



CAOS EN LA DINÁMICA DEL CUERPO RIGIDO

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 21 del mes de julio del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. EDUARDO PIÑA GARZA
DR. ARTURO ZUNIGA SEGUNDO
DR. ABIMAEEL JAVIER BENGOCHEA CRUZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

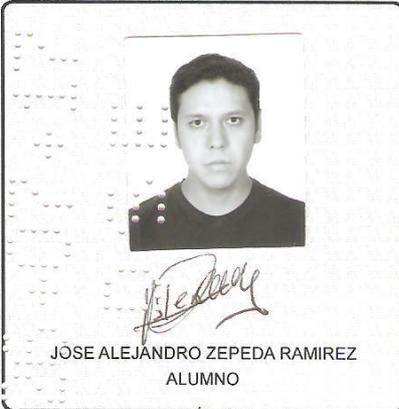
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: JOSE ALEJANDRO ZEPEDA RAMIREZ

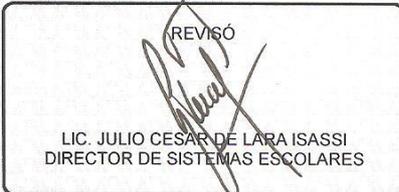
y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



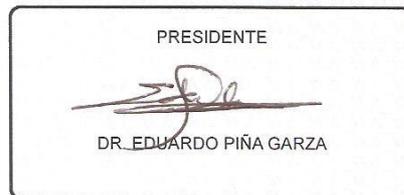
JOSE ALEJANDRO ZEPEDA RAMIREZ
ALUMNO



REVISÓ
LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES



DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA



PRESIDENTE
DR. EDUARDO PIÑA GARZA



VOCAL
DR. ARTURO ZUNIGA SEGUNDO



SECRETARIO
DR. ABIMAEEL JAVIER BENGOCHEA CRUZ



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERÍA

CAOS EN LA DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Tesis que presenta
Jóse Alejandro Zepeda Ramírez
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Física)

Asesor: Dr. Eduardo Piña Garza

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Eduardo Piña Garza

Secretario: Dr. Abimael Javier Bengochea Cruz

Vocal: Dr. Arturo Zuñiga Segundo

México, D.F. Julio 2017

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Breve estudio de la cinemática y dinámica del cuerpo rígido	5
3. Formulación Hamiltoniana de la Dinámica del Cuerpo Rígido con un Punto Fijo en un Campo de Gravedad Constante	55
4. Mapeo de Poincaré y Líneas de Simetría	73
5. Teoría de Floquet aplicada al estudio del movimiento cercano de una órbita periódica	83
6. Resultados Computacionales	96
7. Conclusiones	171
A. Geometría Esférica	173
Bibliografía	178

Agradecimientos

Antes que nada quiero expresar profunda gratitud A la UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA por abrirme sus puertas, darme la oportunidad de estudiar y poder seguir con mi educación de posgrado.

Me gustaría expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización de la presente tesis, en especial al Dr. Eduardo Piña Garza, director de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las Sugerencias recibidas de la Dra. Lidia Jiménez Lara y el Dr. Abimael Javier Bengochea Cruz.

Le doy gracias a mis padres José de Jesús y Ángela Dora por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

Agradezco la ayuda y amistad que me brindaron todos mis compañeros de posgrado.

También agradezco a CONACYT por la beca impartida para realizar los estudios de maestría.

Capítulo 1

Introducción

En la presente tesis se estudia el sistema dinámico del problema del cuerpo rígido con un punto fijo en un campo de gravedad constante usando la técnica de las líneas de simetría introducida por De Vogelaere [32, 33], siendo ampliamente desarrollada y explotada por diversos autores. Entre los principales se encuentran Piña et al. Quienes la aplicaron en el tratamiento del mapeo estándar y en el problema de Störmer [7, 8, 16, 30]. De hecho este trabajo es una extensión de lo que investigaron Chavoya-Piña [8] quienes estudiaron solo un caso particular del problema del cuerpo rígido con un punto fijo en un campo de gravedad constante, aquí se atacaran diversas situaciones físicas no abordadas del problema.

El problema del estudio del cuerpo rígido con un punto fijo bajo la influencia de un campo gravitatorio constante es uno de los más antiguos en mecánica clásica [34].

Este es el ejemplo de un problema no integrable en la mecánica hamiltoniana, según las múltiples definiciones de integrabilidad explicadas por Kozlov [21].

El problema como se verá en el desarrollo de esta tesis, podrá ser formulado en términos de un hamiltoniano independiente del tiempo con tres grados de libertad (los ángulos de Euler). En adición a la constancia de la energía, existe otra constante de movimiento: la componente vertical del momento angular. Estas dos constantes de movimiento permiten hacer la reducción a un problema de solo dos grados de libertad. Y cuando junto a estas dos constantes de movimiento, otra constante de movimiento es encontrada, el problema puede ser integrado por cuadraturas.

Varios casos particulares del problema han sido integrados [5, 23], el primer caso es el de Euler-Poinsot donde el punto fijo está situado en el centro de masa y la rotación ocurre libre de torcas, el segundo caso es el del Lagrange-Poisson, donde el cuerpo rígido es un trompo simétrico con su centro de masa ubicado en el eje de simetría. y finalmente el tercer caso es el de Kovalevskaya, aquí el elipsoide de inercia es simétrico respecto del punto fijo, con diferentes momentos principales de inercia, la mitad del valor de los otros dos, y el centro de masas se ubica en el plano de iguales momentos de inercia.

Junto a estos tres casos particulares muchos otros casos son conocidos donde restricciones de naturaleza dinámica son impuestos sobre la constancia de la energía o las componentes del momento angular y no solamente sobre los valores de los momentos de inercia o de la posición del centro de masa [5, 23].

Husson encontró que, cuando el elipsoide de inercia no es simétrico, para condiciones iniciales arbitrarias, una nueva integral algebraica [22, 23] no existe a excepción de los casos anteriormente mencionados.

Ziglin [20, 35, 36], demostró la inexistencia de primeras integrales adicionales a las clásicas conocidas. Esta prueba excluye los tres casos anteriores mencionados y el caso particular de Goryachev-Chaplygin, donde el elipsoide de inercia es simétrico, y siendo uno de los momentos de inercia igual a $1/4$ de los otros dos momentos de inercia, el centro de masa se ubica en el plano de simetría y la componente del momento angular en la dirección vertical se toma igual a cero.

Las propiedades caóticas de la no integrabilidad de este problema fueron exhibidas por Galgani et al [10], usando un mapa de Poincaré de la dinámica de las trayectorias en el espacio fase. El incremento en la fuerza de la torca da como resultado un incremento del comportamiento caótico de la dinámica.

A mediados de los noventa Borisov et al [1], estudiaron las propiedades caóticas de casos más generales del problema, que los tratados por Galgani y Chavoya-Piña, sin embargo no introducen ni aplican el concepto de línea de simetría al problema.

El estudio numérico de la dinámica del problema se realizará en las variables de Andoyer-Deprit, siguiendo la metodología de Galgani et al.

El desarrollo de las computadoras de alta velocidad, ha dado como consecuencia la invención de métodos novedosos en el análisis de los problemas orientados a la dinámica clásica [11–15, 19, 24, 25, 31], que originalmente fueron desarrollados para la resolución de problemas concretos orientados a las áreas de la tecnología.

Esta clase de métodos consiste en solucionar numéricamente las ecuaciones diferenciales de la dinámica del problema, lo que permite la investigación de las particularidades del flujo generado en el espacio fase, como puntos fijos y orbitas periódicas y de la modificación que sufren las mismas al cambiar los valores de los parámetros de los que depende y determinan el sistema mecánico en estudio.

Por supuesto que estas técnicas computacionales tienen sus fundamentos en las investigaciones y desarrollos teóricos que aún siguen evolucionando y creciendo en el estudio de los sistemas dinámicos. Podemos citar como punto de partida de estas investigaciones y desarrollos los trabajos de Henri Poincaré, Birchoff, Cartan, etc.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo dos se hace un estudio breve del planteamiento del problema del cuerpo rígido con un punto fijo en un campo de gravedad constante y se estudian los casos integrables conocidos [5, 17, 18] .

En el capítulo tres se introduce la formulación Hamiltoniana del problema, para después introducir las variables de Andoyer-Deprit [2, 9] para así seguir lo que hizo Galgani [10] en el tratamiento del problema.

En el capítulo cuatro se introduce la definición de mapa de Poincaré, dentro del cual se define al concepto de línea de simetría para el estudio del movimiento y se revisan algunas de sus propiedades más importantes.

En el capítulo cinco se introduce la teoría de la estabilidad de las órbitas periódicas de los sistemas Hamiltonianos.

En el capítulo seis se presentan los resultados computacionales de la integración numérica de la ecuaciones diferenciales del problema para cada caso particular, es decir se presentan los mapas de Poincaré para cada caso particular y se discute lo obtenido en cada uno de los mapas.

Capítulo 2

Breve estudio de la cinemática y dinámica del cuerpo rígido

La mayor parte de este capítulo está desarrollado en base a Piña[26]. Se comienza por dar una definición de cuerpo rígido que es el objeto principal de estudio de la presente tesis.

El cuerpo rígido es un conjunto de partículas sujetas a la condición de que exista un sistema de referencia en el cual las coordenadas cartesianas de cada una de las partículas son constantes de movimiento.

El estudio de la dinámica del cuerpo rígido se realiza considerando dos sistemas coordenados. El primero es el sistema coordenado galileano o inercial. El segundo sistema coordenado, el cual se llamara *anclado al cuerpo* será aquel en el cual las posiciones de las partículas son constantes de movimiento. El movimiento del cuerpo rígido puede ser de dos tipos: con un *punto fijo* o sin él. El cuerpo rígido con un punto fijo, que es el caso que se estudiará en esta tesis, tiene al menos una constante de movimiento. Este punto se elige como origen de coordenadas para ambos sistemas de referencia, y ambos sistemas están relacionados mediante una rotación.

Esta rotación es función del tiempo y su dependencia temporal determina el movimiento de rotación del cuerpo rígido. Sea \mathbf{r} el radio vector que ubica la posición de cualquier partícula del cuerpo rígido en el sistema galileano o inercial y sea \mathbf{a} el vector de las componentes constantes de la misma partícula en el sistema anclado al cuerpo. Estas componentes se relacionan mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{a},$$

donde \mathbf{R} es la rotación que hace paralelos los ejes coordenados correspondientes.

Algo que vale la pena señalar es que la mayoría de autores acostumbra definir el cuerpo rígido como un conjunto de partículas cuya distancia entre cada una de ellas es una constante. La definición dada anteriormente es totalmente equivalente. Si tenemos un sistema de referencia donde las coordenadas son constantes de movimiento, entonces sus distancias mutuas son constantes y viceversa.

Desde aquí, hasta la ecuación (2.65) de este capítulo consideraremos las propiedades de la matriz de rotación para un valor fijo del tiempo.

Por definición las rotaciones son transformaciones lineales de vectores que dejan invariante la norma, y tales que una base de vectores se transforma por medio de una rotación en una base de vectores. A continuación, estudiamos las consecuencias

de las dos propiedades anteriores.

Sean \mathbf{a} las componentes del vector que, al ser rotado, por la matriz de rotación \mathbf{R} , nos da como resultado un vector \mathbf{x} .

Así obtenemos la ecuación matricial.

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

que corresponde a una transformación lineal.

El cuadrado de la norma de un vector se define como

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a}, \quad (2.2)$$

con \mathbf{a}^T el vector traspuesto de \mathbf{a} .

Expresamos la invariancia de la norma ante rotaciones, primeramente calculamos la traspuesta de la ecuación (2.1)

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T, \quad (2.3)$$

Aquí \mathbf{R}^T es la matriz traspuesta de la matriz de rotación \mathbf{R} , combinando (2.1) y (2.3) llegamos a:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{a}, \quad (2.4)$$

ahora nos valemos de la matriz identidad \mathbf{E} para escribir (2.4) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{a} &= \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{a}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta última ecuación se satisface para \mathbf{a} arbitrario, y como la matriz $\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{E}$ es simétrica, por definición, se concluye que

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

esta es la condición necesaria y suficiente que debe satisfacer la matriz de la transformación lineal que conserva la norma.

La matriz inversa de la matriz de rotación es su matriz traspuesta.

Estas transformaciones lineales que mantienen invariante la norma se llaman *transformaciones ortogonales*.

Las *rotaciones* son transformaciones lineales ortogonales que además dejan invariante la propiedad de la base de vectores.

Un conjunto ordenado de vectores ortonormales \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 y \mathbf{b}_3 , se dice que forman una base cuando el determinante de la matriz que tienen por columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, a los vectores \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 y \mathbf{b}_3 es igual a 1:

$$|(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3)| = 1, \quad (2.7)$$

donde las barras verticales en la última ecuación significan que hay que realizar la operación de tomar el determinante. Para el caso cuando este toma el valor de -1, la base se llamara izquierda.

El producto escalar es invariante ante una rotación. Por esta razón una base ortonormal se transformará mediante alguna rotación en otra base ortonormal. Veremos a continuación la consecuencia de que una base derecha se rote en una base derecha. Primeramente consideramos el determinante de la matriz de los tres vectores rotados.

$$|(\mathbf{R}\mathbf{b}_1\mathbf{R}\mathbf{b}_2\mathbf{R}\mathbf{b}_3)| = 1, \quad (2.8)$$

el cual tiene el valor uno debido a que \mathbf{R} es una rotación.

De esta última ecuación se puede sacar la matriz de rotación como factor común de la matriz de vectores $(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3)$:

$$(\mathbf{R}\mathbf{b}_1\mathbf{R}\mathbf{b}_2\mathbf{R}\mathbf{b}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3) \quad (2.9)$$

ahora usamos la propiedad de que el determinante de un producto matricial es igual al producto de los determinantes de las matrices factores

$$|(\mathbf{R}\mathbf{b}_1\mathbf{R}\mathbf{b}_2\mathbf{R}\mathbf{b}_3)| = |\mathbf{R}(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3)| = |\mathbf{R}||(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3)| = 1. \quad (2.10)$$

de (2.7) y (2.8) en (2.10) se obtiene que

$$|\mathbf{R}| = 1, \quad (2.11)$$

es decir, que el determinante de la matriz de rotación debe ser igual a uno. Ahora tomamos el determinante en ambos miembros de (2.6),

$$|\mathbf{R}^T \mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T| |\mathbf{R}| = |\mathbf{R}| |\mathbf{R}| = |\mathbf{R}|^2 = 1$$

Así podemos concluir que el determinante toda transformación ortogonal es igual a ± 1 .

Las rotaciones son transformaciones ortogonales con determinante igual a uno. Las transformaciones ortogonales con determinante igual a -1 se llaman *rotaciones impropias* y se pueden representar por medio de rotaciones que multiplican la matriz de inversión.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Las rotaciones impropias no son rotaciones debido a que esta última matriz transforma una base derecha en una base izquierda.

Ahora estudiaremos el espectro de la matriz de rotaciones.

Primeramente escribimos la ecuación característica de la matriz de rotación

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (2.13)$$

con \mathbf{a} un vector propio de \mathbf{R} y λ es un valor propio de \mathbf{R} , solución de la siguiente ecuación

$$|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{E}| = 0. \quad (2.14)$$

Ya a que \mathbf{R} es una matriz real, la ecuación (2.14) deberá tener tres raíces reales, o una raíz real y dos conjugadas complejas.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dichas raíces y $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sus vectores propios correspondientes.

Tomamos la traspuesta conjugada de la ecuación (2.13)

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{R}^T = \lambda^* \mathbf{a}^\dagger, \quad (2.15)$$

donde λ^* es el complejo conjugado de λ y \mathbf{a}^\dagger es vector traspuesto conjugado de \mathbf{a} .

Multiplicamos matricialmente miembro a miembro las ecuaciones (2.15) y (2.13) y encontramos

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \lambda^* \lambda \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}. \quad (2.16)$$

De esta última ecuación tenemos que

$$(\lambda^* \lambda - 1) \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = 0$$

Como $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} > 0$ para todo vector no nulo \mathbf{a} , se concluye que

$$\lambda^* \lambda = 1, \quad (2.17)$$

Así, todo valor propio de \mathbf{R} deberá ser de magnitud uno.

Si tomamos el complejo conjugado de la ecuación (2.13) obtenemos

$$\mathbf{R} \mathbf{a}^* = \lambda^* \mathbf{a}^*. \quad (2.18)$$

De esta relación concluimos que si λ es un valor propio complejo de \mathbf{R} , correspondiente al vector propio de \mathbf{a} , entonces λ^* es otro valor propio de \mathbf{R} que corresponde al vector propio de \mathbf{a}^* .

Entonces, si λ_2 es número complejo, se tendrá que es el conjugado de λ_1 por ejemplo, y además debe tener magnitud unidad, es decir, que este se escribe como

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = \exp(-i\Phi); \quad (2.19)$$

Esta última relación satisface (2.17), con Φ real. El producto de las tres raíces debe ser igual al determinante de la matriz \mathbf{R}

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2.20)$$

Por lo que, si λ_2 es un número complejo, entonces $\lambda_2^* = \lambda_1$ y el producto de estas dos raíces debe valer uno, según (2.19) y entonces

$$\lambda_3 = 1. \quad (2.21)$$

Si las tres raíces son reales, existen dos únicas posibilidad de acuerdo a las ecuaciones (2.20) y (2.17).

1. Dos raíces repetidas

$$\lambda_3 = -\lambda_2 = -\lambda_1 = 1 \quad (2.22)$$

2. Tres raíces repetidas

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad (2.23)$$

En todos los casos se tiene un valor propio igual a uno como en (2.21), así que existe siempre un vector propio, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$ que es invariante ante la rotación. Sin perder generalidad supondremos que \mathbf{n} es real y unitario, debido a que sus partes real o imaginaria también son vectores propios del valor propio uno. A este vector que queda invariante ante la rotación se le llama *eje de rotación* y se satisface que

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n}. \quad (2.24)$$

Consideramos el caso en el que existen otros dos vectores propios complejos conjugados que denotaremos por \mathbf{w} y \mathbf{w}^* , los cuales satisfacen

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{w} \exp(-i\Phi), \quad (2.25)$$

Ahora tomamos la traspuesta la ecuación (2.24) y multiplicamos miembro a miembro con (2.25) para obtener

$$\mathbf{n}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{w} = \mathbf{n}^T \mathbf{w} \exp(-i\Phi)$$

De la propiedad de la invariancia de la norma ante rotaciones se tiene

$$\mathbf{n}^T \mathbf{w} \exp(-i\Phi) = \mathbf{n}^T \mathbf{w}, \quad (2.26)$$

de esta expresión se deduce (cuando $\exp(-i\Phi) \neq 1$) que

$$\mathbf{n}^T \mathbf{w} = 0. \quad (2.27)$$

El eje de rotación es perpendicular a la parte real e imaginaria de los vectores propios complejos.

Si se multiplica ahora (2.25) por la misma ecuación traspuesta se obtiene

$$\mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} \exp(-i\Phi) \exp(-i\Phi)$$

y de nuevo se usa la propiedad de la invariancia de la norma ante rotaciones para hallar

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} \exp(-2i\Phi), \quad (2.28)$$

de lo cual se deduce (cuando $\exp(-2i\Phi) \neq 1$) que

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 0. \quad (2.29)$$

Separamos a \mathbf{w} en su parte real e imaginaria.

$$\mathbf{w} = \mathbf{d} + i\mathbf{e}, \quad (2.30)$$

y de (2.29) se tiene

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = (\mathbf{d}^T + i\mathbf{e}^T)(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} + i\mathbf{d}^T \mathbf{e} + i\mathbf{e}^T \mathbf{d} - \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{e}^T \mathbf{e}) + 2i\mathbf{d}^T \mathbf{e} = 0$$

de lo cual se deduce que

$$\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (2.31)$$

y

$$\mathbf{d}^T \mathbf{e} = 0. \quad (2.32)$$

Las partes real e imaginaria del vector propio complejo tienen el mismo tamaño y son perpendiculares entre sí.

Sin perder generalidad supondremos que \mathbf{d} y \mathbf{e} son unitarios y además que \mathbf{n} , \mathbf{d} y \mathbf{e} forman una base derecha de vectores. El vector \mathbf{w} complejo se normaliza por la

condición.

$$(\mathbf{v}^\dagger)^T \mathbf{v} = (\mathbf{d}^T - i\mathbf{e}^T)(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} = 2. \quad (2.33)$$

Los vectores \mathbf{e} y \mathbf{d} están definidos hasta una rotación en el plano que los contiene, como dicta la ecuación (2.25):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\longrightarrow \mathbf{v} \exp(-i\alpha) = (\mathbf{d} + i\mathbf{e})(\cos \alpha - i \sin \alpha) = \\ &= (\mathbf{d} \cos \alpha + \mathbf{e} \sin \alpha) + i(-\mathbf{d} \sin \alpha + \mathbf{e} \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usamos este último resultado en la ecuación (2.25) para separarla en sus partes real e imaginaria, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) &= (\mathbf{d} + i\mathbf{e})(\cos \Phi - i \sin \Phi) = \\ &= (\mathbf{d} \cos \Phi + \mathbf{e} \sin \Phi) + i(-\mathbf{d} \sin \Phi + \mathbf{e} \cos \Phi), \end{aligned} \quad (2.35)$$

de donde se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{d} &= \mathbf{d} \cos \Phi + \mathbf{e} \sin \Phi, \\ \mathbf{R}\mathbf{e} &= -\mathbf{d} \sin \Phi + \mathbf{e} \cos \Phi. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Esto nos muestra a \mathbf{R} como la rotación de un ángulo Φ en el plano de los vectores \mathbf{d} y \mathbf{e} . También se observa que \mathbf{R} es una rotación de un ángulo Φ alrededor del eje \mathbf{n} . También podemos escribir en forma matricial la aplicación de la matriz de rotación a la base derecha de vectores

$$\mathbf{R}(\mathbf{npq}) = (\mathbf{npq}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Ahora nuestra tarea consiste en expresar a la matriz de rotación en función del ángulo de rotación Φ y del eje de rotación \mathbf{n} .

Descomponemos a la matriz de rotación y a su matriz traspuesta en su parte simétrica y antisimétrica

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{B} - \mathbf{A}, \quad (2.39)$$

y multiplicamos por \mathbf{R}^T las ecuaciones (2.24) y (2.25)

$$\mathbf{R}^T \mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \exp(i\Phi). \quad (2.41)$$

y notamos que se obtienen los mismos vectores propios aunque en distinta correspondencia, este último paso pudo realizarse debido a que la matriz \mathbf{R}^T es la matriz inversa de la matriz de rotación de acuerdo a (2.6).

La semisuma y la semidiferencia de (2.24) y (2.41) producen las ecuaciones

$$(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)\mathbf{n} = (\mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{n} = 2\mathbf{B}\mathbf{n} = 2\mathbf{n}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (2.42)$$

y

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{n} = (\mathbf{B} + \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{A})\mathbf{n} = 2\mathbf{A}\mathbf{n} = 2\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{0}$ es el vector cero. Análogamente, la semisuma y la semidiferencia de las ecuaciones (2.35) y (2.41) nos darán

$$(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = 2\mathbf{B}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \exp(-i\Phi) + (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \exp(i\Phi) =$$

$$= (\mathbf{d} + i\mathbf{e})(\exp(-i\Phi) + \exp(i\Phi)),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = \cos \Phi (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \quad (2.44)$$

y

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = 2\mathbf{A}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \exp(-i\Phi) - (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) \exp(i\Phi) =$$

$$= (\mathbf{d} + i\mathbf{e})(\exp(-i\Phi) - \exp(i\Phi)) \frac{i}{i},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = -i \sin \Phi (\mathbf{d} + i\mathbf{e}). \quad (2.45)$$

Las ecuaciones (2.43) y (2.45) tienen por solución

$$\mathbf{A} = \sin \Phi \mathbf{n} \times . \quad (2.46)$$

Para la ecuación (2.43) esto es fácil de verificar, pero para la ecuación (2.45) se requiere un poco más de esfuerzo, como \mathbf{n} es perpendicular a $\mathbf{w} = \mathbf{d} + i\mathbf{e}$ el vector que resulta del producto cruz entre estos dos vectores debe de ser también perpendicular a \mathbf{n} y $\mathbf{w} = \mathbf{d} + i\mathbf{e}$, el único vector que satisface esto es el vector $\mathbf{e} - i\mathbf{d}$, la verificación de la ortogonalidad es fácil, con el vector \mathbf{n} es trivial y para el vector \mathbf{w} se tiene

$$(\mathbf{d}^T + i\mathbf{e}^T)(\mathbf{e} - i\mathbf{d}) = \mathbf{d}^T \mathbf{e} + i\mathbf{d}^T \mathbf{d}^T - i\mathbf{e}^T \mathbf{e}^T + \mathbf{e}^T \mathbf{d}^T = 0$$

Este último resultado se logra por las ecuaciones (2.31) y (2.32), entonces si aplicamos (2.46) a (2.45) se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = \sin \Phi \mathbf{n} \times (\mathbf{d} + i\mathbf{e}) = \sin \Phi (\mathbf{e} - i\mathbf{d}) = -i \sin \Phi (\mathbf{d} + i\mathbf{e}).$$

Así se concluye que toda matriz antisimétrica en tres dimensiones se puede escribir como el producto \times de un vector. La matriz simétrica \mathbf{B} se puede escribir en función del conjunto ortonormal de sus vectores propios \mathbf{n} , \mathbf{d} y \mathbf{e} , y de sus valores propios correspondientes 1 , $\cos \Phi$, $\cos \Phi$ en la forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{nn}^T + (\mathbf{pp}^T + \mathbf{qq}^T) \cos \Phi. \quad (2.47)$$

El caso particular cuando $\Phi = 0$ de esta ecuación nos da la matriz unidad

$$\mathbf{E} = \mathbf{nn}^T + \mathbf{pp}^T + \mathbf{qq}^T, \quad (2.48)$$

que permite expresar \mathbf{S} en función de \mathbf{n} y de Φ

$$\mathbf{S} = \mathbf{nn}^T + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}^T) \cos \Phi. \quad (2.49)$$

Sumamos (2.46) y (2.49) para obtener \mathbf{R} en función del ángulo de rotación Φ y

del eje de rotación \mathbf{n}

$$\mathbf{R} = \mathbf{nn}^T + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}^T) \cos \Phi + \sin \Phi \mathbf{n} \times, \quad (2.50)$$

la cual se conoce como la forma de Gibbs de la matriz de rotación. Ésta es una manera de parametrizar la matriz de rotación que se usa a continuación. Se ha difundido el uso de otras coordenadas para la matriz de rotación, algunos ejemplos son: los ángulos de Euler, los parámetros de Cayley-Klein, los parámetros de Euler-Rodrigues-Olinde y los parámetros de Piña [27]. De éstas, nosotros usaremos los ángulos de Euler para el desarrollo de esta tesis y las demás coordenadas no se usarán aquí; pero posteriormente al desarrollar la dinámica se introducirán las variables de Andoyer-Deprit, las cuales incluyen funciones no solo de coordenadas, sino también de momentos.

A continuación se introducirá la parametrización de la matriz de rotación por medio de tres ángulos, los cuales se llaman ángulos de Euler. En esta parametrización se expresa a la matriz de rotación como el producto de tres rotaciones:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1. \quad (2.51)$$

Para cada una de estas rotaciones se tiene la propiedad de que su eje de rotación es constante

La primera rotación \mathbf{R}_1 se lleva a cabo alrededor de la dirección OZ y tiene por eje de rotación al vector base

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

el ángulo de rotación para \mathbf{R}_1 se denotara con la letra ψ :

$$\Phi_1 = \psi. \quad (2.53)$$

Se sustituyen (2.53) y (2.53) en la forma (2.50) de la matriz de rotación para

obtener \mathbf{R}_1

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cos \psi \left(\mathbf{E} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \sin \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.54}\end{aligned}$$

La segunda rotación \mathbf{R}_2 se lleva a cabo alrededor de la dirección OX y tiene por eje de rotación al vector base

$$\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

y el ángulo de rotación de \mathbf{R}_2 , será denotado por θ :

$$\Phi_2 = \theta. \tag{2.56}$$

La matriz de rotación \mathbf{R}_2 resultará según (2.50) igual a la expresión

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

La tercera matriz de rotación \mathbf{R}_3 se lleva a cabo nuevamente alrededor de la dirección OZ por lo que es muy semejante a la matriz \mathbf{R}_1 ; el eje de rotación es de nuevo \mathbf{n}_1 ,

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

y el ángulo de rotación será denotado por la letra ϕ :

$$\Phi_3 = \phi. \quad (2.59)$$

La expresión para \mathbf{R}_3 es

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Cada una de las tres matrices $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ son función de un solo ángulo.

Entonces toda matriz de rotación será el producto de las matrices $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ dadas por las ecuaciones (2.54), (2.57) y (2.60).

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Esta última expresión es precisamente la matriz de rotación \mathbf{R} en función de los tres ángulos de Euler ψ, ϕ y θ .

En la figura 2.1 se muestra el conjunto de las tres rotaciones.

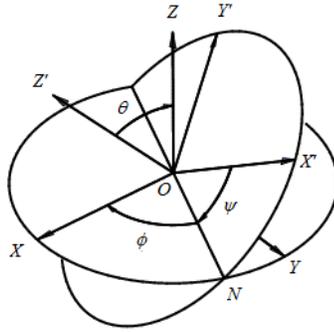


Figura 2.1: Ángulos de Euler.

Ahora analizamos que es lo que sucede al aplicar sucesivamente las rotaciones individuales. La primera rotación \mathbf{R}_1 se efectúa alrededor del eje OZ , por un ángulo ψ . La primera rotación \mathbf{R}_1 se efectúa alrededor del eje OZ , por un ángulo ψ . La segunda rotación \mathbf{R}_2 de un ángulo θ se realiza alrededor de la dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, al rededor

del eje OX , podemos notar que el vector que estaba en la dirección $\begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$

ahora se encuentra en esta dirección. Cuando se aplica la segunda rotación, el eje OZ se inclina un ángulo θ respecto a la dirección original. Y finalmente se realiza

la tercera rotación \mathbf{R}_3 de un ángulo ϕ que envía la dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a la dirección

$\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$, la rotación completa, como ya se dijo, se muestra en la figura 1.

Se tiene entonces la propiedad

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos^2 \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin^2 \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \cos^2 \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \cos \psi + \sin \phi \sin^2 \psi - \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \phi \cos \psi - \sin \theta \cos \psi \sin \phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Esta dirección se conoce como *línea nodal* y corresponde al eje intermedio de rotación, y es la intersección del plano XOY antes de rotar, con el plano XOY después de rotar. Es el único vector del plano XOY que se rota en un vector del plano XOY .

Para hacer distinción de estos tres giros al primero se le llama *rotación*, al segundo *nutación* o *cabeceo*, y al tercero *precesión*.

Los ángulos θ y ϕ se pueden considerar como las coordenadas esféricas de la dirección a la cual será rotado el vector unitario paralelo a la dirección del eje coordenado OZ , debido a que tenemos

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Por otro lado, los ángulos θ y ψ son las coordenadas esféricas de la dirección que será rotada al nuevo eje OZ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

A continuación se introducirá el concepto de velocidad angular y se calculan las cantidades energía cinética y momento angular. Estas cantidades físicas serán fundamentales para el desarrollo posterior de esta tesis.

La posición \mathbf{r}_i de cada partícula i del cuerpo rígido en el sistema inercial o galileano está dada por la expresión (mencionada al principio del capítulo)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} \mathbf{a}_i, \quad (2.65)$$

que es función de la matriz de rotación \mathbf{R} y la posición constante \mathbf{a}_i de la misma partícula relativa al punto fijo.

Derivamos respecto al tiempo la ecuación (2.65) y obtenemos la expresión de la velocidad de la partícula en el sistema galileano

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{a}_i, \quad (2.66)$$

donde el punto sobre cada una de las letras simboliza la derivada respecto del tiempo de estas funciones.

La energía cinética T de cada una de partículas que constituyen al cuerpo rígido

está dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.67)$$

Así sustituyendo la ecuación (2.66) en (2.67), se obtiene la energía cinética rotacional

$$Ec = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{a}_i^T \dot{\mathbf{R}}_i^T \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{a}_i. \quad (2.68)$$

Ahora la cantidad de movimiento angular se define como

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (2.69)$$

se sustituye la ecuación (2.66) en (2.69) y se obtiene la cantidad de movimiento angular rotacional

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i (\mathbf{R} \mathbf{a}_i) \times (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{a}_i). \quad (2.70)$$

Ahora definimos la velocidad angular esto para escribir en función de ella la velocidad de la matriz de rotación.

De la ecuación (2.6) tenemos

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E},$$

donde \mathbf{E} es la matriz constante unidad. Derivamos respecto al tiempo ambos miembros de esta ecuación, lo que nos lleva a la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

con $\mathbf{0}$ la matriz de componentes igual a cero.

Definamos ahora la matriz \mathbf{G} como

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}. \quad (2.72)$$

De la ecuación (2.71) deducimos que esta matriz es antisimétrica, esto es fácil de verificar.

$$\mathbf{G}^T = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} = -\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{G}. \quad (2.73)$$

Como vimos al principio de este capítulo toda matriz antisimétrica en de tres dimensiones se puede escribir como el producto cruz \times de un vector, en este caso del vector $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\omega} \times . \quad (2.74)$$

El vector $\boldsymbol{\omega}$, asociado a la matriz (2.72), se conoce como *velocidad angular* en el sistema anclado al cuerpo rígido. Si ω_1 , ω_2 y ω_3 son las componentes de la velocidad angular, tenemos las ecuaciones

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

y se puede verificar fácilmente que para cualquier vector \mathbf{a} ,

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (2.76)$$

Por consiguiente las componentes ω_1 , ω_2 y ω_3 de la velocidad angular en el sistema anclado se definen mediante la siguiente relación

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times . \quad (2.77)$$

Si deseamos hallar las componentes de la velocidad angular en el sistema inercial, multiplicamos por la matriz de rotación

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.78)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ designan las componentes en el sistema inercial. También las componentes del vector $\boldsymbol{\Omega}$ están asociadas a otra matriz antisimétrica; similarmente como en

(2.77), se encuentra

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \times . \quad (2.79)$$

Esto se deduce rotando (2.76) y usando que la rotación de dicho producto es igual al producto de vectores rotados

$$\mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = (\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{R}\mathbf{a}), \quad (2.80)$$

de donde se deduce (2.79) en la forma

$$\mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \times . \quad (2.81)$$

Este último resultado será importante para la deducción que a continuación sigue.

Ahora se obtendrán las componentes de la velocidad angular expresada en ángulos de Euler, este resultado será fundamental para desarrollar la sección siguiente. La matriz de rotación es el producto de tres rotaciones (2.51), calculamos su derivada respecto del tiempo

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_3\mathbf{R}_2\dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{R}_3\dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}_1 + \dot{\mathbf{R}}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1, \quad (2.82)$$

entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times &= \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_3^T \left(\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2\dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{R}_3\dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}_1 + \dot{\mathbf{R}}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 \right) = \\ &= \mathbf{R}_1^T\dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2^T\dot{\mathbf{R}}_2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_3^T\dot{\mathbf{R}}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1, \end{aligned} \quad (2.83)$$

y la velocidad angular está dada por (2.77), así se tiene que

$$\boldsymbol{\omega} \times = \boldsymbol{\omega}_1 \times + \mathbf{R}_1^T\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2^T\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1, \quad (2.84)$$

y usando el resultado anterior: la rotación del producto \times es el producto \times de los

vectores rotados, se encuentra que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T \boldsymbol{\omega}_3. \quad (2.85)$$

Las tres rotaciones en (2.51) tienen eje constante, las velocidades angulares son simplemente

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Ahora calculamos el segundo sumando de (2.85) usando (2.86) y \mathbf{R}_1 en forma explícita

$$\mathbf{R}_1^T \dot{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Finalmente se calcula el tercer sumando de (2.85)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T \boldsymbol{\omega}_3 &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \dot{\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Se obtienen así las componentes de la velocidad angular en términos de los ángulos de Euler, sustituyendo $\boldsymbol{\omega}_1$, (2.87) y (2.88)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\phi} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Esta velocidad angular está formada por la suma de tres términos, cada uno de los cuales está formado a su vez por la derivada de un ángulo de Euler que multiplica su eje de rotación correspondiente, visto desde el sistema anclado.

Ahora introducimos el concepto de matriz de inercia, cantidad física fundamental

para el entendimiento de la dinámica del cuerpo rígido. Vemos que si se sustituye en la energía cinética de rotación (2.68) y la velocidad de la matriz de rotación en términos de la velocidad angular en el sistema anclado al cuerpo, ésta se obtiene fácilmente de (2.77), así se llega a

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{a}_i^T (\boldsymbol{\omega} \times)^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i), \quad (2.90)$$

hemos usado aquí la propiedad de que la matriz $\boldsymbol{\omega} \times$ es antisimétrica, si desarrollamos el triple producto vectorial en (2.90) y re arreglamos obtenemos

$$T = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{a}_i^T [\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \sum_i m_i [\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \mathbf{E} - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T] \boldsymbol{\omega} \quad (2.91)$$

donde \mathbf{E} es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

La energía cinética de rotación queda expresada en función de una matriz que se conoce como matriz de inercia y que de denotaremos por

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i [\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i \mathbf{E} - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T]. \quad (2.92)$$

Esta matriz es constante y se expresa en función de las masas y posiciones constantes de todas las partículas del cuerpo rígido en el sistema anclado al cuerpo.

La energía cinética de rotación se escribe como

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.93)$$

También podemos deducir una expresión para obtener la cantidad de movimiento angular en términos de la matriz de inercia, se sustituye la velocidad de la matriz de rotación en la expresión (2.70) para obtener

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i (\mathbf{R} \mathbf{a}_i) \times (\mathbf{R} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i) = \mathbf{R} \sum_i m_i \mathbf{a}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_i), \quad (2.94)$$

donde de nuevo se usó el resultado: la rotación del producto \times es el producto \times de los vectores rotados. Se desarrolla el triple producto vectorial y se arregla para

obtener

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{R} \sum_i m_i [\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T] \boldsymbol{\omega}, \quad (2.95)$$

así podemos expresar la cantidad de movimiento como

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.96)$$

Esta ecuación nos muestra que la rotación del vector $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ nos da el vector \mathbf{J} que es la cantidad de movimiento en el sistema inercial, es decir, que el vector $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ es la cantidad de movimiento, pero en el sistema anclado al cuerpo. Este vector lo denotaremos por la letra \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.97)$$

Entonces, los vectores \mathbf{L} y \mathbf{J} son las componentes de la cantidad de movimiento angular en el sistema anclado y el sistema galileano respectivamente, y sus componentes están relacionadas por la matriz de rotación.

$$\mathbf{J} = \mathbf{R} \mathbf{L}, \quad (2.98)$$

podemos combinar la ecuaciones (2.93) y (2.97) para hallar

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}. \quad (2.99)$$

Así se encuentra la energía cinética en función de la cantidad de movimiento angular del sistema anclado.

La matriz de inercia puede ser diagonalizada de manera que la forma de la energía cinética (2.93) se reduzca a la forma canónica

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2), \quad (2.100)$$

en lo sucesivo supondremos que tal es la elección de los ejes del sistema del cuerpo, llamados ejes principales de inercia, o simplemente ejes de inercia. Los coeficientes I_1 , I_2 e I_3 reciben el nombre de momentos principales de inercia y supondremos que

se cumple

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3. \quad (2.101)$$

A partir de aquí estudiaremos las ecuaciones dinámicas del movimiento del cuerpo rígido. A pesar de que generalmente el cuerpo rígido está constituido por un número muy grande de partículas, para nuestro caso la dinámica tiene en cuenta solamente la rotación alrededor de un punto fijo así que basta analizar cómo varía con el tiempo la matriz de rotación. Está la posibilidad de ignorar a las fuerzas entre las partículas responsables de la rigidez del cuerpo y que permiten mantener invariantes las distancias relativas entre partículas y suponer la existencia del sistema coordenado donde son constantes las posiciones de todas las partículas que componen al cuerpo rígido.

Estas fuerzas ignorables de restricción no aparecen en la suma de todas las fuerzas o todas las torcas porque se cancelan entre ellas en virtud del principio de acción y reacción.

Para deducir las ecuaciones del movimiento, comenzamos por derivar respecto del tiempo la cantidad de movimiento angular (2.69)

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (2.102)$$

Aquí definimos a \mathbf{F}_i como

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{F}_i. \quad (2.103)$$

que es la fuerza sobre la partícula i que satisface la segunda ley de Newton.

El miembro de la derecha de (2.102) es por definición la torca total del sistema. Algo que es importante notar es que en esta torca no es preciso tomar en cuenta las fuerzas de restricción por que obedecen la tercera ley de Newton.

Para nuestro caso la ecuación (2.102) se convierte en

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{J}} = \sum_i (\mathbf{R} \mathbf{a}_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \mathbf{N} \quad (2.104)$$

esta ecuación describe la dinámica puramente rotacional, la cantidad \mathbf{N} se refiere a las componentes de la torca en el sistema anclado, en este caso tanto la torca \mathbf{N} como la cantidad de movimiento angular \mathbf{J} se miden con referencia al punto inmóvil.

Ahora se sustituye la ecuación (2.96) en (2.104) y se tiene

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}\mathbf{N}; \quad (2.105)$$

se deriva el producto del miembro izquierdo

$$\mathbf{R}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\mathbf{N}, \quad (2.106)$$

y se toma como factor común la matriz de rotación para obtener

$$\mathbf{R}(\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}\mathbf{N}; \quad (2.107)$$

y multiplicamos por la izquierda con \mathbf{R}^T y usamos (2.77) que nos define la velocidad angular para obtener las ecuaciones del movimiento de Euler,

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{N}, \quad (2.108)$$

estas son las ecuaciones fundamentales de la dinámica rotacional para el cuerpo rígido con un punto inmóvil.

Se escriben ahora en términos de sus componentes en el sistema de los ejes principales de la matriz de inercia.

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= N_3, \end{aligned} \quad (2.109)$$

con N_1 , N_2 y N_3 las componentes de la torca \mathbf{N} .

Las ecuaciones del movimiento se pueden escribir en términos de la cantidad de movimiento angular. Se despeja la velocidad angular de la ecuación (2.97) y se sustituye en (2.108) para obtener.

$$(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}. \quad (2.110)$$

Escribimos esta ecuación en términos de sus componentes en el sistema anclado

de ejes principales de inercia:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right)L_2L_3 &= N_1, \\ \dot{L}_2 + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)L_3L_1 &= N_2, \\ \dot{L}_3 + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)L_1L_2 &= N_3,\end{aligned}\tag{2.111}$$

con L_1 , L_2 y L_3 las componentes del vector \mathbf{L} .

Las ecuaciones de movimiento se pueden expresar también en la forma de Lagrange. Para ello necesitamos expresar la energía cinética T y potencial V en función de las coordenadas independientes q_j . Se obtiene la función de Lagrange como

$$L(q_j, \dot{q}_j) = T - V,\tag{2.112}$$

para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\tag{2.113}$$

en términos de los ángulos de Euler la función de Lagrange es

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \\ \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - V(\phi, \theta, \psi),\end{aligned}\tag{2.114}$$

aquí la energía cinética se obtuvo de la combinación de las ecuaciones (2.89) y (2.93). La función de Lagrange será considerada más adelante en la formulación hamiltoniana del problema y del estudio breve de algún caso particular del cuerpo rígido. Para continuar el estudio de las ecuaciones de la dinámica del cuerpo rígido examinaremos los casos más sencillos e integrables en términos de funciones conocidas. El caso más sencillo es el del cuerpo rígido libre de fuerzas externas, es decir a partir de la ecuación (2.104) se tiene

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{RN} = \mathbf{0},\tag{2.115}$$

así obtenemos la conservación de las componentes del vector cantidad de movimiento angular en el sistema inercial,

$$\mathbf{J} = \text{constante de movimiento.} \quad (2.116)$$

Si se sustituye en (2.108), obtenemos la ecuación de movimiento para las componentes del vector cantidad de movimiento angular en el sistema anclado al cuerpo

$$(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{L}} = 0, \quad (2.117)$$

así obtenemos un conjunto de ecuaciones para cada componente del vector cantidad de movimiento angular

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)L_2L_3, \\ \dot{L}_2 &= \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)L_3L_1, \\ \dot{L}_3 &= \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)L_1L_2. \end{aligned} \quad (2.118)$$

La integración de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se realizara en el sistema de ejes principales de inercia.

Existen dos integrales de movimiento inmediatas, del sistema (2.118) se tiene

$$L_1\dot{L}_1 + L_2\dot{L}_2 + L_3\dot{L}_3 = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)L_2L_3L_1 + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)L_3L_1L_2 + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)L_1L_2L_3 = 0,$$

si multiplicamos la ecuación anterior por dt e integramos respecto de los momentos principales de inercia se obtiene la constancia del vector \mathbf{L}

$$\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \text{constante} , \quad (2.119)$$

que resulta también de que el vector constante \mathbf{J} es la rotación del vector \mathbf{L}

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}\mathbf{L}. \quad (2.120)$$

Si J es la magnitud de este vector. Entonces J^2 es la constante en (2.119)

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = J^2. \quad (2.121)$$

debido a que \mathbf{R} preserva normas.

La otra constante de movimiento se obtiene de manera muy similar, de nuevo de las ecuaciones (2.118)

$$\begin{aligned} & \frac{L_1 \dot{L}_1}{I_1} + \frac{L_2 \dot{L}_2}{I_2} + \frac{L_3 \dot{L}_3}{I_3} = \\ & = \left(\frac{1}{I_3 I_1} - \frac{1}{I_2 I_1} \right) L_2 L_3 L_1 + \left(\frac{1}{I_1 I_2} - \frac{1}{I_3 I_2} \right) L_3 L_1 L_2 + \left(\frac{1}{I_2 I_3} - \frac{1}{I_1 I_3} \right) L_1 L_2 L_3 = 0 \end{aligned}$$

de nuevo multiplicamos la ecuación anterior por dt e integramos respecto de los momentos principales de inercia así se obtiene la constancia de la energía T

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L} = \text{constante} . \quad (2.122)$$

A esta constante la designaremos con la letra E debido a que en la ausencia de torca representa la energía total rotacional

$$\mathbf{L}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L} = 2E. \quad (2.123)$$

El vector cantidad de movimiento angular \mathbf{L} del sistema anclado se encuentra en la intersección de la esfera (2.119) y el elipsoide (2.123).

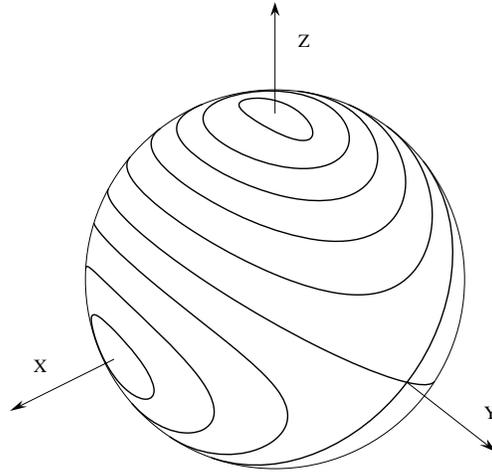


Figura 2.2: Intersección de esfera de momento angular por varios elipsoides de energía constante.

La figura (2.2) muestra una esfera en el espacio de momentos angulares, sobre la cual se dibujan las intersecciones de los elipsoides de diferentes energías constantes. Como se ordenaron los momentos principales de inercia

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3, \quad (2.124)$$

El semieje mayor del elipsoide va en la dirección del eje 3 y el semieje menor en la dirección del eje 1.

La energía cinética rotacional (2.122) está escrita en el sistema de ejes principales y en este caso pedimos que se satisfaga (2.124), que es válido cuando los tres momentos principales de inercia sean diferentes de cero, esto es, cuando las partículas no estén todas alineadas. Si se divide la energía cinética rotacional por la mitad del cuadrado de la cantidad de momento angular y dada la condición (2.124) se encuentra así una cota inferior y superior dada por los inversos de los momentos principales

de inercia I_1 e I_3

$$\frac{1}{I_1} \geq \frac{2T}{J^2} \geq \frac{1}{I_3}, \quad (2.125)$$

Esto nos muestra que la energía cinética rotacional no puede tomar un valor arbitrio si no está restringida por (2.125), esta ecuación expresa geoméricamente la intersección entre la esfera (2.119) y el elipsoide (2.123). El radio de la esfera deberá ser mayor o igual que el semieje menor y deberá ser menor o igual que el semieje mayor.

Un caso particular es el que se conoce como *trompo simétrico* este se obtiene cuando son iguales dos momentos principales de inercia $I_1 = I_2 \neq I_3$.

De la última ecuación del conjunto (2.118) podemos ver que L_3 es una constante de movimiento, es decir, no depende del tiempo. Se obtiene así un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 - \Omega L_2 &= 0, \\ \dot{L}_2 + \Omega L_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Donde $\Omega = (\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3})L_3$, cuya solución es:

$$\begin{aligned} L_1(t) &= L_1(0) \cos(\Omega t) + L_2(0) \sin(\Omega t), \\ L_2(t) &= L_2(0) \cos(\Omega t) - L_1(0) \sin(\Omega t), \\ L_3(t) &= \text{constante}, \end{aligned} \quad (2.127)$$

que son las componentes de la cantidad de momento angular, cuya magnitud es

$$\begin{aligned} J &= [(L_1(0) \cos(\Omega t) + L_2(0) \sin(\Omega t))^2 + (L_2(0) \cos(\Omega t) - L_1(0) \sin(\Omega t))^2 + \\ &+ (I_3 L_3)^2]^{1/2} = [(L_1^2(0) + L_2^2(0)) + L_3^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Ahora si orientamos el tercer eje del sistema inercial en la dirección del momento angular, los ángulos de Euler pueden ser determinados de la siguiente manera:

$$\cos \theta = \frac{L_3}{J}, \quad (2.129)$$

que es constante y con esta propiedad las relaciones (2.89) y (2.97) se reducen a

$$I_1 \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = L_1(0) \cos(\Omega t) - L_2(0) \sin(\Omega t), \quad (2.130)$$

$$I_1 \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi = L_2(0) \cos(\Omega t) + L_1(0) \sin(\Omega t), \quad (2.131)$$

$$I_1(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = L_3, \quad (2.132)$$

elevamos al cuadrado las expresiones (2.130) y (2.131) para resolver $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{[L_1^2(0) + L_2^2(0)]^{1/2}}{I_1 \sin \theta}, \quad (2.133)$$

podemos simplificar más usando la magnitud del momento angular (2.133) y (2.132) lo que da

$$\dot{\phi} = \frac{J}{I_1}, \quad (2.134)$$

integramos para obtener

$$\phi(t) = \phi(0) + \frac{Jt}{I_1}, \quad (2.135)$$

finalmente para hallar el ángulo ψ usamos (2.133)

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta, \quad (2.136)$$

así las relaciones (2.135) y (2.129) se transforma en

$$\dot{\psi} = L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right), \quad (2.137)$$

integramos

$$\psi(t) = \psi(0) + L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) t. \quad (2.138)$$

El caso $I_2 = I_3$ se resuelve de manera semejante.

El caso que a continuación se presenta es el de *Euler-Poinsot* aquí los momentos principales de inercia satisfacen la desigualdad (2.125).

Para tratar este caso se introducirán las coordenadas esferoconales, en vez de los ángulos de Euler, estas incluyen como curvas coordenadas sobre la esfera a la

intersección con elipsoides. Estas coordenadas se expresan por medio de las funciones elípticas de Jacobi en función de las cuales se escribe la dependencia en el tiempo de las componentes de la cantidad de movimiento angular.

La posición en el tiempo del vector unitario en la dirección de \mathbf{L} está en función de los parámetros I_1, I_2, I_3, E y J^2 y del tiempo.

Podremos ver que la curva en que se mueve este vector unitario es función de dos constantes sin dimensión que se forman con los cinco parámetros mencionadas. Se podrá ver más adelante que el movimiento de este vector unitario se expresa además en función de un tiempo sin dimensiones.

Para comenzar expresamos los momentos de inercia y la cantidad $2E/J^2$ en términos de nuevos parámetros definidos como sigue

$$\frac{1}{I_j} = H + P e_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.139)$$

$$2E/J^2 = H + P e_0, \quad (2.140)$$

H y P se definen en función de los momentos de inercia por la ecuaciones

$$H = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) \quad (2.141)$$

y

$$P^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{I_1^2} + \frac{1}{I_2^2} + \frac{1}{I_3^2} - \frac{1}{I_1 I_2} - \frac{1}{I_2 I_3} - \frac{1}{I_3 I_1} \right), \quad (2.142)$$

los parámetros (2.139) están relacionados por los dos restricciones

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= \frac{1}{P} \left[\left(\frac{1}{I_1} - H \right) + \left(\frac{1}{I_1} - H \right) + \left(\frac{1}{I_1} - H \right) \right] = \\ &= \frac{1}{P} \left[\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} - 3H \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.143)$$

y

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 &= \frac{1}{P^2} \left[\left(\frac{1}{I_1} - H \right)^2 + \left(\frac{1}{I_1} - H \right)^2 + \left(\frac{1}{I_1} - H \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{P^2} \left[\frac{1}{I_1^2} + \frac{1}{I_2^2} + \frac{1}{I_3^2} + 3H^2 - 2H \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) \right] = \frac{1}{P^2} \left[\frac{1}{I_1^2} + \frac{1}{I_2^2} + \frac{1}{I_3^2} - 3H^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3P^2} \left[\frac{1}{I_1^2} + \frac{1}{I_2^2} + \frac{1}{I_3^2} - \frac{1}{I_1 I_2} - \frac{1}{I_2 I_3} - \frac{1}{I_3 I_1} \right] = 3/2, \quad (2.144)$$

debido a lo cual Piña [27] escribe los tres parámetros en función de un ángulo independiente κ :

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos \kappa, \\ e_2 &= \cos(\kappa - 2\pi/3) \quad (0 \leq \kappa \leq \pi/3) \\ e_3 &= \cos(\kappa + 2\pi/3). \end{aligned} \quad (2.145)$$

El ángulo κ es una medida del grado de asimetría del cuerpo rígido. Éste es simétrico prolato para $\kappa = 0$ y simétrico oblato cuando $\kappa = \pi/3$. El cuerpo más asimétrico se tendrá en $\kappa = \pi/6$.

El parámetro e_0 es una medida de la energía rotacional y es función de la energía, de los momentos de inercia y del cuadrado de la cantidad de movimiento angular.

La condición (2.125) se escribe en función de estos parámetros como

$$\begin{aligned} H + Pe_2 &\geq H + Pe_0 \geq H + Pe_3, \\ e_1 &\geq e_0 \geq e_3 \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$H + Pe_2 \geq H + Pe_2 \geq H + Pe_3,$$

y (2.124) se convierten en

$$e_1 \geq e_2 \geq e_3 \quad (2.147)$$

mientras que e_0 puede ser mayor, igual o menor que e_2 .

Designamos como \mathbf{u} el vector unitario que va en la dirección variable \mathbf{L} . Este vector satisface

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1. \quad (2.148)$$

Ahora procedemos a hallar la ecuación de la energía (2.122), en términos de los parámetros e_i

$$2E = J^2 \left(\frac{u_1}{I_1} + \frac{u_2}{I_2} + \frac{u_3}{I_3} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{2E}{J^2} &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} H + Pe_1 & 0 & 0 \\ 0 & H + Pe_2 & 0 \\ 0 & 0 & H + Pe_3 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\
H + Pe_0 &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} Pe_1 & 0 & 0 \\ 0 & Pe_2 & 0 \\ 0 & 0 & Pe_3 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\
e_0 &= \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \tag{2.149}
\end{aligned}$$

y se verifica así que el vector \mathbf{u} está en una curva sobre la esfera unitaria (2.148) y sobre el hiperboloide (2.149) que es función de los dos parámetros independientes κ y e_0 .

Las ecuaciones (2.118) en función de las componentes u_1 , u_2 y u_3 del vector \mathbf{u} y de los nuevos parámetros se escriben ahora como

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= JPu_2u_3(e_3 - e_2), \\
\dot{u}_2 &= JPu_3u_1(e_1 - e_3), \\
\dot{u}_3 &= JPu_2u_1(e_2 - e_1). \tag{2.150}
\end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones se pueden escribir en función de un parámetro κ y de un tiempo sin dimensiones

$$T = tJP, \tag{2.151}$$

claramente las componentes del vector unitario son funciones del parámetro de asimetría κ , del parámetro de energía e_0 y del tiempo sin dimensiones T .

Ahora enlistamos las propiedades de las funciones elípticas que se necesitan para poder integrar las ecuaciones de movimiento

$$\operatorname{sn}^2(\xi, k) + \operatorname{cn}^2(\xi, k) = 1,$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k) + \operatorname{dn}^2(\xi, k) = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\operatorname{sn}(\xi, k) &= \operatorname{cn}^2(\xi, k)\operatorname{dn}^2(\xi, k), \\ \frac{d}{d\xi}\operatorname{cn}(\xi, k) &= -\operatorname{sn}^2(\xi, k)\operatorname{dn}^2(\xi, k), \\ \frac{d}{d\xi}\operatorname{dn}(\xi, k) &= -k^2\operatorname{sn}^2(\xi, k)\operatorname{cn}^2(\xi, k).\end{aligned}$$

podemos observar que dos no son independientes de las otras tres. Distinguiamos los casos $e_0 > e_2$ y $e_0 < e_2$ y consideramos el primero.

Ahora se introducen las coordenadas esferoconales definidas con ayuda de las funciones elípticas de Jacobi, sn , cn y dn con parámetros k_1 y k_2 .

$$\begin{aligned}u_1 &= \operatorname{sn}(\alpha_2, k_2)\operatorname{dn}(\alpha_1, k_1), \\ u_2 &= \operatorname{dn}(\alpha_2, k_2)\operatorname{sn}(\alpha_1, k_1), \\ u_3 &= \operatorname{cn}(\alpha_2, k_2)\operatorname{cn}(\alpha_1, k_1).\end{aligned}\tag{2.152}$$

Las coordenadas esferoconales serán ortogonales sobre la esfera de radio unitario cuando se cumple la ecuación entre los parámetros k_1 y k_2

$$k_1^2 + k_2^2 = 1.\tag{2.153}$$

Además es necesario que (2.152) satisfaga la ecuación de conservación de la energía (2.149) al sustituirla en ella, esto para un valor constante de la coordenada α_2 y para cualquier valor de la coordenada α_1 . Esto se logra cuando, y solo cuando (excepto por el signo del radical),

$$\operatorname{sn}(\alpha_2, k_2) = \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}},\tag{2.154}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0)}{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}},\tag{2.155}$$

y de (2.153)

$$k_2 = \sqrt{\frac{(e_1 - e_3)(e_0 - e_2)}{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)}}.\tag{2.156}$$

Estas son funciones solamente del parámetro de energía e_0 y del parámetro de

asimetría, entonces ya que está dada sn con nuestra tabla de propiedades de las funciones elípticas podemos deducir las otras funciones cn y dn entonces las coordenadas del vector \mathbf{u} son

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \text{dn}(\alpha_1, k_1), \\ u_2 &= \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2}} \text{sn}(\alpha_1, k_1), \\ u_3 &= \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \text{cn}(\alpha_1, k_1). \end{aligned} \quad (2.157)$$

Entonces este vector se expresa entonces únicamente en función de la variable α_1 y satisface idénticamente (2.148) y (2.149). Las relación (2.154) es la ecuación paramétrica de la curva donde se cortan la esfera y el cono $\alpha_2 = \text{constante}$.

Ahora procedemos a verificar la ecuación de la energía sustituyendo (2.157)

$$\begin{aligned} &u_1^2 e_1 + u_2^2 e_2 + u_3^2 e_3 = \\ &= \text{sn}^2(\alpha_2, k_2) \text{dn}^2(\alpha_1, k_1) e_1 + \text{dn}^2(\alpha_2, k_2) \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) e_2 + \text{cn}^2(\alpha_2, k_2) \text{cn}^2(\alpha_1, k_1) e_3 = \\ &= \text{sn}^2(\alpha_2, k_2) e_1 - k_1^2 \text{sn}^2(\alpha_2, k_2) \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) e_1 + \text{dn}^2(\alpha_2, k_2) \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) e_2 + \text{cn}^2(\alpha_2, k_2) e_3 - \\ &\text{cn}^2(\alpha_2, k_2) \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) e_3 = \left(\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3} \right) e_1 - \left[\frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0)}{(e_1 - e_2)(e_0 - e_3)} \right] \left(\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3} \right) e_1 \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) + \\ &\quad \left(\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2} \right) e_2 \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) + \left(\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3} \right) e_3 - \left(\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3} \right) e_3 \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) = e_0 + \\ &\left\{ \left[\left(\frac{e_1 e_2 - e_0 e_2}{e_1 - e_2} \right) \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_3} - \left(\frac{e_1 e_3 - e_3 e_0}{e_1 - e_3} \right) \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_2} \right] - \left[\frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0) e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right] \right\} \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) \\ &= e_0 + \left\{ \left[\frac{e_1(e_1 e_2 - e_0 e_2 - e_1 e_3 - e_0 e_2)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right] - \left[\frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_0) e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \right] \right\} \text{sn}^2(\alpha_1, k_1) = e_0. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos las expresiones (2.157) en cualquiera de las ecuaciones de Euler y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{du_2}{d\alpha_1} &= \frac{d\alpha_1}{dt} \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_2}} \frac{d \text{sn}(\alpha_1, k_1)}{d\alpha_1} = \\ &= PJ \sqrt{\frac{e_0 - e_3}{e_1 - e_3}} \text{dn}(\alpha_1, k_1) \sqrt{\frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3}} \text{cn}(\alpha_1, k_2) (e_1 - e_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{d(tJP)} &= \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_0}} \sqrt{(e_0 - e_3)(e_1 - e_3)}, \\ \frac{d\alpha_1}{dT} &= \sqrt{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)},\end{aligned}\quad (2.158)$$

esto muestra que la coordenada esferoconal α_1 es una función lineal del tiempo. Podemos concluir que estas coordenadas son naturales para el problema del cuerpo rígido asimétrico, libre de fuerzas externas y se tiene el vector \mathbf{u} como función explícita de los parámetros κ y e_0 , y de la variable T .

Las tres funciones de Jacobi por medio de las cuales se ha obtenido el movimiento del vector \mathbf{u} son funciones periódicas con el mismo periodo. Las tres se pueden ver también como funciones inversas de integrales elípticas de primera especie. El periodo de estas tres funciones respecto de la variable α_1 es la función $4K(k_1)$, donde $K(k_1)$ es la integral elíptica completa de primera especie

$$K(k_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 x}}. \quad (2.159)$$

El periodo respecto al tiempo es entonces

$$\frac{4K(k_1)}{JP\sqrt{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)}} = 4K(k_1) \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_2 - I_1)(2EI_3 - J^2)}}. \quad (2.160)$$

El caso $e_0 < e_2$ se obtiene de las ecuaciones anteriores (2.152-2.160) si en todas ellas se intercambian u_1 por u_3 e I_1 por I_3 .

La matriz de rotación se puede conocer hasta el parámetro γ introducida por Piña [27]. Con γ el ángulo que se obtiene de la rotación más general que transforma al vector \mathbf{u} en el vector \mathbf{v} (el ángulo γ mide cuanto se desvía el vector \mathbf{u} de la trayectoria más corta en la rotación hacia el vector final \mathbf{v} . La menor trayectoria se obtiene rotando alrededor de un eje perpendicular a ambos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v})

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v}, \quad (2.161)$$

donde \mathbf{v} es el vector constante en la dirección del momento angular del sistema inercial \mathbf{J} y \mathbf{u} es el vector función de T .

Por otra parte, se conoce la velocidad angular en los parámetros \mathbf{u} y γ , Piña [27].

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1 + \mathbf{u}^T \mathbf{v}} [\dot{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})] + \dot{\gamma} \mathbf{u}, \quad (2.162)$$

esta velocidad angular se conoce como función del tiempo al conocer la cantidad de movimiento angular $\mathbf{L} = J\mathbf{u}$. Debido a (2.97), se encuentra que

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L} = J \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}. \quad (2.163)$$

Despejamos $\dot{\gamma}$ de (2.162) se toma el producto escalar de ambos miembros con el vector $\mathbf{v} + \mathbf{u}$; se deduce entonces

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{u} &= (\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{1 + \mathbf{u}^T \mathbf{v}} [(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T [\dot{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})]] \\ \dot{\gamma} &= \frac{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \boldsymbol{\omega}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

y se sustituye (2.163) en esta última relación para tener

$$\dot{\gamma} = J \frac{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}}, \quad (2.165)$$

con lo cual, la obtención de γ se reduce a efectuar una integración del miembro derecho, que es una función periódica del tiempo.

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} y el ángulo γ no se relacionan de manera única con los ángulos de Euler. Existen empero tres identificaciones más importantes entre los ángulos de Euler y estos parámetros.

Para la rotación (2.63) del eje 3,

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \psi + \phi. \quad (2.166)$$

Para la rotación (2.64) al eje 3,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \gamma = \psi + \phi, \quad (2.167)$$

esta relación es un resultado de lo siguiente: La matriz \mathbf{R} esta parametrizada en ángulos de Euler, y las dos direcciones \mathbf{u} y \mathbf{v} están seleccionadas a lo largo de la línea de los nodos. El ángulo ϕ o ψ determina la dirección de esta línea en el respectivo plano XOY . El parámetro γ en este caso coincide con el ángulo θ [27].

$$\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \theta. \quad (2.168)$$

Por medio de la ecuación (2.157), conocemos dos ángulos de Euler θ y ψ como coordenadas esféricas del vector \mathbf{u} , y mediante la misma ecuación (2.157), para la cual $\mathbf{v}=\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, podemos hacer el cambio de variable al ángulo de Euler ϕ [28],

$$\dot{\phi} = \dot{\gamma} - \dot{\psi} \quad (2.169)$$

$$\psi = \arctan \frac{u_1}{u_2}, \quad (2.170)$$

ahora calculamos $\dot{\psi}$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{u_2 \dot{u}_1 - u_1 \dot{u}_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{JPu_2u_2u_3(e_3 - e_2) - JPu_1u_1u_3(e_1 - e_3)}{u_1^2 + u_2^2} = \\ &= \frac{Ju_2u_2u_3(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}) - Ju_1u_1u_3(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3})}{u_1^2 + u_2^2}, \end{aligned}$$

Ahora podemos notar que

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} u_2\omega_3 - u_3\omega_2, & u_3\omega_1 - u_1\omega_3, & u_1\omega_2 - u_2\omega_1 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T [(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{u}] &= u_2(u_2\omega_3 - u_3\omega_2) - u_1(u_1\omega_3 - u_3\omega_1) = \\ u_2u_2 \frac{Ju_3}{I_1} - u_2u_3 \frac{Ju_2}{I_2} + u_1u_1 \frac{Ju_3}{I_3} - u_1u_3 \frac{Ju_1}{I_1} &= Ju_2u_2u_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) - Ju_1u_1u_3 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right), \end{aligned}$$

y también tenemos que

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 - u_3^2 = 1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2,$$

así con lo calculado anteriormente la derivada del ángulo $\dot{\psi}$ se escribe como

$$\dot{\psi} = \frac{\mathbf{v}^T [(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{u}]}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2}.$$

Esto también podemos escribirlo en otro camino con ayuda de (2.163) y desarrollando el triple producto vectorial

$$J \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{v}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2}. \quad (2.171)$$

Así podemos hallar a $\dot{\phi}$ con (2.171) y (2.169)

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = \dot{\gamma} - \dot{\psi} &= J \frac{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{u}} - J \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{v}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2} = \\ J \left[\frac{(1 - \mathbf{v}^T \mathbf{u})(\mathbf{u}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}) - \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2} \right] &= \\ = J \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{v}^T \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2} = J \frac{\frac{2E}{J^2} - \frac{(\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2}{I_3}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2} = \frac{J}{I_3} - \frac{J(\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2}{I_3} + \frac{\frac{2E}{J^2} - \frac{J}{I_3}}{1 - (\mathbf{v}^T \mathbf{u})^2} = \\ = \frac{J}{I_3} + \frac{\frac{2E}{J^2} - \frac{J}{I_3}}{1 - u_3^2} = \frac{J}{I_3} + \frac{\frac{2E}{J^2} - \frac{J}{I_3}}{1 - \frac{e_1 - e_0}{e_1 - e_3} \text{cn}^2(\alpha_1, k_1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{J}{I_3} + \frac{\frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3}}{1 - \frac{\frac{J}{I_3} - \frac{2E}{J}}{\frac{I_1}{I_3} - \frac{J}{I_3}} \operatorname{cn}^2(\alpha_1, k_1)}, \quad (2.172)$$

donde la variable α_1 es lineal en el tiempo según (2.158)

$$\alpha_1 = T\sqrt{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)} = \alpha t. \quad (2.173)$$

Integramos (2.172), escrita en función del parámetro constante α_2

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{J}{I_3}t + \frac{2E}{J} - \frac{J}{I_3} \int_0^t dt \frac{1}{1 - \operatorname{dn}^2(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}^2(\alpha_1, k)} \\ &= \frac{J}{I_3}t + J \left(\frac{2E}{J^2} - \frac{1}{I_3} \right) \int_0^t \frac{dt}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{1 - \operatorname{dn}^2(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}^2(\alpha_1, k)} \\ &= \frac{J}{I_3}t + \frac{JP(e_0 - e_3)}{JP\sqrt{(e_0 - e_3)(e_1 - e_2)}} \int_0^{\alpha_1} du \frac{1}{1 - \operatorname{dn}^2(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}^2(u, k)} \\ &= \frac{J}{I_3}t + \frac{\frac{\sqrt{e_0 - e_3} \sqrt{e_1 - e_0}}{\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_1 - e_2}}}{\frac{\sqrt{e_1 - e_0}}{\sqrt{e_1 - e_3}}} \int_0^{\alpha_1} du \frac{1}{1 - \operatorname{dn}^2(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}^2(u, k)} \\ &= \frac{J}{I_3}t + \frac{\operatorname{sn}(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}(\alpha_2, k_2)}{\operatorname{cn}(\alpha_2, k_2)} \int_0^{\alpha_1} du \frac{1}{1 - \operatorname{dn}^2(\alpha_2, k_2) \operatorname{dn}^2(\alpha_1, k)}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

y ésta se puede integrar con las funciones Theta (Θ y H) de Jacobi [28],

$$\phi = \frac{1}{i} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(\alpha_1 - i\alpha_2 + iK')}{\Theta(\alpha_1 + i\alpha_2 - iK')} + \alpha_1 \frac{H'(i\alpha_2 - iK')}{H(i\alpha_2 - iK')} + \frac{Jt}{I_3} \right]. \quad (2.175)$$

Se conocen dos casos integrables más del problema del cuerpo rígido con un punto fijo en presencia de un campo de gravedad uniforme, se estudiarán estos casos de manera breve. El primer caso que analizaremos es el caso de Lagrange aquí se supone un cuerpo rígido simétrico con el punto fijo sobre su eje de simetría, se suponen dos momentos principales de inercia iguales por, $I_1 = I_2$. Para este caso particular en el sistema anclado al cuerpo, el centro de masa está situado sobre el eje de simetría a

una distancia l , el potencial es:

$$V = mgl \cos \theta. \quad (2.176)$$

La energía cinética de la función de Lagrange (2.114) se reduce usando la igualdad de los dos momentos principales de inercia $I_1 = I_2$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_1 [(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2] + \\ &\frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (2.177)$$

La función de Lagrange para este caso en ángulos de Euler se puede escribir

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta. \quad (2.178)$$

Podemos observar que la función de Lagrange es una función que depende únicamente de las velocidades de los ángulos de Euler y del ángulo θ .

Debido a que L no depende del ángulo ψ , se conserva el momento canónico conjugado a ψ

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta). \quad (2.179)$$

También L es independiente del ángulo ϕ y se conserva el momento canónico conjugado a ϕ

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 (\dot{\phi} \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta. \quad (2.180)$$

Y debido a que L no es función explícita del tiempo, se conserva la energía total

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta \quad (2.181)$$

De las ecuaciones (2.179) y (2.180) se pueden despejar las velocidades $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en términos del ángulo θ

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_1} \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (2.182)$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_1} \frac{P_\psi - P_\phi \cos \theta}{\sin^2 \theta} + P_\psi \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right), \quad (2.183)$$

que si se sustituyen en la ecuación de la energía total nos da

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I_1 \left[\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{I_1} \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta \right] + \\ &\frac{1}{2} I_3 \left[\frac{1}{I_1} \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{1}{I_1} \frac{P_\psi - P_\phi \cos \theta}{\sin^2 \theta} + P_\psi \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \right]^2 + mgl \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{I_1} \frac{P_\phi^2 - 2P_\phi P_\psi \cos \theta + P_\psi^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] + \\ &\frac{1}{2} I_3 \left[\frac{1 - P_\psi \cos^2 \theta}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{I_1} \frac{P_\psi}{\sin^2 \theta} + P_\psi \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \right]^2 + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \left[I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{I_1} \frac{P_\phi^2 - 2P_\phi P_\psi \cos \theta + P_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{P_\psi}{2I_1} + \frac{I_3}{2} \left[\frac{P_\psi}{I_1} + P_\psi \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) \right]^2 + mgl \cos \theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{I_1} \frac{P_\phi^2 - 2P_\phi P_\psi \cos \theta + P_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{P_\psi^2}{2I_1} + \frac{I_3 P_\psi^2}{2 I_3^2} + mgl \cos \theta = \\ E &= \frac{1}{2} P_\psi^2 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) + \frac{1}{2} \left[I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{P_\psi^2 - 2P_\psi P_\phi \cos \theta + P_\phi^2}{I_1 \sin^2 \theta} \right] + mgl \cos \theta, \quad (2.184) \end{aligned}$$

así se obtiene una ecuación diferencial que relaciona el ángulo θ con el tiempo y puede ser integrada en términos de funciones elípticas de Jacobi, esto se logra realizando primeramente una transformación conveniente a cantidades sin dimensiones e integrar en función de la variable

$$z = \cos \theta. \quad (2.185)$$

El tiempo se escribe sin dimensiones con la ayuda de una variable que llamaremos β y que conviene definir como

$$\beta^2 = \frac{I_1}{2mgl}, \quad (2.186)$$

y T denota dicho tiempo adimensional

$$T = \frac{t}{\beta}. \quad (2.187)$$

Ahora transformamos la ecuación de la energía restando el primer sumando constante del miembro derecho de (2.184), y la expresamos en múltiplos de la cantidad mgl ,

$$c = \frac{E}{mgl} - \frac{1}{2mgl} P_\psi^2 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right), \quad (2.188)$$

los momentos angulares se escriben sin dimensiones por medio de las constantes a y b

$$a = \frac{P_\psi}{I_1} \beta = \frac{P_\psi}{\sqrt{2I_1 mgl}}, \quad (2.189)$$

$$b = \frac{P_\phi}{I_1} \beta = \frac{P_\phi}{\sqrt{2I_1 mgl}}, \quad (2.190)$$

con estas últimas relaciones y la ecuación (2.188) se transforma la parte de la ecuación de la energía

$$\frac{1}{2mgl} \left[I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{P_\psi^2 - 2P_\psi P_\phi \cos \theta + P_\phi^2}{I_1 \sin^2 \theta} \right] + \cos \theta. \quad (2.191)$$

como sigue. De (2.185) se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \dot{\theta}^2 (1 - z^2),$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \frac{1}{1 - z^2} = \dot{\theta}^2$$

Ahora de (2.189) y (2.190)

$$P_\psi = a \sqrt{2I_1 mgl},$$

$$P_\phi = b \sqrt{2I_1 mgl}.$$

Sustituimos $\dot{\theta}^2$, P_ψ y P_ϕ en (2.191) Así la ecuación de conservación de la energía se

transforma en

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{2mgl} I_1 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \frac{1}{1-z^2} + \frac{a^2 2mgl I_1 - 4abzmgl I_1 + b^2 2mgl I_1}{2mgl I_1 (1-z^2)} + z \\
 c &= \left(\frac{dz}{dT} \right)^2 \frac{1}{1-z^2} + \frac{a^2 - 2abz + b^2}{(1-z^2)} + z \\
 \left(\frac{dz}{dT} \right)^2 &= (1-z^2)(c-z) + 2zab - a^2 - b^2, \tag{2.192}
 \end{aligned}$$

ésta es una ecuación simétrica respecto a un intercambio de las constantes a y b .

La ecuación (2.192) se integra con respecto a la variable T

$$T = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(c-z) + 2zab - a^2 - b^2}}, \tag{2.193}$$

que nos da la dependencia en el tiempo del ángulo θ . Ésta es una integral elíptica de primera especie y los otros dos ángulos de Euler se integran una vez conocido z , a través de las ecuaciones (2.185) y (2.186).

Finalmente estudiaremos de manera breve el caso de Kovalevskaya, éste junto con los otros dos casos estudiados anteriormente son los únicos problemas conocidos del cuerpo rígido en presencia de un campo de gravedad constante en que se pueden integrar las ecuaciones del movimiento sin dar condiciones iniciales sobre los valores de la energía y momento angular.

Se comienza empleando las ecuaciones generales de Euler (2.110). La fuerza sobre cada partícula es la fuerza de gravedad en la dirección \mathbf{k} del sistema inercial,

$$\mathbf{F}_i = m_i g \mathbf{k}, \tag{2.194}$$

la torca sobre el cuerpo rígido en el sistema inercial está dada por

$$\mathbf{RN} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = mg \mathbf{c} \times \mathbf{k}. \tag{2.195}$$

Aquí \mathbf{N} es la torca en el sistema anclado y \mathbf{c} es el vector de posición en el sistema inercial. Para hallar las componentes de la torca, vista desde el sistema inercial,

consideramos un vector unitario \mathbf{u} que satisface

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}\mathbf{u}. \quad (2.196)$$

Sustituimos esta última relación en (2.195) y obtenemos las componentes de la torca.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{N} &= mg\mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{u}, \\ \mathbf{R}\mathbf{N} &= mg\mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{u}), \\ \mathbf{N} &= mgl\mathbf{a} \times \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.197)$$

donde \mathbf{a} indica la dirección constante en el sistema anclado del centro de masa y l es la distancia del punto fijo al centro de masa.

Obtenemos las ecuaciones de Euler en la forma

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = mgl\mathbf{a} \times \mathbf{u}. \quad (2.198)$$

Ahora encontramos la llamada ecuación de Poisson derivando respecto del tiempo la ecuación (2.196) que, basándonos en la velocidad de la matriz de rotación que se obtiene de (2.78) resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{u} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}}, \\ 0 &= -\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Las ecuaciones (2.198) y (2.199) forman un sistema de 6 ecuaciones para las incógnitas \mathbf{u} y $\boldsymbol{\omega}$. Su uso el método desarrollado por Kovalevskaya para estudiar este sistema de ecuaciones. La integración de dicho sistema permite conocer la matriz de rotación con ayuda de las ecuaciones (2.196) y (2.163)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v}} [\dot{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})] + \dot{\gamma}\mathbf{u}. \quad (2.200)$$

Esta parametrización se caracteriza por la relación (2.196), la cual, cuando se conoce el vector \mathbf{u} , solo se requiere conocer además el ángulo γ , con el que se completa

la parametrización. Podemos hallar el ángulo γ despejando a $\dot{\gamma}$ de la última expresión. Sin embargo, esta expresión para $\boldsymbol{\omega}$ permite escribir la energía cinética del cuerpo rígido en función de las coordenadas \mathbf{u} y γ .

La energía potencial del cuerpo rígido en estas coordenadas es

$$V = -mgl\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.201)$$

La función de Langrange $L = E_c - V$ no es función explícita de γ , por lo que se conserva el momento canónico conjugado a γ ,

$$\begin{aligned} p_\gamma &= \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^T}{\partial \dot{\gamma}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} \right] = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{I} \boldsymbol{\omega})^T \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} \right] = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\gamma}} = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.202)$$

la cual es la proyección del momento angular en la dirección de la fuerza.

También se conserva la energía total

$$E = E_c + V. \quad (2.203)$$

Aparte de las constantes de movimiento conocidas (2.205) y (2.203) y la magnitud unidad del vector \mathbf{u} , Kovaleskaya encontró otra constante de movimiento de este sistema de ecuaciones, cuando el momento de inercia tiene la simetría

$$(I_1, I_2, I_3) = D(2, 2, 1), \quad (2.204)$$

el centro de masa se encuentra en el plano de simetría y lo tomamos en la dirección del primer eje coordenado

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0). \quad (2.205)$$

El sistema de ecuaciones se simplifica en las variables ($c_0 = mgl/D$)

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1 + i\omega_2, \quad x_2 = \omega_1 - i\omega_2, \\ \xi_1 &= (\omega_1 + i\omega_2)^2 - c_0(u_1 + iu_2), \end{aligned}$$

$$\xi_2 = (\omega_1 - i\omega_2)^2 - c_0(u_1 - iu_2), \quad (2.206)$$

en términos de los cuales se escriben las constantes de movimiento.

Se define la constante de Kovalevskaya como

$$\xi_1\xi_2 = k^2. \quad (2.207)$$

Ahora procedemos a encontrar la conservación del momento canónico conjugado en términos de las variables definidas en (2.203).

Primeramente hallamos las variables antiguas en términos de las nuevas variables definidas anteriormente, estas son

$$\omega_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \omega_2 = -\frac{i(x_1 - x_2)}{2}$$

y

$$u_1 = \frac{x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2}{2c_0}, u_2 = -\frac{i(x_1^2 - \xi_1 - x_2^2 + \xi_2)}{2c_0},$$

sustituimos esto en (2.202)

$$\begin{aligned} \frac{p_\gamma}{2D} - \frac{\omega_3 u_3}{2} &= \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 = \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \left(\frac{x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2}{2c_0} \right) + \left(-\frac{i(x_1 - x_2)}{2} \right) \left(-\frac{i(x_1^2 - \xi_1 - x_2^2 + \xi_2)}{2c_0} \right), \\ \frac{2c_0 p_\gamma}{D} - 2c\omega_3 u_3 &= x_1^3 - x_1\xi_1 + x_1x_2^2 - x_1\xi_2 - x_1^3 + x_1\xi_1 + x_1x_2^2 - \xi_2x_1 + x_2x_1^2 - x_2\xi_1 + x_2^3 + \\ &\quad + x_2\xi_2 + x_2x_1^2 - x_2\xi_1 - x_2^3 + x_2\xi_2, \\ \frac{2c_0 p_\gamma}{D} - 2c\omega_3 u_3 &= -2x_1\xi_2 - 2x_2\xi_1 + 2x_1x_2^2 + 2x_2x_1^2, \end{aligned}$$

así el momento canónico conjugado se escribe con ayuda de la constante $l = p_\gamma/2D$

$$u_3 c_0 \omega_3 = 2c_0 l + x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1 - (x_1 + x_2) x_1 x_2. \quad (2.208)$$

Ahora la conservación de la magnitud de la dirección de la fuerza

$$u_3^2 = 1 - (u_1^2 + u_2^2) = 1 - \frac{1}{4c_0} [(x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2)^2 + (x_1^2 - \xi_1 - x_2^2 + \xi_2)^2] =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{4c_0} (x_1^4 - x_1^2\xi_1 + x_1^2x_2^2 + x_1^2\xi_2 - x_1^2\xi_1 + \xi_1^2 - x_2^2\xi_1 + \xi_1\xi_2 + x_1^2x_2^2 - x_2^2\xi_1 + x_2^4 - \\
&\quad - x_2^2\xi_2 - x_1^2\xi_2 + \xi_1\xi_2 - x_2^2\xi_1 + \xi_2^2 - x_1^4 + x_1^2\xi_1 + x_1^2x_2^2 - x_1^2\xi_2 + x_1^2\xi_1 - \xi_1^2 - x_2^2\xi_1 + \\
&\quad + \xi_1\xi_2 + x_1^2x_2^2 - x_2^2\xi_1 - x_2^4 + x_2^2\xi_2 - x_2^2\xi_2 + \xi_1\xi_2 + x_2^2\xi_2 - \xi_2^2) = \\
&\quad u_3^2 c_0^2 = c_0^2 - \frac{1}{4} (4x_1^2x_2^2 + 4\xi_1\xi_2 - 4x_2^2\xi_1 - 4x_1^2\xi_2) \\
&\quad u_3^2 c_0^2 = c_0^2 - k^2 - x_1^2x_2^2 + \xi_1x_2^2 + \xi_2x_1^2. \tag{2.209}
\end{aligned}$$

Finalmente la conservación de la energía,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{D}{2} (2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) + mglu_1, \\
\frac{E}{D} - \frac{\omega_3^2}{2} &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{mgl}{D} u_1 = \frac{1}{4} (x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4} (x_1 - x_2)^2 + \frac{mgl}{D} \frac{x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2}{2c_0} = \\
&= \frac{1}{4} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2) + \frac{x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2}{2}, \\
\frac{2E}{D} - \omega_3^2 &= 2x_1x_2 + x_1^2 - \xi_1 + x_2^2 - \xi_2,
\end{aligned}$$

introducimos la constante $l_1 = E/3D$ y así tenemos

$$(x_1 + x_2)^2 + \omega_3^2 = \xi_1 + \xi_2 + 6l. \tag{2.210}$$

Se eliminan las variables u_3 y ω_3 entre estas tres últimas ecuaciones para obtener

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 &= [R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2] = \\
&= R^2(x_1, x_2) - R(x_1)R(x_2) - k^2(x_1 - x_2)^4, \tag{2.211}
\end{aligned}$$

donde

$$R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2 - 2c_0l(x_1 + x_2) + c_0^2 - k^2 \tag{2.212}$$

y

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 - 4c_0lx + c_0^2 + k^2. \tag{2.213}$$

Para resolver el sistema de Euler-Poinsot se escriben las ecuaciones del movimiento de x_1 y x_2 , las cuales se expresan en términos de las mismas coordenadas al sustituir las ecuaciones precedentes. Para obtener esto damos las derivadas temporales de las velocidades angulares de (2.198) usando (2.204) y (2.205)

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3, \dot{\omega}_2 = -\omega_3\omega_1 - \frac{mglu_3}{2D},$$

derivamos por ejemplo x_1 respecto del tiempo

$$\dot{x}_1 = \dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2,$$

sustituimos las velocidades angulares en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_2\omega_3 - i\omega_3\omega_1 - \frac{imglu_3}{2D} = -\frac{i(x_1 - x_2)}{2}\omega_3 - \frac{i(x_1 + x_2)}{2}\omega_3 - \frac{imglu_3}{2D}, \\ 2\dot{x}_1 &= i\omega_3(-x_1 + x_2 - x_1 - x_2) - \frac{imglu_3}{2D} \\ 2\dot{x}_1 &= -i(\omega_3x_1 - c_0u_3), \end{aligned} \quad (2.214)$$

de manera similar se obtiene la ecuación para x_2

$$2\dot{x}_2 = i(\omega_3x_2 - c_0u_3), \quad (2.215)$$

de las constantes de movimiento se puede cancelar u_3 , ω_3 y demostrar que

$$(\omega_3x_1 - c_0u_3)^2 = \xi_1(x_1 - x_2) + R(x_1), \quad (2.216)$$

$$(\omega_3x_2 - c_0u_3)^2 = \xi_2(x_1 - x_2) + R(x_2), \quad (2.217)$$

$$(\omega_3x_1 - c_0u_3)(\omega_3x_2 - c_0u_3) = R(x_1, x_2), \quad (2.218)$$

por las cuales

$$\left(\frac{\omega_3x_1 - c_0u_3}{\sqrt{R(x_1)}} \pm \frac{\omega_3x_2 - c_0u_3}{\sqrt{R(x_2)}} \right)^2 =$$

$$\frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)} = \left\{ \left[\frac{R(x_1, x_2) \pm \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} \right]^2 - k^2 \right\}, \quad (2.219)$$

se obtienen la ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}} - \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}} &= \frac{i \omega_3 x_1 - c_0 u_3}{2 \sqrt{R(x_1)}} + \frac{i \omega_3 x_1 - c_0 u_3}{2 \sqrt{R(x_1)}} = \\ &= \frac{i}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R(x_2)}\sqrt{R(x_1)}} \sqrt{\left[\frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} \right]^2 - k^2}, \end{aligned} \quad (2.220)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}} - \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}} &= \frac{i \omega_3 x_1 - c_0 u_3}{2 \sqrt{R(x_1)}} + \frac{i \omega_3 x_1 - c_0 u_3}{2 \sqrt{R(x_1)}} = \\ &= \frac{i}{2} \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R(x_2)}\sqrt{R(x_1)}} \sqrt{\left[\frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} \right]^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (2.221)$$

Uno de los méritos de Kovalevskaya fue encontrar que ambos miembros de estas dos ecuaciones se podían expresar en términos de las variables para convertir las integrales elípticas de primera especie a las formas canónicas de Weierstrass.

Capítulo 3

Formulación Hamiltoniana de la Dinámica del Cuerpo Rígido con un Punto Fijo en un Campo de Gravedad Constante

En este capítulo se hará una breve descripción de la formulación Hamiltoniana del cuerpo rígido y además se introducirán las variables de Andoyer-Deprit.

Primeramente se obtendrá la función de Hamilton o hamiltoniano correspondiente al problema y así se derivarán las ecuaciones del movimiento, las energías cinética y potencial no dependen explícitamente del tiempo, así que el hamiltoniano se obtiene directamente de la suma de la energía cinética y potencial.

Se calcula la parte correspondiente a la energía cinética en función de las velocidades y de los ángulos de Euler que se obtiene de la combinación de las ecuaciones (2.89) y (2.93)

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (3.1)$$

donde I_1, I_2, I_3 son los momentos principales de la matriz de inercia y $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son las componentes del vector velocidad angular, en el sistema anclado al cuerpo rígido, inmediatamente se calculan los momentos canónicos conjugados a partir de la energía cinética.

$$\Psi = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}),$$

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} = & I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \theta \sin \psi + \\ & + I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \theta \cos \psi + I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Theta = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \psi - I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \psi.$$

Las ecuaciones en Φ y Ψ se pueden reescribir en una sola de la siguiente manera:

$$\frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} = I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \psi + I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \cos \psi,$$

Así se obtiene un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas, $I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)$ y $I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)$.

$$\Theta = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \cos \psi - I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \psi,$$

$$\frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} = I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \psi + I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \cos \psi. \quad (3.3)$$

Este sistema de ecuaciones en forma matricial se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \\ I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Para resolver este sistema solo necesitamos encontrar la inversa de la matriz de coeficientes que es una matriz de rotación, es decir, su inversa es igual a su traspuesta.

Si $A = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$ entonces:

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Multiplicamos a (3.4) por (3.5) y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \\ I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Así obtenemos la solución del sistema.

$$\begin{aligned} I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) &= \Theta \cos \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi \\ I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) &= -\Theta \sin \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

sustituimos las soluciones de (3.7) y $\Psi = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$ en la energía cinética y obtenemos.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2I_1} \left(\Theta \cos \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2I_2} \left(-\Theta \sin \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi \right)^2 + \frac{1}{2I_3} \Psi^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hemos obtenido la energía cinética en función de los momentos canónicos conjugados Ψ , Φ , Θ y de los ángulos de Euler ψ , θ , ϕ como es requerido para la construcción del hamiltoniano.

Ahora se procede a obtener la parte correspondiente a la energía potencial para finalizar el cálculo del hamiltoniano del problema.

El cuerpo rígido ésta sometida bajo la influencia de un campo gravitatorio asumido constante, entonces cada una de sus partículas siente una fuerza proporcional a su masa

$$\mathbf{F}_i = -m_i g \mathbf{k} \quad (3.9)$$

donde $-\mathbf{k}$ es la dirección constante de la fuerza y g es la constante de gravedad.

Las fuerzas (3.9) son derivables de un potencial.

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i = -m_i g \mathbf{k}. \quad (3.10)$$

El potencial de las partículas del cuerpo rígido es

$$V = \sum_i m_i g \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{k} = \sum_i m_i g \mathbf{k}^T \mathbf{r}_i. \quad (3.11)$$

Las componentes de los vectores \mathbf{r}_i , son las coordenadas de las partículas del cuerpo en el sistema inercial, éstas también se pueden obtener mediante una rotación de ciertos vectores \mathbf{a}_i , que son las coordenadas de las partículas en el sistema anclado al cuerpo, entonces:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} \mathbf{a}_i. \quad (3.12)$$

Se sustituye (3.12) en (3.11) para obtener

$$V = \sum_i m_i g \mathbf{k}^T (\mathbf{R} \mathbf{a}_i) = \sum_i m_i g (\mathbf{k}^T \mathbf{R}) \mathbf{a}_i = g (\mathbf{k}^T \mathbf{R}) \sum_i m_i \mathbf{a}_i. \quad (3.13)$$

Por otra lado la definición del centro de masa es:

$$m \mathbf{c} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i. \quad (3.14)$$

Donde m es la masa total del cuerpo rígido y \mathbf{c} es el radio vector del centro de masa en el sistema de referencia anclado al cuerpo.

La energía potencial se simplifica sustituyendo (3.14) en (3.13) y se parametriza la matriz de rotación \mathbf{R} por medio de los ángulos de Euler.

$$V = mg (\mathbf{k}^T \mathbf{R}) \mathbf{c} = mg \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{c}. \quad (3.15)$$

Si denotamos a $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$, entonces la ecuación (3.14) queda como:

$$V = mg(X_0 \sin \theta \sin \psi + Y_0 \sin \theta \cos \psi + Z_0 \cos \theta). \quad (3.16)$$

Éste es el potencial en función de los ángulos de Euler.

Finalmente podemos escribir el hamiltoniano del cuerpo rígido en función de los momentos canónicos y de los ángulos de Euler usando las ecuaciones (3.8) y (3.16).

$$\begin{aligned} H = E_c + V &= \frac{1}{2I_1} \left(\Theta \cos \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi \right)^2 + \\ &\frac{1}{2I_2} \left(-\Theta \sin \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi \right)^2 + \frac{1}{2I_3} \Psi^2 + \\ &+ mg(X_0 \sin \theta \sin \psi + Y_0 \sin \theta \cos \psi + Z_0 \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

La dinámica del cuerpo rígido puede ser descrita convenientemente a través de un conjunto de coordenadas ángulo - acción, conocidas como variables de Andoyer-Deprit, éstas se definen introduciendo tres sistemas de referencia, el inercial, el anclado al cuerpo y un sistema en el cual su eje vertical está alineado con el momento angular del cuerpo, los tres sistemas tienen su origen común.

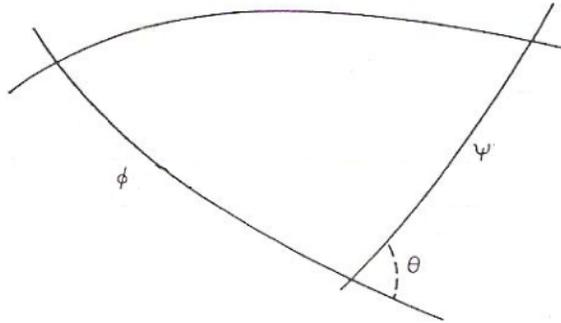


Figura 3.1: Triángulo esférico para los ángulos de Euler

La relación entre los ángulos de Euler y las variables de Andoyer-Deprit se representa por medio de un triángulo esférico donde el ángulo μ es la rotación alrededor del vector momento angular. El arco medido por el ángulo μ , en el plano ortogonal

al momento angular, determina los ángulos λ y ν en el lugar de un triángulo esférico definido por medio de los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ , como se muestra en la figura 3.2. Los arcos ψ , ν y $\psi - \nu$ están en el mismo círculo ortogonal al eje $(0, 0, 1)$ del sistema anclado. Análogamente, los arcos ψ , λ y $\psi - \lambda$ están en un círculo ortogonal al eje $(0, 0, 1)$ del sistema inercial. El arco μ está en un círculo ortogonal al vector de momento angular. Los tres ángulos ν , μ y λ son tres de las variables de Andoyer-Deprit. Los ángulos b e I de la figura son necesarios para hacer la transformación de las variables ángulos de Euler a las variables de Andoyer-Deprit, pero estos dos ángulos se escribirán en función de los momentos canónicos conjugados a las variables de Andoyer-Deprit, respectivamente N , M y Λ .

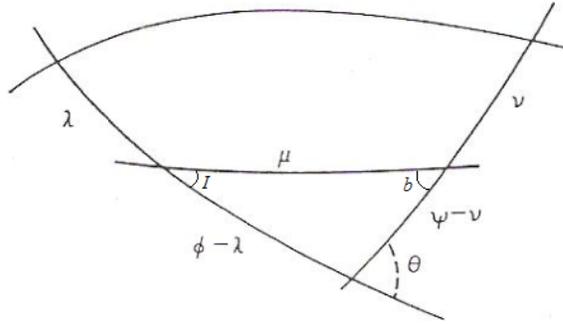


Figura 3.2: Relación entre los ángulos de Euler y las variables de Andoyer-Deprit

La transformación que relaciona los ángulos de Euler con los ángulos de Andoyer-Deprit es una transformación canónica homogénea del tipo Mathieu[34]. De la geometría esférica, y de acuerdo a la figura 3.2 se tiene:

$$\cos \mu = \cos(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) - \sin(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \cos \theta, \quad (3.18)$$

entonces se define

$$\Omega(\phi, \theta, \psi, \lambda, \mu, \nu) = \cos \mu - \cos(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) + \sin(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \cos \theta = 0, \quad (3.19)$$

que Boigey[6] utiliza para generar una transformación canónica expresando el mo-

mento canónico en términos de la función Ω como

$$\begin{cases} \Lambda = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}, & \Phi = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \phi}, \\ M = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}, & \Psi = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}, \\ N = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \nu}, & \Theta = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Las letras mayúsculas denotan el momento canónico y ρ es un multiplicador de Lagrange.

Ahora se procede a obtener el hamiltoniano en estas nuevas variables. Recordamos que el hamiltoniano en función de los momentos canónicos y de los ángulos de Euler correspondientes es

$$\begin{aligned} H = E_c + V = & \frac{1}{2I_1} \left(\Theta \cos \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi \right)^2 + \\ & \frac{1}{2I_2} \left(-\Theta \sin \psi + \frac{\Phi - \Psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi \right)^2 + \frac{1}{2I_3} \Psi^2 + \\ & + mg(X_0 \sin \theta \sin \psi + Y_0 \sin \theta \cos \psi + Z_0 \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se comienza por transformar la parte del hamiltoniano correspondiente a la energía cinética. Se calculan los momentos canónicos definidos en (3.20)

$$\Lambda = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \rho [-\cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) - \sin(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) \cos \theta], \quad (3.22)$$

$$N = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} = \rho [-\sin(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) - \cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \cos \theta], \quad (3.23)$$

$$M = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\rho \sin \mu, \quad (3.24)$$

$$\Phi = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = -\rho [\cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) + \sin(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) \cos \theta], \quad (3.25)$$

$$\Psi = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} = -\rho [\sin(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) + \cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \cos \theta], \quad (3.26)$$

$$\Theta = -\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \rho \sin(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \sin \theta. \quad (3.27)$$

De las ecuaciones (3.22), (3.23), (3.25) y (3.26) se obtiene la transformación de momentos de variables de Euler a variables de Andoyer-Deprit

$$\Lambda = \Phi, \quad (3.28)$$

$$N = \Psi. \quad (3.29)$$

Transformamos usando ya sea (3.22) y (3.23) o (3.25) y (3.26) y haciendo el álgebra correspondiente a los siguientes sumandos del hamiltoniano

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta) = -\rho \sin \psi \cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \sin \theta, \quad (3.30)$$

y

$$\frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta) = -\rho \cos \psi \cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \sin \theta. \quad (3.31)$$

En seguida, con la ecuación (2.27) y con lo obtenido en (3.30) y (3.31) se llega a

$$\Theta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta) = -\rho \sin(\phi - \lambda) \sin \theta \sin \nu \quad (3.32)$$

$$-\Theta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta) = -\rho \sin(\phi - \lambda) \sin \theta \cos \nu. \quad (3.33)$$

Así con (3.29), (3.32) y (3.33) la parte de la energía cinética se transforma en

$$\begin{aligned} & [\Theta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta)]^2 / 2I_1 + [-\Theta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta)]^2 / 2I_2 + \Psi^2 / 2I_3 = \\ & = \rho^2 \sin^2(\phi - \lambda) \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \nu}{2I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{2I_2} \right) + \frac{N^2}{2I_3}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

De (3.24), el miembro derecho de la ecuación (3.34) se convierte en

$$\frac{M^2}{\sin^2 \mu} \sin^2(\phi - \lambda) \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \nu}{2I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{2I_2} \right) + \frac{N^2}{2I_3}. \quad (3.35)$$

De la ley de senos de la trigonometría esférica y de la figura 3 se obtiene

$$\frac{\sin^2(\phi - \lambda) \sin^2 \theta}{\sin^2 \mu} = \sin^2 b. \quad (3.36)$$

Con este último resultado la parte de la energía cinética se convierte en

$$M^2(1 - \cos^2 b) \left(\frac{\sin^2 \nu}{2I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{2I_2} \right) + \frac{N^2}{2I_3}. \quad (3.37)$$

Antes de continuar con nuestra transformación del hamiltoniano se demuestran un conjunto de ecuaciones útiles que serán fundamentales para nuestros futuros cálculos.

Dividimos las ecuaciones (3.22), (3.23), (3.25), (3.26) y (3.27) entre la ecuación (3.24) para eliminar al multiplicador de Lagrange ρ

$$\frac{N}{M} = \frac{\cos(\phi - \lambda) \sin(\psi - \nu) + \sin(\phi - \lambda) \cos(\psi - \nu) \cos \theta}{\sin \mu}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\Lambda}{M} = \frac{\sin(\phi - \lambda) \cos(\psi - \nu) + \cos(\phi - \lambda) \sin(\psi - \nu) \cos \theta}{\sin \mu}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\Theta}{M} = -\frac{\sin(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \sin \theta}{\sin \mu}. \quad (3.40)$$

Ahora de la figura 3 y de la trigonometría esférica se deduce que

$$\sin \mu \cos b = \cos(\phi - \lambda) \sin(\psi - \nu) + \sin(\phi - \lambda) \cos(\psi - \nu) \cos \theta \quad (3.41)$$

y

$$\sin \mu \cos I = \cos(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) + \sin(\psi - \nu) \cos(\phi - \lambda) \cos \theta. \quad (3.42)$$

Sustituimos (3.41) en (3.38) el cual se reduce a

$$\frac{N}{M} = \cos b, \quad (3.43)$$

de igual manera si sustituimos (3.42) en (3.39) se encuentra

$$\frac{\Lambda}{M} = \cos I. \quad (3.44)$$

Para simplificar (3.40) nuevamente recurrimos a la ley de los senos y de la figura

3.2 por lo cual obtenemos

$$\frac{\Theta}{M} = -\frac{\sin(\psi - \nu) \sin(\phi - \lambda) \sin \theta}{\sin \mu} = -\sin(\psi - \nu) \sin b. \quad (3.45)$$

Retomando el cálculo de la energía cinética, si se despeja a N de la ecuación (3.43) y se sustituye en la ecuación (3.37) se llega inmediatamente a obtener la energía cinética en las variables de Andoyer-Deprit

$$T = (M^2 - N^2) \left(\frac{\sin^2 \nu}{2I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{2I_2} \right) + \frac{N^2}{2I_3}. \quad (3.46)$$

A continuación se procede a obtener la parte del Hamiltoniano correspondiente a la energía potencial en variables de Andoyer-Deprit.

Primeramente consideramos las componentes del momento angular en el sistema inercial en términos de los ángulos de Euler

$$L_x = \Theta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta), \quad (3.47)$$

$$L_y = -\Theta \sin \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Phi - \Psi \cos \theta), \quad (3.48)$$

$$L_z = \Psi. \quad (3.49)$$

Si despejamos a Θ de (3.45) y la sustituimos junto con la relaciones (3.28) y (3.29) en las últimas ecuaciones se obtienen

$$L_x = -M \sin(\psi - \nu) \sin b \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \theta} (\Lambda - N \cos \theta), \quad (3.50)$$

$$L_y = M \sin(\psi - \nu) \sin b \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \theta} (\Lambda - N \cos \theta), \quad (3.51)$$

$$L_z = N. \quad (3.52)$$

La idea de realizar la sustitución anterior es para escribir las componentes de momento angular en el sistema inercial en función de las cantidades M , ν y b .

Transformamos usando ya sea (3.22) y (3.23) o (3.25) y (3.26) el segundo sumando

de las componentes L_x y L_y del momento angular en (3.50) y (3.51)

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta}(\Lambda - N \cos \theta) = \frac{M \sin \psi \sin(\phi - \lambda) \cos(\psi - \nu) \sin \theta}{\sin \mu}.$$

Si aplicamos nuevamente la ley de los senos al miembro derecho de la ecuación precedente se obtiene

$$\frac{\sin \psi}{\sin \theta}(\Lambda - N \cos \theta) = M \sin \psi \cos(\psi - \nu) \sin b. \quad (3.53)$$

Sustituimos (3.53) en (3.50) y simplificamos para obtener a L_x en función de ν y b

$$L_x = M \sin b \sin \nu. \quad (3.54)$$

Por el mismo procedimiento por el cual se encontró a L_x en función de los ángulos ν y b se obtiene al momento angular L_y en términos de M , ν y b

$$L_y = M \sin b \cos \nu, \quad (3.55)$$

y para transformar L_z usamos las ecuaciones (3.43) y (3.52)

$$L_z = M \cos b. \quad (3.56)$$

Así el vector momento angular \mathbf{J} en el sistema inercial en términos de M , ν y b se escribe como:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} M \sin b \sin \nu \\ M \sin b \cos \nu \\ M \cos b. \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Ahora por otro lado el vector de momento angular en función de los ángulos de Euler se puede escribir en la base de vectores del sistema anclado al cuerpo como sigue

$$\mathbf{L} = \Theta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(\Phi - \Psi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \frac{(\Psi - \Phi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Mediante una rotación se puede obtener el momento angular en la base de vectores del sistema inercial

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}\mathbf{L}. \quad (3.59)$$

Y de la teoría del capítulo 2 se sabe que

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{R} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{R} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

donde la matriz de rotación se parametriza mediante los ángulos de Euler.

Aplicamos (3.60) a (3.59) y se obtiene

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}\mathbf{L} = \Theta \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(\Phi - \Psi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(\Psi - \Phi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

La idea de este cambio de base, es para obtener la componentes del momento angular en función de las cantidades M , λ e I .

Las componentes del vector \mathbf{J} son:

$$J_x = \Theta \cos \phi + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta), \quad (3.62)$$

$$J_y = \Theta \sin \phi - \frac{\cos \phi}{\sin \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta), \quad (3.63)$$

y

$$J_z = \Phi. \quad (3.64)$$

Por un procedimiento análogo al que se realizó para hallar las componentes de \mathbf{L} en términos de M , ν y b obtenemos las componentes de \mathbf{J} en función de M , λ e I . Éstas son

$$J_x = M \sin I \sin \lambda, \quad (3.65)$$

$$J_y = -M \sin I \cos \lambda, \quad (3.66)$$

y

$$J_z = M \cos I. \quad (3.67)$$

Así el vector de momento angular \mathbf{J} es

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} M \sin I \sin \lambda \\ -M \sin I \cos \lambda \\ M \cos I \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Unas relaciones fáciles de demostrar se derivan de las ecuaciones (3.43) y (3.44)

$$\sin b = \frac{\sqrt{M^2 - N^2}}{M} = \sqrt{1 - \frac{N^2}{M^2}}, \quad (3.69)$$

$$\sin I = \frac{\sqrt{M^2 - \Lambda^2}}{M} = \sqrt{1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}}, \quad (3.70)$$

que nos servirán para cálculos futuros.

De las ecuaciones (3.60) sabemos que:

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

donde la matriz de rotación \mathbf{R} está parametrizada en ángulos de Euler y además es el producto de tres rotaciones, es decir:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

si hacemos la transformación $\psi \rightarrow \nu$, $\theta \rightarrow b$ y $\mu \rightarrow \phi$ obtenemos en los ángulos ν , b

y μ

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu & 0 \\ \sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin b \\ 0 & \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \sin b \sin \nu \\ M \sin b \cos \nu \\ M \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

De la ecuación (3.60) se sabe que

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

o también

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.75) \end{aligned}$$

De nuevo realizamos la transformación $\theta \rightarrow I$ y $\phi \rightarrow \mu$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \sin I \sin \lambda \\ -M \sin I \cos \lambda \\ M \cos I \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

De las ecuaciones (3.74) y (3.76) se puede observar fácilmente que $\mathbf{J} = \mathbf{R}\mathbf{L}$ donde \mathbf{R} es el producto de cinco rotaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu & 0 \\ \sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin b \\ 0 & \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Esta rotación está en función de los ángulos de Adoyer-Deprit y de los momentos N , M y Λ , precisamente ésta es la rotación que necesitamos para obtener el potencial en la variables de Adoyer-Deprit. Recordamos que la energía potencial se escribe como:

$$V = mg(\mathbf{k}^T \mathbf{R})\mathbf{c}. \quad (3.78)$$

Anteriormente se usaron los ángulos de Euler para parametrizar la matriz de rotación, pero ahora usaremos la matriz de rotación (3.77), entonces para comenzar el cálculo se tiene que

$$\mathbf{k}^T \mathbf{R} \quad (3.79)$$

equivale a

$$\mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = M \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

donde

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_4^T \mathbf{R}_5^T \quad (3.81)$$

entonces

$$\begin{aligned} M \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= M \begin{pmatrix} \cos b \sin I \cos \mu \sin \nu + \sin b \cos I \sin \nu + \sin I \sin \mu \cos \nu \\ \cos b \sin I \cos \mu \cos \nu + \sin b \cos I \cos \nu - \sin I \sin \mu \sin \nu \\ \cos b \cos I - \sin b \sin I \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (3.82) \end{aligned}$$

Usamos este resultado, las relaciones (3.43),(3.44),(3.69) y (3.70), para que la energía potencial(3.78) quede

$$V = mg(\mathbf{k}^T \mathbf{R}) \mathbf{c} =$$

$$= mg \begin{pmatrix} \frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \sin \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \nu + \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \cos \nu \\ \frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \cos \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \nu - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \sin \nu \\ \frac{\Lambda N}{M^2} - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}. \quad (3.83)$$

Como $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$ se concluye que la energía potencial es:

$$V = mgX_0 \left[\frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \sin \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \nu + \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \cos \nu \right] + mgY_0 \left[\frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \cos \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \nu - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \sin \nu \right] + mgZ_0 \left[\frac{\Lambda N}{M^2} - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \right]. \quad (3.84)$$

Finalmente el hamiltoniano completo se obtiene de las ecuaciones (3.46) y (3.84). También definimos a los parámetros $x = mgX_0$, $y = mgY_0$ y $z = mgZ_0$, así obtenemos

$$H = E_c + V = (M^2 - N^2) \left[\frac{\sin^2 \nu}{2I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{2I_2} \right] + \frac{N^2}{2I_3} +$$

$$+ x \left[\frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \sin \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \nu + \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \cos \nu \right] +$$

$$+ y \left[\frac{N}{M} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \cos \nu + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \nu - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu \sin \nu \right] +$$

$$+ z \left[\frac{\Lambda N}{M^2} - \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \right] \quad (3.85)$$

Las ecuaciones de Hamilton para este caso se escriben como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial M} &= \dot{\mu} \\
\frac{\partial H}{\partial N} &= \dot{\nu} \\
\frac{\partial H}{\partial \mu} &= -\dot{M} \\
\frac{\partial H}{\partial \nu} &= -\dot{N}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Para el Hamiltoniano (3.85) la ecuaciones de movimiento son explícitamente

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= M \left[\frac{\sin^2 \nu}{I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{I_2} \right] - \frac{z}{M^3} \left[2\Lambda N + \frac{M^2(N^2 + \Lambda^2) - 2\Lambda^2 N^2 \cos \mu}{M^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right] \\
&+ \frac{x}{M^3} \left[-\frac{N(M^2 - 2\Lambda^2) \cos \mu \sin \nu}{M \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2}} + \frac{\Lambda^2 \sin \mu \cos \nu}{\left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2}} - \frac{(M^2 - 2N^2)\Lambda \sin \nu}{M \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right] + \\
&+ \frac{y}{M^3} \left[-\frac{N(M^2 - 2\Lambda^2) \cos \mu \cos \nu}{M \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2}} - \frac{\Lambda^2 \sin \mu \sin \nu}{\left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2}} - \frac{(M^2 - 2N^2)\Lambda \cos \nu}{M \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right], \tag{3.87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\nu} &= N \left[\frac{1}{I_3} - \left(\frac{\sin^2 \nu}{I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{I_2} \right) \right] + \frac{z}{M^2} \left[\Lambda + \frac{N \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu}{\left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right] + \\
&+ \frac{x}{M^3} \left[M^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \sin \nu - \frac{N\Lambda \sin \nu}{\left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right] + \\
&+ \frac{y}{M^3} \left[M^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \mu \cos \nu - \frac{N\Lambda \cos \nu}{\left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2}} \right], \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= x \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left[\frac{N}{M} \sin \mu \sin \nu - \cos \mu \cos \nu \right] + \\
&y \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left[\frac{N}{M} \sin \mu \cos \nu + \cos \mu \sin \nu \right] - z \left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \mu, \\
\dot{N} &= (M^2 - N^2) \left[\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right] \sin \nu \cos \nu -
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} & -x \left[\left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(\frac{N}{M} \cos \mu \cos \nu - \sin \mu \sin \nu\right) + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \cos \nu \right] + \\ & + y \left[\left(1 - \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)^{1/2} \left(\frac{N}{M} \cos \mu \sin \nu + \sin \mu \cos \nu\right) + \frac{\Lambda}{M} \left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)^{1/2} \sin \nu \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Capítulo 4

Mapeo de Poincaré y Líneas de Simetría

En este capítulo se introducirá la técnica del mapa de Poincaré para un mejor estudio de la dinámica del problema, a su vez que se define el concepto de línea de simetría en el mapa y se estudian algunas de sus propiedades fundamentales.

Los resultados computacionales obtenidos aplicando la teoría desarrollada aquí se analizarán en el capítulo 6 revisando el mapa de Poincaré para cada caso particular del problema del cuerpo rígido, el cual se obtiene variando ciertos parámetros y fijando otros en las ecuaciones del movimiento correspondientes.

Para poder desarrollar nuestra teoría necesitamos buscar invariancias en los sistemas de ecuaciones diferenciales en variables de Andoyer-Deprit (3.87-90), es decir buscar en cuáles de las variables de las que depende el sistema de ecuaciones diferenciales del cuerpo rígido, al hacer un cambio de signo en su valor permanecen invariantes. Podemos obtener invariancias particularizando las ecuaciones de movimiento dando valores a las coordenadas x, y, z y fijando para todos los casos las constantes de movimiento de energía y momento angular Λ , y los momentos principales de inercia.

- Para $x = y = 0$ y $z \neq 0$, obtenemos el caso que estudian, Galgani [10] para demostrar la transición a la estocasticidad del problema y Chavoya-Piña [8] para hallar órbitas periódicas, en este que es un caso no integrable, aquí las invariancias vienen dadas por las transformaciones:

$$Q(t) = -t$$

$$\mathbf{P}(M, N, \mu, \nu) = (M, N, -\mu, -\nu), \quad (4.1)$$

$$Q(t) = -t$$

$$\mathbf{P}^*(M, N, \mu, \nu) = (M, N, -\mu, (\pi - \nu)), \quad (4.2)$$

y estas transformaciones también son invariancias para el caso integrable de Euler-Poinsot ($x = y = z = 0$).

- Para el caso $x = 0, y \neq z \neq 0$ las únicas invariancias son dadas por las transformación (4.1), que también son invariancias para el caso más particular $x = z = 0, y \neq 0$.

- Para el caso $y = 0$, $x \neq z \neq 0$ las únicas invariancias están dadas por las transformaciones (4.2) que también son invariancias para el caso más particular $y = z = 0$, $y \neq 0$.
- Para $z = 0$ y $x = y \neq 0$ otra invariancia viene dada al hacer el cambio en los momentos canónicos conjugados, lo que lleva a la siguiente transformación

$$Q(t) = -t,$$

$$\mathbf{G}(\Lambda, M, N, \mu, \nu) = (-\Lambda, -M, -N, \mu, \nu), \quad (4.3)$$

que también son invariancias para los casos más particulares $x = z = 0$, $y \neq 0$ y $y = z = 0$, $x \neq 0$.

Algo importante que mencionar para esta última transformación es que se genera un cambio de signo en el momento Λ que se supone será constante, esto no ocasionará problemas para cuando se trabaje sobre la superficie de Poincaré (que definiremos más adelante), debido a que en ésta la transformación (4.3) se reduce a una donde no se involucra el cambio de signo en el momento Λ , esto se verá a detalle más adelante en este capítulo.

Para el caso más general donde se tiene que las coordenadas x , y y z son diferentes de cero, no se puede hallar una invariancia o simetría, sin embargo se hará un análisis numérico de este caso, que describiremos en detalle en la parte final del capítulo 6 donde se muestran los resultados computacionales.

Habiendo establecido estas invariancias para diversas situaciones físicas del cuerpo rígido vía las coordenadas (x, y, z) , se sabe que esto nos manifiesta que el sistema es reversible o tiene reversibilidad, a partir de esto citamos una propiedad muy conocida [3, 32] para este tipo de sistemas, indispensable para nuestro trabajo posterior.

Propiedad 1. Sea $\mathbf{T}_{\Delta t}$ la operación que transforma las cantidades iniciales $(\mu(t_0), \nu(t_0), M(t_0), N(t_0))$ de las variables del sistema de ecuaciones diferenciales del cuerpo rígido al tiempo t_0 a los valores $(\mu(t_0 + \Delta t), \nu(t_0 + \Delta t), M(t_0 + \Delta t), N(t_0 + \Delta t))$ al tiempo $t_0 + \Delta t$, así se cumple que

$$\mathbf{I}_0 \circ \mathbf{T}_{\Delta t} \circ \mathbf{I}_0 \circ \mathbf{T}_{\Delta t} = \mathbf{I}, \quad (4.4)$$

donde \mathbf{I}_0 es una involución. De acuerdo a lo anterior, $\mathbf{T}_{\Delta t}$ puede ser descompuesta como el producto de dos involuciones dadas por \mathbf{I}_0 y

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{T}_{\Delta t} \circ \mathbf{I}_0, \quad (4.5)$$

es decir

$$\mathbf{T}_{\Delta t} = \mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_0, \quad (4.6)$$

ejemplos de involuciones son las transformaciones \mathbf{P} , \mathbf{P}^* y \mathbf{G}

La propiedad 1 puede ser mejor entendida por medio de un esquema representado en la figura (4.1).

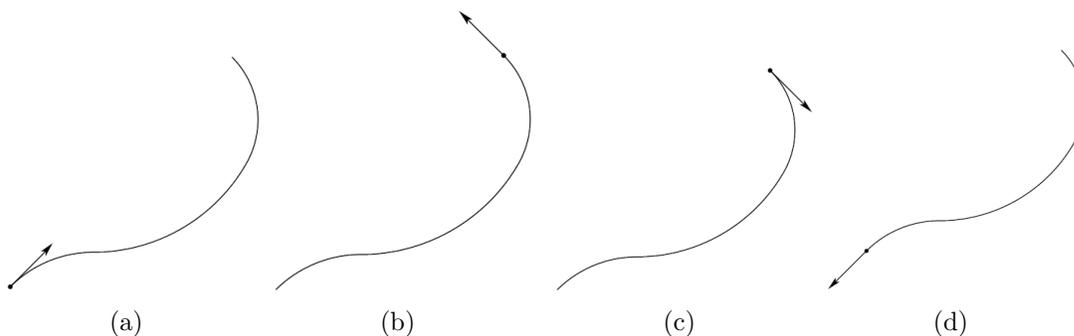


Figura 4.1: Esquematización de la propiedad 1

En el paso a) se aplica el operador $\mathbf{T}_{\Delta t}$ a un punto del espacio fase y se deja evolucionar hasta el punto $(\mu(t_0 + \Delta t), \nu(t_0 + \Delta t), M(t_0 + \Delta t), N(t_0 + \Delta t))$ figura b), seguidamente a este último punto se aplica la operación de involución que cambia el signo de algunas de las variables dinámicas de las que depende el sistema por ejemplo la inversión de ángulos y del tiempo, es decir que el último punto se transforma en $(M(-t_0 - \Delta t), N(-t_0 - \Delta t), -\mu(-t_0 - \Delta t), -\nu(-t_0 - \Delta t))$, éste cambio se representa por una flecha en el sentido opuesto hacia donde el operador $\mathbf{T}_{\Delta t}$ actúa, esto se muestra en c), después se vuelve a aplicar el operador $\mathbf{T}_{\Delta t}$ y se deja evolucionar nuevamente hasta alcanzar el punto de partida, solo que al estar afectado por la involución este punto de inicio se obtiene como: $(M(-t_0), N(-t_0), -\mu(-t_0), -\nu(-t_0))$, paso d), que al aplicar de nuevo la involución se obtiene el punto inicial como se escribió al principio en el paso a), por consiguiente se ha obtenido la operación identidad

como indica la propiedad 1.

Una involución tiene la propiedad de que

$$\mathbf{I}_0 \circ \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}, \quad (4.7)$$

donde \mathbf{I} es la transformación identidad, si manipulamos (4.4) usando la propiedad anterior se obtiene

$$\mathbf{T}_{\Delta t} \circ \mathbf{I}_0 \circ \mathbf{T}_{\Delta t} \circ \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}, \quad (4.8)$$

y usando la definicion (4.6) se llega a

$$\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}. \quad (4.9)$$

como es requerido.

Algo que vale la pena señalar es que en el caso de Euler-Poinsot en variables de Adoyer-Deprit la variable de momento M es cíclica y $\mathbf{T}_{\Delta t}$ se puede descomponer en una infinidad de maneras como el producto de dos involuciones. Las dos descomposiciones que hemos mencionado son las más importantes porque se preservan para varios de los casos no integrables como vimos anteriormente.

Se utilizará un método basado en el mapeo de Poincaré (Galgani [10]), para estudiar las propiedades dinámicas del sistema dinámico definido por medio de las ecuaciones diferenciales para el caso del cuerpo rígido.

En el caso general del cuerpo rígido con un punto fijo, λ es cíclica de manera que el estudio del movimiento es de un sistema con dos grados de libertad, μ, ν .

Éste es un problema dinámico en cuatro dimensiones por lo tanto tomando en cuenta la conservación de la energía es posible reducir la dimensión del problema a tres. Si existe además alguna superficie Γ que la trayectoria del sistema atravesase recurrentemente, la dimensión puede reducirse a dos definiendo la operación [4] :

$$\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad (4.10)$$

que aplica un punto y_0 en Γ en el punto correspondiente a la siguiente intersección de la órbita que contiene a y_0 , es decir que si y_0 y y_1 son puntos de Γ que se encuentran sobre la misma órbita para tiempos $t_0 < t_1$ y no existe ningun otro, tal que $y(t) \in \Gamma$,

entonces $\mathbf{f}(y_0) = y_1$.

A la operación \mathbf{f} se le conoce como mapeo de Poincaré y depende paramétricamente, en este caso de los valores de la energía E , de la componente Λ del momento angular en la dirección del campo de gravedad y de x, y, z .

En Galgani et al [10], eligieron para definir un mapeo de Poincaré la superficie definida por la relación:

$$\mu_{\text{mod}2\pi} = \pi/2. \quad (4.11)$$

Con esta definición, la constancia de la energía implica que sobre Γ

$$H(-, \mu, \nu, \Lambda, M, N) = \frac{M^2 - N^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \nu}{I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{I_2} \right) + \frac{N^2}{2I_3} + mgZ_0 \frac{\Lambda N}{M^2}, \quad (4.12)$$

de donde se deduce que dado el valor de ν es suficiente conocer $\alpha = \frac{N}{M}$ para obtener M como solución de una ecuación cúbica:

$$M^3 \left((1 - \alpha^2) \left(\frac{\sin^2 \nu}{I_1} + \frac{\cos^2 \nu}{I_2} \right) + \frac{\alpha^2}{I_3} \right) + 2Mmgz\Lambda\alpha = 2ME, \quad (4.13)$$

después de lo cual se encuentra N mediante la relación

$$N = \alpha M. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, como coordenadas en Γ se utilizarán ν y $\alpha = \frac{N}{M}$.

En Chavoya-Piña [8]. se utilizó la superficie definida por la igualdad:

$$\mu_{\text{mod}2\pi} = 0. \quad (4.15)$$

La razón de esta elección es que con esta definición, la superficie que resulta es invariante ante las transformaciones definidas por las ecuaciones (4.1), (4.2) y entonces el mapeo de Poincaré es, en dos distintos caminos, descompuesto como el producto de dos involuciones.

$$\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{p}_0 \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{p}_0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{p}_0^* \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{p}_0^*, \quad (4.17)$$

donde:

$$\mathbf{p}_0(\alpha, \nu) = (\alpha, -\nu_{\text{mod}2\pi}), \quad (4.18)$$

y

$$\mathbf{p}_0^*(\alpha, \nu) = (\alpha, (\pi - \nu)_{\text{mod}2\pi}). \quad (4.19)$$

Las transformaciones definidas anteriormente \mathbf{P} y \mathbf{P}^* se reducen a las transformaciones \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_0^* cuando éstas son restringidas a la superficie Γ .

Este desarrollo también será válido para los otros casos no integrables donde se considera el cambio de signo en los ángulos, es decir, se usara la misma superficie definida por (4.15) y las mismas coordenadas en Γ ($\nu, \alpha = \frac{N}{M}$), solo que existe la diferencia en el uso de las involuciones, como vimos al principio del capítulo.

Para el caso donde se considera el cambio de signo en los momentos canónicos conjugados, $z = 0$ y $x \neq y \neq 0$ se usará la superficie (4.11) debido al argumento que se usó para factorizar el mapa de Poincaré en Γ (4.15) y como coordenadas en la superficie se usaran (ν, N), esto debido a que no existe invariancia al hacer un cambio de signo directamente en α en la ecuaciones de movimiento. Entonces se tiene algo análogo en lo que respecta a la descomposición del mapa, para este caso se cumple

$$\mathbf{k}^{-1} = \mathbf{g}_0 \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{g}_0, \quad (4.20)$$

donde:

$$\mathbf{g}_0(N, \nu) = (-N, \nu_{\text{mod}2\pi}), \quad (4.21)$$

y \mathbf{k} representa el mapa de Poincaré en (4.11), entonces la transformación definida por \mathbf{G} se reduce a la transformación \mathbf{g}_0 cuando se restringe a dicha superficie.

La factorización del mapa de Poincaré por involuciones nos provee de un método sistemático para la determinación de órbitas periódicas. Este método se ha utilizado por diferentes autores [32] para obtener las órbitas periódicas de mapas que preservan el área por medio de la integración numérica de las ecuaciones de Hamilton.

En general si consideremos un mapa \mathbf{M} uno a uno que aplica superficies dos dimensionales sobre sí mismas y además suponemos que éste se puede factorizar como el producto de dos involuciones

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_0, \quad (4.22)$$

con inversa dada por:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}_0 \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_0 \circ \mathbf{I}_1, \quad (4.23)$$

donde \mathbf{I}_0 y $\mathbf{I}_1 = \mathbf{M} \circ \mathbf{I}_0$ son ambas involuciones.

Entonces podemos establecer algunas propiedades generales importantes de la función \mathbf{M} .

Consideramos el conjunto de funciones:

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{M} \circ \mathbf{M} \dots \mathbf{M} \circ \mathbf{M}, \quad (4.24)$$

n -veces

y

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{M}^m \circ \mathbf{I}_0. \quad (4.25)$$

Donde n y m son enteros arbitrarios (positivos o negativos) y \mathbf{M}^0 definida como la función identidad.

Con la operación de composición de funciones, el conjunto definido por la ecuaciones (4.24) y (4.25) forman un grupo cuya tabla de operaciones es:

$$\mathbf{M}^n \circ \mathbf{M}^m = \mathbf{M}^{n+m}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{M}^n \circ \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_{n+m}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{I}_n \circ \mathbf{M}^m = \mathbf{I}_{n-m}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{I}_n \circ \mathbf{I}_m = \mathbf{M}^{n-m}. \quad (4.29)$$

Ahora damos la definición de punto periódico en el mapa de Poincaré y de línea de simetría.

Se dice que \mathbf{q} es n -periódico (o que tiene periodo n) de \mathbf{M} cuando n es el menor entero que satisface

$$\mathbf{M}^n \mathbf{q} = \mathbf{q}, \quad (4.30)$$

y que las iteraciones de \mathbf{q} forman un ciclo de n puntos periódicos.

La línea de simetría γ_j para cualquier entero j se define como el conjunto de puntos fijos de la involución, \mathbf{I}_j , es decir:

$$\gamma_j : \{\mathbf{r} \mid \mathbf{I}_j \circ \mathbf{r} = \mathbf{r}\}. \quad (4.31)$$

De estas propiedades se puede enunciar un *lema* importante para nuestros propósitos y que se demostrara utilizando las relaciones del grupo de involuciones.

Lema 1. Sea γ_j el conjunto de puntos invariante bajo la aplicación \mathbf{I}_j para cada j . La intersección de estos conjuntos para varios j 's determina la posición de los puntos periódicos en el mapa \mathbf{M} .

Demostración:

Sea $\mathbf{r} \in \gamma_j \cap \gamma_k \implies \mathbf{I}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ y $\mathbf{I}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ entonces se tiene que $\mathbf{I}_k \circ \mathbf{I}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = \mathbf{M}^{k-j}(\mathbf{r})$ y también $\mathbf{I}_j \circ \mathbf{I}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_j(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = \mathbf{M}^{j-k}(\mathbf{r})$. Por lo tanto \mathbf{r} es un punto periódico de periodo un multiplo de $|j - k|$.

Del *lema 1* puede verse que, una forma de determinar las órbitas periódicas simétricas de un mapa que puede descomponerse como el producto de dos involuciones es determinar solo los conjuntos γ_j .

También existen otras propiedades que vale la pena atender. De iterar l veces por el mapa \mathbf{M} un punto \mathbf{p} de periodo n , es decir

$$\mathbf{M}^l(\mathbf{M}^n \mathbf{p}) = \mathbf{M}^l \mathbf{p} = \mathbf{M}^{l+n} \mathbf{p} = \mathbf{M}^{n+l} \mathbf{p} = \mathbf{M}^n(\mathbf{M}^l \mathbf{p}), \quad (4.32)$$

se concluye que $\mathbf{M}^l \mathbf{p}$ también es un punto periódico de periodo n .

Existen otras propiedades de los puntos periódicos que serán útiles. Por ejemplo, si \mathbf{p} un punto periódico de periodo n entonces

$$\mathbf{I}_j(\mathbf{M}^n \mathbf{p}) = \mathbf{I}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_{j-n} \mathbf{p}, \quad (4.33)$$

y

$$\mathbf{M}^{-n} \mathbf{I}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_{j-n} \mathbf{I}(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_{j-n} \mathbf{I}_j(\mathbf{I}_j \mathbf{p}), \quad (4.34)$$

si $\mathbf{p} \in \gamma_j$ entonces $\mathbf{I}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ y se obtiene que

$$\mathbf{M}^n \mathbf{I}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{M}^n \mathbf{p}$$

$$\mathbf{M}^n \mathbf{I}_j \mathbf{M}^{-n}(\mathbf{M}^n \mathbf{p}) = \mathbf{M}^n \mathbf{p}$$

$$\mathbf{I}_{2n+j}(\mathbf{M}^n \mathbf{p}) = \mathbf{M}^n \mathbf{p}, \quad (4.35)$$

entonces si $\mathbf{p} \in \gamma_j \implies \mathbf{M}^n \mathbf{p} \in \gamma_{2n+j}$.

De forma similar

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_k \mathbf{I}_j(\mathbf{p}) &= \mathbf{I}_k \mathbf{p} \\
\mathbf{I}_k \mathbf{I}_j \mathbf{I}_k(\mathbf{I}_k \mathbf{p}) &= \mathbf{I}_k \mathbf{r} \\
\mathbf{M}^{k-j} \mathbf{I}_k(\mathbf{I}_k \mathbf{p}) &= \mathbf{I}_k \mathbf{p} \\
\mathbf{I}_{2k-j}(\mathbf{I}_k \mathbf{p}) &= \mathbf{I}_k \mathbf{p},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

entonces si $\mathbf{p} \in \gamma_j \implies \mathbf{I}_k \mathbf{p} \in \gamma_{2k-j}$. En el caso particular en que $n = k = 0$ entonces $\mathbf{p} \in \gamma_j \implies \mathbf{I}_k \mathbf{p} \in \gamma_{-j}$.

La determinación de las líneas de simetría se simplifica dado que cualquiera de ellas puede ser obtenida a partir de γ_0 y γ_1 . Ha sido demostrado [3, 7, 30, 32] que

$$\gamma_{2n} = \mathbf{M}^n(\gamma_0) \tag{4.37}$$

y

$$\gamma_{2n+1} = \mathbf{M}^n(\gamma_1), \tag{4.38}$$

donde n es cualquier número entero. Para las involuciones \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_0^* resultarán una familia de líneas de simetría γ_{2n} y γ_{2n}^* respectivamente. Las líneas γ_0 y γ_0^* son fáciles de determinar: γ_0 está definida por la condición $\nu = 0_{\text{mod}2\pi}$ y γ_0^* por $\nu = \pm\pi/2_{\text{mod}2\pi}$.

Para el conjunto de líneas de simetría de la involución \mathbf{g}_0 que denotaremos por Γ_{2n} , la línea Γ_0 está definida por la condición $N = 0$.

La determinación de la línea γ_1 es más difícil de realizar, pero no necesaria para encontrar los puntos periódicos con periodo impar, ya que varias intersecciones entre líneas pares nos dan la condición inicial para una órbita impar. Analizando las líneas con índice par se obtiene sin embargo, una gran cantidad de información cualitativa del sistema dinámico.

Capítulo 5

Teoría de Floquet aplicada al estudio del movimiento cercano de una órbita periódica

En esta sección estudiaremos las órbitas vecinas de una órbita periódica, estas órbitas vecinas satisfacen una ecuación diferencial con coeficientes periódicos. Las soluciones linealmente independientes a esa ecuación forman una matriz simpléctica dependiente del tiempo. La teoría de Floquet de la ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos se simplifica considerablemente en este caso.

Consideramos algún sistema mecánico (por ejemplo en nuestro caso el movimiento del cuerpo rígido con un punto fijo) que es descrito por las ecuaciones de Hamilton que se derivan de un Hamiltoniano con N grados de libertad $H(q^*, p^*)$, donde q^* , p^* son las $2N$ coordenadas del espacio fase del sistema. Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (5.1)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (5.2)$$

con $j = 1, 2, \dots, N$.

Ahora introducimos las siguiente notación

$$z_j = q_j \quad (5.3)$$

$$z_{j+N} = p_j \quad (5.4)$$

con $j = 1, 2, \dots, N$.

Así podemos escribir las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{z}_k = \sum_{l=0}^{2N} J_{kl} \frac{\partial H}{\partial z_l} \quad (5.5)$$

con $k = 0, \dots, 2N$.

Aquí J_{kl} son las componentes de una matriz J de tamaño $2N \times 2N$, la cual está definida por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

en términos de submatrices cero y unidad de dimensión $N \times N$.

La matriz J llamada matriz *simpléctica* jugará un papel fundamental en nuestros

desarrollos posteriores así que se enunciarán algunas de sus propiedades:

1. La matriz J es antisimétrica

$$J^T = -J. \quad (5.7)$$

Donde la letra T denota la traspuesta de la matriz.

2. La matriz inversa de J es

$$J^{-1} = -J. \quad (5.8)$$

Estas propiedades se demuestran fácilmente.

Comenzamos por suponer que conocemos una solución periódica particular del sistema de ecuaciones (5.1) y (5.2), la cual se distinguirá por el subíndice 0. Sea T el periodo de dicha solución

$$z_{0j}(t + T) = z_{0j}(t). \quad (5.9)$$

Estudiamos entonces las soluciones de las ecuaciones de Hamilton vecinas a la órbita periódica (5.9). Para ello tomamos una pequeña perturbación alrededor de la órbita periódica, esto se expresa en forma matemática de la siguiente manera

$$z_k = z_{0k} + \epsilon \dot{\zeta}_k, \quad (5.10)$$

con $k = 1, 2, \dots, N$, donde ϵ es una constante pequeña.

Con esto procedemos a realizar un desarrollo en serie de Taylor en potencias de ϵ del miembro derecho de las ecuaciones de Hamilton, a primer orden en ϵ por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \dot{z}_{0k} + \epsilon \dot{\zeta}_k = \sum_{l=1}^{2N} J_{kl} \left(\frac{\partial H}{\partial z_l} \right)_0 + \epsilon \sum_{l=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} J_{kl} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_m} \right)_0 \zeta_m + \dots, \\ &= \dot{z}_{0k} + \epsilon \sum_{l=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} J_{kl} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_m} \right)_0 \zeta_m + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

el subíndice 0 en las derivadas del Hamiltoniano, significa que están calculadas en los valores de $z_{0k}(t)$ de la órbita periódica.

Se suprime el primer sumando en ambos miembros de (11), debido a que $z_{0k}(t)$ es la solución de las ecuaciones de Hamilton. Ahora si solo consideramos los términos a primer orden en ϵ obtenemos la ecuación lineal

$$\dot{\zeta}_k = \epsilon \sum_{l=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} J_{kl} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_m} \right)_0 \zeta_m. \quad (5.12)$$

Los coeficientes de esta ecuación se escriben en términos de un producto matricial de la matriz J y la matriz simétrica $S(t)$, cuyas componentes se expresan como las segundas derivadas del Hamiltoniano

$$S_{kl}(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_l \partial z_m} \right)_0, \quad (5.13)$$

se evalúa en las coordenadas $z_{0k}(t)$ de la solución periódica, por lo cual la matriz S es simétrica y periódica de periodo T

$$S(t+T) = S(t) = S^T(t), \quad (5.14)$$

el sistema (5.12) consta de $2N$ soluciones linealmente independientes debido a que es un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales lineales, estas soluciones se distinguirán agregando un índice j a la ecuación (5.12)

$$\dot{\zeta}_{kj} = \epsilon \sum_{l=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} J_{kl} S_{lm}(t) \zeta_{mj}. \quad (5.15)$$

Ahora introducimos de manera conveniente la matriz $Z(t)$, cuyas componentes son las soluciones de $\dot{\zeta}_{kj}$. Se encuentra así la forma matricial de la ecuación (5.15)

$$\dot{Z}(t) = JS(t)Z(t), \quad (5.16)$$

si tomamos la traspuesta de ésta última ecuación obtenemos

$$\dot{Z}^T(t) = -Z^T(t)S(t)J, \quad (5.17)$$

así se observa que en el miembro izquierdo la derivada de la traspuesta es la traspuesta

de la derivada; y en el derecho, la traspuesta del producto de matrices es igual al producto de las traspuestas en orden contrario. También se tomó en cuenta la simetría de $S(t)$ y la antisimetría de J .

Se demuestra a continuación que la matriz $Z^T(t)JZ(t)$ es constante de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Z^T(t)JZ(t)) &= \dot{Z}^T(t)JZ(t) + Z^T(t)J\dot{Z}(t) = \\ &= -Z^T(t)S(t)JJZ(t) + Z^T(t)JJS(t)Z(t) = Z^T(t)S(t)Z(t) - Z^T(t)S(t)Z(t) = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

se utilizó aquí la propiedad (5.7) de la matriz antisimétrica J . Se tiene en consecuencia que

$$Z^T(t)JZ(t) = Z^T(0)JZ(0), \quad (5.19)$$

es conveniente introducir la siguiente matriz

$$X(t) = Z(t)Z^{-1}(0), \quad (5.20)$$

que también satisface la ecuación (5.16)

$$\dot{X}(t) = \dot{Z}(t)Z^{-1}(0) = JS(t)Z(t)Z^{-1}(0) = JS(t)X(t), \quad (5.21)$$

ahora por la condición inicial (5.20) se tiene

$$X(0) = Z(0)Z^{-1}(0) = I, \quad (5.22)$$

que es igual a la matriz unidad de tamaño $2N \times 2N$. La constante de movimiento (5.17) se escribe en términos de la matriz $X(t)$ como

$$X^T(t)JX(t) = J. \quad (5.23)$$

Ésta es la ecuación que satisfacen las matrices del grupo simpléctico de transformaciones canónicas lineales. En este caso la matriz $X(t)$ es simpléctica para cada valor de t .

Ahora se aplica la teoría de Floquet de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos.

De la ecuación (5.21) para un periodo T se tiene

$$\dot{X}(t+T) = JS(t+T)X(t+T) = JS(t)X(t+T), \quad (5.24)$$

para llegar a la última ecuación se utilizó el carácter periódico de la matriz $S(t)$. Como $X(t)$ y $X(t+T)$ satisfacen la misma ecuación lineal, entonces las columnas de $X(t+T)$ se pueden escribir como una combinación de las de $X(t)$, es decir

$$X(t+T) = AX(t), \quad (5.25)$$

con A una matriz cuadrada constante.

Al hacer en esta ecuación $t = 0$ se encuentra

$$X(T) = AX(0) = A \quad (5.26)$$

es decir A también es simpléctica y es igual al valor de la matriz X cuando t es igual a T . Y en muchos casos ésta será obtenida por integración numérica de la ecuación lineal. (5.21) con la condición inicial (5.22)

A continuación se hará un estudio del espectro de la matriz A , de esto dependerá el resto de la teoría de Floquet, para esto utilizaremos la propiedad fundamental

$$A^T J A = J, \quad (5.27)$$

de la cual podemos despejar fácilmente la inversa de A

$$A^{-1} = -J A^T J. \quad (5.28)$$

Consideramos la ecuación característica de A

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad (5.29)$$

de ésta se obtiene fácilmente la ecuación caraterística de A^{-1}

$$A^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{y}. \quad (5.30)$$

A partir de (5.29) y (5.30) tomamos los polinomios caraterísticos de A y A^{-1}

$$|A - \lambda\mathbf{I}| = \sum_{j=0}^{2N} \alpha_j \lambda^j \quad (5.31)$$

y

$$|A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}| = \sum_{l=1}^{2N} \beta_l \lambda^{-l}, \quad (5.32)$$

si ponemos de manera desarrollada las sumatorias (5.31) y (5.32) se obtiene

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{2N} \lambda^{2N} = P(\lambda) \quad (5.33)$$

y

$$\beta_0 + \beta_1 \lambda^{-1} + \dots + \beta_{2N} \lambda^{-2N} = P\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (5.34)$$

éstos son dos polinomios de grado $2N$ en las variables λ y λ^{-1} , si a la ecuación (5.33) la dividimos por α_0 y la multiplicamos por el factor λ^{-2N} se obtiene

$$\lambda^{-2N} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \lambda^{-2N+1} + \dots + \frac{\alpha_{2N}}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_0} \lambda^{-2N} P(\lambda), \quad (5.35)$$

ahora si comparamos las potencias de esta ecuación con las de la ecuación (34) obtenemos una ecuación para los coeficientes del polinomio caraterístico de A^{-1} dada por

$$\beta_k = \frac{\alpha_{2N-k}}{\alpha_0}. \quad (5.36)$$

Ahora por otra parte de la teoría del álgebra lineal se sabe que para cualquier matriz cuadrada F se debe cumplir que

$$|F| = |F^T|, \quad (5.37)$$

si hacemos

$$F = A - \lambda \mathbf{I}, \quad (5.38)$$

entonces

$$F^T = A^T - \lambda \mathbf{I}, \quad (5.39)$$

así se tiene que

$$|A - \lambda \mathbf{I}| = |A^T - \lambda \mathbf{I}|, \quad (5.40)$$

de lo que se concluye que las matrices A y A^T tienen el mismo polinomio característico, además sabemos por el teorema de Hamilton-Cayley que toda matriz satisface su ecuación característica así se tiene entonces que

$$\sum_{j=0}^{2N} \alpha_j (A^T)^j = 0, \quad (5.41)$$

multiplicamos ambos miembros de (5.41) por J para obtener

$$\sum_{j=0}^{2N} \alpha_j J (A^T)^j J = 0, \quad (5.42)$$

y utilizamos la propiedad generalizada

$$-J (A^T)^j J = A^{-j} \quad (5.43)$$

así el resultado es

$$\sum_{j=0}^{2N} \alpha_j A^{-j} = 0. \quad (5.44)$$

Hemos deducido un resultado muy importante, todas las matrices simplécticas y sus inversas tiene el mismo polinomio característico. Así de la ecuación (5.36) se encuentra que

$$\alpha_k = \frac{\alpha_{2N-k}}{\alpha_0}, \quad (5.45)$$

de la cual se deduce fácilmente

$$\alpha_0 = \alpha_{2N} = 1, \alpha_k = \alpha_{2N-k}. \quad (5.46)$$

Consideramos el polinomio característico de A , y de las ecuaciones (5.45) y (5.46) podemos escribir

$$1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_2 \lambda^{2N-2} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \lambda^{2N} = 0, \quad (5.47)$$

dividimos esta ecuación por λ^N y obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^N} + \alpha_1 \frac{\lambda}{\lambda^N} + \alpha_2 \frac{\lambda^2}{\lambda^N} + \dots + \alpha_2 \frac{\lambda^{2N-2}}{\lambda^N} + \alpha_1 \frac{\lambda^{2N-1}}{\lambda^N} + \frac{\lambda^{2N}}{\lambda^N} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^N} + \alpha_1 \frac{1}{\lambda^{N-1}} + \alpha_2 \frac{1}{\lambda^{N-2}} + \dots + \alpha_2 \lambda^{N-2} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \lambda^N = 0 \quad (5.48)$$

ahora agrupamos de la siguiente manera

$$0 = \left(\frac{1}{\lambda^N} + \lambda^N \right) + \alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda^{N-1}} + \lambda^{2N-1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{\lambda^{N-2}} + \lambda^{N-2} \right) + \dots \\ \dots + \alpha_{N-2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right) + \alpha_{N-1} \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right) + \alpha_N, \quad (5.49)$$

completamos cada sumando de esta última ecuación con la parte correspondiente de su binomio es decir que (5.49) se escribe como

$$\alpha_N + \alpha_{N-1} \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right) + \alpha_{N-2} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2 - 2 \right] + \alpha_{N-3} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^3 - 3 \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right) \right] + \\ + \alpha_{N-4} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^4 - 4 \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right)^2 + 2 \right] + \dots = 0, \quad (5.50)$$

hemos conseguido escribir la ecuación característica en función de la variable

$$\mu = \frac{1}{\lambda} + \lambda, \quad (5.51)$$

y la ecuación característica se escribe

$$\sum_{j=0}^N \psi_j \mu^j = 0, \quad (5.52)$$

donde ψ_j son coeficientes constantes.

A cada una de la N raíces μ_j de la ecuación (5.52) le corresponden dos raíces auto-inversas λ_j y λ_{j+N} del polinomio característico de A , raíces de a ecuación

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda} + \lambda. \quad (5.53)$$

Ahora consideramos los vectores propios de la matriz A asociados a las raíces λ_j suponemos que todos estos auto valores son distintos es decir, que hay $j = 1, \dots, 2N$ raíces distintas, lo que implica que existen $2N$ vectores asociados a cada uno de estos auto valores. Estos son \mathbf{y}_j ($j = 1, \dots, 2N$) que cumplen la ecuación

$$A\mathbf{y}_j = \lambda_j\mathbf{y}_j. \quad (5.54)$$

Consideramos la ecuación (5.25), si la multiplicamos por un vector izquierdo se obtiene

$$\mathbf{y}^T X(t+T) = \mathbf{y}^T AX(t), \quad (5.55)$$

y aplicamos A al vector

$$\mathbf{y}^T X(t+T) = \lambda_j \mathbf{y}^T X(t), \quad (5.56)$$

Podemos ver que la función que acabamos de obtener no es periódica, pero si multiplicamos a esta última ecuación por $e^{-c_j t} e^{-c_j T}$ obtenemos

$$e^{-c_j t} e^{-c_j T} \mathbf{y}^T X(t+T) = e^{-c_j t} e^{-c_j T} \lambda_j \mathbf{y}^T X(t), \quad (5.57)$$

si tomamos a λ_j como

$$\lambda_j = e^{c_j T}, \quad (5.58)$$

entonces esto nos sugiere que la siguiente función definida como

$$\phi_j(t) = e^{-c_j t} X(t), \quad (5.59)$$

es periódica con periodo T , esto se verifica fácilmente

$$\phi_j(t+T) = e^{-c_j t} e^{-c_j T} \mathbf{y}_j^T X(t+T) = e^{-c_j t} e^{-c_j T} \lambda_j \mathbf{y}_j^T X(t) = e^{-c_j t} \mathbf{y}_j^T X(t) = \phi_j(t). \quad (5.60)$$

El exponente definido en (5.60) se le conoce con el nombre de *exponente característico de Poincaré*.

Ahora suponemos que si λ_j se repite m veces, entonces j es el primer índice asociado a la raíz λ_j . En estas circunstancias sabemos que existen m vectores linealmente independientes, los cuales se anulan por el operador

$$(A - \lambda I)^m, \quad (5.61)$$

y todos están asociados a la raíz λ_j de multiplicidad m . Numeramos estos vectores por los índices $j, j+1, \dots, j+m-1$.

De la ecuación (5.61) sabemos que los vectores linealmente independientes asociados a la raíz λ_j se pueden elegir de manera que satisfacen

$$A\mathbf{y}_{j+i} = \alpha_{j+i}\mathbf{y}_{j+i-1} + \lambda_j\mathbf{y}_{j+i}. \quad (5.62)$$

Entonces de nuevo a la ecuación (5.25) le aplicamos el vector izquierdo \mathbf{y}_{j+i}^T y aplicamos la ecuación (5.62) entonces

$$\mathbf{y}_{j+i}^T X(t+T) = \mathbf{y}_{j+i}^T A X(t) \quad (5.63)$$

$$\mathbf{y}_{j+i}^T X(t+T) = \lambda_j \left(\frac{\alpha_{j+i}}{\lambda_j} \mathbf{y}_{j+i-1}^T + \mathbf{y}_{j+i}^T \right) X(t). \quad (5.64)$$

De nuevo hemos obtenido una función que no es periódica, si ahora realizamos el siguiente cambio

$$Z_{i-1}(t) = \frac{\alpha_{j+i}}{\lambda_j} \mathbf{y}_{j+i-1}^T X(t) \quad (5.65)$$

y

$$Z_i(t) = \mathbf{y}_{j+i}^T X(t), \quad (5.66)$$

la ecuación (6.66) queda

$$Z_i(t + T) = \lambda_j(Z_{i-1}(t) + Z_i(t)), \quad (5.67)$$

y ahora tomamos a $Z(t)$ como

$$Z_i(t) = e^{c_j t} R_i(t), \quad (5.68)$$

entonces

$$Z_i(t + T) = e^{c_j t} e^{c_j T} R_i(t + T) = \lambda_j(Z_{i-1}(t) + Z_i(t)) = e^{c_j t} e^{c_j T} \lambda_j(R_{i-1}(t) + R_i(t)), \quad (5.69)$$

y tomamos a λ_j como

$$\lambda_j = e^{c_j T}, \quad (5.70)$$

así obtenemos

$$R_i(t + T) = (R_{i-1}(t) + R_i(t)), \quad (5.71)$$

esto es para todo $i = 1, \dots, m$ y donde la función R_0 satisface

$$R_0(t + T) = R_0(t), \quad (5.72)$$

es decir, es periódica de periodo T , esto es fácil de ver, de la ecuación (5.68) para $j = 0$ se obtiene

$$Z_0(t + T) = e^{c_j t} e^{c_j T} R_0(t + T) = \lambda_j Z_0(t) = \lambda_j e^{c_j t} R_0(t), \quad (5.73)$$

de aquí se obtiene inmediatamente la ecuación (5.72). Consideramos (5.71) para $j = 1$

$$R_1(t + T) = (R_0(t) + R_1(t)), \quad (5.74)$$

y dividimos (5.74) entre (5.72)

$$\frac{R_1(t + T)}{R_0(t + T)} = \frac{R_1(t)}{R_0(t)} + 1, \quad (5.75)$$

así la función

$$g(t) = \frac{R_1(t)}{R_0(t)} - \frac{t}{T}, \quad (5.76)$$

es puramente periódica de periodo T , esto se verifica fácilmente

$$g(t+T) = \frac{R_1(t+T)}{R_0(t+T)} - \frac{t}{T} - 1 = \frac{R_1(t)}{R_0(t)} + 1 - \frac{t}{T} - 1 = \frac{R_1(t)}{R_0(t)} - \frac{t}{T} = g(t). \quad (5.77)$$

Ahora de (5.77) definimos una función $f(t)$

$$f(t) = R_0(t)g(t) = R_1(t) - R_0(t)\frac{t}{T}, \quad (5.78)$$

que también es puramente periódica de periodo T

$$f(t+T) = R_1(t+T) - R_0(t+T)\frac{t+T}{T} = R_1(t) + R_0(t) - R_0(t)\frac{t}{T} - R_0(t) = f(t). \quad (5.79)$$

La introducción de esta teoría general de la estabilidad de Floquete se aplicara posteriormente en la continuación de este trabajo, mediante un análisis numérico sobre la estabilidad de las orbitas periódicas que se encontraran con la ayuda de las líneas de simetría introducidas en el capítulo 4, Las orbitas más relevantes a estudiar son las llamadas orbitas periódicas elípticas e hiperbólicas, este estudio se particulariza sobre el mapa de Poincaré también introducido en el capítulo 4. Esto se realizará de dos maneras unas es calculando numéricamente exponentes característicos de Poincaré de la órbita en cuestión, por su puesto cambiando los parámetros de los que depende el sistema y ver cómo cambia su estabilidad y la otra será revisar como se mueven las líneas de simetría que se cruzan sobre dicha orbita o punto periodico en el mapa de Poincaré, sobre esto último podemos encontrar gran cantidad de información en [29, 30], que posiblemente serán nuestra base para seguir dicho estudio.

Capítulo 6

Resultados Computacionales

En este capítulo se analizarán y se explicarán los resultados computacionales obtenidos, revisando el mapa de Poincaré para cada caso particular del problema del cuerpo rígido, cada caso particular se obtiene variando ciertos parámetros y fijando otros en las ecuaciones del movimiento correspondientes.

Estos mapas se obtuvieron aplicando la teoría del capítulo 4 aunque habrá ciertas modificaciones en ciertos aspectos conforme se vayan analizando los resultados.

El mapa de Poincaré fue evaluado numéricamente usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de integración de 0.01 y valores de los parámetros $E = 50$, $\Lambda = 5$, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, valores que usan Galgani y Chavoya-Piña, esto para facilitar la comparación de los resultados.

La forma en cómo se estudiarán diversos casos es variando los parámetros x , y y z , relacionados al centro de masa del cuerpo rígido, se le asignarán valores de acuerdo con lo desarrollado en el capítulo 4.

-El caso integrable de Euler-Poinsot se obtiene haciendo $x=y=z=0$, es decir que no hay fuerzas externas sobre el cuerpo rígido, este caso se estudia en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$, las involuciones que utilizaremos para hallar las líneas de simetría correspondientes son \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_0^* cuyos puntos fijos son las líneas $\nu = 0_{mod2\pi}$ que corresponde en este caso a γ_0 y $\nu = \pm\pi/2_{mod2\pi}$ que corresponde a γ_0^* . Otra involución que utilizaremos para este caso es la \mathbf{g}_0 cuyos puntos fijos coinciden con la línea $N = 0$ que identificamos con la línea Γ_0 , esto se trabajara en la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$.

- El caso no integrable variando el parámetro z y tomando a $x=y=0$ donde ahora tenemos una fuerza externa actuando sobre el cuerpo rígido, y donde el centro de masa se encuentra en la dirección del eje z , se estudia en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$, las involuciones que utilizaremos para hallar las líneas de simetría correspondientes son \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_0^* cuyos puntos fijos son las líneas $\nu = 0_{mod2\pi}$ que corresponde en este caso a la línea de simetría γ_0 y $\nu = \pm\pi/2_{mod2\pi}$ que corresponde a la línea de simetría γ_0^* , en este caso se recuperarán los casos $z = 1, 2$ estudiados por Chavoya-Piña para nuestra verificación, comparación y para complementar, además de que iremos más lejos en este caso, estudiando a los casos $z = 3, 5, 10$ y podremos ver que para estudiar estos será mejor usar la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi$.

- El caso no integrable variando los parámetro z , x y tomando a $y = 0$ donde ahora el centro de masa se encuentra en el plano xz se estudia en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$,

aquí solo es válida la involución \mathbf{p}_0^* cuyos puntos fijos son la línea $\nu = \pm\pi/2_{\text{mod}2\pi}$ que corresponde a la línea de simetría γ_0^* , esta también es válida para el caso más particular variando x y tomando a $z=y=0$, se muestran los resultados de los casos $x = 1, 2$ y $x = z = 1$.

- El caso no integrable variando los parámetro z, y y tomando a $x = 0$ donde ahora el centro de masa se encuentra en el plano yz se estudia en la superficie $\mu_{\text{mod}2\pi} = 0$, aquí solo es válida la involución \mathbf{p}_0 cuyos puntos fijos son la línea $\nu = \pm\pi/2_{\text{mod}2\pi}$ que corresponde a γ_0^* , esta también es válida para el caso más particular variando y y tomando a $z=x=0$, se muestran los resultados de los casos $y = 1, 2$ y $y = z = 1$.

- El caso no integrable variando los parámetros x, y y tomando a $z = 0$ donde ahora el centro de masa se encuentra en el plano xy se estudia en la superficie $\mu_{\text{mod}2\pi} = \pi/2$, aquí es válida la involución \mathbf{g}_0 cuyos puntos fijos son la línea $N = 0$ que corresponde a la línea de simetría Γ_0 , esta también es válida para el caso más particulares variando x y tomando a $z=y=0$ y también variando y y tomando a $z=x=0$, se muestran los resultados de los casos $y = 1, x = 1$ y $x = y = 1, 2$.

-El caso general donde x, y, z son distintos de cero no se puede construir una involución, por lo que solo se realizan los mapas dando condiciones iniciales al azar, trabajaremos sobre la superficie $\mu_{\text{mod}2\pi} = 0$, se muestran los resultados de los casos $x = y = z = 0,5, 1, 1.5$ y 2 .

- Se obtuvieron ocho líneas de simetría de cada una de las tres involuciones para cada uno de los casos donde son válidas dichas involuciones, cuatro de ellas se obtienen por iteración directa de las líneas γ_0, γ_0^* y Γ_0 que dan líneas de simetría con índice par positivo y las otras de índice par negativo se obtienen de la reflexión de la líneas pares con índice positivo.

-También se presenta algo concerniendo a los periodos impares, se expone la forma en cómo se pueden hallar periodos impares.

Caso integrable $x=y=z=0$

A continuación, presentamos el caso integrable tratado por Chavoya-Piña como lo mencionamos anteriormente, éste es el caso de Euler-Poinsot. Aquí la función definida $T_{\Delta t}$ puede ser descompuesta en una infinidad de caminos como el producto de dos involuciones, y lo mismo sucederá con el mapa de Poincaré, y así se pueden encontrar las curvas de puntos periódicos. Ésta forma particular de descomposición del mapa

da solo algunos puntos de estas curvas siendo precisamente las posiciones límites de los puntos periódicos que existen en el caso no integrable, las condiciones iniciales usadas para hallar las curvas de puntos periódicos, corresponden a las coordenadas encontradas calculando la intersección de las líneas de simetría. Podemos notar en este caso que μ es ignorable y que el valor de Λ no interesa, debido a que no aparece en el hamiltoniano.

La figura 6.1 muestra las líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Las intersecciones de dichas líneas con la línea γ_0 se presentan en la tabla 6.1.

La figura 6.2 muestra las líneas de simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Las intersecciones de dichas líneas con la línea γ_0^* se presenta en la tabla 6.2. En el trabajo de Chavoya-Piña solo se obtuvieron el conjunto de líneas $\gamma_{-6}, \dots, \gamma_6$ y $\gamma_{-6}^*, \dots, \gamma_6^*$, evidentemente se obtendrán más puntos periódicos con periodo más grande al que se pueden encontrar con este último conjunto de líneas de simetría.

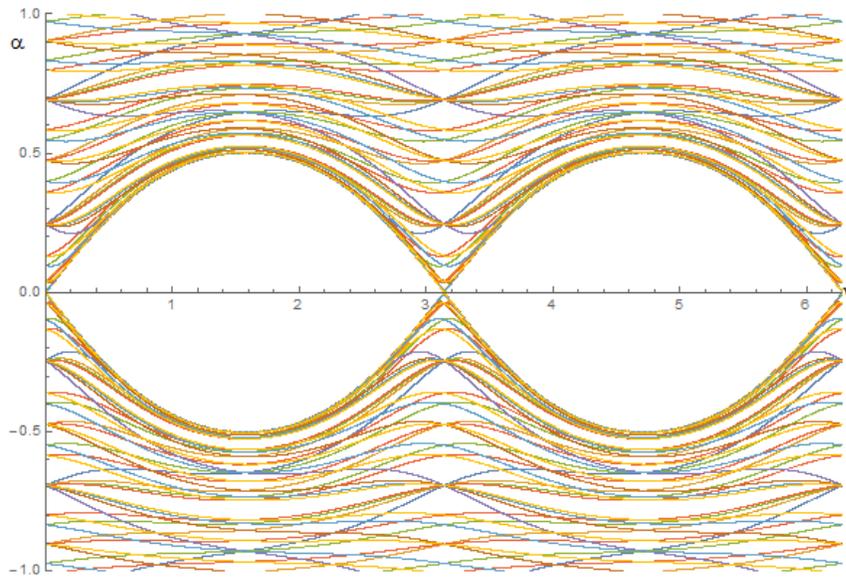


Figura 6.1: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$ en el caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

α	Periodo
-0.972994	3
-0.90385	4
-0.834173	6
-0.799116	8
-0.692906	1
-0.584777	8
-0.548226	6
-0.474241	4
-0.398999	3
-0.360906	8
-0.245362	2
-0.1322815	8
-0.09755	3
-0.03931	4
-0.0064042	6
0	1
0.0064042	6
0.03931	4
0.09755	3
0.1322815	8
0.245362	2
0.360906	8
0.398999	3
0.474241	4
0.548226	6
0.584777	8
0.692906	1
0.799116	8
0.834173	6
0.90385	4
0.972994	3

Tabla 6.1: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso integrable.

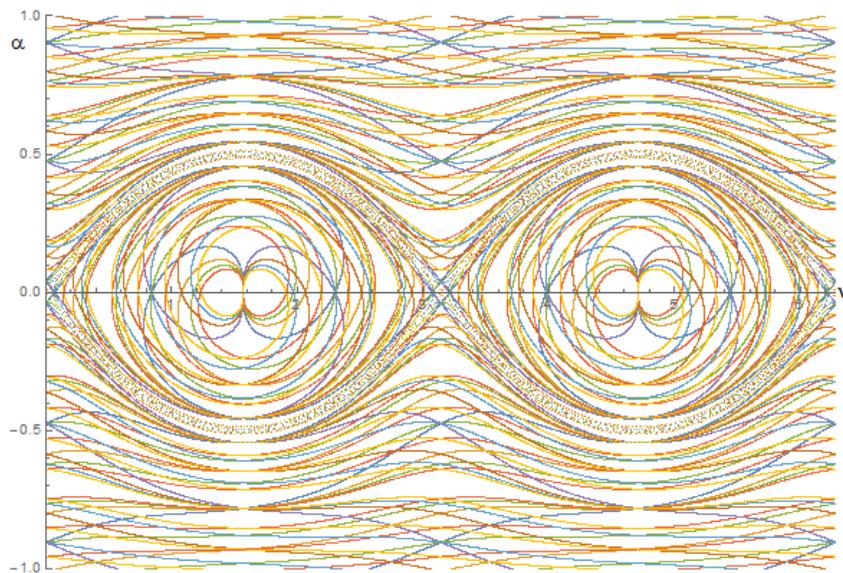


Figura 6.2: Líneas de simetría γ_{-8}^* , ..., γ_8^* . Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

α	Periodo
-0.979816	3
-0.928815	4
-0.878569	6
-0.853782	8
-0.781082	1
-0.711665	8
-0.689503	6
-0.647053	4
-0.607788	3
-0.543278	2
-0.455404	2
-0.404184	8
-0.382933	3
-0.333642	4
-0.273031	6
-0.236457	8
0	1
0.382933	3
0.455404	2
0.543278	2
0.607788	3
0.647053	4
0.689503	6
0.711665	8
0.781082	1
0.853782	8
0.878569	6
0.928815	4
0.979816	3

Tabla 6.2: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso integrable.

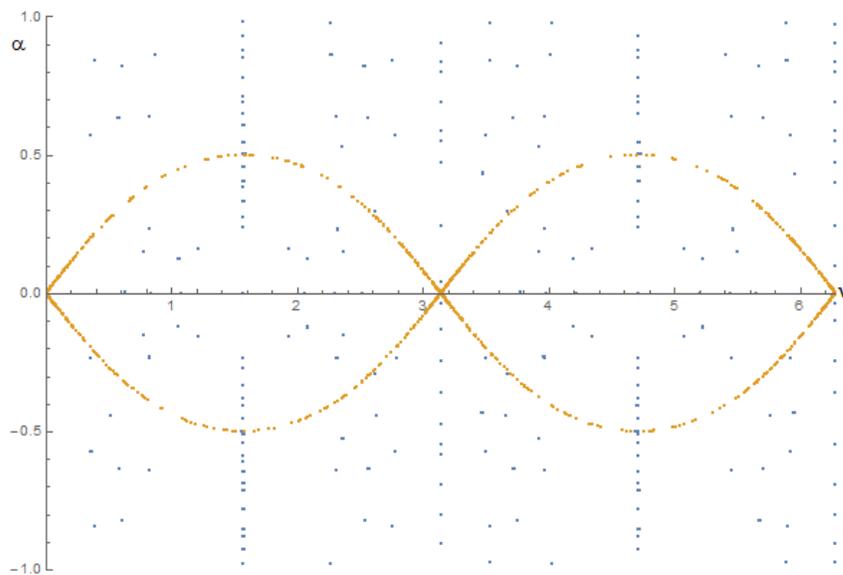


Figura 6.3: Iteración del mapa con las condiciones iniciales dadas en las tablas 6.1 y 6.2.

Con las líneas de simetría adicionales a los trabajos de Chavoya-Piña no se obtienen puntos fijos adicionales a los reportados y éstos son 12.

Los puntos fijos con coordenadas en el mapa $\nu = 0, \pi$ y $\alpha = 0$, corresponden

a las rotaciones alrededor del eje de inercia intermedio, mientras que aquellos con coordenadas $\alpha = 0$ y $\nu = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ representan las rotaciones alrededor del eje de inercia menor, los puntos con $\alpha = \pm 1$ corresponden a rotaciones alrededor del eje de inercia mayor. Notamos así la existencia de puntos fijos adicionales en el mapa con coordenadas $\alpha = \pm 0,629908$ y $\nu = 0, \pi$, por cada uno de los cuales pasa la correspondiente curva de puntos fijos, que pasan por los puntos fijos adicionales de la tabla 6.2 $\alpha = \pm 0,781082$ y $\nu = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, respectivamente.

Caso no integrable

Casos variando z con $x=y=0$

A continuación se exponen los resultados obtenidos concerniendo a los casos $z = 1, 2$, que ya han sido estudiados hasta ahora; y seguidamente se expondrán los casos no abordados ($z = 3, 5, 10$; solo dos de estos casos fueron tratados por Galgani y colaboradores), como se vio en el capítulo 4 se obtendrán las líneas de simetría para las involuciones \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_0^* que son las que corresponde a estos casos.

Casos $z=1, 2$ con $x=y=0$

Para empezar vale la pena mencionar que un ejemplo de un cuerpo rígido cuyos valores de los momentos de inercia satisfacen $I_1 = 3, I_2 = 2, I_3 = 1$. Según Galgani y colaboradores este ejemplo coincide con el cuerpo constituido por cuatro puntos materiales de masa unitaria colocados en los vértices de un cuadrado unitario con el punto fijo situado en la mitad de uno de sus lados.

Se obtuvieron las mismas líneas de simetría que para el caso integrable, $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ y $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$, éstas se presentan en las figuras 6.4 y 6.5 para $z = 1$ y en las figuras 6.7 y 6.8 para $z = 2$. Cuando la perturbación incrementa, es decir, cuando nos encontramos en la situación de la no integrabilidad del problema, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = -1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = 1$.

En todos estos casos se podrá observar que el mapa es simétrico respecto de

la línea $\nu = \pi$, esta simetría es debida a que con los valores de los parámetros considerados hasta aquí (incluyendo el caso integrable) el hamiltoniano, es una función periódica de ν con periodo π , mientras que el hamiltoniano general es una función periódica de periodo 2π . Como una consecuencia, se puede ver de manera sencilla que si $\{\mu(t), \nu(t), M(t), N(t)\}$ es una solución de las ecuaciones del movimiento para el hamiltoniano con los parámetros dados anteriormente, entonces $\{\mu(t), \nu(t) + \pi, M(t), N(t)\}$ también es una solución.

Las tablas 6.3 y 6.4 dan las coordenadas de los puntos periódicos para $z = 1$ y las tablas 6.5 y 6.6 para $z = 2$; las figuras 6.6 y 6.9 muestran los resultados de la iteración de los puntos periódicos iluminados en color naranja, algunas islas de puntos elípticos y de la región llamada caótica iluminada de azul, para ambos casos respectivamente. Nuevos puntos periódicos aparecen en la vecindad de los puntos hiperbólicos fijos debido a que las líneas de simetría se curvan en gran medida, lo que da lugar a un comportamiento caótico. Para $z = 1$ cuatro de los ciclos de periodo dos nacen hiperbólicos, las iteraciones de estos se muestran en verde y ocho islas aparecen alrededor de ocho puntos elípticos de periodo dos. Estos puntos elípticos fueron reportados por Chavoya-Piña, pero haciendo una inspección más a fondo de la región caótica, primeramente podemos encontrar 8 ciclos de puntos elípticos de periodo 3, que no se reportan en Chavoya-Piña; estos puntos se puede visualizar en la figura 6.6 donde se iluminaron de diferente color (rojo, morado, café, azul claro, amarillo, morado, verde y rojo) las islas que rodean a los puntos elípticos, esto para su mejor visualización, 4 de estos periodos están distribuidos por toda la zona caótica mientras que dos ciclos permanecen en la primera mitad del mapa $(0, \pi)$ y los otros 2 en la otra mitad del mapa $(\pi, 2\pi)$ dentro de la misma zona caótica. Por los centros de las islas que componen a estos ciclos elípticos de periodo 3 se cruzan las líneas de simetría γ_8^* y γ_{-4}^* , γ_{-8}^* y γ_4^* , γ_2^* y γ_{-4}^* , γ_{-2}^* y γ_4^* , γ_0^* y γ_{-6}^* , γ_0^* y γ_6^* , γ_6^* y γ_{-6}^* .

Aledaño a la región caótica podemos encontrar 2 ciclos elípticos de periodo 8, que se reconocen por islas en verde alrededor de dichos puntos, las cuales se pueden ver en la figura 6.6. La aparición de estos ciclos tampoco ha sido reportado aún. Se calcularon las coordenadas de uno de los centros de estas islas ya que por éste se cruzan las líneas γ_0 , γ_8 y γ_{-8} .

Además prevalecen 10 puntos fijos reportados anteriormente, 4 inestables sobre

γ_0 y 6 estables γ_0^* . Con la introducción del término perturbativo los puntos fijos sobre γ_0 cambian su carácter de estables a inestables. También existen 5 ciclos de periodo 2, 8 de periodo 3, 8 ciclos de periodo 4 (5 de los cuales fueron reportados por Chavoya-Piña), 9 de periodo 6 y 15 de periodo 8.

Para $z = 2$ se preservan dos los cuatro ciclos de periodo dos que nacen hiperbólicos iluminados de verde aledaños a la zona caótica y los otros fueron destruidos por el aumento de la perturbación volviéndose caóticos. La región caótica aumenta de tamaño y dentro de ésta podemos encontrar que solo uno de los ciclos de periodo 8 encontrados en $z = 1$ sobrevive aún, el que está localizado en la parte negativa del momento y ahora está rodeado por la zona caótica. Dentro de ésta también podemos encontrar dos ciclos hiperbólicos de periodo 5 iluminamos de morado y café las islas asociadas a estos puntos inestables, podemos ver que sobre algunos de los puntos de este ciclo se intersectan las líneas de simetría γ_8^* y γ_{-2}^* , γ_2^* y γ_{-8}^* , γ_{-6}^* y γ_4^* , γ_6^* y γ_{-4}^* . También encontramos dos ciclos de periodo 5 elípticos, iluminamos de rojo y azul claro las islas asociadas, donde en cada una de estas islas asociadas a este periodo, está rodeada de otras islas de un periodo mayor. En los centros de algunos de los puntos del ciclo elíptico de periodo 5 podemos ver que se intersectan las mismas líneas de simetría que en los ciclos hiperbólicos anteriores. Del lado positivo del momento, aledaño a los ciclos hiperbólicos y elípticos mencionados subsiste un periodo 12 hiperbólico iluminado en morado y en el centro de una de sus islas de este ciclo se intersectan las líneas de simetría γ_6^* , γ_{-6}^* y γ_0^* , por lo que es fácil calcular las coordenadas de este punto, También del lado negativo del momento aledaño a los ciclos hiperbólicos y elípticos mencionados subsiste un periodo 12 elíptico iluminado de amarillo y en el centro de una de sus islas de este ciclo se intersectan las líneas de simetría γ_6^* , γ_{-6}^* y γ_0^* , por lo que de nuevo resulta fácil calcular las coordenadas de este punto.

Podemos encontrar en la primera mitad del mapa un ciclo elíptico de periodo 15 iluminado de azul claro que también aparece en la otra mitad debido a la simetría respecto del ángulo ν iluminado de color verde, estas cadenas de islas se localizan más hacia al centro del mapa y sobre ningún centro de estas islas cruzan dos líneas de simetría por lo que no se puede calcular su centro, posiblemente obteniendo más líneas de simetría se puedan hallar alguno de dichos centros.

Alrededor del periodo 2 que se ubica del lado positivo del momento, aledaño a la región caótica, podemos encontrar una cadena de islas que pertenecen a un ciclo de periodo 26 y donde solo por los centros de algunas de las islas pasan líneas de simetría individuales, es decir no se cortan por lo menos dos líneas de simetría.

Como en $z = 1$ prevalecen 10 puntos fijos 4 inestables sobre γ_0 y 6 estables γ_0^* , 4 de periodo 2, dos de los cuales ya se mencionaron que son inestables, 9 de periodo 3, 10 de periodo 4, 10 de periodo 6 y 16 de periodo 8.

Algo importante que destacar para estos casos no integrables, es que los ciclos de los puntos periódicos que se calculan sobre la línea de simetría γ_0 aparecen en una secuencia de Farey a partir de los puntos fijos, la aparición de los ciclos en ésta secuencia aún no ha sido reportada y podremos ver que esta propiedad se preserva para otros casos donde, por ejemplo se cambia la superficie de sección o se varían los parámetros (x, y, z) , como veremos más adelante.

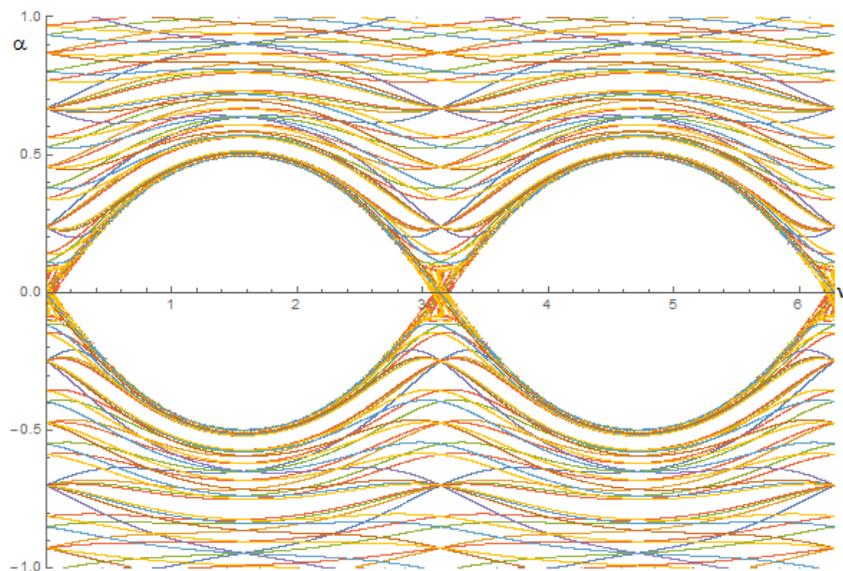


Figura 6.4: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 1$.

α	Periodo
-0.92765	4
-0.850495	6
-0.812615	8
-0.7001	1
-0.58792	8
-0.550243	6
-0.4740969	4
-0.39611	3
-0.35575 ^s	8
-0.24872775	2
-0.1486761	8
0.1406702	8
0.23791	2
0.34158	8
0.38080	3
0.45595	4
0.5284719	6
0.5640	8
0.6682	1
0.769584	8
0.802896	6
0.8689956	4
0.934899	3
0.968315	8

Tabla 6.3: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$ y $z = 1$.

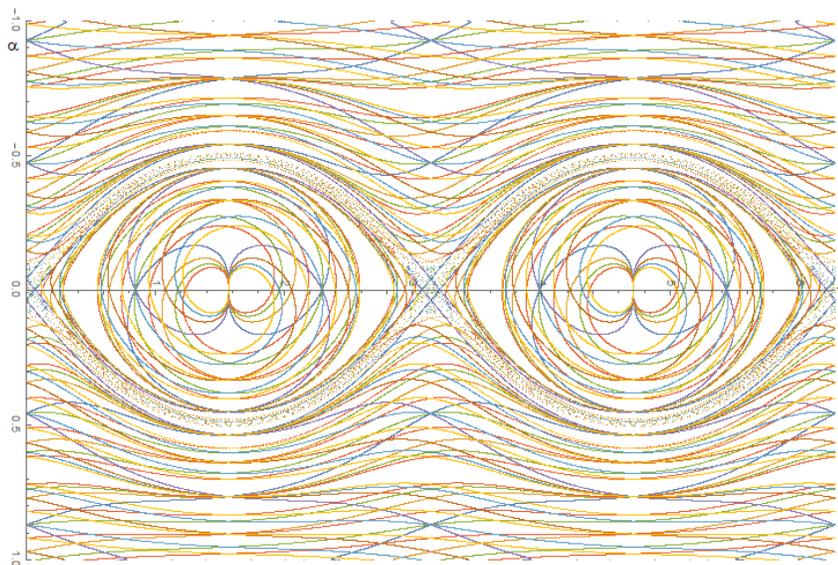


Figura 6.5: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 1$.

α	Periodo
-0.94614738	4
-0.89028	6
-0.8634167	8
-0.78638	1
-0.714638	8
-0.692042	6
-0.649185	4
-0.61028	3
-0.592852	8
-0.5423935	2
-0.4542376	2
-0.4066055	8
-0.3846037	3
-0.3346178	4
-0.273796	6
-0.236457	8
0.3802971	3
0.53563	2
0.584289	8
0.600808	3
0.637545	4
0.6776511	6
0.6986178	8
0.764207	1
0.832627	8
0.855897	6
0.90307	4
0.9512752	3
0.976123	8

Tabla 6.4: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 1$.

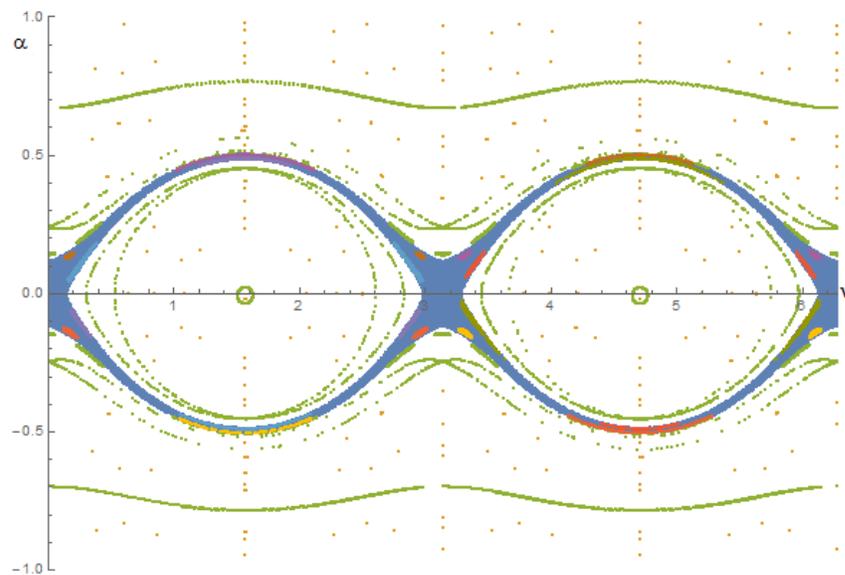


Figura 6.6: Iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y región caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 1$.

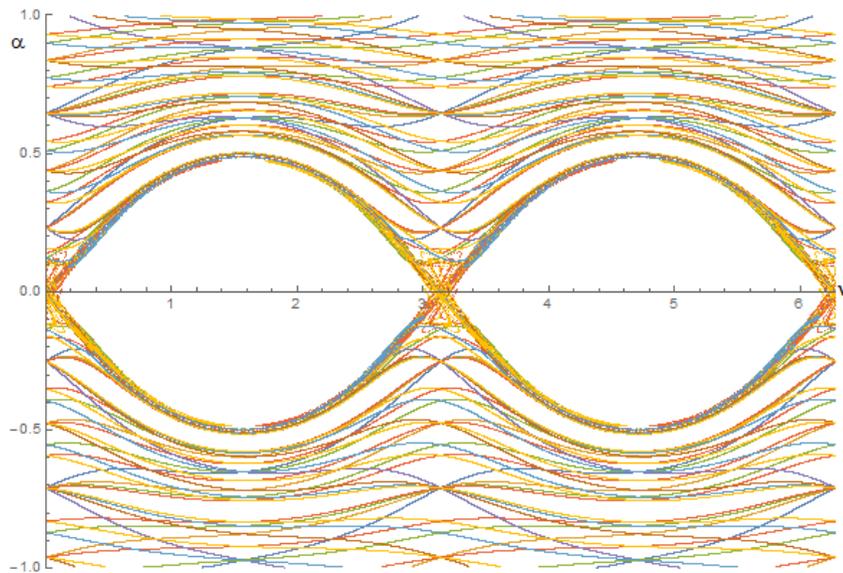


Figura 6.7: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 2$.

α	Periodo
-0.960879	4
-0.87208	6
-0.830289	8
-0.709766	1
-0.5925305	8
-0.553554	6
-0.475039	4
-0.394368	3
-0.352058	8
-0.252257	2
-0.16163332	8
0.2309334	2
0.323032	8
0.363192	3
0.438321	4
0.509586	6
0.5442327	8
0.644935	1
0.74198	8
0.77377837	6
0.83670	4
0.899312	3
0.9309474	8

Tabla 6.5: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 2$.

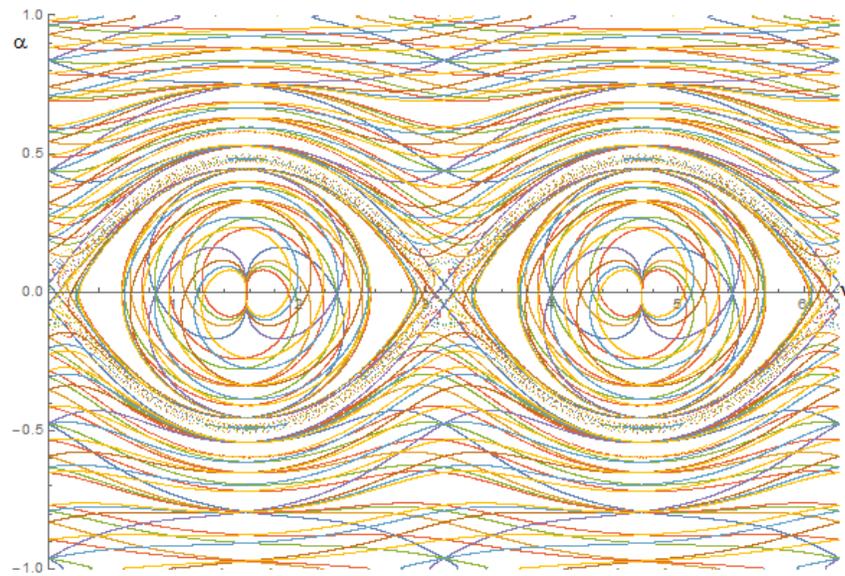


Figura 6.8: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 2$.

α	Periodo
-0.9706224	4
-0.9057614	6
-0.8759845	8
-0.793119	1
-0.718320	8
-0.695135	6
-0.6516474	4
-0.612945	3
-0.5962053	8
-0.453109	2
-0.4088237	8
-0.3862423	3
-0.335668	4
-0.274705	6
-0.2382303	8
-0.0334429	1
0.37751232	3
0.52825303	2
0.57956126	8
0.5943499	3
0.62860089	4
0.66649179	6
0.68633687	8
0.74845294	1
0.81308983	8
0.8349877	6
0.87935864	4
0.9247054	3
0.94802539	8

Tabla 6.6: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 2$.

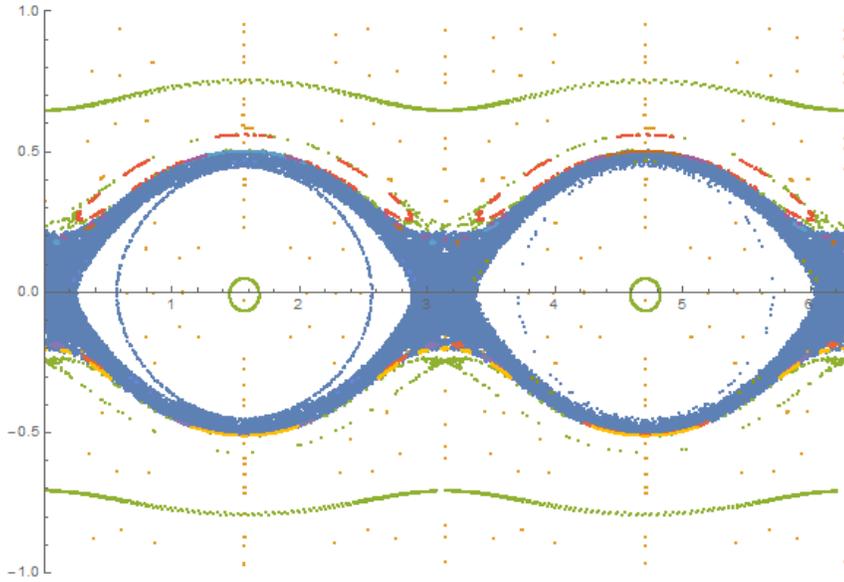


Figura 6.9: Iteración de los algunos puntos periódicos, algunas islas y región caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 2$.

Casos $z=3, 5, 10$ y $x=y=0$

En los casos que a continuación exponemos donde el sistema se perturba aún más, encontraremos que en los centros de ciertas islas donde se hallan las órbitas periódicas aisladas por la zona caótica, ya no se cruzan las líneas de simetría, por lo que no se podrán hallar dichos centros. Esto se demostrará solamente con el caso $z = 3$ y usando las líneas de simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Sin embargo, fuera de la zona caótica el cruce de las líneas de simetría nos sigue dando las predicciones de las órbitas periódicas. Esto se podrá apreciar en las figuras 6.10 y 6.11.

Entonces lo que se hace para poder hallar los centros de dichas islas es cambiar la superficie de sección que establecimos en la teoría del capítulo 4, definiendo ahora la superficie $\mu_{\text{mod}2\pi} = \pi$.

A continuación se presentan las líneas de simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ en la superficie $\mu_{\text{mod}2\pi} = 0$.

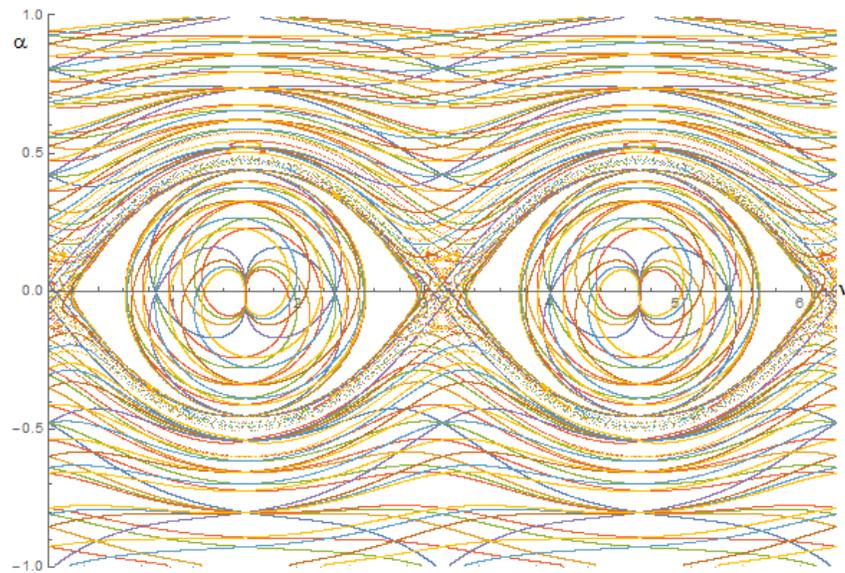


Figura 6.10: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

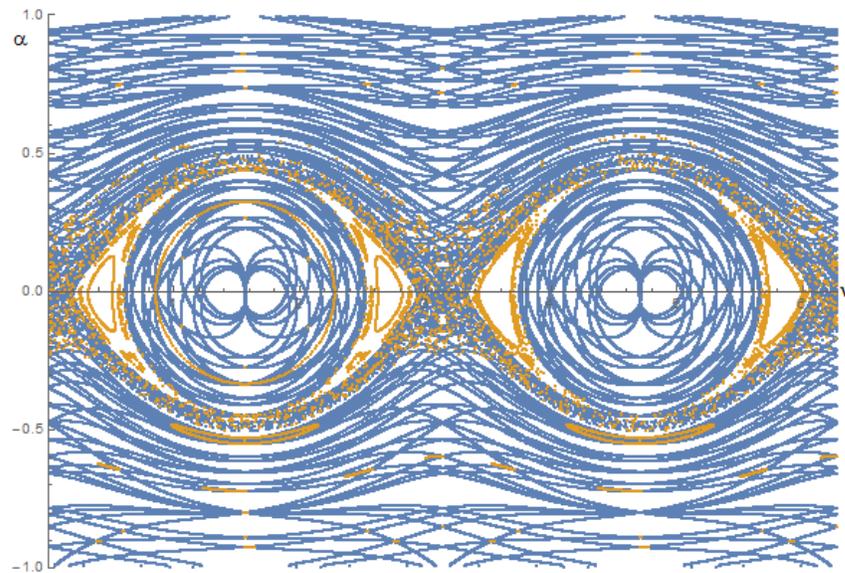


Figura 6.11: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$, Iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

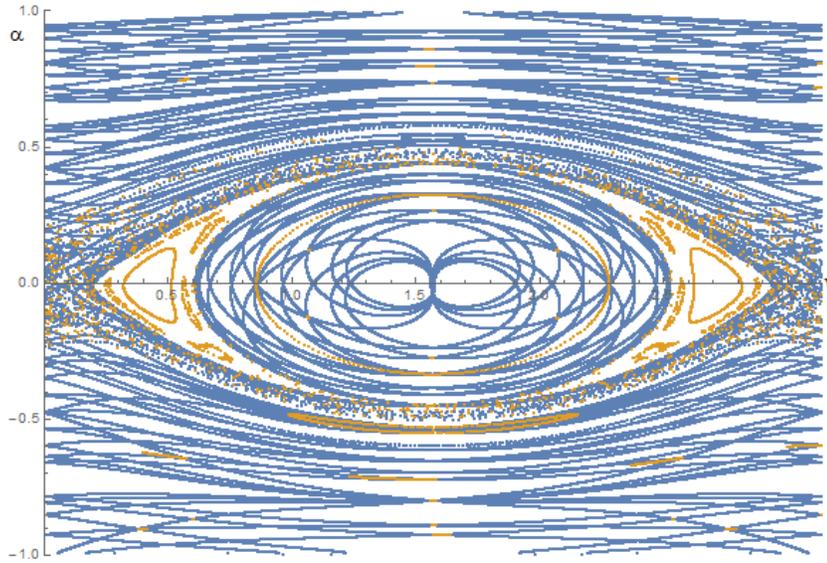


Figura 6.12: Amplificación de la figura 6.11

Como se puede observar de las figuras 6.11 y 6.12 y como se mencionó anteriormente, existe un conjunto de islas las cuales no son alcanzadas por las líneas de simetría, sin embargo, las órbitas periódicas fuera de la zona caótica sí se encuentran en la intersección de las líneas. En las figuras 6.11 y 6.12 observamos varias iteraciones de puntos periódicos.

La zona caótica crece en comparación a los dos últimos casos no integrables y las islas que se muestran en la figura 6.11 son las que sobreviven; esto debido al aumento en la perturbación.

Una forma de encontrar las líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$ y $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ que no estaban en el mapeo anterior es cambiar de superficie como se definió anteriormente. En los casos que siguen ($z = 3, 5, 10$) se estudiará la dinámica sobre la nueva superficie de sección $\mu_{mod 2\pi} = \pi$.

Cambio de superficie ($\mu_{mod 2\pi} = \pi$).

Lo primero que mencionar al hacer este cambio de superficie es que existe una diferencia notable en las líneas de simetría, así como consecuencia de esto la visualización de la dinámica deberá cambiar aunque claramente los puntos periódicos no

modificarán su periodicidad al realizar este cambio de superficie, sin embargo, cambiarán sus coordenadas y las islas que encierran a las órbitas periódicas dentro de la zona caótica también cambiarán su visualización, esto se mostrará gráficamente más adelante, además de que la región caótica crece con relación a los casos no integrables anteriormente vistos.

Como vimos antes cuando la perturbación se incrementa, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = -1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = 1$, a pesar del cambio de superficie. Esto prevalece para los siguientes tres casos. Se calcularon como anteriormente se hizo las intersecciones en la línea γ_0 y γ_0^* .

Caso $z=3$, con $x=y=0$.

Podemos ver, como antes, que para este caso el ordenamiento de los ciclos de los puntos periódicos que se calculan sobre la línea de simetría γ_0 y γ_0^* se ordenan en una secuencia de Farey a partir de los puntos fijos.

Para este caso tenemos 10 puntos fijos, 7 puntos periódicos de periodo 3, 7 de periodo 4, 9 de periodo 6 y 17 de periodo 8. Los 4 puntos fijos sobre la línea γ_0 son inestables y los 6 puntos fijos sobre la línea γ_0^* son estables dos de estos elípticos asociados a los inestables mencionados.

Una ventaja muy importante al cambiar de superficie es que dentro de la zona caótica se pueden hallar los centros de algunas islas ya que están sobre γ_0 y γ_0^* y su cálculo es bastante sencillo. Dentro de ésta zona podemos encontrar un ciclo de periodo 8 iluminado de color morado, una cadena de 8 islas que rodean a un ciclo de periodo 2 que viven en la zona caótica y que se encuentran sobre γ_0 en la parte positiva del momento. El ciclo de periodo 8 es elíptico y por los centros de dos islas de este ciclo se cruzan las líneas de simetría γ_0 , γ_8 y γ_{-8} así que fue fácil calcular los centros de dichas islas, lo que nos da la condición inicial por la cual cruza la órbita periódica.

Aledaño a este ciclo de periodo 8 que está del lado positivo del momento se puede apreciar que aparece un ciclo elíptico de periodo 18 iluminado de café, éste nace muy cerca de la zona caótica y por el centro de una de sus islas solo pasa la línea γ_0 pero no tenemos más líneas de simetría que crucen ahí en especial.

Alrededor del ciclo de periodo dos que aparece sobre γ_0 inmerso en la zona caótica, podemos ver que existen un conjunto de islas de periodo 10 elíptico iluminado de color verde, podemos notar que por el centro de una de sus islas pasa la línea de simetría γ_0 lamentablemente no contamos con la líneas γ_{10} o γ_{-10} para poder determinar la intersección de estas con la γ_0 y determinar el centro de la isla, aunque podría obtenerse γ_{10} , sin embargo por los centro se varias islas de este ciclo se intersecta las líneas de simetría $\gamma_8, \gamma_{-2}, \gamma_{-8}, \gamma_2, \gamma_6, \gamma_{-4}, \gamma_{-6}$ y γ_4 . Más externamente a este periodo 10 se aprecia que vive una cadena de islas perteneciente a un periodo elíptico alto.

Alrededor del periodo 2 que se encuentra sobre γ_0^* , inmerso en la zona caótica, aparece un ciclo elíptico de periodo 10 iluminado de color rojo y a su vez alrededor de este periodo 10 aparece una cadena de islas que pertenecen a un ciclo elíptico de un periodo muy alto. En los centro de 4 islas de dicho periodo 10 podemos observar que se cruzan las líneas de simetría $\gamma_8, \gamma_{-2}, \gamma_{-8}$ y γ_2 y por los centros de otras 4 islas se cruzan las líneas $\gamma_6, \gamma_{-4}, \gamma_{-6}$ y γ_4 .

Las figuras 6.13 y 6.14 muestran las líneas de simetría, las tablas 6.7 y 6.8 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0 y γ_0^* y la figura 6.15 muestra la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.7 y 6.8 iluminadas de color naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada de color azul.

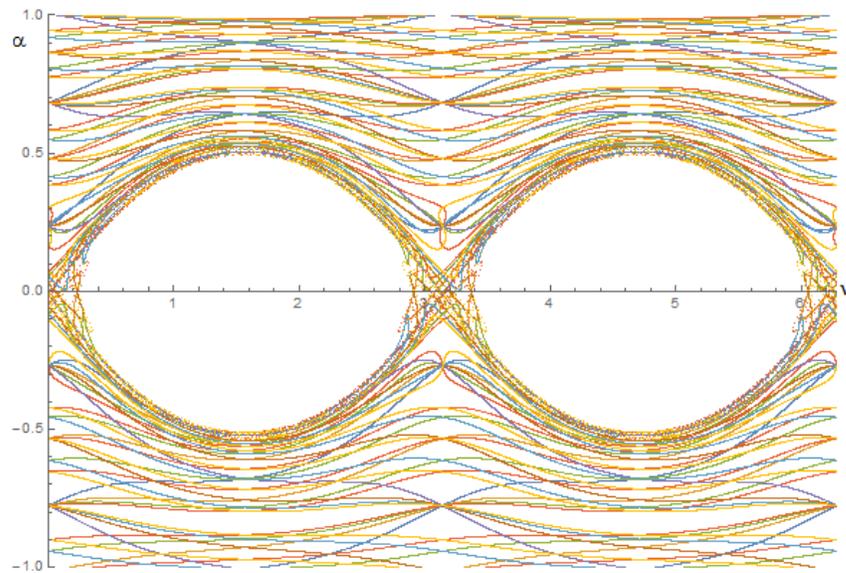


Figura 6.13: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

α	Periodo
-0.941571	6
-0.900738	8
-0.7766581	1
-0.709766	8
-0.6131532	6
-0.5332643	4
-0.4567546	3
-0.4220892	8
-0.269521	2
-0.252257	2
-0.16163332	8
0.2360601	2
0.302390	8
0.2309334	2
0.385046	8
0.414594	3
0.48094762	4
0.5493102	6
0.5833432	8
0.682603	1
0.776895	8
0.807159	6
0.865214	4
0.9193865	3
0.9446170	8

Tabla 6.7: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

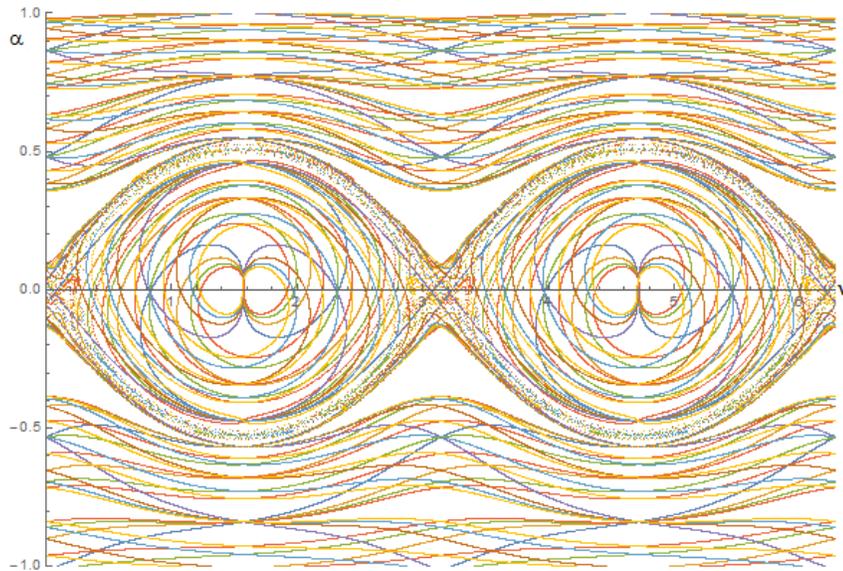


Figura 6.14: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

α	Periodo
-0.957399	6
-0.9277556	8
-0.839505	1
-0.7561746	8
-0.7298372	6
-0.6794796	4
-0.632279	3
-0.609686	8
-0.56796504	2
-0.47413374	2
-0.408890	8
-0.389920	3
-0.341887	4
-0.2805628	6
-0.2431174	8
0.5466419	2
0.5813127	8
0.6013565	3
0.6423272	4
0.6846356	6
0.70618526	8
0.7720009	1
0.837646	8
0.8590136	6
0.9007291	4
0.94035911	3
0.9590034	8

Tabla 6.8: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

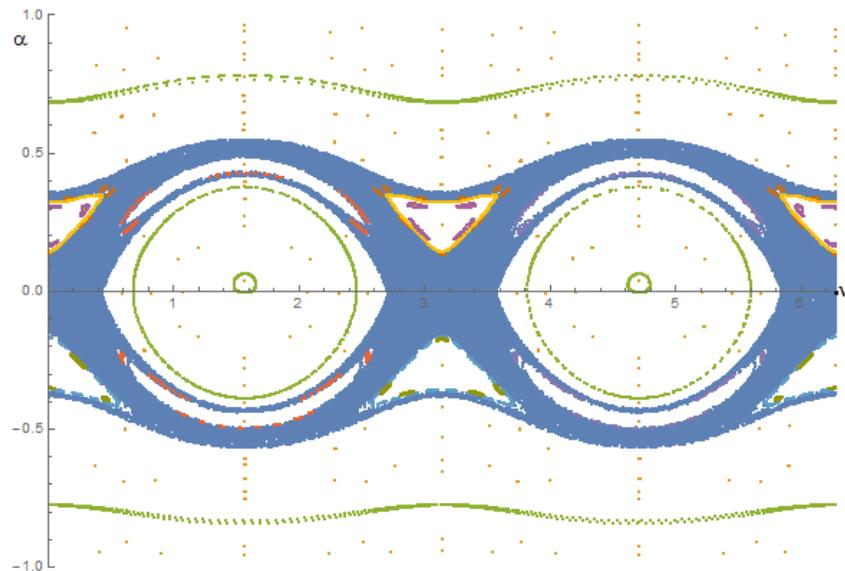


Figura 6.15: Iteración del mapa de Poincaré con las condiciones iniciales dadas en las tablas 6.1 y 6.2. Algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 3$.

Caso $z=5$, $x=y=0$.

Podemos ver, como antes, que para este caso los periodos de las intersecciones con la γ_0 se ordenan en una secuencia de Farey a partir de los puntos fijos.

Para este caso de nuevo tenemos 10 puntos fijos, 4 inestables sobre γ_0 y 6 estables sobre γ_0^* , 6 puntos periódicos de periodo 2, 7 puntos periódicos de periodo 3, 7 de periodo 4, 9 de periodo 6 y 17 de periodo 8. Como en el caso $z = 3$ los dos puntos fijos sobre la línea γ_0 son inestables y los 3 puntos fijos sobre la línea γ_0^* son estables dos de estos elípticos asociados a los inestables mencionados.

Al parecer varios de los ciclos antes mencionados empiezan a volverse inestables para este caso, por ejemplo uno de los periodos 3, el que está ubicado en $\alpha = -0,4976402$ (iluminado en color verde), iterando suficientes veces este punto, podemos notar que empiezan a nacer un ciclo elíptico de periodo tres.

Claramente la región caótica crece aún más respecto de los casos anteriores y dentro de ésta podemos encontrar que dos de los ciclos de periodo dos reportados aun se encuentran aquí como en $z = 3$, pero para este caso las islas que rodeaban a estos periodos 2 han sido destruidas por la perturbación, sin embargo nacen nuevas islas alrededor de estos ciclos de periodo 2. Alrededor del periodo 2 que esta

sobre γ_0 en la parte negativa del momento podemos observar que cerca de la zona caótica existe un conjunto de islas de un periodo muy grande iluminadas de color rojo, pero más cerca del centro aparecen un conjunto de islas que pertenecen a un ciclo de periodo 14 elíptico iluminado de morado, dos de estas islas tienen su centro sobre γ_0 pero no se cuenta con otra línea de simetría que se cruce ahí, para poder determinar su centro en la intersección de éstas, sin embargo, en los centros de tres de estas islas se cruzan las líneas de simetría γ_{-8} y γ_6 , γ_8 y γ_{-6} , que de acuerdo a la teoría del capítulo 4, la intersección de estas líneas son las que deben de dar la condición inicial para obtener un periodo 14.

Para el periodo 2 que está sobre γ_0 del lado positivo del momento podemos ver que está rodeados por una cadena de islas de un periodo elíptico muy alto.

Para el periodo dos que está sobre γ_0^* podemos ver que está rodeado de un conjunto de islas de periodo 20 iluminado de amarillo y más internamente podemos encontrar una cadena de islas de periodo 26 iluminado de color azul claro.

Las figuras 6.16 y 6.17 muestran las líneas de simetría, las tablas 6.9 y 6.10 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0 , γ_0^* y la figura 6.18 muestra la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.9 y 6.11 iluminadas de naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada de azul.

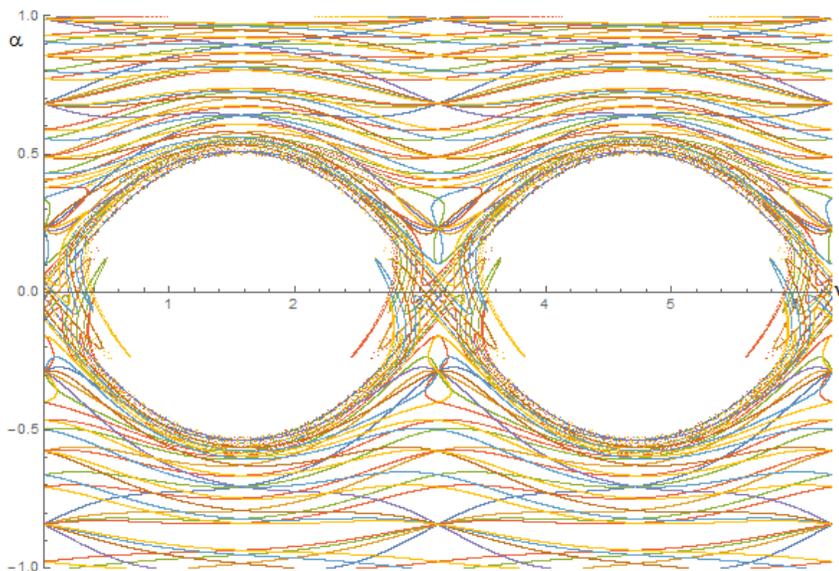


Figura 6.16: Líneas de Simetría Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 5$

α	Periodo
-0.976377	8
-0.841596	1
-0.705763	8
-0.661673	6
-0.5763215	4
-0.4976402	3
-0.4644592	8
-0.398232	8
-0.2876317	2
-0.1593117	8
0.1026241	6
0.2303368	2
0.3386098	6
0.4074893	8
0.43070481	3
0.4905038	4
0.555551	6
0.5884808	8
0.683589	1
0.7731705	8
0.8020870	6
0.8569105	4
0.9072812	3
0.9304796	8
0.9882833	2

Tabla 6.9: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 5$.

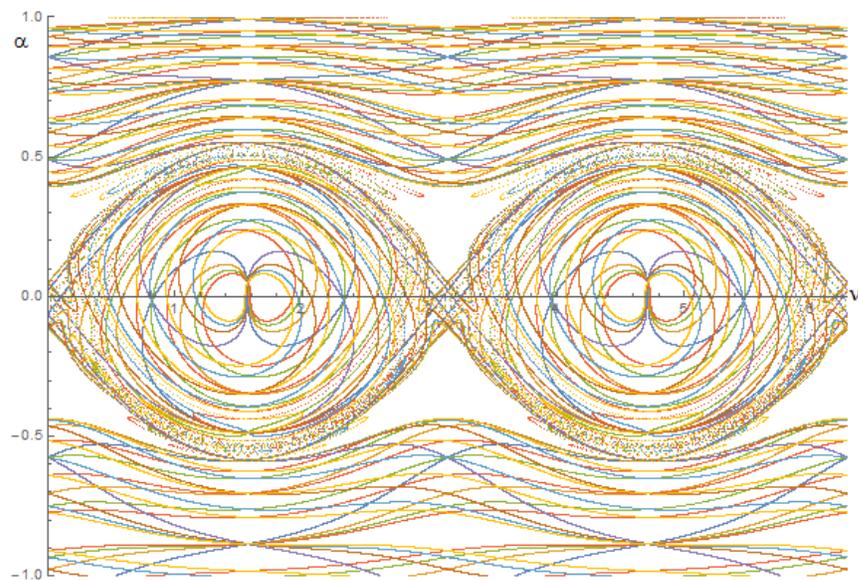


Figura 6.17: Líneas de Simetría. γ_{-8}^* , ..., γ_8^* . Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 5$.

α	Periodo
-0.9831977	8
-0.8858525	1
-0.791165	8
-0.761445	6
-0.7048928	4
-0.6519609	3
-0.6266265	8
-0.586150	2
-0.48733514	2
-0.411005	8
-0.3938521	3
-0.3467431	4
-0.28439189	6
-0.245892	8
0.04926495	1
0.5774417	8
0.5981137	3
0.6403604	4
0.6831601	6
0.7047077	8
0.7704128	1
0.8348296	8
0.8552071	6
0.894644	4
0.931529	3
0.94867305	8
0.9915823	2

Tabla 6.10: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 5$.

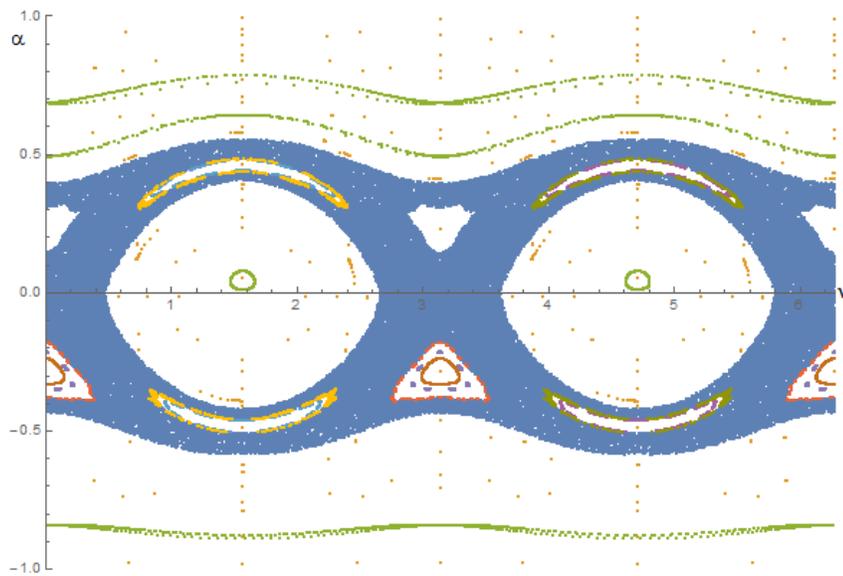


Figura 6.18: Iteración de las condiciones iniciales dadas en la tabla 6.9 y 6.10 y algunas islas. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 5$.

Caso $z=10, x=y=0$

Podemos ver como antes que para este caso los periodos de las intersecciones con γ_0 y γ_0^* se ordenan en una secuencia de Farey a partir de los puntos fijos.

A diferencia de los casos anteriores aquí solo tenemos 6 puntos fijos 2 estables sobre γ_0^* y 2 estables con su asociado inestable sobre γ_0 , se observa que del lado negativo del momento que han desaparecido los puntos fijos que estaban anteriormente, para este valor de la perturbación. Existen también 6 puntos periódicos de periodo 2, 7 puntos periódicos de periodo 3, 8 de periodo 4, 7 de periodo 6 y 11 de periodo 8.

Podemos ver que dos de los ciclos de periodo 4 nacen inestables, para el periodo 4 del lado negativo del momento, podemos ver que se empieza a definir tenuemente un conjunto de islas de periodo 4 elíptico y para el periodo 4 en la parte positiva del momento podemos observar que las islas de periodo 4 elíptico se definen bien y pueden fácilmente ser apreciadas y podemos ver que ninguna de las líneas de simetría de los dos conjuntos que tenemos cruzan los centros de estas islas, posiblemente cambiando nuevamente de superficie de sección si se puedan obtener dichos centros. También podemos encontrar un periodo 3 inestable, de hecho son dos periodos 3 inestables intercalados ya que uno está sobre la línea $\nu = 0$ y el otro en $\nu = \pi$ y podemos notar que para cada uno de estos ciclos existen tres puntos elípticos, es decir, hay 6 islas de periodo 3 y por los centros de una isla de cada ciclo podemos ver que se cruzan las líneas γ_0^* , γ_6^* y γ_{-6}^* por lo que fue fácil determinar sus coordenadas y uno se ubica en $\nu = 0$ y el otro en $\nu = \pi$.

Dentro de la zona caótica podemos ver que aún prevalecen los periodos dos de los casos anteriores que están sobre γ_0 , sin embargo, las islas que rodeaban al periodo dos en el lado del momento negativo desaparecen, y al parecer, de los otros ciclos de periodo dos que estaban sobre γ_0^* nacen dos ciclos de periodo 4 elípticos iluminados de rojo y morado y en el centro de dos islas de cada periodo 4 podemos ver que se cruzan las líneas de simetría γ_0^* , γ_8^* , γ_{-8}^* , γ_4^* y γ_{-4}^* por lo que el cálculo de esta condición inicial resultó sencillo de realizar. También podemos ver que nace un periodo 3 elíptico iluminado de amarillo que no estaba anteriormente y cada una de las islas de dicho periodo aparece rodeada por un conjunto de islas de un periodo 18 elíptico

iluminado de color café, y en el centro de una de las islas de los ciclos de periodo 3 se cruzan las líneas γ_0^* , γ_6^* y γ_{-6}^* .

Las figuras 6.19 y 6.20 muestran las líneas de simetría. Las tablas 6.11 y 6.12 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0^* y la figura 6.21 muestra la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.11 y 6.12 iluminadas en naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

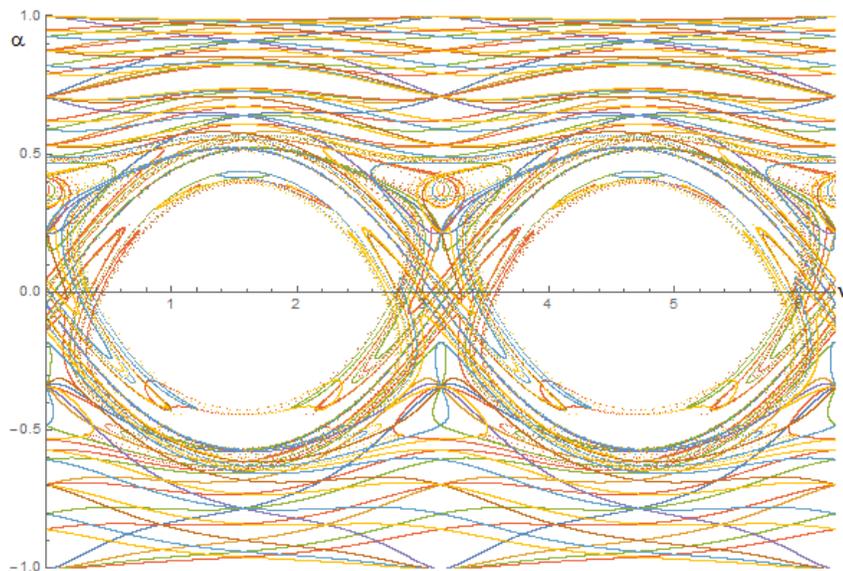


Figura 6.19: Líneas de Simetría. \dots, γ_{10} en el caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 10$

α	Periodo
-0.75594708	8
-0.75037478	6
-0.6984178	4
-0.607551	3
-0.573436	8
-0.53361	-
-0.482631	-
-0.3417977	2
-0.183185	-
0.0443315	-
0.2166353	2
0.465644	-
0.48929151	3
0.5318109	4
0.5889765	6
0.62112165	8
0.708067	1
0.7905145	8
0.7520103	6
0.75752823	4
0.925310	3
0.9479664	8
0.9978977	2

Tabla 6.11: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable, $x = y = 0$ y $z = 10$.

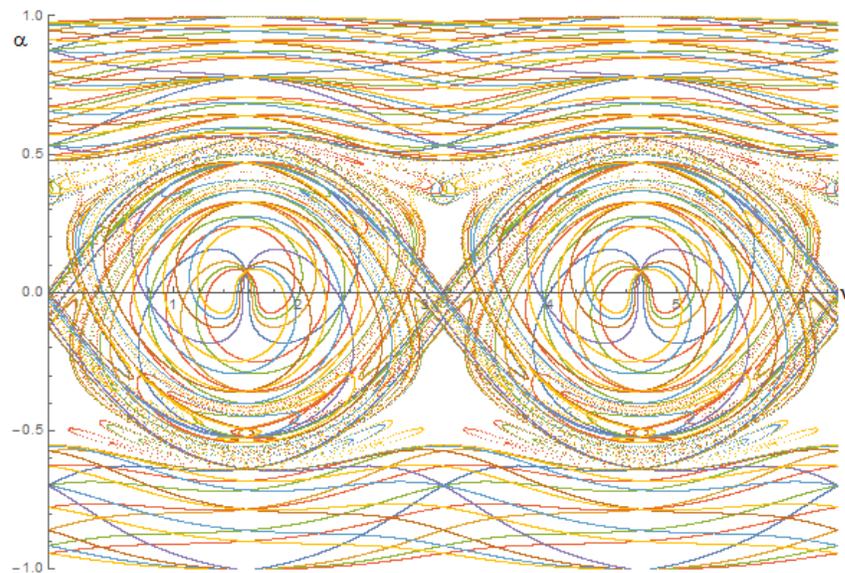


Figura 6.20: Líneas de Simetría. $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 10$.

α	Periodo
-0.90000572	8
-0.75601203	6
-0.7844677	4
-0.71468534	3
-0.68201094	8
-0.638091	2
-0.4932331	4
-0.414426802	-
0.07482845	1
0.2389863	8
0.27214527	6
0.326257681	4
0.36699321	3
0.39177178	-
0.46854693	-
0.55899644	-
0.57488809	2
0.5945049	3
0.6388420	4
0.6831034	6
0.70537706	8
0.7782425	1
0.754917571	8
0.756919453	6
0.9085954	4
0.9453888	3
0.9622002	8
0.9987847	2

Tabla 6.12: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable, $x = y = 0$ y $z = 10$.

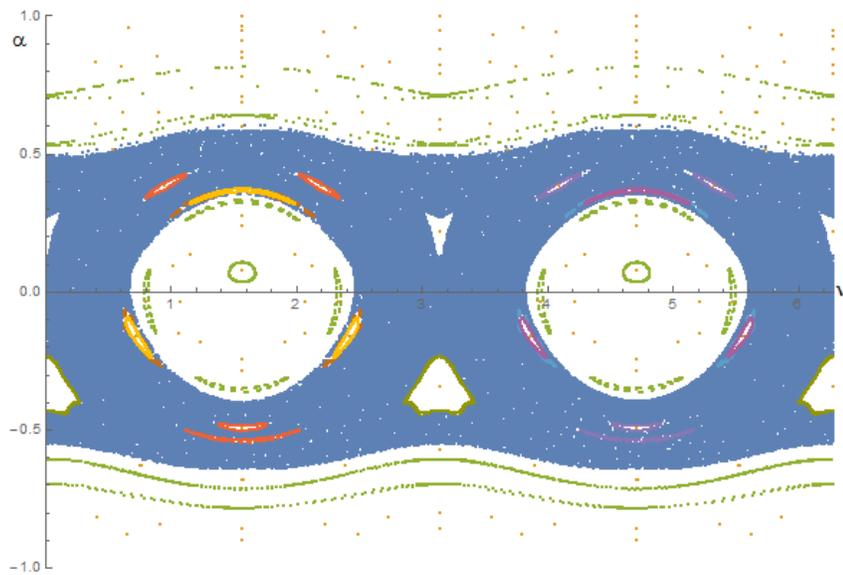


Figura 6.21: Iteración de las condiciones iniciales dadas en la tabla 6.11 y 6.12, algunas islas y la zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0$, $z = 10$.

Casos variando los parámetros x , z con $y=0$.

A continuación se exponen los resultados obtenidos concerniendo a los casos particulares $x = 1, 2$, y $z = y = 0$ y seguidamente de esto se expondrán los resultados para el caso $x = z = 1$ y $y = 0$ como mencionamos ninguno de estos casos particulares han sido estudiados hasta ahora, como se vio en el capítulo 4 se obtendrán las líneas de simetría para la involución \mathbf{p}_0^* que es la que se satisface para estos casos.

Casos $x=1, 2$ $z=y=0$.

Se obtuvieron las mismas líneas de simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ que para los casos anteriores. La figuras 6.22 y 6.24 muestran las líneas de simetría de ambos casos respectivamente, las tablas 6.13 y 6.14 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0^* y las figuras 6.23 y 6.25 muestra la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.13 y 6.14 respectivamente iluminadas en naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

Lo primero que destacar de las líneas de simetría es que el mapa tiene una simetría de espejo respecto de las líneas $\nu = \pi/2$ y $\nu = 3\pi/2$ esto debido a que el hamiltoniano en esta superficie de sección, con los parámetros aquí asignados, depende de la función $\sin \nu$.

Para el caso $x = 1$, podemos ver que como en los casos no integrables ($z = 1, 2$) prevalecen 6 puntos fijos sobre la línea de simetría γ_0^* , 4 de ellos estables y 2 inestables a diferencia de los casos primeramente vistos donde todos los puntos fijos sobre esta línea eran estables. También se observan 4 ciclos de periodo 2, 6 ciclos de periodo 3, 6 ciclos de periodo 4, 6 ciclos de periodo 6 y 9 de periodo 8.

Dentro de la zona caótica podemos alcanzar a observar 4 ciclos elípticos de periodo 3, las islas que los rodean fueron iluminadas de rojo, azul claro, morado y café, podemos notar que el ciclo iluminado de café aparece exclusivamente en la primera mitad del mapa de 0 a π y el ciclo iluminado de morado aparece exclusivamente en la segunda mitad del mapa π a 2π , para el ciclo iluminado de azul claro podemos ver que aparece distribuido en toda la zona caótica pero del lado positivo del momento, lo mismo ocurre con el ciclo iluminado de rojo pero en la parte negativa del momento. En los centros de una isla de cada uno de los ciclos se cruzan la líneas de simetría

γ_0^* , γ_6^* y γ_{-6}^* ; y por los centros de las dos islas restantes de cada ciclo podemos ver que se cruzan las líneas γ_8^* , γ_{-4}^* , γ_{-8}^* y γ_4^* .

Para el caso $x = 2$, prevalecen como en el caso anterior los 6 puntos fijos sobre la línea de simetría γ_0^* , 4 de ellos estables y 2 inestables. También se tienen 6 ciclos de periodo 3, 6 ciclos de periodo 4, 6 ciclos de periodo 6 y 10 de periodo 8.

Podemos notar que la zona caótica en comparación del caso anterior crece o abarca más área del mapa; esto debido al aumento en la perturbación y desaparecen los puntos elípticos que existían anteriormente.

Dentro de la zona caótica se alcanzan a observar cuatro ciclos elípticos de periodo 7 iluminados de rojo, azul claro, morado y café, de nuevo podemos notar que el ciclo iluminado de rojo aparece exclusivamente en la primera mitad del mapa de 0 a π y el ciclo iluminado de azul claro aparece exclusivamente en la segunda mitad del mapa π a 2π , para el ciclo iluminado de morado podemos ver que aparece distribuido en toda la zona caótica pero del lado positivo del momento, lo mismo ocurre con el ciclo iluminado de café pero en la parte negativa del momento. Se puede ver que las líneas de simetría γ_8^* , γ_{-6}^* , γ_{-8}^* y γ_6^* se cruzan en los centros de las islas que forman este periodo. También podemos notar que por los centros de dos islas pertenecientes a los ciclos de periodo 7 pasa la línea γ_0^* , pero debido a la periodicidad impar de estos, no hay otra línea de simetría que se cruce con γ_0^* , del conjunto de líneas que obtuvimos, por lo que no se pudieron calcular los centros de dichas islas.

Algo muy importante que mencionar es que el ordenamiento de la aparición de los ciclos encontrados sobre la línea γ_0 sigue teniendo la forma de la secuencia de Farey a partir de los puntos fijos.

También, como anteriormente vimos en los casos ($z = 1, 2, 3, 5, 10$), cuando la perturbación se incrementa, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = -1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = 1$. Este efecto solo es para la mitad del mapa ($\pi, 2\pi$) y para la otra mitad del mapa ($0, \pi$) ocurre el efecto contrario, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = 1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = -1$.

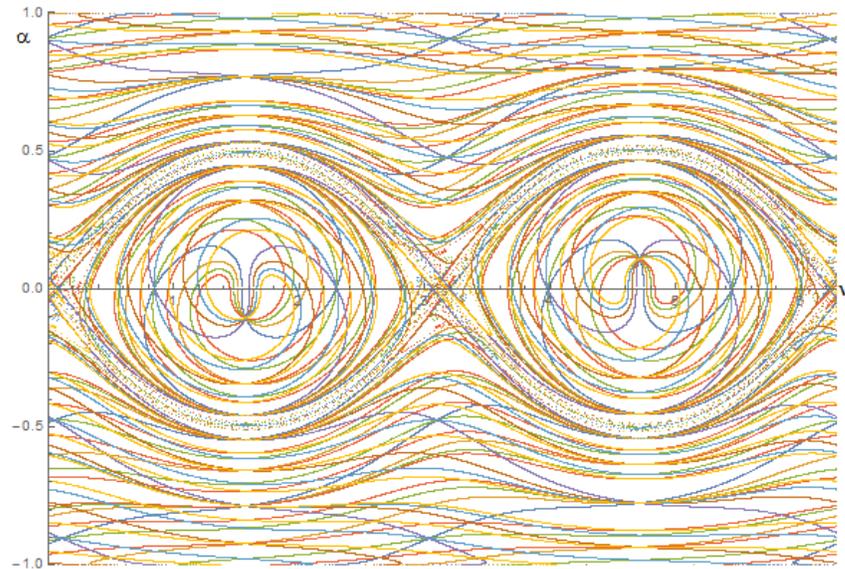


Figura 6.22: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ en el caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 1$.

α	Periodo
-0.977726915	3
-0.922588305	4
-0.7566727013	6
-0.75377805	8
-0.786522055	1
-0.732630133	8
-0.705594193	6
-0.657419403	4
-0.614830476	3
-0.595424927	8
-0.54567053	2
-0.458425749	2
-0.41071080	8
-0.390801654	3
-0.344785583	4
-0.289511720	6
-0.25766765	8
-0.105670158	1
0.209596479	8
0.251344	6
0.3169098459	4
0.368660059	3
0.444592298	2
0.531984107	2
0.575425213	8
0.592316675	3
0.628328743	4
0.664782061	6
0.6810907521	8
0.768107307	1
0.75682267276	8
0.7586723459	6
0.930968705	4
0.979618764	3

Tabla 6.13: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 1$.

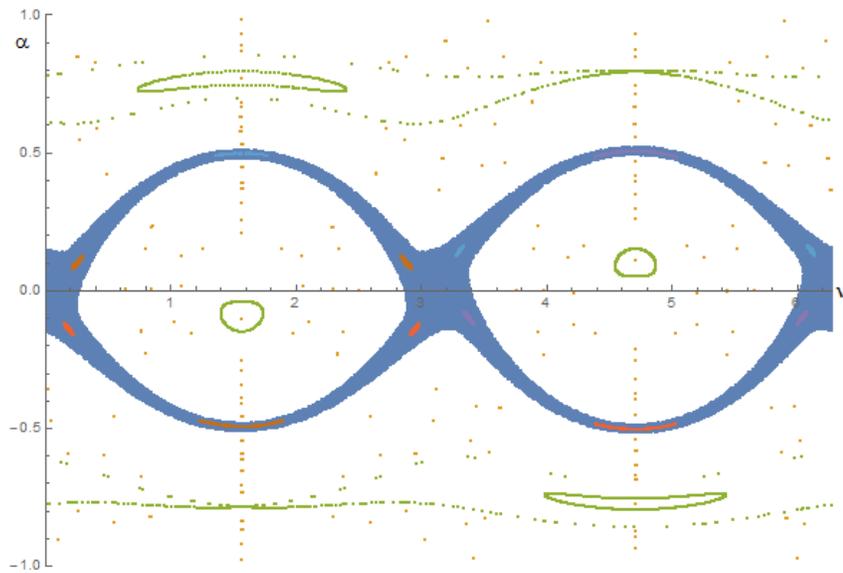


Figura 6.23: iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 1$.

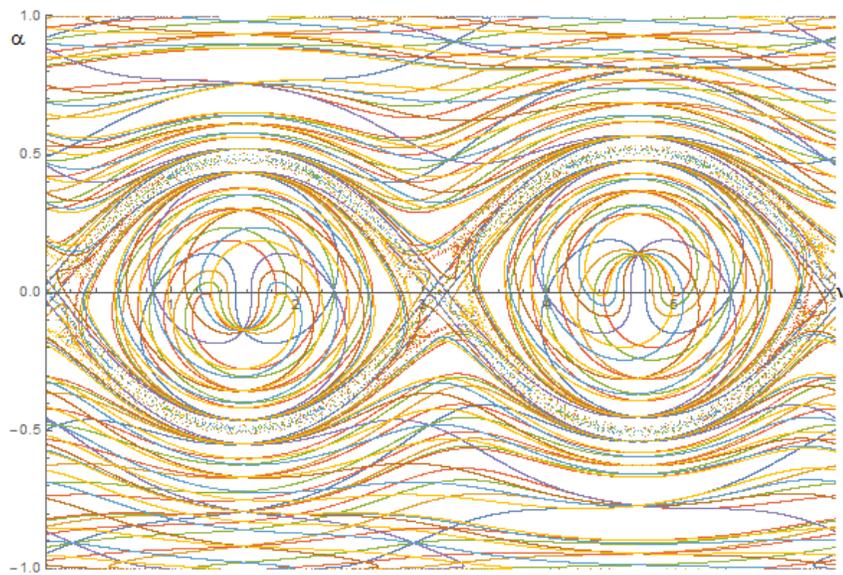


Figura 6.24: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ en el caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 2$.

α	Periodo
-0.976391036	3
-0.91763385	4
-0.755828512	6
-0.7528748483	8
-0.79216695	1
-0.75044115	8
-0.72084137	6
-0.66785895	4
-0.622044	3
-0.60123836	8
-0.54813999	2
-0.461589765	2
-0.41706111	8
-0.39859748	3
-0.355828574	4
-0.305496635	6
-0.277535345	8
-0.13636866	1
0.180480994	8
0.228535309	6
0.299612377	4
0.354045812	3
0.377137	8
0.43369026	2
0.52069495	2
0.56162878	8
0.5771544	3
0.60982377	4
0.640317364	6
0.651452618	8
0.755134032	1
0.7583739387	8
0.75963518834	6
0.934072015	4
0.980058454	3

Tabla 6.14: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 2$.

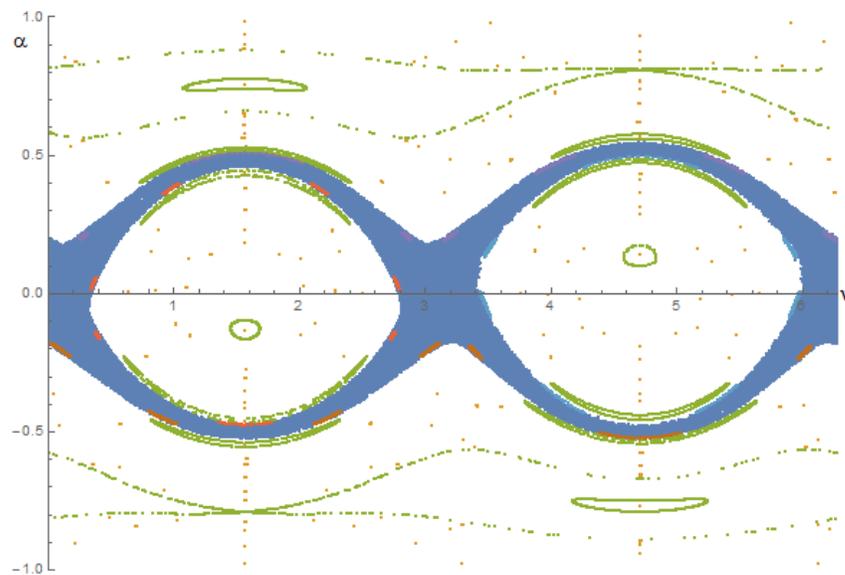


Figura 6.25: Iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 2$.

Casos $x=z=1$ con $y=0$

Se obtuvieron las mismas líneas de simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$ que para los casos previamente vistos. La figura 6.26 muestra las líneas de simetría. La tabla 6.15 da las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0^* y la figura 6.27 muestra la iteración de las condiciones iniciales de la tabla 6.15 iluminadas en naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

Claramente éste es un caso más general que los que se venían tratando ya que se involucran dos parámetros del potencial relacionados con el centro de masa del cuerpo rígido. En este caso el vector centro de masa queda en el plano xy del sistema de referencia anclado al cuerpo.

Se observa de las líneas de simetría que el mapa tiene el mismo tipo de simetría como en los dos últimos casos. Esto a pesar de la introducción del término perturbativo relacionado al parámetro z .

En lo que respecta a los puntos periódicos podemos observar que hay 6 puntos fijos 4 estables y 2 inestables sobre la línea de simetría γ_0^* como en los casos anteriores. Existen 2 ciclos de periodo 2, 5 ciclos de periodo 3, uno de ellos inestable los tres puntos periódicos de este ciclo son hiperbólicos inestables como consecuencia existe asociado un ciclo de periodo 3 con sus puntos periódicos elípticos estables (teorema de Poincaré-Birkhoff), las líneas de simetría $\gamma_8^*, \gamma_{-4}^*, \gamma_{-8}^*, \gamma_4^*$ cruzan los centros de las islas asociados a estos puntos elípticos. También hay 6 ciclos de periodo 4, 6 ciclos de periodo 6 y 11 ciclos de periodo 8.

Dentro de la zona caótica podemos ver que existen 2 ciclos de periodo 2 alrededor de uno de estos ciclos se puede apreciar la aparición de un conjunto de islas que pertenecen a un ciclo elíptico de periodo 18 iluminado de amarillo. Estos dos ciclos de periodo 2 no son alcanzados por las líneas de simetría y se repite un fenómeno parecido al del caso ($z = 3$), donde posiblemente cambiando de superficie se puedan hallar dichos centros.

También hay dos ciclos de periodo dos inmersos en la zona caótica, pero a diferencia de los anteriores, éstos sí son alcanzados por las líneas de simetría y los centros están reportados en las tablas, y existen alrededor de cada uno de estos ciclos una cadena de islas de un periodo alto iluminados de azul claro y color café

respectivamente.

En comparación de los casos ($x = 1, 2$) la zona caótica es de mayor tamaño, esto es debido a la consideración de los dos parámetros x y z que hace que el término perturbativo en el hamiltoniano sea mayor.

También como anteriormente vimos cuando la perturbación se incrementa, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = -1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = 1$. Este efecto solo es para la mitad del mapa $(0, \pi)$ y para la otra mitad del mapa $(\pi, 2\pi)$ ocurre el efecto contrario, las líneas de simetría se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = 1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = -1$

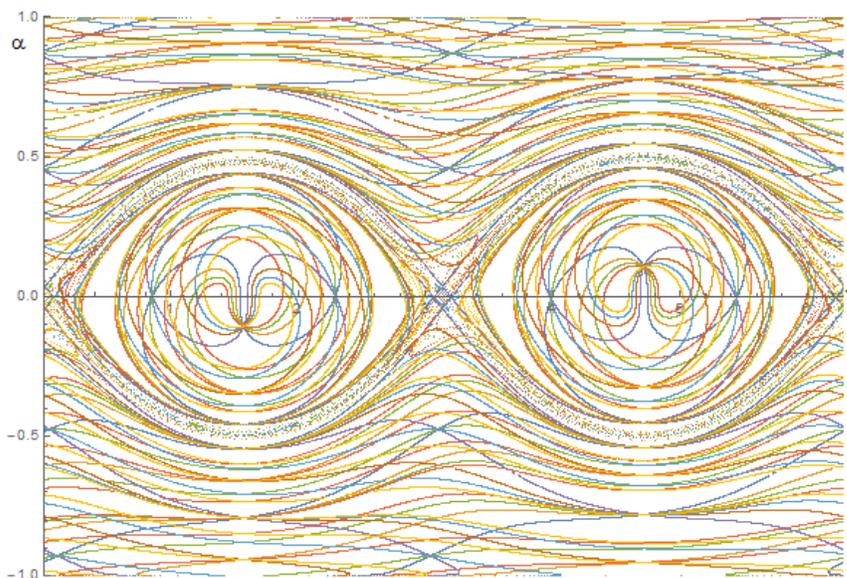


Figura 6.26: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 0$, $x = z = 1$.

α	Periodo
-0.941453304	4
-0.7579926521	6
-0.7548931775	8
-0.79210176	1
-0.73447399	8
-0.707186674	6
-0.658774303	4
-0.617078969	3
-0.5990002531	8
-0.544654528	2
-0.412476614	8
-0.392287442	3
-0.34583911	4
-0.290237393	6
-0.25835956	8
-0.1066853884	1
0.206952937	8
0.248551966	6
0.31393239	4
0.366437711	3
0.3897565539	8
0.524478504	2
0.56948945	8
0.58525303	3
0.619037529	4
0.652839035	6
0.6676826889	8
0.751585692	1
0.7548889408	8
0.75655321912	6
0.9062693515	4
0.95161185114	3
0.9757961953	8

Tabla 6.15: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = \pi/2$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 0$, $x = z = 1$.

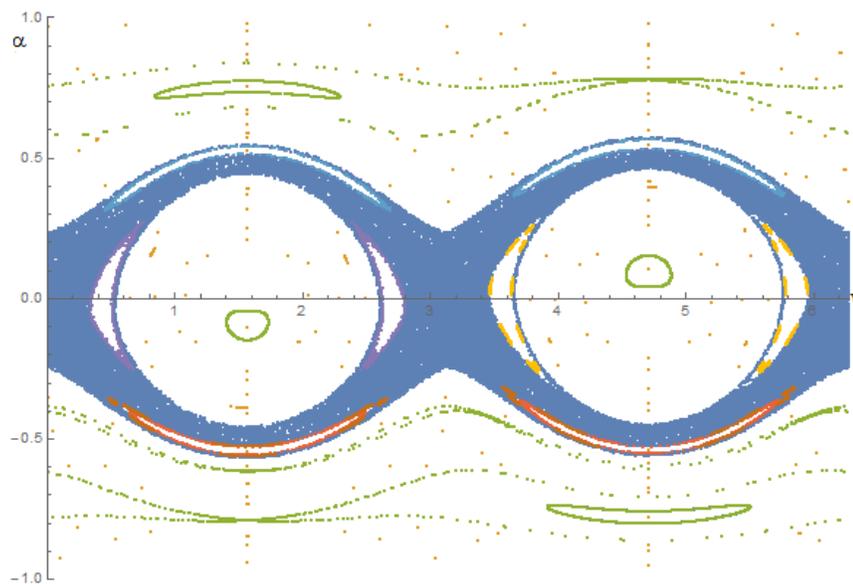


Figura 6.27: Iteraciones de algunos puntos periódicos y algunas islas. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 0$, $x = z = 1$.

Casos variando y , z y $x=0$

Ahora se exponen los resultados obtenidos concerniendo a los casos particulares $y = 1, 2$, y $z = x = 0$ y seguidamente de esto se expondrán los resultado para el caso $y = z = 1$ y $x = 0$ como mencionamos ninguno de estos casos particulares han sido estudiados hasta ahora, como se vio en el capítulo 4 se obtendrán las líneas de simetría para la involución \mathbf{p}_0 que es la que se satisface para estos casos. Algo importante que destacar de estos casos es que con la involución que aquí se utiliza las líneas de simetría correspondientes no pasan por la parte central del mapa, como se venía observando en los casos primeramente tratados, es debido a lo que vimos en el capítulo 4, ya que no es posible hallar una invariancia, y por lo tanto construir una involución como los casos anteriores, sin embargo, con los líneas de simetría que aquí si obtienen es posible obtener información considerable. Sin embargo más adelante si podremos hallar órbitas periódicas con la involución \mathbf{g}_0 pero en otra superficie de sección y fácilmente podemos trasladar las coordenadas de esas órbitas periódicas a la superficie que estamos usando en esta sección y visualizar dichas órbitas en los mapas de esta superficie esto se llevara a cabo solo para caso $x = 1$.

Casos $y=1, 2$ $x=z=0$

Se obtuvieron las mismas líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$ que para los casos anteriores. Las figura 6.28 y 6.30 muestras las líneas de simetría para cada uno de los casos. Las tablas 6.16 y 6.17 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0^* . Las figura 6.29 y 6.31 muestran la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.16 y 6.17 respectivamente iluminadas en naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

Lo primero que podemos notar de las líneas de simetría es que el mapa posee una simetría especial debido a que el término perturbativo para este caso está en función de $\cos \nu$, por lo que el mapa tiene una simetría de espejo en la variable angular ν respecto de la línea $\nu = 0$. Y es asimétrico en la variable de momento α , como en

todos los casos antes vistos.

Para $y = 1$ se hallaron 4 puntos fijos sobre la línea de simetría γ_0 uno estable y otro inestable en $\nu = 0$, los otros dos en $\nu = \pi$ también uno estable y otro inestable. Respecto de los puntos periódicos, tenemos 2 ciclos de periodo dos los cuales son inestables dando lugar a la formación de 4 islas de periodo 2 y claramente con las líneas de simetría que obtuvimos aquí no se tiene acceso a conocer el centro de dichas islas. También existen 4 ciclos de periodo 3, 4 ciclos de periodo 4, 4 ciclos de periodo 6 y 12 de periodo 8; todos estos aparentemente estables; y el ordenamiento de la aparición de los ciclos de los puntos periódicos sobre γ_0 sigue teniendo la forma de la secuencia de Farey a partir de los puntos fijos.

Aledaño a la zona caótica del lado negativo del momento aparecen 5 islas que pertenecen a un ciclo de periodo 5 iluminado de color amarillo, por el centro de una de estas islas cruza la línea γ_0 , pero hacen falta líneas de simetría de índice impar para fijar su centro. Dentro de la zona caótica podemos encontrar 4 grandes islas de periodo 2 donde de nuevo nuestras líneas de simetría no alcanzan sus centros, rodeando a estas islas existen otras islas que pertenecen a un ciclo elíptico de periodo 12 iluminado de color rojo. También hay 6 islas de un ciclo de periodo 3 elíptico uno de los ciclos está iluminado de color café, un ciclo de periodo 17 iluminado de morado repartido por toda la zona caótica y otro ciclo de periodo 5 aledaño a la zona caótica del lado negativo del momento iluminado de color azul claro, por el centro de una de sus islas cruza la línea γ_0 , pero hacen falta líneas de simetría de índice impar para fijar su centro.

Para $y = 2$ prevalecen los 4 puntos fijos del caso anterior sobre la línea de simetría γ_0 , uno estable y otro inestable en $\nu = 0$; los otros dos en ν también son uno estable y otro inestable. Podemos ver en este caso que los periodos dos inestables antes reportados están rodeados por la zona caótica. También existen 4 ciclos de periodo 3, dos de estos ciclos se vuelven inestables los que tienen uno de sus puntos en $\alpha = -0,4142425$ y $\alpha = 0,36316242$, iterando suficientes veces éstas coordenadas podemos ver que se forman dos conjuntos de islas de periodo 3 lo que da lugar al

nacimiento de dos ciclos elípticos de periodo 3, por el centro de una isla de los dos ciclos se cruzan las líneas de simetría γ_0 en $\nu = \pi$, γ_{-6} y γ_6 por lo que fue fácil calcular dichos centros y por iteración de éstos se conocen los centros restantes de los ciclos.

Existen 4 ciclos de periodo 4 uno de ellos inestable, el que tiene uno de sus puntos en $\alpha = -0,5145050$, donde si iteramos suficientes veces este punto podremos ver cómo se empiezan a visualizar tenuemente las islas asociadas a este ciclo inestable. También existen 4 ciclos de periodo 6 y 6 de periodo 8.

Dentro de la zona caótica existen 4 islas de periodo dos, dos de los cuales mencionamos anteriormente. Uno de estos ciclos cambia su carácter de inestable a caótico debido al incremento en la perturbación y sobrevive solo el periodo dos elíptico asociado a este inestable y es el que está ubicado en la parte positiva del momento iluminado de amarillo. El ciclo dos inestable de la parte negativa del momento aparece rodeado por un conjunto de islas de un ciclo elíptico de periodo 22 iluminado de color rojo. Las islas asociadas a los otros 2 ciclos de periodo 2 iluminados de azul claro y café reducen su tamaño en comparación del caso $y = 1$ y como antes las líneas de simetría no alcanzan a cruzar los centros de las islas de éstos ciclos.

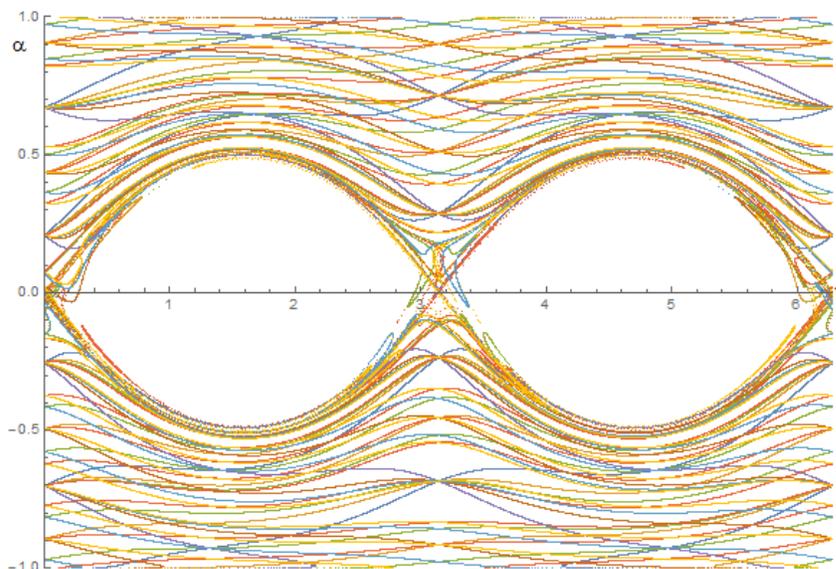


Figura 6.28: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 1$.

α	Periodo
-0.9697757	3
-0.759391792	4
-0.75149547	6
-0.7731127	8
-0.70159373	1
-0.62196302	8
-0.5776831	6
-0.494414	4
-0.4142425	3
-0.25489618	8
-0.14842154	2
0.207554214	2
0.32508011	8
0.36316242	3
0.4355186	4
0.50071150	6
0.5275213	8
0.67115443	1
0.752331654	8
0.754786265	6
0.90754012	4
0.97280759	3

Tabla 6.16: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 1$.

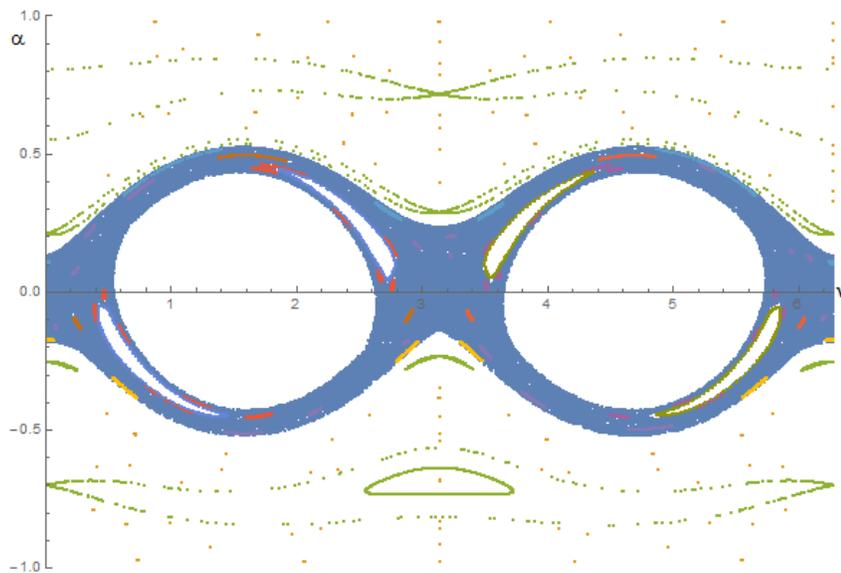


Figura 6.29: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}^*, \dots, \gamma_8^*$, con iteraciones de algunos puntos periódicos, algunas islas y la zona caótica. En el caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = z = 0$, $y = 1$.

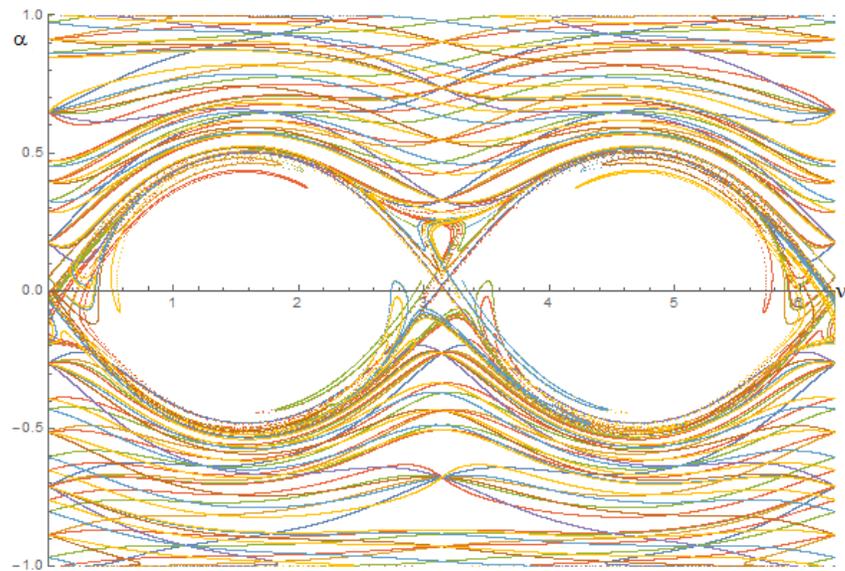


Figura 6.30: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 2$.

α	Periodo
-0.96793107	3
-0.7586335440	4
-0.7502052375	6
-0.75990608	8
-0.71080089	1
-0.65188723	8
-0.60477271	6
-0.5145050	4
-0.4307566	3
-0.391768465	8
-0.264647543	2
0.287546035	8
0.3256735	3
0.39504649	4
0.451425724	6
0.46969707	8
0.649273949	1
0.7548265525	8
0.7563764008	6
0.912857804	4
0.973720808	3

Tabla 6.17: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 2$.

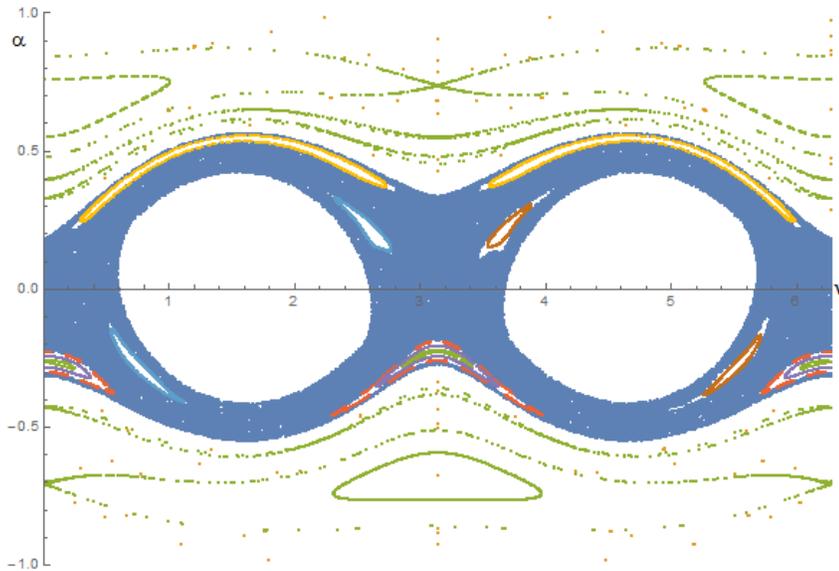


Figura 6.31: iteración de algunos puntos periódicos algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 2$.

Casos $z=y=1$ con $x=0$

Para este caso se obtuvieron las líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Claramente este es un caso más general que los que se venían tratando a excepción del caso $z = x = 1$, $y = 0$. La diferencia entre este último caso fue el tipo de líneas de simetría que se obtuvieron, debido al tipo de involuciones que son válidas en cada caso, como se vio en el capítulo 4.

Su puede ver que éste mapa posee una simetría especial, debido a que el termino perturbativo para este caso está en función del $\cos \nu$, por lo que el mapa tiene una simetría de espejo en la variable angular ν respecto de la línea $\nu = \pi$. Y es asimétrico en la variable de momento α como en todos los casos antes vistos.

Podemos ver que sobre las líneas de simetría ocurre el mismo efecto que vimos en los primeros casos no integrables. Cuando la perturbación se incrementa éstas se mueven de tal forma que puntos periódicos gradualmente desaparecen de la línea $\alpha = -1$ y nuevos puntos surgen en la línea $\alpha = 1$.

Para este caso hallamos 4 puntos fijos, uno inestable sobre $\nu = 0$ y su asociado estable sobre $\nu = \pi$, otro estable sobre $\nu = 0$ y su asociado inestable sobre $\nu = \pi$. También existe 3 ciclos de periodo 3 uno de ellos es inestable, él que se ubica en

$\alpha = 0,344909440$. Iterando suficientes veces este punto se forma un conjunto de islas de periodo 3 elíptico donde uno de los centros de estas islas esta sobre γ_0 en $\nu = \pi$, por lo que fue fácil hacer su cálculo. También hay 4 ciclos de periodo 4, 4 de periodo 6 y 7 de periodo 8.

La zona caótica crece en comparación de los dos últimos casos de esta sección, esto debido a la introducción del termino perturbativo relacionado con el parámetro z . Dentro de esta zona podemos hallar 4 islas de periodo 2 iluminados de amarillo y morado respectivamente, y también mas internamente existen 4 islas de periodo 2 iluminadas de color azul claro y café respectivamente. Alrededor del periodo dos que está del lado positivo del momento en el borde de la zona caótica, aparece una cadena de islas de un periodo elíptico a diferencia del que está ubicado del lado negativo del momento donde podemos ver que aparece rodeado de un conjunto de islas de un periodo elíptico 20 iluminado de color rojo.

Como mencionamos, al principio de esta sección no se encontraron órbitas periódicas en la parte central del mapa debido al tipo de involución que se satisface para estos casos. La figura 6.32 muestra las líneas de simetría. La tabla 6.18 da las coordenadas de los puntos periódicos sobre γ_0 . La figura 6.33 muestra la iteración de las condiciones iniciales de la tabla 6.32 iluminadas de color naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

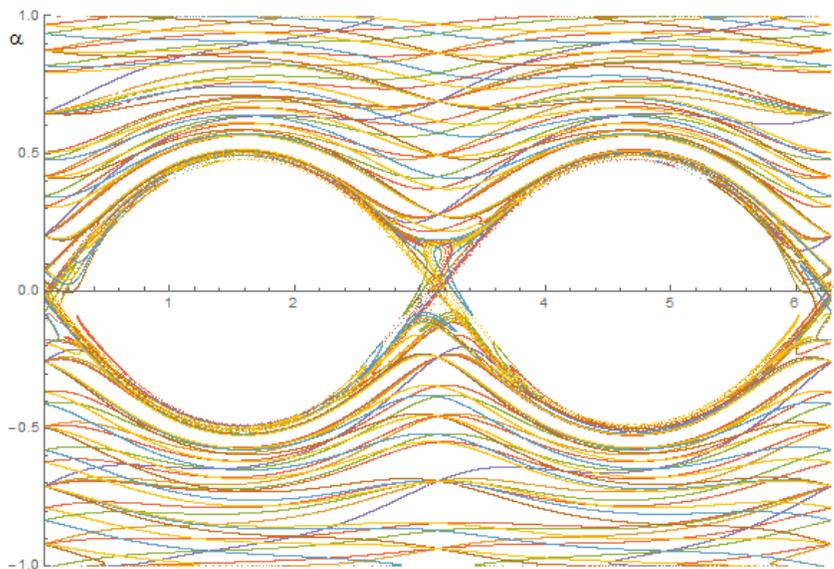


Figura 6.32: Líneas de Simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 0$, $x = z = 1$.

α	Periodo
-0.920175329	4
-0.7533722234	6
-0.789039025	8
-0.709456638	1
-0.623628469	8
-0.578506561	6
-0.493902184	4
-0.410438676	3
-0.367038991	8
0.307602236	8
0.344909440	3
0.416046799	4
0.479407679	6
0.504675159	8
0.64692886	1
0.797056406	8
0.7519202009	6
0.7574478698	4
0.935636796	3
0.967942212	8

Tabla 6.18: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 0$, $x = z = 1$

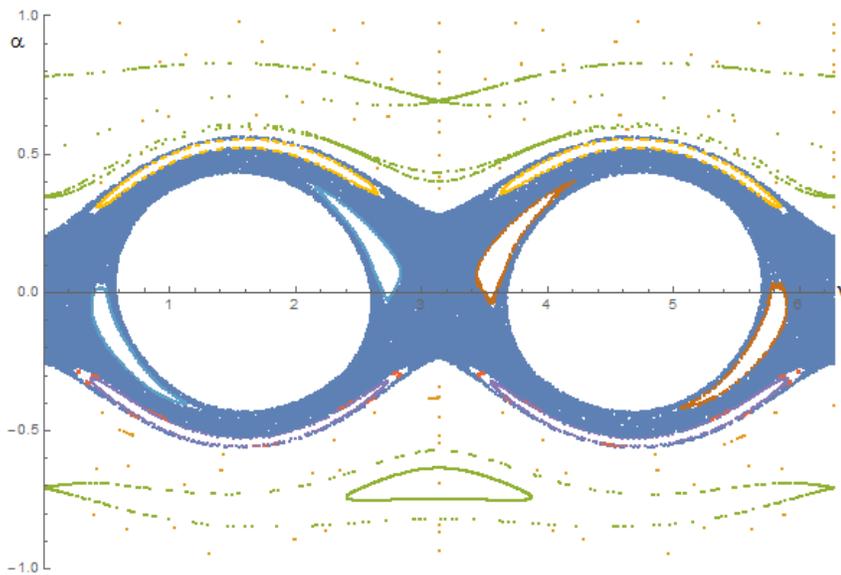


Figura 6.33: iteración de algunos puntos periódicos algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 0$, $z = y = 1$.

Casos variando x , y con $z=0$

Para los casos que a continuación se estudian se obtendrán las líneas de simetría correspondientes a la involución \mathbf{g}_0 que es la que involucra el cambio de signo en el momento canónico conjugado N . Como se podrá notar de inmediato estas líneas de simetría solo abarcan la región central del mapa y para algunos casos tratados anteriormente, donde no se conseguía obtener órbitas periódicas con estas nuevas líneas se logra. Además que para otros casos se consigue hallar otras nuevas órbitas en dicha región central del mapa. Además se consigue atacar nuevos casos hasta ahora no tratados, considerando los parámetros x , y , es decir ahora el vector centro de masa se encuentra en el plano xy del sistema anclado al cuerpo rígido. Estas líneas de simetría no abarcan las regiones externas a la región central del mapa, así que con éstas no se podrán hallar órbitas periódicas en dicha región. Pero para los casos $x = 1$ y $x = -1$ que revisaremos a continuación, se podrán trasladar las condiciones iniciales de las órbitas periódicas de los mismos casos estudiados a las variables (α, ν) y viceversa, es decir que los puntos periódicos que encontramos en las variables (α, ν) los podremos trasladar a las variables (N, ν) en la superficie ($\mu_{mod2\pi} = \pi/2$), esto se mencionara a detalle más adelante.

Antes de exponer los casos no integrables, revisaremos el caso integrable y obtendremos las líneas de simetría para la involución \mathbf{g}_0 , ya que está también es válida para el caso integrable de Euler-Poinsot. Esto para realizar efectos de comparación; por ejemplo para ver cómo se curvan las nuevas líneas de simetría introduciendo la perturbación.

Caso Integrable (nuevas líneas de simetría)

Se obtuvieron el conjunto de líneas de simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$ sobre la superficie definida por la relación $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$, en la figura 6.34 se muestran dichas líneas.

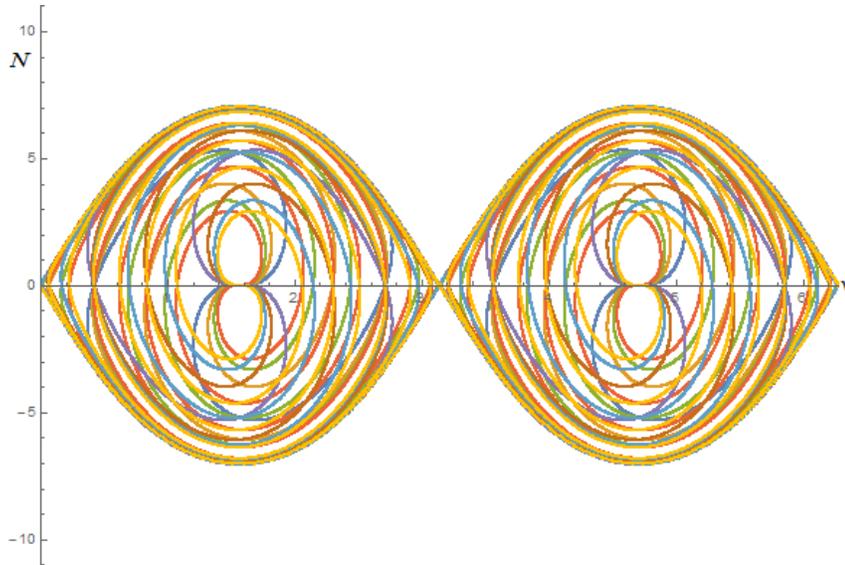


Figura 6.34: Líneas de Simetría. $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$ en el caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Como podemos ver la línea de simetría Γ_0 para este caso es la línea ν a diferencia de lo que teníamos anteriormente, entonces ahora se reportan las intersecciones sobre Γ_0 en la tabla 6.19 que son las coordenadas de los puntos periódicos

α	Periodo
0	1
0.068094553	4
0.168979558	3
0.229159913	8
0.425550926	2
0.629402854	8
0.6984118084	3
0.75402457238	4
0.993142676	6
1.078203649	8
$\pi/2$	1
2.0633893196	8
2.148450153	6
2.3013471748	4
2.443180852	3
2.716041848	2
2.912432928	8
2.97261397	3
3.073498142	4
π	1

Tabla 6.19: Coordenadas α y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $\nu = 0$. Caso integrable.

En la figura 6.35 se presentan la iteración de las coordenadas de los puntos periódicos reportados en la tabla 6.19 iluminados de azul.

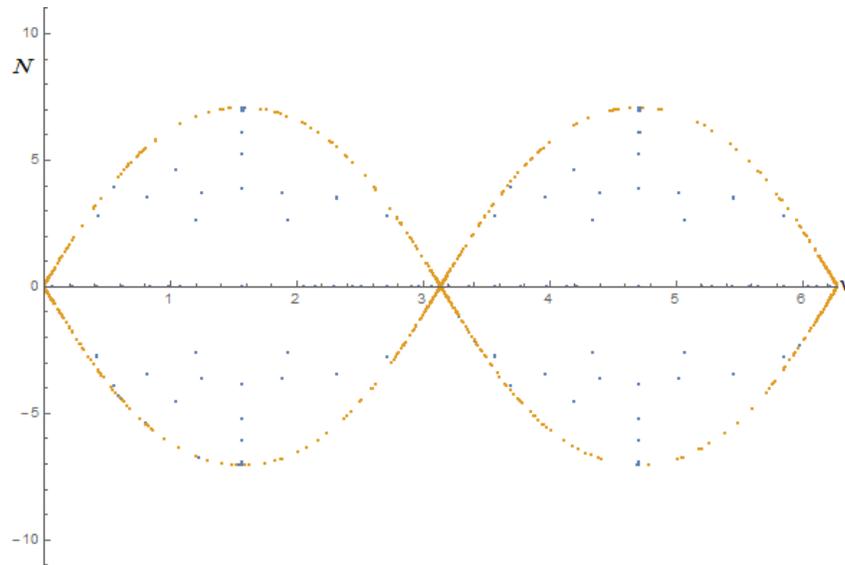


Figura 6.35: Iteración del mapa con las condiciones iniciales dadas en la tabla 6.19.

Caso $x=1$ y $z=y=0$

Para este caso se obtuvieron el conjunto de líneas de simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$, de la involución \mathbf{g}_0 . La figura 6.36 muestra las líneas de simetría. La tabla 6.20 da las coordenadas de los puntos periódicos sobre Γ_0 . La figura 6.37 muestra la iteraciones de las condiciones iniciales de la tabla 6.20 iluminadas de color naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada de color azul.

Lo primero que podemos notar de las líneas de simetría es que el mapa de Poincaré tiene simetría de espejo respecto de la línea $N = 0$, esto debido a que el hamiltoniano y por consiguiente la ecuaciones de movimiento con estos parámetros y en esta superficie son invariantes ante el cambio de signo en el momento N . Pero también podemos notar que existe asimetría en la variable angular ya que el hamiltoniano en esta superficie depende de la función $\sin \nu$.

Podemos ver que en la vecindad del punto fijo inestable del caso integrable, al introducir la perturbación las líneas de simetría se curvan en gran medida lo que da lugar a un comportamiento caótico en la vecindad de este punto.

Para este caso pudimos hallar 2 puntos fijos estables sobre γ_0 , 4 ciclos de periodo 2, 5 ciclos de periodo 3, 4 de periodo 4, 6 de periodo 6 y 8 de periodo 8.

Dentro de la zona caótica podemos encontrar 4 ciclos elípticos de periodo 3 ilu-

minados de rojo, café morado y naranja, que son los mismos que encontramos en el plano (α, ν) en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$, cómo vimos anteriormente, sólo que en esta superficie por su puesto las islas cambian su ubicación en el plano (N, ν) . En los centros de una isla perteneciente a dos de estos ciclos de periodo 3 el iluminado de naranja, se cruzan las líneas de simetría Γ_0, Γ_{-6} y Γ_6 , por lo que fue fácil calcular dichos centros y por iteración de éstos conocer los demás puntos del ciclo, esto aparece reportado en la tabla 6.20.

En los otros dos ciclos no pasan las líneas de simetría por los centros de sus islas.

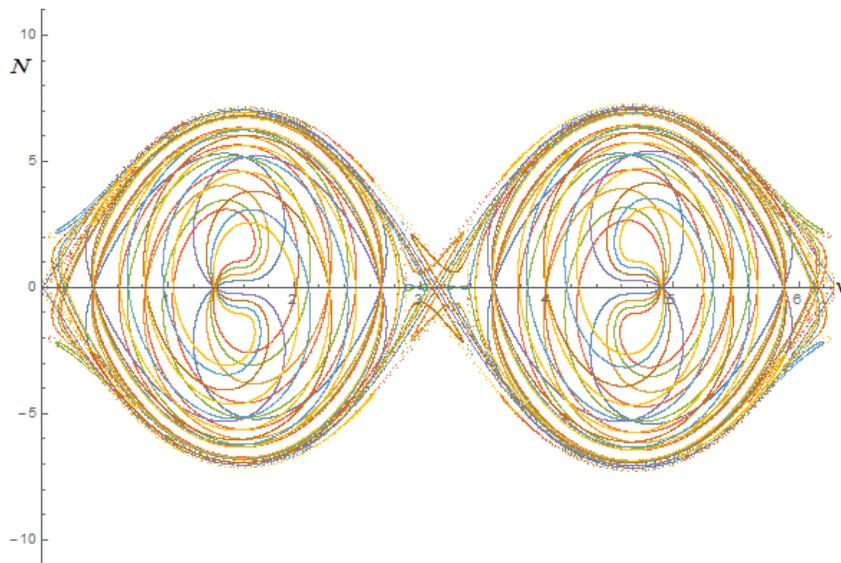


Figura 6.36: Líneas de Simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$ en el caso no integrable: $E = 50, \Lambda = 5$ y $z = x = 0, y = 1$.

ν	Periodo
0.4130829508	2
0.6179272739	8
0.686050384	3
0.7523781801	4
0.967611479	6
1.043805819	8
1.3723306105	1
2.02009477	8
2.11513218	6
2.276787671	4
2.421551429	3
2.490788244	8
2.688902046	2
2.964433221	3
3.300913386	3
3.58026548	2
3.781539191	8
3.851643584	3
3.997867208	4
4.160525572	6
4.255728904	8
4.914287039	1
5.244904796	8
5.321707735	6
5.46695974	4
5.60631769	3
5.67532564	8
5.88315581	2

Tabla 6.20: Coordenadas ν y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $N = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = y = 0$, $x = 1$

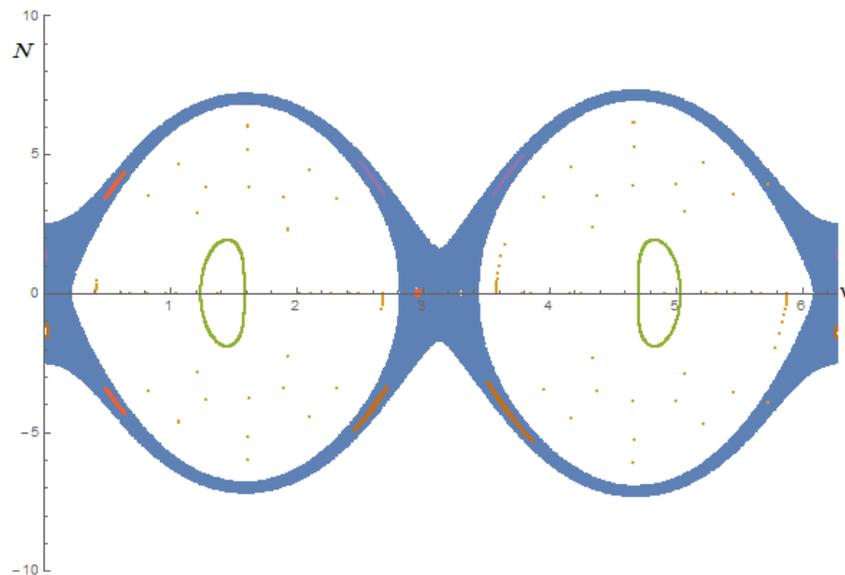


Figura 6.37: iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 1$, $z = y = 0$.

Caso $y=1$ y $z=x=0$

Para este caso se obtuvieron el conjunto de líneas de simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$, de la involución \mathbf{g}_0 . La figura 6.38 muestra las líneas de simetría. La tabla 6.21 da las coordenadas de los puntos periódicos sobre Γ_0 . La figura 6.39 muestra la iteración de las condiciones iniciales de la tabla 6.21 iluminadas en color naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada de color azul.

De nuevo, cómo en el caso anterior podemos notar de las líneas de simetría que el mapa de Poincaré tiene simetría de espejo respecto de la línea $N = 0$, en la variable de momento y es asimétrico en la variable angular, esto debido a que el hamiltoniano en esta superficie y con estos parámetros está en términos de la combinación del $\sin \nu$ y $\cos \nu$, lo que provoca la asimetría del mapa. Este caso ya fue tratado anteriormente en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$ y en las variables α y ν , obteniéndose las líneas de simetría de la involución \mathbf{p}_0 , lo que nos llevó a poder obtener puntos periódicos únicamente fuera de la zona central del mapa, ahora veremos que en la región central podremos encontrar puntos periódicos con la involución \mathbf{g}_0 .

De nuevo, como antes podemos ver que en la vecindad del punto fijo inestable del caso integrable, al introducir la perturbación las líneas de simetría se curvan en gran medida lo que da lugar a un comportamiento caótico en la vecindad de este punto.

Para este caso pudimos hallar dos puntos fijos sobre Γ_0 , 2 ciclos de periodo 2, 5 de periodo 3, 4 ciclos de periodo 4, 4 ciclos de periodo 6 y 6 ciclos de periodo 8.

Dentro de la zona caótica podemos encontrar los mismos ciclos elípticos que se encontraron en este mismo caso pero en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$ y en las variables (α, ν) . Las islas y sus ciclos elípticos correspondientes, claramente deberán cambiar su localización en la superficie de sección que utilizamos aquí. Los periodos dos que están inmersos en esta zona aparecen rodeados cómo antes, por un conjunto de islas que pertenecen a un ciclo elíptico de periodo 12 iluminado de rojo, podemos ver que a diferencia de lo anterior, los centros de las islas asociadas a uno de estos ciclos de periodo 2, tienen sus centros sobre la línea Γ_0 ($N = 0$), así que el cálculo de dichos centros se realizó de manera sencilla y esta reportado en la tabla 6.21. Para las 6 islas de periodo elíptico 3 que encontramos antes ahora iluminados de café y rojo, podemos ver que en el centro de una de las islas de cada ciclo de periodo 3 ésta sobre

Γ_0 y las líneas Γ_6 y Γ_{-6} , por lo que su cálculo también resulto sencillo y se reportan ambos en la tabla 6.21. También podemos ver que ésta el ciclo elíptico de periodo 17 iluminado de morado, de nuevo distribuido por toda la zona caótica. Para los ciclos elípticos de periodo 5 iluminados de azul claro y amarillo, estas líneas de simetría no alcanzan a cruzar por ninguna de sus islas.

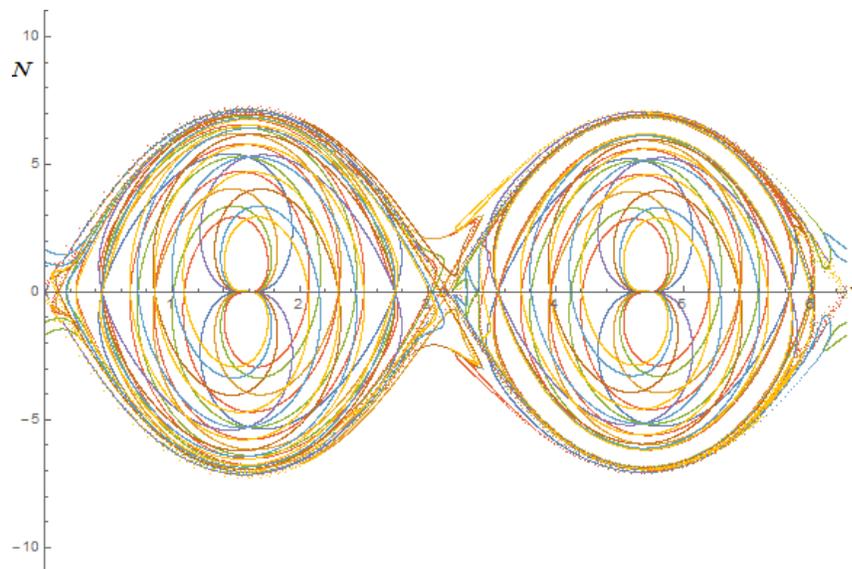


Figura 6.38: Líneas de Simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$ en el caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 1$.

ν	Periodo
0.171999457	3
0.451597360	2
0.671719726	8
0.731452859	3
0.863123687	4
1.01021512	6
1.09317454	8
1.63207804	1
2.06597315	8
2.150125225	6
2.300757924	4
2.43764640	3
2.50070521	8
2.743414745	2
3.732658430	8
3.810040452	3
3.96159860	4
4.120547207	6
4.208152732	8
4.763150320	1
5.203547356	8
5.28913031	6
5.4437579090	4
5.58956085	3
5.66296902	8

Tabla 6.21: Coordenadas ν y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $N = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = x = 0$, $y = 1$

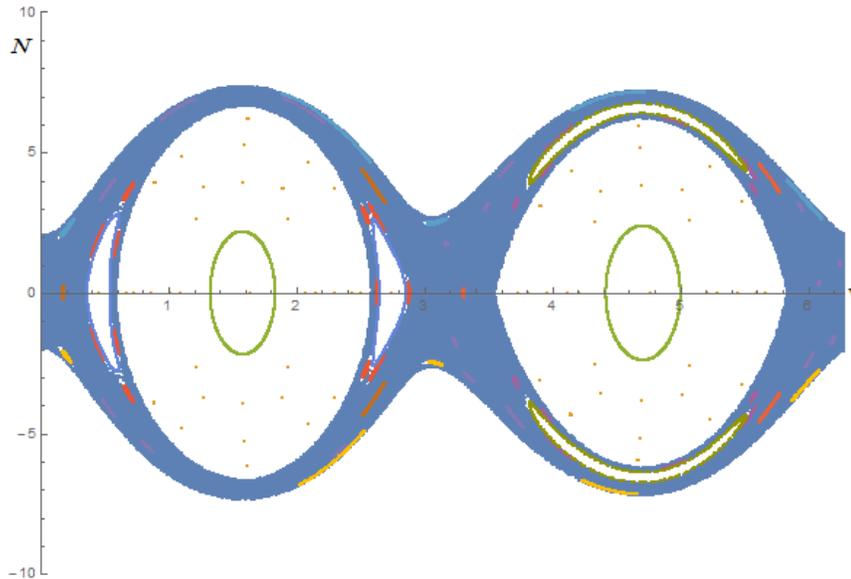


Figura 6.39: iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 1$, $x = z = 0$.

Antes de continuar el análisis de más casos, mencionaremos como obtener órbitas periódicas en los casos donde no se podía antes, por ejemplo ($y = 1$) y obtener nuevas órbitas por ejemplo para el caso ($x = 1$). Lo que se hizo para obtener estas órbitas fue simplemente integrar la condición inicial de la órbita periódica en la

superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$ hasta alcanzar la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$ y del hamiltoniano obtener a M , y a través de la relación $\alpha = M/N$ obtener la coordenada α y así se obtiene la condición inicial para una órbita periódica en las superficie de sección $\mu_{mod2\pi} = 0$ donde antes no se pudo obtener. La figura 6.40 muestra el resultado de este procedimiento, el cual se aplicó a varias de las órbitas periódicas reportadas en la tabla 6.21.

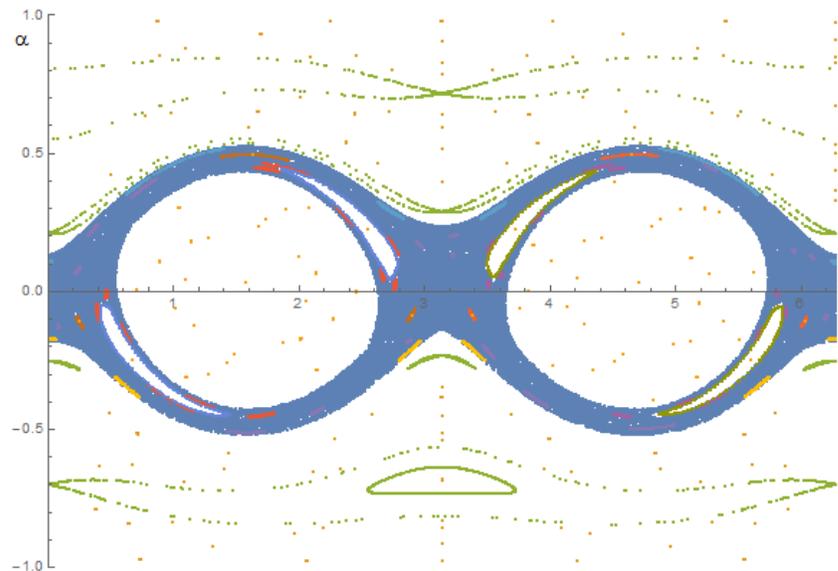


Figura 6.40: Antiguas y nuevas órbitas periódicas trasladadas desde la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 1$, $x = y = 0$.

Se puede ver en la figura 6.40 las órbitas periódicas encontradas antes en la parte exterior a la zona caótica y las nuevas en la región central, ambas iluminadas de color naranja. Se encontró los centros de unos de los ciclos elípticos de periodo 2 inmerso en la zona caótica y valiéndonos de la simetría de espejo que tiene el mapa, se puede encontrar los centros del otro ciclo elíptico de periodo 2. También se encontraron los centros de las islas de dos ciclos elípticos de periodo 3. Podemos notar como los dos puntos fijos que estaban sobre $N = 0$ en esta superficie aparentemente descansan sobre la línea $\nu = \pi/2$.

También se pueden trasladar los puntos periódicos de la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$ a la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$ como mencionamos anteriormente y ver como se visualizan, esto se muestra en la figura 6.41.

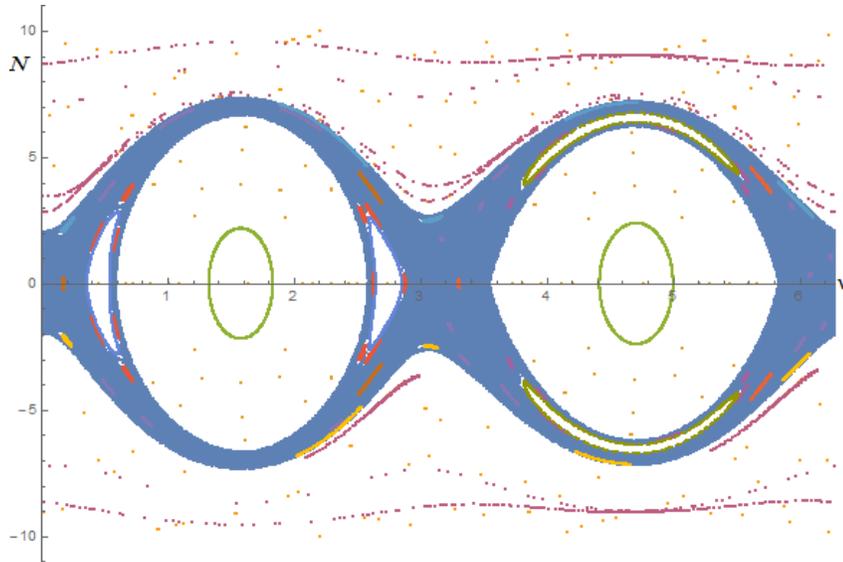


Figura 6.41: Antiguas y nuevas órbitas periódicas trasladadas desde la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 1$, $x = y = 0$.

Para el caso $x = 1$, donde si podemos hallar órbitas periódicas en la parte central del mapa en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$, podemos ver que existen otras órbitas periódicas en esta misma región encontradas en la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$ vía la involución (4.22). La figura 6.42 muestra la traslación de las órbitas periódicas de la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$ a la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$.

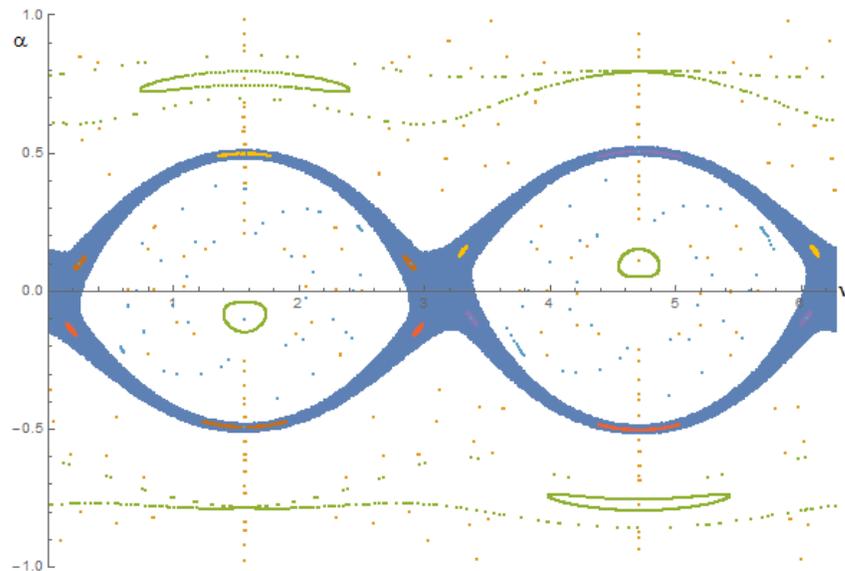


Figura 6.42: Antiguas y nuevas órbitas periódicas trasladadas desde la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 1$, $x = y = 0$.

Claramente podemos ver de la existencia de otras órbitas periódicas diferentes a las que se obtuvieron con la involución \mathbf{p}_0^* , en la región central del mapa, además de que se pudieron hallar los centros de dos de los ciclos de periodo 3 en la zona caótica en la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$, lo que no se consigue anteriormente.

De nuevo, se pueden trasladar los puntos periódicos de la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$ a la superficie $\mu_{mod2\pi} = \pi/2$ como mencionamos anteriormente y ver como se visualizan, esto se muestra en la figura 6.43

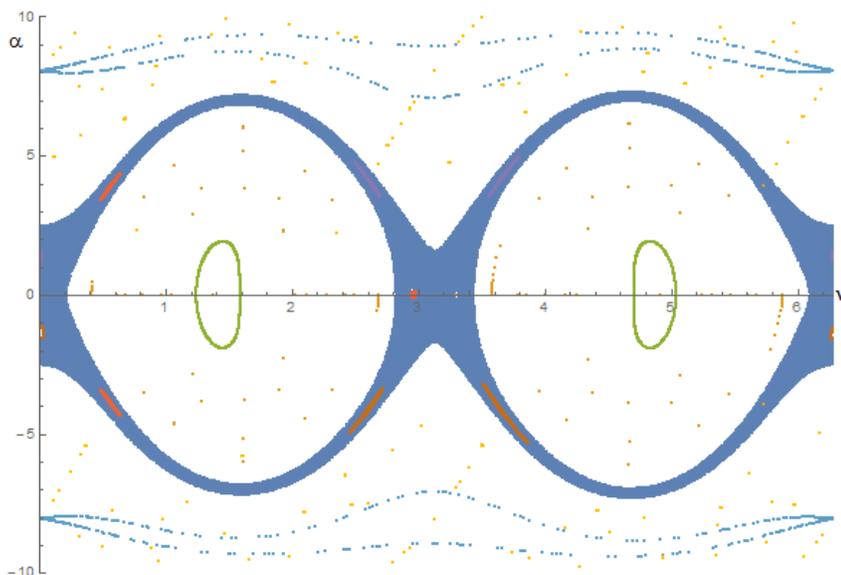


Figura 6.43: Antiguas y nuevas órbitas periódicas trasladadas desde la superficie $\mu_{mod2\pi} = 0$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $y = 1$, $x = y = 0$.

Caso $x=y=1,2$ y $z=0$

Para este caso se obtuvo el conjunto de líneas de simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$, de la involución \mathbf{g}_0 . Las figuras 6.44 y 6.46 muestran las líneas de simetría de cada uno de los casos correspondientes. Las tablas 6.22 y 6.23 dan las coordenadas de los puntos periódicos sobre Γ_0 . Las figuras 6.45 y 6.47 muestran la iteración de las condiciones iniciales de las tablas 6.22 y 6.23 respectivamente iluminadas de color naranja, algunas islas y la zona caótica iluminada en azul.

Lo primero que podemos notar de las líneas de simetría es que el mapa de Poincaré es asimétrico respecto del ángulo ν , debido a que la parte del potencial del hamiltoniano en esta superficie y con estos parámetros está en términos de la combinación del $\sin \nu$ y $\cos \nu$. Pero podemos notar que existe una simetría de espejo respecto de la línea $N = 0$, esto es debido a la invariancia en el cambio de signo en la ecuaciones del movimiento de la variable N .

Podemos ver que en la vecindad del punto fijo inestable del caso integrable, al introducir la perturbación las líneas de simetría se curvan en gran medida lo que da lugar a un comportamiento caótico en la vecindad de este punto.

Para el caso $x = y = 1$, encontramos 2 puntos fijos estables sobre Γ_0 , 2 ciclos de

periodo 2, 4 ciclos de periodo 3, 4 ciclos de periodo 4, 4 ciclos de periodo 6 y 8 de periodo 8.

Dentro de la zona caótica podemos hallar un ciclo elíptico de periodo dos que ésta sobre Γ_0 reportado en la tabla 6.22. Existe otro ciclo elíptico de periodo dos fuera de Γ_0 y que aparece rodeado por un conjunto de islas que forman un ciclo elíptico de periodo 12 iluminado de color amarillo y ninguna línea de simetría cruza algunas de estas islas. También podemos encontrar 2 ciclos elípticos de periodo 7 iluminados de morado y rojo respectivamente, donde de nuevo las líneas de simetría no cruzan los centros de las islas de estos ciclos.

A pesar de no tener más líneas de simetría que pasen por la parte más externa del mapa, se dieron condiciones iniciales tomadas al azar en esta zona y se hizo el mapa de éstas, con el fin de poder ver si existen puntos fijos o revisar si ay algún periodo elíptico. Para el caso que estamos estudiando existen 4 puntos fijos, dos estables y dos inestable y también se puede ver que existen 2 ciclos elípticos de periodo 3 que viven cerca de la zona caótica.

Para el caso $x = y = 2$, de nuevo encontramos 2 puntos fijos sobre Γ_0 estables, 2 ciclos de periodo 2, 4 ciclos de periodo 3, 4 ciclos de periodo 4, 4 ciclos de periodo 6 y 8 de periodo 8.

Claramente la zona caótica crece en comparación al caso anterior, en ésta podemos encontrar aún los periodos dos reportados anteriormente, pero las islas que rodeaban a dichos periodos fueron destruidas por el incremento en la perturbación. Además podemos ver que uno de los ciclos de periodo 8 reportado antes, el que ésta sobre Γ_0 aparece en la zona caótica y se vuelve un ciclo elíptico iluminado de naranja. Esto también le ocurre a un periodo 3 que ésta sobre Γ_0 , el cual cambia su carácter a un ciclo elíptico iluminado de azul claro y aparece rodeado por un conjunto de islas de un periodo mayor. Aparece un ciclo de periodo 7 iluminado de color rojo donde por el centro de una de sus islas pasa solamente la línea de simetría Γ_0 . También podemos hallar dos ciclos elípticos de periodo 2 iluminados de verde y morado respectivamente en el borde de la zona caótica, estos ciclos no existían en el caso anterior y las líneas de simetría no alcanzan a pasar por estos ciclos.

De nuevo como antes hicimos, en la parte más externa del mapa, se dieron condiciones iniciales tomadas al azar, esto para poder visualizar la existencia de puntos

fijos o revisar si existe algún periodo elíptico. Para este caso como antes prevalecen 4 puntos fijos, dos estables y dos inestables. Los ciclos elípticos de periodo 3 antes encontrados fueron destruidos por la perturbación, pero nacen de nuevo otro par de ciclos de periodo tres elíptico, de nuevo cerca de la región caótica.

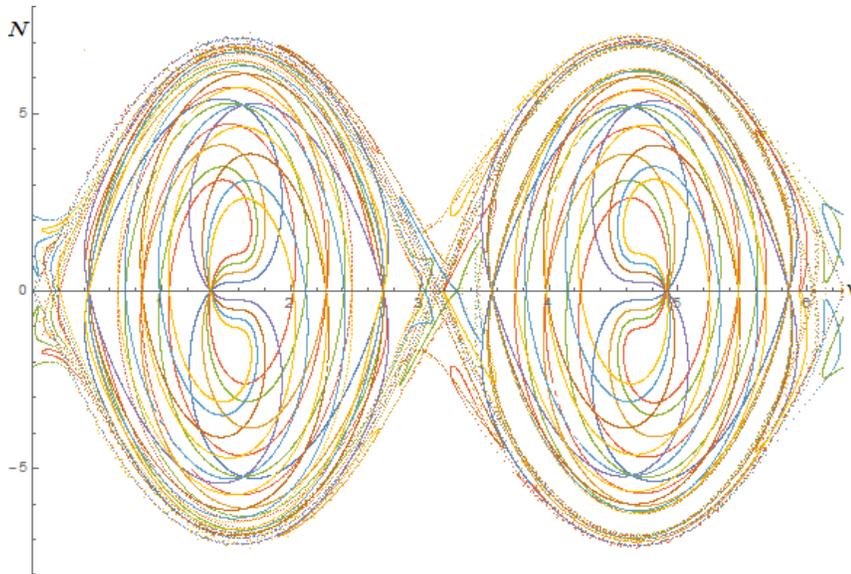


Figura 6.44: Líneas de Simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = 0$, $x = y = 1$.

ν	Periodo
0.43523308	2
0.66073264	8
0.72068247	3
0.754891010	4
0.98611828	6
1.06002039	8
1.38275361	1
2.02287075	8
2.11687639	6
2.27660807	4
2.41424560	3
2.474567674	8
2.7161160942	2
3.741845272	8
3.82282823	3
3.97959368	4
4.147481488	6
4.245158037	8
4.9111291	1
5.24352514	8
5.320850383	6
5.4680004281	4
5.609426924	3
5.67950196	8

Tabla 6.22: Coordenadas ν y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $N = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = 0$, $x = y = 1$

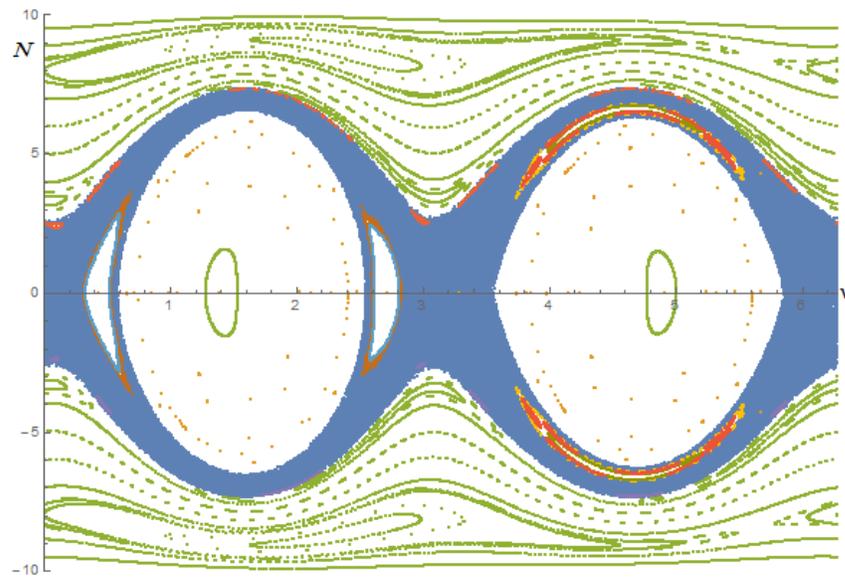


Figura 6.45: iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 0$, $z = y = 1$.

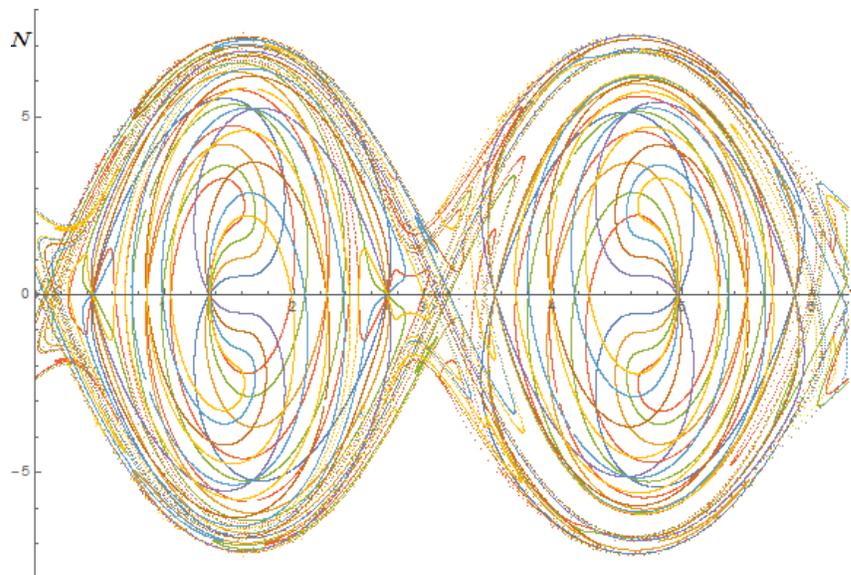


Figura 6.46: Líneas de Simetría $\Gamma_{-8}, \dots, \Gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = 0$, $x = y = 2$.

ν	Periodo
0.447811881	2
0.6979160594	8
0.7488804525	3
0.7564227913	4
0.985638277	6
1.050011784	8
1.348179793	1
1.979887212	8
2.084333106	6
2.252336364	4
2.381443918	3
2.428641677	8
2.718813396	2
3.712127974	8
3.810684667	3
3.983350167	4
4.16550297	6
4.277694892	8
4.958589850	1
5.279486278	8
5.350813152	6
5.492748047	4
5.630198082	3
5.693475925	8

Tabla 6.23: Coordenadas ν y periodos de puntos periódicos a lo largo de la línea $N = 0$. Caso no integrable, $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $z = 0$, $x = y = 2$

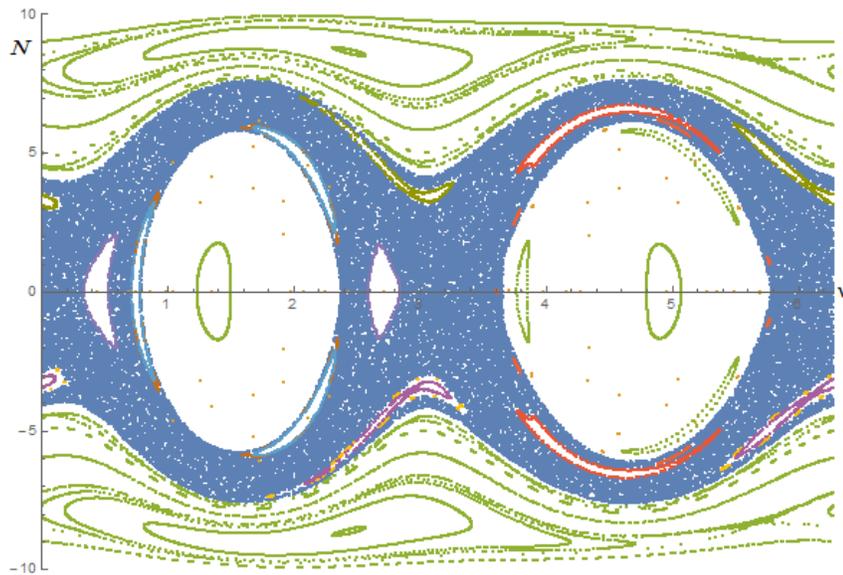


Figura 6.47: iteración de algunos puntos periódicos, algunas islas y zona caótica. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = 0$, $z = y = 2$.

Periodos impares

Experimentando con la computadora se encontró una forma de hallar periodos impares en el mapa, la manera en que se procedió fue la siguiente: Primero se comienza por obtener líneas de simetría, no como usualmente se ha venido haciendo, si no en vez de iterar la línea γ_0 (primer línea de simetría par) comenzando desde la superficie $\mu = 0$ se comienza desde la superficie $\mu = \pi$ y obtenemos la siguiente línea de simetría en la superficie $\mu = 2\pi$, es decir que no dejamos evolucionar a la órbita una vuelta de 2π en μ si no solo la cantidad de π y para las obtener posteriores líneas de simetría si se hace el mapeo cada 2π veces en μ , como se venía realizando, veremos que hay cambios considerables en la forma de estas "nuevas" líneas de simetría.

A continuación se presentan los resultados de este procedimiento para el caso integrable, mostraremos los dos conjuntos de líneas de simetría para ver la diferencia, la figura 6.48 muestra las líneas de simetría comenzando desde la superficie $\mu = 0$ y la figura 6.49 muestra las líneas de simetría comenzando desde la superficie $\mu = \pi$.

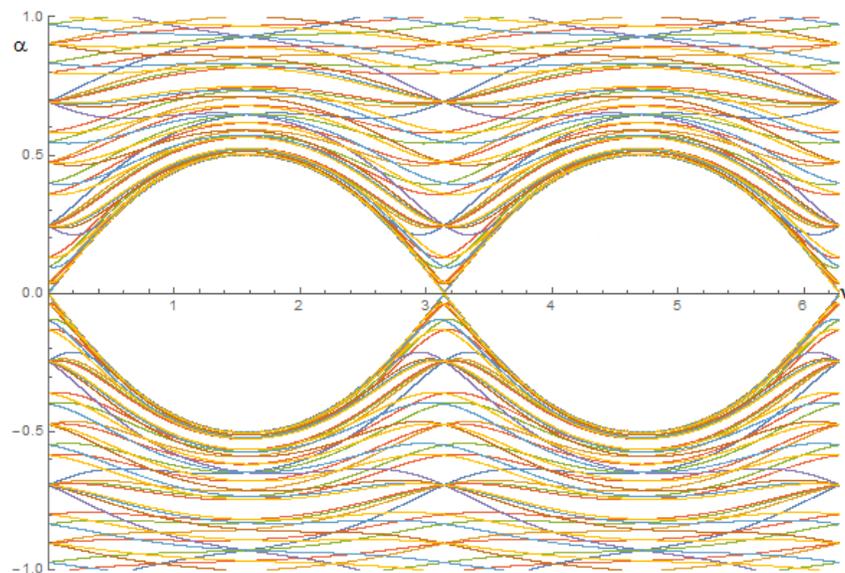


Figura 6.48: Líneas de simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0, z = 1$.

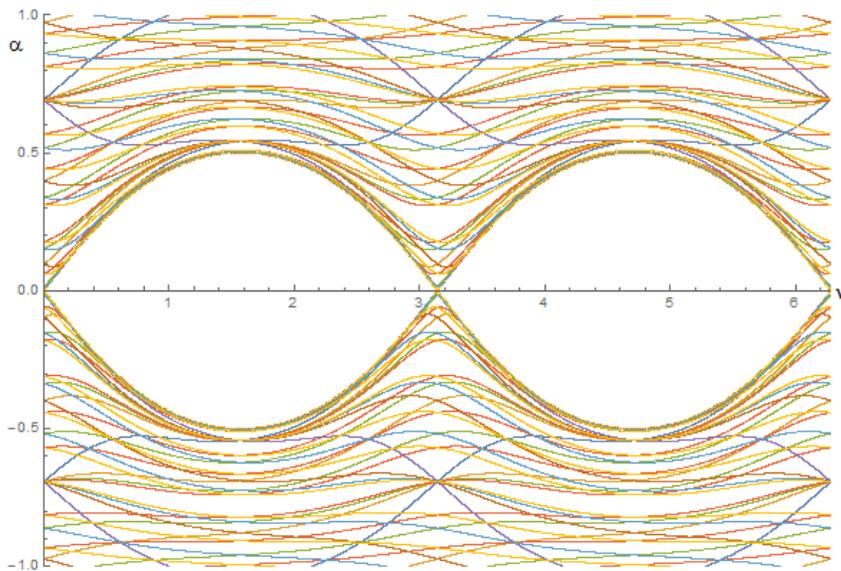


Figura 6.49: Nuevas Líneas de simetría. $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = 0, z = 1$.

Lo más significativo de esto es que al calcular la intersecciones con la línea γ_0 en la figura 6.49 obtenemos la condición inicial de una curva periódica de periodo impar, a pesar de que obviamente las líneas son pares, esto se ve más detalladamente en la figura siguiente donde se calcularon algunas intersecciones con la línea γ_0 y se iteraron estas condiciones iniciales.

Ahora se presentan líneas de simetría con iteraciones de condiciones iniciales dadas por algunas intersecciones de las líneas de simetría.

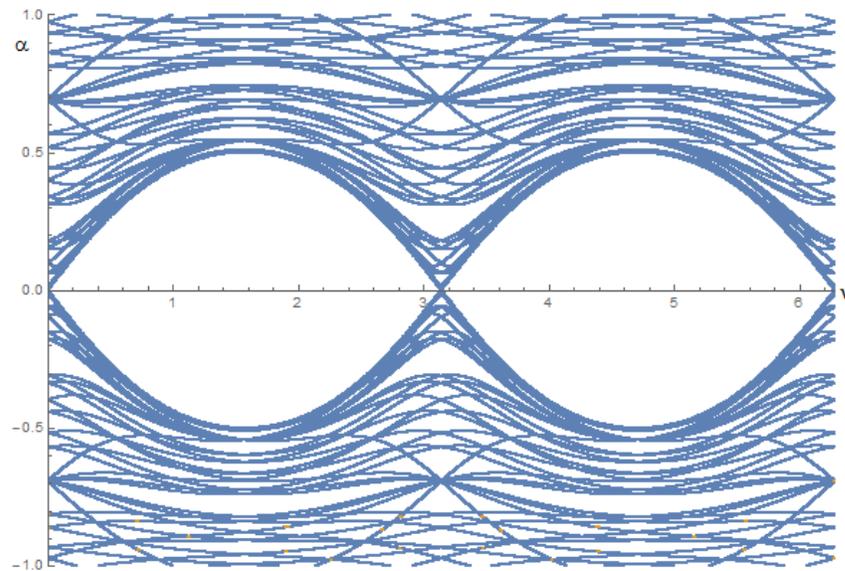


Figura 6.50: Nuevas líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$ e iteración de algunas intersecciones. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Podemos ver que la mayoría de las iteraciones no cruzan las intersecciones de las líneas y solo pegan en líneas individuales donde no hay intersección, a excepción del periodo 3, del periodo 1 (punto fijo) y como mencionamos anteriormente en las intersecciones con la línea γ_0 .

Ahora tomamos estas condiciones iniciales obtenidas y en vez de usar las líneas nuevas, usamos las líneas de simetría usuales para ver qué sucede, esto se muestra a continuación.

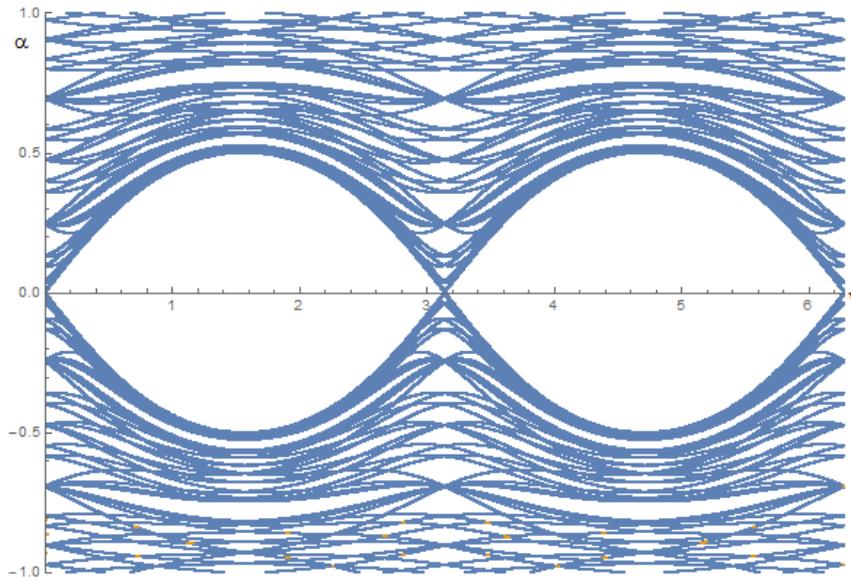


Figura 6.51: Líneas de simetría $\gamma_{-8}, \dots, \gamma_8$ e iteración de las intersecciones obtenidas anteriormente. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Podemos observar sorprendentemente que ahora las iteraciones no caen en la intersección de las líneas con γ_0 y también como en el caso anterior varias de las iteraciones no están en las intersecciones de las líneas solo pasan en líneas solas o individuales, sin embargo, se preserva la iteración o intersección de los periodos 3 y del punto fijo y se obtienen dos nuevas intersecciones de las líneas γ_8 con γ_{-6} y γ_{-8} con γ_6 con el periodo 7 y de las líneas γ_4 con γ_{-6} , γ_{-4} con γ_6 y γ_{-2} con γ_8 y γ_{-2} con γ_{-8} con el periodo 5, esto es consecuencia natural de la teoría ya que. cruce de la línea γ_8 y γ_{-6} se obtendrá un punto periódico de un múltiplo de $|8 - (-6)|$ que claramente corresponde al periodo 7 lo mismo para la intersección de las líneas γ_6 y γ_{-4} se obtendrá un punto periódico de un múltiplo de $|6 - (-4)|$ que corresponde al periodo 5 y lo mismo para las líneas γ_8 y γ_{-2} . Para ver esto claramente a continuación graficaremos las líneas correspondientes a cada periodo sin mezclarlas con las demás por ejemplo para el periodo 5 graficamos la línea γ_6 y γ_{-4}

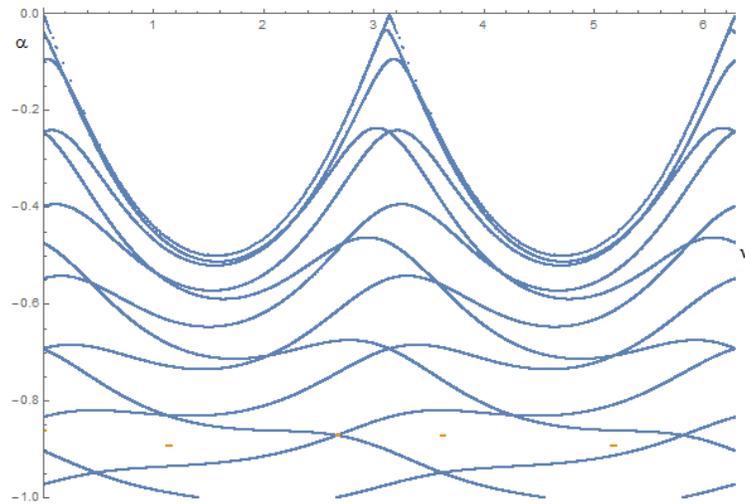


Figura 6.52: Líneas de simetría γ_6, γ_{-4} y periodo 5. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que da una intersección, ahora la línea γ_4 y γ_{-6}

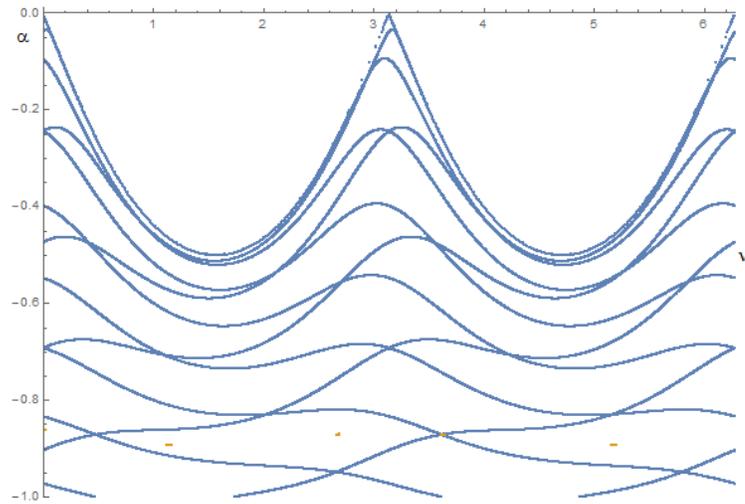


Figura 6.53: Líneas de simetría γ_{-6}, γ_4 y periodo 5. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que da una intersección, ahora la línea γ_2 y γ_{-8}

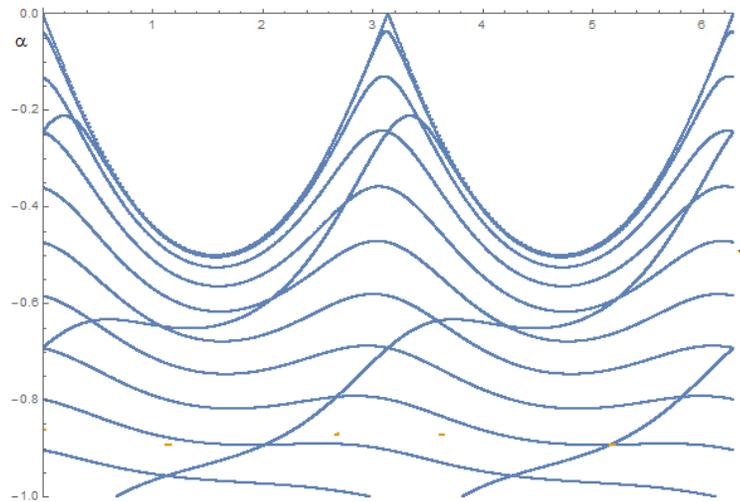


Figura 6.54: Líneas de simetría γ_2, γ_{-8} y periodo 5. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que da una intersección, ahora la línea γ_8 y γ_{-2}

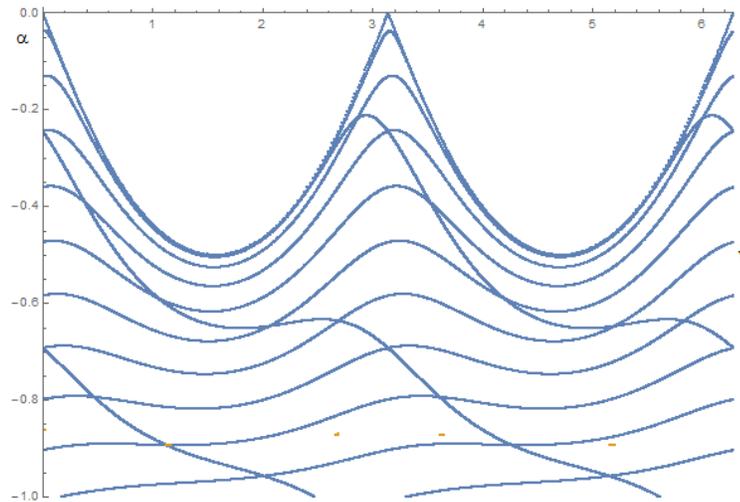


Figura 6.55: Líneas de simetría γ_{-2}, γ_8 y periodo 5. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que da también una sola intersección, ahora las 8 líneas juntas

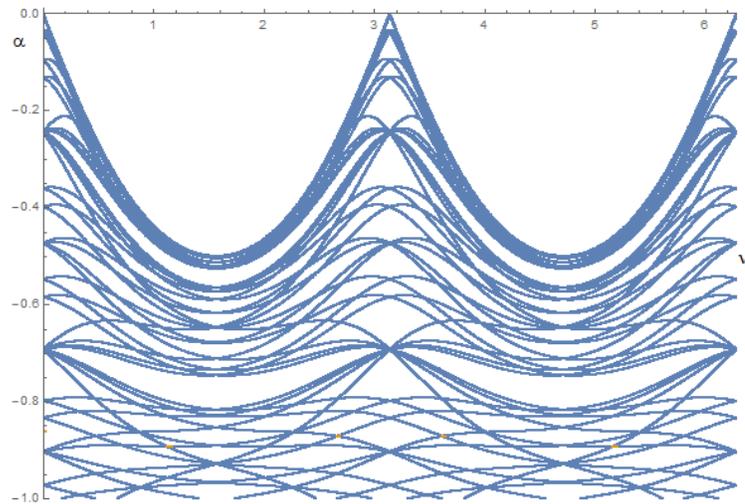


Figura 6.56: Todas las líneas de simetría asociadas al periodo 5. caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

y se obtienen cuatro intersecciones a excepción de la que está sobre γ_0 . Ahora para el periodo 7, graficamos la línea γ_8 y γ_{-6}

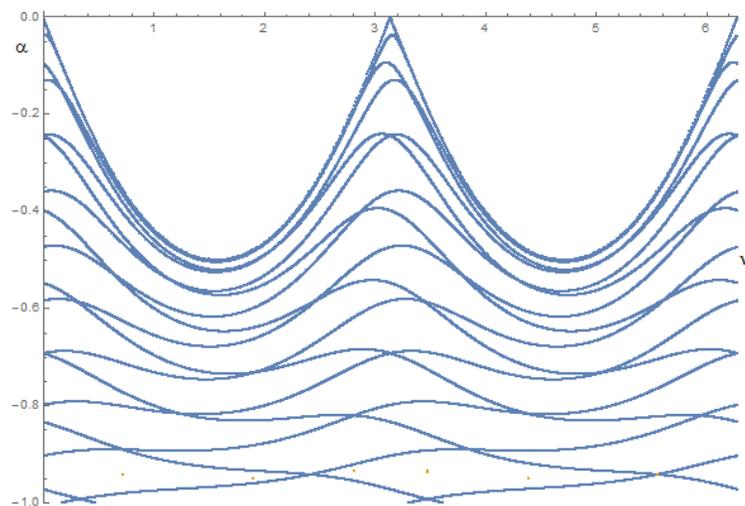


Figura 6.57: Líneas de simetría γ_8, γ_{-6} y periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Esto nos da un cruce, ahora γ_{-8} y γ_6

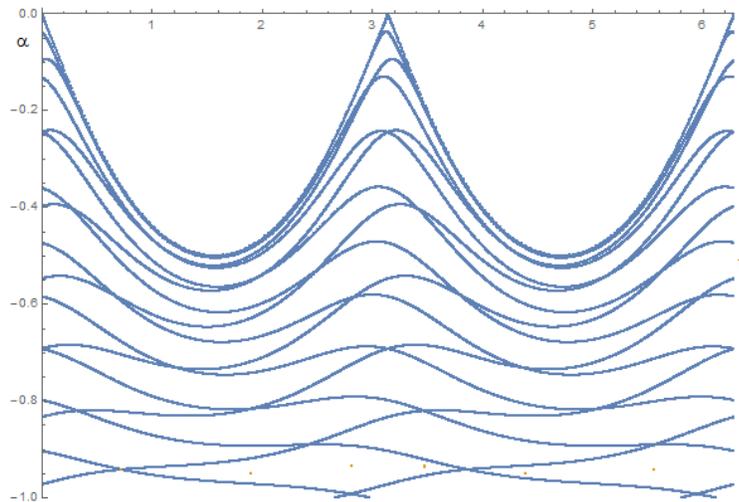


Figura 6.58: Líneas de simetría γ_{-8}, γ_6 y periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

ahora las 4 líneas juntas

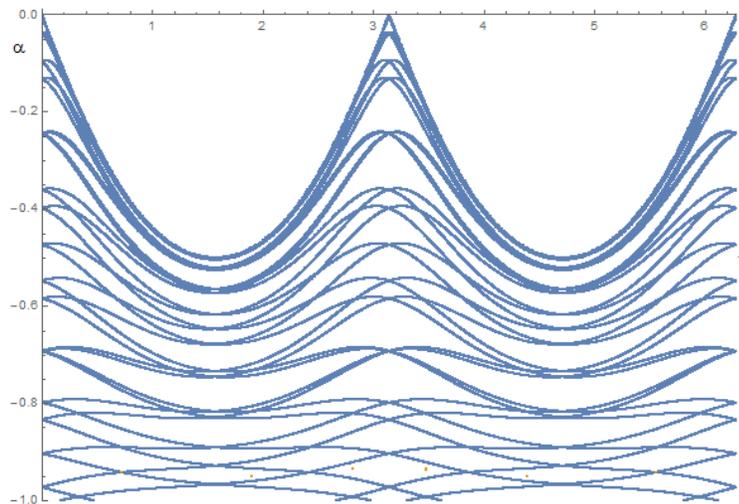


Figura 6.59: todas las Líneas de simetría asociadas al periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Que dan dos intersecciones para este periodo.

Para corroborar aún más los periodos impares obtenidos se obtuvo un par de líneas de simetría más γ_{10} y γ_{-10} con estas líneas podremos obtener mas intersecciones de estos periodos impares, es decir, por ejemplo la línea γ_{10} con γ_{-4} se obtiene un

punto periódico de un múltiplo de $|10 - (-4)|$ que es el periodo 7 como a continuación se visualiza

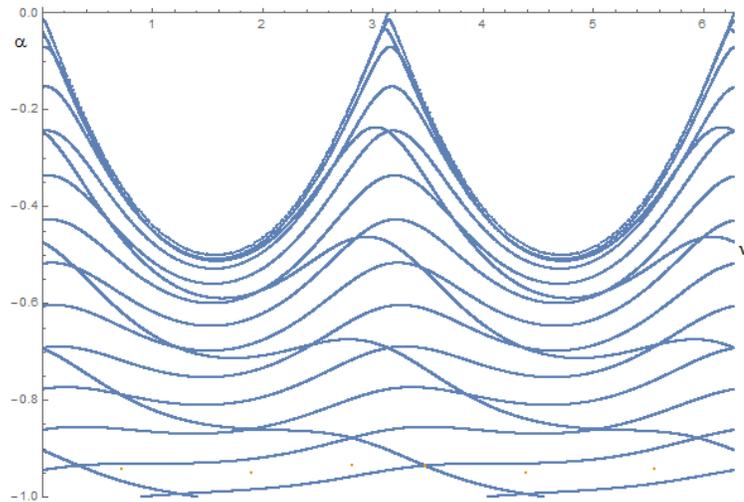


Figura 6.60: Líneas de simetría γ_{10}, γ_{-4} y periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

tenemos una intersección ahora γ_4 y γ_{-10}

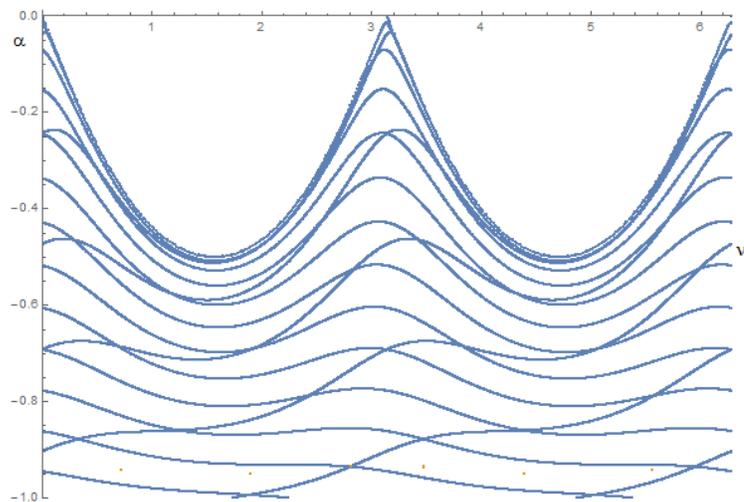


Figura 6.61: Líneas de simetría γ_{-10}, γ_4 y periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

Ahora graficamos las 8 líneas con las que se puede obtener este periodo en ciertas intersecciones entre ellas.

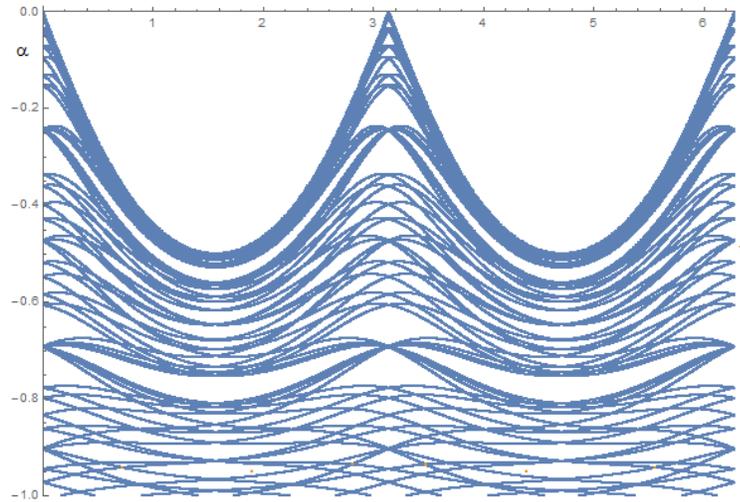


Figura 6.62: Todas las líneas de simetría asociadas al periodo 7. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que dan 4 intersecciones de este periodo, y de donde podemos concluir que para hallar la intersección de este periodo con la línea γ_0 necesitamos o bien la línea de simetría γ_7 o γ_{-7} y/o γ_{14} o γ_{-14} . Ahora con el periodos 5 graficamos todas la líneas cuya intersección dan este periodo

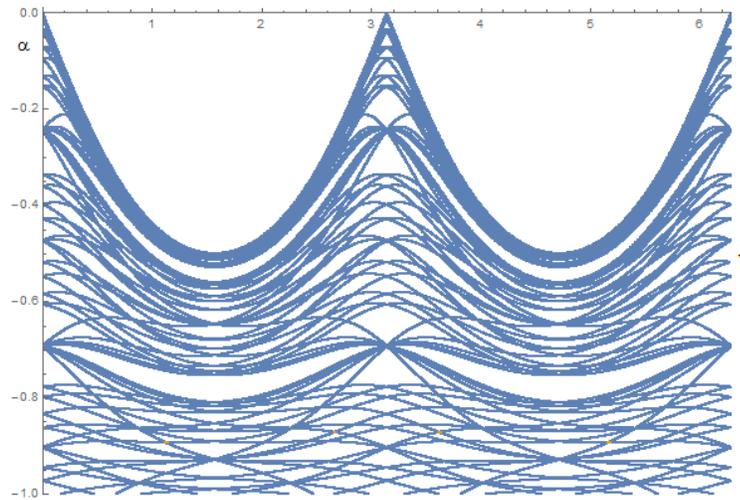


Figura 6.63: Todas las líneas de simetría asociadas al periodo 5. Caso integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0$.

que resultan ser todas las líneas de simetrías pares obtenidas, claramente este periodo si es posible hallarlo en la intersección de la línea γ_0 y γ_{10} o γ_{-10} como se ve claramente en la figura anterior.

Para el caso no integrable se obtienen cosas muy similares.

Caso no integrable (caso general).

Como se mencionó en el capítulo 4 para el caso general no se puede construir alguna involución, por lo que no se podrán hallar líneas de simetría de este caso y por ende no se obtendrán puntos periódicos, sin embargo se puede evaluar el mapa de Poincaré dando condiciones iniciales al azar y así poder visualizar la zona caótica, las islas dentro de ésta, los puntos fijos y posiblemente algunos periodos elípticos e hiperbólicos inestables fuera de la región caótica.

Se usaran los mismos parámetros de energía, momento Λ y momentos principales de inercia que se venían considerando. Para realizar el mapa de Poincaré se usará de nuevo la superficie de sección definida por la relación $\mu_{mod2\pi} = 0$, la cual fue utilizada para estudiar varios de los casos anteriores.

Las figuras 6.44, 6.55, 6.66 y 6.67 presentan los mapas de los casos $x = y = z = 0.5$, 1, 1.5, 2 respectivamente, como antes iluminamos la zona caótica de color azul y de varios colores las islas y órbitas a lo largo de todo el mapa.

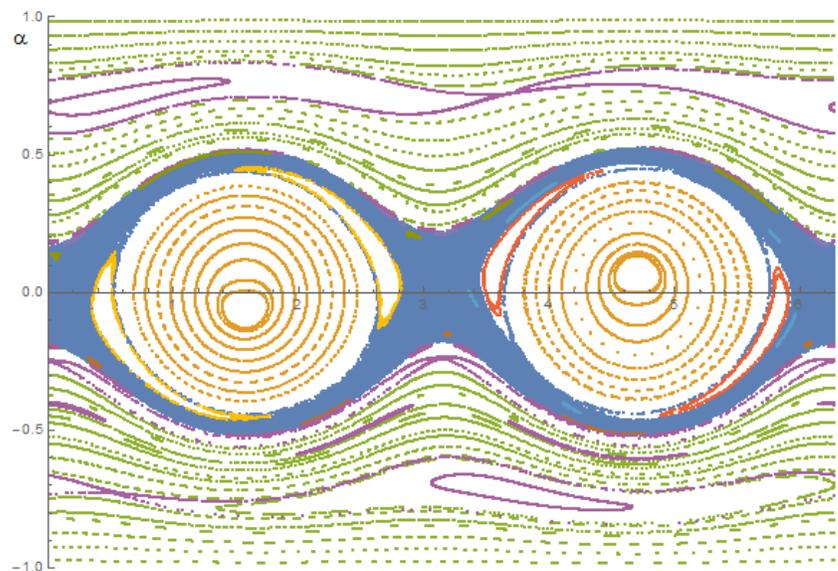


Figura 6.64: Iteración de mapa de Poincaré para varias condiciones iniciales. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 0.5$.

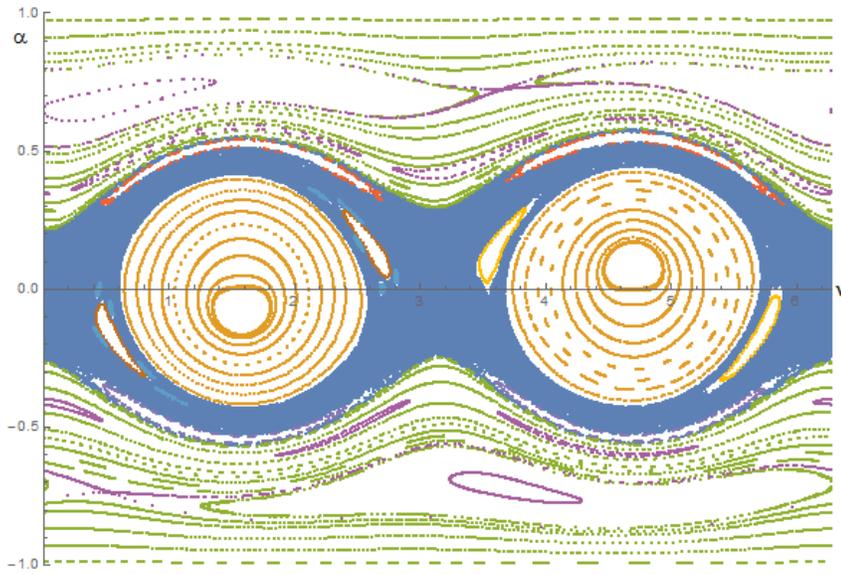


Figura 6.65: Iteración de mapa de Poincaré para varias condiciones iniciales. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 1$.

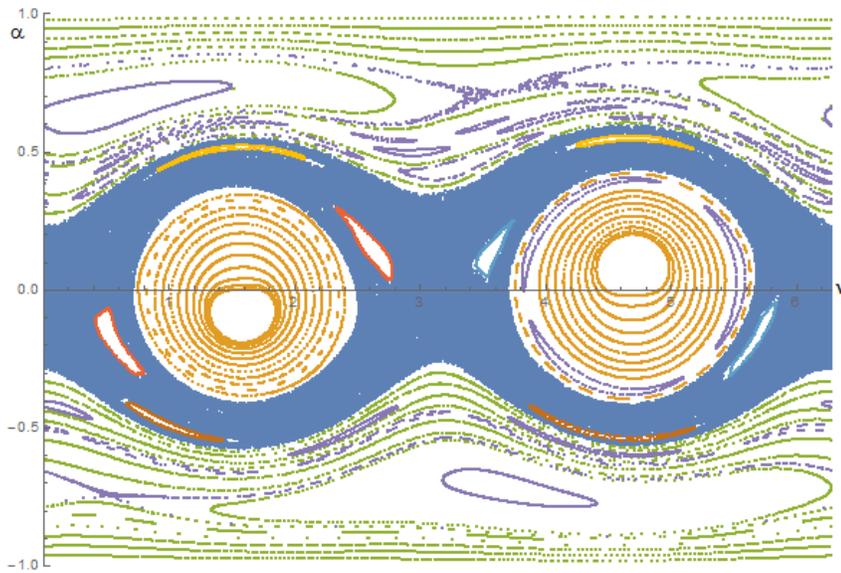


Figura 6.66: Iteración de mapa de Poincaré para varias condiciones iniciales. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 1,5$.

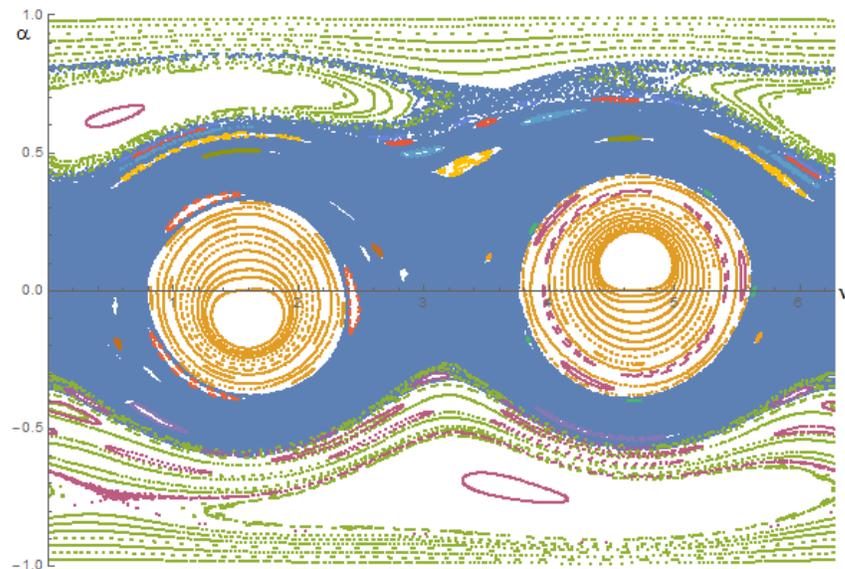


Figura 6.67: Iteración de mapa de Poincaré para varias condiciones iniciales. Caso no integrable: $E = 50$, $\Lambda = 5$ y $x = y = z = 2$.

Para los casos $x = y = z = 0.5$, 1 podemos ver que existen 6 puntos fijos 4 estables y 2 inestables, los dos puntos fijos de la parte central del mapa aparentemente reposan sobre la línea $\nu = \pi/2$ y $3\pi/2$. Con las condiciones iniciales que se escogieron para iterar el mapa pudimos encontrar a parte de trayectorias regulares, varias islas asociadas a periodos cortos. Para el caso $x = y = z = 0.5$ se encontró el periodo 2 inestable (morado) que está del lado negativo de momento, también podemos hallar, tres islas asociadas a un ciclo elíptico de periodo 3 (morado) también en el lado negativo del momento que son los más relevantes. En la región central del mapa también se iteraron varias condiciones iniciales tomadas al azar lo cual da como resultado varias trayectorias regulares de un periodo grande. Dentro de la zona caótica podemos hallar dos ciclos elípticos de periodo 2, 3 ciclos elípticos de periodo 5. Para el caso $x = y = z = 1$ podemos ver que se preserva el ciclo elíptico de periodo 3 que está del lado negativo del momento y aparece otro ciclo elíptico de periodo 3 del lado positivo del momento y claramente la zona caótica crece por lo que el periodo inestable del caso anterior aledaño a esta zona se vuelve caótico por lo que solo se tiene el periodo dos elíptico, también aparece un ciclo elíptico de periodo dos del lado positivo del momento, inmerso en la zona caótica que no parece en el caso anterior, prevalecen los dos periodos elípticos 2 pero sus islas disminuyen de tamaño

y alrededor de uno de estos periodos nace un ciclo elíptico de periodo 10.

Para los casos $x = y = z = 1.5$, 2 podemos ver que los dos puntos fijos inestables empiezan a tener un carácter caótico debido al incremento en la perturbación de hecho para el caso $x = y = z = 1.5$, el punto fijo inestable del lado negativo del momento aún no parece tener este carácter a diferencia del que está del lado positivo del momento, pero para el caso $x = y = z = 2$ ya los dos puntos tienen el carácter caótico pero se remarca más para el que está del lado positivo del momento, de hecho la zona caótica que aparece a partir del punto inestable en el caso integrable en la región central del mapa se une con la zona caótica que aparece con el punto inestable del lado positivo del momento.

En $x = y = z = 1.5$ prevalece el ciclo elíptico de periodo 3 que nació en $x = y = z = 1$ del lado positivo del momento, también aledaño a este ciclo, nacen dos ciclos elípticos uno de periodo 4 y otro de periodo 5, algo similar ocurre en el lado negativo del momento, sobrevive el ciclo de periodo 3 que apareció en $x = y = z = 1$ y nace otro ciclo elíptico de periodo 4. En la región central del mapa podemos ver que nace un ciclo elíptico de periodo 3 (morado). Dentro de la zona caótica prevalecen los ciclos de periodo 2 que encontramos en $x = y = z = 1$, pero las islas del ciclo elíptico de periodo 10 que rodeaba a uno de estos periodos 2 son destruidas por la perturbación.

Para $x = y = z = 2$ prevalecen aun los ciclos elípticos de periodo 3 y 4 que están del lado negativo del momento que están en $x = y = z = 1.5$, y del lado negativo del momento podemos ver que los ciclos elípticos de periodo 3, 4, 5 ahora aparecen rodeados por la zona caótica, la cual podemos ver que abarca una gran área del mapa, también podemos ver que dentro de esta aún sobreviven los periodos dos que se encontraron desde $x = y = z = 1$ pero sus islas reducen su tamaño y alrededor de uno de estos ciclos elípticos de periodo 2 nace un conjunto de islas de un ciclo elíptico de periodo 6, también nacen dos ciclos elípticos de periodo 3 y 5. Y dentro de la región central del mapa prevalece el ciclo de periodo 3 hallado en $x = y = z = 1.5$ y nace un ciclo elíptico de periodo 4.

Capítulo 7

Conclusiones

En el desarrollo de esta tesis se lograron objetivos diversos de los cuales podemos destacar:

-La obtención de los mapas de Poincaré de la dinámica del cuerpo rígido para diversas situaciones del mismo, usando las variables de Andoyer-Deprit.

-Dentro de los mapas de Poincaré pudimos calcular las condiciones iniciales para la obtención de órbitas periódica simétricas del problema utilizando la técnica de líneas de simetría, esto para diversos casos aun no estudiados del problema. Las órbitas periódicas obtenidas son de periodo par dentro del mapa de Poincaré.

-También dentro de los mapas de Poincaré pudimos visualizar una región llamada caótica que surge como consecuencia de la no integrabilidad del problema y pudimos concluir que dentro de esta zona existen regiones donde permanecen aisladas diversas órbitas periódicas o también llamados puntos elípticos en el mapa.

-Se pudo desarrollar una técnica para obtener órbitas periódicas simétricas de periodo impar aunque se requiere de una explicación más a fondo de lo que sucede al realizar este procedimiento.

También se tienen perspectivas a futuro con el objetivo de continuar el desarrollo de este trabajo, una de ellas es el estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas, en particular las que están inmersas en la zona caótica, esto recurriendo a la teoría de Floquet de la estabilidad introducida en el capítulo 5.

Como se mencionó anteriormente también se debe de dar una explicación a la manera en que se hallaron las órbitas periódicas de periodo impar en el mapa de Poincaré.

Apéndice A

Geometría Esférica

Deducción de algunas de las fórmulas mas importantes de la Geometría Esférica.

Ley de los cosenos

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y \mathbf{u}_3 los vectores unitarios dirigidos del centro a un punto sobre una esfera unitaria y sean β_1, β_2 y β_3 los ángulos entre dichos vectores unitarios como se muestra en la figura 1.

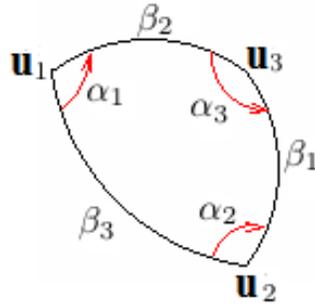


Figura A.1: Triángulo esférico

Entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \cos \beta_3, \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= \cos \beta_1, \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 &= \cos \beta_2,\end{aligned}\tag{A.1}$$

y también

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= \sin(\beta_3)\mathbf{n}_3, \\ \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 &= \sin(\beta_1)\mathbf{n}_1, \\ \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 &= \sin(\beta_2)\mathbf{n}_2.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Los vectores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ y \mathbf{n}_3 , también son unitarios y apuntan hacia el interior del triángulo esférico.

Seguidamente calculamos el producto punto entre las vectores $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$.

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = \cos(\pi - \alpha_2) = -\cos \alpha_2,$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(\pi - \alpha_3) = -\cos \alpha_3, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos \alpha_1,$$

de las ecuaciones (A.1) y (A.3) y de las propiedades del triple producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 \sin \beta_3 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 &= (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) = \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot [\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3)] = \mathbf{u}_1 \cdot [(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_3] = \\ &= (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3) - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \cos \beta_3 \cos \beta_1 - \cos \beta_2, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por lo cual obtenemos

$$\cos \beta_2 = \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \sin \beta_1 \sin \beta_3 \cos \alpha_2, \quad (\text{A.5})$$

y el mismo procedimiento nos lleva a las relaciones del coseno para los ángulos β_3, β_1 .

Así obtenemos tres relaciones para los tres ángulos.

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 &= \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \sin \beta_1 \sin \beta_3 \cos \alpha_2, \\ \cos \beta_3 &= \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \alpha_3, \\ \cos \beta_1 &= \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \sin \beta_3 \sin \beta_2 \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ley de los senos

Para obtener la ley de senos primeramente desarrollamos el producto vectorial $(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1)$, para lo cual se usa (A.2) y las propiedades de los triples productos vectoriales, entonces:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) &= \sin \beta_1 \sin \beta_2 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \\ &= \mathbf{u}_3(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_3) - \mathbf{u}_2(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) = \\ &= \mathbf{u}_3(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

El triple producto \times de la relación (A.7) nos da el volumen del paralelepípedo

engendrado por los mismos tres vectores.

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = |\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1|. \quad (\text{A.8})$$

El cual es invariante ante una permutación cíclica en los vectores en el determinante asociado, es decir:

$$|\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3| = |\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2|, \quad (\text{A.9})$$

por lo cual

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2. \quad (\text{A.10})$$

por otro lado se calcula el producto \times de \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 .

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_3 \sin(\pi - \alpha_2) = \mathbf{u}_3 \sin \alpha_2, \quad (\text{A.11})$$

usando la relación (A.11) la ecuación (A.7) queda como:

$$\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_3, \quad (\text{A.12})$$

y con la propiedad (A.9) se llega a:

$$\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_3, \quad (\text{A.13})$$

o también

$$\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3). \quad (\text{A.14})$$

Realizando un procedimiento análogo a la de deducción de la ecuación (A.12) se llega a:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) &= \sin \beta_1 \sin \beta_3 \sin \alpha_1 \\ (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) &= \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \alpha_3 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Así de la ecuaciones (A.14) y (A.15) se deduce la ley de los senos.

$$\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 = \sin \beta_1 \sin \beta_3 \sin \alpha_1 = \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \alpha_3, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin \beta_1}. \quad (\text{A.17})$$

Otras formulas

Del producto vectorial $[(\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) \times \mathbf{u}_i] \times \mathbf{u}_i$ se puede deducir una formula muy parecida a la ley de los cosenos, esta formula sera útil para nuestros futuros cálculos. De relaciones vectoriales se tiene pues

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) \times \mathbf{u}_i] \times \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_k \times \mathbf{u}_i(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_i = \\ &\mathbf{u}_j(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

de las ecuaciones (A.1) obtenemos

$$(\mathbf{u}_k \times \mathbf{u}_i) \cos \beta_k - \cos \beta_j(\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k, \quad (\text{A.19})$$

y de las ecuaciones (A.2) se tiene

$$\sin \beta_j \cos \beta_k \mathbf{n}_j - \cos \beta_j \sin \beta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) - \sin \beta_i \mathbf{n}_i, \quad (\text{A.20})$$

Ahora proyectamos esta ecuación en la dirección \mathbf{n}_j

$$(\sin \beta_j \cos \beta_k \mathbf{n}_j - \cos \beta_j \sin \beta_k \mathbf{n}_k = \mathbf{u}_j(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) - \sin \beta_i \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{n}_j$$

$$\sin \beta_j \cos \beta_k \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_j - \cos \beta_j \sin \beta_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_j = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) - \sin \beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j, \quad (\text{A.21})$$

para obtener con ayuda de (A.3)

$$\sin \beta_j \cos \beta_k - \cos \beta_j \sin \beta_k \cos \alpha_i = \sin \beta_i \cos \alpha_k, \quad (\text{A.22})$$

esta es la ecuación que se deseaba hallar.

Bibliografía

- [1] K.V. Emel'yanov A. V. Borisov. Nonintegrability and stochasticity in rigid body dynamics. *Izhevsk: Publishing House of Udmurt State University*, pág. 55, 1995.
- [2] H. Andoyer. *Cours of mécanique céleste*. Livre I (Paris 1923). Cap. IV.
- [3] G. D. Birkhoff. *Collected Mathematical Papers*. Providence, R. I.,1950.
- [4] G. D. Birkhoff. Surface transformation and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43:1–119, 1920.
- [5] A.A. Bogoyavlenskii. On a particular cases of motion of a heavy rigid body about a fixed point. *Prinkl. Mat. Mech.*, 22(5):622.
- [6] F. Boigey. *C. R. Acad. Sci.*, 272:1115, 1971.
- [7] O. Chavoya-Aceves y E. Piña. Líneas de simetría en el problema restringido circular y plano de los tres cuerpos. *Rev. Mex. Fis.*, 34(1):32, 1988.
- [8] O. Chavoya-Aceves y E. Piña. Symmetry lines of the dynamics of a heavy rigid body with a fixed point. *Il Nuovo Cimento B*, 103(4):369–387, 1989.
- [9] A. Deprit. Free rotation of a rigid body studied in the phase space plane. *Am. J. Phys.*, 35(5):424, 1967.
- [10] L. Galgani, J. Giorgilli, y J.M. Strelcyn. Chaotic motions and transitions to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body about a fixed point. *Il Nuovo Cimento B*, 61(1):1, 1981.
- [11] J. M. Greene. *Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction*. Edited by M. Monthand J. C. Herrera AIP. N.Y. 1979, p 275.

-
- [12] J. M. Greene. *J. Math. Phys.*, 9:1768, 1968.
- [13] J. M. Greene. *J. Math. Phys.*, 20:1183, 1978.
- [14] M. Hénon. *Astron. J.*, 64:73, 1964.
- [15] F. Vivaldi M.J. Feigenbaum J. M. Greene, R. S. Mackay. *Physica 8D*, pág. 468, 1981.
- [16] L. Jiménez-Lara y E. Piña. Periodic orbits of an charged electric in a magnetic field.
- [17] P.V. Kharlamov. A kinematic interpretation of the motion of a heavy rigid body with a fixed point. *Prinkl. Mat. Mech.*, 28(3):502, 1963.
- [18] P.V. Kharlamov. On the equations of motion of a heavy rigid body about a fixed point. *Prinkl. Mat. Mech.*, 27(4):703, 1963.
- [19] G. E. Koonin. *Computational Physiscs*. The Benjamin/Cummings. Pub. Co. Inc. (1985); chap 2.
- [20] V. V. Kozlov. *Vest. Mosk. Mat. Ser. I Mat. Mekh.*, 6:199, 1976. (in Russian).
- [21] V. V. Kozlov. *Russian Math. Surv.*, 38, 1983.
- [22] E. Leimanis. *The General Problem of Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*. . (Berlin, 1965).
- [23] E. Leimanis. *Survey in Applied Mathematics*. . Vol. 2 (New York, N. Y., 1959), p. 1.
- [24] R. S. Mackay. *Physica 7D*, pág. 283, 1983.
- [25] H. Koch P. Collet, J. P. Eckmann. *Physica 3D*, pág. 457, 1981.
- [26] E. Piña. *Dinámica de Rotaciones*. UAM-Iztapalapa, México, 1996.
- [27] E. Piña. A new parametrization of the rotation matrix. *Am. J. Phys.*, 51(4):375, 1983.

-
- [28] E. Piña. Sobre el caso de euler del movimiento de un cuerpo rígido. *Rev. Mex. Fis.*, 54:92, 2008.
- [29] E. Piña y E. Cantoral. Symmetries of the quasi crystal mapping. *PHYSICS LETTERS A*, 135:190, 1989.
- [30] E. Piña y L. Jiménez-Lara. On the symmetry lines of the standard mapping. *Physica D*, 26:369, 1987.
- [31] J. E. Marsden R. Abraham. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin/Cummings. Pub. Co. Inc. (1978); part 3.
- [32] R. De Vogelaere. *Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations*. Vol 4, Pinceton, N.J.,1958, p. 53.
- [33] R. De Vogelaere. *Can. J. Math.*, 34:440, 1950.
- [34] E.T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge, 1930.
- [35] S. L Ziglin. *Tr. Mosk. Mat. Obshch*, 41:287, 1980. (in Russian).
- [36] Z. L. Ziglin. *Functional Analysis and its Applications*, 16:181, 1983.