

**ESTIMACIÓN NUMÉRICA
DE LA PROBABILIDAD DE RUINA:
CASO SUBEXPONENCIAL**

Tesis que presenta
Brenda Ivette García Maya
Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias
(Matemáticas Aplicadas e industriales)

Asesora: DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

Jurado Calificador:

Presidente: DR. RAÚL RUEDA DÍAZ DEL CAMPO IIMAS-UNAM

Secretario: DR. GABRIEL NÚÑEZ ANTONIO UAM-I

Vocal: DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA UAM-I

México, CDMX febrero de 2016

A veces se trabaja toda una vida para avanzar apenas un metro,
pero así crecieron las grandes montañas,
avanzando siglo a siglo,
metro a metro.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer este trabajo al CONACYT por dejarme formar parte de su lista de becarios y así comenzar este proyecto profesional. A la Dra. Patricia Saavedra Barrera por su tiempo y dedicación. A mis sinodales, el Dr. Raúl Rueda y el Dr. Gabriel Núñez por sus observaciones al trabajo de tesis. A mi esposo Hernán Abaunza por sus clases de programación y por tener la paciencia de escuchar sobre mi tema de tesis todos los días. A mis abuelos por su apoyo durante todos mis años de vida para emprender y concluir mis proyectos. A mis suegros Naela y Héctor por estar al pendiente de mi desde hace varios años. A mis amigas Michell y Belem porque juntas emprendimos este grado académico y hemos compartido muchas experiencias. A mis amigos Alán y Margarita por tantas veces que estudiamos juntos e hicimos tarea en los talleres de modelado. A todos mis compañeros de generación por haber compartido conmigo esta experiencia profesional. A Dios, porque a través de las circunstancias de la vida me ha hecho la persona que soy hoy en día, fuerte y perseverante para alcanzar mis metas.

¡ A todos mil gracias! ♡

Índice general

AGRADECIMIENTOS	v
Introducción	1
1. Antecedentes	3
1.1. Proceso de Cramer-Lundberg	3
1.2. Tiempo de ruina	5
1.3. Probabilidad de ruina	6
1.4. Condición de ganancia neta	6
1.5. Exponente de Lundberg	7
2. Distribuciones subexponenciales	13
2.1. Distribuciones de cola pesada	13
2.2. Subconjunto subexponencial	17
2.3. Probabilidad de ruina con reclamos subexponenciales	33
2.3.1. Teorema de Pollaczeck-Khinchine	33
2.3.2. Teorema de Embrechts-Veraverbeke	37
3. Estimación de la probabilidad de ruina	41

3.1. Records a la baja	41
3.2. Estimación mediante el algoritmo de Panjer	46
3.2.1. Relación de recurrencia de Panjer	47
3.2.2. Algoritmo de Panjer	48
3.3. Probabilidad de solvencia por el algoritmo de Panjer	52
3.3.1. Algoritmo de Panjer para la estimación de la probabilidad de ruina de una empresa aseguradora	54
3.4. Método de Monte-Carlo crudo	55
3.4.1. Estimación del error en el método de Monte-Carlo	56
3.4.2. Algoritmo de Monte-Carlo crudo para la estimación de la ruina de una empresa aseguradora	57
3.5. Metodos de reducción de varianza	58
3.6. Muestreo por importancia	59
3.6.1. Cambio de medida exponencial	60
3.6.2. Estimación de la probabilidad de ruina con cambio de medida ex- ponencial	61
3.6.3. Algoritmo muestreo por importancia	63
3.6.4. Monte-Carlo condicionado	64
3.6.5. Algoritmo de Monte-Carlo condicionado	65
4. Resultados	69
4.1. Estimación de la ruina para reclamos exponenciales	69
4.2. Estimación de la ruina para reclamos tipo Weibull	74
4.3. Probabilidad de ruina para reclamos tipo Pareto	79

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
4.4. Análisis de datos reales	83
4.4.1. Estimación de la probabilidad de ruina para la aseguradora	87
5. Conclusiones	97
A. Conceptos de probabilidad y transformada de Laplace	99
A.1. Funcion generadora de probabilidades	99
A.2. Proceso de conteo	100
A.3. Proceso de Poisson homogéneo	100
A.4. Proceso de Poisson compuesto	102
A.4.1. Varianza de un proceso de Poisson compuesto	102
A.5. Distribución exponencial	105
A.6. Desigualdad de Chebyshev	106
A.7. Cola integrada de las distribuciones Pareto y Weibull	106
A.8. Transformada de Laplace	108
Bibliografía	111

Introducción

De manera general una compañía de seguros opera de la siguiente forma: un grupo de personas (asegurados) está expuesto a determinado tipo de accidentes; choques automovilísticos, robos, incendios, inundaciones, etcétera. Contratan un seguro donde cada una de las personas afiliadas a dicha aseguradora paga una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo llamada prima de la aseguradora. Esta a su vez, tiene la obligación de pagar al asegurado el monto total del daño en caso de accidente en el momento en que éste ocurra.

Gerber(1979) define la Teoría de Riesgo como aquella rama de la Ciencia Actuarial que modela al negocio asegurador utilizando variables aleatorias para el número y monto de los siniestros durante los periodos contractuales. Un problema en la Teoría de Riesgo es estudiar la probabilidad de incumplimiento de una empresa aseguradora. Es decir la probabilidad de que su reserva sea negativa en algún momento, a esto se le conoce como probabilidad de ruina. Estimar la ruina de una aseguradora no es tarea sencilla, ya que depende de la riqueza inicial, número de reclamos y la distribución de los mismos. Para modelar la probabilidad de incumplimiento se ha realizado lo siguiente: en 1903 el actuario Filip Lundberg hace uso del proceso de Poisson compuesto para modelar la llegada de las reclamaciones. Más tarde el actuario y estadístico Harald Crámer propone un proceso que le permite modelar la reserva de la empresa en cualquier tiempo cuando los reclamos son de colas ligeras. Chistyatov (1964) introduce la clase de las distribuciones subexponenciales, que se utilizan para modelar reclamaciones grandes. S. Asmussen y K. Binwanger (1997) presentan la estimación vía simulación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución subexponencial cuando la riqueza inicial es muy grande, tema que se sigue

estudiando hasta la actualidad.

Para montos de reclamación para los cuales existe su función generadora de momentos hay expresiones y cotas para estimar la probabilidad de ruina, sin embargo varias de estas propiedades se pierden para distribuciones de cola pesada al no ser posible determinar el exponente de Lundberg R .

Objetivos

- 1.- Estudio de la probabilidad de ruina cuando los montos de reclamación tienen distribución subexponencial.
- 2.- Estimación numérica de la probabilidad de ruina mediante diversos métodos: el Teorema de Embrechts-Veraverbeke, el algoritmo de Panjer, el método de Monte-Carlo crudo y los métodos de Monte-Carlo con reducción de varianza.
- 3.- Ilustrar con datos reales, la estimación de la probabilidad de ruina para reclamos subexponenciales.

En capítulo 1, se presenta el modelo de Cramer-Lundberg y se define la probabilidad de ruina para distribuciones de cola ligera. En el capítulo 2, se da la definición de distribuciones de cola pesada y subexponenciales. Se estudian los Teorema de Pollaczek-Khinchine y Embrechts-Veraverbeke. En capítulo 3, se estudia el algoritmo de Panjer, el método de Monte-Carlo crudo y los métodos de Monte-Carlo con reducción de varianza. En el capítulo 4, se estima la probabilidad de ruina para reclamos con distribuciones Pareto y Weibull. Se estima la probabilidad de ruina para una empresa aseguradora en Dinamarca a través del análisis de sus montos de reclamación. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se presenta la probabilidad de ruina para el caso de colas ligeras, para mayores referencias ver [8].

1.1. Proceso de Cramer-Lundberg

Se tiene una compañía de seguros con una riqueza inicial $u \geq 0$ y una prima cobrada por unidad de tiempo $c > 0$, entonces la riqueza $U(t)$ de la empresa al tiempo t , se define de la siguiente manera

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

donde $S(t)$ es la suma del monto de las reclamaciones al tiempo t , la cual tiene la forma

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

donde X_i es el monto de la i -ésima reclamación. Consideremos que al tiempo $t = 0$ no

habrá reclamos, por lo tanto $S(0) = 0$. Además supongamos que la llegada de las reclamaciones ocurre en tiempos aleatorios T_1, T_2, \dots de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo $\{N(t) : t \geq 0\}$ de intensidad $\lambda > 0$. Esto significa que los tiempos entre reclamos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial (ver Teorema A.3.1). Supongamos también que los montos de las reclamaciones X_1, X_2, \dots son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que a la vez son independientes del número de reclamos. Por lo tanto $\{S(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto. Al proceso que modela $U(t)$ se le llama proceso de Cramer-Lundberg.

Al comienzo $U(t)$ va creciendo porque recibe las primas de sus asegurados, pero al ocurrir el primer reclamo $U(t)$ decrece tanto como el monto de la primera reclamación. Posteriormente $U(t)$ comienza a crecer de nuevo hasta que sucede la segunda reclamación y la riqueza de la empresa decrece tanto como el monto del segundo reclamo, así sucesivamente. En la figura 1.1 se muestra la gráfica de una posible trayectoria para la reserva de una compañía aseguradora suponiendo que los montos de reclamación tienen distribución exponencial con parámetro $\beta = 0.001$, los tiempos entre reclamos tienen distribución exponencial con intensidad $\lambda = 0.1$, la riqueza inicial de la empresa es $u = 1000$ y la prima cobrada por unidad de tiempo es $c = 50$.

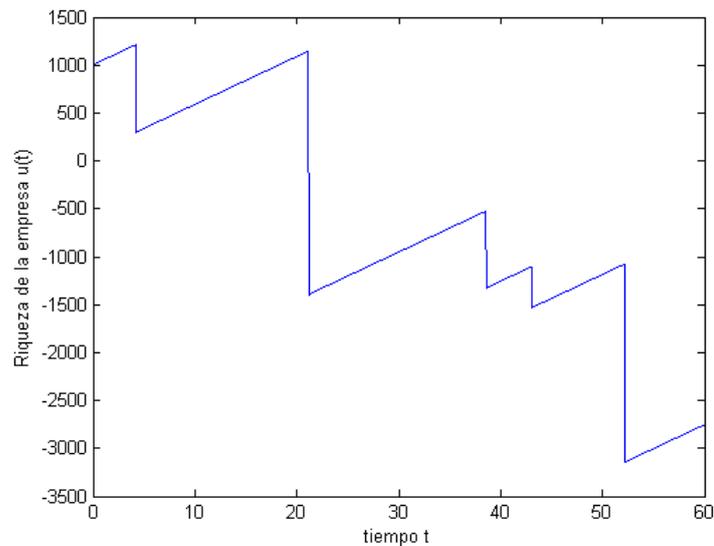


Figura 1.1: Posible trayectoria de la reserva de una compañía aseguradora con montos de reclamación exponenciales.

1.2. Tiempo de ruina

Definición 1.2.1. *Definimos el tiempo de ruina τ como el ínfimo tiempo para el cual la reserva de una compañía aseguradora es negativa*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\},$$

si $\{t \geq 0 : U(t) < 0\} = \emptyset$, entonces $\tau = \infty$.

Cabe mencionar que aunque el estado de ruina haya llegado no significa que la compañía vaya a quebrar, es importante entender que este estado se utiliza para fijar un límite inferior de fondos para la compañía que en un momento ayudará a tomar medidas contra pérdidas excesivas de recursos.

1.3. Probabilidad de ruina

Definición 1.3.1. *La probabilidad de ruina en tiempo infinito o con horizonte infinito comenzando con riqueza inicial u se denota por $\psi(u)$, donde*

$$\psi(u) = P(U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0).$$

Definición 1.3.2. *La probabilidad de ruina en tiempo finito o con horizonte finito comenzando con una riqueza inicial u se denota por*

$$\psi(u, t) = P(U(t) < 0 \text{ para algún } t \leq T).$$

Una relación que podemos considerar entre ambas probabilidades es que $\psi(u, t) \leq \psi(u)$, ver[10] pag.18.

1.4. Condición de ganancia neta

La condición de ganancia neta nos ayuda a determinar una de las hipótesis que debe satisfacer la prima que cobra la aseguradora de tal manera que el valor esperado de la riqueza de la empresa no sea negativa para ningún tiempo $t \geq 0$.

Analicemos el valor esperado de la riqueza de la compañía al tiempo t .

$$\begin{aligned} E[U(t)] &= E[u + ct - S(t)] \\ &= E[u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i], \end{aligned}$$

si $u = 0$

$$\begin{aligned} E[u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i] &= ct - E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] \\ &= ct - \lambda t E[X]. \end{aligned}$$

Para que la probabilidad de ruina sea distinta de uno se desea que $E[U(t)] > 0$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto se debe de cumplir que $c > \lambda E[X]$. Sea $E[X] = \mu$ la esperanza de los montos de reclamación, entonces

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0, \quad (1.1)$$

es la condición de ganancia neta y es una de las hipótesis de solvencia de la compañía, de no cumplirse la ruina ocurre de manera segura.

1.5. Exponente de Lundberg

Para montos de reclamación para los cuales existe su función generadora de momentos es posible calcular el exponente de Lundberg o coeficiente de ajuste R , el cual ayuda a estimar el calculo de la ruina.

Definición 1.5.1. *Definimos el exponente de Lundberg o coeficiente de ajuste R para reclamos con montos $X > 0$, como la solución positiva de la ecuación*

$$1 + (1 + \theta)\mu r = m_X(r), \quad (1.2)$$

donde $m_X(r)$ es la función generadora de momentos para la variable aleatoria de los montos de reclamación X , $\mu = E[X]$ y θ es la condición de ganancia neta.

Sustituyendo $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ en la ecuación (1.2) obtenemos la ecuación de Lundberg

$$\lambda + cr = \lambda m_X(r). \quad (1.3)$$

Teorema 1.5.1. *Para una riqueza inicial $u \geq 0$ y satisfaciendo la condición de ganancia neta, la expresión de la probabilidad de ruina para montos de reclamación para los cuales existe su función generadora de momentos está dada por*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-Ru(\tau)} | \tau < \infty]} \quad (1.4)$$

Demostración:

Para $t \geq 0$ y $r > 0$ consideremos

$$E[e^{-ru(t)}] = E[e^{-ru(t)} | \tau \leq t]P(\tau \leq t) + E[e^{-ru(t)} | \tau > t]P(\tau > t), \quad (1.5)$$

ya que $u(t) = u + ct - s(t)$ el primer término del lado izquierdo de la ecuación (1.5) es

$$E[e^{-ru-rct+rs(t)}] = e^{-ru-rct} E[e^{rs(t)}], \quad (1.6)$$

pero

$$E[e^{rs(t)}] = \exp\{\lambda t[m_X(r) - 1]\}, \quad (1.7)$$

entonces la ecuación (1.6) se transforma en

$$e^{-ru-rct} E[e^{rs(t)}] = \exp\{-ru - rct + \lambda t[m_X(r) - 1]\}. \quad (1.8)$$

En el primer término del lado derecho de la ecuación (1.5) escribimos

$$\begin{aligned}
u(t) &= u(\tau) + (u(t) - u(\tau)) \\
&= u(\tau) + (u + ct - s(t) - u - c\tau + s(\tau)) \\
&= u(\tau) + c(t - \tau) - (s(t) - s(\tau)),
\end{aligned}$$

entonces reescribiendo el primer término del lado derecho de la ecuación (1.5) tenemos

$$E[e^{-ru(t)} | \tau \leq t] P(\tau \leq t) = E[e^{-ru(\tau) - rc(t-\tau) + r[s(t) - s(\tau)]} | \tau \leq t] P(\tau \leq t). \quad (1.9)$$

Notemos que $s(t) - s(\tau)$ es un proceso de Poisson compuesto con intensidad $\lambda(t - \tau)$, entonces la ecuación (1.9) se puede reescribir como

$$E[\exp(-ru(t)) \exp\{-rc(t - \tau) + \lambda(t - \tau)[m_X(r) - 1]\} | \tau \leq t] P(\tau \leq t). \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.10) pueden ser reescritas escogiendo r tal que $-rc + \lambda[m_X(r) - 1] = 0$. Gracias a la ecuación (1.3) sabemos que dicho r es el parámetro de Lundberg R , entonces escogiendo $r = R$ la ecuación (1.5) queda de la forma

$$e^{-Ru} = E[e^{-Ru(\tau)} | \tau \leq t] P(\tau \leq t) + E[e^{-Ru(t)} | \tau > t] P(\tau > t), \quad (1.11)$$

si $t \rightarrow \infty$ el primer término del lado derecho de la ecuación (1.11) converge a

$$E[e^{-Ru(t)} | \tau < \infty] \psi(u).$$

Ahora queremos hacer que el segundo término de la expresión (1.11) tienda a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea $\alpha = c - \lambda E[X]$, $\beta^2 = \lambda E[X^2]$ entonces,

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= u + ct - \lambda t E[X] \\ &= u + t\alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{Var}(u(t)) &= \text{Var}(s(t)) \\ &= \lambda t E[X^2] \\ &= t\beta^2. \end{aligned}$$

Consideremos $u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}$ la cual es positiva para t suficientemente grande, aplicando lo anterior al segundo término de la ecuación (1.11) y condicionando sobre si $u(t)$ es mayor o menor que $u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}$, tenemos

$$\begin{aligned} &E[e^{-Ru(t)} | \tau > t, 0 \leq u(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}] P(\tau > t, 0 \leq u(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \\ &+ E[e^{-Ru(t)} | \tau > t, u(t) > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}] P(\tau > t, u(t) > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \\ &\leq P(u(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) + \exp\{-R(u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}})\} \\ &\leq t^{-\frac{1}{3}} + \exp\{-R(u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}})\} \end{aligned}$$

por la desigualdad de Chebychev el segundo término de lado derecho de la ecuación (1.11)

tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, lo que da por concluida la demostración. ■

En general no es posible dar una solución explícita para el denominador del Teorema 1.5.1. Uno de los casos en que se tiene una solución analítica es para reclamos con distribución exponencial, donde la expresión de la probabilidad de ruina es $\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{\frac{-\theta u}{(1+\theta)E[X]}\right\}$ (ver demostración en [8] pag. 90), pero en la mayoría de ellos no es tan simple determinar esta probabilidad. Lo que se realiza en la práctica es dar cotas superiores para estimar la ruina.

Corolario 1.5.1. (*Desigualdad de Lundberg*). *Bajo las hipótesis del Teorema (1.5.1)*

$$\psi(u) < e^{-Ru} \quad \text{para todo } u \geq 0.$$

Demostración:

Ya que la reserva de la empresa al tiempo de ruina $U(\tau)$ es negativa. El denominador de la expresión (1.4) es mayor que uno, por lo tanto $\psi(u) < e^{-Ru}$. ■

Capítulo 2

Distribuciones subexponenciales

Las variables aleatorias con distribución subexponencial son un subconjunto de las distribuciones de cola pesada. En la vida cotidiana los montos de reclamación tipo subexponencial ayudan a modelar seguros donde los reclamos son grandes: seguros contra incendios, inundaciones, terremotos entre otros. Para mayores detalles consultar [1].

2.1. Distribuciones de cola pesada

Definición 2.1.1. Sea $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. \bar{F} es llamada la cola de la distribución de F .

Para una variable aleatoria positiva X decimos que esta tiene cola ligera si

$$m_X(s) < \infty \text{ para todo } s > 0,$$

y X tiene cola pesada si

$$m_X(s) = \infty \text{ para todo } s > 0,$$

donde $m_X(s) = E[e^{sX}]$ es la función generadora de momentos de la variable aleatoria X .

Como podemos observar la función generadora de momentos no existe para todas las

distribuciones, de hecho por definición las distribuciones de cola pesada son aquellas para las cuales no se puede calcular dicha función, por consiguiente varias de las propiedades para la estimación de la ruina en donde se utiliza el exponente de Lundberg no pueden ser aplicadas. A continuación se muestran algunos ejemplos de distribuciones de cola pesada.

- Distribución lognormal. $LN(\mu, \sigma^2)$, si la variable aleatoria X tiene distribución $N(\mu', \sigma'^2)$, entonces e^X tiene distribución lognormal cuya densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu')^2}{2\sigma'^2}\right\} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con media $\mu = e^{\mu' + \frac{\sigma'^2}{2}}$ y varianza $\sigma^2 = e^{2\mu' + \sigma'^2}(e^{\sigma'^2} - 1)$. Al igual que la distribución normal, esta distribución no cuenta con una expresión analítica para su función de probabilidad acumulada y por consiguiente tampoco existe una expresión analítica para la cola.

- Distribución Pareto, $Par(\alpha, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha+1} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con exponente o parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro escala $\beta > 0$. Su media está dada por

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha - 1},$$

su función de distribución es

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha,$$

por lo tanto la cola de la distribución esta dada por

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x} \right)^\alpha.$$

- Distribución tipo Weibull, $W(\alpha, \beta)$, con parámetro de forma $\beta > 0$ y parámetro de escala $\alpha > 0$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Su media es $\mu = \alpha \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$, tiene función de distribución

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\},$$

por tanto su cola está dada por la expresión

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\}.$$

Si el parámetro de forma $\beta \geq 1$, entonces $W(\alpha, \beta)$ es de cola ligera mientras que si $\beta < 1$, entonces $W(\alpha, \beta)$ es de cola pesada.

Teorema 2.1.1. *Sea F la función de distribución de los montos de reclamación, entonces el valor esperado para dichos montos $E[X] = \mu$ está determinado por la integral*

$$\int_0^\infty [1 - F(x)] dx = \mu.$$

Demostración:

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - F(x)) dx &= (1 - F(x))x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x f(x) dx \\ &= (1 - F(x))x \Big|_0^\infty + E[X]. \end{aligned}$$

Ahora calculemos

$$(1 - F(x))x \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x.$$

Al utilizar L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{1-F(x)}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{(1-F(x))^2}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx = \mu. \quad \blacksquare$$

Definición 2.1.2. Sea $M(x) = -\ln \bar{F}(x)$. A $M(x)$ se le conoce como la función de riesgo de la función de distribución F .

Teorema 2.1.2. Una función de distribución F sobre $(0, \infty)$ tiene cola pesada si

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0.$$

Demostración:

Supongase que $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0$, por lo que para cada $\epsilon > 0$ existe $x' > 0$ tal que $M(x) \leq \epsilon x$ para toda $x \geq x'$, es decir $\ln \bar{F}(x) \geq -\epsilon x$. Por lo tanto existe $c > 0$ tal que $\bar{F}(x) \geq ce^{-\epsilon x}$ para toda $x \geq 0$, entonces

$$\bar{F}(x)e^{\epsilon x} \geq c. \tag{2.1}$$

De aquí se tiene $\int_0^\infty e^{xs} \overline{F}(x) dx = \infty$ para toda $s \geq \epsilon$. Como tomamos $\epsilon > 0$ arbitraria la desigualdad anterior se cumple para toda $s > 0$, de donde se puede concluir que F es de cola pesada. ■

2.2. Subconjunto subexponencial

Antes de comenzar a hablar de las distribuciones subexponenciales es importante definir el concepto de convolución, ya que las variables aleatorias subexponenciales están definidas en términos de la convolución de dos funciones de distribución.

Definición 2.2.1. *La convolución $F * G$ de dos funciones de distribución, es la distribución de la suma $X+Y$ de dos variables aleatorias independientes X y Y con distribuciones respectivas F y G , la cual se define como*

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y) dG(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La convolución n -ésima de la función de distribución F , denotada por F^{*n} , está definida inductivamente de la siguiente manera: para $n = 0$, $F^{*0}(x) = \delta_0(x)$, donde

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$\delta_0(x)$ se conoce como la delta de Kronecker, mientras que para $n \geq 1$,

$$F^{*n} = F^{*(n-1)} * F.$$

Definición 2.2.2. *Decimos que una variable aleatoria X con función de distribución F , concentrada en \mathbb{R}_+ es subexponencial si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

donde $F^{*2}(x)$ denota la segunda convolución de F con F . Desde ahora en adelante a la clase de todas las distribuciones subexponenciales la vamos a denotar por S .

Lema 2.2.1. *Sea F una función de distribución en \mathbb{R}_+ , entonces se cumple que*

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y),$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2.$$

Demostración:

Tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) &= \int_0^x \frac{1 - F(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \\ &= \frac{1}{\overline{F}(x)} \left(\int_0^x dF(y) - \int_0^x F(x-y) dF(y) \right) \\ &= \frac{1}{\overline{F}(x)} \left(F(x) - F^{*2}(x) \right), \end{aligned}$$

si sumamos 1 a la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + 1 &= \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} + \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{1 - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)}. \end{aligned}$$

Verifiquemos la segunda parte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y). \end{aligned}$$

Debido a que F es una función monótona creciente,

$$F(x - y) \leq F(x),$$

entonces

$$\frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} \geq 1,$$

por lo tanto

$$\int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq \int_0^x dF(y),$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x dF(y) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2. \blacksquare$$

Lema 2.2.2. *Sea $F \in S$, entonces para toda $x' > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - x')}{\overline{F}(x)} = 1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1.$$

Demostración:

Para $0 \leq x' \leq y \leq x$ se tiene que

$$F(x - y) \leq F(x),$$

por lo tanto

$$\bar{F}(x - y) \geq \bar{F}(x),$$

entonces

$$\int_0^x \frac{\bar{F}(x - y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \geq \int_0^x dF(y) \geq \int_0^{x'} dF(y) = F(x'). \quad (2.2)$$

Por otro lado tenemos

$$F(x - y) \leq F(x - x'),$$

entonces

$$\bar{F}(x - y) \geq \bar{F}(x - x'),$$

por lo tanto

$$\int_{x'}^x \frac{\bar{F}(x - y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \geq \int_{x'}^x \frac{\bar{F}(x - x')}{\bar{F}(x)} dF(y) = \frac{\bar{F}(x - x')}{\bar{F}(x)} (F(x) - F(x')). \quad (2.3)$$

Por el lema 2.2.1 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{\bar{F}(x - y)}{\bar{F}(x)} dF(y) \\ &= 1 + \int_0^{x'} \frac{\bar{F}(x - y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \int_{x'}^x \frac{\bar{F}(x - y)}{\bar{F}(x)} dF(y), \end{aligned}$$

al utilizar las inecuaciones (2.3) y (2.2) obtenemos la desigualdad

$$1 + \int_0^{x'} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) + \int_{x'}^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq 1 + F(x') + \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} (F(x) - F(x')),$$

de esto se sigue que

$$\left(\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right) (F(x) - F(x'))^{-1} \geq \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} \geq 1.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(x') \right) \lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - F(x'))^{-1} &= \frac{2 - 1 - F(x')}{1 - F(x')} \\ &= 1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-x')}{\overline{F}(x)} = 1.$$

La segunda parte se sigue de

$$2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \right),$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.1. *Cada $F \in S$ es una distribución de cola pesada.*

Demostración:

Sea $F \in S$ por el Teorema 2.1.2 basta probar que $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0$.

Al saber que $F \in S$, entonces para toda $y > 0$, por el lema 2.2 tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1,$$

aplicamos logaritmo natural a la igualdad anterior e intercambiamos límite con logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right) = 0,$$

entonces de acuerdo a las propiedades de logaritmo y utilizando la definición de función de riesgo, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (M(x) - M(x-y)) = 0,$$

por lo tanto, para toda $\epsilon > 0$ existe x_0 tal que para toda $x \geq x_0$

$$M(x) - M(x-1) < \epsilon.$$

Si se sigue iterando llegamos a que

$$M(x) \leq M(x-1) + \epsilon \leq M(x-2) + 2\epsilon \leq \dots \leq M(x-n) + n\epsilon,$$

donde n es tal que $x_0 \leq x-n \leq x_0+1$. Con lo que $M(x) \leq \sup_{x_0 \leq x' \leq x_0+1} M(x') + (x-x_0)\epsilon$

para $x \geq x_0$, entonces para toda $\epsilon > 0$,

$$0 \leq \frac{\limsup_{x \rightarrow \infty} M(x)}{x} \leq \frac{\sup_{x_0 \leq x' \leq x_0+1} M(x') + (x-x_0)\epsilon}{x} = 0,$$

de donde podemos concluir que $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0$. ■

Lema 2.2.3. *Sea $F \in S$ y F' una función de distribución con $F'(0) = 0$, tal que*

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F'}(x)}{\overline{F}(x)} = c$ para alguna constante $c \in [0, \infty)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * F'(x)}}{\overline{F}(x)} = 1 + c. \quad (2.4)$$

Demostración:

Probar la ecuación (2.4) es equivalente a probar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{F * F'(x)}}{\overline{F}(x)} - 1 \right] = c.$$

Al trabajar con la expresión $\frac{\overline{F * F'(x)}}{\overline{F}(x)} - 1$ tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F * F'(x)}}{\overline{F}(x)} - 1 &= \frac{\overline{F * F'(x)} - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{1 - \int_0^x F'(x-y) dF(y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{F(x) - \int_0^x F'(x-y) dF(y)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{\int_0^x [1 - F'(x-y)] dF(y)}{\overline{F}(x)} \\ &= \frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y) dF(y)}{\overline{F}(x)}, \end{aligned}$$

entonces para probar el lema necesitamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F'}(x-y) dF(y)}{\overline{F}(x)} = c.$$

Puesto que por hipótesis $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F'}(x)}{\overline{F}(x)} = c$, se tiene que para toda $\epsilon > 0$, existe x_0 tal que

$$- \epsilon \leq \frac{\overline{F'}(x)}{\overline{F}(x)} - c \leq \epsilon \quad \text{para toda } x \geq x_0,$$

de lo anterior tenemos

$$(c - \epsilon)\overline{F}(x) \leq \overline{F'}(x) \leq (c + \epsilon)\overline{F}(x) \quad \text{para } x \geq x_0, \quad (2.5)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y) &\leq (c+\epsilon) \int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y) \\
&= (c+\epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c+\epsilon) \int_{x-x_0}^x \overline{F}(x-y)dF(y) \\
&\leq (c+\epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c+\epsilon) \int_{x-x_0}^x dF(y) \\
&= (c+\epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c+\epsilon)[F(x) - F(x-x_0)] \\
&= (c+\epsilon) \int_0^{x-x_0} \overline{F}(x-y)dF(y) + (c+\epsilon)(\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)) \\
&\leq (c+\epsilon) \int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y) + (c+\epsilon)(\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(c+\epsilon) \int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} + \frac{(c+\epsilon)(\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x))}{\overline{F}(x)} \right\},$$

usando el lema 2.2 calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (c+\epsilon) \frac{\overline{F}(x-x_0) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = (c+\epsilon)(1-1) = 0.$$

Por lo tanto y nuevamente por el lema 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} (c+\epsilon) \frac{\int_0^x \overline{F}(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} = c+\epsilon,$$

puesto que ϵ es arbitrario se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y)dF(y)}{\overline{F}(x)} \leq c,$$

similarmenete se llega a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y) dF(y)}{\overline{F}(x)} \geq c,$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \overline{F}'(x-y) dF(y)}{\overline{F}(x)} = c.$$

De esto se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * F'}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + c. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.2. *Sea F una función de distribución, entonces F es subexponencial si y sólo si, para cada $n = 2, 3, \dots$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

Demostración:

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n$ para $n \geq 2$, entonces por definición F es subexponencial.

Ahora supongamos que F es subexponencial, entonces aplicando inducción sobre n . Para $n = 2$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

supongamos valido para $n - 1$, es decir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*(n-1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = n - 1,$$

sea $F' = F^{*(n-1)}$ y tomando $c = n - 1$ por el lema 2.2.3 se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * F'(x)}}{\overline{F}(x)} = 1 + n - 1 = n. \quad \blacksquare$$

El que una empresa aseguradora presente montos de reclamación con distribución subexponencial es un tema de interés, ya que la ruina puede ocurrir con un sólo reclamo, debido a que la probabilidad de que la suma de los montos de reclamación rebase cierto umbral es aproximada a la probabilidad de que el máximo de ellos lo rebase, como lo ilustra el siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Si F es una función de distribución de una variable aleatoria subexponencial y X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F , entonces cuando $x \rightarrow \infty$*

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x) \approx P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x)$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x)} = 1.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\text{máx}\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x)} &= \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - P(\text{máx}\{X_1, X_2, \dots, X_n \leq x\})} \\
&= \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - [F(x)]^n} \\
&= \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)[1 + F(x) + F^2(x) + \dots + F^{n-1}(x)]},
\end{aligned}$$

entonces de acuerdo a lo anterior y utilizando el Teorema 2.2.2, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\text{máx}\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + F(x) + F^2(x) + \dots + F^{n-1}(x)} \\
&= n \frac{1}{n} = 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.3. *Sea $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ la probabilidad de solvencia de la compañía, entonces se cumple que la derivada $\phi'(u)$, tiene la expresión*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) d(1 - F(x)), \quad u \geq 0. \quad (2.6)$$

Demostración:

Recordemos que los tiempos entre reclamos tienen distribución exponencial con intensidad λ (ver Teorema A.3.1), entonces condicionamos sobre el primer monto de reclamación

$X_1 = x$ y el primer tiempo de reclamo $T_1 = t$, por tanto

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= P(\text{No ruina en } [0, \infty) | u(0) = u) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{No ruina en } [0, \infty) | X_1 = x, T_1 = t) P_{T_1}(t) dF(x) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P(\text{No ruina en } [0, \infty) | X_1 = x, T_1 = t) \lambda \exp(-\lambda t) dF(x) dt \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} P(\text{No ruina en } (t, \infty) | X_1 = x, T_1 = t) dF(x) dt \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - x) dF(x) dt,
\end{aligned}$$

las dos últimas igualdades se obtienen de que el proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios e independientes. Al realizar el cambio de variable $z = u + ct$, $t = \frac{z-u}{c}$, $dt = \frac{dz}{c}$, tenemos

$$\phi(u) = \int_u^\infty \lambda \exp\left\{-\lambda\left(\frac{z-u}{c}\right)\right\} \int_0^z \phi(z-x) dF(x) \frac{dz}{c} \quad (2.7)$$

$$= \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda z}{c}\right) \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz. \quad (2.8)$$

Sea

$$h(u) = \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda z}{c}\right) \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz,$$

cuya derivada por el Teorema Fundamental del Cálculo es

$$h'(u) = -\exp\left(\frac{-\lambda u}{c}\right) \int_0^u \phi(u-x) dF(x).$$

Al derivar (2.8) respecto de u , tenemos

$$\begin{aligned}
\phi'(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[\frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda z}{c}\right) \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \left[\exp\left(\frac{-\lambda u}{c}\right) \int_0^u \phi(u-x) dF(x) \right] \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \left[\frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c}\right) \int_u^\infty \exp\left(\frac{-\lambda z}{c}\right) \int_0^z \phi(z-x) dF(x) dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) \right] \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) d(1-F(x)),
\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple (2.6). ■

Lema 2.2.5. *La probabilidad de solvencia de una empresa aseguradora comenzando con riqueza inicial cero tiene la expresión*

$$\phi(0) = \frac{c - \lambda\mu}{c}.$$

Demostración:

Integrando (2.6) de $[0, t]$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \phi'(u) &= \int_0^t \left[\frac{\lambda}{c} \phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) d(1-F(x)) \right] \\
\phi(t) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \phi(u-x) d(1-F(x)) du,
\end{aligned}$$

pero $\frac{d\phi(u-x)}{dx} = -\phi'(u-x)$, entonces

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \phi(u-x) d(1-F(x)) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[\phi(u-x)(1-F(x)) \Big|_0^u - \int_0^u (1-F(x)) \phi'(u-x) dx \right] du,$$

además $0 < x < u < t$ entonces se tiene,

$$\begin{aligned}
\phi(t) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \left[\phi(0)(1 - F(u)) - \phi(u)(1 - F(0)) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^u (1 - F(x)) \phi'(u - x) dx \right] du \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(0)(1 - F(u)) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - F(x)) dx \int_x^t \phi'(u - x) du \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(0)(1 - F(u)) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - F(x)) dx [\phi(u - x)]_x^t \\
&= \frac{\lambda}{c} \phi(0) \int_0^t (1 - F(u)) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F(x)) dx [\phi(t - x) - \phi(0)] \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^t \phi(t - x)(1 - F(x)) dx.
\end{aligned}$$

Sea $t = u$, entonces

$$\phi(u) - \phi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u - x)(1 - F(x)) dx. \quad (2.9)$$

Ya que $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1$ y por el Teorema 2.1.1 sabemos que $\int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \mu$, entonces al hacer $u \rightarrow \infty$ y utilizando el Teorema de la convergencia monótona en la ecuación (2.9) tenemos

$$\phi(\infty) - \phi(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \phi(\infty)(1 - F(x)) dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \frac{\lambda}{c} \mu,$$

de donde

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c} \mu. \quad \blacksquare$$

Definición 2.2.3. Sea $h(x)$ una función, tal que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La transformada de Laplace de $h(x)$ está definida por

$$\mathcal{L}_h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-rx) h(x) dx.$$

Definición 2.2.4. La transformada de Laplace de una variable aleatoria continua X con función de distribución $F(x)$, se define como

$$\mathcal{L}_F(r) = E[e^{-rX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-rx} dF(x).$$

Si X es una variable aleatoria no negativa $X > 0$, $\mathcal{L}_F(r)$ está definida para todo $r > 0$.

Teorema 2.2.4. *Sea $\mathcal{L}_\phi(r)$ y $\mathcal{L}_\psi(r)$ las transformadas de Laplace para las funciones ϕ y ψ respectivamente entonces,*

$$\mathcal{L}_\phi(r) = \frac{c - \lambda\mu}{cr - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(r))} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_\psi(r) = \frac{1}{r} - \mathcal{L}_\phi(r) \quad \text{ambas para } r > 0.$$

Demostración:

De (2.6) tenemos

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)d(1-F(x)), \quad (2.10)$$

multiplicando por $\exp(-ru)$ e integrando de 0 a ∞

$$\int_0^\infty \phi'(u) \exp(-ru)du = \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x)dF(x) \right] \exp(-ru)du, \quad (2.11)$$

al integrar por partes el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi'(u) \exp(-ru)du &= \phi(u) \exp(-ru) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty r \exp(-ru)\phi(u)du \\ &= -\phi(0) + r \int_0^\infty \exp(-ru)\phi(u)du \\ &= -\phi(0) + r\mathcal{L}_\phi(r). \end{aligned}$$

Para el lado derecho de la ecuación (2.11) la primera integral tiene como resultado

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}\phi(u) \exp(-ru)du = \frac{\lambda}{c}\mathcal{L}_\phi(r), \quad (2.12)$$

mientras que para calcular la segunda integral, sea

$$I = \int_0^\infty \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u-x) dF(x) \exp(-ru) du, \quad (2.13)$$

reescribiendo I

$$I = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^u \phi(u-x) \exp(-ru) dF(x) du,$$

intercambiando el orden de integración

$$I = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_x^\infty \phi(u-x) \exp(-ru) du dF(x),$$

al realizar el cambio de variable $y = u - x$

$$I = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^\infty \phi(y) \exp(-r(y+x)) dy dF(x),$$

reescribiendo I

$$\begin{aligned} I &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \exp(-rx) \int_0^\infty \phi(y) \exp(-ry) dy dF(x) \\ &= \frac{\lambda}{c} \mathcal{L}_F(r) \mathcal{L}_\phi(r). \end{aligned}$$

Al sustituir lado izquierdo y lado derecho de la ecuación (2.11)

$$\begin{aligned} -\phi(0) + r\mathcal{L}_\phi(r) &= \frac{\lambda}{c} \mathcal{L}_\phi(r) - \frac{\lambda}{c} \mathcal{L}_F(r) \mathcal{L}_\phi(r) \\ -c\phi(0) + rc\mathcal{L}_\phi(r) &= \lambda \mathcal{L}_\phi(r) [1 - \mathcal{L}_F(r)] \\ rc\mathcal{L}_\phi(r) - \lambda \mathcal{L}_\phi(r) [1 - \mathcal{L}_F(r)] &= c\phi(0), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi(r) &= \frac{c\phi(0)}{rc - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(r))}, \text{ sustituyendo } \phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \\ &= \frac{c - \lambda\mu}{rc - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(r))}.\end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene de la primera

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi(r) &= \int_0^\infty \exp(-ru)(1 - \phi(u))du \\ &= -\frac{1}{r} \exp(-ru) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi(u) \exp(-ru)du \\ &= \frac{1}{r} - \mathcal{L}_\phi(r). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

2.3. Probabilidad de ruina con reclamos subexponenciales

2.3.1. Teorema de Pollaczek-Khinchine

Este Teorema nos permite calcular la probabilidad de solvencia de la compañía comenzando con una riqueza inicial $u \geq 0$. Al igual que en Teoremas anteriores este se cumple para procesos de riesgo donde se satisface la condición de ganancia neta, permitiendo que las reclamaciones sean de cola pesada o ligera.

Antes de comenzar introduzcamos la definición de cola integrada para una función de distribución.

Definición 2.3.1. Sea F una función de distribución con $F(0) = 0$ y media para los montos de reclamación $\mu \geq 0$, se define

$$F_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

$F_I(x)$ es una función de distribución ya que satisface:

- $F_I(0) = 0$,
- es monótona creciente y continua,
- $F_I(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$.

A F_I se le conoce como la cola integrada de F .

Teorema 2.3.1. *Teorema de Pollaczek-Khinchine.* Para cada $u \geq 0$, en un proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ donde se cumple la condición de ganancia neta $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$, se tiene

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u). \quad (2.15)$$

Demostración:

La prueba se realiza de la siguiente manera. Se calculan las transformadas de Laplace del lado derecho e izquierdo de la ecuación (2.15), se verifica que ambas sean iguales y se utiliza la unicidad de la transformada de Laplace para una función (ver propiedad en [11] pag.4).

Por el Teorema (2.2.4) el lado izquierdo de la ecuación (2.15) tiene transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\phi(r) = \frac{c - \lambda\mu}{cr - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(r))}.$$

Para calcular la transformada de Laplace del lado derecho de la ecuación (2.15) multiplicamos por $\exp(-ru)$ e integramos de $(0, \infty)$.

$$\int_0^{\infty} \exp(-ru) \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u) du = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} \exp(-ru) F_I^{*n}(u) du,$$

reescribiendo $\exp(-ru) = (-\frac{1}{r})d[\exp(-ru)]$ el lado derecho de la ultima igualdad es

$$\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} F_I^{*n}(u) \left(-\frac{1}{r}\right) d[\exp(-ru)],$$

integrando por partes, lo anterior es igual a

$$\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left[-\frac{1}{r} F_I^{*n}(u) \exp(-ru) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \exp(-ur) dF_I^{*n}(u) \right],$$

que a la vez es igual a

$$\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \exp(-ru) dF_I^{*n}(u),$$

ya que F_I es una función de distribución, F_I^{*n} también lo es, por tanto

$$\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \exp(-ru) dF_I^{*n}(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{r} \mathcal{L}_{F_I^{*n}},$$

por propiedades de convolución y de la transformada de Laplace (ver Teorema A.8.1)

$$\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{r} \mathcal{L}_{F_I^{*n}} = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c} \mathcal{L}_{F_I}\right)^n, \quad (2.16)$$

para poder utilizar la suma geométrica en (2.16) es necesario mostrar que $\frac{\lambda\mu}{c} \mathcal{L}_{F_I} < 1$. Por

la condición de ganancia neta $\frac{\lambda\mu}{c} < 1$, mientras que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{F_I}(r) &= \int_0^\infty \exp(-ru) dF_I(u) \\
&= \int_0^\infty \exp(-ru) d\left(\frac{1}{\mu} \int_0^u \bar{F}(y) dy\right) \\
&= \int_0^\infty \exp(-ru) \frac{1}{\mu} \bar{F}(u) du \\
&\leq \int_0^\infty \exp(-ru) \frac{1}{\mu} du \\
&= \frac{1}{r\mu} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

así que utilizando la suma geométrica en la ecuación (2.16)

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c} \mathcal{L}_{F_I}\right)^n &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} \mathcal{L}_{F_I}(r)}\right) \\
&= \frac{c - \lambda\mu}{r(c - \lambda\mu \mathcal{L}_{F_I}(r))}.
\end{aligned}$$

Resta probar que $r\mu \mathcal{L}_{F_I}(r) = 1 - \mathcal{L}_F(r)$, al trabajar con $r\mu \mathcal{L}_{F_I}(r)$

$$\begin{aligned}
r\mu \mathcal{L}_{F_I}(r) &= r\mu \int_0^\infty \exp(-ru) dF_I(u) \\
&= r\mu \int_0^\infty \exp(-ru) d\left(\frac{1}{\mu} \int_0^u \bar{F}(y) dy\right) \\
&= r \int_0^\infty \exp(-ru) \bar{F}(u) du \\
&= r \int_0^\infty \exp(-ru) (1 - F(u)) du \\
&= r \left[-\frac{1}{r} \exp(-ru) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(u) \exp(-ru) du \right],
\end{aligned}$$

integrando por partes la última integral

$$\begin{aligned}
r\mu \mathcal{L}_{F_I}(r) &= r \left\{ \frac{1}{r} - \left[-\frac{1}{r} \exp(-ru) F(u) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{r} \exp(-ru) dF(u) \right] \right\} \\
&= 1 - \mathcal{L}_F(r),
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{L}_\phi(r) = \frac{c - \lambda\mu}{cr - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(r))} = \frac{c - \lambda\mu}{r(c - \lambda\mu\mathcal{L}_{F_I}(r))}. \blacksquare$$

2.3.2. Teorema de Embrechts-Veraverbeke

El siguiente Teorema describe la probabilidad de ruina cuando la distribución de la cola integrada de los montos de reclamación es de tipo subexponencial.

Teorema 2.3.2. *Sea $F_I \in S$, $0 < \rho = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$, entonces*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi(u)}{1 - F_I(u)} = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Demostración:

De la formula de Pollaczek-Khinchine tenemos

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_I^{*n}(u). \quad (2.17)$$

Ya que $\frac{\lambda\mu}{c} < 1$ utilizamos la suma geométrica para calcular

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

entonces $1 - \phi(u)$ puede escribirse como

$$1 - \phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(1 - F_I^{*n}(u)\right),$$

por lo tanto

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{F_I^{*n}}(u),$$

entonces

$$\frac{\psi(u)}{1 - F_I(u)} = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{1 - F_I(u)},$$

ya que $F_I \in S$ y por el Teorema (2.2.2) al obtener el límite cuando $u \rightarrow \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n n, \end{aligned}$$

sustituyendo $\rho = \frac{\lambda\mu}{c}$ tenemos

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho n\rho^{n-1} \\ &= (1 - \rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho}\right) \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho}, \end{aligned}$$

sustituyendo el valor de ρ se tiene

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu},$$

por tanto

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{1 - F_I(u)} = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad \blacksquare$$

Así una formula aproximada que describe la probabilidad de ruina es

$$\psi_{E-V}(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}(1 - F_I(u)), \quad u \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

El que $F \in S$ no siempre implica que $F_I(X) \in S$. Sin embargo para variables aleatorias X con distribuciones tipo Pareto, Weibull (en el caso de cola pesada), lognormal, loggama, Burr entre otras, la cola integrada pertenece a la familia de las distribuciones subexponenciales. Para mayores detalles ver [9].

Capítulo 3

Estimación de la probabilidad de ruina

En este capítulo se demuestran diversos Teoremas para estimar la probabilidad de ruina. El algoritmo de Panjer, el método de Monte-Carlo crudo, muestreo por importancia y el método de Monte-Carlo condicionado. Para mayores detalles consultar [6], [9], [15], [16] y [17].

3.1. Records a la baja

Decimos que una compañía ha sufrido un record a la baja cuando su reserva alcanza su mínimo valor en toda su historia. A través de estas pérdidas podemos determinar la ruina de la empresa, mostrando que la probabilidad de solvencia ϕ corresponde a la probabilidad de que cierta suma geométrica compuesta sea menor que el valor de la riqueza inicial.

Proposición 3.1.1. *Sea $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso definido por $L(t) = S(t) - ct$ para todo $t \geq$*

0. Sea L el máximo valor que toma $L(t)$ durante todo el proceso $L = \max\{L(t) \text{ para todo } t \geq 0\}$, por lo tanto

$$\phi(u) = P(L \leq u). \quad (3.1)$$

Es decir ϕ es la función de distribución de la variable aleatoria L .

Demostración:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= P(U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq 0) \\ &= P(u + ct - S(t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq 0) \\ &= P(L(t) \leq u \text{ para todo } t \geq 0) \\ &= P(L \leq u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Siempre que ocurre un reclamo la empresa sufre una pérdida, pero existen tiempos de reclamación para los cuales la pérdida que ha sufrido la compañía es la máxima en toda su historia, a esta pérdida se le conoce como record a la baja. Llamemos T'_1, T'_2, T'_3, \dots a los tiempos donde ocurren los records a la baja. Sean $L_j, j = 1, 2, \dots$ las variables aleatorias que denotan las cantidades para las cuales la reserva de la empresa en el j -ésimo record a la baja es menor que en el $j - 1$, es decir $L_j = U(T'_{j-1}) - U(T'_j)$ con $T'_0 = 0$.

Proposición 3.1.2. Sea M la variable aleatoria que denota el número de records a la baja que ocurren durante todo el proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$. Sea $L = \max\{S(t) - ct \text{ para todo } t \geq 0\}$, entonces

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_M,$$

y además

$$\phi(u) = P(L_1 + L_2 + \dots + L_M \leq u). \quad (3.2)$$

Demostración:

Ya que $L = U(T'_0) - U(T'_M)$ y

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + \dots + L_M &= U(T'_0) - U(T'_1) + U(T'_1) - U(T'_2) + \dots - U(T'_M) \\ &= U(T'_0) - U(T'_M), \end{aligned}$$

podemos concluir que $L = L_1 + L_2 + \dots + L_M$. Sustituyendo la suma anterior en (3.1) la probabilidad de solvencia está determinada por la variable aleatoria compuesta

$$\phi(u) = P(L_1 + L_2 + \dots + L_M \leq u). \quad \blacksquare$$

La figura 3.1 muestra un ejemplo de las variables aleatorias L'_i s para una posible trayectoria de la reserva de una aseguradora, donde $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_3$, $T'_3 = T_5$ y $M = 3$.

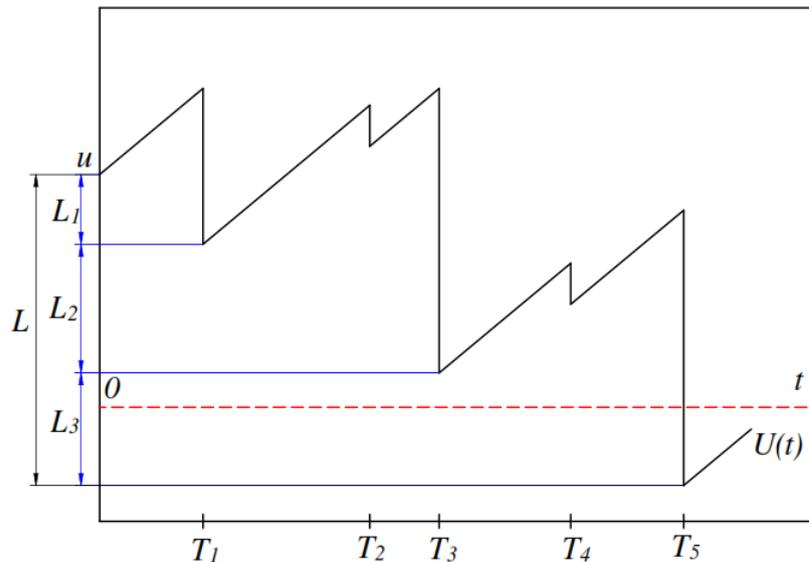


Figura 3.1: Trayectoria de la reserva de una empresa con variables aleatorias L'_i s.

Ya que un proceso de Poisson tiene incrementos estacionarios e independientes la probabilidad de que el último record a la baja sea el último, es la misma para todo tiempo. Esto equivale a que no exista ruina iniciando con riqueza inicial cero, por lo tanto

el número de records a la baja M tiene distribución geométrica con probabilidad de éxito $\phi(0)$. Además el conjunto de variables aleatorias $\{L_1, L_2, \dots, L_M\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que a su vez son independientes de la variable aleatoria M . Por lo tanto L tiene distribución geométrica compuesta.

Proposición 3.1.3. *La variable aleatoria L_1 , tiene función de densidad de probabilidad*

$$k(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)),$$

y función de distribución

$$K(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy. \quad (3.3)$$

Donde F es la función de distribución de los montos de reclamación.

Demostración:

Sea $K(x) = P(L_1 \leq x)$ y sea k su función de densidad asociada, es decir $k(x) = \frac{dK(x)}{dx}$.

Analicemos la función de densidad de L_1 a través de la transformada de Laplace de L

$$E[e^{-sL}] = E[E(e^{-sL}|M)],$$

donde

$$\begin{aligned} E[e^{-Ls}|M = m] &= E[\exp\{-s \sum_{i=1}^M L_i\}|M = m] \\ &= E[\exp\{-s \sum_{i=1}^m L_i\}], \end{aligned}$$

la última igualdad se sigue de la independencia entre las variables aleatorias L_i 's y M . Por

lo tanto

$$E[e^{-Ls}|M = m] = \left(E[\exp\{-sL_1\}] \right)^m,$$

así

$$E[e^{-sL}] = E \left[\left(E[\exp\{-sL_1\}] \right)^M \right].$$

Observemos que la expresión anterior tiene la forma de una función generadora de probabilidades para una variable aleatoria geométrica evaluada en $E[\exp\{-sL_1\}]$ (ver ecuación A.1), por lo tanto

$$E[e^{-sL}] = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)\mathcal{L}_K(s)}, \quad (3.4)$$

donde $E[\exp\{-sL_1\}] = \mathcal{L}_K(s)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} E[e^{-sL}] &= \int_0^\infty e^{-su} d\phi(u) \\ &= \phi(0) + \int_0^\infty e^{-su} \left(\frac{d}{du} \phi(u) \right) du, \end{aligned}$$

de acuerdo al Teorema A.8.2

$$\begin{aligned} E[e^{-sL}] &= \phi(0) + s\mathcal{L}_\phi(s) - \phi(0) \\ &= s\mathcal{L}_\phi(s). \end{aligned}$$

Al sustituir la transformada de Laplace en la función de solvencia ϕ de acuerdo al Teorema 2.2.4 obtenemos

$$E[e^{-sL}] = \frac{s(c - \lambda\mu)}{cs - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(s))}. \quad (3.5)$$

Al sustituir $\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\mu$ de acuerdo al Teorema 2.2.5 en la ecuación (3.5)

$$E[e^{-sL}] = \frac{sc\phi(0)}{cs - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(s))}. \quad (3.6)$$

Al igualar las ecuaciones (3.4) y (3.6)

$$\frac{cs\phi(0)}{cs - \lambda(1 - \mathcal{L}_F(s))} = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)\mathcal{L}_K(s)}.$$

Al sustituir $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$ y despejar $\mathcal{L}_K(s)$, tenemos

$$\mathcal{L}_K(s) = \frac{1}{\mu s}(1 - \mathcal{L}_F(s)),$$

usando la transformada de Laplace inversa

$$k(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)).$$

Observemos que la expresión para la función de distribución de L_1 es justamente la cola integrada de la distribución F de los reclamos, dada por la ecuación (2.14), es decir

$$K(x) = F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy. \quad \blacksquare$$

3.2. Estimación mediante el algoritmo de Panjer

A través del algoritmo de Panjer se obtiene la probabilidad de que ciertas caminatas aleatorias alcancen determinado umbral.

3.2.1. Relación de recurrencia de Panjer

Sea Y una variable aleatoria que toma valores en los enteros no negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Supongamos que existen constantes a y b tales que

$$P(Y = k) = p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

donde $a < 1$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces a la expresión (3.7) se le conoce como relación de recurrencia de Panjer. Las distribuciones binomial, Poisson y geométrica son ejemplos de distribuciones que satisfacen la relación de recurrencia de Panjer, en la tabla 3.2.1 se encuentran sus correspondientes valores a , b y p_0 . Observemos que si la variable aleatoria Y tiene distribución geométrica, entonces $P(Y = k - 1) = (1 - p)^{k-1}p$, donde p es la probabilidad de éxito, de esta forma $P(Y = k) = p_{k-1}(1 - p)$, por lo tanto $a = 1 - p$ y $b = 0$.

Distribución	a	b	p_0
Pois(λ)	0	λ	$e^{-\lambda}$
Geom(p)	$1 - p$	0	p
Bin(p, n)	$-\frac{p}{1-p}$	0	$(1 - p)^n$

Tabla 3.1: Valores a , b y p_0 para la relación de recurrencia de Panjer

3.2.2. Algoritmo de Panjer

Sea $W = \sum_{i=1}^N Z_i$ una caminata aleatoria donde Z_1, Z_2, \dots, Z_N son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que a su vez son independientes de la variable aleatoria N . Supongamos que Z_i y N toman valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$. Se denota la densidad de probabilidad de Z_i por q_k , es decir $P(Z_i = k) = q_k$. La variable aleatoria N tiene densidad de probabilidad P_k , es decir $P(N = k) = P_k$, la cual satisface la relación de recurrencia de Panjer (3.7). Denotemos por P_k^W la probabilidad de que la caminata aleatoria $W = \sum_{i=1}^N Z_i$ tome el valor k .

Lema 3.2.1. Para todo $j, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y $n = 1, 2, \dots$

$$E[Z_1 \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j] = \frac{j}{n} \quad (3.8)$$

y

$$P(Z_1 = k \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}, \quad (3.9)$$

donde q_j^{*n} denota la n -ésima convolución de q_j .

Demostración:

Ya que las Z_i 's son idénticamente distribuidas

$$\begin{aligned} E[Z_1 \mid \sum_{k=1}^n Z_k = j] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[Z_i \mid \sum_{k=1}^n Z_k = j] \\ &= \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^n Z_i \mid \sum_{k=1}^n Z_k = j] \\ &= \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n Z_i = j) P(\sum_{i=1}^n Z_i = j \mid \sum_{k=1}^n Z_k = j) \\ &= \frac{j}{n}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
P(Z_1 = k \mid \sum_{i=1}^n Z_i = j) &= \frac{P(Z_1 = k, Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = j - k)}{P(\sum_{i=1}^n Z_i = j)} \\
&= \frac{P(Z_1 = k)P(Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = j - k)}{P(\sum_{i=1}^n Z_i = j)} \\
&= \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.1. *Si la variable aleatoria que denota la cantidad de sumandos en una caminata aleatoria satisface la relación de recurrencia de Panjer (3.7), entonces*

$$P_j^W = \begin{cases} g_N(q_0) & \text{para } j = 0, \\ (1 - aq_0)^{-1} \sum_{k=1}^j (a + bkj^{-1}) q_k P_{j-k}^W & \text{para } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

donde g_N es la función generadora de probabilidades de la variable aleatoria N , mientras a y b corresponden a los valores de recurrencia de N . A la expresión (3.10) se le conoce como algoritmo de recurrencia de Panjer.

Demostración:

Para $j = 0$

$$\begin{aligned}
P_0^W &= P(W = 0) \\
&= P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) [P(Z_i = 0)]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(q_0)^k \\
&= g_N(q_0).
\end{aligned}$$

Mientras que si $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 P_j^W &= P(W = j) \\
 &= P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = j) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = j) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n q_j^{*n},
 \end{aligned}$$

pero por definición $q_j^{*0} = 0$, así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n q_j^{*n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n q_j^{*n},$$

ya que N satisface la relación de recurrencia de Panjer, se tiene que $P_n = (a + \frac{b}{n})P_{n-1}$,

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n q_j^{*n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a + \frac{b}{n})P_{n-1} q_j^{*n},$$

reescribiendo tenemos

$$P_j^W = \sum_{n=1}^{\infty} (a + \frac{b}{j} \frac{j}{n}) P_{n-1} q_j^{*n},$$

usando (3.8)

$$\begin{aligned}
 P_j^W &= \sum_{n=1}^{\infty} (a + \frac{b}{j} E[Z_1 | \sum_{i=1}^n Z_i = j]) P_{n-1} q_j^{*n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b}{j} \sum_{k=0}^j k P(Z_1 = k | \sum_{i=1}^n Z_i = j) \right] P_{n-1} q_j^{*n},
 \end{aligned}$$

de (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
P_j^W &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{j} \sum_{k=0}^j k \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}} \right) P_{n-1} q_j^{*n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a P_{n-1} q_j^{*n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a P_{n-1} P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = j) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a P_{n-1} \sum_{k=0}^j P(Z_1 = k) P(Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n = j - k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j a P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{bk}{j} P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) P_{n-1} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} \\
&= \sum_{k=0}^j \left(\left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} q_{j-1}^{*(n-1)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^j \left(\left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n - 1) P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{n-1} = j - k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k P(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = j - k) \\
&= \sum_{k=0}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k P_{j-k}^W \\
&= a q_0 P_j^W + \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k P_{j-k}^W,
\end{aligned}$$

despejando P_j^W resulta

$$\begin{aligned}
P_j^W (1 - a q_0) &= \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k P_{j-k}^W \\
P_j^W &= (1 - a q_0)^{-1} \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k P_{j-k}^W. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.3. Probabilidad de solvencia por el algoritmo de Panjer

Para poder aplicar el algoritmo de recurrencia de Panjer a la probabilidad de solvencia de acuerdo a la ecuación (3.2), debemos estimar P_u^W con $W = \sum_{i=1}^M L_i$, donde las variables aleatorias M y L_i son las definidas en la sección records a la baja.

Notemos que la función de densidad de L_1 , $k(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x))$ es una función continua ya que $F(x)$ es una función de distribución de una variable aleatoria continua X , por tanto tendremos que discretizar $k(x)$ para poder aplicar el algoritmo de recurrencia de Panjer, ecuación (3.10).

Definamos la variable aleatoria

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^M L_{\alpha,i}, \quad (3.11)$$

donde $M \sim \text{Geom}(\phi(0))$ y $\{L_{\alpha,i} : i = 1, \dots, M\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, donde cada una de ellas tiene función de distribución F_{I_α} y función de densidad

$$k_\alpha(x) = F_I(x+1) - F_I(x) \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

donde F_I corresponde a la cola integrada de F . Por lo tanto para $x \geq 0$, $F_{I_\alpha}(x) \geq F_I(x)$.

Similarmente definimos la variable aleatoria

$$L_\beta = \sum_{i=1}^M L_{\beta,i},$$

donde las variables aleatorias $L_{\beta,i}$ tienen función de distribución $F_{I\beta}$ y función de densidad

$$k_{\beta}(x) = F_I(x) - F_I(x - 1) \tag{3.13}$$

para $x = 1, 2, 3, \dots$ y $k_{\beta}(0) = 0$ para $x = 0$. Por lo tanto para $x \geq 0$, $F_{I\beta}(x) \leq F_I(x)$. Por lo que se tiene la siguiente relación

$$F_{I\beta}(u) \leq F_I(u) \leq F_{I\alpha}(u),$$

ya que el orden se preserva bajo convoluciones, ver [5] pag. 103

$$F_{I\beta}^{*M}(u) \leq F_I^{*M}(u) \leq F_{I\alpha}^{*M}(u),$$

así

$$P(L_{\beta} \leq u) \leq P(L \leq u) \leq P(L_{\alpha} \leq u). \tag{3.14}$$

De esta forma, proponiendo cotas superiores e inferiores podemos utilizar el algoritmo de recurrencia de Panjer, posteriormente tomaremos el promedio de la cota inferior y superior para determinar una aproximación. La forma explícita de la estimación es la siguiente: sean $\phi_{\alpha}(u) = P(L_{\alpha} \leq u)$, $\phi_{\beta}(u) = P(L_{\beta} \leq u)$ y $\phi(u) = P(L \leq u)$, de acuerdo al Teorema 3.2.1

$$\phi_{\alpha}(0) = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k_{\alpha}(0)},$$

para $u = 1, 2, 3, \dots$

$$\phi_{\alpha}(u) = \frac{1}{1 - \psi(0)k_{\alpha}(0)} \left(\phi(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^u k_{\alpha}(j) \phi(u - j) \right). \tag{3.15}$$

Similarmente $\phi_{\beta}(0) = \phi(0)$ y para $u = 1, 2, 3, \dots$

$$\phi_\beta(u) = \phi(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^u k_\beta(j) \phi_\beta(u-j). \quad (3.16)$$

Cabe destacar que aunque hemos mencionado la discretización para valores naturales también se pueden realizar discretizaciones de tamaño δ , donde δ es un número entre cero y uno. Así en las sumas $\sum_{j=1}^u k_\alpha(j) \phi(u-j)$ y $\sum_{j=1}^u k_\beta(j) \phi_\beta(u-j)$, j toma valores en el conjunto $\{\delta, 2\delta, 3\delta, \dots, u\}$. Para este trabajo se tomó un tamaño de discretización $\delta = \frac{1}{100}$.

3.3.1. Algoritmo de Panjer para la estimación de la probabilidad de ruina de una empresa aseguradora

Algoritmo de Panjer para estimar la ruina de una empresa aseguradora. Utilizando un tamaño de discretización $0 < \delta < 1$, para la función de densidad de probabilidad de los records a la baja $k(x)$.

1. Determinar la cota superior de la probabilidad de solvencia, a través de los siguientes

pasos:

a) Sea $k_\alpha(x \cdot \delta) = F_I((x+1)\delta) - F_I(x \cdot \delta)$ para $x = 0, 1, 2, \dots, \frac{u}{\delta}$.

b) Sea $\phi_\alpha(0) = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k_\alpha(0)}$.

c) Para $u = 1, 2, 3, \dots$

$$\phi_\alpha(u) = \frac{1}{1 - \psi(0)k_\alpha(0)} \left(\phi(0) + \psi(0) \sum_{j=\delta}^u k_\alpha(j) \phi(u-j) \right) \text{ donde } j = \delta, 2\delta, \dots, u.$$

2. Determinar la cota inferior de la probabilidad de solvencia, a través de los siguientes

pasos:

a) Sea $k_\beta(x \cdot \delta) = F_I(x \cdot \delta) - F_I((x-1)\delta)$ para $x = 1, 2, \dots, \frac{u}{\delta}$ y $k_\beta(0) = 0$ para

$x = 0$.

b) Sea $\phi_\beta(0) = \phi(0)$.

c) Para $u = 1, 2, 3, \dots$

$$\phi_\beta(u) = \phi(0) + \psi(0) \sum_{j=\delta}^u k_\beta(j) \phi_\beta(u-j), \text{ con } j = \delta, 2\delta, \dots, u.$$

3. Determinar las cotas superior e inferior para la probabilidad de ruina

a) $\psi_\beta(u) = 1 - \phi_\beta(u)$.

b) $\psi_\alpha(u) = 1 - \phi_\alpha(u)$.

4. Estimar la probabilidad de ruina $\psi(u) = \frac{\psi_\alpha(u) + \psi_\beta(u)}{2}$.

3.4. Método de Monte-Carlo crudo

Los métodos de Monte-Carlo, nos permiten estimar esperanzas y probabilidades que son difíciles de evaluar. Dada una variable aleatoria Y se desea estimar $E[G(Y)]$ donde G es una función continua cuyo argumento es la variable aleatoria Y la cual tiene función de distribución F . Se sabe por la Ley de los Grandes Números que una manera de estimar dicho valor esperado es generar una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución F y aproximar la esperanza de la siguiente forma

$$E[G(Y)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Y_i),$$

este estimador converge con probabilidad uno cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito. Dicha estimación es la idea básica del método de Monte-Carlo crudo.

Para fines particulares de esta tesis las variables aleatorias Y_i 's representan una muestra del proceso de reserva $U(t)$, mientras que la función $G(Y)$ cumple el papel de función indicadora para la ruina de la empresa, es decir $G(Y) = \mathbb{1}_{\{U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0\}}$. Utilizando este método se estima el valor esperado de la probabilidad de ruina. Se simula un determinado número de posibles trayectorias de la reserva de una compañía aseguradora a lo largo de un periodo de tiempo definido, en el que se especifica la distribución de los montos de reclamación, la prima cobrada por unidad de tiempo, la riqueza inicial y la intensidad del proceso de Poisson.

3.4.1. Estimación del error en el método de Monte-Carlo

Sea $I = E[G(Y)]$ e $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Y_i)$ un estimador para I . Se sabe por el Teorema del Límite Central que para n grande $Z_n = \frac{I - \hat{I}_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ se comporta como una variable aleatoria con distribución normal de media cero y varianza uno, por lo que

$$P\left(|I - \hat{I}_n| < \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx P(|Z_n| < c) = 2\Phi(c),$$

con $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-\frac{x^2}{2}}$ y c se selecciona de acuerdo a que tan exacta se quiere obtener la probabilidad. Por ejemplo, para que en el 95 % de los casos el estimador \hat{I}_n se encuentre en el intervalo

$$\left[\hat{I} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{I} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

se selecciona $c = 1.96$. Si σ es la desviación estándar de I , entonces $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar de \hat{I} , por lo tanto el error que se comete al utilizar el método de Monte-Carlo es aproximadamente $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. El problema para usar el resultado anterior es que debemos conocer

el valor de la desviación estándar de $G(Y)$. Lo que se realiza en la práctica es estimarla mediante la estimación para la varianza

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (G(Y_i) - \hat{I}_n)^2.$$

Por otro lado supongamos que deseamos utilizar el Metodo de Monte-Carlo para estimar una probabilidad $p = P(A)$, cuando A es un evento raro (i.e. p es muy pequeña). Sea $\mu \stackrel{\text{def}}{=} E(G(Y)) = P(A) = p$, donde $G(Y) = \mathbb{1}_{\{Y\}}$ es la función indicadora para el evento Y . Sea $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}(G(Y)) = p(1-p)$, por lo tanto ya que p es muy pequeña el cociente $\frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{p(1-p)}/p \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow 0$, de lo cual se concluye que la magnitud de σ es mucho mayor que la de μ , lo que causa conflictos para determinar intervalos de confianza; ya que estos intervalos serán demasiado grandes. Por lo tanto se proponen métodos de reducción de varianza para reducir el error que se comete al emplear el método de Monte-Carlo crudo.

3.4.2. Algoritmo de Monte-Carlo crudo para la estimación de la ruina de una empresa aseguradora

El algoritmo de Monte-Carlo crudo para estimar la ruina de una empresa aseguradora con un intervalo de confianza del 95 %, prima cobrada por unidad de tiempo c , intensidad del proceso de Poisson λ , riqueza inicial u , número de trayectorias del proceso de reserva N , tiempo de observación del proceso de reserva T y función de distribución de los montos de reclamación F . Es el siguiente:

1. Denotemos por Var_i e \hat{I}_i a la varianza acumulada y la media aritmética acumulada hasta la iteración i , respectivamente.

2. Sea $\text{Var}_1 = 0$ e $I_1 = 0$.

3. Para $i = 2, \dots, N$ hacer los siguientes pasos:

a) Generar los tiempos entre reclamos $T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i$ con $\sum_{j=1}^k T_j^i \leq T$ y $T_j^i \sim \text{Exp}(\lambda)$ para $i = 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

b) Generar los montos de reclamación $X_1^i, X_2^i, \dots, X_k^i$ tal que X_j^i tiene función de distribución F para $i = 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

c) Calcular el proceso de reserva $U(T) = u + cT - \sum_{j=1}^k X_j^i$.

d) Si $U(T) < 0$ hacer $I_i = 1$, en caso contrario $I_i = 0$.

e) $\hat{I}_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i I_i$; $\text{Var}_i = (1 - \frac{1}{i-1})\text{Var}_{i-1} + i(\hat{I}_i - \hat{I}_{i-1})^2$.

7. $\hat{I} \in [\hat{I}_N - \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}, \hat{I}_N + \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}]$.

3.5. Metodos de reducción de varianza

Como podemos observar en la sección anterior, el error que se comete al usar el método de Monte-Carlo crudo es aproximadamente $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Por lo tanto para disminuir el error es necesario tener una muestra demasiado grande o utilizar métodos de reducción de varianza, debido a que incrementar el tamaño de la muestra requiere un gran costo computacional se prefieren los métodos de reducción de varianza. Los métodos de estratificación, el método de las variables antitéticas, el método de muestreo por importancia y los métodos de Monte-Carlo condicionado son ejemplos de métodos de reducción de varianza. En esta tesis abordaremos los métodos de muestreo por importancia (para colas ligeras) y el método de Monte-Carlo condicionado (para colas pesadas).

3.6. Muestreo por importancia

El muestreo por importancia es un método de reducción de varianza, el cual consiste en cambiar la medida de probabilidad original del modelo por otra equivalente con el fin de generar un estimador Monte-Carlo de menor varianza, lo cual mejora la precisión sin incrementar el tamaño de la muestra. Inductivamente entendemos que dos medidas de probabilidad son equivalentes si se anulan en el mismo conjunto de eventos. En esta sección presentaremos primero el método de muestreo por importancia en el contexto de una variable aleatoria con función de densidad continua conocida. Posteriormente, se presentan las medidas exponenciales y su aplicación al cálculo de valores esperados de una función continua que se aplica a una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por último se aplica el método a la estimación de la probabilidad de ruina.

Consideremos el problema de estimar

$$I = E[G(Y)] = \int_{\mathbb{R}} G(y)f(y)dy$$

donde Y es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y G es una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} . Por medio del método de Monte-Carlo crudo tenemos el estimador

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Y_i),$$

con Y_1, \dots, Y_n una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad f . Sea g otra función de densidad de probabilidad que satisfaga

$$f(y) > 0 \Rightarrow g(y) > 0,$$

para toda $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$I = \int_{\mathbb{R}} G(y) \frac{f(y)}{g(y)} g(y) dy.$$

Esta integral puede ser interpretada como el valor esperado de $G(Y)\frac{f(Y)}{g(Y)}$ con respecto a la densidad g , por lo tanto

$$I = E_g \left[G(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right],$$

donde E_g indica que la esperanza se estima respecto a Y distribuida de acuerdo a g . Por lo tanto obtenemos el nuevo estimador

$$\hat{I}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Y_i) \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}. \quad (3.17)$$

A esta nueva estimación se le conoce como muestreo por importancia. Para comparar la varianza con y sin muestreo por importancia, se tiene

$$\text{Var}(G(Y)) = E[(G(Y))^2] - I^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_g \left[G(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right] &= E_g \left[\left(G(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right)^2 \right] - \left(E_g \left[G(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right] \right)^2 \\ &= E_g \left[\left(G(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right)^2 \right] - I^2. \end{aligned}$$

Entonces para reducir la varianza debemos ser cuidadosos en elegir $g(Y)$. Para mayores detalles sobre muestreo de importancia ver [7].

3.6.1. Cambio de medida exponencial

Para una función de distribución F en \mathbb{R} , definamos

$$\xi(\theta) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} dF(y).$$

Ésta es la función acumulada generalizada de F , el logaritmo natural de la función generadora de momentos de F . Sea $\Theta = \{\theta : \xi(\theta) < \infty\}$, supongamos que Θ es un conjunto no vacío. Para cada $\theta \in \Theta$

$$F_\theta(x) = \int_{-\infty}^x e^{\theta u - \xi} dF(u), \quad (3.18)$$

es una función de distribución, y $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ forma una familia de distribuciones exponenciales. A la transformación de F a F_θ se le conoce como cambio de medida exponencial. Si F tiene función de densidad de probabilidad f , entonces F_θ tendrá función de densidad de probabilidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta x - \xi(\theta)} f(x). \quad (3.19)$$

Supongamos que Y_1, Y_2, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $F = F_0$. Realicemos el cambio de medida exponencial en el cual las variables aleatorias continúan siendo independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_θ . Entonces

$$\prod_{i=1}^n \frac{dF_0(Y_i)}{dF_\theta(Y_i)} = \exp \left\{ -\theta \sum_{i=1}^n Y_i + n\xi(\theta) \right\}. \quad (3.20)$$

Para mayores detalles acerca de la familia de las distribuciones exponenciales consultar [7].

3.6.2. Estimación de la probabilidad de ruina con cambio de medida exponencial

Sea $U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, el proceso de Cramer-Lundberg con riqueza inicial u , prima cobrada por unidad de tiempo c , proceso de Poisson homogéneo $N(t)$ de intensidad

λ y las variables aleatorias X_i 's denotan los montos de reclamación. Sean T_1, T_2, \dots , los tiempos entre reclamos. Definamos las variables aleatorias $Y_n = X_n - cT_n$. Por lo tanto la ruina ocurre cuando $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > u$. Ya que el tiempo de ruina puede ser expresado como

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n > u\}. \quad (3.21)$$

La probabilidad de que exista la ruina es equivalente a $P(\tau < \infty)$. Consideremos el cambio de medida exponencial para determinar dicha probabilidad. Estimamos la probabilidad de que la longitud de la caminata aleatoria $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > u$ sea finita, es decir $P(\tau < \infty)$. Ya que realizamos un cambio de medida exponencial, utilizando la ecuación (3.20), tenemos

$$P(\tau < \infty) = E_\theta \left[e^{-\theta S_\tau + \xi_Y(\theta)\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \right]. \quad (3.22)$$

Donde S_τ determina la suma de las variables aleatorias Y_i 's hasta el tiempo de ruina. Bajo el cambio de medida $P_\theta(\tau < \infty) = 1$, por lo tanto omitiremos la función indicadora dentro de la esperanza E_θ . Debe existir θ_* tal que $\xi_Y(\theta_*) = 0$. Para las variables $Y_n = X_n - cT_n$, θ_* es la solución positiva a la ecuación

$$1 + (1 + \theta)\mu r = m_X(r). \quad (3.23)$$

Como se revisó en el capítulo 1 éste es el exponente de Lundberg R . Por lo tanto la ecuación (3.22) queda de la forma

$$P(\tau < \infty) = E_R[e^{-RS_\tau}].$$

Para determinar la varianza del estimador $E_R[e^{-RS_\tau}]$ a través de su segundo momento, se tiene

$$E_R[e^{-2RS_\tau}] \leq e^{-2Ru}.$$

3.6.3. Algoritmo muestreo por importancia

El algoritmo de muestreo por importancia para estimar la ruina de una empresa aseguradora con un intervalo de confianza del 95 %, prima cobrada por unidad de tiempo c , intensidad del proceso de Poisson λ , riqueza inicial u , número de trayectorias del proceso de reserva N , tiempo de observación del proceso de reserva T y función de distribución de los montos de reclamación F . Es el siguiente:

1. Dado λ , μ y c positivas estimar el parámetro de Lundberg R resolviendo la ecuación (1.3)
2. Determinar el valor de los parámetros λ_R y μ_R para el cambio de medida seleccionando $\theta^* = R$ de la siguiente forma:

$$\lambda_R = \lambda m_X(R), \quad m_X(R) = E_f[e^{RX}],$$

$$\mu_R = E_f \left[\frac{e^{RX}}{m_X(R)} \right],$$

siendo $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

3. Denotemos por Var_i e \hat{I}_i a la varianza acumulada y la media aritmética acumulada hasta la iteración i , respectivamente.
4. Sea $\text{Var}_1 = 0$ e $I_1 = 0$.
5. Para $i = 2, \dots, N$ hacer los siguientes pasos:

- a) Generar los tiempos entre reclamos $T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i$ con $\sum_{j=1}^k T_j^i \leq T$ y $T_j^i \sim \text{Exp}(\lambda_R)$ para $i = 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

- b) Generar las variables aleatorias $X_1^i, X_2^i, \dots, X_k^i$ tal que X_j^i tiene función de densidad de probabilidad $g(x) = e^{Rx} f(x)$, donde R es el exponente de Lundberg.
- c) Definir las variables $Y_j^i = X_j^i - cT_j^i$.
- d) Realizar la suma $S_m = Y_1^i + Y_2^i + \dots + Y_m^i$ tal que $S_m < u$.
- e) Hacer $I_i = \exp(-RS_{m+1})$.
- f) $\hat{I}_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i I_i$; $\text{Var}_i = (1 - \frac{1}{i-1})\text{Var}_{i-1} + i(\hat{I}_i - \hat{I}_{i-1})^2$.
6. $\hat{I} \in [\hat{I}_N - \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}, \hat{I}_N + \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}]$.

3.6.4. Monte-Carlo condicionado

Los métodos de Monte-Carlo condicionado consisten en reemplazar el estimador $E[G(Y)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(Y_i)$ condicionando sobre alguna variable aleatoria \mathcal{W} . Denotemos por σ_{MC}^2 la varianza del método de Monte-Carlo crudo y por σ_{cond}^2 la varianza del método de Monte-Carlo condicionado. Ya que

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{MC}}^2 &= \text{Var}(E[G(Y)]) = \text{Var}(E[G(Y)|\mathcal{W}]) + E(\text{Var}[E(G(Y))|\mathcal{W}]) \\ &= \sigma_{\text{cond}}^2 + E(\text{Var}[E[G(Y)]|\mathcal{W}]) \geq \sigma_{\text{cond}}^2, \end{aligned}$$

los métodos de Monte-Carlo condicionado son métodos de reducción de varianza. La dificultad en este tipo de métodos consiste en encontrar \mathcal{W} tal que la esperanza condicionada sea calculable.

Sea $S_M = \sum_{i=1}^M L_i$ donde L_i y M son variables aleatorias independientes. Ya que $\psi(u) = P(S_M > u)$ (ver sección 3.1 Records a la baja). Al particionar el espacio muestral

Ω de acuerdo a $Y_M \stackrel{\text{def}}{=} L_{(M)} = L_i$, donde $L_{(1)} < L_{(2)} < \dots < L_{(M)}$ es el orden estadístico de las variables aleatorias L_i 's y utilizando el teorema de la probabilidad total

$$P(S_M > u) = \sum_{i=1}^M P(S_M > u, Y_M = L_i).$$

Ya que las variables aleatorias L_i 's son idénticamente distribuidas, entonces

$$P(S_M > u) = MP(S_M > u, Y_M = L_M).$$

Condicionando sobre L_j con $j \neq M$

$$\begin{aligned} MP(S_M > u, Y_M = L_M) &= MP(S_M > u, Y_M = L_M | L_1, L_2, \dots, L_{M-1})P(L_1, L_2, \dots, L_{M-1}) \\ &= MP(L_M > u - S_{M-1}, L_M > Y_{M-1}) \\ &= M\overline{F}_I(u - S_{M-1} \vee Y_{M-1}), \end{aligned}$$

donde $(a \vee b)$ denota el máximo entre a y b y \overline{F}_I es la cola de la función de distribución de las variables aleatorias L_i 's. Por lo tanto $\psi(u) = E[M\overline{F}_I(u - S_{(M-1)} \vee L_{(M-1)})]$.

3.6.5. Algoritmo de Monte-Carlo condicionado

Para generar una variable aleatoria X con función de distribución F , se evalúa $F^{-1}(u)$ donde u es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Debido a que el obtener la función inversa de la cola integrada para las distribuciones utilizadas es complicado (ver apéndice). Se prefiere obtener el proceso de records a la baja a través del proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$. Por lo tanto el algoritmo de Monte-Carlo condicionado para estimar la ruina de una empresa aseguradora con un intervalo de confianza del 95 %, prima cobrada por unidad de tiempo c , intensidad del proceso de Poisson λ , riqueza inicial

u , número de trayectorias del proceso de reserva N , tiempo de observación del proceso de reserva T y función de distribución de los montos de reclamación F . Es el siguiente:

1. Denotemos por Var_i e \hat{I}_i a la varianza acumulada y la media aritmética acumulada hasta la iteración i , respectivamente.

2. Sea $\text{Var}_1 = 0$ e $I_1 = 0$.

3. Para $i = 2, \dots, N$ hacer los siguientes pasos:

a) Generar los tiempos entre reclamos $T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i$ con $\sum_{j=1}^k T_j^i \leq T$ y $T_j^i \sim \text{Exp}(\lambda)$ para $i = 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

b) Generar los montos de reclamación $X_1^i, X_2^i, \dots, X_k^i$ tal que X_j^i tiene función de distribución F para $i = 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

c) Obtener el proceso de récords a la baja resultante, mediante el algoritmo:

Sea $a = u$, $L_0 = 0$, $m = 1$.

Para $j = 1, 2, \dots, k$,

si $U(T_j^i) < a$, hacer $L_m = a - U(T_j^i)$; $a = U(T_j^i)$, $m = m + 1$

en caso contrario $a = a$, $m = m$

$j = j + 1$

d) Sea M la cantidad de variables aleatorias L'_i s. Determinar el orden estadístico de dichas variables aleatorias, es decir $L_{(1)} < L_{(2)} < \dots < L_{(M)}$.

e) Si $u - S_{M-1} > L_{(M-1)}$; $\max = u - S_{M-1}$ en caso contrario $\max = L_{(M-1)}$.

Donde $S_{M-1} = L_{(1)} + L_{(2)} + \dots + L_{(M-1)}$.

g) $I_i = M\bar{F}_I(\max)$, donde \bar{F}_I es la cola de la cola integrada de la variable aleatoria de los montos de reclamación.

$$\text{h) } \hat{I}_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i I_k; \text{Var}_i = \left(1 - \frac{1}{i}\right) \text{Var}_{i-1} + i(\hat{I}_i - \hat{I}_{i-1})^2.$$

$$7. \hat{I} \in \left[\hat{I}_N - \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}, \hat{I}_N + \frac{1.96\sqrt{\text{Var}_N}}{\sqrt{N}}\right].$$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se obtienen estimaciones numéricas para la probabilidad de ruina a través de los métodos de Monte-Carlo crudo, métodos de reducción de varianza, el algoritmo de Panjer y el Teorema de Embrechts-Veraverbeke cuando los montos de reclamación tienen distribuciones exponencial, Weibull y Pareto. Además se estima la probabilidad de ruina para una aseguradora contra incendios en Dinamarca. Los datos están disponibles en [20].

4.1. Estimación de la ruina para reclamos exponenciales

En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se muestra la estimación de la probabilidad de ruina para montos de reclamación con distribución exponencial, $\text{Exp}(\beta)$, donde $\beta = 1$. Para el proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, la prima cobrada por unidad de tiempo es $c = 3$, la intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = 2$ y la riqueza inicial u es variable. Observemos que para los

datos establecidos se cumple la condición de ganancia neta, $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = 0.5 > 0$. Para los métodos de Monte-Carlo crudo y muestreo por importancia se toma una muestra de 10,000 trayectorias del proceso de reserva, observadas durante un tiempo $T = 5,000$, con un intervalo que incluye al valor estimado \hat{I}_N el 95 % de las veces. Se observó que para valores mayores a T la estimación de la ruina no varía. Para el algoritmo de Panjer se realiza un refinamiento de tamaño $\delta = \frac{1}{100}$ para obtener la función de densidad $k(x)$ de la cola integrada $F_I(x)$. En la tabla 4.2 la cual hace referencia al método de Monte-Carlo crudo, los espacios vacíos indican que la varianza relativa y el error relativo tienden a infinito, ya que la estimación de la probabilidad de ruina es cero, donde se define el error relativo como

$$\text{Error relativo} = \frac{2(1.96)\sqrt{\text{Var}_N}}{(\hat{I}_N)\sqrt{N}},$$

y la varianza relativa

$$\text{Varianza relativa} = \frac{\text{Var}_N}{\hat{I}_N}.$$

Observemos que con cualquier método la probabilidad de ruina va disminuyendo conforme se incrementa la riqueza inicial. Para variables aleatorias con distribución exponencial se considera el algoritmo de Panjer como la mejor de las aproximaciones debido a que es la más cercana al valor exacto. Se puede observar que el método de Monte-Carlo crudo arroja resultados muy aproximados a la probabilidad de ruina exacta para riquezas iniciales pequeñas, pero conforme aumenta la riqueza inicial, el método de Monte-Carlo crudo se vuelve impreciso. En el método de muestreo por importancia, podemos observar que aún para riquezas iniciales grandes se logran mejores estimaciones que en el método de Monte-Carlo crudo. En la imagen 4.1 se muestra una posible trayectoria para la reserva

Probabilidad de ruina para montos con distribución exponencial				
u	Probabilidad exacta	Panjer	Monte-Carlo crudo	Muestreo por importancia
1	0.4777	0.47689	0.4803	0.4765
2	0.3423	0.34171	0.341	0.3423
3	0.2453	0.24485	0.2409	0.2449
4	0.1757	0.17544	0.174	0.1744
5	0.1259	0.12571	0.1228	0.125969
10	0.0238	0.02374	0.0229	0.02372
20	8.48E-04	0.00085	0.0009	0.00084382
30	3.03E-05	3E-05	0	0.000030351
40	1.08E-06	1.08E-06	0	1.0817E-06
50	3.85E-08	3.85E-08	0	3.876E-08

Tabla 4.1: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución exponencial.

Prob. de ruina para montos exponenciales por el método de Monte-Carlo crudo			
u	Monte-Carlo crudo	Error relativo	Varianza relativa
1	0.4803	0.040811	0.5207
2	0.341	0.054431	0.6592
3	0.2409	0.068733	0.7556
4	0.174	0.084176	0.8230
5	0.1228	0.10441	0.8790
10	0.0229	0.25457	0.9784
20	0.0009	2.7724	1.0004
30	0		
40	0		
50	0		

Tabla 4.2: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución exponencial utilizando el método de Monte-Carlo crudo.

Prob. de ruina para montos exponenciales por el método de Muestreo por importancia			
u	Muestreo por importancia	Error relativo	Varianza relativa
1	0.4765	0.0139	0.00354
2	0.3423	0.0139	0.00353
3	0.2449	0.0141	0.00356
4	0.1744	0.0138	0.00352
5	0.125969	0.0155	0.00397
10	0.02372	0.0138	0.00353
20	0.00084382	0.0135	0.00349
30	0.000030351	0.0139	0.00354
40	1.0817E-06	0.0013	0.00351
50	3.876E-08	0.0014	3.57E-03

Tabla 4.3: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución exponencial utilizando el método de muestreo por importancia

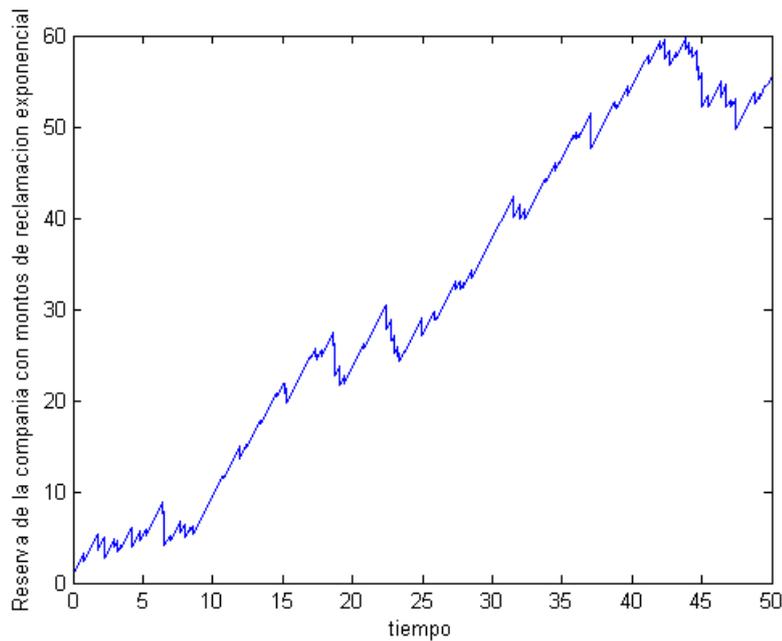


Figura 4.1: Posible trayectoria de la reserva de una compañía aseguradora con montos de reclamación exponencial.

de la empresa con los datos antes mencionados considerando que la riqueza inicial toma valor $u = 1$.

4.2. Estimación de la ruina para reclamos tipo Weibull

En las tablas 4.4, 4.5 y 4.6 se muestra la estimación de la probabilidad de ruina para montos de reclamación con distribución Weibull, $W(\alpha, \beta)$, donde $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.9$. Para el proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, la prima cobrada por unidad de tiempo es $c = 3$, la intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = 2$ y la riqueza inicial u es variable. Observemos que para los datos establecidos se cumple la condición de ganancia neta, $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 =$

$\frac{3}{2(0.52)} - 1 = 1.88 > 0$. Para los métodos de Monte-Carlo crudo y Monte-Carlo condicionado se toma una muestra de 10,000 trayectorias del proceso de reserva, observadas durante un tiempo $T = 5,000$, con un intervalo que incluye al valor estimado \hat{I}_N el 95% de las veces. Se observó que para valores mayores a T la estimación de la ruina no varía. Para el algoritmo de Panjer se realiza un refinamiento de tamaño $\delta = \frac{1}{100}$ para obtener la función de densidad $k(x)$ de la cola integrada $F_I(x)$. En la imagen 4.2 se muestra una posible trayectoria para la reserva de la empresa con los datos antes mencionados considerando que la riqueza inicial toma valor $u = 1$. En la tabla 4.5 la cual hace referencia al método de Monte-Carlo crudo los espacios vacíos indican que la varianza relativa y el error relativo tienden a infinito, ya que la estimación de la probabilidad de ruina es cero.

Observemos que con cualquier método empleado la probabilidad de ruina va disminuyendo conforme se incrementa la riqueza inicial. Observemos que el algoritmo de Panjer es del mismo orden que el método de Monte-Carlo crudo para riquezas iniciales pequeñas. Mientras que para riquezas iniciales mayores es del mismo orden que el método de Embrechts-Veraverbeke, el cual converge cuando la riqueza inicial tiende a infinito. Se puede notar que el método de Monte-Carlo crudo arroja resultados muy aproximados a los de Panjer para riquezas iniciales pequeñas (cuando la probabilidad de ruina es alta), pero conforme disminuye la probabilidad de ruina el método de Monte-Carlo crudo se vuelve impreciso. Respecto al método de Monte-Carlo condicionado podemos ver que a pesar de que la probabilidad de ruina sea pequeña se logran buenas estimaciones. El Teorema de Embrechts-Veraverbeke en general no da buenos resultados pero su aproximación va mejorando conforme incrementa la riqueza inicial.

Probabilidad de ruina para montos con distribución Weibull				
u	Panjer	Monte-Carlo crudo	Monte-Carlo condicionado	Embrechts
1	0.1142	0.1109	0.0824	0.0987
2	0.0396	0.0383	0.0293	0.0207
3	0.014	0.0132	0.0100	0.0046
4	0.005	0.0042	0.0040	0.0011
5	0.0018	0.0017	0.0010	2.58E-04
10	1.06E-05	0	1.19E-06	2.85E-07
20	4.36E-09	0	2.48E-09	4.46E-09
30	3.27E-09	0	1.60E-09	2.97E-09
40	1.76E-09	0	9.77E-10	1.59E-09
50	1.57E-09	0	8.97E-10	1.27E-09

Tabla 4.4: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución Weibull.

Prob. de ruina para montos con distribución Weibull utilizando Monte-Carlo crudo			
u	Monte-Carlo crudo	Error relativo	Varianza relativa
1	0.1109	0.10828	0.8850
2	0.0383	0.19231	0.9627
3	0.0132	0.34322	0.9889
4	0.0042	0.4927	0.9952
5	0.0017	1.0123	1.0004
10	0		
20	0		
30	0		
40	0		
50	0		

Tabla 4.5: Estimación de la probabilidad de ruina vía Monte-Carlo crudo para reclamos con distribución Weibull.

Prob. de ruina para montos con distribución Weibull utilizando Monte-Carlo condicionado			
u	Monte-Carlo crudo	Error relativo	Varianza relativa
1	0.0824	0.10565	0.8585
2	0.0293	0.14200	0.5562
3	0.0100	0.15265	0.4409
4	0.0040	0.17386	0.3866
5	0.0010	0.31522	0.3158
10	1.19E-06	0.38073	0.000625
20	2.48E-09	0.6083	2.05E-08
30	1.60E-09	0.7103	1.86E-08
40	9.77E-10	0.80731	1.33E-08
50	8.97E-10	0.94265	7.28E-09

Tabla 4.6: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución Weibull

Vía Monte-Carlo condicionado.

4.3. Probabilidad de ruina para reclamos tipo Pareto

En las tablas 4.7, 4.8 y 4.9 se muestra la estimación de la probabilidad de ruina para montos de reclamación con distribución Pareto, $\text{Par}(\alpha, \beta)$, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. Para el proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, la prima cobrada por unidad de tiempo es $c = 2$, la intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = 2$ y la riqueza inicial u es variable. Observemos que para los datos establecidos se cumple la condición de ganancia neta, $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{2}{2(0.5)} - 1 = 1 > 0$. Para los métodos de Monte-Carlo crudo y Monte-Carlo condicionado se toma una muestra de 10,000 trayectorias del proceso de reserva, observadas durante un tiempo $T = 5,000$ con un intervalo que incluye al valor estimado \hat{I}_N el 95% de las veces. Se observó que para valores mayores a T la estimación de la ruina no varía. Para el algoritmo de Panjer se realiza un refinamiento de tamaño $\delta = \frac{1}{100}$ para obtener la función de densidad $k(x)$ de la cola integrada $F_I(x)$. En la imagen 4.3 se muestra una posible trayectoria para la reserva de la empresa con los datos antes mencionados considerando que la riqueza inicial toma valor $u = 1$. En la tabla 4.8 la cual hace referencia al método de Monte-Carlo crudo los espacios vacíos indican que la varianza relativa y error relativo tienden a infinito, ya que la estimación de la probabilidad de ruina es cero.

De manera similar a los casos anteriores, podemos observar que en cualquier método empleado la probabilidad de ruina va disminuyendo conforme incrementa la riqueza inicial. Para montos de reclamación tipo Pareto al igual que para montos de reclamación tipo Weibull y exponencial el método de Monte-Carlo crudo arroja resultados muy próximos a los de Panjer mientras la riqueza inicial es pequeña. Al disminuir la probabilidad de ruina, el método de Monte-Carlo condicionado nos permite obtener una mejor estimación que el método de Monte-Carlo crudo. El Teorema de Embrechts-Veraverbeke en general no da

Probabilidad de ruina para montos con distribución Pareto				
u	Panjer	Monte-Carlo crudo	Monte-Carlo condicionado	Embrechts
1	0.2379	0.2412	0.2561	0.0132
2	0.1403	0.1415	0.1343	0.0058
3	0.0905	0.0918	0.0825	0.0033
4	0.0618	0.0566	0.0449	0.0021
5	0.0441	0.046	0.0332	0.0015
10	0.0124	0.0101	0.0107	4.35E-04
20	0.0029	0.0024	0.0018	1.19E-04
30	0.0012	0.0012	0.0008	5.48E-05
40	6.69E-04	0	0.0004	3.13E-05
50	4.22E-04	0	0.0003	2.02E-05

Tabla 4.7: Aproximación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto.

Prob. de ruina para montos con distribución Pareto utilizando Monte-Carlo crudo			
u	Monte-Carlo crudo	Error relativo	Varianza relativa
1	0.2412	0.070262	0.8536
2	0.1415	0.097562	0.8622
3	0.0918	0.12485	0.9130
4	0.0566	0.16141	0.9460
5	0.046	0.17947	0.9558
10	0.0101	0.33661	0.9880
20	0.0024	0.62691	0.9974
30	0.0012	1.4815	0.9998
40	0		
50	0		

Tabla 4.8: Aproximación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto por el método de Monte-Carlo crudo.

Prob. de ruina para montos con distribución Pareto utilizando Monte-Carlo condicionado			
u	Monte-Carlo condicionado	Error relativo	Varianza relativa
1	0.2561	0.17071	0.85172
2	0.1343	0.24925	0.8405
3	0.0825	0.28167	0.6192
4	0.0449	0.30622	0.3294
5	0.0332	0.40085	0.2877
10	0.0107	0.41575	0.2813
20	0.0018	0.47143	0.0096
30	0.0008	0.51909	0.0036
40	0.0004	0.65629	0.0021
50	0.0003	0.8939	0.0013

Tabla 4.9: Aproximación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto.

buenas aproximaciones, sin embargo la estimación mediante este método va mejorando conforme incrementa el valor de la riqueza inicial.

4.4. Análisis de datos reales

Al ocurrir un incendio puede haber diversas pérdidas, clasificadas en diversos tipos: inmobiliarias, mobiliarias, incapacidad de producción, entre otras. Se analizaron los datos de una aseguradora contra incendios en Dinamarca considerando las pérdidas por incapacidad de producción. La muestra consiste en 616 reclamaciones durante los años de 1980 a 1990.

Uno de los pasos prioritarios para realizar el análisis de datos es conocer si estos siguen una distribución de cola pesada o ligera. Por lo tanto usamos la función generadora de momentos empírica. Sea F la función de distribución de la variable aleatoria positiva Y , decimos que dicha variable aleatoria tiene cola pesada si

$$m_Y(r) = E[e^{rY}] = \int_0^{\infty} e^{ry} f(y) dy = \infty,$$

donde $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$. Para estimar la función de densidad de probabilidad empírica $f(y)$ se utiliza la función de distribución empírica $S_N(y)$, la cual se define como

$$S_N(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{[-\infty, y]}(Y_i), \quad (4.1)$$

donde $\mathbb{1}_{[-\infty, y]}(Y_i)$ es la función indicadora igual a 1 si $Y_i \leq y$ y 0 en cualquier otro caso, por lo tanto la función de densidad de probabilidad empírica $f(y)$ es

$$f(y_i) = S_N(y_{i+1}) - S_N(y_i).$$

Para obtener la función generadora de momentos empírica se integra numéricamente en un intervalo $[0, T]$ el integrando

$$e^{ry} f(y),$$

donde y toma valores de acuerdo a la muestra analizada, de esta forma si

$$\int_0^T e^{ry} f(y) dy \rightarrow \infty \text{ cuando } T \rightarrow \infty,$$

se considera un modelo de cola pesada. La figura 4.4 muestra la función generadora de momentos empírica para la muestra analizada.

Otra forma de determinar si la muestra pertenece a la clase de las distribuciones de cola pesada es a través de la función de vida media residual dada por la expresión

$$\hat{e}(M) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Y_i > M\}}} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{Y_i > M\}} (Y_i - M), \quad (4.2)$$

donde M es constante, Y_i es el i -ésimo reclamo y N el tamaño de la muestra. Si dicha función tiende a infinito conforme M crece, entonces la muestra debe ser considerada de cola pesada, mientras que si converge a alguna constante se considera de cola ligera. La figura 4.5 muestra la función de vida media residual para los datos analizados. Observemos que la función aumenta conforme M crece, por lo tanto utilizaremos un modelo de cola pesada.

Se propone que los datos sigan una distribución Pareto, $\text{Par}(\alpha, \beta)$. Se estiman los parámetros por medio del método de máxima verosimilitud, obteniendo como estimador

para α la siguiente expresión

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{k(N)} \sum_{i=1}^{k(N)} \log(Y_{(N+1-i)}) - \log Y_{(N-k(N))} \right)^{-1},$$

donde N es el tamaño de la muestra, $k(N) = [N^{2/3}]$ y $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(N)}$ denota el orden estadístico de la muestra. Mientras que el estimador para β es

$$\hat{\beta} = \left(\frac{k(N)}{N} \right)^{\frac{1}{\hat{\alpha}}} Y_{(N-k(N))}.$$

Así obtenemos como estimadores: $\hat{\alpha} = 1.6246$ y $\hat{\beta} = 0.5315$.

De forma similar se propone que los datos tengan distribución lognormal $\text{LN}(\mu', \sigma'^2)$. Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces e^Y tendrá distribución lognormal, por tanto en analogía a la estimación de parámetros para la normal

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log Y_i$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\log Y_i - \hat{\mu})^2,$$

de esta forma se obtienen como estimadores: $\hat{\mu} = -1.28011$ y $\hat{\sigma} = 1.41646$.

Para saber si la muestra proviene de una distribución Pareto o lognormal como se ha propuesto, se aplica el método Q-Q-plot el cual es un método gráfico para el diagnóstico de diferencias entre las distribuciones de probabilidad de una población de la que se ha extraído una muestra aleatoria y una distribución usada para la comparación. Si los dos conjuntos provienen de una población con la misma distribución, los puntos deben de caer aproximadamente a lo largo de la línea de referencia. Las figuras 4.6 y 4.7 muestran las

gráficas Q-Q-plot para los casos en que la muestra tiene distribución lognormal y Pareto respectivamente. Como podemos notar, en la gráfica Q-Q-plot para la distribución lognormal, los datos son más próximos a la línea de referencia que en el caso Pareto, es por ello que abordamos la hipótesis nula: la muestra tiene distribución lognormal con parámetros $\hat{\mu} = -1.28011$ y $\hat{\sigma} = 1.41646$.

Para no rechazar la hipótesis nula (la muestra tiene distribución lognormal) hace falta aplicar una prueba de bondad de ajuste, la cual a diferencia del método Q-Q-plot no es un método gráfico, sino que de forma estadística determina si una muestra proviene de una cierta población o no. En este caso se utilizaron las pruebas de bondad de ajuste Anderson-Darling A^2 y Shapiro-Wilki, y se determinaron los correspondientes p -valor. La prueba Anderson-Darling A^2 es usada comúnmente para determinar si una muestra proviene de una distribución normal. Sin embargo puede ser utilizada para determinar si los datos provienen de alguna otra distribución. Esta prueba es una modificación de la prueba Kolmogorov-Smirnov, ya que a diferencia de esta, le da mayor peso a las colas de la distribución.

La prueba estadística Anderson-Darling A^2 para el conjunto de datos ordenados $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_N$, es

$$A^2 = -N - S,$$

donde

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{2i-1}{N} [\ln(F(Y_i)) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))],$$

siendo F la función de distribución hipotética. De acuerdo a cierto grado de significancia α se determina el p -valor correspondiente. El p -valor determina que tan probable es que se tenga una muestra como la estudiada. Si $p\text{-valor} > \alpha$ no se rechaza la hipótesis nula, de lo contrario se rechaza. Para un grado de significancia $\alpha = 0.05$, se obtuvo un $p\text{-valor} = 0.45562$, para la prueba de Anderson-Darling A^2 , por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula.

Para aplicar la prueba de Shapiro-Wilk notemos que el logaritmo natural de la muestra debe distribuirse de acuerdo a una normal con $\hat{\mu} = -1.28011$ y $\hat{\sigma} = 1.41646$, por lo tanto se aplica la prueba de bondad de ajuste Shapiro-Wilk utilizada para corroborar normalidad, obteniendo un $p\text{-valor} = 0.9975$, por lo tanto se confirma el no rechazar la hipótesis nula.

La figura 4.8 muestra las gráficas de la función de distribución empírica y la función de distribución lognormal conjuntamente. Para profundizar más en el análisis de datos consultar [17] y [12].

4.4.1. Estimación de la probabilidad de ruina para la aseguradora

De acuerdo al análisis de datos, se estima la ruina para montos de reclamación con distribución lognormal, provenientes de una normal con $\hat{\mu} = -1.28011$ y $\hat{\sigma} = 1.41646$. Para el proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, la prima cobrada por unidad de tiempo es $c = 3$, la intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = 1$ y la riqueza inicial u es variable. Observemos que para los datos establecidos se cumple la condición de ganancia neta, $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{3}{0.75} - 1 = 3 > 0$. Para los métodos de Monte-Carlo crudo y Monte-Carlo condicionado se

toma una muestra de 10,000 trayectorias del proceso de reserva, observadas durante un tiempo $T = 5,000$ con un intervalo que incluye al valor estimado \hat{I}_N el 95 % de las veces. Se observó que para valores mayores a T la estimación de la ruina no varía. Para el algoritmo de Panjer se realiza un refinamiento de tamaño $\delta = \frac{1}{100}$ para obtener la función de densidad $k(x)$ de la cola integrada $F_I(x)$. En la imagen 4.9 se muestra una posible trayectoria para la reserva de la empresa con los datos antes mencionados considerando que la riqueza inicial toma valor $u = 1$. En la tabla 4.10 se muestran las diversas estimaciones para la ruina. En las tablas 4.11 y 4.12 se muestran las estimaciones de la ruina, error relativo y varianza relativa para los métodos de Monte-Carlo crudo y Monte-Carlo condicionado respectivamente.

Observemos que para el caso lognormal, la cola de la distribución decae más lentamente que para las distribuciones Pareto y Weibull, (ver imagen 4.10). Por esto y porque la condición de ganancia neta es grande, para una riqueza inicial $u = 50$ la ruina es del orden 10^{-3} en los métodos de Panjer, Monte-Carlo crudo y Embrechts-Veraverbeke. Es una probabilidad de ruina grande comparada con la que se obtiene de las distribuciones Weibull y Pareto para la misma riqueza inicial. Por lo tanto el método de Monte-Carlo crudo aún logra estimar dicha probabilidad. El método de Monte-Carlo condicionado da buenos resultados, aunque el método de Monte-Carlo crudo realiza una mejor estimación. El Teorema de Embrechts-Veraverbeke da mejores estimaciones que en los casos Pareto y Weibull. De manera similar a los casos anteriores, podemos observar que con cualquier método empleado la probabilidad de ruina va disminuyendo conforme incrementa la riqueza inicial.

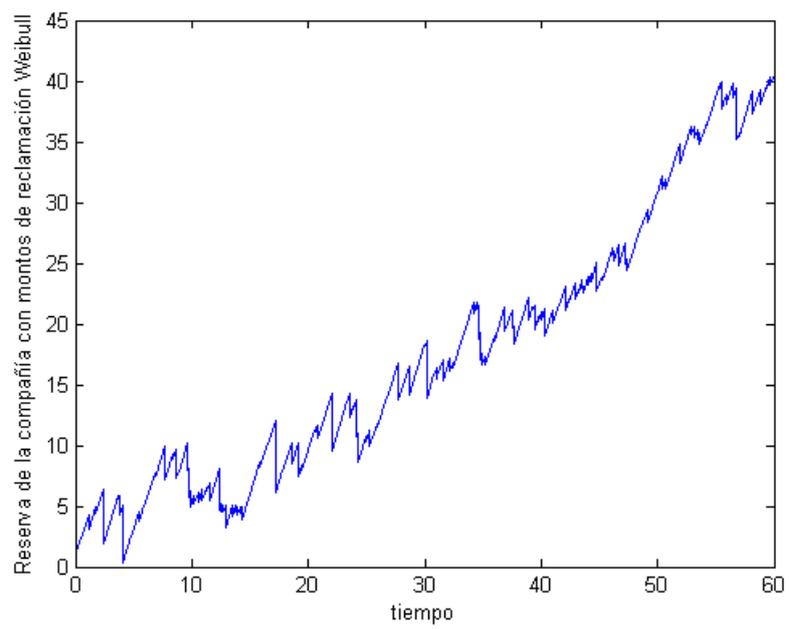


Figura 4.2: Posible trayectoria de la reserva de una compañía aseguradora con montos de reclamación de distribución Weibull.

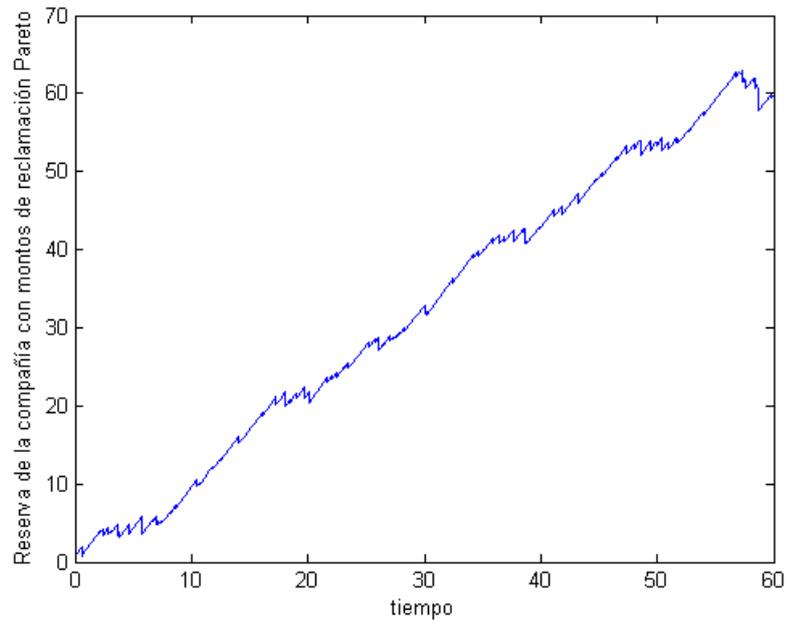


Figura 4.3: Posible trayectoria de la reserva de una compañía aseguradora con montos de reclamación de distribución Pareto.

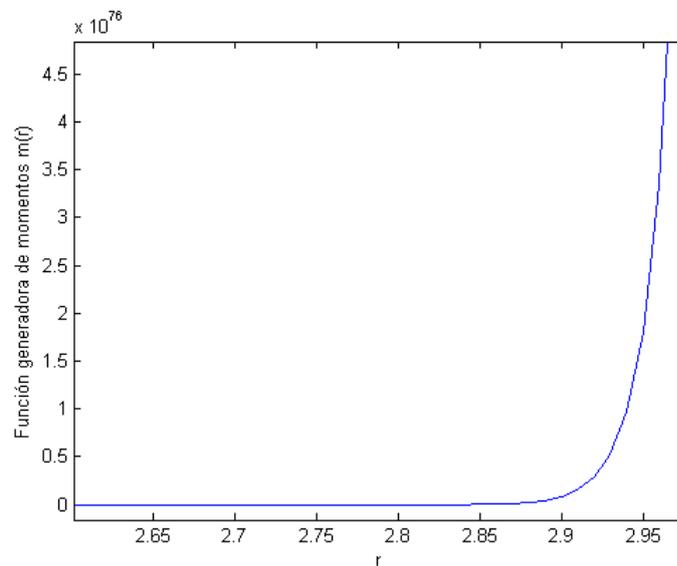


Figura 4.4: Gráfica de la función generadora de momentos empírica para la muestra obtenida.

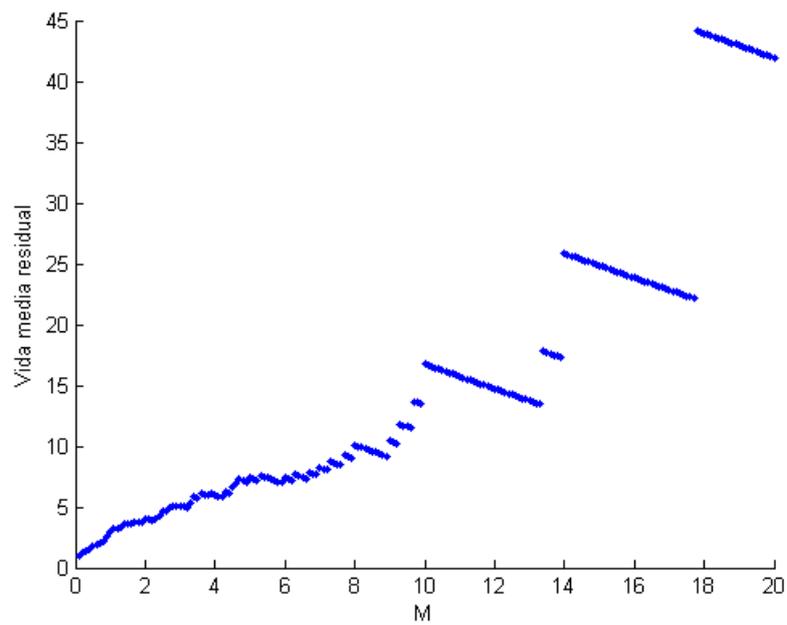


Figura 4.5: Gráfica de la función de vida media residual para la muestra analizada.

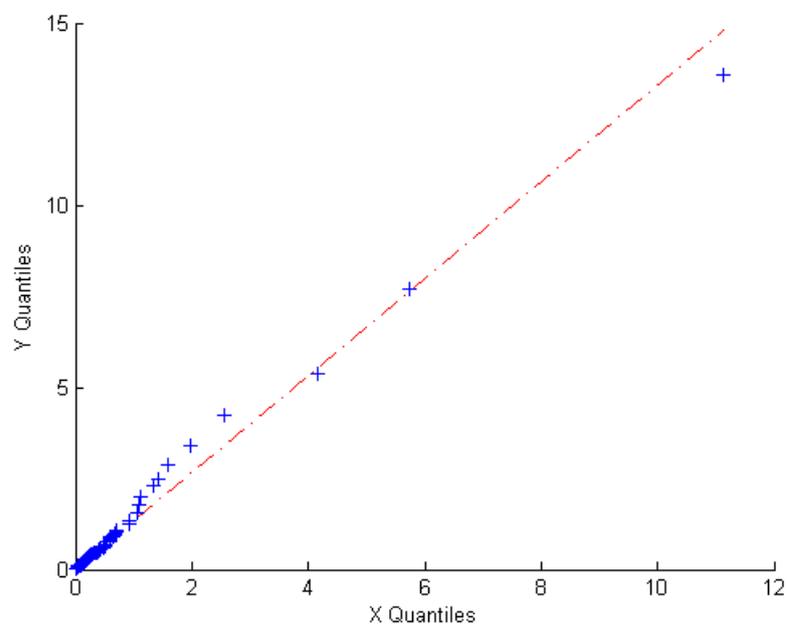


Figura 4.6: Gráfica Q-Q-plot al aproximar la muestra a una distribución lognormal.

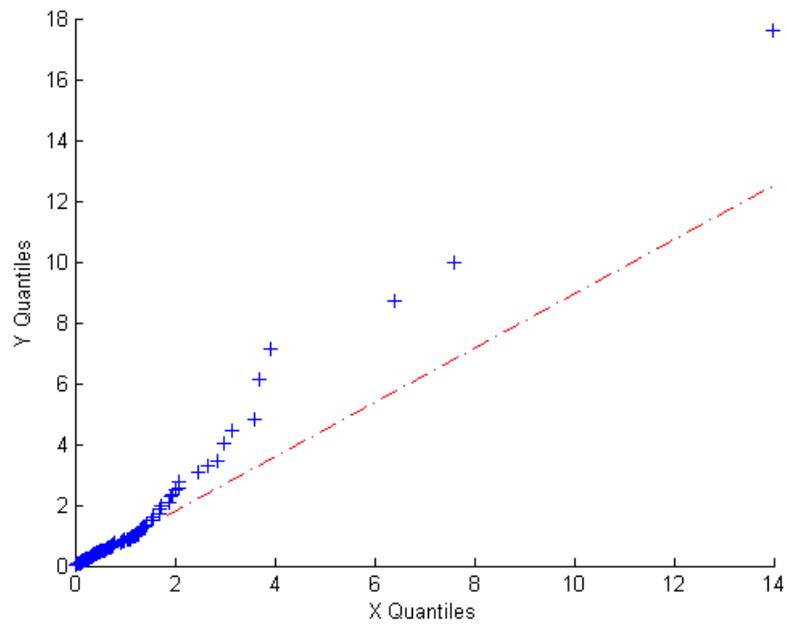


Figura 4.7: Gráfica Q-Q-plot al aproximar la muestra a una distribución Pareto.

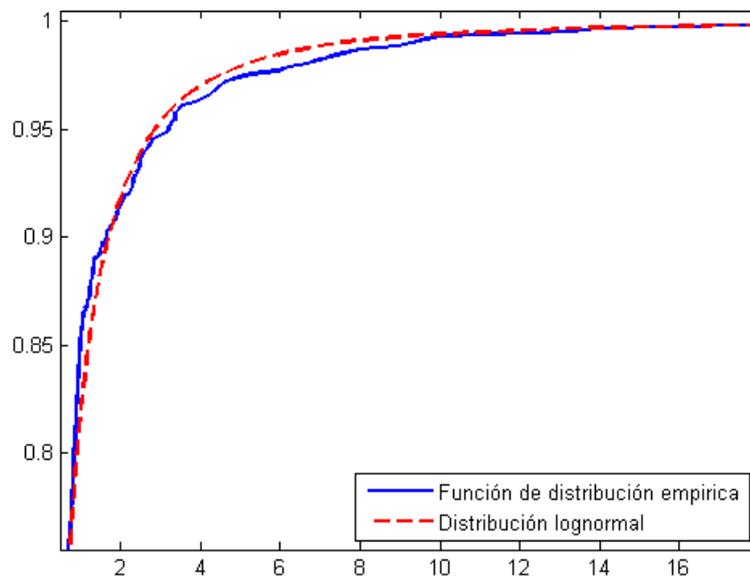


Figura 4.8: Gráficas de la función de distribución empírica y la función de distribución lognormal de acuerdo a los datos obtenidos.

Probabilidad de ruina para montos con distribución lognormal				
u	Panjer	Monte-Carlo crudo	Monte-Carlo condicionado	Embrechts
1	0.1376	0.1361	0.1069	0.1537
2	0.09619	0.0972	0.0701	0.0993
3	0.07281	0.069	0.0581	0.0717
4	0.05763	0.0557	0.0293	0.0551
5	0.04699	0.0481	0.0241	0.044
10	0.0217	0.021	0.0107	0.0194
20	0.008	0.0085	0.0098	0.0071
30	0.00401	0.0051	0.0038	0.0036
40	0.00235	0.0029	0.0019	0.0021
50	0.00151	0.0021	0.0009	0.0014

Tabla 4.10: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal.

Prob. de ruina para montos lognormales por el método de Monte-Carlo crudo			
u	Monte-Carlo crudo	Error relativo	Varianza relativa
1	0.1361	0.098056	0.8628
2	0.0972	0.12023	0.9049
3	0.069	0.13859	0.9286
4	0.0557	0.15459	0.9408
5	0.0481	0.17374	0.9527
10	0.021	0.26346	0.9801
20	0.0085	0.43699	0.9941
30	0.0051	0.5771	0.9969
40	0.0029	0.76971	1.0024
50	0.0021	0.92351	1.003

Tabla 4.11: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución log-normal por el método de Monte-Carlo crudo.

Prob. de ruina para montos lognormales utilizando Monte-Carlo condicionado			
u	Monte-Carlo condicionado	Error relativo	Varianza relativa
1	0.1069	0.14554	0.8621
2	0.0701	0.19195	0.8571
3	0.0581	0.25932	0.6600
4	0.0293	0.32344	0.5414
5	0.0241	0.40084	0.4317
10	0.0107	0.40581	0.2145
20	0.0098	0.51203	0.0624
30	0.0038	0.6721	0.0320
40	0.0019	0.89498	0.0186
50	0.0009	2.688	0.0113

Tabla 4.12: Estimación de la probabilidad de ruina para reclamos con distribución log-normal por el método de Monte-Carlo condicionado.

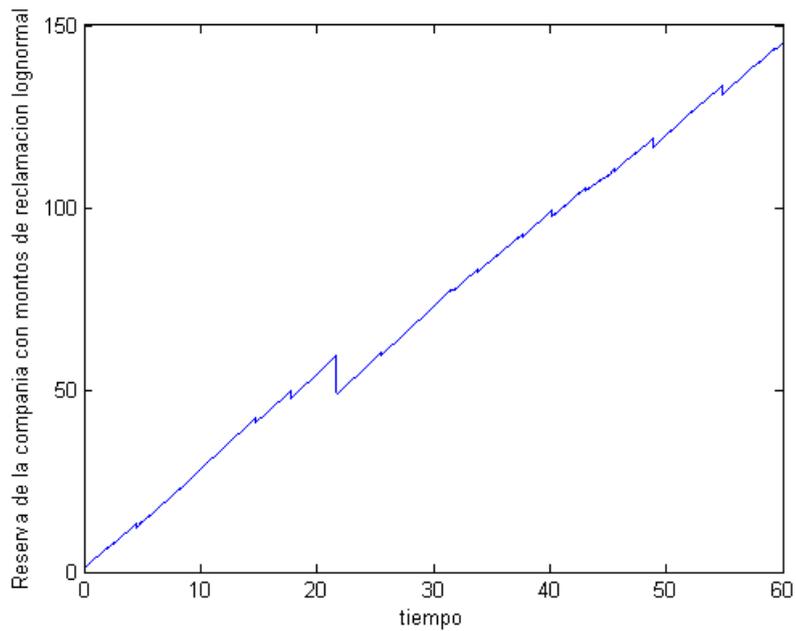


Figura 4.9: Posible trayectoria de la reserva de una compañía aseguradora con montos de reclamación de distribución lognormal.

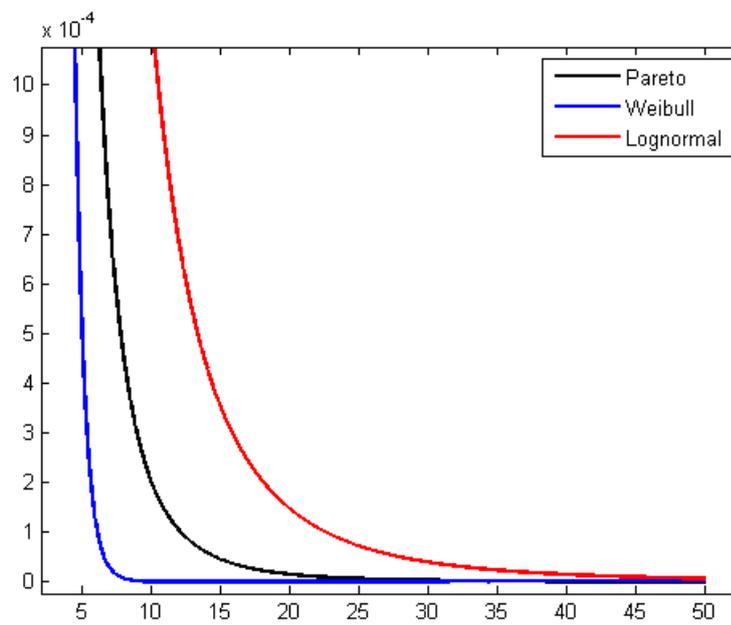


Figura 4.10: Distribuciones $\text{Par}(3, 1)$, $W(0.5, 0.9)$, $\text{LN}(0.7, 1.9)$.

Capítulo 5

Conclusiones

Se realizaron estimaciones de la probabilidad de ruina cuando los montos de reclamación son subexponenciales. Se modeló la reserva de la compañía aseguradora mediante el proceso de Cramer-Lundberg, el cual considera como datos: la riqueza inicial, la prima cobrada por unidad de tiempo y la distribución de los montos de reclamación.

Se corroboró que la probabilidad de ruina depende inversamente de la riqueza inicial y que deben de cumplirse ciertas condiciones de solvencia para que la ruina no ocurra de forma segura.

Se estimó la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones tienen distribución exponencial, Pareto y Weibull mediante los Teoremas de Embrechts-Veraverbeke, el algoritmo de Panjer, el método de Monte-Carlo crudo y los métodos de reducción de varianza. Observamos que el algoritmo de Panjer es del mismo orden que el método de Monte-Carlo crudo para riquezas iniciales pequeñas. Mientras que para riquezas iniciales mayores es

del mismo orden que el método de Embrechts-Veraverbeke, el cual converge cuando la riqueza inicial tiende a infinito. Se encontró que el método de Monte-Carlo crudo realiza una aproximación del mismo orden que el algoritmo de Panjer para probabilidades de ruina grandes, pero conforme disminuye la probabilidad de ruina este método se vuelve ineficiente. Los métodos de reducción de varianza logran mejores aproximaciones para probabilidades de ruina pequeñas, ya que realizan un muestreo más preciso que el método de Monte-Carlo crudo. El Teorema de Embrechts-Veraverbeke mejora conforme incrementa la riqueza inicial.

Se realizó el análisis de datos reales, proponiendo un tipo de distribución para ellos y estimando los parámetros de acuerdo con el método de máxima verosimilitud. Se aplicaron dos pruebas de bondad de ajuste para verificar si los datos analizados se distribuían bajo el modelo propuesto. Mediante dicho análisis se determinó que los datos tienen distribución lognormal y se realizó la estimación de la ruina para dicho caso. A diferencia de las distribuciones Pareto y Weibull la cola de la distribución lognormal decae más lentamente, por eso y porque la condición de ganancia neta es grande, para riqueza iniciales mayores la probabilidad de ruina continúa siendo alta. Cabe señalar que el tiempo de cálculo es sensiblemente menor en el caso de los métodos Monte-Carlo crudo y de reducción de varianza respecto al algoritmo de Panjer.

Apéndice A

Conceptos de probabilidad y transformada de Laplace

A.1. Funcion generadora de probabilidades

Definición A.1.1. *La función generadora de probabilidades de una variable aleatoria X , denotada por $g_X(r)$ se define como*

$$g_X(r) = E[r^X],$$

definida para valores reales de r tal que la esperanza existe.

Para una variable aleatoria X con distribución geométrica y parámetro de éxito p su función generadora de probabilidades es

$$g_X(r) = E[r^X] = \sum_{k=0}^{\infty} r^k p q^k = \frac{p}{1 - qr}, \quad (\text{A.1})$$

donde $q = 1 - p$.

A.2. Proceso de conteo

Un proceso de conteo determina el número de eventos que han ocurrido hasta determinado tiempo.

Definición A.2.1. *Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ que representa el número total de eventos que han ocurrido hasta cierto tiempo t se llama proceso de conteo, el cual cumple con las siguientes propiedades*

- i) $N(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$,*
- ii) $N(t)$ toma valores en los enteros positivos,*
- iii) si $s < t \Rightarrow N(s) < N(t)$, entonces $N(s) - N(t)$ representa el número total de eventos que han ocurrido en el intervalo (s, t) .*

Un proceso de conteo se dice que tiene incrementos estacionarios si la distribución del número de eventos en algún intervalo de tiempo depende sólo de la medida del intervalo.

En otras palabras, el proceso tiene incrementos estacionarios si el número de eventos en el intervalo $(t_1 + s, t_2 + s)$ (esto es $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$) tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo (t_1, t_2) (esto es $N(t_2) - N(t_1)$) para todo $t_1 < t_2$ y $s > 0$.

A.3. Proceso de Poisson homogéneo

Definición A.3.1. *Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ con intensidad $\lambda > 0$ es un proceso de Poisson homogéneo si satisface*

- i) $N(0) = 0$,*

ii) tiene incrementos independientes, es decir, si $s < t$ las variables aleatorias $N(s)$ y $N(t)$ son independientes,

iii) el número de eventos en algún intervalo de tiempo de longitud t tiene distribución de Poisson con intensidad λt

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

notemos que de la condición iii) se deduce que el proceso de Poisson homogéneo tiene incrementos estacionarios.

Teorema A.3.1. *Los tiempos entre llegadas entre un evento de Poisson y otro, donde dichos eventos tienen intensidad λt , son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial y media $\frac{1}{\lambda}$.*

Demostración:

Sea T_1 el tiempo de ocurrencia del primer evento. Sea T_n el tiempo entre el evento $n - 1$ y el evento n , entonces al conjunto $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ se le conoce como tiempos entre llegadas. Para analizar la distribución de T_n consideremos el caso en que $T_1 > t$, esto sucede si y sólo si no ocurre ningún evento en el intervalo $[0, t]$, por lo tanto

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t},$$

por tanto T_1 tiene distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$.

Ahora analicemos

$$\begin{aligned}
 P\{T_2 > t | T_1 = s\} &= P\{0 \text{ eventos en el intervalo}(s, s + t) | T_1 = s\} \\
 &= P\{0 \text{ eventos en}(s, s + t)\} \\
 &= e^{-\lambda t},
 \end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades se siguen del hecho de que un proceso de Poisson homogéneo tiene incrementos estacionarios e independientes. Por lo tanto T_2 tiene distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, más aún T_2 es independiente de T_1 . Repitiendo los mismos argumentos para cada uno de los T_n se puede concluir que los tiempos entre llegadas tienen distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. ■

A.4. Proceso de Poisson compuesto

Definición A.4.1. *Un proceso estocástico $\{s(t), t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson compuesto si puede ser representado como*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i; \quad t \geq 0,$$

donde $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson y $\{X_n, n \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que a la vez son independientes del proceso de Poisson.

A.4.1. Varianza de un proceso de Poisson compuesto

Teorema A.4.1. *Un proceso de Poisson compuesto $\{s(t), t \geq 0\}$ tiene varianza $\lambda t E[X^2]$.*

Demostración:

Por definición

$$\text{Var}[s(t)|N(t)] = E[[s(t) - E(s(t)|N(t))]^2|N(t)].$$

Al trabajar con la expresión anterior se puede mostrar que:

$$\text{Var}[s(t)] = E[\text{Var}(s(t)|N(t))] + \text{Var}(E[s(t)|N(t)]), \quad (\text{A.2})$$

usando la ecuación (A.2) y analizando $\text{Var}[s(t)|N(t) = n]$.

$$\text{Var}[s(t)|N(t) = n] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i | N(t) = n\right],$$

por ser las variables aleatorias X_i 's independientes de la variable aleatoria $N(t)$

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i | N(t) = n\right] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right],$$

por ser las variables aleatorias X_i 's independientes e idénticamente distribuidas

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n\text{Var}(X),$$

por lo tanto

$$\text{Var}[s(t)|N(t)] = N(t)\text{Var}(X).$$

Entonces utilizando la ecuación (A.2) y el hecho que $E[s(t)|N(t)] = N(t)E[X]$

$$\begin{aligned} \text{Var}[s(t)] &= E[N(t)\text{Var}(X)] + \text{Var}[N(t)E(X)] \\ &= E[N(t)]E[\text{Var}(X)] + (E[X])^2\text{Var}[N(t)] \\ &= \lambda t\text{Var}(X) + (E[X])^2\lambda t \\ &= \lambda t[\text{Var}(X) + E[X]^2] \\ &= \lambda tE[X^2]. \end{aligned}$$

Teorema A.4.2. Para cada $r \geq 0$ el proceso de Poisson compuesto $\{s(t), t \geq 0\}$ tiene función generadora de momentos.

$$m_{s(t)}(r) = \exp\{\lambda t(m_X(r) - 1)\}.$$

donde $m_X(r)$ es la función generadora de momentos de la variable aleatoria X .

Demostración:

$$\begin{aligned} m_{s(t)}(r) &= E[e^{rs(t)}] \\ &= E(E[e^{rs(t)}|N(t)]). \end{aligned}$$

Al trabajar con $E[e^{rs(t)}|N(t)]$

$$E[e^{rs(t)}|N(t)] = E[e^{r \sum_{i=0}^n X_i} | N(t) = n],$$

por ser las variables aleatorias X_i 's independientes de $N(t)$

$$E[e^{r \sum_{i=0}^n X_i}] = E[(e^{rX})^n],$$

entonces

$$\begin{aligned} E(E[e^{rs(t)}|N(t)]) &= E(E[(e^{rX})^{N(t)}]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [E(e^{rX})]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} [E(e^{rX})]^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Al usar series de Taylor para la exponencial.

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^n [E(e^{rX})]^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} &= e^{-\lambda t} \exp\{E(e^{rX})\lambda t\} \\
 &= e^{-\lambda t} \exp\{m_X(r)\lambda t\} \\
 &= \exp\{\lambda t(m_X(r) - 1)\}.
 \end{aligned}$$

A.5. Distribución exponencial

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\beta > 0$ cuya función de densidad de probabilidad es

$$P(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y cuyo valor esperado está dado por $E[X] = \frac{1}{\beta}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} x \beta e^{-\beta x} dx \\
 &= -x e^{-\beta x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Una de las propiedades fundamentales de la distribución exponencial es su falta de memoria, es decir

$$P(Y > t + s | Y > t) = P(Y > s).$$

Para demostrar esta propiedad se usa la definición de probabilidad condicional

$$P(Y > t + s | Y > t) = \frac{P(Y > t + s)}{P(Y > t)} = \frac{e^{-\beta(t+s)}}{e^{-\beta t}} = e^{-\beta s} = P(Y > s). \quad \blacksquare$$

A.6. Desigualdad de Chebyshev

Sea X una variable aleatoria cuya esperanza es $E[X]$, sea c un número real cualquiera y supongamos que $E[(X - c)^2]$ existe y es finito, entonces para todo $\epsilon > 0$

$$P(|X - c| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E[(X - c)^2].$$

A.7. Cola integrada de las distribuciones Pareto y Weibull

- Distribución Pareto, $\text{Par}(\alpha, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha+1} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con exponente o parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro escala $\beta > 0$. Su media está dada por

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha - 1},$$

su función de distribución es

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha,$$

por lo tanto la cola de la distribución esta dada por

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x} \right)^\alpha.$$

Su cola integrada es

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \left(\frac{\beta}{\beta + y} \right)^\alpha dy \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\mu} \int_0^x (\beta + y)^{-\alpha} dy \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\mu} \left[\frac{(\beta + y)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right] \Big|_0^x \\ &= \frac{\beta^\alpha}{-(\alpha - 1)\mu} [(\beta + x)^{-(\alpha-1)} - \beta^{-(\alpha-1)}] \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(\alpha - 1)\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)} \left[\frac{1}{\beta^{(\alpha-1)}} - \frac{1}{(\beta + x)^{(\alpha-1)}} \right] \\ &= 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x} \right)^{(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

- Distribución tipo Weibull, $W(\alpha, \beta)$, con parámetro de forma $\beta > 0$ y parámetro de escala $\alpha > 0$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Su media es $\mu = \alpha \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$, tiene función de distribución

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\},$$

por tanto su cola está dada por la expresión

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right\}.$$

Su cola integrada es

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(y) dy \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^x \exp \left\{ - \left(\frac{y}{\alpha} \right)^\beta \right\} dy. \end{aligned}$$

Sea $z = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta$, entonces $y = \alpha z^{\frac{1}{\beta}}$ y $dy = \frac{\alpha}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz$. Realizando el cambio de variable respecto a z en la integral

$$F_I(x) = \frac{\alpha}{\beta\mu} \int_0^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1} dz.$$

Al sustituir el valor esperado para la distribución Weibull y simplificar

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{\alpha}{\alpha\beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \int_0^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1} dz \\ &= \int_0^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{\exp(-z) z^{\frac{1}{\beta}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} dz. \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$F_I(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \left[\beta e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} + \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \beta z^{\frac{1}{\beta}} e^{-z} dz \right]$$

A.8. Transformada de Laplace

Teorema A.8.1. Sean f y g dos funciones, entonces para la transformada de Laplace de la convolución $f * g$ se cumple $\mathcal{L}_{f*g}(r) = \mathcal{L}_f(r)\mathcal{L}_g(r)$.

Demostración:

Ver [11] pag. 6

Teorema A.8.2. *Sea $h(x)$ una función diferenciable cuya transformada de Laplace existe, entonces la transformada de Laplace de $\frac{d}{dx}h(x) = h'(x)$ está dada por*

$$\mathcal{L}_{h'(x)}(r) = \int_0^{\infty} \exp(-rx) \left(\frac{d}{dx} h(x) \right) dx = r\mathcal{L}_h(r) - h(0).$$

Demostración:

Ver [11] pag. 5

Bibliografía

- [1] Arellanes, E. M. (2011). *Procesos de riesgo con reclamos de cola pesada*. Tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca.
- [2] Asmussen, S. y Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities*. World Scientific.
- [3] Asmussen, S. y Glynn, P.W. (2007). *Stochastic Simulation Algorithms and Analysis*. Springer-Verlag.
- [4] Asmussen, S. y Kroese, D.P. (2006). *Improved algorithms for rare event simulation with heavy tails*. *Advances in Applied Probability*, 38, 545-558.
- [5] Dickson, D. (2006). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press.
- [6] Embrechts, P., Külpelberg, C., Mikosch, T. (2003). *Modelling Extremal Events for Insure and Finance*. Springer-Verlag.
- [7] Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- [8] Kass, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer-Verlag.

- [9] Klüppelberg, C. (1988). *Subexponential distributions and integrated tails*. Journal of Applied Probability, 25, 132-141.
- [10] Martínez, A. (2007). *Análisis y simulación de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg*. . Tesis de Actuaría, Universidad Nacional Autónoma de México, Mex. D.F.
- [11] Martinez, E. (2009). *Transformada de Laplace* . Universidad de Zaragoza.
- [12] Massey, F. J. (1951). *The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit*. Journal of the American Statistical Association, 46, 68–78.
- [13] Miller, L.H. (1956). *Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics*. Journal of the American Statistical Association, 51, 111-121.
- [14] Resnick, S. (1997). *Discussion of the Danish Data on Large Fire Insurance Losses*. ASTIN Bulletin, 27, 139-151.
- [15] Rincón, L. (2012). *Introducción a la teoría del riesgo*. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [16] Saavedra, P. (2008). *Método Montecarlo en Finanzas*. Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa.
- [17] Schmidli, H. (2003). *Lecture notes on Risk Theory for the second workshop of Risk and Finance CIMAT*. Institute of Mathematics University of Cologne.
- [18] Sheldon, M.R. (1985). *Introduction to probability models*. Academic Press.
- [19] Sheldon M.R. (1990). *Simulation*. Academic Press.

[20] <http://www.macs.hw.ac.uk/mcneil/data.html>



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 18/02/2016

Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES) de la alumna BRENDA IVETTE GARCIA MAYA, matrícula 2133802723, quien cumplió con los 147 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha veintidós de febrero del 2016 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

ESTIMACION NUMERICA DE LA PROBABILIDAD DE RUINA: CASO SUBEXPONENCIAL.

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 207 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

A PROBADA

JURADO

Presidente

DR. RAUL RUEDA DIAZ DEL CAMPO

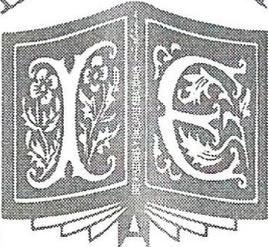
Secretario

DR. GABRIEL NUÑEZ ANTONIO

Vocal

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

TESIS Y ENCUADERNACION



24 hrs 24 hrs

aislinn

AV. UNIVERSIDAD 1307 LOCAL 5
A 100 mts DE LA U.A.E.M.

MEX. 119 • 1821 TEL. 01(777) 102 90 15 tesis-aislinn@hotmail.com