

Secciones globales en variedades tóricas

Autor: Juan Carlos Ruiz Valdez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-I

Asesor: Dr. Felipe Zaldívar

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-I

Índice general

Introducción	v
Capítulo 1 Variedades tóricas	1
1.1 Toros algebraicos y variedades tóricas	1
1.2 Variedades tóricas a partir de abanicos y politopos	6
1.3 Órbitas y conos	17
1.4 Propiedades locales de las variedades tóricas	26
1.4.1 Dimensión	26
1.4.2 Lisidad	27
1.5 Completez	33
Capítulo 2 Intersección en variedades tóricas	37
2.1 Divisores	37
2.2 Divisores y funciones lineales de soporte	45
2.3 Secciones globales de variedades tóricas	47
2.4 Conclusiones y perspectivas	50
Apéndice A.	53
A.1 Retículas y sus duales	53
A.2 Conjuntos convexos	54
A.3 Politopos	55
A.4 Conos y sus duales	58
A.5 Abanicos y abanicos asociados a politopos	62
A.6 El lema de Gordan	64
Apéndice B.	67
B.1 Álgebras, co-álgebras y co-módulos	67
B.2 Representaciones lineales y grupos algebraicos	68
Bibliografía	75
Índice alfabético	77

Introducción

El vasto y a la vez abstracto mundo de la geometría algebraica se puede entender más fácilmente con ejemplos donde podamos palpar la teoría que se dan en los primeros cursos de esta importante teoría. Por ello, uno de los objetivos de esta tesis es mostrar un interesante ejemplo de variedades algebraicas donde se conjugan más de una rama de la matemática moderna: las variedades tóricas construidas a partir de conos poliédricos y abanicos. Un mundo donde las propiedades geométricas de estos conjuntos algebraicos se traducen en estudiar los cuerpos convexos de los cuales partimos en un principio. Para comunicar la geometría convexa con la algebraica es obligatorio el uso de un puente y para ello usamos un resultado relativamente sencillo, pero que resalta por su enorme importancia para poder comunicar estas dos disciplinas que un principio no tienen mucho que ver la una con la otra, el cual lo conocemos como el lema de Gordan y con él podremos pasar de los conos duales a los anillos de coordenadas de las variedades tóricas afines (que son las primeras que construimos), y con el cual podemos dar saltos de una geometría a otra para interpretar propiedades de los conos y abanicos con interesantes propiedades topológicas de los conjuntos afines que iremos definiendo.

Fueron fundamentales en el desarrollo de esta tesis los libros de Cox-Little-Schenck [1], Fulton [5] y Oda [9] sin embargo en esta bibliografía la teoría está desarrollada en su totalidad en el lenguaje de esquemas así como el caso complejo, i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; por lo que el uso de la topología de Zariski y la topología compleja es usada indistintamente a lo largo de los teoremas más importantes, incluso usando conceptos que son tomados del Análisis como por ejemplo la compacidad o espacio Hausdorff, lo que desconcierta a primera leída pues en geometría algebraica se trata de algebrizar todo y los límites de los primeros cursos de cálculo nunca se nos vienen a la mente. Por lo que nos dimos a la tarea de reescribir en el lenguaje clásico de geometría algebraica toda la teoría necesaria para empezar a comprender esta familia de objetos algebraicos. La traducción fue satisfactoria y resalta más a la hora de describir la forma de las órbitas generadas a partir de la acción del toro algebraico sobre nuestras variedades, dando como resultado una interpretación totalmente distinta a la que se presenta en las citas anteriormente mencionadas pues se demuestra la importancia que existe entre el orden parcial que existe (pero nadie menciona) entre los conos de un abanico y las órbitas que forman parte del entorno en el cual trabajamos.

Capítulo 1

Variedades tóricas

En esta sección definiremos y construiremos un ejemplo muy interesante de variedades algebraicas, las tóricas, la construcción será muy ingeniosa, pues a partir de cuerpos convexos ya sea conos o abanicos, definiremos para un campo cualquiera \mathbb{K} , algebraicamente cerrado, ceros de polinomios de forma muy particular cuyas potencias satisfacen una relación en los generadores de los conos de los cuales partimos. Un aspecto importante es que la teoría de convexidad no solo queda relegada a la construcción de estos conjuntos algebraicos, si no que algunas propiedades de los conos y sus caras se traducen a alguna propiedad de las variedades que estamos construyendo.

1.1. Toros algebraicos y variedades tóricas

Como el mismo nombre lo indica, antes de nada necesitamos el toro (algebraico en este caso) $T := (\mathbb{K}^*)^n$, el cual aparte de ser una variedad afín, tiene una estructura de grupo y con él ya definido, podremos construir el grupo de caracteres el cual veremos que es isomorfo a una retícula de rango n y con esta retícula definida y su dual definiremos \mathbb{R} -espacios vectoriales, el cual será el ambiente donde entrará en acción la geometría convexa.

Definición 1.1. Sea el grupo algebraico $(\mathbb{K}^*)^n$. Decimos que T es un *toro algebraico de dimensión n* si es un grupo algebraico isomorfo a $(\mathbb{K}^*)^n$.

Definición 1.2. Sea T un toro algebraico, decimos que un morfismo $\varphi : T \rightarrow \mathbb{K}^*$ es un *carácter* si es un morfismo de grupos algebraicos.

Ejemplo 1.3. Tomando el toro algebraico $T = (\mathbb{K}^*)^n$, definimos el conjunto de caracteres del toro algebraico T como:

$$M := \text{Hom}(T, \mathbb{K}^*) = \{\psi : T \rightarrow \mathbb{K}^* \mid \psi \text{ es morfismo de grupos algebraicos}\}.$$

Mediante el producto usual de funciones se tiene que M es un grupo abeliano multiplicativo, por otro lado cada elemento $\psi \in M$ al ser un morfismo de variedades afines, está dada por cocientes polinomios en n variables y el añadir la hipótesis de ser morfismo de grupos implicará que estos polinomios tengan una forma muy especial, para ver esto, es necesario darle una estructura conocida a M , mediante el siguiente isomorfismo de grupos abelianos:

$$(1) \quad \Lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow M \quad \text{dado por} \quad m = (m_1, \dots, m_n) \mapsto \psi^m,$$

donde $\psi^m(y_1, \dots, y_n) = y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$. Basta demostrarlo para $n = 1$ pues el Hom conmuta con el producto directo; en efecto, si $\Lambda(m) = 1$, se tiene que la potencia de la indeterminada que ocurre en $\Lambda(m)$ es nula, por lo tanto $m = 0$. Para ver la suprayectividad, entonces, tomemos $\psi \in M$, y se tiene que existen $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[y]$ tales que

$$\psi = \frac{f_1}{f_2}$$

y para $i = 1, 2$ se tiene que $f_i(t) \neq 0$ para todo $t \in T$. Si f_1, f_2 no se anularan en $\mathbb{A}^1 - T$, se tiene que $\mathcal{V}(f_i) = \emptyset$ y por el teorema de los ceros de Hilbert se tiene que $f_i = \text{cte} \neq 0$ pero ψ es morfismo de grupos, por lo tanto $\psi = 1 = \psi^0$. En el otro caso, que f_1 o f_2 se anularan en $\mathbb{A}^1 - T = \mathcal{V}(y)$, se tiene que:

$$\mathcal{V}(f_i) = \{0\},$$

y por el teorema de los ceros de Hilbert, se tiene que $\sqrt{\langle f_i \rangle} = \langle y \rangle$, y por lo tanto existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que:

$$f_i = \lambda_i y^{m_i} \quad \text{con } m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

por lo tanto:

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lambda_1 y^{m_1}}{\lambda_2 y^{m_2}} = \lambda y^{m_1 - m_2} \quad \text{con } m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$$

y como ψ es un morfismo de grupos se tiene $\lambda = 1$. Hemos probado así que, M es una retícula de rango n .

Este ejemplo es muy importante en esta tesis, pues de él partimos para la construcción de las variedades que son de nuestro interés. Sin embargo, esta retícula es insuficiente para trabajar, para ello notemos que que el siguiente conjunto:

$$N := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K}^*, T) = \{\lambda : \mathbb{K}^* \rightarrow T \mid \lambda \text{ es morfismo de grupos algebraicos}\},$$

es un grupo abeliano con el producto usual de funciones, y análogamente se tiene un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n &\longrightarrow N \\ l = (l_1, \dots, l_n) &\longmapsto \lambda^l, \end{aligned}$$

donde $\lambda^l(t) = (t^{l_1}, \dots, t^{l_n})$; y por lo tanto, N también es una retícula de rango n .

Observación 1.4. Notemos que si $\psi^m \in M$ y $\lambda^l \in N$, entonces la composición

$$\psi^m \circ \lambda^l : \mathbb{K}^* \rightarrow T \rightarrow \mathbb{K}^*,$$

está dada para $t \in T$ por:

$$\begin{aligned} \psi^m \circ \lambda^l(t) = \psi^m(t^{l_1}, \dots, t^{l_n}) &= t^{l_1 m_1} \dots t^{l_n m_n} \\ &= t^{l_1 m_1 + \dots + l_n m_n} = t^{\langle l, m \rangle} \end{aligned}$$

donde $\langle l, m \rangle$ es el producto interior usual de \mathbb{Z}^n . Usando la notación $\langle \lambda^l, \psi^m \rangle := \langle l, m \rangle$, tenemos el siguiente apareamiento de las retículas:

$$\begin{aligned} N \times M &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\lambda^l, \psi^m) &\longmapsto \langle \lambda^l, \psi^m \rangle. \end{aligned}$$

Del producto interior sobre \mathbb{Z}^n se desprende que este apareamiento es biaditivo y perfecto.

Por lo tanto, a partir de un toro algebraico de dimensión n , hemos construido dos retículas M y N de rango n , con un apareamiento entre ellas. Como veremos más adelante, los puntos de estas retículas son muy importantes, sin embargo no son todos y necesitaremos también de un entorno más complejo para trabajar, para ello a partir de estas retículas construimos los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales:

$$M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{y} \quad N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

extendiendo el apareamiento de las retículas a los espacios de manera natural:

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda^l \otimes r_1, \psi^m \otimes r_2) &\longmapsto \langle \lambda^l, \psi^m \rangle r_1 r_2, \end{aligned}$$

para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Antes de avanzar en las propiedades del apareamiento de estas retículas, daremos este resultado que servirá enormemente con el paso de la teoría.

Lema 1.5. *Sea N una retícula arbitraria de rango > 1 y sea $n \in N$. Entonces existe $m \in M$ en su retícula dual, tal que $m \in n^\perp$.*

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción, entonces supongamos que para toda $m \in M$ se tiene $\langle n, m \rangle \neq 0$. Por lo tanto extendiendo el apareamiento de las retículas a los \mathbb{R} espacios vectoriales $N_{\mathbb{R}}$ y $M_{\mathbb{R}}$ el cual está dado por:

$$(n \otimes \lambda_1, m \otimes \lambda_2) \longmapsto m(n)\lambda_1\lambda_2,$$

entonces para todo generador $m \otimes \lambda \in M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ no nulo se tiene que $m \otimes \lambda \notin n^\perp$, pues por hipótesis, para $m \in M$ se tiene que $\langle n, m \rangle \neq 0$. Lo que implica que $\dim n^\perp = 0$, pero sabemos que

$$\dim \mathbb{R}n + \dim n^\perp > 1,$$

por lo tanto,

$$\dim \mathbb{R}n > 1,$$

lo cual es absurdo. □

Observación 1.6. Notemos que si e_1, \dots, e_n es una \mathbb{Z} -base de \mathbb{Z}^n , entonces dado el isomorfismo (1) y como para $m, m' \in \mathbb{Z}^n$ se tiene que $\psi^{m+m'} = \psi^m \psi^{m'}$, entonces $\psi^{e_1}, \dots, \psi^{e_n}$ es una \mathbb{Z} -base de M , similarmente $\lambda^{e_1}, \dots, \lambda^{e_n}$ es una \mathbb{Z} -base de N . Más aún, $\{\lambda^{e_1}, \dots, \lambda^{e_n}\}$ es la base dual de $\{\psi^{e_1}, \dots, \psi^{e_n}\}$, pues por definición se tiene:

$$\langle \lambda^{e_j}, \psi^{e_i} \rangle = \langle e_j, e_i \rangle.$$

Por lo tanto, considerando $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces escribiendo en términos de la base, se tiene $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Haciendo el producto interior de m con cada elemento e_j de la base, se tiene que

$$\langle e_j, m \rangle = \alpha_j,$$

luego, se tiene el monomio de Laurent

$$\begin{aligned} \psi^m &= \psi^{\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i} = (\psi^{e_1})^{\alpha_1} \dots (\psi^{e_n})^{\alpha_n} \\ &= (\psi^{e_1})^{\langle e_1, m \rangle} \dots (\psi^{e_n})^{\langle e_n, m \rangle} \end{aligned}$$

Por otro lado, en teoría de grupos, vimos que el concepto de operación binaria en un grupo G , puede generalizarse al de acción de grupo sobre un conjunto S , el cual nos ayuda a comprender cualidades importantes de este conjunto. En nuestro caso tenemos el toro algebraico T el cual es un grupo mediante un producto coordenada a coordenada, este grupo algebraico (pues también es una variedad algebraica) es vital en esta tesis pues a partir de las acciones que generan sobre ciertos conjuntos se desarrollará toda la teoría de esta tesis. Consideremos una retícula M de rango n , suponiéndola como un semigrupo construimos su \mathbb{K} -álgebra de semigrupo $\mathbb{K}[M]$, la cual es un \mathbb{K} -espacio vectorial. Más aún, se tiene:

$$\mathbb{K}[M] \approx \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}],$$

ver la sección 1.2. Tomemos el toro algebraico T y definamos la siguiente la acción sobre $\mathbb{K}[M]$; sea $f = \sum_i \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,n}} y_1^{e_{i,1}} \dots y_n^{e_{i,n}}$ y sea $t = (t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} T \times \mathbb{K}[M] &\longmapsto \mathbb{K}[M] \\ (t, f) &\longmapsto t \cdot f, \end{aligned}$$

donde

$$t \cdot f := \sum_i \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,n}} t_1^{e_{i,1}} \dots t_n^{e_{i,n}} y_1^{e_{i,1}} \dots y_n^{e_{i,n}}$$

o equivalentemente $t \cdot f(p) := f(t \cdot p)$ para todo $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Notemos que esta acción es lineal y como los caracteres ψ^m son monomios de Laurent por definición, lo que implica que $\psi^m \in \mathbb{K}[M]$, más aún, todo polinomio de Laurent, se puede escribir como una \mathbb{K} -combinación de ellos, lo que implica que:

$$\mathbb{K}[M] = \sum_{\psi^m \in M} \mathbb{K}\psi^m,$$

más aún, probaremos que esta suma es directa. Basta probar que los elementos $\{\psi^m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ forman una \mathbb{K} -base de $\mathbb{K}[M]$. Ya tenemos que son generadores, solo falta la independencia lineal. Supongamos que son linealmente dependientes, entonces existe una \mathbb{K} -combinación lineal mínima de elementos ψ^m de la forma:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{m_j} \psi^{m_j} + \psi^{m_s} = 0,$$

aquí $s > 1$. Por otro lado, como $\psi^{m_1} \neq \psi^{m_s}$, entonces existe $t^* \in T$ tal que $\psi^{m_1}(t^*) \neq \psi^{m_s}(t^*)$; multiplicando la ecuación (2) por $\psi^{m_s}(t^*)$ tenemos para todo $t \in T$:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{m_j} \psi^{m_j}(t) \psi^{m_s}(t^*) + \psi^{m_s}(t) \psi^{m_s}(t^*) = 0.$$

Como $\psi^{m_s}(tt^*) = \psi^m(t) \psi^m(t^*)$, pues es el producto usual de funciones, entonces para todo $t \in T$ (2) se tiene:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{m_j} \psi^{m_j}(t) \psi^{m_j}(t^*) + \psi^{m_s}(t) \psi^{m_s}(t^*) = 0,$$

restando (3) con (4) se tiene para todo $t \in T$

$$\sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{m_j} (\psi^{m_s}(t^*) - \psi^{m_j}(t^*)) \psi^{m_j}(t) = 0.$$

Luego, tenemos una combinación más pequeña respecto a (2) donde algún coeficiente es no nulo, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\{\psi^m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ es una \mathbb{K} -base de $\mathbb{K}[M]$, es decir:

$$\mathbb{K}[M] = \bigoplus_{\psi^m \in M} \mathbb{K}\psi^m.$$

Con esta idea, queremos saber si subespacios \mathbb{K} -subespacios de $\mathbb{K}[M]$ tienen una estructura similar y bajo que condiciones ocurre, el siguiente resultado es muy importante pues de él partiremos para describir los espacios de secciones de las variedades que construiremos más adelante. Para ello, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.7. Supongamos que el toro algebraico T actúa linealmente sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial W de dimensión finita, donde la acción de $t \in T$ en $w \in W$ se escribe como $t \cdot w$. Por lo tanto, podemos definir las siguientes transformaciones lineales:

$$\begin{aligned} \varphi_t : W &\longrightarrow W \\ w &\longmapsto t \cdot w. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la representación para $\rho(t) = \varphi_t \in \text{GL}(W)$, y por lo tanto para un carácter ψ^m existe un subespacio $W_{\psi^m} \subseteq W$ en el cual T actúa sobre ese subespacio mediante ψ^m por la observación (B.9) donde:

$$W_m := W_{\psi^m} = \{w \in W \mid \varphi_t(w) = \psi^m(t)w \text{ para toda } t \in T\},$$

se tiene pues, que si $W_m \neq 0$ entonces todo $w \in W_m - \{0\}$ es un vector propio para todo $t \in T$ con valor propio $\psi^m(t)$. Finalmente el teorema (B.13) implica que:

$$W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} W_m.$$

Lema 1.8. *Sea $A \subseteq \mathbb{K}[M]$ un subespacio estable bajo la acción del toro T . Entonces:*

$$A = \bigoplus_{\psi^m \in A} \mathbb{K}\psi^m.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A' := \bigoplus_{\psi^m \in A} \mathbb{K}\psi^m$, entonces notemos que $A' \subseteq A$. Para la otra contención, sea $f \neq 0$ en A , entonces digamos:

$$f = \sum_{m \in \mathfrak{B}} \lambda_m \psi^m,$$

con $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{Z}^n$ un subconjunto finito y $\lambda_m \in \mathbb{K}^*$. Ahora sea B el \mathbb{K} -subespacio generado por el conjunto $\{\psi^m \mid m \in \mathfrak{B}\}$ y así $f \in B \cap A$.

Notemos que B es T -estable, pues si ψ^m es un generador de B entonces, dado $t \in T$ se tiene:

$$t \cdot \psi^m(p) = \psi^m(t)\psi^m(p),$$

Así pues, $B \cap A$ es T -estable y de dimensión finita, como tenemos las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} \varphi_t : B \cap A &\longrightarrow B \cap A \\ g &\longmapsto t \cdot g \end{aligned}$$

y por la observación (1.7) se tiene que:

$$B \cap A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} (B \cap A)_m$$

donde

$$(B \cap A)_m = \{g \in B \cap A \mid \varphi_t(g) = \psi^m(t)g \text{ para toda } t \in T\}.$$

Es decir $B \cap A$ es generado por todos los vectores propios de todas las transformaciones lineales φ_t con $t \in T$. Como esto ocurre en $\mathbb{K}[M]$ donde los vectores propios son precisamente los caracteres, se tiene pues que $B \cap A$ es generado por los caracteres y como $f \in B \cap A$ se tiene que $\psi^m \in A$ para toda $m \in \mathfrak{B}$, es decir $f \in A'$. \square

Ejemplo 1.9. Sea M la retícula del ejemplo (1.3) y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una \mathbb{Z} -base de M , por lo tanto M es generado como semigrupo por $A := \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Sea $S \subset M$ un semigrupo abeliano finitamente generado, digamos $S = \langle a_1 \dots a_t \rangle$, como $a_i \in M$ se tiene

$$a_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} e_j \quad \text{con } \alpha_j \in \mathbb{Z},$$

entonces se tiene:

$$\mathbb{K}[S] \approx \mathbb{K}[y_1^{\alpha_{1,1}} \dots y_n^{\alpha_{1,n}}, \dots, y_1^{\alpha_{t,1}} \dots y_n^{\alpha_{t,n}}].$$

Entonces, restringiendo la acción de T sobre $\mathbb{K}[S] \subseteq \mathbb{K}[M]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} T \times \mathbb{K}[S] &\longmapsto \mathbb{K}[S] \subseteq \mathbb{K}[M] \\ (t, f) &\longmapsto t \cdot f, \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathbb{K}[S]$ es T -estable y por el lema (1.8) se tiene:

$$\mathbb{K}[S] = \bigoplus_{\psi^m \in S} \mathbb{K}\psi^m.$$

Definición 1.10. Sea V una variedad algebraica normal, se dice que es una *variedad tórica* si contiene un toro algebraico T como abierto de Zariski, y de tal forma que la acción natural:

$$T \times T \longrightarrow T$$

se extiende a una acción:

$$T \times V \longrightarrow V.$$

Ejemplo 1.11. El espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{A}^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{P}^n$ son variedades tóricas pues son irreducibles, normales y contienen al toro $T = (\mathbb{K}^*)^n$ como un abierto denso el cual induce una acción sobre ambos espacios (multiplicando coordenada a coordenada).

1.2. Variedades tóricas a partir de abanicos y politopos

En esta sección construiremos las variedades tóricas, a partir de conos construiremos las afines, veremos como algunas características de los conos se traducen en alguna de estas variedades y como sobre todo la de “pegado” nos lleva a la construcción de una variedad aún más compleja lo cual será análogo a lo que hacemos con los conos que una unión de ellos con una noción de intersección nos da un abanico.

Definición 1.12. Sea $(S, *)$ un semigrupo abeliano y sea \mathbb{K} un campo. Sea $\mathbb{K}[S]$ el conjunto que consta de todas las sumas formales finitas de la forma:

$$\sum_i \lambda_i s_i \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K}, s_i \in S.$$

Si definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K}[S]$:

(1)

$$\sum_i \lambda_i s_i + \sum_j \lambda'_j s_j := \sum_i (\lambda'_i + \lambda_i) s_i$$

(2)

$$\left(\sum_i \lambda_i s_i \right) \cdot \left(\sum_j \lambda'_j s_j \right) := \sum_{i,j} \lambda_i \lambda'_j s_i * s_j,$$

y sean $\bar{0} := \sum 0s_i$ y $\bar{1} := 1e$, donde e es la identidad de S . Entonces, tenemos que $\mathbb{K}[S]$ es un anillo conmutativo con uno y lo llamamos el *anillo de semigrupo asociado* a S .

Observación 1.13. Notemos que si identificamos biyectivamente $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda e \in \mathbb{K}[S]$, entonces tenemos un morfismo inyectivo

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[S]$$

lo que implica que el anillo de semigrupo $\mathbb{K}[S]$ es una \mathbb{K} -álgebra.

Ejemplo 1.14. Sea σ un cono poliédrico racional en una retícula N , entonces el anillo de semigrupo $\mathbb{K}[\sigma \cap N]$ es una \mathbb{K} -álgebra.

Proposición 1.15. *Sea $(S, *)$ un semigrupo abeliano finitamente generado. Entonces $\mathbb{K}[S]$ es una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in \mathbb{K}[S]$. Por definición, se tiene:

$$p = \sum_i \lambda_i s_i,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $s_i \in S$. Suponiendo que a_1, \dots, a_t es un conjunto mínimo de generadores de S , entonces se tiene para toda i la siguiente expresión

$$s_i = a_1^{e_{i,1}} * \dots * a_t^{e_{i,t}},$$

con $e_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sustituyendo, tenemos:

$$p = \sum_i \lambda_i a_1^{e_{i,1}} * \dots * a_t^{e_{i,t}}.$$

Por lo tanto $\mathbb{K}[S]$ es una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito. \square

Ejemplo 1.16. Sea $\sigma \in \Sigma$, un cono poliédrico racional, entonces por la proposición (1.15) se tiene que $\mathbb{K}[S_\sigma]$ es una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito, pues S_σ es un semigrupo finitamente generado por el lema de Gordan (A.44).

Observación 1.17. En la proposición (1.15) probamos que si S es un semigrupo abeliano finitamente generado, entonces podemos construir una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito, donde \mathbb{K} es un campo. Entonces, si suponemos que $\{a_1, \dots, a_t\}$ es un conjunto mínimo de generadores de S , tenemos un epimorfismo de anillos dado por:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t] &\longrightarrow \mathbb{K}[S] \\ f &\longmapsto f(a_1, \dots, a_t), \end{aligned}$$

y por el teorema de isomorfismo de Noether, se tiene que $\mathbb{K}[S] \approx \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]/I$, donde I es $I = \ker \psi$. Consideremos $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ y β_1, \dots, β_t enteros no negativos tales que:

$$a_1^{\alpha_1} * \dots * a_t^{\alpha_t} = a_1^{\beta_1} * \dots * a_t^{\beta_t} \quad (\star),$$

y sea $J \subseteq \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$, el ideal generado por polinomios de la forma

$$y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} - y_1^{\beta_1} \dots y_t^{\beta_t},$$

donde las α_j 's y las β_j 's cumplen (\star) .

Afirmamos que $J = \ker \psi$. En efecto, la contención $J \subseteq \ker \psi$ se sigue por definición de los generadores del ideal J . Para la otra contención, veamos como son los elementos de J ; por el teorema de la base de Hilbert se tiene que $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$ es noetheriano, por lo tanto J es finitamente generado, digamos $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ por lo tanto si $f \in J$, entonces:

$$f = \sum_{i=1}^s g_i f_i \quad \text{con } g_i \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t].$$

Notemos que cada sumando $g_i f_i$ es, a su vez, suma de monomios de cierta forma, es decir: si $\lambda_i y_1^{i_1} \dots y_t^{i_t}$ es algún monomio de g_i donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y como f_i es un generador de J , digamos $f_i = y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} - y_1^{\beta_1} \dots y_t^{\beta_t}$ entonces:

$$(\lambda_i y_1^{i_1} \dots y_t^{i_t})(y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} - y_1^{\beta_1} \dots y_t^{\beta_t}) = \lambda_i (y_1^{i_1 + \alpha_1} \dots y_t^{i_t + \alpha_t} - y_1^{i_1 + \beta_1} \dots y_t^{i_t + \beta_t}),$$

notemos que los nuevos exponentes $i_j + \alpha_j$ y $i_j + \beta_j$ siguen cumpliendo (\star) , por lo tanto

$$(5) \quad f \in J \iff f = \sum \lambda_{\alpha_j, 1, \dots, \beta_j, t} y_1^{\alpha_{j,1}} \dots y_t^{\alpha_{j,t}} - y_1^{\beta_{j,1}} \dots y_t^{\beta_{j,t}},$$

con $\lambda_{\alpha_{j,1}, \dots, \beta_{j,t}} \in \mathbb{K}$, y los $\alpha_{j,i}$'s y $\beta_{j,i}$'s cumplen (\star) . Entonces si tomamos $f \in \ker \psi$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \psi(f) &= f(a_1, \dots, a_t) \\ &= \sum \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} a_1^{e_{i,1}} \dots a_t^{e_{i,t}} \\ &= \bar{0} \in \mathbb{K}[S]. \end{aligned}$$

Si $\lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} = 0$ para toda $e_{i,1}, \dots, e_{i,t}$, entonces ya acabamos, pues $f(y_1, \dots, y_t) = 0 \in J$, pues J es ideal. Por el contrario si existe $\lambda_{e_{j,1}, \dots, e_{j,t}} \neq 0$, entonces notemos que

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_t) &= \sum \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} a_1^{e_{i,1}} \dots a_t^{e_{i,t}} \\ &= \lambda_{e_{j,1}, \dots, e_{j,t}} a_1^{e_{j,1}} \dots a_t^{e_{j,t}} + \sum_{i \neq j} \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} a_1^{e_{i,1}} \dots a_t^{e_{i,t}} \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Entonces, por definición de suma de $\mathbb{K}[S]$, la cual es coeficiente a coeficiente, entonces debe existir un término en el segundo sumando que cancele al primer término, entonces reescribimos:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_t) &= \lambda_{e_{j,1}, \dots, e_{j,t}} a_1^{e_{j,1}} \dots a_t^{e_{j,t}} - \lambda_{e'_{j,1}, \dots, e'_{j,t}} a_1^{e'_{j,1}} \dots a_t^{e'_{j,t}} \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \lambda'_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} a_1^{e_{i,1}} \dots a_t^{e_{i,t}} \\ &= \bar{0}, \end{aligned}$$

y tal que

$$\lambda_{e_{j,1}, \dots, e_{j,t}} = \lambda_{e'_{j,1}, \dots, e'_{j,t}}$$

y

$$a_1^{e_{j,1}} \dots a_t^{e_{j,t}} = a_1^{e'_{j,1}} \dots a_t^{e'_{j,t}}.$$

Ahora, si $\lambda'_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} = 0$ para toda $e_{i,1}, \dots, e_{i,t}$, entonces, ya acabamos pues

$$f(y_1, \dots, y_t) = \lambda_{e_{j,1}, \dots, e_{j,t}} y_1^{e_{j,1}} \dots y_t^{e_{j,t}} - y_1^{e_{j,1}} \dots y_t^{e_{j,t}}$$

y por lo tanto $f \in J$. En caso contrario, se repite el proceso hasta escribir f de la forma:

$$f(y_1, \dots, y_t) = \sum \lambda_{e_{i,1}, \dots, e_{i,t}} (y_1^{e_{i,1}} \dots y_t^{e_{i,t}} - y_1^{e'_{i,1}} \dots y_t^{e'_{i,t}})$$

y tales que $a_1^{e_{i,1}} \dots a_t^{e_{i,t}} = a_1^{e'_{i,1}} \dots a_t^{e'_{i,t}}$. Luego $f \in J$.

Ejemplo 1.18. Sea $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional convexo y supongamos que el semigrupo abeliano S_{σ} tiene:

$$\{a_1, \dots, a_t\}$$

como un conjunto mínimo de generadores. Consideremos \mathbb{K} un campo, entonces por la observación (1.17) existe un ideal $J_{\sigma} \subseteq \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$, tal que

$$\mathbb{K}[S_{\sigma}] \approx \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]/J_{\sigma},$$

donde J_{σ} es el ideal generado por los polinomios $y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} - y_1^{\beta_1} \dots y_t^{\beta_t}$, tales que los exponentes satisfacen:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_t a_t = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_t a_t. \quad (\dagger)$$

Resumiendo, a cada cono poliédrico convexo racional, le hemos asociado un semigrupo abeliano S_σ finitamente generado con el cuál hemos construido una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito $\mathbb{K}[S_\sigma]$, la cual es isomorfa a un cociente de álgebras de polinomios, con el ideal resultante definiremos un conjunto algebraico afín.

Definición 1.19. Sea σ un cono poliédrico convexo racional fuertemente convexo y sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado. Entonces la *variedad tórica afín asociada* a σ se define como:

$$\begin{aligned} U_\sigma &:= \mathcal{V}(J_\sigma) \\ &= \{p := (p_1, \dots, p_t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^t \mid f(p) = 0, \text{ para todo } f \in J_\sigma\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^t. \end{aligned}$$

Al ideal J_σ se le llama *ideal tórico*. De hecho, a estas alturas sólo sabemos que U_σ es un conjunto algebraico afín, sin embargo más adelante en el teorema (1.21) veremos que en efecto, es variedad tórica afín.

Probemos la irreducibilidad y la normalidad de los conjuntos algebraicos U_σ , para ello supongamos que $\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_r\}$, entonces por la proposición (A.31) se tiene:

$$\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^r \tau_i^\vee,$$

donde τ_i son los rayos correspondientes a los generadores $x_i \in \sigma$. Así

$$\mathbb{K}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{K}[S_{\tau_i}].$$

Sin embargo, por hipótesis los x_i son elementos primitivos de N , entonces para cada i , el elemento primitivo x_i lo podemos extender a una base de N , digamos $\{x_i := l_1, \dots, l_n\}$, considerando la base dual de M , entonces se tiene que el semigrupo abeliano S_{τ_i} es generado por $\{l_1^\vee, \pm l_2^\vee, \dots, \pm l_n^\vee\}$ y por lo tanto, tenemos que

$$\mathbb{K}[S_{\tau_i}] \approx \mathbb{K}[y_1, y_2, y_2^{-1}, \dots, y_t, y_t^{-1}]$$

el cual es DFU. Por lo tanto hemos probado que el anillo $\mathbb{K}[S_\sigma]$ es intersección finita de DFU's, entonces en particular es dominio entero y por lo tanto J_σ es ideal primo; luego U_σ es un conjunto irreducible. Y como la intersección de dominios integralmente cerrados es integralmente cerrado se sigue que U_σ es una variedad normal.

Lo que nos queda verificar es que cada U_σ contienen un toro como abierto de Zariski junto con una acción del toro sobre U_σ .

Proposición 1.20. Sea σ un cono poliédrico racional fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces si τ es una cara propia de σ , se tiene que la variedad afín U_τ es un abierto distinguido de U_σ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que τ es cara propia σ , entonces por definición se tiene que

$$\tau = \sigma \cap \{x_0\}^\perp$$

con $x_0 \in \sigma^\vee$, más aún $x_0 \in \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$. Por la proposición (A.43) se tiene que

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-x_0),$$

entonces si $\{a_1, \dots, a_t\}$ es un conjunto mínimo de generadores de S_σ , y además, suponemos $a_t = x_0$, entonces se tiene que $\{a_1, \dots, a_t, -x_0\}$ es un conjunto mínimo de generadores de S_τ . Construyendo la variedad afín asociada a τ , digamos $U_\tau = \mathcal{V}(J_\tau)$ donde

$J_\tau \subset \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t, y_{t+1}]$ es el ideal generado por los polinomios

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_t^{\alpha_t} y_{t+1}^{-\alpha_{t+1}} - y_1^{\beta_1} \cdots y_t^{\beta_t} y_{t+1}^{-\beta_{t+1}}$$

donde los exponentes α_i, β_j son enteros no negativos, tales que:

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_t a_t - \alpha_{t+1} x_0 = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_t a_t - \beta_{t+1} x_0. \quad (\ddagger)$$

Sea $p \in U_\tau \subset \mathbb{A}^{t+1}$, digamos $p = (p_1, \dots, p_t, p_{t+1})$. Notemos que p es raíz de aquellos generadores donde $\alpha_{t+1} = 0 = \beta_{t+1}$ en (\ddagger) , lo que implica que $(p_1, \dots, p_t) \in U_\sigma$. Ahora, considerando aquella condición (\ddagger) donde $\alpha_t = 1 = \alpha_{t+1}$ y anulando aquellos coeficientes α_j para $j = 1, \dots, t-1$ y β_i para $i = 0, \dots, t+1$. Es decir, tenemos la condición

$$a_t - x_0 - 1,$$

y por lo tanto p es raíz del polinomio

$$y_t y_{t+1}^{-1} - 1$$

lo que implica que $p_t p_{t+1}^{-1} = 1$, i.e. $p_t = p_{t+1}$. Luego, tenemos un morfismo inyectivo:

$$\begin{aligned} U_\tau &\longrightarrow U_\sigma \\ (p_1, \dots, p_t, p_{t+1}) &\longmapsto (p_1, \dots, p_t) \quad p_t \neq 0. \end{aligned}$$

Considerando el abierto distinguido $D(y_t) := \mathbb{A}^t - \mathcal{V}(y_t)$, entonces tenemos el isomorfismo de variedades:

$$\varphi_\sigma : U_\tau \longrightarrow U_\sigma \cap D(y_t),$$

i.e. U_τ es un abierto distinguido de U_σ . □

Considerando el cono cero 0, entonces $S_0 = M$, si $\{m_1, \dots, m_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de M , y por lo tanto M está generado como semigrupo por $\{\pm m_1, \dots, \pm m_n\}$, por lo tanto

$$\mathbb{K}[S_0] = \mathbb{K}[M] \approx \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]/J_0,$$

donde J_0 es el ideal por los polinomios $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} - y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n}$, donde α_i y β_i son enteros que cumplen la condición:

$$\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = \beta_1 m_1 + \cdots + \beta_n m_n,$$

pero $\{m_1, \dots, m_n\}$ es base de M , por lo tanto la expresión en términos de los elementos de la base es única, por lo tanto $\alpha_i = \beta_i$ para toda i ; luego $J_0 = 0 \subset \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$ (el ideal cero). Veremos quien es $\mathcal{V}(J_0)$, para ello, notemos que tomando $a = (a_1, \dots, a_n) \in T = (\mathbb{K})^*$, entonces el siguiente ideal

$$\mathfrak{M}_a := \langle y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n \rangle \subseteq \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$$

es máximo, pues

$$\mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]/\mathfrak{M}_a \approx \mathbb{K}.$$

Más aún, todos los ideales máximos de $\mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$, tienen esa forma. En efecto, sea \mathfrak{M} un ideal máximo, por lo tanto

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]/\mathfrak{M} =: \mathbb{L}$$

implica que la extensión \mathbb{L}/\mathbb{K} es de tipo finito y por el lema de Zariski se tiene que es una extensión algebraica y por lo tanto finita, pero \mathbb{K} es algebraicamente cerrado por hipótesis, entonces $\mathbb{K} = \mathbb{L}$.

Entonces existen $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ para toda $i = 1, \dots, n$ tales que

$$y_i + \mathfrak{M} = a_i \quad \text{y} \quad y_i^{-1} + \mathfrak{M} = b_i,$$

por lo tanto $y_i - a_i, y_i^{-1} - b_i \in \mathfrak{M}$. Como \mathfrak{M} es ideal, se tiene:

$$\begin{aligned} (y_i - a_i)(y_i^{-1} - b_i) &= 1 - y_i b_i - y_i^{-1} a_i + a_i b_i \in \mathfrak{M} \\ y_i^{-1}(y_i - a_i) &= 1 - y_i^{-1} a_i \in \mathfrak{M} \\ y_i(y_i^{-1} - b_i) &= 1 - y_i b_i \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

sumando, se tiene que $a_i b_i - 1 \in \mathfrak{M}$. Notemos que si $a_i b_i - 1 \neq 0$ se tiene una contradicción, por que \mathfrak{M} es un ideal máximo (en particular, es propio). Por lo tanto $a_i b_i - 1 = 0$, es decir $a_i^{-1} = b_i$ y además

$$\mathfrak{M}_a = \langle y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n \rangle \subseteq \mathfrak{M}.$$

Pero \mathfrak{M}_a es máximo, entonces $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}$. Por lo tanto, tenemos una correspondencia biyectiva

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^*)^n &\longleftrightarrow \text{espectro máximo de } \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}] \\ (a_1, \dots, a_n) &\longleftrightarrow \langle y_1 - a_1, \dots, y_n - a_n \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando ideales $I \subseteq \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$, y sus respectivos conjuntos cerrados $V(I) \subseteq \text{Spec}(\mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}])$. Restringiéndolos a $(\mathbb{K}^*)^n$, y usando la identificación de los ideales máximos con puntos de $T = (\mathbb{K}^*)^n$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(I) &:= V(I) \cap \text{Specm}(\mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]) \\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \in T \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in I\}. \end{aligned}$$

Entonces si tiene el ideal $J_0 = 0 \subset \mathbb{K}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$, luego

$$\mathcal{V}(J_0) = T = (\mathbb{K}^*)^n.$$

Y por lo tanto si σ es un cono poliédrico fuertemente convexo, entonces $U_0 = V(J_0) = T$ es un abierto distinguido de U_σ por la proposición (1.20). Ahora considerando la variedad producto $T \times_{\mathbb{K}} U_\sigma$ podemos definir el siguiente morfismo de variedades afines, la cual corresponde a la acción del toro sobre la variedad U_σ :

$$\begin{aligned} T \times U_\sigma &\longrightarrow U_\sigma \\ (t, p) &\longrightarrow t \cdot p \end{aligned}$$

donde $t \cdot p$ es el producto coordenada a coordenada de los vectores t, p en \mathbb{A}^n . Por lo tanto, en efecto, U_σ es una variedad tórica afín.

Hemos probado así el teorema:

Teorema 1.21. *Sea Σ un abanico en una retícula N . Entonces para cada cono poliédrico racional fuertemente convexo $\sigma \in \Sigma$, le corresponde la variedad tórica afín U_σ .*

Observación 1.22. En la proposición (1.20) se probó que ser cara de un cono σ implica ser abierto distinguido de la variedad tórica U_σ , por lo tanto una cuestión importante a saber es: ¿qué relación tienen dos variedades tóricas asociadas a conos que compartan una cara.? Para ello, supongamos que si $\sigma \cap \tau$ es una cara compartida de los conos poliédricos racionales fuertemente convexos σ y τ , entonces la proposición (1.20) implica la existencia de dos isomorfismos:

$$U_\sigma \cap D(y_t) \xrightarrow{\varphi_\sigma^{-1}} U_{\sigma \cap \tau} \xrightarrow{\varphi_\tau} U_\tau \cap D(y_s).$$

Definiendo el *isomorfismo de pegado* $\psi_{\sigma, \tau} := \varphi_\tau \circ \varphi_\sigma^{-1} : U_\sigma \cap D(y_t) \longrightarrow U_\tau \cap D(y_s)$, entonces identificamos puntos de la variedad tórica U_σ con la variedad U_τ mediante la

variedad tórica $U_{\sigma \cap \tau}$, por lo tanto decimos que “pegamos” la variedad U_σ con U_τ a lo largo de $U_{\sigma \cap \tau}$, más aún:

$$U_\sigma \cap U_\tau \approx U_{\sigma \cap \tau}.$$

Supongamos ahora que tenemos un abanico Σ en el espacio $N_{\mathbb{R}}$, entonces por definición de abanico se tiene que para cualesquiera $\sigma, \tau \in \Sigma$ se tiene que la intersección $\sigma \cap \tau$ es cara de σ y τ , así como $\sigma \cap \tau \in \Sigma$, entonces por la observación (1.22) se tiene que si consideramos la familia de variedades afines $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ la intersección de dos elementos es otro elemento de la familia. Por otro lado, cada variedad afín U_σ viene equipada con su *gavilla estructural de funciones regulares* \mathcal{O}_{U_σ} , por lo tanto, tomando un abierto U de U_σ , se tiene el anillo de funciones regulares en U :

$$\mathcal{O}_{U_\sigma}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es regular en } U\}.$$

Más aún, notemos que para cualesquiera $\sigma, \tau \in \Sigma$ se tiene el siguiente morfismo de gavillas,

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{\sigma, \tau} : \mathcal{O}_{U_\sigma}|_{U_{\sigma \cap \tau}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{U_\tau}|_{U_{\sigma \cap \tau}} \\ f &\longmapsto f \circ \psi_{\sigma, \tau}^{-1} \end{aligned}$$

donde $\psi_{\sigma, \tau}$ es el morfismo de pegado de la observación (1.22), y como este es isomorfismo, se tiene que $\mathfrak{V}_{\sigma, \tau}$ es isomorfismo de gavillas. Entonces por el ejemplo 2.11 de [13], tenemos que la unión

$$X_\Sigma := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$$

es un espacio topológico donde U es abierto de X_Σ si y sólo si $U \cap U_\sigma$ es abierto para todo $\sigma \in \Sigma$, además se tiene la existencia de una gavilla sobre X_Σ , tal que:

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}|_{U_\sigma} = \mathcal{O}_{U_\sigma}.$$

Teorema 1.23. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces $(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$ es una prevariedad algebraica sobre \mathbb{K} .*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción X_Σ tiene una cubierta abierta de variedades afines y también ya tenemos la gavilla estructural \mathcal{O}_{X_Σ} que restringida a los pedazos afines U_σ es la gavilla \mathcal{O}_{U_σ} , por lo que solo resta probar la conexidad. Por contradicción, suponga que X_Σ es desconexo, por lo tanto existen abiertos no vacíos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 de X_Σ disjuntos, tales que:

$$X_\Sigma = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2,$$

como son abiertos no vacíos, se tiene que existen conos $\sigma, \tau \in \Sigma$ tales que:

$$\mathcal{O}_1 \cap U_\sigma \neq \emptyset \quad \mathcal{O}_2 \cap U_\tau \neq \emptyset,$$

ambos abiertos de U_σ y U_τ respectivamente. Considerando el abierto distinguido $U_{\sigma \cap \tau}$, por la irreducibilidad de cada pedazo afín, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 \cap U_\sigma \cap U_{\sigma \cap \tau} &= \mathcal{O}_1 \cap U_{\sigma \cap \tau} \neq \emptyset \\ \mathcal{O}_2 \cap U_\tau \cap U_{\sigma \cap \tau} &= \mathcal{O}_2 \cap U_{\sigma \cap \tau} \neq \emptyset \end{aligned}$$

ambos abiertos de la variedad $U_{\sigma \cap \tau}$ y nuevamente por la irreducibilidad se tiene que:

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap U_{\sigma \cap \tau} \neq \emptyset,$$

en particular $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$, lo que contradice que son disjuntos. Luego X_Σ es una prevariedad algebraica. \square

Para facilitar la lectura, cuando hagamos referencia a la prevariedad $(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$ escribiremos únicamente X_Σ . Pues bien, hemos construido para un abanico Σ una prevariedad algebraica X_Σ , sin embargo localmente podemos decir aún más pues por pedazos es una variedad tórica afín, por lo que nos preguntamos en este punto: ¿qué podemos decir de la prevariedad algebraica X_Σ ? Para ello, probaremos que no solo es conexo este espacio topológico, más aún, es irreducible y por lo tanto cada abierto U_σ es denso, lo que implica que buena parte de la información de U_σ la podemos extender a toda la variedad X_Σ .

Lema 1.24. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces su prevariedad algebraica asociada X_Σ , es un espacio topológico irreducible, normal y contiene un toro como un abierto denso el cual genera una acción sobre X_Σ .*

DEMOSTRACIÓN. La irreducibilidad se prueba de manera similar a la conexidad como en el teorema (1.23) al probar que todos los abiertos no vacíos de X_Σ se intersectan.

Para ver la normalidad, sea $p \in X_\Sigma$, entonces existe $\sigma \in \Sigma$ tal que el punto p está en el abierto U_σ , y como

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma, p} = \mathcal{O}_{U_\sigma, p}$$

y $\mathcal{O}_{U_\sigma, p}$ es normal pues U_σ es variedad afín normal, lo que implica que X_Σ es normal.

Ahora, el abierto $U_0 = T$ está contenido en X_Σ por definición.

Finalmente, solo falta extender la acción del toro algebraico en sí mismo a toda la prevariedad X_Σ , para ello notemos que la familia $\{T \times_{\mathbb{K}} U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ es una cubierta abierta de la variedad algebraica $T \times_{\mathbb{K}} X_\Sigma$, entonces tenemos los morfismos regulares

$$T \times_{\mathbb{K}} U_\sigma \longrightarrow U_\sigma \subseteq X_\Sigma,$$

el cual corresponde a la acción del toro sobre el pedazo afín U_σ de X_Σ , si denotamos a estos morfismo Γ_σ , notemos que $\Gamma_\sigma|_{U_\sigma \cap U_\tau} = \Gamma_\tau|_{U_\sigma \cap U_\tau}$ (pues, es la acción restringida a $U_\sigma \cap U_\tau$) entonces por el ejemplo 2.11 de [13] tenemos el morfismo de variedades:

$$\Gamma : T \times_{\mathbb{K}} X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma,$$

tal que $\Gamma|_{U_\sigma} = \Gamma_\sigma$ el cual es regular, pues cada Γ_σ es regular. Es decir extendimos la acción del toro T a toda la prevariedad algebraica X_Σ . \square

Recuerde que una prevariedad algebraica se dice *separada* o equivalentemente se dice *variedad algebraica* si cumple las condiciones equivalentes siguientes:

- i) Para toda prevariedad algebraica Y y para cualesquiera morfismos $f, g : Y \rightrightarrows X$ el conjunto:

$$\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$$

es un conjunto cerrado en Y .

- ii) La diagonal Δ_X es un conjunto cerrado en $X \times_{\mathbb{K}} X$

Para probar que las prevariedades que son de nuestro interés son variedades, necesitamos primero este resultado.

Teorema 1.25. *Sea X una prevariedad algebraica sobre un campo \mathbb{K} algebraicamente cerrado. Entonces son equivalentes:*

- (a) X es variedad algebraica.
 (b) Para cualesquiera abiertos afines U y V de X , se tiene que $U \cap V$ es afín y el morfismo de anillos de coordenadas

$$\mathbb{K}[U] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[U \cap V],$$

inducido por las inclusiones $U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$ es un epimorfismo.

(c) La condición (b) es cierta para los abiertos U_j de una cubierta abierta afín $\{U_i\}_{i \in \Gamma}$ de X .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos (a) implica (b), supongamos pues que X es separada. Sean U y V abiertos afines de X . Notemos que:

$$U \cap V \approx \Delta_{U \times V} = \Delta_X \cap (U \times_{\mathbb{K}} V) \subseteq U \times_{\mathbb{K}} V.$$

Como Δ_X es cerrado en $X \times_{\mathbb{K}} X$, entonces $U \cap V$ es un conjunto cerrado, es decir es un conjunto afín, y por lo tanto se tiene un morfismo inyectivo de variedades (dado por la inclusión), el cual es una inmersión cerrada

$$j : U \cap V \longrightarrow U \times_{\mathbb{K}} V$$

y por lo tanto, tenemos j^* el cual es un epimorfismo de \mathbb{K} -álgebras. Considerando el isomorfismo f , tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[U \times_{\mathbb{K}} V] & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{K}[U \cap V] \\ f \uparrow & \nearrow j^* \circ f & \\ \mathbb{K}[U] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[V] & & \end{array}$$

y por lo tanto $j^* \circ f : \mathbb{K}[U] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[U \cap V]$ es un epimorfismo.

Es trivial (b) implica (c).

Supongamos (c), sea $\{U_i\}_{i \in \Gamma}$ una cubierta abierta de X . Por hipótesis $U_i \cap U_j$ es afín para cualesquiera $i, j \in \Gamma$ y tenemos un epimorfismo:

$$j^* : \mathbb{K}[U_i] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[U_j] \longrightarrow \mathbb{K}[U_i \cap U_j]$$

por lo tanto $j : U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \times_{\mathbb{K}} U_j$ es una inmersión cerrada, lo que implica que $U_i \cap U_j$ es cerrado en $U_i \times_{\mathbb{K}} U_j$, pero

$$U_i \cap U_j \approx \Delta_{U_i \cap U_j} = \Delta_X \cap (U_i \times_{\mathbb{K}} U_j) \subset U_i \times_{\mathbb{K}} U_j,$$

como ser cerrado es una propiedad local y $\{U_i \times_{\mathbb{K}} U_j\}$ es una cubierta abierta de $X \times_{\mathbb{K}} X$, entonces se tiene que Δ_X es cerrado en $X \times_{\mathbb{K}} X$. \square

Corolario 1.26. Sea Σ un abanico y sea X_Σ su prevariedad algebraica asociada. Entonces X_Σ es variedad algebraica.

DEMOSTRACIÓN. Por construcción los afines $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ es una cubierta abierta. Por la observación (1.22) se tiene que $U_\sigma \cap U_\tau \approx U_{\sigma \cap \tau}$ es afín y considerando el morfismo de variedades afines:

$$\begin{aligned} \Phi : U_{\sigma \cap \tau} &\longrightarrow U_\sigma \times_{\mathbb{K}} U_\tau \\ u &\longmapsto (\varphi_\sigma(u), \varphi_\tau(u)), \end{aligned}$$

la cual es una inmersión cerrada, por lo tanto tenemos un epimorfismo:

$$\mathbb{K}[U_\sigma] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[U_\tau] \longrightarrow \mathbb{K}[U_{\sigma \cap \tau}],$$

por el teorema (1.25) se tiene que X_Σ es separada. \square

Definición 1.27. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$, entonces nombramos a la variedad algebraica $(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma})$ como la *variedad tórica asociada al abanico* Σ .

Para ilustrar este concepto haremos unos ejemplos en dimensión 1 y 2, pues son las dimensiones que podemos visualizar.

Ejemplo 1.28. Consideremos el siguiente abanico Σ en \mathbb{R} :

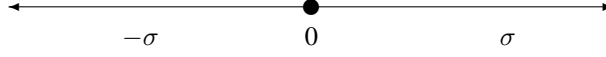


Figura 1.28: Abanico asociado a la recta proyectiva \mathbb{P}^1

notemos que el abanico Σ sólo consta de tres conos, i.e. $\Sigma = \{\sigma, -\sigma, 0\}$. Entonces considerando un campo \mathbb{K} algebraicamente cerrado, tenemos las siguientes variedades tóricas afines:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[S_\sigma] &\approx \mathbb{K}[y] \quad \text{por lo tanto } U_\sigma = \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{K}[S_{-\sigma}] &\approx \mathbb{K}[x] \quad \text{por lo tanto } U_{-\sigma} = \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{K}[S_0] &\approx \mathbb{K}[y, x] \quad \text{por lo tanto } U_\sigma = \mathbb{A}^1 - \{0\}.\end{aligned}$$

Pegando las variedades $U_{-\sigma}$ con U_σ a lo largo de $U_{\{0\}}$, mediante el isomorfismo de pegado cuando $x, y \neq 0$:

$$\begin{aligned}U_{-\sigma} &\longrightarrow U_\sigma \\ x &\longmapsto y.\end{aligned}$$

Más aún, mediante los homeomorfismos:

$$\begin{aligned}U_{-\sigma} &\longrightarrow D(y_1) = \mathbb{P}^1 - \mathcal{V}(y_1) \\ y &\longmapsto [1, y],\end{aligned}$$

(el otro homeomorfismo es similar) se tiene que $X_\Sigma \approx \mathbb{P}^1$.

Ejemplo 1.29. Consideremos el abanico Σ en \mathbb{R}^2 , de la figura (1.29), y sean los conos σ_i para $i = 1, 2, 3$ de dimensión 2, que resultan ser una cubierta abierta de X_Σ por la proposición (1.20), tenemos pues:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[S_{\sigma_1}] &\approx \mathbb{K}[y_1, y_2] \quad \text{por lo tanto } U_{\sigma_1} = \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{K}[S_{\sigma_2}] &\approx \mathbb{K}[y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}] \quad \text{por lo tanto } U_{\sigma_2} = \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{K}[S_{\sigma_3}] &\approx \mathbb{K}[y_2^{-1}, y_1 y_2^{-2}] \quad \text{por lo tanto } U_{\sigma_3} = \mathbb{A}^2.\end{aligned}$$

Tomando coordenadas homogéneas $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$, entonces identificando con las coordenadas de las variedades afines:

$$y_1 \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \quad \text{y} \quad y_2 \longmapsto \frac{x_2}{x_0},$$

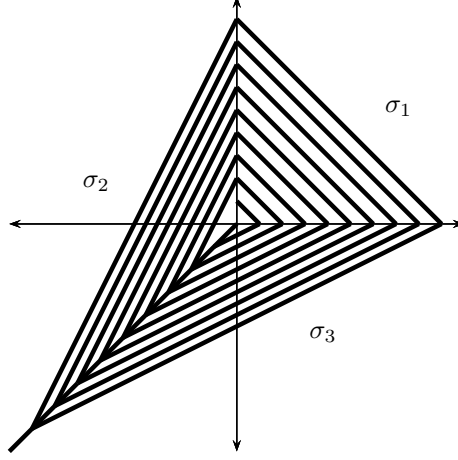
entonces tenemos que:

$$U_{\sigma_1} \approx D(x_0) = \mathbb{P}^2 - \mathcal{V}(x_0)$$

$$U_{\sigma_2} \approx D(x_1) = \mathbb{P}^2 - \mathcal{V}(x_1)$$

$$U_{\sigma_3} \approx D(x_2) = \mathbb{P}^2 - \mathcal{V}(x_2),$$

finalmente se tiene que $X_\Sigma \approx \mathbb{P}^2$.

Figura 1.29: Abanico asociado a \mathbb{P}^2

Ejemplo 1.30. Sea Σ el siguiente abanico en \mathbb{R}^2 de la figura (1.30). Aquí los rayos (conos de dimensión 1) están determinados por los elementos canónicos de la base de \mathbb{R}^2 , digamos e_1, e_2 y los denotamos como:

$$\sigma_1 = \text{pos}\{e_1\} \quad \sigma_2 = \text{pos}\{e_2\},$$

aquí $\sigma_{-1} = -\sigma_1$ y $\sigma_{-2} = -\sigma_2$. Los conos de dimensión 2, los escribimos como $\sigma_{i,j}$ para $i = \pm 1$ y $j = \pm 2$, más aún, notemos que:

$$\sigma_{i,j} \approx \sigma_i \times \sigma_j$$

para toda i, j . Como los rayos son generados por los elementos de la base de \mathbb{Z}^2 , los conos duales son generados por los de la base dual, lo que implica que:

$$\sigma_{i,j}^\vee \approx \sigma_i^\vee \times \sigma_j^\vee$$

para toda i, j . Lo que implica que $S_{\sigma_{i,j}} \approx S_{\sigma_i} \times S_{\sigma_j}$, así

$$\mathbb{K}[S_{\sigma_{i,j}}] \approx \mathbb{K}[S_{\sigma_i} \times S_{\sigma_j}] \approx \mathbb{K}[S_{\sigma_i}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[S_{\sigma_j}],$$

donde el segundo isomorfismo está dado en los generadores por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[S_{\sigma_i} \times S_{\sigma_j}] &\longrightarrow \mathbb{K}[S_{\sigma_i}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[S_{\sigma_j}] \\ \lambda(s_i, s_j) &\longmapsto (\lambda s_i) \otimes s_j, \end{aligned}$$

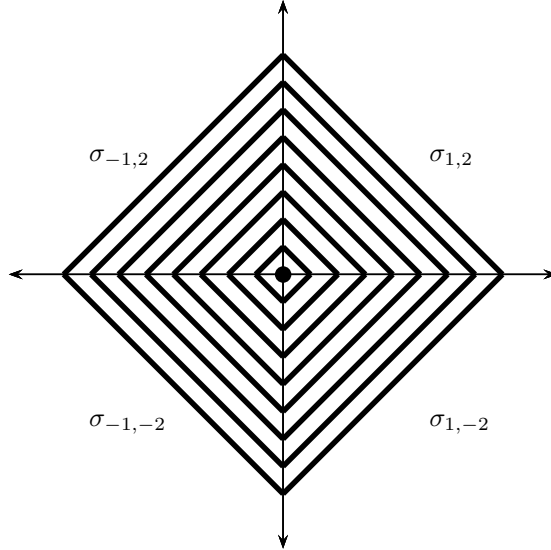
cuya inversa es $\varphi^{-1} : (\lambda_i s_i) \otimes (\lambda_j s_j)$. Hemos probado así

$$\mathbb{K}[U_{\sigma_{i,j}}] \approx \mathbb{K}[U_{\sigma_i}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[U_{\sigma_j}] \approx \mathbb{K}[U_{\sigma_i} \times_{\mathbb{K}} U_{\sigma_j}].$$

Por lo tanto $U_{\sigma_{i,j}} \approx U_{\sigma_i} \times U_{\sigma_j}$, para $i = \pm 1$ y $j = \pm 2$. Entonces si consideramos los ejes coordenados de \mathbb{R}^2 como abanicos en \mathbb{R} , entonces por el ejemplo (1.28) entonces tenemos que cada variedad tórica U_{σ_i} o U_{σ_j} es homeomorfa a un cubriente afín de \mathbb{P}^1 , por lo tanto:

$$U_{\sigma_{i,j}} \approx D(y_i) \times D(x_j) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Luego $X_\Sigma \approx \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Figura 1.30: Abanico asociado a $\mathbb{P}^1 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^1$

Definición 1.31. Sea P un politopo reticular en $M_{\mathbb{R}}$. Se dice que

$$X_P := X_{\Sigma_P}$$

es la *variedad tórica asociada* al politopo P .

1.3. Órbitas y conos

Hemos construido en la sección (1.2) variedades tóricas afines o algebraicas, sin embargo aparte de las propiedades geométricas que podemos tener de estos objetos algebraicos tenemos una acción que ejerce el toro algebraico sobre cada pieza afín que conforma nuestra variedad algebraica. La acción sobre un conjunto induce una partición en él mismo, por lo que una pregunta muy válida en este momento es: ¿cómo se comporta esta partición sobre la variedad tórica X_{Σ} ? cada pedazo de esta partición la llamamos *órbita* o para ser más precisos *T-órbita* la cual se define de la siguiente forma, para $p \in X_{\Sigma}$, la *T-órbita* de p es el conjunto

$$\text{orb}_T(p) := T \cdot p = \{t \cdot p \mid \text{para toda } t \in T\}.$$

Notemos, que de acuerdo a como construimos la acción del toro T sobre X_{Σ} , tenemos que $p \in U_{\sigma}$ para algún $\sigma \in \Sigma$, lo que implica que $\text{orb}_T(p) \subseteq U_{\sigma}$.

Ahora, notemos que tenemos un orden en el conjunto de conos σ de un abanico Σ , de la siguiente manera, dados $\sigma, \tau \in \Sigma$, decimos que τ es más chico que σ si y sólo si $\tau \leq \sigma$ (τ es cara de σ), notemos que este orden es parcial, pues:

- (i) Es reflexivo, pues cada cono σ es cara de sí mismo, por lo tanto $\sigma \leq \sigma$.
- (ii) Es antisimétrico, pues si $\tau \leq \sigma$ y $\sigma \leq \tau$, en particular sucede $\tau \subseteq \sigma$ y $\sigma \subseteq \tau$ lo que implica que $\sigma = \tau$.
- (iii) Es transitivo, pues si $\tau \leq \sigma$ y $\sigma \leq \gamma$ se tiene que $\tau \leq \gamma$ pues la cara de una cara de σ es cara de σ .

Hemos ordenado así los conos σ de un abanico Σ , por lo tanto dado un punto $p \in X_\Sigma$ existe un cono mínimo $\sigma \in \Sigma$ (bajo el orden \leq) tal que $p \in U_\sigma$, en efecto dado $p \in X_\Sigma$ se tiene que existe una familia finita $\{U_{\sigma_i}\}_{i \in I} \subseteq \{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ tal que $p \in U_{\sigma_i}$ para toda $i \in I$, entonces definiendo $\sigma' = \bigcap_{i \in I} \sigma_i \in \Sigma$ se tiene $p \in U_{\sigma'}$ y σ' es el cono mínimo tal que $p \in U_{\sigma'}$. Por la naturaleza de la acción del toro T , tenemos que $\text{orb}_T(p) \subseteq U_{\sigma'}$ y por lo tanto la T -órbita es un conjunto algebraico afín.

Teorema 1.32. *Sea X_Σ la variedad tórica asociada al abanico Σ . Entonces hay una correspondencia biyectiva entre los conjuntos:*

$$\{T\text{-órbitas de } X_\Sigma\} \longleftrightarrow \{\text{conos de } \Sigma\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\text{orb}_T(p)$ una T -órbita de X_Σ , entonces existe un cono mínimo $\sigma \in \Sigma$ tal que $p \in U_\sigma$. Recíprocamente sea $\sigma \in \Sigma$, construyamos su variedad tórica afín $U_\sigma \in \mathbb{A}^t$ y definamos r el entero máximo tal que $1 \leq r \leq t$ y tal que:

$$U_\sigma \subset \bigcap_{j=1}^r D(y_{i,j}),$$

donde $D(y_{i,j})$ es el abierto distinguido asociado a la proyección $y_{i,j}$. Como permutar las coordenadas es una función biregular, podemos reenumerar si es necesario y suponer que:

$$U_\sigma \subset \bigcap_{j=1}^r D(y_j).$$

Por lo tanto si $p = (p_1, \dots, p_t) \in U_\sigma$ se tiene que $p_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, r$, definamos:

$$\mathfrak{U}_\sigma := \{p \in U_\sigma \mid p_j = 0 \text{ para } j \geq r+1\} \subset U_\sigma,$$

claramente para cualesquiera $p, p' \in \mathfrak{U}_\sigma$ se tiene que $\text{orb}_T(p) = \text{orb}_T(p')$ y nuestra afirmación es que σ es el cono mínimo tal que $p \in U_\sigma$ para todo $p \in \mathfrak{U}_\sigma$ y más aún, son todos los puntos tales que σ es el cono mínimo. En efecto, sea $\tau < \sigma$, entonces por la proposición (1.20) se tiene que U_τ es abierto distinguido de U_σ y además:

$$U_\tau \approx U_\sigma \cap D(y_i) \quad \text{para algún } i,$$

pero por hipótesis, las primeras r -coordenadas de todos los puntos de U_σ son no nulas y como la contención es propia (pues τ es cara propia de σ) se tiene $i \geq r+1$. Por lo tanto si $p \in \mathfrak{U}_\sigma$ entonces $p \in U_\sigma - U_\tau$ para toda $\tau < \sigma$, lo que implica que para todo $p \in \mathfrak{U}_\sigma$ se tiene σ es el cono mínimo tal que $p \in U_\sigma$, para probar que son todos, supongamos que $p \in U_\sigma - \mathfrak{U}_\sigma$ entonces por definición se tiene que $p_j \neq 0$ para algún $j \geq r+1$ y por lo tanto $p \in U_\sigma \cap D(y_j)$, pero estos puntos son aquellos que son raíces de aquellos polinomios

$$y_1^{\alpha_1} \dots y_j^{\alpha_j} \dots y_t^{\alpha_t} - y_1^{\beta_1} \dots y_j^{\beta_j} \dots y_t^{\beta_t},$$

donde $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$ pues la j -ésima coordenada no es nula. Aquí el semigrupo abeliano S_σ es generado por a_1, \dots, a_t , por lo tanto, el semigrupo abeliano finitamente generado asociado a este conjunto es:

$$S' := S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-a_j)$$

y claramente si definimos $\tau := \sigma \cap \{a_j\}^\perp$ la cual es una cara propia de σ (es propia porque $a_j \neq 0$ y es generador) entonces se tiene que $p \in U_\tau$ y $\tau < \sigma$. \square

Hemos probado pues, que por cada cono σ en el abanico Σ le corresponde una única T -órbita y que los elementos que pertenecen a esta órbita son aquellos para los cuales σ es el cono mínimo para que estos puntos pertenezcan al pedazo afín U_σ . Para facilitar

la notación de las órbitas y hacer palpable la biyección mostrada en el teorema (1.32) definiremos las órbitas en términos del cono que le corresponden.

Definición 1.33. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y sea X_{Σ} su variedad tórica asociada. Definimos la *órbita asociada al cono* $\sigma \in \Sigma$ como:

$$\text{órb}(\sigma) := \text{órb}_T(p) \text{ donde } \sigma \text{ es el cono mínimo tal que } p \in U_{\sigma}.$$

Hemos agrupado los puntos de X_{Σ} en pedazos, los cuales corresponden a las órbitas generadas a partir de la acción del toro algebraico. De estas, tenemos un número finito por el teorema (1.32) y en la prueba del mismo se tiene que dado $\sigma \in \Sigma$ se considera el subconjunto $\mathfrak{U}_{\sigma} \subset U_{\sigma}$ el cual consiste en tomar todos los puntos que compartan el máximo de coordenadas no nulas y luego el resto que si lo sean. Probamos pues que σ es el cono mínimo para todos los puntos de \mathfrak{U}_{σ} y además, que son todos los puntos de X_{Σ} tal que σ es cono mínimo, así definimos la órbita asociada al cono σ y la denotamos como $\text{órb}(\sigma)$, sin embargo no es difícil ver que:

$$\text{órb}(\sigma) = \mathfrak{U}_{\sigma},$$

y por la naturaleza de los conjuntos \mathfrak{U}_{σ} , las T -órbitas consisten en hacer el producto de toros algebraicos de alguna dimensión con un origen con una dimensión adecuada.

Ejemplo 1.34. Veamos algunos casos muy especiales, sea $\sigma \in \Sigma$ y sea $U_{\sigma} \subset \mathbb{A}^t$ su respectiva variedad tórica afín. Supongamos primero que el origen $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^t$ está en U_{σ} , entonces $U_{\sigma} \not\subseteq D(y_i)$ para toda i , lo que implica que $r = 0$ y por lo tanto

$$\text{órb}(\sigma) = \bar{0}.$$

En cambio si $r = n$, se tiene $U_{\sigma} \subseteq \bigcap_{i=1}^n D(y_i) = T$, lo que implica que $U_{\sigma} = T$, es decir $\sigma = 0$ y como el cono cero, es el mínimo de Σ , se tiene que si $p \in T$, entonces $\text{órb}_T(p) = T = \text{órb}(0)$.

No olvidemos que la acción del toro T sobre X_{Σ} está inducida por la acción de T sobre cada pedazo afín U_{σ} , por lo que cada variedad tórica afín U_{σ} es unión disjunta de estas T -órbitas, veremos en el siguiente resultado como son órbitas respecto en que pedazo afín se encuentran.

Teorema 1.35. Sea X_{Σ} una variedad tórica asociada al abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $\sigma \in \Sigma$. Entonces:

$$U_{\sigma} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} \text{órb}(\tau).$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (1.20) se tiene que si $\tau \leq \sigma$ entonces U_{τ} es abierto distinguido de U_{σ} y como $\text{órb}(\tau) \subseteq U_{\tau}$, se tiene:

$$\bigcup_{\tau \leq \sigma} \text{órb}(\tau) \subseteq U_{\sigma}.$$

Recíprocamente sea $p \in U_{\sigma}$, entonces por el teorema (1.32) se tiene que existe τ un cono mínimo tal que $p \in U_{\tau}$ y por definición:

$$\text{órb}_T(p) = \text{órb}(\tau),$$

pero $p \in U_{\sigma \cap \tau}$ y por definición de abanico $\sigma \cap \tau$ es cara de σ y de τ , como τ es cono mínimo se tiene que $\tau = \sigma \cap \tau$ y por lo tanto, $\tau \leq \sigma$, lo que implica que:

$$U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{\tau \leq \sigma} \text{órb}(\tau).$$

□

Ejemplo 1.36. Consideremos el siguiente abanico, que consta de un cono σ y sus caras:

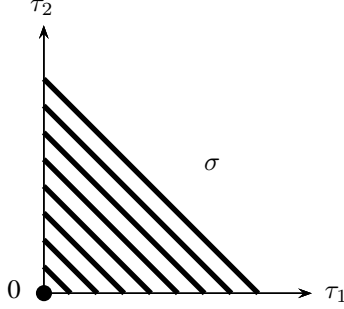


Figura 1.36: Abanico que consta de un cono σ y sus caras

De la figura (1.36), podemos suponer que todos los conos son generados por los elementos de la base canónica de \mathbb{Z}^2 . Construyendo las correspondientes variedades tóricas afines:

$$U_\sigma = \mathbb{A}^2, \quad U_{\tau_1} = \mathbb{K} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^*, \quad U_{\tau_2} = \mathbb{K}^* \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}, \quad U_{\{0\}} = T = (\mathbb{K}^*)^2,$$

además, por el teorema (1.35) se tiene:

$$U_\sigma = \text{órb}(\sigma) \cup \text{órb}(\tau_1) \cup \text{órb}(\tau_2) \cup \text{órb}(0),$$

y por el ejemplo (1.34) se tiene:

$$\text{órb}(\sigma) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \text{órb}(0) = T,$$

y como:

$$\begin{aligned} U_{\tau_1} \subset D(y_2) \text{ tenemos } \text{órb}(\tau_1) &= 0 \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^* \\ U_{\tau_2} \subset D(y_1) \text{ tenemos } \text{órb}(\tau_2) &= \mathbb{K}^* \times_{\mathbb{K}} 0. \end{aligned}$$

Por lo que la descomposición de U_σ como unión de las T -órbitas es clara.

En este ejemplo, se da un hecho curioso a pesar de que σ es un cono “más grande” su órbita es un solo punto, mientras que los conos “más chicos” tienen órbitas muchos más grandes, esto nos lleva a sospechar que la biyección mostrada en el teorema (1.32) invierte los “tamaños” de los conos con los “tamaños” de sus órbitas asociadas, para probar este hecho, a continuación esta pequeña observación.

Observación 1.37. Sean σ, τ conos poliédricos racionales fuertemente convexos tales que $\tau \leq \sigma$, entonces por la proposición (1.20) se tiene que $U_\tau \approx U_\sigma \cap D(y_j)$ para algún $1 \leq j \leq t$. Por lo tanto si r_τ es el máximo entero tal que $0 \leq r_\tau \leq t$ y tal que:

$$U_\tau \subseteq \bigcap_{i=1}^{r_\tau} D(y_i),$$

y análogamente r_σ el entero máximo para la variedad U_σ , aquí

$$(6) \quad U_\sigma \subseteq \bigcap_{i=1}^{r_\sigma} D(y_i).$$

Entonces:

$$(7) \quad U_\tau \approx U_\sigma \cap D(y_j) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r_\sigma} D(y_i) \cap D(y_j).$$

Observemos que si la j -ésima coordenada fuera alguna de las coordenadas de la condición (6) se tendrían en (7), r_σ intersectandos, en caso contrario se tienen $r_\sigma + 1$ intersectandos, y como r_τ es el máximo para U_τ se tienen en ambos casos que $r_\sigma \leq r_\tau$. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}\text{órb}(\sigma) &= (\mathbb{K}^*)^{r_\sigma} \times \underbrace{\mathbb{K} 0 \times \cdots \times 0}_{t-r_\sigma-\text{veces}} \\ \text{órb}(\tau) &= (\mathbb{K}^*)^{r_\tau} \times \underbrace{\mathbb{K} 0 \times \cdots \times 0}_{t-r_\tau-\text{veces}},\end{aligned}$$

y como $r_\sigma \leq r_\tau$, tenemos una relación inversa. i.e. si $\tau \leq \sigma$ entonces $\text{órb}(\tau)$ es más “grande” que la órbita asociada a σ .

Hemos construido nuevos conjuntos algebraicos en X_Σ (las T -órbitas) tales que son una partición de toda la variedad algebraica, sin embargo al tener un espacio topológico tenemos abiertos y cerrados, más aún vimos que la órbita asociada al cono 0 es el toro algebraico lo que implica que $\text{órb}(0)$ es un abierto de X_Σ , sin embargo no se ve razonable que el resto de las órbitas sean abiertos pues la irreducibilidad de X_Σ implicaría la intersección no vacía de todas ellas, lo cual de antemano sabemos que es imposible, veamos entonces si son cerradas, tomando algún cono $\tau \in \Sigma$, por el teorema (1.32) le corresponde una T -órbita $\text{órb}(\tau)$ la cual es un subconjunto algebraico, considerando su cerradura algebraica en la topología de Zariski y la denotamos como:

$$V(\tau) := \overline{\text{órb}(\tau)}.$$

Esta cerradura, como cualquier conjunto en X_Σ es unión de las mismas T -órbitas (pues hay un número finito de órbitas), de hecho si $\tau = 0$, se tiene

$$V(\tau) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \text{órb}(\sigma) = X_\Sigma.$$

Probaremos más adelante que estas cerraduras son variedades tóricas así como la relación que existe entre aquellas órbitas que pertenecen a una cerradura de acuerdo al orden parcial que definimos anteriormente, para ello dado $\tau \in \Sigma$ consideremos N_τ la subretícula de N generada por $\tau \cap N$ y el cociente $N(\tau) := N/N_\tau$.

Lema 1.38. *Sea Σ un abanico en $N_\mathbb{R}$ y sea $\tau \in \Sigma$. Entonces el apareamiento canónico:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

induce el apareamiento perfecto:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : N(\tau) \times \tau^\perp \cap M \longrightarrow \mathbb{Z},$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el apareamiento:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : N(\tau) \times \tau^\perp \cap M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

y veamos que es perfecto. Sea $n \in N(\tau)$ y supongamos que $\langle n, m \rangle = 0$ para todo $m \in \tau^\perp \cap M$ como $(\tau^\perp)^\perp = \tau$ tenemos que $n \in \tau \cap N$, es decir $n = 0$ en $N(\tau)$. Recíprocamente sea $m \in \tau^\perp \cap M$ y supongamos que $\langle n, m \rangle = 0$ para toda $n \in N(\tau)$, ahora m se anula en $\tau \cap N$ pues $m \in \tau^\perp \cap M$ y también se anula fuera de $\tau \cap N$ por hipótesis, por lo tanto $m = 0$. Lo que implica que el apareamiento es perfecto. \square

Extendiendo a los \mathbb{R} -espacios vectoriales, digamos $N(\tau)_\mathbb{R} := N_\mathbb{R}/\mathbb{R}\tau$ y el espacio ortogonal τ^\perp , hemos probado que $N(\tau)_\mathbb{R}$ es espacio dual de τ^\perp . Por otro lado, sea $\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_r\} \in \Sigma$ un cono poliédrico racional fuertemente convexo tal que $\tau \leq \sigma$,

entonces consideremos la suma de Minkowski $\sigma + \mathbb{R}\tau$ también es un cono poliédrico racional convexo pues

$$\sigma + \mathbb{R}\tau = \text{pos}\{x_1 + \mathbb{R}\tau, \dots, x_r + \mathbb{R}\tau\}$$

donde $x_i + \mathbb{R}$ denota la suma de Minkowski del generador x_i con los generadores de $\mathbb{R}\tau$. Ahora, si consideramos el morfismo cociente de espacios vectoriales:

$$\rho : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N(\tau)_{\mathbb{R}},$$

denotamos a $\bar{\sigma} = \sigma + \mathbb{R}\tau / \mathbb{R}\tau$ como la imagen del cono $\sigma + \mathbb{R}\tau$; notemos que por la proposición (A.31), se tiene el conjunto

$$(\sigma + \mathbb{R}\tau)^{\vee} = \sigma^{\vee} \cap (\mathbb{R}\tau)^{\vee} = \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp},$$

es una cara del cono $\sigma^{\vee} \subset M_{\mathbb{R}}$, ver [1] proposición 1.2.10, por lo tanto $(\sigma + \mathbb{R}\tau)^{\vee}$ es un cono poliédrico racional en $\mathbb{R}\tau$ y como probamos que el espacio τ^{\perp} es dual de $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ se tiene que el cono dual de $(\sigma + \mathbb{R}\tau)^{\vee}$ es

$$\bar{\sigma} = \sigma + \mathbb{R}\tau / \mathbb{R}\tau$$

el cual es un cono poliédrico racional. La convexidad fuerte se sigue de que si σ es fuertemente convexo, entonces $(\sigma + \mathbb{R}\tau) \cap (-\sigma + \mathbb{R}\tau) = \mathbb{R}\tau$ lo que implica que $\bar{\sigma} \cap -\bar{\sigma} = 0$. Definimos pues, el siguiente conjunto de conos poliédricos racionales fuertemente convexos en $N(\tau)_{\mathbb{R}}$:

$$\text{Star}(\tau) := \{\bar{\sigma} \subseteq N(\tau)_{\mathbb{R}} \mid \tau \leq \sigma \text{ en } \Sigma\}.$$

Proposición 1.39. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $\tau \in \Sigma$. Entonces $\text{Star}(\tau)$ es un abanico en $N(\tau)_{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\sigma}_1 \in \text{Star}(\tau)$ y suponga que $\bar{\sigma}_2 \leq \bar{\sigma}_1$, (vamos a probar que $\bar{\sigma}_2 \in \text{Star}(\tau)$) entonces se tiene:

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1 \cap \{x_0\}^{\perp} \quad \text{con } x_0 \in \bar{\sigma}_1^{\vee}.$$

Notemos $(\sigma_1 + \mathbb{R}\tau)^{\vee} = \sigma_1^{\vee} \cap (\mathbb{R}\tau)^{\vee} = \sigma_1 \cap \tau^{\perp}$, como τ^{\perp} es el espacio dual de $N(\tau)_{\mathbb{R}}$, entonces para $(\sigma_1 + \mathbb{R}\tau)^{\vee}$ su dual es $\bar{\sigma}_1$, lo que implica que:

$$\bar{\sigma}_1^{\vee} = \sigma_1 \cap \tau^{\perp}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= \bar{\sigma}_1 \cap \{x_0\}^{\perp} = (\sigma_1 + \mathbb{R}\tau / \mathbb{R}\tau) \cap \{x_0\}^{\perp} \\ &= \sigma_1 \cap \{x_0\}^{\perp} + \mathbb{R}\tau / \mathbb{R}\tau, \end{aligned}$$

definiendo $\sigma_2 := \sigma_1 \cap \{x_0\}^{\perp}$ y como $x_0 \in \sigma_1^{\vee} \cap \tau^{\perp}$ se tiene que $\sigma_2 \leq \sigma_1$ y por lo tanto $\sigma_2 \in \Sigma$. Como $\tau \leq \sigma_1$ se tiene que $\tau = \sigma_1 \cap \{y_0\}^{\perp}$ con $y_0 \in \sigma_1^{\vee}$. Haciendo:

$$\begin{aligned} \sigma_2 \cap \{y_0\}^{\perp} &= \sigma_1 \cap \{x_0\}^{\perp} \cap \{y_0\}^{\perp} = \tau \cap \{x_0\}^{\perp} \\ &= \tau, \end{aligned}$$

lo que implica que $\bar{\sigma}_2 \in \text{Star}(\tau)$.

Ahora, si $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \in \text{Star}(\tau)$, entonces:

$$\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2 + \mathbb{R}\tau / \mathbb{R}\tau$$

y como $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es cara de σ_1 y de σ_2 por que Σ es un abanico, entonces por la parte anterior $\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$ es cara de $\bar{\sigma}_1$ y de $\bar{\sigma}_2$. Luego $\text{Star}(\tau)$ es un abanico en $N(\tau)_{\mathbb{R}}$. \square

Construyamos la variedad tórica algebraica asociada al abanico $\text{Star}(\tau)$:

$$X_{\text{Star}(\tau)} = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \text{Star}(\tau)} U_{\bar{\sigma}}$$

junto con el toro algebraico $T_\tau = (\mathbb{K}^*)^{n-k}$ donde $\dim \tau = k$ y notemos que para cada pedazo afín $U_{\bar{\sigma}} = \mathcal{V}(J_{\bar{\sigma}})$ se tiene por construcción:

$$\mathbb{K}[S_{\bar{\sigma}}] \approx \mathbb{K}[y_1, \dots, y_s]/J_{\bar{\sigma}},$$

donde por definición se tiene:

$$\begin{aligned} S_{\bar{\sigma}} &= \bar{\sigma}^\vee \cap (\tau^\perp \cap M) \\ &= (\sigma + \mathbb{R})^\vee \cap (\tau^\perp \cap M) \\ &= \sigma^\vee \cap M_{\tau^\perp} = S_\sigma \cap \tau^\perp. \end{aligned}$$

Por el lema de Gordan (A.44) supongamos que $S_{\bar{\sigma}}$ está generado por $\{b_1, \dots, b_s\}$ y S_σ está generado por $\{b_1, \dots, b_s, a_{s+1}, \dots, a_t\}$. Más aún, como $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau = \sigma \cap \{x_0\}^\perp$ con $x_0 \in S_\sigma$ y como $x_0 \in \tau^\perp$, podemos suponer que $x_0 = b_1$. Por otro lado, tenemos el morfismo inyectivo entre las \mathbb{K} -álgebras de semigrupo, inducido por la inclusión $S_{\bar{\sigma}} \subset S_\sigma$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[S_{\bar{\sigma}}] & \xleftarrow{i_\sigma} & \mathbb{K}[S_\sigma] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K}[U_{\bar{\sigma}}] & & \mathbb{K}[U_\sigma], \end{array}$$

aquí las flechas verticales son los isomorfismos del álgebra de semigrupo al anillo de coordenadas. Tomando la composición de estos morfismos y abusando de la notación, tenemos el morfismo inyectivo entre los anillos de coordenadas:

$$\mathbb{K}[U_{\bar{\sigma}}] \xleftarrow{i_\sigma} \mathbb{K}[U_\sigma],$$

el cual induce un morfismo de variedades afines suprayectivo tal que $f_\sigma^* = i_\sigma$, dado por:

$$\begin{aligned} f_\sigma : U_\sigma &\longrightarrow U_{\bar{\sigma}} \\ p &\longmapsto (i_\sigma(\bar{y}_1)(p), \dots, i_\sigma(\bar{y}_s)(p)), \end{aligned}$$

donde las \bar{y}_i son los generadores de $\mathbb{K}[U_{\bar{\sigma}}]$, lo cuales los mandamos a los generadores de $\mathbb{K}[S_{\bar{\sigma}}]$, los cuales, son los primeros s generadores de $\mathbb{K}[S_\sigma]$, entonces $i_\sigma(\bar{y}_i)$ es el i -ésimo generador de $\mathbb{K}[U_\sigma]$. Por lo tanto, si $p = (p_1, \dots, p_t)$, se tiene que:

$$f_\sigma(p) = (p_1, \dots, p_s)$$

i.e. f_σ es la proyección de las primeras s -coordenadas. Restringiendo el dominio de f_σ , tenemos claramente un isomorfismo:

$$\begin{aligned} f_\sigma : U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right) &\longrightarrow U_{\bar{\sigma}} \\ (p_1, \dots, p_s, 0, \dots, 0) &\longmapsto (p_1, \dots, p_s). \end{aligned}$$

Y nuestra afirmación es que:

$$\bigcup_{\tau \leq \gamma \leq \sigma} \text{orb}(\gamma) = U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right).$$

En efecto, recordemos que $\tau \leq \sigma$, entonces por la proposición (A.43) se tiene:

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-x_0).$$

Recordemos que tenemos también los generadores b_j de S_σ , donde $b_j \in S_\sigma \cap \tau^\perp$, como $\tau^\perp \cap M$ es un grupo abeliano, se tiene que $-b_j \in \tau^\perp \cap M \subseteq S_\tau$ y como también $x_0 = b_1$, podemos suponer que S_τ está generado por $\{\pm b_1, \dots, \pm b_s, a_{s+1}, \dots, a_t\}$, por lo tanto tenemos el morfismo inyectivo:

$$\begin{aligned} U_\tau &\longrightarrow U_\sigma \\ (p_1, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_s) &\longmapsto (p_1, \dots, p_t), \end{aligned}$$

donde $p_i = p_{t+i} \neq 0$ para $i = 1, \dots, s$. Por lo tanto $U_\tau \approx U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=1}^s D(y_i) \right)$, lo que implica que s es el entero máximo tal que $0 \leq s \leq t$ y tal que $U_\tau \subseteq \bigcap_{i=1}^s D(y_i)$, por lo tanto:

$$\text{ór}b(\tau) = (\mathbb{K}^*)^s \times \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{t-s-\text{veces}} \times 0.$$

Claramente $\text{ór}b(\tau) \subset U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right)$, más aún, si $\tau \leq \gamma$, entonces por la observación (1.37) se tiene:

$$\text{ór}b(\gamma) = (\mathbb{K}^*)^{s-k} \times \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{t-s+k-\text{veces}} \times 0.$$

y por lo tanto:

$$\bigcup_{\tau \leq \gamma \leq \sigma} \text{ór}b(\gamma) \subseteq U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right).$$

Recíprocamente, si $p \in U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right)$, entonces $p = (p_1, \dots, p_s, 0, \dots, 0)$; si $p_i \neq 0$ para toda i , se tiene que $p \in \text{ór}b(\tau)$, en caso contrario, supongamos sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$p = (p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0)$$

donde $r < s$, entonces considerando su respectiva órbita y por el teorema (1.32) existe $\gamma \in \Sigma$ tal que:

$$\text{ór}b_T(p) = \text{ór}b(\gamma).$$

Como $p \in U_\sigma$, se tiene que $\text{ór}b(\gamma) \subset U_\sigma$ y por el teorema (1.35) se tiene que $\gamma \leq \sigma$. Resta probar $\tau \leq \gamma$, para ello como $U_\gamma \approx U_\sigma \cap D(y_j)$ para algún j y por definición r es el entero máximo tal que $0 \leq r \leq t$ y tal que:

$$U_\gamma \subset \bigcap_{i=1}^r D(y_i)$$

y como r es el máximo, se tiene que $1 \leq j \leq r$. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned} U_\gamma \subseteq U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=1}^r D(y_i) \right) &= U_\sigma \cap D(y_j) \cap \left(\bigcap_{i \neq j} D(y_i) \right) \\ &\approx U_\gamma \cap \left(\bigcap_{i \neq j} D(y_i) \right) \subseteq U_\gamma, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$U_\gamma \approx U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=1}^r D(y_i) \right),$$

luego $\text{ór}b(\tau) \subseteq U_\gamma$ y por el teorema (1.35) se tiene que $\tau \leq \gamma$. Por lo tanto

$$U_\sigma \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^t \mathcal{V}(y_i) \right) \subseteq \bigcup_{\tau \leq \gamma \leq \sigma} \text{ór}b(\gamma).$$

Hemos probado, que para todo $\bar{\sigma} \in \text{Star}(\tau)$ se tiene el isomorfismo:

$$f_\sigma : \bigcup_{\tau \leq \gamma \leq \sigma} \text{ór}b(\gamma) \longrightarrow U_{\bar{\sigma}},$$

una consecuencia inmediata es $\text{ór}b(\tau) \approx U_{\bar{\tau}} = T_\tau$ el cual es el toro que actúa en la variedad algebraica $X_{\text{Star}(\tau)}$. Solo falta probar que la familia de funciones $\{f_\sigma\}_{\tau \leq \sigma}$ se “pegan” bien, tomemos pues $\bar{\sigma}, \bar{\gamma} \in \text{Star}(\tau)$, tales que $\bar{\gamma} \leq \bar{\sigma}$ y probamos en la proposición (1.39) se tiene que $\tau \leq \gamma \leq \sigma$ en Σ , por otro lado, por la proposición (A.43) tenemos:

$$\begin{aligned} S_{\bar{\gamma}} &= S_{\bar{\sigma}} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\bar{x}_0) & \bar{x}_0 &\in S_{\bar{\sigma}} \\ S_\gamma &= S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-x_0) & x_0 &\in S_\sigma \end{aligned}$$

donde $\gamma = \sigma \cap \{x_0\}^\perp$, entonces también ocurre $x_0 \in \gamma^\perp$, por lo tanto:

$$x_0 \in S_\sigma \in \gamma^\perp \subseteq S_\sigma \cap \tau^\perp = S_{\bar{\sigma}},$$

suponiendo que $S_{\bar{\sigma}}$ es generado por $\{b_1, \dots, b_s\}$ podemos suponer que $x_0 = b_s = \bar{x}_0$ y por lo tanto S_σ es generado por $\{b_1, \dots, b_s, a_{s+1}, \dots, a_t\}$. Entonces considerando el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_\gamma & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & U_\sigma \\ f_\gamma \downarrow & & \downarrow f_\sigma \\ U_{\bar{\gamma}} & \xrightarrow{\varphi_{\bar{\sigma}}} & U_{\bar{\sigma}}, \end{array}$$

y queremos probar que $f_\sigma|_{U_\gamma} = f_\gamma$. Notemos que $U_\gamma \approx U_\sigma \cap D(y_s)$, sea $p \in U_\gamma$, entonces $p = (p_1, \dots, p_s, \dots, p_t)$, por lo tanto $f_\sigma(p) = (p_1, \dots, p_s)$ como $p_s \neq 0$, por lo tanto $f_\sigma(p) \in U_{\bar{\sigma}} \cap D(y_s) \approx U_{\bar{\gamma}}$. Luego $f_\sigma|_{U_\gamma} = f_\gamma$.

Por lo tanto, si $\bar{\sigma}, \bar{\gamma} \in \text{Star}(\tau)$, se prueba en la proposición (1.39) que $\bar{\gamma} \cap \bar{\sigma} \leq \bar{\gamma}, \bar{\sigma}$, más aún se puede ver que $\bar{\gamma} \cap \bar{\sigma} = \bar{\gamma} \cap \bar{\sigma}$, y por lo que vimos anteriormente:

$$f_\sigma|_{U_\gamma \cap \sigma} = f_\gamma \cap \sigma = f_\gamma|_{U_\gamma \cap \sigma},$$

entonces por el ejemplo 2.11 de [13] se tiene que existe un morfismo regular de variedades

$$f : \bigcup_{\tau \leq \sigma} U_\sigma \longrightarrow X_{\text{Star}(\tau)},$$

y tal que:

$$f : \bigcup_{\tau \leq \sigma} \text{ór}b(\sigma) \longrightarrow X_{\text{Star}(\tau)}$$

es isomorfismo.

Teorema 1.40. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $\tau \in \Sigma$. Entonces:*

$$X_{\text{Star}(\tau)} \approx V(\tau).$$

DEMOSTRACIÓN. Hemos probado que:

$$X_{\text{Star}(\tau)} \approx \bigcup_{\tau \leq \sigma} \text{ór}b(\sigma),$$

notemos que el cono cero $\bar{0} \in \text{Star}(\tau)$ corresponde a $\tau \in \Sigma$, además

$$S_{\bar{0}} = S_{\tau} \cap \tau^{\perp},$$

y por lo tanto, tenemos el isomorfismo:

$$f_{\tau} : \text{orb}(\tau) \subseteq U_{\tau} \longrightarrow U_{\bar{0}} = T_{\tau},$$

i.e. $\text{orb}(\tau) \approx T_{\tau}$. Luego:

$$V(\tau) = \overline{\text{orb}(\tau)} \approx \overline{T_{\tau}} = X_{\text{Star}(\tau)}.$$

□

1.4. Propiedades locales de las variedades tóricas

Como cualquier variedad en geometría algebraica, es posible decir mucho más de las variedades tóricas asociadas a abanicos además de la normalidad y la acción del toro en la misma que por definición se requiere, la noción de dimensión así como la presencia o ausencia de singularidades por supuesto que no la podemos excluir, más aún, un concepto que no es tan común en geometría algebraica como la “compacidad” la cual es reemplazada por la completez. A continuación veremos que existe una relación entre algunas cualidades de los abanicos e información local de sus variedades tóricas asociadas.

1.4.1. Dimensión

Una propiedad muy importante de las variedades es su dimensión, la cual nos da información muy relevante a manera local, curiosamente la dimensión de todas las variedades asociadas al mismo abanico es invariante a pesar de que pueden vivir en espacios afines de distinta dimensión.

Lema 1.41. *Sea U_{σ} una variedad asociada a un cono poliédrico racional fuertemente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Entonces:*

$$\dim U_{\sigma} = n,$$

donde n es el rango de la retícula N .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\dim T = n$ y T es un abierto denso en U_{σ} , por lo tanto:

$$\dim U_{\sigma} = \dim \overline{T} = \dim T = n.$$

□

Corolario 1.42. *Sea Σ un abanico en una retícula N de rango n . Entonces la variedad tórica X_{Σ} tiene dimensión n .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \Sigma$ arbitrario, entonces U_{σ} es denso en X_{Σ} por el lema (1.24) y por el lema (1.41) se tiene:

$$\dim X_{\Sigma} = \dim \overline{U_{\sigma}} = \dim U_{\sigma} = n.$$

□

También podemos calcular, la dimensión de las T -órbitas asociadas a los conos poliédricos.

Corolario 1.43. *Sea τ un cono poliédrico fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$ tal que $\dim \tau = k$. Entonces:*

$$\dim \text{orb}(\tau) = n - k.$$

DEMOSTRACIÓN. Del teorema (1.40) se sigue que:

$$\dim \text{órb}(\tau) = \dim V(\tau) = \dim T_\tau = n - k.$$

□

1.4.2. Lisidad

Como en el cálculo la presencia de singularidades presenta problemas pues por lo general siempre queremos funciones o superficies lisas pues es más fácil trabajar en ellas, a pesar de que la presencia de singularidades es “pequeña” es una variedad algebraica es difícil trabajar con singularidades, por lo que es posible pedir una característica al abanico del cual partimos para asegurar que nuestra variedad tórica es libre de singularidades, para ello definimos el siguiente tipo de cono poliédrico.

Definición 1.44. Sea N una retícula y sea σ un cono poliédrico racional fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$, se dice que σ es un *cono poliédrico no singular* si es generado por un subconjunto de alguna base de N .

Teorema 1.45. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces la variedad tórica algebraica X_{Σ} es no singular si y sólo si para todo $\sigma \in \Sigma$ es un cono poliédrico no singular.

DEMOSTRACIÓN. Como la no singularidad es una propiedad local, sin pérdida de generalidad supongamos que la variedad tórica es U_{σ} .

Supongamos que U_{σ} es no singular y sin pérdida de generalidad supongamos que $\dim \sigma = n$; en efecto si N_{σ} es la subretícula generada por $\sigma \cap N$ y análogamente como en el lema (1.38) tenemos que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_{\sigma}, M) \approx M(\sigma) := M/M_{\sigma}$, donde M_{σ} es la subretícula generada por $\sigma^{\perp} \cap M$. Aquí $M(\sigma)_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}}/\sigma^{\perp}$, entonces bajo el morfismo cociente de espacios:

$$M_{\mathbb{R}} \longrightarrow M(\sigma)_{\mathbb{R}},$$

definimos σ^* como la imagen de σ^{\vee} , el cual es el cono dual de σ en $N(\sigma)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\sigma$. Por otro lado, el subespacio vectorial σ^{\perp} (de dimensión finita), por el álgebra lineal sabemos que es sumando directo de $M_{\mathbb{R}}$, restringiendo a las retículas se tiene que M_{σ} es sumando directo de M y por lo tanto la siguiente sucesión exacta corta de \mathbb{Z} -módulos:

$$0 \rightarrow \sigma^{\perp} \cap M \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M(\sigma) \rightarrow 0,$$

se escinde, lo que implica que:

$$(8) \quad M = (\sigma^{\perp} \cap M) \oplus M'$$

donde $M' \approx M(\sigma)$ y como σ^* es un cono racional en $M(\sigma)_{\mathbb{R}}$ se tiene entonces que sus generadores están en $M(\sigma)$ y por lo tanto podemos escoger $m_1, \dots, m_q \in M'$ de tal manera que sus imágenes generen a $\sigma^* \cap M(\sigma)$. Definiendo el semigrupo abeliano S' generado por el conjunto $\{m_1, \dots, m_q\}$ y al intersectar (8) con σ^{\vee} , entonces tenemos:

$$\sigma^{\vee} \cap M = (\sigma^{\perp} \cap M) \times \sigma^{\vee} \cap M'$$

y como $\sigma^{\vee} \cap M' \approx \sigma^* \cap M(\sigma)$, se tiene finalmente:

$$S_{\sigma} \approx (\sigma^{\perp} \cap M) \times S_{(\sigma^*)^{\vee}},$$

por lo tanto:

$$\mathbb{K}[S_{\sigma}] \approx \mathbb{K}[(\sigma^{\perp} \cap M) \times S_{(\sigma^*)^{\vee}}] \approx \mathbb{K}[\sigma^{\perp} \cap M] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[S_{(\sigma^*)^{\vee}}].$$

Notemos primero que $\sigma^\perp \cap M$ es un grupo finitamente generado, como $\dim \sigma^\perp = n - \dim \sigma = n - k$, escogamos $n - k$ generadores de $\sigma^\perp \cap M$, y por lo tanto como en el toro algebraico:

$$\mathbb{K}[\sigma^\perp \cap M] \approx \mathbb{K}[y_1, y_1^{-1}, \dots, y_{n-k}, y_{n-k}^{-1}],$$

y por lo tanto su conjunto algebraico asociado es $(\mathbb{K}^*)^{n-k}$, lo que implica que:

$$U_\sigma \approx (\mathbb{K}^*)^{n-k} \times_{\mathbb{K}} U_{(\sigma^*)^\vee},$$

aquí $U_{(\sigma^*)^\vee}$ es no singular si U_σ es no singular, además como σ es el dual de σ^* se tiene:

$$\dim(\sigma^*)^\vee = \dim \sigma = \dim N_\sigma.$$

Por lo tanto podemos suponer $\dim \sigma = n$, entonces $\sigma + (-\sigma) = N_{\mathbb{R}}$, entonces por la proposición (A.31) se tiene:

$$\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee) = \{0\},$$

lo que implica que $S_\sigma \cap (-S_\sigma) = \{0\}$. Tomemos un sistema mínimo de generadores $\{a_1, \dots, a_t\}$ de S_σ , entonces si tenemos $\sum_{i=1}^t \gamma_i a_i = 0$ con $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ se tiene $\gamma_i = 0$ para toda i , lo que implica que $\alpha_i = \beta_i$ condición (†) del ejemplo (1.18), por lo tanto en el cociente:

$$\mathbb{K}[S_\sigma] \approx \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]/J_\sigma,$$

se tiene que el ideal $J_\sigma = 0 \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$, lo que implica que $U_\sigma = \mathbb{A}^t$, luego $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in U_\sigma$. Definamos $I = \langle y_1, \dots, y_t \rangle \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$ el ideal máximo el cual consiste en todos los polinomios que se anulan en $\mathbf{0}$, por teorema de los ceros de Hilbert se sigue que $J_\sigma \subseteq I$ y por lo tanto:

$$\mathfrak{M}_0 := J/I$$

es ideal máximo en $\mathbb{K}[S_\sigma] \approx \mathbb{K}[U_\sigma]$. Como U_σ no tiene singularidad en $\mathbf{0}$, entonces el cotangente de Zariski:

$$\mathfrak{M}_0/(\mathfrak{M}_0)^2$$

es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n . Como $\mathbb{K}[S_\sigma]$ es estable bajo la acción de T por el ejemplo (1.9), entonces por el lema (1.8) se tiene:

$$\mathbb{K}[S_\sigma] = \bigoplus_{\psi^m \in S_\sigma} \mathbb{K} \cdot \psi^m$$

por lo tanto los caracteres $\psi^m \in S_\sigma$ para $m \neq 0$ son generadores de $\mathfrak{M}_0 \subset \mathbb{K}[U_\sigma]$ lo que implica que los productos $\psi^{m'+m''} = \psi^{m'} \psi^{m''}$ son generadores de \mathfrak{M}_0^2 . Por lo tanto existen $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}^n$ no cero tales que $\psi^{m_1}, \dots, \psi^{m_n}$ son generadores de \mathfrak{M}_0 y por el lema de Nakayama, sus clases laterales son \mathbb{K} -base de del cotangente de Zariski $\mathfrak{M}_0/(\mathfrak{M}_0)^2$, lo que implica que estos $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}^n$ no pueden ser suma de dos elementos no cero de \mathbb{Z}^n , pues si no fuera cierto, para algún i se tiene:

$$\psi^{m_i} = \psi^{m'+m''} = \psi^{m'} \psi^{m''} \in \mathfrak{M}_0^2,$$

luego ψ^{m_i} es nulo en el cotangente de Zariski, lo que contradice que es generador. Vamos a probar que estos m_i son generadores de \mathbb{Z}^n ; consideremos la siguiente \mathbb{Z} -combinación lineal:

$$(9) \quad 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i \quad \text{para } \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

donde $\alpha_i \neq 0$ para algún i y además que es la combinación lineal más pequeña, es decir tiene un número mínimo de enteros $\alpha_i \neq 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \neq 0$, entonces sumando a la ecuación (9) el elemento m_1 , tenemos:

$$m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i + m_1 = (\alpha_1 + 1)m_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i m_i$$

Tenemos dos casos, $\alpha_1 \neq -1$ y $\alpha_1 = -1$, en ambos se contradice el hecho que m_1 no se puede escribir como suma de elementos no cero de \mathbb{Z}^n . Por lo tanto $\{m_1, \dots, m_n\} \subset \mathbb{Z}^n$ son linealmente independientes, lo que implica que son base de \mathbb{Z}^n , luego

$$\{\psi^{m_1}, \dots, \psi^{m_n}\} \subset S_\sigma$$

son base de M . Tomando los duales se tiene que $\{(\psi^{m_1})^\vee, \dots, (\psi^{m_n})^\vee\}$ son generadores de σ y como son linealmente independientes son base de N . Luego σ es no singular.

Recíprocamente, supongamos que σ es no singular, entonces sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de N y sea $\{e_1^\vee, \dots, e_n^\vee\}$ base dual de M . Si suponemos para $s \leq n$ que $\{e_1, \dots, e_s\}$ son generadores de σ , entonces tenemos:

$$S_\sigma = \langle e_1^\vee, \dots, e_s^\vee, \pm e_{s+1}^\vee, \dots, \pm e_n^\vee \rangle,$$

y por lo tanto

$$U_\sigma \approx \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{K} \mid p_j \neq 0 \text{ para toda } s+1 \leq j \leq n\} = \mathbb{K}^s \times (\mathbb{K}^*)^{n-s},$$

mediante

$$u \mapsto (u(e_1^\vee), \dots, u(e_n^\vee)) \in \mathbb{K}^n,$$

lo que implica que U_σ es no singular. \square

Ejemplo 1.46. Las variedades tóricas de los ejemplos (1.28), (1.29) y (1.30) son no singulares.

Ejemplo 1.47. Sea N la retícula del ejemplo (1.3) y supongamos que tiene rango 2 y sea σ un cono poliédrico racional fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$ de dimensión 2. Definamos el abanico $\Sigma = \{\sigma \text{ y sus caras}\}$, por lo tanto $X_\Sigma = U_\sigma = \mathbb{A}^2$. Pero por el corolario 4.37 en [13] se tiene que el conjunto de puntos singulares de U_σ tiene codimensión ≥ 2 , lo que implica que el conjunto de puntos singulares de U_σ tiene dimensión 0, es decir consiste en un conjunto finito de puntos. Por otro lado, sea $p \in U_\sigma$ y definamos el conjunto multiplicativo $S := \mathbb{K}[U_\sigma] - \mathfrak{M}_p$, entonces tenemos:

$$\mathcal{O}_{U_\sigma, p} = S^{-1}\mathbb{K}[U_\sigma],$$

y como

$$\mathbb{K}[U_\sigma] \approx \mathbb{K}[S_\sigma] = \bigoplus_{\psi^m \in S_\sigma} \mathbb{K}\psi^m,$$

tenemos

$$\mathcal{O}_{U_\sigma, p} \approx \left\{ \lambda \frac{\psi^{m_1}}{\psi^{m_2}} \mid \psi^{m_2}(p) \neq 0 \right\},$$

si consideramos $t \in T$, entonces tenemos que $\psi^{m_2}(tp) = \psi^{m_2}(t)\psi^{m_2}(p)$ y por lo tanto $\psi^{m_2}(tp) \neq 0$ si y sólo si $\psi^{m_2}(p) \neq 0$, lo que implica que $\mathcal{O}_{U_\sigma, p} = \mathcal{O}_{U_\sigma, tp}$ para toda $t \in T$. Por lo tanto si $p \in X_\Sigma$ es una singularidad, se tiene que por el teorema 4.33 de [13] el anillo $\mathcal{O}_{U_\sigma, p} = \mathcal{O}_{U_\sigma, tp}$ no es DFU para toda $t \in T$ lo que implica que $\text{orb}_T(p)$ consta de puntos singulares, pero por el teorema (1.32) se tiene $\text{orb}_T(p) = \text{orb}(\tau)$ para $\tau \in \Sigma$, pero $\dim \text{orb}(\tau) = 2 - \dim \tau = 0$, por lo tanto $\tau = \sigma$. Luego $p = (0, 0) \in \mathbb{A}^2$ y por lo

tanto el origen podría ser el único punto singular de X_Σ , si los generadores de σ forman parte de una base de N , entonces el teorema (1.45) implica que p es no singular.

Hemos probado así que la singularidad de una variedad tórica X_Σ depende enteramente de la singularidad del abanico Σ en $N_\mathbb{R}$, por lo que si queremos eliminar las singularidades, es decir, hacer dilataciones en los puntos singulares de X_Σ , basta con transformar el abanico Σ en un abanico Σ' tal que el nuevo abanico sea no singular en $N_\mathbb{R}$. Para ello, lo que podemos hacer es insertar o quitar rayos para formar otros nuevos conos y pidiendo que estos nuevos conos, sean no singulares.

Definición 1.48. Sean los abanicos Σ, Σ' en $N_\mathbb{R}$, decimos que el abanico Σ' *refina a* Σ si cada cono de Σ' está contenido en un cono de Σ y $|\Sigma| = |\Sigma'|$. Aquí cada cono de Σ es unión de conos de Σ' .

Definición 1.49. Sean los abanicos Σ en la retícula N y Σ' en la retícula N' . Decimos que la función

$$\varphi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$$

es un *morfismo de abanicos* si es un homomorfismo \mathbb{Z} -lineal entre las retículas, $\varphi : N' \longrightarrow N$, con extensión escalar $\varphi : N'_\mathbb{R} \longrightarrow N_\mathbb{R}$, que satisface la siguiente propiedad: para todo cono $\sigma' \in \Sigma'$ existe un cono $\sigma \in \Sigma$, tal que $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$.

Ejemplo 1.50. Sean los abanicos Σ, Σ' en una retícula N y tales que Σ' sea un refinamiento de Σ , entonces tenemos un morfismo de abanicos natural,

$$i : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$$

dada a partir del morfismo identidad $i : N \longrightarrow N$ con su extensión a los \mathbb{R} -espacios vectoriales $i : N_\mathbb{R} \longrightarrow N_\mathbb{R}$. Notemos que para $\sigma' \in \Sigma'$ y $\sigma \in \Sigma$ se cumple $i(\sigma') = \sigma' \subseteq \sigma$ por definición de refinamiento.

Teorema 1.51. Sean los abanicos Σ en la retícula N y Σ' en la retícula N' . Entonces un morfismo de abanicos

$$\varphi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$$

induce un morfismo entre las variedades tórica asociadas a los abanicos

$$\varphi_* : X_{\Sigma'} \longrightarrow X_\Sigma,$$

el cual es compatible con la acción de los toros, es decir, el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T \times_{\mathbb{K}} X_\Sigma & \xrightarrow{\varphi^* \times \varphi_*} & T' \times_{\mathbb{K}} X_{\Sigma'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\Sigma & \xrightarrow{\varphi_*} & X_{\Sigma'} \end{array} .$$

DEMOSTRACIÓN. Una función \mathbb{Z} -lineal $\varphi : N' \longrightarrow N$ induce una función dual $\varphi^\vee : M \longrightarrow M'$, con extensión $\varphi^\vee : M_\mathbb{R} \longrightarrow M'_\mathbb{R}$. Por otro lado tenemos por hipótesis que $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$ para $\sigma' \in \Sigma'$ y $\sigma \in \Sigma$, lo que implica que

$$\varphi^\vee(\sigma^\vee) \subseteq (\sigma')^\vee,$$

por lo tanto se tiene que

$$\varphi^\vee(S_\sigma) \subseteq S'_{\sigma'}.$$

Extendiendo de manera lineal a las \mathbb{K} -álgebras de semigrupos, se tiene un morfismo de \mathbb{K} -álgebras:

$$\begin{aligned} \varphi^\vee : \mathbb{K}[S_\sigma] &\longrightarrow \mathbb{K}[S'_{\sigma'}] \\ \sum_i \lambda_i s_i &\longmapsto \sum_i \lambda \varphi^\vee(s_i), \end{aligned}$$

pero las álgebras de semigrupos son anillos de coordenadas por la irreducibilidad de las variedades tóricas afines, es decir tenemos un morfismo entre los anillos:

$$\varphi^\vee : \mathbb{K}[U_\sigma] \longrightarrow \mathbb{K}[U_{\sigma'}],$$

y por lo tanto tenemos un único morfismo de variedades afines

$$\varphi_* : U_{\sigma'} \longrightarrow U_\sigma$$

tal que $(\varphi_*)^* = \varphi^\vee$. Aquí para $p \in U_\sigma$, tenemos que:

$$\varphi_*(p) = (\varphi^\vee(\overline{y}_1)(p), \dots, \varphi^\vee(\overline{y}_s)(p)),$$

donde $\overline{y}_j = y_j + (I)(U_\sigma) \in \mathbb{K}[U_\sigma]$. Por otro lado, como φ es un homomorfismo \mathbb{Z} -lineal, por lo tanto considerando el cono cero O_Σ del abanico Σ y análogamente el cono $0_{\Sigma'}$, se tiene que $\varphi(0_\Sigma) = 0_{\Sigma'}$, lo que implica que

$$\varphi_* : T \longrightarrow T',$$

finalmente como $\varphi^\vee(\overline{y}_j)$ es un monomio mónico para toda j , se tiene que para $t \in T$ y $p \in U_\sigma$

$$\varphi^\vee(\overline{y}_j)(t \cdot p) = \varphi^\vee(\overline{y}_j)(t) \cdot \varphi^\vee(\overline{y}_j)(p),$$

por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T \times_{\mathbb{K}} U_\sigma & \xrightarrow{\varphi_*^* \times \varphi_*} & T' \times_{\mathbb{K}} U_{\sigma'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\sigma & \xrightarrow{\varphi_*} & U_{\sigma'} \end{array}$$

extendiendo los morfismo de manera global de manera análoga a la acción del toro T sobre toda la variedad algebraica X_Σ , tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T \times_{\mathbb{K}} X_\Sigma & \xrightarrow{\varphi_*^* \times \varphi_*} & T' \times_{\mathbb{K}} X_{\Sigma'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\Sigma & \xrightarrow{\varphi_*} & X_{\Sigma'} \end{array}$$

□

Definición 1.52. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^n$ y sea $\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_n\}$ un cono no singular en Σ , es decir $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de N . Sea $x_0 = x_1 + \dots + x_n$ y sea el conjunto $\Sigma'(\sigma)$ que consta de todos los conos generados por subconjuntos de $\{x_0, \dots, x_n\}$ que no contienen a $\{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces observemos que:

$$\Sigma^*(\sigma) := (\Sigma \setminus \sigma) \cup (\Sigma'(\sigma))$$

es un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y la llamamos la *subdivisión estrella de Σ a lo largo de σ* .

Ejemplo 1.53. Sea $\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_n\}$ un cono poliédrico no singular en $N_{\mathbb{R}}$ y sea Σ el abanico que consta de σ y todas sus caras. Si $x_0 := x_1 + \dots + x_n$, por definición se tiene:

$$\Sigma^*(\sigma) = (\Sigma \setminus \sigma) \cup (\Sigma'(\sigma)),$$

el cual consta de todas las caras propias de σ y todos los conos de la forma

$$\tilde{\tau} = \text{pos}\{x_0, x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$$

con $t < n$.

Una observación inmediata es que $\Sigma^*(\sigma)$ es un refinamiento de Σ , pues ambos abanicos son idénticos fuera de σ y si $\tau \in \Sigma'(\sigma)$ entonces por definición $\tau \subset \sigma$, y por lo tanto se tiene el refinamiento referido. Por lo tanto, el teorema (1.51) afirma la existencia de un morfismo entre las variedades.

Proposición 1.54. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_n\}$ un cono poliédrico racional no singular. Entonces se tiene el morfismo regular

$$i_* : X_{\Sigma^*(\sigma)} \longrightarrow X_{\Sigma},$$

que hace de $X_{\Sigma^*(\sigma)}$ una dilatación en el punto distinguido p (correspondiente a la órbita asociada a σ) en X_{Σ} .

DEMOSTRACIÓN. Como Σ y $\Sigma^*(\sigma)$ son idénticos fuera de σ , basta suponer sin pérdida de generalidad que el abanico Σ consiste de σ y todas sus caras; y por lo tanto

$$X_{\Sigma} = U_{\sigma} = \mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n.$$

Bajo el teorema de correspondencia de órbitas-conos (1.32) a σ le corresponde el punto distinguido $p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$. Por otro lado, considerando el abanico $\Sigma^*(\sigma)$ y por lo tanto su variedad tórica asociada $X_{\Sigma^*(\sigma)}$. Por el teorema (1.35) tenemos que:

$$(10) \quad X_{\Sigma} = U_{\sigma} = \bigcup_{\tau < \sigma} U_{\tau} \cup \text{órb}(\sigma),$$

y como por el ejemplo (1.53), se tiene:

$$(11) \quad X_{\Sigma^*(\sigma)} = \bigcup_{\tau < \sigma} U_{\tau} \cup \bigcup_{\tilde{\tau} \in \Sigma^*(\sigma)} U_{\tilde{\tau}}.$$

Por lo tanto X_{Σ} y $X_{\Sigma^*(\sigma)}$ coinciden en los pedazos afines U_{τ} donde τ es cara propia de σ . Solo nos queda $\text{órb}(\sigma)$ en X_{Σ} (el cual se colapsa a un solo punto: el origen) y en la variedad $X_{\Sigma^*(\sigma)}$, la unión de los pedazos $U_{\tilde{\tau}}$. Probaremos que para esta unión existe una cubierta abierta la cual será homeomorfa a los abiertos distinguidos que cubren al proyectivo \mathbb{P}^{n-1} y así tenemos que $X_{\Sigma^*(\sigma)}$ es isomorfa a la dilatación de X_{Σ} en p .

Considerando los conos poliédricos racionales $\tilde{\tau}_i := \text{pos}\{x_0, x_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_n\} \in \Sigma^*(\sigma)$ para $i = 1, \dots, n$, donde \tilde{x}_i significa que omitimos el rayo x_i . Entonces por la proposición (1.20), resulta ser que los abiertos afines $U_{\tilde{\tau}_i}$ para $i = 1, \dots, n$ son cubierta abierta de $\bigcup_{\tilde{\tau} \in \Sigma^*(\sigma)} U_{\tilde{\tau}}$; recordemos que los generadores x_1, \dots, x_n es \mathbb{Z} -base de N pues σ es no singular, por lo tanto considerando la base dual $x_1^{\vee}, \dots, x_n^{\vee}$ de M , entonces tenemos que el semigrupo $S_{\tilde{\tau}_i}$ es generado por $\{x_1^{\vee}, \dots, x_n^{\vee}, x_1^{\vee} - x_i^{\vee}, \dots, x_n^{\vee} - x_i^{\vee}\}$ y por lo tanto

$$\mathbb{K}[S_{\tilde{\tau}_i}] \approx \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n, y_1 y_i^{-1}, \dots, y_n y_i^{-1}],$$

y por lo tanto

$$U_{\tilde{\tau}_i} = \{(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \mid p_i \neq 0\} \subset \mathbb{A}^n.$$

Por otro lado, considerando $\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} \approx \mathbb{P}^{n-1}$ la cual es la dilatación de \mathbb{A}^n en el origen, tiene la cubierta abierta dada por $\Pi_i := \{0\} \times D(y_i)$, donde $D(y_i) := \mathbb{P}^{n-1} - \mathcal{V}(y_i)$; por el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ (p_1, \dots, p_n) &\longmapsto [p_1, \dots, p_n] \end{aligned}$$

lo que implica $U_{\tilde{\tau}_i} \approx \Pi_i$ para toda i .

Solo queda probar que el morfismo de variedades tóricas i_* es el correspondiente al de la dilatación de p en X_Σ . Para ello recordemos que el morfismo

$$i_* : X_{\Sigma^*(\sigma)} \longrightarrow X_\Sigma,$$

está definido sobre los pedazos afines

$$i_* : U'_{\tau'} \longrightarrow U_\tau$$

si $i(\tau') = \tau' \subset \tau$, donde i es el morfismo de abanico inducido por la identidad. Por (10) y (11) tenemos que X_Σ y $X_{\Sigma^*(\sigma)}$ coinciden en los pedazos afines U_τ cuando $\tau < \sigma$, por lo tanto, si $\tau < \sigma$

$$i_* : U_\tau \longrightarrow U_\tau,$$

es la identidad. En efecto, para $q \in U_\tau$ se tiene $i_*(q) = q$. Por otro lado, si consideramos los conos $\tilde{\tau} \in \Sigma^*(\sigma)$, el único cono de Σ que contiene a $\tilde{\tau}$ es σ , entonces necesariamente debe ocurrir:

$$i_* : U_{\tilde{\tau}} \longrightarrow \text{órb } \sigma \subset U_\sigma$$

y por lo tanto $i_*(q) = p$. □

1.5. Completez

Similarmente con la separación que es ser Hausdorff en geometría algebraica, la compacidad que es muy importante y muy socorrida en el análisis, no podemos aplicarla tal cual a la geometría algebraica pues se trivializa totalmente, pues al ser una variedad tórica (y de hecho cualquier variedad) esto implica que sea un espacio noetheriano el cual es automáticamente compacto lo cual no provee de información adicional, sin embargo podemos utilizar otro noción sabiendo una caracterización de la compacidad el algunos casos.

Definición 1.55. Una variedad algebraica X se dice *completa* si es separada y para toda variedad algebraica Y el morfismo proyección:

$$pr_Y : X \times_{\mathbb{K}} Y \longrightarrow Y,$$

es una función cerrada.

Como pasó con la lisidad de las variedades tóricas en la cual pudimos caracterizar esta importante propiedad geométrica con una característica de los conos, entonces trataremos de hacer algo similar con la completez, para ello definamos una propiedad de los abanicos.

Definición 1.56. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$, se dice que es *completo* si el soporte $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$.

Veamos unos ejemplos en el plano para fijar ideas.

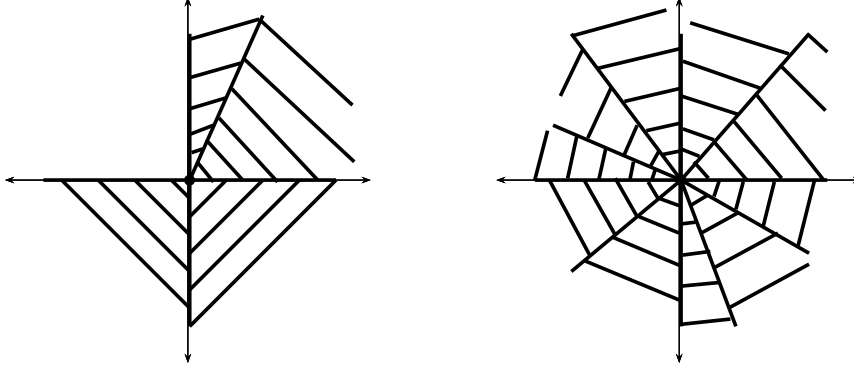


Figura 1.56: Ejemplos de abanicos no completos y completos

El abanico de la izquierda no es completo, mientras que el de la derecha sí lo es. Veremos que esta propiedad se traduce en la completitud de la variedad tórica asociada.

Teorema 1.57. *Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces la variedad tórica X_{Σ} es completa si y sólo si Σ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la variedad tórica X_{Σ} es completa, entonces por inducción sobre la dimensión de X_{Σ} ; para la base inductiva, tenemos que la única variedad tórica completa de dimensión 1, es \mathbb{P}^1 la cual proviene del abanico del ejemplo (1.28) el cual es completo en \mathbb{R}^1 . Ahora supongamos válido la implicación para variedades tóricas de dimensión $\leq n-1$, entonces sea X_{Σ} de dimensión n y supongamos además que el abanico Σ no es completo en $N_{\mathbb{R}}$, por lo tanto existe un cono $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$ tal que $\mathcal{Q} \in \text{Fr}(|\Sigma|)$ (frontera de $|\Sigma|$); por otro lado $|\Sigma|$ es un cerrado, por lo tanto $N_{\mathbb{R}} - |\Sigma|$ es un abierto no vacío, pues supusimos que Σ no es completo, tenemos que:

$$(N_{\mathbb{R}} - |\Sigma|) \cap (\mathbb{R}\mathcal{Q})^c \neq \emptyset,$$

pues si no fuera cierto, se tiene que $N_{\mathbb{R}} - |\Sigma| \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0}\mathcal{Q}$, lo cual es absurdo pues $\text{Int}(\mathbb{R}_{\leq 0}) = \emptyset$. Luego existe $n \in N_{\mathbb{R}}$ tal que:

$$n \in (N_{\mathbb{R}} - |\Sigma|) \cap (\mathbb{R}\mathcal{Q})^c,$$

entonces si \bar{n} es la imagen de n bajo el morfismo cociente

$$\rho : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N(\mathcal{Q})_{\mathbb{R}},$$

tenemos que claramente $\bar{n} \notin \text{Star}(\mathcal{Q})$, i.e. $\text{Star}(\mathcal{Q})$ no es completo, pero por el teorema (1.40) se tiene $X_{\text{Star}(\mathcal{Q})} \approx V(\mathcal{Q})$ la cual es un cerrado en X_{Σ} la cual es variedad completa, i.e. $X_{\text{Star}(\mathcal{Q})}$ es completa, pero por hipótesis de inducción se tiene que $\text{Star}(\mathcal{Q})$ es completo, un absurdo.

Para el recíproco, usaremos el criterio de valuación de Chevalley: “una variedad algebraica X sobre el campo \mathbb{K} es completa si y sólo si para todo anillo de valuación discreta $R \supseteq \mathbb{K}$ con campo de fracciones $\mathbb{K}(X)$ domina al anillo local $\mathcal{O}_{X,Y}$ para alguna subvariedad $Y \subseteq X$.” Supongamos pues, que Σ es completo, y sea R un anillo de valuación discreta con campo de fracciones $\mathbb{K}(X_{\Sigma})$ y tal que $R \supseteq \mathbb{K}$, entonces:

$$R = \{f \in \mathbb{K}(X_{\Sigma}) \mid \nu(f) \geq 0\}$$

donde ν es la valuación sobre $\mathbb{K}(X_\Sigma)$. Es suficiente probar que $R \supseteq \mathbb{K}[S_\sigma]$ para algún $\sigma \in \Sigma$, en efecto si $R \supseteq \mathbb{K}[S_\sigma]$ definimos el ideal primo

$$\mathfrak{P} := \mathfrak{M} \cap \mathbb{K}[S_\sigma] \subset \mathbb{K}[S_\sigma],$$

donde \mathfrak{M} es el ideal máximo de R (pues, R es anillo local), y como a cada ideal primo de $\mathbb{K}[S_\sigma]$ le corresponde una subvariedad $W \subseteq U_\sigma$, y por lo tanto, el anillo localizando el anillo de coordenadas $\mathbb{K}[S_\sigma]$:

$$\mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} \approx \mathcal{O}_{U_\sigma, W} = \mathcal{O}_{X_\Sigma, W}.$$

Como tenemos el morfismo de inclusión $i : \mathbb{K}[S_\sigma] \rightarrow R$, y como $i(\mathbb{K}[S_\sigma] - \mathfrak{P}) \subset R^*$, tenemos un morfismo \bar{i} que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[S_\sigma] & \xrightarrow{i} & R \\ \varphi \downarrow & \nearrow \bar{i} & \\ \mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} & & \end{array}$$

donde $\bar{i}\left(\frac{a}{s}\right) = i(a)i(s)^{-1}$, y como i es inyectivo, se tiene que \bar{i} es inyectivo, por lo tanto

$$\mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} \subseteq R$$

y consideremos el ideal máximo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} &= \left\{ \frac{a}{s} \in \mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} \mid a \in \mathfrak{P} \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{s} \in \mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}} \mid a \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{K}[S_\sigma] \right\} = \mathfrak{M} \cap \mathbb{K}[S_\sigma]_{\mathfrak{P}}, \end{aligned}$$

i.e. R domina a $\mathcal{O}_{X_\Sigma, W}$. Por otro lado, haciendo las valuaciones en los caracteres $\psi^m \in \mathbb{K}(X_\Sigma)$ implica que tenemos la función \mathbb{Z} -lineal:

$$\nu : M \rightarrow \mathbb{Z},$$

y por lo tanto tenemos por el teorema de representación de funciones lineales que existe $n \in N_{\mathbb{R}}$ tal que:

$$\nu(\psi^m) = \langle n, \psi^m \rangle \quad \text{para todo } \psi^m \in M,$$

pero Σ es completo, entonces existe un cono $\sigma \in \Sigma$ tal que $n \in \sigma$ y por lo tanto, para todo $\psi^m \in S_\sigma$ se tiene $\nu(\psi^m) \geq 0$. Por el ejemplo (1.9) se tiene que:

$$\mathbb{K}[S_\sigma] = \bigoplus_{\psi^m \in S_\sigma} \mathbb{K}\psi^m,$$

entonces se tiene que $\nu(f) \geq 0$ para todo $f \in \mathbb{K}[S_\sigma]$, luego $\mathbb{K}[S_\sigma] \subseteq R$. \square

Ejemplo 1.58. Las variedades tóricas de los ejemplos (1.28), (1.29) y (1.30) son completas.

Ejemplo 1.59. Sea P un politopo reticular en $M_{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^2$ de dimensión 2, como en la figura 1.59 y consideremos el abanico $\Sigma_P \subseteq N_{\mathbb{R}}$; probaremos que es completo. Supongamos que no es completo, por lo tanto $|\Sigma_P|$ tiene frontera y existe al menos un cono máximo cuya intersección con la frontera es no vacía; si consideramos los vértices de P y los ordenamos en sentido de las manecillas del reloj $\{v_1, \dots, v_s\}$, entonces tenemos las caretas $\{F_1, \dots, F_s\}$ donde $v_i \in F_{i-1}, F_i$ para $i = 1, \dots, s$. Supongamos además que son iguales módulo s . Entonces, tenemos los conos máximos (correspondientes a vértices de P):

$$\sigma_{v_i} := \text{pos}\{n_{F_{i-1}}, n_{F_i}\} \quad \text{para } i = 1, \dots, s.$$

Notemos que todos los conos máximos σ_{v_i} , comparten con los conos $\sigma_{v_{i-1}}$ y $\sigma_{v_{i+1}}$ una cara de dimensión 1 (rayo generador), y por lo tanto ningún cono máximo intersecta a la frontera. Por lo tanto Σ_P es completo.

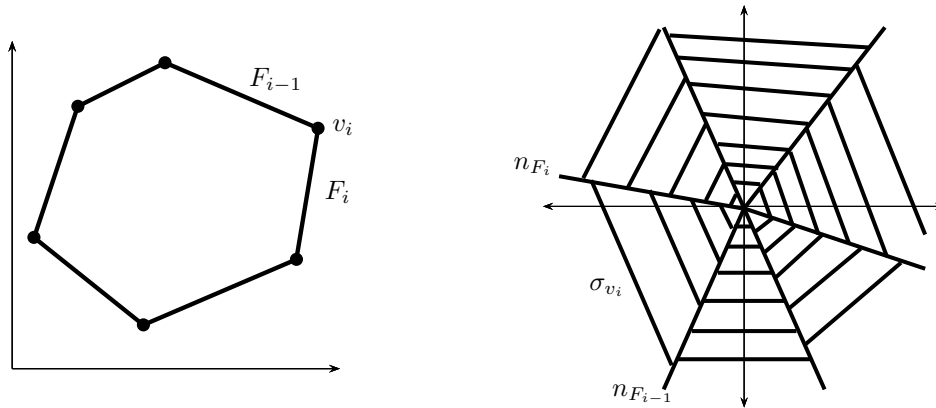


Figura 1.59: Politopo y abanico asociado

Capítulo 2

Intersección en variedades tóricas

En esta sección se definirán divisores de Weil y de Cartier en una variedad tórica asociada a un abanico los cuales son importantes a la hora de crear otros espacios de secciones cuyos polos son acotados por algún divisor previamente dado lo cual se verá en la sección próxima, veremos también el concepto de funciones Σ -lineales de soporte, donde Σ es un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ con las cuales construiremos de hecho divisores de Cartier. Esta relación se traducirá en un isomorfismo visto en el teorema (2.16) el cual será fundamental cuando consideremos un politopo reticular en $M_{\mathbb{R}}$ y los divisores y las funciones de Cartier asociadas a dicho conjunto.

2.1. Divisores

Definición 2.1. Sea X una variedad normal. Si $D \subseteq X$ es una subvariedad de codimensión 1, se dice que D es un *divisor primo*. Si D_1, \dots, D_r una colección de subvariedades de X de codimensión 1 junto con una colección de enteros a_1, \dots, a_r , llamamos a D un *divisor de Weil* o simplemente *divisor* de X a la siguiente expresión formal:

$$D = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r.$$

Es decir D es un elemento del grupo abeliano $\text{Div}(X)$ generado por las subvariedades de codimensión 1 de X . Si $a_i > 0$ para toda i se dice que el divisor D es *efectivo* o *positivo*.

La estructura de grupo del conjunto $\text{Div}(X)$ está explícitamente dada, para dos divisores $D = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r$ y $D' = a'_1 D_1 + \dots + a'_r D_r$ de X mediante:

$$D + D' := (a_1 + a'_1) D_1 + \dots + (a_r + a'_r) D_r.$$

Definición 2.2. Sea X_{Σ} una variedad tórica asociada a un abanico Σ . Entonces un divisor primo se dice T -invariante si para todo $t \in T$ se tiene que $t \cdot D = D$, donde $t \cdot D = \{td \mid d \in D\}$. Por otro lado, un divisor de Weil $D = \sum k_i D_i$ se dice T -invariante si cada D_i es T -invariante. Sea $\text{TDiv}(X_{\Sigma})$ el subgrupo de divisores de X_{Σ} que son T -invariantes.

Ejemplo 2.3. Consideremos un abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$ y su variedad tórica asociada X_{Σ} , ahora, en el teorema (1.32) probamos que las T -órbitas se corresponden biunívocamente con los conos del abanico y las denotamos como $\text{orb}(\sigma)$ con $\sigma \in \Sigma$, después en el teorema (1.40) se probó que la cerradura de las órbitas es una subvariedad T -invariante de X_{Σ} y de codimensión 1 por el corolario (1.43), es decir si tomamos $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$, tenemos que la variedad $V(\mathcal{Q})$ resulta ser un divisor primo. Se tiene que los divisores en la variedad tórica X_{Σ} dados por:

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}) \quad \text{con } a_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{Z},$$

son T -invariantes, pues cada cerradura $V(\mathcal{Q})$ es unión de T -órbitas y estas son T -invariantes. Más aún, son todos, pues si tomamos $D \subset X_{\Sigma}$ es un divisor primo T -invariante, y como

claramente $D \cap \text{orb}(0) = \emptyset$, se tiene pues:

$$D \subseteq \bigcup_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} V(\mathcal{Q}),$$

pero D es irreducible, entonces se tiene que $D \subseteq V(\mathcal{Q})$ para algún $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$, pero D tiene codimensión 1, lo que implica que $D = V(\mathcal{Q})$. Hemos probado así que el conjunto $\{V(\mathcal{Q}) \mid \mathcal{Q} \in \Sigma(1)\}$ es una base de $\text{TDiv}(X_\Sigma)$, es decir:

$$\text{TDiv}(X_\Sigma) = \bigoplus_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \mathbb{Z}V(\mathcal{Q}).$$

Ahora, queremos definir divisores asociados a funciones racionales en nuestras variedades algebraicas pero para ello necesitamos el concepto de valuación discreta, para ello consideremos X una variedad afín y sea $Y \subseteq X$ una subvariedad y sea el anillo local noetheriano:

$$\mathcal{O}_{X,Y} := \{f \in \mathbb{K}(X) \mid f \text{ es regular en algún punto de } Y\}$$

el cual lo llamamos el *anillo local de X a lo largo de Y* . Se puede ver, que el ideal,

$$\mathfrak{M}_Y := \{f \in \mathcal{O}_{X,Y} \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}$$

es el ideal máximo de $\mathcal{O}_{X,Y}$, notando que:

$$\mathcal{O}_{X,Y} - \mathfrak{M}_Y = \mathcal{O}_{X,Y}^*.$$

Definamos el siguiente morfismo suprayectivo:

$$\nu_Y : \mathcal{O}_{X,Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

donde para $f \in \mathcal{O}_{X,Y}$ se define $\nu_Y(f) = n$, donde n es el entero máximo tal que $f \in \mathfrak{M}_Y^n$. Se puede demostrar que ν_Y es una valuación discreta sobre $\mathcal{O}_{X,Y}$, es decir para todo $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{X,Y}$ no nulos, se tiene:

- (i) $\nu_Y(f_1 f_2) = \nu_Y(f_1) + \nu_Y(f_2)$
- (ii) $\nu_Y(f_1 + f_2) \geq \min\{\nu_Y(f_1), \nu_Y(f_2)\}$.

Por otro lado, definiendo $\nu_Y(0) := +\infty$, extendemos la función ν_Y a todo el anillo $\mathcal{O}_{X,Y}$. Llamamos a ν_Y la *valuación discreta asociada a Y* .

Tomando $D \subset X$ una subvariedad de codimensión 1 y U un abierto denso de X tal que $U \cap D \neq \emptyset$, entonces se tiene:

$$\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{U,U \cap D}.$$

En efecto, como $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(U)$, se observa inmediatamente que $\mathcal{O}_{U,U \cap D} \subseteq \mathcal{O}_{X,D}$; recíprocamente si $f \in \mathcal{O}_{X,D}$, entonces f es regular en un abierto denso $V \subseteq X$ tal que $V \cap D \neq \emptyset$, el cual es un abierto de D , y como $U \cap D$ también es un abierto no vacío de D , y por la irreducibilidad de D , se tiene que $V \cap U \cap D \neq \emptyset$, lo que implica que $f \in \mathcal{O}_{U,U \cap D}$.

Por otro lado, notemos que si X es una variedad afín normal y si D es una subvariedad de codimensión 1, se tiene entonces que $D = \mathcal{V}(P)$ donde P es un ideal primo, aquí, considerando el anillo de coordenadas $\mathbb{K}[X]$ el cual es noetheriano y normal, entonces considerando el ideal $P = \mathcal{I}(D)$ dentro de $\mathbb{K}[X]$ se puede ver que:

$$\mathcal{O}_{X,D} = \mathbb{K}[X]_P,$$

entonces por el teorema 4.0.14 de [1] se tiene:

$$(12) \quad \mathbb{K}[X] = \bigcap_D \mathcal{O}_{X,D}.$$

Con estas nociones definiremos un nuevo tipo de divisores a partir de las valuaciones asociadas a las subvariedades de codimensión 1 de X .

Definición 2.4. Si f es una función racional no cero en X y $D \subseteq X$ es una subvariedad de codimensión 1 (o sea, un divisor primo). Sea $\nu_D(f)$ la valuación discreta asociada a D en el anillo local $\mathcal{O}_{X,D}$. Entonces definimos

$$\operatorname{div}(f) := \sum_D \nu_D(f)D,$$

el *divisor principal* asociado a f . En el lema 6.1 de [7] se prueba que

$$\nu_D(f) = 0 \text{ para casi toda } D \subseteq X.$$

Denotamos por $\operatorname{PDiv}(X)$ al conjunto de divisores principales de X . Más aún, $\operatorname{PDiv}(X)$ es subgrupo de $\operatorname{Div}(X)$.

Proposición 2.5. Sea X una variedad afín normal y sea $f \in \mathbb{K}(X)$. Entonces:

- (a) $\operatorname{div}(f) \geq 0 \iff f \in \mathbb{K}[X]$
- (b) $\operatorname{div}(f) = 0 \iff f \in \mathbb{K}[X]^*$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos (a). Supongamos primero que $\operatorname{div}(f) \geq 0$, entonces para cualquier divisor primo D de X se tiene $\nu_D(f) \geq 0$ lo que implica que $f \in \mathcal{O}_{X,D}$ y por la igualdad (12) se tiene que $f \in \mathbb{K}[X]$. Recíprocamente, si $f \in \mathbb{K}[X]$, entonces por la misma igualdad (12) se tiene que $f \in \mathcal{O}_{X,D}$ para todo divisor primo $D \subseteq X$ y por lo tanto $\nu_D(f) \geq 0$, lo que implica que $\operatorname{div}(f) \geq 0$.

La prueba de (b) se sigue inmediatamente del hecho que:

$$\mathbb{K}[X]^* = \bigcap_D \mathcal{O}_{X,D}^*.$$

□

Ejemplo 2.6. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y sea X_{Σ} su variedad tórica asociada. Cada $m \in \mathbb{Z}^n$ induce una función racional en la variedad tórica X_{Σ} , pues el campo de funciones racionales de X_{Σ} se construye de la siguiente forma, para $U \subset X_{\Sigma}$ un abierto afín:

$$\mathbb{K}(X_{\Sigma}) = \mathbb{K}(U)$$

donde $\mathbb{K}(U)$ es el campo de funciones racionales de U , ver página 150 de [13]. En particular tomamos los abiertos U_{σ} y como el carácter ψ^m , el cual es un monomio de Laurent, es decir un cociente de polinomios definido en T , pero T es abierto denso en cada pedazo U_{σ} de X_{Σ} , y por lo tanto ψ^m es racional en X_{Σ} , así $\operatorname{div}(\psi^m) \in \operatorname{PDiv}(X_{\Sigma})$.

Proposición 2.7. Sea X_{Σ} una variedad tórica asociada a un abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$, consideremos $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$ un rayo de Σ con elemento generador $n(\mathcal{Q}) \in N$ y sea ψ^m el carácter correspondiente a $m \in \mathbb{Z}^n$. Entonces:

$$\nu_{\mathcal{Q}}(\psi^m) = \langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle,$$

donde $\nu_{\mathcal{Q}}$ es la valuación discreta asociada a la subvariedad $V(\mathcal{Q})$ en la función racional ψ^m .

DEMOSTRACIÓN. Como $n(\mathcal{Q}) \in N$ es elemento primitivo, podemos extender a $n(\mathcal{Q})$ a una base de N , digamos $\{e_1 = n(\mathcal{Q}), e_2, \dots, e_n\}$ es una base de N .

Por hipótesis, el cono \mathcal{Q} es generado por $n(\mathcal{Q})$ y el cono dual \mathcal{Q}^\vee es generado por $n(\mathcal{Q})^\vee, \pm e_2^\vee, \dots, \pm e_n^\vee$; construyendo el semigrupo abeliano $S_{\mathcal{Q}}$ para luego construir la variedad tórica asociada a \mathcal{Q} , tenemos que:

$$U_{\mathcal{Q}} = \mathbb{K} \times (\mathbb{K}^*)^{n-1}.$$

Considerando la órbita $\text{orb}(\mathcal{Q})$ asociada al cono \mathcal{Q} , tenemos que

$$\text{orb}(\mathcal{Q}) = 0 \times (\mathbb{K}^*)^{n-1} \subseteq U_{\mathcal{Q}},$$

pues la primer coordenada no puede ser nula, pues si lo fuera se tendría que $\text{orb}(\mathcal{Q}) = \text{orb}(0)$ lo cual es imposible, pues $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$. Por otro lado, por los teoremas (1.35) y (1.40) se tiene respectivamente:

$$U_{\mathcal{Q}} = \bigcup_{\mathcal{Q} \leq \sigma} \text{orb}(\sigma) \quad \text{y} \quad V(\mathcal{Q}) = \bigcup_{\sigma \leq \mathcal{Q}} \text{orb}(\sigma)$$

Es claro que $U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q}) = \text{orb}(\mathcal{Q})$, por lo tanto, hemos probado que:

$$U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q}) = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid p_1 = 0, p_j \neq 0 \text{ para } j = 2, \dots, n\}.$$

Considerando el anillo local:

$$\mathcal{O}_{X_{\Sigma}, V(\mathcal{Q})} = \{f \in \mathbb{K}(X_{\Sigma}) \mid f \text{ es regular en algún punto de } V(\mathcal{Q})\},$$

como $U_{\mathcal{Q}}$ es abierto en X_{Σ} , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_{\Sigma}, V(\mathcal{Q})} &= \mathcal{O}_{U_{\mathcal{Q}}, U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q})} \\ &= \{f \in \mathbb{K}(U_{\sigma}) \mid f \text{ es regular en algún punto de } U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q})\} \\ &= \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1}. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que si $f \in \mathcal{O}_{U_{\mathcal{Q}}, U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q})}$, entonces expresando a f como el cociente:

$$f = \frac{g}{h}$$

con $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, y h no se anula en algún punto de $U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q})$, por lo tanto $x_1 \nmid h$, luego $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1}$.

Recíprocamente si $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1}$, tenemos que existen $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, tal que $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] - \langle x_1 \rangle$, lo que implica que f es regular en todo $U_{\mathcal{Q}} \cap V(\mathcal{Q})$.

Finalmente, tomando el carácter ψ^m asociado a algún $m \in \mathbb{Z}^n$ y por la observación (1.6), podemos ver a ψ^m como el monomio de Laurent:

$$\psi^m = x_1^{\langle e_1, m \rangle} \dots x_n^{\langle e_n, m \rangle},$$

lo que implica que $\nu_{\mathcal{Q}}(\psi^m) = \langle e_1, m \rangle = \langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle$. \square

Proposición 2.8. *Sea $m \in \mathbb{Z}^n$ y sea el morfismo de carácter ψ^m la función racional en X_{Σ} asociada a m . Entonces su divisor principal está dado por:*

$$\text{div}(\psi^m) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle V(\mathcal{Q}),$$

a estos divisores los llamamos divisores de carácter.

DEMOSTRACIÓN. Por el ejemplo (2.6), se tiene que ψ^m es una función racional en la variedad tórica X_{Σ} . Por otro lado $V(\mathcal{Q})$ para $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$ es componente irreducible de $X_{\Sigma} - T$, pues $V(\mathcal{Q})$ son subvariedades de codimensión 1, i.e. son componentes irreducibles de X_{Σ} y como por el teorema (1.40), se tiene:

$$T = \text{orb}(0)$$

y por el teorema (1.40)

$$V(\mathcal{Q}) = \bigcup_{\mathcal{Q} \leq \sigma} \text{orb } \sigma,$$

lo que implica que $T \cap V(\mathcal{Q}) = \emptyset$, es decir $V(\mathcal{Q}) \subseteq X_\Sigma - T$. Ahora, como ψ^m está definida y no es cero por definición en T , se tiene que el divisor de ψ^m tiene soporte en:

$$\bigcup_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} V(\mathcal{Q}),$$

y por la proposición (2.7) se tiene finalmente:

$$\text{div}(\psi^m) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \nu_{\mathcal{Q}}(\psi^m) V(\mathcal{Q}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \langle n(\mathcal{Q}, \psi^m) \rangle V(\mathcal{Q}).$$

□

Hemos probado así

$$\text{div}(\psi^m) \in \text{PDiv}(X_\Sigma) \cap \text{TDiv}(X_\Sigma).$$

Por supuesto que podemos saber más acerca de un divisor D cuando es principal, pues mucha información está contenida en la función racional relacionada al divisor, sin embargo es mucho pedir que todos los divisores sean principales y por supuesto existen divisores que no son principales, pero a pesar que no siempre es posible asegurar que un divisor sea principal, existen divisores que pesar que no son principales de manera global si lo son de manera local.

Sea $D = \sum_i a_i D_i$ un divisor de Weil en una variedad X y sea $U \subset X$ un abierto no vacío, entonces decimos que *restringimos el divisor D en U* haciendo:

$$D|_U = \sum_{U \cap D_i \neq \emptyset} a_i D_i.$$

Con esta noción definiremos los siguientes divisores.

Definición 2.9. Sea X una variedad normal, y sea D un divisor de Weil en X , decimos que D es un *divisor de Cartier* si existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in \Gamma}$ de X y $\{f_i \in \mathbb{K}(X)\}_{i \in \Gamma}$ tal que $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)|_{U_i}$.

Por supuesto que en la definición de divisor de Cartier el par $\{U_i, f_i\}_{i \in \Gamma}$, debe cumplir que $\text{div}(f_i) = \text{div}(f_j)$ en $U_i \cap U_j$, es decir cumplen un criterio de compatibilidad. Por otro lado, la suma de divisores de Cartier, es un divisor de Cartier, pues si D, D' son de Cartier y suponiendo $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)|_{U_i}$ y $D'|_{U_i} = \text{div}(g_i)|_{U_i}$ para $\{U_i\}$ una cubierta abierta de X , entonces:

$$(D + D')|_{U_i} = D|_{U_i} + D'|_{U_i} = \text{div}(f_i)|_{U_i} + \text{div}(g_i)|_{U_i} = \text{div}(f_i g_i)|_{U_i}$$

lo que implica la existencia del subgrupo de divisores de Cartier sobre una variedad X y lo denotamos como $\text{CDiv}(X)$. Similarmente el subgrupo de divisores de Cartier T -invariantes (en el caso de que X sea variedad tórica) se denota $\text{TCDiv}(X)$.

En el ejemplo (2.3), construimos una infinidad de divisores a partir de las cerraduras de las órbitas asociadas a $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$, los cuales resultan T -invariantes, nuestra pregunta aquí es: ¿habrá divisores $D \in \text{TDiv}(X_\Sigma)$ que sean de Cartier? La respuesta es afirmativa, sin embargo bajo ciertas condiciones, para ilustrar este hecho, primero veamos este resultado.

Proposición 2.10. Si σ es un cono poliédrico fuertemente convexo no nulo en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces todo divisor de Cartier T -invariante en U_σ es un divisor de carácter.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el anillo $\mathbb{K}[S_\sigma] = \bigoplus_{\psi^m \in S_\sigma} \mathbb{K}\psi^m$, consta de las funciones regulares en U_σ , sea $D \in \text{TCDiv}(U_\sigma)$ entonces por el ejemplo (2.3) se tiene

$$D = \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}),$$

(donde $\sigma(1)$ denota el conjunto de conos \mathcal{Q} de dimensión 1 y $\mathcal{Q} \leq \sigma$), y primero supongamos que D es efectivo. Ahora definiendo:

$$(13) \quad I := H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{U_\sigma}(-D)) = \{f \in \mathbb{K}(U_\sigma)^* \mid \text{div}(f) \geq D\} \cup \{0\},$$

se tiene que I es un ideal de $\mathbb{K}[S_\sigma]$ por la proposición (2.5). Más aún, es T -invariante, pues si tomamos $f \in I$, entonces consideremos su divisor principal asociado:

$$\text{div}(f) = \sum_{D_i} \nu_{D_i}(f) D_i,$$

y como $\mathbb{K}[S_\sigma]$ es T -estable, entonces para todo $t \in T$, se tiene $t \cdot f \in \mathbb{K}[S_\sigma]$ y por lo tanto $\nu_{D_i}(t \cdot f) \geq 0$, pues $t \cdot f$ es regular en U_σ , y recordando la acción del toro T sobre $\mathbb{K}[S_\sigma]$ en la cual para $t \in T$ y $f \in \mathbb{K}[S_\sigma]$ se tiene que $t \cdot f$ cumple que $t \cdot f(p) = f(t \cdot p)$, entonces por lo tanto:

$$(14) \quad p \text{ es cero de } t \cdot f \iff t \cdot p \text{ es cero de } f,$$

entonces si D_i es T -invariante, por (14) se tiene que:

$$\nu_{D_i}(f) = \nu_{D_i}(t \cdot f),$$

y por lo tanto $\text{div}(t \cdot f) \geq D_i$ y lo que implica que $t \cdot f \in I$. Luego I es T -invariante.

Por el lema (1.8) se tiene:

$$(15) \quad I = \bigoplus_{\text{div}(\psi^m) \geq D} \mathbb{K}\psi^m.$$

Por otro lado, por el teorema (1.40) se tiene que para $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$ entonces $\text{orb}(\sigma) \subseteq V(\mathcal{Q})$. Luego:

$$\text{orb}(\sigma) \subseteq \bigcap_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} V(\mathcal{Q}).$$

Sea $p \in \text{orb}(\sigma)$ y como D es de Cartier por hipótesis, entonces existe una vecindad abierta U de p y $f \in \mathbb{K}(U_\sigma)^*$ tal que:

$$D|_U = \text{div}(f)|_U.$$

Contrayendo la vecindad si es necesario, podemos suponer que U es un abierto distinguido, es decir:

$$U = D(h) \text{ para } h \in \mathbb{K}[S_\sigma] \text{ y } h(p) \neq 0.$$

Como D es efectivo por hipótesis, se tiene que $\text{div}(f) \geq 0$ en U y por lo tanto, se tiene que $f \in \mathbb{K}[S_\sigma]_h$. Por otro lado, h es invertible en U , lo que implica que $h^{-1} \in \mathbb{K}[U]$, y por lo tanto $f \in \mathbb{K}[U]$; pero U es abierto distinguido, entonces es isomorfo a una variedad afín, lo que implica la existencia de un epimorfismo:

$$\mathbb{K}[S_\sigma] \longrightarrow \mathbb{K}[U]$$

dado por la restricción en U . Entonces, existe $\tilde{f} \in \mathbb{K}[S_\sigma]$, tal que $\tilde{f}|_U = f|_U$ y por el teorema de la identidad (corolario 1.31 de [13]) se tiene que $\tilde{f} = f$, entonces podemos suponer que $f \in \mathbb{K}[S_\sigma]$. Por otro lado, como $p \in U \cap V(\mathcal{Q})$ se tiene que $D|_U = D$. Luego:

$$\text{div}(f) \geq \text{div}(f)|_U = D|_U = D,$$

se tiene entonces que $f \in I$.

Por la ecuación (15) se tiene

$$f = \sum a_i \psi^{m_i} \quad a_i \in \mathbb{K}^*$$

con $\text{div}(\psi^{m_i}) \geq D$. Reescribiendo:

$$1 = \sum a_i \frac{\psi^{m_i}}{f}$$

y como $p \in U$, esto implica que

$$\frac{\psi^{m_j}}{f}(p) \neq 0 \quad \text{para algún } j$$

entonces existe algún abierto V tal que $p \in V \subseteq U$, y tal que ψ^{m_i}/f no se anula y es regular en V , lo que implica que

$$\text{div}(\psi^{m_i}/f)|_V = 0,$$

por lo tanto:

$$\text{div}(\psi^{m_j})|_V = \text{div}(f)|_V = D|_V.$$

Como $\text{div}(\psi^{m_j})$ y D tienen soporte contenido en $\bigcup_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} V(\mathcal{Q})$ y como para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$, se tiene $V(\mathcal{Q}) \cap V \neq \emptyset$ pues $p \in V(\mathcal{Q}) \cap V$ por lo tanto se tiene $\text{div}(\psi^{m_j}) = D$.

Ahora el caso general, sea D un divisor T -invariante de Cartier en U_σ , notemos que podemos exhibir $\psi^m \in S_\sigma$ tal que para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$ se tiene

$$\langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle > 0,$$

pues si no fuera así se tendría que $S_\sigma = \sigma^\perp \cap M$ y por lo tanto, extendiendo a los \mathbb{R} -espacios vectoriales, se tiene $\mathbb{R}\sigma^\vee = \sigma^\perp$ y como σ es fuertemente convexo, se tiene por la proposición (A.32) que:

$$n = \dim \sigma^\vee = \dim \sigma^\perp$$

y por lo tanto $\dim \sigma = 0$ lo cual implica que σ es el cono cero, lo cual no puede ser. Por la proposición (2.8) se tiene $\text{div}(\psi^m) > 0$ en U_σ ; para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se define:

$$D' := D + \text{div}(\psi^{km}) \geq 0.$$

Aplicando el argumento anterior se tiene que D' es un divisor de carácter, luego $D = D' - \text{div}(\psi^{km})$ es de carácter. \square

Teorema 2.11. *Sea X_Σ una variedad tórica asociada al abanico Σ y sea el divisor*

$$D = \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}) \in \text{TDiv}(X_\Sigma).$$

Son equivalentes:

- (i) D es de Cartier
- (ii) para todo $\sigma \in \Sigma$ se tiene D es principal en el abierto afín U_σ
- (iii) para todo $\sigma \in \Sigma$ existen $\psi^{m_\sigma} \in M$ tal que $\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle = -a_{\mathcal{Q}}$ para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$

Más aún si D es de Cartier y si existen $\{\psi^{m_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ como en (iii) entonces, los ψ^{m_σ} son únicos módulo $\sigma^\perp \cap M$

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada, notemos que restringiendo el divisor D en U_σ se tiene:

$$D|_{U_\sigma} = \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}).$$

Probemos $(i) \iff (ii)$. Si D es de Cartier en X_Σ , entonces es de Cartier en U_σ para todo $\sigma \in \Sigma$ y por la proposición (2.10), se tiene que D es divisor de carácter, es decir, es principal. Recíprocamente si D es principal para todo U_σ por definición D es de Cartier.

Demostremos ahora, $(ii) \iff (iii)$. En efecto, sea $\sigma \in \Sigma$ arbitrario. Si D es principal en U_σ entonces es de Cartier (tomando la cubierta trivial de U_σ), por la misma proposición (2.10) D es de carácter en U_σ y por la proposición (2.8) se tiene:

$$\operatorname{div}(\psi^{m_\sigma}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} \langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle V(\mathcal{Q}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}) = D|_{U_\sigma},$$

luego $\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle = a_{\mathcal{Q}}$ para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$, es decir $\langle n(\mathcal{Q}), -\psi^{m_\sigma} \rangle = -a_{\mathcal{Q}}$. Recíprocamente si para $\sigma \in \Sigma$ arbitrario se tiene que existe ψ^{m_σ} tal que $\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle = -a_{\mathcal{Q}}$ para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$, entonces:

$$\begin{aligned} D|_{U_\sigma} &= \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} -\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle V(\mathcal{Q}) \\ &= \operatorname{div}(-\psi^{m_\sigma}), \end{aligned}$$

i.e. D es principal en U_σ .

Ahora, supongamos que D es de Cartier y que tenemos $\{\psi^{m_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ en M como en la parte (iii). Propongamos $\{\psi^{m'_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ también cumple (iii). Entonces:

$$\begin{aligned} \langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m'_\sigma} \rangle = -a_{\mathcal{Q}} \text{ para todo } \mathcal{Q} \in \sigma(1) &\iff \langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} - \psi^{m'_\sigma} \rangle = 0 \text{ para todo } \mathcal{Q} \in \sigma(1) \\ &\iff \langle n, \psi^{m_\sigma} - \psi^{m'_\sigma} \rangle = 0 \text{ para todo } u \in \sigma \\ &\iff \psi^{m_\sigma} - \psi^{m'_\sigma} \in \sigma^\perp \cap M. \end{aligned}$$

□

Definición 2.12. Al conjunto $\{\psi^{m_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma} \subset M$ que cumple (iii) del teorema (2.11) se le llama los *datos de Cartier*.

Hemos construido así divisores a partir de las variedades $V(\mathcal{Q})$, sin embargo, es posible construir un divisor a partir de un politopo reticular P en $M_{\mathbb{R}}$ usando la representación canónica:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n_F, m \rangle \geq -a_F \text{ para toda careta } F \in P\},$$

donde $a_F \in \mathbb{Z}$ y n_F es la normal a la careta F de P . Recordando que las caretas del politopo corresponden a rayos del abanico, es decir, conos de dimensión 1 y los cuáles los expresamos en términos del elemento primitivo $n(\mathcal{Q}) \in N$ el cual genera al rayo \mathcal{Q} , por lo que la normal n_F a la faceta F corresponde al elemento primitivo $n(\mathcal{Q}_F)$ donde \mathcal{Q}_F es el rayo asociado a la careta F y por lo que vimos anteriormente tenemos la variedad $V(\mathcal{Q}_F)$ y por lo tanto podemos construir el siguiente divisor:

$$D_P := \sum_F a_F V(\mathcal{Q}_F)$$

Teorema 2.13. El divisor D_P es de Cartier.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in P$ un vértice, al cual le corresponde el cono máximo σ_v en el abanico Σ_P y sea \mathcal{Q}_F un cono de dimensión 1, tal que $\mathcal{Q}_F \in \sigma_v(1)$ lo cual implica que $v \in F$, donde F es una faceta de P . Pero $v \in F$, entonces $\langle n(\mathcal{Q}_F), v \rangle = -a_F$ y como $v \in M$, pues P es reticular, lo que implica que D_P es de Cartier por el teorema (2.11). \square

2.2. Divisores y funciones lineales de soporte

Ya con la noción de divisor, y más aún con la de divisor principal, nuestro interés es construir divisores principales asociados a las variedades tóricas que estamos trabajando. Con esta idea definiremos una función con ciertas características y después construiremos un divisor que resultará divisor de Cartier para finalmente trabajar con un espacio de secciones en la variedad tórica.

Definición 2.14. Sea Σ un abanico completo en una retícula N . Una función

$$h : |\Sigma| \longrightarrow \mathbb{R}$$

es llamada una *función Σ -lineal de soporte* si

$$h : N \cap |\Sigma| \longrightarrow \mathbb{Z},$$

y es lineal en cada $\sigma \in \Sigma$. Al conjunto de todas las funciones Σ -lineal de soporte lo denotamos como $\text{SF}(\Sigma, N)$. Más aún, es fácil ver que la linealidad en cada cono de Σ implica que la suma de funciones Σ -lineales de soporte es Σ -lineal de soporte y verificando la existencia de un neutro y de inversos, es fácil verificar que $\text{SF}(\Sigma, N)$ es un grupo abeliano.

Observación 2.15. Ahora, si $h \in \text{SF}(\Sigma, N)$, se tiene por definición que h es lineal en cada cono $\sigma \in \Sigma$, lo que implica la existencia de $l_\sigma \in M_{\mathbb{R}}$ tal que:

$$h(n) = \langle n, l_\sigma \rangle \quad \text{para toda } n \in \sigma,$$

y cumple la condición que $h(n) \in \mathbb{Z}$ para toda $n \in \sigma \cap N$. Análogamente al lema (1.38) se tiene que el apareamiento:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \sigma \cap N \times M(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

es perfecto). Lo que implica $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma \cap N, \mathbb{Z}) \approx M(\sigma)$; por lo tanto por la suprayectividad para $n \in \sigma \cap M$ se tiene la existencia de $l'_\sigma \in M(\sigma)$ y por lo tanto $\langle n, l_\sigma - l'_\sigma \rangle = 0$, lo que implica por la inyectividad que $l_\sigma = l'_\sigma$ módulo $\sigma^\perp \cap M$ y como en particular $l'_\sigma \in M$ se tiene $l_\sigma \in M$. Recordemos por el isomorfismo (1), en realidad l_σ es un carácter, abusando un poco de la notación escribamos como ψ^{l_σ} con $l_\sigma \in \mathbb{Z}^n$.

Teorema 2.16. Sea Σ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces:

- (a) Dado el divisor de Cartier $D = \sum_{\mathcal{Q}} a_{\mathcal{Q}} V(\mathcal{Q})$ con los datos de Cartier $\{\psi^{m_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$, entonces la función

$$\begin{aligned} \varphi_D : |\Sigma| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \varphi_D(u) = \langle u, \psi^{m_\sigma} \rangle \text{ si } u \in \sigma \end{aligned}$$

es una función Σ -lineal de soporte.

- (b) $\varphi_D(n(\mathcal{Q})) = -a_{\mathcal{Q}}$ para toda $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$, lo que implica que:

$$D = - \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \varphi_D(n(\mathcal{Q})) V(\mathcal{Q}).$$

- (c) La función $D \longmapsto \varphi_D$ induce un isomorfismo de grupos:

$$\text{TCDiv}(X_\Sigma) \approx \text{SF}(\Sigma, N)$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema (2.11) prueba que los ψ^{m_σ} son únicos módulo $\sigma^\perp \cap M$ lo que implica que la función φ_D está bien definida. Ahora la linealidad en cada $\sigma \in \Sigma$ viene del hecho que $\varphi_D|_\sigma = \langle u, \psi^{m_\sigma} \rangle$ y como $\{\psi^{m_\sigma}\} \subset M$ se tiene que $\varphi(\Sigma \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$. Esto prueba (a).

Para probar (b), como $\{\psi^{m_\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$ son datos de Cartier, se tiene por definición que:

$$\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle = -a_{\mathcal{Q}} \text{ para toda } \mathcal{Q} \in \sigma(1).$$

y por la definición de φ_D se tiene la igualdad deseada.

Queda demostrar (c), tomando $D, E \in \text{TCDiv}(X_\Sigma)$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{D+E} &= \varphi_D + \varphi_E \\ \varphi_{kD} &= k\varphi_D \end{aligned}$$

Por lo tanto $D \mapsto \varphi_D$ es homomorfismo de grupos, ahora la inyectividad se sigue de (b), pues si $\varphi_D = \varphi_{D'}$, entonces para toda $u \in \sigma$ y para todo $\sigma \in \Sigma$, se tiene:

$$\varphi_D(u) = \varphi_{D'}(u),$$

en particular para $n(\mathcal{Q}) \in \Sigma(1)$, lo que implica

$$-\sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \varphi_D(n(\mathcal{Q}))V(\mathcal{Q}) = -\sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \varphi_{D'}(n(\mathcal{Q}))V(\mathcal{Q})$$

y por (b) se tiene finalmente $D = D'$, y así la función es un monomorfismo. Falta la suprayectividad, sea $\varphi \in \text{SF}(\Sigma, N)$ y sea $\sigma \in \Sigma$, como φ es Σ -lineal de soporte, la extendemos a la subretícula $N_\sigma \subset N$ la cual es generada por $\sigma \cap N$, digamos:

$$\varphi_\sigma : N_\sigma \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Análogamente que en el lema (1.38) se tiene que el apareamiento:

$$N_\sigma \times M(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es perfecto, donde $M(\sigma) := M/M_\sigma$ y $M_\sigma \subset M$ es la subretícula generada por $\sigma^\perp \cap M$. Por lo tanto $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_\sigma, \mathbb{Z}) \approx M(\sigma)$ y lo que implica que existe ψ^{m_σ} tal que:

$$\varphi_\sigma = \langle n, \psi^{m_\sigma} \rangle \text{ para } n \in \sigma \cap N,$$

particular tomando $n(\mathcal{Q}) \in \sigma \cap N$ tal que $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$, se tiene que al definir

$$\langle n(\mathcal{Q}), \psi^{m_\sigma} \rangle := -a_{\mathcal{Q}}$$

obtenemos por el teorema (2.11) el divisor de Cartier T -invariante:

$$D = \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} a_{\mathcal{Q}}V(\mathcal{Q}),$$

finalmente la función de (c) es isomorfismo. \square

Proposición 2.17. *Sea P un politopo reticular en $M_{\mathbb{R}}$ de dimensión n . Entonces la función h_P definida de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} h_P : N_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \inf\{\langle n, m \rangle \mid m \in P\}, \end{aligned}$$

es función Σ_P -lineal de soporte.

DEMOSTRACIÓN. Notemos antes que nada que la existencia del ínfimo está garantizada pues todo politopo es compacto. Denotemos como F a las caretas de P y sean $n(\mathcal{Q}_F)$ los elementos primitivos generadores de los conos unidimensionales que son normales a las caretas y que apuntan hacia dentro del politopo. Así escribimos al politopo P como intersección finita de hiperplanos:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n(\mathcal{Q}_F), m \rangle \geq -a_F \text{ para toda careta } F \in P\}.$$

Recordemos que los vértices de P corresponden a conos máximos en el abanico Σ_P , sea v un vértice de P , el cuál nos da el cono máximo σ_v , entonces tomando un elemento $u \in \sigma_v$ tenemos:

$$u = \sum_{v \in F} \lambda_F n(\mathcal{Q}_F) \text{ con } \lambda_F \geq 0.$$

Entonces para $m \in P$

$$\langle u, m \rangle = \sum_{p \in F} \lambda_F \langle n(\mathcal{Q}_F), m \rangle \geq - \sum_{p \in F} \lambda_F a_F,$$

y notemos que la igualdad se da cuando $m = v$, pues la igualdad ocurre cuando m está en la frontera de P , por lo tanto, $h_P(u) = \langle u, v \rangle$. Luego h_P es Σ_P -lineal de soporte. \square

Observación 2.18. Recordemos el divisor de Cartier D_P asociado a un politopo P :

$$D_P = \sum_F a_F V(\mathcal{Q}_F)$$

y considerando la función Σ_P -lineal de soporte h_P , evaluando en los elementos primitivos de los rayos del abanico, entonces por definición, se tiene:

$$h_P(n(\mathcal{Q}_F)) = \inf\{\langle n(\mathcal{Q}_F), m \rangle \mid m \in P\} = -a_F,$$

es decir:

$$-h_P(n(\mathcal{Q}_F)) = a_F \text{ para toda careta } F$$

por lo tanto podemos reescribir el divisor D_P en términos de los valores $h_P(n(\mathcal{Q}_F))$. Por el teorema (2.16) hemos asignado biunívocamente al divisor D_P la función Σ_P -lineal de soporte, por lo tanto definimos D_{h_P} como:

$$D_P = \sum_F a_F V(\mathcal{Q}_F) = D_P = \sum_F -h_P(n(\mathcal{Q}_F)) V(\mathcal{Q}_F) =: D_{h_P}$$

2.3. Secciones globales de variedades tóricas

En esta sección estudiaremos espacios de secciones globales en una variedad tórica, un problema muy común en matemáticas es averiguar si es de dimensión finita y de serlo obtener una base de él. La asignación biunívoca entre divisores de Cartier y funciones Σ -lineales de soporte, vista en la sección anterior, dará frutos y demostraremos un teorema muy importante, en el cual daremos explícitamente una base para un espacio de secciones con polos acotados por un divisor de Cartier asociado a un politopo P .

Proposición 2.19. Si D es un divisor T -invariante en X_{Σ} . Entonces:

$$H^0(X_{\Sigma}, \mathcal{O}_{X_{\Sigma}}(D)) = \bigoplus_{\text{div}(\psi^m) + D \geq 0} \mathbb{K}\psi^m$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$, entonces por definición $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$ lo que implica que considerando el divisor de ceros y polos de f , digamos:

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{E \neq V(\mathcal{Q})} \nu_E(f)E + \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} \nu_{\mathcal{Q}}(f)V(\mathcal{Q}),$$

lo que implica que las valuaciones $\nu_E(f) \geq 0$ para $E \neq V(\mathcal{Q})$. Tomando $t \in T$ entonces por definición de la acción de T sobre $\mathbb{K}[M]$, tenemos:

$$(16) \quad p \text{ es cero de } t \cdot f \iff t \cdot p \text{ es cero de } f,$$

$$(17) \quad t^{-1}p \text{ es cero de } t \cdot f \iff p \text{ es cero de } f,$$

y como un polo de f es un cero de $1/f$, entonces concluimos que f y $t \cdot f$ tienen el mismo número de polos y de ceros. Por otro lado $\nu_{\mathcal{Q}}(f) = \nu_{\mathcal{Q}}(t \cdot f)$, pues las variedades $V(\mathcal{Q})$ son T -invariantes y como $\nu_E(f) \geq 0$ para $E \neq V(\mathcal{Q})$ se tiene que $\nu_E(t \cdot f) \geq 0$. Luego

$$\operatorname{div}(t \cdot f) + D \geq 0.$$

Es decir $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ es T -estable, por el lema (1.8) se tiene

$$\begin{aligned} H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) &= \bigoplus_{\psi^m \in \Gamma(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))} \mathbb{K}\psi^m \\ &= \bigoplus_{\operatorname{div}(\psi^m) + D \geq 0} \mathbb{K}\psi^m \end{aligned}$$

□

En la proposición (2.17) probamos que a partir de un politopo reticular $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es posible definir una función h_P tal que es Σ_P -lineal de soporte, por lo que ahora nos preguntamos si será posible hacer lo mismo en el sentido contrario, y la respuesta es afirmativa, pues si consideramos h una función Σ -lineal de soporte, entonces podemos definir el siguiente conjunto (posiblemente vacío) en $M_{\mathbb{R}}$:

$$P_h := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n, m \rangle \geq h(n) \text{ para todo } n \in N_{\mathbb{R}}\}$$

el cual resulta ser un politopo reticular por el teorema A.18 y el corolario A.19 de [9]. Esta peculiar relación tiene su radical importancia en el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Sea X_Σ una variedad tórica completa y sea h una función Σ -lineal de soporte con divisor de Cartier D_h y sea P_h el politopo reticular asociado a la función h . Entonces el \mathbb{K} -espacio vectorial de secciones globales $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$ tiene dimensión $|M \cap P_h|$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que el conjunto:

$$H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) = \{f \in \mathbb{K}(X_\Sigma)^* \mid \operatorname{div}(f) + D_h \geq 0\} \cup \{0\}$$

es cerrado bajo sumas, además se cierra bajo multiplicación por escalares y mediante $\nu_{\mathcal{Q}}(0) := \infty$ para toda variedad \mathcal{Q} de codimensión 1, se tiene que $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial. Ahora, tenemos que el divisor de Cartier por definición es:

$$D_h := - \sum_{\mathcal{Q} \in \Sigma(1)} h(n(\mathcal{Q}))V(\mathcal{Q}),$$

donde $n(\mathcal{Q})$ es el elemento primitivo que genera a \mathcal{Q} . Notemos que este divisor es T -invariante pues $V(\mathcal{Q})$ es T -invariante para todo $\mathcal{Q} \in \Sigma(1)$. Reescribiendo el espacio de secciones globales, tenemos que:

$$\begin{aligned} H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) &= \bigcap_{\sigma \in \Sigma} H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) \\ &= \bigcap_{\sigma \in \Sigma} H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{U_\sigma}(D_h)) \end{aligned}$$

Entonces por la proposición (2.19), para todo $\sigma \in \Sigma$ se tiene:

$$H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) = \bigoplus_{\text{div}(\psi^m) + D_h|_{U_\sigma} \geq 0} \mathbb{K}\psi^m,$$

lo que implica que el conjunto de morfismos de carácter ψ^m tal que $\text{div}(\psi^m) + D_h|_{U_\sigma} \geq 0$, forma una \mathbb{K} -base de $H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$. Ahora, considerando la desigualdad

$$(18) \quad \text{div}(\psi^m) + D_h \geq 0 \text{ en } U_\sigma.$$

Por la proposición (2.8), la condición (18) se reescribe como:

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} \langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle V(\mathcal{Q}) - \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} h(n(\mathcal{Q})) V(\mathcal{Q}) \geq 0.$$

Sumando los dos divisores, obtenemos el divisor efectivo:

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} \left(\langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle - h(n(\mathcal{Q})) \right) V(\mathcal{Q}) \geq 0,$$

lo que implica que $\langle n(\mathcal{Q}), \psi^m \rangle - h(n(\mathcal{Q})) \geq 0$ para todo $\mathcal{Q} \in \sigma(1)$ y como esto es válido para todos los generadores de σ entonces es válido para todos los elementos de σ , es decir:

$$\langle n, \psi^m \rangle \geq h(n) \text{ para todo } n \in \sigma$$

y como $h(n) = \langle n, \psi^{l_\sigma} \rangle$, se tiene que:

$$\langle n, \psi^m \rangle \geq \langle n, \psi^{l_\sigma} \rangle \text{ para toda } n \in \sigma.$$

Pero por definición $n = \lambda^l \otimes r$, con $\lambda \in N$ y $r \in \mathbb{R}$, y por la construcción del apareamiento entre los espacios $N_{\mathbb{R}}$ y $M_{\mathbb{R}}$, reescribimos la última desigualdad:

$$\langle \lambda^l, \psi^m \rangle r \geq \langle \lambda^l, \psi^{l_\sigma} \rangle r,$$

y por la definición del apareamiento entre las retículas y la linealidad del mismo tenemos:

$$\begin{aligned} \langle l, m \rangle r &\geq \langle l, l_\sigma \rangle r \\ \langle l, m - l_\sigma \rangle r &\geq 0 \\ \langle \lambda^l, \psi^{m-l_\sigma} \rangle r &\geq 0 \\ \langle \lambda^l \otimes r, \psi^{m-l_\sigma} \rangle &\geq 0 \\ \langle n, \psi^{m-l_\sigma} \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego $\psi^{m-l_\sigma} \in S_\sigma$. Es decir $\psi^{m-l_\sigma} \in \mathbb{K}[S_\sigma]$, entonces tenemos que:

$$\psi^m = \psi^{m-l_\sigma+l_\sigma} = \psi^{m-l_\sigma} \psi^{l_\sigma} \in \mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}.$$

Luego

$$H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) \subseteq \mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}.$$

Recíprocamente, si $g \cdot \psi^{l_\sigma} \in \mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}$ entonces:

$$\text{div}(g\psi^{l_\sigma}) = \text{div}(g) + \text{div}(\psi^{l_\sigma}) \geq \text{div}(\psi^{l_\sigma}) \text{ en } U_\sigma,$$

pues g es regular en U_σ . Y notemos primero que calculando el divisor asociado a ψ^{l_σ} restringido a U_σ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\psi^{l_\sigma})|_{U_\sigma} &= \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} \langle n(\mathcal{Q}), l_\sigma \rangle V(\mathcal{Q}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q} \in \sigma(1)} h(n(\mathcal{Q})) V(\mathcal{Q}) \\ &= -D_h|_{U_\sigma} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{div}(g\psi^{l_\sigma}) + D_h|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(\psi^{l_\sigma}) + D_h|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(g) \geq 0$$

es decir $g\psi^{l_\sigma} \in H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$, lo que implica que

$$H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) \supseteq \mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}.$$

Hemos probado así que:

$$H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) = \mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}$$

Note que $\mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) \cdot \psi^{l_\sigma}$ tiene como \mathbb{K} -base, el conjunto $\{\psi^m \mid \psi^{m-l_\sigma} \in S_\sigma\}$, y es finito, pues S_σ es finitamente generado por el lema de Gordan. Por último:

$$\begin{aligned} H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) &= \bigcap_{\sigma \in \Sigma} H^0(U_\sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h)) \\ &= \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \langle \{\psi^m \mid \psi^{m-l_\sigma} \in S_\sigma\} \rangle \\ &= \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \langle \{\psi^m \mid \langle n, \psi^m \rangle \geq h(n), \text{ para todo } n \in \sigma\} \rangle \\ &= \langle \{\psi^m \mid \langle n, \psi^m \rangle \geq h(n), \text{ para todo } n \in N_\mathbb{R}\} \rangle \\ &= \langle \{\psi^m \mid \psi^m \in M \cap P_h\} \rangle. \end{aligned}$$

Hemos probado que el conjunto $\{\psi^m \mid \psi^m \in M \cap P_h\}$ genera a $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$ y es finito pues es la intersección de conjuntos finitos. Ahora veamos que todos los elementos son \mathbb{K} -linealmente independientes, lo cual probamos cuando $\mathbb{K}[M]$ es suma directa de los subespacios generados por los caracteres ψ^m . Hemos así probado que $\{\psi^m \mid \psi^m \in M \cap P_h\}$ es una \mathbb{K} -base de $H^0(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D_h))$. \square

2.4. Conclusiones y perspectivas

La presente tesis tuvo como objetivo mostrar la construcción de una familia especial de variedades algebraicas, en las cuales se conjuga la geometría convexa con la geometría algebraica. Todas las pruebas se reescribieron en el lenguaje de variedades algebraicas. La aportación de este trabajo es dar demostraciones alternativas con métodos puramente algebraicos aplicables a cualquier campo algebraicamente cerrado. Ya que hay una intrínseca relación con los objetos convexos de los cuales partimos las nociones de singularidad y completitud son más intuitivos por lo que se deja como perspectiva seguir estudiando esta familia especial de objetos algebraicos y algunas preguntas en las que hemos empezado a pensar son las siguientes:

- (i) Para una variedad tórica lisa y proyectivamente normal, ¿su ideal tórico está generado por cuádricas? ¿Su anillo de coordenadas es Koszul?

- (ii) Para variedades tóricas lisas se sabe que todo divisor amplio es muy amplio. La pregunta es: ¿para variedades tóricas lisas es cierto que todo divisor amplio, además de ser muy amplio, induce un encaje proyectivo normal?

Apéndice A

En este apéndice se recolectan varios resultados de la geometría convexa, los cuales se usan en la construcción así como para probar las propiedades de las variedades tóricas resultantes a partir de nuestros conjuntos convexos. La importancia de estos resultados es innegable sin embargo algunos hechos serán dados por vistos pues la geometría convexa no es el tema fundamental de este trabajo.

A.1. Retículas y sus duales

En esta pequeña sección se define únicamente el importante concepto de retícula, cuyos puntos son vitales para poder construir las \mathbb{K} -álgebras de semigrupo, así como poder construir los \mathbb{R} -espacios donde definimos los conjuntos convexos que usaremos a lo largo de los resultados.

Definición A.1. Una *retícula* N es un grupo abeliano libre de rango finito. Si el rango de la retícula es n entonces se tiene que $N \approx \mathbb{Z}^n$

Ejemplo A.2. Sea n un entero positivo, entonces trivialmente \mathbb{Z}^n es una retícula de rango n .

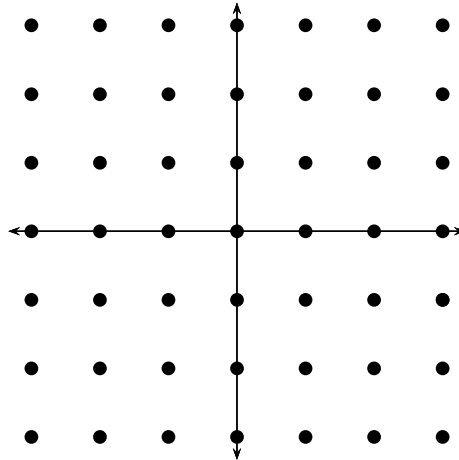


Figura A.2: Retícula \mathbb{Z}^2

Ejemplo A.3. Sea T un toro algebraico de dimensión n , entonces el grupo N de subgrupos uniparamétricos-paramétricos es una retícula de rango n .

Definición A.4. Sea N una retícula de rango n , entonces definimos su *retícula dual* como $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

Ejemplo A.5. Sea T un toro algebraico de dimensión n , entonces el grupo de caracteres del toro M , es una retícula de rango n . Más aún es retícula dual de N , pues a partir de la composición de $\psi^m \in M$ y $\lambda^l \in N$ definimos el apareamiento de estas retículas a partir de producto interior de \mathbb{Z}^n y como este apareamiento es perfecto, se tiene:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \approx M.$$

A.2. Conjuntos convexos

Con el fin de poder entender conceptos como los de polítopos y conos, en esta sección se introducen las nociones convexidad, básica y fundamental en el análisis, así como propiedades de ellos, las cuáles serán parte fundamental de toda la herramienta requerida para el desarrollo de esta tesis. Las pruebas de los resultados se omitirán pues ni la convexidad ni polítopos y conos son tema central de este trabajo.

Definición A.6. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es llamado *convexo* si para toda $x, y \in K$ con $x \neq y$, el segmento:

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está contenido en K .

Ejemplo A.7. Son conjuntos convexos: un punto, rectas, discos en \mathbb{R}^2 . También \emptyset y \mathbb{R}^n son convexos.

Lema A.8. La intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexo.

Definición A.9. Decimos que x es una *combinación convexa* de $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_r &= 1, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r &\geq 0. \end{aligned}$$

Si la última condición se ignora decimos que x es una *combinación afín* de x_1, \dots, x_r .

Definición A.10. El conjunto de todas las combinaciones convexas de un conjunto cerrado $W \subset \mathbb{R}^n$ es llamado la *cápsula convexa* $\text{conv } W$ de W ; en particular $\text{conv } \emptyset = \emptyset$. Análogamente, el conjunto de todas las combinaciones afines de elementos de W se llama la *cápsula afín* y se denota por $\text{af } W$. Finalmente, denotaremos con $\text{lin } W$ al espacio lineal generado por W . Notemos que $\text{lin } W$ es el espacio vectorial mas chico que contiene a W .

Por supuesto, que la cápsula convexa y la cápsula afín de W son conjuntos cerrados convexos pues si $x, x' \in W$ (distintos), entonces se sigue que $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ y $x' = \sum_{i=0}^m \lambda'_i x'_i$, entonces el segmento $[x, x'] \in \text{conv } W$, pues para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)x' &= \lambda \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{j=0}^m \lambda'_j x'_j \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda \lambda_i x_i + \sum_{j=0}^m (1 - \lambda) \lambda'_j x'_j \end{aligned}$$

y como $\lambda \lambda_i \geq 0$, $(1 - \lambda) \lambda'_j \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ y $\sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i + \sum_{j=1}^m (1 - \lambda) \lambda'_j = 1$, se sigue, que efectivamente $\text{conv } M$ y $\text{af } M$ son conjuntos cerrados convexos.

Definición A.11. Si K es un conjunto convexo, decimos que:

$$\dim K := \dim(\text{lin } K)$$

es la *dimensión de K* . Por convención, $\dim \emptyset = -1$.

Ahora, fijando $u \in \mathbb{R}^n$ con $u \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $H_{u,\alpha} := \{x : \langle x, u \rangle = \alpha\}$ es un hiperplano. Los conjuntos $H_{u,\alpha}^+ = \{x : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$ y $H_{u,\alpha}^- = \{x : \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$ son llamados los semiespacios acotados por $H_{u,\alpha}$. Si $\sigma \subset H_{u,\alpha}^+$ y $\alpha = 0$, decimos que σ tiene un vértice.

Definición A.12. Un hiperplano H es llamado *hiperplano de soporte* de un conjunto cerrado convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ si $K \cap H \neq \emptyset$ y $K \subset H^-$ o $K \subset H^+$. Llamamos a H^- (o H^+ , respectivamente) el semiespacio de soporte de K

Si u es un vector normal de H apuntando hacia H^+ (o H^- , respectivamente), decimos que u es normal exterior de K y $-u$ es normal interior de K .

De esta definición podemos obtener una muy útil interpretación de los conjuntos convexos:

Lema A.13. *Un subconjunto (propio) cerrado de \mathbb{R}^n es intersección de semiespacios de soporte.*

Definición A.14. Sea H un hiperplano de soporte de un conjunto cerrado convexo K , decimos que el conjunto $F := K \cap H$ es una *cara* de K . Si F es una cara de H y $F \subsetneq H$ decimos que F es una cara propia de H . \emptyset y K se llaman caras impropias.

Ahora, por el lema (A.8) se sigue que:

Lema A.15. *Toda cara de un conjunto cerrado convexo K es también un conjunto cerrado convexo.*

Recordando que a cada cara le asignamos una dimensión, las clasificaremos de la siguiente forma:

Definición A.16. Sea F una cara de K , si $\dim F = k$, entonces se dice que es una k -cara. Llamamos a F :

- (a) un vértice de K , si $k = 0$,
- (b) una arista de K , si $k = 1$,
- (c) una careta de K , si $k = \dim K - 1$

Denotamos al conjunto de caras de dimensión r de un conjunto cerrado convexo K como $K(r)$.

A.3. Polítopos

Una vez clara la parte de convexidad, nos centraremos a estudiar un tipo muy especial de conjuntos convexos, estudiaremos una clase especial de conjuntos convexos: los polítopos, con los cuales parte toda la teoría estudiada en esta tesis. En la sección anterior los conjuntos convexos se encuentran en \mathbb{R}^n , sin embargo en nuestro estudio los polítopos viven en el \mathbb{R} -espacio construido a partir de nuestra retícula M , es decir, se encuentran en $M_{\mathbb{R}}$. Mientras que los puntos reticulares que están en \mathbb{Z}^n , es nuestro caso están en M .

Definición A.17. Consideremos el conjunto:

$$W = \{x_1, \dots, x_r\} \subset M_{\mathbb{R}},$$

decimos que $P := \text{conv}W \subset M_{\mathbb{R}}$ es un *polítopo convexo* o simplemente *polítopo*. Si $W \subset N$ entonces se dice que P es un *polítopo reticular*.

Es fácil ver que todo politopo es compacto (esto se sigue pues un politopo es cerrado y acotado).

Ejemplo A.18. Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ el politopo reticular con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

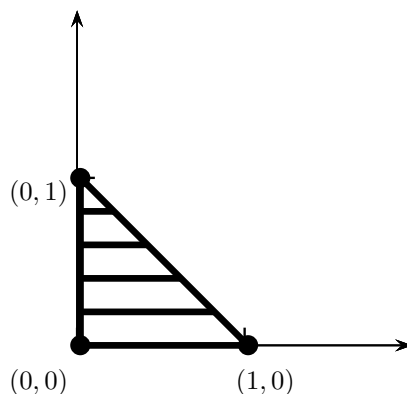


Figura A.18: Politopo reticular

Observación A.19. Análogamente se define la dimensión del politopo P como la dimensión del subespacio vectorial de $M_{\mathbb{R}}$ más pequeño que contiene a P , es decir $\dim P = \dim \text{lin } P$.

Definición A.20. Sea un politopo P y sea $F \subset P$, se dice que F es una *cara* de P , si $P \cap H = F$, donde H es un hiperplano de soporte.

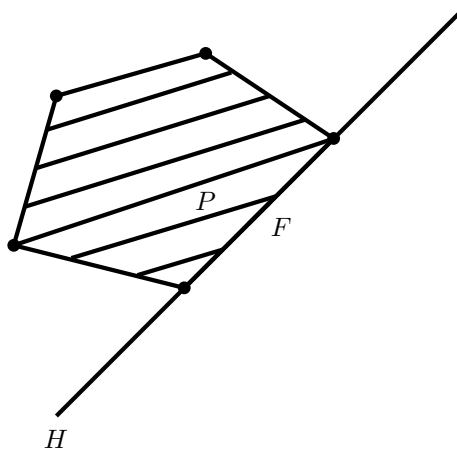


Figura A.20: Cara F de un politopo P en el plano

De la misma definición de cara, es posible deducir que:

- (1) Toda cara de P es también un politopo.
- (2) La intersección de caras de un politopo P es una cara.
- (3) Cualquier cara de una cara de P es una cara.
- (4) Cualquier cara propia de P está contenida en una careta.
- (5) Cualquier cara propia de P es la intersección de las caretas que la contienen.

Recordemos el lema (A.13), el cual nos dice que cualquier cerrado en \mathbb{R}^n (en nuestro caso en $M_{\mathbb{R}}$) es intersección de semiespacios de soporte, para el caso de politopos reticulares queremos traducir esa misma condición, por supuesto que todo politopo P es intersección de semiespacios de soporte pues un politopo es cerrado, sin embargo el recíproco es válido solo si la intersección es acotada, es decir si la intersección siguiente es acotada

$$P := \bigcap_{i=1}^t H_{u_i, \alpha_i}^+$$

entonces, P es un politopo. Cuando P tiene dimensión máxima, es decir $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$, entonces la descripción en forma intersección tiene una forma especial pues si F es una careta de P , tiene un único hiperplano de soporte, y lo escribimos:

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n_F \rangle = -a_F\}$$

y

$$H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n_F \rangle \geq -a_F\},$$

donde $(n_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ son únicos salvo el producto de números reales positivos y donde n_F es la normal a la faceta F que apunta hacia dentro de P , es decir n_F es normal interior de P . Es decir:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n_F \rangle \geq -a_F \text{ para toda careta } F \in P\}.$$

Lo cual se ilustra en la figura siguiente:

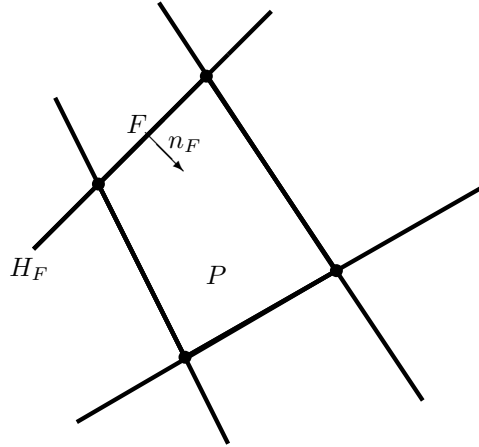


Figura A.21: Intersección de los hiperplanos de soporte de un politopo P

Suponiendo que el politopo $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ es reticular de dimensión $n > 1$, entonces el politopo lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n_F \rangle \geq -a_F \text{ para toda careta } F \in P\},$$

donde n_F es normal a la faceta F de P . Como F es de codimensión 1, entonces usando un argumento similar al usado en el lema (1.5) existe algún $n \in N$ tal que $n \in F^\perp$, i.e. n es normal a la faceta F , y por lo tanto podemos elegir algún elemento primitivo y lo escribimos como n_F . Ahora como P es reticular, entonces si v es un vértice, entonces $v \in N$, si F es una faceta de P tal que $v \in F$, entonces $\langle v, n_F \rangle \geq -a_F$, y por lo tanto $a_F \in \mathbb{Z}$.

A.4. Conos y sus duales

En esta sección definiremos una familia especial de conjuntos convexos que nos recuerdan los pirámides de Egipto, los conos poliédricos, los cuales son vitales en este trabajo ya que su importancia no solo radica en la construcción de las variedades tóricas, si no que las propiedades geométricas de estos conos se traduce en una propiedad geométrica de las variedades y estas relaciones son recíprocas, por lo que averiguar una propiedad de las variedades se traduce en investigar las propiedades del cono del cual partimos. Aquí los objetos convexos que estaremos definiendo, estarán en el espacio $N_{\mathbb{R}}$ y los puntos reticulares en N .

Definición A.21. Sea $W \subset N_{\mathbb{R}}$, el conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas de elementos $x_1, \dots, x_k \in M$ tales que:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$$

es llamado la *cápsula positiva* y se denota por σ . Si

$$\sigma := \text{pos } W$$

decimos que el cono σ está determinado por W . Por convención $\text{pos } \emptyset := 0$.

Definición A.22. Si $W = \{x_1, \dots, x_r\} \subset N_{\mathbb{R}}$ es finito, decimos que

$$\sigma = \text{pos } W$$

es un *cono poliédrico*. A veces se escribe así:

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} x_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} x_r.$$

Si $W \subset N$ se dice que σ es un *cono poliédrico racional*.

A veces a los vectores x_i (o lo semirrayos $\mathbb{R}_{\geq 0} x_i$) se llaman los generadores del cono σ .

Ejemplo A.23. Un cuadrante en \mathbb{R}^2 y un octante en \mathbb{R}^3 son conos poliédricos con vértices en el origen.

Ejemplo A.24. Consideremos los siguientes conos poliédricos: σ_1 generado por los vectores e_1 y e_2 ; el cono σ_2 generado por e_2 y $-e_1 - e_2$ y el cono σ_3 generado por $-e_1 - e_2$ y por e_1 .

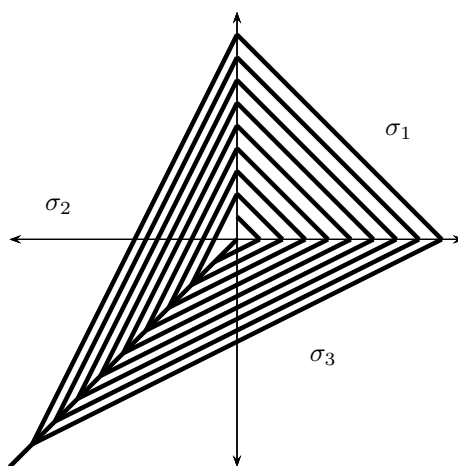


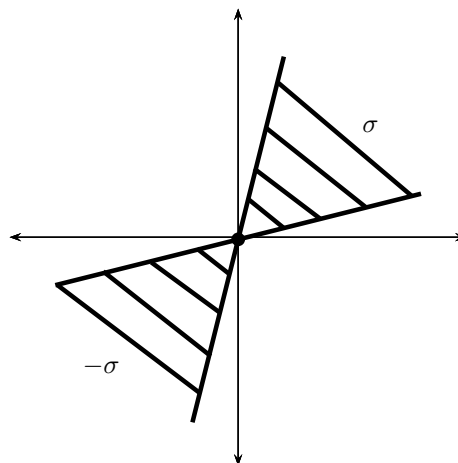
Figura A.24: Conos poliédricos convexos

Por el hecho de que las combinaciones convexas son, por definición combinaciones lineales no-negativas se sigue que:

Lema A.25. *La cápsula positiva de cualquier conjunto W es convexa.*

Por lo tanto al referirnos a un cono poliédrico, diremos en su lugar un cono poliédrico convexo.

Definición A.26. Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico convexo se dice que es *fuertemente convexo* si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Figura A.26: Ejemplo de un cono poliédrico σ fuertemente convexo en el plano

Observación A.27. Sea σ un cono poliédrico convexo, entonces por la definición (A.11) se tiene que la dimensión del cono σ es la dimensión del subespacio vectorial de $N_{\mathbb{R}}$ más pequeño que contiene a σ es decir $\dim \sigma = \dim \text{lin } W$

Definición A.28. Sea N una retícula y sea σ un cono. Entonces el conjunto:

$$\sigma^{\vee} := \{y \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, y \rangle \geq 0 \mid \text{para todo } x \in \sigma\}$$

es llamado el *cono dual* de σ . Más aún, se tiene que σ^\vee es también un cono poliédrico convexo ver teorema 2.1 de [4].

Ejemplo A.29. Consideremos los conos del ejemplo (A.24), entonces tenemos que los conos duales (respectivamente) son:

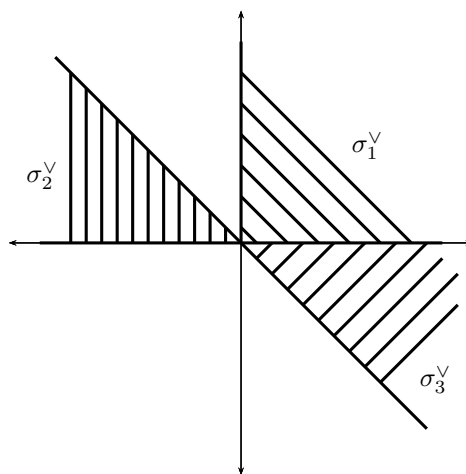


Figura A.29: Conos duales

Definición A.30. Una *cara* τ de un cono σ es un conjunto de la forma

$$\tau = \sigma \cap H$$

donde H es el hiperplano de soporte $H = \{x : \langle x, u \rangle = 0\}$ para algún $u \in \sigma^\vee$. Lo denotamos como $\tau \leq \sigma$, si es cara propia la escribimos $\tau < \sigma$.

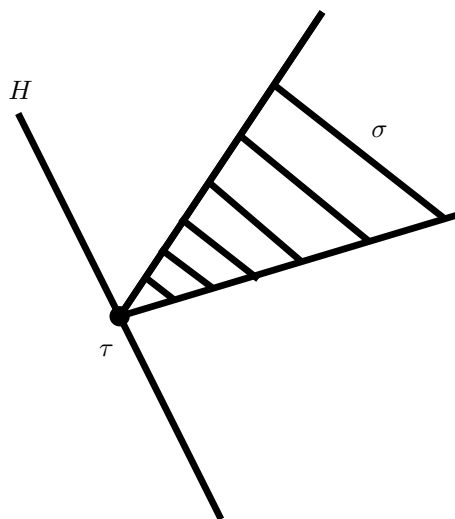


Figura A.30: Cara τ de un cono σ

Notemos que de la definición de cara de un cono, se desprende que:

- (1) Toda cara τ de un cono σ es también un cono poliédrico
- (2) La intersección de caras es una cara.
- (3) Cualquier cara de una cara es una cara también.
- (4) Cualquier cara propia está contenida en una careta.
- (5) Cualquier cara propia es la intersección de las caretas que la contienen.

Proposición A.31. Sea $\sigma, \tau \subset N_{\mathbb{R}}$ conos poliédricos convexos. Entonces:

- a) $\sigma = (\sigma^{\vee})^{\vee}$
- b) $(\sigma + \tau)^{\vee} = \sigma^{\vee} \cap \tau^{\vee}$ (suma de Minkowski).
- c) $(\sigma \cap \tau)^{\vee} = \sigma^{\vee} + \tau^{\vee}$

DEMOSTRACIÓN. Probemos a), para ello definamos para $n \in N_{\mathbb{R}}$, el semiespacio:

$$H_n^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n, m \rangle \geq 0\},$$

y para $m \in M_{\mathbb{R}}$, el semiespacio:

$$H_m^+ = \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle n, m \rangle \geq 0\},$$

entonces por definición de cono dual, se tiene:

$$(19) \quad \sigma^{\vee} = \bigcap_{n \in \sigma} H_n^+$$

y

$$(20) \quad (\sigma^{\vee})^{\vee} = \bigcap_{m \in \sigma^{\vee}} H_m^+.$$

Primero, notemos que claramente $\sigma \subseteq (\sigma^{\vee})^{\vee}$, para la otra contención supongamos que $n \in (\sigma^{\vee})^{\vee}$ pero $n \notin \sigma$, entonces por (20), $n \in H_m^+$ para toda $m \in \sigma^{\vee}$, y tomando H_n^+ no forma parte de la intersección en (19) pues $n \notin \sigma$ entonces existe $m \in \sigma^{\vee}$ tal que $m \notin H_n^+$, es decir $\langle n, m \rangle < 0$ lo que implica que $n \notin H_m^+$, lo cual es absurdo, por lo tanto $(\sigma^{\vee})^{\vee} \subseteq \sigma$. Finalmente $\sigma = (\sigma^{\vee})^{\vee}$.

Probemos b), sea $m \in (\sigma + \tau)^{\vee}$, entonces por definición implica que para todos $n_1 + n_2 \in \sigma + \tau$ se tiene $\langle n_1 + n_2, m \rangle \geq 0$, en particular para $n_1 \in \sigma$ se tiene que $\langle n_1, m \rangle \geq 0$, i.e. $m \in \sigma^{\vee}$ y también en particular para $n_2 \in \tau$ se cumple $\langle n_2, m \rangle \geq 0$, i.e. $m \in \tau^{\vee}$; luego $m \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\vee}$. Recíprocamente, si $m \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\vee}$ entonces, tomando $n_1 \in \sigma$ y $n_2 \in \tau$ se tiene que:

$$\langle n_1 + n_2, m \rangle = \langle n_1, m \rangle + \langle n_2, m \rangle \geq 0,$$

luego $m \in (\sigma + \tau)^{\vee}$. Por lo tanto $(\sigma + \tau)^{\vee} = \sigma^{\vee} \cap \tau^{\vee}$.

Finalmente, falta demostrar c), entonces aplicando a) y b) se tiene:

$$\begin{aligned} (\sigma \cap \tau)^{\vee} &= ((\sigma^{\vee})^{\vee} \cap (\tau^{\vee})^{\vee})^{\vee} \\ &= ((\sigma^{\vee} + \tau^{\vee})^{\vee})^{\vee} \\ &= \sigma^{\vee} + \tau^{\vee}. \end{aligned}$$

□

Proposición A.32. Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico convexo. Entonces son equivalentes:

- (1) σ es fuertemente convexo
- (2) $\{0\}$ es cara de σ
- (3) $\dim \sigma^{\vee} = n$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que (1) \iff (2). Se sigue del hecho que $\sigma \cap (-\sigma)$ es la cara más pequeña contenida en σ . Ahora, falta (1) \iff (3), si σ es fuertemente convexo, entonces por la proposición (A.31) se tiene

$$M_{\mathbb{R}} = 0^{\vee} = (\sigma \cap (-\sigma))^{\vee} = \sigma^{\vee} + (-\sigma)^{\vee},$$

por lo tanto σ^{\vee} genera a $M_{\mathbb{R}}$, luego $\dim \sigma^{\vee} = n$. Recíprocamente, si $\dim \sigma^{\vee} = n$ entonces $M_{\mathbb{R}} = \sigma^{\vee} + (-\sigma)^{\vee}$, y por la proposición (A.31) se sigue:

$$0 = (0^{\vee})^{\vee} = M_{\mathbb{R}}^{\vee} = (\sigma^{\vee} + (-\sigma)^{\vee})^{\vee} = (\sigma^{\vee})^{\vee} \cap (-\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma \cap (-\sigma)$$

□

A.5. Abanicos y abanicos asociados a politopos

Ya con la noción de conos poliédricos racionales fuertemente convexos, nuestro siguiente escalón es un conjunto finito de conos con dos condiciones, una de ellas muy importante nos asegura el buen “pegado” de las variedades afines asociadas a los conos, así podremos arribar al siguiente escalón en el otro lado, la geometría algebraica.

Definición A.33. Un *abanico* Σ es una colección finita no vacía de conos poliédricos racionales fuertemente convexos en \mathbb{R}^n que satisface:

- (i) Si $\sigma \in \Sigma$ y τ una cara de σ , entonces $\tau \in \Sigma$.
- (ii) Si $\sigma, \tau \in \Sigma$ entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ .

La unión $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ se llama el *soporte del abanico*.

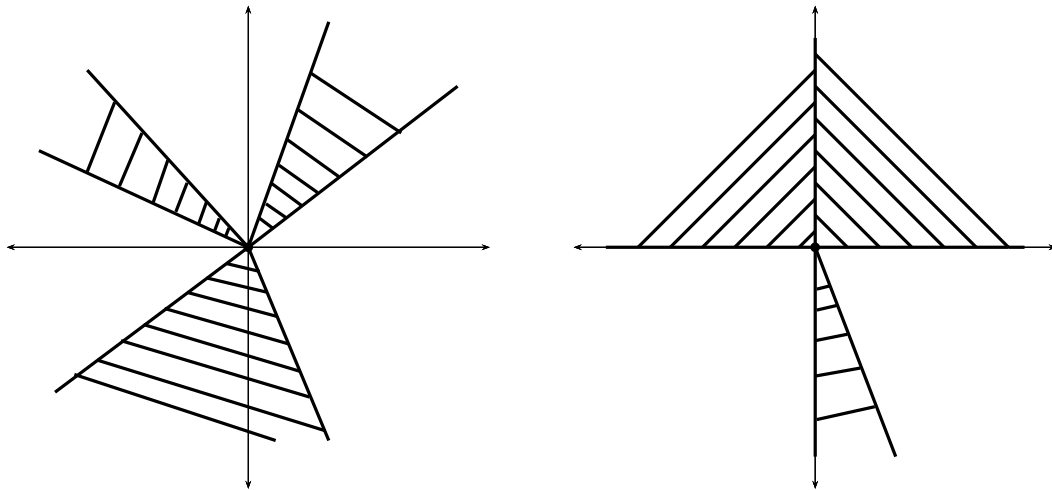


Figura A.33: Ejemplos de abanicos

Ejemplo A.34. En \mathbb{R}^2 consideremos el cono poliédrico σ_1 generado por e_1 y e_2 y el cono poliédrico σ_2 generado por $-e_1$ y $-e_2$, entonces la colección que consta de σ_1 y σ_2 así como de sus intersecciones forma un abanico Σ en \mathbb{R}^2 .

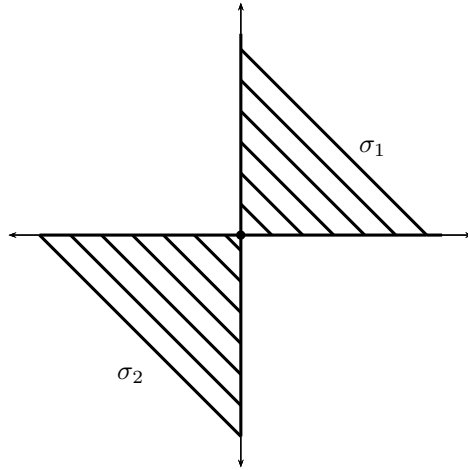


Figura A.34: Ejemplo de abanico

Ahora nuestro propósito es construir un abanico a partir de un politopo reticular P en $M_{\mathbb{R}}$, para ello consideremos su representación a partir de las caretas F del politopo P , aquí n_F son las normales a las caretas F que apuntan hacia el interior del politopo y los enteros a_F son los asociados a cada careta F , es decir:

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n_F, m \rangle \geq -a_F \text{ para toda careta } F \in P\}.$$

Elijamos v un vértice de P , el cual le corresponde un cono máximo en $N_{\mathbb{R}}$,

$$\sigma_v := \text{pos}\{n_F \mid v \in F\}.$$

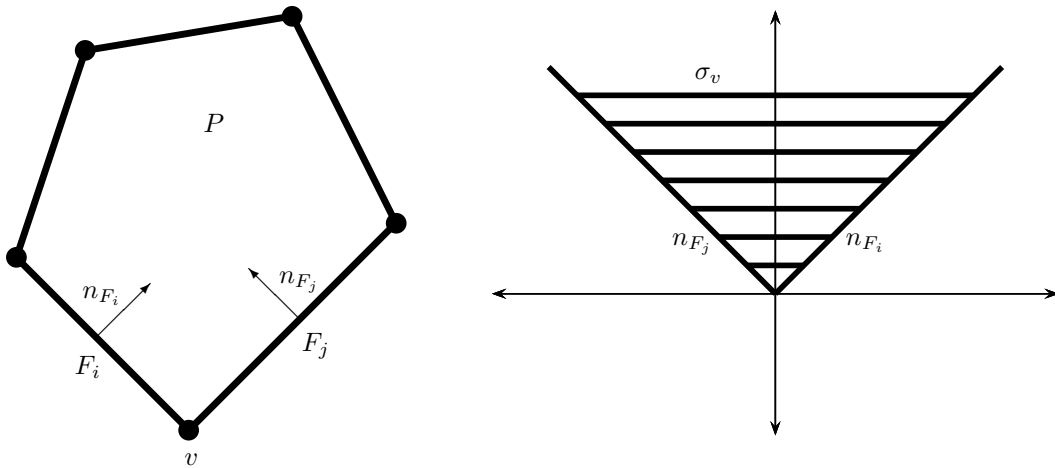


Figura A.35: Cono máximo σ_v asociado al vértice v

Haciendo el caso general, si $Q \leq P$ es cara propia, entonces Q es la intersección de las caretas que la contienen, entonces podemos definir el cono

$$\sigma_Q := \text{pos}\{n_F \mid Q \leq F\}.$$

Observación A.35. Notemos que para una careta F de P , nos genera un cono unidimensional $\sigma_F = \mathbb{R}_{\geq 0} n_F$; mientras que para un vértice v de P se define el cono máximo σ_v , por lo que, como es de esperarse se define el cono asociado al politopo P , como $\sigma_P = \{0\}$.

Lema A.36. Sea Q, Q' caras de P . Entonces:

- (1) $Q \leq Q' \iff \sigma'_Q \subset \sigma_Q$
- (2) $\sigma_Q \cap \sigma_Q = \sigma''_Q$, donde $Q'' = Q \cap Q'$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos (1), supongamos primero $Q \leq Q'$, entonces si $Q' = F_1 \cap \dots \cap F_s$ entonces, renumerando si fuera necesario se tiene $Q = F_1 \cap \dots \cap F_{s'}$ con $s' \leq s$, lo que implica que

$$\sigma_Q = \langle n_{F_1}, \dots, n_{F_{s'}} \rangle \subseteq \langle n_{F_1}, \dots, n_{F_s} \rangle = \sigma_{Q'};$$

recíprocamente si $\sigma_{Q'} \subseteq \sigma_Q$, entonces todo generador (rayo) de $\sigma_{Q'}$ también lo es de σ_Q , lo que implica que por construcción $Q \leq F$, es decir

$$Q \subseteq \bigcap_{Q' \leq F} F = Q'.$$

Ahora probemos (2), para ello consideremos la cara $Q'' = Q \cap Q'$, entonces:

$$Q'' = \bigcap_{Q' \leq F, Q \leq F} F,$$

por lo tanto

$$\sigma_{Q''} = \{n_F | Q' \leq F, Q \leq F\} = \sigma_Q \cap \sigma'_{Q'}.$$

□

Entonces por el lema (A.36) es natural tener la siguiente definición.

Definición A.37. Se define el *abanico asociado al politopo* como:

$$\Sigma_P := \{\sigma_Q | Q \text{ es cara de } P\}.$$

Ejemplo A.38. Sea P el politopo del ejemplo (A.18), entonces el abanico asociado a P es el generado por los vectores e_1, e_2 y $-e_1 - e_2$.

A.6. El lema de Gordan

Con el fin de poder utilizar la herramienta algebraica a nuestro alcance es necesario el uso de un “puente” que conecte la teoría de conos y abanicos con la de variedades, en nuestro caso variedades tóricas, lo primero que se nos viene a la mente al hablar de geometría algebraica son los polinomios y para trabajar con ellos debemos saber de donde los obtenemos, esta es la clave para tener este puente, el lema de Gordan será fundamental para obtener una \mathbb{K} -álgebra de tipo finito, donde \mathbb{K} es un campo algebraicamente cerrado.

Definición A.39. Un *semigrupo* es un conjunto S no vacío con una operación binaria asociativa:

$$* : S \times S \longrightarrow S,$$

y tal que existe un elemento $e \in S$ tal que $a * e = a = e * a$ para toda $a \in S$.

Lema A.40. Si σ es un cono en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces $\sigma \cap N$ es un semigrupo abeliano.

DEMOSTRACIÓN. De la misma definición de cono, si $x, y \in \sigma$ entonces $x + y \in \sigma$, en particular $x + y \in \sigma \cap N$ si $x, y \in \sigma \cap N$. El vector cero del cono es el neutro de $\sigma \cap N$. □

Definición A.41. Un semigrupo S es llamado *finitamente generado* si existen $x_1, \dots, x_r \in S$ llamados generadores, tales que:

$$S = \mathbb{Z}_{\geq 0}x_1 + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0}x_r$$

Ejemplo A.42. Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico racional, entonces su dual, $\sigma^{\vee} \subset M_{\mathbb{R}}$ también lo es, definimos el semigrupo abeliano asociado al cono σ como:

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M.$$

Proposición A.43. Sea σ un cono poliédrico racional en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $u \in S_{\sigma}$. Entonces si $\tau := \sigma \cap \{u\}^{\perp}$ se tiene que:

$$S_{\tau} = \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) + S_{\sigma}.$$

DEMOSTRACIÓN. La contención \supseteq se sigue de la definición de u . Para la otra contención, tomemos $w \in S_{\tau}$, entonces podemos tomar λ un número real positivo muy grande tal que

$$w + \lambda u \in \sigma^{\vee}$$

más aún, si λ es entero, se tiene que $w + \lambda u \in \sigma^{\vee} \cap M$, y por lo tanto $S_{\tau} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) + S_{\sigma}$. \square

Lema A.44 (Gordan). Si σ es un cono poliédrico racional en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces el semigrupo $\sigma \cap N$ es finitamente generado.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, tenemos que:

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}x_r \quad \text{con } x_1, \dots, x_r \in N,$$

tomando los generadores del cono: x_1, \dots, x_r . Definamos $K \subset N_{\mathbb{R}}$ como:

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i x_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

el cual es un conjunto compacto, pues es cerrado y acotado. Como N es discreto se sigue $K \cap N$ es finito.

Afirmamos que $K \cap N$ genera a $\sigma \cap N$. En efecto, sea $x \in \sigma \cap N$, entonces por definición se sigue que $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$, entonces haciendo $\lambda_i = m_i + t_i$ con $m_i \in N_{\geq 0}$ y $0 \leq t_i \leq 1$ queda:

$$x = \sum_{i=1}^r m_i x_i + \sum_{i=1}^r t_i x_i,$$

recordemos que $x_1, \dots, x_r \in N$, entonces $\sum_{i=1}^r m_i x_i \in N$ y como se tiene que $m_i = \underbrace{1 + \dots + 1}_{m_i \text{-veces}}$, por lo tanto se sigue:

$$m_i x_i = \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_{m_i \text{-veces}} \right) x_i = \underbrace{x_i + \dots + x_i}_{m_i \text{-veces}},$$

por lo tanto $\sum_{i=1}^r m_i x_i$ es suma de elementos de $K \cap N$, es decir está generado. Y como $\sum_{i=1}^r t_i x_i \in K$ y $\sum_{i=1}^r t_i x_i = x - \sum_{i=1}^r m_i x_i \in N$ concluimos que $K \cap N$ genera a $\sigma \cap N$. \square

Observación A.45. Por lo tanto, si tenemos un cono σ , entonces el semigrupo asociado al cono S_{σ} es finitamente generado.

Apéndice B

En este apéndice veremos un poco de la teoría de grupos algebraicos G y sus representaciones lineales sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial, el fin de estos resultados es probar un resultado muy importante en esta tesis, pues a partir de él podremos interpretar los anillos de coordenadas de las variedades tóricas afines U_σ , así como sus espacios de secciones globales.

B.1. Álgebras, co-álgebras y co-módulos

En esta sección definiremos lo que son álgebras y co-álgebra para luego definir lo que es un co-módulo, veremos que con las estructuras de $\mathbb{K}[G]$ -co-módulos podremos construir representaciones lineales del grupo afín G , y las cuales tienen una suma importancia cuando el grupo algebraico afín es el toro.

Definición B.1. Sea \mathbb{K} un campo, una \mathbb{K} -álgebra es un \mathbb{K} -módulo A junto con dos funciones \mathbb{K} -lineales:

$$\mu : A \otimes_{\mathbb{K}} A \longrightarrow A \text{ (multiplicación) y } e : \mathbb{K} \longrightarrow A \text{ (unidad),}$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{1_A \otimes \mu} & A \otimes_{\mathbb{K}} A \\ \mu \otimes 1_A \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} & \xrightarrow{e \otimes 1_A} & A \otimes_{\mathbb{K}} A \\ \approx \uparrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \\ \approx \downarrow & & \uparrow \mu \\ \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{1_A \otimes e} & A \otimes_{\mathbb{K}} A \end{array}$$

Definición B.2. Sea \mathbb{K} un campo, una \mathbb{K} -co-álgebra es un \mathbb{K} -módulo A junto con dos funciones \mathbb{K} -lineales:

$$\delta : A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} A \text{ (co-multiplicación) y } \epsilon : A \longrightarrow \mathbb{K} \text{ (co-unidad),}$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A \otimes_{\mathbb{K}} A \\ \delta \downarrow & & \downarrow 1_A \otimes \delta \\ A \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{\delta \otimes 1_A} & A \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{1_A \otimes \epsilon} & A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \\ \delta \uparrow & & \uparrow \approx \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \\ \delta \downarrow & & \downarrow \approx \\ A \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{\epsilon \otimes 1_A} & \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} A \end{array}$$

Ejemplo B.3. Sea G una variedad afín, entonces si consideramos el anillo de coordenadas $\mathbb{K}[G]$ el cual es un \mathbb{K} -espacio vectorial y las funciones \mathbb{K} -lineales

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G] \\ x &\longmapsto x \otimes x \\ \epsilon : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

tenemos que $(\mathbb{K}[G], \delta, \epsilon)$ es una \mathbb{K} -co-álgebra.

Definición B.4. Sea (A, δ, ϵ) una \mathbb{K} co-álgebra, entonces decimos un *co-módulo* sobre A es un \mathbb{K} -espacio vectorial V junto con una co-acción $\varphi : V \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} A$, es decir, una función \mathbb{K} -lineal tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V \otimes_{\mathbb{K}} A \\ \varphi \downarrow & & \downarrow 1_V \otimes \delta \\ V \otimes_{\mathbb{K}} A & \xrightarrow{\varphi \otimes 1_A} & V \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V \otimes_{\mathbb{K}} A \\ \searrow \approx & & \downarrow 1_V \otimes \epsilon \\ & & V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \end{array}$$

B.2. Representaciones lineales y grupos algebraicos

La necesidad de poder describir los anillos de coordenadas así como los espacios de secciones nos lleva a estudiar el importante concepto de representación de un grupo, en nuestro caso de un grupo algebraico afín. El resultado importante será poder descomponer un \mathbb{K} -espacio vectorial como suma directa de unos espacios propios considerando representaciones definidas a partir de caracteres.

Definición B.5. Sea G un grupo algebraico afín y sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, decimos que el morfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

es una *representación* de G .

En la sección (1.1) definimos los caracteres asociados al toro algebraico T , sin embargo es posible generalizar este concepto a cualquier grupo algebraico afín.

Definición B.6. Sea G un grupo algebraico afín y sea el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m := \mathbb{K}^*$. Decimos que el morfismo

$$\psi : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

es un *carácter* de G si es un morfismo de grupos algebraicos.

Definiendo el siguiente conjunto $X(G)$ el cual consta de todos caracteres de un grupo algebraico afín G es posible probar que es un grupo, con la multiplicación usual de funciones.

Lema B.7. Sea G un grupo algebraico afín. Entonces existen biyecciones entre los conjuntos:

$$\begin{aligned} X(G) &\approx \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg.}}(\mathbb{K}[\mathbb{G}_m], \mathbb{K}[G]) \text{ que respeta comultiplicaciones} \\ &\approx \left\{ \text{unidades } e(\psi) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[G] \text{ tales que } \delta(e(\psi)) = e(\psi) \otimes e(\psi) \right\}, \end{aligned}$$

aquí $e(\psi) \in \mathbb{K}[G]$ es la imagen de $\psi \in \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] = \mathbb{K}[x, x^{-1}]$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera biyección, por definición $\psi \in X(G)$ es en particular un morfismo de variedades afines, entonces por el teorema 1.25 de [13] se induce un único morfismo entre los anillos de coordenadas:

$$\begin{aligned} \psi^* : \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ \alpha &\longmapsto \alpha(\psi) \end{aligned}$$

el cual claramente también es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras. Por otro lado $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m]$ y $\mathbb{K}[G]$ son \mathbb{K} -co-álgebras y también es fácil ver que respeta comultiplicaciones, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] & \xrightarrow{\psi^*} & \mathbb{K}[G] \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta' \\ \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] & \xrightarrow{\psi^* \otimes \psi^*} & \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G] \end{array}$$

Para probar la segunda biyección, recordemos que $\mathbb{K}[\mathbb{G}_m]$ es una \mathbb{K} -álgebra, tenemos la función unidad \mathbb{K} -lineal:

$$e : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[\mathbb{G}_m],$$

por lo tanto, considerando $\psi \in X(G)$, y tomando la composición:

$$\mathbb{K} \xrightarrow{e} \mathbb{K}[\mathbb{G}_m] \xrightarrow{\psi^*} \mathbb{K}[G].$$

Por lo tanto, definimos $e(\psi) := \psi^* \circ e : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[G]$ la cual \mathbb{K} -lineal pues e es \mathbb{K} -lineal y ψ^* es morfismo de \mathbb{K} -álgebras. Notemos que también cumple el diagrama de la definición (B.1), por lo tanto $e(\psi)$ es una unidad y como ψ^* respeta co-multiplicaciones, entonces cumple:

$$\delta(e(\psi)) = e(\psi) \otimes e(\psi).$$

□

Observación B.8. Notemos que un carácter $\psi : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$, define una representación de G en cualquier \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita V mediante la acción de $g \in G$ en V dado por la multiplicación por $\psi(g)$, i.e. $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ donde:

$$\begin{aligned} \rho(g) : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \psi(g)v \end{aligned}$$

Con esta idea definimos la siguiente noción, si $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ es una representación de G , se dice que G actúa en V mediante el carácter ψ si para todo $g \in G$ y para todo $v \in V$ se cumple:

$$\rho(g)(v) = \psi(g)v.$$

Observación B.9. Notemos que si G actúa en los subespacios vectoriales $W, W' \subseteq V$ mediante el carácter ψ , entonces G actúa en el subespacio $W + W'$ mediante ψ . Por lo tanto se sigue que dado $\psi \in X(G)$, existe un subespacio vectorial mayor $V_\psi \subseteq V$ (posiblemente cero) en el cual G actúa mediante el carácter ψ . Ahora, por definición los elementos de V_ψ son vectores propios comunes a todos los $g \in G$ ya que para todo $w \in V_\psi$, se tiene

$$\rho(g)(w) = \psi(g)w \quad \text{con } \psi(g) \in \mathbb{K}^*.$$

Observación B.10. La acción $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} V \longrightarrow V$ dada por ρ corresponde a una co-acción $\varphi : V \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G]$ y observamos que G actúa en V mediante el carácter ψ si y sólo si $\varphi(v) = v \otimes e(\psi)$ para todo $v \in V$ y donde $e(\psi) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[G]$ es la unidad correspondiente en el lema (B.7). Por lo tanto se tiene:

$$V_{\psi} = \{v \in V \mid \varphi(v) = v \otimes e(\psi)\}.$$

Teorema B.11. Sea $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ una representación de un grupo algebraico. Si V es suma de espacios propios

$$V = \sum_{\psi \in Y} V_{\psi} \quad \text{con } Y \subset X(G).$$

Entonces es suma directa de los mismos, i.e.

$$V = \bigoplus_{\psi \in Y} V_{\psi} \quad \text{con } Y \subset X(G).$$

DEMOSTRACIÓN. Si la suma no fuera directa, existe un subconjunto finito $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ de Y con $m \geq 2$ y una relación

$$v_1 + \dots + v_m = 0 \quad \text{con } v_i \in V_{\psi_i} \text{ y } v_i \neq 0.$$

Aplicando $g \in G$ se obtiene que:

$$(21) \quad \psi_1(g)v_1 + \dots + \psi_{m-1}(g)v_{m-1} + \psi_m(g)v_m = 0.$$

Como $\psi_{m-1} \neq \psi_m$ se tiene que existe $g' \in G$ tal que $\psi_{m-1}(g') \neq \psi_m(g')$. Multiplicando por $\psi_m(g')$ la ecuación (21) tenemos:

$$(22) \quad \psi_1(g)\psi_m(g')v_1 + \dots + \psi_{m-1}(g)\psi_m(g')v_{m-1} + \psi_m(g)\psi_m(g')v_m = 0.$$

Como $\psi(gg') = \psi(g)\psi(g')$, la ecuación (21) la reescribimos

$$(23) \quad \psi_1(g)\psi_1(g')v_1 + \dots + \psi_{m-1}(g)\psi_{m-1}(g')v_{m-1} + \psi_m(g)\psi_m(g')v_m = 0.$$

Y restando la ecuación (22) con la ecuación (23) tenemos:

$$\psi_1(g)(\psi_m(g') - \psi_1(g'))v_1 + \dots + \psi_{m-1}(g)(\psi_m(g') - \psi_{m-1}(g'))v_{m-1} = 0$$

es decir, para toda $g \in G$

$$\psi_1(g)v'_1 + \dots + \psi_{m-1}(g)v'_{m-1} + \psi_m(g)v'_m = 0 \quad \text{con } v'_j \in V_{\psi_j},$$

entonces evaluando en $g = e$, se contradice la minimalidad del conjunto $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$. \square

Proposición B.12. Sea G un grupo algebraico afín sobre \mathbb{K} y sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces existe una biyección:

$$\{\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V) \mid \text{representaciones lineales}\} \longleftrightarrow \{\text{estructuras de } \mathbb{K}[G]\text{-co-módulos en } V\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea e_1, \dots, e_n una base de V , entonces tenemos que:

$$\text{GL}(V) \approx \text{GL}_n(\mathbb{K}) \approx \mathcal{V}(\det(M)t - 1),$$

por lo tanto, podemos considerar el anillo de coordenadas del grupo de automorfismos de V , digamos $\mathbb{K}[\text{GL}(V)]$ el cual consta de polinomios con indeterminadas $x_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y t . Por lo tanto para la representación lineal

$$\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V),$$

le corresponde una matriz $(r_{i,j})_{n \times n}$ donde $r_{i,j} := \rho^*(x_{i,j})$ y

$$\rho^* : \mathbb{K}[\text{GL}(V)] \longrightarrow \mathbb{K}[G],$$

es el morfismo inducido por el morfismo regular ρ . La cual cumple para todo $g, g' \in G$, como $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ pues es morfismo de grupos, entonces se tiene:

$$(r_{i,j}(gg')) = (r_{i,j}(g))(r_{i,j}(g')),$$

por entradas, tenemos:

$$(24) \quad r_{i,j}(gg') = \sum_l r_{i,l}(g)r_{l,j}(g')$$

$$(25) \quad r_{i,j}(e) = \delta_{i,j}.$$

Hemos probado que dar una representación lineal $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es equivalente a dar una matriz $(r_{i,j})$ tal que cumple (24) y (25).

Por otro lado, si $\varphi : V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G]$ es una función \mathbb{K} -lineal, entonces se tiene $\varphi(v) = v' \otimes f$, pero $v' = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$; y usando la linealidad del tensor en \mathbb{K} , tenemos:

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^n e_j \otimes \lambda_j f.$$

Por lo tanto, considerando en la base de V , tenemos:

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j \otimes r_{i,j},$$

así dar una función \mathbb{K} -lineal, es equivalente a dar una matriz $(r_{i,j})_{n \times n}$ donde $r_{i,j} \in \mathbb{K}[G]$ y si además φ es co-acción debe satisfacer los diagramas conmutativos de la definición (B.2). Del primer diagrama se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes 1_{\mathbb{K}[G]} \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes r_{i,j} \right) &= 1_V \otimes \delta \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes r_{i,j} \right) \\ \sum_{j=1}^n \varphi(e_j) r_{i,j} &= \sum_{j=1}^n e_j \otimes \delta(r_{i,j}) \\ \sum_{j=1}^n e_j \otimes \left(\sum_l r_{j,l} \otimes r_{l,i} \right) &= \sum_{j=1}^n e_j \otimes \delta(r_{i,j}) \end{aligned}$$

Del segundo diagrama se tiene:

$$\begin{aligned} e_i &= (1_V \otimes \epsilon) \circ \varphi(e_i) = (1_V \otimes \epsilon) \left(\sum_{j=1}^n e_j \otimes r_{i,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n e_j \otimes \epsilon(r_{i,j}) = \sum_{j=1}^n e_j. \end{aligned}$$

Y por la independencia lineal de los e_i 's se tiene que

$$(26) \quad \delta(r_{i,j}) = \sum_l r_{j,l} \otimes r_{l,i} \quad \text{para todo } i, j$$

$$(27) \quad \epsilon(r_{i,j}) = \delta_{i,j}.$$

Estas dos condiciones garantizan la conmutatividad de los diagramas antes mencionados, i.e. φ es una co-acción. Pero recordemos que los $r_{i,j} \in \mathbb{K}[G]$, i.e. son funciones polinomiales en G , por lo tanto evaluando $g, g' \in G$, y por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \delta(r_{i,j})(g, g') &= r_{i,j} \otimes r_{i,j}(g, g') = r_{i,j}(g)r_{i,j}(g') = r_{i,j}(gg') \\ \sum_l r_{i,l} \otimes r_{l,j}(g, g') &= \sum_l r_{i,l}(g)r_{l,j}(g'). \end{aligned}$$

Luego ρ es representación si y sólo si φ es co-acción. \square

Teorema B.13. *Sea el toro algebraico T y sea V un \mathbb{K} -espacio de dimensión finita. Entonces todas las representaciones lineales $\rho : T_n \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ son diagonalizables, i.e.*

$$V = \bigoplus_{\psi \in X(T)} V_\psi.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\rho : T \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación lineal, entonces por la proposición (B.12) le corresponde una estructura de $\mathbb{K}[T] = \mathbb{K}[M]$ co-módulo, digamos:

$$\varphi : V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[M].$$

Sea $v \in V$ y sean los elementos $e_m \in M$, los cuales son una base de $\mathbb{K}[M]$, entonces podemos escribir:

$$(28) \quad \varphi(v) = \sum_m v_m \otimes e_m.$$

Por definición de co-módulo, se tienen la identidades:

$$\begin{aligned} (1_V \otimes \delta) \circ \varphi &= (\varphi \otimes 1_{\mathbb{K}[M]}) \circ \varphi \\ (1_V \otimes \epsilon) &= 1_V \end{aligned}$$

por lo que aplicando estas identidades a (28) obtenemos:

$$(29) \quad \sum_{m \in M} v_m \otimes e_m \otimes e_m = \sum_{m \in M} \varphi(v_m) \otimes e_m$$

$$(30) \quad v = \sum_{m \in M} v_m \otimes \epsilon(e_m) = \sum_{m \in M} v_m \otimes 1 = \sum_{m \in M} v_m.$$

La igualdad (29) muestra por la independencia de los e_m 's que:

$$\varphi(v_m) = v_m \otimes e_m \in \langle v_m \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[M],$$

y la igualdad (30) muestra que los elementos v_m generan todo V . Finalmente los \mathbb{K} -espacios vectoriales unidimensionales $\langle v_m \rangle$ son co-módulos:

$$\varphi_m : \langle v_m \rangle \rightarrow \langle v_m \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[M]$$

que corresponden a la proposición (B.12) a una representación unidimensional de T :

$$\rho_m : T \rightarrow \mathrm{GL}(\langle v_m \rangle)$$

i.e. ρ_m es un carácter y por la prueba de la proposición (B.12) se tiene $e_m = \rho_m^*(\bar{x}_1)$, donde

$$\rho_m^* : \mathbb{K}[\mathrm{GL}(\langle v_m \rangle)] \rightarrow \mathbb{K}[G],$$

pero por el lema (B.7) le corresponde una unidad $\epsilon(\psi) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[M]$, por lo tanto $\varphi(v_m) = v_m \otimes \epsilon(\psi)$ y por la observación (B.10) se tiene que $v_m \in V_\psi$, por lo tanto:

$$V = \sum_{\psi \in X(T)} V_\psi,$$

y por el teorema (B.11) se tiene:

$$V = \bigoplus_{\psi \in X(T)} V_\psi,$$

□

Bibliografía

- [1] Cox, D., J. Little and H. Schenck, *Toric Varieties*. AMS, Providence, 2012.
- [2] Danilov, V., “The Geometry of Toric Varieties”, *Russian Mathematical Surveys* **33** (1978), 97-154.
- [3] Demazure, M., “Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona”, *Ann. Sci. de la E. N. S.*, 4^e série, tome **3**, n^o. 4 (1970), 507-588.
- [4] Ewald, G., *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [5] Fulton, W., *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [6] Griffiths, P. and J. Harris., *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley, New York, 1978.
- [7] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, 1977.
- [8] Humphreys, J., *Linear Algebraic Groups*. Springer Verlag, New York, 1975.
- [9] Oda, T., *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [10] Rotman, J., *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, Inc., London, 1979.
- [11] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [12] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1998.
- [13] Zaldívar, F., *Varietades Algebraicas*. 2010-2012.

Índice alfabético

- abanico, 62
 - asociado a politopo, 64
 - completo, 33
 - subdivisión estrella, 31
- álgebra, 67
- anillo de semigrupo, 6

- cápsula
 - afín, 54
 - convexa, 54
 - positiva, 58
- carácter
 - de un grupo, 68
 - del toro, 1
- cara, 55
 - de un cono, 60
 - de un politopo, 56
- co-álgebra, 67
- co-módulo, 68
- combinación
 - afín, 54
 - convexa, 54
- combinación convexa, 54
- cono
 - dual, 60
 - poliédrico, 58
 - poliédrico fuertemente convexo, 59
 - poliédrico racional, 58
- cono poliédrico
 - no singular, 27
- convexo, 54

- datos de Cartier, 44
- dimensión, 55
- divisor, 37
 - de carácter, 40
 - de Cartier, 41
 - efectivo, 37
 - primo, 37
 - principal, 39

- función
 - Σ -lineal de soporte, 45

- hiperplano de soporte, 55

- ideal tórico, 9
- isomorfismo de pegado, 11

- lema
 - de Gordan, 65

- monoide
 - finitamente generado, 65

- órbita asociada a cono, 19

- politopo, 55
 - reticular, 55

- representación de un grupo, 68
- retícula, 53
 - dual, 53

- semigrupo, 64
- soporte del abanico, 62

- toro algebraico, 1

- valuación discreta, 38
- variedad
 - algebraica, 13
 - completa, 33
 - separada, 13
- variedad tórica, 6
 - afín asociada a un cono, 9
 - asociada a un abanico, 14
 - asociada a un politopo, 17



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00096

Matrícula: 2112800103

SECCIONES GLOBALES EN
VARIEDADES TORICAS

En México, D.F., se presentaron a las 11:30 horas del día 11 del mes de julio del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA
DRA. LAURA HIDALGO SOLIS
DR. FELIPE DE JESUS ZALDIVAR CRUZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: JUAN CARLOS RUIZ VALDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



JUAN CARLOS RUIZ VALDEZ
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES
HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

VOCAL

DRA. LAURA HIDALGO SOLIS

SECRETARIO

DR. FELIPE DE JESUS ZALDIVAR CRUZ