



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No.00213

Matricula:2173802403

Modelación matemática de la actividad eléctrica del corazón



Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 17:00 horas del día 28 del mes de enero del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
DRA. MAYRA NUÑEZ LOPEZ
DRA. LUCIA IVONNE HERNANDEZ MARTINEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: MINERVA MARQUEZ CASTILLO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.


MINERVA MARQUEZ CASTILLO
ALUMNA

REVISÓ


MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI


DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE


DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL


DRA. MAYRA NUÑEZ LOPEZ

SECRETARIA


DRA. LUCIA IVONNE HERNANDEZ MARTINEZ

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella

“Modelación matemática de la actividad eléctrica del
corazón ”

Para obtener el grado de:
Maestra en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales)

PRESENTA:

Minerva Márquez Castillo

ASESOR:

Dr. Joaquín Delgado Fernández
Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa (UAM-I).



SINODALES:

Dra. Mayra Núñez López
Instituto Autónomo de México (ITAM).
Dra. Lucía Ivonne Hernández Martínez
Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM).

Índice general

1. Funcionamiento eléctrico y fisiología del corazón	7
1.1. Fisiología del corazón	7
1.2. Actividad eléctrica	8
2. Bioelectromagnetismo	10
2.1. Medios dieléctricos	11
2.2. Medios biológicos	12
2.3. Principio de dualidad	14
2.4. Modelos de fuentes de corriente	15
3. Fundamentos de electrocardiografía	19
3.1. Membrana celular	19
3.2. Corrientes de arrastre	21
3.3. Corrientes de difusión	22
3.4. La ecuación de Nernst-Planck	23
3.5. La ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz	23
3.6. El potencial de acción	26
3.7. La señal del electrocardiograma	28
3.8. A nivel tejido	29
3.9. La señal del ECG	30
4. Modelos de vectocardiografía	32
4.1. Las 12 derivaciones clásicas	33
4.2. El modelo del dipolo único	37
4.2.1. Fórmula cerrada para un dipolo finito	41
4.3. Fórmula cerrada para el potencial de un dipolo puntual	47
4.3.1. La fórmula de Wilson y Bayley	52
4.4. Simulación del potencial en una esfera debido a un dipolo	53

4.5. El modelo de Clifford y Sharry	53
4.6. El modelo de Sameni	57
4.7. Simulación de las derivaciones de Einthoven	61
5. Modelos de conducción volumétricos	65
5.1. Modelo de volumen conductor	65
5.2. El modelo bidominio	67
5.3. El modelo monodominio	71
6. Simulaciones en SCIRun	74
6.1. Simulación de isquemia	74
6.2. Simulación de desfibrilación	82
7. Problemas mal planteados relacionados con los modelos de ECG	87
7.1. El problema directo en un anillo	88
7.2. El problema inverso en un anillo	93
7.3. Problema directo en una esfera	96
7.4. Problema inverso en una esfera	98
A. El operador de Hilbert-Schmidt con simetría azimutal	107
A.1. Elemento Finito	108
A.2. Breve introducción del software SCIRun	111
A.2.1. Desfibrilación	125

Resumen

En el presente trabajo explica y construye un electrocardiograma (ECG). El primer ECG humano se publicó en 1887 por Augustus D. Waller. El electrocardiograma es el principal instrumento para detectar una condición anormal en el corazón. Son mediciones eléctricas que se hacen dentro (corazón abierto) o sobre el torso del cuerpo humano mediante derivaciones colocados en posiciones bien definidas. Einthoven modeló la actividad eléctrica del corazón. Para registrar el electrocardiograma humano, utilizó tres derivaciones, unidas de brazo izquierdo, brazo derecho y a la pierna izquierda. Las primeras derivaciones fueron *I*, *II* y *III* conocidas como derivaciones Einthoven, en cada una de ellas utilizó dos electrodos que registra la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos del triángulo. Las derivaciones son electrodos que son colocados dentro (corazón abierto) o sobre el torso, captan los impulsos eléctricos del corazón y se presenta por medio de una gráfica. Los trazos del electrocardiograma son de ayuda a un médico para determinar si existe algún problema o arritmia cardíaca.

El problema directo de la electrocardiografía consiste en el cálculo de la distribución de potenciales en la superficie del torso a partir de la actividad eléctrica del corazón y el modelo del torso, siendo un problema bien condicionado y bien planteado poseedor de una solución única.

En vectocardiografía, la actividad eléctrica del corazón se modela por un dipolo (Einthoven, Fahr de Waart, 1913); en particular, el complejo QRS que es la representación gráfica de la despolarización de los ventrículos del corazón formando una estructura picuda en el ECG. Un *dipolo* es un par de cargas eléctricas opuestas $+I$ y $-I$, separadas por una distancia pequeña. La señal ECG se explica por las proyecciones de este vector sobre los vectores de las derivaciones clásicas *I*, *II* y *III* del triángulo Einthoven.

En la actividad eléctrica del corazón se presenta en varios modelos con el fin de simular la señal del ECG en posiciones bien definidas llamadas

derivaciones: 1) El *modelo del volumen conductor* es un modelo distribuido de la región del cuerpo humano entre el torso y el corazón. 2) En el *modelo bidominio* se modela la actividad eléctrica del corazón mediante la actividad intracelular, extracelular y transmembrana de las células que componen el músculo cardíaco. El *modelo monodominio* es la diferencia de potencia, es decir, el potencial transmembrana. Si asumimos tasas de anisotropía iguales, es decir, $M_e = \lambda M_i$, donde λ es una constante escalar

El modelo de la isquemia se basa en modelo pasivo del modelo bidominio. La muerte de los cardiomiocitos es la principal causa del impacto de la cardiopatía isquémica en la supervivencia y la calidad de vida. Se produce masivamente durante el infarto agudo de miocardio, y la recanalización coronaria no suele ser capaz de prevenirla.

El modelo de desfibrilación es el del volumen conductor. La desfibrilación eléctrica es un tipo de terapia que mediante la colocación de electrodos y descargar un choque eléctrico de corriente al músculo del corazón, ya sea de forma de interna (corazón abierto) o externa (sobre el torso).

Introducción

En la investigación realizada durante el desarrollo de esta Tesis de Maestría, revisamos los principios biofísicos básicos de la modelación de la actividad cardíaca del corazón sobre la noción de equilibrio electroquímico, la ley de Nerst y el potencial de acción a nivel celular. Se estudian modelos simples de fuentes de corriente, particularmente fuentes dipolares usando el principio de dualidad en fluidos biológicos en la aproximación cuasiestática, en la que se desprecian los campos magnéticos y las fuentes de corriente.

Se explica el origen de la señal del ECG asociado a los procesos de depolarización, repolarización y periodo refractario del potencial de acción. Se estudia el modelo simple de fuente dipolar en una esfera conductora, el vectocardiograma a partir de las derivaciones de Einthoven y el modelo de Sameni.

Se presenta el modelo del volumen conductor y el modelo bidominio, el primero permite plantear el problema directo y el problema inverso de Electrocardiografía. Del segundo, una modificación permite modelar el proceso de isquemia cardíaca. En esta tesis realizamos simulaciones con ayuda del *Software SCIRun* de un corazón isquémico y, desfibrilación interna y externa, basado en datos reales.

La tesis está estructurada como sigue: en la Introducción se plantea el panorama general del problema a tratar. En el capítulo 1 se explica en funcionamiento del corazón. En el capítulo 2 se presentan los principios básicos de bioelectromagnetismo, la aproximación cuasiestática y el principio de dualidad. En el capítulo 3 se explica la señal del ECG a partir del potencial de acción y los modelos más simples de actividad cardíaca. En el capítulo 4 estudiamos el modelo de fuente de dipolar único y deducimos la fórmula cerrada del potencial en una esfera conductora aislada. Revisamos los modelos de vectocardiografía de Clifford-Sharry y de Sameni.

En el capítulo 5 presentamos los modelos de conducción volumétrica: el volumen conductor, el modelo bidominio y el modelo monodominio. En

la sección 6 modelamos dos situaciones de conducción eléctrica anómala: la isquemia y la desfibrilación. En el capítulo 7 presentamos el problema directo y el problema inverso en geometrías sencillas como el anillo y en la esfera. Finalmente presentamos las conclusiones y perspectivas. En los apéndices presentamos temas de interés que complementan la idea principal de la tesis.

Capítulo 1

Funcionamiento eléctrico y fisiología del corazón

En esta sección explicamos brevemente el ciclo cardíaco del corazón y la actividad eléctrica. En el ciclo cardíaco tanto las aurículas como los ventrículos se transitan por las fases de sístole y diástole, permitiendo un bombeo adecuado de la sangre al cuerpo. El estudio de la actividad eléctrica y comportamiento del corazón permite diagnosticar enfermedades.

1.1. Fisiología del corazón

El corazón es un órgano del tamaño aproximado de un puño. Está compuesto de tejido muscular y bombea sangre a todo el cuerpo. La sangre se transporta a todo el cuerpo a través de los vasos sanguíneos, unos tubos llamados arterias y venas, (ver [36](#)). Cada ciclo cardíaco dura 800 *ms*, consta de una sístole y una diástole auricular, y una sístole y una diástole ventricular. Durante el ciclo cardíaco las presiones en las aurículas o ventrículos aumentan y disminuyen respectivamente, lo que produce que la sangre fluya de donde hay mayor presión a donde hay menor presión. Se divide en dos fases:

Diástole o relajación: Es la primera fase del ciclo cardíaco, donde la sangre fluye de las venas a las aurículas por la diferencia de presión, posteriormente conforme se llenan las aurículas la presión aumenta y la sangre se mueve pasivamente a los ventrículos. Una vez los ventrículos están casi llenos, aún fluye sangre hacia corazón entrando directamente

desde las venas durante esta etapa llamado **diástasis**. La última etapa es la **sístole auricular**, en la cual es caracterizada por terminar de llenar el ventrículo, la aurícula se contrae y aumenta su presión eyectando el volumen residual de sangre hacia el ventrículo, aproximadamente 20 % del volumen ventricular. Al final de esta fase, la presión del ventrículo se hace mayor que la de la aurícula y se cierran las válvulas mitral y tricúspide.

Sístole o contracción: Es la segunda fase donde produce una contracción isovolumétrica de los ventrículos, en el cual es caracterizada porque la presión en el ventrículo se hace mayor que la presión en las arterias aorta y pulmonar, en este momento se abren las válvulas semilunares y la sangre es expulsada del corazón. Es importante notar que aunque la presión en el ventrículo izquierdo es mayor que la del ventrículo derecho, ambos ventrículos expelen el mismo volumen de sangre, sin cambios de volumen. El volumen de los ventrículos se mantiene constante.

1.2. Actividad eléctrica

El Electrocardiograma (ECG) consiste en estudiar las señales eléctricas en puntos específicos del torso humano con el fin de evaluar la condición eléctrica del corazón. En el ECG de una persona con arritmia presenta un ritmo anormal del corazón comparado con una persona sana. Una persona con arritmia puede presentar síntomas tales como debilidad, fatiga, palpitaciones, presión baja, mareos o desmayos.

El funcionamiento eléctrico del corazón se puede resumir como sigue: el corazón es una bomba peristáltica que funciona con base a impulsos eléctricos generados a partir de la diferencia de los potenciales entre el interior y el exterior de las células cardíacas, generadas por gradientes químicos, principalmente de sodio, potasio y calcio. Estos impulsos eléctricos se comunican con las células vecinas mediante canales llamados uniones de brecha (gap junctions), generando así corrientes.

Los impulsos eléctricos se originan en el nódulo sinoatrial o nódulo sinusal (SA) de manera regular de 60 a 100 veces por minuto en condiciones normales. El estímulo viaja hasta el nódulo aurículoventricular (también llamado nódulo AV), ubicado entre las aurículas y los ventrículos. En el nódulo AV, los impulsos se retrasan durante un breve instante, lo cual permite que las

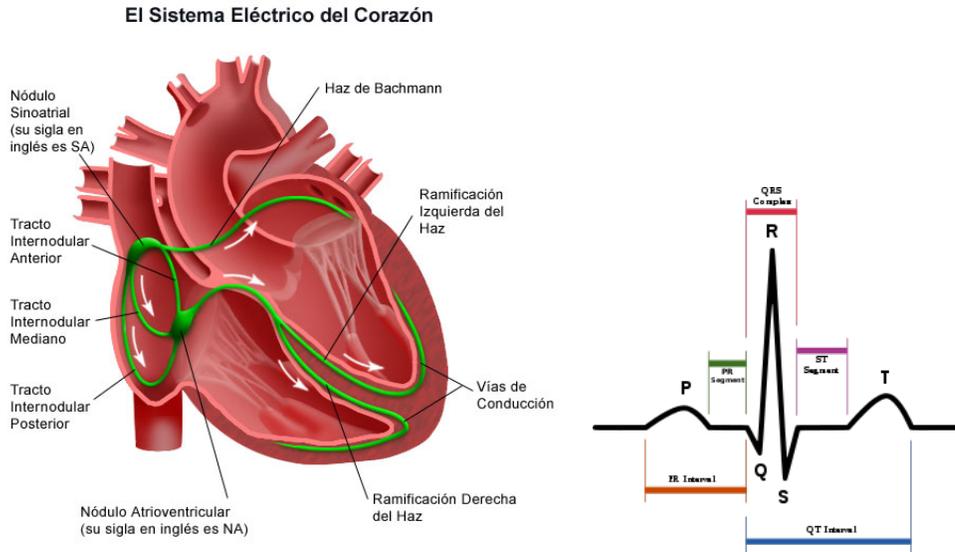


Figura 1.1: (a) El corazón, [25]. (b) Electrocardiograma, [30].

aurículas se contraigan una fracción de segundo antes que los ventrículos. La sangre de las aurículas pasa a los ventrículos antes de que estos se contraigan. Luego de pasar por el nódulo AV, la corriente eléctrica continúa hacia abajo a través de un canal de conducción llamado el haz de His hasta llegar a los ventrículos. El haz de His se divide en la rama derecha y en la rama izquierda, para llevar el estímulo eléctrico a los ventrículos derecho e izquierdo. Cualquier disfunción puede hacer que el ritmo normal pueda alterarse dando origen a arritmias cardíacas.

Capítulo 2

Bioelectromagnetismo

En este capítulo revisamos las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico y magnético en medios dieléctricos. Revisamos el concepto de polarización de un material y como las ecuaciones en el vacío se modifican en medios materiales, los campos eléctrico y magnético \mathbf{E} , \mathbf{B} se transforman en el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la magnetización \mathbf{H} . Sin embargo la teoría en medios dieléctricos, que es la que se enseña en la mayoría de los cursos de Electromagnetismo no es la más apropiada para describir procesos eléctricos y magnéticos en fluidos y tejidos biológicos. Esto es debido a que el origen de los campos son fuentes de corrientes en vez de fuentes de carga. Explicamos este mecanismo mediante el concepto de corrientes óhmicas y corrientes impresas, así de cómo se originan por el movimiento de iones, en respuesta a gradientes de concentraciones o por arrastre de fluidos. A nivel de situaciones que no son extremas en el análisis de las señales eléctricas del corazón, los campos magnéticos pueden despreciarse, lo cual se conoce como la aproximación cuasiestática, en la cual el campo eléctrico se deriva a partir de un potencial, el cual se liga a las fuentes de corriente mediante la ley de Ohm.

Todo esto se resume en el **principio de dualidad** resumido en el Cuadro [2.1](#). La aproximación cuasiestática, la ley de Ohm y la desagregación de fuentes en medios biológicos en corrientes óhmicas y corrientes impresas, nos permite hacer la analogía de las fuentes de carga con fuentes de corriente, identificando la constante dieléctrica de los materiales con la conductividad, y con ello podemos usar la teoría de la electrostática con confianza en la modelación de la actividad cardíaca.

2.1. Medios dieléctricos

Las ecuaciones de Maxwell en un medio material son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ son el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la magnetización \mathbf{H} , respectivamente. Los parámetros ϵ , μ , la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, son cantidades tensoriales en un medio anisotrópico y se reducen a escalares en un medio isótropo.

En un material dieléctrico la polarización es inducida por el campo eléctrico \mathbf{E} . Denotamos por \mathbf{P} la densidad dipolar volumétrica inducida por el campo eléctrico \mathbf{E} . Ambos están relacionados por el tensor de susceptibilidad χ

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.5)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío. Para un medio isótropico y homogéneo por regiones, χ será un escalar constante en cada región. Se define el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.6)$$

En el caso isótropico homogéneo por regiones, sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.6), se tiene que:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E} = K \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

donde $K = 1 + \chi$ también llamada constante dieléctrica del material (para una región particular) y

$$\epsilon = K \epsilon_0 \quad (2.8)$$

es la permitividad del dieléctrico.

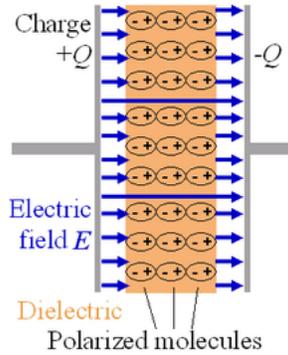


Figura 2.1: Polarización de un material dieléctrico, [31].

La ecuación de Maxwell (2.1) define la carga neta en el volumen V de material dieléctrico,

$$\int_V \rho = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

o forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2.9)$$

o bien en términos del campo eléctrico aplicado \mathbf{E}

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (2.10)$$

2.2. Medios biológicos

En la modelación de la actividad eléctrica del corazón, es importante saber que las variaciones temporales del campo magnético (inducción magnética) $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ pueden despreciarse. Por ejemplo, en situaciones normales la frecuencias del campo magnético van de 10 a 100 KHz, y el error en la fórmula para la magnitud del campo eléctrico E_{err} sin considerar la inducción magnética en relación a la magnitud de campo exacto ha sido estimado [1] como $E_{err}/E < 10^{-7}$. Por otro lado el efecto de los campos magnéticos en el movimiento de cargas libres de origen fisiológico, dada por la fuerza de Lorenz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.11)$$

son también despreciables en el rango de magnitudes de velocidades $u \sim 1\text{m/s}$, y de campos $B \sim 100\text{fT}$, $E \sim 1\text{V/m}$ [1], ya que en ese caso $uB/E \sim 10^{-13}$.

En lo sucesivo vamos entonces a despreciar del todo el efecto de los campos magnéticos en el contexto de la modelación eléctrica del corazón. Esto se conoce como la **aproximación cuasiestática**. En este caso la ecuación (2.2) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.12)$$

por lo que \mathbf{E} puede obtenerse a partir de una función de potencial escalar, es decir,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (2.13)$$

y la fuerza de Lorenz se reduce a la fuerza de Coulomb,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Es conveniente eliminar el campo \mathbf{H} tomando la divergencia de la ecuación (2.4), se obtiene la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{tot} = 0, \quad (2.15)$$

donde la corriente total $\mathbf{J}^{tot} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$. La ecuación (2.15) también representa el principio de conservación de la carga, es decir, de la ecuación (2.15) y (2.1) se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.16)$$

En el caso de medios fisiológicos, tales como el medio extracelular o intracelular de las células cardíacas, el origen de las corrientes es múltiple. Entre las principales fuentes podemos distinguir:

1. Las corrientes óhmicas, \mathbf{J}^{ohm} , que son de tipo conservativo (en la aproximación cuasiestática) y se relacionan con el campo eléctrico a través de la ley de Ohm,

$$\mathbf{J}^{ohm} = \sigma\mathbf{E}, \quad (2.17)$$

donde σ es el tensor de conductividad.

2. Las corrientes difusivas, que responden a gradientes de concentración iónica,

$$\mathbf{J}^{dif} = -F \sum_i z_i \mathbf{D}_i \nabla c_i, \quad (2.18)$$

donde F es la constante de Faraday, \mathbf{D}_i y z_i son el coeficiente de difusión, z_i la valencia y c_i la concentración de la i -ésima especie iónica.

3. Las corrientes de advección,

$$\mathbf{J}^{adv} = \mathbf{u}F \sum_i z_i c_i, \quad (2.19)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad dentro del fluido.

Con esta desagregación de las fuentes de corrientes, la corriente total se puede escribir como

$$\mathbf{J}^{tot} = \mathbf{J}^{ohm} + \mathbf{J}^{dif} + \mathbf{J}^{adv} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Las corrientes que no son óhmicas se denominan **corrientes impresas**,

$$\mathbf{J}^{impr} = \mathbf{J}^{dif} + \mathbf{J}^{adv} + \mathbf{J}^{ATP}$$

donde \mathbf{J}^{ATP} representa las corrientes asociadas directamente al consumo de energía del ATP. Por ejemplo, el potencial de membrana se mantiene gracias a la contracorriente que se genera vía el consumo de ATP, que de otra manera, la diferencia de concentraciones de potasio y sodio en los medios extracelular e intracelular generaría una corriente que tendería a equilibrar la diferencia de potenciales dando un potencial de membrana cero, lo cual no es así.

En resumen la ecuación (2.15) se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{ohm} = -\nabla \cdot \mathbf{J}^{impr} \equiv I_v. \quad (2.21)$$

Así, el negativo de la divergencia de las corrientes impresas se pueden interpretar como **fuentes de corriente** I_v . En el caso más sencillo de conductividad constante, esta ecuación puede escribirse como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{I_v}{\sigma}. \quad (2.22)$$

Que es formalmente idéntica a la ecuación para el campo eléctrico y fuentes volumétrica de carga (2.10).

2.3. Principio de dualidad

La aproximación cuasiestática y la desagregación del origen de las corrientes fisiológicas en corrientes óhmicas y corrientes impresas nos permite

Electroestática	Bioestática
$\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$\mathbf{E} = -\nabla\phi$
$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$
$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\nabla^2\phi = -\frac{I_v}{\sigma}$
ϵ	σ
ρ	I_v

Cuadro 2.1: Principio de dualidad

establecer el principio de dualidad de la electrostática de materiales dieléctricos y la aproximación cuasiestática (que llamaremos bioestática) en medios fisiológicos que se resumen en el Cuadro [2.1](#).

Este principio de dualidad no implica equivalencia ya que mientras que la conductividad σ puede tomar cualquier valor positivo, cuando es un escalar, la permitividad ϵ está acotada por $k\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$, además de que la interpretación física es distinta. Sin embargo, matemáticamente es muy útil pues se pueden usar las mismas técnicas matemáticas, bien conocidas, de la electrostática.

2.4. Modelos de fuentes de corriente

Un aspecto importante en la modelación de la actividad eléctrica del corazón es proponer modelos de fuentes de corriente. Estos modelos emplean corrientes conservativas que satisfacen la ley de Ohm ([2.17](#)).

Monopolo. El potencial y el campo eléctrico de un monopolo de corriente en un medio homogéneo infinito de conductividad homogénea σ es

$$\mathbf{J} = \frac{I_0}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad \phi = \frac{I_0}{4\pi\sigma r}$$

donde r es la coordenada radial y $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ es el vector unitario radial. Nótese que el potencial y la corriente están relacionados por $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\nabla\phi$.

La fuente de corriente monopolar tiene la propiedad importante de que el flujo a través de cualquier esfera concéntrica S_r es constante. En efecto sobre una tal esfera el flujo es

$$\int_{S_r} \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_r dS = \int_{S_r} \frac{I_0}{4\pi r^2} dS = \frac{I_0}{4\pi r^2} \int_{S_r} dS = I_0$$

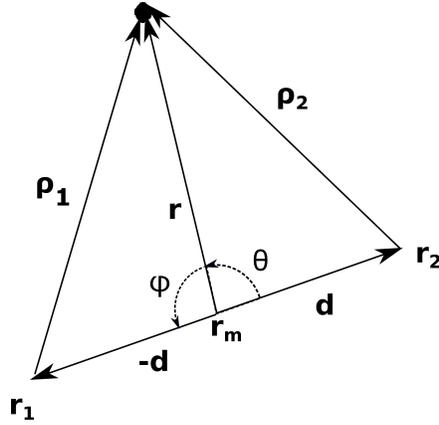


Figura 2.2: Dipolo de corriente finito.

así que I_0 se interpreta como la intensidad el flujo de corriente de una fuente monopolar.

Dipolo finito. Este es la superposición de dos fuentes de corriente monopolares de intensidades de flujo de signo contrario $\pm I_0$ separados una distancia d . Si ρ_1 es la distancia de un punto arbitrario al monopolo de intensidad $-I_0$ y ρ_2 es la distancia al monopolo de intensidad I_0 , el potencial del dipolo es

$$\phi = -\frac{I_0}{4\pi\sigma\rho_1} + \frac{I_0}{4\pi\sigma\rho_2}. \quad (2.23)$$

Se denomina dipolo finito para diferenciarlo del potencial que se obtiene en el límite cuando $d \rightarrow 0$, $I_0 \rightarrow \infty$ pero con $I_0 d \rightarrow p$ un valor finito, al cual llamamos fuente puntual dipolar de corriente o simplemente dipolo puntual. En seguida desarrollamos una expresión para el potencial de dipolo puntual. Sean

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{r}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1),$$

entonces (ver Figura 2.2)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_m - \mathbf{d}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_m + \mathbf{d}.$$

Por el teorema del coseno

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi, \\ \rho_2^2 &= r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta, \end{aligned}$$

luego con $s = d/r$ y usando la función generadora de los polinomios de Legendre P_n

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos \varphi), \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos \theta).\end{aligned}$$

De la Figura 2.2 se sigue que $d = a/2$, es la semidistancia entre los dipolos y $\varphi + \theta = \pi$, luego $\cos \varphi = -\cos \theta$ y de la paridad de los polinomios de Legendre $P_n(\cos \varphi) = P_n(-\cos \theta) = (-1)^n P_n(\cos \theta)$. Introduzcamos $p = I_0 a$, la intensidad del dipolo, entonces el potencial de un dipolo finito (2.23) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{I_0}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \\ &= \frac{I_0}{4\pi\sigma} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n (P_n(\cos \theta) - P_n(\cos \varphi)) \\ &= \frac{I_0}{4\pi\sigma} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n (1 - (-1)^n) P_n(\cos \theta) \\ &= \frac{I_0}{2\pi\sigma} \frac{1}{r} \sum_{n=1, n \text{ impar}}^{\infty} \left(\frac{a}{2r}\right)^n P_n(\cos \theta) \\ &= \frac{I_0}{2\pi\sigma} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2r}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{I_0}{2\pi\sigma} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2r}\right) \left(\frac{a}{2r}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos \theta) \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2r}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos \theta).\end{aligned}$$

Explícitamente

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2} \left(\frac{a}{2r}\right)^2 P_3(\cos \theta) + \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2} \left(\frac{a}{2r}\right)^4 P_5(\cos \theta) + \dots \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^2} \cos \theta + \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \\ &\quad \frac{p}{4\pi\sigma} \frac{1}{r^6} \left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{8} (63 \cos^5 \theta - 30 \cos^3 \theta + 3) + \dots\end{aligned}\tag{2.24}$$

Dipolo puntual. Si hacemos tender a a cero en tanto que I_0 tienda a infinito pero con $I_0 a$ tendiendo a la cantidad finita p , en la expresión (2.24) sólo el primer término sobrevive en el límite con lo que obtenemos el potencial de un dipolo puntual ideal

$$\phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (2.25)$$

Es conveniente expresar el potencial en forma invariante, suponiendo que el dipolo puntual está situado en el punto \mathbf{r}_m como

$$\phi_{dip} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (2.26)$$

donde $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|$.

Capítulo 3

Fundamentos de electrocardiografía

En esta sección estudiamos los mecanismos principales de la actividad eléctrica a nivel celular mediante el transporte iónico, entre el medio extracelular e intracelular a través de los canales iónicos. El concepto de balance electroquímico basado en la ley de Nerst que determina la diferencia de concentraciones extracelular y intracelular de un ión particular, y más generalmente la ley de Goldman-Hodgkin-Katz que determina las concentraciones de equilibrio para varios iones. Los iones más importantes que participan en la actividad de las células excitables, particularmente del corazón y las neuronas, son el Potasio, Sodio, Cloro y Calcio. El potencial de membrana se introduce como la diferencia del potencial intracelular menos el potencial extracelular, es un concepto muy importante y permite explicar el potencial con base en el electrocardiograma.

Para el modelo bidominio que introduciremos más adelante el potencial de membrana es también importante.

3.1. Membrana celular

Los canales iónicos son un tipo de proteína transmembrana que permite el paso de iones específicos como los iones de sodio, potasio y cloro, a través de la membrana celular. Estos son poros o canales macromoleculares rellenos de agua con un sistema de compuertas. En la Figura [3.1](#) se ilustra la manera como se constituye una membrana celular a partir de dos capas de

fosfolípidos.

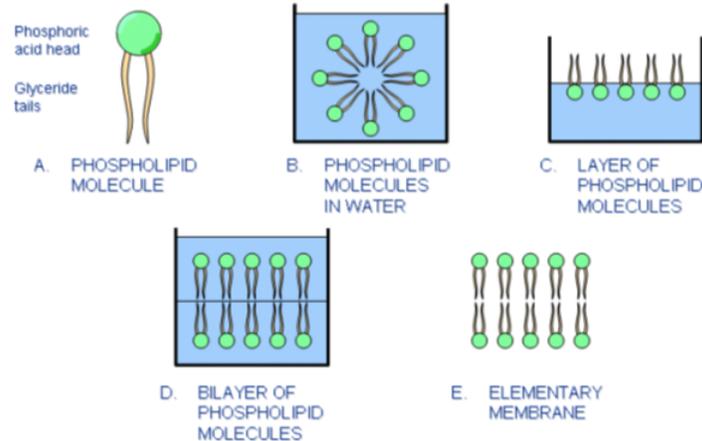


Figura 3.1: Construcción de una membrana celular, [13].

La célula está encerrada por una membrana celular cuyo grosor es de aproximadamente 7.5 a 10.0 nm. Su estructura y composición se asemejan a una película de burbujas de jabón (Thompson, 1985), ya que uno de sus principales componentes, los ácidos grasos, tiene esa apariencia. Los ácidos grasos que constituyen la mayor parte de la membrana celular se denominan fosfoglicéridos. Los fosfoglicéridos tienen dos partes diferentes: La cabeza de esta molécula es hidrofílica (atraída por el agua) y tienen colas que consisten en cadenas de hidrocarburos que son hidrófobas (repelidas por el agua), como se muestra en la Figura 3.1.

La concentración de iones de sodio Na^+ es alrededor de 10 veces mayor fuera de la membrana que en el interior, mientras que la concentración de iones de potasio (K^+) es aproximadamente 30 veces mayor en el interior en comparación con el exterior. Cuando se estimula la membrana para que el potencial transmembrana se eleve aproximadamente 20 mV y alcance el umbral, es decir, cuando el voltaje de la membrana cambia de -70 mV a aproximadamente -50 mV, nos indica que hay un fuerte gradiente electroquímico que impulsa a las dos sustancias a moverse: el sodio hacia adentro y el potasio hacia afuera de la célula.

La bomba $Na - K$ contribuye al equilibrar el potencial de membrana y mantener el potencial de reposo (es decir, las concentraciones constantes a ambos lados) cuando el impulso nervioso ya se ha transmitido. La duración

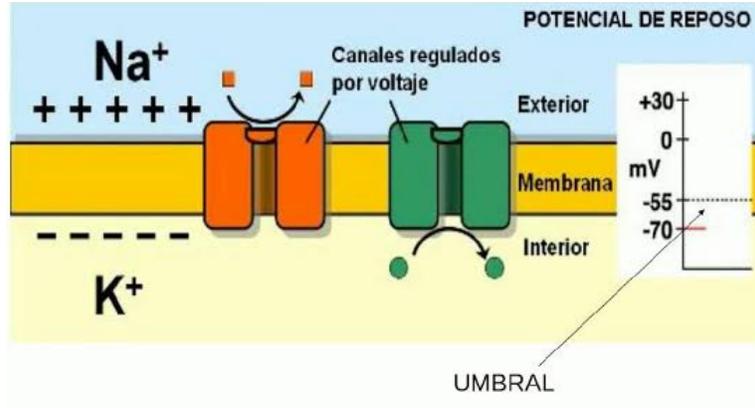


Figura 3.2: Canales iónicos, [32]

del impulso nervioso es de alrededor de 1 ms y hace que los canales de Na^+ se habrán generando un desequilibrio en la membrana y despolarizándola, debido a la entrada de sodio a favor de gradiente se abran generando un desequilibrio en la membrana y despolarizándola, debido a la entrada de sodio a favor de gradiente. Cuando el impulso ha pasado, los canales de Na^+ se cierran y se abren los de K^+ . El esquema se muestra en la Figura [3.2].

Este mecanismo de depolarización con el paso de iones Na^+ y K^+ y de repolarización en el que se recobra el potencial base constituye el **Potencial de Acción** (PA). La forma típica de la señal eléctrica observada en el PA será discutida con más detalle en la Sección [3.6].

3.2. Corrientes de arrastre

Los iones a los que haremos referencia se encuentran en los espacios intracelulares y extracelulares en tejidos eléctricamente excitables. Debido a sus cargas, estos iones están sujetos a las fuerzas del campo eléctrico. El flujo (es decir, flujo por unidad de área por unidad de tiempo) que resulta de la presencia de un campo eléctrico depende de la resistencia eléctrica, que, a su vez, es una función de la movilidad iónica de las especies iónicas. Este último está definido por u_k , la velocidad que se lograría con el k -ésimo ión en un campo eléctrico unitario. Entonces el flujo iónico viene dado por

$$\mathbf{J}_{ke} = -u_k \frac{z_k}{|z_k|} c_k \nabla \Phi \quad (3.1)$$

donde \mathbf{J}_{ke} es flujo iónico (debido a campo eléctrico) [mol / (cm s)], u_k es movilidad iónica [cm / (V s)], z_k es balance del ion, c_k es la concentración iónica [mol / cm³] y

1. $\frac{z_k}{|z_k|}$ = el signo de la fuerza (positivo para cationes y negativo para aniones).
2. $-u_k \frac{z_k}{|z_k|}$ = la velocidad media alcanzada por estos iones en un campo eléctrico unitario (según la definición de u_k),

el subíndice k denota el k -ésimo ión.

3.3. Corrientes de difusión

La primera ley de Fick relaciona el flujo de iones debido a la difusión es a lo largo del gradiente de concentración. El flujo de las partículas va de regiones de alta concentración a regiones de baja concentración hasta obtener una distribución uniforme, este proceso se llama difusión. Esto se puede expresar mediante la ley de Fick

$$\mathbf{J}_{kD} = -D_k \nabla c_k \quad (3.2)$$

donde

1. \mathbf{J}_{kD} = flujo iónico (debido a la difusión) [mol / (cm * s)]
2. D_k = constante de Fick (constante de difusión) [cm/s]
3. c_k = concentración de iones [mol/cm³].

Luego afirma que las corrientes se dan en el sentido contrario del gradiente de concentración. La constante de difusión fue deducida por Einstein con base a un modelo estadístico y viene dada por

$$D_k = \frac{u_k RT}{|z_k| F} \quad (3.3)$$

donde

1. T = temperatura absoluta [K°]
2. R = constante de los gases [8.314 J / (mol K)].
3. F es la constante de Faraday.

3.4. La ecuación de Nernst-Planck

La ecuación de Nernst-Planck es una ecuación de conservación de masa utilizada para describir el movimiento de una especie química cargada en un medio fluido. Describe el flujo de ión k -ésimo bajo la influencia de un gradiente de concentración iónica y al campo eléctrico de las ecuaciones (3.1) y (3.8). El flujo iónico total del k -ésimo ión, \mathbf{J}_k , viene dado por la suma de los flujos iónicos,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_k &= \mathbf{J}_{kD} + \mathbf{J}_{ke} \\ &= -D_k \nabla c_k - u_k \frac{z_k}{|z_k|} c_k \nabla \Phi\end{aligned}\quad (3.4)$$

sustituyendo u_k de la ecuación (3.3) se tiene que

$$\mathbf{J}_k = -D_k \left(\nabla c_k + \frac{c_k z_k F}{RT} \nabla \Phi \right), \quad (3.5)$$

que se conoce como la ecuación de Nernst-Planck y sus unidades se expresan como $[\text{mol}/(\text{cm}^*\text{s})]$.

La ecuación (3.5) se puede convertir en una densidad de corriente eléctrica multiplicando por la constante de Faraday y por z_k , la valencia del ión k y llegamos a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{J}_k = -D_k z_k F \left(\nabla c_k + \frac{c_k z_k F}{RT} \nabla \Phi \right) \quad (3.6)$$

donde \mathbf{J}_k es la densidad de corriente eléctrica debido al k -ésimo ión $[\text{C} / (\text{s cm})] = [\text{A} / \text{cm}]$.

3.5. La ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz

La ecuación de Nernst solo calcula el potencial de difusión para un ión en particular, es decir, se asume que en el medio externo sólo existe un tipo de iones. La ecuación Goldman-Hodgkin-Katz calcula el potencial de la membrana en el interior de la célula cuando participan dos iones positivos (K^+ y Na^+) y un ión negativo (Cl^-). El potencial de membrana se define como:

$$V_m = V_i - V_e \quad (3.7)$$

en donde V_i es el potencial en el interior y V_e es el potencial en el exterior.

La relación entre el voltaje de membrana y el flujo iónico es de gran importancia. La investigación sobre esta relación hace varias suposiciones: primero, que la membrana biológica es homogénea y neutra; y segundo, que las regiones intracelular y extracelular son completamente uniformes e inmutables. Tal modelo se describe como un modelo de electrodifusión. Entre estos modelos está el de Goldman–Hodgkin–Katz.

Dado que el grosor de una membrana biológica es pequeño en comparación con su extensión lateral, podemos considerar que la membrana es plana. El modelo Goldman-Hodgkin-Katz supone que la membrana es uniforme, plana e infinita en su extensión lateral. Elegimos el eje x normal a la membrana con su origen en la interfaz de la membrana con la región extracelular, y si el grosor de la membrana es h , entonces $x = h$ define la interfaz de la membrana con el espacio intracelular [13].

La ecuación (3.5) puede entonces reescribirse como

$$J_k = -D_k \left(\frac{dc_k}{dx} + \frac{c_k z_k F}{RT} \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad (3.8)$$

para el k -ésimo flujo iónico. Despejando $\frac{dc_k}{dx}$ y sustituyendo $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{V_m}{h}$ en la ecuación (3.8) se tiene

$$\frac{dc_k}{dx} = -\frac{J_k}{D_k} - \frac{V_m z_k F}{RT h} c_k. \quad (3.9)$$

Despejar dx de la ecuación (3.9), se obtiene la siguiente ecuación

$$dx = \frac{dc_k^m}{-\frac{J_k}{D_k} - \frac{V_m z_k F}{RT h} c_k}, \quad (3.10)$$

donde $c_k^m(x)$ es el potencial del k -ésimo ión como función de la profundidad en la membrana x . Integrando la ecuación (3.10) de $x = 0$ a $x = h$ dentro de la membrana, se tiene

$$h = -\frac{RT h}{V_m z_k F} \ln \left(\frac{\frac{J_k}{D_k} + \frac{V_m z_k F}{RT h} c_k^h}{\frac{J_k}{D_k} + \frac{V_m z_k F}{RT h} c_k^0} \right) \quad (3.11)$$

donde c_k^h es la concentración de ión k^{th} en $x = h$ y c_k^0 es la concentración de ión k^{th} en $x = 0$.

De la ecuación (3.11) se puede resolver para J_k , entonces tenemos

$$J_k = -\frac{D_k V_m z_k F}{RT h} \frac{c_k^h - e^{-\frac{V_m z_k F}{RT}}}{1 - c_k^0 e^{-\frac{V_m z_k F}{RT}}}, \quad (3.12)$$

las concentraciones del k -ésimo ión en la ecuación son aquellas dentro de la membrana.

Cuando $x = 0$ está en la superficie extracelular y en $x = h$ la interfaz intracelular, entonces

$$\begin{aligned} c_k^h &= \beta_k c_i \\ c_k^0 &= \beta_k c_0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde β es el coeficiente de partición, c_i es concentración iónica intracelular medible y c_0 es concentración iónica extracelular medible.

La permeabilidad P_k se define como

$$P_k = \frac{D_k \beta_k}{h}, \quad (3.14)$$

entonces sustituyendo las ecuaciones (3.14) y (3.13) en la ecuación, y multiplicando el flujo iónico j_k de la ecuación (3.12) por la constante y la valencia de Faraday. Se tiene

$$J_k = -\frac{P_k V_m z_k^2 F^2}{RT} \frac{c_k^h - e^{-\frac{V_m z_k F}{RT}}}{1 - c_k^0 e^{-\frac{V_m z_k F}{RT}}}. \quad (3.15)$$

Cuando se considera el flujo de iones a través de la membrana en el estado de reposo, la suma de todas las corrientes a través de la membrana es necesariamente cero

$$J_k + J_{Na} + J_{Cl} = 0. \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.16) en la ecuación (3.15) y agregando los índices apropiados y observando que potasio y sodio la valencia $z = +1$ mientras que para el cloro $z = -1$, y cancelando la constante $\frac{z_k F}{RT}$ obtenemos:

$$-P_k \frac{c_{i,k} - c_{0,k} e^{-\frac{V_m F}{RT}}}{1 - e^{-\frac{V_m F}{RT}}} - P_{Na} \frac{c_{i,Na} - c_{0,Na} e^{-\frac{V_m F}{RT}}}{1 - e^{-\frac{V_m F}{RT}}} - P_{Cl} \frac{c_{i,Cl} - c_{0,Cl} e^{-\frac{V_m F}{RT}}}{1 - e^{-\frac{V_m F}{RT}}}. \quad (3.17)$$

El denominador $1 - e^{-\frac{V_m F}{RT}} \neq 0$ de la ecuación (3.17), entonces tenemos

$$P_k \left(c_{i,k} - c_{0,k} e^{-\frac{V_m F}{RT}} \right) + P_{Na} \left(c_{i,Na} - c_{0,Na} e^{-\frac{V_m F}{RT}} \right) + P_{Cl} \left(c_{i,Cl} - c_{0,Cl} e^{-\frac{V_m F}{RT}} \right) = 0, \quad (3.18)$$

de aquí se tiene

$$P_k c_{i,k} + P_{Na} c_{i,Na} + P_{Cl} c_{i,Cl} = -\frac{V_m F}{RT} (P_k c_{0,k} + P_{Na} c_{0,Na} + P_{Cl} c_{0,Cl}). \quad (3.19)$$

Entonces despejando de la ecuación (3.19) se obtiene la ecuación de Goldman-Hodgkin-Katz

$$V_m = -\frac{RT}{F} \ln \left(\frac{P_k c_{i,k} + P_{Na} c_{i,Na} + P_{Cl} c_{i,Cl}}{P_k c_{0,k} + P_{Na} c_{0,Na} + P_{Cl} c_{0,Cl}} \right). \quad (3.20)$$

3.6. El potencial de acción

Potencial de membrana es la diferencia de potencial a ambos lados de una membrana que separa dos soluciones de diferente concentración de iones [13]. El potencial de membrana se define como:

$$\Phi_m = \Phi_i - \Phi_e \quad (3.21)$$

donde Φ_i potencial interior y Φ_e potencial extracelular. Su intervalo del potencial de membrana normalmente oscila entre -60 mV y -70 mV. Las membranas de las células nerviosas en particular, mantienen un pequeño voltaje o “potencial” a través de la membrana, en su estado normal o de reposo, donde Φ_k es el voltaje de equilibrio para el ión k -ésimo a través de la membrana Φ_i .

- (a) Se denomina potencial de membrana en reposo, cuando $\Phi_m = \Phi_k$. Bajo esta condición, no existe flujo neto de iones de potasio a través de la membrana.
- (b) Se denomina depolarización de la membrana, cuando $\Phi_m < \Phi_k$. Entonces el potencial dentro de la membrana se vuelve menos negativa, una condición conocida como despolarización de la membrana y se produce un flujo de salida de potasio (de un potencial electroquímico más alto a uno más bajo).

- (c) Cuando el potencial dentro de la membrana se vuelve más negativo que el estado de reposo, es decir $\Phi_m > \Phi_k$, se dice que la membrana está hiperpolarizada. En este caso los iones fluirán hacia adentro (nuevamente desde el potencial electroquímico más alto al más bajo).

Un modelo del potencial de membrana, propuesto por Eccles (1968), se muestra en la Figura 3.3. El potencial aplicado dentro del axón se puede simular con tres baterías intercambiables que se pueden colocar entre el intracelular y espacios extracelulares, como se muestra en la siguiente Figura 3.3 donde $V_k = \Phi_k$ y $\Phi_m = V_m$. En la batería A, se supone que la fuerza electromotriz (fem) de la batería es $V_k = V_m$, en la batería B su voltaje es menor V_k y en la batería C el potencial dentro de la membrana se vuelva más negativo. La Figura 3.3 representa las tres situaciones descritas en los incisos (a), (b) y (c) respectivamente.

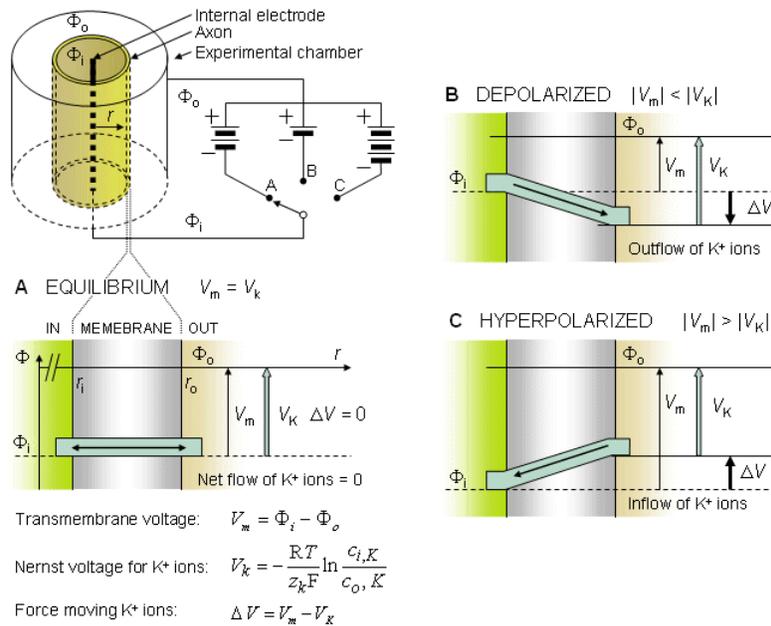


Figura 3.3: El potencial aplicado dentro del axón, [13].

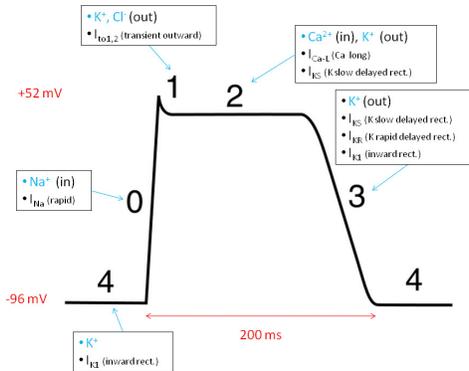


Figura 3.4: El potencial de acción cardíaco (PA cardíaco), [26].

3.7. La señal del electrocardiograma

Las células del músculo cardíaco pertenecen a una clase de células conocidas como células excitables, que tienen la capacidad de responder activamente a un estímulo eléctrico. Las células excitables son aquellas que son capaces de producir el potencial de acción. El ciclo completo de depolarización y repolarización se denomina potencial de acción, está dividido en 5 fases, son enumeradas del 0 al 4, como se muestra en la Figura 3.4.

Las 5 fases

Fase 0: Es la fase de despolarización rápida. Se debe a la apertura de los canales rápidos de N_a^+ , lo que genera un rápido incremento de la conductancia de la membrana para el Na^+ (gNa^+) y por ello una rápida entrada de iones N_a^+ (I_{N_a}) hacia el interior celular.

Fase 1: Es la fase de repolarización rápida. Es causa de la activación de la corriente transitoria (I_{to}). Esta corriente K^+ de rápida activación e inactivación no se presenta en todas las células cardíacas; solo en aquellos tejidos en los que están presentes generan un PA.

Fase 2: Se mantiene en equilibrio entre el movimiento hacia el interior del Ca^{2+} (I_{Ca}) a través de los canales iónicos para el calcio de tipo L y el movimiento hacia el exterior de K^+ a través de los canales lentos de potasio I_{Ks} .

Fase 3: Repolarización rápida del PA cardíaco, los canales voltaje-dependientes

para el calcio de tipo L se cierran, mientras que los canales lentos del potasio (I_{Ks}) permanecen abiertos.

Fase 4: Es el potencial de reposo de la membrana. La célula permanece en este periodo hasta que es activada por un estímulo eléctrico, que proviene normalmente una célula adyacente. Esta fase del PA es asociada con la diástole de la cámara del corazón.

3.8. A nivel tejido

En esta sección explicaremos la activación eléctrica del corazón a nivel tejido. Una vez que la activación del corazón ha comenzado en el nodo sinoauricular (marcapasos del corazón), se extiende a lo largo de las paredes auriculares. Se considera el corazón como un dipolo y se representa con una flecha gruesa como se muestra en la Figura [4.4](#).

La proyección de este vector resultante en cada una de las tres derivaciones leads de Einthoven es positiva, y por lo tanto, las señales medidas también son positivas.

La descripción del ECG consta de los siguientes elementos:

1. Nodo sinoauricular(nodo SA).
2. Nodo auriculoventricular(AV).
3. Sistema de His–Purkinje.

El nodo sinoauricular. El estímulo sinoauricular depolariza las aurículas, comenzando por la parte lateral derecha de la aurícula derecha y siguiendo un recorrido en dirección contraria a las agujas del reloj, despolarizando primero el septum interauricular y finalizando en la aurícula izquierda. Una vez que la depolarización se ha propagado sobre las paredes auriculares, llega al nodo AV, y se propaga lentamente en la parte superior del nodo.

El nodo auriculoventricular. Durante el paso por el nodo AV, la onda de activación eléctrica sufre una pausa de aproximadamente un décimo de segundo, que permite completar el llenado ventricular.

Sistema de His-Purkinje. Una vez que la activación ha alcanzado los ventrículos, continúa a lo largo de las fibras de Purkinje hasta las paredes internas de los ventrículos. La despolarización ventricular comienza primero desde el lado izquierdo del tabique interventricular y, por lo tanto, el dipolo resultante de este punto de activación septal apunta hacia la derecha. Muestra que esto causa una señal negativa en los cables I y II.

3.9. La señal del ECG

El primer electrocardiograma (ECG) humano se publicó en 1887 por Augustus D. Waller. Usó un electrómetro capilar para registrar el primer ECG humano. Waller mantuvo una gran familia de bulldogs, involucrando a su bulldog Jimmy de pie con sus patas en cubos de solución salina. Las soluciones de conducción en los cubos actuaron como electrodos y se conectaron a un dispositivo que registraba la diferencia de potencial eléctrico entre los dos electrodos. Se observó que la diferencia de potencial pulsaba al ritmo de los latidos del corazón de Jimmy.

El ECG es una señal que varía en el tiempo y refleja el flujo de la corriente iónica que hace que las fibras cardíacas se contraigan y luego se relajen.

Los latidos cardíacos quedan representados en el ECG normal por las diferentes oscilaciones de la línea basal en forma de ángulos, segmentos, ondas e intervalos, constituyendo una imagen característica que se repite con una frecuencia regular a lo largo de la tira de papel del ECG. En un ECG normal, cada complejo consta de una serie de deflexiones (ondas del ECG) que alternan con la línea basal. Realizando la lectura de izquierda a derecha, se distinguen la onda P, el segmento P-R, el complejo QRS, el segmento ST y finalmente la onda T.

El ECG se puede dividir en las siguientes secciones:

Onda P: Es la deflexión hacia arriba que aparece en el ECG. Una pequeña desviación de bajo voltaje lejos de la línea de base causada por la depolarización de los atrios antes de la contracción auricular a medida que el frente de onda de activación (depolarización) se propaga desde el nodo SA a través de los atrios.

Intervalo PQ: El tiempo entre el comienzo de la depolarización auricular y el comienzo de la depolarización ventricular.

Intervalo QT: El tiempo entre el inicio de la despolarización ventricular y el final de la repolarización ventricular. Los estudios clínicos han demostrado que el intervalo QT aumenta linealmente a medida que aumenta el intervalo RR. El intervalo QT prolongado se puede asociar con la repolarización ventricular retardada que puede causar taquiarritmias ventriculares que conducen a muerte súbita cardíaca.

Intervalo ST: El tiempo entre el final de la onda S y el comienzo de la onda T. Las amplitudes significativamente elevadas o deprimidas que se alejan de la línea de base a menudo se asocian con enfermedades cardíacas.

Onda T: Representa la repolarización de los ventrículos. Durante la formación del complejo QRS, generalmente también ocurre la repolarización auricular que no se registra en el ECG normal, ya que es tapado por el complejo QRS.

Capítulo 4

Modelos de vectocardiografía

En esta sección estudiaremos un modelo simplificado en el que el torso se representa por una esfera conductora y el corazón por un dipolo puntual en el centro de la esfera. Se supone que en un medio no conductor como el medio ambiente, la condición de frontera en la superficie de la esfera es Neumann homogénea.

Waller y Einthoven presentaron la muy poderosa simplificación de ver el corazón como un dipolo incrustado en un volumen conductor. La idea es basada en la suposición de que el cuerpo tiene propiedades de un volumen conductor, y que la fuentes de corriente eléctrica en el corazón puede ser visto como dipolos. Un conductor de volumen es simplemente un medio conductor tridimensional, mientras que un dipolo es un par de cargas eléctricas opuestas con igual magnitud $(-q, q)$, separadas por una pequeña distancia d . Un dipolo tiene solo dos cargas puntuales, pero varios arreglos de cargas múltiples o distribuciones de carga también pueden tener propiedades similares a un dipolo. Un dipolo genera un campo eléctrico, y en un conductor de volumen, este campo eléctrico conduce a corrientes en todo el medio. La fuerza de un dipolo, y la fuerza del campo eléctrico que genera, se caracteriza por el momento del dipolo, que es el producto de la carga en cada polo y la distancia entre los polos. El momento dipolar tiene una dirección asociada, que es la dirección del polo negativo al positivo. Denotando el momento dipolo por \mathbf{p} , tenemos

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \tag{4.1}$$

donde \mathbf{d} es el vector que apunta desde el polo negativo al positivo [7].

4.1. Las 12 derivaciones clásicas

El modelo del dipolo único debe entenderse como una fuente equivalente en el sentido del teorema de Gabor–Nelson. La descripción del vector cardíaco (dipolo) se resume en la Figura 4.4. La trayectoria seguida por el dipolo es el Vectocardiograma, y las señales en las derivaciones de Einthoven se entienden como las proyecciones del vector cardíaco en cada una de las derivaciones VI , VII y $VIII$.

Willem Einthoven modeló la actividad eléctrica del corazón. Para registrar el electrocardiograma humano, utilizó tres electrodos, unidos al brazo izquierdo y derecho y a la pierna izquierda.

Las primeras derivaciones fueron I , II y III conocidas como derivaciones de Einthoven, en cada una de ellas utiliza dos electrodos que registran la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos del triángulo. La notación para las derivadas ϕ_{LA} , ϕ_{RA} y ϕ_{LL} para el potencial en el brazo derecho, brazo izquierdo y la pierna izquierda, respectivamente, los leads son definidos por:

$$\begin{aligned} I &= \phi_{LA} - \phi_{RA}, \\ II &= \phi_{LL} - \phi_{RA}, \\ III &= \phi_{LL} - \phi_{LA}. \end{aligned}$$

A partir de estos tres puntos se obtiene un punto imaginario V (el baricentro del triángulo, denominado el terminal central de Wilson), localizado en el centro del pecho, por encima del corazón. Estas tres derivaciones periféricas son bipolares, es decir, tienen un polo positivo y un polo negativo.

Las derivaciones monopolares miden la diferencia de potencial entre el punto imaginario V y cada uno de los electrodos. La notación para las derivaciones monopolares, VR , VL y VF .

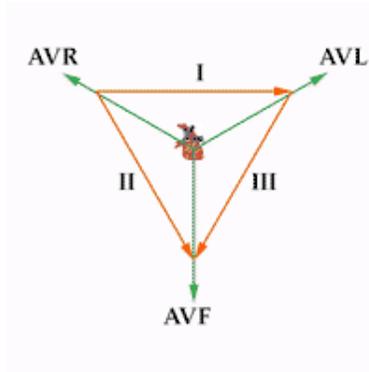


Figura 4.1: Triángulo de Einthoven, formado por las derivaciones de Einthoven y monopulares, [23].

Estas derivaciones son

aVL: potencial absoluto del brazo izquierdo. Su vector está en dirección a -30° .

aVF: potencial absoluto de la pierna izquierda. Su vector está en dirección a 90° .

aVR: potencial absoluto del brazo derecho. Su vector está en dirección a -150° .

donde **a** significa amplificada. El triángulo de Einthoven se muestra en la Figura 4.1.

Existen otras derivaciones, estas derivaciones son unipolares y se registran en el tórax desde la posición 1 a la 6. Son las mejores del electrocardiograma para precisar alteraciones del ventrículo izquierdo, sobre todo de las paredes anterior y posterior.

Las derivaciones son:

V₁ : esta derivación registra potenciales de las aurículas, de parte del tabique y pared anterior del ventrículo derecho. El QRS presenta una onda R pequeña (despolarización del Septo Interventricular) seguida de una onda S profunda.

V₂ : el electrodo de esta derivación precordial, está encima de la pared ventricular derecha, por tanto, la onda R es ligeramente mayor que en **V₁**, seguida de una onda S profunda (activación ventricular izquierda).

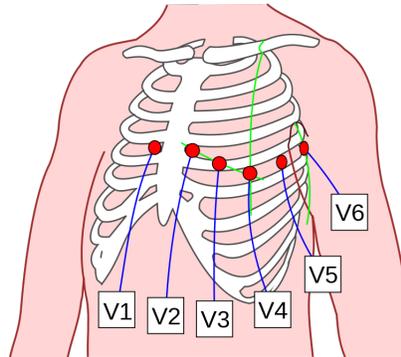


Figura 4.2: La localización específica de las 6 derivaciones precordiales, [33].

V₃ : derivación transicional entre potenciales izquierdos y derechos del ECG, por estar el electrodo sobre el septo interventricular. La onda R y la onda S suelen ser casi iguales (QRS isobifásico).

V₄ : el electrodo de esta derivación está sobre el ápex del ventrículo izquierdo, donde es mayor el grosor. Presenta una onda R alta seguida de una onda S pequeña (activación de ventrículo derecho).

V₅ y **V₆** : estas derivaciones del electrocardiograma están situadas sobre el miocardio del ventrículo izquierdo, cuyo grosor es menor al de V4. Por ello la onda R es menor que en V4, aunque sigue siendo alta. La onda R está precedida de una onda q pequeña (despolarización del septo) [23].

Wilson investigó cómo podrían definirse los potenciales unipolares electrocardiográficos. Wilson y sus colegas (Wilson, Macleod y Barker, 1931; Wilson et al., 1934) sugirieron el uso del terminal central. La terminal central de Wilson (WCT) se obtiene promediando el potencial en las extremidades referidas al electrodo de referencia en la pierna derecha utilizando tres resistencias idénticas ($5\text{ k}\Omega$ o más) conectadas a un solo punto, como se muestra en la Figura 4.3

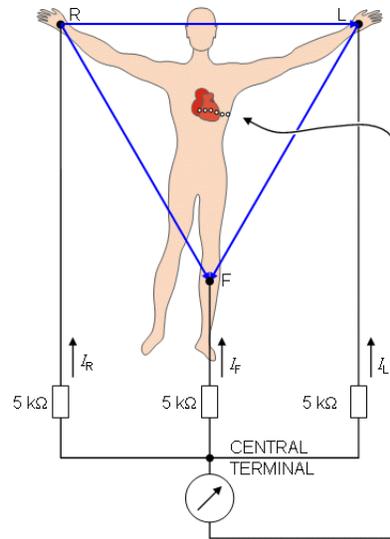


Figura 4.3: Terminal Central de Wilson (WCT), [21]

La corriente total en la terminal central desde las derivaciones de las extremidades debe sumarse a cero para satisfacer la conservación de la corriente.

La Figura 4.4 muestra en conjunto los procesos de depolarización y repolarización promedio y representados por un dipolo promedio, representado en la Figura por una flecha amarilla. Históricamente este vector que en realidad representa un vector promedio de dipolo se llama el vector del corazón. Las señales en las derivaciones se comenzaron a entender como las proyecciones de este vector cardíaco. La Figura también muestra las señales en un corazón normal de un electrocardiograma. Gran parte de la habilidad del cardiólogo consiste en interpretar en el ECG, picos, si son hacia arriba o hacia abajo, la duración de los intervalos, etc., como anomalías de este vector cardíaco.

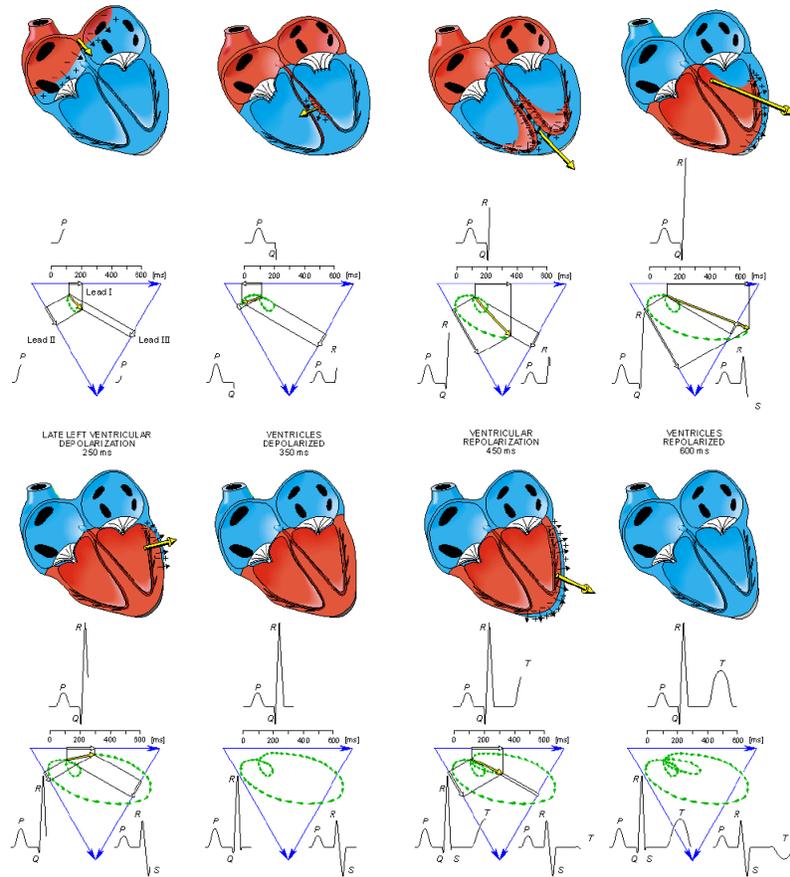


Figura 4.4: Activación eléctrica formado por las derivaciones de Einthoven, (ver [14]).

4.2. El modelo del dipolo único

Este modelo aunque simple permite algunas predicciones cuantificables. Por ejemplo, se puede mostrar que la intensidad del potencial en una esfera conductora es aproximadamente tres veces la magnitud en un medio infinito, este es un margen de error que permite hacer algunas predicciones cualitativas en las derivaciones de Einthoven. Se pueden considerar otros modelos más o menos simplificados como el de una lámina o anillo conductor plano o un cilindro conductor para representar el torso. En simulaciones más realistas, será necesario implementar métodos numéricos, típicamente basados en

elementos finitos o elementos de frontera.

Consideremos el potencial debido a un dipolo finito formado por dos monopolos de corriente de intensidad $\pm I$ situadas a unas distancias b y a del origen, la fuente de corriente $+I$ situada sobre el eje z y la carga $-I$ sobre el plano $x-z$ formando un ángulo α respecto del eje z positivo. Véase la Figura 4.2.

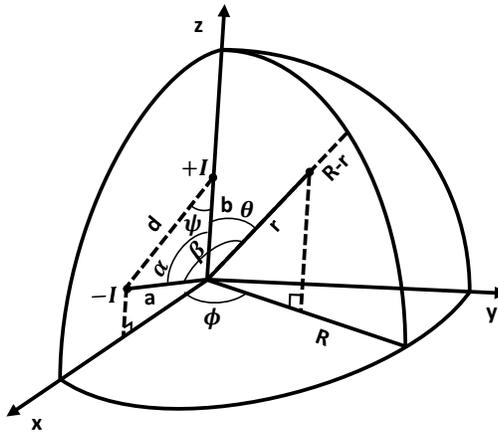


Figura 4.5: Dos fuentes de corriente puntuales ubicadas arbitrariamente en una esfera conductora homogénea. El ángulo ψ describe la orientación del dipolo, [10].

El potencial de estas dos fuentes de corriente en un medio infinito es

$$V_{\infty} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (4.2)$$

siendo r_b, r_a las distancias del punto de observación P a la carga $+I$ y $-I$ respectivamente (4.2).

Recordemos que la función generadora de los polinomios de Legendre es

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (4.3)$$

Con ésta, podemos expresar el inverso de la distancia r_b , como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_b} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \cos \theta (b/r) + (b/r)^2}} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{b}{r} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{r} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad r > b. \quad (4.5)$$

Análogamente

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{r} \right)^n P_n(\cos \beta), \quad r > a. \quad (4.6)$$

Luego el potencial debido a las fuentes $\pm I$ es

$$V_{\infty} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)) \right). \quad (4.7)$$

Ya que los vectores unitarios en la dirección de la fuente $-I$ y del vector \mathbf{r} son

$$(\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

y β es el ángulo entre estos vectores, entonces

$$\begin{aligned} \cos \beta &= (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ &= \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ahora usamos la fórmula de adición de las funciones de los armónicos esféricos¹,

$$\begin{aligned} P_n(\cos \beta) &= P_n(\cos \alpha)P_n(\cos \theta) + \\ & 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha)P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \\ &= (2 - \delta_m^0) \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha)P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \end{aligned}$$

¹<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonicAdditionTheorem.html>

luego podemos expresar el potencial en el medio infinito como

$$V_\infty = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{S_{mn}(\theta, \phi)}{r^{n+1}}, \quad r > b$$

donde

$$S_{mn}(\theta, \phi) = b^n P_n(\cos \theta) - a^n (2 - \delta_m + 0) \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi. \quad (4.9)$$

Si la esfera está inmersa en un medio no conductor, como el aire, debe satisfacerse la condición de frontera $\frac{\partial V}{\partial r}|_{r=R} = 0$, para ello agregamos a V_∞ una solución homogénea de la ecuación de Laplace cuya singularidad esté fuera de la región de interés (la esfera de radio R). El potencial modificado que satisface esta condición de frontera es

$$V = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] \quad (4.10)$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) \frac{1}{r^{n+1}} S_{mn}(\theta, \phi). \quad (4.11)$$

La solución para el potencial sobre cualquier punto de la esfera es en particular,

$$V_R = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{nR^{n+1}} S_{mn}(\theta, \phi). \quad (4.12)$$

Las Figuras [4.6](#) muestran las superficies equipotenciales sobre el meridiano $\phi = 0$, en una esfera de radio $R = 3$, tomando un término en la serie [\(4.10\)](#), y tomando diez términos. Los valores de los demás parámetros son:

$$\begin{aligned} d &= 0.172R, & a &= d, & p &= d, \\ b &= 2d, & \alpha &= \pi, & R &= 3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se puede observar que tomando más términos en la serie agrega singularidades sobre el radio de convergencia de la serie que en este caso coincide es $r = b$ la distancia de la fuente positiva de corriente.

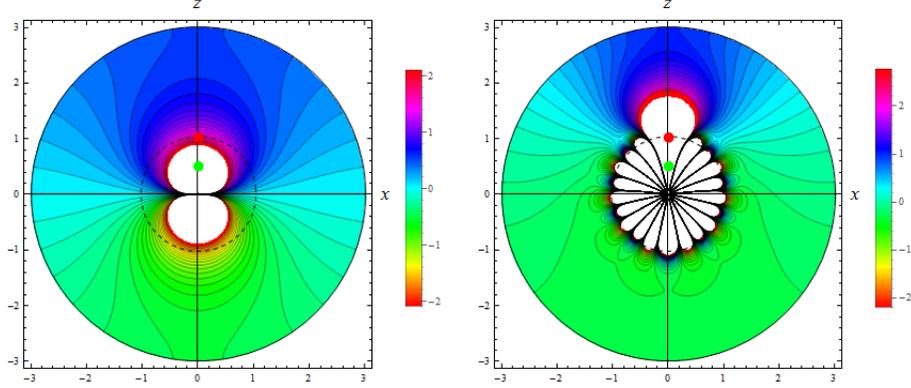


Figura 4.6: Curvas equipotenciales a partir de la serie (4.10), tomando un término y diez términos, respectivamente. El mapa de colores representa el valor del potencial (creciendo del color verde al color azul), la fuente de corriente positiva es indicada por el punto rojo y la fuente negativa por el punto verde.

4.2.1. Fórmula cerrada para un dipolo finito

Nuestro objetivo es mostrar que la solución (4.12) para el potencial de un dipolo, en una posición y orientación arbitraria especificada por los parámetros a , b , ψ , α e I , sobre la superficie de una esfera conductora, inmersa en un medio aislante, admite la expresión cerrada para un dipolo puntual

$$V_R = \frac{I}{4\pi\sigma} \left[\frac{2}{r_b} - \frac{2}{r_a} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{r_a - a \cos \beta + R}{r_b - b \cos \theta + R} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Partimos de la expresión (4.10), donde aparece la sumatoria,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n a^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

El coeficiente general en la primera sumatoria se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} &= \frac{r^n}{R} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{b}{R^2}\right)^n \\
&= \frac{r^n}{R} \left[\left(\frac{b}{R^2}\right)^n + \frac{1}{n} \left(\frac{b}{R^2}\right)^n \right] \\
&= \frac{r^n}{R} \left[\left(\frac{b}{R^2}\right)^n + \int_0^b \frac{b^{n-1}}{R^{2n}} db \right].
\end{aligned}$$

Denotemos ahora por r_{bi} la distancia del punto de observación a un punto imaginario sobre el eje z de coordenadas $(0, 0, R^2/b)$, es decir

$$\begin{aligned}
r_{bi} &= \sqrt{r^2 + (R^2/b)^2 - 2r(R^2/b) \cos \theta}, \quad r < R^2/b \\
&= (R^2/b) \sqrt{1 + (rb/R^2) - 2(rb/R^2) \cos \theta}, \quad rb/R^2 < 1,
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{bi}} &= \frac{b}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (rb/R^2) - 2(rb/R^2) \cos \theta}} \\
&= \frac{b}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rb}{R^2}\right)^n P_n(\cos \theta) \\
&= \frac{b}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R^2/b}\right)^n P_n(\cos \theta). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Luego la primera sumatoria en (4.15) es

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R} \left[\left(\frac{b}{R^2} \right)^n + \int_0^b \frac{b^{n-1}}{R^{2n}} db \right] P_n(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R^2/b} \right)^n P_n(\cos \theta) + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R} \int_0^b \frac{b^{n-1}}{R^{2n}} P_n(\cos \theta) db \\
&= \frac{R}{b} \left(\frac{1}{r_{bi}} - \frac{b}{R^2} \right) + \int_0^b \left(\frac{1}{Rb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n b^n}{R^{2n}} P_n(\cos \theta) \right) db \\
&= \frac{R}{b} \left(\frac{1}{r_{bi}} - \frac{b}{R^2} \right) + \int_0^b \left(\frac{R}{b^2 R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R^2/b} \right)^n P_n(\cos \theta) \right) db \\
&= \frac{R}{br_{bi}} - \frac{1}{R} + \int_0^b \frac{R}{b^2} \left(\frac{1}{r_{bi}} - \frac{b}{R^2} \right) db \\
&= \frac{R}{br_{bi}} - \frac{1}{R} + R \int_0^b \frac{db}{b^2 r_{bi}} - \int_0^b \frac{db}{Rb},
\end{aligned}$$

donde hemos usado (4.16).

Calculemos ahora las integrales indicadas como integrales impropias desde $\delta > 0$ hasta b , y luego haciendo $\delta \rightarrow 0$. Note que

$$br_{bi} = b\sqrt{r^2 + (R^2/b)^2 - 2r(R^2/b)\cos\theta} = \sqrt{b^2 r^2 + R^4 - 2R^2 r b \cos\theta}.$$

Luego

$$\int_0^b \frac{db}{b^2 r_{bi}} db = \int_0^b \frac{db}{b\sqrt{b^2 r^2 - 2R^2 r b \cos\theta + R^4}}.$$

Ahora usamos la fórmula de integración² con $R = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$

$$\int \frac{dx}{xR} = -\frac{1}{\sqrt{C}} \ln \left| \frac{2\sqrt{C}R + Bx + 2C}{x} \right|, \quad C > 0$$

identificando $A = r^2$, $B = -2R^2 r \cos\theta$, $C = R^4 > 0$. La primera integral es

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^b \frac{db}{b^2 r_{bi}} &= -\frac{1}{R^2} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{b^2 r^2 - 2R^2 r b \cos\theta + R^4} - 2R^2 r b \cos\theta + 2R^4}{b} \right| \\
&+ \frac{1}{R^2} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{\delta^2 r^2 - 2R^2 r \delta \cos\theta + R^4} - 2R^2 r \delta \cos\theta + 2R^4}{\delta} \right|.
\end{aligned}$$

²https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_irrational_functions.

La segunda integral es

$$\int_{\delta}^b \frac{db}{Rb} = \frac{1}{R}(\ln(b) - \ln(\delta)).$$

Combinando las integrales

$$\begin{aligned} & R \int_{\delta}^b \frac{db}{b^2 r_{bi}} - \int_{\delta}^b \frac{db}{Rb} = \\ & -\frac{1}{R} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{b^2 r^2 - 2R^2 r b \cos \theta + R^4} - 2R^2 r b \cos \theta + 2R^4}{b} \right| \\ & + \frac{1}{R} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{\delta^2 r^2 - 2R^2 r \delta \cos \theta + R^4} - 2R^2 r \delta \cos \theta + 2R^4}{\delta} \right| \\ & - \frac{1}{R} \ln(b) + \frac{1}{R} \ln(\delta) \\ = & -\frac{1}{R} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{b^2 r^2 - 2R^2 r b \cos \theta + R^4} - 2R^2 r b \cos \theta + 2R^4}{b} \right| \\ & + \frac{1}{R} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{\delta^2 r^2 - 2R^2 r \delta \cos \theta + R^4} - 2R^2 r \delta \cos \theta + 2R^4}{\delta} \right| \\ & - \frac{1}{R} \ln(\delta) - \frac{1}{R} \ln(b) + \frac{1}{R} \ln(\delta). \end{aligned}$$

Cancelamos el término que contiene $\ln(\delta)$ evitando así la divergencia de las integrales. Ahora tomamos el límite $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & R \int_{\delta}^b \frac{db}{b^2 r_{bi}} - \int_{\delta}^b \frac{db}{Rb} = \\ & -\frac{1}{R} \ln \left| \frac{2R^2 \sqrt{b^2 r^2 - 2R^2 r b \cos \theta + R^4} - 2R^2 r b \cos \theta + 2R^4}{b} \right| \\ & + \frac{1}{R} \ln(4R^4) - \frac{1}{R} \ln(b) \\ = & -\frac{1}{R} \ln \left(\frac{2R^2 b r_{bi} - 2R^2 r b^2 \cos \theta + 2R^4 b}{4R^4 b} \right) \\ = & -\frac{1}{R} \ln \left(\frac{b r_{bi} - r b \cos \theta + R^2}{2R^2} \right). \end{aligned}$$

En resumen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{R}{b r_{bi}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{b r_{bi} - r b \cos \theta + R^2}{2R^2} \right). \quad (4.17)$$

De manera análoga

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n a^n}{R^{2n+1}} P_n(\cos \beta) = -\frac{R}{ar_{ai}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{ar_{ai} - ra \cos \beta + R^2}{2R^2} \right). \quad (4.18)$$

Finalmente retomemos la expresión para el potencial (4.10),

$$\begin{aligned} V &= \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] \\ &= \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] + \\ &\quad \left(\frac{1}{r^{n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)], \end{aligned}$$

por las ecuaciones (4.17) y (4.18), se tiene que para la primera sumatoria,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] = \\ &\frac{R}{br_{bi}} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{br_{bi} - rb \cos \theta + R^2}{2R^2} \right) \\ &- \frac{R}{ar_{ai}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{ar_{ai} - ra \cos \beta + R^2}{2R^2} \right) = \\ &\frac{R}{br_{bi}} - \frac{R}{ar_{ai}} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{ar_{ai} - ra \cos \beta + R^2}{br_{bi} - rb \cos \theta + R^2} \right) \end{aligned}$$

y para la segunda sumatoria,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] = \\ &\frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] \\ &= \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
V_R &= \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) [b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \beta)] \\
&= \frac{I}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} + \frac{R}{br_{bi}} - \frac{R}{ar_{ai}} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{ar_{ai} - ra \cos \beta + R^2}{br_{bi} - rb \cos \theta + R^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

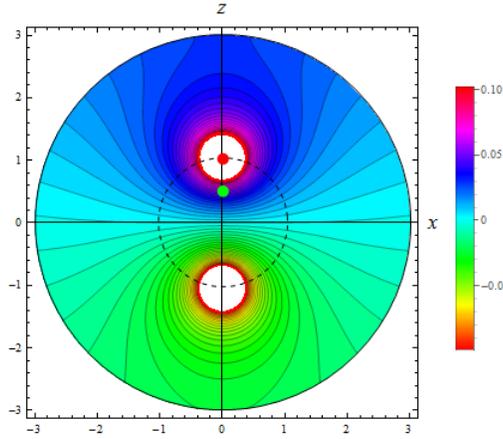


Figura 4.7: Potencial meridional $\phi = 0$. Véanse los valores de los parámetros en la ecuación [4.20](#). La circunferencia punteada muestra el radio de convergencia de la serie [\(4.11\)](#). Compare con la Figura [4.6](#).

En la frontera de la esfera, se satisface $ar_{ai} = Rr_a$ y $br_{bi} = Rr_a$, luego se obtiene solución en la forma cerrada

$$V_R = \frac{I}{4\pi\sigma} \left[\frac{2}{r_b} - \frac{2}{r_a} + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{r_a - a \cos \beta + R}{r_b - b \cos \theta + R} \right) \right]. \quad (4.19)$$

La Figura [4.7](#) muestra las superficies equipotenciales debidas a un dipolo finito orientado sobre el eje z en el plano meridiano $\phi = 0$. La fuente de corriente positiva esta indicada por un punto en rojo, la fuente negativa por un punto en verde. El mapa de colores representa el valor del potencial (creciendo del color verde al color azul). El radio de la esfera se tomó como $R = 3$, los valores del resto de los parámetros fueron $\sigma = 1$,

$$\begin{aligned}
d &= 0.172R, & a &= d, p = d, \\
b &= 2d, & \alpha &= \pi, R = 3,
\end{aligned} \quad (4.20)$$

los mismos que (4.13).

4.3. Fórmula cerrada para el potencial de un dipolo puntual

El potencial de un dipolo puntual se define por el límite del potencial de un dipolo finito $\pm I$ cuando $I \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$, pero con $Id \rightarrow p$ un valor finito. Notemos que si $d \rightarrow 0$ entonces $\alpha \rightarrow 0$ y $a \rightarrow b$, como se muestra en la Figura 4.5.

Usaremos las siguientes relación para los Polinomios asociados de Legendre,

▪

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (4.21)$$

▪

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.22)$$

▪

$$P_n(x) = 1 + O(x-1), \quad \text{cuando } x \rightarrow 1. \quad (4.23)$$

▪ En particular, si $x = \cos \alpha$ en (4.21),

$$P_n^m(\cos \alpha) = (-1)^m \sin^m(\alpha) P_n^{(m)}(\cos \alpha). \quad (4.24)$$

De la Figura 4.8, se sigue que

$$a \sin \alpha = d \sin \Psi, \quad (4.25)$$

$$b = d \cos \psi + a \cos \alpha. \quad (4.26)$$

Luego de (4.25), $P_n^m(\cos \alpha) = O(d^m)$, y al tomar el límite tendríamos $Id^m \rightarrow 0$ para $m > 1$, ya que $Id \rightarrow p$, un valor finito. Por lo tanto sólo los términos que contienen los polinomios asociados con $m = 0, 1$ son relevantes, cuando tomemos el límite $Id \rightarrow p$.

Partamos entonces de la fórmula en forma de serie para el potencial sobre la superficie de la esfera, (4.12) $r = R$:

$$V_R = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \frac{2n+1}{nR^{n+1}} S_{mn}(\theta, \phi) \quad (4.27)$$

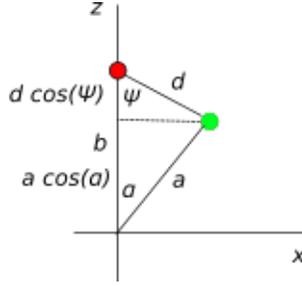


Figura 4.8: Proyección de la Figura 4.5 sobre el plano x - z .

donde

$$S_{mn}(\theta, \phi) = b^n P_n(\cos \theta) - a^n (2 - \delta_m^0) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi, \quad (4.28)$$

y extraigamos los términos con $m = 0, 1$, explícitamente, recordando que $P_n^0(x) = P_n(x)$,

$$\begin{aligned} V_R &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{nR^{n+1}} \left[b^n P_n(\cos \theta) - a^n P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - 2a^n \frac{(n-1)!}{(n+1)!} P_n^1(\cos \alpha) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{nR^{n+1}} \left[(b^n - a^n P_n(\cos \alpha)) P_n(\cos \theta) \right. \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\left. - 2a^n \frac{(n-1)!}{(n+1)!} P_n^1(\cos \alpha) P_n^1(\cos \theta) \cos \phi \right] \quad (4.30)$$

ahora, si $d \rightarrow 0$ con $Id \rightarrow p$, un valor finito, también se tiene que $\cos \alpha \rightarrow 1$, luego, en estas condiciones, en el primer término de la sumatoria (4.29) tenemos, usando (4.23),

$$b^n - a^n P_n(\cos \alpha) = b^n - a^n (1 + O(\cos \alpha - 1)) = b^n - a^n + O(\cos \alpha - 1)$$

donde

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots a^{n-1}).$$

Usando (4.26), el factor $b-a = d \cos \psi + a(\cos \alpha - 1) \rightarrow d \cos \psi$, y como $a \rightarrow b$, el factor

$$b^{(n-1)} + b^{(n-2)}a + \dots a^{(n-1)} \rightarrow nb^{n-1},$$

con lo que se concluimos que

$$b^n - a^n P_n(\cos \alpha) \rightarrow nb^{n-1} d \cos \psi. \quad (4.31)$$

Para el segundo término en la sumatoria (4.30), usando (4.24), con $\cos \alpha \rightarrow 1$ y $m = 1$, tenemos que

$$P_n^1(\cos \alpha) \rightarrow \frac{dP_n(x)}{dx} \Big|_{x=\cos \alpha=1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} -2a^n \frac{(n-1)!}{(n+1)!} P_n^1(\cos \alpha) &\rightarrow -2b^n \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= -b^n \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = -b^n. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Finalmente, con los límites (4.31) y (4.32) tomados en (4.29) y (4.30), obtenemos el potencial del dipolo puntual de intensidad p , en la superficie de la esfera, como

$$V_{Rdipolo} = \frac{p}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)b^{n-1}}{nR^{n+1}} [n \cos \psi P_n(\cos \theta) + \sin \psi P_n^1(\cos \theta) \cos \phi]. \quad (4.33)$$

Mostremos ahora que la serie (4.33) para el potencial del dipolo puntual sobre la esfera, admite la siguiente fórmula cerrada

$$\begin{aligned} V_{Rdipolo} = \frac{p}{4\pi\sigma Rb} \left\{ \cos \psi \left[\frac{1-f^2}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}} - 1 \right] \right. \\ \left. - \frac{\sin \psi \cos \phi}{\sin \theta} \left[\frac{3f-3f^2\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}} + \mu \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde $\mu = \cos \theta$, $f = b/R$.

En efecto, de la función generadora de los polinomios de Legendre con $t = f$, $x = \mu$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+f^2-2f\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) f^n, \quad (4.35)$$

derivando respecto de f

$$\frac{-f+\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(\mu) f^{n-1}.$$

Multiplicando esta expresión por $2f$

$$\frac{-2f^2 + 2\mu f}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(\mu)f^n.$$

Ahora sumamos la última ecuación a la primera

$$\frac{-2f^2 + 2\mu f}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + f^2 - 2f\mu}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)P_n(\mu)f^n.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es

$$\frac{-2f^2 + 2\mu f + 1 + f^2 - 2f\mu}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} = \frac{1 - f^2}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}}.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)P_n(\mu)f^n = \frac{1 - f^2}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} - 1.$$

Completamos ahora el primer término en (4.34)

$$\begin{aligned} & \frac{p}{4\pi\sigma Rb} \cos \psi \left[\frac{1 - f^2}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} - 1 \right] \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma Rb} \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) \cos \psi P_n(\mu) f^n \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma Rb} \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) \cos \psi P_n(\cos \theta) \frac{b^n}{R^n} \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)b^{n-1}}{R^{n+1}} \cos \psi P_n(\cos \theta) \end{aligned} \tag{4.36}$$

que coincide con la primera sumatoria de la serie (4.33).

Para obtener una fórmula cerrada para una segunda serie en (4.33), procedemos como sigue: Derivando la función generadora (4.35) respecto de μ , obtenemos

$$\frac{f}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\mu) f^n \tag{4.37}$$

ahora derivamos respecto de f ,

$$\frac{1 - 2f^2 + f\mu}{(1 + f^2 - 2f\mu)^{5/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP'_n(\mu) f^{n-1}. \tag{4.38}$$

Multiplicando (4.38) por $2f$, sumando a (4.37) y simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{2f(1-2f^2+f\mu)}{(1+f^2-2f\mu)^{5/2}} + \frac{f}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)P'_n(\mu)f^n \\ \frac{3f(1-f^2)}{(1+f^2-2f\mu)^{5/2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)P'_n(\mu)f^n \\ \frac{3(1-f^2)}{(1+f^2-2f\mu)^{5/2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)P'_n(\mu)f^{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora integramos de $f = 0$ hasta f , suponiendo que se puede hacer término a término,

$$\begin{aligned} \frac{3f-3f^3\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}(1-\mu^2)} + \frac{\mu}{1-\mu^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} P'_n(\mu)f^n \\ \frac{3f-3f^3\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \sqrt{1-\mu^2} P'_n(\mu)f^n \\ -\left(\frac{3f-3f^3\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} P_n^1(\mu)f^n. \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos por los factores necesarios para la segunda serie

$$\begin{aligned} &-\frac{p}{4\pi\sigma Rb} \sin\psi \cos\phi \left(\frac{3f-3f^3\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\right) \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma Rb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \sin\psi P_n^1(\mu)f^n \cos\phi \\ &= \frac{p}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)b^{n-1}}{nR^{n+1}} \sin\psi P_n^1(\mu) \cos\phi \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde hemos usamos $f = b/R$, en la última expresión.

Finalmente con las fórmulas cerradas (4.36) y (4.39) obtenemos la fórmula cerrada de Frank [10] para el potencial en la esfera conductora

$$\begin{aligned} V_{Rdipolo} &= \frac{p}{4\pi\sigma} \left\{ \cos\psi \left[\frac{1-f^2}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin\psi \cos\phi}{\sin\theta} \left[\frac{3f-3f^3\mu+f^3-\mu}{(1+f^2-2f\mu)^{3/2}\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

4.3.1. La fórmula de Wilson y Bayley

Wilson y Bayley [5] usan el teorema de Helmholtz para derivar una fórmula para el potencial de un dipolo excéntrico en una esfera conductora inmersa en un medio no conductor. La fórmula es como sigue:

- R , radio de la esfera con centro en el origen.
- fR , distancia del dipolo al origen.
- r , distancia del punto de observación al origen.
- λ_1, μ_1, ν_1 , los cosenos directores del radiovector del origen al dipolo.
- λ, μ, ν , los cosenos directores del origen al punto de observación.
- γ , el coseno director del ángulo entre el radio vector al dipolo y el radio vector al punto de observación.

$$\gamma = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1.$$

- ψ_x, ψ_y, ψ_z , son los cosenos directores de la dirección del dipolo.

El potencial en cualquier punto sobre la esfera es

$$V_{R,Wilson} = \frac{M\psi_x}{R^2} \left\{ \frac{2(\lambda - f\lambda_1)}{(1 + f^2 - 2f\gamma)^{3/2}} + \frac{(f - \gamma)\lambda - (f\gamma - 1)\lambda_1}{f(1 - \gamma^2)(1 + f^2 - 2f\gamma)^{1/2}} + \frac{\gamma\lambda - \lambda_1}{f(1 - \gamma^2)} \right\} \quad (4.41)$$

más otros términos similares que se obtienen reemplazando $\psi_x, \lambda, \lambda_1$ por ψ_y, μ, μ_1 , y luego por ψ_z, ν, ν_1 .

La fórmula de Frank se obtiene de la fórmula de Wilson y Bayley haciendo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} \psi_x &= -\sin \psi, & \psi_y &= 0, & \psi_z &= \cos \psi, \\ \lambda_1 &= 0, & \mu_1 &= 0, & \nu_1 &= 1, \\ \lambda &= \sqrt{1 - \gamma^2} \cos \phi, & \mu &= \sqrt{1 - \gamma^2} \cos \phi, & \nu &= \gamma \end{aligned}$$

y finalmente

$$M = \frac{pRb}{4\pi\sigma}, \quad \gamma = \mu$$

donde $\mu = \sin \theta$.

La primera condición se sigue de la Figura 4.8, la segunda condición se sigue de que el dipolo se encuentra en la dirección del eje z según la Figura 4.5, y la tercera condición son los cosenos directores del punto de observación sobre la esfera, en coordenadas esféricas, donde γ de la fórmula de Wilson y Bayley, es el coseno director entre los radios vectores del dipolo y el punto de observación, coincide en el límite del dipolo puntual, con $\mu = \cos \theta$. El valor de M hace consistente las fórmula de Wilson y Bayley (4.41) con la fórmula de Frank (4.40).

4.4. Simulación del potencial en una esfera debido a un dipolo

La Figura 4.9 muestra el potencial sobre la esfera de un dipolo parametrizado por $\psi = \pi(1 + \cos(2\pi\nu t))$, donde $\nu = 60^{-1}$ (frecuencia cardíaca en un adulto normal), $f = \frac{b}{R} = .1$ (R es el radio de la esfera), las distancias entre fuentes $a = d$, $b = 2d$ y $d = 0.172$ en unidades adimensionales, vgr. $\frac{4\pi\sigma Rb}{p}V_{dip}$

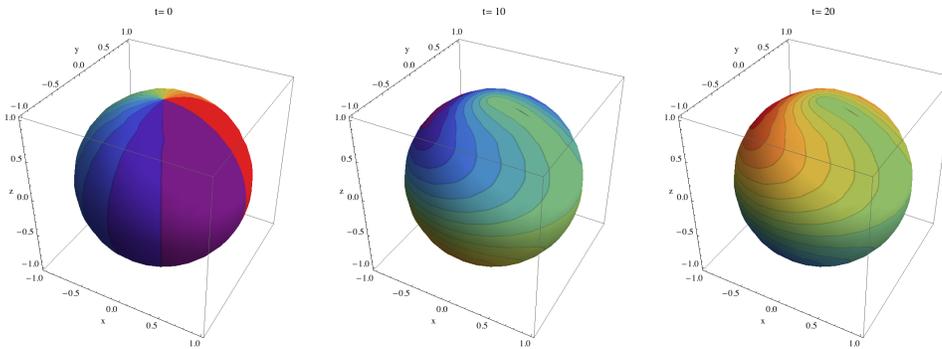


Figura 4.9: Superficies equipotenciales en una esfera conductora, $t = 0, 10, 20$ s.

4.5. El modelo de Clifford y Sharry

El artículo [9] presenta un modelo de las señales realistas de un electrocardiograma sintético (ECG). El modelo genera una trayectoria en un espacio de estado tridimensional con coordenadas (x, y, z) . La variable z del sistema

tridimensional produce un ECG sintético y la cuasi-periodicidad del ECG se refleja por el movimiento de la trayectoria alrededor del ciclo límite de radio unitario en el plano (x, y) . El siguiente sistema de ecuaciones ordinarias describe el comportamiento de la actividad eléctrica.

$$\dot{x} = \alpha x - \omega y, \quad (4.42)$$

$$\dot{y} = \alpha y - \omega x, \quad (4.43)$$

$$\dot{z} = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z - z_0). \quad (4.44)$$

- Donde $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Delta \theta_i = \theta \text{ mód } (2\pi) - \theta_i$, $\theta = \arctan(x, y)$ y ω es la velocidad angular. La desviación de la línea de base se introduce acoplando el valor de la línea de base z_0 en (4.44) a la frecuencia respiratoria f_2 usando

$$z_0 = A \sin(2\pi f_2 t)$$

donde $A=0.15$ mV. El ritmo normal de latidos de un adulto es de 60 a 100 latidos por minuto; frecuencia de respiración normal 12 – 18 respiraciones por minuto.

- Los distintos puntos en el ECG, tales como el P,Q,R,S y T descritos por eventos correspondientes a extremos negativos y positivos en la dirección z .
- Estos eventos se colocan en ángulos fijos alrededor del círculo unitario dado por $\theta_P, \theta_Q, \theta_R, \theta_S$ y θ_T .

La siguiente tabla muestra los datos de los parámetros de las ecuaciones ordinarias (4.42), (4.43) y (4.44).

i	P	Q	R	S	T
Tiempo(secs)	-0.2	-0.05	0	0.05	0.3
θ_i (radians)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
a_i	1.2	-5.0	30.0	-7.5	0.75
b_i	0.25	0.1	0.1	0.1	0.4

Se resolvió numéricamente la ecuación (4.44) con un valor inicial aleatorio entre $[-0.1,0.1]$, utilizando Wolfram Mathematica. La interpretación del ECG es como se muestra en la Figura 4.10.

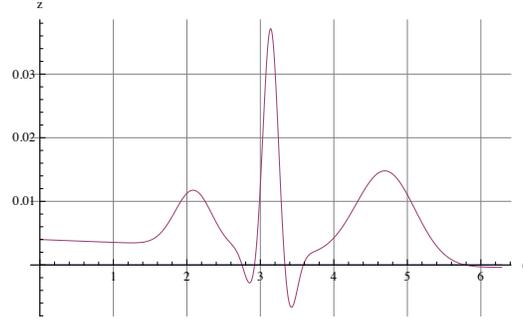


Figura 4.10: ECG simulado numéricamente en la dirección z a partir del modelo de Clifford y Sharry.

Las ecuaciones (4.42), (4.43) y (4.44) se resolvieron analíticamente, de la siguiente manera

$$x = r \cos(\theta), \quad (4.45)$$

$$y = r \sin(\theta), \quad (4.46)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (4.47)$$

derivando la ecuación (4.47) con respecto a θ , se tiene que

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad (4.48)$$

por otro lado $\dot{\theta} = \omega$. Resolver la ecuación (4.44)

$$\dot{z} = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - z, \quad (4.49)$$

$$\dot{z} + z = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right). \quad (4.50)$$

Multiplicar por e^θ la ecuación (4.50)

$$e^\theta(\dot{z} + z) = e^\theta \left(- \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \right), \quad (4.51)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}(e^\theta z) &= - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2} + \theta\right), \\ \int_0^\theta \frac{d}{d\theta}(e^\theta z) d\theta &= - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \int_0^\theta \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2} + \theta\right) d\theta, \\ e^\theta z(\theta) - z(0) &= - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \int_0^\theta \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2} + \theta\right) d\theta\end{aligned}$$

la solución para $z(\theta)$

$$z(\theta) = e^{-\theta} z(0) + e^{-\theta} \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} -a_i \int_0^\theta \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2} + \theta\right) d\theta$$

donde $\Delta \theta_i = \theta - \theta_i$

$$\begin{aligned}z(\theta) &= e^{-\theta} z(0) + \\ e^{-\theta} \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} -a_i \int_0^\theta \Delta \theta_i \exp\left(\frac{-(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2 - \theta_i^2 + (\theta_i + b_i^2)^2}{2b_i^2}\right) d\theta \\ &= e^{-\theta} z(0) + \\ e^{-\theta} \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \exp\left(-\frac{\theta_i^2 - (\theta_i + b_i^2)^2}{2b_i^2}\right) \int_0^\theta -\Delta \theta_i \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta.\end{aligned}$$

Solución de la integral $\int_0^\theta -(\theta - \theta_i) \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta$. Sumando y restando b_i^2

$$\begin{aligned}&\int_0^\theta -(\theta - \theta_i + b_i^2 - b_i^2) \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta = \\ &\int_0^\theta -(\theta - \theta_i - b_i^2) \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta \\ &- b_i^2 \int_0^\theta \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \int_0^\theta -(\theta - \theta_i) \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta \\
&= b_i^2 \left(\exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) \right) \\
&\quad - \int_0^\theta \exp\left(-\frac{(\theta - (\theta_i + b_i^2))^2}{2b_i^2}\right) d\theta \\
&= b_i^2 \left(\exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i[\theta] - b_i^2)^2}{2b_i^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i[0] - b_i^2)^2}{2b_i^2}\right) \right) \\
&\quad - \int_0^\theta \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i[\theta] - b_i^2)^2}{2b_i^2}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

La interpretación del ECG analíticamente, como se muestra la siguiente Figura [4.11](#)

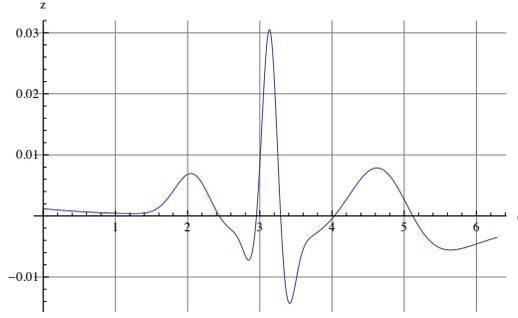


Figura 4.11: ECG a partir de la solución analítica del modelo de Clifford y Sharry.

4.6. El modelo de Sameni

El modelo de Sameni se basa en el modelo de Clifford y Sharry. Sameni (ver [\[8\]](#)), propone un modelo en forma de EDO para la trayectoria del dipolo en un medio infinito y con ello se obtienen señales sintéticas de las 12 derivaciones clásicas. El modelo de un único dipolo se puede integrar en un modelo lineal que incorpora la atenuación debido al torso. Este vector puede ser representado en las coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$d(\theta) = x(\theta)\hat{a}_x + y(\theta)\hat{a}_y + z(\theta)\hat{a}_z \quad (4.52)$$

donde \hat{a}_x, \hat{a}_y y \hat{a}_z son los vectores unitarios a lo largo de los tres ejes del cuerpo, (ver 4.12). Para proyectar el vector dipolo en la superficie del cuerpo considerando la propagación de las señales en el conductor del volumen corporal, las posibles rotaciones y escalas del dipolo, y los ruidos de medición del ECG.

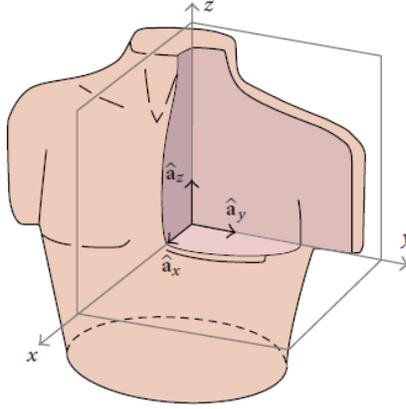


Figura 4.12: Los tres ejes del cuerpo.

Mediante el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias para el vector dipolo $d(t)$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{x} &= - \sum_i \frac{\alpha_i^x \omega}{(b_i^x)^2} \Delta\theta_i^x \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^x)^2}{2(b_i^x)^2}\right), \\
 \dot{y} &= - \sum_i \frac{\alpha_i^y \omega}{(b_i^y)^2} \Delta\theta_i^y \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^y)^2}{2(b_i^y)^2}\right), \\
 \dot{z} &= - \sum_i \frac{\alpha_i^z \omega}{(b_i^z)^2} \Delta\theta_i^z \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^z)^2}{2(b_i^z)^2}\right).
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

1. Donde $\Delta\theta_i^x = (\theta - \theta_i^x) \text{ mód } (2\pi)$, $\Delta\theta_i^y = (\theta - \theta_i^y) \text{ mód } (2\pi)$ y $\Delta\theta_i^z = (\theta - \theta_i^z) \text{ mód } (2\pi)$ y $\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia.
2. Las coordenadas del vector dipolar $d(\theta)$ se modela mediante suma de funciones gaussianas con las amplitudes de α_i^x, α_i^y y α_i^z ; la amplitud de b_i^x, b_i^y y b_i^z ; y se encuentra en los ángulos de rotación de θ_i^x, θ_i^y y θ_i^z .

La tabla de los parámetros sugeridos en [8](#)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha_i^x (mV)$	0.03	0.08	-0.13	0.85	1.11	0.75	0.06	0.10	0.17	0.39	0.03
$b_i^x (rads)$	0.09	0.11	0.05	0.04	0.03	0.03	0.04	0.60	0.30	0.18	0.50
$\theta_i^x (rads)$	-1.09	-0.83	-0.19	-0.07	0.00	0.06	0.22	1.20	1.42	1.68	2.90
$\alpha_i^y (mV)$	0.04	0.02	-0.02	0.32	0.51	-0.32	0.04	0.08	0.01	-	-
$b_i^y (rads)$	0.07	0.07	0.04	0.06	0.04	0.06	0.45	0.30	0.50	-	-
$\theta_i^y (rads)$	-1.10	-0.90	-0.76	-0.11	-0.01	0.07	0.80	1.58	2.90	-	-
$\alpha_i^z (mV)$	-0.03	-0.14	-0.04	0.05	-0.40	0.46	-0.12	-0.20	-0.35	-0.04	-
$b_i^z (rads)$	0.03	0.12	0.04	0.40	0.05	0.05	0.80	0.40	0.20	0.40	-
$\theta_i^z (rads)$	-1.10	-0.93	-0.70	-0.40	-0.15	0.10	1.05	1.25	1.55	2.80	-

Reduciendo el sistema de ecuaciones [\(4.53\)](#), se describe de la siguiente manera

$$\frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = -\frac{\sum_i \frac{\alpha_i^x \omega}{(b_i^x)^2} \Delta\theta_i^x \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^x)^2}{2(b_i^x)^2}\right)}{\omega}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{\theta}} = -\frac{\sum_i \frac{\alpha_i^y \omega}{(b_i^y)^2} \Delta\theta_i^y \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^y)^2}{2(b_i^y)^2}\right)}{\omega}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\dot{z}}{\dot{\theta}} = -\frac{\sum_i \frac{\alpha_i^z \omega}{(b_i^z)^2} \Delta\theta_i^z \exp\left(-\frac{(\Delta\theta_i^z)^2}{2(b_i^z)^2}\right)}{\omega}. \quad (4.56)$$

La solución del sistema, se resolvió numéricamente con el software Wolfram Mathematica utilizando el comando NDSolve. La interpretación de las señales de ECG sintéticas de los electrodos de lead de Frank y el vector dipolo como se muestran en las siguientes Figuras [4.13](#), [4.14](#) y [4.15](#).

En la Figura [4.13](#) muestra la componente $x(\theta)$ de la señal con los parámetros, el cual es más parecido al ECG.

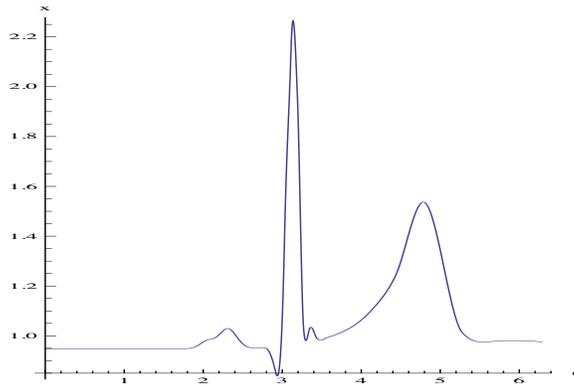


Figura 4.13: Señal sintética a partir de la solución $x(\theta)$ de [4.54](#).

En la Figura 4.14 muestra la componente $y(\theta)$ de la señal con los parámetros,

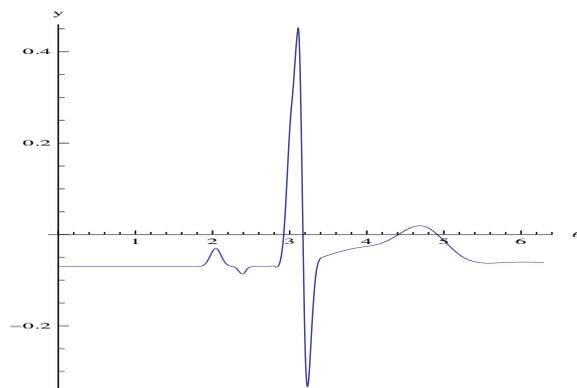


Figura 4.14: Señal sintética a partir de la solución $y(\theta)$ de 4.55.

En la Figura 4.15 muestra la componente $z(\theta)$ de la señal con los parámetros de la tabla anteriormente mencionada.

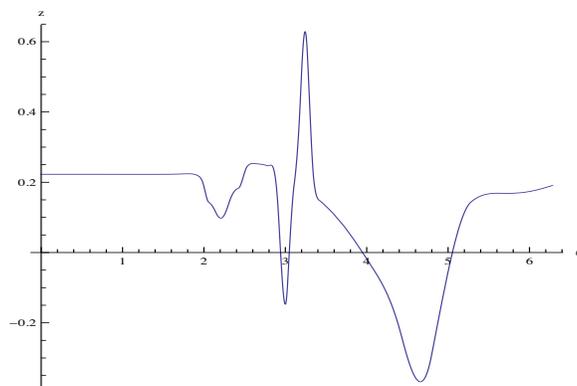


Figura 4.15: Señal sintética a partir de la solución $z(\theta)$ de 4.56.

Cualquier conjunto de tres cables de electrodo ECG lineal independientes puede usarse para construir el vectorcardiograma (VCG). Se utilizaron las tres señales sintéticas del ECG y representando vectorial en 3D, se construyó el VCG materno, como se muestra en la siguiente Figura 4.16.

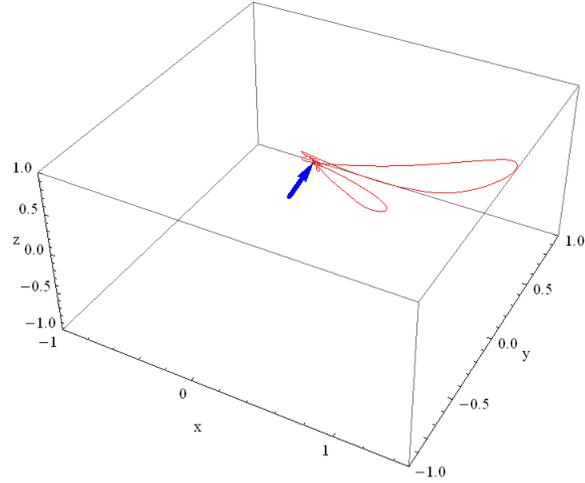


Figura 4.16: Vectorcardiograma generado a partir del modelo de Sameni. El vector del dipolo se muestra como una flecha.

4.7. Simulación de las derivaciones de Einthoven

Se uso el modelo de Sameni junto con el volumen conductor esférico y la fórmula de Wilson, para obtener las derivaciones de Einthoven que se menciona en la sección (3.9). El ECG se estructura en la medición del potencial eléctrico entre varios puntos corporales. Cada una de las derivaciones registradas I, II y III son periféricas y miden la diferencia de potencial entre los electrodos.

Las 3 derivaciones de Einthoven tienen su fundamento bioeléctrico en la teoría del dipolo. Por otro lado se menciona en la sección (4.6) que el vector del dipolo está dado por la ecuación (4.52), entonces

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La fórmula de Wilson calcula el potencial en cualquier punto sobre la esfera es

$$V(\theta, \lambda, \mu, \nu) = \frac{M\psi_x}{R^2} \left\{ \frac{2(\lambda - f\lambda_1)}{(1 + f^2 - 2f\gamma)^{3/2}} + \frac{(f - \gamma)\lambda - (f\gamma - 1)\lambda_1}{f(1 - \gamma^2)(1 + f^2 - 2f\gamma)^{1/2}} + \frac{\gamma\lambda - \lambda_1}{f(1 - \gamma^2)} \right\} \quad (4.57)$$

más otros términos similares que se obtienen reemplazando $\psi_x, \lambda, \lambda_1$ por ψ_y, μ, μ_1 y luego por ψ_z, ν, ν_1 . Dado los siguientes datos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \mu_1 &= 0, & \nu_1 &= 1, \\ R &= 1, & b &= 0.344, & f &= 0.1. \\ \sigma &= 1, & M &= \frac{pRb}{4\pi\sigma}, \\ \psi_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \psi_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \psi_z &= \frac{z-b}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}$$

Las derivaciones se obtienen colocando cuatro electrodos conectados a cuatro cables de miembros superiores e inferiores, como se ilustra en la siguiente Figura [A.1](#), el electrodo conectado al cable negro no interviene, solo sirve como toma de tierra, (ver [28](#)).

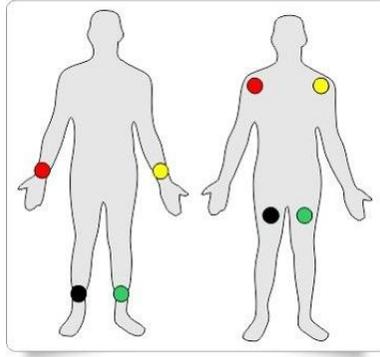


Figura 4.17: Ejemplo de como colocar los cuatro electrodos, [28](#).

Entonces los valores que se le asignaron a los puntos que se muestran en la Figura [A.1](#) son los siguientes datos.

1. Para el brazo izquierdo (punto amarillo)

$$V_L \left(\lambda = 0, \mu = \frac{1}{2}, \nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

2. Para el brazo derecho (punto rojo)

$$V_R \left(\lambda = 0, \mu = -\frac{1}{2}, \nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

3. Para el pie izquierdo (punto verde)

$$V_F(\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0).$$

Las derivaciones se integran de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}VI &= V_L - V_R, \\VII &= V_F - V_R, \\VIII &= V_F - V_L.\end{aligned}$$

Dado que el corazón se inclina dentro del pecho hacia la izquierda, y como los brazos y piernas son prolongaciones de sus respectivas raíces, en la práctica empleamos los miembros superiores y el inferior izquierdo para construir el triángulo. La interpretación gráfica de las derivaciones es como se muestran en las Figuras 4.18, 4.19 y 4.20.

La derivación I se forma entre el punto rojo y el amarillo (brazo derecho y brazo izquierdo).

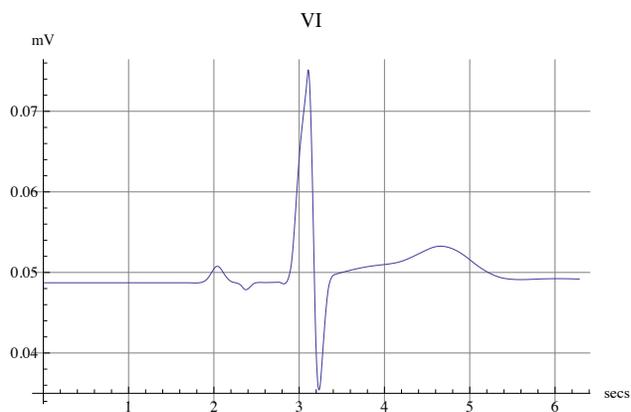
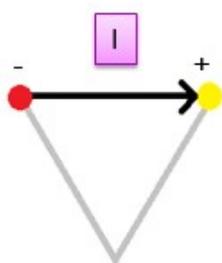


Figura 4.18: Esquema del triángulo Einthoven [28] y la gráfica de la derivación I.

La derivación II se forma entre el electrodo rojo y el verde (entre hombro derecho y pierna izquierda). El electrodo positivo, y por tanto explorador, es el verde.

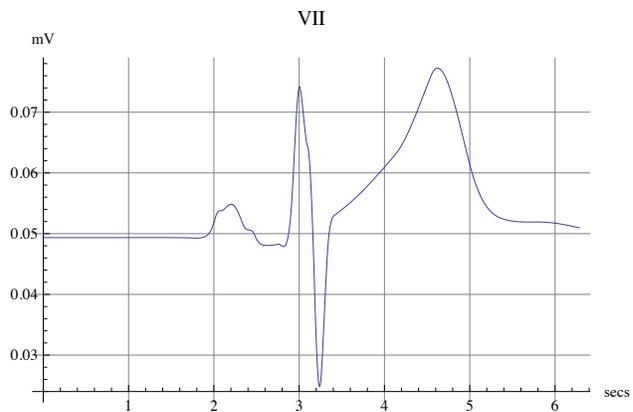
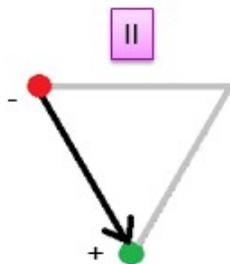


Figura 4.19: Esquema del triángulo Einthoven [28] y la gráfica de la derivación II.

La derivación III se forma entre los electrodos amarillo y verde (brazo izquierdo y pierna izquierda). De nuevo el electrodo positivo, y por tanto el explorador, es el verde.

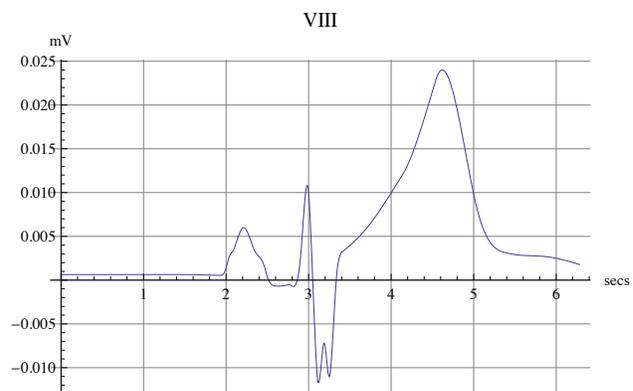
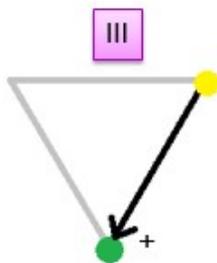


Figura 4.20: Esquema del triángulo Einthoven [28] y la gráfica de la derivación III.

Capítulo 5

Modelos de conducción volumétricos

En esta sección estudiaremos el modelo del volumen conductor que describe el potencial eléctrico u del medio conductor entre el corazón y el torso humano. El modelo bidominio considera el potencial intracelular u_i y extracelular u_e del tejido del corazón, como variables acopladas a través de la corriente iónica transmembranal, completadas con condición Neumann en la superficie del corazón. El modelo monodominio se supone que las conductividades intracelular y extracelular son proporcionales. Así se obtiene una sola ecuación para el potencial transmembranal $v = u_e - u_i$.

En esta sección se presenta dos aplicaciones: a) La desfibrilación, que es un procedimiento de urgencia en el procedimiento de reanimación cardiopulmonar (RCP), basadas en el modelo del volumen conductor; b) La isquemia miocárdica, en la que se reduce la oxigenación del tejido cardíaco con la consecuente alteración en la conductividad eléctrica, basado en el modelo bidominio pasivo, que es una simplificación del modelo conductor.

Las simulaciones de estas dos aplicaciones se presentarán en detalle en el siguiente capítulo.

5.1. Modelo de volumen conductor

En el caso estacionario el campo eléctrico \mathbf{E} se puede escribir como el gradiente de un potencial escalar u ,

$$\mathbf{E} = -\nabla u. \tag{5.1}$$

La ley de Ohm (2.17) relaciona la corriente y el campo eléctrico,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

donde σ es la conductividad del medio. Sustituyendo la ecuación (5.1) en la ecuación (2.17) se obtiene

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla u. \quad (5.2)$$

Consideremos un volumen arbitrario V delimitado por una superficie cerrada S y sea \hat{n} su normal exterior, con elemento de área $\hat{n}dS$. Si el volumen V contiene una fuente de corriente f entonces

$$\int_S \hat{n} \cdot \mathbf{J} dS = \int_V f dV. \quad (5.3)$$

Aplicando el teorema de la divergencia obtenemos

$$\int_S \hat{n} \cdot \mathbf{J} dS = \int_{Vol} \nabla \cdot \mathbf{J} dV, \quad (5.4)$$

como el volumen V es arbitrario esto implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = f.$$

En el modelo de volumen conductor, el cuerpo está rodeado de aire o algún otro medio aislante eléctrico. Esto implica que en la superficie del cuerpo, el componente normal de la corriente debe ser cero, luego

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.5)$$

Sustituyendo la ecuación (5.2) en la ecuación (5.5), entonces las ecuaciones del modelo de volumen conductor son:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \quad (5.6)$$

$$\hat{n} \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.7)$$

donde Ω representa el volumen conductor. Nótese que debido a la condición de frontera (5.7) debe satisfacerse la condición

$$\int_{\Omega} f dV = 0. \quad (5.8)$$

En el modelo descrito por las ecuaciones (5.6), (5.7) el corazón se representa por la fuente f , por ejemplo en el modelo más simple el corazón se puede representar por un dipolo

$$f(x) = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (5.9)$$

donde \mathbf{p} es el momento dipolar.

En otra variante del modelo del volumen conductor, la superficie del corazón se representa por ∂H y el torso T es la región delimitada por ∂H y ∂T . En este caso debe tenerse como dato el valor del potencial en la superficie del corazón $u_{\partial H}$. El modelo se representa entonces por las ecuaciones

$$\nabla \cdot (\sigma_T \nabla u_T) = 0 \quad x \in T, \quad (5.10)$$

$$\hat{n} \cdot \sigma_T \nabla u_T = 0 \quad x \in \partial T, \quad (5.11)$$

$$u_T = u_{\partial H} \quad x \in \partial H, \quad (5.12)$$

donde u_T es el potencial en el volumen del torso.

5.2. El modelo bidominio

El modelo del tejido cardíaco se basa en un enfoque de volumen conductor, para incluir los efectos de la diferencia de potencial a través de la membrana, el tejido se divide en dos dominios separados: el intracelular y el extracelular. Las corrientes en los dos dominios,

$$\mathbf{J}_i = -\sigma_i \nabla u_i, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{J}_e = -\sigma_e \nabla u_e, \quad (5.14)$$

donde \mathbf{J}_i es la corriente intracelular y \mathbf{J}_e extracelular, σ_i σ_e son las conductividades en los dos dominios y u_i y u_e son los potenciales respectivos.

La ley de la corriente de Kirchhoff establece que la corriente neta es igual a cero,

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_i + q_e) = 0, \quad (5.15)$$

donde q_i es carga intracelular y q_e es carga extracelular, si la corriente positiva que fluyen hacia adentro, entonces una o más corrientes fluyen hacia afuera, estas corrientes que salen tendrán el signo negativo.

Por los principios de conservación de la carga, si no hay fuentes ni sumideros, la tasa de cambio de la carga neta en un volumen arbitrario V es igual al flujo neto de cargas a través de la frontera. Si q representa la densidad de carga dentro del volumen V y \mathbf{J} representa el flujo de carga, entonces, usando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V q dV &= - \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS, \\ \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV &= - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV, \\ \int_V \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV &= 0,\end{aligned}$$

pero como V es un volumen arbitrario, se tiene que,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.16)$$

En cada dominio, interior y exterior, la corriente neta en un punto debe ser igual a la suma de la tasa de acumulación de carga en ese punto y la corriente iónica que sale del dominio en el punto. Esto se expresa como:

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \chi I_{ion}, \quad (5.17)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_e = \frac{\partial q_e}{\partial t} + \chi I_{ion}, \quad (5.18)$$

donde I_{ion} es la corriente iónica por unidad de superficie a través de la membrana, por lo tanto la constante χ representa el área de la membrana celular por unidad de volumen, ya que χI_{ion} debe tener unidades de corriente por unidad de volumen. Nótese que este término aparece con signos contrarios en cada ecuación, ya que esta corriente iónica se da exclusivamente a través de la membrana celular.

De las ecuaciones (5.15), (5.17) y (5.18),

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i + \nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0, \quad (5.19)$$

se establece que la corriente total se conserva. Sustituyendo las ecuaciones (5.13) y (5.14) en la ecuación (5.19),

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla u_i) + \nabla \cdot (\sigma_e \nabla u_e) = 0. \quad (5.20)$$

La separación de las cargas eléctricas en el exterior y en el interior de las células da lugar a una diferencia de potencial, se denomina potencial membrana y se define como

$$v = u_i - u_e. \quad (5.21)$$

La diferencia de potencial de membrana se debe a la distribución diferencial de iones (sodio, potasio, magnesio y cloro). Se relaciona con la cantidad de carga de los iones separados por la relación

$$v = \frac{q}{\chi C_m}, \quad (5.22)$$

donde C_m es el capacitancia de la membrana celular y

$$q = \frac{1}{2}(q_i - q_e). \quad (5.23)$$

Sustituyendo la ecuación (5.23) en la ecuación (5.22) y obteniendo sus derivadas

$$\chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (q_i - q_e)}{\partial t}, \quad (5.24)$$

y de la ecuación (5.15) obtenemos que:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_e}{\partial t} = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (5.25)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.17), esto da

$$-\nabla \cdot J_i = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \chi I_{ion}, \quad (5.26)$$

y usando (5.13), entonces

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla u_i) = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + I_{ion}. \quad (5.27)$$

Las ecuaciones (5.20) y (5.27) describen las variaciones en los tres potenciales u_i , u_e y v . Usando la definición de v , tenemos que

$$u_i = u_e + v,$$

sustituyendo en la ecuación (5.27), entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma_i \nabla (u_e + v)) &= \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + I_{ion}, \\ \nabla \cdot (\sigma_i \nabla (u_e + v)) + \nabla \cdot (\sigma_e \nabla u_e) &= 0, \end{aligned}$$

y una reorganización de los términos da

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) + \nabla \cdot (\sigma_i \cdot \nabla u_e) = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + I_{ion}, \quad (5.28)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) + \nabla \cdot ((\sigma_i + \sigma_e) \nabla u_e) = 0. \quad (5.29)$$

La corriente eléctrica estacionaria, a la corriente eléctrica que se produce de forma que la densidad de carga q de cada punto del conductor es constante, es decir que se cumple que:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (5.30)$$

entonces

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.31)$$

Suponiendo que el corazón está rodeado por un medio no conductor, se requiere que el componente normal de la corriente tanto intracelular como extracelular sea cero en la frontera,

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J}_i = 0, \quad (5.32)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J}_e = 0, \quad (5.33)$$

donde \hat{n} es el vector normal de la unidad exterior de la frontera del corazón. De las ecuaciones (5.13), (5.14) y sustituyendo la ecuación $u_i = v + u_e$, tenemos

$$\hat{n} \cdot (\sigma_i \nabla v + \sigma_i \nabla u_e) = 0, \quad (5.34)$$

$$\hat{n} \cdot (\sigma_e \nabla u_e) = 0. \quad (5.35)$$

Por el término corriente iónica I_{ion} , la opción más simple es asumir que es una función del potencial transmembrana solamente:

$$I_{ion} = f(v). \quad (5.36)$$

El modelo de Hodgkin-Huxley es uno de los tantos modelos matemáticos que simulan los potenciales de acción, como se muestra en la Figura 3.4. Una idea de cómo funciona el potencial de acción, qué sucedería si se encuentra en estado de reposo.. Si la perturbación es pequeña, la célula responde con una variación prácticamente lineal del potencial de membrana que inmediatamente vuelve de nuevo a su estado de reposo. Si, en caso contrario, la

estimulación es suficientemente grande para aumentar el potencial de membrana por encima de un determinado potencial umbral, la célula cardíaca se activa, produciéndose una variación brusca y no lineal del potencial de membrana.

Una opción es definir a f como un polinomio cúbico

$$f(v) = A^2(v - v_{rest})(v - v_{th})(v - v_{speak}), \quad (5.37)$$

donde A es un parámetro que se determina, es decir, la tasa de cambio del potencial transmembrana en la fase de polarización. Además, v_{rest} es el potencial de reposo, v_h es llamado potencial umbral, y v_{max} es el potencial máximo. Requerimos que $v_{max} > v_{th} > v_{rest}$.

5.3. El modelo monodominio

A diferencia del modelo bidominio, las ecuaciones del monodominio no relacionan explícitamente los potenciales intracelular y extracelular, si no su diferencia, es decir, el potencial transmembrana. Al hacer una suposición sobre los tensores de conductividad σ_i y σ_e , es posible simplificar el sistema para una ecuación escalar, que describe solo la dinámica del potencial transmembrana v . Si asumimos tasas de anisotropía iguales, es decir, $\sigma_e = \lambda\sigma_i$, donde λ es una constante escalar, entonces σ_e pueden eliminarse de (5.28)-(5.29), resultando en

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) + \nabla \cdot (\sigma_i \nabla u_e) = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \chi I_{ion}, \quad (5.38)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) + (1 + \lambda) \nabla \cdot (\sigma_i \nabla u_e) = 0. \quad (5.39)$$

De la ecuación (5.39)

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla u_e) = -\frac{1}{1 + \lambda} \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v), \quad (5.40)$$

y sustituyendo en la ecuación (5.38)

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) - \frac{1}{1 + \lambda} \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \chi I_{ion}. \quad (5.41)$$

Simplificando la ecuación (5.41)

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) = \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \chi I_{ion}. \quad (5.42)$$

De la ecuaciones (5.34) y sustituyendo $\sigma_e = \lambda\sigma_i$ en la ecuación (5.35),

$$n \cdot (\sigma_i \nabla v + \sigma_i \nabla u_e) = 0, \quad (5.43)$$

$$n \cdot (\lambda\sigma_i \nabla u_e) = 0. \quad (5.44)$$

La segunda ecuación da

$$n \cdot (\sigma_i \nabla u_e) = 0 \quad (5.45)$$

y sustituyendo esto en la primera ecuación da

$$n \cdot (\sigma_i \nabla v) = 0. \quad (5.46)$$

En resumen, las ecuaciones del modelo monodominio son:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1+\lambda} \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) &= \chi C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \chi I_{ion}, \\ n \cdot (\sigma_i \nabla v) &= 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

El modelo de monodominio, dado por (5.47) es una simplificación significativa de las ecuaciones de bidominio originales.

Es bien conocido que la configuración y orientación de las fibras del tejido cardíaco hacen que la conducción eléctrica sea anisotrópica. Por ello la conductividad se modela por un tensor anisotrópico como sigue: Para cada punto del dominio $x \in \Omega$, existe una matriz de rotación R tal que $\sigma = R\sigma^*\mathbb{R}^T$. Se especifica entonces

$$\sigma^* = \text{diag}(\sigma_l, \sigma_t, \sigma_n)$$

donde los subíndices l, t, n indican las conductividades longitudinal, transversal y normal, respectivamente.

La Tabla 5.1 muestra algunos valores típicos de conductividad extracelular e intracelular, así como la capacitancia de membrana C_m y el factor χ parámetros [7, p.29].

C_m	1.0	$\mu\text{F}/\text{cm}^2$
χ	2000	cm^{-1}
σ_l^i	3.0	mS/cm
σ_t^i	1.0	mS/cm
σ_n^i	0.31525	mS/cm
σ_l^e	2.0	mS/cm
σ_t^e	1.65	mS/cm
σ_n^e	1.3514	mS/cm

Cuadro 5.1: Valores típicos de parámetros del modelo bidominio.

Capítulo 6

Simulaciones en SCIRun

En esta sección realizamos simulaciones realistas de los modelos de isquemia y de desfibrilación, discutidos en el capítulo anterior, con ayuda del software SCIRun que utiliza el paradigma de Modelación Basada en Imágenes (*Image Based Modelling*). En la simulación de la desfibrilación, se permiten colocar electrodos dentro o fuera del torso. La simulación de la zona isquémica se define modificando las conductividades de los espacios intracelular y extracelulares en función del espacio y el potencial transmembrana.

6.1. Simulación de isquemia

La isquemia miocárdica es una condición potencial mortal que ocurre cuando el flujo sanguíneo al corazón se reduce, lo que impide que el músculo cardíaco reciba suficiente oxígeno, (ver [\[19\]](#)). En la Figura [6.1](#) se observa un corazón con el músculo dañado.

Bloqueo del suministro de sangre

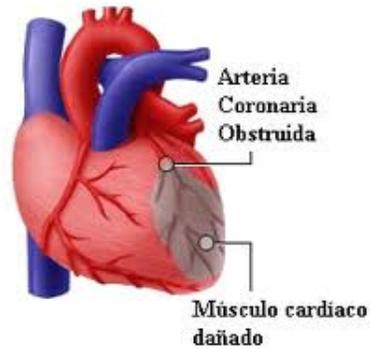


Figura 6.1: Isquemia miocárdica, [34].

El miocardio es el tejido muscular del corazón, encargado de bombear la sangre por el sistema circulatorio mediante su contracción. Está relacionado con las siguientes capas:

1. Endocardio: Forma el revestimiento interno de las aurículas y los ventrículos. Esta adherido al miocardio.
2. Epicardio: Es una membrana serosa, es la capa visceral que está pegada a la superficie del corazón. Esta capa visceral junto con la lámina parietal forma el saco del pericardio.

En todo el corazón y parte de los vasos sanguíneos están protegidos frente a la fricción por una envoltura, el pericardio. Como se muestra en la Figura [6.2]

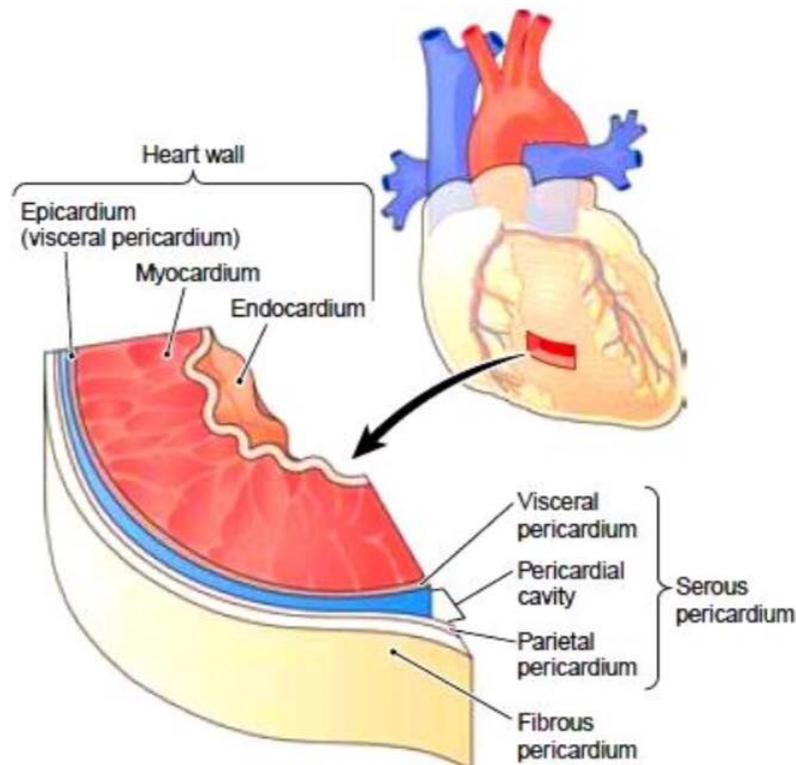


Figura 6.2: Las capas del músculo cardíaco, [35].

en el pericardio se distinguen dos capas.

1. Fibrosa: Es la membrana que recubre el corazón y tiene forma de saco.
2. Serosa: Se encuentra en la parte interna del corazón y consta de dos hojas: la hoja parietal, y la hoja visceral o epicardio.

Se presenta el siguiente **modelo de volumen conductor cuasiestático de un corazón isquémico** basado en datos de experimentos reales [16]. En el modelo bidominio se supone que todas las fuentes eléctricas dentro del corazón están ubicadas dentro de las membranas celulares de los miocitos (células del corazón).

Las diferencias de potencial extracelular que surgen entre los tejidos sanos e isquémicos causan registros de ECG. Durante la fase del potencial de acción, se pueden suponer que todas las células están en estado depolarizado, sin

embargo el potencial transmembrana (la diferencia de potencial) no es lo mismo para las células isquémicas y para las sanas. El último efecto hace que las llamadas corrientes de lesión fluyan dentro de los espacios intracelular y extracelular. Estas corrientes se pueden observar en la superficie del corazón como diferencias de potenciales que se traducen en los denominados cambios ST en el ECG.

Los electrodos interpolados que registran potenciales intramiocardios elevados de ST 40 % se clasificaron como isquémicos y se umbralaron para identificar la geometría de zonas isquémicas. En la Figura 6.3

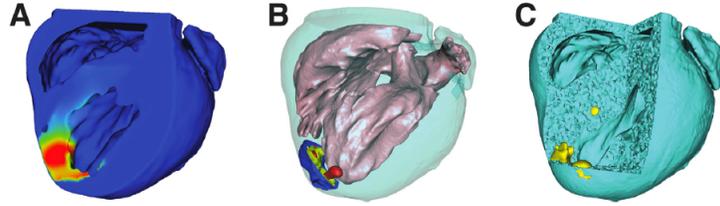


Figura 6.3: Tipos de mallas, [2].

En la malla trifásica de fase I, como se ilustra en la imagen (A) proporcionaron entradas al paquete BioMesh3D con que se generaron las mallas de fase II, que contienen geometrías de corazón, sangre y zona isquémica. Las conductividades anisotrópicas, representan espacios tanto intracelulares como extracelulares, se identificaron y se asignaron dentro de cada malla de fase II, como se muestra en imagen (B). En la imagen (C) es la malla resultante, que contiene tejidos cardíacos conformes, volúmenes sanguíneos y regiones isquémicas específicas del sujeto.

La separación de cargas eléctricas da una diferencia de potenciales, a través del potencial transmembrana. En los modelos de fuentes isquémicas se define el potencial transmembrana como:

$$\phi_m = \phi_e - \phi_i$$

entre las regiones isquémicas y los tejidos sanos. El modelo de la isquemia se modeló utilizando una descripción pasiva del modelo bidominio, de la forma

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_i) \nabla \phi_e = -\nabla \cdot \bar{\sigma}_i \nabla \phi_m, \quad (6.1)$$

condiciones de frontera del modelo (6.1) son las siguientes

$$\vec{n}_{epi} \cdot (\bar{\sigma}_e + \bar{\sigma}_i) \nabla \phi_e = 0, \quad \chi \in \partial\Omega_{H,epi}, \quad (6.2)$$

$$\vec{n}_{endo} \cdot (\bar{\sigma}_e \nabla \phi_e) = \vec{n}_{endo} \cdot (\bar{\sigma}_b \nabla \phi_b), \quad \chi \in \partial\Omega_{H,endo}, \quad (6.3)$$

$$\phi_e = \phi_b, \quad \chi \in \partial\Omega_{H,endo}, \quad (6.4)$$

$$\phi_i = 0, \quad \chi \in \partial\Omega_b, \quad (6.5)$$

donde $\bar{\sigma}_e$ y $\bar{\sigma}_i$ representan los tensores de conductividad anisotrópicos extracelular e intracelular, respectivamente, y ϕ_e y ϕ_b son los potenciales extracelular y del volumen sanguíneo, respectivamente. La ecuación (6.2) es condición de frontera Neumann sin flujo a lo largo de la superficie epicárdica y la ecuación (6.3) describe el flujo de corriente normal junto con la continuidad de potenciales. La ecuación (6.4) describe la continuidad de potenciales a lo largo del endocardio.

En la siguiente Figura 6.4 se muestra el modelo del bidominio con condiciones de frontera

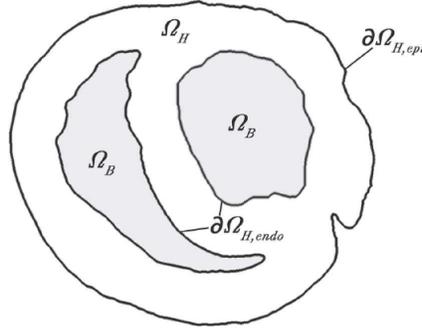


Figura 6.4: Modelo con condiciones de frontera, [2].

donde Ω_H representa el volumen del miocardio, Ω_B volumen de fluido sanguíneo, tales como las cavidades auricular y ventricular. El miocardio Ω_H está acodado por el epicardio ($\partial\Omega_{H,epi}$), con sus respectivos vectores normales unitarios exteriores \vec{n}_{epi} y \vec{n}_{endo} .

Las propiedades conductoras del tejido del músculo cardíaco que esta formado por fibras son fuertemente anisotrópicas, y la conductividad es mayor en la dirección de las fibras que en la dirección de la fibra cruzada, lo que implica que los parámetros $\bar{\sigma}_e$ y $\bar{\sigma}_i$ son cantidades tensoriales.

La siguiente tabla muestra los valores de conductividad del tensor dentro de la región isquémica y de la región sana, la siguiente tabla son datos del artículo (ver [16])

Conductividad	Conductividad saludable	Conductividad isquémica
σ_{el}	1	$\frac{1}{2}$
σ_{il}	1	$\frac{1}{10}$
σ_{et}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
σ_{it}	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1000}$

y en el tutorial [16] utilizaron los siguientes valores de conductividad y el valor del voltaje es de $V=-30$ y $b=0.3$.

Conductividad	Conductividad saludable	Conductividad isquémica
σ_{el}	0.16	0.08
σ_{il}	0.16	0.16
σ_{et}	0.05	0.03
σ_{it}	0.16	0.018

Los valores de conductividad del tensor en regiones sanas e isquémicas. En el dominio del tejido en dirección a lo largo σ_{el} y σ_{il} , extracelular e intracelular, respectivamente, en el dominio del tejido transversal σ_{et} y σ_{it} , extracelular e intracelular, respectivamente.

En el tutorial [16] menciona que todavía están en proceso de determinar realmente cuál es la forma de la zona fronteriza isquémica. En SCIRun, la zona isquémica viene predefinida a partir de escáneres tomográficos y la forma funcional es

$$\phi_m(x) = V_{max} \frac{d}{|d|} \left(1 - \frac{1}{1 + b(|d^2|)} \right), \quad (6.6)$$

donde V_{max} es el voltaje máximo, b es un parámetro positivo y $d = \pm dist(x, \partial Isq)$ es la distancia con signo del punto x a la frontera del tejido isquémico, ∂Isq . El signo es (+) si x está en la región isquémica y (-) si x está en la región sana, si $x \in \partial Isq$, por definición $d = 0$. Por ejemplo, tomando $V_{max} = -15\text{mV}$, la zona isquémica corresponde a valores $d > 0$ en la gráfica de la función (6.6), por lo que el potencial en la parte central de la zona isquémica será cercana a -15mV y en la zona sana lejos de la zona isquémica el potencial será cercano a $+15\text{mV}$. En la Figura 6.5, el color rojo corresponde a valores altos y azul a colores bajos en la escala de colores (heat map). Otros autores

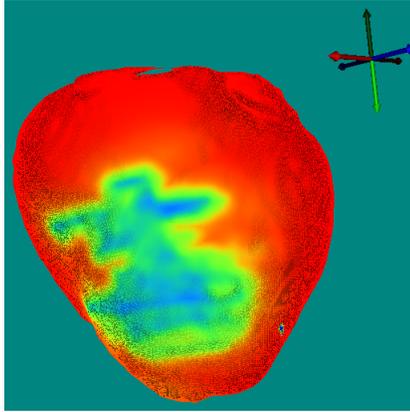


Figura 6.5: Visualización de la zona isquémica de la ecuación (6.6).

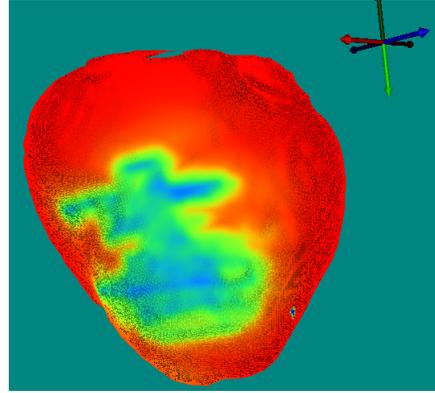


Figura 6.6: Visualización de la zona isquémica de la ecuación (6.8).

[Burton et al, 2018] usan la forma funcional

$$\phi_m(x) = \begin{cases} V_m e^{\frac{-d^2}{2\sigma^2}} & d < S_1, \\ V_m e^{\frac{-(S_1)^2}{\sigma^2}} \left(1 - \frac{d-S_1}{S_2-S_1}\right) & S_1 \leq d < S_2, \\ 0 & d \geq S_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

que tiene un comportamiento similar a las anteriores.

La función (6.6) es similar a la función (6.8), que es más simple.

$$\phi_m(x) = V \frac{d}{|d|} \tanh(|d|), \quad (6.8)$$

La visualización del potencial transmembrana (6.6) con dos valores diferentes en el parámetro b para ver el efecto del desenfoque.

Para encontrar el potencial extracelular se utilizó el método de elemento finito (FEM). La visualización del potencial extracelular, (ver Figura (6.11)).

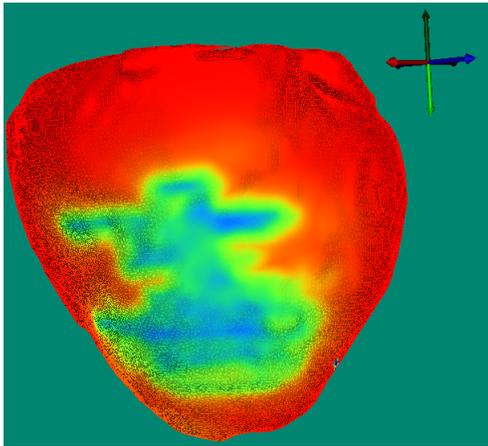


Figura 6.7: Visualización de la zona isquémica con $b = 0.3$.

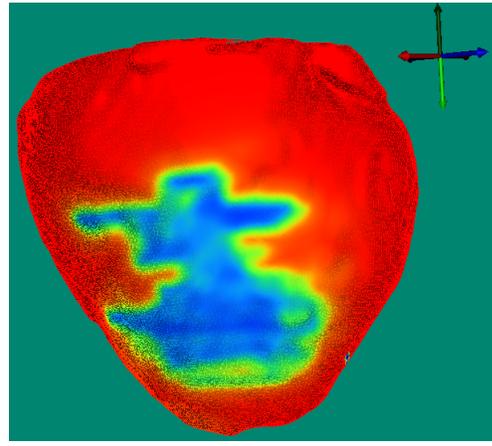


Figura 6.8: Visualización de la zona isquémica con $b = 1$.

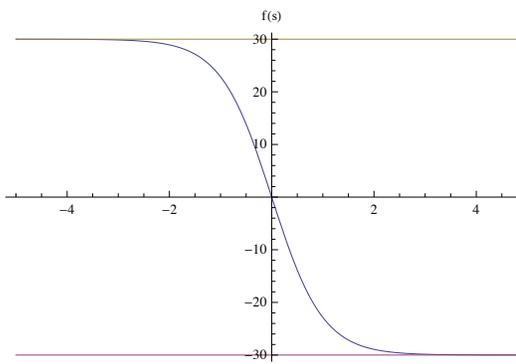


Figura 6.9: Gráfica de la función (6.8).

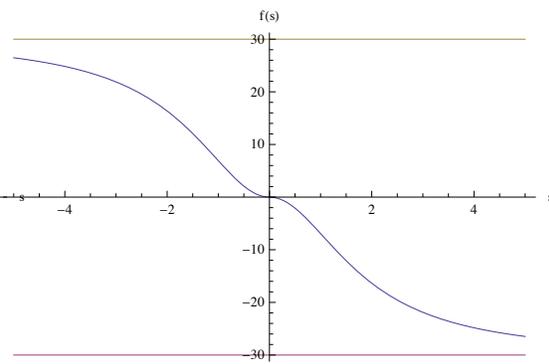


Figura 6.10: Gráfica de la función (6.6).

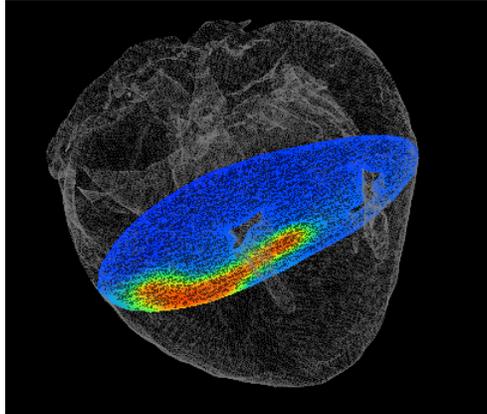


Figura 6.11: Potencial extracelular calculado por el método de elemento finito.

6.2. Simulación de desfibrilación

En esta sección se mencionarán dos tipos de terapia que mediante la aplicación de un choque eléctrico de corriente continua; consigue revertir distintos trastornos del ritmo cardíaco. La desfibrilación es la entrega de corriente eléctrica al músculo del corazón, ya sea de forma directa al pecho abierto o indirectamente a través de la pared del tórax para determinar con una fibrilación ventricular (FV) y taquicardias sin pulso (TV), como se muestra en las siguientes Figuras [6.12](#) y [6.13](#), (ver [17](#)).

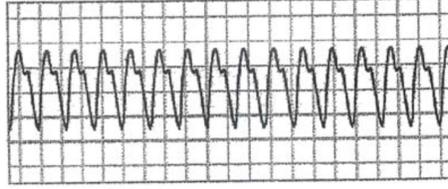


Figura 6.12: Fibrilación ventricular, [17].

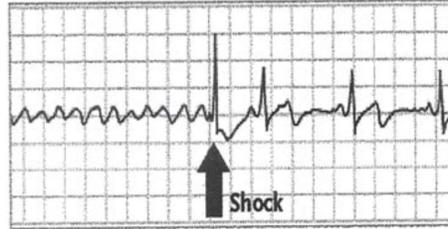


Figura 6.13: Taquicardias sin pulso, [17].

El modelo de desfibrilación describe el potencial eléctrico en el estado estable en un conductor de volumen no homogéneo, de la siguiente manera

$$\nabla \cdot (\sigma(x)\nabla\Phi(x)) = 0, \quad x \in \Omega \quad (6.9)$$

donde σ es el tensor de conductividades y Φ es el potencial eléctrico.

Las condiciones de frontera particulares para el modelo de desfibrilación son:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= V_k, \quad x \in \bar{\Omega}_k, \\ \hat{n} \cdot \sigma(x)\nabla\Phi(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad x \notin \bigcup_k \bar{\Omega}_k \end{aligned}$$

donde V_k es el potencial aplicado en el electrodo $k = 1, 2, \dots$. La región $\bar{\Omega}_k$ puede contener parte de la frontera o del interior del dominio, por ejemplo para electrodos de tipo aguja (wire), de lata (can), plano (plate), etc. que pueden ser invasivos. Si $\bar{\Omega}_k \subset \partial\Omega$, entonces el método de desfibrilación es no invasivo.

Algunos modos básicos de la colocación de los electrodos deberán estar ubicadas a la altura del corazón, en el artículo (ver [15]) realizó la simulación de un torso humano utilizando datos previamente segmentados y menciona tres tipos de electrodos con las siguientes características:

1. El electrodo de alambre es un cable y presenta una longitud de 0.1 y el ancho 0.003.
2. El electrodo de lata su ubicación y el tamaño del electrodo pueden modificarse mediante widget, (ver [15]).
3. El electrodo plano es similar al electrodo de alambre y presenta una longitud 0.1, el grosor en 0.003 y ancho a 0.02.

Los desfibriladores tiene dos modos básicos de operación: desfibrilación externa y desfibrilación interna. La desfibrilación interna es durante una cirugía de corazón abierto y la energía es descargada directamente en el corazón, (ver Figura 6.14). El máximo de energía de desfibrilación directamente en el corazón es de 50 joules.

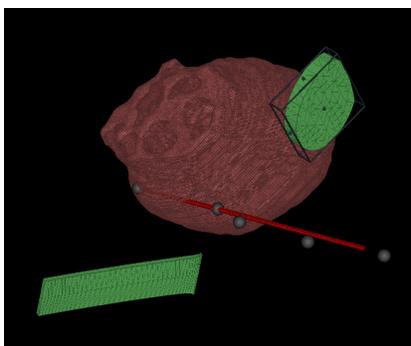


Figura 6.14: Tres tipos de electrodos directamente en el corazón (método invasivo en perros).

En la desfibrilación externa se colocan los electrodos sobre el torso del paciente y descarga el choque eléctrico o desfibrilación apretando simultáneamente dos puntos de descarga, (ver Figuras 6.15, 6.16, 6.17). La descarga eléctrica debe durar menos de 20 milisegundos y entrega un choque de alto voltaje de alrededor de 2,000 a 4,000 volts.

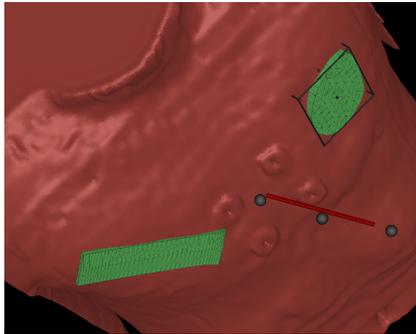


Figura 6.15: Torso con tres electrodos
electrodos (método no invasivo).

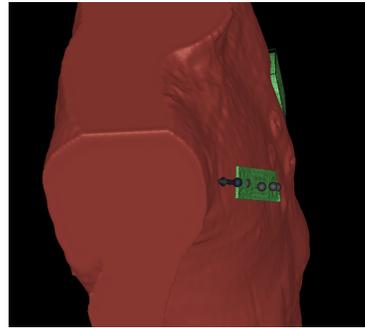


Figura 6.16: Torso con dos electrodos
(método no invasivo).

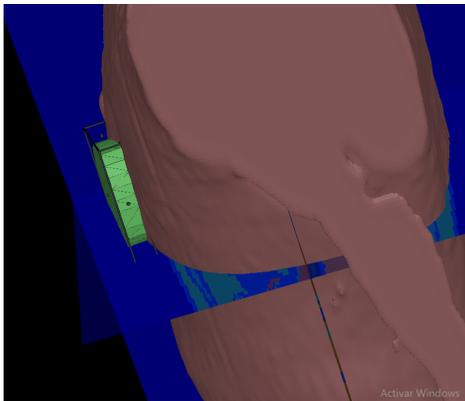
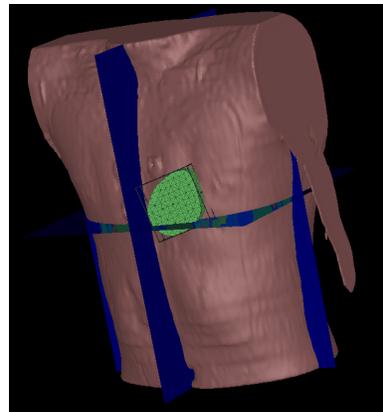


Figura 6.17: Torso con un electrodo (método no invasivo).



En la Figura [6.18](#) es la simulación de elemento finito de dos electrodos en el torso. Los electrodos son de lata y alambre. En el torso, se utilizo en el tutorial [15](#) para demostrar las técnicas necesarias para resolver este tipo de soluciones equipotenciales.

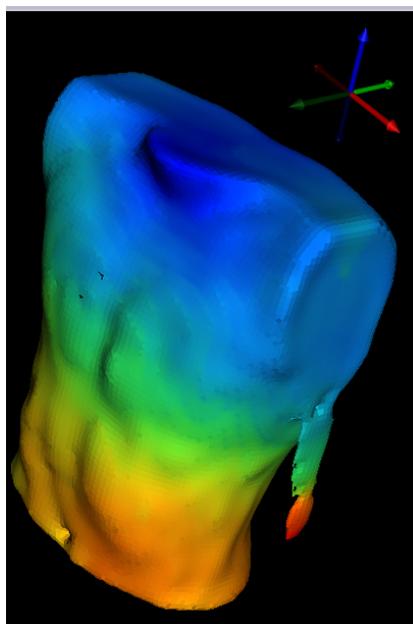


Figura 6.18: Dos electrodos en el torso, con superficies equipotenciales (azul potencial alto, amarillo bajo).

Capítulo 7

Problemas mal planteados relacionados con los modelos de ECG

En esta sección presentamos las soluciones más simples del modelo conductor en un anillo y en una esfera. Mostramos por medio de la solución de los correspondientes problemas con valores a la frontera, por qué el problema inverso es mal condicionado.

Vamos a presentar dos ejemplos sencillos cuya simetría permite expresar las soluciones al problema directo y al problema inverso en términos de un operador definido por un núcleo integral, conocidos en la literatura como operadores de Hilbert-Schmidt. Consideramos la solución al modelo del volumen conductor en un anillo y en una esfera. En ambos casos el núcleo integral, relacionado directamente con la función de Green, se obtiene en forma de series de potencia. Como el objetivo de destacar la dificultad de la solución al problema inverso estas expresiones justifican formalmente por qué el problema inverso es mal planteado en el sentido de Hadamard.

En geometrías más generales, si se pretende hacer modelos más realistas, el cálculo de la función de Green es prácticamente imposible, por lo cual se debe recurrir a métodos numéricos como elemento finito, diferencias finitas, Galerkin o ecuaciones integrales de frontera. La fundamentación teórica se basa en replantear el problema de condiciones de frontera en su forma débil, introduciendo los espacios de Sobolev acorde a las condiciones de frontera. Este enfoque es el que se sigue en la tesis del problema de Electroencefalografía

de Yadira Carrillo¹ y será resumido brevemente el apéndice correspondiente.

7.1. El problema directo en un anillo

Partimos la ecuación de Laplace en coordenadas polares

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \quad (7.1)$$

en el anillo $0 < R_1 < r < R_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando el método de separación de variables se obtiene la solución en forma de serie

$$u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin(n\theta). \quad (7.2)$$

El problema directo del modelo conductor en el anillo se plantea en el dominio

$$R_1 < r < R_2, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

como

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \theta) &= 0, \\ u(r, \theta + 2\pi) &= u(r, \theta), \\ u(R_1, \theta) &= g(\theta), \\ u_r(R_2, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Problema directo: Calcular $d(\theta) = u(R_2, \theta)$.

Simplifiquemos el problema suponiendo simetría par: $u(r, -\theta) = u(r, \theta)$. Para ello es suficiente que la condición de Dirichlet tenga esta propiedad

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos(n\theta).$$

Propongamos entonces la solución

$$u(r, \theta) = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos(n\theta). \quad (7.4)$$

¹Trinidad, G. Y., Métodos variacionales en espacios de Hilbert para la identificación de Fuentes Bioléctricas (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 1–70.

El problema directo se reduce a determinar el valor de las constantes a_0 , b_0 , a_n y b_n ya que las constantes c_n y d_n son cero.

Imponiendo las condiciones de Dirichlet en el radio interior R_1 y de Neumann en el radio exterior R_2 obtenemos,

$$\begin{aligned} g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos(n\theta) &= a_0 + b_0 \ln(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) \cos(n\theta) \\ 0 &= \frac{b_0}{R_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n R_2^{n-1} - n b_n R_2^{-n-1}) \cos(n\theta). \end{aligned}$$

Igualando los términos de orden cero

$$g_0 = a_0 + b_0 \ln(R_1) \quad (7.5)$$

$$0 = \frac{b_0}{R_2}, \quad (7.6)$$

de donde $b_0 = 0$ y $a_0 = g_0$. Para $n = 1, 2, \dots$ obtenemos el sistema lineal de ecuaciones para a_n y b_n

$$\begin{aligned} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} &= g_n \\ a_n R_2^{n-1} - b_n R_2^{-n-1} &= 0. \end{aligned}$$

El determinante del sistema es

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_1^n & R_1^{-n} \\ R_2^{n-1} & -R_2^{-n-1} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n - \frac{1}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \\ &= -\frac{1}{R_2} \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \right) = -\frac{1}{R_2} (\lambda^n + \lambda^{-n}), \end{aligned}$$

donde $\lambda = \frac{R_1}{R_2} < 1$. Resolviendo para a_n y b_n se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g_n & R_1^{-n} \\ 0 & -R_2^{-n-1} \end{vmatrix} = \frac{R_2}{\lambda^n + \lambda^{-n}} R_2^{-n-1} g_n \\ &= \frac{g_n}{R_2^n (\lambda^n + \lambda^{-n})}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1^n & g_n \\ R_2^{n-1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{R_2}{\lambda^n + \lambda^{-n}} g_n R_2^{n-1} \\ &= \frac{g_n R_2^n}{\lambda^n + \lambda^{-n}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución al problema directo es

$$\begin{aligned} d(\theta) &= u(R_2, \theta) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{g_n}{R_2^n (\lambda^n + \lambda^{-n})} \right) R_2^n + \left(\frac{g_n R_2^n}{\lambda^n + \lambda^{-n}} \right) R_2^{-n} \right) \\ &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2g_n}{\lambda^n + \lambda^{-n}} \right) \cos(n\theta). \end{aligned}$$

Observe que si, al igual que hicimos con la condición de frontera $g(\theta)$, expandemos la observación en serie de Fourier

$$d(\theta) = d_0 + \sum_{i=1}^{\infty} d_n \cos(n\theta)$$

entonces podemos escribir la relación entre los coeficientes $\mathbf{g} = (g_n)_{n=0}^{\infty}$ y $\mathbf{d} = (d_n)_{n=0}^{\infty}$ de la observación como una relación lineal mediante una matriz diagonal infinita

$$\mathbf{d} = K\mathbf{g}, \quad K = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\lambda^n + \lambda^{-n}} \right).$$

Los valores $\sigma_0 = 1$,

$$\sigma_n = \frac{2}{\lambda^n + \lambda^{-n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

tienden a cero rápidamente cuando $n \rightarrow \infty$ y se conocen como *valores singulares*. Este hecho es la razón principal por la que el problema inverso sea *severamente mal condicionado*.

Vamos a formalizar este argumento usando la representación integral de la solución al problema directo.

A partir de las expresiones para los coeficientes de Fourier de $g(\theta)$, la ecuación solución puede escribirse en como sigue:

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^n + \lambda^{-n})} \left(\int_0^{2\pi} g_1(s) \cos(ns) ds \right) \cos(n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^n + \lambda^{-n})} \left(\int_0^{2\pi} g_1(s) \cos(ns) \cos(n\theta) \right) ds \end{aligned}$$

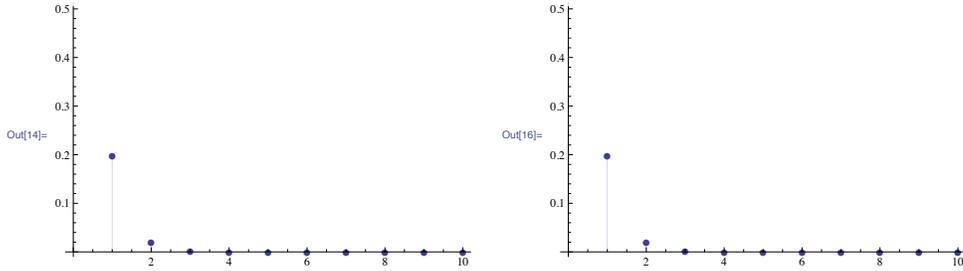


Figura 7.1: Gráfica de valores singulares para distintos valores del cociente $\lambda = R_1/R_2$, $\lambda = 0.5, 0.1$.

usando ahora la relación trigonométrica

$$\cos(ns) \cos(n\theta) = \frac{\cos(n(s - \theta)) + \cos(n(s + \theta))}{2}$$

y suponiendo que es posible intercambiar la sumatoria con la integral (esto se justifica si la convergencia es uniforme), obtenemos

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n(s - \theta)) + \cos(n(s + \theta))}{\lambda^n + \lambda^{-n}} \right) g(s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} k(\theta, s) g(s) ds \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde el núcleo integral

$$k(\theta, s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n(s - \theta)) + \cos(n(s + \theta))}{\lambda^n + \lambda^{-n}} \quad (7.8)$$

es una función continua de (θ, s) en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y $g(s)$ es, por ejemplo, una función continua. Entonces en la norma del supremo, $\|f\|_{\infty} = \sup_{s \in [0, 2\pi]} |f(s)|$,

$$\|d\|_{\infty} \leq 2\pi C_1 \|g\|_{\infty}$$

donde

$$C_1 = \sup_{(\theta, s) \in R} |k(\theta, s)|.$$

Se pueden usar otro tipo de normas, por ejemplo si $g \in L_2([0, 2\pi])$

$$\|g\|_{L_2([0, 2\pi])} = \int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds$$

es la norma en $L_2([0, 2\pi])$.

Proposición 1. *Suponga que $k(\theta, s) \in L_2([0, 2\pi]^2)$, entonces el operador $d = K[g]$ definido por (7.7) define un operador compacto $K: L_2([0, 2\pi]) \rightarrow L_2([0, 2\pi])$.*

Demostración. ²³

Probemos que el operador $K: L_2([0, 2\pi]) \rightarrow L_2([0, 2\pi])$ es continuo: Si $d = K[g]$,

$$\begin{aligned} \|d\|_{L_2([0, 2\pi])}^2 &= \int_0^{2\pi} |d(\theta)|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |k(s, \theta)| |g(s)| ds \right)^2 d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |k(s, \theta)|^2 ds \int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |k(s, \theta)|^2 ds d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds \right) \\ &= \|k\|_{L_2([0, 2\pi]^2)}^2 \|g\|_{L_2([0, 2\pi])}^2 \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la desigualdad de Schwarz. Nótese que se sigue que la norma del operador continuo $K: L_2([0, 2\pi]) \rightarrow L_2([0, 2\pi])$ es

$$\|K\| = \|k\|_{L_2([0, 2\pi]^2)}^2. \quad (7.9)$$

Para demostrar la compacidad mostremos que K es el límite en la norma de operadores de operadores K_N de rango finito (por lo tanto compactos). Sea $\{e_n(s)\}_{n=1}^\infty$ una base ortonormal de $L_2([0, 2\pi])$, entonces $\{e_{mn}(\theta, s) = e_m(\theta)e_n(s)\}_{n,m=1}^\infty$ es una base ortonormal de $L_2([0, 2\pi]^2)$, luego podemos expandir

$$k(\theta, s) = \sum_{mn} k_{mn} e_m(\theta) e_n(s).$$

²http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/functional_analysis/pdf/chap2.pdf pp. 15, 32

³<http://people.math.gatech.edu/~heil/metricnote/chap8.pdf>

Definamos

$$k_N(\theta, s) = \sum_{m,n=1}^N k_{mn} e_m(\theta) e_n(s),$$

y denotemos por K_N el correspondiente operador integral con núcleo k_N . De (7.9) se sigue que

$$\|K - K_N\| = \|k - k_N\|_{L_2([0,2\pi]^2)}$$

y por lo tanto $K_N \rightarrow K$ en la norma de operadores. Mostremos que K_N tiene rango finito. Sea $f \in L_2([0, 2\pi])$. Para casi todo θ ,

$$\begin{aligned} K_N f(\theta) &= \int_0^{2\pi} k_N(\theta, s) f(s) ds = \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N k_{nm} e_m(\theta) e_n(s) f(s) ds \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} k_{nm} e_m(\theta) e_n(s) f(s) ds \\ &= \sum_{m=1}^N \left(\sum_{n=1}^N k_{nm} \int_0^{2\pi} e_n(s) f(s) ds \right) e_m(\theta). \end{aligned}$$

La igualdad anterior muestra que la $K_N f(\theta)$ es combinación lineal del número finito de funciones $\{e_m(\theta)\}_{m=1}^N$, por lo tanto la imagen $K_N(L_2([0, 2\pi])) \subset L_2([0, 2\pi])$ tiene dimensión finita. \square

7.2. El problema inverso en un anillo

Es una característica general que si un problema directo está definido por un operador compacto, entonces el problema inverso estará mal planteado en el sentido de Hadamard. En esta sección vamos a exhibir una solución explícita en forma de series del problema inverso.

El problema inverso se plantea como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \theta) &= 0, \\ u(r, \theta + 2\pi) &= u(r, \theta), \\ u(R_2, \theta) &= d(\theta), \\ u_r(R_2, \theta) &= 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Problema directo: Calcular $g(\theta) = u(R_1, \theta)$.

Expandimos en series de Fourier el dato y la incógnita, respectivamente

$$d(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(n\theta), \quad \text{el dato} \quad (7.11)$$

$$g(\theta) = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos n\theta \quad (7.12)$$

la incógnita

donde, para simplificar hemos supuesto que d es una función par. El problema se reduce entonces a calcular los coeficientes a_n , b_n .

A partir de las expresiones

$$u(R_2, \theta) = a_0 + b_0 \ln(R_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos(n\theta) \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial u(R_2, \theta)}{\partial r} = \frac{b_0}{R_2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n R_2^{n-1} - b_n R_2^{-n-1}) \cos(n\theta) \quad (7.14)$$

se obtiene $a_0 = d_0$, $b_0 = 0$ y el siguiente sistema de ecuaciones para $n = 1, 2, \dots$,

$$a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = d_n \quad (7.15)$$

$$a_n R_2^{n-1} - b_n R_2^{-n-1} = 0. \quad (7.16)$$

El determinante del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_2^n & R_2^{-n} \\ R_2^{n-1} & -R_2^{-n-1} \end{vmatrix} = -\frac{2}{R_2},$$

de donde se obtienen los valores de los coeficientes a_n y b_n

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} d_n & R_2^{-n} \\ 0 & -R_2^{-n-1} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d_n}{2R_2^n},$$

y

$$b_n = \frac{\begin{vmatrix} R_2^n & d_n \\ R_2^{n-1} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d_n R_2^n}{2}.$$

Por lo tanto la solución (7.4) es

$$u(r, \theta) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n}{2R_2^n} r^n + \frac{d_n R_2^n}{2} r^{-n} \right) \cos(n\theta) \quad (7.17)$$

por lo tanto la solución al problema inverso es

$$g(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n}{2R_2^n} R_1^n + \frac{d_n R_2^n}{2} R_1^{-n} \right) \cos(n\theta) \quad (7.18)$$

$$= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2} (\lambda^n + \lambda^{-n}) \cos(n\theta) \quad (7.19)$$

donde $\lambda = \frac{R_1}{R_2} < 1$.

De manera similar al problema directo, podemos escribir la solución al problema inverso en términos de un núcleo integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_0^{2\pi} d(s) \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^n + \lambda^{-n}) (\cos n(s - \theta) + \cos n(s + \theta)) \right) ds \\ &= \int_0^{2\pi} h(\theta, s) d(s) ds \end{aligned}$$

donde

$$h(\theta, s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^n + \lambda^{-n}) (\cos n(s - \theta) + \cos n(s + \theta)). \quad (7.20)$$

Así la solución al problema inverso queda expresado en términos de un operador con un núcleo integral

$$H: L_2([0, 2\pi]) \rightarrow L_2([0, 2\pi]), \quad d(\theta) = \int_0^{2\pi} h(\theta, s) d(s). \quad (7.21)$$

Notemos que ahora los coeficientes

$$\lambda^n + \lambda^{-n} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.22)$$

Esta propiedad tiene como consecuencia que pequeñas perturbaciones o errores en el dato d se amplifiquen, particularmente perturbaciones de alta frecuencia (n grande) son amplificadas por un valor del orden de λ^{-n} (recuerde que $\lambda = R_1/R_2 < 1$). En particular esta propiedad prueba el operador (7.21) es discontinuo.

Proposición 2. *El operador con núcleo integral, solución del problema inverso (7.21) con núcleo dada por (7.20) es discontinuo.*

7.3. Problema directo en una esfera

La Laplaciano en coordenadas esféricas es

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}u_{\phi\phi}. \quad (7.23)$$

La solución general se obtiene por el método de separación de variables,

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)}) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (7.24)$$

donde

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad m = -n, \dots, n \quad (7.25)$$

son los armónicos esféricos de superficie⁴. Con esta normalización se cumple

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m^n (Y_{m'}^{n'})^* d\Omega = \delta_{nm'} \delta_{mm'}, \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \quad (7.26)$$

El problema directo consiste en resolver el problema

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \theta, \phi) &= 0, & R_1 < r < R_2 & \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(R_1, \theta, \phi) &= g(\theta, \phi), \\ u_r(R_2, \theta, \phi) &= 0, \end{aligned} \quad (7.27)$$

Problema directo: Calcular $d(\theta, \phi) = u(R_2, \theta, \phi)$.

A partir de la solución general (7.24) obtenemos

$$\begin{aligned} u(R_1, \theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{nm}R_1^n + B_{nm}R_1^{-(n+1)}) Y_n^m(\theta, \phi), & (7.28) \\ u_r(R_2, \theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (nA_{nm}R_2^{n-1} - (n+1)B_{nm}R_2^{-(n+2)}) Y_n^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (7.29)$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics#Orthogonality_and_normalization

Expandimos el dato en serie de armónicos esféricos

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{nm} Y_n^m(\theta, \phi). \quad (7.30)$$

Con la normalización (7.26) los coeficientes se obtienen mediante la expresión

$$g_{nm} = \int_{S^2} g(\theta, \pi) Y_m^n(\theta, \pi)^* d\Omega \quad (7.31)$$

donde S^2 es la esfera unitaria.

Sustituyendo en las condiciones de frontera (7.28), (7.29) obtenemos el sistema de ecuaciones para las incógnitas A_{nm} y B_{nm} ,

$$\begin{aligned} A_{nm} R_1^n + B_{nm} R_1^{-(n+1)} &= g_{nm}, \\ n A_{nm} R_2^{n-1} - (n+1) B_{nm} R_2^{-(n+2)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

El discriminante del sistema es

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_1^n & R_1^{-(n+1)} \\ n R_2^{n-1} & -(n+1) R_2^{-(n+2)} \end{vmatrix} = -(n+1) R_2^{-(n+2)} R_1^n - n R_2^{n-1} R_1^{-(n+1)} \\ &= -\frac{1}{R_2^2} ((n+1) \lambda^n + n \lambda^{-(n+1)}), \end{aligned}$$

de donde $\lambda = \frac{R_2}{R_1}$. La solución de A_{nm} y B_{nm}

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\begin{vmatrix} g_{nm} & R_1^{-(n+1)} \\ 0 & -(n+1) R_2^{-(n+2)} \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{(n+1) R_2^{-2} R_2^{-(n+2)} g_{nm}}{(n+1) \lambda^n + n \lambda^{-(n+1)}} = \frac{(n+1) R_2^{-(n+4)} g_{nm}}{(n+1) \lambda^n + n \lambda^{-(n+1)}}, \\ B_{nm} &= \frac{\begin{vmatrix} R_1^n & g_n \\ n R_2^{n-1} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{n R_2^{-2} R_2^{n-1} g_{nm}}{(n+1) \lambda^n + n \lambda^{-(n+1)}} = \frac{n R_2^{n-3} g_{nm}}{(n+1) \lambda^n + n \lambda^{-(n+1)}}. \end{aligned}$$

La solución al problema directo

$$d(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{nm} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (7.33)$$

en forma de serie en armónicos esféricos es,

$$\begin{aligned}
d(\theta, \phi) &= u(R_2, \theta, \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(n+1)R_2^{-(n+4)} g_{nm} R_2^n}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}} + \frac{nR_2^{n-3} g_{nm} R_2^{-(n+1)}}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}} \right) Y_n^m(\theta, \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(n+1)g_{nm}}{R_2^4((n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)})} + \frac{ng_{nm}}{R_2^4((n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)})} \right) Y_n^m(\theta, \phi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)g_{nm}}{R_2^4((n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)})} Y_n^m(\theta, \phi).
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Esta relación puede escribirse como

$$\mathbf{d} = K\mathbf{g}, \quad K = \text{diag} \left(\frac{(2n+1)}{R_2^4((n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)})} \right) \tag{7.35}$$

eligiendo una ordenación apropiada de los índices n, m .

7.4. Problema inverso en una esfera

$$\begin{aligned}
\Delta u(r, \theta, \phi) &= 0, \quad R_1 < r < R_2 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\
u(R_2, \theta, \phi) &= d(\theta, \phi), \\
u_r(R_2, \theta, \phi) &= 0,
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Problema inverso: Calcular $g(\theta, \phi) = u(R_1, \theta, \phi)$.

$$u(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{nm} R_2^n + B_{nm} R_2^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\theta, \phi), \tag{7.37}$$

$$u_r(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(nA_{nm} R_2^{n-1} - (n+1)B_{nm} R_2^{-(n+2)} \right) Y_n^m(\theta, \phi). \tag{7.38}$$

$$d(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} Y_n^m(\theta, \phi), \quad \text{el dato} \tag{7.39}$$

$$\tag{7.40}$$

Con la normalización (7.26) los coeficientes se obtienen mediante la expresión

$$d_{nm} = \int_{S^2} d(\theta, \pi) Y_m^n(\theta, \pi)^* d\Omega \quad (7.41)$$

donde S^2 es la esfera unitaria.

Sustituyendo en las condiciones de frontera (7.37), (7.38) obtenemos el sistema de ecuaciones para las incógnitas A_{nm} y B_{nm} ,

$$\begin{aligned} A_{nm} R_2^n + B_{nm} R_2^{-(n+1)} &= d_{nm}, \\ n A_{nm} R_2^{n-1} - (n+1) B_{nm} R_2^{-(n+2)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

El discriminante del sistema es

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_2^n & R_2^{-(n+1)} \\ n R_2^{n-1} & -(n+1) R_2^{-(n+2)} \end{vmatrix} = -(n+1) R_2^{-(n+2)} R_2^n - n R_2^{n-1} R_2^{-(n+1)} \\ &= -\frac{1}{R_2^2} (2n+1) \end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\begin{vmatrix} d_{nm} & R_2^{-(n+1)} \\ 0 & -(n+1) R_2^{-(n+2)} \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{R_2^{-(n+2)} d_{nm} (n+1) (2n+1)}{R_2^2} = \frac{(2n+1)(n+1) d_{nm}}{R_2^{n+4}}, \\ B_{nm} &= \frac{\begin{vmatrix} R_2^n & d_{nm} \\ n R_2^{n-1} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d_{nm} n (2n+1) R_2^{n-1}}{R_2^2} = \frac{n(2n+1) d_{nm}}{R_2^{-n+3}}. \end{aligned}$$

en forma de serie en armónicos esféricos es,

$$\begin{aligned} g(\theta, \phi) &= u(R_1, \theta, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{(2n+1)(n+1) d_{nm} R_1^n}{R_2^{n+4}} + \frac{n(2n+1) d_{nm} R_1^{-(n+1)}}{R_2^{-n+3}} \right) Y_n^m(\theta, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{R_2^3} \left(\frac{(n+1) \lambda^n}{R_2} + \frac{n \lambda^{-n}}{R_1} \right) d_{nm} Y_n^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Esta relación puede escribirse como

$$\mathbf{g} = K\mathbf{d}, \quad K = \text{diag} \left(\frac{(2n+1)}{R_2^3} \left(\frac{(n+1)\lambda^n}{R_2} + \frac{n\lambda^{-n}}{R_1} \right) \right) \quad (7.44)$$

donde $\lambda = \frac{R_1}{R_2}$, eligiendo una ordenación apropiada de los índices n, m .

Conclusiones

En esta tesis se trabajo los principios fundamentales en los que se basa la modelación de la actividad cardíaca. Desde el nivel celular con la noción de potencial intracelular, potencial extracelular y potencial de membrana. El potencial de reposo se entiende como un equilibrio electroquímico que por sí solo no explica el potencial base típico de $-50mV$ – $-70mV$, que por lo tanto se mantiene mediante el consumo de energía (ATP). La variación del potencial de membrana como resultado del proceso de depolarización, repolarización y periodo refractario se explica mediante el flujo de iónico a través de los canales iónicos de membrana. El resultado global es el potencial de acción que se refleja en la señal del ECG. La modelación de la actividad eléctrica, a diferencia de los medios dieléctricos, se hace mediante la aproximación cuasiestática y el principio de dualidad donde las fuentes se modelan como fuentes de corriente en vez de fuentes de carga.

Revisamos el modelo dipolar en un medio infinito y en un medio acotado, la esfera, de manera analítica siguiendo el trabajo seminal de Frank. Este ejemplo muestra que sólo en ejemplos sencillos se puede obtener la solución analítica, no sin un gran esfuerzo.

Revisamos el modelo de Clifford y Sharry (sección 4.5), y posteriormente el modelo de Sameni (sección 4.6) en el que se modela la dinámica de una fuente dipolar de corriente en base a un gran número de parámetros, que sin embargo represente al menos cualitativamente la señal del ECG, presente en las derivaciones de Einthoven.

Posteriormente revisamos dos modelos distribuidos: el modelo bidominio y el modelo monodominio, que modelan la actividad del corazón a nivel de mesoescala. Matemáticamente son sistemas de EDP para los potenciales de membrana, extracelular e intracelular, considerados como promediados en todo el tejido cardíaco. Este proceso de promediar se conoce en la literatura como **homogenización**, pero que no tratamos en esta tesis.

El modelo distribuido más simple, el modelo del volumen conductor describe el potencial en el tejido entre el corazón y el torso humano. La determinación del potencial sobre el torso a partir del potencial en el epicardio se conoce como el problema directo. El problema inverso se conoce como BSPM, Body Surface Potential Mapping.

Presentamos dos casos de situaciones anómalas en la actividad cardíaca: La isquemia (sección 6.1) y la desfibrilación (sección 6.2), este último, una operación de emergencia que tiene como fin restablecer el ritmo cardíaco en una situación de emergencia. El modelo de desfibrilación permite en principio ensayar diversas estrategias que no involucren la experimentación –peligrosa– en humanos. Las simulaciones que se presentan se hicieron con el software libre SCIRun, cuyo paradigma de modelación se llama Image Based Modeling, en el que se hace especial énfasis en representar las soluciones de manera gráfica aprovechando las técnicas de visualización modernas, tanto teóricas como computacionales.

En el apéndice incluimos los detalles más técnicos para no perder la secuencia principal de la tesis, tales como ejemplo sencillos que muestran el origen del mal planteamiento del problemas del volumen conductor, en un disco y en la esfera; una breve inducción al uso del software SCIRun.

Perspectivas

Esta tesis resume los principios básicos de la modelación de la actividad eléctrica del corazón y proporciona una guía bibliográfica no tan conocida para la comunidad de matemáticos y puede ser de utilidad para un alumno que desee iniciarse en esta línea de la modelación matemática. Quedan varios problemas que podrían tomarse como temas de investigación doctoral, entre los que podemos mencionar:

- a) El problema inverso del vectocardiograma incluyendo el VCG fetal.
- b) Modelación de la dinámica del modelo del dipolo único en el VCG.
- c) Modelación de la isquemia.

Bibliografía

- [1] Anastassiou, C., Denman, D., Einevoll, G., Gratiy, S., Hanes, G., Hawrylycz, M. y Koch, C.(2017). From Maxwell's equations to the theory of current-source density analysis, 1013–1016.
- [2] Arasa, K.K., Burton, B.M., Gooda, W.W., MacLeoda, R.S., Tatea, J.D. y Zengera, B. (2018). Image-based modeling of acute myocardial ischemia using experimentally derived ischemic zone source representations. *Journal of Electrocardiology*, **51** (4), 725–733.
- [3] Barnard, C.L., Duck, I.M., Lynn, M.S. y Timlake, W.P. (1967). The application of electromagnetic theory to Electrocardiography II. Numerical solution of the integral equation. *Biophysical Journal*, **7**, 463–491.
- [4] Barr, R. y Plonsey, R. (2007). *Bioelectricity A Quantitative Approach*. USA. 23–28.
- [5] Bayley, R.H. y Wilson, F.N. (1950). Homogeneous spherical conducting medium. *Circulation* 1:84-92.
- [6] Brooks, D., Coll-Font, J., Dannhauer, M., Erem, B., MacLeod. R., Steffen, M., Swenson, D., Stinstra, J., Tate, J. y Wang, D. SCI-Run Forward/Inverse ECG Toolkit, 1–40. <http://www.sci.utah.edu/cibc-software/scirun.html>
- [7] Cai, X., Fredrik, B., Mardal, K–A., Sundnes, J., Terje G. y Tveito, A. (2006). *Computing the Electrical Activity in the Heart* . Monographs in Computational Science and Engineering 1. ISBN-10 3-540-33432-7 Springer Berlin Heidelberg New York.

- [8] Clifford, G.D., Jutten, C., Sameni, R. y Shamsollahi, M.B.(2006). Multichannel ECG and NoiseModeling: Application to Maternal and Fetal ECG Signals. 2–15.
- [9] Clifford, G.D., McSharry, P. E., Smith L. A. y Tarassenko, L. (2003). A Dynamical Model for Generating Synthetic Electrocardiogram Signals. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 289–294.
- [10] Frank., E. (1952). Electric potential produced by two point current courses in a homogeneous conducting sphere. Journal of Applied Physics **23**, 1225-1228.
- [11] Hopenfeld, B., MacLeod, R. S. y Stinstra, J. G. (June 2005) The Effect of Conductivity on ST-Segment Epicardial Potentials Arising from Subendocardial Ischemia. Annals of Biomedical Engineering, Vol. 33, No. 6, 751–763.
- [12] Hullerum, M. (2012). The inverse Problem of Electrocardiography: Explanation based on a simple Example (Bachelorarbeit). Westfälische Wilhelms Universität Münster, 3–45.
- [13] Malmivuo, J. y Plonsley, R. (1995). *Bioelectromagnetism*. Oxford University Press. New York, 85.
- [14] Pedrón, J. (2010). Implementación y estudio de métodos numéricos para la resolución del problema directo e inverso de la electrocardiografía: modelado de la actividad eléctrica en la superficie del torso (Tesis de máster). Universidad Politécnica de Valencia, 11–17.
- [15] Steffen, M., Stinstra, J. y Tate, J. Defibrillation tutorial. Center for Integrative Biomedical Computing Scientific Computing & Imaging Institute University of Utah, 19–39. <http://www.sci.utah.edu/cibc-software/scirun.html>
- [16] Stinstra, J. y Swenson, D. Ischemia Model tutorial. Center for Integrative Biomedical Computing Scientific Computing & Imaging Institute University of Utah,1–40. <http://www.sci.utah.edu/cibc-software/scirun.html>
- [17] Velázquez, A. (2005). Guía Tecnológica No. 29 Desfibriladores. Centro Nacional de Excelencia Tecnológica en Salud, 1–29.

- [18] Verfürth, P. (2011). Reconstruction of the Epicardial Potential from Body Surface Potential Maps (Diplomarbeit). Westfälische Wilhelms Universität Münster, 3–101.
- [19] <https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/myocardial-ischemia/symptoms-causes/syc-20375417>
- [20] <https://www.wikihow.com/Solve-Laplace%27s-Equation-in-Spherical-Coordinates>
- [21] <https://translate.google.com/translate?hl=es&sl=en&u=http://www.bem.fi/book/15/15.htm&prev=search>
- [22] https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_Laplace
- [23] <http://www.my-ekg.com/generalidades-ekg/derivaciones-cardiacas.html>
- [24] <http://www.sci.utah.edu/cibc-software/scirun.html>
- [25] <http://www.stanfordchildrens.org/es/topic/default?id=anatomayfuncionesdelsistemaelctrico-90-P04865>
- [26] <https://es.slideshare.net/drmelgar/clula-cardiaca>
- [27] https://es.wikipedia.org/wiki/Fibras_de_Purkinje
- [28] <https://www.urgenciasyemergen.com/las-derivaciones-del-electrocardiograma/>
- [29] https://www.sci.utah.edu/devbuilds/scirun_docs/UserGuide.pdf
- [30] https://es.m.wikipedia.org/wiki/Intervalo_QT?fbclid=IwAR1ceDuQTWLG68Z-GOGGykoIWY0UHRM1t8ds_LzfBYad6anHcl8qz7BiC18
- [31] https://es.m.wikipedia.org/wiki/Diel%C3%A9ctrico?fbclid=IwAR23YSnvmhn-t52qBufiAlQczUkiUDooss7QE_GKIFIJLPJiGgAmIxgVjYw
- [32] https://nutrienapuros.wordpress.com/2018/08/22/potencial-de-membrana-estructura-celular/?fbclid=IwAR0_1ldCnsDVXYnjqVlvEe_OiFXLdvvEq2hadJKWTYkyEnvTGgrUmvFOyco

- [33] <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Electrocardiograma?fbclid=IwAR38R1UnlnUJPNTD2mgk6zpv09FvKKAqXKSqxWofnaCXV9WuU0890iGLfZ8>
- [34] https://reddesaludiam.blogspot.com/2012/05/infarto-agudo-de-miocardio.html?fbclid=IwAR3hrfTikjhi4S4XzCiFeRSj0UpqQ999_y0I7J6hJDncU-vfPJAlp6wT894
- [35] <https://www.slideshare.net/DrMohammadMahmoud/1-pericardium-91085046?fbclid=IwAR0p9U8Fd1L29k9Y9okM11Ts95c8fSjeEcj0ENg2vChuk>
- [36] <https://www.cdc.gov/ncbddd/spanish/heartdefects/howtheheartworks.html>
- [37] <https://www.caracteristicas.co/corazon/>
- [38] https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20los%20elementos,problemas%20de%20ingenier%C3%ADa%20y%20f%C3%ADsica.
- [39] <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6294/06Efv06de23.pdf>
- [40] <https://www.radiologyinfo.org/sp/info.cfm?pg=safety-contrast>

Apéndice A

El operador de Hilbert-Schmidt con simetría azimutal

En el caso particular de simetría azimutal, es preferible rehacer los cálculos para evitar alguna posible confusión con las constantes de normalización. En analogía con (7.30) expandimos

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \theta), \quad g_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 g(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.1})$$

A partir de la solución general de la ecuación de Laplace con simetría azimutal

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

y de las condiciones de frontera

$$u(R_1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R_1^n + B_n R_1^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.2})$$

$$u(R_1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n A_n R_1^{n-1} - (n+1) B_n R_1^{-(n+2)}) P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.3})$$

$$(\text{A.4})$$

se obtiene el mismo sistema (7.42) para los coeficientes A_n , B_n

$$\begin{aligned} A_n R_1^n + B_n R_1^{-(n+1)} &= g_n, \\ n A_n R_1^{n-1} - (n+1) B_n R_1^{-(n+2)} &= 0, \end{aligned}$$

con la misma solución

$$A_n = \frac{(n+1)R_2^{-n}g_n}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}},$$

$$B_n = \frac{nR_2^{n+1}g_n}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}}.$$

La solución al problema directo es entonces

$$d(\theta) = u(R_2, \theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)g_n}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}} P_n(\cos \theta). \quad (\text{A.5})$$

Expresemos la solución al problema directo como un operador de Hilbert-Schmidt. La sustitución de los coeficientes g_n , [\(A.1\)](#) da

$$d(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} g(s) P_n(\cos s) \sin s ds \right) \frac{(2n+1)}{(n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)}} P_n(\cos \theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{2((n+1)\lambda^n + n\lambda^{-(n+1)})} \int_0^{\pi} g(s) P_n(\cos s) P_n(\cos \theta) \sin s ds.$$

A.1. Elemento Finito

El Elemento Finito es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas utilizado en diversos problemas de ingeniería y física, (ver [38](#)). Un elemento finito viene definido por nodos como se muestra en la Figura [A.1](#).

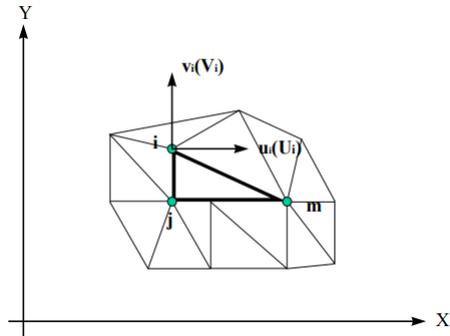


Figura A.1: Coordenadas de nodos (i,j,k) y desplazamiento de los nodos, (ver [39](#)).

Los principales tipos de elementos utilizados en 3D son: tetraedro, prisma y hexaedro. En el modelo de isquemia se utilizaron tetraedros para la construcción de la malla del corazón y el modelo de desfibrilación se utilizaron hexaedros para la malla del torso.

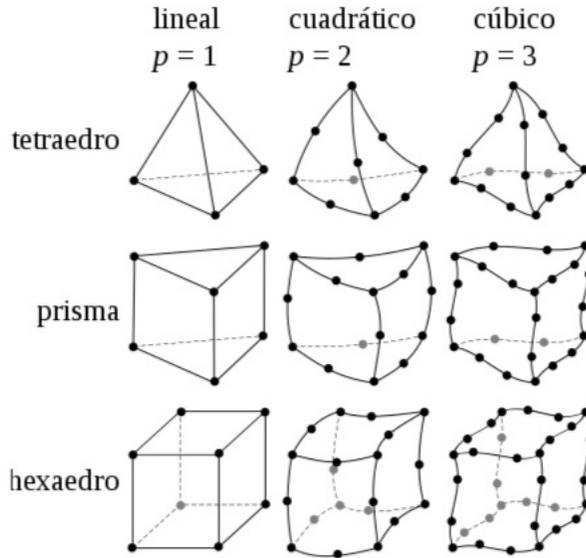


Figura A.2: Tipos de elementos.

Resolver la ecuación con condiciones de frontera Dirichlet

$$-u'' = f \quad I = (0, 1), \quad (\text{A.6})$$

$$u(0) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$u(1) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Definir el espacio de la forma:

$$H'_0(I) = \{v \in H' : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Solución por el método de Galerkin. Entonces el problema es resolver $u \in H'_0(I)$ tal que $a(u, v) = (f, v)_{L_2(I)}$ donde $a(u, v) = \int_I u'v' dx$.

La serie de Fourier en senos $a(u, v) = (x, v)$

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad (\text{A.9})$$

donde $\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi)$ y $H'_0(I)$ es un espacio de dimensión finita con base $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Supongamos ahora que

$$v(x) = \sum \beta_i \phi_i(x) \quad (\text{A.10})$$

donde $\phi(x)$ son funciones suaves llamadas funciones base. Tomando N funciones $\phi_i(x)$ se genera

$$V_N = \sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i(x) \quad (\text{A.11})$$

y V_N es la aproximación de V . Las N funciones $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ definir un espacio finito llamado H_0^N .

Sea

$$u_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j. \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^1 (u'_N V'_N + u_N V_N) dx = \int_0^1 x V_N dx, \quad \forall V_N \in H_0^N \subset H'_0(I) \quad (\text{A.13})$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (A.11) y (A.12) en la ecuación. Entonces

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right) \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i \right) + \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right) \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i \right) \right\} = \int_0^1 x \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i \right) dx. \quad (\text{A.14})$$

Reescribir la ecuación (A.14) de la forma

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left\{ \int_0^1 \left(\sum_0^1 \alpha_j \phi'_j \phi'_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \phi_i \right) dx \right\} = \sum_{i=1}^N \beta_i \int_0^1 x \phi_i dx.$$

entonces

$$\int_0^1 \left(\sum_0^1 \alpha_j \phi'_j \phi'_i + \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \phi_i \right) dx = \int_0^1 x \phi_i dx.$$

Por otro lado, se construye la matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 (\phi'_1 \phi'_1 + \phi_1 \phi_1) dx & \dots & \int_0^1 (\phi'_N \phi'_1 + \phi_N \phi_1) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 (\phi'_1 \phi'_N + \phi_1 \phi_N) dx & \dots & \int_0^1 (\phi'_N \phi'_N + \phi_N \phi_N) dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 x \phi_1 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x \phi_N dx \end{pmatrix}$$

o bien se puede como la ecuación matricial

$$K \bar{\alpha} = \bar{f}$$

donde $K_{i,j} = \int_I (\phi'_j \phi'_i + \phi_j \phi_i) dx$ es la matriz de Rigidez.

A.2. Breve introducción del software SCIRun

El software SCIRun es utilizado para modelar, simular y visualizar problemas científicos, que se implementa en C++ con una interfaz gráfica de usuario Tcl / Tk. SCIRun utiliza un modelo computacional de flujo de datos.

SCIRun puede leer archivos que contienen los siguientes datos:

1. Coordenadas de nodo.
2. Conectividad de nodos.
3. Parámetros estructurados de malla.

4. Matrices de columnas.

Hay varias herramientas dentro del software para generar una malla computacional y adaptar esta malla para cumplir con los requisitos computacionales. Explicación de algunos de los modelos de isquemia (ver [16]) y de desfibrilación (ver [15]).

El conjunto de datos de isquemia cardíaca y desfibrilación, se puede encontrar en el paquete de SCIRunDATA que también se puede descargar desde el portal de software SCIRun (<http://software.sci.utah.edu>). Para ejecutar el modelo de isquemia cardíaca, debe tener la versión de SCIRun 4.x o superior con un número de revisión de 42612 o superior, la versión de SCIRun y el número de revisión se pueden encontrar en la esquina superior derecha de la ventana del editor SCIRun. Para ejecutar el modelo de desfibrilación utilizar en SCIRun la versión 4.2 y superior y este tutorial no es compatible con ninguna versión anterior de SCIRun.

Podemos visualizar los datos de imágenes en 3D, utilizando los siguientes módulos **ConvertFieldsToTexture**, **ShowTextureSlices**, **CreateStandardColorMaps**, **ShowScene**, **ViewScene** y conectarlos como se muestra en la Figura A.3. En el módulo "ReadField" se utiliza para leer el conjunto de datos y al seleccionar el botón **UI** se abre una ventana de navegador donde se puede ingresar el nombre del archivo con formato **nrd**. Después abrir el botón **UI** del módulo **ShowTextureSlices** y seleccionar los planos **X**, **Y** y **Z**. Por último, seleccionar el botón **Execute All** se utiliza para ejecutar la red (ver Figura A.3).

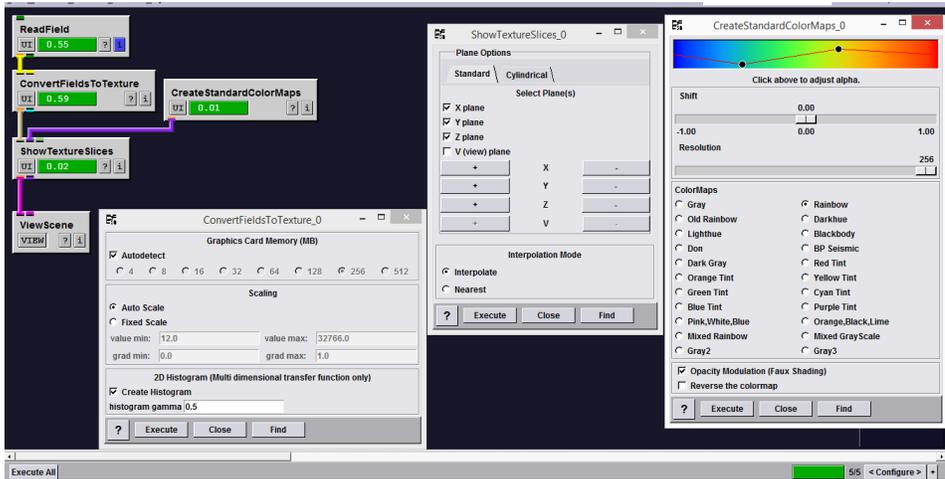


Figura A.3: La red para la visualización de los datos de imágenes en 3D.

La visualización de los datos de imágenes en 3D se encuentra en el módulo **ViewScene**, presionando el botón **VIEW**. Finalmente se abrirá una venta de color negro (ver Figura [A.4](#)) y para la visualización de la imagen, debe seleccionar el botón **Autoview**. En el botón de **Configure** nos ayuda a cambiar el color de fondo, tamaño, girar la imagen, entre otras funciones.

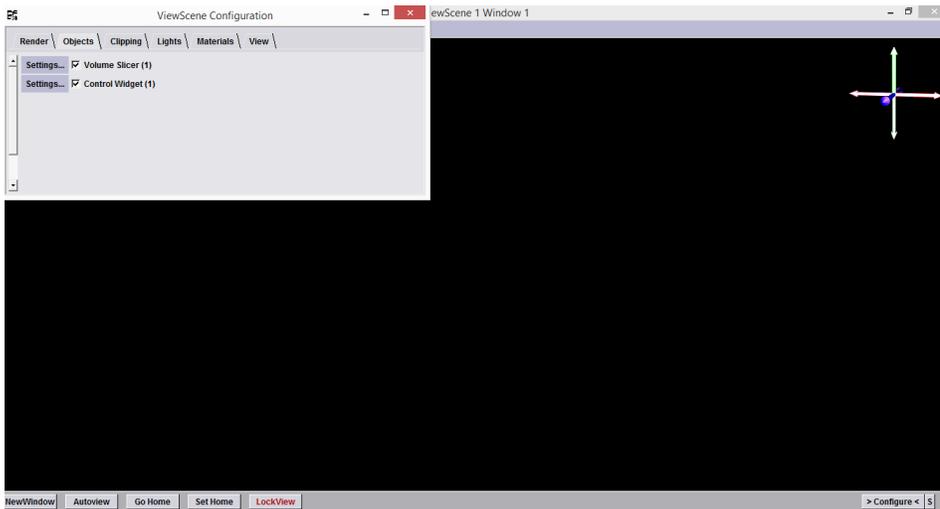


Figura A.4: La ventana para la visualización de los datos de imágenes en 3D.

Modelo de Isquemia

En esta sección, se describe los pasos necesarios para la construcción del modelo de isquemia que se mencionó en la sección (6.1). Los conjuntos de datos en este ejemplo se originan a partir de un corazón de perro aislado en el que se perfundió la arteria descendente anterior izquierda con preparación de gadolinio para que se muestre en la exploración MR. El gadolinio es el componente clave en los materiales de contraste usados más a menudo en los exámenes por resonancia magnética (MR). Cuando esta sustancia está presente en el cuerpo, altera las propiedades magnéticas de las moléculas de agua cercanas, aumentando la calidad de las imágenes por MR, (ver [40]). Posteriormente, se escaneó el corazón para generar una imagen anatómica del corazón **HeartMRI.nrrd** y una imagen de tensor de difusión (DTI) **HeartMRI-FiberOrientation.nrrd**. Utilizando el programa Seg3D, el miocardio ventricular y el lecho de perfusión se segmentaron fuera de la imagen anatómica (**HeartMRI-Segmentation.nrrd** y **HeartMRI-PerfusionBed.nrrd**).

En el software SCIRun es capaz de representar muchos conjuntos de datos en el mismo visor, por lo que se puede explorar la correlación entre los datos o combinarlos para construir un modelo. En la Figura A.5 se muestra la red completa para la lectura de dos conjuntos de datos y utilice **HeartMRI.nrrd** y **HeartMRI-Perfusionbed.nrrd** como los dos conjuntos de datos para los dos módulos ReadField.

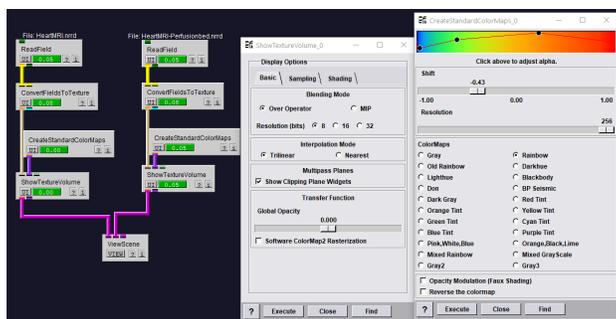


Figura A.5: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Para construir el modelo de Isosuperficies y carenado de malla, se utilizó el método Marching Cubes para extraer la isosuperficie para cada elemento de la malla. Para este modelo se construyó a partir de conjuntos de datos,

se necesita traducir los volúmenes en superficies paramétricas. Una forma de hacer esto es generar una isosuperficie. Modifique la red por agregar los módulos **ExtractIsosurface**, **FairMesh** y **ShowField** a la red, como se muestra en la Figura [A.6](#).

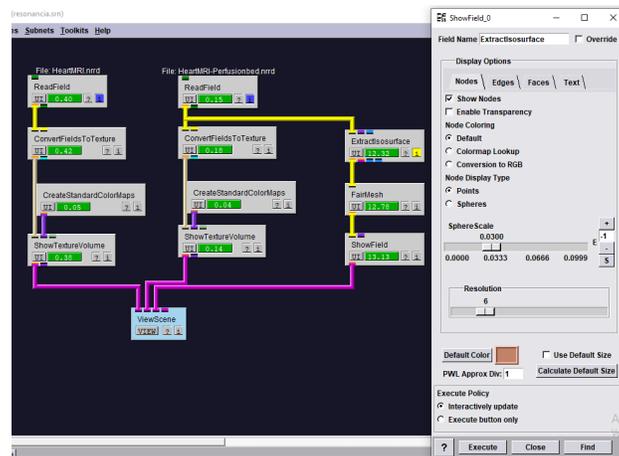


Figura A.6: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

El módulo **ExtractIsosurface** extrae una isosuperficie de cualquier campo. En la Figura [A.7](#) se muestra la configuración del módulo **ExtractIsosurface**. En este caso lo estamos extrayendo del lecho de perfusión segmentado seleccionando un valor entre el valor máximo y mínimo en el campo.

El módulo **FairMesh** toma las superficies y usa información sobre el vecindario de la superficie para generar una superficie de aspecto más suave.

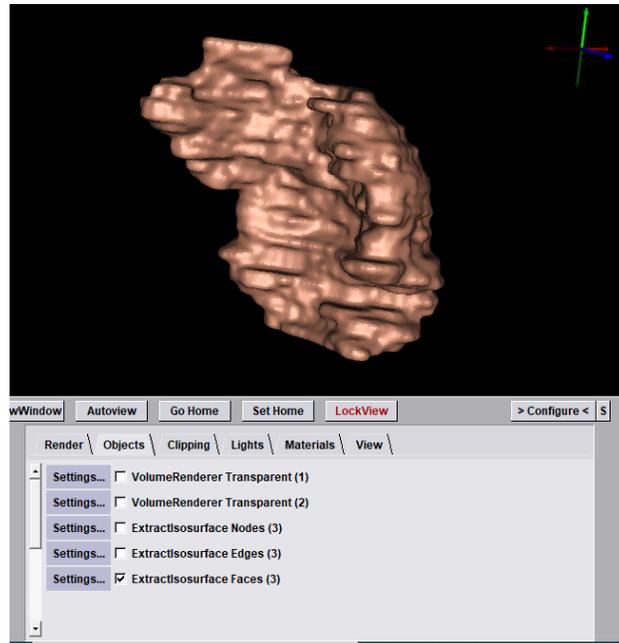


Figura A.7: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Para la visualización del corazón en el modelo de isquemia, se utiliza la red [A.3](#) y en el módulo **ReadField** abrir la interfaz de usuario y seleccionar los datos **HeartMRI.nrrd**. Este formato **nrrd** de archivo se utiliza para representar datos de imágenes espaciados regulares, como imágenes de resonancia magnética o segmentaciones.

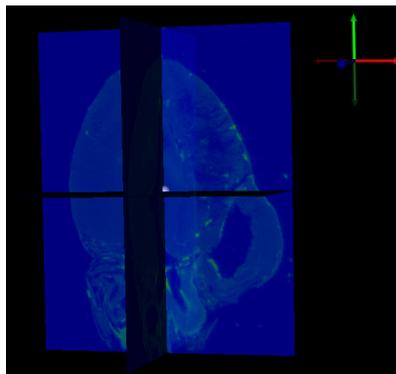


Figura A.8: Visualización de los datos de imágenes en 3D del corazón.

Para la visualización del conjunto de datos de imágenes de un corazón con isquemia cardíaca, primero se debe generar una malla tetraédrica utilizando isosuperficies. A continuación, para construir la malla tetraédrica, se inicia la red con el módulo **ReadField**, se abre la interfaz de usuario y se selecciona el archivo **HeartMRI-Segmentation.nrrd**. En la salida de **ReadField** conectar a un nuevo módulo **ResampleRegularMesh**, seguido del módulo **ExtractIsosurface**, **FairMesh** y **InterfaceWithTetGen**. En la salida del módulo **InterfaceWithTetGen** conectar con la entrada de los dos nuevos módulos **ShowField** y **WriteField**. Finalmente conectar el módulo **ViewScene** con la salida del módulo **ShowField**.

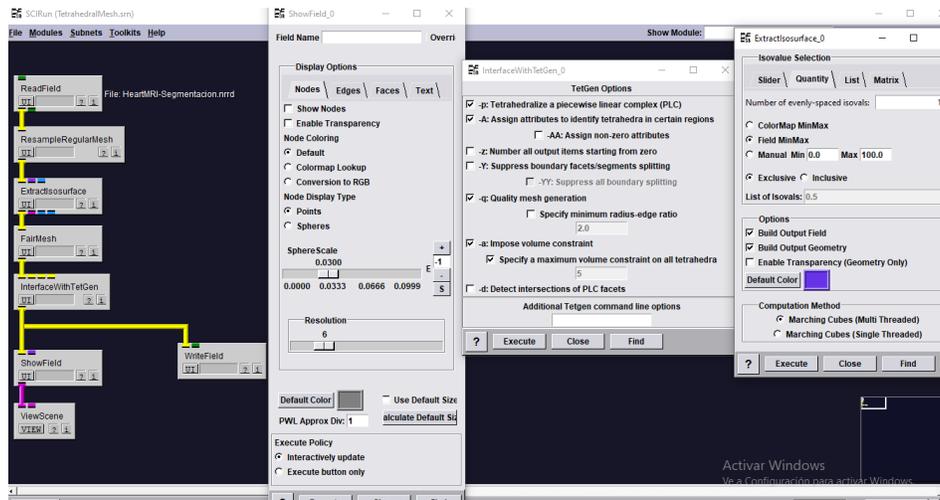


Figura A.9: La red para la construcción de la malla tetraédrica.

En el módulo **ResampleRegularMesh**, puede mantener su configuración predeterminada. Al abrir la interfaz de usuario del módulo **InterfaceWithTetGen**, para generar la malla tetraédrica se deben seleccionar tres opciones importantes que son $-Y$, $-q$ y $-a$ en la interfaz de usuario. En el módulo **ExtractIsosurface**, colocar el valor en **List of Isovals** de 0.5. El módulo **WriteField** se utiliza para guardar la malla.

En la ventana de **ViewScene**, en la parte de configuración seleccionar la pestaña **Clipping** y realizar cortes en el eje X como se muestra en la Figura [A.10](#).

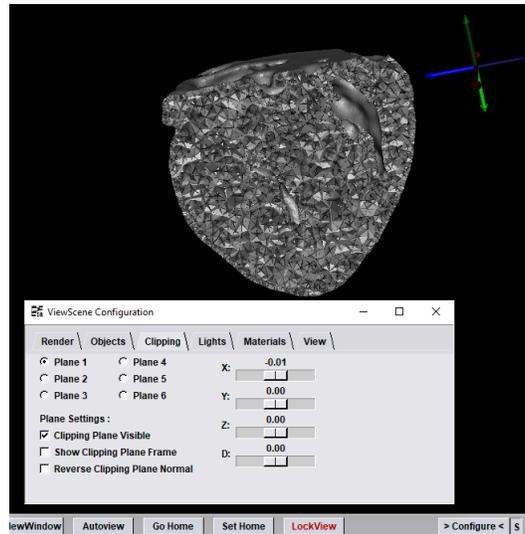


Figura A.10: Visualización de la malla tetraédrica.

Construir la simulación del modelo de isquemia. El modelo se define por las conductividades de los potenciales intracelular y extracelular, y el potencial transmembrana. Primero, comenzamos agregando a la red el módulo **ReadField** y abrir la interfaz de usuario para leer el archivo donde se guardo la malla tetraédrica. En la Figura (A.11) se muestra la red completa.

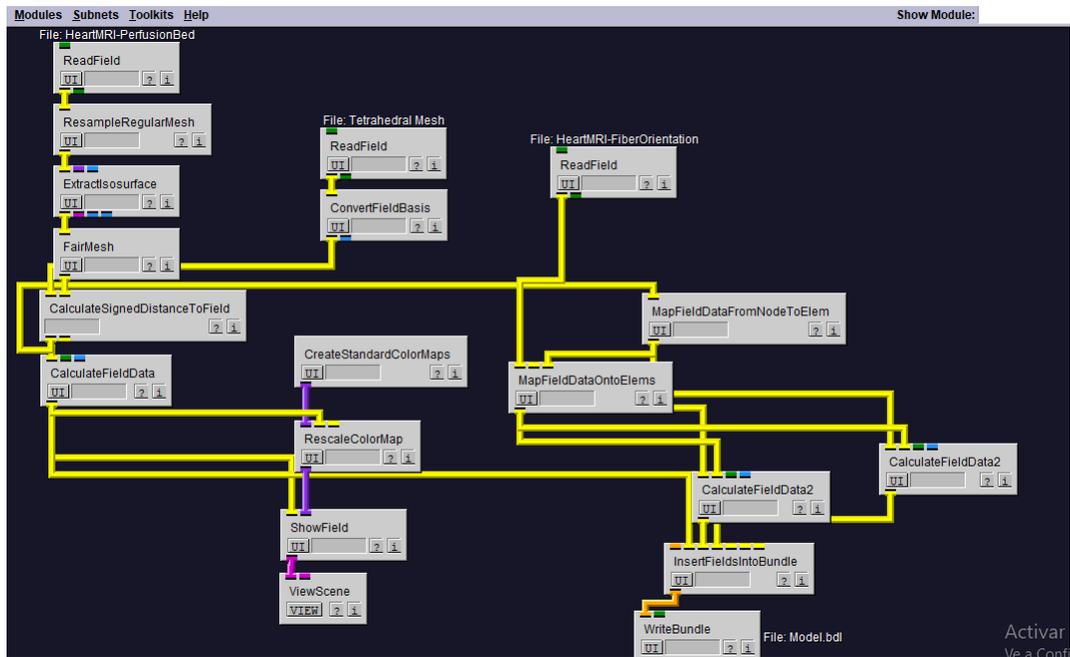


Figura A.11: La red para la construcción de la zona isquémica.

En el módulo **ExtractIsosuperficie** se define la zona isquémica, y el módulo **FairMesh** suaviza los efectos de discretización y dejando una definición relativamente suave de la zona de la frontera isquémico.

El módulo **CalculateSignedDistanceToField** calcula la distancia de cada nodo a la superficie. En este caso, se representa una distancia positiva para cada nodo dentro de la zona isquémica y negativa para cada nodo fuera de la superficie.

El módulo **CalculateFieldData** que se encuentra debajo del módulo **CalculateSignedDistanceToField**, se define el potencial transmembrana dentro de la zona isquémica como -15 mV y el potencial fuera de la zona isquémica como $+15$ mV, la frontera de la zona isquémica el potencial es igual a 0 mV. Se utilizó la ecuación (6.6) del potencial transmembrana para la zona isquémica.

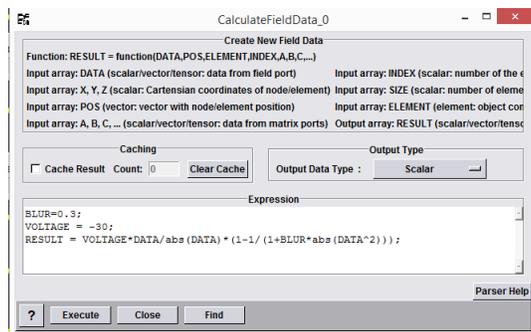


Figura A.12: El módulo **CalculateFieldData** para definir la función isquémica.

El módulo **CalculateFieldData2**, que se basa en analizar expresiones matemáticas, también se utiliza para generar los tensores de conductividad. En las Figuras [A.13](#) y [A.14](#), se dan ejemplos de funciones de conductividades. En este caso, hay una función especial llamada **select** que corre el primer argumento con una expresión booleana y, en función del resultado, decide evaluar el primer argumento y el segundo argumento.

En el módulo **CalculateFieldData2** de lado izquierdo se define como se muestra en la Figura [A.13](#).

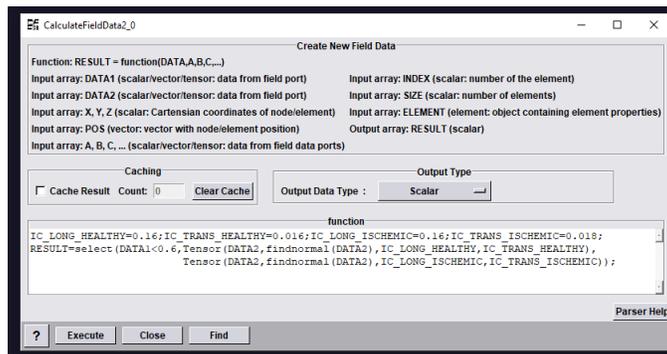


Figura A.13: Configuración de interfaz de usuario del módulo **CalculateFieldData2**.

En el módulo **CalculateFieldData2** de lado derecho se define como se muestra en la Figura [A.14](#).

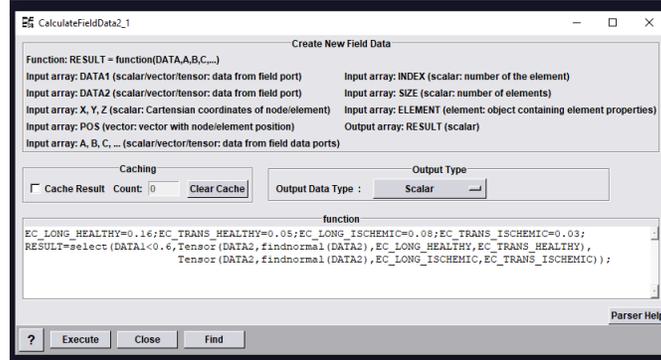


Figura A.14: Configuración de interfaz de usuario del módulo **Calculate-FieldData2**.

Finalmente, la visualización del conjunto de datos de imágenes de un corazón con isquemia cardíaca (ver Figura 6.5).

En el modelo de isquemia la idea es resolver la ecuación:

$$\nabla \cdot (\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_e) \nabla \phi_e = -\nabla \cdot \bar{\sigma}_i \nabla \phi_m \quad (\text{A.15})$$

donde $\bar{\sigma}_i$ y $\bar{\sigma}_e$ son los tensores de conductividad intracelular y extracelular, ϕ_e potencial extracelular y ϕ_m potencial transmembrana. En la Figura A.15, se muestra la red completa para la solución de la ecuación A.15.

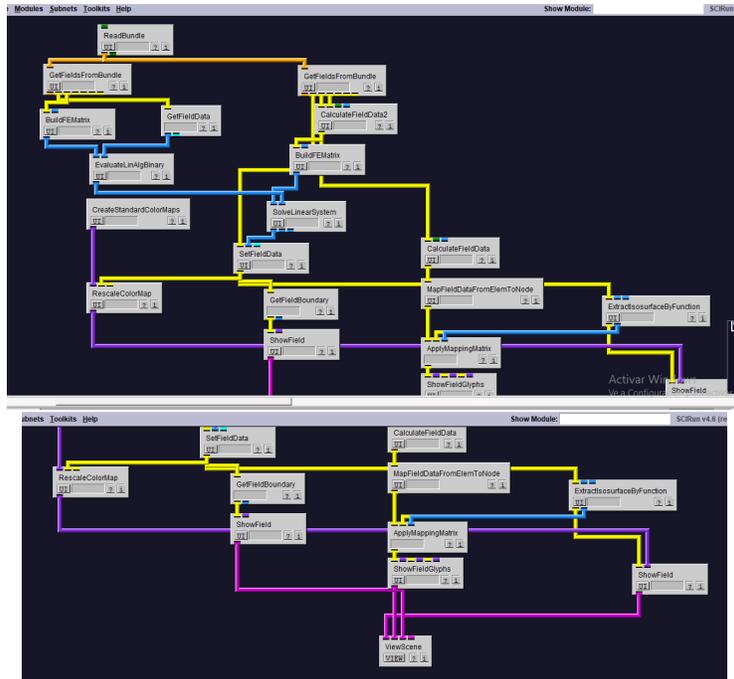


Figura A.15: La red completa para la solución de la ecuación [A.15](#) por elemento finito.

La red para resolver la ecuación [A.15](#) comienza con el módulo **ReadBundle**, abrir la interfaz de usuario y cargar el archivo donde se guardo el corazón con la zona isquémica. En la salida del módulo **ReadBundle** se introduce dos módulos de **GetFieldsFromBundle**, uno para resolver el lado izquierdo de la ecuación [A.15](#) y el otro para resolver el lado derecho. El lado izquierdo de la ecuación [A.15](#) depende de la suma $(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_e)$ y el modulo **CalculateFieldData2** calcula la suma. La salida del módulo **CalculateFieldData2** se introduce posteriormente en **BuildFEMatrix**, que construye la matriz de rigidez para la ecuación de Poisson. Esta matriz de rigidez se puede ver como la discretización de la ecuación anisotrópica de Poisson y, por tanto, es el equivalente numérico del operador $\nabla \cdot (\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_e) \cdot \nabla$.

En la Figura [A.16](#) se muestra la configuración del módulo **CalculateFieldData2** donde se define la suma y del módulo **GetFieldsFromBundle** donde se renombra las pestañas, es decir, **Field1** \rightarrow **VM**, **Field2** \rightarrow **IC** y **Field3** \rightarrow **EC**. En este caso eligimos los nombres **VM**, **IC** y **EC** para el potencial transmembrana, la conductividad intracelular y la conductividad

extracelular, respectivamente.

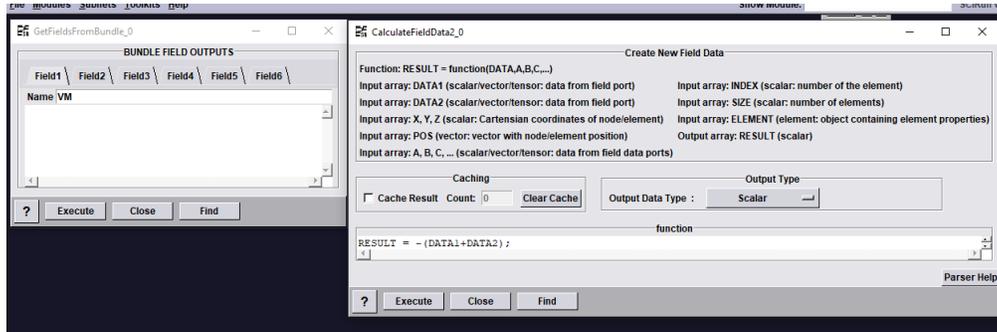


Figura A.16: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Los módulos a la izquierda de la creación de la matriz de rigidez en realidad calculan el vector del lado derecho. Esto se hace nuevamente usando el módulo **BuildFEMatrix** para generar el operador numérico $\nabla \cdot (\bar{\sigma}_i) \cdot \nabla$ y multiplicar esto con los valores del campo de potencial transmembrana. Como la salida del módulo **BuildFEMatrix** es una matriz (tubería azul), los datos dentro del campo deben representarse como un vector. Esto se logra mediante el módulo **GetFieldData** que quita los datos de los nodos en el campo y los inserta en una matriz de columnas. Para obtener ahora el vector del lado derecho, necesitamos multiplicar el vector columna con la matriz. Esto último se logra mediante el módulo **EvaluateLinAlgBinary**.

Tanto la matriz de rigidez como el vector del lado derecho forman ahora un sistema lineal que debe resolverse para obtener los potenciales extracelulares. El módulo **SolveLinearSystem** resuelve el sistema lineal usando un solucionador iterativo. Los detalles del solucionador se pueden ingresar en la interfaz de usuario de este módulo. Una vez que se resuelve el sistema lineal, la solución contenida en un vector de columna se reinserta en el campo usando el módulo **SetFieldData**.

Para estudiar el efecto de la anisotropía en los potenciales extracelulares, observamos una cierta sección transversal del modelo. Para extraer una sección transversal usamos el módulo **ExtractIsosurfaceByFunction**. Este módulo permite al usuario especificar una función y posteriormente extrae una isosuperficie de esta función y proyecta los datos de nuevo en esta superficie. En este caso usamos la función $RESULTADO = Y$; que generará secciones transversales en el plano XZ. Sin embargo, mostrar los datos sin la

estructura de fibra subyacente no sirve de nada, por lo que podemos reconstruir la orientación de la fibra a partir de los datos del tensor enviándolos a través del módulo de la calculadora nuevamente y extrayendo el primer vector propio usando la función `eigvec1()`. Posteriormente, los datos se mueven a los elementos de la malla.

Para proyectar eficientemente los datos en la misma malla que los datos, usamos el módulo **ApplyMappingMatrix**, esto permite copiar rápidamente los datos de una malla a otra malla si la operación que generó la nueva malla calculó una llamada matriz de mapeo. En este caso, **ExtractIsosurfaceByFunction** calculó dicha matriz de mapeo y podremos proyectar los datos en la misma cuadrícula. Como a menudo en SCIRun hay muchas formas de hacer lo mismo, también podríamos haber usado el módulo **MapFieldDataOntoElems** para lograr lo mismo.

En la interfaz de usuario del módulo **SolveLinearSystem**, configurar las opciones **Target error**, **Maximum Iterations** y **Emit partial solutions**, y la configuración en los módulos **CalculateFieldData** y **ExtractIsosurfaceByFunction**, (ver Figura [A.17](#)).

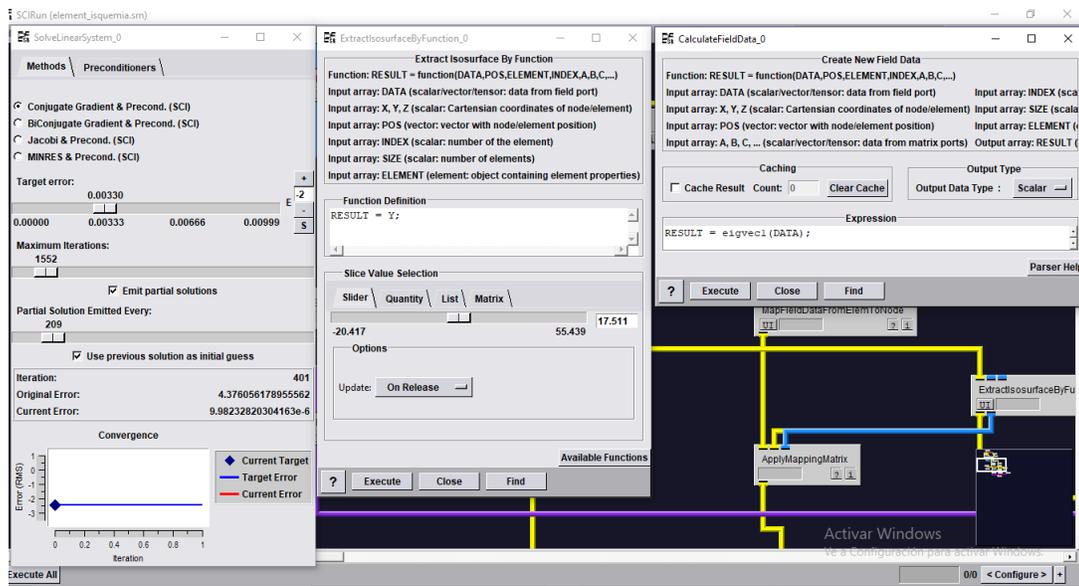


Figura A.17: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Finalmente, los vectores y los datos se combinan en un visor. Para representar un sentido u orientación, también representamos una capa trans-

parente de la malla. El módulo **GetFieldBoundary** extrae el exterior de cualquier malla. En este caso, renderiza la superficie exterior del modelo. El módulo **ShowField** se puede configurar para que muestre una versión transparente del límite de la malla. Desactive la visualización de nodos y bordes y modifique el Color predeterminado como se indica en la Figura [A.18](#). Al alterar el valor Alfa, la malla se puede hacer mucho más transparente, para resaltar la sección transversal con mayor claridad. También aumente la escala de los vectores para que sean claramente visibles.

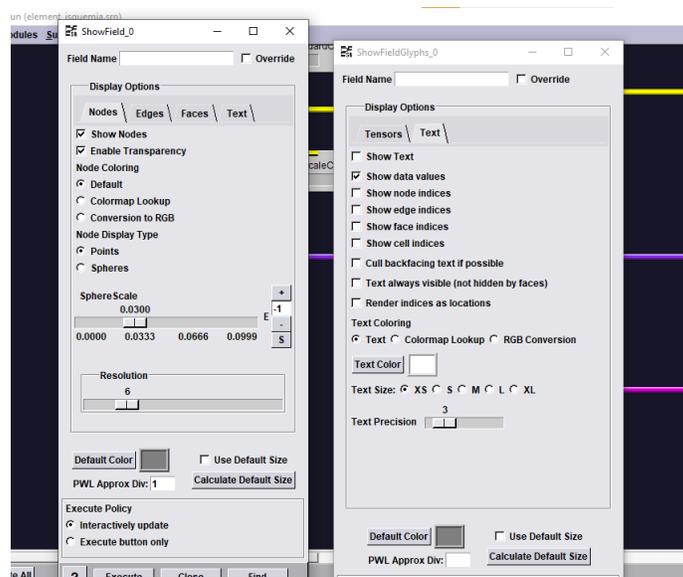


Figura A.18: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

A.2.1. Desfibrilación

En esta sección describe las herramientas necesarias y los pasos necesarios para simular los modelos de desfibrilación. El problema se resolverá en dos dominios separados. El primer dominio, un modelo homogéneo en el cubo. El segundo dominio, un modelo no homogéneo del torso humano utilizando electrodos de lata, alambre y placa.

Simulación de elementos finitos en un cubo

La simulación de elemento finito en un cubo. Primero comenzamos construyendo una malla hexaédrica de cubo que servirá como nuestro dominio de solución. La red comienza con el módulo **CreateLatVol** conectado al módulo **CalculateFieldData**, seguido del módulo **ShowField** y, por último, el módulo **ViewScene**. La configuración de los módulos **CreateLatVol** y **CalculateFieldData**, como se muestra en la Figura [A.19](#)

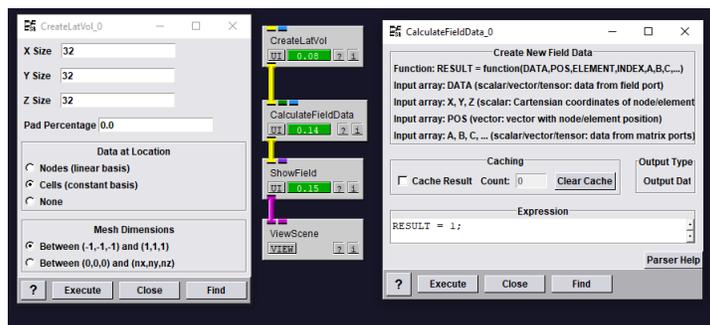


Figura A.19: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

El siguiente paso es agregar ánodos y cátodos de placa a la simulación. Los electrodos se modelarán como cajas, pero esta vez usaremos el módulo **EditMeshBoundingBox**. Agregar a la red (ver Figura [A.19](#)) un nuevo módulo **CreateLatVol** y conectar a dos módulos **EditMeshBoundingBox** separados, uno para el ánodo y el otro para el cátodo. Conecta el amarillo de los puestos de salida de campo a los módulos **ShowField** y conecte los puertos de salida rosa de ambos módulos **EditMeshBoundingBox** y los nuevos módulos **ShowField** a las entradas del módulo **ViewScene**. La red modificada debería verse como se muestra en la Figura [A.20](#), y la configuración de los módulos **ShowField** para distinguir los dos electrodos. En el módulo **ShowField** del cátodo, haga click en la pestaña "Faces" y marcar la casilla "Enable Transperency". Haga click en el botón "Default Color" y cambie el color agregando a morado. Realizar estas mismas operaciones en el segundo módulo **ShowFiel** del ánodo, agregando el color naranja.

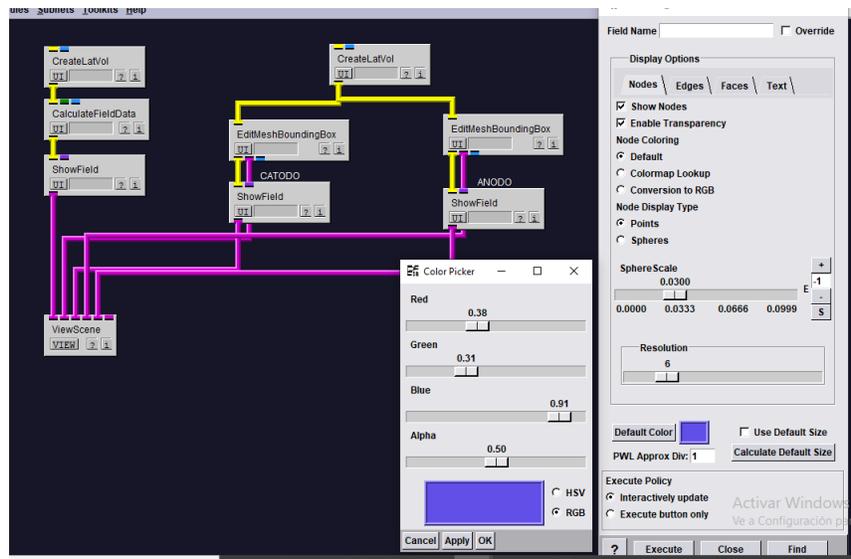


Figura A.20: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Para configurar manualmente el tamaño del electrodo, abra la interfaz de usuario del módulo **EditMeshBoundingBox** del cátodo, asegúrese de que la casilla de verificación **Center** y **Size** estén marcadas, e ingrese los valores para la posición central y el tamaño. El centro y tamaño de (1.015, -0.005, -0.128) y (0.181, 0.717, 0.647) para el cátodo y (-0.008, 0.065, -1.021) y (0.666, 0.729, 0.155) para el ánodo, (ver Figura [A.21](#)).

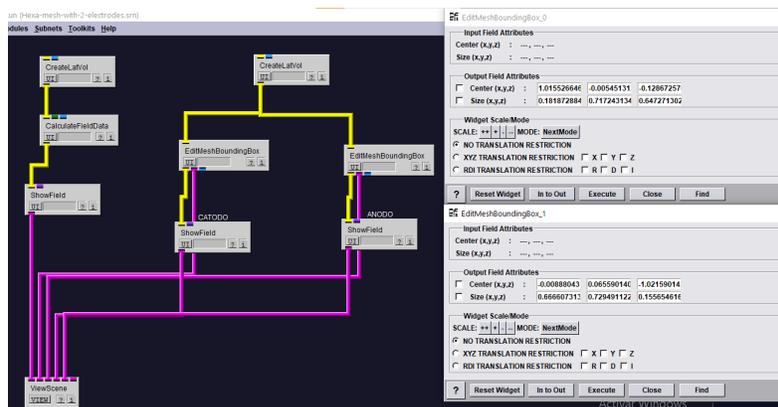


Figura A.21: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

Ahora que tenemos definida la geometría para nuestro problema, necesitamos la simulación de elementos finitos. Para comenzar, conecte un **CalculateFieldData** entre cada uno de los módulos **EditMeshBoundingBox** y sus respectivos módulos **ShowField**. Abra la interfaz de usuario del módulo **CalculateFieldData** del ánodo y configure el expresión a $RESULTADO = 0$. La expresión en el módulo **CalculatFieldData** del cátodo debe establecerse en $RESULTADO = 700$. Estos son los potenciales eléctricos conocidos que se asignaron a los dos electrodos.

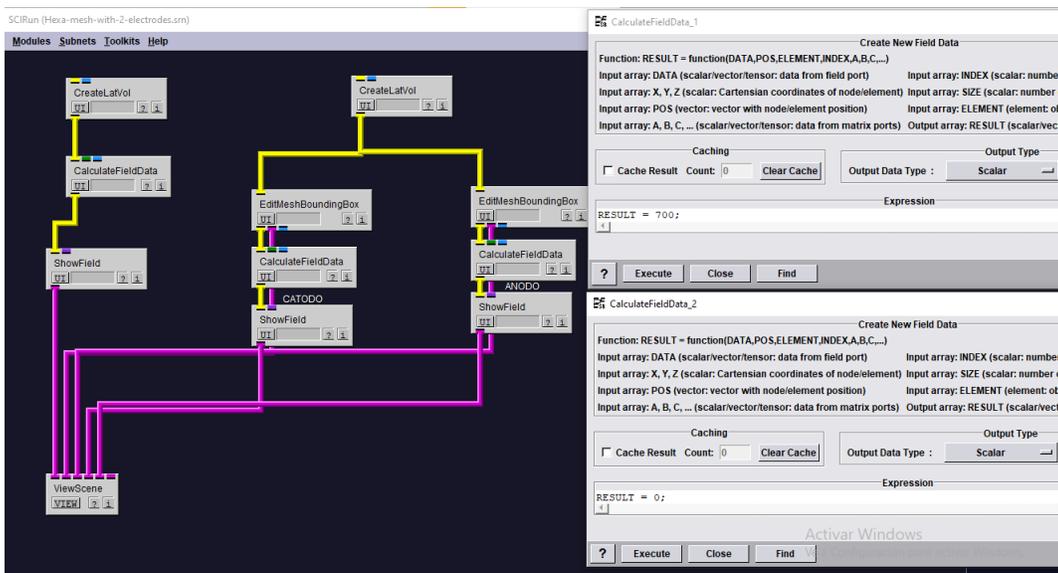


Figura A.22: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

A continuación, queremos asignar los potenciales asignados como valores conocidos en los nodos correspondientes de la malla hexahedral. Esto se logra uniendo primero los dos campos de electrodos utilizando el módulo **JoinFields**, conectando las salidas amarillas de los módulos **CalculateFieldData** de los electrodos a las dos primeras entradas del módulo **JoinFields**. A continuación, estos valores se asignan a nodos en la malla hexadecimal mediante el módulo **MapFieldDataOntoNodes**. La salida del módulo **JoinFields** está conectada a la primera entrada del módulo **MapFieldDataOntoNodes** mientras que la salida de **CalculateFieldData** de la malla Hex está conectada a la tercera entrada. El solucionador de sistemas lineales en SCIRun utiliza valores de NaN (no un número) para especificar

incógnitas en uno de los vectores de entrada, y nuestro módulo **MapFieldDataOntoNodes** agregado también se utilizará para establecer valores en la malla fuera de los electrodos a NaN. Para hacer esto, abrir la interfaz de usuario para el módulo y establecer el **"Default Outside Value"** en nan y el **"Maximum Distance"** a inf. Los valores en los nodos ahora representan los valores desconocidos (NaN) y conocidos de nuestro sistema. Ahora estamos listos para construir nuestro sistema lineal de elementos finitos. Para hacerlo, agregue un **BuildFEMatrix** modulo en la red, conectando la salida del Hex mesh **CalculateFieldData** a la entrada del módulo **BuildFEMatrix**. Para especificar el conocido valor, primero conecte la salida de **MapFieldDataOntoNodes** a un **GetFieldData** módulo. A continuación, agregue un módulo **AddKnownsToLinearSystem** a la red, conectando **BuildFEMatrix** a la primera entrada y la salida de **GetFieldData** a la tercera entrada.

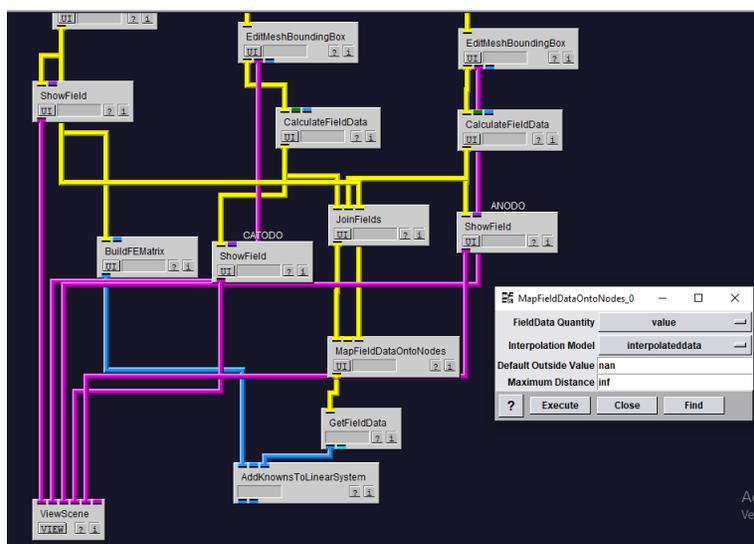


Figura A.23: La red después de agregar el módulo **AddKnownsToLinearSystem**.

Continuando, resolveremos el sistema lineal, conectando las dos salidas del **AddKnownsToLinearSystem** a las dos entradas de un nuevo módulo **SolveLinearSystem**. La primera salida del solucionador contendrá los valores de la solución. Mapeamos esto en la malla agregando un módulo **SetFieldData**, conectando las salidas de **MapFieldDataOntoNodes** y

módulos **SolveLinearSystem** a las dos primeras entradas del módulo **SetFieldData**. Para visualizar el campo, conectamos la salida de **SetFieldData** en un nuevo **ShowField** y conecte ese módulo **ShowField** a nuestro módulo **ViewScene**. Para hacer útil la visualización, crearemos un mapa de color agregando un **CreateStandardColorMaps** y conectando la salida a un módulo **RescaleColorMap**. La salida de el módulo **SetFieldData** se utiliza como la segunda entrada al módulo **RescaleColorMap**. Y por último, la salida del módulo **RescaleColorMap** se utiliza como la segunda entrada al último módulo **ShowField**. Ahora tenemos una versión mapeada en color de nuestra malla Hex como entrada para el módulo **ViewScene**, así que asegúrese de eliminar la entrada original al módulo **ViewScene** que es procedente de la visualización de malla Hex.

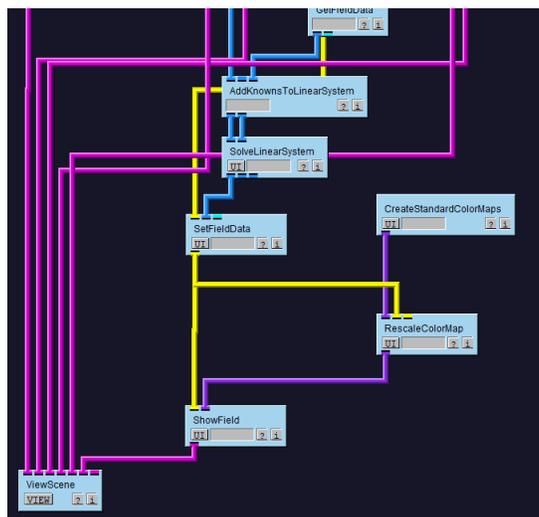


Figura A.24: Los últimos módulos de la red.

Por último, la visualización se puede hacer más atractiva haciendo algunos cambios en el módulo **CreateStandardColorMaps** y el último módulo **ShowField**. Primero, abra el interfaz de usuario al último módulo **ShowField** y desmarque "Show Nodes" y "Show Egdes" en las pestañas "Nodes" y "Egdes". Esto dará como resultado una visualización solamente mostrando caras con un degradado suave. Otro cambio efectivo es forzar el mapa de colores tener menos resolución. Abra la interfaz de usuario **CreateStandardColorMaps** y cambie el control deslizante "Resolution" en una configuración de 25. Esto dará como resultado una asignación de color

menos suave, donde los límites de los colores discretos actúan como líneas de contorno de la solución en la superficie del dominio.

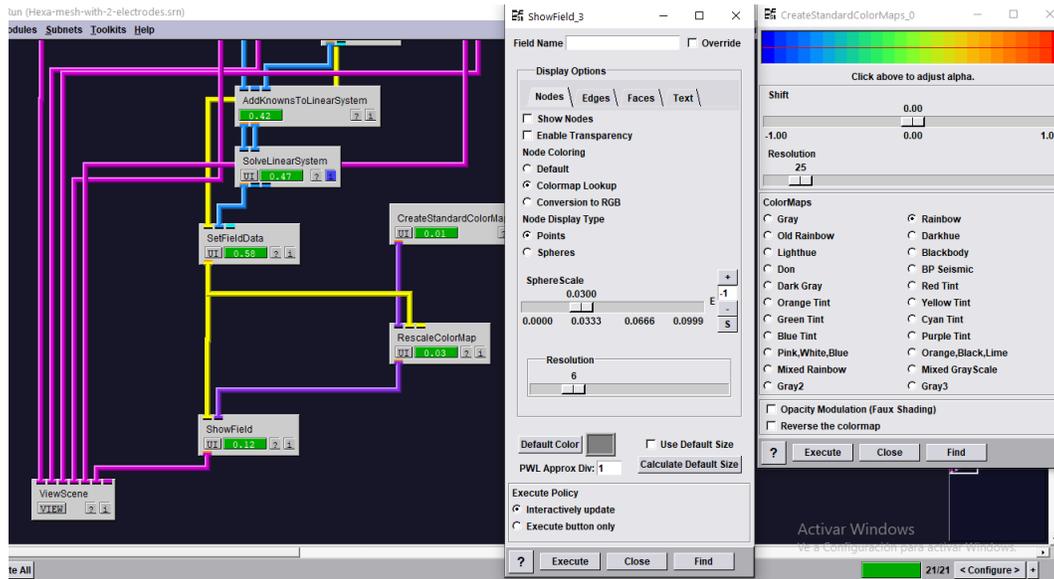


Figura A.25: Configuración de la interfaz de usuario de los módulos.

En la Figura [A.26](#) es la simulación de elemento finito de dos electrodos en un cubo. En el cubo, se utilizó en el tutorial [\[15\]](#) para demostrar las técnicas necesarias para resolver este tipo de soluciones equipotenciales.

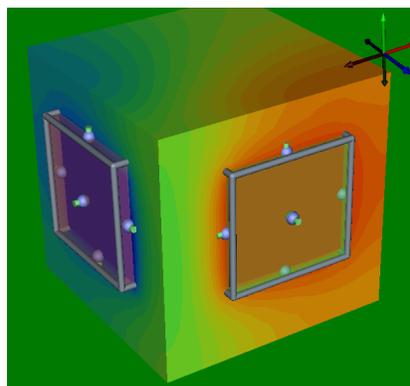


Figura A.26: Dos electrodos en un cubo, con superficies equipotenciales (rojo potencial alto, azul bajo).

Simulación de elementos finitos en un torso

En la sección (6.2), se explicó el modelo de desfibrilación. Se simulará un torso humano con electrodos dentro (corazón abierto) y sobre el torso. La siguiente tabla representa el índice de segmentación y los valores de conductividad en un conjunto de datos en el torso que se utilizaran en esta simulación. La conductividad $\sigma = \sigma(x)$, es constante por pedazos para representar los órganos, como los pulmones, músculo, sangre, etc.

Material	Índice de Segmentación	Conductividad (s/m)
Background	0	0.0
Tejido conectivo	1	0.22
Gas intestinal	2	0.002
Músculo	3	0.25
Grasa	4	0.05
Riñón	5	0.15
Hígado	6	0.07
Pulmón	7	0.007
Hueso	8	0.006
Sangre	9	0.7
Atría del corazón	10	0.3
Ventrículos del corazón	11	0.3

Utilizar la red de la Figura A.3, en el módulo **ReadField** cargar el archivo de formato .fld del menú desplegable "Archivos de tipo", busque y seleccione el archivo torso-defib/torsosegmentationsi.fld. Para la visualización del corazón, conectar en la salida del módulo **ReadField** a un módulo **GetDomainBoundary**, seguido de un módulo **FairMesh** y, por último, un módulo **ShowField**. La salida de **ShowField** debe conectarse como segunda entrada al módulo **ViewScene**, (ver Figura A.27).

En el módulo **GetDomainBoundary**, colocar los valores en min=10 y max=11 y seleccionar la opción "Include outer boundary". En el módulo **ShowField**, desactivar la visualización de "Nodes", "Edges" y configurar "Faces" como se muestra en la Figura A.27.

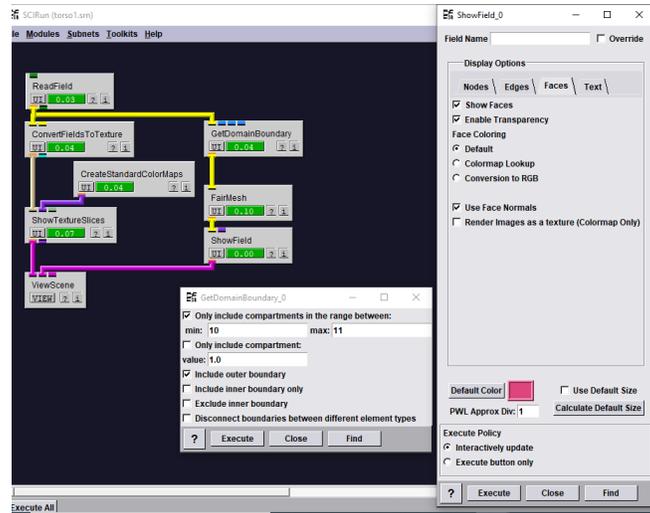


Figura A.27: La red después de agregar los módulos para la visualización del corazón.

A continuación, para la visualización del torso se debe agregar una cadena similar a la del corazón, pero en el módulo **GetDomainBoundary** colocar los valores en $\text{min}=1$ y $\text{max}=255$. Además, se debe seleccionar **”Exclude inner boundary”** y **”Include outer boundary”**. La red se muestra en la Figura [A.28](#).

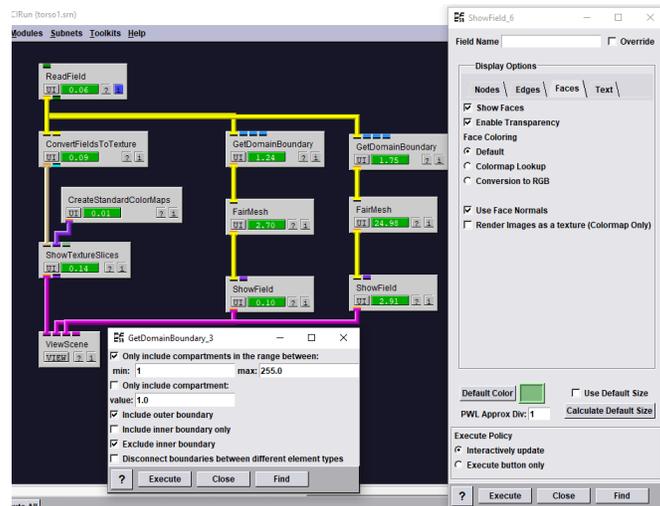


Figura A.28: La red después de agregar los módulos para la visualización del torso.

Finalmente, el resultado de visualización del corazón y el torso.

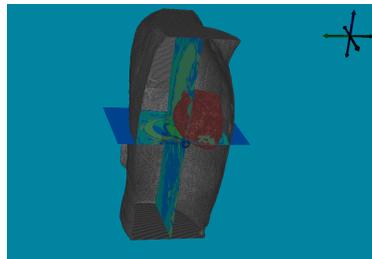


Figura A.29: Visualización de los datos de imágenes en 3D del corazón y el torso.

Para agregar un electrodo de **lata**, se debe agregar a la red (ver Figura [A.29](#)) un nuevo módulo **ReadField** y abrir la interfaz de usuario, busque y seleccione el archivo `torso-defib/electrodecandecanmodelsi.fld`. En la salida del módulo **ReadField** conectar el módulo **EditMeshBoundingBox**, la salida rosa de **EditMeshBoundingBox** conectar al módulo **ViewScene** y la salida amarilla conectar al módulo **ShowField** que también está conectado a **ViewScene**. En la interfaz del usuario de **ShowField**, desactive la visualización de nodos y bordes, seleccionar el color verde predeterminado, (ver Figura [A.30](#)).

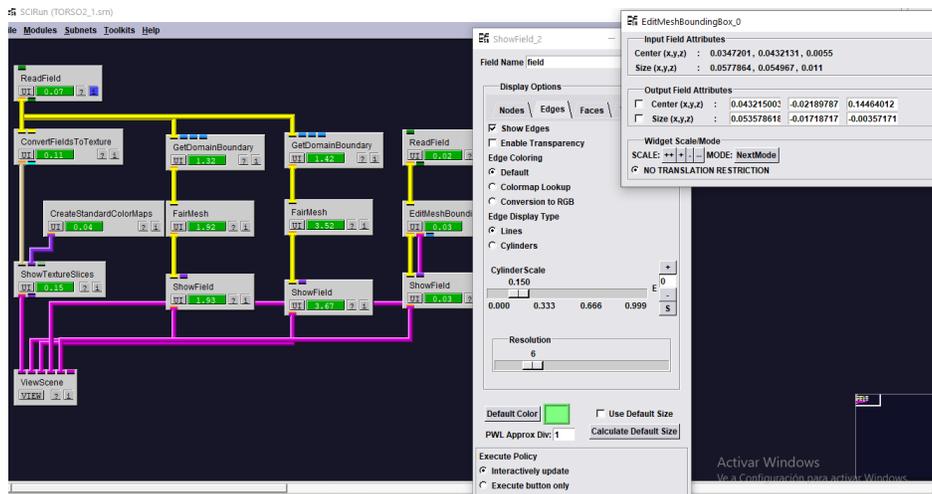


Figura A.30: La red después de colocar la cadena de módulos para el electrodo de lata (can).

Para la colocación del electrodo de **alambre** cerca del corazón. Primero, se debe agregar a la red un nuevo módulo **GenerateElectrode**, conectando la salida rosa al módulo **ViewScene** y la salida amarilla a un nuevo módulo **ShowField**. Después, conectar la salida del módulo **ShowField** al módulo **ViewScene**, (ver Figura [A.31](#)). En la interfaz de usuario **GenerateElectrode**, seleccione el botón "Wire Electrode" y el botón **Use Field Nodes**, establezca la longitud del electrodo en 0.1, el grosor en 0.003.

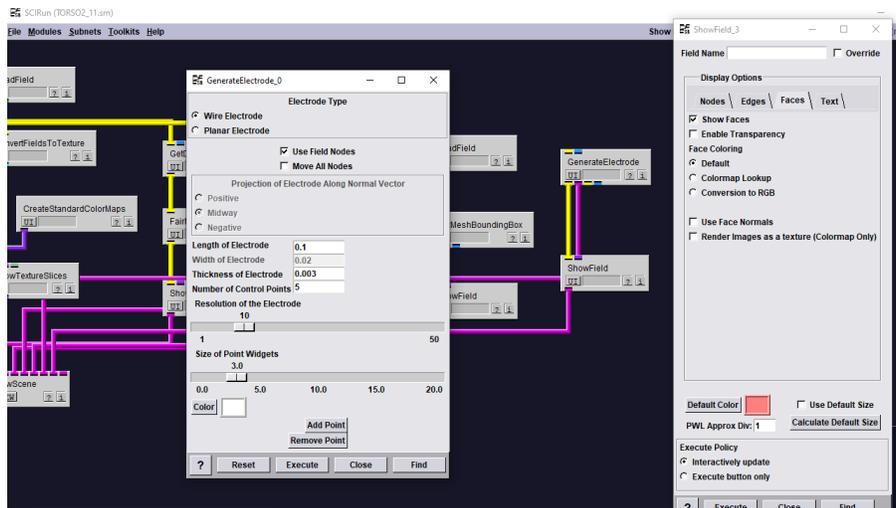


Figura A.31: La red después de colocar la cadena de módulos para el electrodo de alambre (wire).

A continuación, para colocar el electrodo plano se debe agregar una cadena similar al del electrodo de alambre, (ver Figura [A.32](#)), pero en el módulo **GenerateElectrode** se debe seleccionar las opciones **Planar Electrode** y **Use Field Nodes**, establezca la longitud del electrodo en 0.1, el grosor en 0.003 y el ancho en 0.03.

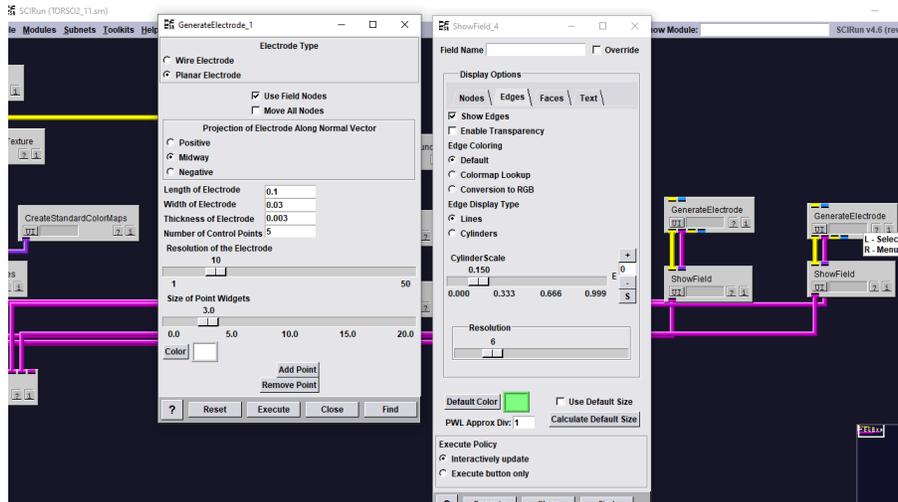


Figura A.32: La red después de colocar la cadena de módulos para el electrodo plano (planar).

Para colocar un electrodo de lata sobre el torso, se debe cambiar manualmente el tamaño del módulo **EditMeshBoundingBox** o bien moverlo directamente con el mouse seleccionando la tecla shift + click derecho, (ver Figura 6.17). Los electrodos de alambre y plano, para colocarlos sobre el torso se debe ir moviendo las bolitas con el mouse seleccionado la tecla shift + click derecho, (ver Figura 6.15).

Construcción y visualización de la malla del **torso** utilizando el método de elementos finitos. Para simplificar el procesamiento y reducir los tiempos de ejecución, crearemos una malla hexaédrica más pequeña. Para esto, inicie una nueva red con el módulo **ReadField** y abrir el interfaz de usuario, busque y seleccione **segmentación si.fld**, conectar al módulo **CreateLatVol** y a la primera entrada del módulo **MapFieldDataOntoElems**. Finalmente, agregar la siguiente cadena: Conectar a la salida del módulo **MapFieldDataOntoElems** al módulo **ClipFieldByFunction**, seguido de un módulo **GetFieldBoundary**, **FairMesh**, **SowField** y **ViewScene**.

En el módulo **CreateLatVol**, seleccionar los tamaños de "X = 50", "Y = 50" y "Z = 75". Abrir la interfaz de usuario de **ClipFieldByFunction** y establecer la expresión en **RESULT = DATA > 0**, y en el módulo **MapFieldDataOntoElems** seleccionar "mostcommon" en el cuadro de desplegable **Sample Method Per Element** y en **Maximum Distance = Inf**.

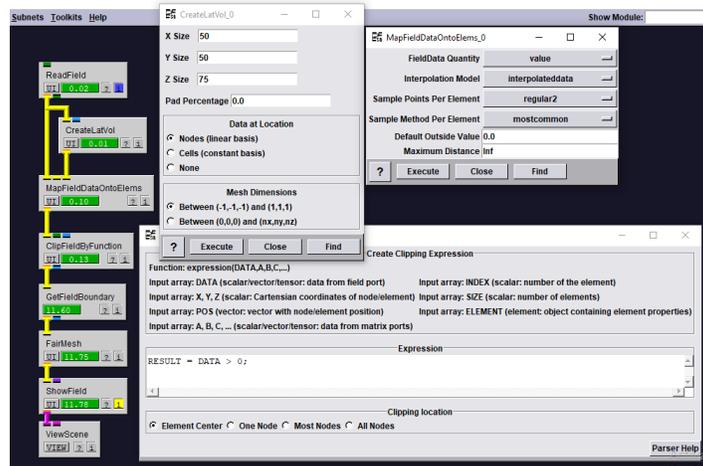


Figura A.33: La red para la construcción de la malla del Torso.

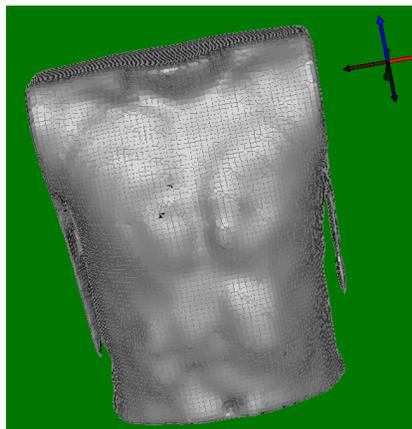


Figura A.34: Visualización de la malla del Torso.

En la salida de **ClipFieldByFunction** conectar con la entrada de un nuevo módulo **ConvertIndicesToFieldData**. Conecte la salida de **CreateMatrix** a la segunda entrada de **ConvertIndicesToFieldData**. Finalmente, conectar la salida de **ConvertIndicesToFieldData** al módulo **BuildFEMatrix**.

A continuación, los electrodos deben incorporarse a la simulación. Para esto, insertar un nuevo módulo **ReadBundle**. Conectar la salida del **ReadBundle** a la entrada del módulo **GetFieldsFromBundle**. Para comenzar,

conecte la primera y la segunda salidas amarillas de **GetFieldsFromBundle** para separar los módulos **CreateFieldData**. Ahora, conectar los dos módulos **CreateFieldData** a un módulo **JoinFields**. En la salida del módulo **JoinFields** conectar a la primera entrada de un módulo **MapFieldDataOntoNodes**. En la salida del módulo **ClipFieldByFunction**, conectar con la tercera entrada de **MapFieldDataOntoNodes**. Agregar un módulo **ConvertIndicesToFieldData** que recibe su salida del módulo **MapFieldDataOntoNodes** y a un nuevo módulo **CreateMatrix**.

Después, agregar un módulo **AddKnownsToLinearSystem** y conectar la primera entrada a **BuildFEMatrix** y la tercera entrada a la salida del módulo **GetFieldData**. Las dos salidas del módulo **AddKnownsToLinearSystem** conectar con las dos entradas nuevo módulo de **SolveLinearSystem**.

Agregaremos un módulo **SetFieldData** entre los módulos **ClipFieldByFunction** y **GetFieldBoundary**. Esto requiere eliminar la conexión anterior, agregar el módulo y conectar los tres módulos juntos. Finalmente, agregar el mapa de color estándar agregando un módulo **CreateStandardColorMaps** conectando a un módulo **RescaleColorMap**. La segunda entrada del módulo **RescaleColorMap** proviene de la salida del módulo **SetFieldData**. La salida de **RescaleColorMap** se usa como la segunda entrada para el módulo **ShowField**.

Visualización de la red de la simulación de elementos finitos en un torso. A continuación, configurar algunos módulos y otros mantienen su configuración predeterminada.

En el módulo de **CreateMatrix** de la red [A.35](#) establecer 12 filas y 1 columna, las entradas de la matriz se establecen los datos de la tabla de conductividades y segmentación anteriormente mencionada.

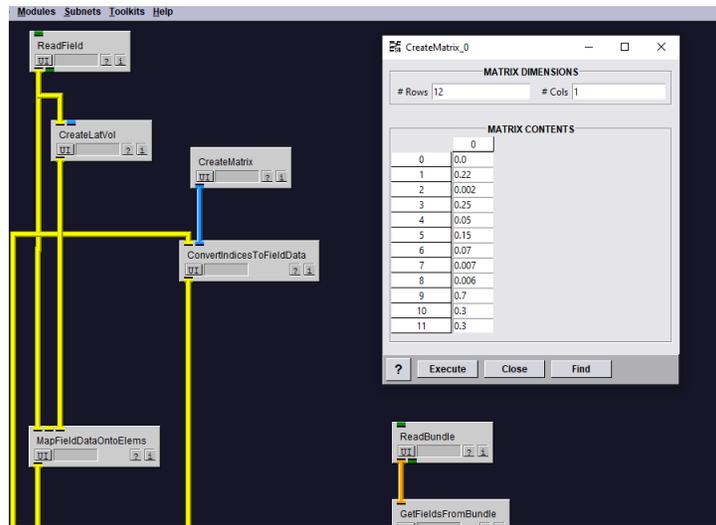


Figura A.35: La configuración del módulo **CreateMatrix**.

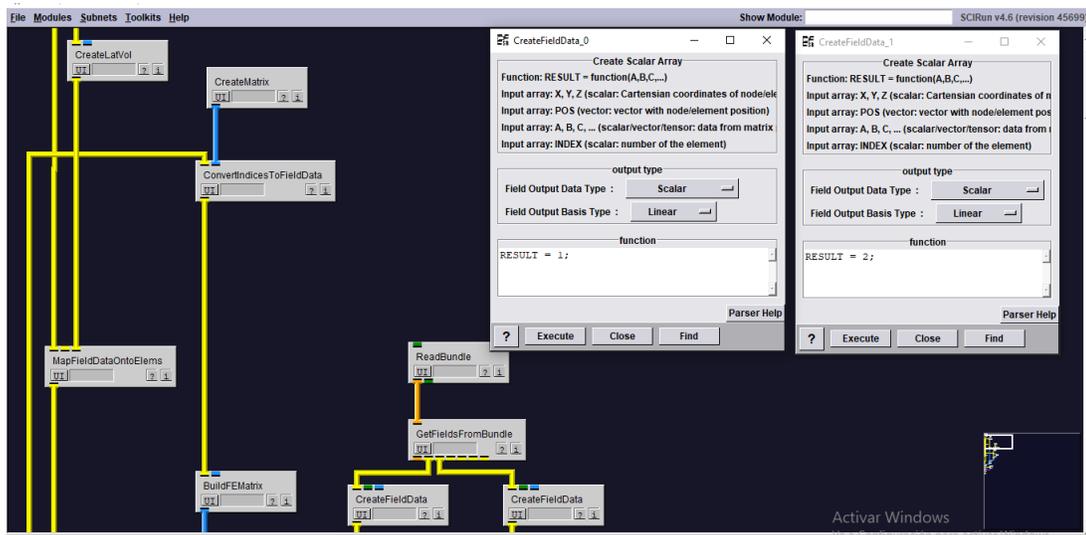


Figura A.36: La configuración de los módulos **CreateFieldData**.

Los módulos **CreateFieldData** que se encuentran conectados en la salida del módulo **GetFieldsFromBundle** (ver Figura [A.36](#)). En el módulo de la izquierda establecer la función **RESULT = 1** y el módulo de lado derecho **RESULT = 2**.

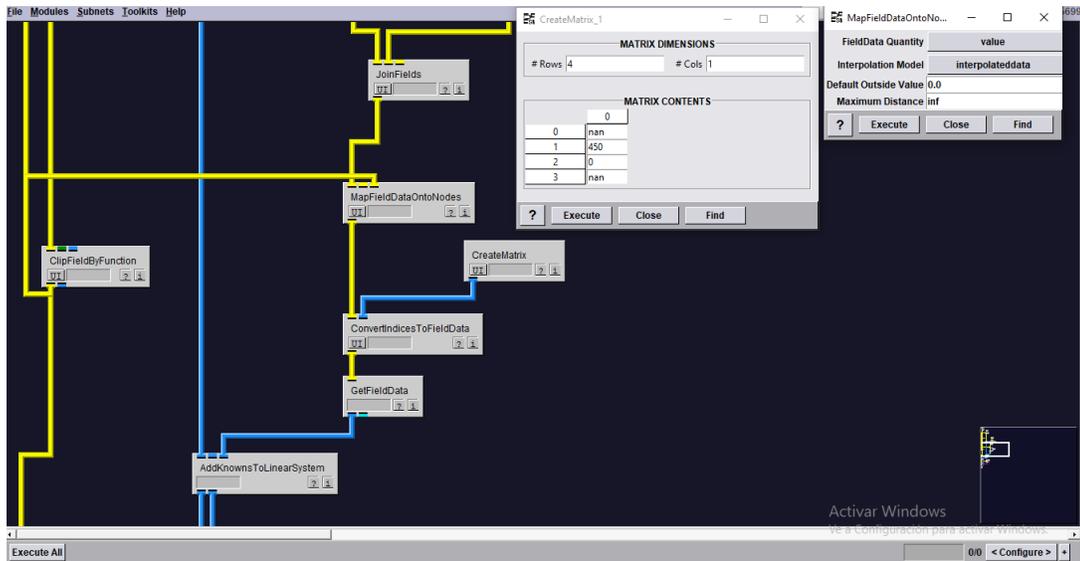


Figura A.37: Configuración de los módulos **CreateMatrix** y **MapFieldDataOntoNodes**.

En la red [A.37](#), abrir la interfaz de usuario del módulo **CreateMatrix** y establezca 4 filas y 1 columna. En la primera entrada de la matriz **nan** que significa valor desconocido. Las siguientes dos entradas representan los potenciales de los dos electrodos. Los configuraremos en 450 y 0 para esta simulación. Finalmente, por razones que quedarán claras una vez que agreguemos un electrodo flotante, establezca la cuarta entrada en nan.

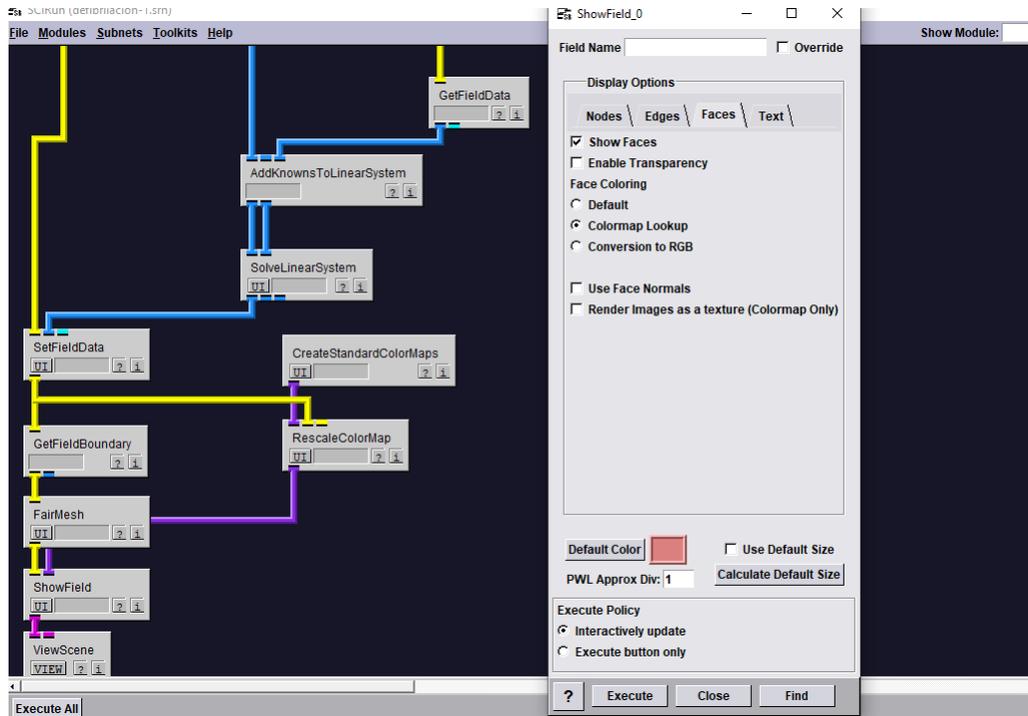


Figura A.38: La configuración del módulo **ShowField**.

En el módulo **ShowField**, asegurarse que en la pestaña "Faces" tenga seleccionado las opciones **Show Faces** y **Colormap Lookup**.