



**Casa abierta al tiempo**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**

## Árboles inevitables en torneos

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

Maestra en Ciencias Matemáticas

Aplicadas e Industriales

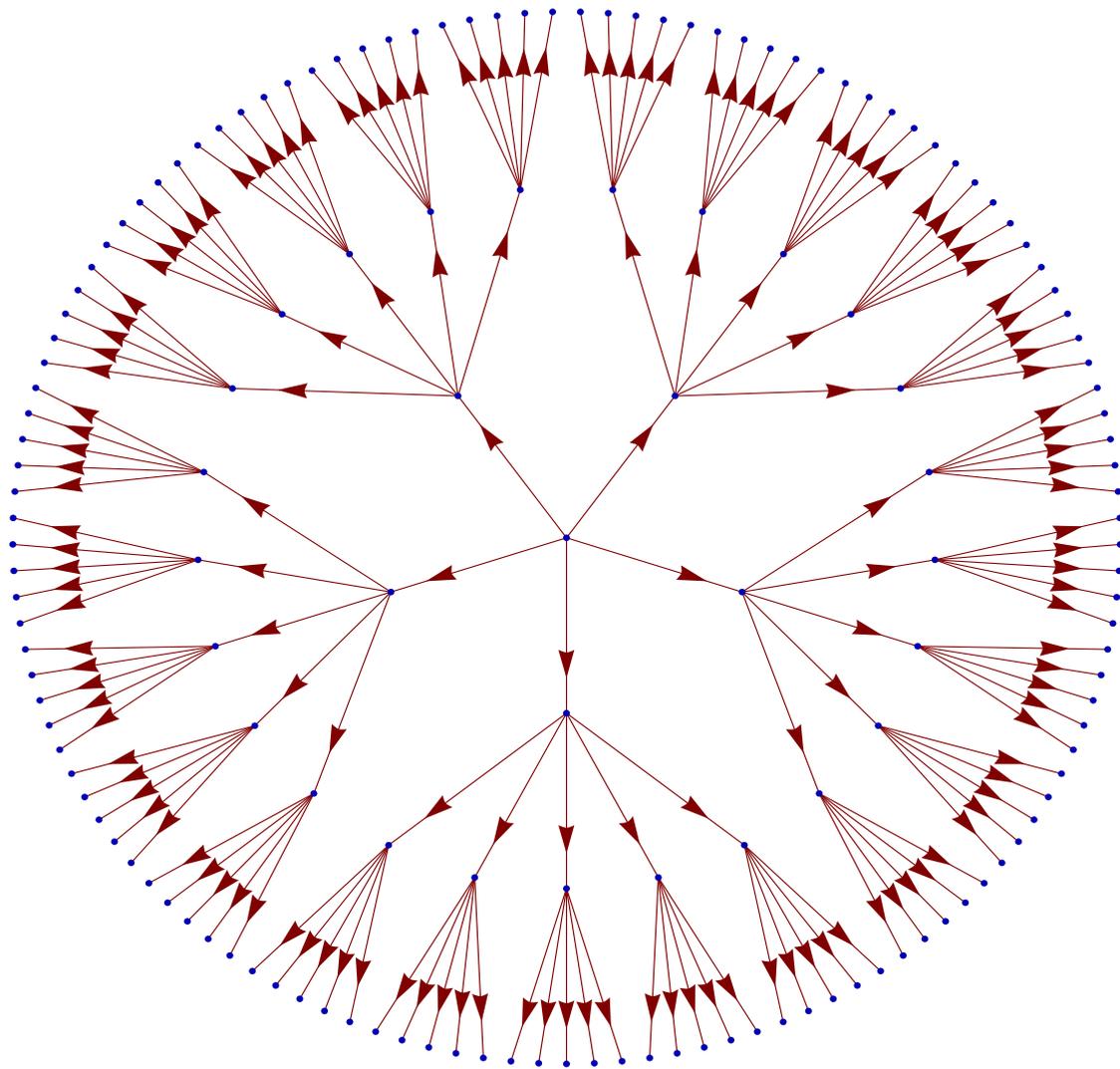
P R E S E N T A

Lic. Nahid Yelene Javier Nol

Director de Tesis: Dr. Joaquín Tey Carrera

Iztapalapa, D.F., a 29 de Octubre de 2009.





[Árbol 5-ario.]



# Índice general

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   | <b>III</b> |
| <b>1. Preliminares</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2. Árboles n-inevitables de orden n.</b>                     | <b>5</b>   |
| 2.1. Trayectorias dirigidas. . . . .                            | 5          |
| 2.2. Trayectorias antidirigidas. . . . .                        | 6          |
| 2.3. Trayectorias por bloques. . . . .                          | 14         |
| 2.4. Garras de grado menor o igual que $\frac{n}{4}$ . . . . .  | 19         |
| 2.5. Garras de grado menor o igual que $\frac{5}{8}n$ . . . . . | 30         |
| 2.6. Árboles k-arios. . . . .                                   | 34         |
| 2.6.1. Árboles binarios. . . . .                                | 37         |
| 2.6.2. Árboles ternarios. . . . .                               | 38         |
| <b>3. Conjetura de Sumner</b>                                   | <b>47</b>  |
| 3.1. Órdenes Promedio. . . . .                                  | 47         |
| 3.2. Árboles bien enraizados. . . . .                           | 52         |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>57</b>  |



# Introducción

---

Los **torneos** son estructuras combinatorias muy ricas que han sido extensamente estudiados en teoría de gráficas. Muchas preguntas se han hecho acerca de sus subgráficas y en particular cuando estas son **árboles**.

Una línea de investigación en este campo gira alrededor de la noción de  $n$ -inevitabilidad, a saber: se dice que una digráfica  $D$  es  **$n$ -inevitable** si está contenida en todo torneo de orden  $n$ .

Desde los 70's se ha trabajado intensamente en la solución de dos importantes problemas en esta línea:

Problema 1.- Complejidad de la estructura de un árbol  $n$ -inevitable de orden  $n$ .

Problema 2.- Conjetura de Sumner (1971).

En este trabajo se pretende exponer con rigor una panorámica retrospectiva de cómo se ha ido avanzando en la solución de estos problemas. En el camino nos enfrentamos a diversos métodos de demostración propios de la teoría de gráficas, algunos con gran dificultad técnica.

En el Capítulo 2 se aborda el Problema 1, donde se consideran distintos árboles que son  $n$ -inevitables. Comenzaremos con los árboles más “simples” que son las trayectorias dirigidas hamiltonianas, las trayectorias antidirigidas hamiltonianas y las trayectorias por bloques; hasta llegar a algunos más “complejos” como son: las garras y los árboles  $k$ -arios.

En el Capítulo 3 se estudia la conjetura de Sumner, la cual establece que todo árbol de orden  $n$  es  $(2n - 2)$ -inevitable. Aquí estudiaremos con detalle el último artículo sobre el tema, desarrollado por El Sahili en el 2004 donde demostró que todo árbol de orden  $n$  es  $(3n - 3)$ -inevitable. En particular demostró que las arborescencias son  $(2n - 2)$ -inevitables. Notándose así, que a pesar de los esfuerzos realizados, se está lejos de la cota sugerida.

En este capítulo extendemos la familia de árboles  $(2n - 2)$ -inevitables, originalmente propuesta por El Sahili.

Es interesante observar que los problemas propuestos se enmarcan de manera natural dentro de la teoría de Ramsey (particularmente en un problema extremal asociado), una de las teorías más elegantes por su enunciado general:

“Toda estructura suficientemente grande contiene una subestructura especial”.

Motzkin describía esta situación diciendo: “El desorden total es imposible”.

La teoría de Ramsey tiene muchas aplicaciones interesantes en otras ramas de las Matemáticas como son: Teoría de Números, Geometría, Topología, Teoría de Conjuntos y Lógica.

Obsérvese que las estructuras combinatorias involucradas en este trabajo: los árboles y los torneos, aparecen en la modelación de distintos problemas prácticos. Los árboles fueron utilizados por primera vez en 1847 por Gustav Kirchhoff (1827-1887) en su trabajo de redes eléctricas, posteriormente fueron desarrollados y definidos de nuevo por Arthur Cayley (1821-1895). En 1857, usó estas gráficas especiales para enumerar los isómeros diferentes de los hidrocarburos saturados. Con la aparición de las computadoras se encontraron nuevas aplicaciones para los árboles. Algunos tipos de árboles especiales son muy importantes en el estudio de las estructuras de datos, las ordenaciones, la teoría de codificación y en la solución de ciertos problemas de optimización como: la solución del problema de ruta mínima y la solución de varios problemas de flujo.

Los **torneos** fueron originalmente usados por Landau para modelar relaciones de dominancia en una parvada de pollos. También se aplican en teoría de votación y en teoría de la elección social. Un torneo podría representar la estructura de enlaces de una website.

# Capítulo 1

## Preliminares

---

En este capítulo introduciremos las definiciones, notaciones y resultados básicos necesarios para la comprensión del trabajo que se desarrollará posteriormente.

Una **gráfica** es una pareja ordenada de conjuntos  $G = (V, E)$  donde  $V$  es el conjunto de **vértices** y  $E$  es una familia de 2-subconjuntos en  $V$ , al que llamaremos conjunto de **aristas**. Llamaremos **orden** de  $G$  a  $|G| = |V|$ .

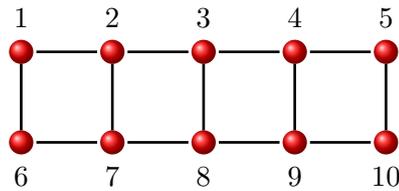


Figura 1.1. *Gráfica de orden 10.*

Una gráfica es **conexa** si no importa cómo coloreemos sus vértices con dos colores, siempre aparece una arista bicromática.

Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

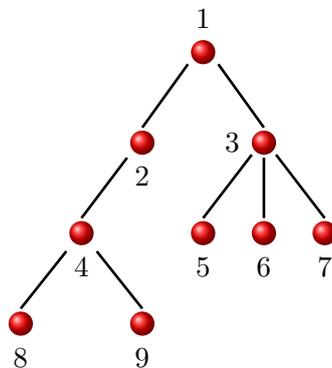


Figura 1.2. *Árbol de orden 9.*

Una **digráfica**  $D$  es una gráfica a la cual se le asigna cierta orientación a sus aristas. Es decir,  $\mathbf{D} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  donde  $V$  es el conjunto de **vértices** y  $E$  son parejas ordenadas de vértices en  $V$  a las que llamaremos **arcos**. Al arco  $(x, y)$  lo denotaremos como  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ .

La **exvecindad** de  $v \in V$  es el conjunto  $N^+(v) := \{x \in V : v \rightarrow x \in E\}$ . El **exgrado** de  $v$  denotado como  $d^+(v)$  es el número de elementos de  $N^+(v)$ . Análogamente la **invecindad** de  $v$  es  $N^-(v) := \{x \in V : x \rightarrow v \in E\}$  y el **ingrado** de  $v$  es  $d^-(v) = |N^-(v)|$ .

Una **fuentes** es un vértice con ingrado cero y un **sumidero** es un vértice con exgrado cero.

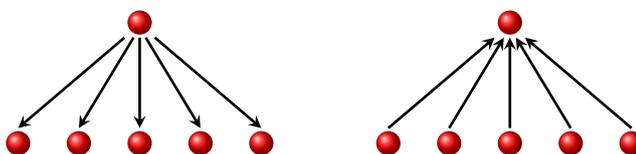


Figura 1.3. Fuente y sumidero respectivamente.

Sea  $A$  una digráfica. Decimos que  $v$  es una **hoja** de  $A$  si  $d^+(v) + d^-(v) = 1$ . Si  $d^+(v) = 1$  diremos que  $v$  es una **hoja de ingrado cero** y si  $d^-(v) = 1$  diremos que  $v$  es una **hoja de exgrado cero**.

Un **torneo** es la digráfica que resulta de asignarle cierta orientación a las aristas de una gráfica completa. El nombre de torneo proviene de la interpretación gráfica de los resultados de un torneo round-robin en el que cada jugador se enfrenta a cualquier otro exactamente una vez. Los vértices corresponden a los jugadores y los arcos entre cada par de jugadores va del ganador a el perdedor. Análogamente, un **árbol dirigido** es la digráfica que resulta de asignarle cierta orientación a las aristas de un árbol.

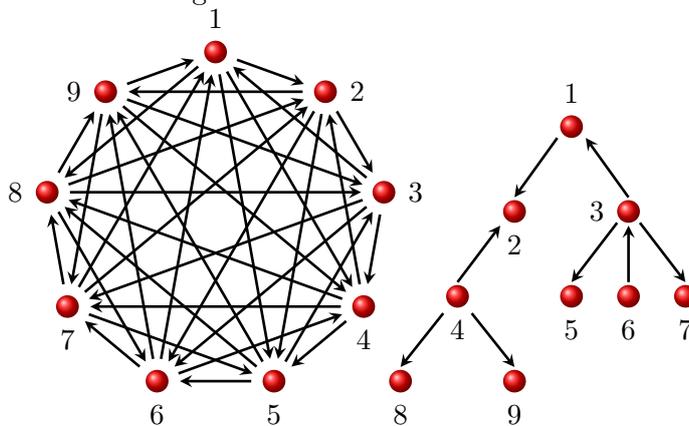


Figura 1.4. Torneo y árbol dirigido respectivamente.

Sea  $A$  un árbol dirigido y  $x \rightarrow y$  un arco de  $A$ .  $x$  es llamado el **padre** de  $y$  y  $y$  es llamado el **hijo** de  $x$ .

Un **árbol enraizado** es un árbol dirigido donde a un vértice se le denomina raíz.

Una **trayectoria** es un árbol dirigido donde para todo vértice  $v$  se tiene que  $d^+(v) + d^-(v) \leq 2$ .

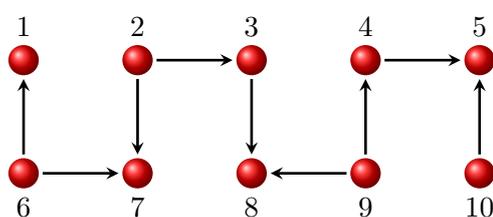


Figura 1.5. *Trayectoria de orden 10.*

Sea  $D$  una digráfica y  $P$  una trayectoria en  $D$ . Diremos que  $P$  es **hamiltoniana** si contiene a todos los vértices de  $D$ .

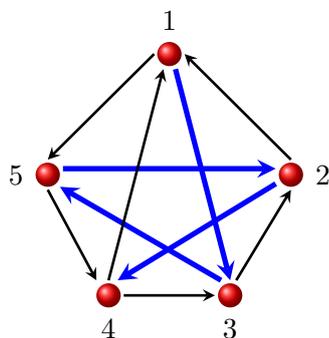


Figura 1.6. *Torneo,  $|T| = 5$ , trayectoria hamiltoniana  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4$*

Una **trayectoria es dirigida** si cualesquiera dos arcos adyacentes tienen la misma orientación.

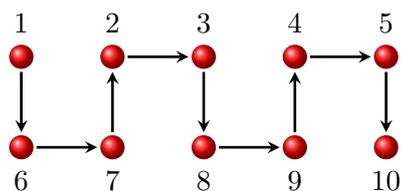


Figura 1.7. *Trayectoria dirigida de orden 10,  $(1, 6, 7, 2, 3, 8, 9, 4, 5, 10)$ .*

Sean  $D_1 = (V_1, E_1)$  y  $D_2 = (V_2, E_2)$  dos digráficas. Una función  $f : V_1 \rightarrow V_2$  se denomina **isomorfismo** de digráficas si:

a)  $f$  es biyectiva.

b) para todos  $a, b \in V_1$ ,  $a \rightarrow b \in E_1$  si y sólo si,  $f(a) \rightarrow f(b) \in E_2$ . Cuando existe dicha función,  $D_1$  y  $D_2$  se denominan digráficas isomorfas.

Un digráfica  $D = (V, E)$  se denomina **bipartita** si  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y cada arco de  $D$  es de la forma  $a \rightarrow b$ , donde  $a \in V_1$  y  $b \in V_2$ . La denotaremos como  $D = (V_1, V_2; E)$ .

Después de dar una breve introducción y algunas definiciones, enunciaremos un resultado que confirma el hecho de que el problema de tipo Ramsey asociado al problema extremal objeto de estudio de este trabajo, es trivial.

**Teorema 1.1.** *Todo árbol dirigido de orden  $n \geq 1$  esta contenido en todo torneo de orden  $2^n$ .*

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  en efecto se cumple. Supongamos que es válido para  $n-1$ , por lo que todo árbol dirigido de orden  $n-1$  esta contenido en todo torneo de orden  $2^{n-1}$ . Sea  $S$  un árbol de orden  $n$  y  $T$  un torneo de orden  $2^n$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y$  es una hoja de exgrado cero de  $S$ ,  $x \rightarrow y$  el arco que la contiene y sea  $S' := S - \{y\}$ . Observe que  $T$  contiene a dos torneos disjuntos  $T_1$  y  $T_2$  de orden  $2^{n-1}$ . Luego, por hipótesis de inducción  $S' \subset T_1$  y  $S' \subset T_2$  determinadas por

$$f_1 : V(S') \rightarrow V(T_1)$$

$$f_2 : V(S') \rightarrow V(T_2)$$

donde  $(v_i, v_j) \in E(S') \Leftrightarrow (f_1(v_i), f_1(v_j)) \in E(T_1)$ , análogamente para  $f_2$ . Sin pérdida de generalidad si  $f_1(x) \rightarrow f_2(x)$  es un arco de  $T$  entonces definimos a  $f : V(S) \rightarrow V(T)$  como:

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \neq y \\ f_2(x) & \text{si } z = y, \end{cases}$$

lo que asegura que  $S$  está contenido en  $T$ . □

## Capítulo 2

# Árboles $n$ -inevitables de orden $n$ .

---

En este capítulo se considerarán distintos árboles que son inevitables en torneos. Comenzaremos con los árboles más “sencillos” como las trayectorias dirigidas, las trayectorias antidirigidas y las trayectorias por bloques; hasta llegar a algunos más “complejos” como las garras y los árboles  $k$ -arios.

### 2.1. Trayectorias dirigidas.

En esta primera parte, que es la más corta del trabajo, se demuestra que las trayectorias dirigidas de orden  $n$  son  $n$ -inevitables (Redei [1]). Posteriormente se presenta una generalización de dicho resultado dada por Szele [11] en 1943.

**Teorema 2.1** (Redei, 1934). *Todo torneo tiene una trayectoria dirigida hamiltoniana.*

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$  se cumple. Sea  $T$  un torneo de orden  $n + 1$  y supongamos que  $v_0 \in V(T)$ . Por hipótesis de inducción  $T \setminus \{v_0\}$  tiene una trayectoria dirigida hamiltoniana:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n.$$

Si existiera un arco de  $v_0$  a  $v_1$  ó de  $v_n$  a  $v_0$ , entonces se tiene la trayectoria dirigida hamiltoniana.

En caso contrario, sea  $i \in \{1, \dots, n\}$  el mayor entero tal que  $v_j \rightarrow v_0$  para toda  $j$  con  $1 \leq j \leq i$ . Por lo que existe un arco de  $v_i$  a  $v_0$  y de  $v_0$  a  $v_{i+1}$  (Figura 2.1). Luego, se tiene una trayectoria dirigida hamiltoniana en  $T$  de  $v_1$  a  $v_n$  donde  $v_0$  es un vértice intermedio.  $\square$

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 2.1; dada por Szele en 1943, para el cual no incluiremos demostración.

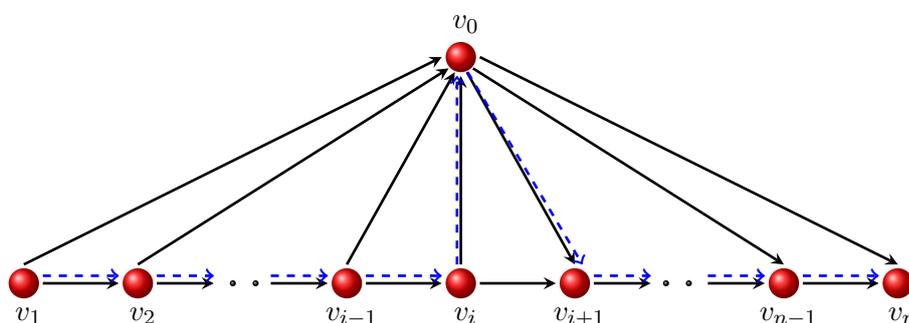


Figura 2.1. Trayectoria dirigida hamiltoniana de orden  $n + 1$ .

**Teorema 2.2.** *Todo torneo tiene un número impar de trayectorias dirigidas hamiltonianas.*

## 2.2. Trayectorias antidirigidas.

Las trayectorias antidirigidas de orden  $n$  también forman parte de las digráficas que son  $n$ -inevitables, a excepción de algunos torneos que carecen de ellas.

**Definición 2.3.** *Una **trayectoria antidirigida** es una trayectoria en la que cualesquiera dos arcos adyacentes tienen orientaciones opuestas.*

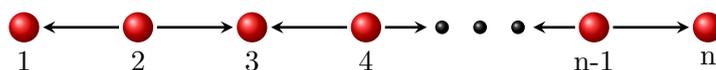


Figura 2.2. Trayectoria antidirigida de orden  $n$  impar.

Consideremos a  $n = 3, 5$  ó  $7$ ; definamos a  $T^c(n)$  como un torneo de orden  $n$  que cumple que si  $v_i$  y  $v_j$  son vértices de  $T^c(n)$  entonces  $T^c(n)$  contiene a los arcos de  $v_i \rightarrow v_j$  si y sólo si:

$$\begin{aligned} i - j &\equiv 1 \pmod{3}, & \text{si } n = 3, \\ i - j &\equiv 1 \text{ ó } 2 \pmod{5}, & \text{si } n = 5, \\ i - j &\equiv 1, 2 \text{ ó } 4 \pmod{7}, & \text{si } n = 7. \end{aligned}$$

Las gráficas de  $T^c(n)$  se muestran en la Figura 2.3. El siguiente teorema es el resultado más sobresaliente de esta sección. Notemos, que las demostraciones cubren a todos los torneos que tienen 6 o más vértices.

Denotaremos por  $T(n+1)$  al torneo con vértices  $0, 1, \dots, n$  y por  $T(n)$  al subtorneo con vértices  $1, 2, \dots, n$ .

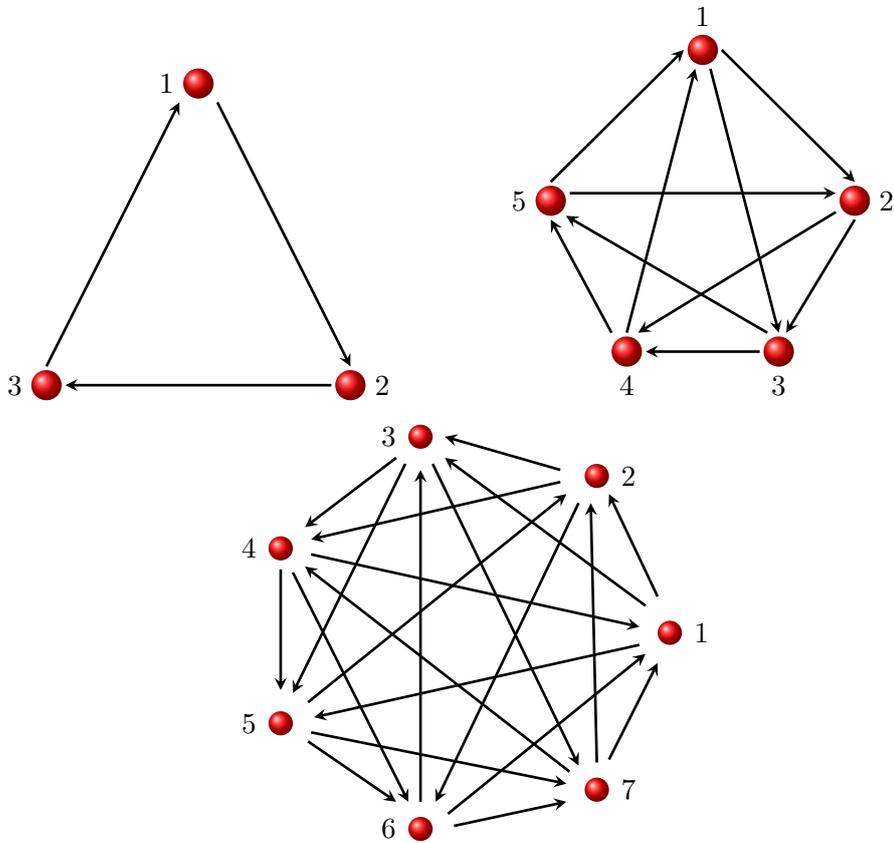


Figura 2.3.  $T^c(3), T^c(5)$  y  $T^c(7)$  respectivamente.

**Teorema 2.4** (Grünbaum, 1969). *Todo torneo contiene una trayectoria antidirigida hamiltoniana, excepto los torneos  $T^c(3)$ ,  $T^c(5)$  y  $T^c(7)$ .*

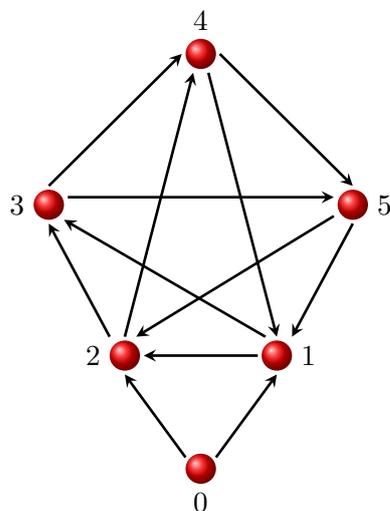
**Demostración.** Será por inducción sobre el orden del torneo. Supondremos que el teorema es válido para torneos con a lo más  $n \geq 5$  vértices. De tal manera que dado un  $T(n+1)$ , deseamos encontrar una trayectoria antidirigida hamiltoniana. La demostración se desarrollará en dos partes, para valores de  $n$  par e impar.

**Caso 1.** Para  $n$  impar.

Si  $n = 5$  y  $T(n)$  es  $T^c(5)$ , entonces sin pérdida de generalidad, asumamos que  $T(6)$  tiene las aristas  $0 \rightarrow 1$  y  $0 \rightarrow 2$  (Figura 2.4), por lo que se tiene la trayectoria antidirigida hamiltoniana para  $T(6)$ :

$$2 \leftarrow 0 \rightarrow 1 \leftarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 3.$$

Si  $n = 7$  y  $T(n)$  es  $T^c(7)$ , hacemos algo análogo al resultado anterior,

Figura 2.4.  $T(6)$ .

suponemos que  $T(8)$  tiene a los arcos  $0 \rightarrow 1$  y  $0 \rightarrow 2$ , así se tiene la trayectoria antidirigida hamiltoniana:

$$2 \leftarrow 0 \rightarrow 1 \leftarrow 6 \rightarrow 7 \leftarrow 3 \rightarrow 5 \leftarrow 4.$$

Si  $T(n)$  no es  $T^c(5)$  ni  $T^c(7)$ , entonces por hipótesis de inducción  $T(n)$  tiene la trayectoria antidirigida hamiltoniana  $H_0$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $H_0$  es:

$$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-1) \leftarrow n,$$

y que  $T(n)$  tiene al arco  $n \rightarrow 1$ . Así  $T(n+1)$  tiene al arco  $0 \leftarrow 1$ , entonces el arco  $0 \leftarrow 1$  y  $H_0$  forman la trayectoria antidirigida hamiltoniana para  $T(n+1)$ ,

$$0 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-1) \leftarrow n.$$

Pero si  $0 \rightarrow 1$  esta en  $T(n+1)$  y como se había supuesto que  $n \rightarrow 1$ , se tiene que

$$0 \rightarrow 1 \leftarrow n \rightarrow (n-1) \leftarrow \cdots \leftarrow 3 \rightarrow 2,$$

es la trayectoria antidirigida hamiltoniana para  $T(n+1)$ .

**Caso 2.** Si  $n$  es par y  $n \geq 6$ .

Por hipótesis de inducción  $T(n)$  contiene a la trayectoria antidirigida hamiltoniana:

$$H_0 : 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \cdots \leftarrow (n-1) \rightarrow n.$$

Si  $T(n)$  contiene a  $1 \rightarrow n$ . Denotaremos por  $H$  al circuito antidirigido hamiltoniano de  $T(n)$ , determinado por  $H_0$  y  $1 \rightarrow n$ . Si  $T(n)$  contiene a  $n \rightarrow 1$ , diremos que  $T(n)$  es asimétrico. Denotaremos por  $A$ , al circuito hamiltoniano no antidirigido

$$A : 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \rightarrow 1,$$

de  $T(n)$  determinado por  $n \rightarrow 1$  y  $H_0$ . El resto de la demostración consiste en suponer que  $T(n+1)$  no contiene trayectorias antidirigidas hamiltonianas para llegar a una contradicción, usando el siguiente lema.

**Lema 2.5.** *Si  $T(n+1)$  no tiene una trayectoria antidirigida hamiltoniana pero  $T(n)$  es un torneo asimétrico y contiene al circuito  $A$ , entonces  $T(n+1)$  contiene a los arcos:  $0 \rightarrow 1$ ,  $2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow (n-1)$ ,  $1 \rightarrow (n-1)$ ,  $2 \rightarrow n$ ,  $1 \rightarrow 3$  y  $(n-2) \rightarrow n$ .*

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ . Si  $T(n+1)$  tuviera el arco  $0 \leftarrow 1$  y colocándolo antes de  $H_0$ , se tendría la trayectoria antidirigida hamiltoniana de  $T(n+1)$

$$0 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n.$$

Luego se tiene que  $0 \rightarrow 1$  está en  $T(n+1)$ ; pero si  $0 \rightarrow 2$  estuviera en  $T(n+1)$  tendríamos que

$$1 \leftarrow 0 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n,$$

es la trayectoria antidirigida hamiltoniana por lo tanto  $2 \rightarrow 0$  está en  $T(n+1)$ .

Ahora supongamos que  $T(n+1)$  tiene a  $0 \rightarrow n$  y poniéndolo al final de  $H_0$ , se tiene que

$$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 0,$$

es la trayectoria antidirigida hamiltoniana, por lo tanto  $n \rightarrow 0$  está en  $T(n+1)$ ; pero si  $(n-1) \rightarrow 0$  fuera un arco de  $T(n+1)$ , tendríamos que

$$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow 0 \leftarrow n,$$

es la trayectoria antidirigida hamiltoniana, por lo tanto  $0 \rightarrow (n-1)$  está en  $T(n+1)$ .

Si se tuviera que  $(n-1) \rightarrow 1$ , entonces  $T(n+1)$  tendría la trayectoria antidirigida hamiltoniana

$$2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \rightarrow (n-2) \leftarrow (n-1) \rightarrow 1 \leftarrow n \rightarrow 0.$$

Se hace algo similar para  $2 \rightarrow n$ . Si  $T(n+1)$  tuviera a  $3 \rightarrow 1$  entonces

$$1 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow \cdots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 2 \rightarrow 0$$

sería la trayectoria antidirigida hamiltoniana para  $T(n+1)$ , por lo tanto  $1 \rightarrow 3$  está en  $T(n+1)$ . Se prueba de manera análoga  $(n-2) \rightarrow n$ , lo que completa la demostración del lema.  $\square$

Regresemos a la demostración del teorema. Supongamos que el subtorneo  $T(n)$  de  $T(n+1)$  tiene el circuito antidirigido hamiltoniano:

$$H : 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \cdots \rightarrow (n-2) \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 1$$

y que  $0 \rightarrow i$  para cada  $i$  impar y  $0 \leftarrow j$  para cada  $j$  par (Figura 2.5). Pues de otra manera  $T(n+1)$  podría contener una trayectoria antidirigida hamiltoniana.

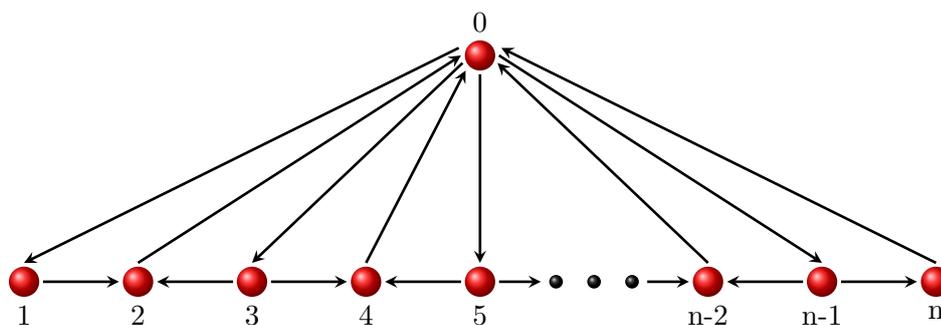


Figura 2.5.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que el arco entre los vértices  $1$  y  $n-1$  va de  $(n-1) \rightarrow 1$ . Consideremos el torneo  $T^*(n)$  que se obtiene de  $T(n+1)$  omitiendo el vértice  $n$ . Por lo que  $T^*(n)$  es asimétrico y contiene el circuito

$$A_n^* : 0 \rightarrow 1 \leftarrow (n-1) \rightarrow (n-2) \leftarrow \cdots \rightarrow 4 \leftarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 0.$$

Luego, al aplicar el Lema 2.5 a  $T^*(n)$ ,  $T(n+1)$  contiene los arcos  $n \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow n$ ,  $2 \rightarrow n$ ,  $n \rightarrow 3$ ,  $0 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow (n-1)$  y  $4 \rightarrow 2$ .

Análogamente consideremos

$$3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-2) \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 3,$$

omitiendo el vértice  $1$  y nuevamente por el Lema 2.5, se tiene que  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $1 \rightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 0$ ,  $3 \rightarrow 5$  y  $n \rightarrow 0$ .

De suponer que  $T(n+1)$  contiene al arco  $(n-1) \rightarrow 1$  implica la existencia de los arcos  $n \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 2$  y  $4 \rightarrow 1$ , luego como el torneo  $T$  es de orden par, se tiene una gráfica simétrica. Por lo que del arco  $(n-1) \rightarrow 1$  módulo  $(n+2)$  se tiene el arco  $1 \rightarrow 3$  lo que implica la existencia de  $2 \rightarrow 5$ ,  $3 \rightarrow 5$ ,  $6 \rightarrow 4$  y  $6 \rightarrow 3$ , por mencionar algunos arcos. Luego, se puede decir que,  $T(n+1)$  contiene a todos los arcos de la forma  $(2i-1) \rightarrow (2i+1)$ ,  $(2i+1) \rightarrow (2i)$ ,  $(2i) \rightarrow (2i+3)$  y  $(2i) \rightarrow (2i-3)$ , donde todos los enteros pueden ser reducidos a  $1, 2, 3, \dots, n \pmod{n}$ , por lo que analizaremos los casos para  $n$ . Obsérvese que si  $n = 6$ , entonces las condiciones anteriores caracterizan un torneo isomorfo a  $T^c(7)$ .

Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  entonces

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow 4 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 5 \leftarrow 8 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 9 \leftarrow 12 \rightarrow \dots \rightarrow (n-3) \leftarrow n \\ \rightarrow (n-2) \leftarrow (n-1) \rightarrow 1, \end{aligned}$$

es una trayectoria antidirigida hamiltoniana de  $T(n+1)$ .

Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$  y además el arco  $(n-1) \rightarrow 3$  está en  $T(n+1)$  entonces se tiene una trayectoria antidirigida hamiltoniana de  $T(n+1)$ .

$$\begin{aligned} n \leftarrow (n-1) \rightarrow 3 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow 4 \rightarrow 7 \leftarrow \dots \leftarrow (n-6) \\ \rightarrow (n-3) \leftarrow (n-5) \rightarrow (n-4) \leftarrow (n-2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si  $n \geq 10$ ,  $n \equiv 2 \pmod{4}$  y  $3 \rightarrow (n-1)$  es un arco, entonces tal trayectoria dirigida hamiltoniana de  $T(n+1)$  esta dada por:

$$\begin{aligned} 4 \rightarrow 0 \leftarrow 8 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 9 \leftarrow 12 \rightarrow \dots \rightarrow (n-5) \\ \leftarrow (n-2) \rightarrow (n-4) \leftarrow (n-3) \rightarrow (n-1) \leftarrow 3 \rightarrow 5 \leftarrow 2 \rightarrow n \leftarrow 1. \end{aligned}$$

Lo que completa la demostración cuando  $T(n)$  tiene un circuito antidirigido hamiltoniano.

Ahora falta el caso en que no hay un subtorneo  $T(n)$  de  $T(n+1)$  que contenga un circuito antidirigido hamiltoniano. Entonces,  $T(n)$  es asimétrico y contiene a

$$A = A(0) : 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \rightarrow 1;$$

donde  $T(n+1)$  contiene también a los arcos enunciados en el Lema 2.5. Tomando en cuenta que no hay circuitos antidirigidos hamiltonianos en  $T(n)$ , se sigue que  $T(n+1)$  contiene a

$$A(1) : 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 6 \leftarrow \dots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 3.$$

$A(1)$  es un circuito isomorfo a  $A(0)$ ; luego, aplicando el Lema 2.5 se tiene la existencia de los arcos  $1 \rightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 0$ ,

$3 \rightarrow 5$  y  $n \rightarrow 0$  en  $T(n+1)$ . Repitiendo esté argumento se tienen los circuitos

$$A(3) : 5 \rightarrow 6 \leftarrow 7 \rightarrow 8 \leftarrow \cdots \rightarrow n \leftarrow 2 \rightarrow 0 \leftarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5,$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $3 \rightarrow 5$ ,  $6 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 3$ , etc.

$$A(5) : 7 \rightarrow 8 \leftarrow \cdots \leftarrow 4 \rightarrow 1 \leftarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7,$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $5 \rightarrow 7$ ,  $8 \rightarrow 5$ ,  $3 \rightarrow 5$ , etc.

.....

.....

.....

$$A(n-3) : (n-1) \rightarrow n \leftarrow 2 \rightarrow 0 \leftarrow 4 \rightarrow 1 \leftarrow 6 \rightarrow 3 \leftarrow \cdots \leftarrow (n-2) \rightarrow, \\ \rightarrow (n-5) \rightarrow (n-1)$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $(n-3) \rightarrow (n-1)$ ,  $n \rightarrow (n-3)$ ,  $(n-5) \rightarrow (n-3)$ , etc.

$$A(n-1) : 2 \rightarrow 0 \leftarrow 4 \rightarrow 1 \leftarrow \cdots \leftarrow (n-2) \rightarrow (n-5) \leftarrow n \rightarrow (n-3) \rightarrow 2,$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $(n-1) \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow (n-1)$ ,  $(n-3) \rightarrow (n-1)$ , etc.

$$A(2) : 4 \rightarrow 1 \leftarrow 6 \rightarrow 3 \leftarrow \cdots \leftarrow n \rightarrow (n-3) \leftarrow 0 \rightarrow (n-1) \rightarrow 4$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $2 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $(n-1) \rightarrow 2$ , etc.

$$A(4) : 6 \rightarrow 3 \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \rightarrow (n-1) \leftarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $4 \rightarrow 6$ ,  $3 \rightarrow 4$ , etc.

.....

.....

.....

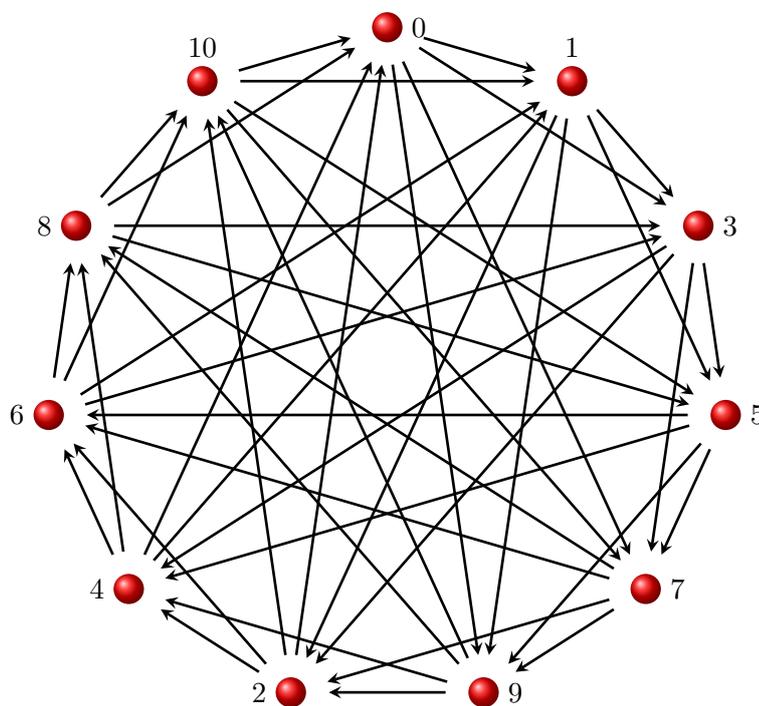
$$A(n) : 0 \rightarrow (n-1) \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow (n-3) \rightarrow (n-2) \rightarrow 0$$

donde  $T(n+1)$  contiene a los arcos  $n \rightarrow 0$ ,  $(n-1) \rightarrow n$ ,  $(n-2) \rightarrow n$ , etc.

Por lo anterior podemos decir que  $T(n+1)$  contiene al circuito hamiltoniano dirigido que se forma de tomar el primer arco de cada circuito  $A(i)$  de  $T(n+1)$ .

$$C : 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-1) \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \\ \rightarrow \cdots \rightarrow n \rightarrow 0.$$

Al igual  $C$  tiene todas las diagonales orientadas positivamente de longitud  $2$ ,  $\frac{1}{2}n - 1$  y  $\frac{1}{2}n$  (Figura 2.6).

Figura 2.6.  $T(11)$ .

Ahora si  $n = 8$  esto completamente determina la estructura de  $T(9)$  y es fácil encontrar una trayectoria antidirigida hamiltoniana. Por lo tanto podemos asumir que  $n \geq 10$ ; por lo que la demostración se completa estableciendo los 2 hechos siguientes:

- A)  $T(n + 1)$  no contiene dos diagonales vecinas de  $C$ , orientadas negativamente y de longitud tres.
- B)  $T(n + 1)$  no contiene dos diagonales en  $C$  orientadas positivamente, a distancia máxima y de longitud 3.

Observemos que de A) se tiene que hay una diagonal positivamente orientada de longitud 3 en  $T(n + 1)$ , debido a la simetría de  $C$ ; sin pérdida de generalidad digamos que es el arco  $1 \rightarrow 7$ . Ahora entonces de B) se tiene que hay 2 diagonales en  $C$  negativamente orientadas a distancia máxima y de longitud 3 de  $1 \rightarrow 7$ , supongamos que son  $8 \rightarrow 2$  y  $10 \rightarrow 4$  lo que contradice A). Las demostraciones de los dos incisos serán por contradicción.

Para probar A), supongamos que hay dos diagonales  $n \leftarrow 3$  y  $(n - 2) \leftarrow 1$ , obsérvese que son negativamente orientadas y de longitud 3. Entonces construyamos un circuito antidirigido hamiltoniano del torneo

$T(n)$  que nos ayude a probar lo requerido, es decir, que contenga a las dos diagonales antes mencionadas. Dicho circuito se va construyendo en la mayoría de los casos formando una especie de triángulos cuyas longitudes de uno a otro vértice de él, están señaladas, por el número superior de la llave, obsérvese que ahí están las dos diagonales vecinas en  $C$  y son negativamente orientadas de longitud 3.

$$3 \overset{5}{\curvearrowright} 4 \overset{4}{\curvearrowleft} 5 \overset{5}{\curvearrowright} 6 \leftarrow \cdots \rightarrow (n-4) \leftarrow (n-3) \rightarrow (n-2) \leftarrow 1$$

$$\overset{5}{\curvearrowright} 2 \overset{3}{\curvearrowleft} (n-1) \overset{5}{\curvearrowright} n \overset{3}{\curvearrowleft} 3,$$

lo que contradice la suposición de que no hay un subtorneo de  $T(n+1)$  que contenga tal circuito, por lo que A) queda demostrado.

Para probar B), supongamos sin pérdida de generalidad que las dos diagonales de  $C$  son:  $1 \rightarrow 7$  y  $4 \rightarrow 10$ , entonces  $T(n+1)$  contiene la trayectoria antidirigida hamiltoniana

$$9 \overset{2}{\curvearrowleft} 5 \overset{1}{\curvearrowright} 7 \overset{3}{\curvearrowleft} 1 \overset{1}{\curvearrowright} 3 \overset{5}{\curvearrowleft} 6 \overset{1}{\curvearrowright} 8 \overset{2}{\curvearrowleft} 4 \overset{3}{\curvearrowright} 10 \leftarrow 11 \rightarrow 12 \leftarrow 13$$

$$\rightarrow 14 \leftarrow \cdots \leftarrow (n-1) \rightarrow n \leftarrow 2 \overset{5}{\curvearrowright} 0$$

lo cual es una contradicción, completando así la demostración de B).

Por lo tanto todo subtorneo  $T(n)$  de  $T(n+1)$  contiene a un circuito antidirigido hamiltoniano.

Luego, todo torneo contiene una trayectoria antidirigida hamiltoniana, excepto los 3 torneos especiales mencionados anteriormente. □

## 2.3. Trayectorias por bloques.

Para el desarrollo de esta sección nos apoyaremos en el trabajo realizado por Forcade [2] en 1972. Se determinará la paridad del número de copias de una trayectoria cualquiera de orden  $n$  en todo torneo de orden  $n$ , exclusivamente en términos de la estructura de la trayectoria (¡no dependerá del torneo en cuestión!). Finalmente se demostrará que toda trayectoria de orden  $2^n$  es  $2^n$ -inevitable.

**Definición 2.6.** Sea  $T(n)$  un torneo con  $n$  vértices y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una permutación de los  $n$  vértices. Denotaremos  $e_i = +1$  si  $x_i \rightarrow x_{i+1}$  y  $e_i = -1$  si  $x_{i+1} \rightarrow x_i$  para  $1 \leq i \leq n-1$ .

Como se puede apreciar, una sucesión  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  tal que  $e_i \in \{1, -1\}$  describe a cierta trayectoria hamiltoniana en  $T(n)$ . En la sección 2.1 se abordó el caso en que todas las  $e_i$ 's son iguales a 1 (trayectoria dirigida) y en la sección 2.2 el caso en que cada  $e_i$ 's  $= -e_{i+1}$  (trayectoria antidirigida). En lo que concierne a esta sección abordaremos trayectorias cualesquiera, es decir, sucesiones arbitrarias de 1's y -1's.

### Definiciones 2.7.

- Denotaremos como  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$  a la trayectoria determinada por la sucesión  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ .
- $I(\mathbf{P}, T(n))$  como el número de copias de  $P$  en  $T(n)$ .

Para probar el Teorema 2.13 necesitaremos un fuerte resultado de Teoría de números que sigue a continuación.

**Teorema 2.8** (Lucas, 1878). Sean enteros no negativos  $n$  y  $m$ ,  $p$  un primo y sea la expansión en base  $p$  de  $m$  y  $n$  la siguiente:

$$n = n_q p^q + n_{q-1} p^{q-1} + \dots + n_1 p + n_0,$$

$$m = m_q p^q + m_{q-1} p^{q-1} + \dots + m_1 p + m_0,$$

entonces

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^q \binom{n_i}{m_i} \pmod{p},$$

donde  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  denota el coeficiente binomial de  $n$  y  $m$ .

**Definición 2.9.** Sea

$$n = \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i},$$

entonces definiremos  $\mathbf{U}(n) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ .

**Definición 2.10.** Sean  $m$  y  $n$  enteros no negativos. Definiremos a la relación binaria  $\mathbf{R}$  como

$$(m, n) \in \mathbf{R} \text{ si y sólo si } U(m) \subseteq U(n).$$

**Lema 2.11.**  $\binom{n}{k}$  es impar si y sólo si  $(k, n) \in \mathbf{R}$ .

**Demostración.** Consideremos la expansión en base 2 de  $n$  y  $k$  respectivamente

$$\begin{aligned} n &= a_1 2^{t_1} + a_2 2^{t_2} + \dots + a_{q-1} 2^{t_{q-1}} + a_q 2^{t_q}, \\ k &= b_1 2^{t_1} + b_2 2^{t_2} + \dots + b_{q-1} 2^{t_{q-1}} + b_q 2^{t_q}, \end{aligned}$$

donde  $a_i, b_i \in \{0, 1\}$  y  $t_i \geq 0$  con  $1 \leq i \leq q$ , entonces por el Teorema 2.8

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=1}^q \binom{a_i}{b_i} \pmod{2}.$$

Primeramente probemos que si  $\binom{n}{k}$  es impar  $\Rightarrow (k, n) \in R$ .

Sea  $\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod{2}$ . Demostrar que  $(k, n) \in R$  es equivalente a demostrar que  $U(k) \subseteq U(n)$ . Si  $U(k) \not\subseteq U(n)$  existe  $i$  tal que  $a_i = 0$ ,  $b_i = 1$  y  $\binom{a_i}{b_i} = 0$ . Luego

$$\prod_{i=1}^q \binom{a_i}{b_i} = 0 \equiv \binom{n}{k} \pmod{2}$$

(contradicción), pues  $\binom{n}{k}$  es impar.

$\therefore (k, n) \in R$ .

Recíprocamente si  $(k, n) \in R$  entonces

$$U(k) \subseteq U(n) \Rightarrow \binom{a_i}{b_i} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq q,$$

luego

$$\prod_{i=1}^q \binom{a_i}{b_i} = 1 \equiv \binom{n}{k} \pmod{2},$$

lo que concluye que  $\binom{n}{k}$  es impar.  $\square$

**Definiciones 2.12.**

Sea  $P = P(e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1})$  entonces:

- $\mathbf{S}_P = \{i < n : (i, n) \in R, \quad e_i = -1\}$ .
- $\mathbf{F}_P$  es la familia de  $R$ -subconjuntos linealmente ordenados (incluyendo al vacío) de  $S_P$ .

**Teorema 2.13.** Sea  $P = P(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$  y  $T(n)$  un torneo de orden  $n$ , entonces  $I(P, T(n)) \equiv |F_P| \pmod{2}$ .

**Demostración.** Por inducción doble sobre el orden  $n$  del torneo y el entero más grande  $k$  tal que  $e_k = -1$ . Un caso muy trivial es  $n = 2$  y  $k = 0$  pues  $I(P, T(2)) = 1$ ,  $S_P = \{\emptyset\}$  y  $|F_P| = 1$  por lo que se cumple el teorema. El primer caso base con  $n > 0$  es  $k = 0$ , lo que significa que todas las  $e_i$ 's  $= 1$ , recordemos que esto es una trayectoria dirigida hamiltoniana y por el Teorema 2.1  $I(P, T(n)) \equiv 1 \pmod{2}$  mientras que por otro lado  $S_P = \{\emptyset\}$ , así  $I(P, T(n)) \equiv 1 \pmod{2}$ . La segunda parte del caso base  $n = 0$  y  $k > 0$  no se puede dar, pues se tiene un torneo de orden 0.

Asumamos que  $n > 2$ ,  $k > 0$  y que el teorema es cierto para cualquier valor menor a  $n$  con cualquier  $k$  y para  $n$  con cualquier valor menor a  $k$ . Por demostrar que el teorema es cierto para  $n$  y  $k$ .

Sea  $P^* = P(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, +1, +1, \dots, +1)$ , entonces  $P^*$  difiere de  $P$  en la  $k$ -ésima arista.

Un procedimiento para encontrar a  $P$  ó  $P^*$  en  $T(n)$  es el siguiente:

1. Tomar un subtorneo  $T(k)$  de orden  $k$  en  $T(n)$ .
2. Encontrar todas las trayectorias  $P(e_1, \dots, e_{k-1})$  en  $T(k)$ .
3. Encontrar todas las trayectorias  $P(\underbrace{+1, \dots, +1}_{n-k-1})$  en el complemento de  $T(k)$  en  $T(n)$  es decir en  $T(n-k)$ .

Obsérvese que en este procedimiento si  $e_{k-1} \rightarrow e_k = +1$  entonces estaríamos construyendo una trayectoria de tipo  $P^*$  y si  $e_{k-1} \leftarrow e_k = -1$  estamos encontrando una trayectoria de tipo  $P$ . Luego,

$$I(P, T(n)) + I(P^*, T(n)) = \sum I(P(e_1, \dots, e_{k-1}), T(k)) \cdot I(P(+1, \dots, +1), T(n-k)),$$

donde la suma corre sobre los subtorneos de orden  $k$ ,  $T(k)$  de  $T(n)$  y  $T(n-k)$  denota el complemento de  $T(k)$  en  $T(n)$ . Por el Teorema 2.1  $I(P(+1, \dots, +1)) \equiv 1 \pmod{2}$ . Denotemos a  $P_L = P(e_1, \dots, e_{k-1})$ , por hipótesis de inducción  $I(P(e_1, \dots, e_{k-1}), T(k)) \equiv |F_{P_L}| \pmod{2}$ . Obsérvese que  $|F_{P_L}|$  no depende del  $k$ -subconjunto elegido, luego

$$I(P, T(n)) + I(P^*, T(n)) \equiv |F_{P_L}| \binom{n}{k} \pmod{2}.$$

Ahora dividiremos nuestro análisis en 2 casos:

**Caso 1.** Si  $(k, n) \notin R$  entonces por el Lema 2.11  $\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod{2}$ .

$$I(P, T(n)) + I(P^*, T(n)) \equiv 0 \pmod{2},$$

$$I(P, T(n)) \equiv I(P^*, T(n)) \pmod{2}.$$

Como  $(k, n) \notin R$  se tiene que  $S_P = S_{P^*}$ , luego  $|F_P| = |F_{P^*}|$  y por hipótesis de inducción  $|F_{P^*}| \equiv I(P^*, T(n)) \pmod{2}$ . De aquí que

$$I(P, T(n)) \equiv |F_P| \pmod{2}.$$

**Caso 2.** Si  $(k, n) \in R$  entonces por el Lema 2.11  $\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod{2}$ .

Luego

$$I(P, T(n)) + I(P^*, T(n)) \equiv |F_{P_L}| \pmod{2}. \quad (2.1)$$

Consideremos la partición

$$S_P = S_P^1 \cup S_P^2,$$

donde

$$\begin{aligned} S_P^1 &= \{i \in S_P : (i, k) \in R\} = \{i < n : (i, k) \in R, e_i = -1\} \\ &\quad \text{y} \\ S_P^2 &= S_P \setminus S_P^1 \end{aligned}$$

por lo que  $S_P^2 = \{i < n : (i, k) \notin R, (i, n) \in R, e_i = -1\}$ .

Ahora podemos particionar a  $F_P$ :  $F_P = L_1 \cup L_2$  donde  $L_1$  es la familia de  $R$ -subconjuntos linealmente ordenados de  $S_P^1$  y  $L_2 = F_P \setminus L_1$ . A su vez  $L_1 = L_{1,1} \cup L_{1,2}$  con  $L_{1,1} = \{s \in L_1 : k \in S\}$  y  $L_{1,2} = \{s \in L_1 : k \notin S\} \cup \{\emptyset\}$ .

Obsérvese que todo  $R$ -subconjunto de  $L_{1,1}$  se obtiene de agregar  $k$  a cierto  $R$ -subconjunto de  $L_{1,2}$  y que  $L_{1,2} = F_{P_L}$ . Luego

$$|L_{1,1}| = |L_{1,2}| = |F_{P_L}|, \quad (2.2)$$

así

$$|F_P| = |L_{1,1}| + |L_{1,2}| + |L_2|. \quad (2.3)$$

Por otra parte obsérvese que ningún elemento de  $L_2$  puede contener a  $k$ , luego

$$|F_{P^*}| = |L_{1,2}| + |L_2|. \quad (2.4)$$

Por hipótesis de inducción

$$I(P^*, T(n)) \equiv |F_{P^*}| \pmod{2}. \quad (2.5)$$

De la ecuación 2.1 y 2.5

$$I(P, T(n)) \equiv |F_{P_L}| + |F_{P^*}| \pmod{2}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación 2.4 en la ecuación 2.6

$$I(P, T(n)) \equiv |F_{P_L}| + |L_{1,2}| + |L_2| \pmod{2}, \quad (2.7)$$

ahora sustituyendo la ecuación 2.2 en la ecuación 2.7

$$I(P, T(n)) \equiv |L_{1,1}| + |L_{1,2}| + |L_2| \pmod{2}. \quad (2.8)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 2.3 en la ecuación 2.8

$$I(P, T(n)) \equiv |F_P| \pmod{2},$$

como se quería. □

**Corolario 2.14.** *Todo torneo de orden  $2^n$  contiene a cualquier trayectoria de orden  $2^n$ .*

**Demostración.** Sea  $T(2^n)$  un torneo,  $P = (e_1, e_2, \dots, e_{2^n-1})$  y  $S_P = \{i < 2^n : (i, 2^n) \in R, e_i = -1\}$ . Si  $i \in S_P$ ,  $U(i) \subseteq U(2^n) = \{n\}$  (contradicción), por lo tanto  $S_P = \{\emptyset\}$ ,  $|F_P| = 1$  y por el Teorema 2.13

$$I(P, T(n)) \equiv 1 \pmod{2}. \quad \square$$

## 2.4. Garras de grado menor o igual que $\frac{n}{4}$ .

En esta sección abordaremos un tipo de árbol llamado garra. M. Saks y V. Sós [16] conjeturaron que toda garra de orden  $n$ , donde el exgrado de su raíz es a lo más  $n/2$  es  $n$ -inevitable. Aquí se da un contraejemplo de tal conjetura y se demuestra que las garras de grado menor o igual a  $n/4$  son  $n$ -inevitables.

### Definiciones 2.15.

Sea  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$  una sucesión de enteros no negativos. Asumiremos que  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  para toda  $i$ . Observe que la sucesión  $\lambda$  es una partición de

$$m = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

- Una **garra**  $C(\lambda)$  es un árbol enraizado que se obtiene de concatenar las raíces de trayectorias dirigidas de orden  $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_k + 1$ , por lo que

$$|C(\lambda)| = 1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

- Una  **$k$ -garra** es una garra donde todos los  $\lambda_i$ s son  $k$ , excepto quizás uno de ellos que puede ser menor que  $k$ .
- El **grado** de una garra es el exgrado de su raíz y se denota como **d**.

Observe que en toda garra las hojas son de exgrado cero. En lo adelante nos referiremos a ellas simplemente como hojas.

Sea  $T$  un torneo de orden  $n$ , un resultado muy conocido es que  $T$  contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana  $P$  es decir, contiene una garra de orden  $n$  y de grado 1 como subdigráfica.

M. Saks y V. Sós [16] consideraron la pregunta **¿Qué garras con  $n$  vértices son  $n$ -inevitables?**. Entonces existe un torneo con  $n$  vértices tal que el exgrado de cada vértice es a lo más  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , una condición necesaria para que una garra sea  $n$ -inevitable es que la raíz tenga exgrado a lo más  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Conjeturaron que esto era una condición suficiente.

En particular conjeturaron que la 2-garra de orden  $n$  es  $n$ -inevitable y demostraron que esto implica la conjetura general.

#### Definiciones 2.16.

- Se dice que un vértice de un torneo  $T$  de orden  $n$  es un **vértice bueno** si es raíz de una 2-garra de orden  $n$  en  $T$ .
- Dados los vértices  $x$  y  $w$ , sea  $I(x, w) = \{y : x \rightarrow y \text{ y } y \rightarrow w \text{ en } T\}$  y para un subconjunto  $W$ ,

$$\mathbf{I}(x, \mathbf{W}) = \bigcup_{w \in W} I(x, w).$$

Dos consecuencias inmediatas de estas definiciones son:

**Proposición 2.17.** Si  $x$  es un vértice bueno de  $T$ , entonces  $|I(x, W)| \geq |W|$  donde  $W \subseteq \{y \in T : y \rightarrow x\}$ .

**Proposición 2.18.** Si  $x$  es un vértice bueno de  $T$ , entonces hay una trayectoria de longitud a lo más 2 de  $x$  a cualquier otro vértice  $w$ .

Dado un torneo  $T = (V, E)$  de orden  $n$ ,  $A \subseteq V$  y  $B \subseteq V$ .  $A \Rightarrow B$  denota que de todo vértice de  $A$  sale un arco a todo vértice de  $B$ ;  $x \Rightarrow B$  denota a  $\{x\} \Rightarrow B$  y  $A \Rightarrow y$  denota  $A \Rightarrow \{y\}$ .

**Teorema 2.19.** *Existe una infinidad de valores de  $n$ , tal que la 2-garra de orden  $n$  no es  $n$ -inevitable.*

**Demostración.** Primero se construye un torneo  $H$  que sólo contiene un vértice bueno. En segundo lugar se construye un torneo  $T$  a partir del torneo  $H$  tal que  $T$  no tenga vértices buenos.

Sean  $s > 0$ ,  $t \geq 7$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  torneos arbitrarios tal que  $|A| = s$ ,  $|B| = s + 1$ ,  $|C| = s + 4$  y  $|D| = t$ . Se construye  $H$  de la siguiente manera:

$$V(H) = V(A) \cup V(B) \cup V(C) \cup V(D) \cup \{a, b\}.$$

Los arcos de  $H$  son los de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y los arcos:  $A \Rightarrow B$ ,  $B \Rightarrow C$ ,  $C \Rightarrow A$ ,  $D \Rightarrow A$ ,  $D \Rightarrow B$ ,  $C \Rightarrow D$ ,  $a \Rightarrow A$ ,  $a \Rightarrow C$ ,  $a \Rightarrow D$ ,  $B \Rightarrow a$ ,  $b \Rightarrow a$ ,  $b \Rightarrow B$ ,  $b \Rightarrow C$ ,  $A \Rightarrow b$  y  $D \Rightarrow b$  (Figura 2.7).

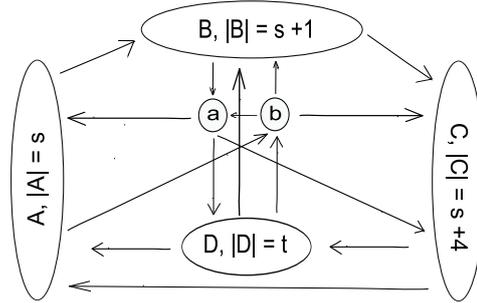


Figura 2.7. Construcción del Torneo H.

Luego

1. Si  $x \in A$ , entonces  $x$  no es un vértice bueno porque cada trayectoria de  $x$  a  $D$  tiene longitud  $\geq 3$ .
2. Si  $x \in B$ , entonces  $x$  no es un vértice bueno porque cada trayectoria de  $x$  a  $b$  tiene longitud  $\geq 3$ .
3. Si  $x \in C$ , entonces  $x$  no es un vértice bueno porque cada trayectoria de  $x$  a  $a$  tiene longitud  $\geq 3$ .
4. Si  $x \in D$ , entonces  $x$  no es un vértice bueno porque

$$|I(x, C \cup \{a\})| = |B \cup \{b\}| = |B| + 1 = s + 2$$

pero  $|C| + 1 = s + 5$ .

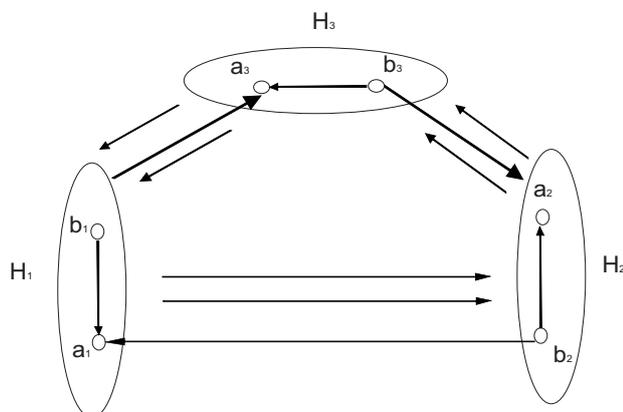


Figura 2.8. Construcción del Torneo T.

5.  $b$  no es un vértice bueno porque

$$|I(b, A \cup D)| = |C \cup \{a\}| = |C| + 1 = s + 5$$

$$\text{pero } |A \cup D| = |A| + |D| = s + t \geq s + 7.$$

Por lo que solamente  $a$  es un vértice bueno de  $H$  (de hecho lo es). Ahora construyamos el torneo  $T$ . Sean  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  copias de  $H$ . El conjunto de arcos de  $T$  consiste de  $E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3)$  junto con

$$\{H_i \Rightarrow H_{i+1} - \{a_i \rightarrow b_{i+1}\}\} \cup \{b_{i+1} \rightarrow a_i\}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

los subíndices son tomados módulo 3, (Figura 2.8).

Ahora probaremos que en  $T$  no hay un vértice bueno. Por la simetría de  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ , basta probar que en  $H_1$  no hay un vértice bueno. De la Proposición 2.17 y Proposición 2.18 se tiene para  $T$  lo siguiente:

6.  $a_1$  no es un vértice bueno porque

$$|I(a_1, H_3)| = |H_2 - \{b_2\}| < H_3.$$

7.  $b_1$  no es un vértice bueno porque tenemos

$$I(b_1, A_1 \cup D_1) = C_1 \cup \{a_1, a_3\}$$

y

$$|A_1 \cup D_1| = s + t \geq s + 7 > |C_1 \cup \{a_1, a_3\}| = s + 6.$$

8. Si  $x$  está en  $A_1 \cup B_1 \cup C_1$  entonces por 1, 2 y 3  $x$  no es un vértice bueno.

9. Si  $x$  esta en  $D_1$  entonces  $x$  no es un vértice bueno porque

$$|I(x, C_1 \cup \{a_1\})| = |B_1 \cup \{b_1\} \cup \{b_2\}| = s + 3 < s + 5 = |C_1 \cup \{a_1\}|.$$

Por lo que  $T$  no tiene un vértice bueno, lo que completa la demostración.  $\square$

**Definición 2.20.** Sean  $\lambda$  y  $\mu$  particiones con la misma suma. Diremos que  $\lambda$  *domina a*  $\mu$  y lo denotaremos como  $\lambda \succ \mu$  si

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i \geq \sum_{i=1}^t \mu_i \quad \forall t \geq 1,$$

lo que define un orden sobre las garras de orden  $n$ .

M.Saks y V. Sós [16] probaron lo siguiente:

**Lema 2.21.** Supongamos que  $\lambda$  y  $\mu$  tienen la misma suma y  $\lambda \succ \mu$ . Si  $T$  es un torneo y  $C(\mu)$  es subgráfica de  $T$ , entonces  $C(\lambda)$  es subgráfica de  $T$ .

**Demostración.** Por inducción sobre  $d = \sum |\lambda_i - \mu_i|$ . Si  $d = 0$ , se tiene que  $|\lambda_i - \mu_i| = 0 \quad \forall i \geq 1$ , es decir  $C(\lambda) = C(\mu)$ , por lo que  $C(\lambda)$  es subgráfica de  $T$ . Ahora supongamos  $d > 1$ , sea  $j$  el primer índice tal que  $\lambda_j \neq \mu_j$ . Como  $\lambda \succ \mu$  se tiene que  $\lambda_j > \mu_j$ . Además, existe un índice  $k > j$  tal que  $\mu_k > \lambda_k$ . Sea  $\nu$  la partición dada por  $\nu_j = \mu_j + 1$ ,  $\nu_k = \mu_k - 1$  y  $\nu_i = \mu_i \quad \forall i \neq \{j, k\}$ , así

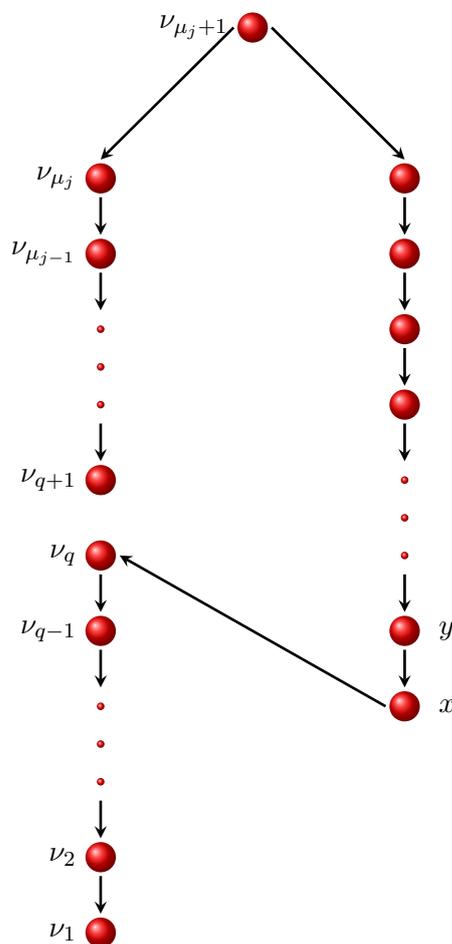
$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \quad \lambda_j \quad , \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{k-1}, \quad \lambda_k \quad , \dots) \\ \mu &= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}, \quad \mu_j \quad , \mu_{j+1}, \dots, \mu_{k-1}, \quad \mu_k \quad , \dots) \\ \nu &= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{j-1}, \quad \mu_j + 1 \quad , \mu_{j+1}, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k - 1, \dots). \end{aligned}$$

Ahora veamos que:

- i)  $C(\nu) \subset T$ .
- ii)  $\lambda \succ \nu$ .
- iii)  $\sum |\lambda_i - \nu_i| < \sum |\lambda_i - \mu_i|$ .

Para probar i). Consideraremos dos casos:

Sea  $C$  una copia de  $C(\mu)$  en  $T$ ,  $x$  la hoja de la  $k$ -ésima trayectoria de la garra y  $y$  el predecesor de  $x$ . Etiquetemos a los vértices de la  $j$ -ésima trayectoria de la garra comenzando por la hoja; como  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\mu_j+1}$ .

Figura 2.9. Construcción de  $C(\nu)$  a partir del Caso 1.

Definamos a  $q = \mu_j + 1 - \mu_k$ . Como  $\mu_j \geq \mu_k \geq 1$ ,  $q$  esta entre 1 y  $\mu_j$ .

**Caso 1.**  $x \rightarrow v_q$ .

Entonces eliminemos el arco  $v_{q+1} \rightarrow v_q$  de  $C$  y agreguemos el arco  $x \rightarrow v_q$  a  $C$ , (Figura 2.9), luego se tiene una copia de  $C(\nu)$  en  $T$ .

**Caso 2.**  $x \leftarrow v_q$ .

Sea  $r$  el menor índice tal que  $v_r \rightarrow x$ , eliminemos los arcos  $y \rightarrow x$  y  $v_r \rightarrow v_{r-1}$  (si  $r \neq 1$ ) agreguemos los arcos  $v_r \rightarrow x$  y  $x \rightarrow v_{r-1}$  (si  $r \neq 1$ ) (Figura 2.10). Luego se tiene una copia de  $C(\nu)$  en  $T$ .

Para probar *ii*). Para  $r < j$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^r \mu_i = \sum_{i=1}^r \nu_i \quad (2.9)$$

Para  $r = j$ ,  $\lambda_j > \mu_j$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \lambda_i &= \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i + \lambda_j > \sum_{i=1}^{j-1} \mu_i + \mu_j, \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^j \lambda_i > \sum_{i=1}^j \mu_i, \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{j-1} \mu_i + \mu_j + 1 = \sum_{i=1}^j \nu_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para  $r > j$ ,  $\nu_r \leq \mu_r$  por lo que

$$\sum_{i=r}^t \lambda_i \geq \sum_{i=r}^t \nu_i. \quad (2.11)$$

Luego por 2.9, 2.10 y 2.11 se tiene que  $\lambda \succ \nu$ .

Por otra parte, para  $r < j$

$$|\lambda_r - \nu_r| = |\lambda_r - \mu_r|.$$

Para  $r = j$ , dado que  $\lambda_j > \mu_j$  se tiene que

$$|\lambda_j - \nu_j| = |\lambda_j - (\mu_j + 1)| < |\lambda_j - \mu_j|.$$

Y para  $r > j$ , si  $r \neq k$  se tiene que

$$|\lambda_r - \nu_r| = |\lambda_r - \mu_r|,$$

pero si  $r = k$ ,  $\lambda_k < \mu_k$ , por lo que

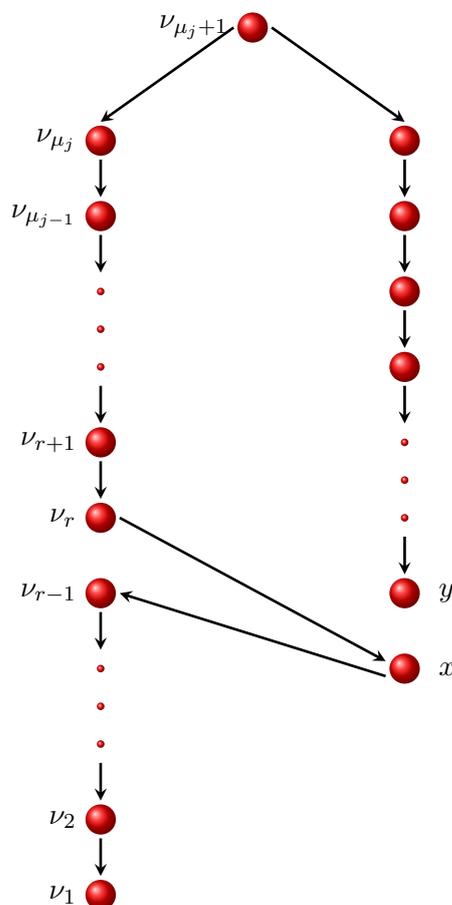
$$|\lambda_k - \nu_k| = |\lambda_k - (\mu_k - 1)| < |\lambda_k - \mu_k|.$$

Por lo tanto queda demostrado *iii*).

Como  $C(\nu)$  es subgráfica de  $T$ ,  $\lambda \succ \mu$  y  $\sum |\lambda_i - \nu_i| < \sum |\lambda_i - \mu_i| = d$ ; por hipótesis de inducción se tiene que  $C(\lambda)$  es subgráfica de  $T$ .  $\square$

**Teorema 2.22.** *Toda garra de grado  $\leq \frac{n}{4}$  es  $n$ -inevitable.*

Obsérvese que en base al desarrollo de esta sección y del Lema 2.21 se tiene que una  $k$ -garra es menor o igual a cualquier garra con grado  $\leq \frac{n}{k}$ .

Figura 2.10. Construcción de  $C(\nu)$  a partir del Caso 2.

**Definiciones 2.23.** Sea  $D$  una digráfica.

- Un **acoplamiento** de  $D$ , es un conjunto de arcos sin vértices en común.
- Un **acoplamiento máximo** es un acoplamiento que contiene un número máximo de arcos.

**Teorema 2.24.** La 4-garra de orden  $n$  es  $n$ -inevitable.

Sea  $T$  un torneo arbitrario de orden  $n$  y  $x$  un vértice con máximo exgrado en  $T$ ; en este caso denotaremos como  $V(T)$  y  $A(T)$  al conjunto de vértices y arcos de  $T$  respectivamente, así  $d_T^+(x) = \max\{d_T^+(y) : y \in V(T)\}$ ,  $A = N_T^+(x)$ ,  $B = N_T^-(x)$ ,  $|A| = a$ ,  $|B| = b$  donde  $a \geq b$  por como se eligió a  $x$ ,  $D = (A, B; E)$  una digráfica bipartita que se obtiene de  $T$  con el conjunto de arcos  $E = \{u \rightarrow v \in A(T) : u \in A, v \in B\}$  y  $M$

un acoplamiento máximo de  $D$ .

Para demostrar el Lema 2.26 necesitamos el siguiente teorema dado por Köning en 1936.

**Teorema 2.25.** *Una digráfica es bipartita si  $D$  no tiene ciclos impares.*

**Lema 2.26.**  $|M| > \frac{b}{2}$ .

**Demostración.** Sea  $U \cup V$  la mínima cubierta de  $D$  donde  $U \subseteq A$  y  $V \subseteq B$ , por lo que todo arco de  $D$  esta en  $U \cup V$ . Por el Teorema 2.25 sólo tendremos que demostrar  $|U \cup V| > \frac{b}{2}$ . Sea  $T'$  un subtorneo de  $T$ , que se obtiene de  $T$  restringido a  $B - V$  y  $u$  un vértice de  $T'$  de exgrado máximo en  $T'$ , implica que

$$d_{T'}^+(u) \geq \frac{|B| - |V| - 1}{2}.$$

Notemos que  $U \cup V$  es una cubierta de  $D$ , de ahí que  $u \Rightarrow A - U \subseteq A(T)$ , (Figura 2.11), así  $u \Rightarrow (A - U \cup \{x\}) \subseteq A(T)$  entonces  $u \rightarrow x \in A(T)$ . Luego por como se eligió a  $x$ ,  $d_T^+(x) \geq d_{T'}^+(u)$ .

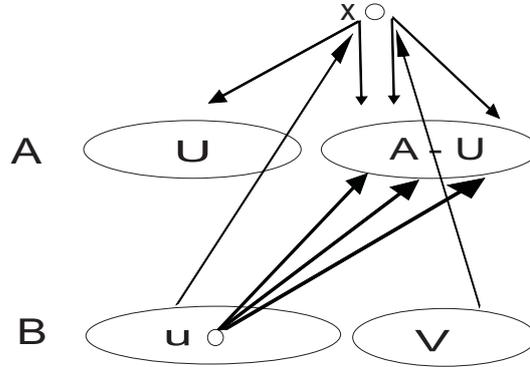


Figura 2.11.

Así

$$\begin{aligned} a &\geq d_T^+(u) \geq d_{T'}^+(u) + |u \Rightarrow (A - U \cup \{x\})| \\ &\geq \frac{|B| - |V| - 1}{2} + |A| - |U| + 1 = \frac{b - |V| + 1}{2} + a - |U|. \end{aligned}$$

Luego

$$|U \cup V| = |U| + |V| \geq \frac{b + 1 + |V|}{2} > \frac{b}{2}.$$

□

Sea  $X = A \cap V(M)$ ,  $Y = B \cap V(M)$ ,  $Y' = B - Y$ ,  $D^*$  una digráfica bipartita sobre  $(X \cup Y, Y'; E^*)$ , donde  $E^* = \{u \rightarrow v \in A(T) : u \in X \cup Y, v \in Y'\}$  y  $M^*$  un acoplamiento máximo de  $D^*$ .

El siguiente teorema de acoplamientos dado por Hall en 1935, nos ayudará a probar el Lema 2.28.

**Teorema 2.27.** Una digráfica bipartita  $D = (X, Y; E)$  tiene un acoplamiento que satura a  $X$  si y solo si  $|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$ .

**Lema 2.28.**  $|M^*| = |Y'|$ .

**Demostración.** Por el Teorema 2.27, es suficiente demostrar que en  $D^*$ ,  $d(y) > |Y'|$  para cualquier  $y \in Y'$ . Como  $M$  es un acoplamiento máximo en  $D$ , tenemos  $y \Rightarrow (A - X) \subseteq A(T)$  (Figura 2.12). Notemos que  $|y \Rightarrow Y \cup X| = |X \cup Y| - d(y)$  y  $y \rightarrow x \in A(T)$ , entonces

$$a \geq d_T^+(y) \geq a - |X| + |X \cup Y| - d(y) = a + 1 + |Y| - d(y),$$

es decir

$$d(y) \geq 1 + |Y| = 1 + |M| > 1 + \frac{b}{2} > |Y'|.$$

□

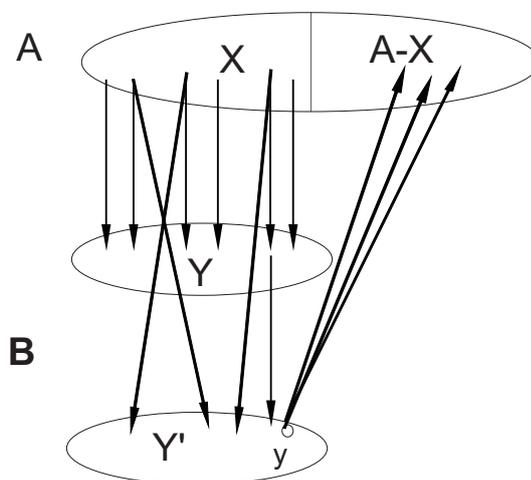


Figura 2.12.

**Demostración del Teorema 2.24.** Sea  $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  y  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  donde  $x_i \rightarrow y_i \in M$ . Sea  $I = \{i : x_i \in X \cap M^*\}$  y  $J = \{j : y_j \in Y \cap M^*\}$ . Si  $I \cap J = \emptyset$ , entonces la 3-garra de orden  $n$  está en  $T$ . Si  $I \cap J \neq \emptyset$  elegimos a  $i \in I \cap J$ , es decir  $\exists u_i, v_i \in Y'$  tal que

$x_i \rightarrow u_i \in M^*$ ,  $y_i \rightarrow v_i \in M^*$  entonces si  $u_i \rightarrow v_i \in A(T)$  se tiene que una de las siguientes es trayectoria de  $T$

$$x \rightarrow x_i \rightarrow y_i \rightarrow u_i \rightarrow v_i \quad \text{ó} \quad x \rightarrow x_i \rightarrow u_i \rightarrow y_i \rightarrow v_i.$$

Si  $v_i \rightarrow u_i \in A(T)$  entonces  $x \rightarrow x_i \rightarrow y_i \rightarrow v_i \rightarrow u_i$  es una trayectoria de  $T$ . Esto se puede decir para cada  $i \in I \cap J$ . Si  $i \in I - J$  y  $x_i \rightarrow u_i \in M^*$ , entonces se tiene una de las siguientes trayectorias

$$x \rightarrow x_i \rightarrow y_i \rightarrow u_i \quad \text{ó} \quad x \rightarrow x_i \rightarrow u_i \rightarrow y_i.$$

Si  $j \in J - I$  y  $y_j \rightarrow u_j \in M^*$  entonces  $x \rightarrow x_j \rightarrow y_j \rightarrow u_j$  es una trayectoria. Para  $i \in \{1, 2, \dots, r\} - I \cup J$ ,  $x \rightarrow x_i \rightarrow y_i$  es una trayectoria para  $u \in A - X$ ,  $x \rightarrow u$  es una trayectoria, (Figura 2.12).

Sea

$$\begin{aligned} \alpha &= |I \cap J| \\ \beta &= |I| + |J| - 2|I \cap J| \\ \gamma &= |Y| - |Y'| + |I \cap J| \\ \delta &= |A - X|. \end{aligned}$$

Entonces podemos construir una garra  $C(L)$  en  $T$  con raíz  $x$  y

$$L = (\overbrace{4, 4, \dots, 4}^{\alpha}, \overbrace{3, 3, \dots, 3}^{\beta}, \overbrace{2, 2, \dots, 2}^{\gamma}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{\delta}).$$

Por lo que se tiene  $n = 1 + 4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta$ , así

$$n = 1 + 4s + t$$

donde  $0 \leq i < 4$  y

$$M = (\overbrace{4, 4, \dots, 4}^s, t)$$

entonces  $C(M)$  es la 4-garra de orden  $n$ . Luego  $C(M) \succ C(L)$ , así  $C(L)$  esta en  $T$  y por el Lema 2.21 se tiene que  $C(M)$  esta en  $T$ . Por lo que  $C(M)$  es  $n$ -inevitable para un  $T$  arbitrario, es decir, la 4-garra de orden  $n$  es  $n$ -inevitable con lo que se concluye la demostración del Teorema 2.24.  $\square$

**Demostración del Teorema 2.22.** Por el Teorema 2.24 y el Lema 2.21 toda garra de grado  $n/4$  es  $n$ -inevitable.  $\square$

## 2.5. Garras de grado menor o igual que $\frac{3}{8}n$ .

**Definición 2.29.** Sea  $D$  una digráfica decimos que es un **acoplamiento perfecto** si hay un acoplamiento que cubre a todos los vértices de  $D$ .

**Teorema 2.30.** Sea  $T$  un torneo de orden  $n$ ,  $x$  un vértice de  $T$  con exgrado máximo en  $T$ ,  $A = N_T^+(x)$  y  $B = N_T^-(x)$ . Entonces existen particiones

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad y \quad B = B_1 \cup B_2 \cup C$$

tal que

- $T$  tiene acoplamientos perfectos de  $A_1$  y  $B_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$ ,  $B_1$  y  $C$ , usando arcos de  $[A_1, B_1]$ ,  $[A_2, B_2]$  y  $[B_1, C]$  respectivamente.
- $|A_1 \cup A_2| = \tau(G)$ , el número de vértices que cubre a la gráfica bipartita  $G = (A, B; [A, B])$ .

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ , para  $n = 1$  es trivial (sólo se tiene la raíz), así que supongamos que  $T$  tiene orden  $n > 1$ . Elijamos a  $y \in B$  con  $|[y, A]|$  como el mínimo. Sean  $T' = T - y$  y  $G' = (A, B - \{y\}; [A, B - \{y\}])$ . Entonces  $x$  es un vértice de  $T'$  con exgrado máximo. Por hipótesis de inducción existen particiones

$$A = A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \quad y \quad B - \{y\} = B'_1 \cup B'_2 \cup C',$$

que satisfacen el Teorema. Luego se tienen 2 casos.

**Caso 1.** Si  $y \rightarrow t \in A(T) \quad \forall t \in A'_2 \cup A'_3$ .

Sea  $z \in B$  con exgrado máximo en el subtorneo  $T_*$  que se obtiene  $T$  restringido a  $B$ , luego

$$|T_*| \geq |B'_1 \cup C'| + 1, \quad |T_*| - 1 \geq |B'_1 \cup C'| = |B'_1| + |C'| = 2|B'_1|$$

entonces

$$d_{T_*}^+(z) \geq \frac{(|T_*| - 1)}{2} \geq |B'_1|$$

Así

$$\begin{aligned} d_T^+(z) &= d_{T_*}^+(z) + |[z, A]| + 1 \geq |A'_1| + |[y, A]| + 1 \\ &\geq |A'_1| + |A'_2 \cup A'_3| + 1 = d_T^+(x) + 1, \end{aligned}$$

(contradicción) pues  $x$  es el vértice de  $T$  con exgrado mayor.

**Caso 2.**  $\exists u \in A'_2 \cup A'_3$  tal que  $u \rightarrow y \in A(T)$ .

**Caso 2.1.** Si  $u \in A'_3$  entonces se tienen las siguientes particiones

$$A_1 = A'_1, \quad A_2 = A'_2 \cup \{u\}, \quad A_3 = A'_3 - \{u\}$$

$$B_1 = B'_1, \quad B_2 = \overset{y}{B'_2} \cup \{y\}, \quad C = C'$$

por demostrar que cumplen a) y b). Por hipótesis de inducción los siguientes son acoplamientos perfectos de  $T$

$$[A_1, B_1] = [A'_1, B'_1], \quad [A_2, B_2] = [A'_2, B'_2] \cup \{u \rightarrow y\} \quad \text{y} \quad [B_1, C] = [B'_1, C'].$$

Por lo que se cumple a).

Para b) se tiene que

$$|A'_1 \cup A'_2 \cup \{u\}| = \underbrace{|A'_1 \cup A'_2|}_{\tau(G')} + 1 = |A_1 \cup A_2| = \tau(G).$$

**Caso 2.2.** Si  $y \rightarrow t \in A(T) \quad \forall t \in A'_3$  y  $u \in A'_2$ .

Si  $\tau(G) = \tau(G')$  y sea  $v \in B'_2$  tal que existe el arco  $u \rightarrow v$ . Por otro lado si  $v \rightarrow y \in A(T)$  entonces se tienen las siguientes particiones

$$A_1 = A'_1 \cup \{u\}, \quad A_2 = A'_2 - \{u\}, \quad A_3 = A'_3$$

$$B_1 = B'_1 \cup \{v\}, \quad B_2 = \overset{y}{B'_2} - \{v\}, \quad C = C' \cup \{y\}.$$

Si existiera el arco  $y \rightarrow v \in A(T)$ , se cambia en las particiones anteriores los lugares de  $y$  y  $v$ .

Entonces supongamos que  $\tau(G) = \tau(G') + 1$ , digamos que

$$A'_1 \cup A'_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \quad \text{y} \quad B'_1 \cup B'_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$$

con  $u_i \rightarrow v_i \in A(T)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Entonces  $M = \{u_i \rightarrow v_i : 1 \leq i \leq r\}$  no es un acoplamiento máximo de  $G$ , luego existe una trayectoria aumentada de algún vértice  $w \in A'_3$  a  $y$ , digamos que

$$P = w \rightarrow v_1 \rightarrow u_1 \rightarrow v_2 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow u_k \rightarrow y$$

es tal trayectoria.

Sea

$$A^* = A'_1 \cup A'_2 \cup \{w\} \quad \text{y} \quad B^* = B'_1 \cup B'_2 \cup \{y\}.$$

Así  $A^*$  y  $B^*$  pueden ser el acoplados de la forma  $[A^*, B^*]$  via un acoplamiento  $M^*$  (extendido). Ahora sean

$$C = C', \quad B_1 = B'_1, \quad B_2 = B^* - B_1, \quad A_3 = A'_3 - \{w\}$$

y  $A_1, A_2$  subconjuntos de  $A^*$  acoplados con  $B_1$  y  $B_2$  bajo  $M^*$ , respectivamente. Lo que satisface a) y b).  $\square$

Algunas consecuencias del Teorema 2.30. Obsérvese que si  $T$  tiene 3 acoplamientos entonces toda garra de orden  $n$  y de grado  $d \leq \frac{1}{3}n$  es  $n$ -inevitable.

Sean

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad \text{y} \quad B = B_1 \cup B_2 \cup C$$

particiones dadas en el Teorema 2.30.

Donde

$$|A_1| = a, \quad |A_2| = b \quad \text{y} \quad |A_3| = c,$$

entonces

$$a + b + c \geq (n - 1)/2 \quad \text{y} \quad 3a + 2b + c = n - 1.$$

Esto implica que

$$a \leq c \quad \text{y} \quad 2a + b \leq (n - 1)/2.$$

Definamos a los conjuntos

$$L = (\overbrace{3, \dots, 3}^a, \overbrace{2, \dots, 2}^b, \overbrace{1, \dots, 1}^c)$$

$$K = (\overbrace{3, \dots, 3}^{\lceil (n-1)/4 \rceil}, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-1-3\lceil (n-1)/4 \rceil})$$

$$M = (\overbrace{3, \dots, 3}^{\lceil (n-1)/4 \rceil}, \overbrace{2, \dots, 2}^{\lfloor (n-1-3\lceil (n-1)/4 \rceil)/2 \rfloor}, x)$$

donde

$$x = \begin{cases} 0 & \text{si } n - 1 - 3\lceil (n - 1)/4 \rceil \text{ es par,} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando  $x = 0$  se ignora este término. Obsérvese que  $C(K), C(M) \succ C(L)$  entonces  $C(K)$  y  $C(M)$  son inevitables por el Lema 2.21. De ahí se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 2.31.** *Toda garra de grado  $d \leq (3/8)n$  es  $n$ -inevitable.*

Antes de empezar con la demostración los casos ha analizarse serán las garras descritas anteriormente tomando como base a  $C(M)$ . Primero enunciaremos el siguiente lema.

**Lema 2.32.** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  como se definieron anteriormente, con  $b \geq 1$ .  
Por lo tanto

$$a \leq (n-3)/4 \leq \lceil (n-1)/4 \rceil - 1.$$

**Demostración.** Tenemos que

$$2a + b \leq \frac{n-1}{2} \quad (2.12)$$

Por un lado partiendo de 2.12

$$a \leq \frac{n-1}{4} - \frac{b}{2},$$

luego si  $b = 1$

$$a \leq \frac{n-3}{4}. \quad (2.13)$$

Por otro lado de 2.12

$$\frac{2a+b}{2} < \frac{n-1}{4} + \frac{b}{2},$$

así

$$a < \frac{n-1}{4} < \lceil \frac{n-1}{4} \rceil - 1, \quad (2.14)$$

por lo tanto de 2.13 y 2.14

$$a \leq \frac{n-3}{4} \leq \lceil \frac{n-1}{4} \rceil - 1.$$

□

**Demostración del Teorema 2.31.**

**Caso 1.** Si  $x = 0$ .

Entonces cualquier garra  $C(D)$  con grado  $d \leq \frac{3}{8}n$  satisface que  $C(D) \succ C(M)$  pues de lo contrario; supongamos que  $C(D)$  no domina  $C(M)$  por lo que existe un  $t \geq i$  tal que

$$\sum_{i=1}^t l_i^D < \sum_{i=1}^t l_i^M$$

entonces

$$\sum_{i=1}^s l_i^D < \sum_{i=1}^s l_i^M, \quad \forall s \geq t$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{g(k)} l_i^D = n-1 < \sum_{i=1}^{g(k)} l_i^M \leq n-1$$

contradicción. Por lo tanto  $C(D) \succ C(M)$  y en este caso el teorema se cumple.

**Caso 2.** Si  $x = 1$ .

Obsérvese que este caso sucede si  $n - 1 - 3\lceil(n-1)/4\rceil$  es impar, por lo que analizaremos como debe de ser  $n$ , con respecto a las clases congruentes módulo 8. Sea  $m \in \mathbb{N}$

|          |                                |
|----------|--------------------------------|
| $n$      | $n - 1 - 3\lceil(n-1)/4\rceil$ |
| $8m$     | $2m - 1$                       |
| $8m + 1$ | $2m$                           |
| $8m + 2$ | $2m - 2$                       |
| $8m + 3$ | $2m - 1$                       |
| $8m + 4$ | $2m$                           |
| $8m + 5$ | $2m + 1$                       |
| $8m + 6$ | $2m - 1$                       |
| $8m + 7$ | $2m$                           |

luego  $n$  es de la forma  $8m$ ,  $8m + 3$ ,  $8m + 5$  ó  $8m + 6$ . Pero hay una única garra  $C(D)$  de grado  $d \leq \frac{3}{8}n$  que viola que  $C(D) \succ C(M)$ , donde

$$D = (\underbrace{3, \dots, 3}_{\lceil(n-1)/4\rceil - 1}, 2, \dots, 2),$$

se tiene que  $C(D) \succ C(L)$  y por el Lema 2.32  $a \leq \lceil \frac{n-1}{4} \rceil - 1$ . Luego  $C(D)$  es  $n$ -inevitable por el Lema 2.21. □

Cabe destacar que el caso general sigue abierto.

## 2.6. Árboles $k$ -arios.

De la sección 2.1 se sabe que todo torneo contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana lo cual es equivalente a que todo torneo contiene un árbol unario generador. El propósito de esta sección es estudiar el problema general, es decir, bajo qué condiciones un torneo contiene un árbol  $k$ -ario generador. En particular, se prueba que para cualquier entero positivo  $k$  existe un número mínimo  $h(k)$  tal que todo torneo de orden al menos  $h(k)$  contiene un árbol  $k$ -ario generador. En estos términos, la existencia de una trayectoria hamiltoniana en todo torneo implica que  $h(1) = 1$ ; se demuestra que  $h(2) = 4$  y  $h(3) = 8$ . Los valores exactos de  $h(k)$  para  $k \geq 4$ , aún son desconocidos. Obsérvese que en esta sección no se aborda propiamente el tema de inevitabilidad.

**Definiciones 2.33.**

- Un **árbol  $k$ -ario** es un árbol enraizado donde existe una única trayectoria dirigida de la raíz a cualquier otro vértice y todos los vértices que no son hojas tienen exactamente  $k$  hijos, excepto quizás uno de ellos con no más de  $k - 1$  hijos.
- Si todos los vértices que no son hojas tienen exactamente  $k$  hijos, entonces se llama **árbol  $k$ -ario lleno**.
- Cuando  $k = 1, 2, 3$ , los correspondientes árboles  $k$ -arios son llamados **unario, binario y ternario**, respectivamente.

Notemos que un árbol  $k$ -ario de orden  $km + 1$  es un árbol  $k$ -ario lleno. En particular un árbol unario es lleno. La **profundidad** de un vértice es la longitud de la única trayectoria de la raíz a él y el **peso** de un árbol es el máximo de las longitudes de las trayectorias dirigidas que parten de la raíz a cualquier otro vértice. Una **estrella** es un árbol enraizado de peso 1. Una  **$k$ -estrella** es una estrella con  $k$ -vértices.

Definiremos a  $h(k)$  como el menor número tal que todo torneo  $T$  de orden  $n$  contiene un árbol  $k$ -ario generador si  $n \geq h(k)$ .

**Definición 2.34.** Un torneo es **transitivo** si  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$  implica que  $x \rightarrow z$ .

Dado un entero positivo  $m$  y un torneo  $T$  de orden  $n$ , Erdős [14] probó el siguiente resultado que concierne al número de vértices disjuntos que tiene los subtorneos transitivos de orden  $m$ .

**Teorema 2.35.** Para todo  $m$  entero positivo fijo, existe un número  $f(m)$  tal que si  $n \geq f(m)$  entonces todo torneo de orden  $n$  contiene  $\lfloor n/m \rfloor$  subtorneos transitivos de orden  $m$  disjuntos en vértices.

Sumner [4] conjeturó que todo árbol de orden  $n$  es  $(2n - 2)$ -inevitable. Relativo a esta conjetura Häggkvist y Thomason [4] probaron el siguiente resultado.

**Teorema 2.36.** Todo árbol dirigido de orden  $n$  es  $(12n)$ -inevitable.

**Lema 2.37.** (**Lema de Extensión**). Para todo  $k$  entero positivo fijo, existe un número  $g(k) \leq 2(k + 1)^{k-2}$  tal que, para todo  $R$  árbol  $k$ -ario lleno de orden al menos  $g(k)$  y  $S$  cualquier subtorneo transitivo de orden  $s \leq k$ , donde  $R$  y  $S$  tienen vértices disjuntos, se tiene que  $R$  puede ser extendido a un árbol  $k$ -ario  $R'$  con  $V(R') = V(R) \cup V(S)$ . (Nótese que, si  $s = k$ , entonces  $R'$  es lleno).

Dado que la demostración del Teorema 2.37 es un poco complicada la dejaremos para el final. Recordemos que dado un torneo  $T = (V, E)$  de orden  $n$ ,  $A \subseteq V$  y  $B \subseteq V$  denotaremos como  $[A, B] = \{x \rightarrow y \in E : x \in A \text{ y } y \in B\}$ .  $A \Rightarrow B$  denota que de todo vértice de  $A$  sale un arco a todo vértice de  $B$ ;  $x \Rightarrow B$  denota a  $\{x\} \Rightarrow B$  y  $A \Rightarrow y$  denota  $A \Rightarrow \{y\}$ .

**Lema 2.38.** *Sea  $R$  un árbol  $k$ -ario de  $T$  y  $S$  una  $k$ -estrella de  $T$  con raíz  $u$ , donde  $R$  y  $S$  tienen vértices disjuntos. Si  $|[u, V(R)]| \geq 1$ , entonces  $T$  contiene un árbol  $k$ -ario  $R'$  con  $V(R') = V(R) \cup V(S)$ . Más aún, si  $u$  es un exvecino de la raíz de  $R$ , entonces  $R'$  puede ser elegido de tal manera que tenga la misma raíz que  $R$ .*

**Demostración.** Sea  $v$  raíz de  $R$ .

**Caso 1.** Existe  $u \rightarrow v$ .

Entonces  $E(R) \cup E(S) \cup \{u \rightarrow v\}$  induce un árbol  $k$ -ario.

**Caso 2.** No se tiene al arco  $u \rightarrow v$ .

Como  $|[u, V(R)]| \geq 1$ , entonces existe un vértice  $x$  tal que  $u \rightarrow x$ . Sea  $P$  la trayectoria de  $R$  de  $v$  a  $x$  y  $y$  el primer vértice de  $P$  tal que  $u \rightarrow y$ . Denotemos  $p(y)$  como el padre de  $y$ .

Luego  $p(y) \rightarrow u$  y así  $(E(R) - \{p(y) \rightarrow y\}) \cup E(S) \cup \{p(y) \rightarrow u, u \rightarrow y\}$  induce un árbol  $k$ -ario. □

Nótese que la demostración es válida si  $R$  es un árbol  $k$ -ario lleno y  $S$  una  $s$ -estrella de  $T$  con  $s \leq k$ . Un resultado fundamental es el siguiente teorema el cual nos garantiza la existencia de un árbol  $k$ -ario generador en un torneo.

**Teorema 2.39.** *Para cualquier  $k$  entero positivo, existe un número  $h'(k)$  tal que todo torneo  $T$  de orden  $n$  contiene un árbol  $k$ -ario generador si  $n \geq h'(k)$ .*

**Demostración.** Sea  $h'(k) = (g(k) + k) + \max\{f(k) + k, 12(g(k) + k)\} + k$ , donde  $f(k)$  y  $g(k)$  cumplen con el Teorema 2.35 y el Lema 2.37 respectivamente. Para  $n \geq h'(k)$ , sea

$$a = \lceil (g(k) - 1)/k \rceil, \quad b = \lfloor (n - 2)/k \rfloor - a \quad \text{y} \quad c = n - (ak + 1) - bk.$$

Entonces

$$ak + 1 \geq g(k), \quad bk \geq f(k), \quad 1 \leq c \leq k, \\ n = (ak + 1) + bk + c \quad \text{y} \quad n - c \geq 12(ak + 1).$$

Primero se elige  $Q \subset T$  un subtorneo transitivo de orden  $c$ . Nótese que la existencia de  $Q$  se sigue del Teorema 2.35. Luego  $n - c \geq 12(ak + 1)$  y por

el Teorema 2.36  $T - Q$  contiene todos los árboles dirigidos de orden  $ak + 1$ , especialmente a  $R$  árbol  $k$ -ario lleno de orden  $ak + 1$ . Entonces  $bk \geq f(k)$  por el Teorema 2.35 el subtorneo  $T - R - Q$  contiene  $b$  subtorneos transitivos de orden  $k$  con vértices disjuntos, es decir,  $S_1, S_2, \dots, S_b$ . Entonces  $R$  tiene al menos  $g(k)$  vértices, por el Lemma 2.37,  $R$  puede ser extendido a un árbol  $k$ -ario lleno  $R_1$  con  $V(R_1) = V(R) \cup V(S_1)$ . Por el mismo lema se puede extender a  $R_1$  a un árbol  $k$ -ario lleno  $R_2$  con  $V(R_2) = V(R_1) \cup V(S_2)$ . Continuando este proceso, se obtiene finalmente un árbol  $k$ -ario lleno  $R_b$  con  $V(R_b) = V(R) \cup V(S_1) \cup \dots \cup V(S_b)$ . Luego por el Lema 2.37 con  $R_b$  y  $Q$  se obtiene un árbol  $k$ -ario generador de  $T$ .  $\square$

### 2.6.1. Árboles binarios.

El propósito de esta parte es determinar  $h(2)$ . Por lo que comenzaremos con un resultado principal.

**Teorema 2.40.** *Todo torneo  $T$  de orden  $n \geq 4$  contiene un árbol binario generador.*

Recordemos a  $T^c(3)$  como el torneo de orden 3 definido en la Sección 2.2. con  $V(T^c(3)) = \{1, 2, 3\}$  y  $E(T) = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}$ . Por lo que  $T^c(3)$  no contiene un árbol binario generador. El teorema anterior implica que  $h(2) = 4$ . Antes de probar el Teorema 2.40 estableceremos los siguientes lemas.

**Lema 2.41.** *Si todo todo torneo de orden  $(km+1)$  contiene un árbol  $k$ -ario generador, entonces todo torneo de orden  $km$  lo contiene.*

**Demostración.** Supongamos que  $T$  es un torneo de orden  $km$ . Entonces se construye un torneo  $T'$  de orden  $km + 1$  a partir de  $T$  pero adhiriendo un nuevo vértice  $w$  tal que  $V(T) \Rightarrow w$ . Si  $R'$  es un árbol  $k$ -ario generador de  $T'$ , entonces  $R = R' - w$  es un árbol  $k$ -ario generador de  $T$ .  $\square$

Denotemos a un subtorneo transitivo de orden 3 como  $(u, v, w)$  tal que  $u \rightarrow v$ ,  $u \rightarrow w$  y  $v \rightarrow w$ .

**Observación.** Cualquier torneo de orden al menos 4 contiene un torneo transitivo de orden 3.

**Lema 2.42.** *Todo torneo de orden 5 contiene un árbol binario generador.*

La siguiente demostración es constructiva por lo que es fácil de entender.

**Demostración.** Sea  $x$  un vértice de  $T$  con exgrado máximo y  $T'$  el subtorneo inducido por  $N_T^+(x)$ . Por lo que se consideran los siguientes casos.

**Caso 1.**  $d_T^+(x) = 4$ .

Luego por la observación,  $T'$  contiene un torneo transitivo de orden 3 dado por  $(u, v, w)$ . Sea  $y$  el vértice restante de  $N_T^+(x)$ . Entonces se tiene que  $\{x \rightarrow y, x \rightarrow u, u \rightarrow v, u \rightarrow w\}$  induce un árbol binario generador.

**Caso 2.**  $d_T^+(x) = 3$ .

Supongamos que  $N_T^+(x) = \{u, v, w\}$  y  $N_T^-(x) = \{t\}$ . Si  $||[t, \{u, v, w\}]|| \geq 1$  y  $t \rightarrow u$ , entonces  $\{t \rightarrow u, t \rightarrow x, x \rightarrow v, x \rightarrow w\}$  induce un árbol binario generador. Ahora asumamos que  $\{u, v, w\} \Rightarrow t$ , sin pérdida de generalidad, digamos que  $u \rightarrow v$ , entonces  $\{x \rightarrow w, x \rightarrow u, u \rightarrow v, u \rightarrow t\}$  induce un árbol binario generador.

**Caso 3.**  $d_T^+(x) = 2$ .

Se tiene que  $T$  es un torneo regular, digamos que  $N_T^+ = \{u, v\}$  y  $N_T^- = \{s, t\}$  con  $s \rightarrow t$ , entonces  $\{s \rightarrow t, s \rightarrow x, x \rightarrow u, x \rightarrow v\}$  induce un árbol binario generador.  $\square$

**Demostración del Teorema 2.40.** Por inducción sobre  $m$ . Por el Lema 2.41, solo se necesita probar el teorema para  $n = 2m + 1 \geq 5$ . Para  $m = 2$  se probó en el Lema 2.42. Por lo que asumiremos que se cumple para valores mayores a 3 y menores a  $m$ . Sea  $x$  el vértice con exgrado máximo de  $T$  y  $y$  uno de los exvecinos de  $x$ . Nótese que  $d_T^+(x) \geq 2$ . El torneo  $T - \{x, y\}$  tiene orden  $2(m - 1) + 1$ . Luego por hipótesis de inducción contiene un árbol binario generador  $R$ . Por la elección de  $x$ , se tiene  $||[x, V(R)]|| \geq 1$  y por el Lema 2.38 el torneo  $T$  contiene un árbol binario generador.  $\square$

### 2.6.2. Árboles ternarios.

En esta parte se demuestra el valor de  $h(3)$ .

**Teorema 2.43.** *Todo torneo  $T$  de orden  $n \geq 8$  contiene un árbol ternario generador.*

De la Sección 2.2 recordemos a  $T^c(7)$  como el torneo de orden 7 con  $V(T^c(7)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $E(T^c(7)) = \{i \rightarrow j : i - j \equiv 1, 2 \text{ ó } 4 \pmod{7}\}$ . Este torneo fue uno de los casos especiales, no contiene una trayectoria hamiltoniana antidirigida. Es muy fácil verificar que tampoco contiene un árbol ternario generador. Por lo tanto  $h(3) \geq 8$  y el Teorema 2.43 implica que  $h(3) = 8$ , antes de probar tal teorema necesitaremos algunos lemas.

**Lema 2.44.** *Cualquier torneo  $T$  no regular de orden 7 contiene un árbol ternario generador.*

**Demostración.** Sea  $u$  un vértice de  $T$  con exgrado máximo y  $T'$  el subtorneo de  $T$  inducido por  $N_T^+(u)$ . Obsérvese  $3 \leq d_T^+ \leq 6$ . Por lo que consideraremos los siguientes 4 casos.

**Caso 1.**  $d_T^+(u) = 6$ .

Sea  $v$  un vértice de  $T'$  con máximo exgrado, entonces  $d_{T'}^+(v) \geq 3$ . Digamos que  $v \Rightarrow \{x, y, z\}$  y que los vértices restantes de  $T'$  son  $s$  y  $t$ . Luego  $\{u \rightarrow s, u \rightarrow t, u \rightarrow v, v \rightarrow x, v \rightarrow y, v \rightarrow z\}$  induce un árbol ternario generador.

**Caso 2.**  $d_T^+(u) = 5$ .

Asumamos que  $N_T^+(u) = \{s, t, x, y, z\}$  y  $N_T^-(u) = \{v\}$ . Si  $|[v, N_T^+(u)]| \geq 2$  digamos que  $v \Rightarrow \{s, t\}$ , entonces  $\{v \rightarrow s, v \rightarrow t, v \rightarrow u, u \rightarrow x, u \rightarrow y, u \rightarrow z\}$  induce un árbol ternario generador. Por lo tanto asumiremos que  $\{s, t, x, y\} \Rightarrow v$ . En el subtorneo inducido por  $\{s, t, x, y\}$  hay un torneo transitivo de orden 3, digamos que es  $(t, x, y)$ . Entonces  $\{u \rightarrow z, u \rightarrow s, u \rightarrow t, t \rightarrow x, t \rightarrow y, t \rightarrow v\}$  induce un árbol ternario generador.

**Caso 3.**  $d_T^+(u) = 4$ .

Digamos que  $N_T^+(u) = \{v, x, y, z\}$  y  $N_T^-(u) = \{s, t\}$  con  $s \rightarrow t$ . Si  $|[s, \{v, x, y, z\}]| \geq 1$  y  $s \rightarrow v$ , entonces  $\{s \rightarrow t, s \rightarrow v, s \rightarrow u, u \rightarrow x, u \rightarrow y, u \rightarrow z\}$  induce un árbol ternario generador. Asumamos que  $\{v, x, y, z\} \Rightarrow s$ . Si  $|[\{v, x, y, z\}, t]| \geq 2$ , digamos que  $\{v, x\} \Rightarrow t$  con  $v \rightarrow x$ , entonces  $\{u \rightarrow y, u \rightarrow z, u \rightarrow v, v \rightarrow x, v \rightarrow s, v \rightarrow t\}$ , induce un árbol ternario generador. Por lo que asumiremos que  $|[\{v, x, y, z\}, t]| \leq 1$ .

Como  $d_T^+(t) \leq d_T^+(u)$ , se tiene que  $|[\{v, x, y, z\}, t]| \geq 1$ , por lo que  $|[\{v, x, y, z\}, t]| = 1$ . Digamos  $v \rightarrow t$ . Si  $|[v, \{x, y, z\}]| \geq 1$  y digamos que  $v \rightarrow x$ , entonces  $\{u \rightarrow y, u \rightarrow z, u \rightarrow v, v \rightarrow x, v \rightarrow s, v \rightarrow t\}$  induce un árbol ternario generador. Asumiremos que  $\{x, y, z\} \Rightarrow v$ . Sin pérdida de generalidad digamos que  $y \rightarrow x$ . Entonces  $\{t \rightarrow u, t \rightarrow z, t \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow v, y \rightarrow s\}$  induce un árbol ternario generador.

**Caso 4.**  $d_T^+(u) = 3$ .

En este caso el torneo  $T$  es regular por lo tanto no contiene un árbol ternario generador.  $\square$

Sea  $H$  una subgráfica y  $x$  un vértice que no esta en  $H$ . El vértice  $x$  se dice que es un **vértice bueno con respecto a  $H$** , si  $x \Rightarrow V(H)$ . Sea  $R$  un árbol sin vértices en común con  $H$ . Un vértice  $x$  de  $R$  es **bueno minimal** con respecto a  $H$ , si  $x$  es bueno pero ninguno de sus descendientes en  $R$  es bueno, con respecto a  $H$ .

El siguiente lema es útil para probar que todo torneo de orden 10 contiene un árbol ternario generador y se usa para el paso inductivo en el caso ternario. La técnica de la demostración, también se utiliza en el Lema 2.37.

**Lema 2.45.** *Sea  $(x, y, z)$  un torneo transitivo de orden 3 en un torneo  $T$ . Si  $R$  es un árbol ternario lleno en  $T - \{x, y, z\}$  con raíz  $g$  tal que  $g$  es un bueno minimal con respecto a  $\{x, y, z\}$ , entonces  $R$  puede ser extendido a un árbol ternario  $R'$  con raíz  $g$  y vértices  $V(R) \cup \{x, y, z\}$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $||[x, V(R)]|| \geq 1$ . Por el Lema 2.38 el árbol  $R'$  existe. Por lo tanto asumiremos que  $||[x, V(R)]|| = 0$ , es decir,  $V(R) \Rightarrow x$ . Supongamos que  $||[y, V(R)]|| \geq 2$ . Elegimos un vértice  $u \in R$  con menor profundidad tal que  $y \rightarrow u$  y a otro vértice  $v$  de  $R$  tal que  $y \rightarrow v$ . Luego  $y \rightarrow u$  y  $g \rightarrow y$ , por hipótesis  $u \neq g$ . Nótese que  $p(u) \rightarrow y$  por como se eligió a  $u$ . Entonces,

$$(E(R) - \{p(u) \rightarrow u, p(v) \rightarrow v\}) \cup \{y \rightarrow u, y \rightarrow v, y \rightarrow z, p(u) \rightarrow y, p(v) \rightarrow x\}$$

induce un árbol ternario generador. Por lo tanto asumiremos lo siguiente  $||[y, V(R)]|| \leq 1$ .

Supongamos que  $||[z, V(R)]|| \geq 5$ . Entonces elijamos a 5 vértices distintos  $u, v_1, v_2, v_3, v_4$  tal que  $z \Rightarrow \{u, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Notemos que  $u$  no es la raíz  $g$  de  $R$  entonces  $z \rightarrow u$  pero  $g \rightarrow z$ . Asumiremos que  $u$  es el vértice con menor profundidad tal que  $z \rightarrow u$  y también  $p(u) \rightarrow z$ . Entonces un vértice de  $R$  tiene a lo más 3 hijos  $\{p(v_1), p(v_2), p(v_3), p(v_4)\}$  contiene al menos 2 vértices distintos, donde uno de ellos no debe ser exvecino de  $y$ , digamos  $p(v_2) \rightarrow y$ . Entonces

$$(E(R) - \{p(u) \rightarrow u, p(v_1) \rightarrow v_1, p(v_2) \rightarrow v_2\}) \cup \{z \rightarrow u, z \rightarrow v_1, z \rightarrow v_2, p(u) \rightarrow z, p(v_1) \rightarrow x, p(v_2) \rightarrow y\},$$

induce un árbol ternario generador. Por lo tanto asumiremos lo siguiente  $||[z, V(R)]|| \leq 4$ .

Note que, para que  $R$  sea un árbol ternario lleno debe de tener orden  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Si  $R$  tiene al menos 7 vértices, entonces hay un vértice  $u \neq g$  en  $R$  que es invecino de  $\{x, y, z\}$ , contradicción pues  $g$  es un vértice bueno minimal.

En el caso en que  $R$  tenga 4 vértices, sean  $u, v$  y  $w$  hijos de  $g$ . Entonces  $g \Rightarrow \{u, v, w, x, y, z\}$ . Luego el subtorneo inducido por  $\{u, v, w, x, y, z\}$  tiene un vértice  $t$  de exgrado al menos 3 y podemos encontrar un árbol ternario generador donde  $t$  es el otro vértice que no es hoja.

El caso en que  $R$  sólo tiene un vértice, se tiene al árbol ternario generador inducido por  $g \Rightarrow \{x, y, z\}$ .

□

**Lema 2.46.** *Todo torneo  $T$  de orden 10 contiene un árbol ternario generador.*

**Demostración.** Un torneo transitivo de orden 3  $(u, v, w)$  es llamado un **torneo casi-transitivo** de orden 3, si  $u, v$  y  $w$  tienen un invecino en común en  $T$  y  $T - \{u, v, w\}$  no es regular. Como  $T - \{u, v, w\}$  no es regular, por el Lema 2.43 contiene a  $R$  un árbol  $k$ -ario generador. Entonces  $u, v$  y  $w$  tienen un invecino en común, por lo que podemos elegir un vértice  $x$  en  $R$  que sea bueno minimal con respecto a  $\{u, v, w\}$ . Sea  $R_1$  el subárbol de  $R$  inducido por  $x$  y sus descendientes. Por el Lema 2.45  $R_1$  puede ser extendido a un árbol ternario  $R'_1$  con raíz  $x$  y vértices en el conjunto  $V(R_1) \cup \{u, v, w\}$ . Sea  $R'$  el árbol obtenido de  $R$  pero reemplazando  $R_1$  por  $R'_1$ . Entonces  $R'$  es el árbol ternario de  $T$ . Por lo tanto la existencia de un torneo casi-transitivo de orden 3 implica la existencia de un árbol ternario generador.

Si  $T$  tiene un vértice  $x$  con exgrado en el conjunto  $\{4, 5, 7, 8, 9\}$ , entonces  $x$  tiene un exvecino  $u$  con 2 exvecinos  $v$  y  $w$ , los cuales también están en  $N_T^+(x)$ . Sin pérdida de generalidad, asumiremos que  $v \rightarrow w$ . Como  $x$  tiene exgrado que difiere de 3 en  $T - \{u, v, w\}$ , luego se tiene que  $(u, v, w)$  es un torneo casi-transitivo de orden 3. Entonces asumiremos que para cualquier vértice  $u \in V(T)$ ,  $d_T^+(u) \in \{0, 1, 2, 3, 6\}$ . Como la suma de los exgrados de todos vértices de  $T$  es 45, existen 2 vértices  $u$  y  $v$  de exgrado 6 tal que  $u \rightarrow v$ . Sea  $x$  y  $y$  dos exvecinos de  $u$  que difieren de  $v$ . Entonces  $T - \{u, x, y\}$  es un torneo de orden 7 en el cual  $v$  tiene exgrado al menos 4. Luego  $T - \{u, x, y\}$  no es regular. Por el Lema 2.44  $T - \{u, x, y\}$  tiene un árbol ternario generador y por el Lema 2.38  $T$  tiene un árbol ternario generador.

□

**Lema 2.47.** *Todo torneo  $T$  de orden 9 contiene un árbol ternario generador.*

La demostración se sigue inmediatamente del Lema 2.41 y 2.46.

**Lema 2.48.** *Todo torneo  $T$  de orden 8 contiene un árbol ternario generador.*

**Demostración.** Elijamos un vértice  $x$  en  $T$  con exgrado diferente de 4. Si  $d_T^+(x) \neq 0$ , entonces  $T - u$  no es regular para cualquier  $u \in N_T^+(x)$ . Si  $d_T^+(x) = 0$ , entonces  $T - u$  no es regular para  $u \neq x$ . En otro caso, podemos encontrar un vértice  $u$  tal que  $T - u$  no es regular. Por el Lema 2.44  $T - u$  tiene un árbol ternario generador, luego se puede extender fácilmente a un árbol ternario generador de  $T$ .

□

**Demostración del Teorema 2.43.** En los Lemas 2.48, 2.47 y 2.46, se probaron los casos para  $n = 8, 9$  y  $10$ . Supongamos que  $n \geq 11$  y que el teorema se cumple para  $n' < n$ . Primero elegiremos un vértice  $u$  de exgrado al menos 3 no es difícil ver que hay un torneo transitivo de orden 3  $(u, v, w)$  tal que  $u$  tiene un exvecino en  $T' = T - \{u, v, w\}$ . Por hipótesis de inducción  $T'$  tiene un árbol ternario generador, luego por el Lema 2.38  $T$  tiene un árbol ternario generador. □

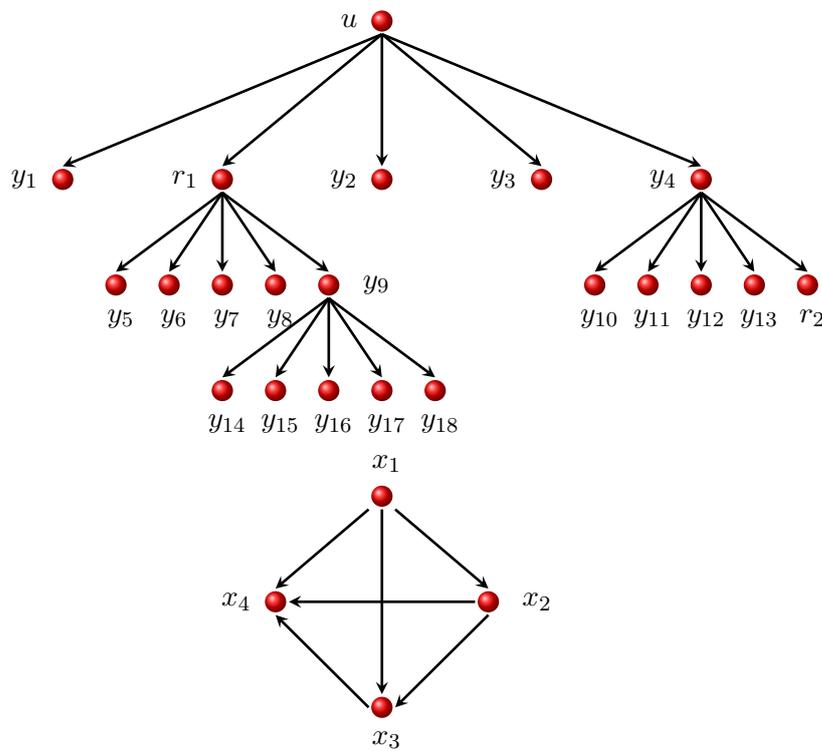


Figura 2.13.

Sea  $R$  un árbol  $k$ -ario lleno de  $T$  con raíz  $u$  y  $S$  un subtorneo transitivo de  $T$  de orden  $s \leq k$ , donde  $R$  y  $S$  tienen vértices disjuntos. Escribiremos  $V(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  tal que  $x_i \rightarrow x_j$ , siempre que  $i < j$ . El conjunto  $A_i = N_T^+(x_i) \cap V(R)$  y  $B_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i$  para todo  $1 \leq i \leq s$ . Por conveniencia  $B_0 = \emptyset$ .

**Lema 2.49.** Si  $|B_i - B_{i-1}| \geq |B_{i-1}|k + i$ , para algún  $i$ , entonces  $R$  puede extenderse para cubrir a  $S$ . Es decir, existe un árbol  $k$ -ario con vértices en  $V(R) \cup V(S)$ .

**Demostración.** Nótese que  $A_i \geq |B_i - B_{i+1}| \geq |B_{i-1}|k + i \geq 1$ . Si  $u \rightarrow x_i$ , sea  $y_i$  un vértice en  $R$  tal que  $x_i \rightarrow y_i$  y  $p(y_i) \rightarrow x_i$  (tal vértice existe); si  $x_i \rightarrow u$ , sea  $y_i = u$ . Obsérvese que se sigue de la desigualdad y el hecho de que el conjunto  $B_{i-1}$  tiene a lo más  $|B_{i-1}|k$  hijos, donde  $A_i$  tiene  $i - 1$  vértices  $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$  distintos de  $y_i$ ; cuyos padres no están en  $B_{i-1}$ , es decir,  $x_i \Rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}\}$  y  $\{p(y_1), \dots, p(y_{i-1})\} \Rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ . Para hacer más claro el entendimiento de esta demostración lo ilustraremos con el siguiente ejemplo dado un árbol  $R$  5-ario lleno de orden 21 y  $S$  un torneo transitivo de orden 4 (Figura 2.13).

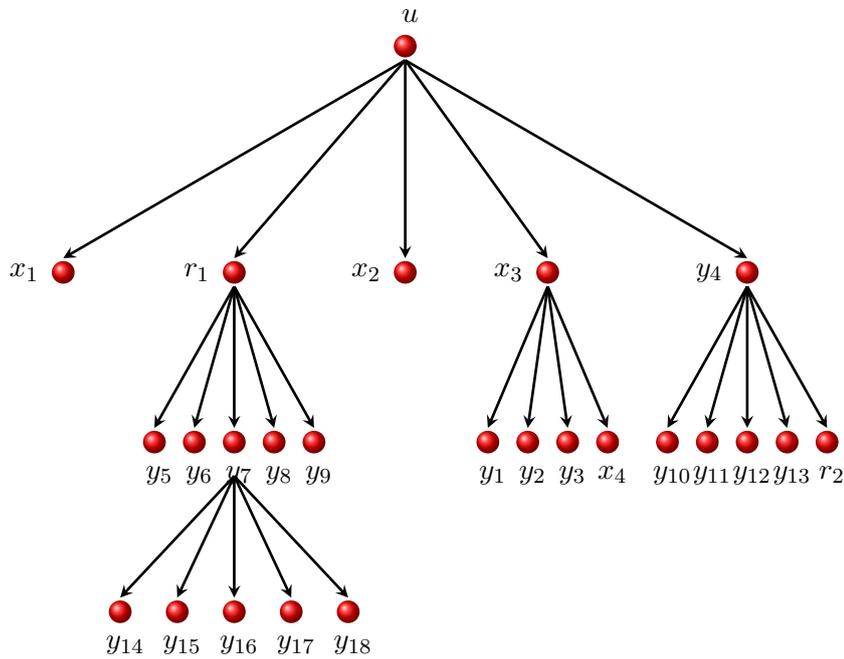


Figura 2.14. Formación del árbol 5-ario con vértices en  $V(R) \cup V(S)$ , cuando se tiene el arco  $u \rightarrow x_3$ .

Luego si  $u \rightarrow x_i$ , entonces

$$(E(R) - \{p(y_j) \rightarrow y_j : 1 \leq j \leq i\}) \cup \{p(y_j) \rightarrow x_j, x_i \rightarrow y_j : 1 \leq j \leq i\} \cup \{x_i \rightarrow x_{i+1}, x_i \rightarrow x_{i+2}, \dots, x_i \rightarrow x_s\},$$

determinan un árbol  $k$ -ario con vértices en  $V(R) \cup V(S)$  (Figura 2.14).

Y si  $x_i \rightarrow u$ , entonces

$$\begin{aligned}
& ( E(R) - \{p(y_j) \rightarrow y_j : 1 \leq j < i - 1\} ) \\
& \cup \{p(y_j) \rightarrow x_j, x_i \rightarrow y_j : 1 \leq j \leq i - 1\} \\
& \cup \{x_i \rightarrow u, x_i \rightarrow x_{i+1}, x_i \rightarrow x_{i+2}, \dots, x_i \rightarrow x_s\}
\end{aligned}$$

determina un árbol  $k$ -ario con vértices en el conjunto  $V(R) \cup V(S)$  (Figura 2.15).

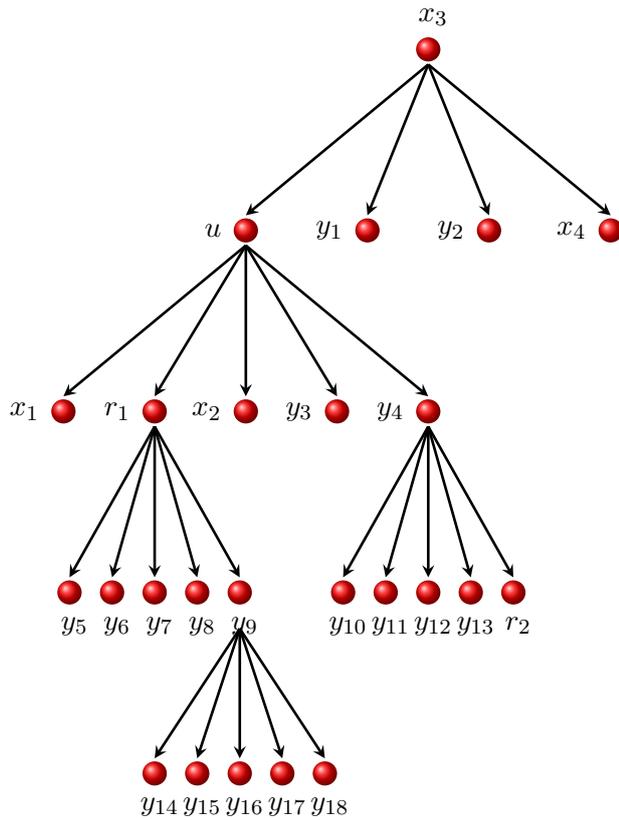


Figura 2.15. Formación del árbol 5-ario con vértices en  $V(R) \cup V(S)$ , cuando se tiene el arco  $x_3 \rightarrow u$ .

□

**Lema 2.50.** Si hay una hoja  $y \in V(R) - B_s$ , entonces  $R$  puede extenderse para cubrir a  $S$ .

**Demostración.** En este caso  $y \Rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ . Entonces  $E(R) \cup [y, V(S)]$  inducen un árbol generador. □

**Demostración del Lema 2.37.** Supongamos que no existe un árbol  $k$ -ario generador con vértices en el conjunto  $V(R) \cup V(S)$ . Entonces por el

Lema 2.49,  $|B_i - B_{i-1}| \leq |B_{i-1}|k + i - 1$ , así  $|B_i| \leq |B_{i-1}|(k + 1) + i - 1$  para  $1 \leq i \leq s$ . Claro  $|B_0| = 0$  y por inducción se tiene que

$$|B_s| \leq \sum_{i=1}^{s-1} i(k+1)^{s-1-i} < 2(k+1)^{k-2}.$$

Luego si  $R$  tiene al menos  $2(k+1)^{k-2}$  vértices, se puede encontrar una hoja  $y$  en  $V(R) - B_s$  y por el Lema 2.50, se completa la demostración.  $\square$



## Capítulo 3

# Conjetura de Sumner

---

En 1971 Sumner conjeturó:

**Todo árbol dirigido con  $n \geq 2$  vértices es  $(2n - 2)$ -inevitable.**

Dicha conjetura fue verificada en 1983 por Reid y Wormald [13] para torneos casi regulares, pero el caso general de la conjetura permanece abierto. Así, queda establecido el siguiente problema extremal: encontrar el entero más pequeño  $f(n)$  tal que todo árbol dirigido de orden  $n$  es  $f(n)$ -inevitable. Sumner conjeturó que  $f(n) = (2n - 2)$ .

Hasta la fecha, se han obtenido cotas que cada vez se aproximan más a tal límite. En 1982 Wormald [18] demostró que  $f(n) \leq n \lg_2(\frac{2n}{e})$ .

El primer límite lineal  $f(n) \leq 12n$  fue dado en 1991 por Häggkvist y Thomason [4], quienes también determinaron un límite asintótico, a saber:  $f(n) \leq (4 + o(1))n$ . En [4] se utilizó un método basado en la noción de  $k$ -corazón de un árbol, utilizado nuevamente en el 2002 por Havet [6] para reducir la cota a  $f(n) \leq 7.6 n$ . Anteriormente, en el 2000 Havet y Thomassé [7] llegaron a que  $f(n) \leq 4n - 6$ . En ese trabajo, usando un argumento técnico complicado, concluyeron que  $f(n) \leq (7n - 5)/2$ . También confirmaron la conjetura de Sumner para arborescencias, establecieron estos resultados usando órdenes promedio.

En este capítulo abordaremos con detalle el trabajo desarrollado por El Sahili [15] en el 2004 donde demuestra que  $f(n) \leq 3n - 3$ . Además, extendemos la familia de árboles  $(2n - 2)$ -encajables originalmente propuesta en [15]. Al igual que en [7], va a ser relevante el uso de órdenes promedio.

### 3.1. Órdenes Promedio.

**Definición 3.1.** *Un orden promedio de una digráfica  $D = (V, E)$  es un orden lineal  $M = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $V$  que maximiza  $|E_M|$  donde  $E_M = \{v_i \rightarrow v_j \in E : i < j\}$ .*

Observe que en estos términos, todo orden lineal de  $V$  determina una partición de los arcos de  $D$  en **arcos hacia adelante** y **arcos hacia atrás** y que justamente un orden promedio de  $D$  es aquel que maximiza el número de arcos hacia adelante en  $D$ .

La siguiente proposición es de suma importancia porque nos brinda importantes propiedades de los intervalos en un orden promedio.

**Proposición 3.2.** *Si  $M := (v_1, v_2, \dots, v_n)$  es un orden promedio de  $D$ , entonces:*

1. *Todo intervalo  $I := [v_{i+1}, v_j]$  de  $M$  es un orden promedio de  $D[v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j]$ .*
2. *Para todo intervalo  $I := [v_{i+1}, v_j]$  de  $M$ ,  $|N^+(v_i) \cap I| \geq |N^-(v_i) \cap I|$ .*

**Demostración.** Sea  $M$  un orden promedio de  $D$  e  $I := [v_{i+1}, v_j]$  un intervalo de  $M$ .

Parte (1). Si  $M$  maximiza  $|E_M|$  entonces debe maximizar el número de arcos hacia adelante con vértices en  $I$  es decir,  $M$  es un orden promedio de  $D[v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j]$ .

Parte (2). Supongamos que  $|N^+(v_i) \cap I| < |N^-(v_i) \cap I|$  entonces  $M' = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j, v_i, \dots, v_n)$  induce un número mayor de arcos hacia adelante que  $M$  (contradicción).  $\square$

El siguiente resultado muestra que el teorema de Redei expuesto en la Sección 2.1 es una consecuencia directa de la existencia de un orden promedio.

**Proposición 3.3.** *Sea  $T$  torneo de orden  $n$  y  $M = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  un orden promedio de  $T$ . Entonces  $M$  induce la trayectoria dirigida hamiltoniana  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  en  $T$ .*

**Demostración.** Supongamos que no se tiene tal trayectoria dirigida hamiltoniana, entonces existe al menos un arco  $v_i \leftarrow v_{i+1}$  y el orden  $M' = (v_1, v_2, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n)$  induce más arcos hacia adelante que  $M$  (contradicción).  $\square$

**Definiciones 3.4.** *Sean  $A, D$  digráficas y sea  $M := (v_1, v_2, \dots, v_n)$  un orden promedio de  $D$ .*

- *Un **encaje** de  $A$  en  $D$  es una inyección  $f : V(A) \rightarrow V(D)$  tal que  $f(v_i) \rightarrow f(v_j) \in E(D)$ , siempre que  $v_i \rightarrow v_j \in E(A)$ .*

- Una  $M$ -encaje de  $A$  en  $D$  es un encaje  $f$  de  $A$  en  $D$  tal que para toda sección final  $I := [v_{i+1}, v_n]$  de  $M$ ,

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I| + 1.$$

**Proposición 3.5.** Sea  $T$  un torneo con al menos 3 vértices y  $M := (v_1, \dots, v_n)$  un orden promedio de  $T$ . Definamos  $T' = T[v_1, v_2, \dots, v_{n-2}]$  y  $M' := (v_1, \dots, v_{n-2})$ . Sea  $A$  una digráfica y  $y$  una hoja de exgrado cero de  $A$ . Además supongamos que  $A' := A - y$  tiene un  $M'$ -encaje  $f'$  en  $T'$ . Entonces  $A$  tiene un  $M$ -encaje  $f$  en  $T$  que extiende a  $f'$ .

*Demostración.* Sea  $f'$  un  $M'$ -encaje de  $A'$  en  $T'$ . Supongamos que  $x \rightarrow y$  es el arco que contiene a  $y$  y que  $f'(x) = v_i$ . Tomemos  $I' := [v_{i+1}, v_{n-2}]$  entonces

$$|f'(A') \cap I'| < \frac{1}{2}|I'| + 1. \quad (3.1)$$

Consideremos  $I := [v_{i+1}, v_n]$  y por ser  $T$  un torneo:

$$(N^+(v_i) \cap I) \cup (N^-(v_i) \cap I) = I, \quad (3.2)$$

luego

$$|N^+(v_i) \cap I| + |N^-(v_i) \cap I| = |I|. \quad (3.3)$$

De la Proposición 3.2.2

$$|N^+(v_i) \cap I| \geq |N^-(v_i) \cap I|. \quad (3.4)$$

De 3.3 y 3.4

$$|N^+(v_i) \cap I| \geq \frac{1}{2}|I|. \quad (3.5)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2}|I| = \frac{1}{2}(|I'| + 2) = \frac{1}{2}|I'| + 1. \quad (3.6)$$

Ahora de 3.5 y 3.6

$$|N^+(v_i) \cap I| \geq \frac{1}{2}|I'| + 1, \quad (3.7)$$

luego de 3.1 y 3.6

$$|N_T^+(v_i) \cap I| \geq \frac{1}{2}|I'| + 1 > |f'(A') \cap I'| = |f'(A') \cap I| \quad (3.8)$$

es decir  $v_i$  tiene un exvecino  $v_j \in I \setminus f'(A')$ . Definamos  $f : V(A) \rightarrow V(T)$  como  $f(v) := f'(v)$  si  $v \in V(A')$  y  $f(y) := v_j$ .

Claramente  $f$  es un encaje de  $A$  en  $T$ ; falta demostrar que  $f$  es un  $M$ -encaje de  $A$  en  $T$ , es decir que:

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I| + 1$$

para todo intervalo final  $I$  de  $M$ .

Sean  $I = [v_{i+1}, v_n]$  e  $I' = [v_{i+1}, v_{n-2}]$ . Como

$$f(A) = f'(A') \cup \{v_j\},$$

y

$$f(A) \cap I \subseteq \{f'(A') \cap I'\} \cup \{v_j\}. \quad (3.9)$$

Entonces

$$|f(A) \cap I| \leq |f'(A') \cap I'| + 1. \quad (3.10)$$

Como  $I'$  es un intervalo final de  $M'$  y  $f'$  es un  $M'$ -encaje de  $A'$  en  $T'$  se tiene que

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I'| + 1 + 1,$$

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}(|I'| + 2) + 1,$$

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I| + 1.$$

así,  $f$  es un  $M$ -encaje de  $A$  en  $T$  que extiende a  $f'$  lo que concluye la demostración.  $\square$

Cuando se tiene más de una hoja de exgrado cero usaremos la siguiente generalización de la Proposición 3.5.

**Corolario 3.6.** *Sea  $T$  un torneo con al menos  $2k + 1$  vértices y  $M := (v_1, \dots, v_n)$  un orden promedio de  $T$ . Definamos  $T' = T[v_1, \dots, v_{n-2k}]$  y  $M' := (v_1, \dots, v_{n-2k})$ . Sea  $A$  una digráfica y  $S = \{y_1, \dots, y_k\}$  conjunto de hojas de exgrado cero de  $A$ . Supongamos que  $A' = A - S$  tiene un  $M'$ -encaje  $f'$  en  $T'$ . Entonces  $A$  tiene un  $M$ -encaje  $f$  en  $T$  que extiende a  $f'$ .*

**Demostración.** La demostración será por inducción sobre  $k$  el número de hojas de exgrado cero de  $A$ . Por la Proposición 3.5, el resultado es cierto para  $k = 1$ . Ahora supongamos que se cumple para valores menores a  $k$ . Supongamos que  $A' = A - S$  tiene un  $M'$ -encaje  $f'$  en  $T' := T[v_1, \dots, v_{n-2k}]$  entonces por la Proposición 3.5  $A'' = A - (S - \{y_k\})$  tiene un  $M''$ -encaje  $f''$  en  $T'' := T[v_1, \dots, v_{n-2(k-1)}]$  que extiende a  $f'$ . Luego, por hipótesis de inducción  $A$  tiene un  $M$ -encaje  $f$  en  $T$  que extiende a  $f''$ .  $\square$

Las definiciones que se dan a continuación son fundamentales en el desarrollo de este capítulo. Recordemos que un árbol enraizado es un árbol dirigido donde a un vértice se le denomina raíz.

**Definiciones 3.7.**

- Una digráfica  $A$  es  $n$ -**encajable** si  $A$  tiene un  $M$ -encaje en  $T$  para todo torneo  $T$  con  $n$  vértices y todo orden promedio  $M$  de  $T$ .
- Una **arborescencia** es un árbol enraizado que satisface una de las siguientes condiciones:
  1. Todo vértice tiene ingrado 1, excepto la raíz que tiene ingrado cero.
  2. Todo vértice tiene exgrado 1, excepto la raíz que tiene exgrado cero.
- Las arborescencias que cumplen 1 se les llama **exarborescencias** y las que cumplen 2 **inarborescencias**.

**Corolario 3.8.** Toda exarborescencia con  $n \geq 2$  vértices es  $(2n - 2)$ -encajable.

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre  $n$  (número de vértices). En efecto toda exarborescencia con 2 vértices es (2)-encajable.

Supongamos que se cumple para valores menores a  $n > 2$ . Sea  $T$  un torneo con  $2n - 2$  vértices y  $M := (v_1, \dots, v_{2n-2})$  un orden promedio de  $T$ . Ahora consideremos el torneo  $T' = T[v_1, v_2, \dots, v_{2n-4}]$ , observe que  $M' := (v_1, \dots, v_{2n-4})$  es un orden promedio de  $T'$ . Sea  $R$  una exarborescencia con  $n$  vértices,  $y$  una hoja de exgrado cero de  $R$  y tomemos  $R' := R - y$ . Por hipótesis de inducción,  $R'$  tiene un  $M'$ -encaje  $f'$  en  $T'$ . Por la Proposición 3.5  $R$  tiene un  $M$ -encaje en  $T$  que extiende a  $f'$ , luego como  $T$  y  $M$  fueron tomados arbitrariamente  $R$  es  $(2n-2)$ -encajable.

□

**Definición 3.9.** Sea  $D$  una digráfica. El dual de  $D$ , denotado como  $D^*$  es la digráfica que resulta de invertir las flechas de  $D$ .

**Proposición 3.10.** Sea  $D$  una digráfica.  $D$  es  $n$ -inevitable si y sólo si su dual  $D^*$  es  $n$ -inevitable.

**Demostración.** Sea  $D$  una digráfica  $n$ -inevitable,  $D^*$  su dual y  $T$  un torneo de orden  $n$ . Veamos que  $D^* \subseteq T$ . Como  $D$  es  $n$ -inevitable entonces  $D \subseteq T^*$  (dual de  $T$ ), luego  $D^* \subseteq T$ .

El recíproco es una consecuencia directa de que  $(D^*)^* = D$ . □

Observe que las arborescencias cumplen con la cota establecida en la conjetura de Sumner, es decir

**Proposición 3.11.** *Toda arborescencia con  $n \geq 2$  vértices es  $(2n - 2)$ -inevitable.*

**Demostración.** Por el Corolario 3.8 se tiene que toda exarborescencia con  $n \geq 2$  vértices es  $(2n - 2)$ -encajable, por lo tanto es  $(2n - 2)$ -inevitable. Obsérvese que el dual de una exarborescencia es una inarborescencia. Luego por la Proposición 3.10 toda inarborescencia es  $(2n - 2)$ -inevitable. Por lo tanto toda arborescencia es  $(2n - 2)$ -inevitable.  $\square$

### 3.2. Árboles bien enraizados.

**Definiciones 3.12.** *Sea  $A$  un árbol enraizado.*

- *Si la raíz es una fuente diremos que  $A$  es un **árbol bien enraizado**.*
- *El **nivel** de un vértice es la distancia que hay entre el vértice y la raíz del árbol  $A$  no dirigido.*
- *Un arco  $x \rightarrow y$  de  $A$  es un **arco hacia afuera** si el nivel de  $y$  es mayor que el nivel de  $x$ , en otro caso es un **arco hacia adentro**.*

Denotaremos a la subdigráfica de  $A$  inducida por todos los arcos hacia adentro por  $\mathbf{B}(A)$  y al número de arcos hacia adentro por  $\mathbf{b}(A)$ . Una componente de  $B(A)$  se le llama **componente de arcos hacia adentro** de  $A$ , al **número de componentes de arcos hacia adentro** por  $\mathbf{c}(A)$  y denotaremos  $\mathbf{d}(A) := \mathbf{b}(A) - \mathbf{c}(A)$ .

**Teorema 3.13.** *Todo árbol bien enraizado  $A$  con  $n$  vértices es  $(2n + 2d)$ -encajable, donde  $d := d(A)$ .*

**Demostración.** Sean  $A$  un árbol bien enraizado de orden  $n \geq 2$ ,  $T$  un torneo con  $2n + 2d$  vértices y  $M := (v_1, \dots, v_{2n+2d})$  un orden promedio de  $T$ . El análisis que sigue se dividirá en caso 1 y caso 2.

**Caso 1.** Las hojas de  $A$  son de ingrado cero.

**Caso 2.**  $A$  tiene al menos una hoja de exgrado cero.

Análisis de **Caso 1.** Este caso se demostrará por inducción sobre el número de componentes de arcos hacia adentro de  $A$ . Definamos a  $b := \mathbf{b}(A)$  y  $c := \mathbf{c}(A)$ . Sea  $r$  la raíz de  $A$ .

Cuando  $c = 0$  se tiene que  $d = b = 0$ , por lo que  $A$  es una exarborescencia y por el Corolario 3.8  $A$  es  $(2n - 2)$ -encajable. Luego es  $(2n)$ -encajable.

Supongamos que el teorema se cumple para valores menores a  $c \geq 1$ . Sea  $B'$  una componente hacia adentro de  $A$ , con al menos una hoja de  $A$ . Denotemos a la raíz de  $B'$  por  $y$ . Como  $r$  es fuente de  $A$  se tiene que  $y \neq r$ . Sea  $x$  el padre de  $y$  en  $A$  de manera que  $x \rightarrow y$  es un arco hacia afuera pues de lo contrario  $x \in B'$ . Supongamos que  $B'$  tiene  $m$  vértices, definamos  $A' := A - B'$  el cual tiene  $n - m$  vértices,  $b(A') = b - (m - 1)$  y  $c(A') = c - 1$ . Sea  $T' := [v_1, \dots, v_{2n+2d-4m+4}]$  y  $M' := (v_1, v_2, \dots, v_{2n+2d-4m+4})$ . Como  $c(A') < c$ , por hipótesis de inducción  $A'$  es  $(2n + 2d - 4m + 4)$ -encajable luego,  $A'$  tiene un  $M'$ -encaje  $f'$  en  $T'$ .

Sea  $S$  un conjunto con  $2m - 2$  nuevos vértices. Denotemos por  $A''$  al árbol que se obtiene de  $A'$  adhiriendo los vértices de  $S$  al vértice  $x$  de tal manera que los vértices en  $S$  sean hojas de exgrado cero de  $A''$ .

Observe que el orden de  $A''$  es  $n + m - 2$  luego, por el Corolario 3.6  $A''$  tiene un  $M$ -encaje  $f''$  en  $T$  que extiende a  $f'$ . El subtorneo de  $T$  inducido por  $f''(S)$  tiene  $2m - 2$  vértices luego por la Proposición 3.11  $f''(S)$  contiene una copia  $B''$  de la arborescencia  $B'$  de orden  $m$ .

Sea  $g : V(B') \rightarrow V(B'')$  un isomorfismo de  $B'$  en  $B''$ . Entonces se tiene el mapeo  $f := V(A) \rightarrow V(T)$  definido por

$$f(v) := \begin{cases} f'(v) & \text{si } v \in V(A') \\ g(v) & \text{si } v \in V(B'). \end{cases}$$

Claramente  $f$  es un encaje de  $A$  en  $T$ ; falta demostrar que es un  $M$ -encaje.

Es decir, que para toda sección final  $I := [v_{i+1}, v_{2n+2d}]$  de  $M$ ,

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I| + 1.$$

Tenemos que

$$f(A) = f'(A') \cup g(B').$$

**Caso 1.1.**  $i + 1 \leq 2n + 2d - 4m + 4$ .

Sean  $I' := [v_{i+1}, v_{2n+2d-4m+4}]$  e  $I'' := [v_{2n+2d-4m+5}, v_{2n+2d}]$  intervalos. Observe que  $I = I' \cup I''$ . Luego

$$\begin{aligned} f(A) \cap I &= \{f'(A') \cap I'\} \cup \{g(B') \cap I''\}, \\ |f(A) \cap I| &= |f'(A') \cap I'| + |g(B') \cap I''|. \end{aligned}$$

Como  $f'$  es un  $M'$ -encaje de  $A'$  en  $T'$ ,

$$|f'(A') \cap I'| < \frac{1}{2}|I'| + 1$$

y como

$$\begin{aligned} g(B') \cap I'' &= g(B'), \\ |g(B') \cap I''| &= |g(B')| = m \leq \frac{|I''|}{2} = 2m - 2. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |f(A) \cap I| &< \frac{1}{2}|I'| + 1 + \frac{1}{2}|I''|, \\ |f(A) \cap I| &< \frac{1}{2}|I| + 1. \end{aligned}$$

**Caso 1.2.**  $i + 1 > 2n + 2d - 4m + 4$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(A) \cap I &= g(B') \cap I, \\ g(B') &\subseteq f''(S) \subseteq f''(A''), \\ g(B') \cap I &\subseteq f''(A'') \cap I, \\ |g(B') \cap I| &\leq |f''(A'') \cap I|, \\ |g(B') \cap I| &< \frac{1}{2}|I| + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f$  es un  $M$ -encaje de  $A$  en  $T$ .

Análisis de **Caso 2**. En tal caso, eliminaremos una a una las hojas de exgrado cero hasta que el árbol resultante  $A'$  no tenga hojas de exgrado cero. Supongamos que en este proceso fueron eliminados  $k$  vértices. Entonces por el Caso 1  $A'$  es  $(2(n - k) + 2d)$ -encajable y aplicando  $k$  veces la Proposición 3.5 podemos encontrar un  $M$ -encaje de  $A$  en  $T$ , es decir,  $A$  es  $(2n + 2d)$ -encajable. □

Ahora estamos en condiciones de mostrar el mejor resultado conocido con respecto a la conjetura de Sumner.

**Corolario 3.14.** *Todo árbol dirigido  $A$  con  $n \geq 2$  vértices es  $(3n - 3)$ -inevitable.*

**Demostración.** Sea  $A$  un árbol dirigido con  $n \geq 2$  vértices, asumiremos que  $A$  tiene al menos tantos arcos hacia afuera como arcos hacia adentro con respecto a la raíz; si no consideramos el dual de  $A$ . Obsérvese que toda arborescencia  $A$  por la Proposición 3.11 es  $(2n - 2)$ -inevitable. Por consiguiente supondremos que  $A$  no es arborescencia. Tomemos la raíz de  $A$  tal que minimize a  $d(A)$  por lo tanto es fuente, tal que si existe un vértice  $v$  que domine a un vértice  $r$  (i.e.  $d(A_v) < d(A_r)$ ), entonces elegimos a  $v$  como raíz de  $A$ . Luego  $A$  es un árbol bien enraizado tal que:

$$b(A) \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{y} \quad c(A) \geq 1,$$

$$\text{donde} \quad d(A) = b(A) - c(A),$$

$$\text{entonces} \quad d(A) \leq \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}.$$

Por el Teorema 3.13,  $A$  es  $(2n + 2d)$ -encajable, luego

$$2n + 2d \leq 2n + 2 \frac{n-3}{2} = 2n + n - 3 = 3n - 3,$$

que es el resultado deseado.  $\square$

A continuación mostraremos una familia de árboles que cumple con la conjetura de Sumner, (Ejemplo (Figura 3.1)).

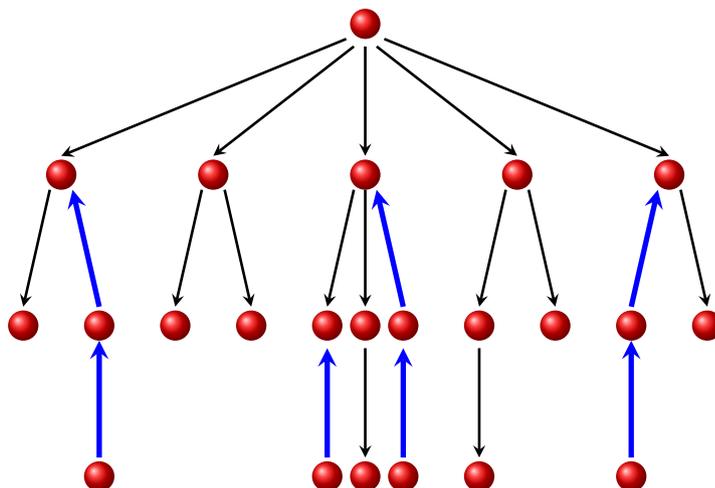


Figura 3.1. Árbol enraizado con 4 componentes hacia adentro.

**Teorema 3.15.** *Todo árbol enraizado  $A$  con  $n \geq 2$  vértices donde toda componente hacia adentro es una trayectoria es  $(2n - 2)$ -encajable.*

**Demostración.** Por inducción sobre  $n$ . Sean  $A$  un árbol enraizado de orden  $n \geq 2$ ,  $T$  un torneo con  $2n - 2$  vértices y  $M := (v_1, \dots, v_{2n-2})$  un orden promedio de  $T$ . Denotemos a la raíz de  $A$  por  $r$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $r$  es fuente de  $A$ . Así se tiene a un árbol bien enraizado con raíz  $r$ . Si  $A$  tiene 2 vértices entonces por el Corolario 3.8  $A$  es 2-encajable. Por lo que supondremos que se cumple para valores menores a  $n > 2$

**Caso 1.** Las hojas de  $A$  son de ingrado cero.

Esta parte es similar a la del Teorema 3.13.

**Caso 2.**  $A$  tiene al menos una hoja de exgrado cero.

Sea  $y$  una hoja de exgrado cero de  $A$ . Tomemos  $A' = A - y$ , por inducción es  $(2(n-1)-2)$ -encajable. Luego  $A'$  tiene un  $M' := (v_1, v_2, \dots, v_{2(n-1)-2})$ -encaje  $f'$  en  $T' := T[v_1, v_2, \dots, v_{2(n-1)-2}]$  entonces, por la Proposición 3.5  $A$  tiene un  $M := (v_1, v_2, \dots, v_{2n-2})$ -encaje  $f$  en  $T := T[v_1, v_2, \dots, v_{2n-2}]$  que extiende a  $f'$  entonces es  $(2n-2)$ -encajable.  $\square$

Sea  $\mathfrak{F} := \{ G : G \text{ es una inarborescencia } m\text{-inevitable de orden } m \}$ .

**Proposición 3.16.** *Todo árbol bien enraizado de orden  $n \geq 2$  donde todas sus componentes hacia adentro están en  $\mathfrak{F}$  es  $(2n-2)$ -encajable.*

No se incluye la demostración ya que es similar a la del Teorema 3.13.

# Bibliografía

---

- [1] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press (1978).
- [2] R. Forcade, *Parity of paths and circuits in tournaments*, Discrete Mathematics 6 (1973), 115-118.
- [3] B. Grünbaum, *Antidirected Hamiltonian Paths in Tournaments*, J. Combinatorial Theory Ser. B 11 (1971) 249-257.
- [4] R. Häggkvist, A.G. Thomason, *Trees in tournaments*, Combinatorica 11, (1991) 123-130.
- [5] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1960).
- [6] F.Havet, *Trees in tournament*, J. Discrete Math. 243 (1-3), (2002) 121-134.
- [7] F.Havet, S. Thomassé, *Median orders of tournaments: a tool for the second neighborhood problem and Sumner's conjecture*, J. Graph Theory 35, (2000) 244-256.
- [8] X. Lu, *Claws contained in all  $n$ -tournaments*, Discrete Math. 119 (1993), 107-111.
- [9] X. Lu, D-W Wang, G.J. Chang, I-J. Lin, C.K. Wong, *On  $k$ -Ary Spanning Trees of Tournaments*, Journal of Graph Theory 30 (1999), 167-176.
- [10] X. Lu, *On claws belonging to every tournament*, Combinatorica 11 (1991), 173-179.
- [11] J.W. Moon, *Topics on tournaments Holt, Rinehart and Winston, New York*, (1968) 21-24.
- [12] L.Rédei, *Ein kombinatorischer Satz*, Acta Litt. Szeged 7, (1934) 39-43.
- [13] K.B. Reid, N.C. Wormald, *Stud. Sci. Math. Hungaria* 18 (1983) 377-387.
- [14] K.B. Reid, *Three problems on tournaments*, Graph Theory and Its Applications: East and West, Annals NY Acad. Sci. 576 (1989) 466-473.

- [15] A. El Sahili, *Trees in Tournaments*, J. Combinatorial Theory Ser. B 92 (2004) 183-187.
- [16] M. Saks, and V. Sós, *On unavoidable subgraphs of tournaments*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 37, Finite and Infinite Sets, Eger (Hungary), (1981) 663-674.
- [17] D. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall (1996).
- [18] N.C. Wormald, *Subtrees of large tournaments*, in: Combinatorial Mathematics, X(Adelaide, 1982)