

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Efecto Unruh y relaciones de dispersión  
modificadas para un campo escalar.

Tesis que presenta:  
Fís. Melina Guadalupe Ruiz Pérez

Para obtener el grado de  
Maestra en Ciencias (Física)



Casa abierta al tiempo

Asesor:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl.

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Héctor Hugo García Compeán

CINVESTAV

Secretario: Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

UAM-I

Vocal: Dr. Abel Camacho Quintana

UAM-I

Ciudad de México, 14 de diciembre de 2018.

*And so hold on when there is nothing in  
you  
Except the Will which says to them: Hold  
on!'*

RUDYARD KIPLING

*Para mi mamá*

# Agradecimientos

Hay varias personas sin las que este trabajo de tesis no hubiera sido posible y quiero dedicar esta sección del escrito para reconocerles un poco de lo mucho que hicieron por mí.

Primero quisiera reconocer la ayuda de mi asesor, el Dr. Hugo Morales, pues sin él no hubiese sido posible terminar mi tesis. Disfrute mucho mi tema de estudio, me siento muy afortunada de que me lo haya sugerido. Además, quiero agradecerle por haberme tenido tanta paciencia y compartir sus conocimientos conmigo. De igual manera, le quiero dar las gracias por formar parte de mi examen de grado como sinodal.

Al posdoctorante Saeed Rastgoo le quiero agradecer por haber aceptado ayudarme formalmente con la revisión y discusión de mis cálculos. Me hizo consciente de las diversas posibilidades para enfocar un problema.

Así mismo le quiero dar las gracias al Dr. Marco Maceda por su ayuda. Gracias por escucharme y ayudarme siempre que lo busqué para preguntarle sobre cálculos o cuestiones de idiomas.

Al Dr. Abel Camacho. Muchas gracias por sus enseñanzas y consejos, siempre los voy a tener presentes. Sus palabras me ayudaron a tratar objetivamente algunos hechos de mi vida a través de la observación, el análisis y el razonamiento. También, quiero agradecerle el haberse tomado el tiempo para fungir como sinodal en mi examen de grado.

Al Dr. Hugo Compeán por recibir tan de buena forma mi propuesta de ser sinodal y, después, de ser presidente del jurado calificador en la defensa de mi tesis. Le agradezco el tiempo que destinó a todo este proceso.

Quisiera agradecer a mis amigos: Ernesto Flores, Juan Carlos Ruelas y Jairo Villafuerte. Que en las tardes de café me han ayudado con discusiones sobre los problemas que se iban presentando a lo largo de los cálculos que se incluyen en esta tesis dándome su opinión y sugiriéndome posibles métodos para poder resolverlos. Además, les agradezco haber compartido conmigo bastantes horas de buenas pláticas y consejos para crecer y mejorar como persona.

A Alejandra Woolrich, mi mejor amiga, le agradezco mucho todo su apoyo antes, durante y al final de mi maestría. Gracias a todas las anécdotas que me compartió pude disfrutar más de esta etapa.

También me gustaría agradecer a Edgar Sánchez quien desde el primer momento que me he dedicado al estudio de la física me ha sabido apoyar no sólo en el aspecto académico como un compañero de estudio sino también como un amigo en los malos tiempos.

Esta tesis fue desarrollada en el marco del proyecto CONACyT 237351 “Implicaciones Físicas de la Estructura del Espacio Tiempo”, así como con el apoyo de la beca CONACyT 737830 (CVU)/596852 (Becario).

# Índice general

<b>Contenido</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>2. Campo escalar cuántico en espacio tiempo de Minkowski y marcos inerciales.</b>	<b>5</b>
2.1. Partícula libre no relativista . . . . .	5
2.2. Partícula libre relativista . . . . .	7
2.3. Campo escalar cuántico . . . . .	8
2.4. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniforme acoplado a campo escalar y tasa temporal de función de respuesta . . . . .	12
<b>3. Campo escalar cuántico y marcos acelerados en relatividad especial.</b>	<b>19</b>
3.1. Partícula clásica con movimiento uniformemente acelerado . . . . .	19
3.2. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta . . . . .	25
3.3. Método alternativo para el análisis del detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta . . . . .	30
<b>4. Campo escalar cuántico y marcos acelerados en relatividad especial doble.</b>	<b>35</b>
4.1. Bases de relatividad especial doble y relaciones de dispersión modificadas. Alcances y limitaciones . . . . .	35
4.2. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniforme acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta . . . . .	43
4.3. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta . . . . .	45

4.4. Interpretación térmica . . . . .	50
<b>5. Discusión, conclusiones y perspectivas.</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice</b>	<b>54</b>
<b>A. Modos escalares en coordenadas de Rindler</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>61</b>

# Resumen

La necesidad de una teoría de gravedad cuántica que permita resolver algunos problemas de la Relatividad General clásica como son sus singularidades por un lado, y, por otro, las divergencias en la teoría cuántica de campos, ha llevado a la generación de diferentes propuestas. Una de ellas es la conocida como Gravedad Cuántica por Lazos la cual involucra gráficos, o lazos, formados por nodos y aristas que caracterizan los estados cuánticos gravitacionales y que asemejan un material polimérico. Dichos gráficos sugieren una discretez reemplazando la noción del espacio continuo. En particular, la materia propagándose en espacios de este tipo presenta relaciones de energía y momento que parecen desviarse de las usuales. Dada la complejidad de esta teoría algunas alternativas simplificadas han surgido que implementan parcialmente algunos de estos aspectos. Entre ellas se encuentra la relatividad especial doble en la que las relaciones de energía momento se modifican pero se mantiene el principio de la relatividad, ahora con dos invariantes: la velocidad de la luz y la longitud de Planck. Claramente, en el límite en que la escala de Planck sea despreciable el formalismo usual, por ejemplo de la teoría de campos, debería recuperarse.

Ahora bien, entre las consecuencias más sorprendentes de la teoría de campos en marcos acelerados o en presencia de agujeros negros son, respectivamente, el efecto Unruh y la radiación de Hawking. En ambos casos un detector en presencia de un campo cuántico registra una distribución térmica Planckiana.

En este trabajo estudiamos la tasa temporal de excitación, también conocida como tasa de cambio de la función de respuesta, para el caso de un detector acoplado a un campo escalar que se encuentra en el estado de vacío de acuerdo a un observador inercial. El análisis se realiza tanto para un observador inercial como uno con aceleración constante en espacio tiempo plano. Recuperamos de este modo el efecto térmico establecido por W. G. Unruh. También, basados en la teoría de Relatividad Especial Doble discutimos el efecto Unruh correspondiente, esencialmente siguiendo [1].



# 1

## Introducción.

En 1976, el físico británico Stephen Hawking concluyó que la teoría cuántica de campos en espacio tiempos curvos implicaba radiación térmica en presencia de un agujero negro. Para un observador inercial predijo una temperatura característica en el horizonte de eventos teniendo asociada una distribución espectral del tipo que un cuerpo negro emite. La temperatura tiene magnitud proporcional a la superficie gravitacional del agujero negro, y es de naturaleza cuántica. Este efecto es conocido como radiación de Hawking.

El mismo *año*, el físico canadiense William George Unruh, en un intento por hacer más comprensible la información contenida en el trabajo que dio a conocer la radiación de Hawking, estudió un caso en espacio tiempo plano (o espacio de Minkowski), para un observador con aceleración constante, y encontró también un efecto térmico. Este efecto hoy se conoce como efecto Unruh.

El Efecto Unruh puede ser estudiado por diversos métodos tales como las transformaciones de Bogoliubov relacionando los operadores de creación y aniquilación de un campo para un observador inercial con aquellos descritos por un observador con aceleración constante. Otro método consiste en utilizar la función de respuesta de un detector con aceleración constante, analizando las transiciones entre los niveles de energía del detector acoplado con el campo [8]. En esta tesis estudiamos el segundo método para el caso de un campo escalar real.

La función de respuesta del detector da la probabilidad de transición [5]. Esta se relaciona con las funciones de dos puntos específicamente la descrita por [8] conocida como función de Wightman de frecuencias positivas, misma que estudiaremos con más detenimiento.

Por otro lado, uno de los problemas abiertos de la física teórica es la construcción de una teoría de gravedad cuántica. Se cree que posiblemente una teoría de gravedad cuántica removería los problemas de divergencias en el caso de los agujeros negros o los modelos cosmológicos, obtenidos en la teoría de la relatividad general clásica. En cuanto a la teoría cuántica de campos, podría solucionar las divergencias en cantidades como la energía asociada al vacío y aquellas que se reflejan en algunas amplitudes de probabilidad. Se espera que la escala de Planck  $\ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{cm}$ , con  $G$  la constante de Newton,  $\hbar$  la constante de Planck y  $c$  la velocidad de la luz, juegue un papel fundamental. Entre los esquemas propuestos para definir una teoría de gravedad cuántica se encuentra la cuantización por lazos de la Relatividad General. Los estados cuánticos gravitacionales se caracterizan por gráficas o redes que asemejan materiales poliméricos. Operadores geométricos tienen espectro discreto a la escala de Planck lo que permite vislumbrar cambios esenciales en el comportamiento de la gravedad y la materia. Algunos casos como modelos cósmicos y ciertos agujeros negros han sido estudiados pero la teoría general se encuentra aún en desarrollo [9, 10]. Con un enfoque fenomenológico se ha propuesto que la discretez sugerida antes podría incorporarse en una relatividad especial con dos escalas invariantes [2, 3] o Relatividad Especial Doble (RED).

En este trabajo se considera el Efecto Unruh como un método de análisis de la RED, es decir, dado que las propiedades térmicas relacionadas con un agujero negro surgen en la teoría cuántica de campos como un resultado sólido es probable que este efecto sea fundamental para entender las características básicas de una posible teoría cuántica de la gravedad y dilucidar si RED es admisible.

La tesis está estructurada de la siguiente forma. En el capítulo 2 iniciamos con un repaso de los conceptos básicos de la teoría de un campo escalar real cuántico. Se describe la idea de un detector cuántico con niveles energéticos acoplado a un campo escalar real para un detector inercial. En el capítulo 3 se introduce el espacio tiempo de Rindler donde se analiza el detector cuántico con niveles energéticos para un observador con aceleración constante (efecto Unruh) y la interpretación térmica asociada a este efecto. Luego, en el capítulo 4 se estudia la teoría de RED y se comprueba que la energía de Planck es un invariante de esa teoría. Después, tomando como base un estudio reciente [1] se reproducen aquí los cálculos relacionados a las funciones de dos puntos obtenidas del lagrangiano de interacción entre el campo y el detector para encontrar la tasa de cambio por unidad de tiempo propio del detector. Se calcula la tasa de cambio respecto al tiempo propio del detector modificada según RED. Por último, en el capítulo 5 se discute el efecto de la RED tanto para las funciones de dos puntos como la temperatura asociada al efecto Unruh al comparar los resultados de la tasa de cambio de la función respuesta y su interpretación térmica modificada con los resultados obtenidos para el efecto Unruh usual así como posible trabajo futuro.

En este trabajo usaremos la signatura de métrica de Minkowski  $(+, -, -, -)$ .

# 2

## Campo escalar cuántico en espacio tiempo de Minkowski y marcos inerciales.

En este capítulo vamos a recordar algunos elementos básicos de la descripción de un campo escalar cuántico. Partimos de la mecánica cuántica no relativista para obtener, primero, la ecuación de Schrödinger y luego, en el contexto de la relatividad especial, la ecuación de Klein-Gordon. Con base en el análisis canónico del campo escalar clásico procedemos a su cuantización canónica al reemplazar paréntesis de Poisson por conmutadores. Usando una descomposición en un conjunto completo de ondas planas, el operador de campo cuántico se expresa en términos de operadores de escalera, mismos que satisfacen las relaciones de conmutación conocidas. De esta manera introducimos el estado de vacío así como los operadores de energía y momento del campo. Por último discutimos el comportamiento de un detector, acoplado al campo escalar cuántico, montado en un marco de referencia inercial. Discutimos en cierto detalle la forma integral de la función de Wightman de frecuencias positivas requerida en el análisis así como el cálculo de la función de respuesta.

### 2.1. Partícula libre no relativista

Consideremos primero una partícula cuántica no relativista. Su dinámica puede inferirse partiendo de la relación de energía momento no relativista

$$E = \frac{1}{2m}\vec{p}^2, \quad (2.1)$$

y usando la correspondencia

$$\hat{E} = i\hbar\partial_t, \quad (2.2)$$

$$\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad (2.3)$$

con la constante de Planck,  $\hbar$ , y el gradiente espacial,  $\nabla$ . De este modo obtenemos la ecuación de Schrödinger de la partícula libre

$$i\hbar\partial_t\Psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi, \quad (2.4)$$

donde  $\Psi$  es la función de onda sobre la que actúa el operador asociado con (2.1). Las soluciones de esta ecuación toman la forma

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (2.5)$$

donde  $E$  y  $\vec{p}$  cumplen (2.1) con

$$\hat{E}\Psi_{\vec{p}} = E\Psi_{\vec{p}}, \quad E \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\hat{p}\Psi_{\vec{p}} = \vec{p}\Psi_{\vec{p}}, \quad p_i \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.4) podemos derivar la ecuación de continuidad

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.8)$$

donde

$$\rho = |\Psi|^2 \geq 0, \quad (2.9)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*). \quad (2.10)$$

La interpretación de esta ecuación corresponde a un balance de probabilidad. Mientras que  $\rho$  se interpreta como densidad de probabilidad,  $\vec{j}$  es su flujo. Si integramos (2.8) sobre todo el espacio y considerando que las funciones de onda decaen a cero en infinito obtenemos <sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Psi^*\Psi = 0, \quad (2.11)$$

es decir, la probabilidad de hallar la partícula en alguna parte del espacio  $P(\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Psi^*\Psi$  es constante y por conveniencia normalizada a uno. Este análisis sugiere en particular considerar un producto escalar para las funciones de onda

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Psi^*\Psi'. \quad (2.12)$$

Con este producto para las soluciones de partícula libre tenemos

$$\langle \Psi_{\vec{p}}, \Psi_{\vec{p}'} \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Claramente (2.5) no decaen a cero en infinito, sin embargo, estrictamente, los estados físicos a considerar son paquetes de onda normalizables  $\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \Psi^*\Psi < \infty$ .

## 2.2. Partícula libre relativista

Pasemos ahora a describir una partícula cuántica relativista. La relación de energía y momento tiene la forma

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2. \quad (2.14)$$

Utilizando nuevamente la correspondencia (2.2) y (2.3) obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\left( \square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0, \quad \square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

donde  $\eta^{\alpha\beta}$  es la métrica del espacio tiempo, en este caso Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.16)$$

con  $\eta^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\beta$  y  $\phi$  es la función de onda de la partícula relativista.

Las soluciones del tipo onda plana para (2.15) se expresan como

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\omega_k(2\pi)^3}{c}}} e^{-ik \cdot x}, \quad (2.17)$$

donde

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = \frac{Et}{\hbar} - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad (2.18)$$

$$E^2 = m^2c^4 + \hbar^2 \vec{k}^2 c^2, \quad (2.19)$$

$$k^\mu = \left( \frac{E}{\hbar c}, \vec{k} \right), \quad (2.20)$$

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{|E|}{\hbar} = \frac{\sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 \vec{k}^2 c^2}}{\hbar}. \quad (2.21)$$

Asociadas a la solución de la ecuación (2.15) tenemos

$$E = \pm \hbar \omega_{\vec{k}} = \pm \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 \vec{k}^2 c^2} \quad (2.22)$$

y puede haber tanto energías positivas como negativas en contraste con el caso no relativista ec. (2.6). Y, éstas, pueden ser arbitrariamente grandes en valor absoluto. De este modo las soluciones de energía positiva y negativa se expresan como

$$u_k^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\omega_k(2\pi)^3}{c}}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + ik \cdot \vec{x}}, \quad (2.23)$$

$$u_k^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\omega_k(2\pi)^3}{c}}} e^{+i\omega_{\vec{k}}t - ik \cdot \vec{x}}. \quad (2.24)$$

A diferencia del caso no relativista la interpretación de  $\phi$  no corresponde a una amplitud de probabilidad. En el caso relativista la ecuación de Klein-Gordon (2.15) lleva a la ecuación de continuidad

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{1}{c} \partial_t j^0 + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.25)$$

donde  $j^\nu$  es un 4-vector de corriente

$$j^\nu = i (\phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*) \quad (2.26)$$

con componentes espacio temporales<sup>2</sup>

$$j^0 = \frac{i}{c} (\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*) \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

$$\vec{j} = i (\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi). \quad (2.28)$$

Observamos que  $j^0$  no es positiva definida por lo que (2.25) no implica un balance de probabilidad. Integrando la ecuación de continuidad (2.25) en todo el espacio vemos que la integral espacial de  $j^0$  se conserva en el tiempo sujeto a condiciones de decaimiento adecuados para  $\phi$ . Esto sugiere el producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) = -\frac{i}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1), \quad (2.29)$$

que sin embargo no es positivo definido. Las soluciones tipo onda plana (2.17) cumplen la siguiente normalización

$$(u_k^{(+)}, u_{k'}^{(+)}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (u_k^{(\pm)}, u_{k'}^{(\mp)}) = 0, \quad (u_k^{(-)}, u_{k'}^{(-)}) = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.30)$$

A este punto, tenemos funciones de onda relativistas incluyendo un sector con norma no positiva definida. Las soluciones de energía negativa indican que esta cantidad no está acotada por abajo y sugieren inestabilidad pues el sistema podría decaer indefinidamente.

### 2.3. Campo escalar cuántico

La necesidad de considerar un campo cuántico en lugar de funciones de onda relativistas surge con la posibilidad de contar con energías acotadas por abajo y, además, poder describir procesos de creación y aniquilación de partículas, que sin embargo, en presencia de gravedad, o en marcos acelerados, pierde un sentido universal. El concepto de campo

<sup>2</sup>En la literatura podemos encontrar otras convenciones que asemejan más al caso no relativista, por ejemplo [11]  $\rho = \frac{j^0}{c} = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\phi^* \partial_t \phi - \partial_t \phi^* \phi)$ ,  $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$ .

cuántico será esencial en el efecto Unruh que queremos describir en este trabajo y por ello lo adoptamos.

A partir de este punto usaremos unidades con  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ , a menos que se especifique lo contrario.

De la acción siguiente con  $\mathbb{M}_4$  denotando el espacio tiempo de Minkowski

$$S = \int_{\mathbb{M}^4} d^4x \mathcal{L} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}(x))^2 - (\nabla\phi(x))^2 - m^2\phi(x)^2 \quad (2.32)$$

podemos obtener (2.15), como ecuación de campo. Aquí el punto denota derivada temporal.

La formulación hamiltoniana del campo escalar real se puede obtener usando (2.32). La densidad Hamiltoniana característica de este sistema es

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad \Pi = \partial_t\phi, \quad (2.33)$$

donde  $\Pi$  es el momento canónico conjugado al campo escalar tal que

$$\{\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.34)$$

Explícitamente tenemos para la densidad Hamiltoniana la forma siguiente

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_t\phi - \frac{1}{2}((\partial_t\phi(x))^2 - (\nabla\phi(x))^2 - m^2\phi(x)^2) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2}((\partial_t\phi(x))^2 + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi(x)^2). \quad (2.36)$$

### Cuantización canónica. Conmutador covariante de campo y momento.

Para implementar el carácter cuántico del campo podemos usar una descomposición en un conjunto completo de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon (2.15), utilizando (2.23), (2.24) y (2.30)

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} (\hat{a}(k)e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ik \cdot x}) \quad (2.37)$$

con  $k$  y  $x$  siendo cuatro vectores,  $\omega_k$  es la parte temporal del cuatro vector  $k$ ,  $\hat{a}(k)$  y  $\hat{a}^\dagger(k)$  son operadores, siendo uno el adjunto hermítico del otro, cuyas propiedades establecemos en seguida.

Los conmutadores a tiempos iguales

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\Pi(x), \Pi(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\hat{\phi}(x), \Pi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(x - y), \quad (2.38)$$

dan lugar a los correspondientes para  $\hat{a}(k)$  y  $\hat{a}^\dagger(k)$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0, [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0, [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.39)$$

Para el campo escalar real, usando (2.39) podemos calcular los conmutadores a tiempos diferentes. En el caso del conmutador de dos campos reales con coordenadas espacio temporales distintas

$$\begin{aligned} i\Delta(x-y) = [\hat{\phi}(t_x, \vec{x}), \hat{\phi}(t_y, \vec{y})] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} (u_k(t_x, \vec{x}) u_k^*(t_y, \vec{y}) - u_k^*(t_x, \vec{x}) u_k(t_y, \vec{y})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{+ik \cdot (x-y)}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin(k \cdot (x-y)), \end{aligned} \quad (2.40)$$

el cual cumple con las siguientes propiedades: es una función invariante de Lorentz pues la integral lo es. Además, es una función impar

$$i\Delta(x-y) = -i\Delta(y-x) = [\hat{\phi}(t_x, \vec{x}), \hat{\phi}(t_y, \vec{y})] = -[\hat{\phi}(t_y, \vec{y}), \hat{\phi}(t_x, \vec{x})], \quad (2.41)$$

como consecuencia de las propiedades de los conmutadores.

En el caso en que  $t_x = t_y$ , se recupera (2.38)

$$i\Delta(0, \vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_k} \sin(\omega_k(0) - \vec{k} \cdot \vec{x}) = 0. \quad (2.42)$$

Este conmutador (2.40), también cumple con la ecuación de Klein-Gordon homogénea (2.15)

$$\left( \square_x + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Delta(x, y) = 0. \quad (2.43)$$

El conmutador  $i\Delta(x, y)$  vale cero si el argumento es un cuatro vector tipo espacio. Esto generaliza el caso especial  $x^0 = y^0$  a un intervalo tipo espacio arbitrario

$$i\Delta(x, y) = 0 \quad \text{para} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (2.44)$$

Mientras que el conmutador mostrado en (2.38) trata sólo separación espacial arbitraria a tiempos iguales su generalización para conmutadores a tiempos diferentes hace referencia a intervalos espacio temporales

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t_x, \vec{x}), \hat{\Pi}(t_y, \vec{y})] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} i\omega_k (u_k(t_x, \vec{x}) u_k^*(t_y, \vec{y}) + u_k^*(t_x, \vec{x}) u_k(t_y, \vec{y})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{i}{2(2\pi)^3} (e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{+ik \cdot (x-y)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{i}{(2\pi)^3} \cos(k \cdot (x-y)), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\Pi}(t_x, \vec{x}), \hat{\Pi}(t_y, \vec{y})] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} (-\omega_k^2) (u_k^*(t_x, \vec{x}) u_k(t_y, \vec{y}) - u_k(t_x, \vec{x}) u_k^*(t_y, \vec{y})) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{(-\omega_k)}{2(2\pi)^3} (e^{+ik \cdot (x-y)} - e^{-ik \cdot (x-y)}) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \frac{i\omega_k}{(2\pi)^3} \sin(k \cdot (x-y)). \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Evidentemente (2.45) y (2.46) para tiempos iguales, se reducen a los correspondientes en (2.38).

### Energía e ímpetu lineal del campo cuántico.

Asociado con la acción (2.31) se tiene el tensor de energía momento

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \partial^\beta \phi - \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L} \\
&= \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - m^2 \phi^2). \tag{2.47}
\end{aligned}$$

De éste podemos extraer información del sistema tal como la energía, al integrar espacialmente la componente tiempo tiempo del tensor de energía momento

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} T_{00} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \left( \frac{1}{2} ((\partial_t \phi)^2 + \nabla \phi \cdot \nabla \phi - m^2 \phi^2) \right). \tag{2.48}$$

A nivel cuántico

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} (\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{a}(k) \hat{a}^\dagger(k)) \omega_k \tag{2.49}$$

y de forma análoga podemos calcular el ímpetu lineal cuántico, utilizando las componentes  $T_{0i}$  del tensor energía momento

$$\hat{P}_i = \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \hat{T}_{0i} = \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 (\partial_0 \hat{\phi} \partial_i \hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} (\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k)) k_i. \tag{2.50}$$

### Estado de vacío.

Como siguiente paso en nuestro estudio, es importante definir el estado de vacío o estado base del campo escalar libre. De las propiedades de los operadores escalera (2.39) introducimos  $|0_k\rangle$  como

$$\hat{a}(k) |0_k\rangle = 0, \text{ para todo } \vec{k} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.51}$$

De igual forma se cumple

$$\langle 0_k | \hat{a}^\dagger(k) = 0, \text{ para todo } \vec{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.52)$$

Evidentemente  $\vec{k}$  es una etiqueta continua y la interpretación del producto  $\otimes_k$  es intuitiva. Es posible formalizar esto usando como espacio una caja en lugar de  $\mathbb{R}^3$  de modo que  $\vec{k} \rightarrow \left( \frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right)$   $n_x, n_y, n_z, \in \mathbb{Z}$ .

El vacío del campo se define entonces como

$$| 0_k \rangle = | 0_{k_1} \rangle | 0_{k_2} \rangle \dots = \otimes_k | 0_k \rangle. \quad (2.53)$$

Los estados excitados del campo se pueden generar usando el operador de subida

$$\hat{a}^\dagger(k_2) | 0_k \rangle = | 0_{k_1} \rangle \left( \hat{a}^\dagger(k_2) | 0_{k_2} \rangle \right) | 0_{k_3} \rangle \dots = | 0_{k_1} \rangle | 1_{k_2} \rangle | 0_{k_3} \rangle \dots = | 0_{k_1}, 1_{k_2}, 0_{k_3} \dots \rangle \quad (2.54)$$

lo cual sugiere el concepto de partícula asociado al campo  $\hat{\phi}$ .

De este modo el operador de número puede expresarse como

$$\hat{N} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dk \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k). \quad (2.55)$$

De aquí en adelante por simplicidad en la notación no usaremos  $\wedge$  sobre los operadores. La interpretación debería de ser clara del contexto.

## 2.4. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniforme acoplado a campo escalar y tasa temporal de función de respuesta

Para estudiar el efecto Unruh consideraremos en el siguiente capítulo un detector acelerado, que interactúa con el campo escalar en su estado base, esto último según un detector inercial. Sin embargo, con el fin de subrayar la relevancia del efecto de la aceleración del detector, conviene primero discutir el caso de un detector inercial. La interacción del detector que sigue una trayectoria  $x^\mu(\tau)$ , con  $\tau$  el tiempo propio, con el campo escalar, se describe usando el siguiente Lagrangiano

$$L_{int} = g \int d\tau m(\tau) \Phi(x(\tau)), \quad (2.56)$$

con  $g$  siendo la constante de acoplamiento y  $m(\tau)$  el momento monopolar del detector.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>El detector en interacción con el campo escalar es un objeto distribuido espacialmente. Similarmente al caso electrostático la energía de interacción puede desarrollarse en torno de un punto de la distribución  $U_{int} = \int_{\Omega} d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = q\Phi(\vec{0}) - \vec{p} \cdot \vec{E} - \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_j E_i + \dots$ ,  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ . Cada orden del desarrollo multipolar escala como el cociente de la longitud característica de la distribución  $\ell$  dividida por la escala de variación  $L$  del campo  $\Phi$  implícita en su derivada. Evidentemente el término monopolar que escala como  $(\frac{\ell}{L})^0$  es el dominante, siempre que  $\frac{\ell}{L} \ll 1$ . En otras palabras suponemos que el tamaño del detector es pequeño comparado con la escala de variación del campo escalar. Adicionalmente nuestro detector está en movimiento lo que agrega la dependencia en el tiempo propio.

El campo escalar tiene estados etiquetados como  $|\Psi\rangle$  mientras que el detector cuenta con niveles energéticos denotados por  $|E_i\rangle, i = 0, 1, \dots$

Para analizar la amplitud de transición de sistema detector + campo  $|E_0, 0_M\rangle \rightarrow |E, \Psi\rangle$ , donde el subíndice  $M$  indica el estado de vacío para un observador inercial en el espacio tiempo de Minkowski, con una constante de acoplamiento  $g$  pequeña, podemos considerar el primer orden en teoría de perturbaciones dependientes del tiempo

$$\langle E, \Psi | E_0, 0_M \rangle = g \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle E, \Psi | m(\tau) \Phi(x(\tau)) | E_0, 0_M \rangle. \quad (2.57)$$

Ahora podemos calcular la probabilidad de transición. Desarrollando en el esquema de Heisenberg el operador  $m(\tau)$  y sumando sobre todos los posibles estados del detector y campo resulta la siguiente probabilidad

$$P(|E_0, 0_M\rangle \rightarrow \{|E, \Psi\rangle\}) = \sum_E g^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 e^{\frac{-i}{\hbar}(E-E_0)(\tau_1-\tau_2)} \times \langle 0_M | \Phi(x(\tau_1)) \Phi(x(\tau_2)) | 0_M \rangle. \quad (2.58)$$

Motivados por la ecuación anterior es posible definir la función respuesta del detector como

$$F(E - E_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 e^{\frac{-i}{\hbar}(E-E_0)(\tau_1-\tau_2)} \langle 0_M | \Phi(x(\tau_1)) \Phi(x(\tau_2)) | 0_M \rangle, \quad (2.59)$$

donde

$$G^+(x(\tau_1)x(\tau_2)) = \langle 0_M | \Phi(x(\tau_1)) \Phi(x(\tau_2)) | 0_M \rangle \quad (2.60)$$

es una función de dos puntos mejor conocida como función de Wightman de frecuencias positivas que es solución a la ecuación de Klein-Gordon homogénea.

Analizamos ahora el lado derecho de (2.60). Usando la forma del campo escalar real (2.37) en el producto de campos involucrado en la función de dos puntos (2.60) así como (2.51) y (2.52) tenemos

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \langle 0_M | \left( \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_x (a_{k_x} u_{k_x}(t_x, \vec{x}) + a_{k_x}^\dagger u_{k_x}^*(t_x, \vec{x})) \right) \times \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_y (a_{k_y} u_{k_y}(t_y, \vec{y}) + a_{k_y}^\dagger u_{k_y}^*(t_y, \vec{y})) \right) | 0_M \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_x \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_y u_{k_x}(t_x, \vec{x}) u_{k_y}^*(t_y, \vec{y}) \langle 0_M | a_{k_x} a_{k_y}^\dagger | 0_M \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_x \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_y u_{k_x}(t_x, \vec{x}) u_{k_y}^*(t_y, \vec{y}) \delta^3(k_x - k_y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{2\omega_k (2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{-i\omega_k(t_x-t_y)}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

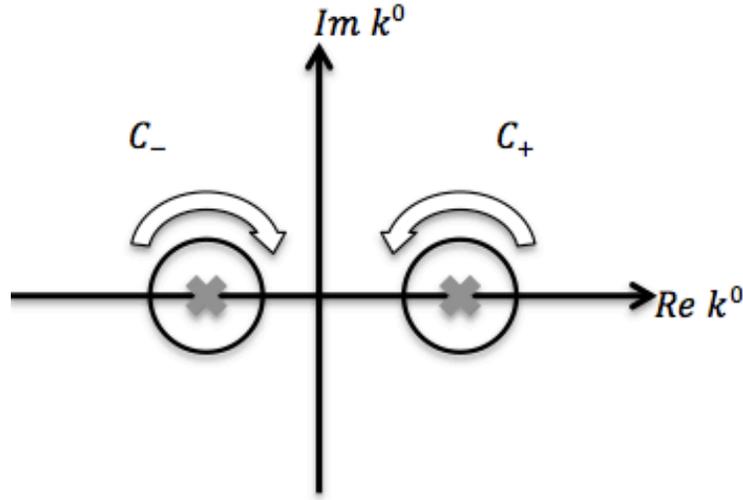


Figura 2.1: Contornos de integración para determinar las funciones de Wightman  $G^\pm$ . El relevante en el caso  $G^+$  es  $C_+$ .

donde en la segunda igualdad usamos (2.39), (2.51) y (2.52).

Ahora, recordando que

$$k^0 = \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.62)$$

podemos reescribir el factor

$$\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_y)}}{2\omega_k} \quad (2.63)$$

en forma integral para expresar  $G^+(x, y)$  como una integral en cuatro dimensiones, es decir,

$$\frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_y)}}{2\omega_k} = \int_{C_+} dk^0 \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik^0(t_x - t_y)}}{k^2 - m^2}, \quad (2.64)$$

donde la única contribución surge del polo en  $k^0 = \omega_k$ . (ver figura 2.1). De esta forma

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{C_+} dk^0 \frac{i}{2\pi} \frac{\exp\left[i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - ik^0(t_x - t_y)\right]}{(k^0)^2 - |\vec{k}|^2} \\ &=: \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{C_+} dk^0 \frac{e^{-ik^0(t_x - t_y)}}{(k^0)^2 - |\vec{k}|^2}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ahora nos restringimos por simplicidad al caso de campo no masivo:  $m = 0$ ,  $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2} = |\vec{k}|$ . En particular esto simplificará el cálculo de la integral (2.65) para una trayectoria dada así como el de la función de respuesta (2.59).

Consideremos coordenadas esféricas  $(k_r, \theta_k, \varphi_k)$

$$k_r = |\vec{k}|, \quad \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = k_r |\vec{x} - \vec{y}| \cos \theta_k, \quad (2.66)$$

en la ecuación (2.61). De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{e^{-i|\vec{k}|(t_x - t_y)} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk_r \int_0^\pi d\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k k_r^2 \frac{\text{sen } \theta_k}{k_r} e^{-ik_r(t_x - t_y)} e^{ik_r |\vec{x} - \vec{y}| \cos \theta_k}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Podemos hacer el cambio de variable  $u = \cos \theta_k$ ,  $du = -\sin \theta_k d\theta_k$  para reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk_r \int_{-1}^1 du \int_0^{2\pi} d\varphi_k k_r e^{-ik_r(t_x - t_y)} e^{ik_r |\vec{x} - \vec{y}| u} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk_r \int_{-1}^1 du (2\pi) k_r e^{-ik_r(t_x - t_y)} e^{ik_r |\vec{x} - \vec{y}| u}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Para garantizar la convergencia de la integral radial recorreremos la parte temporal por un factor de  $-i\Gamma$ ,  $\Gamma > 0$ , de la forma siguiente  $(t_x - t_y) \rightarrow (t_x - t_y - i\Gamma)$

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i |\vec{x} - \vec{y}|} \int_0^\infty dk_r k_r \frac{e^{-ik_r(t_x - t_y - i\Gamma)}}{k_r} \left( e^{ik_r |\vec{x} - \vec{y}|} - e^{-ik_r |\vec{x} - \vec{y}|} \right) \\ &= \frac{-i}{4\pi^2} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left[ \int_0^\infty dk_r e^{-ik_r(t_x - t_y - i\Gamma)} e^{ik_r |\vec{x} - \vec{y}|} - \int_0^\infty dk_r e^{-ik_r(t_x - t_y - i\Gamma)} e^{-ik_r |\vec{x} - \vec{y}|} \right] \\ &= \frac{-i}{i4\pi^2} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left[ \frac{1}{((t_x - t_y - i\Gamma) - |\vec{x} - \vec{y}|)} - \frac{1}{((t_x - t_y - i\Gamma) + |\vec{x} - \vec{y}|)} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{(t_x - t_y - i\Gamma)^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Esta es la función de Wightman de frecuencias positivas en 3+1 dimensiones en el espacio tiempo de Minkowski.

Con  $G^+$  podemos retomar el cálculo de la función de respuesta (2.59). La función respuesta del detector es independiente de las características del detector. Ésta representa las 'partículas' que el detector mide de manera efectiva como resultado del movimiento que realiza. El factor  $\sum_E g^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2$ , involucrado en la probabilidad de transición (2.58), representa la selectividad del detector para este baño de 'partículas' y depende de la estructura interna del detector mismo. El sistema es invariante ante traslaciones temporales en el marco de referencia del detector. Es decir, el detector está en equilibrio con el campo  $\phi$ , entonces el número de cuantos absorbidos por el detector por unidad de tiempo propio es constante. Si dicha tasa de cambio es distinta de cero la transición

de probabilidad (2.58) diverge, ya que la amplitud de transición (2.57) se calcula para un intervalo de tiempo propio infinito. Esto se puede ver claramente en (2.59) pues la función de Wightman de frecuencias positivas sólo depende de la diferencia en tiempos propios. Esta dificultad se resuelve considerando la probabilidad de transición por unidad de tiempo, es decir, usando la tasa de cambio de la función respuesta por unidad de tiempo propio

$$\dot{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{\frac{-i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau} \langle 0_M | \Phi(x(\tau_1))\Phi(x(\tau_2)) | 0_M \rangle, \quad (2.70)$$

donde  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ .

Consideremos ahora el análisis particular de un detector inercial. Comenzamos por estudiar la función de dos puntos involucrada. Con una trayectoria específica para un observador con movimiento uniforme sobre el eje  $x$ , descrita por

$$x = x_0 + \frac{v_x \tau}{\sqrt{1 - v_x^2}}, \quad (2.71)$$

con  $x_0$  y  $v_x$  constantes y con la condición

$$|v_x| < 1. \quad (2.72)$$

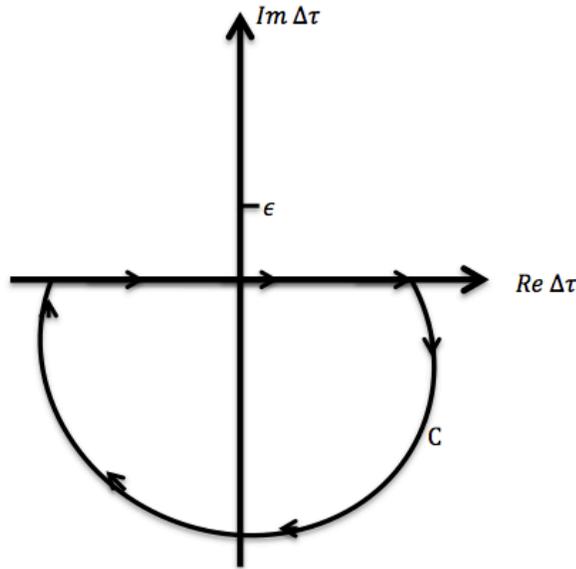


Figura 2.2: Continuación analítica de ec. (2.78) según el contorno C.

Como podemos notar, la ecuación de Wightman para frecuencias positivas (2.69) depende del tiempo coordinado. Sin embargo, en este caso en particular queremos trabajar

con tiempos propios por lo que, a continuación, se da la relación entre tiempos coordenados y tiempos propios. Comenzamos con el elemento de línea invariante que permite relacionar estos dos tiempos

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = d\tau^2, \quad \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \vec{v}_x^2, \quad \vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (2.73)$$

Para el problema que estamos analizando, el detector sólo tiene velocidad en la dirección del eje  $x$ , de este modo tenemos

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - v_x^2}} = dt, \quad dx = v_x dt = v_x \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v_x^2}}, \quad (2.74)$$

o bien al integrar esto

$$\gamma_x \Delta\tau = \Delta t, \quad \Delta x = v_x \gamma_x \Delta\tau, \quad \gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2}}. \quad (2.75)$$

La función de Wightman de frecuencias positivas, reinsertando la constante de Planck, combinada con (2.71) para dos puntos  $(\tau_1, x(\tau_1))$  y  $(\tau_2, x(\tau_2))$ , toma la forma

$$G^+(x, y) = \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\gamma_x(\tau_1 - \tau_2) - \Gamma)^2 - (v_x \gamma_x \Delta\tau)^2}. \quad (2.76)$$

Usando  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$  y considerando  $v_x \ll 1$  llegamos a

$$\begin{aligned} G^+(x, y) &= \frac{-\hbar}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\gamma_x^2 \Delta\tau^2 - 2i\Gamma\gamma_x \Delta\tau + (i\Gamma)^2 - v_x^2 \gamma_x^2 \Delta\tau^2} \right) \\ &= \frac{-\hbar}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\gamma_x^2 \Delta\tau^2 (1 - v_x^2) - 2i\Gamma\gamma_x \Delta\tau - \Gamma^2} \right) \\ &\simeq \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau - i\Gamma)^2}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

De esta manera podemos sustituir (2.77) en la ecuación (2.70) para calcular la tasa de cambio por unidad de tiempo propio de la función respuesta del detector inercial como

$$\dot{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(E - E_0)\Delta\tau} \left( \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau - i\Gamma)^2} \right), \quad (2.78)$$

la cual tiene un polo simple en  $\Delta\tau = i\Gamma$ .

La necesidad de la inclusión del término imaginario fue la convergencia de la integral en (2.69). Para calcular (2.78) usamos una continuación analítica y el teorema de los residuos.

Para decidir el contorno adecuado de integración procedemos a analizar la exponencial involucrada en la integral (2.78)

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau} &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)(\text{Re}(\Delta\tau)+i\text{Im}(\Delta\tau))} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\text{Re}(\Delta\tau)} e^{\frac{1}{\hbar}(E-E_0)\text{Im}(\Delta\tau)}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Notamos que la parte imaginaria de la variable  $\Delta\tau$  es positiva en el semiplano complejo superior dando lugar a una integral divergente (2.78). Por otro lado en el semiplano complejo inferior la exponencial es decreciente y la integral de interés converge. Claramente el contorno adecuado es el que cierra por abajo.

Finalmente nuestro argumento implica lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{F}(E - E_0) &= \int_{\mathbb{R}} d\Delta\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\text{Re}(\Delta\tau)} e^{\frac{1}{\hbar}(E-E_0)\text{Im}(\Delta\tau)} \left( \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau - i\Gamma)^2} \right) \\ &= \int_C d\Delta\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\text{Re}(\Delta\tau)} e^{\frac{1}{\hbar}(E-E_0)\text{Im}(\Delta\tau)} \left( \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau - i\Gamma)^2} \right) \\ &= -\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r d\Delta\tau \frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau}}{(\Delta\tau - i\Gamma)^2} \\ &\quad + i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \frac{\hbar r e^{i\varphi}}{4\pi^2} \frac{e^{-\frac{i(E-E_0)r \cos(\varphi)}{\hbar}} e^{\frac{(E-E_0)r \sin(\varphi)}{\hbar}}}{((r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)) - i\Gamma)^2}, \quad \Delta\tau = r e^{i\varphi} \\ &= -2\pi i(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

En conclusión la tasa de transición del detector en movimiento uniforme acoplado al campo escalar en estado de vacío es nula; no registra efecto alguno al orden más bajo.

# 3

## Campo escalar cuántico y marcos acelerados en relatividad especial.

Con el fin de analizar la respuesta de un detector en movimiento rectilíneo con aceleración constante en este capítulo recordaremos las propiedades básicas de la cinemática de una partícula relativista que presenta este movimiento en el espacio tiempo de Minkowski. Con esta trayectoria evaluaremos la función de Wightman de frecuencias positivas para determinar la tasa de cambio de la función de respuesta del detector acelerado acoplado a un campo escalar sin masa en el estado de vacío según un observador inercial. Describiremos el sentido en que esta tasa de cambio puede interpretarse como asociada a un baño térmico cuya temperatura depende de la aceleración. Este resultado es conocido como efecto Unruh. Adicionalmente discutiremos un método alternativo a la continuación analítica de la función de Wightman para la regularización de la divergencia que presenta. El método alternativo es uno de calibración con el que se sustrae el efecto divergente refiriendo la función de Wightman a su forma en las coordenadas en el marco acelerado de Rindler.

### **3.1. Partícula clásica con movimiento uniformemente acelerado**

Para una partícula relativista las magnitudes cinemáticas básicas son su posición espacio temporal, cuatro velocidad y cuatro aceleración, expresadas usando el tiempo

propio  $\tau$  como

$$x^\mu(\tau), \quad u^\mu(\tau) := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu(\tau) := \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad dt = \gamma d\tau, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}, \quad \vec{v}^2 = \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2. \quad (3.1)$$

Considerando que el movimiento rectilíneo tiene lugar en la dirección  $X$  nuestras ecuaciones (3.1) toman la forma

$$x(\tau), \quad t(\tau), \quad u^0 = \frac{dt}{d\tau}, \quad u^x = \frac{dx}{d\tau}, \quad a^0 = \frac{du^0}{d\tau}, \quad a^x = \frac{du^x}{d\tau}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^x{}^2}}, \quad v^x = \frac{dx}{dt}. \quad (3.2)$$

Enseguida impondremos la condición de aceleración constante. Observamos que las partículas masivas tienen una cuatro velocidad tipo tiempo  $u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = 0$  pues se propagan con velocidades inferiores a la velocidad de la luz dentro del cono de luz correspondiente. En consideración al tiempo propio

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} \\ &= \frac{ds^2}{d\tau^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Derivando respecto al tiempo propio la ecuación (3.3) y usando (3.1) vemos que

$$a^\mu u_\mu = 0, \quad (3.4)$$

indicando que la cuatro aceleración es ortogonal a la cuatro velocidad y por tanto tipo espacio<sup>1</sup>. Por esta razón podemos expresar la norma de la cuatro aceleración, en nuestro caso constante, como

$$a^\mu a_\mu = -\alpha^2, \quad \alpha = \text{constante}. \quad (3.5)$$

La condición de cuatro aceleración constante para la partícula, ecuación (3.5), corresponde a una aceleración constante medida con respecto a un marco momentáneamente comóvil (MMC) con la partícula,  $[\vec{v}]_{MMC} = \vec{0}$ . Esto puede verse como sigue. Usando una base ortonormal  $\{e_a^\mu, e_a^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab}\}$  para un MMC inercial

$$e_0^\mu = u^\mu = \delta_0^\mu; \quad (3.6)$$

la ortogonalidad entre cuatro aceleración y cuatro velocidad (3.4) implica en este caso que

$$a^0|_{MMC} = 0. \quad (3.7)$$

Por otro lado la parte espacial de la cuatro aceleración satisface las siguientes relaciones

$$a^x = \frac{du^x}{d\tau} = \frac{d(\gamma v^x)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d(\gamma v^x)}{dt} = \gamma \left( \gamma^3 v^x a^x + \gamma \frac{dv^x}{dt} \right) \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>Se verifica directamente que  $a^0 u^0 - \vec{a} \cdot \vec{u} = 0$  junto con  $(u^0)^2 - \vec{u}^2 > 0$  implican  $(a^0)^2 - \vec{a}^2 < 0$

donde hemos usado (3.1) y (3.2). De este modo obtenemos en el MMC

$$[a^x]_{MMC} = \left[ \gamma \left( \gamma^3 v^x a^x + \gamma \frac{dv^x}{dt} \right) \right]_{MMC} = \left[ \frac{dv^x}{dt} \right]_{MMC}. \quad (3.9)$$

Finalmente el carácter constante de la cuatro aceleración (3.5) toma la forma en el MMC, ecuaciones (3.7) y (3.9),

$$-\alpha^2 = - \left[ \left( \frac{dv^x}{dt} \right)^2 \right]_{MMC} \Rightarrow \left[ \frac{dv^x}{dt} \right]_{MMC} = \alpha. \quad (3.10)$$

Evidentemente hay una secuencia continua de MMC para cada uno de los cuales se cumple la relación anterior.

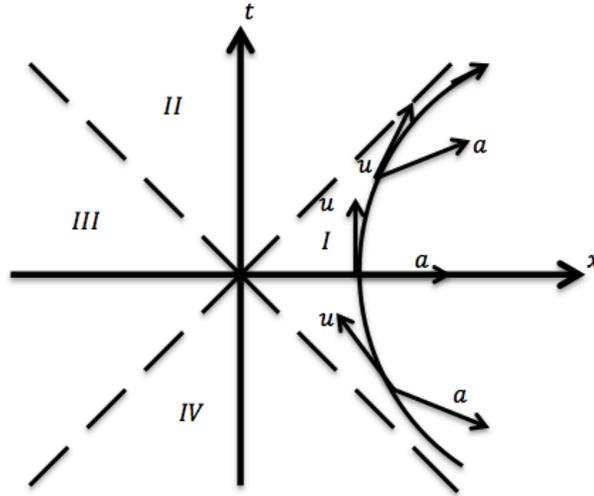


Figura 3.1: Movimiento hiperbólico descrito por una partícula acelerada.

Pasamos ahora a plantear y resolver las ecuaciones para la trayectoria de la partícula acelerada. Las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado (3.3)-(3.5) escritas en términos de las componentes no triviales de velocidad y aceleración toman la forma, respectivamente,

$$u^0{}^2 - u^x{}^2 = 1, \quad (3.11)$$

$$a^0 u^0 - a^x u^x = 0, \quad (3.12)$$

$$a^0{}^2 - a^x{}^2 = -\alpha^2. \quad (3.13)$$

Para calcular la parte temporal de la cuatro aceleración usamos (3.13) y (3.12) obteniendo

$$a^0{}^2 = -\alpha^2 + \frac{u^0{}^2 a^0{}^2}{u^x{}^2}. \quad (3.14)$$

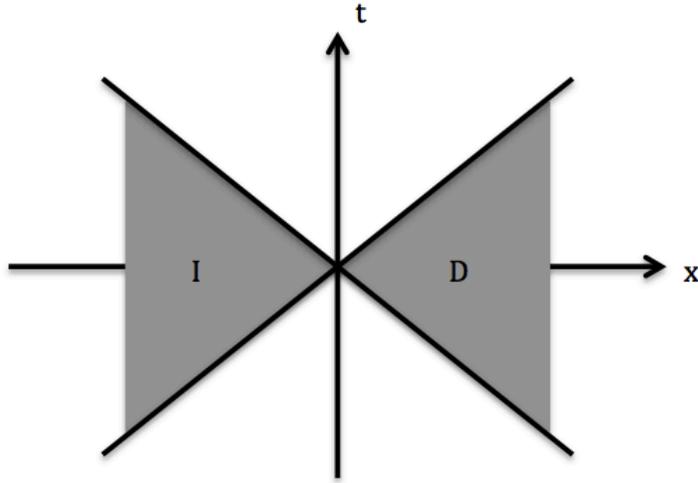


Figura 3.2: Cuñas izquierda y derecha de Rindler.

Usando la ecuación (3.11) podemos eliminar  $u^{0\prime 2}$  de la ecuación anterior resultando

$$a^{0\prime 2} = \alpha^2 u^{x\prime 2}. \quad (3.15)$$

De este modo una de las ecuaciones a resolver es

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = \alpha u^x. \quad (3.16)$$

De manera análoga la parte espacial de la cuatro aceleración toma la forma

$$a^x = \frac{du^x}{d\tau} = \alpha u^0. \quad (3.17)$$

Nuestro problema se reduce a resolver el sistema de ecuaciones acopladas (3.16) y (3.17). Substituimos  $u^0$  de (3.17) en (3.16) para obtener una ecuación de segundo orden en  $u^x$

$$\frac{d^2 u^x}{d\tau^2} - \alpha^2 u^x = 0, \quad (3.18)$$

cuya solución general es

$$u^x(\tau) = C_1 e^{\alpha\tau} + C_2 e^{-\alpha\tau}. \quad (3.19)$$

Las constantes involucradas en la solución a la parte espacial de esta cuatro velocidad se obtienen usando las condiciones iniciales

$$\tau_{ini} = \tau_0, \quad u^x(\tau_0) = u_{ini}^x, \quad \frac{du^x}{d\tau}(\tau_0) = a_{ini}^x. \quad (3.20)$$

Usando (3.20) en (3.19) obtenemos la solución

$$\begin{aligned} u^x(\tau) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} + u_{ini}^x \right) e^{\alpha(\tau-\tau_0)} - \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} - u_{ini}^x \right) e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \right] \\ &= u_{ini}^x \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) + \frac{a_{ini}^x}{\alpha} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para calcular la posición de la partícula en función del tiempo propio integramos la ecuación correspondiente en (3.2) considerando (3.21). Así obtenemos

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_{ini} + \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \left[ \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} + u_{ini}^x \right) e^{\alpha(\tau-\tau_0)} - \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} - u_{ini}^x \right) e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \right] \\ &= x_{ini} + \frac{1}{2\alpha} \left[ \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} + u_{ini}^x \right) (e^{\alpha(\tau-\tau_0)} - 1) + \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} - u_{ini}^x \right) (e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} - 1) \right] \\ &= x_{ini} + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} + u_{ini}^x \right) e^{\alpha(\tau-\tau_0)} + \left( \frac{a_{ini}^x}{\alpha} - u_{ini}^x \right) e^{-\alpha(\tau-\tau_0)} \right] - \frac{a_{ini}^x}{\alpha} \right\} \\ &= x_{ini} + \frac{u_{ini}^x}{\alpha} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) + \frac{a_{ini}^x}{\alpha^2} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para calcular el tiempo coordenado expresado en términos del tiempo propio consideramos las relaciones entre componentes de la cuatro aceleración y la cuatro velocidad en las condiciones iniciales

$$a_{ini}^0 = \alpha u_{ini}^x, \quad a_{ini}^x = \alpha u_{ini}^0, \quad u_{ini}^0{}^2 - u_{ini}^x{}^2 = 1. \quad (3.23)$$

De estas podemos reexpresar la parte espacial de la cuatro aceleración como sigue

$$a_{ini}^x = \sqrt{\alpha^2 + a_{ini}^0{}^2}. \quad (3.24)$$

Al integrar la ecuación para  $u^0$  (3.16) combinada con (3.21), y usando las condiciones de ortogonalidad y normalización de los datos iniciales (3.23), obtenemos la siguiente solución

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= u_{ini}^0 + \alpha \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \left[ u_{ini}^x \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) + \frac{a_{ini}^x}{\alpha} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) \right] \\ &= u_{ini}^0 + u_{ini}^x \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) + \frac{a_{ini}^x}{\alpha} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Finalmente obtenemos el tiempo inercial usando la ecuación correspondiente de (3.2) y (3.25)

$$\begin{aligned} t(\tau) &= t_{ini} + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \left\{ u_{ini}^0 + u_{ini}^x \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) + \frac{a_{ini}^x}{\alpha} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] \right\} \\ &= t_{ini} + \frac{u_{ini}^x}{\alpha} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] + \frac{a_{ini}^x}{\alpha^2} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para conocer la forma de la trayectoria tomamos los cuadrados de (3.22) y (3.26) y los restamos

$$\begin{aligned}
(t(\tau) - t_{ini})^2 - (x(\tau) - x_{ini})^2 &= \frac{1}{\alpha^2} u_{ini}^{x^2} \left[ \cosh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) - 2 \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) + 1 \right] \\
&\quad + \frac{a_{ini}^{x^2}}{\alpha^4} \sinh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) \\
&\quad + \frac{2u_{ini}^x a_{ini}^x}{\alpha^2} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] \\
&\quad - \frac{a_{ini}^{x^2}}{\alpha^4} \left[ \cosh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) - 2 \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) + 1 \right] \\
&\quad - \frac{u_{ini}^{x^2}}{\alpha^2} \sinh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) \\
&\quad - \frac{2u_{ini}^x a_{ini}^x}{\alpha^3} \sinh(\alpha(\tau - \tau_0)) [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1]. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Podemos simplificar esta ecuación usando las restricciones del sistema según (3.23) y (3.24), agrupando términos y usando propiedades de las funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}
(t(\tau) - t_{ini})^2 - (x(\tau) - x_{ini})^2 &= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{a_{ini}^{x^2}}{\alpha^2} - u_{ini}^{x^2} \right) \left\{ \sinh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) \right. \\
&\quad \left. - \cosh^2(\alpha(\tau - \tau_0)) + 2 \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{a_{ini}^{x^2}}{\alpha^2} - u_{ini}^{x^2} \right) [2 \cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 2] \\
&= \frac{2}{\alpha^2} \left( \frac{\alpha^2 u_{ini}^{0^2}}{\alpha^2} - u_{ini}^{x^2} \right) [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] \\
&= \frac{2}{\alpha^2} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1]. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Es posible reescribir el miembro derecho de la última igualdad en la ecuación anterior al multiplicar (3.22) por el factor  $\frac{a_{ini}^x}{\alpha^2}$  y restar el producto de (3.26) por el factor  $\frac{u_{ini}^x}{\alpha}$  como se muestra enseguida

$$\begin{aligned}
\frac{a_{ini}^x}{\alpha^2} x(\tau) - \frac{u_{ini}^x}{\alpha} t(\tau) &= \frac{a_{ini}^x}{\alpha^2} x_{ini} - \frac{u_{ini}^x}{\alpha} t_{ini} + \left( \frac{a_{ini}^{x^2}}{\alpha^4} - \frac{u_{ini}^{x^2}}{\alpha^2} \right) [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] \\
&= \left( \frac{u_{ini}^{0^2}}{\alpha^2} - \frac{u_{ini}^{x^2}}{\alpha^2} \right) [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1] \\
&= \frac{1}{\alpha^2} [\cosh(\alpha(\tau - \tau_0)) - 1]. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos (3.29) en (3.28)

$$(t(\tau) - t_{ini})^2 - (x(\tau) - x_{ini})^2 = 2 \left\{ \frac{u_{ini}^{0^2}}{\alpha} (x(\tau) - x_{ini}) - \frac{u_{ini}^x}{\alpha} (t(\tau) - t_{ini}) \right\}, \quad (3.30)$$

y completando los cuadrados para la parte temporal y espacial, respectivamente, obtenemos

$$\left[ t(\tau) - \left( t_{ini} - \frac{u_{ini}^x}{\alpha} \right) \right]^2 - \left[ x(\tau) - \left( x_{ini} - \frac{u_{ini}^0}{\alpha} \right) \right]^2 = -\frac{u_{ini}^0{}^2}{\alpha^2} + \frac{u_{ini}^x{}^2}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.31)$$

Por simplicidad en los cálculos de la siguiente sección estudiamos el caso particular en que las condiciones iniciales (3.23) son de la forma siguiente

$$\tau_0 = 0, \quad t_{ini} = 0, \quad x_{ini} = \frac{1}{\alpha}, \quad u_{ini}^0 = 1, \quad u_{ini}^x = 0, \quad a_{ini}^0 = 0, \quad a_{ini}^x = \alpha, \quad (3.32)$$

que pueden interpretarse convenientemente considerando

$$v^x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx}{d\tau} = \frac{u^x}{u^0}, \quad (3.33)$$

es decir, tenemos velocidad coordenada inercial inicial nula, lo cual implica a la vez de acuerdo con (3.23) parte temporal de aceleración inicial nula y parte espacial de aceleración inicial dada por la aceleración propia constante.

Imponiendo las condiciones iniciales anteriores las cantidades de interés, ecuaciones (3.21), (3.22), (3.25) y (3.26), se expresan como

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \quad x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau), \quad (3.34)$$

$$u^0(\tau) = \cosh(\alpha\tau), \quad u^x = \sinh(\alpha\tau), \quad (3.35)$$

$$a^0(\tau) = \alpha \sinh(\alpha\tau), \quad a^x(\tau) = \alpha \cosh(\alpha\tau). \quad (3.36)$$

La ecuación de la trayectoria con los datos iniciales (3.32) es entonces

$$x^2(\tau) - t^2(\tau) = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.37)$$

Es interesante observar que, de acuerdo con las ecuaciones (3.33) y (3.35), la velocidad de una partícula uniformemente acelerada en movimiento rectilíneo puede escribirse como

$$v^x = \tanh(\alpha\tau) \leq 1, \quad (3.38)$$

es decir, su magnitud está acotada por la velocidad de la luz.

## 3.2. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta

Con el fin de calcular la tasa de cambio respecto al tiempo propio de la función respuesta del detector para un observador con aceleración constante estudiamos la función

de Wightman para frecuencias positivas (2.69) evaluada en la trayectoria de partícula acelerada expresada en coordenadas inerciales (3.34)-(3.35). El intervalo requerido en la función (2.69) toma la forma

$$\begin{aligned} I &= (t_1 - t_2 - i\Gamma)^2 - (x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left\{ [\sinh(\alpha\tau_1) - \sinh(\alpha\tau_2) - \alpha i\Gamma]^2 - [\cosh(\alpha\tau_1) - \cosh(\alpha\tau_2)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Podemos reescribir el miembro derecho de la igualdad anterior haciendo uso de las propiedades de las funciones hiperbólicas [21] (página 84, secciones 4.5.42 y 4.5.44)

$$\sinh(x) - \sinh(y) = 2 \left[ \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \right], \quad (3.40)$$

$$\cosh(x) - \cosh(y) = 2 \left[ \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]. \quad (3.41)$$

Además, para simplificar, introducimos los siguientes cambios de variable

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2, \quad \tilde{\tau} = \tau_1 + \tau_2. \quad (3.42)$$

Con estos elementos, el intervalo se reexpresa como sigue

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left[ 2 \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) - \alpha i\Gamma \right]^2 - \left[ 2 \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{4}{\alpha^2} \left\{ \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) - 2 \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) + \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) \right] \right\} \\ &= \frac{4}{\alpha^2} \left\{ \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) \left[ \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) - \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \right] - 2 \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) + \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{\alpha^2} \left\{ \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) - 2 \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) + \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Completamos el binomio cuadrado perfecto en la función seno hiperbólico anterior para obtener

$$I = \frac{4}{\alpha^2} \left\{ \left[ \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) - \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right) \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) \right]^2 - \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right)^2 \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{\tau}\right) + \left(\frac{i\alpha\Gamma}{2}\right)^2 \right\}. \quad (3.44)$$

Por conveniencia reescribimos el término  $\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right)$  como sigue

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right) &= \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\Delta\tau - i\epsilon + i\epsilon)\right) \\ &= \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\Delta\tau - i\epsilon)\right) \cosh\left(\frac{i\alpha}{2}\epsilon\right) \\ &\quad + \cosh\left(\frac{\alpha}{2}(\Delta\tau - i\epsilon)\right) \sinh\left(\frac{i\alpha}{2}\epsilon\right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

y sustituimos (3.45) en (3.44) llegando a

$$I = \frac{4}{\alpha^2} \left\{ \left[ \sinh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) \cosh \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) + \cosh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) \sinh \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) - \left( \frac{i\alpha\Gamma}{2} \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \tilde{\tau} \right) \right]^2 - \left( \frac{i\alpha\Gamma}{2} \right)^2 \cosh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \tilde{\tau} \right) + \left( \frac{i\alpha\Gamma}{2} \right)^2 \right\}. \quad (3.46)$$

Imponiendo las condiciones  $\Gamma, \epsilon \ll 1$  podemos aproximar al intervalo así

$$I \approx \frac{4}{\alpha^2} \left[ \sinh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) + \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) - \left( \frac{i\alpha\Gamma}{2} \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \tilde{\tau} \right) \right]^2, \quad (3.47)$$

donde el segundo término, con las condiciones para  $\Gamma$  y  $\epsilon$ , se reduce a

$$\begin{aligned} \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) &\approx \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \left[ \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \Delta\tau \right) - \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \sinh \left( \frac{\alpha}{2} \Delta\tau \right) \right] \\ &\approx \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \Delta\tau \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

De este modo el intervalo se expresa convenientemente como

$$I \approx \frac{4}{\alpha^2} \left[ \sinh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right) + \left( \frac{i\alpha}{2} \epsilon \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau) \right) - \left( \frac{i\alpha\Gamma}{2} \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \tilde{\tau} \right) \right]^2. \quad (3.49)$$

De esta última relación obtenemos una condición para  $\epsilon$  y  $\Gamma$ , que deben ser positivas, incluyendo una función positiva de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , es decir,

$$\frac{\alpha}{2} i\epsilon = \frac{i\Gamma \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \tilde{\tau} \right)}{2 \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \Delta\tau \right)}. \quad (3.50)$$

Finalmente la expresión del intervalo que usaremos es

$$I \approx \frac{4}{\alpha^2} \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right), \quad \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (3.51)$$

Para calcular la función de Wightman para frecuencias positivas hacemos uso del intervalo espacio temporal, antes evaluado, ecuación (3.51), en (2.69) y obtenemos

$$\langle 0_M | \Phi(x(\tau_1)) \Phi(x(\tau_2)) | 0_M \rangle = \frac{-\hbar}{4\pi^2} \frac{\left( \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right)}. \quad (3.52)$$

Ahora, sustituimos (3.52) en la ecuación de tasa de cambio respecto al tiempo propio de la función respuesta (2.70) del detector que toma la forma

$$\dot{F}(E - E_0) = \frac{-\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(E - E_0)\Delta\tau} \frac{\left( \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} (\Delta\tau - i\epsilon) \right)}, \quad (3.53)$$

y que contiene un polo de segundo orden en

$$\Delta\tau = i\epsilon. \quad (3.54)$$

Con el fin de resolver la integral del miembro derecho de la ecuación (3.53) debemos utilizar el teorema de los residuos para lo cual primero necesitamos elegir adecuadamente un contorno de integración. Reescribimos la exponencial involucrada en la tasa de cambio de la función respuesta como sigue

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau} &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)(\text{Re}(\Delta\tau)+i\text{Im}(\Delta\tau))} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\text{Re}(\Delta\tau)} e^{\frac{1}{\hbar}(E-E_0)\text{Im}(\Delta\tau)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

La parte imaginaria de la variable  $\Delta\tau$  es positiva en el semiplano complejo superior lo cual da lugar a una integral divergente (3.53), mientras que en el semiplano complejo inferior la exponencial es decreciente y por lo tanto la integral es convergente. Entonces, usando este criterio de convergencia podemos considerar el contorno que cierra por abajo.

Tomamos como punto de partida de nuestro análisis la identidad para la función cosecante (sección 1.422 fórmula 4 de la referencia [20])

$$\text{cosec}^2(\pi x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}. \quad (3.56)$$

Si ahora consideramos la continuación analítica con un ángulo  $x = \frac{iy}{\pi}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \text{csch}^2(y) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{iy}{\pi} - k\right)^2} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-\pi^2)}{(y + i\pi k)^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y + i\pi k)^2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En nuestro caso el ángulo es  $\frac{\alpha}{2}(\Delta\tau - i\epsilon)$ , entonces se tiene

$$\text{csch}^2\left(\frac{\alpha}{2}(\Delta\tau - i\epsilon)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\Delta\tau - i\epsilon + 2\pi i\frac{k}{\alpha}\right)}. \quad (3.58)$$

Sustituyendo (3.58) en (3.53) llegamos a la siguiente expresión para la tasa de la función de respuesta

$$\begin{aligned} \dot{F}(E - E_0) &= -\frac{\hbar\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\Delta\tau - i\epsilon + 2\pi i\frac{k}{\alpha}\right)} \right) \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau}}{\left(\Delta\tau - i\epsilon + 2\pi i\frac{k}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Esta relación nos permite reescribir los polos (3.54) como

$$\Delta\tau = i\epsilon - 2\pi i \frac{k}{\alpha} = i \left( \epsilon - 2\pi \frac{k}{\alpha} \right). \quad (3.60)$$

Una vez determinado el contorno de integración, como aquel que cierra por abajo, y

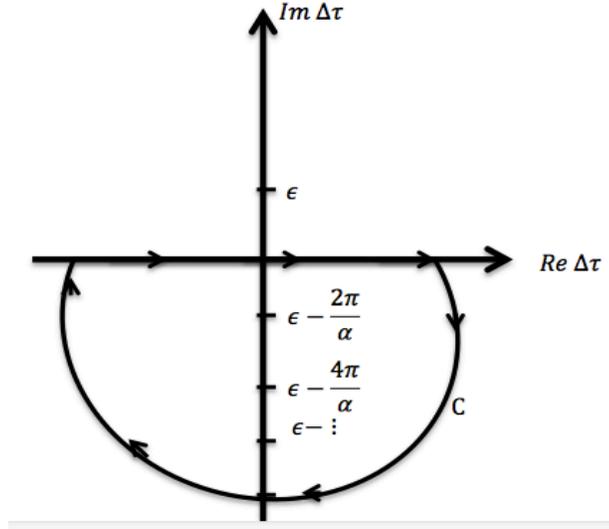


Figura 3.3: Continuación analítica de la ecuación (3.59) según contorno C.

reexpresado los polos de manera conveniente sabemos que sólo contribuirán los valores de  $k = 1, \dots, +\infty$ . El polo con  $k = 0$  no se considera porque está en el semiplano superior y, por lo tanto, fuera del contorno de integración.

Del teorema de los residuos para en un contorno  $C$ , ( ver figura 3.3), y con polos de segundo orden, (página 510 de la referencia [22]) sabemos que se cumple la siguiente relación

$$\int_C d\zeta \frac{e^{-i\beta\zeta}}{(\zeta + i\gamma)^2} = -2\pi\beta e^{-\beta\gamma}, \quad \beta, \gamma > 0. \quad (3.61)$$

Ahora usaremos (3.61) en (3.59) y vemos que

$$\dot{F}(E - E_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (E - E_0) e^{-(E-E_0) \frac{2\pi k}{\hbar\alpha}}. \quad (3.62)$$

Además, considerando la serie geométrica

$$\sum_{r=1}^{\infty} e^{-br} = \frac{1}{e^b - 1}, \quad (3.63)$$

se obtiene finalmente la tasa de cambio de la función respuesta respecto al tiempo propio en la forma

$$\dot{F}(E - E_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{(E - E_0)}{e^{\frac{2\pi(E-E_0)}{\hbar\alpha}} - 1}. \quad (3.64)$$

La tasa de cambio por unidad de tiempo propio permite calcular la probabilidad de transición entre estados  $|E_0, 0_M\rangle \rightarrow |E, \Psi\rangle$ . Utilizando (2.58) y (3.64) esta probabilidad por unidad de tiempo propio es

$$\dot{P}(|E_0, 0_M\rangle \rightarrow \{|E, \Psi\rangle\}) = \frac{g^2}{2\pi} \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{(E - E_0)}{e^{\frac{2\pi(E-E_0)}{\hbar\alpha}} - 1}. \quad (3.65)$$

Comparemos con el espectro de la densidad espectral de energía para un cuerpo negro. Podemos concluir que el detector observa un *baño* térmico con temperatura asociada

$$T = \frac{\alpha \hbar}{2\pi k_B}, \quad (3.66)$$

donde  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$  es la constante de Boltzmann.

### 3.3. Método alternativo para el análisis del detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta

Ahora estudiamos una alternativa al método de continuación analítica para remover las divergencias de la tasa de cambio de la función de respuesta del detector. Para esto primero analizamos las coordenadas de Rindler  $(\eta, \zeta)$ . Consideremos la partícula con aceleración constante moviéndose en la cuña derecha de Rindler ( $D$ ), (ver figuras 3.2, 3.4),

$$t = \frac{1}{a} e^{a\zeta} \sinh(a\eta), \quad (3.67)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\zeta} \cosh(a\eta), \quad (3.68)$$

$$y = y, \quad (3.69)$$

$$z = z, \quad (3.70)$$

con las coordenadas de Rindler  $(\eta, \zeta)$  que cumplen las relaciones

$$\eta = \frac{\alpha}{a} \tau, \quad (3.71)$$

$$\zeta = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{a}{\alpha} \right). \quad (3.72)$$

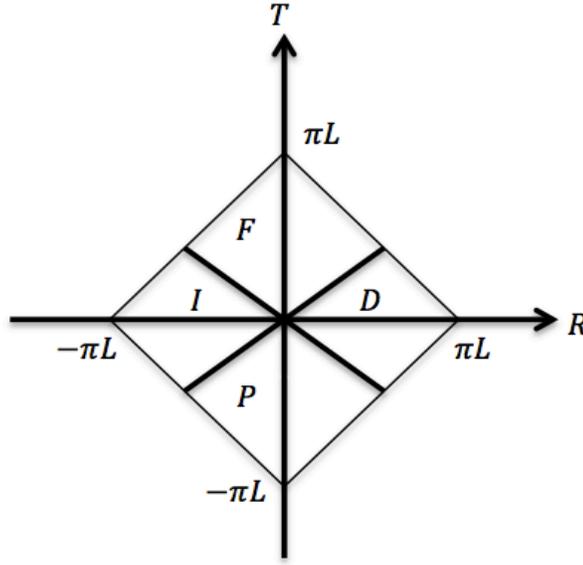


Figura 3.4: Cuñas de Rindler

Aquí  $a$  es una constante y las coordenadas de Rindler satisfacen  $x > |t|$ , tienen dimensiones dadas por  $[\zeta] = [L]$ ,  $[\eta] = [T]$ ,  $\left[\frac{1}{a}\right] = [\alpha] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$  y rangos  $-\infty < \eta < \infty$ ,  $-\infty < \zeta < \infty$ .

Entonces, la trayectoria descrita por una partícula, restringida a  $y = 0$ ,  $z = 0$  es

$$t^2 - x^2 = -\frac{1}{a^2}e^{2a\zeta}. \quad (3.73)$$

En estas coordenadas el intervalo espacio temporal toma la forma

$$ds^2 = e^{2a\zeta} (d\eta^2 - d\zeta^2) - dx_{\perp}^2, \quad (3.74)$$

donde  $dx_{\perp}^2 = dy^2 + dz^2$ .

La ecuación de Klein-Gordon sin masa (2.15), en el espacio tiempo de Minkowski, adoptando coordenadas de Rindler (3.67)-(3.70) se expresa como sigue

$$\square\phi = e^{-2a\zeta} \left( \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - e^{2a\zeta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\perp}^2} \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - e^{2a\zeta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\perp}^2} \right) \phi = 0. \quad (3.75)$$

Para el campo escalar sin masa las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon en coordenadas  $(\eta, \zeta)$  permite expresarlo como

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_{\perp} \left( b_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^{(1)} I u_{\omega, \vec{k}_{\perp}} + b_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^{(1)\dagger} I u_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^* + b_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^{(2)} D u_{\omega, \vec{k}_{\perp}} + b_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^{(2)\dagger} D u_{\omega, \vec{k}_{\perp}}^* \right), \quad (3.76)$$

donde  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger}$  y  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)}$  son los operadores de creación y aniquilación válidos en la cuña derecha de Rindler ( $D$ ), de la misma manera  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger}$  y  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)}$  representan los operadores de creación y aniquilación válidos en la cuña izquierda de Rindler ( $I$ ). El campo está desarrollado en términos de modos en sus respectiva cuñas, como se muestra enseguida

$${}^D u_{\omega, \vec{k}_\perp} = \begin{cases} 0, & \text{en } I \\ \sqrt{\frac{\sinh(\frac{\pi\omega}{a})}{4\pi^4 a}} K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\zeta}\right) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - i\omega\eta}, & \text{en } D \end{cases}, \quad (3.77)$$

$${}^I u_{\omega, \vec{k}_\perp} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sinh(\frac{\pi\omega}{a})}{4\pi^4 a}} K_{\frac{i\omega}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\tilde{\zeta}}\right) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - i\omega\tilde{\eta}}, & \text{en } I \\ 0, & \text{en } D \end{cases}, \quad (3.78)$$

donde  $\omega = \sqrt{k_x^2 + \vec{k}_\perp^2}$  y la derivación de estos modos se estudia en el apéndice A, siguiendo [7].

Los operadores cumplen con el álgebra de conmutadores a tiempos iguales

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\Pi(x), \Pi(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\hat{\phi}(x), \Pi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.79)$$

los cuales corresponden con los conmutadores para  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)}$ ,  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)}$ ,  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger}$  y  $b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger}$  dados por

$$[b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)}] = 0, \quad [b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)\dagger}] = 0, \quad [b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)\dagger}] = \delta(\omega - \omega')\delta^{(3)}(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp), \quad (3.80)$$

$$[b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)}] = 0, \quad [b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)\dagger}] = 0, \quad [b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)}, b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)\dagger}] = \delta(\omega - \omega')\delta^{(3)}(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp). \quad (3.81)$$

El vacío del campo se define entonces como

$$|0_R\rangle = |0_{k_{I_1}}\rangle \cdots |0_{k_{D_1}}\rangle \cdots = \otimes_k |0_{k_I}\rangle \otimes_k |0_{k_D}\rangle, \quad (3.82)$$

y los estados excitados se pueden generar usando el operador de ascenso

$$b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger}(k_{I_2}) |0_{k_I}\rangle = |0_{k_{I_1}}\rangle \left( b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger}(k_{I_2}) |0_{k_{I_2}}\rangle \right) |0_{k_{I_3}}\rangle \cdots = |0_{k_{I_1}}, 1_{k_{I_2}}, 0_{k_{I_3}} \cdots\rangle, \quad (3.83)$$

$$b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger}(k_{D_2}) |0_{k_D}\rangle = |0_{k_{D_1}}\rangle \left( b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger}(k_{D_2}) |0_{k_{D_2}}\rangle \right) |0_{k_{D_3}}\rangle \cdots = |0_{k_{D_1}}, 1_{k_{D_2}}, 0_{k_{D_3}} \cdots\rangle \quad (3.84)$$

lo cual sugiere el concepto de partícula asociado al campo  $\Phi$ .

De este modo los respectivos operadores de número pueden expresarse como se muestra a continuación. Para la cuña derecha de Rindler ( $D$ ) es

$$N \equiv \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger} b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)}, \quad (3.85)$$

<sup>2</sup>La cuña izquierda de Rindler (I) cumple con las siguientes condiciones en sus coordenadas:  $-x > |t|$ ,  $ds^2 = e^{2a\tilde{\zeta}} (d\tilde{\eta}^2 - d\tilde{\zeta}^2) - dy^2 - dz^2$ ,  $-\infty < \tilde{\eta} < \infty$ ,  $-\infty < \tilde{\zeta} < \infty$ .

mientras que, en la cuña izquierda de Rindler ( $I$ ), se define el operador de número como

$$N \equiv \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger} b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)}. \quad (3.86)$$

Teniendo la descripción del campo en las coordenadas de Rindler estudiamos la respuesta del detector con aceleración constante (2.70) sustrayéndole la función de dos puntos en coordenadas de Rindler

$$\dot{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^\infty d\Delta\tau e^{\frac{-i}{\hbar}(E-E_0)\Delta\tau} [\langle 0_M | \Phi(x_1)\Phi(x_2) | 0_M \rangle - \langle 0_R | \Phi(x_1)\Phi(x_2) | 0_R \rangle]. \quad (3.87)$$

Dicha calibración tiene como motivación remover el polo.

Consideraremos ahora que la trayectoria del detector con aceleración constante está confinada  $y_{1,2} = 0$  y  $z_{1,2} = 0$ . Entonces, para calcular la función de dos puntos en coordenadas de Rindler utilizamos (3.77), (3.78), (3.80), (3.81), (3.83) y (3.84)

$$\begin{aligned} \langle 0_R | \Phi(x_1)\Phi(x_2) | 0_R \rangle &= \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \int_0^\infty d\omega' \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}'_\perp \langle 0_R | \left( b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)} I u_{\omega, \vec{k}_\perp} + b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(1)\dagger} I u_{\omega, \vec{k}_\perp}^* + \right. \\ &\quad \left. b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)} D u_{\omega, \vec{k}_\perp} + b_{\omega, \vec{k}_\perp}^{(2)\dagger} D u_{\omega, \vec{k}_\perp}^* \right) \left( b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)} I u_{\omega', \vec{k}'_\perp} + b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)\dagger} I u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* + b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)} D u_{\omega', \vec{k}'_\perp} + b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)\dagger} D u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* \right) | 0_R \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \int_0^\infty d\omega' \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}'_\perp \langle 0_R | b_k^{(1)} b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(1)\dagger} I u_k I u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* + b_k^{(2)} b_{\omega', \vec{k}'_\perp}^{(2)\dagger} D u_k D u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* | 0_R \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \int_0^\infty d\omega' \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}'_\perp \left\{ \delta(\omega - \omega') \delta^{(2)}(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) I u_{\omega, \vec{k}_\perp} I u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega - \omega') \delta^{(2)}(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) D u_{\omega, \vec{k}_\perp} D u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* \right\} \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \left\{ I u_{\omega, \vec{k}_\perp} I u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* + D u_{\omega, \vec{k}_\perp} D u_{\omega', \vec{k}'_\perp}^* \right\} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \frac{\sinh(\frac{\pi\omega}{a})}{4\pi^4 a} K_{\frac{i\omega}{a}} \left( \frac{\kappa}{a} e^{a(\zeta_1 - \zeta_2)} \right) K_{\frac{i\omega}{a}}^* \left( \frac{\kappa}{a} e^{a(\zeta_1 - \zeta_2)} \right) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_{1\perp} - \vec{x}_{2\perp}) - i\omega(\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2)}, & \text{en } I \\ \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \frac{\sinh(\frac{\pi\omega}{a})}{4\pi^4 a} K_{\frac{i\omega}{a}} \left( \frac{\kappa}{a} e^{a(\zeta_1 - \zeta_2)} \right) K_{\frac{i\omega}{a}}^* \left( \frac{\kappa}{a} e^{a(\zeta_1 - \zeta_2)} \right) e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_{1\perp} - \vec{x}_{2\perp}) - i\omega(\eta_1 - \eta_2)}, & \text{en } D \end{cases} \quad (3.88) \end{aligned}$$

Nos enfocamos en el análisis de la función de dos puntos para la cuña derecha de Rindler ( $D$ ), según (3.88). Para una hipérbola con  $\zeta = C = \text{constante}$  y dos puntos  $(\eta_1, \zeta_1)$  y

$(\eta_2, \zeta_2)$ , donde  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  están ubicados sobre la misma hipérbola, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle 0_R | \Phi(x_1)\Phi(x_2) | 0_R \rangle_D &= \int_0^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}_\perp \frac{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}{4\pi^4 a} K_{\frac{i\omega}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\zeta}\right) K_{\frac{i\omega}{a}}^*\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\zeta}\right) \\
&\quad \times e^{i\vec{k}_\perp \cdot (\vec{x}_{1\perp} - \vec{x}_{2\perp}) - i\omega(\eta_1 - \eta_2)} \\
&= \int_0^\infty d\omega \frac{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}{4\pi^4 a} e^{-i\omega(\eta_1 - \eta_2)} \left( \frac{a\pi^2\omega}{e^{2a(\zeta_1 - \zeta_2)}} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi\omega}{a}\right) \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{e^{2a(\zeta_1 - \zeta_2)} (\eta_1 - \eta_2)^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 (\Delta\eta)^2}, \tag{3.89}
\end{aligned}$$

donde  $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_2$ .

Al substituir (3.52) y (3.89), donde se cumple la relación  $d\eta = \gamma d\tau$ , en la tasa de cambio respecto al tiempo propio de la función de respuesta con el detector calibrado (3.87) encontramos que esta función se comporta como una función suave y debido al comportamiento de 4-distancias *pequeñas* propio de las funciones de dos puntos podemos evitar hacer uso la prescripción de polos ( $i\epsilon$ ), para obtener como resultado, utilizando Mathematica,

$$\begin{aligned}
\dot{F}(E - E_0) &= - \int_{-\infty}^\infty d\Delta\tau e^{\frac{-i}{\hbar}(E - E_0)\Delta\tau} \left[ \frac{\hbar\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\pi^2 \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\Delta\tau\right)} - \frac{\hbar}{4\pi^2 (\Delta\tau)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{(E - E_0)}{e^{\frac{2\pi(E - E_0)}{\hbar\alpha}} - 1}, \tag{3.90}
\end{aligned}$$

el cual coincide con el resultado obtenido mediante el método de continuación analítica en (3.64) y la consecuente interpretación.

# 4

## Campo escalar cuántico y marcos acelerados en relatividad especial doble.

En este capítulo recordamos cómo el grupo de Lorentz, de la Relatividad Especial (RE), se implementa en la Relatividad Especial Doble (RED) que implica dos invariantes: la velocidad de la luz y la energía de Planck, o equivalentemente la longitud de Planck. Esta representación del grupo de Lorentz es no lineal y ello da lugar a relaciones de dispersión y adición de energía y momento modificados. Con esta motivación las funciones de dos puntos del campo escalar en RED se propone tengan una forma específica [1]. Con el fin de discutir el efecto Unruh en el caso de RED retomamos el estudio de la tasa de cambio respecto al tiempo propio de la función respuesta de un detector con aceleración constante para un campo escalar sin masa y usando la función de dos puntos deformada por RED. Se discute bajo qué condiciones se mantiene la aparición del efecto.

### 4.1. Bases de relatividad especial doble y relaciones de dispersión modificadas. Alcances y limitaciones

Para estudiar la teoría de RED recordamos algunos aspectos del grupo de Lorentz en RE. Las transformaciones de Lorentz son lineales y toman la siguiente forma en el espacio de coordenadas

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{0} x^0 + \Lambda^{\mu}_{i} x^i, \quad (4.1)$$

con  $\Lambda^\mu{}_\nu$  que deja invariante la métrica de Minkowski

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma, \quad (4.2)$$

donde  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  y que por tanto preserva el elemento de línea  $ds^2 = ds'^2$ .

Para nuestros propósitos es conveniente el manejo de matrices. La transformación de Lorentz para la métrica de Minkowski cumple

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (4.3)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz equivalente a los coeficientes de  $\Lambda^\mu{}_\nu$ . Si tomamos el determinante de (4.3) haciendo uso de las propiedades de los determinantes se obtiene

$$\det(\eta) = \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda), \quad (4.4)$$

de lo cual se sigue que  $\det(\Lambda)$  debe cumplir

$$\det(\Lambda) = \pm 1, \quad (4.5)$$

cuando  $\det(\Lambda) = 1$ ,  $\Lambda$  corresponde a una transformación de Lorentz propia mientras que si el  $\det(\Lambda) = -1$  corresponde a una transformación de Lorentz impropia. Con esta información y si tomamos la entrada 00 de la ecuación (4.2) tenemos que

$$1 = \Lambda^\mu{}_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 \Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1. \quad (4.6)$$

Cuando  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$  la transformación de Lorentz se denomina ortócrona y en el caso en que  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$  se denomina no ortócrona.

Con esta idea podemos clasificar las transformaciones de Lorentz en cuatro categorías: ortócrona propia ( $\det(\Lambda) = 1; \Lambda^0{}_0 \geq 1$ ), ortócrona impropia ( $\det(\Lambda) = -1; \Lambda^0{}_0 \geq 1$ ), no ortócrona propia ( $\det(\Lambda) = 1; \Lambda^0{}_0 \leq -1$ ) y no ortócrona impropia ( $\det(\Lambda) = -1; \Lambda^0{}_0 \leq -1$ ). Cualquier transformación de Lorentz puede ser descompuesta como el producto de transformaciones de estas cuatro categorías. Ejemplos de esta clasificación son las rotaciones espaciales, los "boosts", la inversión temporal, la inversión espacial y la inversión total, combinación de las dos últimas. A las dos primeras se les asocian cierto tipo de generadores que estudiamos a continuación.

Procedemos a enlistar los seis generadores: tres para rotaciones y tres para boosts. Comenzamos con una transformación de Lorentz infinitesimal

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu, \quad (4.7)$$

substituyendo esta relación en (4.2) y utilizando las propiedades de la métrica y renombrando los índices se obtiene

$$0 = \eta_{\nu\rho} \epsilon^\rho{}_\mu + \eta_{\mu\rho} \epsilon^\rho{}_\nu, \quad (4.8)$$

que al simplificar resulta en

$$0 = \epsilon_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

por lo que  $\epsilon_{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico y (4.7) puede expresarse en términos de los generadores, en este caso elegidos como operadores diferenciales,  $L_{\mu\nu}$  como  $\Lambda = e^{i\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}} = 1 + i\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu} + \dots$ . Los generadores hermitianos  $L_{\mu\nu}$  se definen como sigue

$$L_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad (4.10)$$

con  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , y satisfacen el álgebra de Lie

$$\begin{aligned} [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= [i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)] \\ &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)L_{\rho\sigma} - i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)L_{\mu\nu} \\ &= i\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - i\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde la última línea se obtiene reescribiendo las derivadas parciales como la derivada del producto, y renombrando los índices. La ecuación (4.11) puede ser identificada como el álgebra de Lie del grupo  $SO(3,1)$ .

Luego, tenemos que la representación lineal más general de los generadores para  $SO(3,1)$  que obedece la relación de conmutación (4.11) se define como

$$M_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

donde  $S_{\mu\nu}$  es hermitiano y cumple la misma álgebra de Lie que los generadores  $L_{\mu\nu}$  y conmuta con estos últimos. Los generadores hermitianos  $M_{ij}$  forman un álgebra entre sí, como sigue

$$\begin{aligned} [M_{ij}, M_{kl}] &= [i(x_i\partial_j - x_j\partial_i) + S_{ij}, i(x_k\partial_l - x_l\partial_k) + S_{kl}] \\ &= (i(x_i\partial_j - x_j\partial_i) + S_{ij})M_{kl} - (i(x_k\partial_l - x_l\partial_k) + S_{kl})M_{ij} \\ &= -i\delta_{jk}M_{il} + i\delta_{ik}M_{jl} + i\delta_{jl}M_{ik} - i\delta_{il}M_{jk}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

la última línea de esta ecuación se obtiene de manera análoga al caso de (4.11), reescribiendo las derivadas parciales como derivadas parciales del producto de funciones involucradas y renombrando algunos índices. Esta álgebra se identifica como la correspondiente al grupo de rotaciones espaciales  $SU(2)$ .

Resulta conveniente reescribir el álgebra de  $SO(3,1)$  separando explícitamente los generadores de boosts de aquellos de rotaciones como se muestran a continuación. Primero consideramos el siguiente operador

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, \quad (4.14)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo Levi-Civita. Los operadores  $J_i$  cumplen con el conmutador que se muestra a continuación

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \left[ \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, \frac{1}{2}\epsilon_{jik}M_{ik} \right] \\ &= i\epsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \quad (4.15)$$

lo cual se puede verificar utilizando el resultado previo del álgebra para  $M_{ij}$  que obedecen los generadores de rotaciones (4.13).

Después definimos el generador de boosts como

$$K_i \equiv M_{0i}, \quad (4.16)$$

que junto con  $J_i$ , satisfacen

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad (4.17)$$

con  $K_i$  y  $J_i$  generadores hermitianos.

A la luz de las consideraciones anteriores sobre el grupo de Lorentz para RE podemos pasar al caso de RED. Amelino-Camelia [2] sugirió una formulación específica para RED mejor conocida como RED1. Otra posible formulación surge como propuesta de Smolin y Magueijo [23], conocida como RED2, en la cual ellos argumentan que cualquier grupo de transformaciones en RED debe de tener necesariamente una estructura no lineal del grupo de Lorentz pues esta es la única adecuada con seis parámetros del grupo (tres parámetros para rotaciones y tres para boosts). Nosotros trabajaremos con esta última propuesta.

La RED considerada en [23] obedece los siguientes postulados:

1. Las leyes de la física son covariantes en cualquier marco inercial. Suponemos la validez de la teoría RE de marcos inerciales (todos los observadores en movimiento inercial libre son equivalentes cuando los efectos gravitacionales son despreciados), y suponemos también la validez del principio de equivalencia (bajo los efectos de la gravedad, observadores en caída libre son equivalentes entre sí y también son equivalentes a los observadores inerciales).

2. La velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) es invariante.

3. La energía de Planck es invariante ( $E_P = \frac{hc}{\ell_P} = 10^{19} GeV$ ), es decir, la medición de la energía de Planck es independiente del observador (todos los observadores inerciales coinciden en que hay una escala de energía invariante: la energía de Planck).

Finalmente, se impone el principio de correspondencia (a escalas mucho más pequeñas que  $E_p$ , se recuperan RE y Relatividad General (RG)), es decir, se espera que esta relatividad modificada coincida con RE cuando el campo gravitacional sea débil o esté ausente y, en pruebas experimentales, a escalas de energía mucho más pequeñas que  $E_p$ .

Tanto RED1 como RED2 contienen dos escalas fundamentales: la velocidad de la luz y una escala de energía, en este caso la energía de Planck  $E_p = \sqrt{\frac{c^3}{hG}}$  o, su inverso, la longitud de Planck  $\ell_p = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}$ . Es posible realizar una modificación a la acción del grupo de Lorentz de tal manera que la energía de Planck permanezca invariante. Además, se pueden identificar de forma unívoca las leyes de conservación para RED al aplicar principios físicos razonablemente adecuados.

Retomando la idea del grupo de Lorentz, se propone que este debe de ser reemplazado por un grupo deformado o modificado que actúe en el espacio de momentos, es decir,

en RED las propiedades de las transformaciones de la energía y del momento deben ser diferentes a aquellas transformaciones asociadas a las coordenadas espacio tiempo. Esto no es así en el caso de RE donde el grupo de Lorentz se implementa de la misma manera en coordenadas o en momentos. La única posibilidad es que el grupo de simetría sea el grupo de Lorentz actuando no linealmente en el espacio de momentos. La no linealidad es elegida de tal manera que  $E_p$  sea invariante. Pero, si  $\ell_p$  es una escala de longitud física en un marco de referencia inercial la RE sugiere que esta cantidad será diferente en el marco de referencia inercial de otro observador, esto como consecuencia de la contracción de Lorentz. De acuerdo a RED se puede tener una teoría de RE completa para marcos inerciales y al mismo tiempo todos los observadores están de acuerdo en que la escala en la cual se lleva a cabo la transición del espacio tiempo clásico al espacio tiempo cuántico es la escala de Planck. Los generadores en RE en espacio de momentos son

$$I_{\mu\nu} = p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (4.18)$$

y se suponen útiles a escalas de longitud grandes comparadas con  $\ell_p$ , o bajas energías comparadas con  $E_p$ .

Una manera de modificar el grupo de Lorentz no linealmente es combinar cada boost con una dilatación. Para recuperar el valor de la energía de Planck como invariante, antes de la transformación de los boosts y después de dicha transformación, se elige un generador de dilatación específico como se muestra a continuación

$$D = p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (4.19)$$

el cual actúa en el espacio de momentos como

$$D \circ p_\mu = p_\mu. \quad (4.20)$$

El álgebra modificada es generada por las versiones antihermitianas de (4.14), que toma la forma  $J^i \equiv \epsilon^{ijk} I_{ij} =: \epsilon^{ijk} N_{jk}$  (descartando la parte  $S_{\mu\nu}$ ), y el generador de boost modificado (4.16) antihermitiano, con (4.19), obteniendo

$$K^i \equiv I_0^i + \ell_p p^i D \equiv N_0^i, \quad (4.21)$$

este es evidentemente no lineal debido al factor de  $p^i$  en el segundo término. A pesar de las modificaciones  $J^i$  y  $K^i$  aún cumplen, de manera análoga a (4.17) sólo con un cambio en la hermiticidad, con los siguientes conmutadores

$$[J^i, K^j] = \epsilon^{ijk} K_k, \quad [J^i, J^j] = \epsilon^{ijk} J_k, \quad [K^i, K^j] = \epsilon^{ijk} J_k, \quad (4.22)$$

donde  $K^i$  a la vez obedece

$$K^i = U^{-1}(p_0) I_0^i U(p_0), \quad (4.23)$$

y  $U(p_0)$  es la transformación dependiente de la energía con la forma siguiente

$$U(p_0) \equiv e^{\ell_p p_0 D}. \quad (4.24)$$

Dicha transformación actúa en el espacio de momentos como

$$U(p_0) \circ p_\mu = \frac{p_\mu}{1 - \ell_p p_0}. \quad (4.25)$$

Se pueden hacer otras elecciones para  $U$  de tal manera que nos lleven a los mismos generadores de boosts pero la estudiada en (4.24) es la más sencilla para garantizar que  $E_p$  es invariante.

Apartir de estos generadores y la transformación (4.24) tenemos la representación no lineal del grupo de Lorentz dada por

$$W[\omega_{\mu\nu}] = U^{-1}(p_0) e^{\omega^{\mu\nu} I_{\mu\nu}} U(p_0) = e^{\omega^{\mu\nu} N(p_0)_{\mu\nu}}. \quad (4.26)$$

Dado que el grupo de simetría es simplemente una versión no lineal del grupo de Lorentz, podemos encontrar funciones del momento físico  $P_4 = (E, \vec{p})$  que transformen como un cuatro vector tipo Lorentz, las cuales son llamados pseudo energía momento o energía momento auxiliares  $\mathcal{P}_4 = (\epsilon, \vec{\Pi})$  que no necesariamente tienen un significado físico. Es decir, las transformaciones de Lorentz actúan en las variables auxiliares de manera lineal usual  $(\epsilon'; \vec{\Pi}') = \mathcal{L}(\epsilon; \vec{\Pi})$ , siendo  $\mathcal{L}$  las transformaciones de Lorentz lineales usuales. Los vectores físicos y los vectores auxiliares cumplen con

$$P_4 = U^{-1}(\mathcal{P}_4), \quad \mathcal{P}_4 = U(P_4), \quad (4.27)$$

donde  $U^{-1}$  y  $U$  generalmente son funciones no lineales que van de  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ; ambas se reducen a la identidad en el límite en que las energías y los momentos son pequeños comparados con la escala de Planck. En la representación lineal, las cantidades cinemáticas como la energía total del sistema se define como

$$\mathcal{P}_4^{tot} = \sum_i \mathcal{P}_4^i, \quad (4.28)$$

mientras que el cuatro momento físico se obtiene

$$P_4^{tot} = U^{-1} \left( \sum_i U(P_4^i) \right). \quad (4.29)$$

De manera análoga, llamaremos  $L^{no-lin}$ , a las transformaciones no lineales, siendo un operador asociado a los boosts para la energía y el momento físico  $(E, \vec{p})$  que obedecen

$$P_4' = L^{no-lin}(P_4) = [U^{-1} \circ \mathcal{L} \circ U](P_4). \quad (4.30)$$

Comparando (4.25) con (4.27) podemos caracterizar RED por

$$\mathcal{P}_4 \equiv (\epsilon; \vec{\Pi}) = U(P_4) = \frac{(E; \vec{p})}{1 - \ell_p E}. \quad (4.31)$$

La transformación inversa de (4.31) es

$$P_4 \equiv (E; \vec{p}) = U^{-1}(\mathcal{P}_4) = \frac{(\epsilon; \vec{\Pi})}{1 + \ell_p \epsilon}. \quad (4.32)$$

Los vectores auxiliares asociados a los momentos

$$\Pi^\mu : (\epsilon, \vec{\Pi}), \quad (4.33)$$

transforman linealmente de acuerdo con

$$\Pi'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Pi^\nu, \quad \Lambda^\mu{}_\nu : Lorentz \quad (4.34)$$

y se relacionan al cuatro momento físico como sigue, considerando  $c=1$ ,

$$E = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon \ell_p}, \quad (4.35)$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{\Pi}}{1 + \epsilon \ell_p}. \quad (4.36)$$

Mientras que  $(E, \vec{p})$  transforma de manera no lineal de acuerdo con (4.30).

Después de este análisis podemos discutir las magnitudes de momento y energía totales requeridas en el estudio de procesos físicos incluyendo varias partículas. Las variables auxiliares totales son

$$\epsilon_{tot} = \sum_i \frac{E_i}{1 - \ell_p E_i}, \quad \Pi_{tot} = \sum_i \frac{p_i}{1 - \ell_p E_i}, \quad (4.37)$$

entonces, las variables físicas totales toman la forma

$$E_{tot} = \frac{\sum_i \frac{E_i}{1 - \ell_p E_i}}{1 + \lambda \sum_i \frac{E_i}{1 - \ell_p E_i}}, \quad (4.38)$$

$$P_{tot} = \frac{\sum_i \frac{p_i}{1 - \ell_p E_i}}{1 + \lambda \sum_i \frac{E_i}{1 - \ell_p E_i}}. \quad (4.39)$$

La relación de dispersión para las variables auxiliares es invariante en RE y se escribe como

$$[\epsilon(E, \vec{p})]^2 - [\vec{\Pi}(E, \vec{p})]^2 = \mu_0^2, \quad (4.40)$$

donde  $\mu_0$  es un invariante de Lorentz, construido apartir de  $\epsilon$  y  $\vec{\Pi}$ , que no debe ser confundido con la energía en reposo  $m$ . En términos de  $m$ , el invariante de Lorentz  $\mu_0$  se puede reexpresar usando un marco donde la partícula está en reposo de la siguiente manera

$$(\mu_0, \vec{0}) = \epsilon(m, \vec{0}). \quad (4.41)$$

La relación de dispersión en RED se calcula substituyendo (4.37), para  $i = 1$ , en (4.40)

$$\frac{E^2 - \vec{p}^2}{(1 - \ell_p E)^2} = \mu_0^2 = \frac{m^2}{(1 - \ell_p m)^2}. \quad (4.42)$$

Es posible expresar la energía  $E$  en términos de momento resolviendo la ecuación cuadrática anterior y eligiendo la raíz positiva por ser la físicamente adecuada

$$E = \frac{\sqrt{(1 - 2\ell_p m) [m^2 + (1 - \ell_p m)^2 \vec{p}^2]} + (\ell_p)^2 m^4 - \ell_p m^2}{1 - 2\ell_p m}. \quad (4.43)$$

Mientras que en RE la energía puede tomar valores arbitrariamente grandes, en RED la energía física  $E$  tiene un valor máximo dado por  $E_p$ . Esto se puede ver tomando el límite  $\epsilon \rightarrow +\infty$  en la ecuación (4.35).

Es ilustrativo verificar que la energía de Planck  $E_p$  es invariante en el contexto de RED. Con este fin utilizemos un boost en la dirección  $x$  aplicado linealmente a las variables auxiliares  $(\epsilon, \vec{\Pi})$

$$\Pi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Pi^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\epsilon \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma\epsilon + \beta\gamma\Pi_1 \\ -\beta\gamma\epsilon + \gamma\Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Y ahora aplicamos la transformación  $U^{-1}$  ecuación (4.25) para obtener finalmente

$$p'_0 = \frac{\gamma(p_0 - \beta p_x)}{1 + \ell_P(\gamma - 1)p_0 - \ell_P\gamma\beta p_x}, \quad (4.45)$$

$$p'_x = \frac{\gamma(p_x - \beta p_0)}{1 + \ell_P(\gamma - 1)p_0 - \ell_P\gamma\beta p_x}, \quad (4.46)$$

$$p'_y = \frac{p_y}{1 + \ell_P(\gamma - 1)p_0 - \ell_P\gamma\beta p_x}, \quad (4.47)$$

$$p'_z = \frac{p_z}{1 + \ell_P(\gamma - 1)p_0 - \ell_P\gamma\beta p_x}. \quad (4.48)$$

Ahora, para verificar que la energía de Planck  $E_p$  es un invariante evaluamos (4.45) para el caso de un fotón moviéndose sobre el eje  $x$ , es decir, considerando el boost como en (4.44) con las condiciones  $\|p\|^2 = 0$  y  $E = p_0 = |p_i| = p_x = E_P$ . El resultado es

$$E' = \frac{\gamma(E_P - \beta E_P)}{1 + \frac{\ell_P}{h}(\gamma - 1)E_P - \frac{\ell_P}{h}\gamma\beta E_P} = \frac{E_P(\gamma - \gamma\beta)}{1 + (\gamma - 1) - \gamma\beta} = E_P. \quad (4.49)$$

Para concluir esta sección haremos las siguientes observaciones:

En relación con los alcances de la RED hemos visto que es posible implementar una escala invariante (la de Planck) a través de una representación no lineal del álgebra de Lorentz en el espacio de momentos. Es decir, RED nos da la posibilidad de hacer compatible una escala invariante con cambios de marco de referencia. Notablemente es relativamente simple manejar las transformaciones no lineales de la energía y momento físicos haciendo uso de un conjunto auxiliar asociado con los anteriores. Desde el punto de vista conceptual es interesante observar que la propuesta de RED pretende incorporar la escala de gravedad cuántica si bien a este punto con una base puramente heurística usando argumentos dimensionales.

Por otro lado, evidentemente, existen limitaciones sobre la viabilidad física de RED. La forma no lineal de las transformaciones de la energía y momento físicos ha sido uno de los problemas más discutidos de RED; la no aditividad de estas cantidades puede ser un mecanismo de prueba de su viabilidad. Aunque hemos implementado de manera explícita las transformaciones de Lorentz no lineales en el espacio de momentos su contraparte en el espacio de coordenadas es un problema actualmente abierto y complejo. En particular desarrollar una teoría de campos basada en RED ha demandado esfuerzos importantes que no se han consolidado a la fecha. También la relación que pudiera existir entre alguna propuesta de teoría de gravedad cuántica y RED sigue siendo un tema debatido.

Con todo y las limitaciones mencionadas antes implementar RED en diferentes contextos nos permite explorar posibles nuevos efectos y acotar su aplicabilidad. Uno de los aspectos centrales del interés es que contiene una escala invariante, la de Planck. En la siguiente sección incorporamos parte de su estructura con el análisis del efecto Unruh para investigar sus consecuencias.

## 4.2. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniforme acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta

Considerando que la teoría de campos en RED no se ha completado es razonable considerar un enfoque alternativo para construir las funciones de dos puntos inspirado en la construcción auxiliar de la sección anterior [1]. Con este fin introducimos como función de dos puntos auxiliar a aquella obtenida para el campo escalar en RE, es decir

$$\langle 0_M | \phi(x_1(\tau_1)) \phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{aux} := \langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle. \quad (4.50)$$

Esto nos permite definir una función de dos puntos física basada en la asociación (4.25) con la forma

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} &= U^{-1} [ \langle 0_M | \phi(x_1(\tau_1)) \phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{aux} ] \\ &= \frac{\langle 0_M | \phi(x_1(\tau_1)) \phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{aux}}{1 + \frac{\ell_P^2}{\hbar} \langle 0_M | \phi(x_1(\tau_1)) \phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{aux}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde la constante  $\frac{\ell_P^2}{\hbar}$  se ha elegido para hacer que el segundo término en el denominador de la última igualdad sea adimensional,<sup>1</sup> curiosamente  $\frac{\ell_P^2}{\hbar} = \frac{G}{c^3}$ , es decir, un remanente gravitacional que modifica un efecto cuántico.

Usando (4.50) junto con la forma explícita en RE (2.69) podemos escribir la función de dos puntos

$$\langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} = -\frac{\hbar}{4\pi^2(x_1 - x_2)^2 + \ell_P^2}, \quad (4.52)$$

que en el límite de coincidencia  $x_1 \rightarrow x_2$  se reduce a

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} = -\frac{\hbar}{\ell_P^2}. \quad (4.53)$$

Notablemente, la función de Wightman de frecuencias positivas se regulariza gracias a la escala de corte dada por la longitud de Planck. Veamos cuáles son las consecuencias físicas de la modificación debida a RED en casos específicos. Para el caso del detector inercial la función de Wightman (4.52) toma la forma

$$\langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau)^2 + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}. \quad (4.54)$$

Estudiamos ahora la manera en que se modifica la tasa de cambio de la función de respuesta (2.70) según RED, para ello cambiamos las funciones de dos puntos en RE (2.60) por las correspondientes en RED según (4.51) y por simplicidad consideramos  $E_0 = 0$  y el cambio de variable  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  obteniendo

$$\dot{F}_{\ell_P}^{In}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-i\omega\Delta\tau} \langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED}, \quad (4.55)$$

que en el caso inercial, utilizando la función de dos puntos (4.54), se expresa como

$$\dot{F}_{\ell_P}^{In}(\omega) = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{(\Delta\tau)^2 + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}. \quad (4.56)$$

<sup>1</sup>La acción  $S_0 = \int_{\mathbb{M}_4} d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  conlleva las dimensiones físicas para el campo escalar como sigue  $[S_0] = [\hbar]$ ,  $[\int_{\mathbb{M}_4} d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = \frac{L^4[\phi]^2}{L^2} = L^2[\phi]^2 \Rightarrow [\phi]^2 = \frac{[\hbar]}{L^2}$ .

Para resolver esta integral usaremos una continuación analítica y el siguiente contorno de integración  $C^-$  que encierra el semiplano inferior del plano complejo para  $\Delta\tau$  y para el cual la contribución del arco en infinito es nula. Es decir,

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{\ell_P}^{In}(\omega) &= -\frac{\hbar\omega}{4\pi^2} \int_{C^-} du \frac{e^{-iu}}{u^2 + \frac{\omega^2 \ell_P^2}{4\pi^2}} \\
 &= -\frac{\hbar\omega}{4\pi^2} \left[ -2\pi i \text{Res} \left( \frac{e^{-iu}}{u^2 + \frac{\omega^2 \ell_P^2}{4\pi^2}}, u = -\frac{i\omega \ell_P}{2\pi} \right) \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{2\pi} \frac{\pi e^{-\frac{\omega \ell_P}{2\pi}}}{\ell_P}, \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos el cambio  $u = \omega\Delta\tau$ , en la segunda igualdad usamos el teorema de los residuos y  $u = -\frac{i\omega \ell_P}{2\pi}$ . Llama la atención que el límite  $\lim_{\ell_P \rightarrow 0} \dot{F}_{\ell_P}(\omega) = \infty$  mientras que uno esperaría físicamente que fuera cero. Vemos también que mientras que en el análisis del detector inercial en RE el polo en  $\Delta\tau = i\Gamma$  queda excluido del contorno de integración dando lugar a residuo cero, para el detector inercial en RED el polo en  $\Delta\tau = -\frac{i\ell_P}{2\pi}$  resulta estar incluido en el contorno de integración generando un residuo finito.

### 4.3. Detector cuántico con niveles energéticos en movimiento uniformemente acelerado acoplado a campo escalar y tasa de función de respuesta

Siguiendo el método de la sección anterior y con el fin de calcular la tasa de cambio por unidad de tiempo propio de la función de respuesta del detector con aceleración constante modificada según RED, en su versión calibrada con las coordenadas de Rindler, partimos de la ecuación (3.87) y sustituimos las funciones de dos puntos en RE por su correspondiente en RED (4.51). Entonces, la tasa de cambio de la función de respuesta toma la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{\ell_P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-i\omega\Delta\tau} [\langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} \\
 &\quad - \langle 0_R | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_R \rangle_{RED}]. \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

Usando la forma explícita de la función de dos puntos del detector acelerado en RE (3.52) obtenemos la versión modificada

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_M \rangle_{RED} &= \frac{\frac{-\hbar \frac{a^2}{4}}{4\pi^2 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right)}}{1 - \frac{\ell_P^2}{\hbar} \left( \frac{-\hbar \frac{a^2}{4}}{4\pi^2 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right)} \right)} \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

mientras que su forma en coordenadas de Rindler (3.89), cuña derecha ( $D$ ), toma la forma

$$\langle 0_R | \Phi(x_1(\tau_1)) \Phi(x_2(\tau_2)) | 0_R \rangle_{RED} = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\tau)^2 + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}. \quad (4.60)$$

Una vez modificadas las funciones de dos puntos podemos obtener la tasa de respuesta del detector en RED (4.58). Considerando (4.59) y (4.60) tenemos

$$\dot{F}_{\ell_P}(\omega) = F_1 - F_2, \quad (4.61)$$

donde

$$F_1 = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\left(\frac{2}{a}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}, \quad (4.62)$$

$$F_2 = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{(\Delta\tau)^2 + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}}. \quad (4.63)$$

Comenzamos por calcular la primera integral de (4.61) que puede ser reescrita como una suma de integrales al reexpresar la fracción involucrada como

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) + \frac{\ell_P^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \frac{1}{\sinh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) - \frac{i a \ell_P}{4\pi}} - \frac{1}{\sinh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) + \frac{i a \ell_P}{4\pi}} \right] \quad (4.64)$$

Al substituir (4.64) en (4.62) ésta toma la forma

$$F_1 = A_+ + A_-, \quad (4.65)$$

donde

$$A_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\tau}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\sinh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) \pm \frac{i a \ell_P}{4\pi}} \right]. \quad (4.66)$$

El cálculo de  $A_+$  procede como sigue

$$\begin{aligned}
 A_+ &= \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\tau}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_p}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\sinh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau\right) + \frac{ia\ell_p}{4\pi}} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_C \frac{d\Delta\tau}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_p}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{-i\operatorname{sen}\left(\frac{ia}{2}\Delta\tau\right) + \frac{ia\ell_p}{4\pi}} \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_C \frac{d\Delta\tau}{\frac{4i}{a} \left(\frac{i\ell_p}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\operatorname{sen}\left(\frac{ia}{2}\Delta\tau\right) - \frac{a\ell_p}{4\pi}} \right], \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la continuación analítica,  $\Delta\tau \in \mathbb{C}$ , con un contorno de integración que especificaremos abajo, además de la identidad  $\operatorname{senh}(z) = -i\operatorname{sen}(iz)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . En la tercera igualdad factorizamos  $-i$  en el denominador.

En la forma (4.67) es evidente notar que los polos del integrando ocurren en

$$\Delta\tau_+^{(n)} = -\frac{2i}{a}(\varphi_+ + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{sen}(\varphi_+) = \frac{a\ell_p}{4\pi}. \tag{4.68}$$

El valor de  $\varphi_+$  se determina usando la condición particular para  $n = 0$ :  $\operatorname{sen}\left(\frac{ia}{2}\Delta\tau_+^{(0)}\right) = \operatorname{sen}(\varphi_+) = \frac{a\ell_p}{4\pi}$ ,  $0 < \varphi_+ < \pi$ .

Para elegir adecuadamente el contorno de integración en (4.67) notemos que para  $\omega > 0$  y  $\Delta\tau \in \mathbb{C}$  la exponencial correspondiente es

$$\begin{aligned}
 e^{-i\omega\Delta\tau} &= e^{-i\omega(\operatorname{Re}(\Delta\tau) + i\operatorname{Im}(\Delta\tau))} \\
 &= e^{-i\omega\operatorname{Re}(\Delta\tau)} e^{\omega\operatorname{Im}(\Delta\tau)}, \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

indicando que el contorno cerrado por el semiplano complejo inferior es el indicado para que con  $\omega > 0$  tengamos como resultado una integral finita. De este modo los polos que contribuyen corresponden a la condición

$$\operatorname{Im}\left(\Delta\tau_+^{(n)}\right) = -\frac{2}{a}(\varphi_+ + 2\pi n) < 0 \Rightarrow n > -1, \quad \frac{\varphi_+}{2\pi} < 1. \tag{4.70}$$

Usando el teorema de los residuos para la integral (4.67) con el contorno de integración

elegido antes llegamos a

$$\begin{aligned}
A_+ &= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{4i}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ (-2\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left( \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\text{sen} \left( \frac{ia}{2} \Delta\tau \right) - \frac{a\ell_P}{4\pi}}, \Delta\tau_+^{(n)} \right) \right] \\
&= \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\Delta\tau_+^{(n)}}}{\frac{ia}{2} \cos(\varphi_+)} \right] \\
&= -\frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\frac{4}{a} \text{sen}(\varphi_+) \cos(\varphi_+)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4\pi n\omega}{a}} \right] \\
&= -\frac{\hbar a}{4\pi} \frac{e^{-\frac{\omega\theta}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4\pi n\omega}{a}} \right] \\
&= -\frac{\hbar a}{4\pi} \frac{e^{-\frac{\omega\theta}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left[ \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right] \tag{4.71}
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad primera igualdad usamos el teorema de los residuos, en la segunda igualdad se utilizó el desarrollo de Laurent de la función correspondiente para identificar como polos de primer orden a los dados por (4.68), en tanto que en la tercera sustituimos los valores de estos polos, mientras que en la cuarta igualdad introducimos el ángulo  $\theta = 2\varphi_+$ , y finalmente en la última igualdad usamos la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$ .

Ahora, procedemos a calcular  $A_-$ , de forma análoga al caso de  $A_+$  en (4.71). Consideremos

$$\begin{aligned}
A_- &= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta\tau}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\text{senh} \left( \frac{a}{2} \Delta\tau \right) - \frac{ia\ell_P}{4\pi}} \right] \\
&= -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_C \frac{d\Delta\tau}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{-i\text{sen} \left( \frac{ia}{2} \Delta\tau \right) - \frac{ia\ell_P}{4\pi}} \right] \\
&= \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_C \frac{d\Delta\tau}{\frac{4i}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\text{sen} \left( \frac{ia}{2} \Delta\tau \right) + \frac{a\ell_P}{4\pi}} \right], \tag{4.72}
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se hizo uso de la relación entre el seno hiperbólico y el seno trigonométrico antes mencionada así como la continuación analítica,  $\Delta\tau \in \mathbb{C}$ , con contorno de integración especificado más adelante.

Para la integral (4.72) los polos están localizados en

$$\Delta\tau_-^{(n)} = -\frac{2i}{a} (\varphi_- - 2\pi n) = -\frac{2i}{a} (-\varphi_+ + \pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{sen}(\varphi_-) = -\frac{a\ell_P}{4\pi}, \tag{4.73}$$

donde se utilizó la relación de ángulos  $\varphi_- = -\varphi_+ + \pi$ . Considerando el criterio de la exponencial según (4.69), podemos saber que los polos que contribuyen son

$$\text{Im}(\Delta\tau_-^{(n)}) = -\frac{2}{a} (\varphi_- - 2\pi n) < 0 \Rightarrow n < 1, \quad \frac{\varphi_-}{2\pi n} > 1. \tag{4.74}$$

Entonces, usando el teorema de los residuos para la integral (4.72) con el contorno de integración  $C$ , análogamente al cálculo de (4.71), se reconocen como polos de primer orden a los dados según (4.73) para luego obtener

$$\begin{aligned}
 A_- &= \frac{\hbar}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{4i}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ (-2\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{-i\omega\Delta\tau}}{\text{sen}\left(\frac{ia}{2}\Delta\tau\right) + \frac{a\ell_P}{4\pi}}, \Delta\tau_-^{(n)} \right) \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\frac{4}{a} \left(\frac{i\ell_P}{2\pi}\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\Delta\tau_-^{(n)}}}{\left(\frac{ia}{2}\right) \cos(\varphi_+)} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} e^{\frac{(2\omega\varphi_+)}{a}}}{\frac{4}{a} \text{sen}(\varphi_+) \cos(\varphi_+)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4\pi n\omega}{a}} \right] \\
 &= \frac{\hbar a}{4\pi} \frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} e^{\frac{\omega\theta}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left[ \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right]. \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

Así, el resultado para la función  $F_1$  se consigue al substituir (4.71) y (4.75) en (4.65) y reacomodando los términos como sigue

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -\frac{\hbar a}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{e^{-\frac{\omega\theta}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right) \right] - \left[ \frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} e^{\frac{\omega\theta}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right) \right] \right\} \\
 &= -\frac{\hbar a}{4\pi} \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right) \left\{ e^{-\frac{\omega}{a}(\theta-\pi)} - e^{\frac{\omega}{a}(\theta-\pi)} \right\} \\
 &= \frac{\hbar a}{4\pi} \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{a}}}{\text{sen}(\theta)} \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{4\pi\omega}{a}}} \right) \left[ 2\text{senh}\left(\frac{\omega}{a}(\theta-\pi)\right) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \left( \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{a}}}{e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} \left( e^{\frac{2\omega\pi}{a}} - e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} \right)} \right) \text{senh}\left(\frac{\omega}{a}(\theta-\pi)\right) \\
 &\approx \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\omega e^{\frac{\pi\omega}{a}}}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \frac{\text{senh}\left(\frac{\omega}{a}(\theta-\pi)\right)}{\frac{\omega}{a} \text{sen}(\theta)}, \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que en el régimen  $\frac{2\pi\omega}{a} \gg 1$  se cumple la condición  $e^{-\frac{2\pi\omega}{a}} \approx 1$ .

Para el segundo término de la tasa de cambio de la función de respuesta modificada por RED (4.61),  $F_2$ , el cual está relacionado con la función de dos puntos del detector en el vacío de Rindler, matemáticamente tiene la misma forma que la integral mostrada en (4.56), por lo que se puede expresar como

$$F_2 = -\frac{\hbar}{2\pi} \frac{\pi e^{-\frac{\omega\ell_P}{2\pi}}}{\ell_P}. \tag{4.77}$$

Finalmente, al substituir (4.76) y (4.77) en (4.61) se obtiene que la tasa de cambio de la función de respuesta para un detector con aceleración constante es modificada por RED

como se muestra a continuación

$$\dot{F}_{\ell_P}(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi} \left[ \frac{\omega e^{\frac{\omega}{a}\pi}}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \frac{\sinh\left(\frac{\omega}{a}(\theta - \pi)\right)}{\frac{\omega}{a}\sin(\theta)} + \frac{\pi e^{-\frac{\omega\ell_P}{2\pi}}}{\ell_P} \right], \quad \frac{2\pi\omega}{a} \gg 1. \quad (4.78)$$

#### 4.4. Interpretación térmica

La tasa de cambio de la función de respuesta modificada en RED, ecuación (4.78), contiene factores adicionales al Planckiano del efecto Unruh en RE que dependen del inverso de la aceleración  $a$ . Es importante confirmar que el efecto Unruh usual aparece en el límite  $\ell_p \rightarrow 0$  y, de ser el caso, las limitaciones pertinentes para que se mantenga válido. Con este fin desarrollamos (4.78) en este régimen de longitud de Planck pequeña y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\ell_P}(\omega) &\approx \left( -\frac{\pi}{\ell_P} + \frac{\omega}{2} \frac{\left( e^{\frac{2\pi\omega}{a}} + 1 \right)}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} - \frac{\omega^2\ell_P}{8\pi} - \frac{a^2\ell_P}{32\pi} + O(\ell_P^3) \right) + \left( \frac{\pi}{\ell_P} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2\ell_P}{8\pi} + O(\ell_P^3) \right) \\ &\approx \frac{\hbar}{2\pi} \left[ \frac{\omega}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} - \frac{a^2\ell_P}{32\pi} + O(\ell_P^3) \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Notablemente la divergencia notada para la contribución del detector inercial en este límite se regulariza con aquella del detector acelerado, como podemos ver de la cancelación de los efectos que dependen del inverso de  $\ell_p$ . A orden cero en esta cantidad identificamos la tasa de respuesta del efecto Unruh en RE, ecuación (3.64). A primer orden tenemos un efecto de corrección que depende cuadráticamente en la aceleración.

La energía umbral  $\Omega$  para la cual la distribución se mantiene esencialmente Planckiana puede obtenerse del desarrollo de la tasa de cambio de la función de respuesta (4.79). Usando de nuevo la aproximación  $\frac{2\pi\Omega}{a} \gg 1$  tenemos pues

$$\Omega \approx \frac{a^2\ell_P}{32\pi e^{-\frac{2\pi\Omega}{a}}}. \quad (4.80)$$

# 5

## Discusión, conclusiones y perspectivas.

La relatividad general clásica codifica al campo gravitacional en la estructura del espacio tiempo, concretamente en su curvatura. Por ejemplo, el espacio tiempo de Minkowski se dice plano por tener curvatura cero y, en consecuencia, no incluye efectos gravitacionales. Las ecuaciones de Einstein, que gobiernan el comportamiento de la curvatura del espacio tiempo y por lo tanto de la gravedad, predicen que bajo condiciones razonables será imposible extender sus soluciones debido a la presencia de singularidades. Concretamente estas aparecen en el interior de agujeros negros y en el denominado “big bang” de los modelos cósmicos.

De manera análoga a cómo la mecánica cuántica reemplaza el comportamiento incorrecto de un modelo clásico de un átomo, que resulta inestable, por uno que sí lo es, se espera que una teoría cuántica de gravedad permita la evasión de las singularidades de la relatividad general clásica. Esto se espera que ocurra en circunstancias en las que escalas como las de la longitud de Planck sean relevantes:  $\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ . En el caso concreto de la gravedad cuántica por lazos los modelos simples mencionados antes resultan ser descritos adecuadamente sin singularidades.

Notablemente, aún en situaciones donde la gravedad no es relevante, como en la teoría de campos en espacio tiempo de Minkowski, es de esperarse que el efecto de la escala de Planck juegue un papel esencial. Específicamente, por ejemplo, la energía de vacío del campo podría requerir una limitación en los modos que contribuyen y no considerar longitudes de onda por debajo de la longitud de Planck. Una teoría de campo con una longitud mínima es uno de los grandes temas de investigación actual. Entre las dificultades para formularla se encuentra una adecuada interpretación de la longitud mínima en el contexto de la relatividad. Una posibilidad es suponer que esta escala es invariante

relativista dando así lugar a una teoría de relatividad especial doble (RED) conteniendo dos invariantes: la velocidad de la luz  $c$  y la energía de Planck  $E_p = \frac{\hbar c}{\ell_p}$ . Uno de los aspectos más debatidos en RED está asociado con la adición de energías y momentos que resulta no lineal y por tanto enfrenta constricciones experimentales severas.

En esta tesis hemos explorado uno de los efectos establecidos a nivel teórico en la teoría cuántica de campos: el efecto Unruh, en el contexto de RED, con el objetivo de entender la contribución a muy pequeñas distancias de una escala mínima, la de Planck.

Con el fin de proveer una presentación autocontenida en el capítulo 2 recordamos los elementos básicos de la cuantización canónica de un campo escalar. La descomposición en modos de Fourier del campo nos permiten implementar los conmutadores canónicos del campo y formular la función de dos puntos o valor de expectación en vacío del producto de campos.

En el capítulo 3 discutimos en detalle el movimiento de una partícula clásica acelerada con el fin de incorporarla en la descripción de un detector acelerado en presencia de un campo escalar no masivo en estado de vacío según un observador inercial. Este análisis se divide en dos partes. Primero se considera un detector inercial que da lugar a una tasa de función de respuesta nula, indicando que el ritmo de la transición del detector desde su estado de vacío hasta uno excitado es nulo. Después se considera el caso del detector acelerado para el cual la tasa de respuesta da lugar a un espectro térmico con temperatura  $T = \frac{\hbar a}{2\pi k_B}$ , con  $a$  la aceleración y  $k_B$  la constante de Boltzmann; es decir, el efecto Unruh.

En el capítulo 4 analizamos las bases y limitaciones de la relatividad especial doble (RED) para después aplicarlas directamente a las funciones de dos puntos relevantes en el problema de la tasa de función de respuesta. A saber, considerar la forma de la energía física expresada en términos de una auxiliar  $E = \frac{\epsilon}{1+\ell_p\epsilon}$  extendida a las funciones de dos puntos como  $\langle \Phi^2 \rangle = \frac{\langle \phi^2 \rangle}{1 + \frac{\ell_p}{\hbar} \langle \phi^2 \rangle}$ .

Este modelo heurístico tan sencillo notablemente da lugar a funciones de dos puntos bien comportadas en el límite de dos puntos coincidentes  $\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \langle \Phi(x_1)\Phi(x_2) \rangle = -\frac{\hbar}{\ell_p^2}$  contrario al caso de RE en el que es divergente y que se obtiene ahora sólo cuando  $\ell_p \rightarrow 0$ . La tasa de función de respuesta contiene la forma térmica usual del efecto Unruh en el límite  $\ell_p \rightarrow 0$  y puede extenderse hasta la energía umbral  $\epsilon = \hbar\Omega \approx \frac{a^2 \hbar \ell_p}{32\pi e^{-\frac{2\pi\Omega}{a}}}$ . Más allá de esta energía será necesario considerar otros aspectos que modifican el carácter Planckiano.

Las conclusiones que surgen del presente trabajo son las siguientes:

1. El análisis presentado basado en la descomposición de Fourier del campo está limitado por el tipo de espacio tiempo de fondo que permite separar frecuencias positivas y negativas.
2. En el contexto de la relatividad especial no existe un límite a la energía o longitud de onda de los modos que conforman el campo. En particular la función de dos puntos diverge en el límite de pequeñas distancias.

3. Es posible describir el efecto sobre un detector de la presencia de un campo cuántico a través del ritmo de transición del detector desde su estado base a uno excitado. La tasa de cambio de la función de respuesta del detector contiene esta información y depende de la función de dos puntos de frecuencias positivas (función de Wightman de frecuencias positivas).
4. La tasa de cambio de la función de respuesta en RE para un detector inercial en el caso de un campo en estado de vacío de acuerdo a un observador inercial es cero. Esto indica que el detector inercial no registra efecto alguno. Para el caso del detector acelerado la tasa de función de respuesta en las mismas condiciones da lugar a un espectro térmico, es decir, el efecto Unruh, con temperatura  $T = \frac{a\hbar}{2\pi k_B}$ .
5. La relatividad especial doble implica dos invariantes, la velocidad de la luz y la energía de Planck. La adición de energía y momento es no lineal y la viabilidad fenomenológica no es evidente.
6. En el contexto de RED el efecto Unruh está contenido en el régimen  $\ell_p \rightarrow 0$  y puede extenderse hasta una energía umbral.

A futuro sería interesante considerar otros campos como el electromagnético o espinorial para poder comparar con el caso escalar. Esto nos daría oportunidad de investigar la Relatividad Especial Doble. Adicionalmente una teoría de campo consistente con relatividad especial doble debería ser estudiada. Curiosamente también se ha considerado una relatividad especial triple que incluye un tercer invariante asociado con la constante cosmológica; es posible investigar las funciones de correlación de dos puntos en este caso.





## Modos escalares en coordenadas de Rindler

En este apéndice se realizan los cálculos de los modos para la cuña derecha  $D$  de Rindler. El cálculo está guiado por la referencia [7].

La ecuación para el campo escalar con masa en la cuña derecha de Rindler ( $D$ ) es

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + e^{2a\zeta} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - m^2 e^{2a\zeta} \right] \Phi = 0, \quad (\text{A.1})$$

consideramos como soluciones con frecuencias positivas a

$${}^D u_{\omega, \vec{k}_\perp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega}} g_{\omega k_\perp}(\zeta) e^{-i\omega\eta + i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}, \quad (\text{A.2})$$

donde las funciones  $g_{\omega k_\perp}(\zeta)$  y su complejo conjugado tienen la siguiente forma

$$g_{\omega k_\perp}(\zeta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{i(\omega\zeta + \gamma(\omega))} + e^{-i(\omega\zeta + \gamma(\omega))} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-i(\omega\zeta + \gamma(\omega))} + e^{i(\omega\zeta + \gamma(\omega))} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Dichas funciones,  $g_{\omega k_\perp}(\zeta)$  y  $g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)$ , satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\left[ -\frac{d^2}{d\zeta^2} + e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) \right] g_{\omega k_\perp}(\zeta) = \omega^2 g_{\omega k_\perp}(\zeta), \quad (\text{A.5})$$

$$\left[ -\frac{d^2}{d\zeta^2} + e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) \right] g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) = \omega^2 g_{\omega k_\perp}^*(\zeta). \quad (\text{A.6})$$

Primero, verificamos la normalización del producto  $g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta)$ , para esto definimos la cantidad

$$S_A(\omega, \omega') \equiv \int_{-A}^{\infty} d\zeta g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta). \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando (A.7) por  $\omega^2$  y utilizando la ecuación diferencial (A.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega^2 S_A(\omega, \omega') &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta \omega^2 g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \\ &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left\{ \left[ -\frac{d^2}{d\zeta^2} + e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) \right] g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right\} \\ &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta) - \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] g_{\omega' k_\perp}(\zeta), \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

ahora multiplicando (A.7) por  $\omega'^2$  y utilizando la ecuación diferencial (A.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega'^2 S_A(\omega, \omega') &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta \omega'^2 g_{\omega k_\perp}^*(\zeta)g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \\ &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left\{ \left[ -\frac{d^2}{d\zeta^2} + e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) \right] g_{\omega' k_\perp}(\zeta)g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right\} \\ &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta e^{2a\zeta} (k_\perp^2 + m^2) g_{\omega' k_\perp}(\zeta)g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) - \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] g_{\omega k_\perp}^*(\zeta). \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Restamos (A.8) de (A.9) para obtener

$$(\omega^2 - \omega'^2) S_A(\omega, \omega') = \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) - \int_{-A}^{\infty} d\zeta \left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] g_{\omega' k_\perp}(\zeta), \quad (\text{A.10})$$

pero podemos reescribir las segundas derivadas en términos de derivadas totales como se muestra enseguida

$$\left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \left[ g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] - \left[ \left( \frac{d}{d\zeta} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right) \left( \frac{d}{d\zeta} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right) \right], \quad (\text{A.11})$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\zeta^2} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] g_{\omega' k_\perp}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \left[ g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] - \left[ \left( \frac{d}{d\zeta} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right) \left( \frac{d}{d\zeta} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Sustituimos (A.11) y (A.12) en (A.10) y al aplicar el teorema fundamental del cálculo, encontramos que

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega'^2) S_A(\omega, \omega') &= \int_{-A}^{\infty} d\zeta \frac{d}{d\zeta} \left[ g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] - \int_{-A}^{\infty} d\zeta \frac{d}{d\zeta} \left[ g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] \\ &= \left[ g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \right] \Big|_{\zeta=-A} - \left[ g_{\omega' k_\perp}(\zeta) \frac{d}{d\zeta} g_{\omega k_\perp}^*(\zeta) \right] \Big|_{\zeta=-A}. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Utilizando las funciones  $g_{\omega'k_{\perp}}(\zeta)$  (A.3) y  $g_{\omega k_{\perp}}^*(\zeta)$  (A.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - \omega'^2) S_A(\omega, \omega') &\approx \frac{\omega'}{\pi} \{ \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] - \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \} \\
&\quad + \frac{\omega}{\pi} \{ \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] + \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \} \\
&= \frac{1}{\pi} \{ (\omega + \omega') \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \\
&\quad (\omega - \omega') \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \}, \tag{A.14}
\end{aligned}$$

para  $\zeta < 0$ ,  $|\zeta| \gg 1$ . Nos interesa estudiar sólo la función  $S_A(\omega - \omega')$  por lo que la despejamos de la relación anterior y llegamos a la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
S_A(\omega, \omega') &= \frac{1}{\pi (\omega^2 - \omega'^2)} \{ (\omega + \omega') \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \\
&\quad (\omega - \omega') \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega')} \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(\omega + \omega')} \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \right\}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Pero de [7] conocemos la relación

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin(xA)}{x} \right) = \pi \delta(x), \tag{A.16}$$

de esta última y con  $S_A(\omega, \omega')$  (A.15) podemos calcular

$$\begin{aligned}
\lim_{A \rightarrow \infty} S_A(\omega, \omega') &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega')} \sin [A(\omega - \omega') + \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{(\omega + \omega')} \sin [A(\omega + \omega') - \gamma(\omega') - \gamma(\omega)] \right\} \right\} \\
&= \delta(\omega - \omega'). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la normalización a la función delta de los modos  $g_{\omega k_{\perp}}(\zeta)$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} S_A(\omega, \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta g_{\omega k_{\perp}}^*(\zeta) g_{\omega' k_{\perp}}(\zeta) = \delta(\omega - \omega'). \tag{A.18}$$

Para encontrar la forma de los modos  $g_{\omega k_{\perp}}(\zeta)$ , primero se propone un cambio de variable dependiente de  $\zeta$  y  $k_{\perp}$  como sigue

$$\chi \equiv \frac{\sqrt{k_{\perp}^2 + m^2}}{a} e^{a\zeta}, \tag{A.19}$$

y calculamos la derivada respecto de dicha variable

$$\frac{d}{d\chi} = \frac{d\chi}{d\zeta} \frac{d}{d\zeta} = \sqrt{k_{\perp}^2 + m^2} e^{a\zeta} \frac{d}{d\zeta} = a\chi \frac{d}{d\zeta}, \quad (\text{A.20})$$

ahora sustituimos (A.19) y (A.20) en (A.1)

$$\left[ a^2 \chi^2 \frac{d^2}{d\chi^2} + a^2 \chi \frac{d}{d\chi} - a^2 \chi^2 + \omega^2 \right] g_{\omega k_{\perp}}(\zeta) = 0, \quad (\text{A.21})$$

así obtenemos la ecuación diferencial, respecto a la variable  $\chi$ , para los modos  $g_{\omega k_{\perp}}(\zeta)$

$$\left[ \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} - 1 + \frac{\left(\frac{\omega^2}{a^2}\right)}{\chi^2} \right] g_{\omega k_{\perp}}(\zeta) = 0. \quad (\text{A.22})$$

La solución a la ecuación (A.22), tomando como referencia la ecuación diferencial 8.494 de [20], es de la forma

$$g_{\omega \vec{k}_{\perp}}(\zeta) = C_{\omega k_{\perp}} K_{\frac{i\omega}{a}} \left[ \frac{\kappa}{a} e^{a\zeta} \right], \quad (\text{A.23})$$

donde  $\kappa \equiv \sqrt{k_{\perp}^2 + m^2}$ ,  $C_{\omega k_{\perp}} = \text{constante}$  y  $K_{\frac{i\omega}{a}} \left[ \frac{\kappa}{a} e^{a\zeta} \right]$  es la función de Bessel modificada.

La función de Bessel modificada, según [20] en la relación 8.485, se puede expresar en términos de las funciones  $J_v(x)$  de Bessel como se muestra

$$K_v(x) \equiv -\frac{\pi i^{-v} J_v(ix) - i^v J_{-v}(ix)}{2 \sin(v\pi)}, \quad (\text{A.24})$$

para  $|x| \ll 1$  la función de Bessel  $J_v(x)$  es

$$J_v(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^v}{\Gamma(v+1)}, \quad (\text{A.25})$$

con esto podemos reescribir  $K_v(x)$  como sigue

$$K_{\frac{i\omega}{a}}(x) \approx \frac{i\pi}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{i\omega}{a}}}{\Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{a}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{i\omega}{a}}}{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{a}\right)} \right\}, \quad (\text{A.26})$$

pero de las propiedades estudiada en el capítulo 13 sección 1 de [22] de la función gamma sabemos que

$$\left| \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{a}\right) \right|^2 = \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{a}\right) = \frac{i\omega}{a} \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{a}\right) = \frac{\pi\omega}{a \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \quad (\text{A.27})$$

Substituyendo esto último en (A.26) obtenemos

$$K_{\frac{i\omega}{a}}(x) \approx \sqrt{\frac{a\pi}{\omega \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left[ e^{i\beta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{i\omega}{a}}} + e^{-i\beta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-i\omega}{a}}} \right], \quad (\text{A.28})$$

donde  $\beta$  es una constante.

Entonces los modos  $g_{\omega\vec{k}_\perp}$ , para 1 + 3 dimensiones, son de la forma

$$g_{\omega\vec{k}_\perp} \approx C_{\omega k_\perp} \sqrt{\frac{\omega \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}{a\pi}} \left[ e^{i\beta\left(\frac{\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\zeta}\right)}{2}\right)^{\frac{i\omega}{a}}} + e^{-i\beta\left(\frac{\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\zeta}\right)}{2}\right)^{\frac{-i\omega}{a}}} \right]. \quad (\text{A.29})$$



# Bibliografía

- [1] I. Agulló, J. Navarro-Salas, G. J. Olmo, and L. Parker, Two-point functions with an invariant Planck scale and thermal effects, *Phys. Rev. D* **77**, 124032 (2008).
- [2] G. Amelino-Camelia, Doubly Special Relativity, *arXiv: gr-qc/0207049v1*, (2002).
- [3] M. Socolovsky, Rindler Space and Unruh Effect, *arXiv: gr-qc/1304.2833v2*, (2013).
- [4] J. Kowalski-Glikman, Introduction to Doubly Special Relativity, arXiv: hep-th/0405273v11 (2004).
- [5] J. Louko, A. Satz, Transition rate of the Unruh-DeWitt detector in curved spacetime, *arXiv: 0710.5671v3 [gr-qc]*, (2008).
- [6] A. Higuchi, S. Iso, Entanglement of the vacuum between left, right, future, and past: The origin of entanglement-induced quantum radiation, *Phys. Rev. D* **96**, 083531 (2017).
- [7] L. C. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, The Unruh effect and its applications, *Reviews of Modern Physics* **80**, (2008).
- [8] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (University Press, Cambridge, 1992)
- [9] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (University Press, Cambridge, 2007)
- [10] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity. An elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory* (University Press, Cambridge, 2015)
- [11] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics* (Westview Press, 1990)
- [12] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [13] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. (Pearson, 2003).
- [14] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory, Second edition* (Cambridge University Press, 1996).

- 
- [15] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, 1995).
- [16] W. G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [17] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, 1989).
- [18] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover, 1980).
- [19] R. K. Pathria, P. D. Beale *Statistical Mechanics. Third edition* (Elsevier, 2011).
- [20] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzbik *Table of Integrals, Series and Products. Sixth edition* (Academic Press, 2000).
- [21] M. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1972).
- [22] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris *Mathematical Methods for Physicists. A Comprehensive Guide. Seventh Edition* (Academic Press, 2013).
- [23] J. Magueijo and L. Smolin *Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale Phys. Rev. Lett.* **88**, 190403 (2002)



Efecto Unruh y relaciones de dispersión modificadas para un campo escalar.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 14 del mes de diciembre del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. HECTOR HUGO GARCIA COMPEAN
- DR. ABEL CAMACHO QUINTANA
- DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL




MELINA GUADALUPE RUIZ PEREZ  
ALUMNA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)

DE: MELINA GUADALUPE RUIZ PEREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

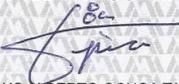
REVISÓ



DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA  
SECRETARIO GENERAL

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



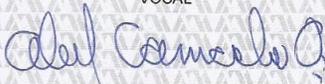
DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE



DR. HECTOR HUGO GARCIA COMPEAN

VOCAL



DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

SECRETARIO



DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL