



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Algunas propiedades de la densidad del precio de un activo con volatilidad Ornstein–Uhlenbeck

TESIS

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En el área:
Matemáticas Aplicadas e Industriales

Presenta:
Felipe Hernández Cardona

Asesor:
Dr. Julio C. García Corte

Julio de 2016



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00146

Matricula: 2133802769

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA DENSIDAD DEL PRECIO DE UN ACTIVO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN-UHLENBECK

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 13 del mes de julio del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. CARLOS IBARRA VALDEZ
DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE
DR. GERONIMO URIBE BRAVO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: FELIPE HERNANDEZ CARDONA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar



FELIPE HERNANDEZ CARDONA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

[Signature]
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

[Signature]
DR. CARLOS IBARRA VALDEZ

VOCAL

[Signature]
DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

SECRETARIO

[Signature]
DR. GERONIMO URIBE BRAVO

*A mi esposa y mis padres
Paulina, Beatriz y Felipe*

Agradezco a:

El CONACyT por su apoyo económico (370536) brindado para la realización de mis estudios de posgrado de la Maestría en Ciencias en el área Matemáticas Aplicadas e Industriales de la Universidad Autónoma Metropolitana, Plantel Iztapalapa.

La M. en C. M^a Iseo González Christens de la Oficina de Asistencia a Posgrado. División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Plantel Iztapalapa, por su constante guía.

Mis profesores por sus enseñanzas. Muy especialmente, al Dr. Julio César García Corte, quien además de mi profesor, fue un excelente asesor que siempre me impulso en el camino de la investigación con paciencia y dedicación.

Y finalmente, al Dr. Gerónimo Uribe Bravo y al Dr. Carlos Ibarra Valdéz por sus amables consejos y sugerencias para la culminación de esta etapa de mi vida.

RESUMEN

Suponiendo que la volatilidad de un activo financiero es estocástica, prácticamente no es posible exhibir una representación explícita de la distribución del precio del activo. Entonces, es necesario tratar la situación de manera aproximada mediante simulación numérica. No obstante, cuando la volatilidad obedece a un proceso de Ornstein–Uhlenbeck, la distribución del precio se puede obtener de forma cerrada. En este caso, se tiene un modelo con propiedades asintóticas que no requieren de restricciones sobre los parámetros que definen al proceso de volatilidad y por lo tanto al del precio.

ABSTRACT

Assuming that the volatility of a financial asset is stochastic, virtually no opportunity to display an explicit representation of the distribution of the asset price; to address the situation, it is necessary to approximate by numerical simulation. However, when the volatility obeys to an process of Ornstein–Uhlenbeck, the distribution of the price can be obtained in a closed form. In this case, we have a model with asymptotic properties which do not depend on constrains of the parameters that define both the price process and the volatility.

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras	XIII
Nomenclatura	XVII
INTRODUCCIÓN	1
1. ANTECEDENTES: PRECIO CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA	5
1.1. Modelos de precio con volatilidad estocástica	5
1.1.1. Ejemplos	6
2. UNA TRANSFORMADA DE LAPLACE IMPORTANTE	9
2.1. El modelo de volatilidad y la función $I(\lambda)$	9
2.1.1. Ejemplos y Comentarios	16
3. DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN–UHLENBECK	25
3.1. Distribución del precio de un activo	25
3.1.1. Ejemplos y Comentarios	31
4. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA DENSIDAD DEL PRECIO	37
4.1. Comportamiento asintótico de f_t^0	37
4.1.1. Ejemplos	41
CONCLUSIONES	45
APÉNDICES	47
A. ALGUNOS CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS	49
A.1. Espacios y funciones medibles	49
A.2. Medidas y espacios de probabilidad	50
A.3. Variables aleatorias	51

ÍNDICE GENERAL

A.4. Procesos estocásticos	53
A.5. Martingalas, Submartingalas y Supermartingalas	54
A.6. Movimiento Browniano	55
A.7. Funciones de transición	56
A.8. Procesos de Itô	57
B. LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL	59
B.1. La distribución Lognormal	59
C. FÓRMULA DE BLACK–SCHOLES–MERTON	61
C.1. Fórmula de Black–Scholes–Merton	61
C.1.1. Ejemplos	62
D. EL PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK	65
D.1. Proceso de Ornstein–Uhlenbeck	65
E. PROPIEDAD ASINTÓTICA DE $I(\lambda t)$: ENFOQUE ALTERNATIVO	67
E.1. Procesos de Itô ergódicos	67
E.2. Comportamiento asintótico de $I(\lambda t)$	68
F. FÓRMULA DE ITÔ	71
F.1. Fórmula de Itô	72
G. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES	73
G.1. Separación de variables para EDE	73
H. LA TRANSFORMADA DE FOURIER	75
H.1. La transformada de Fourier	75
I. EXISTENCIA DE LA DENSIDAD DE α_t	77
I.1. Existencia de la densidad de α_t	77
BIBLIOGRAFÍA	81

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.1.	Gráfica de la densidad del proceso de O-U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$	7
1.1.2.	Gráfica de 100 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$	8
1.1.3.	Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$	8
2.1.1.	Gráfica de la solución de la ecuación de Ricatti (2.1.20) con parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$	17
2.1.2.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (2.1.21) con parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$	18
2.1.3.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (2.1.22) con parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$	18
2.1.4.	Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$	19
2.1.5.	Familia de gráficas de la función $u(\tilde{\lambda})$ para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1$, y $k = 1$, manteniendo constante la variable espacial en $x = 1$	19
2.1.6.	Familia de gráficas de $I(\lambda)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \sigma_0 = 1$ y $k = 1$	20
2.1.7.	Familia de gráficas de la función $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$	20
3.1.1.	Gráfica de la densidad del precio al tiempo $t \in \{1, 2, 3\}$ con $\mu = 0$ y parámetros de O-U, $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$	33

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1.2.	Gráfica de la densidad del precio al tiempo $t \in \{1, 2, 3\}$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	33
3.1.3.	Gráfica de 500 trayectorias del proceso de precios P_t en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	34
3.1.4.	Acercamiento de la gráfica de la Figura 3.1.3 en el rango de precios $[0, 10]$.	34
3.1.5.	Gráfica de 1000 trayectorias del proceso de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	35
3.1.6.	Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	35
3.1.7.	Densidad Vs. histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	36
3.1.8.	Densidad Vs. histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 2$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.	36
4.1.1.	Gráfica de L con parámetros $\delta = 0.5, \theta = 0.5, \lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.	42
4.1.2.	Gráfica de M con parámetros $\delta = 0.5, \theta = 0.5, \lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.	42
4.1.3.	Gráfica de N con parámetros $\delta = 0.5, \theta = 0.5, \lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.	43
4.1.4.	Familia de gráficas de $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 0.5, \theta = 0.5, \lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.	43
4.1.5.	Familia de gráficas de la función $I(\lambda)$ manteniendo constante a $\sigma_0 = 1$, con parámetros $\delta = 0.5, \theta = 0.5, k = 0.5$ y tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.	44
B.1.1.	Gráfica de la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.	60

C.1.1.	Gráfica de la densidad del Movimiento Browniano Geométrico en $t = 1, 2, 3$ con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$	63
C.1.2.	Gráfica de la densidad del Movimiento Browniano Geométrico al tiempo $t = [0, 5]$ con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$	63
C.1.3.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$	64
C.1.4.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en su estado no estacionario, con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$	64

NOMENCLATURA

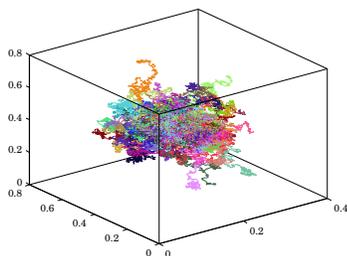
Dada una función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase $\mathcal{C}^{1,n}$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$,

$$D_0^1 f(t, x) \equiv \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

$$D_i^j f(t, x) \equiv \frac{\partial^j f}{\partial x_i^j}(t, x)$$

$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$, $k, m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

INTRODUCCIÓN



Desde hace varios años, el mundo de las finanzas se modela mediante la representación matemática de activos financieros a partir de variables aleatorias y de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Según [Doporto–Michelena, 2011], la volatilidad de los precios de un activo puede asociarse a la desviación estandar de las variaciones de los precios de dicho activo respecto de un valor medio o de su tendencia. También puede interpretarse como la velocidad con la que cambian los precios de ese activo. Es claro que cuando la volatilidad no cambia a lo largo del tiempo y si lo hace, es de forma conocida, se denomina volatilidad determinista. Si los cambios observados a lo largo del tiempo son de forma desconocida o incierta, se dice entonces que es estocástica.

Como menciona [Lorenzo, 1996], una extensa literatura financiera encuentra, a través de contrastes empíricos, que la volatilidad de la tasa de cambio en los precios de activos financieros (por ejemplo, acciones) en cierto modo, no es constante con respecto del tiempo, como se asume en el modelo de Black–Scholes (1973). Diferentes explicaciones se han dado para este comportamiento cambiante, lo que ha generado una basta variedad de modelos, que van desde aquellos trabajos de Cox–Ross (1976) y Geske (1979), que planteaban que la volatilidad se modificaba, pero bajo un comportamiento determinista, hasta otros más recientes que la suponen estocástica, como Hull–White (1987), Scott (1987), Wiggins (1987) y Johnson–Shanno (1987).

A su vez, y bajo una dinámica estocástica, numerosos trabajos han planteado procesos alternativos para la volatilidad, por ejemplo, procesos de saltos, procesos

INTRODUCCIÓN

de caos y más recientemente, modelos de árbol binomial implícito, denominados estos últimos como “modelos de valuación de opciones de la nueva generación”, véase [Lorenzo, 1996]. La aplicación de modelos de volatilidad estocástica en los mercados financieros se hace para contar con predicciones de volatilidad, con mediciones del riesgo y con valuación de opciones, entre otros. El modelo de Hull–White es considerado el más importante y pionero en la obtención de una solución al problema de valuación de opciones con volatilidad estocástica, no obstante, la consideración de la volatilidad estocástica se remonta al trabajo preliminar de Johnson (1979), aunque desgraciadamente, no obtuvo una solución cerrada, véase [Lorenzo, 1996].

Ya que el modelo de Hull–White para valorar opciones incorpora al proceso de volatilidad como un movimiento browniano geométrico, y éste no posee la propiedad de revertir a su media, implica una desventaja, al provocar la sobrevaluación del precio de la opción, lo cual puede ser revisado con más detalle en [Scott, 1987]. Por otro lado, al revisar la literatura financiera, es posible encontrar que uno de los defectos del modelo de Black–Scholes es la subvaluación que se presenta al considerar a la volatilidad como un factor que no cambia a través del tiempo; una corrección de este problema fue sugerido por Hull–White al incorporar una volatilidad no constante y evitando así la subvaluación pero como ya se dijo antes, ésto por el contrario, provoca sobrevaluación.

Con la finalidad de evitar la subvaluación y la sobrevaluación de una opción, [Stein–Stein, 1991] asume al proceso de volatilidad de tipo Ornstein–Uhlenbeck (O–U), el cual es gaussiano y de reversión a su media, evitando así, los supuestos problemas de los modelos de Black–Scholes y de Hull–White. En la literatura se dice que es empíricamente relevante que la volatilidad revierta a su media.

Suponiendo que la volatilidad es estocástica, son pocas las posibilidades de exhibir una representación explícita de la distribución del precio del activo subyacente y por lo tanto, también de una expresión cerrada para la valuación del derivado, lo que encamina a tratar la situación de manera aproximada mediante simulación numérica. No obstante, hay al menos una situación en la que la volatilidad, a pesar de ser estocástica, tiene un comportamiento que permite obtener una solución de forma ce-

rrada de la distribución del precio y esto es cuando ella obedece a un proceso de Ornstein–Uhlenbeck.

Cuando la volatilidad sigue un proceso Ornstein–Uhlenbeck, se tiene un modelo de densidad del precio del subyacente con ciertas propiedades interesantes, por lo menos matemáticamente, las cuales vienen dadas por el hecho de que prácticamente no depende de los valores de los parámetros que definen al proceso de volatilidad que a su vez define al del precio. Algunas de estas propiedades son: a) tiene un comportamiento asintótico a través del tiempo y b) está estrechamente ligado con tener colas pesadas respecto a la Distribución Normal.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

CAPÍTULO 1: En este capítulo se presentan, de manera general, el modelo estocástico de precios de un activo subyacente y algunas consideraciones sobre la volatilidad tales como su tipo, la que será usada en los siguientes capítulos y algunos modelos de ella que son de interés en el mundo financiero.

CAPÍTULO 2: Aquí se obtiene, de forma explícita, la transformada de Laplace de la densidad del promedio temporal del cuadrado del proceso de Ornstein–Uhlenbeck que gobierna a la volatilidad en el Capítulo 3, y la razón es que dicha transformada define a la densidad del precio del subyacente.

CAPÍTULO 3: En éste, se obtiene una expresión cerrada de la densidad del precio de un activo subyacente.

CAPÍTULO 4: Capítulo final en el que se demuestra la propiedad asintótica del modelo de densidad del precio de un subyacente y se deduce que este comportamiento no depende del valor de los parámetros que definen al modelo, al ser una propiedad heredada de la transformada de Laplace analizada en el Capítulo 2.

ANTECEDENTES: PRECIO CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

1.1 MODELOS DE PRECIO CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

El precio de un activo es un proceso $\{P_t\}_{t \geq 0}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica,

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma_t P_t dW_t^1 \quad (1.1.1)$$

donde μ es una constante, W_t^1 es un MB y σ_t es la volatilidad.

La volatilidad σ_t puede ser una función determinista, o bien, un proceso estocástico $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$. Cuando es un proceso estocástico, puede ser simplemente un proceso de saltos o bien una difusión de Itô, cuyo caso será el de nuestro interés en adelante.

Puesto que la EDE que gobierna al precio es lineal, su solución tiene la forma,

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \int_0^t \mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\} \quad (1.1.2)$$

donde P_0 es la condición inicial (véase Apéndice G).

Generalmente, se supone que la volatilidad es de la forma $\sigma_t = f(Y_t)$, donde f es una función positiva y $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ un proceso que usualmente es la solución de una ecuación diferencial estocástica de la forma,

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k \rho dW_t^1 + k \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \quad (1.1.3)$$

el cual es un proceso de O-U y la razón de su uso es que es de reversión a su media, hecho que la literatura sugiere como relevante. Donde δ , θ y k son constantes positivas que denotan la tasa de reversión a la media, el nivel medio a largo plazo

y la volatilidad de la volatilidad, respectivamente. El término de deriva de la EDE que gobierna a la volatilidad implica que el proceso solución Y_t tenga una distribución límite (cuando $t \rightarrow \infty$) cuyo valor esperado es θ , es decir, el comportamiento asintótico del proceso O-U. $\{W_t^2\}_{t \geq 0}$ es un MB correlacionado con $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$.

A priori, la correlación entre los dos MB puede depender del tiempo, pero aquí se supondrá constante, será denotado por $\rho \in [-1, 1]$ e interpretado como el coeficiente de correlación instantáneo definido por la variación cruzada entre W_1 y W_2 , $\langle W^1, W^2 \rangle = \rho t$.

A continuación se describen tres situaciones en las que un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ suele ser de interés según [Fouque *et al*, 2000, pp.41-41], aunque por supuesto existen más.

1. Cuando es la solución de una EDE lineal con coeficientes constantes

$$dY_t = c_1 Y_t dt + c_2 Y_t dW_t^2$$

bajo estas condiciones, se dice que $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso lognormal.

2. Cuando $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso O-U,[†]

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k dW_t^2$$

3. Cuando $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Cox–Ingersoll–Ross (CIR), es decir, la solución de la EDE,

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k \sqrt{Y_t} dW_t^2$$

1.1.1 Ejemplos

📖 **Ejemplo 1.1.1.** En la Figura 1.1.1, la gráfica de la densidad del proceso de O-U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

📖 **Ejemplo 1.1.2.** En la Figura 1.1.2 se muestra la gráfica de 100 trayectorias del proceso de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

[†] Note que éste es el caso en el $\rho = 0$ en la ecuación (1.1.3).

1.1 Modelos de precio con volatilidad estocástica

🔗 **Ejemplo 1.1.3.** En la Figura 1.1.3 una gráfica comparativa del histograma y la distribución teórica del proceso de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

🔗 **Ejemplo 1.1.4.** En la Tabla 1.1.1 se enlistan algunos modelos de volatilidad estocástica mencionando entre otras cosas, el valor de la correlación instantánea ρ y la función $f(Y)$.

Tabla 1.1.1: Algunos modelos de volatilidad estocástica [Fouque *et al*, 2000, p.42]

Autor y Referencia	Correlación	Función f	$\{Y_t\}_{t \geq 0}$
[Hull, 2008]	$\rho = 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	MBG
[Scott, 1987]	$\rho = 0$	$f(Y) = e^Y$	O-U
[Stein–Stein, 1991]	$\rho = 0$	$f(Y) = Y $	O-U
[Ball–Roma, 1994]	$\rho = 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	CIR
[Heston, 1993]	$\rho \neq 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	CIR
[Bormetti <i>et al</i> , 2010]	$\rho \neq 0$	$f(Y) = e^Y$	O-U
	$\rho \neq 0$	$f(Y) = Y $	O-U

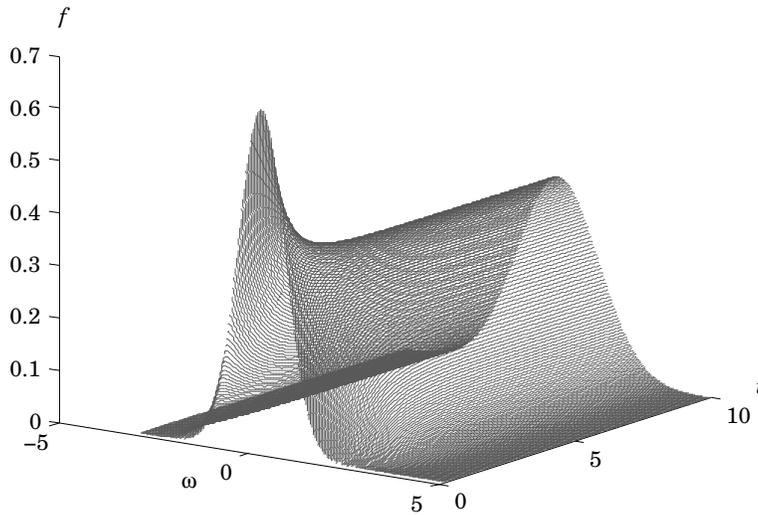


Fig. 1.1.1: Gráfica de la densidad del proceso de O-U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

1 ANTECEDENTES: PRECIO CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

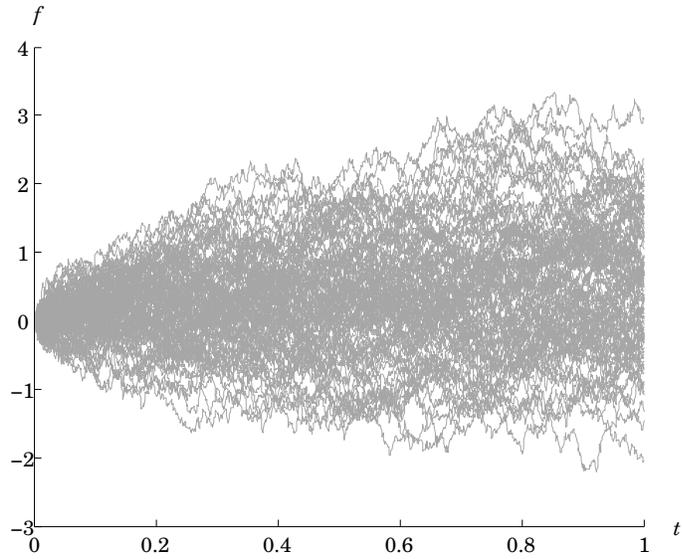


Fig. 1.1.2: Gráfica de 100 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U para tiempos $t \in [0,1]$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

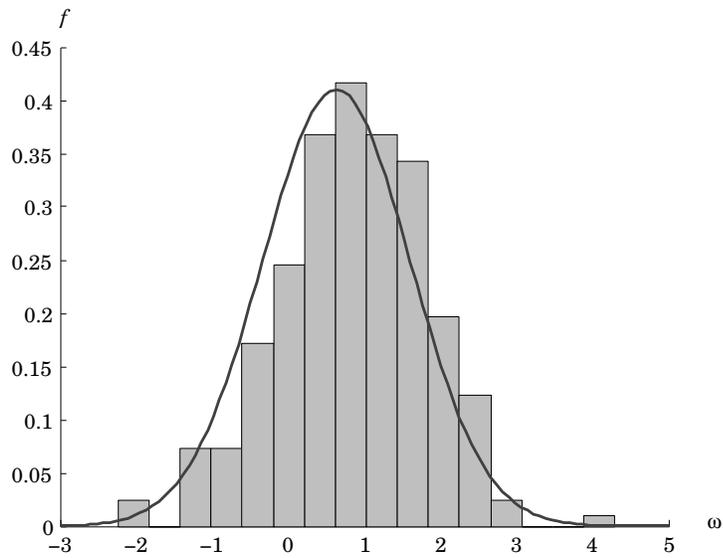


Fig. 1.1.3: Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1, \theta = 1, k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

 UNA TRANSFORMADA DE LAPLACE IMPORTANTE

En este capítulo se obtendrá la expresión explícita de la transformada de Laplace de la densidad del promedio temporal del cuadrado de un proceso de Ornstein–Uhlenbeck. En el Capítulo 3, esta transformada será utilizada para calcular la densidad del precio de un activo subyacente según el modelo de [Stein–Stein, 1991].

 2.1 EL MODELO DE VOLATILIDAD Y LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

Considérese un proceso $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ tal que $\sigma_t = |Y_t|$, donde Y_t es un proceso de O–U con parámetros $k, \theta, \delta > 0$ y condición inicial $Y_0 \in \mathbb{R}$ de tal manera que, para todo $t \geq 0$,

$$dY_t = \delta(\theta - Y_t) dt + k dW_t \quad (2.1.1)$$

y sean α_t e $I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ tales que,

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds} \quad (2.1.2)$$

$$I_{\alpha_t^2}(\lambda) = \mathbb{E} [\exp \{-\lambda \alpha_t^2\}] \quad (2.1.3)$$

donde, $I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ es la función generadora de momentos de α_t^2 (o bien, la transformada de Laplace de su densidad, véase Apéndice I). Es posible probar que, para toda $\lambda \geq 0$ y ciertas funciones L , M y N ,

$$I_{\alpha_t^2}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) \right\}$$

y con la idea de mantener simpleza en la notación, de aquí en más se entenderá que $I(\lambda) = I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ para proceder ahora a probar este hecho en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. Caracterización de $I(\lambda)$

Para toda $\lambda \geq 0$,

$$I(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) \right\} \quad (2.1.4)$$

donde,

$$L(t) = -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\} \quad (2.1.5)$$

$$M(t) = B \left(b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{(1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} - 1 \right) \quad (2.1.6)$$

$$N(t) = k^2 \left(\frac{B^2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t \quad (2.1.7)$$

$$+ \frac{B^2 (1 - 2b^2)}{2a} \left(\tanh \{a k^2 t + z_0\} - b \right)$$

$$+ \frac{B^2 b (1 - b^2)}{a} \left(1 - \frac{\cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\cosh \{a k^2 t + z_0\}}{\cosh \{z_0\}} \right\}$$



Richard Feynman
(1918-1988)

Físico estadounidense, merecedor al Premio Nobel de Física en 1965 por su trabajo en electrodinámica cuántica, en el que desarrolló un método para estudiar las interacciones y propiedades de las partículas subatómicas.

los parámetros a , b y z_0 son tales que,

$$a = \sqrt{A^2 - 2C}, \quad b = -\frac{A}{a} \quad \text{y} \quad z_0 = \operatorname{arctanh} \{b\} \quad (2.1.8)$$

y,

$$A = -\frac{\delta}{k^2}, \quad B = \frac{\theta \delta}{k^2} \quad \text{y} \quad C = -\frac{\lambda}{k^2 t} \quad (2.1.9)$$

Demostración:

Se seguirá una técnica similar a la que se utiliza en [Stein–Stein, 1991, pp.746-748]. De acuerdo a la Fórmula de Feynman–Kac desarrollada en [Øksendal, 2003, pp.137-139], para funciones c , continuas y acotadas inferiormente, si se define

$$u(t, \sigma_0) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\sigma_s) ds \right\} \right] \quad (2.1.10)$$

entonces u es la solución de la EDP,

$$D_0^1 u(t, x) = \frac{1}{2} k^2 D_1^2 u(t, x) - \delta(x - \theta) D_1^1 u(t, x) \quad (2.1.11)$$

$$+ c(x) u(t, x)$$

2.1 El modelo de volatilidad y la función $I(\lambda)$

sujeta a la condición inicial $u(0, x) = 1.$ (2.1.12)

Eligiendo $c(x)$ de la forma $c(x) = -\tilde{\lambda} x^2,$ (2.1.13)

donde $\tilde{\lambda} \geq 0,$ se tiene que,

$$\begin{aligned} u(t, \sigma_0) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} t \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} t \alpha_t^2 \right\} \right] \\ &= I(\tilde{\lambda} t). \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Definiendo $A_0 = -\delta, B_0 = \theta \delta, C_0 = -\tilde{\lambda},$ y haciendo uso de la ecuación (2.1.13), la EDP (2.1.11) se transforma en

$$\begin{aligned} D_0^1 u(t, x) &= \frac{1}{2} k^2 D_1^2 u(t, x) + (A_0 x + B_0) D_1^1 u(t, x) \\ &\quad + C_0 x^2 u(t, x) \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

con la misma condición inicial (2.1.12). Se demostrará que la EDP (2.1.15) sujeta a (2.1.12), siempre tiene una solución de la forma

$$u(t, x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) x^2 + M(t) x + N(t) \right\}. \tag{2.1.16}$$

Entonces, tomando $u(t, x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) x^2 + M(t) x + N(t) \right\}$ se tiene que,

$$\begin{aligned} D_0^1 u(t, x) &= u(t, x) \left(\frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) \right) \\ D_1^1 u(t, x) &= u(t, x) \left(L(t) x + M(t) \right) \\ D_1^2 u(t, x) &= u(t, x) \left(L(t) + \left(L(t) x + M(t) \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Ahora, puesto que u debe ser solución de la EDP (2.1.15) entonces, con la ayuda del conjunto de ecuaciones (2.1.17) y después de algunas simplificaciones, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) &= \frac{1}{2} k^2 \left(L(t) + \left(L(t) x + M(t) \right)^2 \right) \\ &\quad + (A_0 x + B_0) \left(L(t) x + M(t) \right) \\ &\quad + C_0 x^2. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$



Mark Kac
(1914-1984)

Matemático polaco-estadounidense que trabajó a la par de Richard Feynman en procesos de Wiener “integrales de trayectoria de Feynman” en el caso real, el resultado, la fórmula de Feynman-Kac; el caso complejo aún no ha sido probado.

Luego, reagrupando términos, puede verse como la siguiente igualdad de polinomios de segundo grado en x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) &= \left(\frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0 \right) x^2 \\ &+ \left(k^2 L(t) M(t) + A_0 M(t) \right. \\ &+ \left. B_0 L(t) \right) x + \frac{1}{2} k^2 M^2(t) \\ &+ B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t). \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Así, el problema se reduce a resolver el equivalente sistema acoplado de EDO,

$$\frac{1}{2} L'(t) = \frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0 \quad (2.1.20)$$

$$M'(t) = k^2 L(t) M(t) + A_0 M(t) + B_0 L(t) \quad (2.1.21)$$

$$N'(t) = \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \quad (2.1.22)$$

y la condición inicial $u(0, x) = 1$ es equivalente al conjunto de condiciones iniciales

$$L(0) = 0 \quad (2.1.23)$$

$$M(0) = 0 \quad (2.1.24)$$

$$N(0) = 0 \quad (2.1.25)$$

☉ **Observación 2.1.1.** La ecuación (2.1.20) es de Ricatti con coeficientes constantes.

Reescribiendo a la ecuación de Ricatti (2.1.20) como

$$L'(t) = k^2 L^2(t) + 2 A_0 L(t) + 2 C_0$$

se resolverá por método de separación de variables, es decir,

$$1 = \frac{L'(t)}{2 C_0 + 2 A_0 L(t) + k^2 L^2(t)}$$

entonces,

$$\int 1 dt = \int \frac{dL}{2 C_0 + 2 A_0 L + k^2 L^2}$$

y definiendo $\alpha = 2 C_0$, $\beta = 2 A_0$ y $\gamma = k^2$,

$$\begin{aligned}
 t - c_L &= \int \frac{dL}{\alpha + \beta L_1 + \gamma L_1^2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4 \alpha \gamma - \beta^2}} \arctan \left\{ \frac{2 \gamma L + \beta}{\sqrt{4 \alpha \gamma - \beta^2}} \right\} \\
 &= \frac{-2 i}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \arctan \left\{ i \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \\
 &= \frac{-2 i^2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\}
 \end{aligned}$$

de donde,

$$L(t) = -\frac{\beta}{2 \gamma} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2 \gamma} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} t - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} c_L \right\}$$

luego, usando la condición inicial (2.1.23), la constante de integración c_L es,

$$c_L = -\frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\}$$

finalmente, si $A = \frac{A_0}{k^2}$, $C = \frac{C_0}{k^2}$, $a = \sqrt{A^2 - 2 C}$, $b = -\frac{A}{a}$ y $z_0 = \operatorname{arctanh} \{b\}$ entonces,

$$\begin{aligned}
 L(t) &= -\frac{\beta}{2 \gamma} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2 \gamma} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} t + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \right\} \\
 &= -\frac{A_0}{k^2} - \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2} t + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 A_0}{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}} \right\} \right\} \\
 &= -\frac{A_0}{k^2} - \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} k^2 t \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 k^2 A_0}{k^2 \sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}} \right\} \right\} \\
 &= -A - a \tanh \{a k^2 t + \operatorname{arctanh} \{b\}\} \\
 &= -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\}.
 \end{aligned}$$

Una vez conocida L , la ecuación (2.1.21) es lineal y no homogénea, así que su solución puede ser obtenida por el método del factor integrante.

Tomando a $L(t) = -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\}$ y reescribiendo a la ecuación (2.1.21) como

$$M'(t) - [k^2 L(t) + A_0] M(t) = B_0 L(t)$$

se tiene que el factor integrante es, $\mu(t) = \exp\left\{-\int k^2 L(t) + A_0 dt\right\}$

$$\begin{aligned} &= \exp\left\{\int a k^2 \tanh \{a k^2 t + z_0\} dt\right\} \\ &= \exp\left\{\ln\left\{\cosh \{a k^2 t + z_0\}\right\}\right\} \\ &= \cosh \{a k^2 t + z_0\} \end{aligned}$$

luego, definiendo $B = \frac{B_0}{k^2}$,

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{\int \mu(t) B_0 L(t) dt + c_M}{\mu(t)} = B_0 \left(\frac{\int \mu(t) L(t) dt + \frac{c_M}{B_0}}{\mu(t)} \right) \\ &= B_0 \left(\frac{\int \cosh \{a k^2 t + z_0\} [-A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\}] dt + \frac{c_M}{B_0}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) \\ &= B_0 \left(\frac{-\frac{A}{a k^2} \sinh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{a}{a k^2} \cosh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B_0}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) \\ &= \frac{B_0}{k^2} \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{k^2 c_M}{B_0} - 1}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) \\ &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B} - 1}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) \\ &= B \left(b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} - 1 \right) \end{aligned}$$

donde c_M es la respectiva constante de integración, la cuál usando la condición inicial (2.1.24) es $c_M = B (1 - b^2) \cosh \{z_0\}$. Por lo tanto,

$$M(t) = B \left(b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{(1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} - 1 \right).$$

2.1 El modelo de volatilidad y la función $I(\lambda)$

Para resolver la ecuación (2.1.22), no hace falta más que una, aunque directa, engorrosa integración, una vez conocidas L y M . El primer paso será calcular $M^2(t)$ para lo cual se tomará a $M(t)$ en su forma equivalente,

$$M(t) = B \left(b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} - 1 \right)$$

teniendo entonces que,

$$\begin{aligned} M^2(t) &= B^2 \left(b^2 \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2}{B^2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 b c_M}{B} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right. \\ &\quad \left. - 2 b \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{2 c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right) \\ &= B^2 \left(b^2 \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2}{B^2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 b c_M}{a k^2 B} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] \right. \\ &\quad \left. - 2 b \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{2 c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \\ &= \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{B^2 k^2}{2} \\ &\quad - \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] \\ &\quad - \cancel{B^2 b k^2 \tanh \{a k^2 t + z_0\}} - \cancel{B k^2 c_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}} \\ &\quad + \cancel{B B_0 b \tanh \{a k^2 t + z_0\}} + \cancel{B_0 c_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}} - B B_0 \\ &\quad - \frac{A k^2}{2} - \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\ &= -k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\ &\quad - \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] - \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 N(t) &= -k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) t + \frac{B^2 b^2}{2a} \left(a k^2 t + z_0 - \tanh \{a k^2 t + z_0\} \right) \\
 &\quad + \frac{c_M^2}{2a} \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln \left\{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \right\} - c_N \\
 &= \frac{B^2 b^2}{2a} z_0 + k^2 \left(\frac{B^2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2a} \right) \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &\quad - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} - \frac{1}{2} \ln \left\{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \right\} - c_N
 \end{aligned}$$

donde, c_N es la constante de integración la cual usando la condición inicial (2.1.25) es,

$$c_N = \frac{B^2 b^2}{2a} z_0 + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2a} \right) \tanh \{z_0\} - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{z_0\} - \frac{1}{2} \ln \left\{ \cosh \{z_0\} \right\}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 N(t) &= k^2 \left(\frac{B^2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t + \frac{B^2 (1 - 2 b^2)}{2a} \left(\tanh \{a k^2 t + z_0\} - b \right) \\
 &\quad + \frac{B^2 b (1 - b^2)}{a} \left(1 - \frac{\cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\cosh \{a k^2 t + z_0\}}{\cosh \{z_0\}} \right\}.
 \end{aligned}$$

A la luz de la ecuación (2.1.14), basta elegir $x = \sigma_0$ y $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{t}$ para cada $t > 0$ y toda $\lambda \geq 0$ para que $u(t, x) = I(\lambda)$ obteniendo, finalmente que,

$$I(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N \right\}.$$

■

2.1.1 Ejemplos y Comentarios

🔗 **Ejemplo 2.1.1.** En la Figura 2.1.1 se muestra la gráfica de L con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

🔗 **Ejemplo 2.1.2.** En la Figura 2.1.2 se muestra la gráfica de M con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

2.1 El modelo de volatilidad y la función $I(\lambda)$

✎ **Ejemplo 2.1.3.** En la Figura 2.1.3 se muestra la gráfica de N con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

✎ **Ejemplo 2.1.4.** En la Figura 2.1.4 se muestra la gráfica de u como función de x , para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

✎ **Ejemplo 2.1.5.** En la Figura 2.1.5 se muestra la gráfica de u como función de $\tilde{\lambda}$, para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$ y $x = 1$.

✎ **Ejemplo 2.1.6.** En la Figura 2.1.6 se muestra la gráfica de I como función de σ_0 , para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$.

✎ **Ejemplo 2.1.7.** En la Figura 2.1.7 se muestra la gráfica de I como función de λ , para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$ y $\sigma_0 = 1$.

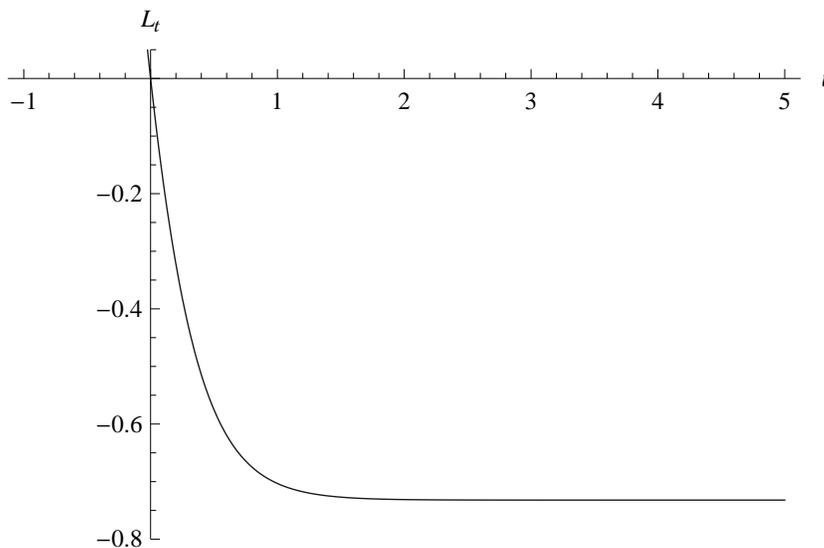


Fig. 2.1.1: Gráfica de la solución de la ecuación de Riccati (2.1.20) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

2 UNA TRANSFORMADA DE LAPLACE IMPORTANTE

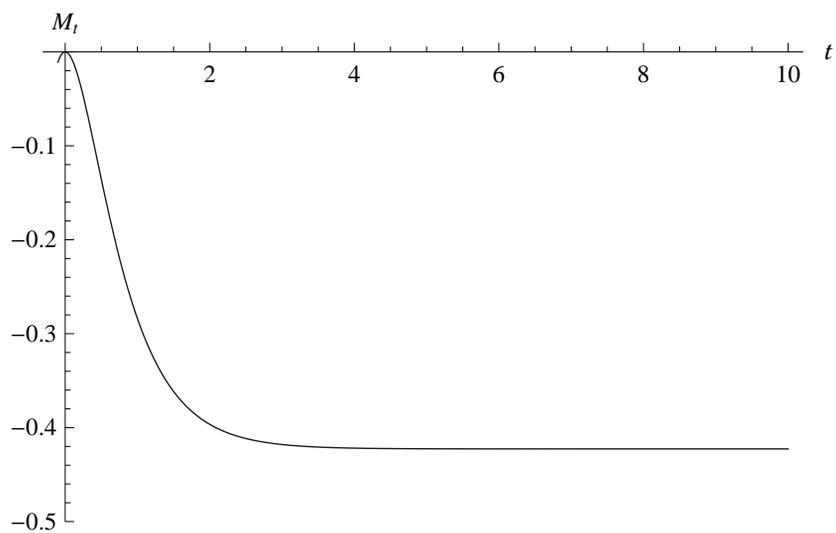


Fig. 2.1.2: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (2.1.21) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

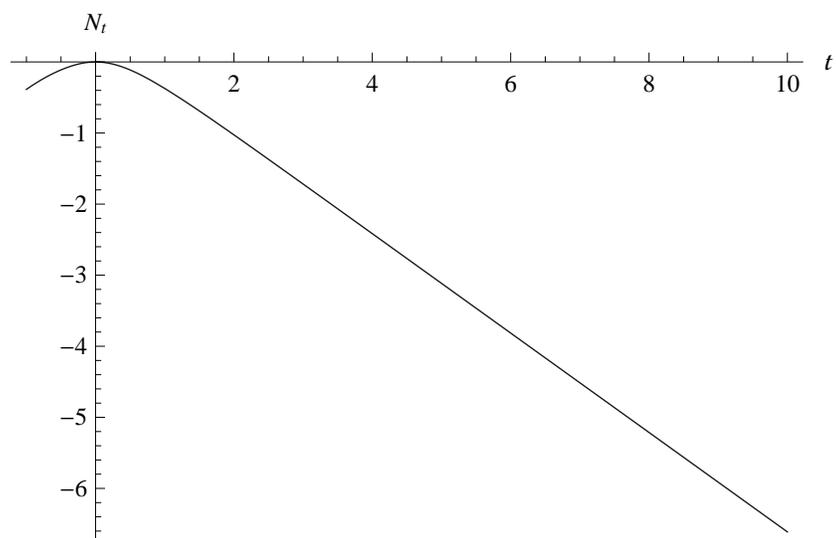


Fig. 2.1.3: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (2.1.22) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

2.1 El modelo de volatilidad y la función $I(\lambda)$

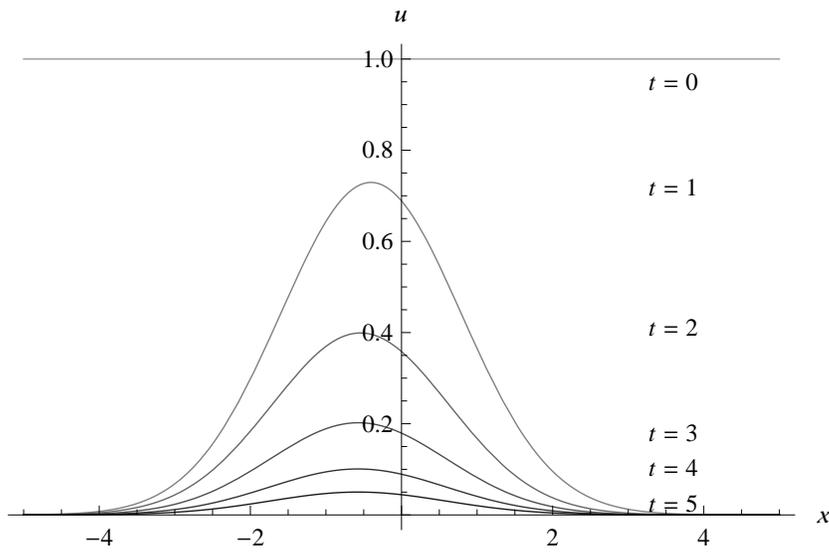


Fig. 2.1.4: Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

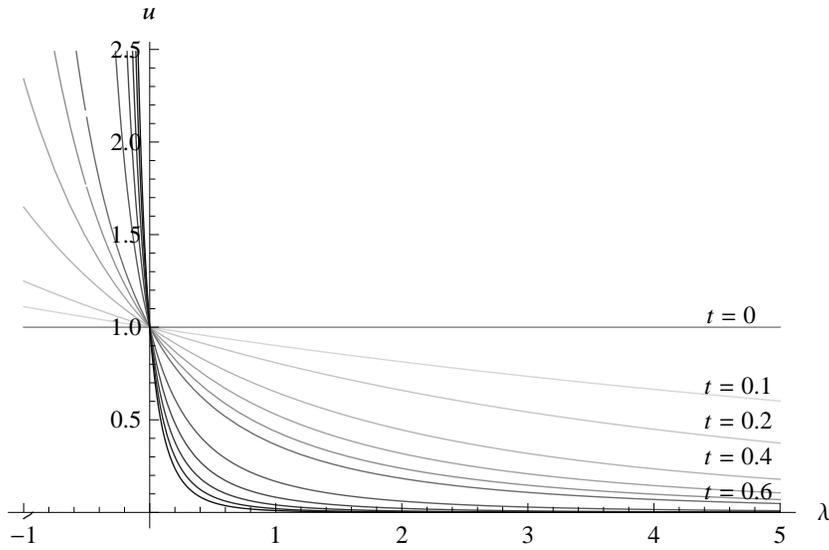


Fig. 2.1.5: Familia de gráficas de la función $u(\tilde{\lambda})$ para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, y k = 1$, manteniendo constante la variable espacial en $x = 1$.

2 UNA TRANSFORMADA DE LAPLACE IMPORTANTE

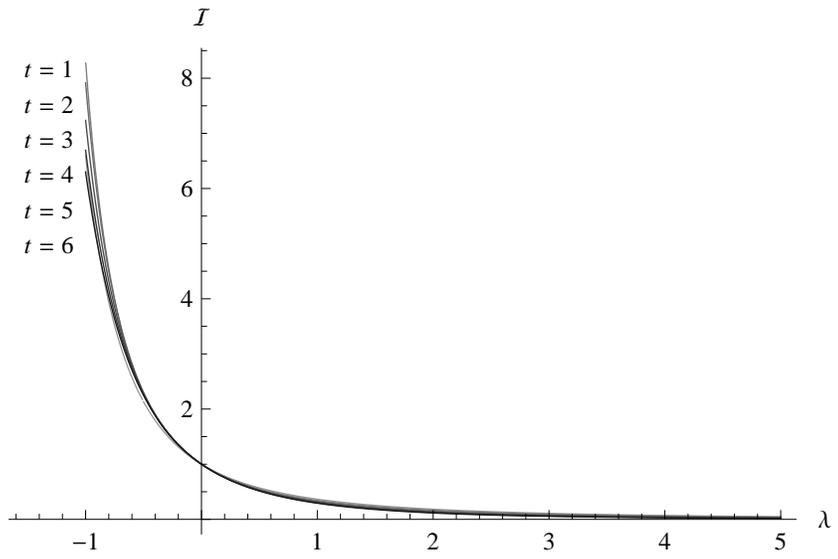


Fig. 2.1.6: Familia de gráficas de $I(\lambda)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \sigma_0 = 1$ y $k = 1$.

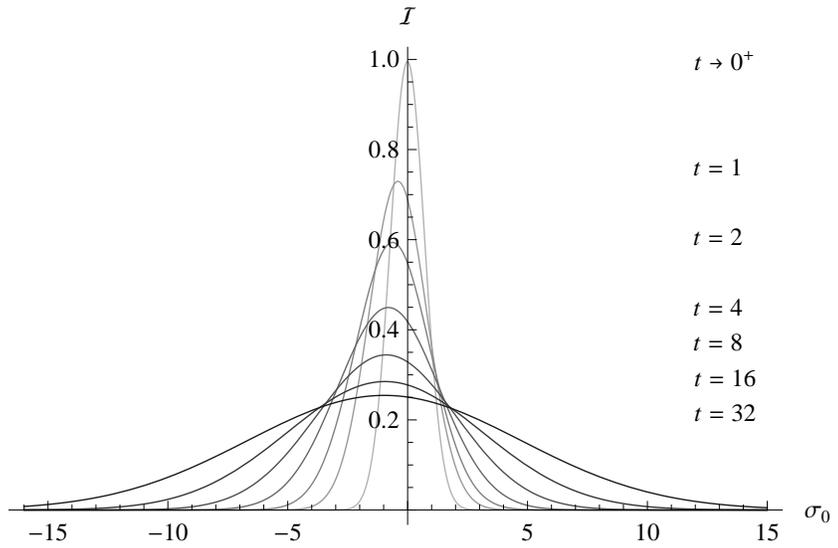


Fig. 2.1.7: Familia de gráficas de la función $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

▣ **Comentario 2.1.1.** La manera más sencilla de probar que la función L , efectivamente, es solución de la ecuación de Ricatti (2.1.20) es expresándola primero como la exhibe [Stein–Stein, 1991, p.730], es decir,

$$\begin{aligned}
 L(t) &= -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &= -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t + z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + \cosh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + \sinh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + \cosh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t\} + \sinh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right)
 \end{aligned}$$

luego comprobando que L es solución de la ecuación de Ricatti (2.1.20):

$$\begin{aligned}
 L'(t) &= -a \left\{ \frac{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}) (a k^2 \cosh \{a k^2 t\} + a k^2 b \sinh \{a k^2 t\})}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}) (a k^2 \sinh \{a k^2 t\} + a k^2 b \cosh \{a k^2 t\})}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right\} \\
 &= -a \left\{ a k^2 - a k^2 \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right)^2 \right\} \\
 &= -a \left\{ a k^2 - a k^2 \left(-\frac{L(t) + A}{a} \right)^2 \right\} \\
 &= k^2 L^2(t) + 2 A k^2 L(t) + k^2 (A^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2} L'(t) = \frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0$$

es decir, L es solución de la ecuación de Ricatti (2.1.20).

¶ **Comentario 2.1.2.** Análogamente a la discusión del Comentario 2.1.1, la manera más sencilla de probar que la función M , efectivamente, es solución de la EDO lineal (2.1.21) es expresándola primero como la exhibe [Stein–Stein, 1991, p.730], es decir,

$$\begin{aligned}
 M(t) &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t + z_0\} + (1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + b \cosh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\} + (1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + \sinh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + \sinh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

luego, comprobando que M es solución de la EDO lineal (2.1.21):

$$\begin{aligned}
 M'(t) &= B \left\{ \frac{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}) (a k^2 b \cosh (a k^2 t) + a k^2 b^2 \sinh (a k^2 t))}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{a k^2 \sinh (a k^2 t) + a k^2 b \cosh (a k^2 t)}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right\} \\
 &= B \left\{ a k^2 b - \frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right. \\
 &\quad \left. \times a k^2 \frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right\} \\
 &= B \left\{ a k^2 b - \left(\frac{M(t)}{B} + 1 \right) a k^2 \left(-\frac{L(t) + A}{a} \right) \right\} \\
 &= B a k^2 b + k^2 (M(t) L(t) + A M(t) + B L(t) + B A) \\
 &= k^2 M(t) L(t) + k^2 A M(t) + k^2 B L(t) + k^2 B (a b + A) \\
 &= k^2 M(t) L(t) + A_0 M(t) + B_0 L(t)
 \end{aligned}$$

es decir, M es solución de la EDO lineal (2.1.21).

Comentario 2.1.3. A diferencia de las discusiones hechas en los comentarios 2.1.1 y 2.1.2 para comprobar que L y M son soluciones de las EDO (2.1.20) y (2.1.21), respectivamente, en el caso de N no existe una forma compacta de comprobar que es solución de la EDO (2.1.22) y, tampoco de expresarla como se exhibe en [Stein–Stein, 1991, p.730], por el contrario, en ambos casos, el camino es largo y tedioso; razón por la cual no se presentará aquí. Sin embargo, con la ayuda de la plataforma Mathematica, se elaboró la Tabla 2.1.1, en la que se muestra un comparativo entre la N de [Stein–Stein, 1991, p.730] (N^s) y la N que se presenta aquí (N^c); claramente, las respuestas que se muestran son satisfactorias al arrojar los mismos valores para los instantes de tiempo $t \in \{-10, -9, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$.

Tabla 2.1.1: N^s vs. N^c

t	N^s	N^c	t	N^s	N^c
-10	-9.4793	-9.4793	1	-0.372979	-0.372979
-9	-8.44661	-8.44661	2	-1.02612	-1.02612
-8	-7.41392	-7.41392	3	-1.71805	-1.71805
-7	-6.38123	-6.38123	4	-2.41612	-2.41612
-6	-5.34856	-5.34856	5	-3.11525	-3.11525
-5	-4.31602	-4.31602	6	-3.81457	-3.81457
-4	-3.28418	-3.28418	7	-4.51392	-4.51392
-3	-2.25631	-2.25631	8	-5.21328	-5.21328
-2	-1.25168	-1.25168	9	-5.91264	-5.91264
-1	-0.386767	-0.386767	10	-6.612	-6.612
0	0.0	0.0	-	-	-

DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO DE UN ACTIVO
CON PARÁMETRO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICO

3.1 DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO DE UN ACTIVO

Como ya se dijo en el Capítulo 1, el precio de un activo financiero se define como un proceso $\{P_t\}_{t \geq 0}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dP_t(\mu, \sigma_t) = \mu P_t(\mu, \sigma_t) dt + \sigma_t P_t(\mu, \sigma_t) dW_t^1 \quad (3.1.1)$$

donde, σ_t es la volatilidad del activo, $\mu \in \mathbb{R}$, y W_t^1 un MB.

Para encontrar la solución de esta EDE, se puede recurrir al Método de Separación de Variables.[†]

Por el Teorema de Comparación en [Revuz–Yor, 2005, Teorema 3.7, p.394], $P_t > 0$ siempre que $P_0 > 0$ por lo que es posible entonces resolver la EDE equivalente,

$$\frac{1}{P_t(\mu, \sigma_t)} dP_t(\mu, \sigma_t) = \mu dt + \sigma_t dW_t^1 \quad (3.1.2)$$

aplicando la Fórmula de Itô (Teorema F.1.1) al proceso con la función $f(x) = \ln \{x\}$.

Así, se tiene que,

$$P_t(\mu, \sigma_t) = P_0(\mu, \sigma_0) \exp \left\{ \int_0^t \mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\}. \quad (3.1.3)$$

En particular, cuando $\mu = 0$,

$$P_t(0, \sigma_t) = P_0(0, \sigma_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\}. \quad (3.1.4)$$

[†] Véase Apéndice G para Método de Separación de Variables.

Si además, simplemente se identifica $P_t^\mu = P_t(\mu, \sigma_t)$ para toda t y se supone que $P_0^\mu = 1$ para toda μ entonces,

$$P_t^0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\}. \quad (3.1.5)$$

☉ **Observación 3.1.1.** Nótese que, $\ln \{P_t^0\} = -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1$.

Tomando en cuenta la Observación 3.1.1, a continuación se harán algunas deducciones sobre la distribución de P_t^0 dependiendo del comportamiento de σ_t .[†]

Caso 1. $\sigma_t > 0$ constante

Si σ_t es constante, en cuyo caso simplemente se denotará como σ entonces,

a) $\ln \{ \tilde{P}_t^0 \}$ tiene distribución $\mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right)$ ‡

b) \tilde{P}_t^0 tiene distribución *Lognormal* $\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right)$ ††

c) Para $p > 0$, la densidad de \tilde{P}_t^0 es,

$$f_{\tilde{P}_t^0}(p) = f_{P_t^0 | Y_t = \sigma}(p) = \frac{1}{p \sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \{p\} + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right\} \quad (3.1.6)$$

Caso 2. $\sigma_t > 0$ determinista

Análogamente al Caso 1,

a) $\ln \{ \hat{P}_t^0 \}$ tiene distribución $\mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds, \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)$ ‡

b) \hat{P}_t^0 tiene distribución

$$\text{Lognormal} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds, \int_0^t \sigma_s^2 ds \right) \dagger\dagger$$

† Por sencillez de la notación, se usará a σ_t como variable genérica.

‡ Véase Teorema A.8.1, Apéndice A.

†† Véase Apéndice B.

c) Para $p > 0$, la densidad de \widehat{P}_t^0 es,

$$f_{\widehat{P}_t^0}(p) = f_{P_t^0|Y_t=\alpha_t}^*(p) = \frac{1}{p \sqrt{2\pi \int_0^t \sigma_s^2 ds}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\{p\} + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma_s^2 ds}} \right)^2 \right\} \quad (3.1.7)$$

⊙ **Observación 3.1.2.** En el Caso 2 c), $\alpha_t = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$.

Caso 3. σ_t estocástico

Seguindo a [Stein–Stein, 1991, p.727], cuando $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico,

$$\sigma_t = |Y_t| \quad (3.1.8)$$

siendo Y_t un proceso de O–U solución de la EDE

$$dY_t(\delta, \theta, k) = \delta(\theta - Y_t) dt + k dW_t^2 \quad (3.1.9)$$

tal que W_t^2 es un MB independiente de W_t^1 y $k, \theta, \delta > 0$, puede entonces escribirse $\sigma_t = \sigma_t(\omega)$, es decir, la ω – trayectoria asociada al proceso, para cada $\omega \in \Omega$. En este caso, α_t como se definió en la Observación 3.1.2 será estocástica, es decir, $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$.

Por lo tanto, análogamente al Caso 2, la densidad del precio al tiempo t queda determinada por,

$$f_{P_t^0}(p) = \mathbb{E} \left[f_{P_t^0|Y_t=\alpha_t}^*(p) \right]$$

y será probado en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. Densidad del precio cuando $\mu = 0$

La densidad del precio cuando éste es un proceso que satisface a las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.8) para $\mu = 0$ está dada por,

$$f_{P_t^0}(p) = \mathbb{E} \left[f_{P_t^0|Y_t=\alpha_t}^*(p) \right] \quad (3.1.10)$$

donde f^* es como en la ecuación (3.1.6) y α_t como se describe en el Caso 3.

Demostración:

Suponiendo que $m_{\alpha_t}(\sigma)$ es la densidad de α_t ,[†] se tiene que para $a < b$,

$$P(a < \alpha_t < b) = \int_a^b m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (3.1.11)$$

Esto implica que, dada una función G ,

$$\mathbb{E}[G \circ \alpha_t] = \int_0^\infty G(\sigma) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (3.1.12)$$

y por la ecuación (3.1.10),

$$f_{P_t^0}(p) = \int_0^\infty f_{P_t^0}^*(p) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma. \quad (3.1.13)$$

La afirmación (3.1.13) dice que la distribución deseada es una mezcla de lognormales, promediada a través de la distribución de mezcla m_{α_t} . La clave de esto, es la función generadora de momentos de una variable aleatoria, es decir, si Y es una *v.a.* entonces, su función generadora de momentos es $M_Y(\tau) = \mathbb{E}[\exp\{\tau Y\}]$. Si además, Y tiene densidad ϕ_Y entonces $M_Y(\tau) = \mathbb{E}[\exp\{\tau Y\}] = \int_{-\infty}^\infty \exp\{\tau y\} \phi_Y(y) dy$.

⊙ **Observación 3.1.3.** $\mathcal{L}\{\phi_Y(y)\} = M_Y(-\tau) = \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\tau y\} \phi_Y(y) dy$ es la transformada de Laplace bilateral de ϕ_Y , si existe. Pero, $\int_0^\infty \exp\{-\tau y\} \phi_Y(y) dy$ siempre existe.

Por la Observación 3.1.1, si $Y = \alpha_t^2$ entonces,

$$I(\lambda) = \mathbb{E}[\exp\{-\lambda \alpha_t^2\}] = \int_0^\infty \exp\{-\lambda \sigma^2\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (3.1.14)$$

y recordando que el objetivo es obtener $f_{P_t^0}(p)$, se puede hacer uso de que para cada $t \geq 0$, si $X_t = \ln\{P_t^0\}$ entonces las densidades de P_t^0 y X_t están relacionadas por $f_{P_t^0}(p) = \frac{1}{p} f_{X_t}(\ln\{p\}) = \frac{1}{\exp\{x\}} f_{X_t}(x)$. Por lo tanto, es suficiente encontrar $f_{X_t}(x)$ para conocer $f_{P_t^0}(p)$.

Ahora, con el Lema 2.1.1 en mano, puede deducirse la fórmula exacta de $f_{P_t^0}(p)$ a partir de las ecuaciones (3.1.6) y (3.1.13) haciendo uso de la transformada de Fourier de la función f_{X_t} y de su respectiva transformada inversa.

[†] Véase la Proposición I.1.1 (Apéndice I) para información acerca de la existencia de la densidad de α_t .

3.1 Distribución del precio de un activo

Si g_t denota a la transformada de Fourier de f_{X_t} y dado que esta última es densidad entonces,

$$g_t(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i x \xi\} f_{X_t}(x) dx \quad (3.1.15)$$

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i x \xi\} g_t(\xi) d\xi \quad (3.1.16)$$

Recordando que $f_{X_t}(x) = p f_{P_t^0}(p)$, $x = \ln\{p\}$ y usando las ecuaciones (3.1.13) y (3.1.6), se tiene que la ecuación de la transformada inversa de Fourier de f_{X_t} (3.1.16) se puede representar como,

$$\begin{aligned} f_{X_t}(x) &= p f_{P_t^0}(p) \\ &= p \int_0^{\infty} f_{P_t^0}^*(p) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \\ &= p \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\{p\} + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}\right)^2\right\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}\right)^2\right\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Ahora, aplicando la fórmula de la transformada de Fourier (3.1.15) a f_{X_t} , el Teorema de Fubini y reorganizando términos se obtiene,

$$\begin{aligned} g_t(\xi) &= \int_0^{\infty} m_{\alpha_t}(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \right. \\ &\quad \times \exp\left\{-\left(\frac{2x + \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{2t}}\right)^2 + i x \xi\right\} dx \left. \right\} d\sigma \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

donde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\left(\frac{2x + \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{2t}}\right)^2 + i x \xi\right\} dx \quad (3.1.19)$$

es la transformada de Fourier de,

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}}\right)^2\right\} \quad (3.1.20)$$

y dicha transformada de Fourier (3.1.19) es igual a $\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) \sigma^2 t \right\}$.[†]

Por lo tanto, la ecuación (3.1.18) puede ser escrita como,

$$g_t(\xi) = \int_0^\infty m_{\alpha_t}(\sigma) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) \sigma^2 t \right\} d\sigma. \quad (3.1.21)$$

Ahora, tomando a la ecuación (3.1.14) en su forma,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \exp \{ -\lambda \sigma^2 \} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma$$

puede notarse que ésta implica que la ecuación (3.1.21) puede ser reexpresada como,

$$g_t(\xi) = I \left(\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) t \right). \quad (3.1.22)$$

Ahora bien, ya que en el Lema 2.1.1 se exhibe la forma explícita de $I(\lambda)$, entonces ya es posible calcular la transformada inversa de Fourier (3.1.16) para obtener finalmente a f_{X_t} .

Aplicando la fórmula de inversión de Fourier (3.1.16) a $g_t(\xi)$ de la ecuación (3.1.22) se tiene que,

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp \{ -i x \xi \} I \left(\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) t \right) d\xi \quad (3.1.23)$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \gamma - \frac{i}{2}$, se tiene que $\xi^2 + i \xi = \gamma^2 + \frac{1}{4}$ y que $\exp \{ -i x \xi \} = \exp \{ -i x \gamma \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \right\}$. Al aplicar este hecho a la fórmula de la ecuación (3.1.23) se tiene que,

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x \right\} \int_{-\infty}^\infty \exp \{ -i x \gamma \} I \left(\frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{4} \right) t \right) d\gamma. \quad (3.1.24)$$

Por lo tanto, $f_{P_t^0}(p) = \frac{1}{p} f_{X_t}(\ln \{p\})$ es la densidad exacta de P_t^0 , que en forma equivalente es,

$$f_{P_t^0}(p) = \frac{1}{2\pi p^{3/2}} \int_{-\infty}^\infty \exp \{ i \ln \{p\} \gamma \} I \left(\frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{4} \right) t \right) d\gamma. \quad (3.1.25)$$

■

[†] Véase Apéndice H para verificar el cálculo.

[‡] Si $\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{4} \right)$ entonces $I(\tilde{\lambda} t) = I \left(\frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{4} \right) t \right)$, véase Lema 2.1.1.

3.1 Distribución del precio de un activo

En vista de esta densidad, deducir la densidad exacta de P_t^μ es sólo cuestión de unos pocos pasos más.

Si se realiza el cociente de las EDP (3.1.3) y (3.1.5) se tiene que,

$$\frac{P_t^\mu}{P_t^0} = \exp \{ \mu t \} \quad (3.1.26)$$

por lo que,

$$P_t^\mu = \exp \{ \mu t \} P_t^0 \quad (3.1.27)$$

Dado que para cada t , P_t^μ es una *v.a.* y ya que $\exp \{ \mu t \} \geq 0$ para toda t , la densidad exacta de P_t^μ queda determinada por

$$f_{P_t^\mu}(p) = \frac{1}{\exp \{ \mu t \}} f_{P_t^0} \left(\frac{p}{\exp \{ \mu t \}} \right) \quad (3.1.28)$$

y recordando que $f_{P_t^\mu}(p)$ es la densidad del precio cuando la condición inicial es $P_0^\mu = 1$, lo único que hace falta es mostrar la densidad para cualquier $P_0^\mu > 0$.

Sea P_t el precio de un activo al tiempo t con condición inicial $P_0 > 0$. Entonces,

$$\frac{P_t}{P_t^\mu} = P_0 \quad (3.1.29)$$

por lo que,

$$P_t = P_0 P_t^\mu \quad (3.1.30)$$

y la tan deseada densidad del precio es

$$f_{P_t}(p) = \frac{1}{P_0 \exp \{ \mu t \}} f_{P_t^0} \left(\frac{p}{P_0 \exp \{ \mu t \}} \right). \quad (3.1.31)$$

3.1.1 Ejemplos y Comentarios

❏ Comentario 3.1.1. A pesar de que se encontró una forma explícita de la densidad del precio, ninguno de los software utilizados para el trato numérico de los distintos problemas a los que se debe de enfrentar en el camino para llegar al objetivo de este trabajo, fue capaz de calcular directamente la integral que define a la ya antes mencionada densidad y por supuesto, tampoco de graficarla.

❏ **Comentario 3.1.2.** El primer intento de graficar la densidad del precio se hizo en la plataforma Mathematica, y la razón es que proporciona gráficos de excelente calidad; su resultado fue: no es posible calcular la expresión de forma explícita. La segunda opción, fue la plataforma Matlab, apelando al gran soporte numérico que proporciona y sacrificando calidad de los gráficos que muestra, no obstante, el resultado que arrojó fue el mismo.

❏ **Comentario 3.1.3.** (Del comentario anterior). En ambos casos, inicialmente, se abordó el problema de dos maneras diferentes, la primera, pidiendo directamente el cálculo de la integral y la segunda opción, aplicando la rutina interna que las dos paqueterías poseen para calcular transformadas de Fourier. Motivo por el cual se recurrió a la aplicación de métodos numéricos para aproximar la integral que define a la densidad y posteriormente graficarla, resultado mostrado en las figuras 3.1.1 y 3.1.2.

🔗 **Ejemplo 3.1.1.** En la Figura 3.1.1 puede observarse tres gráficas de la densidad del precio al tiempo $t = 1, 2, 3$ con $\mu = 0$ y parámetros del proceso de O–U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$. Análogamente, en la Figura 3.1.2, tres gráficas de la densidad con $\mu = 2$.

🔗 **Ejemplo 3.1.2.** En la Figura 3.1.3 se presentan 500 trayectorias del proceso de precios en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros del proceso de O–U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

🔗 **Ejemplo 3.1.3.** La Figura 3.1.4 simplemente muestra un acercamiento de la gráfica de la Figura 3.1.3 respecto del rango de las trayectorias de $[0, 120]$ a $[0, 10]$.

🔗 **Ejemplo 3.1.4.** En la Figura 3.1.5 se muestra la gráfica de 1000 trayectorias del proceso de volatilidad O–U que se usó para generar los histogramas de las figuras 3.1.7 y 3.1.8. Parámetros: $t \in [0, 1]$, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

🔗 **Ejemplo 3.1.5.** La Figura 3.1.6 es un comparativo del histograma de una muestra de tamaño 1000 y la distribución teórica del proceso O–U $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ al tiempo $t = 1$. Análogamente, las Figuras 3.1.7 y 3.1.8 son comparativos del histograma y la densidad del precio con $t = 1$. Parámetros: $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

3.1 Distribución del precio de un activo

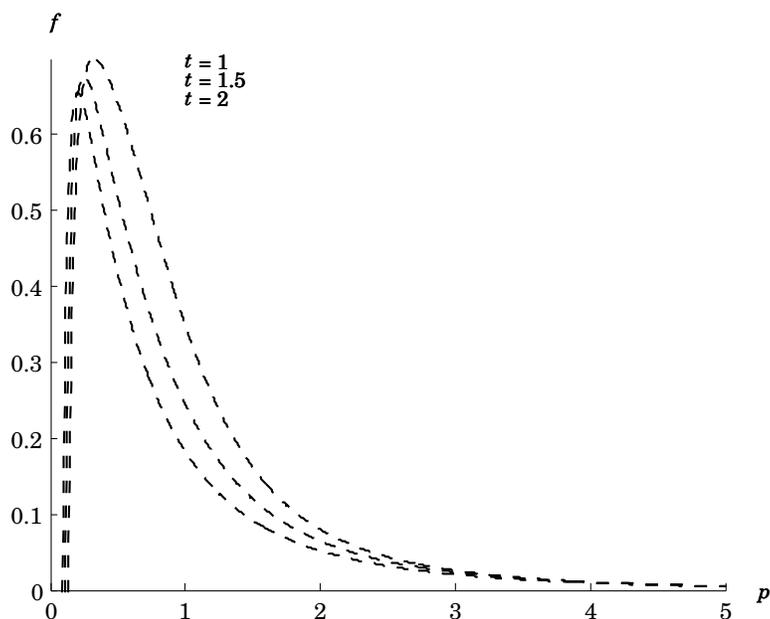


Fig. 3.1.1: Gráfica de la densidad del precio al tiempo $t \in \{1, 2, 3\}$ con $\mu = 0$ y parámetros de O-U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

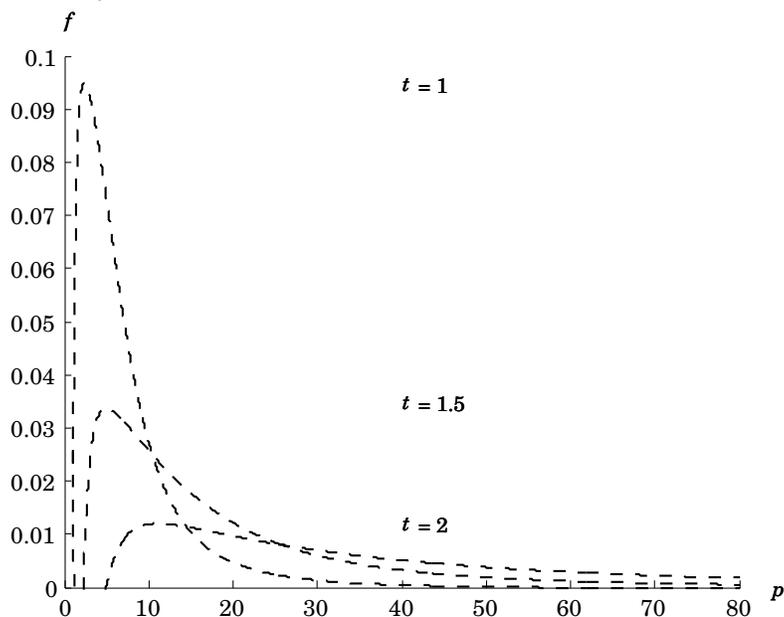


Fig. 3.1.2: Gráfica de la densidad del precio al tiempo $t \in \{1, 2, 3\}$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

3 DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN-UHLENBECK

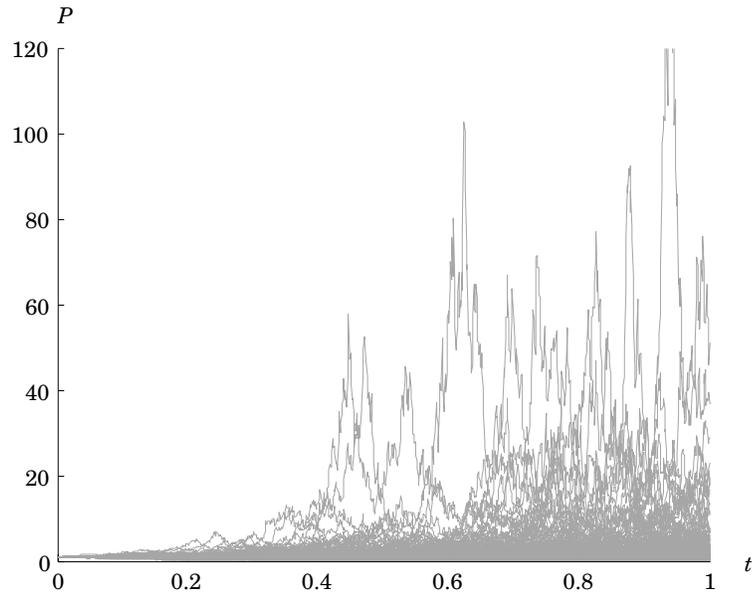


Fig. 3.1.3: Gráfica de 500 trayectorias del proceso de precios P_t en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

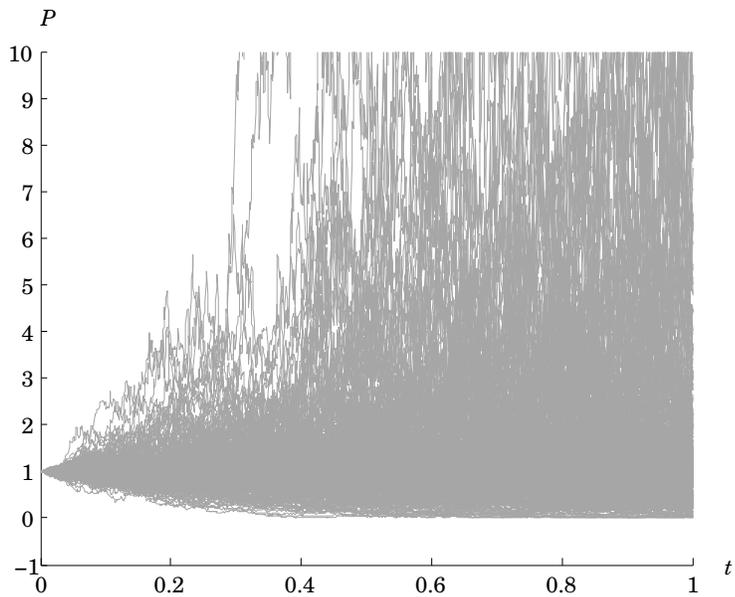


Fig. 3.1.4: Acercamiento de la gráfica de la Figura 3.1.3 en el rango de precios $[0, 10]$.

3.1 Distribución del precio de un activo

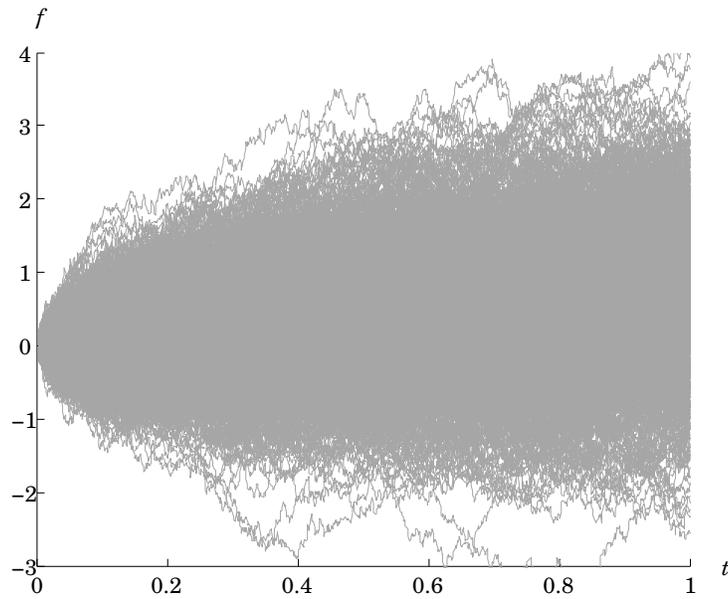


Fig. 3.1.5: Gráfica de 1000 trayectorias del proceso de O-U para tiempos $t \in [0,1]$, con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

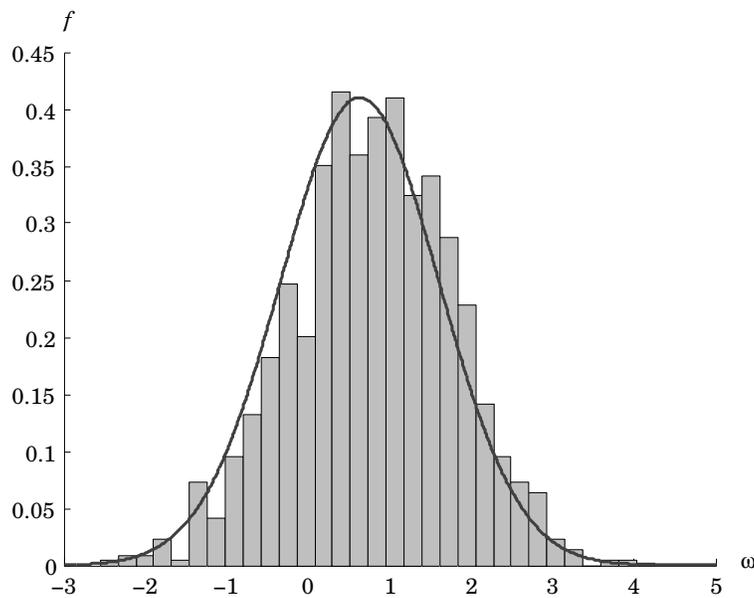


Fig. 3.1.6: Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

3 DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN-UHLENBECK

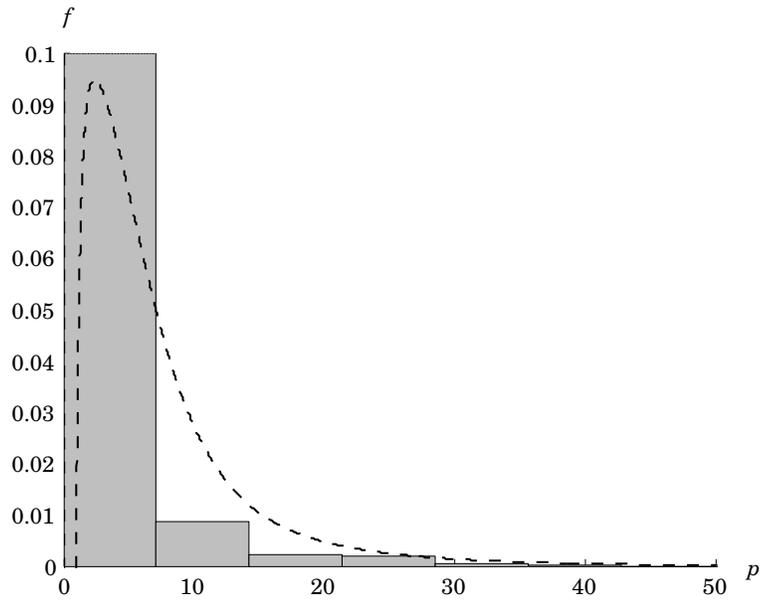


Fig. 3.1.7: Densidad Vs. histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

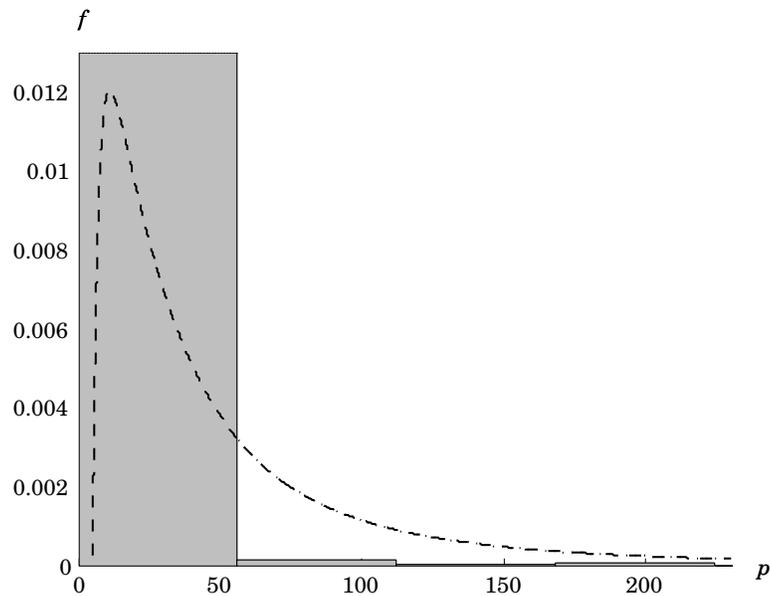


Fig. 3.1.8: Densidad Vs. histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 2$ con $\mu = 2$ y parámetros de O-U, $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0$.

4

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA DENSIDAD DEL PRECIO A TRAVÉS DEL TIEMPO CUANDO $\mu = 0$

Un resultado obtenido respecto de la densidad del precio f_t^0 , ecuación (3.1.25) del Teorema 3.1.1, es que es un modelo que posee un comportamiento asintótico que no depende del valor de los parámetros $k, \theta, \delta > 0$ del proceso de Ornstein–Uhlenbeck que define al de volatilidad, ecuaciones (3.1.8) y (3.1.9). Ésto se debe a que la funcional $I(\lambda)$, definida en la ecuación (2.1.3) y caracterizada en el Lema 2.1.1, decrece a 0 respecto al tiempo cuando es evaluada en $\tilde{\lambda}t$ para toda $\tilde{\lambda} > 0$, el cual es el caso que define a la densidad f_t^0 . Dicho comportamiento será analizado en el Teorema 4.1.1 de la siguiente sección.

4.1 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE f_t^0

Teorema 4.1.1. Propiedad asintótica de f_t^0

Para cada $\tilde{\lambda} > 0$, la funcional $I(\tilde{\lambda}t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) \right\}$, decrece asintóticamente a 0 a través del tiempo y, por lo tanto, también la densidad f_t^0 .

Demostración:

De la ecuación (2.1.3), en donde se define a $I(\lambda)$, se sigue que para todo $t > 0$,

$$I(\tilde{\lambda}t) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} t \alpha_t^2 \right\} \right] < 1 \quad (4.1.1)$$

por lo que necesariamente, $\frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) < 0$.

Es claro que ésto no es suficiente para que $\exp \left\{ \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) \right\}$ decretezca monótonamente, pero si lo es que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) \right) < 0 \quad (4.1.2)$$

es decir, que
$$\frac{1}{2} L'(t) \sigma_0^2 + M'(t) \sigma_0 + N'(t) < 0 \quad (4.1.3)$$

y también que
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) = -\infty \quad (4.1.4)$$

Para lo cual basta probar que

1. $L(t), L'(t) < 0$ y $L(t)$ es acotada inferiormente, para toda $\lambda > 0$

a) $L(t)$ es derivable como solución de la EDO (2.1.20) sujeta a la condición inicial $L(0) = 0$, así que, si $L'(t) < 0$ entonces también $L(t) < 0$, para toda $t > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } L'(t) &= \frac{d}{dt} \left(-A - a \tanh \{ a k^2 t + z_0 \} \right) \\ &= -a^2 k^2 \operatorname{sech}^2 \{ a k^2 t + z_0 \} < 0 \end{aligned}$$

b) $L(t)$ es acotada inferiormente

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-A - a \tanh \{ a k^2 t + z_0 \} \right) \\ &= -A - a \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{ a k^2 t + z_0 \} \\ &= -A - a \end{aligned}$$

2. $M(t), M'(t) < 0$ y $M(t)$ es acotada inferiormente, para toda $\lambda > 0$

a) $M(t)$ es derivable como solución de la EDO (2.1.21) sujeta a la condición inicial $M(0) = 0$, así que, si $M'(t) < 0$ entonces también $M(t) < 0$, para toda $t > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } M'(t) &= \frac{d}{dt} \left(-B + B b \tanh \{ a k^2 t + z_0 \} \right. \\ &\quad \left. + C_M \operatorname{sech} \{ a k^2 t + z_0 \} \right) \\ &= B b a k^2 \operatorname{sech}^2 \{ a k^2 t + z_0 \} \\ &\quad - C_M a k^2 \operatorname{sech} \{ a k^2 t + z_0 \} \tanh \{ a k^2 t + z_0 \} \end{aligned}$$

4.1 Comportamiento asintótico de f_t^0

luego, $M'(t) < 0$ si y sólo si

$$C_M a k^2 \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \tanh \{a k^2 t + z_0\} > B b a k^2 \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\}$$

o bien, después de algunas simplificaciones,

$$\cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} > \frac{b}{1 - b^2}.$$

Por supuesto, esta desigualdad debe ser analizada en $t \in (0, \infty)$. Para ello, supóngase que para alguna t , $\cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} < \frac{b}{1 - b^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \frac{b}{1 - b^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} \\ &= \min_{t \in [0, \infty)} \cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} \\ &< \frac{b}{1 - b^2} \text{ es una contradicción.} \end{aligned}$$

b) $M(t)$ es acotada inferiormente

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-B + B b \tanh \{a k^2 t + z_0\} \right. \\ &\quad \left. + C_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right) \\ &= -B + B b \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\ &\quad + C_M \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ &= B(b - 1) \end{aligned}$$

3. $N(t), N'(t) < 0$ y $N(t)$ no es acotada inferiormente, para toda $\lambda > 0$

a) $N(t)$ es derivable como solución de la EDO (2.1.22) sujeta a la condición inicial $N(0) = 0$, así que, si $N'(t) < 0$ entonces también $N(t) < 0$, para toda $t > 0$.

Prueba: por la ecuación (2.1.22) se tiene que,

$$N'(t) = \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t)$$

luego, dado que $M(t)$ es acotada de la forma $B(b-1) \leq M(t) < 0$ entonces $0 < M^2(t) \leq B(b-1)M(t)$, de donde

$$\begin{aligned} N'(t) &< \frac{1}{2} k^2 B(b-1) M(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \\ &= \left[\frac{1}{2} k^2 B(b-1) + B_0 \right] M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \end{aligned}$$

ahora, recordando que $B = \frac{B_0}{k^2}$, $B_0 = \theta$, $\theta > 0$ y que $0 \leq b \leq 1$,

$$\begin{aligned} N'(t) &< \left[\frac{1}{2} B_0(b-1) + B_0 \right] M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \\ &= \frac{1}{2} (b+1) B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) < 0 \end{aligned}$$

porque $L(t), M(t) < 0$.

b) $N(t)$ no es acotada inferiormente.

$$\begin{aligned} \text{Prueba: } \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{B^2 b^2}{2a} z_0 + k^2 \left(\frac{B^2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t \right. \\ &\quad + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2a} \right) \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\ &\quad - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} - c_N \right] \\ &= \frac{B^2 b^2}{2a} z_0 + k^2 \underbrace{\left(\frac{B^2 (b^2 - 1) + A}{2} \right)}_{\leq 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t \\ &\quad + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2a} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{1} \\ &\quad - \frac{B b c_M}{a} \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} \xrightarrow{\infty} - c_N = -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2} L(t) \sigma_0^2 + M(t) \sigma_0 + N(t) < 0$ para toda t , toda σ_0 y cada $\tilde{\lambda}$. Por otro lado, si $t \rightarrow \infty$ entonces, $I(\tilde{\lambda}t) \rightarrow 0$. Además, eligiendo $t = 1$, $I(\tilde{\lambda}) \in L_1(d\lambda)$. Así, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, $f_{P_t^0} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. ■

4.1.1 Ejemplos

☞ **Ejemplo 4.1.1.** En la Figura 4.1.1 se muestra la trayectoria de L con la definición de parámetros: $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

☞ **Ejemplo 4.1.2.** En la Figura 4.1.2 se muestra la trayectoria de M con la definición de parámetros: $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

☞ **Ejemplo 4.1.3.** En la Figura 4.1.3 se muestra la trayectoria de N con la definición de parámetros: $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

☞ **Ejemplo 4.1.4.** En la Figura 4.1.4 se muestra una familia de gráficas de I como función de σ_0 para instantes $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, manteniendo fija a $\lambda = 0.5$ y parámetros: $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$ y $k = 0.5$.

☞ **Ejemplo 4.1.5.** En la Figura 4.1.5 se muestra una familia de gráficas de $I(\lambda)$ para instantes $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, y $k = 0.5$, manteniendo constante a $\sigma_0 = 1$.

4 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA DENSIDAD DEL PRECIO

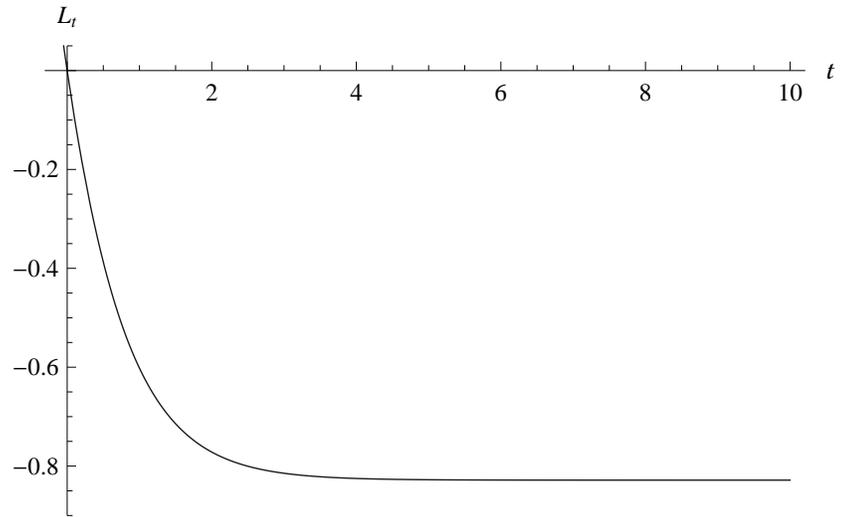


Fig. 4.1.1: Gráfica de L con parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

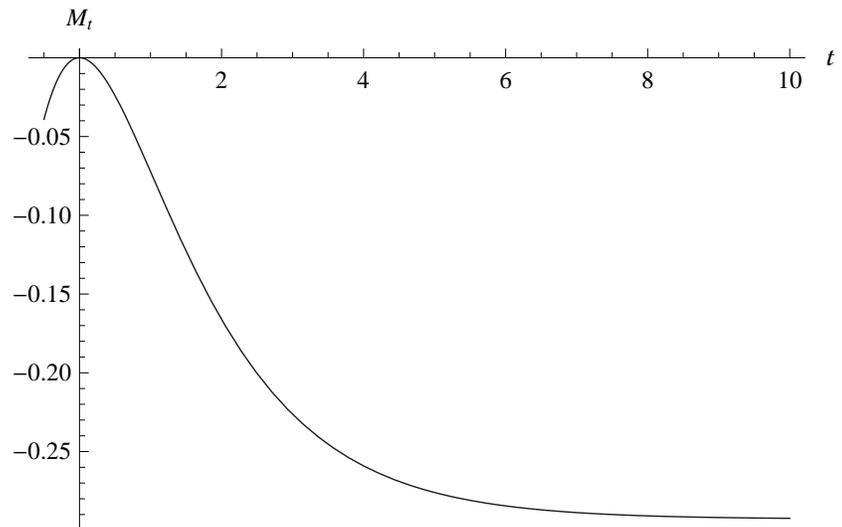


Fig. 4.1.2: Gráfica de M con parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

4.1 Comportamiento asintótico de f_t^0

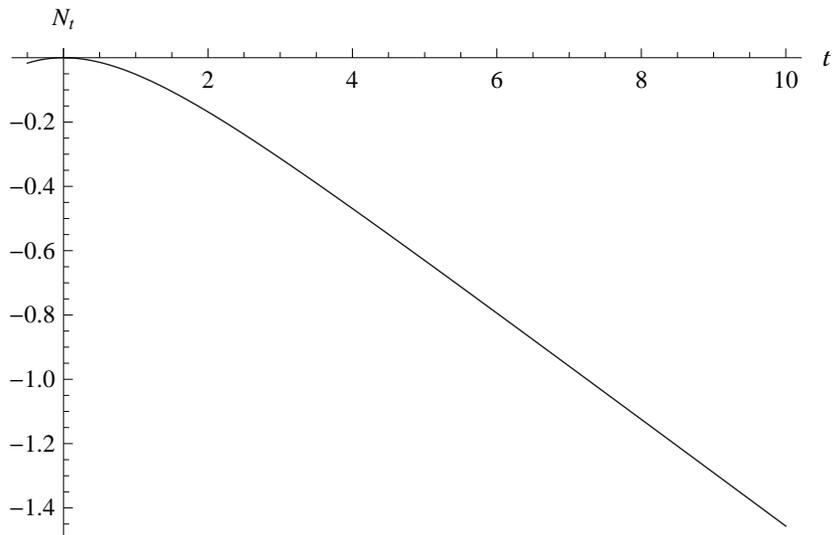


Fig. 4.1.3: Gráfica de N con parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

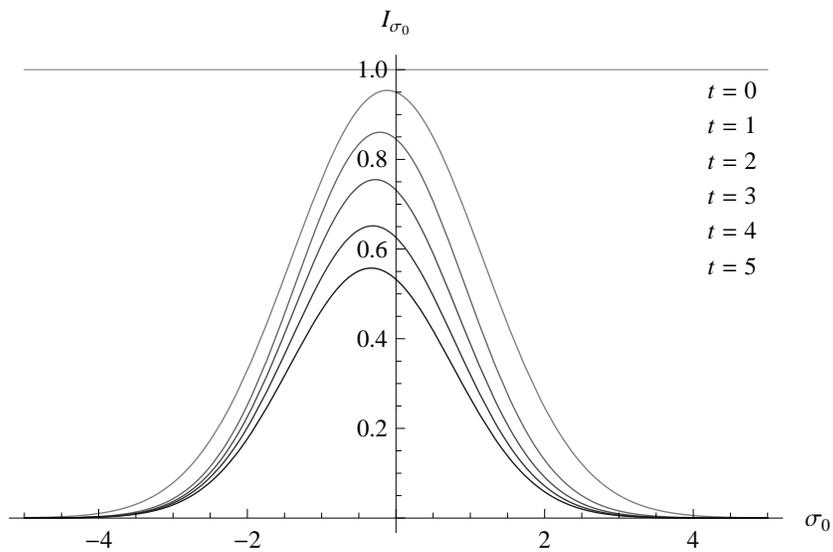


Fig. 4.1.4: Familia de gráficas de $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $\lambda = 0.5$ y $k = 0.5$.

4 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA DENSIDAD DEL PRECIO

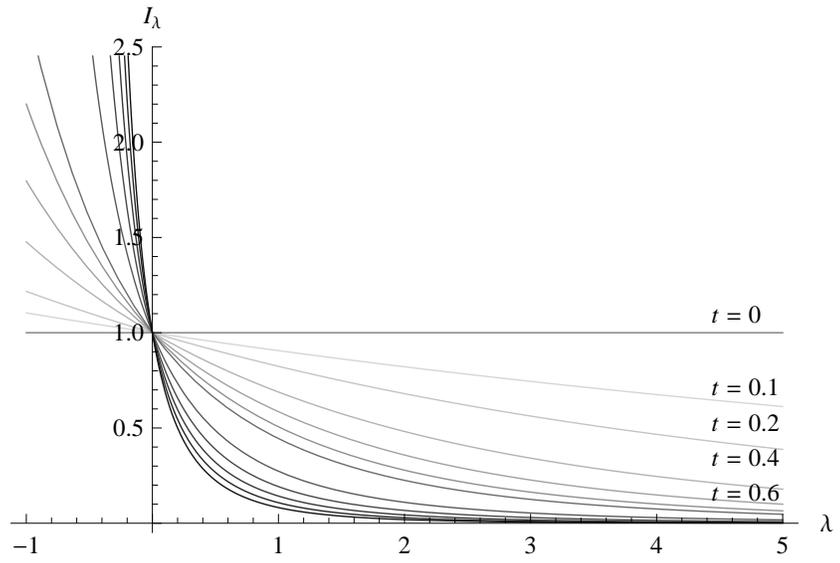


Fig. 4.1.5: Familia de gráficas de la función $I(\lambda)$ manteniendo constante a $\sigma_0 = 1$, con parámetros $\delta = 0.5$, $\theta = 0.5$, $k = 0.5$ y tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

CONCLUSIONES

Cuando el proceso de precios de un activo financiero sigue un proceso de Itô que depende intrínsecamente de un parámetro de volatilidad estocástico de tipo Ornstein Uhlenbeck, es posible encontrar, de forma cerrada, a la densidad de probabilidad de dicho proceso, tal como se desarrolla en la Sección 3.1 del Capítulo 3. Cabe resaltar que a pesar de que los cálculos para llegar a ella resultan una tarea tediosa, la expresión resultante depende netamente de funcionales que, aunque parecen complicadas, son explícitas.

Un paso crucial fue calcular explícitamente la funcional $I(\lambda)$, la cual es solución de la EDP (2.1.11) cuando se evalúa en $\tilde{\lambda}t$, y es crucial porque define al modelo de densidad del precio del activo subyacente por medio de una relación del tipo de una transformada inversa de Fourier de $I(\tilde{\lambda}t)$. Para tal fin, se desarrolló exhaustivamente el procedimiento para resolver dicha EDP en el Capítulo 2.

Un resultado obtenido respecto de la densidad del precio es que es un modelo con propiedades asintóticas que no depende de casos restrictivos acerca de los parámetros que definen al proceso de volatilidad que a su vez define al del precio, por lo menos en el caso de que $\mu = 0$. Ésto se debe a que el comportamiento de la funcional $I(\tilde{\lambda}t)$ es asintótico respecto del tiempo, y que a su vez implica el de la densidad $f_{P_t^0}$. El comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ fue analizado y probado en el Capítulo 4 con ayuda del Análisis Matemático y en el Apéndice E desde el enfoque de la Teoría Ergódica de Procesos de Itô .

Por otro lado, las simulaciones numéricas fueron de gran utilidad para adquirir una primera impresión tanto del comportamiento de los procesos estocásticos como de las funciones que definen a la densidad del precio, ya que aunque son deterministas, es prácticamente imposible pretender predecir su tendencia, dada la complejidad de su naturaleza.

CONCLUSIONES

Cabe mencionar que, no se realizó valuación de opciones ni se estudió la relación existente, según [Stein–Stein, 1991], entre el modelo de densidad y las colas pesadas respecto de la Densidad Normal; sin embargo, tanto los histogramas que aproximan a la densidad, las gráficas de la densidad misma, y la combinación de $\int_0^\infty f_{P_t^0}(p) dp = 1$ y de $f_{P_t^0}(p) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, la anuncian.

De manera global, se concluyó satisfactoriamente esta tesis, al haber desarrollado la vía para el cálculo de la densidad del precio en el enfoque propuesto por [Stein–Stein, 1991]. Más aún, propiamente se desarrolló un exhaustivo análisis sobre las funcionales que componen a la misma, probando que el modelo tiene propiedades asintóticas.

APÉNDICES



ALGUNOS CONCEPTOS Y RESULTADOS BÁSICOS

A.1 ESPACIOS Y FUNCIONES MEDIBLES

Definición A.1.1. σ – álgebra

Sean Ω un conjunto y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de Ω .

- a) Se dice que \mathcal{F} es una σ – álgebra si
 - i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
 - ii) Dado $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$ donde, A^c es el complemento de A
 - iii) $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$, siempre que, $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$
- b) Se dice que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es sub – σ – álgebra de \mathcal{F} si, por si misma, es una σ – álgebra

Teorema A.1.1. Propiedades de una σ – álgebra \mathcal{F}

- a) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \Delta B$ también son elementos de \mathcal{F}
- b) Si Ω es un conjunto y \mathcal{F}_i una colección arbitraria de σ – álgebras en Ω entonces, $\bigcap \mathcal{F}_i$ también es una σ – álgebra en Ω

La propiedad b) permite definir la σ – álgebra generada por una familia arbitraria de subconjuntos de Ω .

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 1].



Definición A.1.2. σ – álgebra generada por una familia de conjuntos

Dada \mathcal{P} , una familia arbitraria de subconjuntos de Ω , la σ – álgebra generada por \mathcal{P} , denotada por $\sigma(\mathcal{P})$ es,

$$\sigma(\mathcal{P}) = \bigcap \{ \mathcal{D} : \mathcal{P} \subset \mathcal{D} \text{ y es } \sigma\text{-álgebra} \}$$

dicho de otra manera, $\sigma(\mathcal{P})$ es la intersección de todas las σ – álgebras que contienen a \mathcal{P} , o bien, es la menor σ – álgebra que contiene a \mathcal{P} .

Si $\Omega = \mathbb{R}$ y \mathcal{P} es la familia de todos los intervalos de \mathbb{R} entonces, $\sigma(\mathcal{P})$ es la llamada σ – álgebra de Borel en \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y, sus elementos son llamados conjuntos de Borel en \mathbb{R} .

Definición A.1.3. Tiempos de paro

Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ una familia creciente de σ – álgebras en Ω . Una función $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es llamada un tiempo de paro con respecto de $\{\mathcal{F}_t\}$ si

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

para todo $t \geq 0$.

Definición A.1.4. Espacio medible

Si \mathcal{F} es una σ – álgebra de subconjuntos de Ω entonces, se dice que (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible.

Definición A.1.5. Medibilidad de una función

Sean (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es medible respecto de \mathcal{F} , o que es \mathcal{F} – medible si para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

A.2 MEDIDAS Y ESPACIOS DE PROBABILIDAD

Definición A.2.1. Medida de probabilidad

Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que,

- a) $P(\emptyset) = 0$
- b) $P(\Omega) = 1$
- c) Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ son mutuamente excluyentes (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces, $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Definición A.2.2. Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) con (Ω, \mathcal{F}) espacio medible y P medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) . En este caso, los elementos de (Ω, \mathcal{F}, P) se llaman eventos.

Teorema A.2.1. Propiedades de medidas de probabilidad

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces,

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$
- b) $P(A) \leq P(B)$ y $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ si $A \subset B$
- c) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- d) Sean $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ tales que, $A_i \subset A_j$ siempre que, $i < j$. Si $A = \cup A_i$ entonces, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$
- e) Sean $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ tales que, $A_i \supset A_j$ siempre que, $i < j$. Si $A = \cap A_i$ entonces, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Demostración: Véase [Shreve I, 2008, Capítulo 1, pp.1-7] y [Shreve II, 2008, Apéndice A, p.527]. ■

A.3 VARIABLES ALEATORIAS

Definición A.3.1. Variables aleatorias y eventos

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad.

- a) Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ \mathcal{F} – medible donde, \mathcal{E} es llamado espacio de estados

- b) Para cada $E \in \sigma(\mathcal{E})$ se dice que, $\{X \in E\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}$ es un evento.
 Cuando $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

Definición A.3.2. σ – álgebra generada por variables aleatorias

Dada $\{X_i\}$, una familia de *v.a.* en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , la σ – álgebra generada por $\{X_i\}$ es la intersección de todas las σ – álgebras que hacen medible a X_i , para toda i . La σ – álgebra generada por $\{X_i\}$ se denota por $\sigma(\{X_i\})$.

Definición A.3.3. Independencia respecto de σ – álgebras

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Se dice que $A \subset \mathcal{F}$ y $B \subset \mathcal{F}$ son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

- b) Una colección $A = \{\mathcal{H}_i : \mathcal{H}_i \text{ es sub-}\sigma\text{-álgebra de } \mathcal{F}\}$ es independiente si para cualquier combinación $H_{i1} \in \mathcal{H}_{i1}, \dots, H_{ik} \in \mathcal{H}_{ik}$ se tiene que,

$$P(H_{i1} \cap \dots \cap H_{ik}) = P(H_{i1}) \dots P(H_{ik})$$

- c) Se dice que $\{X_i\}$, una colección de *v.a.* es independiente si la colección

$$A = \{\mathcal{H}_i : \mathcal{H}_i \text{ es sub-}\sigma\text{-álgebra de } \mathcal{F}\}$$

es independiente, donde $\mathcal{H}_i = \sigma(X_i)$

- d) Una *v.a.* X es independiente de una sub- σ – álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ si \mathcal{G} y $\sigma(X)$ son independientes

- e) Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son *v.a.* independientes entonces,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

siempre que, $\mathbb{E}[X] < \infty$ y $\mathbb{E}[Y] < \infty$

A.4 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Definición A.4.1. Proceso estocástico

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $X_t : \Omega \rightarrow E$ una *v.a.* Entonces,

- a) Un proceso estocástico (PE) a tiempo discreto es una sucesión $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$
- b) Un PE a tiempo continuo es una familia $\{X_t\}_{t \geq 0}$

Dado $\{X_t\}$, un PE a tiempo continuo o discreto, para cada $\omega \in \Omega$, $\{X_t(\omega)\}$ es llamada la trayectoria del proceso asociada a ω , o bien, la ω – trayectoria del proceso.

Definición A.4.2. Filtración

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Una filtración a tiempo discreto es una sucesión $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tal que,
 - i) Para cada $t \in \mathbb{N}$, \mathcal{F}_t es una σ – álgebra
 - ii) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \subset \mathcal{F}$, para todo $t \in \mathbb{N}$
- b) Una filtración a tiempo continuo es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que,
 - i) Para cada $t \geq 0$, \mathcal{F}_t es una σ – álgebra
 - ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ siempre que, $0 \leq s < t$

Definición A.4.3. Filtración generada por un proceso estocástico

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Dado $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, un PE a tiempo discreto, la filtración generada por el proceso es $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ y se define por $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_0, X_1, \dots, X_t\})$
- b) Dado $\{X_t\}_{t \geq 0}$, un PE a tiempo continuo, la filtración generada por el proceso es $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y se define por $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : 0 \leq s < t\})$

Definición A.4.4. Proceso adaptado a una filtración

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $\{X_t\}$ un PE y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración. Se dice que, el proceso está adaptado a la filtración si para cada t , la *v.a.* X_t es medible respecto de la σ – álgebra \mathcal{F}_t .

Definición A.4.5. Propiedad de Markov

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un PE adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Se dice que, el proceso cumple la propiedad de Markov, o bien, que el proceso es de Markov si

para cada $s, t \geq 0$ y para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que,

$$P(X_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in B \mid X_t)$$

o bien, si para $0 \leq s \leq t \leq T$ y cualquier función f Borel - medible y no negativa, existe una función g Borel - medible tal que,

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = g(X_s)$$

A.5 MARTINGALAS, SUBMARTINGALAS Y SUPERMARTINGALAS

Definición A.5.1. Martingalas, Submartingalas y Supermartingalas

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y para $0 \leq t \leq T$, una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y un proceso $\{X_t\}$ adaptado.

- a) $\{X_t\}$ es una martingala si para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$$

(el proceso no tiene tendencia a crecer ni decrecer)

- b) $\{X_t\}$ es una submartingala si para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$$

(el proceso tiene tendencia a crecer)

- c) $\{X_t\}$ es una supermartingala si para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$$

(el proceso tiene tendencia a decrecer)



Andréi A. Márkov
(1903-1979)

Nacido en en Riazán, Rusia, Andréi A. Márkov fue un matemático conocido por sus trabajos en la teoría de números y en la de probabilidad. Su aportación más conocida es su trabajo teórico en el campo de los procesos en los que están involucrados componentes aleatorios (procesos estocásticos) y que daría fruto en un instrumento matemático que actualmente se conoce como cadena de Márkov.

A.6 MOVIMIENTO BROWNIANO

Definición A.6.1. Movimiento Browniano o Proceso de Weiner

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración y $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un PE. Se dice que W es un movimiento browniano (MB) o proceso de Weiner respecto de $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si

- a) Para cada $t \geq 0$, W_t es \mathcal{F}_t – medible
- b) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ siempre que, $0 \leq s < t$
- c) $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s siempre que, $0 \leq s < t$
- d) $W_0 = 0$
- e) Existe $A \in \mathcal{F}$ tal que, $P(A) = 0$ y $W_t(\omega)$ es continua, para toda $\omega \notin A$

Teorema A.6.1. Propiedades del movimiento Browniano

Si W es un MB entonces,

- a) Para cada $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- b) W tiene incrementos independientes
- c) Para cada k tal que, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}) \sim \mathcal{N}(0, C)$ donde, $C(i, j) = \min\{t_i, t_j\} = t_i \wedge t_j$

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 3, pp.93-97]. ■

Teorema A.6.2. Propiedad de Markov del movimiento Browniano

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un MB respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Borel–medible y acotada entonces, existe una función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel–medible tal que, para tiempos $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[g \circ W_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[g \circ W_t \mid W_s] = h \circ W_s$$

donde,

$$h(a) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{(t-s)}\right\}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} dx$$

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 3, p.107]. ■



Robert Brown
(1773-1858)

Médico, cirujano y botánico escocés. Observó diminutas partículas con vacuolas en los granos de polen ejecutando un continuo movimiento aleatorio. Luego observó el mismo movimiento en partículas de polvo. Él mismo no pudo dar una explicación de ese movimiento, denominado ms tarde movimiento browniano.

Teorema A.6.3. Propiedad de martingala del movimiento Browniano

El movimiento Browniano es una martingala respecto de la filtración que genera.

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 3, p.98]. ■

Definición A.6.2. Movimiento Browniano Geométrico

Sean X_t un PE y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un MB respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Para $\mu, \sigma > 0$ constantes, el *Movimiento Browniano Geométrico* se define como,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

o bien,

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

el cual es el modelo de precios de activos usado en la fórmula de *Black–Scholes–Merton* para valuación de opciones.

A.7 FUNCIONES DE TRANSICIÓN

Definición A.7.1. Función de transición

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y p_t una función, para $t \geq 0$. La función p_t es llamada función de transición de Markov si se cumplen las siguientes condiciones,

- a) $p_t(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) , para cada $t \geq 0$ y cada $x \in \Omega$
- b) $p_t(\cdot, A)$ es una función \mathcal{F} – medible, para cada $t \geq 0$ y cada $A \in \mathcal{F}$
- c) $p_0(x, A) = \mathbb{1}_A(x)$, para cada $x \in \Omega$ y cada $A \in \mathcal{F}$
- d) Para todas $s, t \geq 0$, cada $x, y \in \Omega$ y cada $A \in \mathcal{F}$,

$$p_{s+t}(x, A) = \int_{\Omega} p_t(x, dy) p_s(y, A)$$

Se debe interpretar a $p_t(x, A)$ como la probabilidad de que un proceso que se encuentra en el estado $x \in \Omega$ al tiempo s , continúe en A al tiempo $s + t$.

La propiedad d) es conocida como *La Ecuación de Chapman–Kolmogorov*, y es justamente la propiedad principal, ya que refleja la *no memoria* del proceso.



Norbert Wiener
(1894-1964)

Matemático estadounidense, conocido como el fundador de la cibernética. Trabajó en el movimiento browniano, la integral de Fourier, el problema de Dirichlet, el análisis armónico y en los teoremas tauberianos, entre otros problemas. Ganó el premio Bôcher en 1933.

A.8 PROCESOS DE ITÔ

Definición A.8.1. Proceso de Itô

Un PE $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un Proceso de Itô o difusión si existen $\{u_t\}_{t \geq 0}$ y $\{v_t\}_{t \geq 0}$ PE tales que,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s$$

en su forma integral donde, W_s es un MB, u_s es llamado el término de deriva y v_s el de difusión.

O bien, en su forma diferencial,

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t$$

llamada ecuación diferencial estocástica (EDE), con X_0 la condición inicial.

Teorema A.8.1. Difusiones como procesos gaussianos

Una difusión $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con coeficientes de deriva y difusión deterministas, es un PE Gaussiano con funciones de media $\mathbb{E}[X_t]$ y covarianza $\text{Cov}(X_s, X_t)$ tales que,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu_0 + \int_0^t u_r dr \quad \text{y} \quad \text{Cov}(X_s, X_t) = \int_0^{t \wedge s} v_r^2 dr$$

Obsérvese que,

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, 0), \quad \int_0^t u_r dr \sim \mathcal{N}\left(\int_0^t u_r dr, 0\right) \quad \text{y} \quad \int_0^t v_r dW_r \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |v_r|^2 dr\right)$$

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 4, p.173]. ■



Andréi Kolmogórov
(1903-1987)

Matemático ruso que hizo progresos importantes en campos de la teoría de probabilidad y de la topología.

B

LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

La distribución Lognormal es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $\exp\{X\}$ tiene una distribución Lognormal.

La base de una función logarítmica no es importante, ya que $\text{Log}_a\{X\}$ está distribuida normalmente si y sólo si $\text{Log}_b\{X\}$ está distribuida normalmente, sólo se diferencian en un factor constante.

Una variable puede ser modelada como Lognormal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de muchos retornos diarios.

B.1 LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Definición B.1.1. Distribución Lognormal

Se dice que una *v.a.* Y tiene distribución Lognormal si la *v.a.* $X = \ln\{Y\}$ tiene distribución Normal.

Si los parámetros de la distribución de X son μ y σ^2 , es decir, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces, $Y \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$.

🔗 **Ejemplo B.1.1.** En la Figura B.1.1 se muestra la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

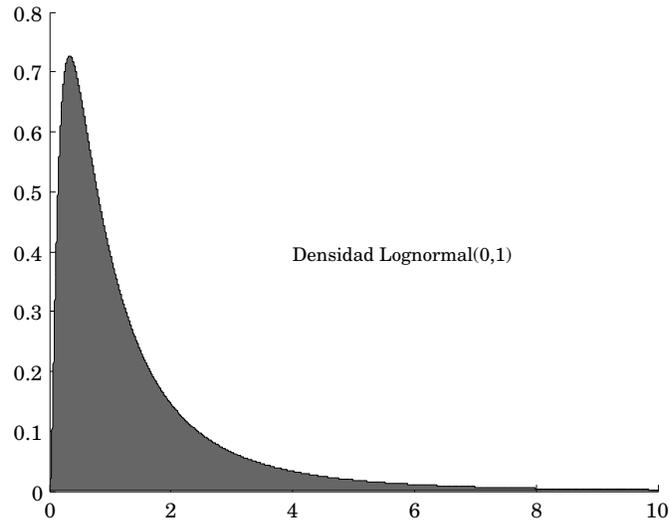


Fig. B.1.1: Gráfica de la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Teorema B.1.1. Densidad Lognormal

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ una *v.a.*. Si Y es una *v.a.* tal que, $X = \ln \{Y\}$ entonces, la densidad de Y es $f_Y \{y\} = \frac{1}{y \sigma \sqrt{2 \pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \{y\} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$, para toda $y > 0$.

Demostración:

Nótese que basta demostrar que las distribuciones F_X y F_Y son tales que, $F_Y(y) = F_X(\ln \{y\})$.

Se sabe que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, por lo que, su densidad es,

$$f_X \{x\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Además, si $X = \ln \{Y\}$ entonces, $Y = \exp \{X\}$ y, ya que $\ln \{y\}$ es una función monótona se tiene que, para $y > 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\exp \{X\} \leq y) = P(X \leq \ln \{y\}) = F_X(\ln \{y\})$$

Por lo tanto, para las densidades f_X y f_Y se cumple que,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\ln \{y\}) = \frac{1}{y} f_X(\ln \{y\})$$

■

C

FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES-MERTON

Siguiendo a [Shreve II, 2008], para obtener el precio de una opción *call* Europea con Black-Scholes-Merton (BSM), se asumirá que la volatilidad σ y la tasa de interés r son constantes, se tomará el esquema de pagos del derivado como $V_T = (S_T - K)^+$ y, el precio del activo subyacente deberá seguir un MBG. Este resultado será expresado en el Teorema C.1.1.

C.1 FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES-MERTON

Teorema C.1.1. Fórmula de Black-Scholes-Merton

Sea $\{S_t\}_{t \geq 0}$ un MB geométrico con tasa promedio de rendimiento r , volatilidad $\sigma > 0$ y precio inicial del activo subyacente $S_0 > 0$. Dada una constante $K > 0$, existe una función $c : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua que es solución de la EDP

$$r c(t, x) = D_0^1 c(t, x) + r x D_1^1 c(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D_1^2 c(t, x)$$

para todo $t \in [0, T)$ y toda $x \geq 0$, llamada ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton sujeta a la condición final,

$$c(T, x) = (x - K)^+$$

más aún,

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= \mathbb{E} \left[\exp \{-r T\} (S_{T-t} - K)^+ \right] \\ &= S_0 \Phi(d_+(T-t, S_0)) - K \exp \{-r(T-t)\} \Phi(d_-(T-t, S_0)) \end{aligned}$$

donde, dicha solución c será el precio de la opción y,



Fischer S. Black
(1938-1995)

Economista norteamericano. En su paso por la física las matemáticas, llegó a las computadoras y la inteligencia artificial. Comparte el crédito con Scholes por sus trabajos para calcular el precio de las opciones financieras.

C FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES-MERTON

a) Φ es la función de distribución $\mathcal{N}(0, 1)$

$$d_{\pm}(T-t, S_0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r \pm \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right]$$

$$d_+(T-t, S_0) = d_-(T-t, S_0) + \sigma \sqrt{T-t}$$

b) K es el precio ejercido del instrumento derivado (*strike price*) y, puede interpretarse como el precio pactado para comprar o vender el subyacente a la fecha de ejercicio

c) T representa la fecha de expiración del contrato

Demostración: Véase [Shreve II, 2008, Capítulo 4, pp.153-164]. ■



Myron S. Scholes
(1941-)

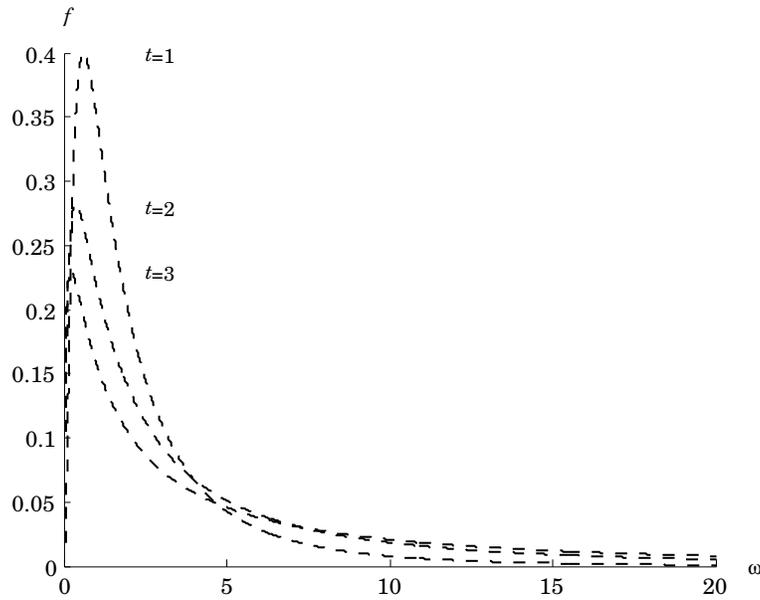
Matemático, economista y abogado canadiense. Recibió el Premio Nobel de Economía en 1997, compartido con Robert C. Merton, por sus trabajos para calcular el precio de las opciones financieras.

C.1.1 Ejemplos

📌 **Ejemplo C.1.1.** En la Figura C.1.1 se muestran las gráficas de las densidades unidimensionales del Movimiento Browniano Geométrico para instantes $t = 1, 2, 3$ y en la Figura C.1.2 para $t \in [0, 5]$. Parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$.

📌 **Ejemplo C.1.2.** En la Figura C.1.3 se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con parámetros $T = 10$, $K = 0.5$, $r = 1$ y $\sigma = 1$. Si bien no es posible apreciarlo con claridad, en este caso sucede un comportamiento extraño en una vecindad de $[t, \sigma_0]$ cercana a $[0, 1] \times [0, 1]$. Esta situación es de interés ya que proporciona la idea de que el sistema se comporta de cierta forma en períodos cortos a precios iniciales bajos, lo cual es de vital importancia en la materia que ocupa, el mundo financiero. Antedicho es una motivación a pretender visualizar más cercanamente el fenómeno, por lo que en la Figura C.1.4 se presenta un acercamiento de la Figura C.1.3 en el dominio propuesto con anterioridad. En dicho acercamiento puede observarse la tendencia fluctuante de los precios cuando los precios iniciales son bajos, en la evolución temprana del sistema, sin embargo, puede apreciarse precios "negativos", lo cual no tiene sentido. Este comportamiento de la gráfica es, simplemente, un problema numérico.

C.1 Fórmula de Black-Scholes-Merton



Robert C. Merton
(1944-)

Fig. C.1.1: Gráfica de la densidad del Movimiento Browniano Geométrico en $t = 1, 2, 3$ con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$.

Economista estadounidense. Ayudó a introducir el cálculo estocástico en la economía financiera, lo que permitió que el comportamiento de los precios fuese descrito con el lenguaje preciso de la probabilidad.

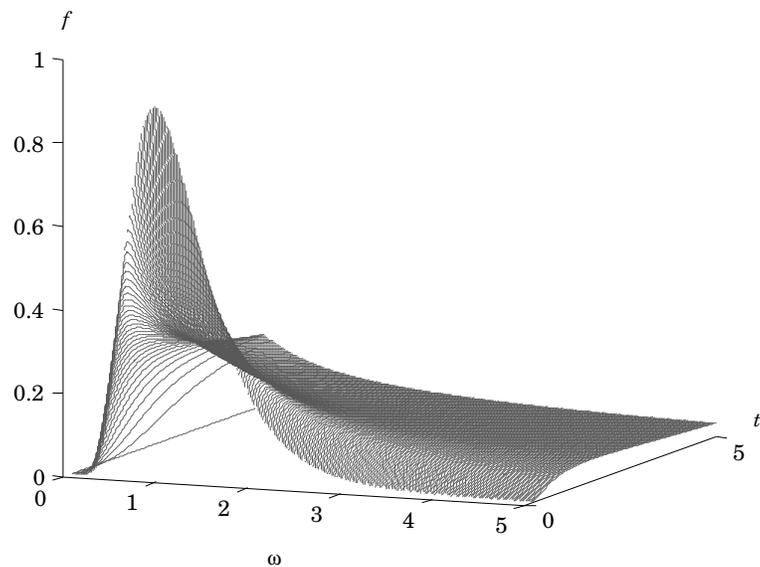


Fig. C.1.2: Gráfica de la densidad del Movimiento Browniano Geométrico al tiempo $t = [0, 5]$ con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$.

C FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES-MERTON

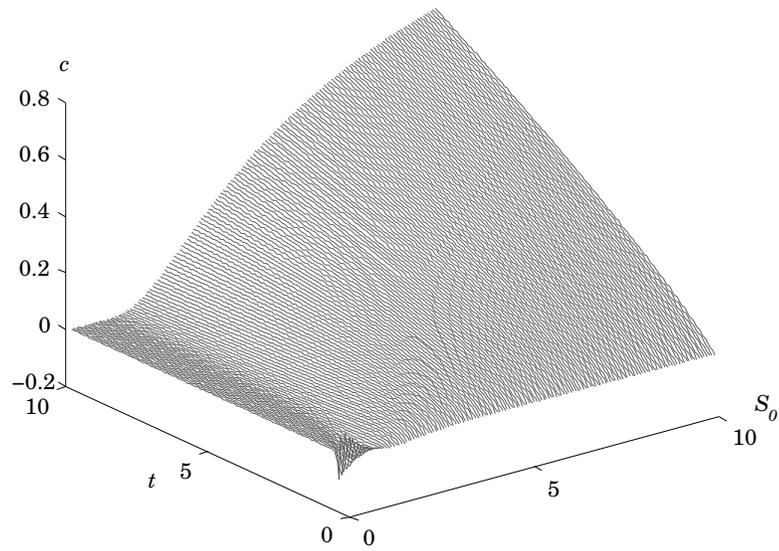


Fig. C.1.3: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$.

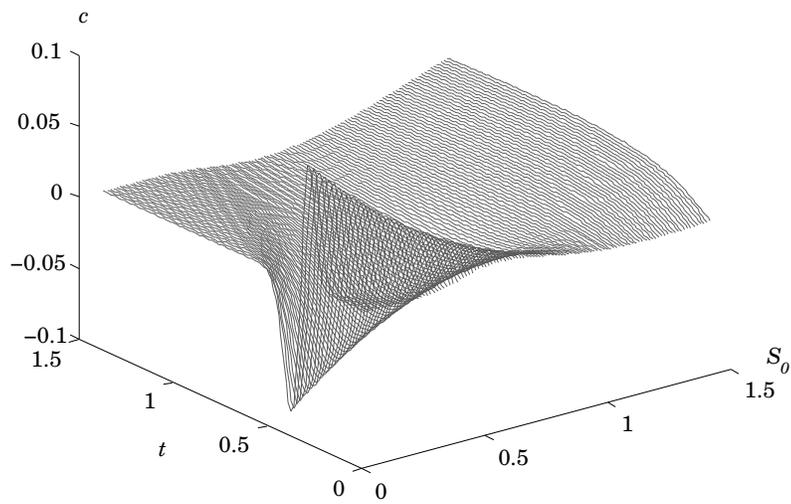


Fig. C.1.4: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en su estado no estacionario, con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$.

D

EL PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK

Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico que satisface la EDE $dX_t = \delta (\theta - X_t) dt + k dW_t$ con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}$ y $\theta, \delta, k \in \mathbb{R}_+$. Esta EDE es una de las llamadas ecuaciones de Langevin.

La solución analítica de esta EDE es llamado proceso de Ornstein–Uhlenbeck (O–U) y puede obtenerse por medio del Método del Factor Integrante.

D.1 PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK

Dada la ecuación de Langevin como se describió anteriormente, se encontrará la solución analítica a esta aplicando, como ya se mencionó, el método del factor integrante, es decir, buscando una función I_t , preferentemente determinista y diferenciable tal que,

$$\begin{aligned} d(I_t X_t) &= I_t dX_t + X_t I_t' dt \\ &= I_t [\delta (\theta - X_t) dt + k dW_t] + X_t I_t' dt \\ &= \delta \theta I_t dt - \delta I_t X_t dt + k I_t dW_t + X_t I_t' dt \\ &= \delta \theta I_t dt + k I_t dW_t \end{aligned} \tag{D.1.1}$$

Se propone a la función determinista y diferenciable

$$I_t = \exp \{ \delta t \} \tag{D.1.2}$$

Así, al componer la ecuación D.1.1 con la D.1.2 se tiene que,

$$d(\exp \{ \delta t \} X_t) = \delta \theta \exp \{ \delta t \} dt + k \exp \{ \delta t \} dW_t \tag{D.1.3}$$



*Leonard Ornstein
(1880-1941)*

Físico alemán reconocido entre otras cosas por la teoría de Ornstein–Zernike y el proceso estocástico de Ornstein–Uhlenbeck.

Ahora, integrando D.1.3 de 0 a t se obtiene,

$$\exp\{\delta t\} X_t = X_0 + \delta \theta \frac{1}{\delta} (\exp\{\delta t\} - 1) + k \int_0^t \exp\{\delta s\} dW_s \quad (\text{D.1.4})$$

Multiplicando D.1.4 por $\frac{1}{\exp\{\delta t\}}$,

$$X_t = a_0 \exp\{-\delta t\} + \theta \exp\{-\delta t\} (\exp\{\delta t\} - 1) + k \exp\{-\delta t\} \int_0^t \exp\{\delta s\} dW_s \quad (\text{D.1.5})$$

Finalmente, reordenando términos,

$$X_t = a_0 \exp\{-\delta t\} + \theta (1 - \exp\{-\delta t\}) + k \int_0^t \exp\{-\delta(t-s)\} dW_s \quad (\text{D.1.6})$$

El proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ descrito por la ecuación D.1.6 es conocido como *Proceso de Ornstein–Uhlenbeck*.

⊙ **Observación D.1.1.** En el caso de que $\delta = 1$, la función característica ϕ de X_t es,

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(\alpha) &= \mathbb{E}[\exp\{i \alpha X_t\}] \\ &= \exp\left\{i \alpha [\exp\{-t\} \mathbb{E}[a_0] + \theta (1 - \exp\{-t\})] - \frac{\alpha^2}{4} k^2 (1 - \exp\{-2t\})\right\} \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Y, si $t \rightarrow \infty$ se tiene que,

$$\phi_{X_t}(\alpha) \rightarrow \exp\left\{i \alpha \theta - \frac{\alpha^2}{4} k^2\right\} = \exp\left\{i \alpha \theta - \frac{\alpha^2}{2} \frac{k^2}{2}\right\}$$

por lo que, en distribución,

$$X_t \rightarrow \mathcal{N}\left(\theta, \frac{k^2}{2}\right)$$

es decir, X_t es un proceso de reversión a su media.



George Uhlenbeck
(1900-1988)

Físico teórico neerlandés – estadounidense. Introdujo el concepto de *spin*, que postula que los electrones giran sobre un eje, con Samuel Abraham Goudsmit, por tal motivo fueron galardonados con la Medalla Max Planck en 1964. También fue premiado con la Medalla Lorentz en 1970 y el Premio Wolf en Física en 1979.

E

PROPIEDAD ASINTÓTICA DE $I(\lambda t)$: ENFOQUE ALTERNATIVO

En el Capítulo 4, se probó el comportamiento que tiene la funcional $I(\lambda t)$, definida en la ecuación (2.1.3) y caracterizada en el Lema 2.1.1, de decrecer asintóticamente a 0, con ayuda del Análisis Matemático. Sin embargo, existe otra forma de obtener el resultado y es a partir del hecho de que el proceso de Ornstein–Uhlenbeck (2.1.1), el cual define a la ecuación (2.1.3) es ergódico. Por supuesto, esta manera de probar el ya antes mencionado comportamiento de $I(\lambda t)$ requiere de una teoría que va más allá del Análisis Matemático. No obstante, es posible hacerlo con un grado de complejidad no tan elevado.

E.1 PROCESOS DE ITÔ ERGÓDICOS

Los siguientes conceptos y resultados fueron revisados en [Kloeden–Platen, 1995, p.154].

Definición E.1.1. Procesos de Itô ergódicos

Se dice que un proceso de Itô $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es ergódico si tiene una única medida de probabilidad P tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP(x)$$

casi seguramente, para cualquier función P – integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier condición inicial determinista X_0 .

Ya que usualmente, verificar que un proceso de Itô es ergódico a partir de la definición es severamente complicado, existen condiciones de suficiencia para garantizar dicha propiedad.

En particular, las que se describen en [Kloeden–Platen, 1995, Teorema 4.8.8], el cual hace referencia a Hasminski (1980) “*Stochastic Stability of Differential Equations*”, se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema E.1.1. Procesos de Itô ergódicos

Supóngase que los coeficientes de deriva y difusión, a y b respectivamente, de un proceso de Itô $\{X_t\}_{t \geq 0}$ son suaves y de derivada acotada de cualquier orden. También supóngase que b es acotado y que existen $\beta > 0$ y un compacto $I \subset \mathbb{R}$ tales que, $x a(x) \leq -\beta x^2$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus I$. Entonces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es ergódico.

E.2 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE $I(\lambda t)$

En el Teorema E.2.1 se probará que $I(\lambda t) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right]$ decrece asintóticamente a 0 para toda $t > 0$ y toda $\lambda > 0$, donde $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ es el proceso de Ornstein–Uhlenbeck de la ecuación (2.1.1). Para ello se necesitará un resultado previo, el cual se expondrá en el Lema E.2.1.

Lema E.2.1. Ergodicidad del proceso de Ornstein–Uhlenbeck

El proceso de Ornstein–Uhlenbeck $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ de la ecuación (2.1.1) es ergódico.

Demostración: Este resultado se probará haciendo uso del Teorema E.1.1.

Sean $a(x) = \delta(\theta - x)$ y $b(x) = k$. Entonces, a y b claramente satisfacen las condiciones de suavidad y acotamiento del Teorema E.1.1.

Luego, $x a(x) \leq -\beta x^2$ para alguna $\beta > 0$ si y sólo si $(\beta - \delta)x^2 + \delta\theta x \leq 0$.

Ahora bien, para aplicar el Teorema E.1.1 solamente hace falta encontrar un compacto $I \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus I$ se cumpla que $(\beta - \delta)x^2 + \delta\theta x \leq 0$. Entonces, notando que ésta es una parábola, debe elegirse $0 < \beta < \delta$ para que tenga ramas hacia abajo y así, el compacto que se busca es el intervalo cerrado $\left[0, -\frac{\delta\theta}{\beta - \delta}\right]$ donde, 0 y $-\frac{\delta\theta}{\beta - \delta}$ son las raíces del polinomio $(\beta - \delta)x^2 + \delta\theta x \leq 0$.[†]

Por lo tanto, $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ es ergódico. ■

[†] Si se eligiera $\beta > \delta$, la parábola tendría ramas hacia arriba y no existiría el compacto requerido.

Teorema E.2.1. Propiedad asintótica de $I(\lambda t)$

Dado el proceso de Ornstein–Uhlenbeck $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ de la ecuación (2.1.1), se tiene que la función $I(\lambda t) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right]$ decrece asintóticamente a 0 para toda $t > 0$ y toda $\lambda > 0$.

Demostración:

Por el Lema E.2.1, $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ es ergódico. Luego, por la Definición E.1.1, tiene una única medida de probabilidad P tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\sigma_s) ds = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP(x)$$

casi seguramente, para cualquier función P – integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier condición inicial determinista X_0 .

Recordando que, $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ es gaussiano y tiene distribución límite $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{k^2}{2\delta}\right)$ entonces, ésta es la medida de probabilidad P .

Por otro lado, si $f(x) = x^2$ entonces $f \in L_1 \left[\mathcal{N}\left(\theta, \frac{k^2}{2\delta}\right) \right]$ ya que proporciona el segundo momento (finito) de dicha medida, porque es gaussiana.

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds = \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{N}\left(\theta, \frac{k^2}{2\delta}\right) = \sqrt{\frac{\delta}{k^2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp \left\{ -\delta \left(\frac{x-\theta}{k} \right)^2 \right\} dx$$

casi seguramente.

Pero $\int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{N}\left(\theta, \frac{k^2}{2\delta}\right) > 0$ así que $\int_0^t \sigma_s^2 ds \uparrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, casi seguramente.

De donde, $\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \downarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, casi seguramente.

Además, es claro que $\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} < 1$ porque $\lambda > 0$, teniendo finalmente que

$$I(\lambda t) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right] \downarrow 0$$

casi seguramente, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. ■

☉ **Observación E.2.1.** El Teorema E.2.1 fue enunciado y probado usando el proceso de O–U $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ y no el de volatilidad $\{|\sigma_t|\}_{t \geq 0}$. Sin embargo, dado que la función P – integrable que se usó fue $f(x) = x^2$, no cambia el análisis ni el resultado.

F

FÓRMULA DE ITÔ

La fórmula de Itô es una identidad utilizada en el cálculo de Itô para encontrar la diferencial de una función dependiente del tiempo de un proceso estocástico. Además, es el análogo en cálculo estocástico del *Teorema Fundamental del Cálculo*. Típicamente, se memoriza mediante la formación de la expansión en serie de Taylor de la función bajo su segunda derivada y la identificación del cuadrado de un incremento en el proceso de Wiener con un incremento en el tiempo.

La fórmula de Itô, se refiere a veces como teorema de Doebelin–Itô en reconocimiento a la labor recientemente descubierta de Wolfgang Doebelin.

Una prueba formal de esta fórmula se basa en tomar el límite de una sucesión de variables aleatorias, el cual implica una serie de detalles técnicos. En su lugar, se esbozará la manera en que se puede derivar la fórmula de Itô expandiendo en una serie de Taylor y aplicando reglas del cálculo estocástico.

Supóngase que X_t es un proceso de Itô que satisface la EDE,

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Si $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ entonces, su expansión en serie de Taylor es,

$$df(t, x) = D_0^1 f(t, x) dt + D_1^1 f(t, x) dx + \frac{1}{2} D_1^2 f(t, x) (dx)^2 + \dots$$

Haciendo las sustituciones $x = X_t$ y $dx = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ se tiene que,

$$df(t, x) = D_0^1 f(t, x) dt + D_1^1 f(t, x) (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2} D_1^2 f(t, x) \sigma^2 dt + \dots$$



Kiyoshi Itô
(1915-2008)

Matemático japonés cuyo trabajo se llama ahora cálculo de Itô. El concepto básico de este cálculo es la integral de Itô, y el más importante de los resultados es la fórmula de Itô (1951).

F FÓRMULA DE ITÔ

Note que, la variación cuadrática del proceso es,

$$\langle dx \rangle^2 = \mu_t^2 \langle dt \rangle^2 + 2 \mu_t \sigma_t \langle dt dW_t \rangle + \sigma_t^2 \langle dW_t \rangle^2 = \sigma^2 dt$$

ya que en el límite, cuando $dt \rightarrow 0$, $\langle dt \rangle^2 \rightarrow 0$ y $\langle dt dW_t \rangle \rightarrow 0$, ambos más rapido que $\langle dW_t \rangle^2$; enviando $\langle dt \rangle^2$ y $\langle dt dW_t \rangle$ a 0 y sustituyendo $\langle dW_t \rangle^2$ por dt (formalmente, esto es conocido como tabla de Itô, Tabla F.1.1) se tiene que, agrupando términos,

$$df(t, x) = \left(D_0^1 f(t, x) + \mu_t D_1^1 f(t, x) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 D_1^2 f(t, x) \right) dt + \sigma_t D_1^1 f(t, x) dW_t$$



Wolfgang Doeblin
(1915-1940)

Matemático franco – alemán cuyo trabajo adelantado sobre procesos de Markov se reveló en el 2000, mismo que se le reconoció otorgándole el mérito simultaneo a Itô en la fórmula de Doeblin–Itô.

F.1 FÓRMULA DE ITÔ

De modo más general, aunque no el más general, se enuncia la Fórmula de Itô en el siguiente teorema.

Teorema F.1.1. Fórmula de Itô

Sean $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ un proceso de Itô n – dimensional y $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clase $C^{1,2}$ entonces, $f(t, X)$ es un proceso de Itô cuyas k componentes están dadas por,

$$df_k(t, X) = D_0^1 f_k(t, X) dt + \sum_i D_i^1 f_k(t, X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{i,j}^2 f_k(t, X) dX^i dX^j$$

donde, $\langle dW^i dW^j \rangle = \delta_{ij} dt$, $\langle dW^i dt \rangle = \langle dt dW^i \rangle = 0$ y $\langle dt \rangle^2 = 0$, (Tabla F.1.1).

Demostración: Véase [Øksendal, 2003, Capítulo 4, pp.48-49]. ■

Tabla F.1.1: Tabla de Itô

•	dt	dW^i	dW^j
dt	0	0	0
dW^i	0	dt	0
dW^j	0	0	dt

■ Comentario F.1.1. La Fórmula de Itô se emplea extensamente en matemáticas financieras, y una de sus mayores aplicaciones conocidas es en la derivación de la Fórmula de Black-Scholes–Merton para valuación de opciones.[†]

[†] Para más datos interesantes de la Fórmula de Itô, véase [Itô, 1951].

G

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

El método de separación de variables se refiere a un procedimiento para encontrar una solución completa particular para ciertos problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales como serie cuyos términos son el producto de funciones que tienen las "variables separadas". Es uno de los métodos más productivos de la física matemática para buscar soluciones a problemas físicos descritos mediante ecuaciones diferenciales de derivadas parciales.

El método sirve para encontrar soluciones parciales completas, no soluciones generales, dependientes de un conjunto numerable de constantes arbitrarias, lo cual permite resolver tanto problemas de valor inicial como problemas de frontera e incluso problemas que involucran condiciones de ambos tipos.

El mismo nombre se aplica a la forma de buscar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de cierto tipo que permite resolverlas por cuadraturas de funciones que contienen las variables separadas.

Más aún, el mismo nombre es usado para buscar soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, solamente que en este caso además se debe hacer uso de la fórmula de Itô (Teorema F.1.1).

G.1 SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA EDE

Considérense $\{X_t\}_{t \geq 0}$, e $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ dos PE relacionados por la EDE,

$$dY_t = \mu Y_t dt + X_t Y_t dW_t \quad (\text{G.1.1})$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un MB y μ una constante.

Nótese que, suponiendo que $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ sea un proceso positivo, la EDE (G.1.1) puede reescribirse como,

$$\frac{1}{Y_t} dY_t = \mu dt + X_t dW_t \quad (\text{G.1.2})$$

Aplicando la fórmula de Itô a la EDE (G.1.2) con la función de clase $\mathcal{C}^{1,2}$, $f(t, y) = f(y) = \ln \{y\}$ se obtiene,

$$\begin{aligned} df(y) &= D_0^1 f(y) dt + D_1^1 f(y) dy + \frac{1}{2} D_1^2 f(y) (dy)^2 \\ &= \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (dy)^2 \\ &= \frac{1}{y} (\mu y dt + x y dW_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} x^2 y^2 dt \\ &= \mu dt + x dW_t - \frac{1}{2} x^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} x^2 \right) dt + x dW_t \end{aligned}$$

Entonces,

$$f(y) = f(y_0) + \int_0^t \mu - \frac{1}{2} x^2 ds + \int_0^t x dW_s$$

Así,

$$\ln \{Y_t\} = \ln \{Y_0\} + \int_0^t \mu - \frac{1}{2} X_s^2 ds + \int_0^t X_s dW_s$$

Por lo tanto,

$$Y_t = Y_0 \exp \left\{ \int_0^t \mu - \frac{1}{2} X_s^2 ds + \int_0^t X_s dW_s \right\}$$

es solución de la EDE (G.1.1) con la condición inicial Y_0 .

H

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio temporal o espacial y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformaciones de cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.



J.B. Joseph Fourier
(1768-1830)

Matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el que consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor.

H.1 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definición H.1.1. La transformada de Fourier

Dada una función $f \in L_1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier denotada por $\mathcal{F}\{f\}$ es una función g tal que,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-i\omega t\} dt$$

y la respectiva transformación inversa es,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega$$

Lema H.1.1. Propiedad de desfase

Sea f una función con transformada de Fourier g . Si f tiene un desfase t_0 en su dominio entonces,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \exp\{-i\omega t_0\}$$

Demostración:

Sea $s = t - t_0$ entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \exp\{-i \omega t\} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\{-i \omega (t_0 + s)\} ds \\ &= \mathcal{F}\{f(s)\} \exp\{-i \omega t_0\} \end{aligned}$$

■

Teorema H.1.1. Transformada de Fourier de una gaussiana

Sea $f \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_0)$ entonces, $g(\omega) = \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2 - i \omega x_0\right\}$.

Demostración:

Sea $f(s) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)^2\right\}$ entonces,

$$\mathcal{F}\{f(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\{-i \omega s\} ds = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2\right\}$$

Luego, por el lema H.1.1,

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \exp\{-i \omega x_0\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2\right\} \exp\{-i \omega x_0\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2 - i \omega x_0\right\} \end{aligned}$$

■

Corolario H.1.1. Sea $f \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_0)$ donde $x_0 = -\frac{1}{2} \sigma^2 t$ y $\sigma_0 = \sigma \sqrt{t}$ entonces,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} (\omega^2 + i \omega) \sigma^2 t\right\}$$

Demostración: Se sigue del Teorema H.1.1.

■

EXISTENCIA DE LA DENSIDAD DE α_t

Con base en las referencias: [Lamperti, 1997, Proposición, p.20] y [Nualart, 2006, Teorema 2.1.1, p.8], en la Proposición I.1.1 se bosquejará la prueba de la existencia de densidad de la variable aleatoria $\alpha_t = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)^{1/2}$, utilizada en la demostración del Teorema 3.1.1, Capítulo 3. En dicha proposición se usará el proceso de O–U $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ y no $\{|\sigma_t|\}_{t \geq 0}$. Sin embargo, el resultado no cambia ya que α_t es definida igualmente por σ_s^2 que por $|\sigma_s|^2$.

I.1 EXISTENCIA DE LA DENSIDAD DE α_t

Proposición I.1.1. Sea $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Ornstein–Uhlenbeck centrado, con función de covarianza para $s, t \geq 0$, $C(t, s) = \frac{k^2}{2\delta} \left(e^{-\delta(t-s)} - e^{-\delta(t+s)} \right)$. Entonces, la variable aleatoria $\alpha_t = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)^{1/2}$ tiene densidad, para toda $t \geq 0$.

Demostración: Bosquejo.

Es claro que α_t tiene densidad si y sólo si

$$\beta_t := \int_0^t \sigma_s^2 ds = \int_0^T \sigma_s^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s) ds \quad (\text{I.1.1})$$

tiene densidad. Así que hay que demostrar la existencia de la densidad de esta variable aleatoria.

Sean $0 \leq u, s < T$. Como el proceso de Ornstein–Uhlenbeck centrado satisface

$$\sigma_s = k \int_0^s e^{-\delta(s-r)} dW_r = k \int_0^T e^{-\delta(s-r)} \mathbb{1}_{[0,s]}(r) dW_r \quad (\text{I.1.2})$$

entonces, por [Nualart, 2006, Definición 1.2.1, p.24], para cualquier $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} D_u \sigma_s &= k e^{-\delta(s-u)} \mathbb{1}_{[0,s]}(u) \\ &= \begin{cases} k e^{-\delta(s-u)} & \text{si } 0 \leq u \leq s \\ 0 & \text{si } u > s \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.1.3})$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} D_u \sigma_s^2 &= 2\sigma_s D_u \sigma_s \\ &= 2k\sigma_s e^{-\delta(s-u)} \mathbb{1}_{[0,s]}(u) \\ &= \begin{cases} 2k\sigma_s e^{-\delta(s-u)} & \text{si } 0 \leq u \leq s \\ 0 & \text{si } u > s \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.1.4})$$

Así pues, para cualquier suma de Riemann de (I.1.1)

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{s_i}^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \quad (\text{I.1.5})$$

donde $\{s_i\}_{i=1}^n$ es una partición fija de $[0, T]$, tenemos,

$$\begin{aligned} D_u \sum_{i=1}^n \sigma_{s_i}^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) &= \sum_{i=1}^n (D_u \sigma_{s_i}^2) \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2k\sigma_{s_i} e^{-\delta(s_i-u)} \mathbb{1}_{[0,s_i]}(u) \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2k\sigma_{s_i} e^{-\delta(s_i-u)} \mathbb{1}_{[u,T]}(s_i) \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2k\sigma_{s_i} e^{-\delta(s_i-u)} \mathbb{1}_{[u,T] \cap [0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \end{aligned} \quad (\text{I.1.6})$$

Por otro lado, con ayuda de [Lamperti, 1997, Proposición, p.20], cuando la norma de la partición tiende a cero,

$$\lim_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{s_i}^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) = \int_0^T \sigma_s^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(s) ds \quad (\text{I.1.7})$$

y,

$$\begin{aligned} \lim_{i=1}^n 2k \sum_{i=1}^n \sigma_{s_i} e^{-\delta(s_i-u)} \mathbb{1}_{[u,T] \cap [0,t]}(s_i) (s_{i+1} - s_i) \\ &= 2k \int_0^T \sigma_s e^{-\delta(s-u)} \mathbb{1}_{[u,T] \cap [0,t]}(s) ds \\ &= 2k \int_{u \wedge t}^t \sigma_s e^{-\delta(s-u)} ds \end{aligned} \quad (\text{I.1.8})$$

donde las convergencias en (I.1.7) y (I.1.8) son en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y hay que observar que las funciones

$$\mathbb{1}_{[u, T] \cap [0, t]} \quad \text{y} \quad \mathbb{1}_{[u \wedge t, t]},$$

son iguales casi dondequiera, respecto a la medida de Lebesgue.

Por otra parte, como D_u es un operador cerrado, entonces β_t está en el dominio de D_u y

$$D_u \beta_t = 2k \int_{u \wedge t}^t \sigma_s e^{-\delta(s-u)} ds. \quad (\text{I.1.9})$$

De acuerdo con [Nualart, 2006, p.81], la matriz de Malliavin (que en este caso es una matriz de 1×1) está dada por

$$\begin{aligned} \langle D\beta_t, D\beta_t \rangle_H &= 4k^2 \int_0^T \left(\int_{u \wedge t}^t \sigma_s e^{-\delta(s-u)} ds \right)^2 du \\ &= 4k^2 \int_0^t \left(\int_u^t \sigma_s e^{-\delta(s-u)} ds \right)^2 du \end{aligned} \quad (\text{I.1.10})$$

donde $H = L_2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$. Ahora, hay que demostrar que la matriz de Malliavin es positiva definida casi seguramente, para lo cual, sean

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \langle D\beta_t, D\beta_t \rangle_H = 0 \right\} := \left\{ \omega \in \Omega : \langle D\beta_t, D\beta_t \rangle_H(\omega) = 0 \right\} \\ B &:= \left\{ \omega \in \Omega : \int_u^t \sigma_s(\omega) e^{-\delta(s-u)} ds = 0 \quad \forall u \in [0, T] \right\} \\ C &:= \left\{ \omega \in \Omega : \sigma_u(\omega) = 0 \quad \forall u \in [0, T] \right\} = \bigcap_{u \in [0, t]} \{ \sigma_u = 0 \} \end{aligned} \quad (\text{I.1.11})$$

Así, la ecuación (I.1.10), el hecho de que el proceso de Ornstein–Uhlenbeck tiene trayectorias continuas y el Teorema Fundamental del Cálculo, nos garantizan que

$$A \subset B \subset C \quad (\text{I.1.12})$$

Éste último, es un evento de probabilidad cero, pues el proceso de Ornstein Uhlenbeck es gaussiano y cada una de sus *v.a.*, tiene varianza estrictamente positiva. Se deduce que la matriz de Malliavin (I.1.10) es positiva casi seguramente. Así, debido a [Nualart, 2006, Teorema 2.1.1, p.81], se concluye que β_t tiene densidad. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [Ball–Roma, 1994] Ball C, Roma A, *Stochastic Volatility Option Pricing*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29(4):589–607, December 1994. (Citado en la página 7)
- [Bormetti *et al*, 2010] Bormetti G, Cazzola V and Delpini D, *Option Pricing under Ornstein-Uhlenbeck Stochastic Volatility: A Linear Model*. International Journal of Theoretical Applied Finance, 7:1047, 2010. (Citado en la página 7)
- [Doporto–Michelena, 2011] Doporto I, Michelena G, *La volatilidad de los precios de los commodities en el caso de los productos agrícolas*. Revista del comercio exterior e integración, 19:35–53, 2011. (Citado en la página 1)
- [Durrett, 1984] Durrett R, *Stochastic Calculus: A Practical Introduction*. Wadsworth Advanced Books & Software, 1984. (No citado)
- [Etheridge, 2002] Etheridge A, *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University, 2002. (No citado)
- [Freidlin 1985] Freidlin M, *Functional Integration and Partial Differential Equations*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985. (No citado)
- [Ghosh, 2010] Ghosh A P, *Backward and Forward Equations for Diffusion Processes*. Iowa University, 2010. (No citado)
- [Heston, 1993] Heston S L, *A Closed–form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. Review of Financial Studies, 6(2):327–343, 1993. (Citado en la página 7)
- [Hull, 2008] Hull J, *Options Futures and other Derivatives*. Pearson Prentice Hall, 2008. (Citado en la página 7)

Bibliografía

- [Itô, 1951] Itô K, *On Stochastic Differential Equations: Memoirs*. American Mathematical Society, 4: 151, 1951. (Citado en la página 72)
- [Kloeden–Platen, 1995] Kloeden P E, Platen E, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1995. (Citado en las páginas: 67 y 68)
- [Lamperti, 1997] Lamperti J, *Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory*. Springer, 1997. (Citado en las páginas: 77 y 78)
- [Lorenzo, 1996] Lorenzo R, *La volatilidad: Modelización en la valoración de opciones y estimadores*. Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa. 2(1):59–83, 1996. (Citado en las páginas: 1 y 2)
- [Nualart, 2006] Nualart D, *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. (Citado en las páginas: 77, 78 y 79)
- [Øksendal, 2003] Øksendal B, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003. (Citado en las páginas: 10 y 72)
- [Fouque *et al*, 2000] Fouque J P, Papanicolaou G, Sircar K R, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University, 2000. (Citado en las páginas: 6 y 7)
- [Revuz–Yor, 2005] Revuz D, Yor M, *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2005. (Citado en la página 25)
- [Ruiz de Chavez–García, 2002] Ruiz de Chávez J, García J, *Tiempos Locales y Excursiones del Movimiento Browniano*. Universidad Autónoma Metropolitana Plantel Iztapalapa, 2002. (No citado)
- [Scott, 1987] Scott L O, *Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and Application*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22(4):419–438, December 1987. (Citado en las páginas: 2 y 7)
- [Sharma, 2010] Sharma S N, Patel H G, *The Fokker-Planck equation, Stochastic Control*. Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology, Surat, India, 2010. (No citado)

- [Shreve I, 2008] Shreve S, *Stochastic Calculus for Finance I: Binomial Asset Pricing Model*, volume I of *Stochastic Calculus for Finance*. Springer, 2008. (Citado en la página 51)
- [Shreve II, 2008] Shreve S, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, volume II of *Stochastic Calculus for Finance*. Springer, 2008. (Citado en las páginas: 49, 51, 55, 56, 57, 61 y 62)
- [Stein–Stein, 1991] Stein E M, Stein J C, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*. *The Review of Financial Studies*, 4: 727-752, 1991. (Citado en las páginas: 2, 7, 9, 10, 21, 22, 23, 27 y 46)
- [Wiener, 1993] Wiener N, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993. (No citado)