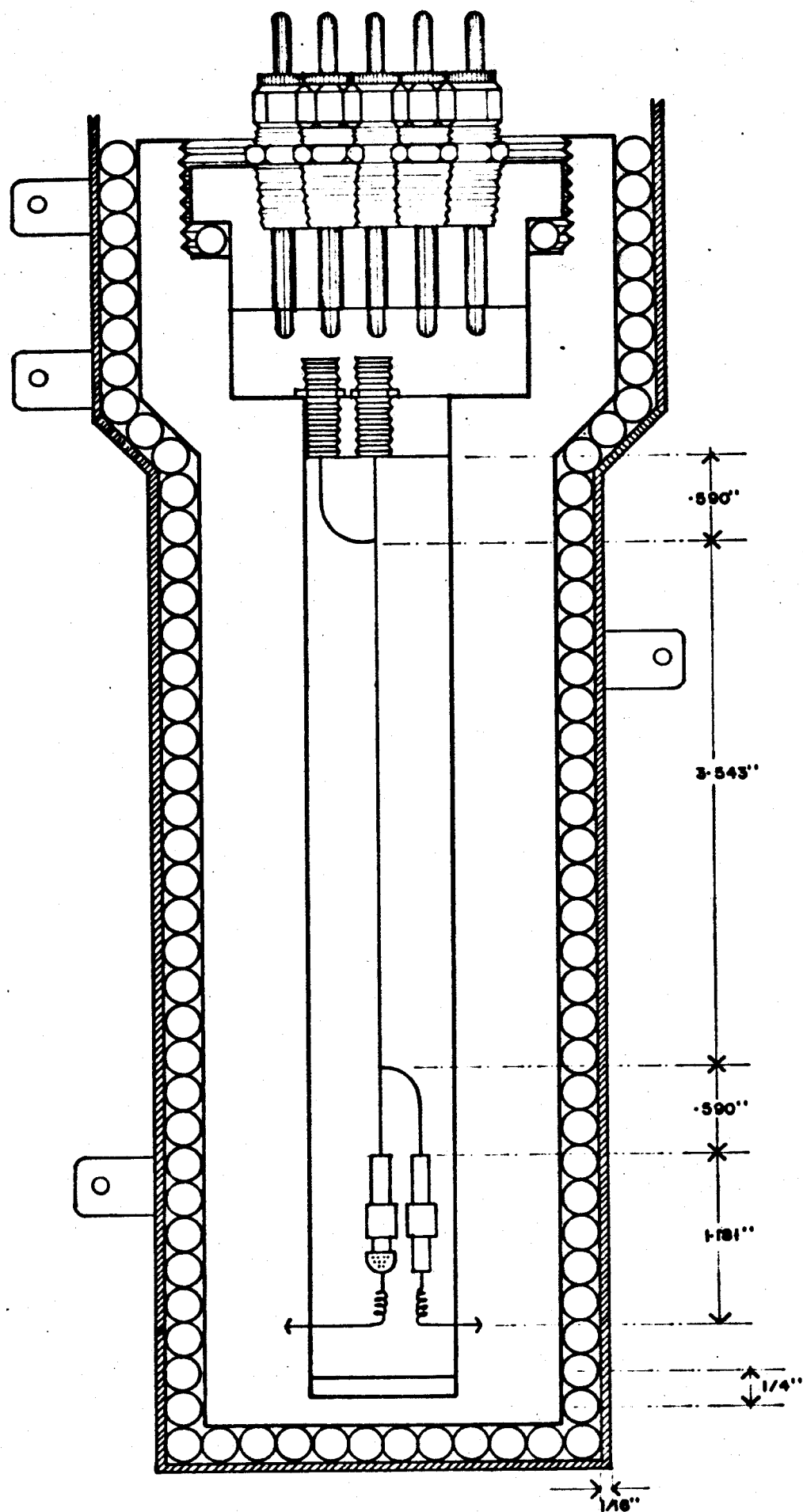


FIG. II

III.3 Baño térmico y sistema de presión.

Se emplea el término baño térmico para designar un horno que consiste de una resistencia de acero en forma tubular o espiral.

La forma de tal resistencia es como la que se muestra en la figura 11.

Para construir éste horno se usa un alambre de 1/4" de diametro que contiene un alambre de acero inoxidable enrollado sobre una base cilíndrica.

Existen en el mercado alambres de 2 mts de longitud con resistencia de acero inoxidable para usarlas con 220 volts y disipar 2500 watts * produciendo una temperatura máxima de 150 °C **.

Con una resistencia de éstas características la potencia disipada por unidad de longitud es de 1250 watts.

La longitud aproximada de la resistencia que forma el horno es de 8.05 mts y por lo tanto la potencia total disipada es de 10062 watts.

Por otro lado, el volumen aproximado de la celda de acero es :

$$V = 5.58 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

y la masa total es

$$M = 4.3783 \text{ Kg}$$

en donde se ha tomado $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

Todo lo anterior permite calcular el calor necesario para elevar la temperatura de 20 °C a 130 °C :

* REVAZ : Victoria 92-2 ZP 1 México , D. F.

** Existen también para temperaturas mayores ($\approx 175 \text{ °C}$) alambres de 5/16" de 2.60 mts de longitud con voltajes de 220 y potencia de 3000 watts .

$$Q = M C_p T = 261\,822.0 \text{ J}$$

en donde se ha tomado $C_p = 0.46 \text{ KJ/Kg } ^\circ\text{K}$.

Como se muestra en la figura 11, el horno se recubre con una lámina metálica de 1/16" de espesor para sujetar la resistencia.

Para evitar pérdidas de calor se sugiere aislar todo con cinta de asbesto.

El control de temperatura se puede lograr usando un variac.

Sistema de presión.

Un esquema se muestra en la figura 12.

consiste de un medidor de vacío (existe el modelo Pirani 14 marca Edwards con escala de 1 a 10^{-4} mbars) con su respectivo sensor de vacío (tipo - Pirani modelo PR25-S).

Además, para medir presiones experimentales se necesita un manómetro con escala mínima de 2 atmosferas.

Antes de iniciar una corrida, se produce vacío en el sistema con la válvula 1 cerrada, usando una bomba mecánica (por ejemplo la bomba marca - Edwards modelo E2M2 que alcanza un vacío de 1.0×10^{-3} mbar sin balastras y de $3. \times 10^{-2}$ mbar con balastras según catálogo Edwards 1985).

Posteriormente, con la válvula 2 cerrada, se abre la válvula 1 para dejar paso libre al gas contenido en el tanque hacia la celda.

En el capítulo V se estudiará el procedimiento que permite obtener la conductividad térmica deseada a través de la resistencia de la fuente lineal haciendo uso de un circuito eléctrico conocido como puente de Wheatstone.

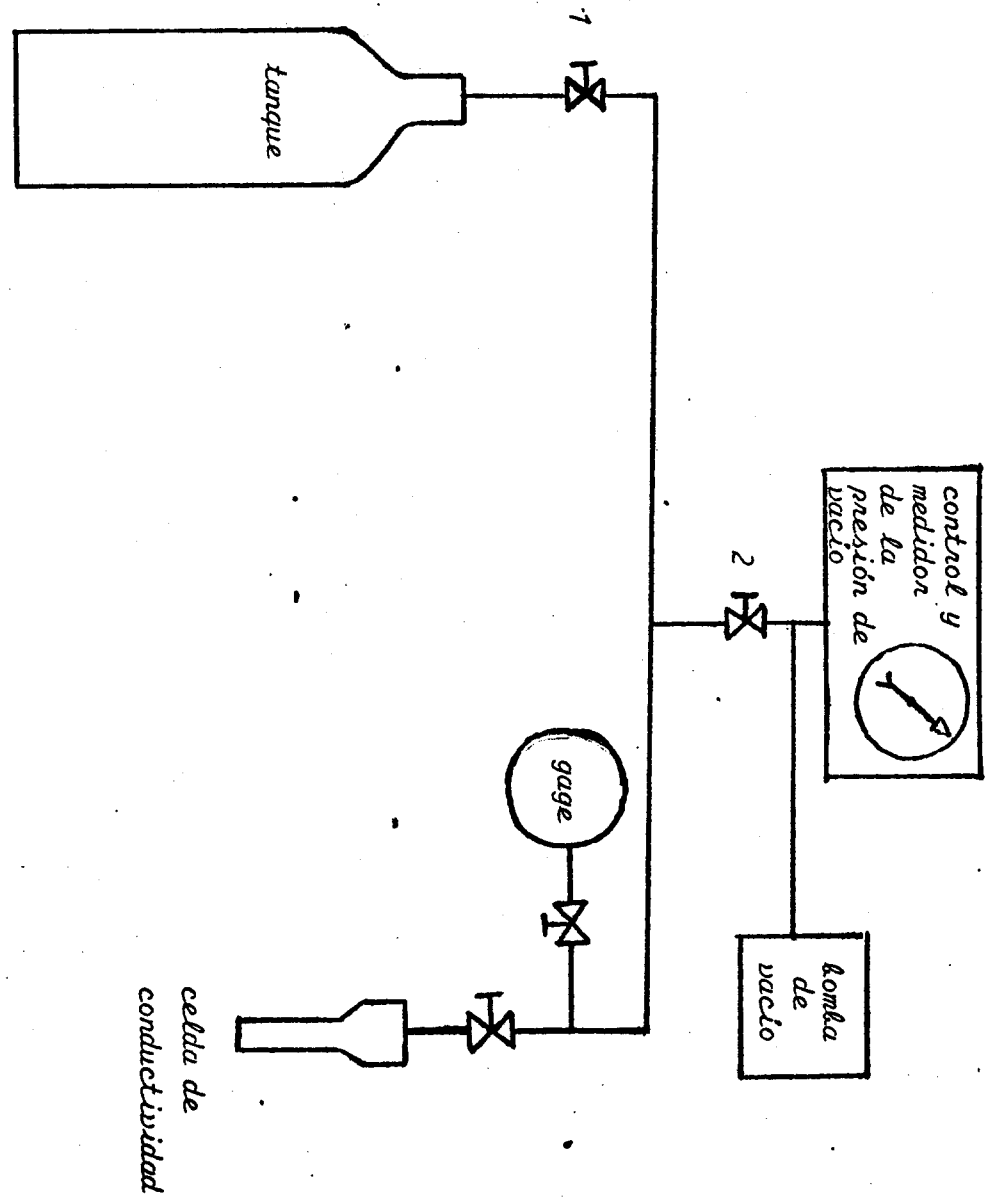


Figura 12.

CAPITULO IV.

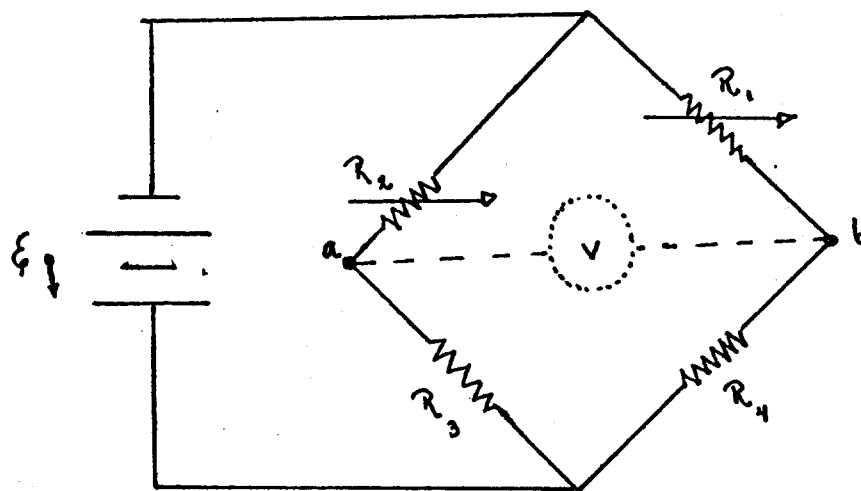
En este capítulo se describirá el procedimiento para obtener en forma experimental el comportamiento temporal de la temperatura en la sección activa de la fuente lineal.

Esto involucra la construcción de un circuito eléctrico conocido como puente de Wheatstone.

La razón por la cual se escoge este tipo de circuito radica en el hecho de que se cuenta con un procedimiento de balanceo, que permite obtener relaciones lineales entre diferencias de potencial y logaritmos naturales de tiempos cuyas ordenadas al origen son nulas.

IV.1 Circuito eléctrico

Considérese, por ejemplo, el circuito mostrado en la siguiente figura:



Se puede demostrar que la diferencia de potencial entre los puntos a y b que marcaría el voltímetro V, viene dada por la expresión:

$$V_{ab} = \frac{R_4 R_2 - R_1 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} \epsilon \quad [\text{IV.1}]$$

con R_1, R_2 y R_4 resistencias conocidas así como el voltaje ϵ de la fuente.

Sin embargo, obsérvese que cuando

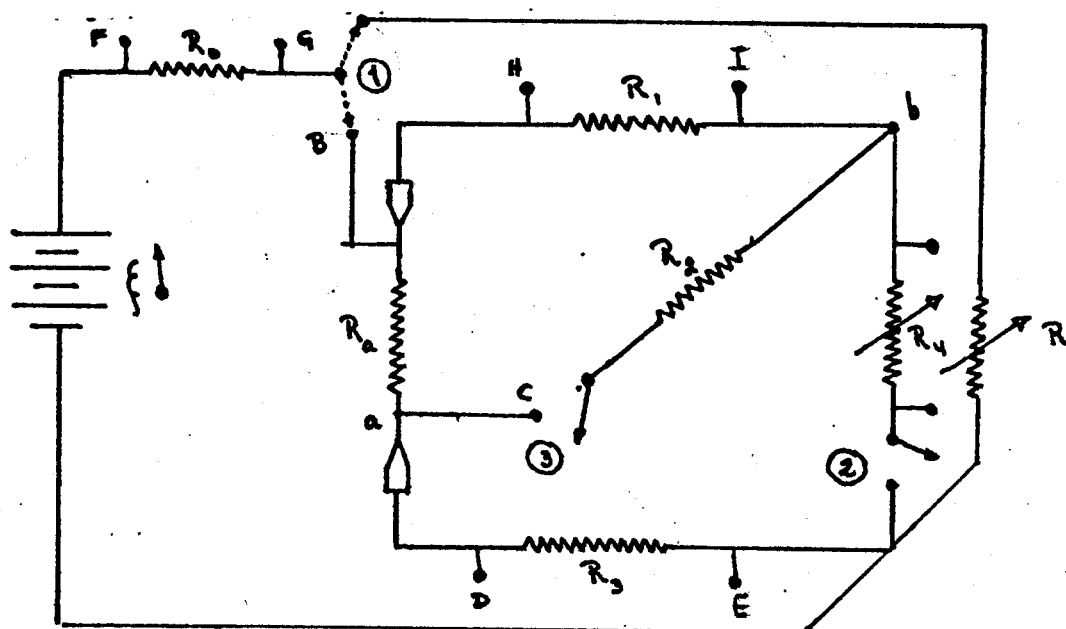
$$R_4 R_2 - R_1 R_3 = 0 \quad [\text{IV.2}]$$

la diferencia de potencial V_{ab} es nula.

Cuando se tiene esta situación, se dice que el puente está balanceado y esto pasa sólo cuando:

$$R_2 = \left(\frac{R_3}{R_4} \right) R_1 \quad [\text{IV.3}]$$

El diseño del circuito eléctrico propuesto, se muestra en la figura siguiente:



Los valores de las resistencias R_0 , R_4 y R_g se suponen conocidos. La resistencia R_g es la resistencia interna del voltímetro que mide la caída de potencial V_{ab} .

La resistencia R_a del diagrama anterior representa la resistencia de la sección activa de la fuente de calor. Esta sección activa forma uno de los brazos del puente y debido a la naturaleza no estacionaria de la temperatura de la misma se puede considerar como una resistencia variable.

Tomando en cuenta que la longitud de ésta sección activa es de 9.0 cms con una área de sección transversal de $1.131 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$ (recuérdese que el radio del alambre es de $6.0 \times 10^{-4} \text{ cms}$) y que la resistividad del platino a una temperatura ambiente de 20°C tiene un valor de $0.111 \times 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$; se encuentra que la resistencia aproximada es de 88 ohms (para obtener éste resultado se ha hecho uso de la ecuación $R = \rho L/A$, en donde ρ es la re-

sistividad, L la longitud y A el área de la sección transversal).

Obsérvese que entre los puntos B-H y C-D existe una resistencia desconocida (llamada resistencia de terminal), que se denotarán como R_{na} y R'_{na} respectivamente.

Más abajo se describirá un procedimiento que permite calcular sus valores. La fuente E es de corriente constante y de alta precisión (existen modelos HP 6177C y 6186C).

Por último, la resistencia R_4 es una resistencia variable que permitirá obtener el balanceo del puente usando un procedimiento mostrado más abajo. Teniendo en mente todo lo anterior, el procedimiento a seguir para obtener la conductividad térmica de un fluido a una temperatura dada es el siguiente:

1. Verificación de la corriente deseada

Esto se logra colocando el interruptor 1 en la posición A y los interruptores 2 y 3 abiertos, lo cual provoca que la corriente circule por las dos resistencias conocidas R_0 y R_1 .

Midiendo la caída de potencial entre las terminales FG es fácil calcular la corriente a partir de la ley de Ohm.

Este procedimiento es necesario para evitar cualquier sobrecarga de corriente en el circuito que pudiera provocar algún desperfecto y además sirve como estabilizador de la corriente.

2. Balanceo del puente y medición de resistencias de secciones no activas y de terminales.

Después de verificar la corriente (paso 1), se abre el interruptor 1 y se cierran los interruptores 2 y 3 colocando el interruptor 1 en la posición B. En este paso circulan corrientes muy pequeñas (del orden de 0.1 mAmp) sobre el brazo que contiene a la fuente lineal y sobre el brazo que contiene a R_1 , de manera que permiten balancear el puente ($V_{ab} = 0$).

Para calcular la corriente sobre cada rama del puente, se mide la diferencia de potencial en los puntos D-E y H-I y se aplica la ley de Ohm (las resistencias R_1 y R_3 son conocidas y los valores se dan más abajo).

Una vez que se conoce la corriente de cada rama se puede calcular la resistencia de la terminal B-H y de la terminal C-D.

Esto se logra midiendo la diferencia de potencial en los puntos B-H y C-D y aplicando la ley de Ohm.

Por último, se procede a abrir los interruptores 1, 2 y 3 en éste orden.

Los pasos anteriores sólo sirven para lograr, básicamente, el balanceo del puente. Los dos pasos siguientes involucran ya el proceso a seguir para obtener la conductividad térmica.

En el paso 2 se manejan corrientes muy pequeñas debido a que con ellas es suficiente obtener el balanceo del puente. Sin embargo, para percibir diferencias de potencial V_{ab} (con el voltímetro digital (DVM)) útiles en el cálculo de la conductividad térmica, se harán circular por el circuito corrientes mucho más grandes (del orden de 10 mA).

Estas corrientes se denominan corrientes de medición.

3. Se repite el paso 1, pero tomando en cuenta ahora corrientes de medición (más abajo se darán los órdenes de magnitud de las mismas).

4. Medición de caídas de potencial V_{ab} en función del tiempo.

Obtenida la condición 3, se abre el interruptor 1 y se cierran los inte-

rruptores 2 y 3 cerrando, por último, el interruptor 1 en la posición B.

La corriente que circula por la rama que contiene a la sección activa de la fuente lineal, provoca que ésta disipe calor haciendo que se comporte

como resistencia variable que será función de la temperatura.

Esta variación de la resistencia activa, modifica la condición de balanceo inicial ya que V_{ab} cambia conforme cambia R_a .

Como se vio en los capítulos anteriores, la temperatura del alambre es una función del tiempo por lo que R_a dependerá también del mismo.

Esto permite deducir que V_{ab} será también función del tiempo y se tiene entonces ahora el problema de determinar V_{ab} como una función de éste.

Esta determinación se logra por medio del voltímetro con resistencia interna R_g el cual cuenta con almacenamiento de lecturas V_{ab} a intervalos de tiempo determinados (Digital Voltmeter HP Modelo 3456 A que cuenta con la capacidad de 48 lecturas / segundo hasta 330 lecturas / segundo; es decir, desde una lectura cada 20.8 milisegundos hasta una lectura cada 3.03 milisegundos, respectivamente).

Al terminar una corrida experimental se cuenta con n datos de voltajes - V_{ab} y sus respectivos tiempos (por ejemplo, para el DVM HP 3456 A se tienen 96 lecturas en dos segundos en intervalos de 20.8 milisegundos o 660 lecturas a intervalos de 3.03 milisegundos).

Como se menciona en el capítulo V; estos datos, unidos con una ecuación teórica que da los valores de V_{ab} , proporcionan la temperatura a la que se encuentra la fuente lineal en cada instante de tiempo.

Una cuestión aún por resolver consiste en determinar el valor o intervalo de valores permisibles de las resistencias mostradas en el circuito.

En este punto es conveniente fijar el intervalo de temperaturas del fluido para el cual es válido el arreglo experimental mostrado; ya que al hacer esto se obtiene el intervalo de variación de la resistencia R_a que, como se verá, es un dato muy importante que permite el cálculo de las otras resistencias.

Como se mencionó en el capítulo III, la máxima temperatura depende del tipo de material escogido para fabricar algunas partes de la celda ubicadas en la parte superior de la misma (conectores aislantes). En ese lugar se mencionó que para material de celorón, ésta temperatura es de 135°C la que se tomará como la temperatura máxima.

En los cálculos que se presentan a continuación, es necesario usar una relación resistencia-temperatura que se tomará como * :

$$R(t) = R(20^{\circ}\text{C}) (1 + \alpha (t - 20^{\circ}\text{C})) \quad [\text{IV.4}]$$

en donde t es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$, $\alpha = 0.0039^{\circ}\text{C}^{-1}$ y $R(20^{\circ}\text{C})$ es la resistencia del alambre a 20°C (temperatura ambiente).

Tomando un valor de la resistividad a 20°C , de $11.1 \times 10^{-6} \Omega - \text{cm}$ y usando la relación

$$R(20^{\circ}\text{C}) = \rho (20^{\circ}\text{C}) \frac{L}{A} \quad [\text{IV.5}]$$

en donde $L = 9.0 \text{ cm}$ y $A = \pi (6.0 \times 10^{-6})^2 \text{ cm}^2$ se tiene

$$\begin{aligned} R_a(20^{\circ}\text{C}) &= \frac{11.1 \times 10^{-6} \Omega - \text{cm} \times 9.0 \text{ cm}}{\pi (6.0 \times 10^{-6})^2 \text{ cm}^2} \quad [\text{IV.6}] \\ &= 88.33 \Omega \end{aligned}$$

que es la resistencia de la sección activa a una temperatura de 20°C .

Así, la relación que da la resistencia de la sección activa a una tempe-

* Es más conveniente obtener tal relación a partir de una calibración del alambre de platino usado, con un termómetro de buena precisión.

natura $t(^{\circ}\text{C})$ es :

$$R_a(t) = 88.33 \, \Omega (1 + \alpha (t - 20^{\circ}\text{C})) \quad [\text{IV.7}]$$

con $\alpha = 0.0039^{\circ}\text{C}^{-1}$.

De la misma manera, para cada una de las resistencias R_{na} y R'_{na} se tiene que :

$$R_{na}(20^{\circ}\text{C}) = \rho(20^{\circ}\text{C}) L_{na}/A \quad [\text{IV.8}]$$

$$= \frac{11.1 \times 10^{-6} \, \Omega \cdot \text{cm} \times 9.0 \, \text{cm}}{\pi (6.0 \times 10^{-4})^2 \, \text{cm}^2}$$

$$= 14.72 \, \Omega$$

y la relación que da la resistencia de la sección no-activa a una temperatura de $t(^{\circ}\text{C})$ es :

$$R_{na}(t) = 14.72 \, \Omega (1 + \alpha (t - 20^{\circ}\text{C})) \quad [\text{IV.9}]$$

con $\alpha = 0.0039^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Usando las dimensiones geométricas conocidas de las secciones activa y no-activa, es necesario calcular ahora la magnitud de la corriente máxima que se debe permitir circular por cada una de éstas.

Suponiendo un calor de fusión por unidad de masa de $113 \, \text{KJ/Kg}$ y una densidad de $21.4 \, \text{Kg/m}^3$ (a una temperatura de 15°C) para el platino se encuentra que :

$$\begin{aligned} \text{masa de la sección activa} &= \pi (6.0 \times 10^{-6} \, \text{m})^2 \times 0.09 \, \text{m} \times 21.4 \times 10^3 \, \text{Kg/m}^3 \\ &= 2.178 \times 10^{-7} \, \text{Kg} \end{aligned} \quad [\text{IV.10}]$$

y

calor de fusión de la sección activa = $113 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$ masa de sección activa

$$= 113 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}} 2.178 \times 10^{-7} \text{ Kg} \quad [\text{IV.11}]$$

$$= 2.46 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Por lo tanto, la potencia máxima que puede disipar la sección activa es

$$W_{\text{max}} = \frac{\text{calor de fusión}}{\text{tiempo de corrida}} \quad [\text{IV.12}]$$

$$= 1.23 \times 10^{-2} \text{ watts.}$$

en donde se ha supuesto que el tiempo de corrida es de 2 segundos.

Procediendo en la misma forma, se pueden encontrar los valores de las mismas cantidades pero para cada una de las secciones no activas.

$$\text{masa de la sección no-activa} = \pi (6.0 \times 10^{-6} \text{ m}) \times 0.015 \text{ m} \times 21.4 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$= 3.63 \times 10^{-8} \text{ Kg} \quad [\text{IV.13}]$$

y

$$\begin{aligned} \text{calor de fusión de} \\ \text{la sección no-activa} &= 113 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}} 3.63 \times 10^{-8} \text{ Kg} \\ &= 4.10 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned} \quad [\text{IV.14}]$$

por lo que la potencia máxima que se permite disipar a cada una de las secciones no-activas es :

$$W_{\max} = 2.05 \times 10^{-3} \text{ watts}$$

[IV.15]

Usando ahora la relación

$$\text{potencia} = i^2 R$$

[IV.16]

no es difícil calcular la corriente máxima que debe circular por la sección activa y la no-activa a una temperatura de 20 °C.

Así

$$I_{\max}(20^\circ\text{C}) = \sqrt{\frac{W_{\max}}{R_a(20^\circ\text{C})}}$$

[IV.17]

$$= 11.8 \text{ mAmp}$$

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{W_{\max}}{R_{na}(20^\circ\text{C})}}$$

[IV.18]

$$= 11.8 \text{ mAmp}$$

A una temperatura de 135 °C se encuentra que :

$$R_a(135^\circ\text{C}) = 127.95 \Omega$$

[IV.19]

$$R_{na}(135^\circ\text{C}) = 21.32 \Omega$$

[IV.20]

$$I_{\max}(135^\circ\text{C}) = \sqrt{\frac{W_{\max}}{R_a(135^\circ\text{C})}}$$

[IV.21]

$$= 9.8 \text{ mAmp}$$

$$i_{\max}(135^\circ\text{C}) = \sqrt{\frac{W_{\max}}{R_{na}(135^\circ\text{C})}}$$

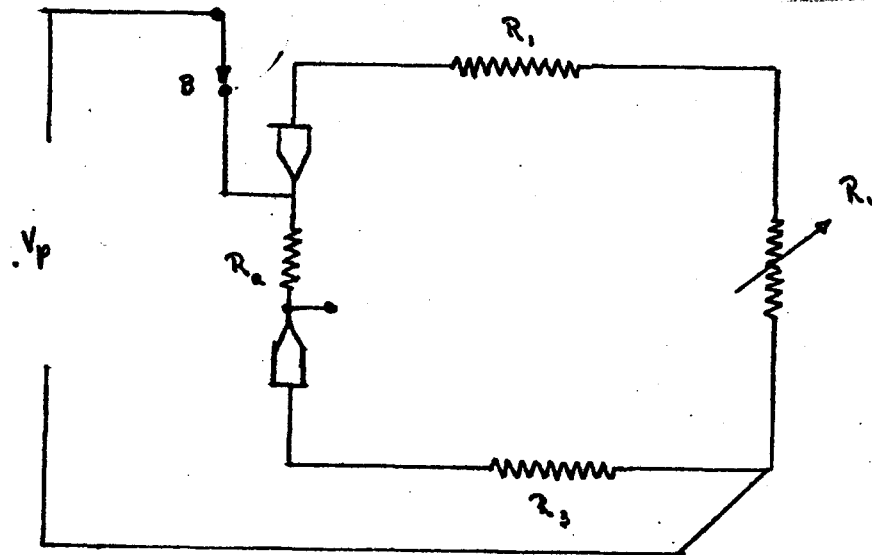
[IV.22]

$$= 9.8 \text{ mAmp}$$

Un dato final está relacionado con el voltaje que se debe aplicar al puente. En la literatura [25] se encuentra que éste tiene un valor de 6 volts, en el presente trabajo por razones de mayor seguridad* se tomarán voltajes de aproximadamente 2.0 volts y 3.0 volts a las temperaturas de 20 °C y 135 °C, respectivamente.

Con todo esto, se está ahora si en posibilidad de calcular el intervalo de valores para cada una de las resistencias mostradas en el circuito eléctrico propuesto.

Para encontrar las relaciones entre estas resistencias y los datos anteriores, supóngase el circuito en posición de efectuar una corrida experimental, tal y como se muestra a continuación:



De esta figura se puede ver que se cumplen las relaciones:

$$R_{na} + R_a + R_3 = \frac{V}{I_a} \quad [IV.23]$$

y

$$R_{na} + R_1 + R_4 = \frac{V}{i_{na}} \quad [IV.24]$$

* y también con el objeto de no manejar resistencias muy grandes comparadas con las del alambre.

Así a 20°C se tiene que :

$$R_3(20^{\circ}\text{C}) = \frac{V_P(20^{\circ}\text{C})}{I_{\max}(20^{\circ}\text{C})} - (R_a(20^{\circ}\text{C}) + R_{na}(20^{\circ}\text{C})) \quad [\text{IV.25}]$$

$$= 66.44 \quad \Omega$$

que es el valor mínimo que puede tener la resistencia R_3 a una temperatura de 20°C .

y a 135°C

$$R_3(135^{\circ}\text{C}) = \frac{V_P(135^{\circ}\text{C})}{I_{\max}(135^{\circ}\text{C})} - (R_a(135^{\circ}\text{C}) + R_{na}(135^{\circ}\text{C})) \quad [\text{IV.26}]$$

$$= 156.85 \quad \Omega$$

que es el valor mínimo que puede tener la resistencia R_3 a una temperatura de 135°C .

Así, basta tomar entonces R_3 mayor que $156.85 \quad \Omega$ para que se cumplan las dos condiciones que consisten en que la corriente no pase de los límites indicados (11.8 mAmp y 9.8 mAmp) tomando en cuenta que V_P debe estar en el intervalo ($2.0, 3.0$) volts.

Analizando ahora la ecuación [IV.24] a 20°C :

$$R_1(20^{\circ}\text{C}) + R_4(20^{\circ}\text{C}) = \frac{V_P(20^{\circ}\text{C})}{i_{\max}(20^{\circ}\text{C})} - R_{na}(20^{\circ}\text{C}) \quad [\text{IV.27}]$$

$$= 154.77 \quad \Omega$$

y a 135°C :

$$R_1(20^\circ\text{C}) + R_4(20^\circ\text{C}) = \frac{V(135^\circ\text{C})}{i_{\max}(135^\circ\text{C})} - R_{na}(135^\circ\text{C}) \quad [\text{IV.28}]$$

$$= 284.80 \quad \Omega$$

y de nuevo basta tomar $R_1 + R_4$ mayor que $284.8 \quad \Omega$ para que se cumplan las condiciones de corriente.

Tomando $R_3 = R_1 = 200 \quad \Omega$ y también R_4 como una resistencia variable con valores en el intervalo $(88.33, 127.95) \quad \Omega$, que es precisamente el intervalo de variación de la fuente lineal, se cumplen las condiciones deseadas sobre ambos brazos del puente.

Finalmente, tomando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a + R_3} + \frac{1}{R_1 + R_4} \quad [\text{IV.29}]$$

es decir, considerando que R debe ser igual a la resistencia equivalente del puente se encuentra el intervalo de variación de la misma; a saber, $(144, 164) \quad \Omega$.

Para R_0 se toma el valor medio de este intervalo aproximadamente; es decir $R_0 = 160 \quad \Omega$.

El circuito final se muestra entonces en la figura 13.*

Una cosa que debe recalcar es que todos los valores anteriores de potencia, corriente y voltaje aplicado al puente son los que deben tomarse cuando se efectue una medición; es decir, cuando se llevan a cabo los pasos 3 y 4 discutidos al principio del presente capítulo.

Las corrientes de balanceo son mucho más pequeñas y se obtienen con voltajes del orden de 0.1 volts. Tomando el valor más pequeño de R ($\approx 144 \quad \Omega$)

* La resistencia R_g es la resistencia interna del voltímetro digital, su valor aproximado es de $10^7 \quad \Omega$ [25].

se tiene que estas corrientes son de un orden de magnitud igual a 0.7 mAmp.

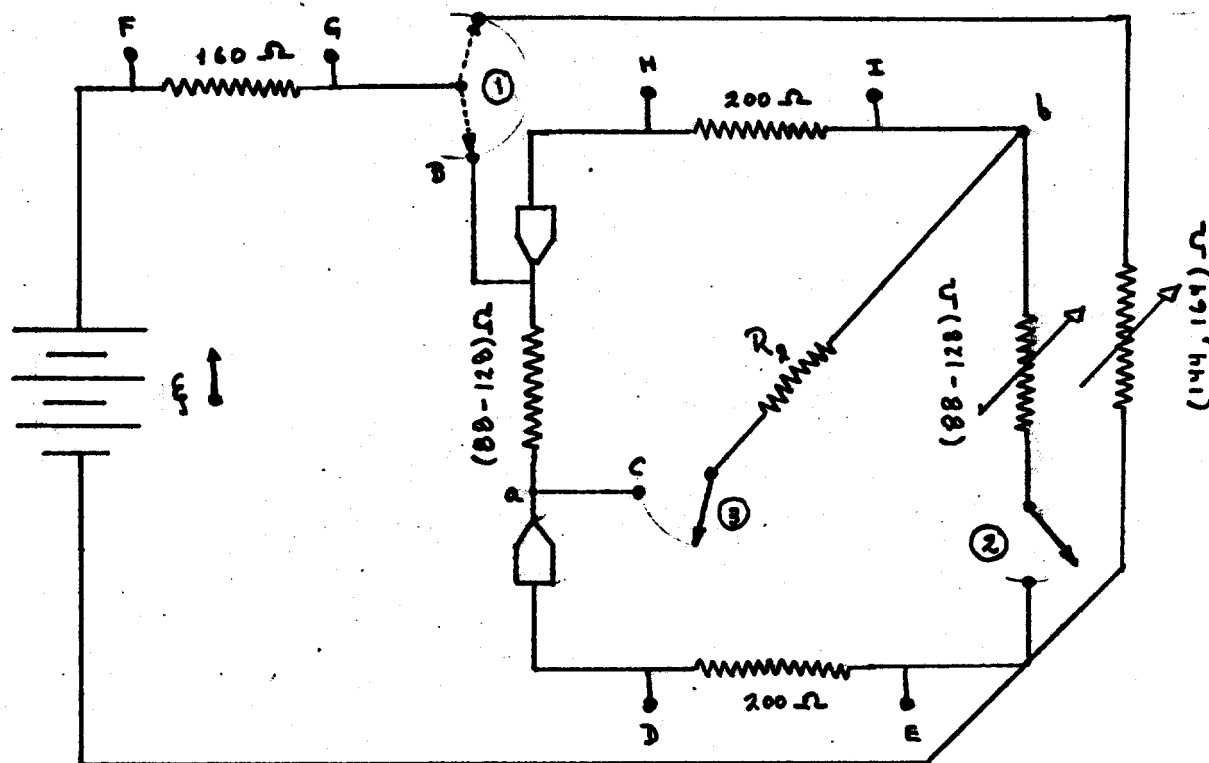


figura 13.

Otro punto que debe considerarse es el de la variación temporal del calor disipado por R_a .

Este calor viene dado por la expresión :

$$\dot{q}(t) = \frac{V_p^2(t)}{R_a(t) + R_{na}(t) + R_3} \cdot \left[\frac{R_a(t)}{L_a} \right] \quad [IV.30]$$

Tomando

$$V_p(t) = V_p(0) + \Delta V_p \quad [IV.31]$$

$$R_a(t) = R_a(0) + \Delta R_a \quad [IV.32]$$

y

$$R_{na} = R_{na}(0) + \Delta R_{na} \quad [IV.33]$$

$$\dot{q}(t) = \frac{V_p^2(0)}{R_a(0) + R_{na}(0) + R_3} \frac{R_a(0)}{L_a} \frac{\left(1 + \frac{\Delta V_p}{V_p(0)}\right) \left(1 + \frac{\Delta R_a}{R_a(0)}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta R_{na} + \Delta R_a}{R_a(0) + R_{na}(0) + R_3}\right)} \quad [IV.34]$$

Suponiendo que en una corrida experimental el cambio en resistencia sea de 2 (lo cual es exagerar) se tiene que :

$$1 + \frac{\Delta R_{na} + \Delta R_a}{R_a(0) + R_{na}(0) + R_3} \approx 1 \quad \text{y} \quad 1 + \frac{\Delta R_a}{R_a(0)} \approx 1 \quad [IV.35]$$

Por otro lado , según datos de Roder , $\frac{\Delta V_p}{V_p(0)}$ es del orden de 0.1 % y así

$$\dot{q}(t) \approx \frac{V_p^2}{R_a(0) + R_{na}(0) + R_3} \frac{R_a(0)}{L_a} \quad [IV.36]$$

$$= \dot{q}(0)$$

es decir , sin mucho error se puede afirmar que la variación temporal del calor disipado por R_a es despreciable [30].

Finalmente , haciendo uso de las leyes de Kirchhoff , del circuito eléctrico propuesto se concluye que la relación teórica del voltaje V_{ab} leído por el DVM es :

$$V_{ab}(t_i) = \frac{(R_4 R_a - (R_1 + R_{na})(R'_{na} + R_3)) R_g}{\Delta} V_p(t_i) \quad [IV.37]$$

en donde t_i es el instante i -ésimo de tiempo y

$$\begin{aligned} \Delta = & (R_1 + R_{na})R_a R_4 + (R_1 + R_{na})R_a(R_3 + R'_{na}) + R_4(R_3 + R'_{na}) + R_4(R_3 + R'_{na})(R_1 + R_{na}) + \\ & + (R_1 + R_{na} + R_4)(R_3 + R'_{na} + R_{na})R_g \end{aligned} \quad [IV.38]$$

y como ya se sabe

$$R_1 = R_3 = 200 \quad \Omega$$

En el próximo capítulo se discutirá el modo de usar los n datos experimentales de V_{ab} y t_i junto con la ecuación [IV.37] para calcular la conductividad térmica del fluido.

CAPITULO V.

El objetivo de este capítulo es mostrar el procedimiento a seguir con los datos experimentales de voltaje $V_{ah}(t_i)$, junto con su respectivo tiempo t_i , para obtener la conductividad térmica.

Como se recordara, la variación temporal de la temperatura ideal en la frontera del alambre y el fluido de interés, viene dada por la expresión

$$\Delta T_{ideal}(t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \quad [V.1]$$

en donde a es el radio del alambre, $\dot{q}$ es el flujo lineal de calor y κ es la difusividad del fluido.

Otra manera de escribir la ecuación [V.1] es:

$$\begin{aligned} \Delta T_{ideal} &= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\ln t + \ln \left(\frac{4 \kappa}{a^2 c} \right) \right) \quad [V.2] \\ &= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa}{a^2 c} \right) + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln t \end{aligned}$$

Esta última ecuación muestra que existe una relación lineal entre la diferencia de temperatura $\Delta T_{ideal}(t)$ y $\ln t$.

La pendiente de esta relación es:

$$m = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \quad [V.3]$$

Según esto, si se logran obtener datos $\Delta T_{ideal}(t)$ y $\ln t$ y se ajustan a una función lineal, a partir de la pendiente de esta relación es fácil calcular la conductividad térmica.

El problema radica entonces en determinar $\Delta T(t)$ y su respectivo tiempo *ideal* t . Este problema se logra resolver utilizando la expresión [II.114] ; a saber :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) &= \Delta T_w + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} \right) a^2 \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) - \\ &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{a^2}{4 \kappa t} \left(2 - \frac{\kappa}{\kappa_w} \right) - \frac{\dot{q}}{8 \pi \lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda_w} \right) + \frac{8 \pi a \sigma_0 T_0^3}{\dot{q}} \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) \right)^2 \\ &+ \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\ln\left(\frac{4 \kappa t}{k^2 c}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-g_i^2 \kappa t / k^2) (\pi y_0(g_i))^2 \right] - \\ &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{\lambda}{aH} - \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \frac{p_r g^2 t^2}{2 C_{pg} T_0^2} - \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \right)^2 \frac{\ln 4}{T_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c}\right) \right)^2 - \\ &- \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} (\zeta - \Phi) \ln 4 - \frac{\dot{q} L R t}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V} \end{aligned} \quad [V.4]$$

expresión en la que ΔT_w es la temperatura real del alambre al tiempo t , y los demás términos son correcciones a esta temperatura.

Así, el problema de encontrar ΔT *ideal* se traduce en el problema de encontrar la temperatura ΔT_w del alambre a todo tiempo t .

Con el circuito eléctrico presentado en el capítulo IV se mencionó que para cada instante de tiempo t_i , se obtiene un voltaje $V_{ab}(t_i)$ por medio del DVM.*

Suponiendo que el número de lecturas de V_{ab} y sus tiempos correspondien-

* El voltímetro digital no registra voltajes de una manera continua en el tiempo; es decir, si t_i representa el tiempo de la lectura i -ésima, la lectura $(i+1)$ -ésima será un tiempo $t_{i+1} - t_i$ después. Por ejemplo, para el DVM HP 3456 A, $t_{i+1} - t_i$ es igual a 20.8 o 3.03 milisegundos.

tes es n y que se cuenta con una relación $R_a(T)^*$, es posible calcular ΔT_w usando un procedimiento iterativo en el que interviene la ecuación teórica

$$V_{ab}(t_i) = \frac{(R_4 R_a(T) - (R_1 + R_{na})(R'_{na} + R_3)) R_g}{\Delta} V_p(t_i) \quad [V.5]$$

en donde $V_p(t_i)$ es el voltaje aplicado al puente en el tiempo i -ésimo y

$$\begin{aligned} \Delta = & (R_1 + R_{na}) R_a(T) R_4 + (R_1 + R_{na}) R_a(T) (R_3 + R'_{na}) + \\ & + R_4 (R_3 + R'_{na}) R_a(T) + R_4 (R_3 + R'_{na}) (R_1 + R_{na}) + \\ & + (R_1 + R_{na} + R_4) (R_3 + R'_{na} + R_a(T)) R_g \end{aligned} \quad [V.6]$$

Recordando que $\Delta T_w(t) = T_w(t) - T_0$, en donde T_0 es la temperatura inicial o temperatura del baño; se puede decir en pocas palabras, que el método iterativo consiste en corregir la temperatura T_0 en una cierta cantidad y con ella se calcula la resistencia $R_a(T)$ [25].

Con esta resistencia se calcula el $V_{ab}(t_i)$ teórico y el resultado se compara con el $V_{ab}(t_i)$ experimental; si ambos coinciden la cantidad con la que se corrigió T_0 representa a ΔT_w ; si no, se corrige de nuevo T_0 y se repite el proceso [25].

Este proceso se efectúa para cada uno de los n instantes de tiempo t_i obteniéndose así n valores de $\Delta T_w(t_i)$.

De esta manera está resuelto, en principio, el problema de determinar ΔT_w a todo tiempo t y lo que resta es sustituir a ΔT_w en la ecuación que la relaciona con ΔT_{ideal} para poder calcular ésta última.

En la ecuación [V.4], como ya se vio, aparecen términos de corrección

* Esto se puede lograr por medio de un proceso de calibración.

a la temperatura ΔT_w , algunos de los cuales pueden despreciarse.

Tales términos despreciados son:

1. El de corrección debido a la conductividad térmica finita del alambre cuyo orden de magnitud es aproximadamente igual a $4 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{K}$.
2. El de corrección debido a que el producto $\rho_g C_{pg}$ y la conductividad térmica λ depende de la temperatura que, según McLaughlin et al, es menor del 1 % de la diferencia de temperatura ΔT_w .
3. El de corrección debido a la variación de la densidad y a la disipación viscosa cuyo orden de magnitud es de $7 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{K}$ y
4. El salto de temperatura, que para gases introduce un error relativo del orden de 0.06 % en la pendiente de la gráfica ΔT vs. $\ln t$, según datos de McLaughlin et al.

Así la ecuación con la que se tiene que trabajar es:

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{ideal}}(t) \approx \Delta T_w(t) + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} \right) a^2 \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) - \quad [V.7] \\ - \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \frac{a^2}{4 \kappa t} \left(2 - \frac{\kappa}{\kappa_w} \right) + \frac{8 \pi a \sigma_0}{\dot{q}} \frac{T_o^3}{\dot{q}} \left(\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) \right)^2 - \frac{\dot{q} L R t}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V} \\ + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(\ln \left(\frac{4 \kappa t}{b^2 c} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-g_i^2 \kappa t / b^2) (\pi y_0(g_i))^2 \right) \end{aligned}$$

En la expresión [V.7] el segundo y tercer término representan la corrección a la temperatura debido a la capacidad calorífica del alambre distinta de cero, el cuarto término es el de corrección a la temperatura debido a los efectos por radiación suponiendo que las paredes de la celda se comportan como cuerpos negros, el quinto término es el de corrección a la temperatura debido a una variación adiabática de la presión y el sexto y

último término es el de corrección debido al radio finito b de la pared externa de la celda.

En esta relación $Y_0(x)$ es la función Bessel de segunda clase de orden cero, g_i son los ceros de la función Bessel $J_0(x)$, R es la constante universal de los gases (8.3149×10^3 J/Kg mol $^\circ K$), c es una constante igual a 1.781 y σ_0 es la constante de Stefan-Boltzmann (5.67×10^{-8} watts /m² $^\circ K^4$). Los primeros cinco valores de g_i al igual que los de $Y_0(g_i)$ son los que se muestran a continuación [32]:

i	g_i	$Y_0(g_i)$
1	2.4048	0.509927
2	5.5201	-0.338935
3	8.6537	0.271009
4	11.7915	-0.232425
5	14.9309	0.206431

Como puede observarse; en la ecuación que relaciona ΔT_{ideal} con ΔT_w , la idea de sustituir ΔT_w por su valor calculado experimentalmente y efectuar las operaciones con los términos de corrección para calcular ΔT_{ideal} supone un conocimiento al menos aproximado de la conductividad térmica λ del fluido así como de su difusividad κ .

De hecho, en la literatura [25] se calcula la conductividad térmica por medio de una ecuación a la temperatura T_0 del baño y la difusividad por medio de la relación

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_g C_{pg}} \quad [V.8]$$

la cual se supone constante.

Conocidos κ y λ se calculan los términos de corrección a todo tiempo t y se suman con los correspondientes ΔT_w .

Este procedimiento da entonces n valores $\Delta T_{ideal}^{(t)}$ con sus respectivos tiempos, lo que permite obtener una relación lineal

$$\Delta T_{ideal}^{(t)} = a + m \ln t \quad [V.9]$$

en la que es posible conocer m y por lo tanto la conductividad térmica

$$\lambda = \frac{\dot{q}}{4 \pi m} \quad [V.10]$$

Una de las principales desventajas de este procedimiento radica en el hecho de usar una relación $\lambda(T)$ para calcular un valor aproximado de λ y usar éste en el cálculo de ΔT_{ideal} .

Es claro que la relación $\lambda(T)$ tiene un cierto error que necesariamente se traslada al cálculo de ΔT_{ideal} al sustituirlo en la ecuación [V.7].

Además, se ha observado que aún cuando se cumpla la relación

$$\lambda = \frac{\dot{q}}{4 \pi m}$$

no se tiene que

$$\Delta T_{ideal} = \Delta T_w + \text{términos de corrección} \quad [V.11]$$

con la λ encontrada (esto se logró verificar usando datos de Roder).

Este último comentario va a llevar a un procedimiento numérico que permite evaluar $\Delta T_{ideal}^{(t)}$ usando no una λ estimada sino la λ realmente buscada, evitando de esta manera introducir un error más.

Para lograr este procedimiento considérese lo siguiente:

Habiendo obtenido $\Delta T_w(t_i)$ y por lo tanto $R_a(t_i)$ es posible calcular el flujo lineal de calor $\dot{q}(t_i)$ por medio de la relación

$$\dot{q}(t_i) = \frac{V_p^2(t_i)}{(R'_{na} + R_a + R_3)^2 L_a} R_a(t) \quad [V.12]$$

Por lo tanto, después de una corrida experimental se cuenta prácticamente con datos de t_i , $\Delta T_w(t_i)$ y $\dot{q}(t_i)$ con $i = 1, \dots, n$ y para cada i se cumple la relación [V.7]; a saber,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}_i}{4 \pi \lambda} \ln\left(\frac{4 \lambda t_i}{\rho_g C_{pg} a^2 c}\right) &\approx \Delta T_{wi} + \frac{\dot{q}_i}{4 \pi \lambda^2} \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 t_i} \right) a^2 \ln\left(\frac{4 \lambda t_i}{\rho_g C_{pg} a^2 c}\right) - \\ &- \frac{\dot{q}_i}{4 \pi \lambda^2} \frac{a^2 \rho_g C_{pg}}{4 t_i} \left(2 - \frac{\lambda}{\rho_g C_{pg} \kappa_w} \right) + \frac{8 \pi a \sigma_0 T_0^3}{\dot{q}_i \lambda^2} \left(\frac{\dot{q}_i}{4 \pi} \ln\left(\frac{4 \lambda t_i}{\rho_g C_{pg} a^2 c}\right) \right)^2 - \\ &- \frac{\dot{q}_i L R t_i}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V} + \frac{\dot{q}_i}{4 \pi \lambda} \left(\ln\left(\frac{4 \lambda t_i}{\rho_g C_{pg} b^2 c}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{g_m^2 \lambda t_i}{\rho_g C_{pg} b^2}\right) (\pi y_0(g))^2 \right) \end{aligned} \quad [V.13]$$

en la que se ha tomado

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_g C_{pg}}$$

y la única variable desconocida es λ .

Tomando ahora las definiciones

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{\dot{q}_i}{4 \pi} ; & a_{2i} &= \frac{4 t_i}{\rho_g C_{pg} a^2 c} \\ a_{3i} &= \left(\frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 t_i} \right) a^2 ; & a_{4i} &= - \frac{\dot{q}_i a^2 \rho_g C_{pg}}{16 \pi t_i} \end{aligned} \quad [V.14]$$

$$a_{5i} = \frac{8 \pi a \sigma_0 T_0^3}{\dot{q}_i} \quad ; \quad a_{6i} = - \frac{\dot{q}_i L R t_i}{\rho_g C_{pg} C_{vg} V}$$

se tiene que la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \Delta T_{wi} + \frac{a_{1i} a_{3i}}{\lambda^2} \ln(a_{2i} \lambda) + \frac{a_{4i}}{\lambda^2} (2 - \lambda \rho) + \frac{a_{5i}}{\lambda^2} (a_{1i} \ln(a_{2i} \lambda))^2 + \\ a_{6i} + \frac{a_{1i}}{\lambda} \left(\ln(a_{2i} \lambda \left(\frac{a}{b}\right)^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-g_m^2 a_{2i} \lambda \left(\frac{a}{b}\right)^2) (\pi y_0(g_m))^2 \right) - \\ - \frac{a_{1i}}{\lambda} \ln(a_{2i} \lambda) \approx 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \Delta T_{wi} + \frac{1}{\lambda^2} \left[a_{1i} \ln(a_{2i} \lambda) (a_{3i} + a_{5i} a_{1i} \ln(a_{2i} \lambda)) + a_{4i} (2 - \lambda \rho) \right] + \\ a_{6i} + \frac{a_{1i}}{\lambda} \left(\ln(a_{2i} \lambda \left(\frac{a}{b}\right)^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-g_m^2 a_{2i} \lambda \left(\frac{a}{b}\right)^2) (\pi y_0(g_m))^2 \right) - \\ - \frac{a_{1i}}{\lambda} \ln(a_{2i} \lambda) \approx 0 \end{aligned} \quad [V.15]$$

en donde

$$\rho = \frac{1}{\rho_g C_{pg} \kappa_w} \quad .$$

Así, λ debe cumplir la última relación además de la ecuación *

$$m = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \quad [V.16]$$

Esto se puede lograr usando el método iterativo propuesto más abajo.

Este procedimiento iterativo tiene como base el hecho de que existe un intervalo de tiempo al principio de una corrida, en el que $\dot{q}_i$ varía de una manera apreciable y que después de que se ha pasado éste intervalo, ya no lo hace.

De hecho, éste último intervalo es el que realmente se debe tomar en cuenta para el cálculo de la conductividad térmica.

En sí el procedimiento iterativo es el que se menciona a continuación:

Para un punto experimental fijo n dentro del intervalo de tiempo en que $\dot{q}_i$ no varía, se calcula $\lambda_n^{(j)}$ ** por medio de la ecuación:

$$\begin{aligned} \Delta T_{wn}^{(j)} + \frac{1}{\lambda_n^{(j)2}} (a_{1n} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)}) (a_{3n} + a_{5n} a_{1n} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)})) + \\ + a_{4n} (2 - \lambda_n^{(j)} \rho)) + a_{6n} + \frac{a_{1n}}{\lambda_n^{(j)}} (\ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)} (\frac{a}{2h})^2) + \quad [V.17] \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \exp (-g_m^2 a_{2n} \lambda_n^{(j)} (\frac{a}{2h})^2) (\pi y_0(g_m))^2) - \\ - \frac{a_{1n}}{\lambda_n^{(j)}} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)}) = 0 \end{aligned}$$

*con los datos $\Delta T_{ideal} = \Delta T_w +$ términos de corrección y $\ln(t_i)$ para cada i es posible obtener m por medio de mínimos cuadrados como se verá más adelante. Aquí $\dot{q}$ representa un flujo promedio que de ahora en adelante se denotará como $\tilde{q}$. Como se vio en el capítulo IV, $\dot{q}_i$ varía muy poco en el tiempo, por ejemplo, Roder obtiene un flujo inicial de 8.129×10^{-1} watts m^{-1} y un flujo final de 8.128×10^{-1} watts m^{-1} .

** j representa la j -ésima iteración.

con n fijo y en donde $\Delta T_{wn}^{(0)} = \Delta T_{wn}$ es la temperatura del alambre al tiempo t_n .

Con el valor $\lambda_n^{(j)}$ obtenido en el paso anterior se calculan las temperaturas $\Delta T_i^{(j)}$ para cada i ($i = 1, \dots, n$) usando la ecuación:

$$\begin{aligned} \Delta T_{wi}^{(j)} &+ \frac{1}{\lambda_n^{(j)2}} \{ a_{1i} \ln (a_{2i} \lambda_n^{(j)}) (a_{3i} + a_{5i} a_1 \ln (a_{2i} \lambda_n^{(j)})) + \\ &+ a_{4i} (2 - \lambda_n^{(j)} \rho) \} + a_{6i} + \frac{a_{1i}}{\lambda_n^{(j)}} \left(\ln (a_{2i} \lambda_n^{(j)}) \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right) + \quad [V.18] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left(-g_m^2 a_{2i} \lambda_n^{(j)} \left(\frac{a}{2\ell} \right)^2 \right) (\pi y_0(g_m))^2 = \Delta T_i^{(j)} \end{aligned}$$

Con los n valores $\Delta T_i^{(j)}$ y $\ln t_i$, se calcula la pendiente $m^{(j)}$ de la recta $\Delta T^{(j)} = a^{(j)} + m^{(j)} \ln t$ dada por la ecuación

$$m^{(j)} = \frac{n \sum_{i=1}^{\infty} (\ln t_i) \Delta T_i^{(j)} - \sum_{i=1}^{\infty} (\ln t_i) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \Delta T_i^{(j)} \right)}{n \sum_{i=1}^{\infty} (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \ln t_i \right)^2} \quad [V.19]$$

y sabiendo que se cumple la relación [V.13], con $m^{(j)}$ y $\lambda_n^{(j)}$ se puede calcular el flujo $\dot{q}_n^{(j)}$ de la siguiente manera

$$\dot{q}^{(j)} = 4 \pi m^{(j)} \lambda_n^{(j)} \quad [V.20]$$

este flujo se compara con el flujo promedio $\tilde{q}$ y si son iguales entonces se calcula la conductividad térmica

$$\lambda_n^{(j)} = \frac{\dot{q}_n}{4 \pi m^{(j)}} \quad [V.21]$$

y el programa termina; si no, $\dot{q}_n^{(j)}$ sirve para calcular el término de corrección a la temperatura $\Delta T_n(\dot{q}_n)$ del modo que se describe a continuación:

Tomando el punto experimental fijo n , se desarrolla la temperatura

$\Delta T_n^{(j)}(\dot{q}_n^{(j)})$ de la iteración j -ésima alrededor de $\tilde{q}$; es decir,

$$\Delta T_n^{(j)}(\dot{q}_n^{(j)}) = \Delta T_n^{(j)}(\tilde{q}) + \frac{d \Delta T_n^{(j)}(\dot{q}_n^{(j)})}{d \dot{q}_n} (\dot{q}_n^{(j)} - \tilde{q}) \quad [V.22]$$

Por otro lado, se sabe que para una situación ideal se debe cumplir la ecuación

$$\Delta T_n^{(j)}(\dot{q}) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda_n^{(j)}} \ln\left(\frac{4\kappa t_n}{a^2 c}\right) \quad [V.23]$$

Por lo que

$$\frac{d \Delta T_n^{(j)}(\dot{q}_n)}{d \dot{q}} = \frac{1}{4\pi\lambda_n^{(j)}} \ln\left(\frac{4\kappa t_n}{a^2 c}\right) \quad [V.24]$$

Así, se obtiene el error $\Delta_n^{(j)}$ con $\Delta T_n^{(j)}(\dot{q}_n^{(j)})$ y $\Delta T_n^{(j)}(\tilde{q})$ en la iteración j -ésima; a saber,

$$\Delta_n^{(j)} = \left(\frac{\dot{q}_n^{(j)} - \tilde{q}}{4\pi\lambda_n^{(j)}} \right) \ln\left(\frac{4\kappa t_n}{a^2 c}\right) \quad [V.25]$$

Con esta $\Delta_n^{(j)}$ se modifica $\Delta T_{wn}^{(j)}$ de la manera siguiente *

$$\Delta T_{wn}^{(j+1)} = \Delta T_{wn}^{(j)} + \Delta_n^{(j)} \quad [V.26]$$

y se sustituye en la ecuación [V.18]

* Modificar $\Delta T_{wn}^{(j)}$ es equivalente a modificar $\Delta T_n^{(j)}$ ya que ambas están relacionadas en forma lineal.

$$\begin{aligned}
& \Delta T_{un}^{(j)} + \frac{1}{\lambda_n^{(j)2}} \{ a_{1n} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)}) (a_{3n} + a_{5n} a_{1n} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)})) + \\
& + a_{4n} (2 - \lambda_n^{(j)} \rho) \} + a_{6n} + \frac{a_{1n}}{\lambda_n^{(j)}} (\ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)}) \left(\frac{a}{2k} \right)^2) + \quad [V.27] \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \exp (- g_m^2 a_{2n} \lambda_n^{(j)} \left(\frac{a}{2k} \right)^2) (\pi y_0(g_m))^2) - \\
& - \frac{a_{1n}}{\lambda_n^{(j)}} \ln (a_{2n} \lambda_n^{(j)}) = 0
\end{aligned}$$

con la que se calcula de nuevo $\lambda_n^{(j+1)}$, repitiéndose todo el proceso.

La ventaja de este procedimiento sobre el usado en la literatura, radica principalmente, en el hecho de que no es necesario conocer una relación de la conductividad térmica del fluido para calcular las diferentes correcciones a la temperatura experimental tal y como se puede ver en la iteración mostrada.

Como ejemplo práctico, se ha tomado un conjunto de datos $V_{ab}(t_i)$ y $\ln t_i$ del artículo de Roder, a los cuales se les aplica el procedimiento mostrado arriba.

Los datos corresponden a una corrida experimental tomando al helio como fluido de prueba. La celda se colocó en un baño con una temperatura de $-304.74^\circ K$.

Roder utilizó un DVM que efectuaba lecturas de V_{ab} cada 3.02 milisegundos obteniendo en total 250 voltajes de los cuales, debido a condiciones de inestabilidad en el flujo de calor, desechó los cincuenta primeros.

Aún cuando el método experimental usado por Roder fue el del alambre compensador, este no tiene mucha importancia ya que el introducir un segundo alambre es equivalente a usar una sección activa para evitar efectos de extremo. La única diferencia radica en el hecho práctico de que se tiene que trabajar con dos relaciones de temperaturas - resistencia (una para cada alambre).

El programa que calcula la conductividad térmica [25] se presenta en el apéndice IX, junto con sus modificaciones que toman en cuenta el proceso iterativo dado arriba.

Tomando los puntos 51 y 250 como referencia para calcular la temperatura experimental, el punto 151 para calcular el flujo promedio y la ecuación que da la raíz con número de referencia igual a 151; se presentan en este mismo apéndice los resultados para la conductividad térmica del gas helio a la temperatura de $304.74^{\circ}\text{K} + \Delta T (= 3.05^{\circ}\text{K}) = 307.79^{\circ}\text{K}$.

Como puede observarse, la conductividad térmica calculada es $0.16987 \text{ watts/m}^{\circ}\text{K}$ siendo el valor calculado por Roder igual a $0.17030 \text{ watts/m}^{\circ}\text{K}$. Esto da un error de 0.25% entre ambos valores. Sin embargo, en la ecuación de ajuste propuesta por Roder; a saber,

$$\lambda = A + B\rho + C(e^{0.13\rho} - 1.0)$$

donde $A = 0.153099$, $B = 0.108257 \times 10^{-2}$, $C = 0.613662 \times 10^{-3}$ con λ en $\text{watts/m}^{\circ}\text{K}$ y $\rho(T = 307.79^{\circ}\text{K}, p = 33.6 \text{ Mpa}) = 11.4223 \text{ mol/litro}$, se obtiene un valor de $0.16756 \text{ watts/m}^{\circ}\text{K}$ que da un error con el valor de $0.16987 \text{ watts/m}^{\circ}\text{K}$ de 1.4% y con el valor de $0.17030 \text{ watts/m}^{\circ}\text{K}$ de 1.6% . Este resultado sugiere la posibilidad de disminuir el error de ajuste en la ecuación presentada por Roder.

CONCLUSION.

Se puede decir, en resumen, que se han revisado los métodos de medición de conductividad térmica de fluidos y al hacerlo se vió que el método de alambre caliente no estacionario (ACNE) es el más conveniente para efectuar medidas de conductividad térmica de gases (de acuerdo con ciertos criterios).

Después de lo anterior, se revisaron tanto el cálculo ideal de λ usando el método ACNE así como las diferentes correcciones a la temperatura que son necesarias para obtener λ .

Teniendo en mente el cálculo de errores en la temperatura experimental, se ha diseñado una celda conductividad térmica para presiones mínimas del orden de 4 atmósferas (dependiendo del fluido estudiado) y temperatura máxima de 135°C (dependiendo del material con que se construye la celda).

El diseño conduce a un error relativo en la temperatura del orden de 0.92% (tomando también en cuenta los términos despreciados en el capítulo V).

Esto lleva a un error relativo de 0.87 % en la conductividad térmica* a una temperatura aproximada de 300°K (suponiendo un error relativo igual a cero en la determinación del radio del alambre y en las propiedades C_{pg} y ρ_g).

Finalmente, se discute un método numérico para tratar los datos experimentales obtenidos con la celda.

Tal método se utiliza con datos de la literatura [25] obteniéndose un valor aceptable de la conductividad térmica del helio.

* Si $f = f(x, y, z)$, el error absoluto de f en términos de los errores absolutos de x, y, z es:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$$

Algún trabajo posterior a éste, estaría destinado a la construcción de la celda, con el objeto de verificar los resultados mostrados.

Cuando se logre tal cosa, se sugiere probar con gases ligeros a presiones bajas ya que existe en la literatura suficiente información que permitira comparar los resultados obtenidos.

Además, con lo mostrado aquí se esta ya en posibilidades de ponderar de manera confiable (usando algunos criterios [27,28]), los resultados reportados por autores que usaron el método ACNE.

APENDICE I.

La segunda condición de frontera que se necesita para solucionar la ecuación de difusión para el problema de una línea infinita en un medio infinito, se puede obtener partiendo de la expresión de Fourier escrita en coordenadas cilíndricas :

$$\dot{Q}_{flux} = - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial T}{\partial z} e_z \right) \quad [AI.1]$$

Tomando en cuenta que para éste problema particular existe simetría axial y acimutal, es decir que la temperatura no depende del ángulo ϕ ni de la coordenada z , se encuentra que la ecuación de Fourier se transforma a :

$$\dot{Q}_{flux} = - \lambda \frac{\partial T}{\partial r} e_r \quad [AI.2]$$

Ecuación vectorial que en términos escalares es de la forma :

$$\dot{Q}_{flux} = - \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad [AI.3]$$

por otro lado, el flujo de calor se encuentra a partir de la relación :

$$\dot{Q} = 2 \pi r l \dot{Q}_{flux} \quad [AI.4]$$

así

$$\frac{\dot{Q}}{2 \pi r} = \dot{Q}_{flux} \quad [AI.5]$$

con lo cual la relación de Fourier se transforma en la siguiente ecuación:

$$-2\pi\lambda n \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}$$

[AI.6]

que en el límite deseado da la segunda condición de frontera :

$$2\pi\lambda \lim_{n \rightarrow 0} \left(n \frac{\partial T}{\partial n} \right) = -\dot{q}$$

[AI.7]

APENDICE II.

Para encontrar la distribución de temperatura producida por una fuente lineal infinita en un medio infinito y que satisface la ecuación diferencial parcial :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{AII.1}]$$

junto con las condiciones de frontera e inicial :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta T(r, t) = 0 \quad ; \quad r = \infty, \quad t \geq 0 \quad [\text{AII.2}]$$

$$2 \pi \kappa \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -q \quad ; \quad r = 0, \quad t \geq 0 \quad [\text{AII.3}]$$

$$\Delta T = T(r, t) - T(r, 0) = 0 \quad ; \quad r \geq 0, \quad t \leq 0 \quad [\text{AII.4}]$$

se aplica la transformada de Laplace :

$$\tilde{T}(r, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) T(r, t) dt \quad [\text{AII.5}]$$

a la ecuación diferencial [AII.1] obteniéndose la ecuación diferencial auxiliar no homogénea dada por la siguiente expresión :

$$\frac{d^2 \tilde{T}(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{T}(r, p)}{dr} - \frac{p}{\kappa} \tilde{T}(r, p) = -\frac{T_0}{\kappa} \quad [\text{AII.6}]$$

ecuación en la que se ha supuesto que inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio térmico de tal manera que $T(r, 0)$ es igual a la temperatura del baño T_0 .

La solución de la ecuación [AII.6] viene dada por la relación :

$$\tilde{T}(r, \rho) = \Theta_{\rho} + \Theta \quad [\text{AII.7}]$$

en la cual Θ_{ρ} es una solución particular y Θ es la solución de la ecuación homogénea :

$$\frac{d^2 \Theta(r, \rho)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Theta(r, \rho)}{dr} - \frac{R}{K} \Theta(r, \rho) = 0 \quad [\text{AII.8}]$$

Es claro que una solución particular es la función constante :

$$\Theta_{\rho} = \frac{T_0}{\rho} \quad [\text{AII.9}]$$

y por consiguiente la solución general es de la forma :

$$T(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + \Theta(r, \rho) \quad [\text{AII.10}]$$

Para encontrar la solución $\Theta(r, \rho)$ de la ecuación homogénea se debe transformar ésta a una ecuación diferencial de Bessel modificada de orden cero, esto se logra tomando el cambio de variable dado por :

$$x = \sqrt{\frac{R}{K}} r \quad [\text{AII.11}]$$

con lo cual se obtiene la siguiente ecuación :

$$x^2 \frac{d^2 \Theta(x, \rho)}{dx^2} + x \frac{d \Theta(x, \rho)}{dx} - x^2 \Theta(x, \rho) = 0 \quad [\text{AII.12}]$$

La solución general de ésta ecuación diferencial^[33, 34] tiene la forma siguiente :

$$\Theta(x, p) = A I_0(x) + B K_0(x) \quad [\text{AII.13}]$$

en donde

$$I_0(x) = J_0(ix) \quad [\text{AII.14}]$$

$$K_0(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} s\pi} \left(I_{-s} - I_s(x) \right) \quad [\text{AII.15}]$$

y $J_0(ix)$ es la función Bessel de primera especie de orden cero con argumento complejo.

Con este resultado la forma de la solución general es ahora :

$$\tilde{T}(r, p) = \frac{T_0}{p} + A I_0\left(\sqrt{\frac{p}{K}} r\right) + B K_0\left(\sqrt{\frac{p}{K}} r\right) \quad [\text{AII.16}]$$

en donde las constantes A y B se deben determinar a partir de las condiciones de frontera impuestas sobre $\tilde{T}(r, p)$.

Estas condiciones de frontera se pueden obtener a partir de las condiciones impuestas sobre $T(r, t)$.

Sabiendo que en la primera condición se tiene que :

$$T(r, t) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} T_0 \quad [\text{AII.17}]$$

se encuentra que :

$$\tilde{T}(r, p) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{T_0}{p} \quad [\text{AII.18}]$$

Esta condición impone sobre la constante A el valor cero puesto que la función $I_0(x)$ crece mucho para distancias grandes.

Así

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{AII.19}]$$

Por otro lado, a partir de la segunda condición de frontera para $T(r, t)$, se encuentra que la condición impuesta sobre $\tilde{T}(r, \rho)$ es de la forma:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \tilde{T}(r, \rho)}{\partial r} = - \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda \rho} \quad [\text{AII.20}]$$

Esta relación permite obtener el valor de la constante de integración B de la siguiente manera:

sabiendo que para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$ se tiene que^[33,34]:

$$\frac{d}{dx} K_n(x) = - \frac{1}{2} \left(K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x) \right) \quad [\text{AII.21}]$$

$$K_n(x) = K_{-n}(x) \quad [\text{AII.22}]$$

se encuentra que:

$$r \frac{\partial \tilde{T}(r, \rho)}{\partial r} = - B \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r K_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{AII.23}]$$

Además el comportamiento asintótico de la función $K_n(x)$ para $n = 1, 2, \dots$ y x pequeña es de la forma^[33,34]:

$$K_n(x) \approx \frac{2^{n-1} \Gamma(n)}{x^n}, \quad x \rightarrow 0 \quad [\text{AII.24}]$$

usando este hecho se encuentra que para $n = 1$:

$$\kappa_7(x) = \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r} \quad [\text{AII.25}]$$

así

$$r \frac{\partial \tilde{T}(r, \rho)}{\partial r} = -B = -\frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda \rho} \quad [\text{AII.26}]$$

Tomando el límite en ambos extremos de la ecuación [AII.26] se encuentra entonces que la constante de integración B es :

$$B = \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda \rho} \quad [\text{AII.27}]$$

Así la solución general , con las condiciones iniciales y de frontera mencionados , es :

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda \rho} \kappa_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{AII.28}]$$

esta ecuación permite encontrar la solución $T(r, t)$ del problema inicial al aplicarle la transformada inversa de Laplace :

$$T(r, t) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\Gamma} \exp(\rho t) \tilde{T}(r, \rho) d\rho \quad [\text{AII.29}]$$

en donde Γ es una trayectoria compleja que no incluye los polos del integrando [31].

Consultando cualquier tabla de transformadas inversas^[31], se encuentran las siguientes relaciones :

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(\rho t)}{t} dt = 1 \quad [\text{AII.30}]$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(p t) \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{\kappa}} r \right)}{p} dp = \frac{1}{2} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{AII.31}]$$

ésto permite escribir la solución general buscada de la manera siguiente:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{AII.32}]$$

o en términos de la diferencia de temperaturas :

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad [\text{AII.33}]$$

APENDICE III.

Debido a la capacidad calorífica finita del alambre, el flujo de calor por unidad de longitud producido por el alambre está dado por la ecuación de balance energético:

producción de calor en el alambre = calor absorbido en el volumen del alambre + calor absorbido en el volumen comprendido desde $r = a$ hasta $r = +\infty$

que en forma de ecuación es:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{d}{dt} \int_{\text{volumen de alambre}} \rho_w C_{pw} T(r, t) |_{r=a} r dr d\phi dz + \frac{d}{dt} \int_{a \leq r < \infty} \rho_g C_{pg} T(r, t) r dr d\phi dz \\ &= \int_0^a \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_w C_{pw} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} |_{r=a} r dr d\phi dz + \int_a^\infty \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_g C_{pg} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} r dr d\phi dz \end{aligned} \quad [AIII.1]$$

Tomando en cuenta que las magnitudes ρ_w , C_{pw} , $\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} |_{r=a}$, ρ_g y C_{pg} no son funciones de las variables (r, ϕ, z) se encuentra la expresión:

$$\dot{Q} = \rho_w C_{pw} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} |_{r=a} \pi a^2 L + L \int_a^\infty 2 \pi r \rho_g C_{pg} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dr \quad [AIII.2]$$

o, en términos de $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \rho_w C_{pw} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} |_{r=a} \pi a^2 + 2 \pi \rho_g C_{pg} \int_a^\infty r \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dr \quad [AIII.3]$$

Para efectuar la integral del segundo sumando de la derecha de [AIII.3], se tiene que hacer uso de la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{r}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [AIII.4]$$

así

$$\int_a^\infty r \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dr = \kappa \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr \quad [AIII.5]$$

$$= \kappa r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a^\infty$$

$$= -\kappa a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

en donde se ha supuesto además que $r \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow 0$ como $r \rightarrow \infty$.

Así la nueva segunda condición de frontera que toma en cuenta la capacidad calorífica finita del alambre es :

$$\dot{q} = \pi a^2 \rho_w C_{pw} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{r=a} = -2 \pi a \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad [AIII.6]$$

APENDICE IV.

El problema consiste ahora en resolver la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{AIV.1}]$$

con las condiciones iniciales y de frontera dadas por las expresiones :

$$T = T_0, \quad t \leq 0, \quad 0 \leq r \leq \infty \quad [\text{AIV.2}]$$

$$T = T_0, \quad t \geq 0, \quad r \rightarrow \infty \quad [\text{AIV.3}]$$

$$\dot{q} = \pi a^2 \rho_w C_{pw} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r=a} = -2\pi a \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad t \geq 0$$

$$\text{y } r=a \quad [\text{AIV.4}]$$

Usando la transformada de Laplace se puede ver que la ecuación de difusión y las condiciones anteriores se transforman en las siguientes relaciones:

$$\frac{d^2 T(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT(r, p)}{dr} - \frac{p}{\kappa} T(r, p) = -\frac{T_0}{\kappa} \quad [\text{AIV.5}]$$

$$T = \frac{T_0}{p}, \quad t \geq 0, \quad r \rightarrow \infty \quad [\text{AIV.6}]$$

$$\frac{\dot{q}}{p} + \pi a^2 \rho_w C_{pw} T_0 - \pi a^2 \rho_w C_{pw} \tilde{T}(r, p) \Big|_{r=a} = -2\pi a \lambda \left. \frac{\partial \tilde{T}(r, p)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

$$[\text{AIV.7}]$$

Consultando el apéndice II, puede verificarse que la solución general de la ecuación diferencial [AIV.5] es de la forma siguiente:

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + A I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{AIV.8}]$$

Para que se satisfaga la condición de frontera [AIV.6] es necesario que A sea cero ya que la función $I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right)$ diverge cuando r crece mucho. De ésta manera la solución se reduce a la expresión:

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{AIV.9}]$$

la expresión [AIV.9] debe satisfacer la segunda condición de frontera, es decir que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{q}}{\rho} + \pi a^2 \rho_w C_{pw} T_0 - \pi a^2 \rho_w C_{pw} \rho \left[\frac{T_0}{\rho} + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \right] \\ = 2 \pi a \lambda \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} B K_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \end{aligned} \quad [\text{AIV.10}]$$

a partir de éste resultado es posible obtener el valor de la constante B . Al hacer algunas operaciones algebraicas se obtiene que ésta constante es:

$$B = \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda} \frac{1}{\rho \left[\mu a K_1(\mu a) + \frac{\rho_w C_{pw}}{2 \rho C_{pg}} \mu^2 a^2 K_0(\mu a) \right]} \quad [\text{AIV.11}]$$

en donde $\mu = \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}$.

Así, la solución general completa es:

$$\bar{T}(r, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{\dot{q}}{2\pi\lambda} \frac{K_0(\sqrt{\frac{p}{k}} r)}{p \left[\mu a K_1(\mu a) + \frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}} \mu^2 a^2 K_0(\mu a) \right]} \quad [\text{AIV.12}]$$

La solución de la ecuación de difusión se obtiene a partir de la expresión [AIV.12] aplicando la transformada inversa de Laplace.

Para encontrar la transformada inversa $T(r, t)$ se utilizan los siguientes desarrollos de las funciones Bessel:

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{64} x^4 + \frac{1}{2304} x^6 + \dots \quad [\text{AIV.13}]$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{384} x^5 + \frac{1}{18432} x^7 + \dots \quad [\text{AIV.14}]$$

$$K_0(x) = - \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] I_0(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{128} x^4 + \frac{11}{13824} x^6 + \dots \quad [\text{AIV.15}]$$

$$K_1(x) = \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] I_1(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} x - \frac{5}{32} x^3 - \frac{10}{1152} x^5 + \dots [\text{AIV.16}]$$

Si se toman $x = \mu r$, $x_0 = \mu a$ y $c = e^\gamma$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{K_0(\mu r)}{\mu a K_1(\mu a) + \frac{\rho_w C_{pw}}{2\rho_g C_{pg}} \mu^2 a^2 K_0(\mu a)} &= \frac{K_0(x)}{x_0 K_1(x_0) + \frac{\rho_w C_{pw}}{2\rho_g C_{pg}} x_0^2 K_0(x_0)} \quad [\text{AIV.17}] \\ &= \frac{- \ln \left(\frac{cx}{2} \right) - \frac{x^2}{4} \left[\ln \left(\frac{cx}{2} \right) - 1 \right] + \dots}{1 + \frac{x_0^2}{2} \left[\ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{\rho_w C_{pw}}{2\rho_g C_{pg}} \left[x_0^2 \ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) - \frac{x_0^4}{4} \left[\ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) - 1 \right] + \dots \right]} \\ &= - \frac{\ln \left(\frac{cx}{2} \right) + \frac{x^2}{4} \left[\ln \left(\frac{cx}{2} \right) - 1 \right] + \dots}{1 + \frac{x_0^2}{2} \left[\ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{\rho_w C_{pw}}{2\rho_g C_{pg}} x_0^2 \ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) + \dots} \end{aligned}$$

y al efectuar la división se obtiene el desarrollo:

$$\frac{K_0(x)}{x_0 K_1(x_0) + \frac{\rho_w C}{\rho_g C_{pg}} \frac{\rho_w}{x_0^2} K_0(x_0)} = - \ln \left(\frac{cx}{2} \right) - \frac{x^2}{4} \left[\ln \left(\frac{cx}{2} \right) - 1 \right] \quad [AIV.18]$$

$$- \frac{\rho_w C}{2 \rho_g C_{pg}} x_0^2 \ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) \ln \left(\frac{cx}{2} \right) + \frac{x_0^2}{2} \left[\ln \left(\frac{cx_0}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \ln \left(\frac{cx}{2} \right) + \dots$$

Aplicando algunos trucos algebraicos, la ecuación anterior se puede poner de tal manera que la transformada inversa quede en términos de la variable ya conocida $\frac{n^2}{4 \kappa t}$:

$$\frac{K_0(x)}{x_0 K_1(x_0) + \frac{\rho_w C}{\rho_g C_{pg}} \frac{\rho_w}{x_0^2} K_0(x_0)^2} = - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) - \frac{x^2}{8} \ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) + \frac{x^2}{4} + \quad [AIV.19]$$

$$+ \frac{x_0^2}{8} \left(\ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) \right)^2 + \frac{x_0^2}{4} \left(\ln \left(\frac{x_0}{x} \right) - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) -$$

$$- \frac{\rho_w C}{8 \rho_g C_{pg}} x_0^2 \left(\ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) \right)^2 - \frac{\rho_w C}{4 \rho_g C_{pg}} x_0^2 \ln \left(\frac{x_0}{x} \right) \ln \left(\frac{c^2 x^2}{4} \right) + \dots$$

Finalmente se ha obtenido la relación:

$$\frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{R}{\kappa}} n \right)}{\sqrt{\frac{R}{\kappa}} a K_1 \left(\sqrt{\frac{R}{\kappa}} a \right) + \frac{\rho_w C}{\rho_g C_{pg}} \left(\sqrt{\frac{R}{\kappa}} a \right)^2 K_0 \left(\sqrt{\frac{R}{\kappa}} a \right)} = - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) - \frac{n^2 R}{8 \kappa} \ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) + \quad [AIV.20]$$

$$+ \frac{n^2 R}{4 \kappa} + \frac{a^2 R}{8 \kappa} \left(\ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) \right)^2 + \frac{a^2 R}{4 \kappa} \left(\ln \left(\frac{a}{n} \right) - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) -$$

$$- \frac{\rho_w C}{8 \rho_g C_{pg}} \frac{a^2 R}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) \right)^2 - \frac{\rho_w C}{4 \rho_g C_{pg}} \frac{a^2 R}{\kappa} \ln \left(\frac{a}{n} \right) \ln \left(\frac{c^2 n^2 R}{4 \kappa} \right) + \dots$$

En términos de este desarrollo, la transformada de Laplace $\tilde{T}(n, p)$ es dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(r, \rho) = & \frac{T_0}{\rho} + \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda \rho} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) - \frac{r^2 \rho}{8 \kappa} \ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) + \frac{r^2 \rho}{4 \kappa} + \right. \\
& + \frac{a^2 \rho}{8 \kappa} \left(\ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) \right)^2 + \frac{a^2 \rho}{4 \kappa} \left(\ln \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) - \\
& \left. - \frac{\rho_w C_{pw}}{8 \rho_g C_{pg}} \frac{a^2 \rho}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) \right)^2 - \frac{\rho_w C_{pw}}{4 \rho_g C_{pg}} \frac{a^2 \rho}{\kappa} \ln \left(\frac{a}{r} \right) \ln \left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4 \kappa} \right) + \dots \right]
\end{aligned}$$

[AIV.21]

Aplicando entonces la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, suponiendo que $\frac{r^2}{4 \kappa t} \ll 1$ [31], se obtiene la distribución de temperaturas del problema considerado; a saber:

$$\begin{aligned}
T(r, t) = & T_0 + \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{r^2}{4 \kappa t} \right) + \frac{a^2}{4 \kappa t} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) - \right. \\
& \frac{a^2}{4 \kappa t} \left(\ln \left(\frac{a}{r} \right) - \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}} \frac{a^2}{4 \kappa t} \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_g C_{pg}} \frac{a^2}{4 \kappa t} \ln \left(\frac{a}{r} \right) + \\
& \left. + \dots \right]
\end{aligned}$$

[AIV.22]

Reagrupando términos la solución es finalmente:

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \frac{r^2}{4 \kappa t} + \dots \right]$$

[AIV.23]

que a primer orden en $\frac{r^2}{4 \kappa t}$ es, finalmente:

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right)$$

[AIV.24]

APENDICE V.

El problema consiste ahora en resolver la ecuación de difusión con las condiciones iniciales y de frontera dadas por las siguientes relaciones

$$\Delta T(r, t) = 0 \quad , \quad t \leq 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq \infty \quad [AV.1]$$

$$\Delta T(r, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad [AV.2]$$

$$-\frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad r = a \quad [AV.3]$$

Aplicando la transformada de Laplace, tal como se hizo en el apéndice II, a la ecuación de difusión junto con las condiciones iniciales y de frontera se obtiene la ecuación diferencial no-homogénea :

$$\frac{d^2 \tilde{T}(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{T}(r, p)}{dr} - \frac{p}{\kappa} \tilde{T}(r, p) = -\frac{T_0}{\kappa} \quad [AV.4]$$

con las condiciones siguientes :

$$\tilde{T}(r, p) \rightarrow \frac{T_0}{p} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad [AV.5]$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(r, p)}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{2 \pi a \lambda p} \quad , \quad r = a \quad [AV.6]$$

cuya solución es de la forma [33, 35, 31],

$$\tilde{T}(r, p) = \frac{T_0}{p} + A I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\kappa}} r\right) + B K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\kappa}} r\right) \quad [AV.7]$$

Para que se satisfaga la condición [AV.1] es necesario que la constante

A sea igual a cero, puesto que la función $I_0(\sqrt{\frac{p}{k}} r)$ diverge cuando r crece. Usando la condición [AV.2] se obtiene la ecuación:

$$B \sqrt{\frac{p}{k}} K_1(\sqrt{\frac{p}{k}} a) = \frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda p} \quad [\text{AV.8}]$$

ecuación que permite determinar el valor de la constante B :

$$B = \frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda p \sqrt{\frac{p}{k}} K_1(\sqrt{\frac{p}{k}} a)} \quad [\text{AV.9}]$$

Así la solución o transformada de Laplace $\tilde{T}(r, p)$ es de la forma:

$$\tilde{T}(r, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda p} \frac{K_0(\sqrt{\frac{p}{k}} r)}{\sqrt{\frac{p}{k}} K_1(\sqrt{\frac{p}{k}} a)} \quad [\text{AV.10}]$$

Llamando $x = \sqrt{\frac{p}{k}} r$ y $x_0 = \sqrt{\frac{p}{k}} a$, la solución en términos de los desarrollos en serie de las funciones $K_0(x)$ y $K_1(x)$ es:

$$\tilde{T}(r, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda a} \frac{\ln(\frac{cx}{2}) + \frac{x^2}{4} (\ln(\frac{cx}{2}) - 1) + \dots}{p \left[1 + \frac{x_0^2}{2} (\ln(\frac{cx}{2}) - \frac{1}{2}) + \dots \right]} \quad [\text{AV.11}]$$

en donde $c = e^{\gamma}$.

Efectuando la división de [AV.11] se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(r, p) = & \frac{T_0}{p} - \frac{\dot{q}}{2 \pi \lambda p} \frac{1}{p} \left[\ln\left(\frac{cx}{2}\right) + \frac{x^2}{4} \left(\ln\left(\frac{cx}{2}\right) - 1\right) - \right. \\ & \left. - \frac{x_0^2}{2} \left(\ln\left(\frac{cx_0}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{cx}{2}\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad [\text{AV.12}]$$

Poniendo la expresión [AV.12] de otra forma para que la transformada inversa quede en términos de la variable $\frac{r^2}{4\kappa t}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(r, \rho) &= \frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q}}{2\pi\lambda\rho} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{c^2 x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{8} \ln\left(\frac{c^2 x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x_0^2}{8} \left(\ln\left(\frac{c^2 x^2}{4}\right)\right)^2 - \frac{x_0^2}{4} \left(\ln\left(\frac{x_0}{x}\right) - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{c^2 x^2}{4}\right) + \dots \right] \quad [AV.13] \\
&= \frac{T_0}{\rho} + \frac{\dot{q}}{2\pi\lambda} \left[-\frac{1}{2\rho} \ln\left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4\kappa}\right) - \frac{r^2}{8a} \ln\left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4\kappa}\right) + \frac{r^2}{4\kappa} + \frac{a^2}{8\kappa} \left(\ln\left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4\kappa}\right)\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{4\kappa} \left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{c^2 r^2 \rho}{4\kappa}\right) + \dots \right]
\end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación [AV.13] es [31], suponiendo que $\frac{r^2}{4\kappa t} \ll 1$:

$$\begin{aligned}
T(r, t) &= T_0 + \frac{\dot{q}}{2\pi\lambda} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{4\kappa t}\right) + \frac{a^2}{4\kappa t} \ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{4\kappa t} \left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2}\right) + \dots \right] \quad [AV.14]
\end{aligned}$$

que en términos de la diferencia de temperaturas es finalmente:

$$\begin{aligned}
\Delta T(r, t) &= \frac{\dot{q}}{4\pi\lambda} \left[\ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) + \frac{a^2}{2\kappa t} \ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2 c}\right) + \frac{r^2}{4\kappa t} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{2\kappa t} \left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2}\right) + \dots \right] \quad [AV.15]
\end{aligned}$$

APENDICE VI.

El problema consiste ahora en resolver las ecuaciones diferenciales parciales acopladas siguientes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa_w} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{\pi a^2 \lambda_w} \quad [\text{AVI.1}]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{AVI.2}]$$

con las siguientes condiciones iniciales y de frontera :

$$\Delta T_w(r, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq a \quad ; \quad t \leq 0 \quad [\text{AVI.3}]$$

$$\Delta T(r, t) = 0 \quad ; \quad r > a \quad ; \quad t \leq 0 \quad [\text{AVI.4}]$$

$$T_w(r, t) \text{ finita en } r = 0 \quad , \quad t > 0 \quad [\text{AVI.5}]$$

$$T_w(r, t) = T(r, t) \text{ en } r = a \text{ y } t > 0 \quad [\text{AVI.6}]$$

$$T(r, t) = T_0 \quad ; \quad r = \infty \quad , \quad t > 0 \quad [\text{AVI.7}]$$

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad ; \quad r = a \quad , \quad t > 0 \quad [\text{AVI.8}]$$

Es inmediato verificar que estas relaciones se transforman en las siguientes que involucran la transformada de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_w(r, \rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}_w(r, \rho)}{\partial r} - \frac{\rho}{\kappa_w} \tilde{T}_w(r, \rho) = -\frac{T_0}{\kappa_w} + \frac{\dot{q}}{\pi a^2 \lambda_w \rho} ; 0 \leq r \leq a \quad [\text{AVI.9}]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(r, \rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}(r, \rho)}{\partial r} - \frac{\rho}{\kappa} \tilde{T}(r, \rho) = -\frac{T_0}{\kappa} ; a < r \quad [\text{AVI.10}]$$

y

$$\tilde{T}_w(r, \rho) = \tilde{T}(r, \rho) ; r = a \quad [\text{AVI.11}]$$

$$\lambda_w \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial r} = \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} ; r = a \quad [\text{AVI.12}]$$

Procediendo de una manera similar a como se hizo en el apéndice II, se observa que la solución de la ecuación diferencial [AVI.9] es:

$$\tilde{T}_w(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q} \kappa_w}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2} + A I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r\right) + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r\right) ; 0 \leq r \leq a \quad [\text{AVI.13}]$$

La temperatura en $r = 0$ debe ser finita, este hecho permite determinar que la constante B debe ser cero puesto que la función $K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r\right)$ diverge cuando r tiende a cero. Así la solución [AVI.13] se puede reescribir como se muestra a continuación:

$$\tilde{T}_w(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q} \kappa_w}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2} + A I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r\right) ; 0 \leq r \leq a \quad [\text{AVI.14}]$$

Para determinar la constante A se necesita solucionar antes la ecuación diferencial [AVI.10] para la que, como ya se sabe por el apéndice II, la solución general es de la forma:

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + C I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) + D K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) ; \quad a < r \quad [\text{AVI.15}]$$

Como la temperatura para r grandes debe ser finita, se puede deducir entonces que la constante C es igual a cero ya que la función $I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right)$ aumenta demasiado para éstos valores de r . Por consiguiente la solución para la región $a < r$ se puede escribir como :

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + D K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) ; \quad a < r \quad [\text{AVI.16}]$$

Usando la condición de frontera [AVI.6] se encuentra una relación entre las constantes A y D ; a saber ,

$$\frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q} \kappa_w}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2} + A I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a\right) = \frac{T_0}{\rho} + D K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \quad [\text{AVI.17}]$$

La segunda relación se obtiene al utilizar la condición de frontera [AVI.8] y algunas identidades vistas en los apéndices anteriores :

$$\lambda_w \sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} A I_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a\right) = -\lambda \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} D K_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \quad [\text{AVI.18}]$$

Se obtienen así dos ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas A y D cuya solución es :

$$A = \frac{\dot{q} \kappa_w^{\frac{3}{2}} \lambda}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2 \Delta} K_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \quad [\text{AVI.19}]$$

y

$$D = - \frac{\dot{q} \kappa_w \kappa^{1/2}}{\pi a^2 \rho^2 \Delta} I_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a \right) \quad [\text{AVI.20}]$$

en donde

$$\Delta = \lambda_w \kappa^{1/2} I_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a \right) K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a \right) + \lambda \kappa_w^{1/2} I_0 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a \right) K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a \right) \quad [\text{AVI.21}]$$

para $0 \leq r \leq a$.

Así, las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales [AVI.9] y [AVI.10]

son:

$$\tilde{T}_w(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q} \kappa_w}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2} + \frac{\dot{q} \kappa_w^{3/2} \lambda}{\pi a^2 \lambda_w \rho^2 \Delta} K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a \right) I_0 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r \right); \quad 0 \leq r \leq a$$

y

[AVI.22]

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} - \frac{\dot{q} \kappa_w \kappa^{1/2}}{\pi a^2 \rho^2 \Delta} I_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} a \right) K_0 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r \right); \quad a < r \quad [\text{AVI.23}]$$

No es necesario aplicar la transformación inversa sobre ambos resultados ya que en la práctica lo que realmente interesa es sólo la temperatura de la fuente lineal.

Utilizando de nuevo los desarrollos en serie de las funciones $K_1 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r \right)$ y $I_0 \left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa_w}} r \right)$ y tomando $\frac{r^2}{4 \kappa t} \ll 1$ [31] al aplicar la transformada inversa se encuentra que la historia de la temperatura de la fuente lineal es

$$\Delta T_w(r, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{\rho w} - \rho C_{\rho q}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{8 \kappa_w t} \right] + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda_w} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{a^2 \lambda_w}{4 \kappa_w \lambda t} \right) + \dots; \quad 0 \leq r \leq a \quad [\text{AVI.24}]$$

La temperatura obtenida en la práctica, representa sólo el promedio pesa-

do de la ecuación [AVI.24] sobre el área de la sección transversal de la fuente lineal.

Este promedio pesado se obtiene a partir de la relación :

$$\frac{1}{A} \int_0^a \Delta T_w(r, t) dA \quad [AVI.25]$$

en donde $A = \pi a^2$ y $dA = 2 \pi r dr$ son el área de la sección transversal y un elemento diferencial de área de la misma, respectivamente.

Esta temperatura o diferencia de temperaturas promedio se denotará con la variable $\Delta T(a, t)$. Así

$$\begin{aligned} \Delta T(a, t) &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2 \pi r dr \left[\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{8 \kappa_w t} \right] + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda_w} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{a^2 \lambda_w}{4 \kappa_w \lambda t} \right) + \dots \right] \quad [AVI.26] \\ &= \frac{2}{a^2} \left[\frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \int_0^a r dr \ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{8 \kappa_w t} \right) \int_0^a r dr \right] + \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda_w} \left(1 - \frac{a^2 \lambda_w}{4 \kappa_w \lambda t} \right) \int_0^a r dr \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Para evitarse el problema de indeterminación del logaritmo natural al evaluarlo en cero se hace una aproximación ; a saber , $\ln \left(\frac{4 \kappa t}{r^2 c} \right) \approx \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right)$

la cual permite resolver las integrales de [AVI.19] obteniéndose lo siguiente :

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{8 \kappa_w t} + \right.$$

$$+ \frac{\lambda}{2 \lambda_w} \left(1 - \frac{a^2 \lambda_w}{4 \kappa_w \lambda t} \right) + \dots \quad] \quad [AVI.27]$$

$$= \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{\lambda}{2 \lambda_w} \right] + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{4 \kappa_w t} + \dots \right]$$

Finalmente se ha obtenido que el valor promedio, dependiente del tiempo, de la distribución de temperatura sobre un área de sección transversal es:

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[\left(1 - \frac{\rho_w C_{pw} - \rho_g C_{pg}}{2 \lambda t} a^2 \right) \ln \left(\frac{4 \kappa t}{a^2 c} \right) + \frac{a^2}{2 \kappa t} - \frac{a^2}{4 \kappa_w t} + \frac{\lambda}{2 \lambda_w} + \dots \right] \quad [AVI.28]$$

APENDICE VII.

Supóngase un alambre de radio a y longitud $2L$ con las siguientes propiedades físicas :

conductancia superficial H , conductividad térmica λ_w , densidad ρ_w , capacidad calorífica C_{pw} , difusividad térmica κ_w y conductividad eléctrica σ

Por el alambre circula una corriente constante i y se encuentra rodeado por un fluido a la temperatura T_0 y con capacidad calorífica C_{pg} , conductividad térmica λ , difusividad térmica κ y densidad ρ_g .

Se puede demostrar [31] que la ecuación de conducción toma la siguiente forma (suponiendo caso estacionario) :

$$\kappa_w \frac{\partial^2 (T - T_0)}{\partial z^2} - \left[\frac{2H}{a\rho_w C_{pw}} - \frac{\alpha i^2}{\rho_w C_{pw} \pi^2 a^4 \sigma_0} \right] (T - T_0) + \frac{i^2}{\rho_w C_{pw} \pi^2 a^4 \sigma_0} = 0 ; [VII.1]$$

en donde se ha supuesto que la conductividad eléctrica del alambre varía linealmente con la temperatura en la forma $\frac{1}{\sigma_0} (1 + \alpha (T - T_0))$ donde α es el coeficiente de resistencia a la temperatura y que se cumple la ley del enfriamiento de Newton .

Reescribiendo la ecuación [VII.1] se obtiene :

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} - \left[\frac{2H}{a\lambda_w} - \frac{\alpha i^2}{\lambda_w \pi^2 a^4 \sigma_0} \right] \Delta T + \frac{i^2}{\lambda_w \pi^2 a^4 \sigma_0} = 0 \quad [VII.2]$$

en donde $\Delta T = T - T_0$.

Tomando

$$\kappa = \frac{i^2}{\pi^2 a^4 \sigma_0 \lambda_w} \quad y \quad \beta^2 = \alpha \kappa - \frac{2H}{a\lambda_w} \quad [VII.3]$$

se obtiene :

$$\frac{d^2 \Delta T}{dz^2} + \beta^2 \Delta T = -K \quad [\text{VII.4}]$$

ecuación cuya solución es de la forma :

$$\Delta T = \Theta_p + \Theta \quad [\text{VII.5}]$$

donde Θ_p es una solución particular y Θ es la solución de la ecuación homogénea :

$$\frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \beta^2 \Theta = 0 \quad [\text{VII.6}]$$

Una solución particular de [VII.4] es dada por la relación :

$$\Theta_p = -\frac{K}{\beta^2} \quad [\text{VII.7}]$$

y la solución de la ecuación [VII.6] es de la forma :

$$\Theta(z) = C_1 \exp(-\sqrt{-\beta^2} z) + C_2 \exp(\sqrt{-\beta^2} z) \quad [\text{VII.8}]$$

Así, la solución general de [VII.4] es :

$$\Delta T(z) = C_1 \exp(-\sqrt{-\beta^2} z) + C_2 \exp(\sqrt{-\beta^2} z) - \frac{K}{\beta^2} \quad [\text{VII.9}]$$

Haciendo $\gamma^2 = -\beta^2$ resulta que :

$$\Delta T(z) = C_1 \exp(-\gamma z) + C_2 \exp(\gamma z) + \frac{K}{\gamma^2} \quad [\text{VII.10}]$$

En la práctica (veanse capítulos III y IV) [25,14], la cantidad $\frac{2 H}{a \lambda_w}$ es mucho mayor que αK , por lo que $-\beta^2 \approx \frac{2 H}{a \lambda_w}$.

En la expresión [VII.10] $\gamma = \left(\frac{2 H}{a \lambda_w} \right)^{1/2}$, y además ésta expresión está sujeta a las condiciones de frontera siguientes:

$$\Delta T(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 2L \quad [\text{VII.11}]$$

$$\Delta T(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

con lo cual:

$$0 = C_1 \exp(-2 L \gamma) + C_2 \exp(2 L \gamma) + \frac{K}{\gamma^2} \quad [\text{VII.12}]$$

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{K}{\gamma^2}$$

Resolviendo el sistema [VII.12] se encuentra que:

$$C_1 = - \frac{K}{\gamma^2} \frac{\exp(L \gamma)}{\exp(L \gamma) + \exp(-L \gamma)} \quad [\text{VII.13}]$$

$$C_2 = - \frac{K}{\gamma^2} \frac{\exp(-L \gamma)}{\exp(L \gamma) + \exp(-L \gamma)} \quad [\text{VII.14}]$$

Así:

$$\Delta T(z) = \frac{K}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\cosh \gamma (L - z)}{\cosh L \gamma} \right) \quad [\text{VII.15}]$$

En términos del flujo lineal de calor $\dot{q}$ la cantidad K viene expresada como

$$K = \frac{\dot{q}}{\pi a^2 \lambda_w} \quad \text{ya que} \quad \dot{q} = \frac{i^2}{\pi a^2 \sigma_0}.$$

Así

$$\Delta T(z) = \frac{\dot{q}}{2 \pi a H} \left[1 - \frac{\cosh \left[\left(\frac{2 H}{a \lambda_w} \right)^{1/2} (L - z) \right]}{\cosh \left[\left(\frac{2 H}{a \lambda_w} \right)^{1/2} L \right]} \right] \quad [\text{VII.16}]$$

La temperatura promedio a lo largo de todo el alambre se encuentra por medio de la expresión :

$$\Delta T = \frac{1}{2 L} \int_0^{2L} \Delta T(z) dz \quad [\text{VII.17}]$$

Efectuando la integral [VII.17] se encuentra finalmente que :

$$\Delta T = \frac{\dot{q}}{2 \pi a H} \left[1 - \frac{1}{L} \left(\frac{a \lambda_w}{2 H} \right)^{1/2} \tanh \left[\left(\frac{2 H}{a \lambda_w} \right)^{1/2} L \right] \right] \quad [\text{VII.18}]$$

APENDICE VIII.

El problema consiste ahora en determinar la solución de la ecuación de conducción :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{VIII.1}]$$

en la region $a \leq r \leq b$ con las condiciones inicial y de frontera siguientes :

$$T = T_0 \quad \text{en } a \leq r \leq b \quad \text{y } t = 0 \quad [\text{VIII.2}]$$

$$T = T_0 \quad \text{en } r = b \quad \text{y } t \geq 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{q}{2\pi a \lambda} \quad \text{en } r = a \quad \text{y } t > 0$$

Como se sabe , la ecuación auxiliar que se obtiene al aplicar la transformada de Laplace es :

$$\frac{d^2 \tilde{T}(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \tilde{T}(r, p)}{dr} - \frac{p}{\kappa} \tilde{T}(r, p) = -\frac{T_0}{\kappa} \quad [\text{VIII.3}]$$

con las condiciones de frontera :

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\dot{q}}{2\pi a \lambda p} \quad \text{en } r = a \quad [\text{VIII.4}]$$

$$\tilde{T} = \frac{T_0}{p} \quad \text{en } r = b$$

Como se ha visto, la solución de la ecuación [VIII.3] es de la forma :

$$\tilde{T}(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + A I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) + B K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \quad [\text{VIII.5}]$$

Aplicando las condiciones de frontera [VIII.2] se encuentran las constantes A y B ; a saber ,

$$A = \frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda \rho \Delta} K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) \quad ; \quad B = -\frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda \rho \Delta} I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) \quad [\text{VIII.6}]$$

en donde :

$$\Delta(\rho) = -\left[\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} I_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) + \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) K_1\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} a\right) \right] \quad [\text{VIII.7}]$$

con lo cual :

$$T(r, \rho) = \frac{T_0}{\rho} + \frac{\dot{q}}{2 \pi a \lambda \rho \Delta} \left[K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} b\right) K_0\left(\sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} r\right) \right] \quad [\text{VIII.8}]$$

El problema de encontrar la transformada inversa de Laplace de [VIII.8] lo resuelven Carslaw y Jaeger en una forma detallada y obtienen la ecuación :

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[2 \ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{2 \pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n) - J_0(\alpha_n) Y_1(\alpha_n)}{\left[J_1(\alpha_n)\right]^2 - \left[J_0(b \alpha_n)\right]^2} \frac{\left[J_0(b \alpha_n)\right]^2}{\alpha_n} e^{-\kappa \alpha_n^2} \right] \quad [\text{VIII.9}]$$

en donde α_n es raíz de la ecuación :

$$J_1(a\alpha_n)Y_0(b\alpha_n) - Y_1(a\alpha_n)J_0(b\alpha_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad [\text{VIII.10}]$$

En $x = a$ el perfil de temperatura es:

Usando la ecuación [VIII.10] se obtiene:

$$\Delta T(a, t) = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{2 \pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_1(a\alpha_n)}{\alpha_n Y_0(b\alpha_n)} \frac{Y_0(a\alpha_n)J_0(b\alpha_n) - Y_0(b\alpha_n)J_0(a\alpha_n)}{\left[\frac{Y_1(a\alpha_n)}{Y_0(b\alpha_n)}\right]^2 - 1} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \right] \quad [\text{VIII.12}]$$

Cuando $b/a \gg 1$, Fischer aproximó la ecuación [VIII.12] a la siguiente

$$\Delta T = \frac{\dot{q}}{4 \pi \lambda} \left[2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{4}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\kappa \alpha_n^2 t)}{\alpha_n^2 \left[\left[\frac{Y_1(a\alpha_n)}{Y_0(b\alpha_n)} \right]^2 - 1 \right]} \right] \quad [\text{VIII.13}]$$

en la que se consideró que $J_0(b\alpha_n) = 0$.

APENDICE IX.

Programa principal.

Los pasos que se siguen en el programa principal son los que se muestran a continuación:

El primer "READ" lee las resistencias fijas R_1, R_2 que forman brazos del puente y la resistencia estabilizadora de corriente R_0 en este orden.

El segundo "READ" lee la densidad del alambre de platino (gramos/cm³) y su radio (cms), respectivamente.

Usando un aparato para medir presiones (GAGE) en unidades que Roder define como "counts" (el aparato fué calibrado para obtener una relación de estas unidades con "psias") en el tercer "READ" se lee la presión en esta unidad.

Usando el método del alambre compensador se tienen que introducir resistencias terminales para los alambres largo y corto que deben sumarse a las resistencias de los mismos. La suma correspondiente al alambre largo se denota como $R3Z$ y para el corto como $R4Z$.

Además, debido al modelo de celda propuesto, se introduce una resistencia debida al soporte del alambre largo y al soporte del alambre corto junto con las resistencias de conexión respectivas, cuya suma se denota como $R3B$ para el alambre largo y $R4B$ para el corto [25].

En el cuarto "READ" se leen en el orden que a continuación se presenta $R3Z, R3B, R4Z, R4B$, incremento de tiempo (seg) y voltaje aplicado al puente (volts).

Debe aclararse que estos datos corresponden a lecturas efectuadas a la temperatura de la celdas, es decir, antes

de pasar corriente de medición (véase capítulo IV) por los alambres.

Suponiendo que los datos de voltaje V_{ab} se almacenan en filas de cinco columnas, en el quinto "READ" se lee el número de filas que contienen datos de voltaje V_{ab} .

Debido a problemas de estabilidad en el flujo de calor, Roden desprecia los 50 primeros voltajes V_{ab} y solo toma en cuenta los números 51 hasta 250 (el DVM efectúa 250 lecturas en 0.755 seg). En el sexto "READ" se leen los voltajes 51 hasta 250 de V_{ab} .

Además, desarrollando en Taylor la temperatura del alambre alrededor de la temperatura del baño, se encuentra que

$$T - T_0 = (dT/dV)(V - V_0)$$

da el término de corrección que permite encontrar la temperatura del alambre. Roden toma este término de corrección como el valor promedio dado por

$$1/2[(dT/dV)(V(51) - V_{ab}) + (dT/dV)(V(250) - V_{ab})] \quad (\text{AIX.1})$$

que da el incremento promedio de la temperatura del alambre debido al cambio de voltaje en a, b .

En este programa se pide el punto de referencia inferior para conocer V_p y V_{ab} (Roden da el 51 y así trabaja con $V_p(51)$ y $V_{ab}(51)$) y el punto de referencia superior para conocer V_p y V_{ab} (Roden da el 250 y así trabaja con $V_p(250)$ y $V_{ab}(250)$). Esto permitiría calcular el término de corrección a la temperatura del alambre.

Estos datos se introducen por pantalla.

Todo lo anterior permite calcular la temperatura real

del alambre, tomando en cuenta el término de corrección (AIX.1) y la temperatura de la celda.

Conocida la temperatura real del alambre, se calcula la resistencia del mismo a esta temperatura (esto se hace tanto para el alambre corto como para el largo).

Después de calcular la temperatura y resistencia de los alambres, se pide el punto de referencia para el cálculo del flujo promedio (Roder da el punto 151). Este dato también se lee por pantalla.

Con este punto de referencia se calcula ahora el valor del flujo de calor promedio. Para hacer esto, se toma como valor V_p el correspondiente al último número de referencia dado y se usa la relación

$$\bar{q} = [V_p(\text{ref})/R_{\text{total}}]^2 \times (R_{\text{al}} + R_{\text{ac}})/L_{\text{total}}$$

en donde R_{total} es una resistencia que involucra las resistencias R_{al} , R_{ac} y resistencias de terminales, R_{al} y R_{ac} son las resistencias de los alambres a la temperatura T_0 + corrección y L_{total} es la longitud total del alambre largo + alambre corto.

Finalmente, se pregunta por el número de referencia de la ecuación a la que se le extraera la raíz que da la conductividad térmica y a la que se le corrigiera la temperatura experimental del alambre. Este dato se lee por pantalla.

Al correr el programa se imprimen en el orden que se presenta

/ conductividad térmica
 / pendiente de la recta $T = a + m \ln(t)$
 / ordenada al origen de esta relación
 / flujo estimado
 / corrección a incremento de temperatura de número de referencia.
 / incremento de temperatura corregido.
 hasta que se cumpla la condición dada en el capítulo V.

Las funciones que utiliza el programa principal son:

CPP7FN(T)

Calcula la C_{pw} a una temperatura T .

FINDD7(V1,V2,T1)

Da un valor aproximado de la temperatura de alambres. Los argumentos $V1, V2$ y $T1$ corresponden a voltaje aplicado al puente, lectura del DVM y temperatura respectivamente.

FIND1(TIN)

Da la resistencia de alambre largo como una función de la temperatura del mismo. El argumento TIN representa la temperatura a la que se desea la resistencia.

FIND2(TIN)

Da la resistencia de alambre corto como una función de la temperatura del mismo.

El argumento TIN representa la temperatura a la que se desea la resistencia.

FNC(X,DT,T,QI,N)

Da la expresión a la que se desea extraer la raíz (conductividad térmica), así como la expresión que da los incrementos ideales de temperatura que se ajustaran contra $\ln(t)$.

Los argumentos X,DT,T,QI,N representan la raíz aproximada, el incremento de temperatura de referencia, el tiempo de referencia, el flujo de referencia; respectivamente, y N es un número de control en el que si $N=1$ calcula raíz y si $N=2$ calcula incrementos ideales de temperatura.

PSIAFN(P)

Transforma la presión experimental de "counts" a "psias" usando una relación cuadrática obtenida por calibración [25]. El argumento P representa la presión en "counts".

RAIZ(A,B,NP,TOL,EPS,DT,T,QI)

Permite calcular la raíz de una expresión.

Los argumentos A,B,NP,TOL,EPS,DT,T,QI representan a valor superior aproximado de la raíz, valor inferior aproximado de la raíz, número de particiones deseado del intervalo (B,A) , tolerancia que permite juzgar si la expresión se puede considerar nula o no, exactitud en la raíz, incremento en la temperatura de referencia, tiempo de referencia y flujo de referencia, respectivamente. Esta función usa el método de la secante. La función puede parar solo si no hay cambio de signo de la expresión analizada en el intervalo (A,B) .

Por otro lado, dice que la raíz es correcta solo cuando la función es aproximadamente cero (dentro del límite de tolerancia dado) o cuando no se aprecia cambio en

la raíz (dentro de la exactitud dada).

Al encontrar la raíz regresa el control al programa principal.

RC1(T)

Permite calcular la resistencia de terminales de alambre largo usando un polinomio obtenido por calibración.

El argumento T representa la temperatura a la que se desea la resistencia.

RC2(T)

Permite calcular la resistencia de terminales de alambre corto usando un polinomio obtenido por calibración.

El argumento T representa la temperatura a la que se desea la resistencia.

TCPTFN(T)

Permite calcular la conductividad térmica del platino.

El argumento T representa la temperatura a la que se desea la conductividad térmica.

OFFSV(EB,RR1,RR2)

Proporciona el voltaje que teóricamente debe haber en los extremos del DVM, suponiendo que este tiene una resistencia interior $R_g = 10^7$ ohms, cuando los alambres se encuentran a una cierta temperatura y por consiguiente a una respectiva resistencia.

Los argumentos EB, RR1 y RR2 representan al voltaje aplicado al puente, resistencia de alambre largo y resistencia de alambre corto, respectivamente.

El archivo de datos usado, junto con los resultados, se muestran al final del programa total.

```

DIMENSION D(1250),F(1250),TLOC(1250),VCF(1250)
DIMENSION D(12,3),VOLY(1250),TIME(1250),C(1250)
COMMON/XXX/PI,R2,F3,F42,F3F,F43,CRESS,TEMP,VCF,TIME,FACT
COMMON/YYY/CHOCAS,CPCAS,STCMA
COMMON/ZZZ/CHORT,CPRT,TCPT,CPRT,PI,A
DATA SIGMA,PI,FACT/5.6607E-12,3.14159,14.696/
READ *,PI,R2,F3
READ *,CHORT,A
READ *,COUNTS
READ *,F3F,F3F,F42,F43,TIME,VNOVA
READ *,NF
DO 20 I=1,NF
L=I-1)*5+50
READ *,VCF(L+1),VCF(L+2),VCF(L+3),VCF(L+4),VCF(L+5)
CONTINUE
NP105=5*NF+50
DO 20 I=51,NP105
VCF(I)=VCF(I)-1.25-5
CONTINUE
F=PI/PI*PI
PIRT=PI*PI*PI
TEMP=PI*PI
CPRT=CPRT*TEMP*TEMP
TCPT=TCPT*TEMP*TEMP
DIPRT=PI*PI*PI/CHORT/CPRT
PSIA=PCAS*(COUNTS)
F3C=PC1(TEMP)
F4C=PC2(TEMP)
F3F=PI*PI*PI
F3F=PI*PI*PI
F4F=PI*PI*PI
F4F=PI*PI*PI+PI*PI*PI
PCRESS=PC1A/FACT
VOLTC=2.0*VNOVA
VST=0.0
DO 40 I=1,50
HFVOLT=VST+0.1
VMIN=HFVOLT*0.99
VMAX=HFVOLT*1.01
IF (VOLT.LT.VMIN.AND.VOLT.GT.VMAX)GO TO 50
VST=VST+0.1
CONTINUE
F3F=PI*PI*PI
F4F=PI*PI*PI
PCRTDS=1.0/(1.7*(F3+F4)+1.0/(PI+PI))
PCRTDS=PCRTDS*PI*PI
VOLTC=HFVOLT/PCRTDS*PCRTDS
VST=VNOVA/1.0001
VST=VST/1.0003
CV2=(VST-VST)/(ALOG(TIME*250)-ALOG(TIME*50))
CV1=VST-CV2*ALOG(TIME*50)
DO 60 I=51,NP105
VOLT(I)=CV1+CV2*ALOG(TIME*I)
CONTINUE
PRINT 70
FORMAT(XX,'*TC DE REF. INF. PARA CALCULO DE TEMPERATURA EX
READ *,TIME
PRINT 80

```

2

```

20 FORMAT(IX,'PROM.DE REF.SUP.PARA CALCULO DE TEMPERATURA EXP. ')
READ *,NSUP
TTRIAL=1.0
DTW=(FINDT(VOLT(INF),VOF(INF),TTRIAL)+FINDT(VOLT(NSUP),VOF(NSU
P),TTRIAL))/2.
TEMP=DTW+TEMP
RESW3=FINDT(TEMP)
RESW4=FINDT(TEMP)
RTOTAL=733+748+RESW3+RESW4
PRINT 20

30 FORMAT(IX,'PROM.DE REF.PARA CALCULAR Q PROMEDIO ')
READ *,70
Q=(VOLT(IC)/RTOTAL)**2*(RESW3+RESW4)/15.596
DEN=11.758095
RHOCAS=DEN*4.0326/1000.
CCGAS=5.3218379
PRINT 100

100 FORMAT(IX,'NOTAS ')
READ *,NREF
TIME=NOFF*TIME
DO 110 I=1,NREF
TIME(I)=I*TIME
TLOC(I)=ALOG(TIME(I)*1000.)
DT(I)=FINDT(VOLT(I),VOF(I),TTRIAL)
TTRIAL=DT(I)
TTT=TIME+DT(I)
R3=FINDT(TTT)+733
R4=FINDT(TTT)+748
RRRICO=1.0/(1.0/(R3+R4)+1.0/(R1+R2))
VOLT(I)=HVOLT*RRRICO/(RRRICO+R0)
PTOTAL=R3+R4
RESW3=R3-733
RESW4=R4-748
Q1(I)=(VOLT(I)/PTOTAL)**2*(RESW3+RESW4)/15.596

110 CONTINUE
DTRF=DT(RINREF)
CREF=Q1(NREF)
DTRF=DTRF+.1
PRINT 100

120 FORMAT(IX,'SUP.FINE,NO.DE PARTICIONES,TOLENCIA Y EXACTITUD ')
READ *,C,N,TOL,EPS
130 D=ETREF
T=ETREF
Q=QREF
F=FAIT(C,N,TOL,EPS,DT,T,Q)
DO 140 I=1,7
DO 140 J=1,7
DET(I,J)=0.0

140 CONTINUE
DO 150 I=1,NOTOS
DT(I)=DT(I)
Q1(I)=Q1(I)
T=TIME(I)
DT(I)=FINDT(DT,T,Q1,2)
DET(I,1)=DET(I,1)+1.0
DET(I,2)=DET(I,2)+TLOC(I)
DET(I,3)=DET(I,3)+DT(I)
DET(2,2)=DET(2,2)+TLOC(I)*TLOC(I)
DET(2,3)=DET(2,3)+TLOC(I)*DT(I)

150 CONTINUE

```

```

DENOM=DET(1,1)*DET(2,2)-DET(1,2)*DET(2,1)
DNUM1=DET(1,1)*DET(2,3)-DET(1,2)*DET(2,2)
DNUM2=DET(2,1)*DET(1,3)-DET(1,2)*DET(2,3)
POTTE=DNUM1/DENOM
CORR=DNUM2/DENOM
COSTE4.*PI*POTTE*P
IF (ABS(C2-COST)).LT.1.E-7) GO TO 270
CORR=(COST-C1)/2
DITREF=C2*POTTE+CORR
PRINT 160,P
160  FORMAT(IX,"CONDUCTIVIDAD=" ,IX,F12.6)
    PRINT 170,COTE
170  FORMAT(IX,"COEFICIENTE=" ,IX,F12.6)
    PRINT 180,ORR
180  FORMAT(IX,"CORRECCION=" ,IX,F12.6)
    PRINT 190,COST
190  FORMAT(IX,"FLUJO ESTIMADO=" ,IX,F12.6)
    PRINT 200,CORR
200  FORMAT(IX,"CORRECCION=" ,IX,F12.6)
    PRINT 210,DITREF
210  FORMAT(IX,"DITREF=" ,IX,F12.6)
    GO TO 130
220  R=C/64.*PI*POTTE
    PRINT 230,R
230  FORMAT(IX,"LA CONDUCTIVIDAD TERMICA ES" ,IX,F12.6)
STOP
END

```

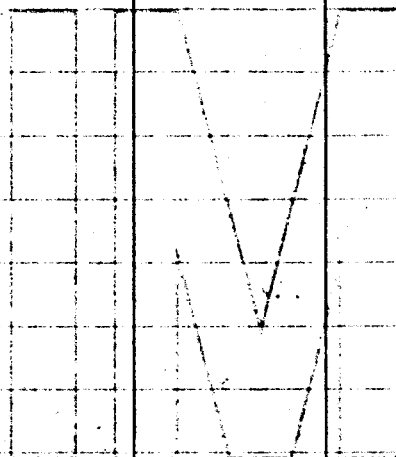
NONE. TIME 1.387 SEC. IMAGE COUNT 145

DETERMINACION DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA DE UN MATERIAL

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

10.	00	FUNCTION CDDYEN(1)
11.	00	DIMENSION CDDY(4)
21.	00	DATA(CDDY(1),7=1,9)/0.170,0.004,80.,270./
30.	00	CDDYEN(1)+CDDY(2)/CDDY(3)*(1-CDDY(4))
40.	00	CDDYEN(2)
50.	00	RETURN
60.	00	END

ELT.	ERRORS	NONE.	TIME	0.794 SEC.	IMAGE COUNT	7
------	--------	-------	------	------------	-------------	---



1	2	3	4	5	6	7	8
0000		FUNCTION FINDT(VI,VR,TI)					
0001		COMMON/XXX/PI,P2,P3,P4,P5,P6,PRES,TEMP,VCF,TINC,FACT					
0002		V=V					
0003		T=T+TEMP					
0004		DO 10 I=1,10					
0005		RE1=FIND1(T)					
0006		RE2=FIND2(T)					
0007		VCF1=CF(VI,RE1,RE2)					
0008		IF (ABS(V-VCF1)-1.0E-6)P6,P5,15					
0009	15	T=T+0.1					
0010		RE1=FIND1(T)					
0011		RE2=FIND2(T)					
0012		VCF2=CF(VI,RE1,RE2)					
0013		EVDT=(VCF2-VCF1)/0.1					
0014		CORR=(V-VCF1)/EVDT					
0015	10	T=T+CORR					
0016	20	FINDT=T-TEMP					
0017		RETURN					
0018		END					

ERRORS NONE. TIME 0.000 SEC. IMAGE COUNT 19

1	2	3	4	5	6	7	8
0019							
0020							
0021							
0022							
0023							
0024							
0025							
0026							
0027							
0028							
0029							
0030							
0031							
0032							
0033							
0034							
0035							
0036							
0037							
0038							
0039							
0040							
0041							
0042							
0043							
0044							
0045							
0046							
0047							
0048							
0049							
0050							
0051							
0052							
0053							
0054							
0055							
0056							
0057							
0058							
0059							
0060							
0061							
0062							
0063							
0064							
0065							
0066							
0067							
0068							
0069							
0070							
0071							
0072							
0073							
0074							
0075							
0076							
0077							
0078							
0079							
0080							
0081							
0082							
0083							
0084							
0085							
0086							
0087							
0088							
0089							
0090							
0091							
0092							
0093							
0094							
0095							
0096							
0097							
0098							
0099							

END

LONG. TIME	3.796	SEC.	IMAGE	COUNT	9
------------	-------	------	-------	-------	---

	2	3	4	5	6	7	8
10.	FUNCTION FIND(TIME)						
11.	DIMENSION P(4)						
20.	COMMON/XXX/PI,72,737,747,737,747,7757,TEMP,VOF,TIME,FACT						
31.	DATA(10(I),I=1,4)/-0.346450,0.17402506,-0.283153E-4,-0.452685E-7						
30.	P=PRESS*FACT						
40.	TIME2=C(1)+C(2)*TIME+C(3)*TIME**2+C(4)*P						
50.	RETURN						
60.	END						

NOTE. TIME -0.834 SEC. IMAGE COUNT 8

IN

RECEIVED BY GOVERNMENT

	2	3	4	5	6
10.	00	FUNCTION	PSIAFV(P)		
11.	00	DIMENSION	PSIA(3)		
21.	00	DATA(PSIA(1),T=1,0)/0.8727,1.037174,-0.167212(-0/			
30.	00	PR=PSIA(1)+PSIA(2)*P+PSIA(3)*P**2			
40.	00	PSIAFV=PR			
50.	00	RETURN			
60.	00	END			

NO ELT. ERRORS NONE. TIME 6.794 SEC. IMAGE COUNT 7

IN

0123456789

0 1 2 3 4 5 6

2	3	4	5	6	7	8	9
10.	FUNCTION	DATE(A,B,NC,TOL,EPS,DT,T,CY)					
11.	DT=DT						
12.	TI=						
13.	QI=QI						
20.	XL=						
30.	FL=FNC(XL,DTI,TI,QI,1)						
40.	DX=(B-A)/NP						
50.	DO TO I=1,NC						
60.	XI=XL+DX						
70.	FR=FNC(XI,DTI,TI,QI,1)						
80.	P=FR*FL						
90.	IF (P.LT.0.100) GO TO 50						
100.	XL=XI						
110.	FL=FR						
120.	CONTINUE						
130.	PRINT 40						
140.	FORMAT(IX,"NO HAY CAMBIO DE SIGNO")						
150.	STOP						
160.	XI=						
170.	XSTAR=XL-FL*(X2-XL)/(FR-FL)						
180.	IF (ABS(XSTAR-XI).LT.EPS) GO TO 20						
190.	XI=XSTAR						
200.	FR=FNC(XSTAR,DTI,TI,QI,1)						
210.	IF (ABS(FR).LT.TOL) GO TO 70						
220.	P=FR*FL						
230.	IF (P.GT.0.100) GO TO 60						
240.	XL=XSTAR						
250.	FL=FR						
260.	GO TO 50						
270.	XR=XSTAR						
280.	FR=FR						
290.	GO TO 50						
300.	PRINT 70,TOL						
310.	FORMAT(IX,"*****"/EX,"CON UN						
320.	IA TOLERANCIA DE",IX,E12.6,17,"LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO")						
330.	PAI=XSTAR						
340.	RETURN						
350.	PRINT 80,EPS						
360.	FORMAT(IX,"*****"/EX,"CC						
370.	IN UNA EXACTITUD DE",IX,E12.6,17,"NO SE APPRECIA CAMBIO EN LA PAI")						
380.	PAI=XSTAR						
390.	RETURN						
400.	END						

TIME 0.070 SEC. IMAGE COUNT 63

2

3

4

5

6

7

8

FUNCTION RC(I)

DIMENSION RC(4)

DATA(RC(I), I=1,4)/-0.310378E-1,0.637372E-3,0.151192E-5,-0.262966E-

#8/

R=RC(1)+RC(2)*T+RC(3)*T**2+RC(4)*T**3

RC(I)=

RETURN

END

NONE. TIME - 0.796-SEC. IMAGE COUNT 8

IN

313 1101 1101 1101 1101 1101 1101 1101

2

3

4

5

6

7

8

```

FUNCTION FCC(F)
  DIMENSION FCC(4)
  DATA (FCC(I), I=1, 4) /-0.806717E-1, 0.171734E-2, 0.502652E-5, -0.090257
  E-8/
  F=FCC(1)+FCC(2)*F+FCC(3)*F**2+FCC(4)*F**3
  FCC=F
  RETURN
END

```

10.
11.
21.
30.
40.
50.
60.

00
00
00
00
00
00
00

```
FUNCTION TCGTEN(T)  
  DIMENSION TCGT(4)  
  DATA (TCGT(I),I=1,4) /0.74,-0.07,100.,200./  
  TC=TCGT(1)+TCGT(2)/TCGT(3)*(T-TCGT(4))  
  TCGTEN=TC  
  RETURN  
END
```

FLT. ERRORS - NONE. TIME

0.794 SEC. IMAGE COUNT 7

00
01
02
03
04
05
06
07
08
09
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

```
FUNCTION OFFSV(RC,R01,R02)
COMMON/XX/XY/R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R0,PRES,TEMP,VCF,XYINC,FACT
DATA RC/1.00+0/
R3=R01+R03
R4=R02+R04
DIV=R1*R2*R3+R2*R3*R4+R3*R4*R5+R4*R5*R6+R5*R6*R7+R6*R7*R8+R7*R8*R9+R8*R9*R0
CALVI=RC*(R0*R3-R1*R6)/DIV
OFFSV=CALVI*RC
RETURN
END
```

OFFERS NONE. TIME 0.706 SEC. IMAGE COUNT 10

7, L J 570006.77/00AT

001	574010 04/00/00	00.00 10 (0)	100.1000,100.1400,100.2000
10.		00	21.00,0.00-4
20.		00	4010.1
30.		00	97.3004,6.65572,46.7144,53.4657,0.00302,6.07389
40.		00	40
50.		00	3.85004E-3,3.06735E-3,3.99375E-3,4.04263E-3,4.02667E-3
60.		00	4.01019E-3,4.02796E-3,4.00568E-3,4.10284E-3,4.12549E-3
70.		00	4.11595E-3,4.13562E-3,4.14874E-3,4.16060E-3,4.10344E-3
80.		00	4.20086E-3,4.20119E-3,4.19801E-3,4.24293E-3,4.26914E-3
90.		00	4.20835E-3,4.27332E-3,4.27391E-3,4.29716E-3,4.32518E-3
100.		00	4.30004E-3,4.35677E-3,4.34405E-3,4.36571E-3,4.37644E-3
110.		00	4.30104E-3,4.40115E-3,4.41780E-3,4.40505E-3,4.41161E-3
120.		00	4.44678E-3,4.47091E-3,4.46672E-3,4.46406E-3,4.47062E-3
130.		00	4.44678E-3,4.51115E-3,4.54900E-3,4.51710E-3,4.52248E-3
140.		00	4.50004E-3,4.55262E-3,4.55804E-3,4.50414E-3,4.58268E-3
150.		00	4.50004E-3,4.57070E-3,4.61064E-3,4.64220E-3,4.62203E-3
160.		00	4.61000E-3,4.62062E-3,4.66494E-3,4.66316E-3,4.69475E-3
170.		00	4.60461E-3,4.67769E-3,4.68163E-3,4.72336E-3,4.72813E-3
180.		00	4.77753E-3,4.70727E-3,4.71203E-3,4.74601E-3,4.75555E-3
190.		00	4.70476E-3,4.76211E-3,4.75078E-3,4.76966E-3,4.79847E-3
200.		00	4.70476E-3,4.81277E-3,4.80303E-3,4.82589E-3,4.82469E-3
210.		00	4.87006E-3,4.86080E-3,4.84973E-3,4.82767E-3,4.83105E-3
220.		00	4.87006E-3,4.87034E-3,4.89765E-3,4.87476E-3,4.88669E-3
230.		00	4.80672E-3,4.80305E-3,4.84451E-3,4.81020E-3,4.90903E-3
240.		00	4.90004E-3,4.83700E-3,4.84072E-3,4.87370E-3,4.94570E-3
250.		00	4.90004E-3,4.80045E-3,4.80444E-3,4.80637E-3,4.97709E-3
260.		00	4.90004E-3,4.87610E-3,4.80710E-3,4.80710E-3,4.80390E-3
270.		00	5.00000E-3,4.80500E-3,4.81604E-3,4.85776E-3,4.85578E-3
280.		00	5.00000E-3,4.80000E-3,4.80302E-3,4.86730E-3,4.87624E-3
290.		00	5.10724E-3,4.87743E-3,4.86730E-3,4.88339E-3,4.10903E-3
300.		00	5.09389E-3,4.11610E-3,4.10187E-3,4.12337E-3,4.11260E-3
310.		00	5.12452E-3,4.16787E-3,4.14062E-3,4.11618E-3,4.12750E-3
311.		00	5.12452E-3,4.16787E-3,4.17817E-3,4.15016E-3,4.16983E-3
312.		00	5.12452E-3,4.17817E-3,4.22169E-3,4.19605E-3,4.17400E-3
313.		00	5.17340E-3,4.80678E-3,4.21632E-3,4.23590E-3,4.20976E-3
314.		00	5.17340E-3,4.21632E-3,4.27838E-3,4.25665E-3,4.23878E-3
315.		00	5.20063E-3,4.20407E-3,4.26072E-3,4.25924E-3,4.28725E-3
316.		00	5.20063E-3,4.25030E-3,4.25745E-3,4.28768E-3,4.29798E-3
317.		00	5.20063E-3,4.26037E-3,4.27176E-3,4.27022E-3,4.31220E-3
318.		00	5.37474E-3,4.31169E-3,4.30514E-3,4.30010E-3,4.30838E-3
319.		00	5.32242E-3,4.34606E-3,4.32361E-3,4.34090E-3,4.33673E-3
320.		00	5.30700E-3,4.30670E-3,4.35401E-3,4.33375E-3,4.34904E-3
321.		00	5.30700E-3,4.37002E-3,4.30097E-3,4.37667E-3,4.38302E-3
322.		00	5.30620E-3,4.39157E-3,4.43266E-3,4.40766E-3,4.38302E-3
323.		00	5.37065E-3,4.41043E-3,4.42137E-3,4.43926E-3,4.41005E-3
324.		00	

FLY. ERRORS NONE. TIME 1.014 SEC. IMAGE COUNT 45

G,P ***** FINISH *****

LINE	ADDRESS	OPERATION	DATA
01	000000	JSCT06.XQT	
02	000001	STACIO 08/00/05 00 00 24 101	
03	000002	BTUN JSCT06.XQT,JSCT06.XQT	
04	000003	BTUN,FS JSCT06.CT,JSCT06.CT	
05	000004	BTUN,FS JSCT06.CCTSV,JSCT06.CCTSV	
06	000005	BTUN,FS JSCT06.FINDOT,JSCT06.FINDOT	
07	000006	BTUN,FS JSCT06.FSIAPN,JSCT06.FSIAPN	
08	000007	BTUN,FS JSCT06.CPTEN,JSCT06.CPTEN	
09	000008	BTUN,FS JSCT06.TCPT,JSCT06.TCPT	
10	000009	BTUN,FS JSCT06.FC1,JSCT06.FC1	
11	000010	BTUN,FS JSCT06.FC2,JSCT06.FC2	
12	000011	BTUN,FS JSCT06.FINDI,JSCT06.FINDI	
13	000012	BTUN,FS JSCT06.FINDO,JSCT06.FINDO	
14	000013	BTUN,FS JSCT06.FAIZ,JSCT06.FAIZ	
15	000014	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
16	000015	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
17	000016	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
18	000017	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
19	000018	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
20	000019	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
21	000020	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
22	000021	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
23	000022	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
24	000023	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
25	000024	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
26	000025	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
27	000026	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
28	000027	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
29	000028	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
30	000029	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
31	000030	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
32	000031	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
33	000032	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
34	000033	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
35	000034	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
36	000035	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
37	000036	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
38	000037	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
39	000038	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
40	000039	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
41	000040	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
42	000041	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
43	000042	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
44	000043	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
45	000044	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
46	000045	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
47	000046	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
48	000047	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
49	000048	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
50	000049	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
51	000050	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
52	000051	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
53	000052	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
54	000053	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
55	000054	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
56	000055	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
57	000056	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
58	000057	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
59	000058	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	
60	000059	BTUN,FS JSCT06.FNC,JSCT06.FNC	

ELT. ERRORS NONE. TIME 0.084 SEC. IMAGE COUNT 10

1,N

AXQT JSCASST.CT

PTO. DE DEF. INT. PARA CALCULO DE TEMPERATURA TXP.

PTO. DE DEF. SUP. PARA CALCULO DE TEMPERATURA TXP.

PTO. DE DEF. PARA CALCULO DE TEMPERATURA

KRET

SUP E INF, NO. DE PARTICTIONS, TOLERANCIA Y EXACTITUD

CON UNA EXACTITUD DE .100000-009 NO SE APPRECIA CAMBIO EN LA FASE

CONDUCCION= .207210-000

PENDIENTE= .381390+000

ORDENADA= .683000+000

FLUJO ESTIMADO= .893000-000

CORRECCION= .069781+000

DTRE= .397217+001

CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO

CONDUCCION= .157204-000

PENDIENTE= .384004+000

ORDENADA= .682660+000

FLUJO ESTIMADO= .752747-000

CORRECCION= -.386693+000

DTRE= -.358548+001

CON UNA EXACTITUD DE .100000-009 NO SE APPRECIA CAMBIO EN LA FASE

CONDUCCION= .176742-000

PENDIENTE= .387910+000

ORDENADA= .680724+000

FLUJO ESTIMADO= .844107-000

CORRECCION= .177100+000

DTRE= .376206+001

CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO

CONDUCCION= .167090-000

PENDIENTE= .388700+000

ORDENADA= .690077+000

FLUJO ESTIMADO= .799461-000

CORRECCION= -.892026-001

DTRE= -.768243+001

CON UNA EXACTITUD DE .100000-009 NO SE APPRECIA CAMBIO EN LA FASE

CONDUCCION= .171167-000

PENDIENTE= .388117+000

ORDENADA= .680717+000

FLUJO ESTIMADO= .819110-000

CORRECCION= .565330-001

DTRE= .371807+001

CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO

CONDUCCION= .169001-000

PENDIENTE= .387774+000

ORDENADA= .689920+000

FLUJO ESTIMADO= .810040-000

CORRECCION= -.166250-001

DTRE= .370076+001

CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO

CONDUCCION= .170147-000

PENDIENTE= .387700+000

ORDENADA= .680717+000

FLUJO ESTIMADO= .814101-000

CORRECCION= .763030-007
 DTREF= .370090+001

 CON UNA EXACTITUD DE .100000-000 NO SE APPRECIA CAMBIO EN LA FATE
 CONDUCCION= .169749-002
 PENDIENTE= .380701+000
 ORDENADA= .680701+000
 FLUJO ESTIMADO= .812776-002
 CORRECCION= -.345414-002
 DTREF= .370654+001

 CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO
 CONDUCCION= .169926-002
 PENDIENTE= .380700+000
 ORDENADA= .680790+000
 FLUJO ESTIMADO= .813115-002
 CORRECCION= .148380-007
 DTREF= .370802+001

 CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO
 CONDUCCION= .169850-002
 PENDIENTE= .380701+000
 ORDENADA= .680770+000
 FLUJO ESTIMADO= .812750-002
 CORRECCION= .615140-002
 DTREF= .370741+001

 CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO
 CONDUCCION= .169881-002
 PENDIENTE= .380700+000
 ORDENADA= .680701+000
 FLUJO ESTIMADO= .812706-002
 CORRECCION= .258006-002
 DTREF= .370767+001

 CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO
 CONDUCCION= .169860-002
 PENDIENTE= .380704+000
 ORDENADA= .680756+000
 FLUJO ESTIMADO= .812752-002
 CORRECCION= -.617480-004
 DTREF= .370760+001

 CON UNA TOLERANCIA DE .100000-006 LA FUNCION ES APROXIMADAMENTE CERO
 LA CONDUCTIVIDAD TECNICA TS .169870-002

REFERENCIAS.

- [1]: *The Journal of Chemical Physics*, vol. 14, No. 4, Abril 1946, 233-.
- Herrick L. Johnston; Edward R. Grilly
- [2]: *Chemical Engineering Progress*, vol. 47, No. 5, Mayo 1951, 223-
- J. M. Lenoir; E. W. Comings
- [3]: *Chemical Engineering Progress*, vol. 49, No. 10, Octubre 1953, 539-
- J. M. Lenoir; W. A. Junk; E. W. Comings
- [4]: *Journal of Chemical and Engineering Data*, vol. 5, No. 3, Julio 1960, 316-
- Wiley J. S. Smith; Leo D. Durbin; Riki Kobayashi .
- [5]: *The Journal of Chemical Physics*, vol. 39, No. 6, 15 Sept 1963, 1561-
- Lynn D. Ikenberry; Stuart A. Rice
- [6]: *Conference on Thermal Conductivity*
- Iowa State Univ. 1970 (9th) Proc. Ntis., 241-
- N. Mani; J. E. S. Venart.
- [7]: *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, 1-24, 1972
- B. Leneindre
- [8]: *Journal of Chemical and Engineering Data*, vol. 17, No. 4, 1972, 412-
- George M. Mallan; Marshall S. Michaelian; Frank J. Lockhart
- [9]: *Conf. Proc.*, No. 11, 193, 1973
- J. W. Haarman

- [10]: *Journal of Chemical and Engineering Data*, vol. 19, No. 1,
1974, 8-
Vincent J. Castelli; Everett M. Stanley
- [11]: *Journal of Chemical and Engineering Data*; vol. 24, No. 4,
1979, 281-
Peter L. Christensen; Aage Fredenslund
- [12]: *Physica* 97A (1979) 287-295
A. A. Clifford; J. Kestin; W. A. Wakeham
- [13]: Fischer, J.
1939 *Ann Phys. Lpz.*, 34, 669
- [14]: *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol. 20, No. 3, 1981; 216-
Yuji Nagasaka; Akira Nagashima
- [15]: *Proceeding of the Eighth Symposium on Thermophysical Properties* vol. I the Am. Soc. of Mech. Eng. (1982)
C. A. Nieto de Castro; J. M. N. A. Fareleira; J. C. G. Calado; W. A. Wakeham
- [16]: *Physica* 75 (1974) 454-482
J. J. De Groot; J. Kestin; H. Sookiazian
- [17]: *International Journal of Thermophysics*, vol. 4, No. 4, 1983
C. A. Nieto de Castro; S. F. Y. Li; G. C. Maitland; W. A. Wakeham
- [18]: *International Journal of Thermophysics*, vol. 4, No. 3, 1983
J. C. G. Calado; J. M. N. A. Fareleira; C. A. Nieto De Castro; W. A. Wakeham
- [19]: *Revue Roumaine de Chimie*, 25, 7, 1113-1112 (1980)
Rodica Vilcu; A. Ciochina
- [20]: *Thermal Conductivity Volumen 2*
Editado por R. P. Tye 1969
Academic Press London and N. Y.

[21]: *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 25, No. 5, pp. 661-673, 1982

J. Menashe; W. A. Wakeham

[22]: *Physica* 82C (1976) 392-408

J. J. Healy; J. De Groot; J. Kestin

[23]: *J. Phys. E (GB)* vol 9, No. 12, 1073-80 Diciembre 1976

C.A. Nieto de Castro; J. C. G. Calado; W. A. Wakeham; M. Dix

[21]: *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 270, 557-578 (1971)

E. McLaughlin; J. F. T. Pittman

[25]: *Journal of Research of the National Bureau of*

Standards Vol. 86, No. 5, Septiembre-Octubre 1981

Hans M. Roder

[26]: *Prediction of transport properties related to heat transfer*

by Joseph Kestin

Brown University Providence, R.I. 02912 USA

Keynote lecture to be delivered at seventh
international heat transfer conference Munich,
september 6-10, 1982

[27]: *Rev. Phys. Chem. Japan*, 43(1), 54, 1973

T. Makita, Y. Tanaka, A. Nagashima

[28]: *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Vol. 3, No. 4, 1974

H. J. M. Hanley; R. D. McCarty; W. M. Haynes

[29]: *Notas del curso de Teórica IV* 28/Oct/80

Eduardo Piña Garza

Instituto Politécnico Nacional México D. F.

[30]: *Sookiazian, Heros*

"Precise Measurement of the Thermal conductivity of
gases by transient hot-wire method"

Brown University, Ph. D. 1977

University Microfilms International
Ann Arbor, Michigan, USA 48106

[31]: *Conduction of Heat in Solids*

H. S. Carslaw y J. C. Jaeger

Oxford at the Clarendon Press segunda edición 1959

[32]: *Manual de Formulas y Tablas Matemáticas*

Murray R. Spiegel

Mc Graw-Hill

[33]: *Mathematical Methods for Physicists*

George Arfken

Academic Press segunda edición

[34]: *Problem Book in the Theory of Functions*

Knopp, Konrad

N.Y., Dover 1948 Vol.1.